



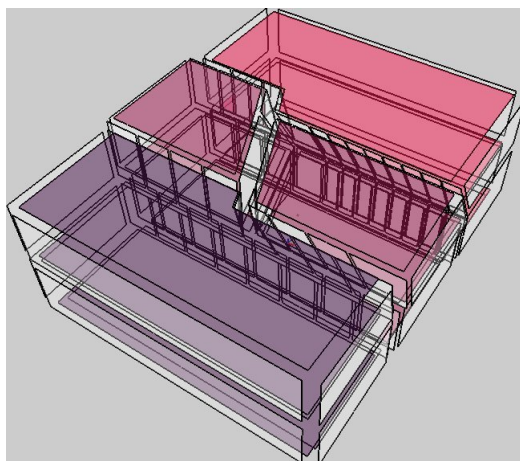
**Master Sciences et Technologies**

mention STIC (Sciences et Technologie de l'Information et de la Communication)

**Simulation d'évolution de couches géologiques**

**Pierre-François LÉON**

<pierrefrancois.leon@laposte.net>



Mémoire de Stage recherche M2, spécialité Fondements de l'Ingénierie de  
l'Informatique et de l'Image

effectué sous la direction de :

M. Pascal LIENHARDT

M. Philippe MESEURE

M. Xavier SKAPIN

au Laboratoire Signal, Image, Communications, FRE n°2731  
Université de Poitiers - UFR Sciences Fondamentales et Appliquées



Poitiers, juillet 2005

---

## Remerciements

Je remercie Pascal Lienhardt, directeur du laboratoire SIC, pour son accueil.

Je remercie sincèrement Pascal Lienhardt, Philippe Meseure et Xavier Skapin, pour leur encadrement, leur disponibilité, et leurs conseils tant à la réalisation des travaux qu'à la rédaction du mémoire.

Mes remerciements vont aussi à Guillaume Damiand pour ses conseils avisés sur le modeleur Moka et ses blagues sur le *getX()*.

Je remercie Gill Subrenat, responsable de la Licence Informatique de Poitiers, d'avoir accepté ma candidature il y a trois ans.

Merci à toute la promotion de Master 2 Image pour cette année passée et, en particulier, à Mathieu et Sébastien, mes compères de bureau, pour leur discussions passionnées.

Je remercie tout particulièrement ma mère et mon beau père Michel, pour leur soutien, leur patience ainsi que pour l'éducation qu'ils m'ont apportée. Merci pour votre appui inconditionnel dans la poursuite de mes études.

Enfin, je remercie Sonia, ma compagne, pour m'avoir soutenu tout au long de mon stage avec patience et compréhension.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Contexte du travail</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
2.1	Définitions . . . . .	6
2.2	Travaux antérieurs . . . . .	8
2.3	Exposé du problème et approche proposée . . . . .	10
2.4	Déroulement du stage et méthodologie . . . . .	12
2.5	Plan . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Étude du problème en <math>2D + 1</math></b>	<b>13</b>
3.1	Expression des phénomènes en termes d'opérations topologiques .	13
3.1.1	Sédimentation . . . . .	13
3.1.2	Érosion . . . . .	14
3.1.3	Faïlle . . . . .	16
3.1.4	Glissement . . . . .	17
3.2	Définition des opérations topologiques de base . . . . .	20
3.2.1	Rappel sur les G-Cartes . . . . .	20
3.2.2	Éclatement d'un sommet en arête . . . . .	22
3.2.3	Éclatement d'un chemin d'arêtes en face . . . . .	26
3.2.4	Scission d'une face . . . . .	30
3.2.5	Contraction d'une arête en sommet . . . . .	32
3.3	Coupe temporelle . . . . .	32
3.3.1	Hypothèses . . . . .	33
3.3.2	Algorithme utilisé . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Mise en œuvre et résultats</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>41</b>
5.1	Conclusion . . . . .	41
5.2	Perspectives . . . . .	41
5.2.1	Terminer le $2D + 1$ . . . . .	41
5.2.2	Identification des couches . . . . .	41
5.2.3	Le plongement . . . . .	41
5.2.4	Approche multi-échelle . . . . .	42
5.2.5	Évolution du modèle en $3D + 1$ . . . . .	42
<b>A</b>	<b>Extraits de code</b>	<b>43</b>
A.1	Opération d'éclatement d'un sommet en arête en $2D + 1$ . . . . .	43
A.2	Opération de scission de face en $2D + 1$ . . . . .	45

## Bibliographie

47

## Table des figures

1	Couches et Blocs . . . . .	6
2	Phénomène de sédimentation et d'érosion . . . . .	7
3	Exemple de faille. Le bloc $b_1$ est découpé en deux blocs, $b'_1$ et $b''_1$ . . . . .	8
4	Exemple de glissement. Le bloc $b_4$ glisse le long de la faille $F$ . . . . .	8
5	Planche d'un profil des montagnes du Jura . . . . .	9
6	Exemple d'interprétation d'un SEG grâce au co-raffinement . . . . .	9
7	Application de la syntaxe géologique. . . . .	10
8	Objet spatio-temporel . . . . .	11
9	Sédimentation : création d'une nouvelle couche $b_4$ . . . . .	13
10	Sédimentation avec augmentation du volume de la couche $b_4$ . . . . .	14
11	Sédimentation avec agrégation des blocs $b_4$ et $b_5$ en $b'_4$ . . . . .	15
12	Érosion du bloc $b_4$ . . . . .	15
13	Disparition complète du bloc $b_4$ . . . . .	16
14	Différentes solutions de contractions de la face gris foncé dans la figure en haut à gauche. . . . .	17
15	Décomposition en opérations topologiques de la disparition totale d'une face. . . . .	18
16	Création d'une faille. . . . .	18
17	Glissement de $b_4$ par rapport à $b_1$ . . . . .	19
18	Division du sommet en deux. . . . .	19
19	Translation du sommet gris. . . . .	19
20	Contraction de l'arête grise. . . . .	20
21	Exemple de quasi-variété et de non quasi-variété . . . . .	21
22	À gauche une figure géométrique, à droite sa représentation sous forme de 2-G-Carte. . . . .	21
23	Exemple d'extrusion. . . . .	22
24	Éclatement d'un sommet en arête ( $2D$ ). . . . .	23
25	Éclatement d'un sommet en arête ( $2D + 1$ ). . . . .	25
26	Éclatement d'un sommet en arête : vue éclatée. . . . .	26
27	Éclatement d'un chemin d'arêtes en face . . . . .	27
28	Volume à insérer représentant l'éclatement d'un chemin d'arêtes en face . . . . .	28
29	Vue éclatée de l'objet spatio-temporel représentant l'éclatement d'un chemin d'arêtes en face . . . . .	29
30	Scission d'une face . . . . .	30
31	Objet spatio-temporel représentant la scission d'une face. . . . .	31

## TABLE DES FIGURES

---

32	Contraction d'arête . . . . .	33
33	Coupe en un instant correspondant à un événement. . . . .	34
34	Calcul du plongement des arêtes spatio-temporelles intersectées. .	36
35	Création d'une sédimentation . . . . .	38
36	Création d'une faille . . . . .	39
37	Création d'un glissement . . . . .	40

## 1 Contexte du travail

La géologie (du grec « géo » signifiant terre) est la science qui étudie l'histoire du globe terrestre et notamment la nature et l'évolution des sous-sols.

Le géologue fait appel à toutes les branches de la science qui étudient la Terre. Il collabore étroitement avec l'astronome, le physicien, le biologiste. La modélisation de sous-sol est un domaine de recherche en plein essor, qui nécessite des compétences en modélisation géométrique et en géologie. Une collaboration étroite sur ce thème se développe depuis plusieurs années entre le laboratoire SIC (Signal Image et Communications) de Poitiers, l'école des Mines de Paris (EMP) et l'Institut Français du Pétrole (IFP).

L'un des objectifs poursuivis à travers cette collaboration est de permettre aux géologues de simuler des scénarii d'évolution de couches géologiques afin de les valider. La validation peut passer par l'examen de règles géologiques et la simulation physique des phénomènes. Notre travail se situe dans cet objectif. Le but de cette étude est de proposer un modèle d'animation adapté à la géologie, permettant au géologue d'élaborer des scénarii d'évolutions, de les exécuter et de visualiser les animations.

Mes activités de recherche se déroulent au sein du laboratoire SIC dans le cadre de mon stage de Master Recherche sous l'encadrement de Philippe Meseure, Xavier Skapin et Pascal Lienhardt.

## 2 Introduction

Ce document traite d'animation de couches géologiques. Pour comprendre cette étude, il est nécessaire de présenter quelques rudiments de géologie. Nous poursuivons en présentant également la problématique liée à la modélisation et l'animation de structures géologiques.

### 2.1 Définitions

Nous définissons ici, de manière succincte, les termes géologiques qui vont être rencontrés lors de la lecture de ce document.

Une *scène géologique* est un ensemble de *couches* empilées, une couche étant définie comme une zone dont certaines caractéristiques sont similaires (par exemple : composition, âge). Par extension, l'air, la mer... apparaissent comme des couches particulières. Un *horizon* est défini comme étant la limite entre deux couches, assimilée à une surface. Une *faille* est une fissure (assimilée à une surface), entraînant souvent la cassure de couches géologiques. Enfin, un *bloc* géologique, délimité par un ensemble de failles et d'horizons, est un volume unitaire d'une scène géologique.

La figure 1 illustre les termes que nous venons de définir. Nous retrouvons la notion de couche et de blocs avec les blocs  $b_1$  et  $b_3$  qui appartiennent à la même couche. Nous retrouvons aussi la notion d'horizon avec les horizons  $h_1$  et  $h_2$ . Nous pouvons observer la discontinuité de  $h_2$

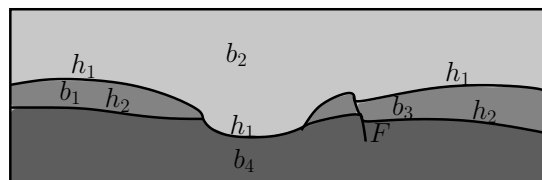


FIG. 1 – Exemple de couches et de blocs

Une scène géologique n'est pas statique, elle résulte la plupart du temps d'une longue évolution. Notre étude cette évolution. Cette dernière est due à un ensemble de phénomènes géologiques dont nous avons identifié les plus représentatifs : la sédimentation, l'érosion, la création de failles, la déformation et le glissement de blocs. La sédimentation correspond à un dépôt de matière pouvant entraîner la création d'une nouvelle couche ou l'augmentation du volume d'une couche existante (figure 2). L'érosion, résultant de l'action combinée de l'atmosphère, de l'hydrosphère et de la biosphère sur la topographie de la terre, est l'action de destruction de sédiments ainsi que leur transport. Cette action peut entraîner la

disparition complète d'un bloc. La création de failles correspond, quant à elle, à la formation de fissures au sein d'un bloc géologique. Elle peut aboutir, dans un cas extrême, à la séparation du bloc, suivi éventuellement d'un glissement (figure 3). Le glissement naît du mouvement d'un bloc par rapport à un ou tout un ensemble de blocs (figure 4). Ces phénomènes aboutissent à des modifications importantes de la structure des couches allant jusqu'à la séparation d'une couche en blocs déconnectés.

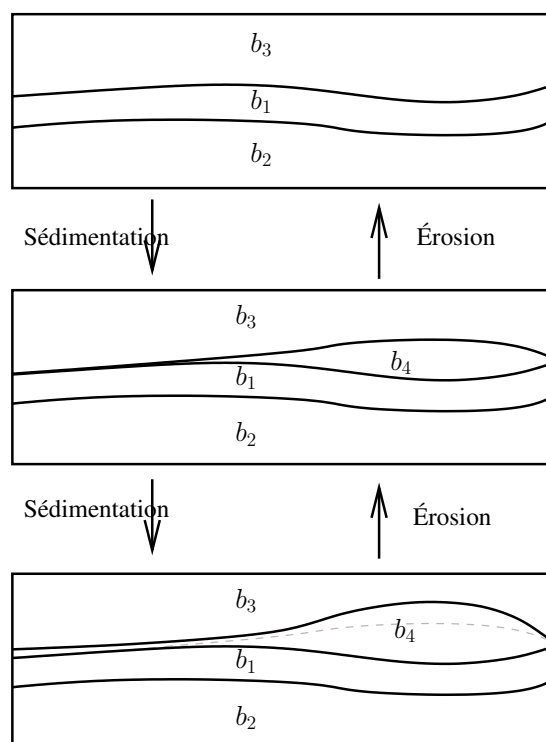


FIG. 2 – Phénomène de sédimentation (de haut en bas) et phénomène d'érosion (de bas en haut)

La figure 5 montre un exemple de sous-sol ayant subi plusieurs phénomènes décrits ci-dessus et illustre la complexité de modélisation nécessaire à la représentation de celui-ci. Nous trouvons les couches nommées « U.Jura, M.Jura, L.Jura et Trias ». Nous pouvons observer des phénomènes d'érosion, de sédimentation et de déformation. Dans la droite du schéma, nous observons deux failles qui ont séparé les couches en plusieurs blocs. Ces blocs ont d'ailleurs glissé les uns par rapport aux autres. Nous constatons ici que le géologue travaille à plusieurs échelles, en regroupant parfois plusieurs couches subissant le même phénomène.

Pour parvenir à ce schéma, le géologue se base sur un ensemble de mesures



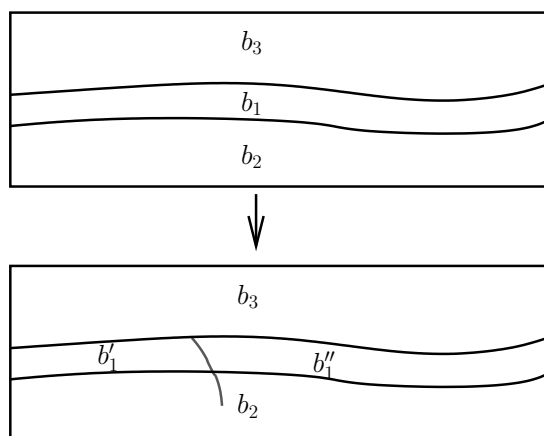


FIG. 3 – Exemple de faille. Le bloc  $b_1$  est découpé en deux blocs,  $b'_1$  et  $b''_1$ .

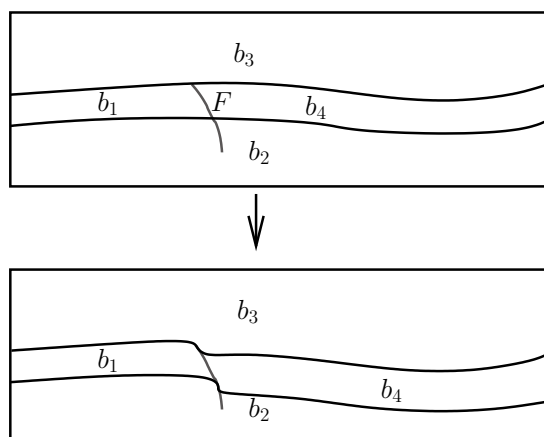


FIG. 4 – Exemple de glissement. Le bloc  $b_4$  glisse le long de la faille  $F$ .

ponctuelles (relevés topographiques, relevés sismiques, carottages) et sur son savoir. L'expertise du géologue consiste à pouvoir établir une constitution hypothétique du sous-sol à partir de relevés mais également d'une connaissance a priori de l'histoire du sous-sol.

## 2.2 Travaux antérieurs

Schneider[Sch02] représente le sous-sol par un ensemble de surfaces qui s'intersectent : elles correspondent aux horizons et aux failles, et délimite les blocs géologiques. Ce calcul d'intersections s'effectue en utilisant la bibliothèque CAS.CADE

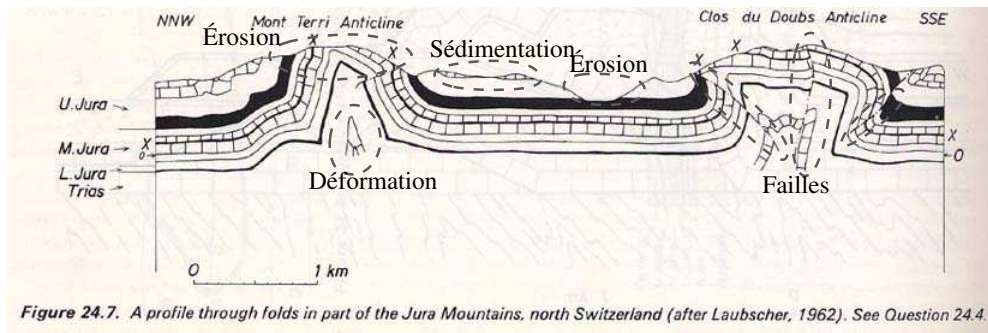


FIG. 5 – Planche représentant un profil des plis d’une partie des montagnes du Jura.

sur un plongement en surfaces paramétriques. Dans son approche, les horizons et les failles traversent la scène de part en part. Une autre approche proposée par Guiard [BSP<sup>+</sup>05] à l’EMP, consiste à utiliser un plongement linéaire, les surfaces sont alors modélisées par subdivisions de surfaces composées de faces planes aux arêtes rectilignes. Les failles et les horizons peuvent s’intersecter sans forcément couper un bloc, ce qui permet par exemple l’existence de failles pendantes. Ce modèle ne traite pas de l’évolution des surfaces (figure 6). Il repose sur un modèle topologique de n-G-Cartes[Lie89] étendu[Sch02].

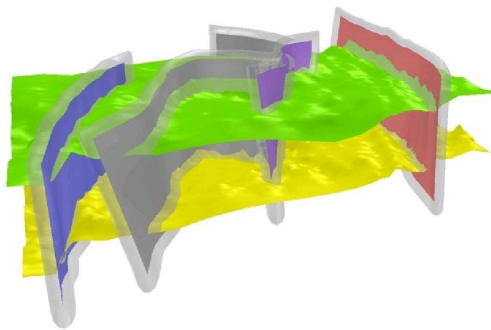


FIG. 6 – Exemple d’interprétation d’un SEG grâce au co-raffinement

Perrin[Per98] a proposé une syntaxe géologique permettant de formaliser des phénomènes géologiques et leur succession au cours du temps. Ses règles assurent la consistance géologique d’un modèle 3D. La règle fondamentale est que chaque surface a un âge bien déterminé, et que deux surfaces s’intersectant résultent en une surface interrompue par l’autre (figure 7).

Le schéma d’évolution géologique (SEG) est la description d’une interprétation géologique du modèle à construire. Il se présente sous la forme d’un graphe

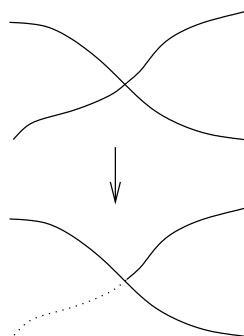


FIG. 7 – Application de la syntaxe géologique.

acyclique orienté. Les nœuds représentent des surfaces ou des sous-SEG correspondant à un plus grand niveau de détails. Les arcs représentent soit une relation chronologique (par exemple, une faille est « antérieure à » une autre faille) ; soit une relation topologique basée sur les propriétés géologiques des surfaces qui s'intersectent (par exemple, une faille « coupe » un horizon). Les règles de syntaxe géologique permettent de définir le comportement entre les nœuds.

Les informations transportées par le SEG permettent donc de définir une chronologie des événements mais elles sont insuffisantes pour représenter une animation d'évolution de couches géologiques car des données temporelles précises, les liens de cause à effet, ainsi que les états intermédiaires font défaut.

### 2.3 Exposé du problème et approche proposée

Le géologue doit pouvoir élaborer et valider des scénarii d'évolution de couches géologiques. Pour cela, il pourrait avoir recours à un ensemble d'outils, notamment un modéleur géométrique, un logiciel d'animation et un système de validation du scénario. Durant ce stage, nous nous sommes focalisés sur les aspects relatifs à l'animation en nous restreignant à une approche géométrique  $2D$ . Nous ne nous intéressons qu'à la simulation d'évolution d'une coupe du sous-sol par un plan. Pour réaliser une animation  $2D$ , le géologue devra, à partir d'un état initial où les horizons sont horizontaux, décrire une succession de phénomènes géologiques correspondant à l'évolution souhaitée.

Dans le cadre de notre travail, nous supposons que les phénomènes sont définis entre deux instants précis sur une certaine durée. Un *événement* correspond au début ou à la fin d'un phénomène et est caractérisé par sa date. À partir de cette hypothèse, nous pouvons naturellement penser à réaliser une animation par moments-clefs (*keyframes*). L'animation s'obtient alors par interpolation des données entre deux événements. Cette méthode pose le problème difficile et bien

connu de relation entre chaque événement car les données des événements sont décorréliées.

Une seconde approche consiste à créer un objet spatio-temporel. Un objet spatio-temporel est un objet  $nD + 1$  représentant l'évolution d'un objet de dimension  $n$  au cours du temps. Contrairement à la première approche où nous avons une succession d'événements déconnectés, l'utilisation d'objets spatio-temporels permet d'avoir un modèle géométrique représentant toute l'évolution. L'animation consiste en la présentation de l'état du système à des instants successifs. Nous avons besoin pour cela d'extraire les informations du modèle à un instant. Ce processus s'appelle la coupe temporelle. Elle correspond à l'intersection d'un hyperplan perpendiculaire à l'axe temporel avec l'objet spatio-temporel (figure 8).

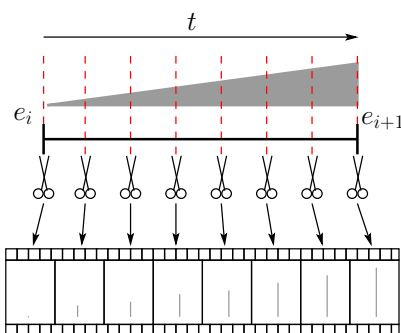


FIG. 8 – Exemple d'un objet spatio-temporel  $1D + 1$ , un triangle, représentant la dilatation d'une arête au cours du temps est défini entre l'événement de début  $e_i$  et l'événement de fin  $e_{i+1}$ . Les paires de ciseaux sont placées aux instants de coupes. La pellicule contient les images à afficher.

Pour modéliser nos objets, nous allons utiliser une représentation à base topologique. Un objet est une subdivision de l'espace en un nombre fini de cellules (sommets, arêtes, faces...). La structure de l'objet (topologie) est décrite par un modèle combinatoire décrivant les cellules et leurs relations d'incidence et d'adjacence. La forme de l'objet (plongement) est décrite en associant à chaque cellule un objet géométrique. Dans cette étude nous nous servirons du modèle des  $n$ -G-Cartes[Lie89]. Nous utiliserons un modèle de plongement linéaire, (consistant à représenter les sommets par des points, les arêtes par des segments de droites, ...). Ce modèle est simple à manipuler et de ce fait, les objets spatio-temporels sont simples à appréhender. Par conséquent, un point d'un objet ne pourra se déplacer que le long de trajectoires rectilignes uniformes. En ajoutant des points, nous pouvons affiner les formes. Si nous voulons des déplacements plus complexes, il suffit de créer des pseudo-événements traduisant une trajectoire rectiligne uniforme par morceaux. De la même façon, une forme géométrique courbe devra être

décomposée en plusieurs formes linéaires.

## 2.4 Déroulement du stage et méthodologie

Dans un premier temps, nous avons observé des planches de coupes géologiques communiquées par M.Perrin (EMP) pour en extraire les principales notions et les principaux phénomènes géologiques. Ensuite nous avons associé à une planche de coupe géologique une succession de phénomènes permettant d'obtenir cette coupe (un scénario d'évolution) à partir des couches planes. Dans un second temps, nous avons cherché à modéliser ces phénomènes géologiques par des opérations topologiques et un plongement adaptées. Après avoir défini ces opérations, nous les avons implantées dans le modèleur Moka à base topologique.

## 2.5 Plan

Ce rapport se décompose en trois parties. La première présente le contexte de travail au travers de quelques définitions de géologie, décrit quelques travaux liés au sujet du stage et indique la méthode adoptée pour répondre à la problématique de celui-ci. La seconde partie expose l'étude de la représentation de phénomènes géologiques en termes d'opérations topologiques  $2D$  et leur modélisation spatio-temporelle. La troisième, enfin, décrit la mise en œuvre et les résultats de notre étude.

### 3 Étude du problème en $2D + 1$

Dans cette partie, nous allons exprimer les phénomènes géologiques étudiés en termes d'opérations topologiques. Pour simplifier l'étude du problème, nous nous sommes placés dans le cas  $2D$ . Ensuite, nous allons définir ces opérations en  $2D$ , puis nous définirons les opérations correspondantes pour une modélisation  $2D + 1$  intégrant l'aspect temporel.

#### 3.1 Expression des phénomènes en termes d'opérations topologiques

Nous analysons ici les différents cas possibles pour ces phénomènes, et nous en déduisons les opérations sous-jacentes, et en particulier les opérations topologiques.

##### 3.1.1 Sédimentation

Comme nous l'avons indiqué dans la définition de la sédimentation, celle-ci se compose de deux étapes, la création d'une nouvelle couche et l'augmentation de son volume.

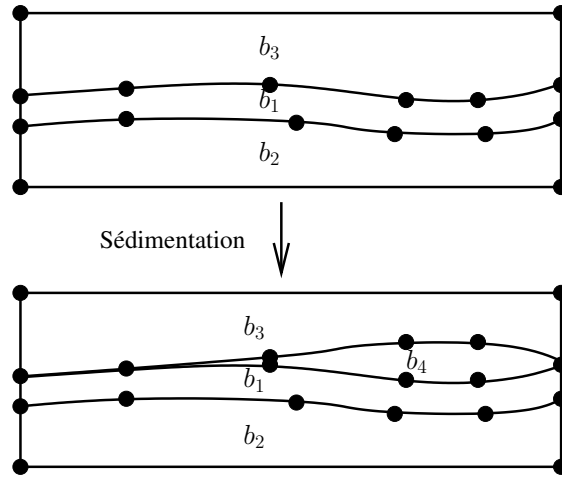


FIG. 9 – Sédimentation : création d'une nouvelle couche  $b_4$ .

La sédimentation entraîne un dépôt de matière. La figure 9 montre la création d'une nouvelle couche. Nous observons que l'apparition d'une couche nécessite la création de nouveaux sommets (3 sur la figure), de nouvelles arêtes (4 sur la figure) et d'une nouvelle face. La topologie est donc modifiée. La nouvelle face

s'est insérée sur un chemin constitué d'arêtes : cette opération topologique sera appelée *éclatement d'un chemin d'arêtes en face*.

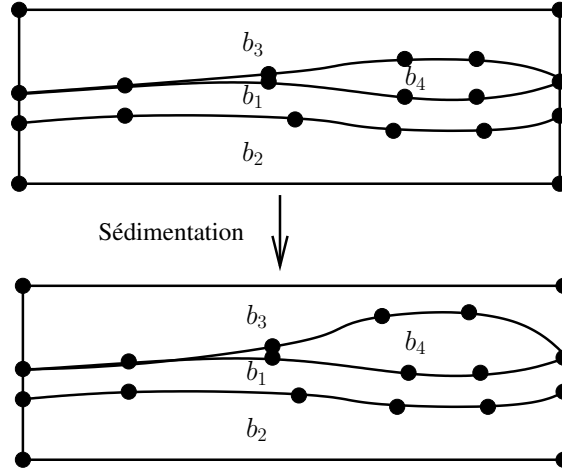


FIG. 10 – Sédimentation avec augmentation du volume de la couche  $b_4$ .

Une fois la couche créée, le dépôt grossit et ceci entraîne l'augmentation du volume de la couche. Ce volume peut être obtenu sans création de nouveaux éléments par une translation des sommets de l'interface entre  $b_3$  et  $b_4$  comme le montre la figure 10. Dans ce cas, il n'y a pas de changement de topologie, ce phénomène peut être obtenu par une simple opération géométrique de déplacement de sommets. Nous pouvons cependant à nouveau subdiviser l'interface de  $b_3$  et  $b_4$  créant ainsi de nouveaux sommets qui permettront en particulier de contrôler la forme de la sédimentation.

La sédimentation peut aussi aboutir à l'agrégation de plusieurs couches comme le montre la figure 11. Dans ce cas, il y aura une modification topologique se traduisant par la contraction d'une arête, la fusion de deux sommets en un et l'éclatement d'un sommet en deux.

### 3.1.2 Érosion

L'érosion peut être considérée comme l'inverse de la sédimentation. L'érosion débute par une disparition de matière, correspondant à la diminution du volume de la couche.

La figure 12 montre un exemple d'érosion. La diminution du volume du bloc  $b_4$  est réalisée par simple translation des sommets de l'interface entre  $b_3$  et  $b_4$ . Il n'y a pas de création ou de destruction d'éléments, la topologie reste inchangée.

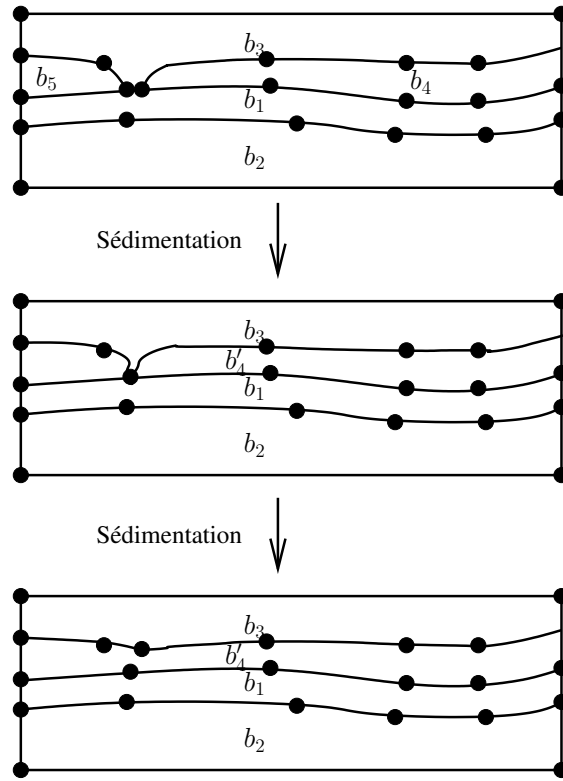


FIG. 11 – Sédimentation avec agrégation des blocs  $b_4$  et  $b_5$  en  $b'_4$ .

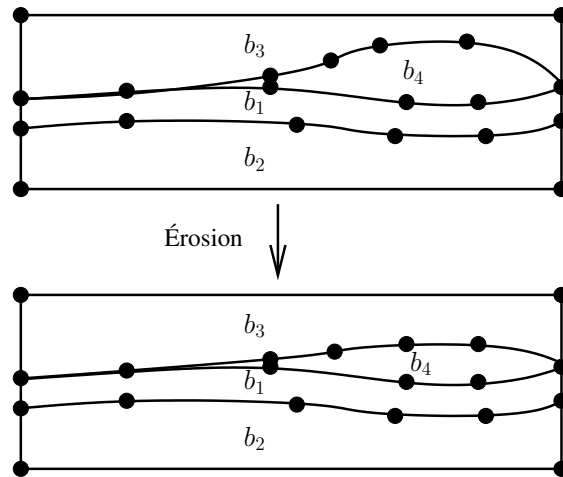
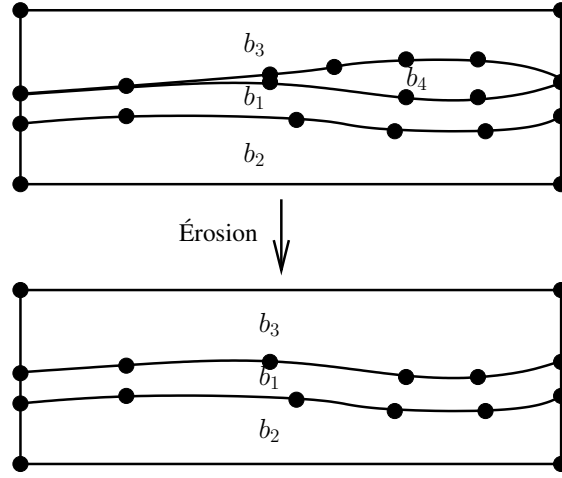


FIG. 12 – Érosion du bloc  $b_4$ .



FIG. 13 – Disparition complète du bloc  $b_4$ .

L'érosion peut aboutir à la disparition totale d'un bloc. Cela se traduit, comme le montre l'exemple de la figure 13, par le fait que la face représentant le bloc  $b_4$  va disparaître. Les interfaces  $(b_3, b_4)$  et  $(b_4, b_1)$  vont se confondre. Ici, nous avons une modification de la topologie se traduisant par la suppression d'une face, d'arêtes et de sommets. On pourrait penser que l'opération consiste simplement à contracter ([DL03]) une face en arêtes. Mais cette opération n'est définie que pour des faces de degré 2 (ie. dont le bord est constitué de deux arêtes). En effet, comme le montre la figure 14, il existe plusieurs façons de réaliser cette opération.

Pour résoudre ce problème, une idée est de contracter les arêtes de l'interface (bloc à détruire, bloc prenant la place) en une arête unique incidente aux sommets extrêmes de l'interface et de supprimer l'arête en question, ce qui aura pour effet de fusionner les faces  $b_3$  et  $b_4$ . La figure 15 représente les étapes nécessaires à cette opération.

Nous pouvons aussi utiliser une détection de « collision » entre les interfaces  $(b_3, b_4)$  et  $(b_4, b_1)$  et y ajouter un traitement adapté, par exemple le co-raffinement.

Comme nous le voyons, il n'y a pas de solution générique à ce problème.

### 3.1.3 Faille

Quand nous parlons de faille, nous ne considérons que les failles débutant sur le bord d'un bloc. Dans ce cas, une fissure apparaît et s'étend au travers du bloc, le coupant, le cas échéant, en deux comme le montre la figure 16.

Cette figure permet de montrer les deux types de failles traitées ici. Le premier concerne une faille qui coupe de part et d'autre le bloc  $b_1$ . Ce bloc est divisé en

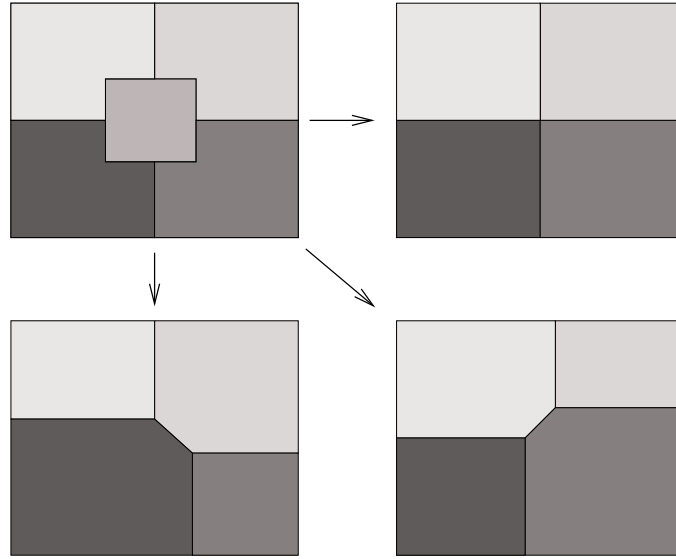


FIG. 14 – Différentes solutions de contractions de la face gris foncé dans la figure en haut à gauche.

deux blocs adjacents,  $b_1$  et  $b_4$ . Il en résulte la création d'une nouvelle arête et d'une nouvelle face. Dans ce cas, on parle de *scission de face*. Le second type de faille se produit dans le bloc  $b_2$ . Il est représenté par une arête pendante dans la face représentant  $b_2$ . Pour les deux types de failles, la topologie est donc modifiée.

### 3.1.4 Glissement

Le glissement concerne le mouvement d'un bloc par rapport à un autre bloc. La figure 17 en montre un exemple. Nous pouvons observer un changement au niveau de l'interface ( $b_1$ ,  $b_4$ ). Il y a eu création d'un sommet et d'une arête. Ensuite nous avons une disparition d'interface entre ( $b_1$ ,  $b_4$ ) due à la disparition de l'arête.

Cette figure montre une opération complexe et dans le but de mieux comprendre, nous allons « zoomer » sur les sommets et les arêtes ajoutées.

La figure 18 montre ce qui survient quand les deux arêtes horizontales ne sont plus incidentes au même sommet. Nous observons la création d'un sommet et la création d'une nouvelle arête. Les arêtes horizontales sont alors non incidentes entre elles et nous avons une modification de la topologie.

La figure 19 permet de comprendre le fait que le bloc descendant n'influe pas sur la topologie. Le sommet gris est simplement translaté.

La figure 20 montre ce qui se produit quand les deux arêtes horizontales vont se rencontrer au niveau d'un même sommet. Nous observons la destruction d'un

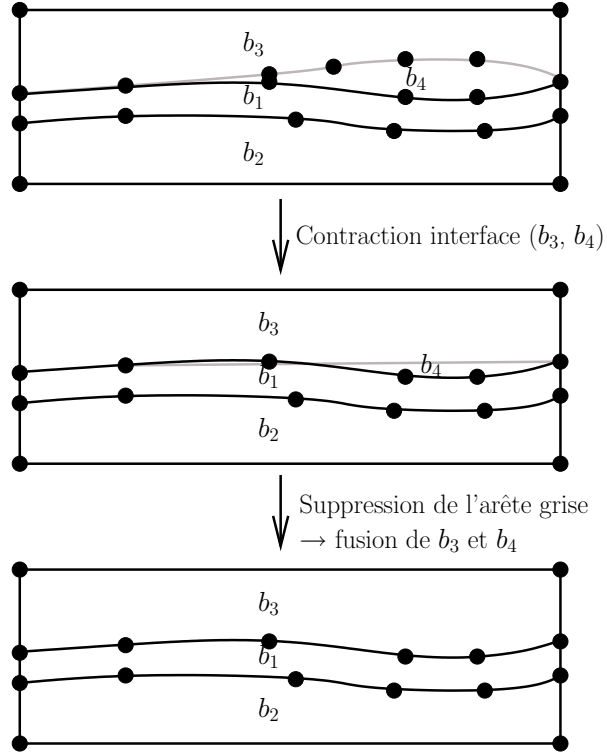


FIG. 15 – Décomposition en opérations topologiques de la disparition totale d'une face.

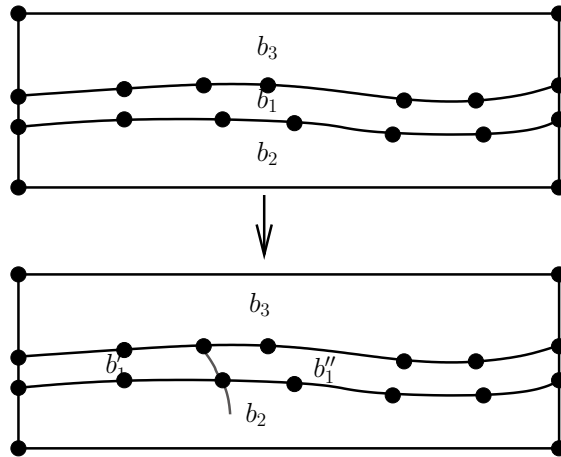


FIG. 16 – Création d'une faille.

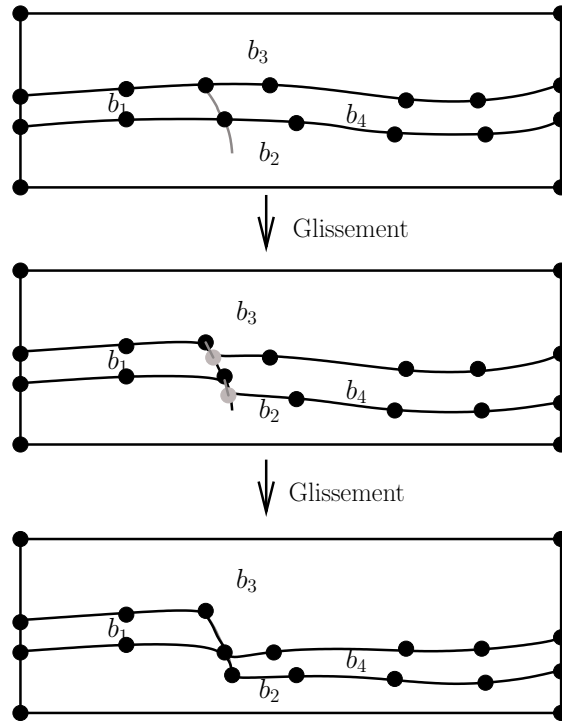


FIG. 17 – Glissement de  $b_4$  par rapport à  $b_1$ . Les arêtes et sommets en gris sont des créations.

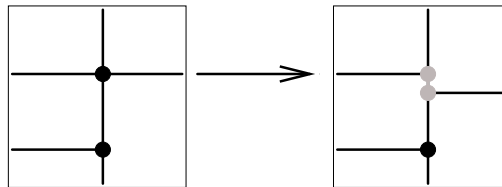


FIG. 18 – Division du sommet en deux.

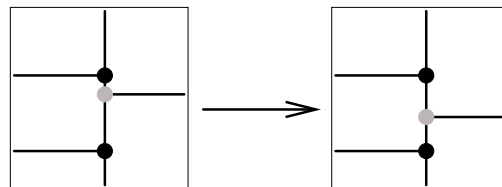


FIG. 19 – Translation du sommet gris.

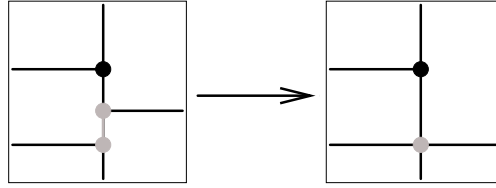


FIG. 20 – Contraction de l'arête grise.

sommet et la destruction d'une arête. Cette troisième étape est donc inverse à la première.

### 3.2 Définition des opérations topologiques de base

Comme nous venons de le voir, pour modéliser les phénomènes géologiques qui nous intéressent, il est nécessaire de définir des opérations d'éclatements (de sommet en arête, d'arêtes en face), de contraction d'arête en sommet et de scissions de faces.

Nous avons choisi d'utiliser le modèle topologique des G-Cartes pour représenter la structure d'un sous-sol. Nous allons donc en premier lieu donner un bref rappel sur les G-Cartes, puis nous exprimerons les opérations topologiques dont nous avons besoin en  $2D$  puis en  $2D + 1$ . Pour réaliser l'extension en  $2D + 1$ , nous allons réaliser l'extrusion du dernier événement le long d'un segment représentant la durée du phénomène. Le résultat représente une invariance sur la durée. Ensuite, nous modifions localement le volume pour représenter l'évolution.

#### 3.2.1 Rappel sur les G-Cartes

Les cartes généralisées (ou G-Cartes)[Lie89] sont définies à l'aide d'un type unique d'éléments abstraits, les brins, sur lesquels sont définies des involutions<sup>1</sup> qui lient les brins entre eux. Les G-Cartes permettent de représenter les quasi-variétés orientables et non orientables. De manière schématique, une quasi-variété de dimension  $n$  est un objet  $nD$  que nous pouvons obtenir par assemblage de cellules  $nD$  uniquement le long d'objets  $(n - 1)D$  et tels que chaque objet  $(n - 1)D$  est incident à au plus deux objets  $nD$  (figure 21). En  $2D$ , les quasi-variétés correspondent aux variétés (i.e. aux surfaces).

**Définition 1** Une G-Carte de dimension  $n$ , ou  $n$ -G-Carte est un  $(n + 2)$ -uplet  $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$  tel que :

- $B$  est un ensemble fini de brins ;

<sup>1</sup>Une involution  $\alpha_i$  est une fonction répondant à la caractéristique  $\alpha_i \circ \alpha_i = \text{Id}$ .

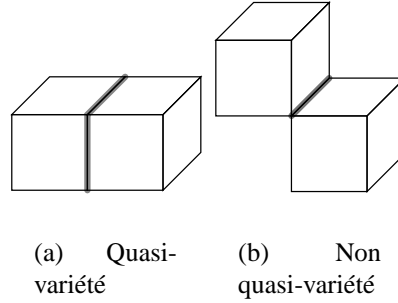


FIG. 21 – En a), une quasi-variété constituée de deux volumes adjacents par une face. L'objet en b) n'est pas une quasi-variété car il est formé de deux volumes adjacents par une arête.

- $\alpha_i : B \rightarrow B$  est une involution sur  $B$  ;
- $\alpha_i \alpha_j$  est une involution pour  $0 \leq i < i + 2 \leq j \leq n$ .

En  $2D$ , nous pouvons intuitivement représenter un brin par une demi-arête orientée. L'involution  $\alpha_0$  permet de lier deux demi-arêtes créant ainsi une arête bord d'une face, l'involution  $\alpha_1$  permet de relier les arêtes entre elles. . . (voir figure 22).

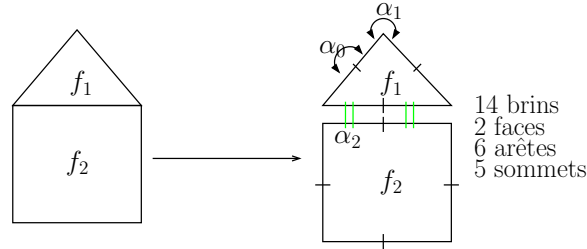


FIG. 22 – À gauche une figure géométrique, à droite sa représentation sous forme de 2-G-Carte.

**Définition 2** L'orbite  $\langle \Phi \rangle (b)$ , pour un ensemble de permutations  $\Phi$ , est l'ensemble des brins de  $B$  que l'on peut atteindre à partir de  $b$  par une composition quelconque des permutations de  $\Phi$ . Si  $\Phi$  est égal à l'ensemble de toutes les involutions  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  alors  $\langle \Phi \rangle$  est une composante connexe de  $G$  incidente au brin  $b$ .

**Notation** Soit une  $n$ -G-carte  $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ .

Une opérations topologique engendre une G-carte  $G' = (B', \alpha'_0, \dots, \alpha'_n)$  à partir de  $G$ . Pour définir l'opération, il est souvent utile de partitionner  $B$  et  $B'$  en sous-ensembles notés  $B_i$  et  $B'_i$  et de mettre en correspondance les brins des  $B_i$  et  $B'_i$  par une application  $\varphi_i$  :

$$\begin{aligned} \varphi_i : B_i &\rightarrow B'_i \text{ où } B_i \subseteq B, B'_i \subseteq B' \\ b^j &\rightarrow b'^j_i \end{aligned}$$

Les involutions de  $G'$  sont exprimées à l'aide des application  $\varphi_i$  et des involutions de  $G$ .

**Passage en  $2D + 1$**  : afin d'étendre notre travail en  $2D + 1$ , nous utilisons l'opération d'extrusion d'un ensemble de faces le long d'une arête qui rappelons le, représente la constance dans l'animation. La figure 23 montre l'exemple de l'extrusion de la face  $f$  le long de l'arête  $a$ . L'arête  $a$  est parallèle à l'axe du temps et est de longueur égale à la durée du phénomène. L'objet ainsi extrudé d'un événement représente l'objet initial inchangé au cours du temps. Les opérations  $2D$  que nous définissons sont étendues en opération  $2D + 1$  et s'appliquent localement au résultat de l'extrusion.

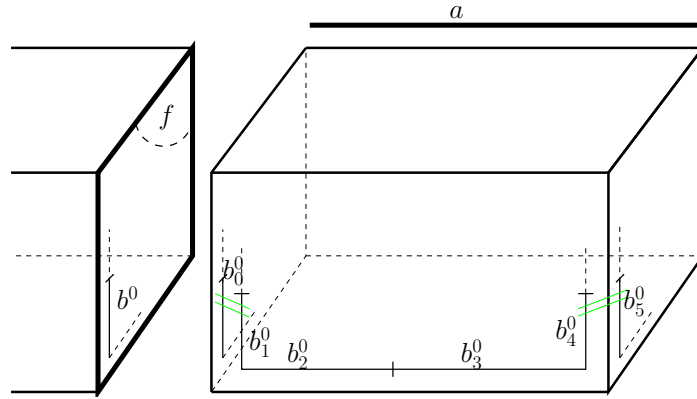


FIG. 23 – Exemple d'extrusion.

### 3.2.2 Éclatement d'un sommet en arête

Intuitivement, éclater un sommet en une arête revient à séparer l'ensemble des arêtes incidentes au sommet considéré en deux sous-ensembles d'arêtes distinctes (figure 24(a)). Un de ces sous-ensembles est délimité par les deux arêtes  $a_1$  et  $a_2$ , et contient les arêtes situées « entre »  $a_1$  et  $a_2$ . L'autre sous-ensemble contient

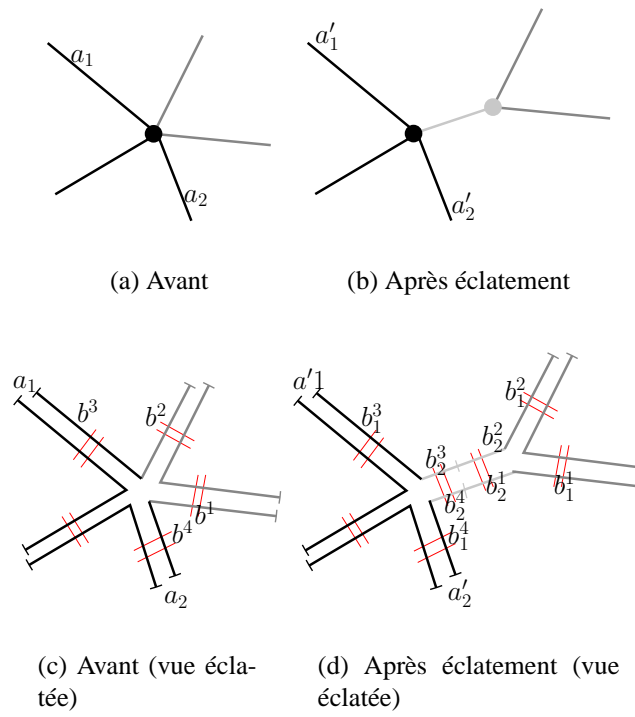


FIG. 24 – Éclatement d'un sommet en arête ( $2D$ ).



les arêtes restantes. L'éclatement de sommet en arête aboutit à deux sommets incidents respectivement à chacun de ces deux sous-ensembles (figure 24(b)).

Informellement, nous allons créer deux applications,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Les figure 24(c) et figure 24(d) montrent ce qui se passe au niveau topologique.  $\varphi_1$  correspond à la « copie » de tous les brins de départ.  $\varphi_2$  correspond à la création des brins  $b_2^1, b_2^2, b_2^3$  et  $b_2^4$  à partir respectivement des brins  $b^1, b^2, b^3$  et  $b^4$ .

En dimension 2, nous appelons éclatement d'un sommet en arête l'opération définie de la manière suivante :

Soient  $b^1$  et  $b^2$ , deux brins de  $B$  tels qu'il existe  $p > 0$  avec  $b^1 = b^2(\alpha_2\alpha_1)^p\alpha_2$   
Soient  $b^3 = b^2\alpha_1$  et  $b^4 = b^1\alpha_1$ .  $b^1$  et  $b^2$  définissent implicitement l'ensemble des arêtes délimitant les arêtes restantes.

$$B_1 = B, B_2 = \{b^1, b^2, b^3, b^4\}$$

$$B' = B'_1 \cup B'_2$$

$$\varphi_1 : \text{bijection entre } B_1 \text{ et } B'_1$$

$$B'_2 = \{b_2^1, b_2^2, b_2^3, b_2^4\}$$

$$\varphi_2 : b^i \rightarrow b_2^i$$

Soit  $f$  une involution définie par :  $f(b^1) = b^2$  et  $f(b^3) = b^4$ .  $f$  permet de mettre en correspondance les extrémités d'un ensemble d'arêtes.

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1(b)\alpha_0 & = & \varphi_1(b\alpha_0) \\ \varphi_1(b)\alpha_1 & = & \varphi_2(b) \text{ si } b \in B_2 \\ & = & \varphi_1(b\alpha_1) \text{ sinon} \\ \varphi_1(b)\alpha_2 & = & \varphi_1(b\alpha_2) \end{array} \left| \begin{array}{lcl} \varphi_2(b)\alpha_0 & = & \varphi_2(b\alpha_1) \\ \varphi_2(b)\alpha_1 & = & \varphi_1(b) \\ \varphi_2(b)\alpha_2 & = & \varphi_2(f(b)) \end{array} \right.$$

Pour étendre l'opération en  $2D+1$ , nous allons faire correspondre les sommets de l'événement  $e_i$  aux sommets de l'événement  $e_{i+1}$ .

Comme nous le voyons sur la figure 25, le résultat ressemble à une opération d'extrusion avec, pour seule différence, une modification locale : le sommet  $s_i$  est relié aux sommets  $s_{i+1}$  et  $s'_{i+1}$  résultant de l'éclatement de  $s_i$  en arête. Cette modification entraîne donc la création d'une nouvelle arête spatio-temporelle  $a_1$  et d'une arête spatiale  $a_3$  créant la face  $a_1a_3a_4$ . Nous allons seulement nous intéresser aux changements locaux.

En  $2D + 1$ , la condition sur  $b_1$  et  $b_2$  change car nous ne sommes plus sur une 2-G-Carte mais sur une 3-G-Carte et pour atteindre la face spatiale adjacente, nous devons passer par les bords de volumes, d'où l'utilisation d'involutions  $\alpha_3$  et  $\alpha_2$ .

Informellement, les  $\varphi_i$  pour  $i \in \{2, 3, 6, 7\}$  correspondent aux arêtes temporelles issues de l'éclatement du sommet. Les  $\varphi_i$  pour  $i \in \{4, 5, 8, 9\}$  correspondent aux nouveaux sommets  $s_{i+1}$  et  $s'_{i+1}$  issues du sommet  $s_i$ .

En dimension 3, nous appelons éclatement d'un sommet en arête l'opération définie de la manière suivante :

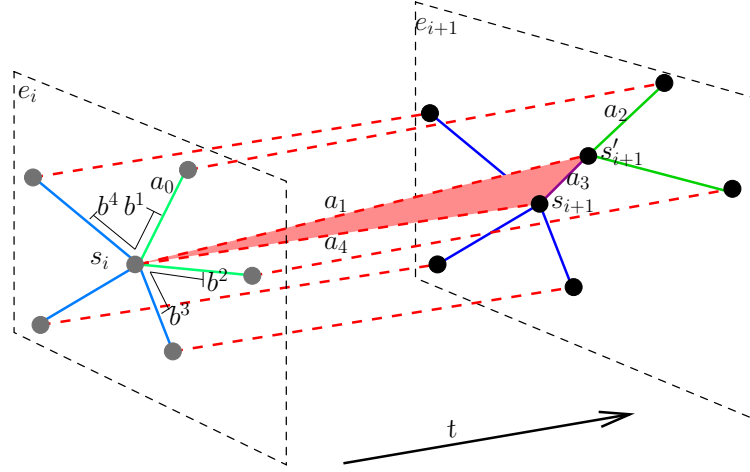


FIG. 25 – Éclatement d'un sommet en arête. Les arêtes temporelles sont représentées en pointillés. Les sommets en gris clair font partie de l'évènement  $e_i$ , ceux en noir de l'évènement  $e_{i+1}$ .

Soient  $b^1$  et  $b^2$ , deux brins de  $B$  tels qu'il existe  $p > 0$  avec  $b^1 = b^2(\alpha_2\alpha_3)^p\alpha_2\alpha_3\alpha_2$ . Soient  $b^3 = b^2\alpha_1$  et  $b^4 = b^1\alpha_1$ .  $b^1$  et  $b^2$  définissent implicitement l'ensemble des arêtes délimitant les arêtes restantes.

$$B_i = B \quad \forall i \in [0, 5], \quad B_j = \{b^1, b^2, b^3, b^4\} \quad \forall i \in [6, 9]$$

$$B' = \cup_{i=0}^9 B'_i$$

$\varphi_i$  : bijection entre  $B_i$  et  $B'_i$

$$B'_j = \{b_j^1, b_j^2, b_j^3, b_j^4\}$$

$$\varphi_j : b^i \rightarrow b_j^i$$

Soit  $f$  une involution définie par :  $f(b^1) = b^2$  et  $f(b^3) = b^4$ .  $f$  permet de mettre en correspondance les extrémités d'un ensemble d'arêtes. Les  $\varphi_j$  correspondent à la création de la face insérée dans l'objet spatio-temporel.

$\varphi_6(b)\alpha_0 = \varphi_7(b)$	$\varphi_8(b)\alpha_0 = \varphi_8(b\alpha_1)$
$\varphi_6(b)\alpha_1 = \varphi_6(b\alpha_1)$	$\varphi_8(b)\alpha_1 = \varphi_7(b)$
$\varphi_6(b)\alpha_2 = \varphi_2(b)$	$\varphi_8(b)\alpha_2 = \varphi_9(b)$
$\varphi_6(b)\alpha_3 = \varphi_6(f(b))$	$\varphi_8(b)\alpha_3 = \varphi_8(f(b))$

$\varphi_7(b)\alpha_0 = \varphi_6(b)$	$\varphi_9(b)\alpha_0 = \varphi_9(b\alpha_1)$
$\varphi_7(b)\alpha_1 = \varphi_8(b)$	$\varphi_9(b)\alpha_1 = \varphi_5(b)$
$\varphi_7(b)\alpha_2 = \varphi_3(b)$	$\varphi_9(b)\alpha_2 = \varphi_8(b)$
$\varphi_7(b)\alpha_3 = \varphi_7(f(b))$	$\varphi_9(b)\alpha_3 = \varphi_9(b)$

La figure 26 permet de mieux comprendre la construction des contraintes sur

les  $\varphi_i$  en montrant ce qui se passe pour le brin  $b^1$ . Les brins  $b_0^1$  à  $b_5^1$  sont les brins issus de l'extrusion (brins noir). Les brins  $b_6^1$  à  $b_9^1$  sont les brins issus des opérateurs  $\varphi_6$  à  $\varphi_9$  (brins gris clair). Le schéma s'applique aussi aux brins  $b^2$  à  $b^4$  ce qui permet de créer la face temporelle.

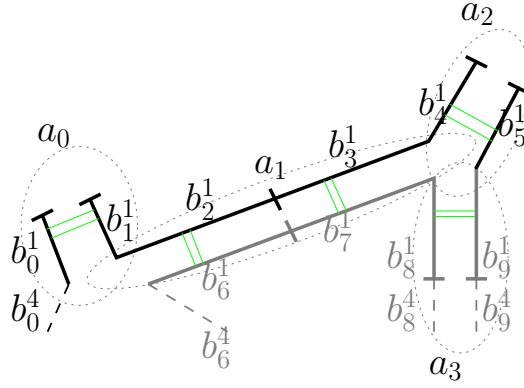


FIG. 26 – Éclatement d'un sommet en arête : vue éclatée.

### 3.2.3 Éclatement d'un chemin d'arêtes en face

**Définition 3** En dimension 2, nous appelons chemin d'arêtes  $\mathcal{C}$  une suite  $(b^0, b^1, \dots, b^{2k+1})$  de brins tels que :

- $b^{2p+1} = b^{2p}\alpha_0$
- $b^{2q} = b^{2q-1}(\alpha_1\alpha_2)^m\alpha_1$  avec  $q \geq 1$  et  $m \geq 0$

**Définition 4** En dimension 2, nous appelons image du chemin d'arêtes  $\mathcal{C}$  le chemin d'arêtes  $\mathcal{C}' = \{b/b\alpha_2 \in \mathcal{C}\}$

**Définition 5** En dimension 3, nous appelons chemin d'arêtes  $\mathcal{C}$  une suite  $(b^0, b^1, \dots, b^{2k+1})$  de brins tels que :

- $b^{2p+1} = b^{2p}\alpha_0$
- $b^{2q} = b^{2q-1}(\alpha_2\alpha_3)^m\alpha_2\alpha_3\alpha_2$  avec  $q \geq 1$  et  $m \geq 0$

**Définition 6** En dimension 3, nous appelons image du chemin d'arêtes  $\mathcal{C}$  le chemin d'arêtes  $\mathcal{C}' = \{b/b(\alpha_2\alpha_3)^m\alpha_2\alpha_3\alpha_2 \in \mathcal{C}\}$

Éclater un chemin d'arêtes en une face revient à insérer une face le long du chemin d'arêtes dédoublé ce qui aura pour effet de modifier les incidences. (figure 27).

Informellement,  $\varphi_1$  correspond aux brins « copiés »,  $\varphi_2$  correspond aux brins  $\{b_2^0, \dots, b_2^n\}$  « créés » pour former la face à insérer.

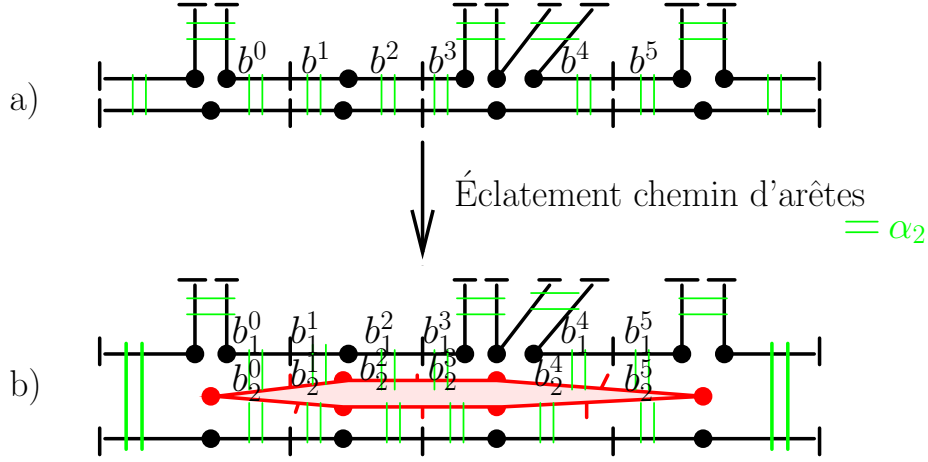


FIG. 27 – Éclatement d'un chemin d'arêtes en face

En dimension 2, nous appelons éclatement d'un chemin d'arêtes en face l'opération définie de la manière suivante :

Soient  $\mathcal{C}$  un chemin d'arête et  $\mathcal{C}'$  sont image.

$$B_1 = B, B_2 = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$$

$$B' = B'_1 \cup B'_2$$

$\varphi_1$  : bijection entre  $B_1$  et  $B'_1$

$$B'_2 = \{b_2^1, \dots, b_2^n\}$$

$$\varphi_2 : b^i \rightarrow b_2^i$$

Soit  $f$  la relation permettant de faire correspondre les brins du chemin d'arêtes  $\mathcal{C}$  et les brins de son image  $\mathcal{C}'$  ayant comme exposant  $2p+1$  avec les brins d'exposant  $2p+2$ . Les couples de brins de la figure 27 sont  $(b^1, b^2)$ ,  $(b^3, b^4)$ ,  $(b^1\alpha_2, b^2\alpha_2)$  et  $(b^3\alpha_2, b^4\alpha_2)$ .

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1(b)\alpha_0 & = & \varphi_1(b\alpha_0) \\ \varphi_1(b)\alpha_1 & = & \varphi_1(b\alpha_1) \\ \varphi_1(b)\alpha_2 & = & \varphi_1(b\alpha_2) \text{ si } b \notin B_2 \\ & = & \varphi_2(b) \text{ sinon} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} \varphi_2(b)\alpha_0 & = & \varphi_2(b\alpha_0) \\ \varphi_2(b)\alpha_1 & = & \varphi_2(b\alpha_1) \text{ si } b \neq b^0 \text{ et } b \neq b^n \\ & = & \varphi_2(b\alpha_2) \text{ sinon} \\ \varphi_2(b)\alpha_2 & = & f(b) \end{array} \right.$$

Pour étendre l'opération en  $2D + 1$ , nous allons faire correspondre le chemin d'arêtes  $\mathcal{C}$  avec ses deux images ce qui aura pour effet de créer un volume en forme de « cylindre écrasé » (figure 28).

Comme précédemment, nous allons effectuer une modification locale du résultat de l'extrusion. Informellement, les  $b_0^i$  à  $b_5^i$  correspondent aux brins de l'extrusion, les  $b_6^i$  à  $b_{10}^i$  correspondent au « cylindre écrasé ».

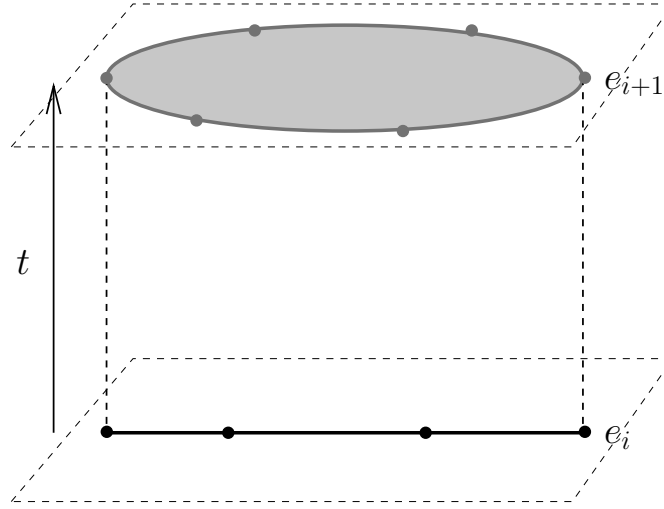


FIG. 28 – Volume à insérer représentant l'éclatement d'un chemin d'arêtes en face

En dimension 3, nous appelons éclatement d'un chemin d'arêtes en face l'opération définie de la manière suivante :

Soient  $\mathcal{C}$  un chemin d'arêtes et  $\mathcal{C}'$  sont image.

$$B_i = B \quad \forall i \in [0, 5], \quad B_j = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$$

$$B' = \cup_{i=0}^{10} B'_i$$

$\varphi_i$  : bijection entre  $B_i$  et  $B'_i$

$$B'_j = \{b_j^1, \dots, b_j^n\}$$

$$\varphi_j : b^i \rightarrow b_j^i$$

Soit  $f$  la relation permettant de faire correspondre les brins du chemin d'arêtes  $\mathcal{C}$  et les brins de son image  $\mathcal{C}'$  ayant comme exposant  $2p+1$  avec les brins d'exposant  $2p+2$ .

$$\begin{array}{lcl} \varphi_6(b)\alpha_0 & = & \varphi_6(b\alpha_0) \\ \varphi_6(b)\alpha_1 & = & \varphi_7(b) \\ \varphi_6(b)\alpha_2 & = & \varphi_6(b\alpha_2\alpha_3\alpha_2) \\ \varphi_6(b)\alpha_3 & = & \varphi_1(b) \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{lcl} \varphi_7(b)\alpha_0 & = & \varphi_8(b) \\ \varphi_7(b)\alpha_1 & = & \varphi_6(b) \\ \varphi_7(b)\alpha_2 & = & \varphi_7(b\alpha_2\alpha_3\alpha_2) \text{ si } b \in \{b^0, b^{2k+1}\} \\ & = & \varphi_7(f(b)) \text{ sinon} \\ \varphi_7(b)\alpha_3 & = & \varphi_2(b) \end{array} \right.$$

$\begin{aligned} \varphi_8(b)\alpha_0 &= \varphi_7(b) \\ \varphi_8(b)\alpha_1 &= \varphi_9(b) \\ \varphi_8(b)\alpha_2 &= \varphi_8(b\alpha_2\alpha_3\alpha_2) \text{ si } b \in \{b^0, b^{2k+1}\} \\ &= \varphi_8(f(b)) \text{ sinon} \\ \varphi_8(b)\alpha_3 &= \varphi_3(b) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \varphi_9(b)\alpha_0 &= \varphi_9(b\alpha_0) \\ \varphi_9(b)\alpha_1 &= \varphi_8(b) \\ \varphi_9(b)\alpha_2 &= \varphi_8(b) \\ \varphi_9(b)\alpha_3 &= \varphi_4(b) \end{aligned}$
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$\begin{aligned} \varphi_{10}(b)\alpha_0 &= \varphi_{10}(b\alpha_0) \\ \varphi_{10}(b)\alpha_1 &= \varphi_{10}(b\alpha_2\alpha_3\alpha_2) \text{ si } b \in \{b^0, b^{2k+1}\} \\ &= \varphi_{10}(f(b)) \text{ sinon} \\ \varphi_{10}(b)\alpha_2 &= \varphi_9(b) \\ \varphi_{10}(b)\alpha_3 &= \varphi_{10}(b) \end{aligned}$	
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

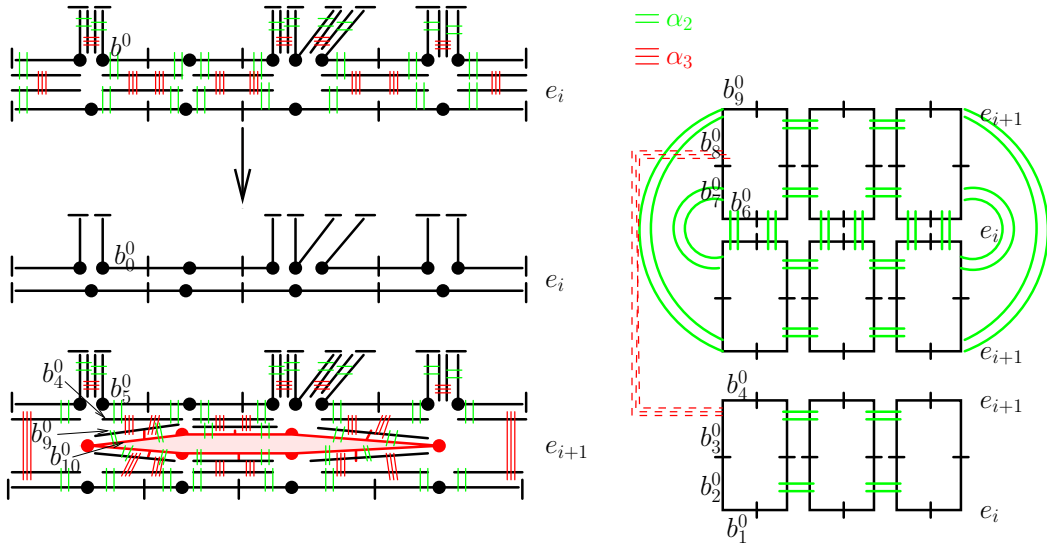


FIG. 29 – Représentation non spatiale de l’objet spatio-temporel représentant l’éclatement d’un chemin d’arêtes en face. En bas à gauche, nous avons la vue de dessous et de dessus de cet objet. A droite, nous avons les bords du cylindre écrasé et le résultat partiel de l’extrusion.

La figure 29 permet de mieux comprendre ce qui se passe grâce à une vue éclatée des faces. Les brins  $b_i$  pour  $i \in \{2, 3, 7, 8\}$  représentent les arêtes spatio-temporelles. Les brins  $b_j$  pour  $j \in \{0, 1, 6\}$  représentent les arêtes du chemin d’arêtes à éclater. Les brins  $b_k \forall k \in \{4, 5, 9, 10\}$  représentent les arêtes du bord de la face insérée.

### 3.2.4 Scission d'une face

Réaliser la scission d'une face consiste à découper une face en deux. Ceci a pour effet d'ajouter une arête entre les deux sommets de scission. Une scission a un point de départ et un point d'arrivée (figure 30).

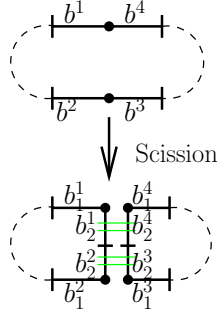


FIG. 30 – Scission d'une face

Informellement,  $\varphi_1$  correspond aux brins « copiés »,  $\varphi_2$  correspond aux brins « créés » pour l'arête qui sépare la face en deux en créant quatre brins  $\{b_2^1, b_2^2, b_2^3, b_2^4\}$  à partir des brins  $\{b^1, b^2, b^3, b^4\}$  représentant les sommets de départ et d'arrivée.

En dimension 2, nous appelons scission d'une face l'opération définie de la manière suivante :

Soient  $b^1$  et  $b^2$ , deux brins de  $B$  tels qu'il existe  $p > 0$  avec  $b^2 = b^1(\alpha_0\alpha_1)^p\alpha_0$

Soient  $b^3 = b^2\alpha_1$  et  $b^4 = b^1\alpha_1$ .

$B_1 = B$ ,  $B_2 = \{b^1, b^2, b^3, b^4\}$

$B' = B_1' \cup B_2'$

$\varphi_1$  : bijection entre  $B_1$  et  $B_1'$

$B_2' = \{b_2^1, b_2^2, b_2^3, b_2^4\}$

$\varphi_2 : b^i \rightarrow b_2^i$

Soit  $f$  une involution définie par :  $f(b^1) = b^2$  et  $f(b^3) = b^4$ .  $f$  permet de mettre en correspondance les sommets par lesquels la face est coupée.

$$\begin{array}{lcl} \varphi_1(b)\alpha_0 & = & \varphi_1(b\alpha_0) \\ \varphi_1(b)\alpha_1 & = & \varphi_1(b\alpha_1) \text{ si } b \notin B_2 \\ & = & \varphi_2(b) \text{ sinon} \\ \varphi_1(b)\alpha_2 & = & \varphi_1(b\alpha_2) \end{array} \left| \begin{array}{lcl} \varphi_2(b)\alpha_0 & = & \varphi_2(f(b)) \\ \varphi_2(b)\alpha_1 & = & \varphi_1(b) \\ \varphi_2(b)\alpha_2 & = & \varphi_2(b\alpha_1) \end{array} \right.$$

Pour étendre l'opération en  $2D + 1$ , nous allons insérer une face pendante au volume représentant l'animation de la face.

Informellement, les  $b_0^i$  à  $b_5^i$  correspondent aux brins de l'extrusion, les  $b_6^i$  à  $b_{12}^i$  correspondent à la face pendante insérée.





$\varphi_6(b)\alpha_0 = \varphi_7(b)$	$\varphi_7(b)\alpha_0 = \varphi_6(b)$
$\varphi_6(b)\alpha_1 = \varphi_{11}(b)$	$\varphi_7(b)\alpha_1 = \varphi_8(b)$
$\varphi_6(b)\alpha_2 = \varphi_2(b)$	$\varphi_7(b)\alpha_2 = \varphi_3(b)$
$\varphi_6(b)\alpha_3 = \varphi_6(b\alpha_1)$	$\varphi_7(b)\alpha_3 = \varphi_7(b\alpha_1)$
$\varphi_8(b)\alpha_0 = \varphi_9(b)$	$\varphi_9(b)\alpha_0 = \varphi_8(b)$
$\varphi_8(b)\alpha_1 = \varphi_7(b)$	$\varphi_9(b)\alpha_1 = \varphi_{10}(b)$
$\varphi_8(b)\alpha_2 = \varphi_{12}(b)$	$\varphi_9(b)\alpha_2 = \varphi_{13}(f(b))$
$\varphi_8(b)\alpha_3 = \varphi_8(b\alpha_1)$	$\varphi_9(b)\alpha_3 = \varphi_9(b\alpha_1)$
$\varphi_{10}(b)\alpha_0 = \varphi_{11}(b)$	$\varphi_{11}(b)\alpha_0 = \varphi_{10}(b)$
$\varphi_{10}(b)\alpha_1 = \varphi_9(b)$	$\varphi_{11}(b)\alpha_1 = \varphi_6(b)$
$\varphi_{10}(b)\alpha_2 = \varphi_{10}(b\alpha_1)$	$\varphi_{11}(b)\alpha_2 = \varphi_{11}(b\alpha_1)$
$\varphi_{10}(b)\alpha_3 = \varphi_{10}(b\alpha_1)$	$\varphi_{11}(b)\alpha_3 = \varphi_{11}(b\alpha_1)$
$\varphi_{12}(b)\alpha_0 = \varphi_{13}(f(b))$	$\varphi_{13}(b)\alpha_0 = \varphi_{12}(f(b))$
$\varphi_{12}(b)\alpha_1 = \varphi_5(b)$	$\varphi_{13}(b)\alpha_1 = \varphi_5(f(b))$
$\varphi_{12}(b)\alpha_2 = \varphi_8(b)$	$\varphi_{13}(b)\alpha_2 = \varphi_9(f(b))$
$\varphi_{12}(b)\alpha_3 = \varphi_{12}(b)$	$\varphi_{13}(b)\alpha_3 = \varphi_{13}(b)$

La figure 31 permet de mieux comprendre ce qui se passe grâce à une vue éclatée des faces. Les brins  $b_i \forall i \in \{2, 3, 6, 7, 10, 11\}$  représentent les arêtes spatio-temporelles. Les brins  $b_j \forall j \in \{8, 9, 12, 13\}$  représentent l'arête qui coupe la face.

### 3.2.5 Contraction d'une arête en sommet

La contraction d'arête est l'opération qui transforme une arête en un sommet (figure 32). Cette opération est déjà définie sur les n-G-Cartes[DL03]. Elle est l'inverse de l'éclatement de sommet en arête (figure 32).

## 3.3 Coupe temporelle

Le but de la coupe temporelle est de fournir une étape de l'animation à un instant  $t$ . Un ensemble de coupes ordonnées permet de reproduire l'animation. Ici, la coupe permet de récupérer une 2-G-Carte. La coupe s'obtient par intersection de l'objet spatio-temporel avec le plan perpendiculaire à l'axe du temps passant par  $t$ .

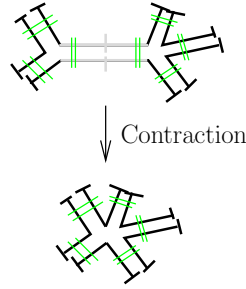


FIG. 32 – Contraction d'arête

### 3.3.1 Hypothèses

Par construction, tous les sommets de l'objet spatio-temporel ont des coordonnées temporelles bien définies. Aucun point n'est défini de façon implicite c'est à dire qu'aucun point n'est défini par intersection d'une arête avec un plan événement. Donc, chaque sommet d'un événement  $e_i$  a une arête le reliant à un ou des sommets de l'événement  $e_{i+1}$ . Tous les sommets appartiennent à un événement. Une arête est dite arête spatio-temporelle si, et seulement si, le plongement de ses sommets diffère en  $t$ .

### 3.3.2 Algorithme utilisé

L'algorithme de coupe temporelle peut être séparé en deux problèmes, la coupe correspondant à un événement et la coupe entre deux événements. Dans le second cas, le plongement des brins sera à calculer car nous ne connaissons pas la position des sommets résultant de l'intersection de l'arête spatio-temporelle avec le plan de coupe.

La partie commune de l'algorithme consiste à chercher l'événement le plus proche de l'instant de coupe désiré. Pour cela, nous allons parcourir l'objet spatio-temporel à partir d'un des brins de l'événement le plus récent jusqu'à l'événement le plus ancien (nous pourrions bien entendu utiliser une structure plus rapide en  $\log(n)$  au lieu de  $n$  mais ce n'était pas le but ici). Une fois ce brin trouvé, nous allons effectuer différents parcours suivant les cas décrits précédemment.

Comme pour les opérations, nous allons définir une application  $\varphi_1$  qui copie les brins parcourus.

### Coupe sur un événement

Pour un instant correspondant à un événement, nous connaissons la structure topologique des couches. Il nous suffit d'extraire la structure des points situés à

cet instant. Pour cela, nous allons effectuer un parcours en utilisant les involutions  $\alpha_0, \alpha_1$  et la composition d'involutions  $(\alpha_2\alpha_3)^p\alpha_2\alpha_3\alpha_2$ . Pendant ce parcours, nous allons copier chaque brin de l'instant considéré avec une fonction  $\varphi_1$  et pour chacun des brins copiés, nous allons définir les involutions  $\alpha_0, \alpha_1$  et  $\alpha_2$  de la manière suivante (figure 33) :

$$\begin{cases} \varphi_1(b)\alpha_0 = \varphi_1(b\alpha_0) \\ \varphi_1(b)\alpha_1 = \varphi_1(b\alpha_1) \\ \varphi_1(b)\alpha_2 = \varphi_1(b(\alpha_2\alpha_3)^p\alpha_2\alpha_3\alpha_2) \end{cases}$$

Le plongement est facile à déterminer : il suffit d'affecter le plongement 2D  $(x, y)$  des sommets parcourus aux sommets copiés.

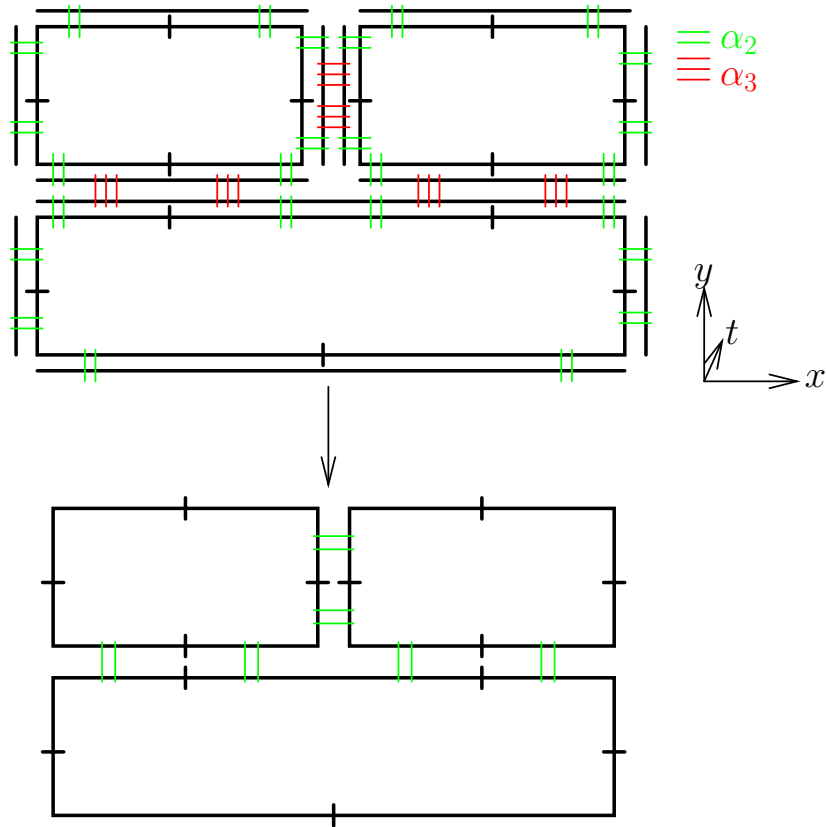


FIG. 33 – Coupe en un instant correspondant à un événement. En haut l'objet spatio-temporel, en bas sa coupe.

### Coupe entre deux événements

Pour effectuer la coupe, nous allons prendre comme point de départ un des brins se situant entre les deux instants considérés et parcourir tous les volumes spatio-temporels en passant de l'un à l'autre par un parcours  $\alpha_3(\alpha_1\alpha_0)^k\alpha_1$  avec  $0 \leq k < 2$  ( $k$  dépend du nombre d'arêtes à parcourir avant de retomber sur une arête spatio-temporelle). Pendant ce parcours, nous allons créer une copie de chaque brin parcouru avec une fonction  $\varphi_1$  et nous allons définir les involutions de la manière suivante :

$$\begin{cases} \varphi_1(b)\alpha_0 = \varphi_1(b(\alpha_1\alpha_0)^p\alpha_1) \\ \varphi_1(b)\alpha_1 = \varphi_1(b\alpha_2) \\ \varphi_1(b)\alpha_2 = \varphi_1(b\alpha_3) \end{cases}$$

Le plongement se calcule en cherchant l'intersection de l'arête temporelle avec le plan de coupe. Pour ce faire, nous allons simplement appliquer le théorème de Thalès sur les projections de l'objet spatio-temporel sur les plans  $(x, t)$  et  $(y, t)$ .

Tout d'abord considérons l'exemple suivant : soit  $A$ , le sommet de l'arête se trouvant à l'instant le plus petit, et  $B$  l'autre sommet de cette arête. Soit  $M$  le point à trouver,  $B'$  et  $M'$  les projections de  $B$  et  $M$  sur la droite parallèle à  $t$  passant par  $A$  (figure 34). D'après le théorème de Thalès, nous avons  $\frac{AM'}{AB'} = \frac{MM'}{BB'}$  et donc  $MM' = \frac{AM'}{AB'} * BB'$  ( $MM' = \frac{t-z_a}{z_b-z_a} * BB'$ ).

En revenant à notre problème, nous avons pour chacun des points les arêtes intersectées par le plan :

$$\begin{cases} x_m = x_a + \frac{t-t_a}{t_b-t_a} * (x_b - x_a) \\ y_m = y_a + \frac{t-t_a}{t_b-t_a} * (y_b - y_a) \end{cases}$$

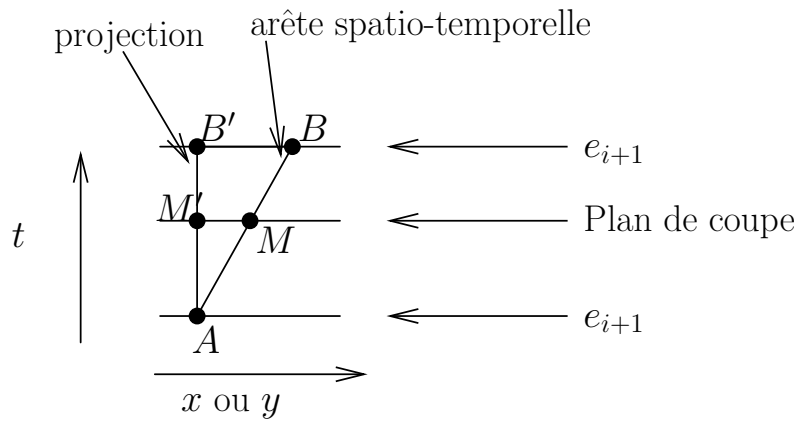


FIG. 34 – Calcul du plongement des arêtes spatio-temporelles intersectées.

## 4 Mise en œuvre et résultats

Nous venons de définir une méthode d'animation ainsi qu'un ensemble d'opérations permettant de créer l'animation de couches géologiques par modélisation spatio-temporelle. Nous allons maintenant les mettre en œuvre en utilisant le modèleur spatial 3D Moka développé au laboratoire SIC. Moka est un modèleur d'objets 3D utilisant un modèle topologique de 3-G-Carte. Il est développé sur le modèle MVC<sup>2</sup>.

Le noyau de 3-G-Carte de Moka est décomposé en 4 parties :

- CGMapBasic : gestion bas niveau des brins. Pas de vérification des contraintes d'intégrité ;
- CGMap : gestion des coutures/découtures ;
- CGMapGeneric : opérations topologiques ;
- CGMapVertex : 3-G-Carte avec plongement sommet ;

Pour implanter nos opérations nous avons choisi de créer une surcouche de CGMapVertex afin d'éviter de modifier le noyau de l'application. L'interface graphique de Moka est inadaptée au problème à traiter donc nous l'avons redéfinie pour une plus grande souplesse. Nous avons notamment ajouté un ensemble de routines d'affichage, appelé précompiles, pour afficher les couches géologiques. En particulier, nous avons défini un précompile pour afficher les blocs d'une couche avec une même couleur et les faces spatio-temporelle en blanc translucide. Nous pouvons constater quelques erreurs d'affichage au niveau des transparences dues à OpenGL. Nous n'avons pas cherché à optimiser cette affichage.

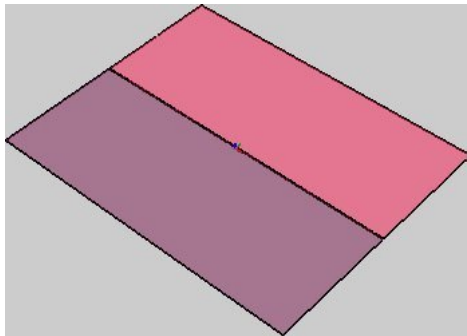
L'interface est décomposée en cinq vues. Les quatre premières sont celles du modèleur original (vue XY, YZ, XZ et 3D). La cinquième est la vue de coupe dont le temps est paramétrable par une boîte de dialogue.

La figure 35 montre les étapes de la création d'une sédimentation. Tout d'abord, nous allons créer un ensemble de couches, ici 2 (figure 35a). Comme nous l'avons compris dans le chapitre 3.2, pour réaliser nos opérations topologiques, nous devons partir du résultat de l'extrusion (figure 35b). Pour cela nous utilisons une fonction qui extrude la dernière couche sur une durée de 10. Une fois cette opération effectuée, nous pouvons appliquer l'éclatement d'un chemin d'arêtes (figure 35c). Cette opération étant purement topologique, nous devons donner une position aux nouveaux sommets, pour cela nous allons utiliser l'opération géométrique de translation (figure 35d).

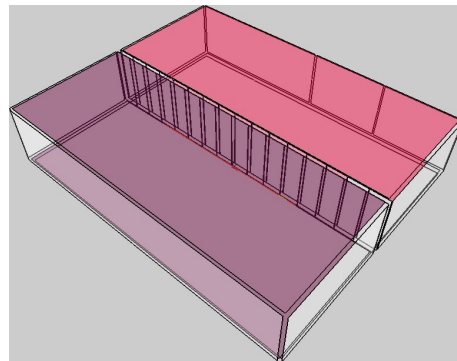
La figure 36 montre la construction d'une faille. Comme précédemment, il nous faut construire un certain nombre de couches, puis réaliser l'opération d'extrusion. La faille est représentée par une face pendante dans le volume représentant l'animation du bloc (figure 36a). Les sous-figures b, c, d montrent trois coupes de

---

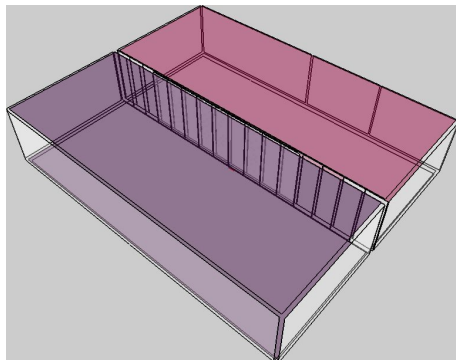
<sup>2</sup>Modèle Vue Contrôleur



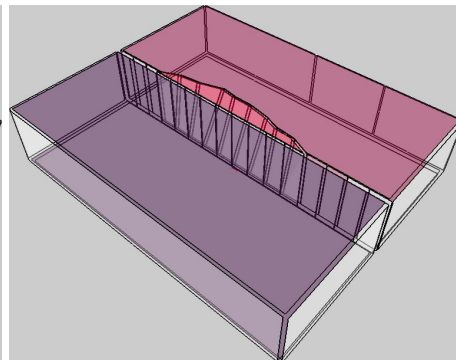
(a) Création de 2 couches



(b) Extrusion



(c) Modification locale : éclatement  
du chemin d'arêtes



(d) Translation des sommets

FIG. 35 – Création d'une sédimentation

l'objet spatio-temporel.

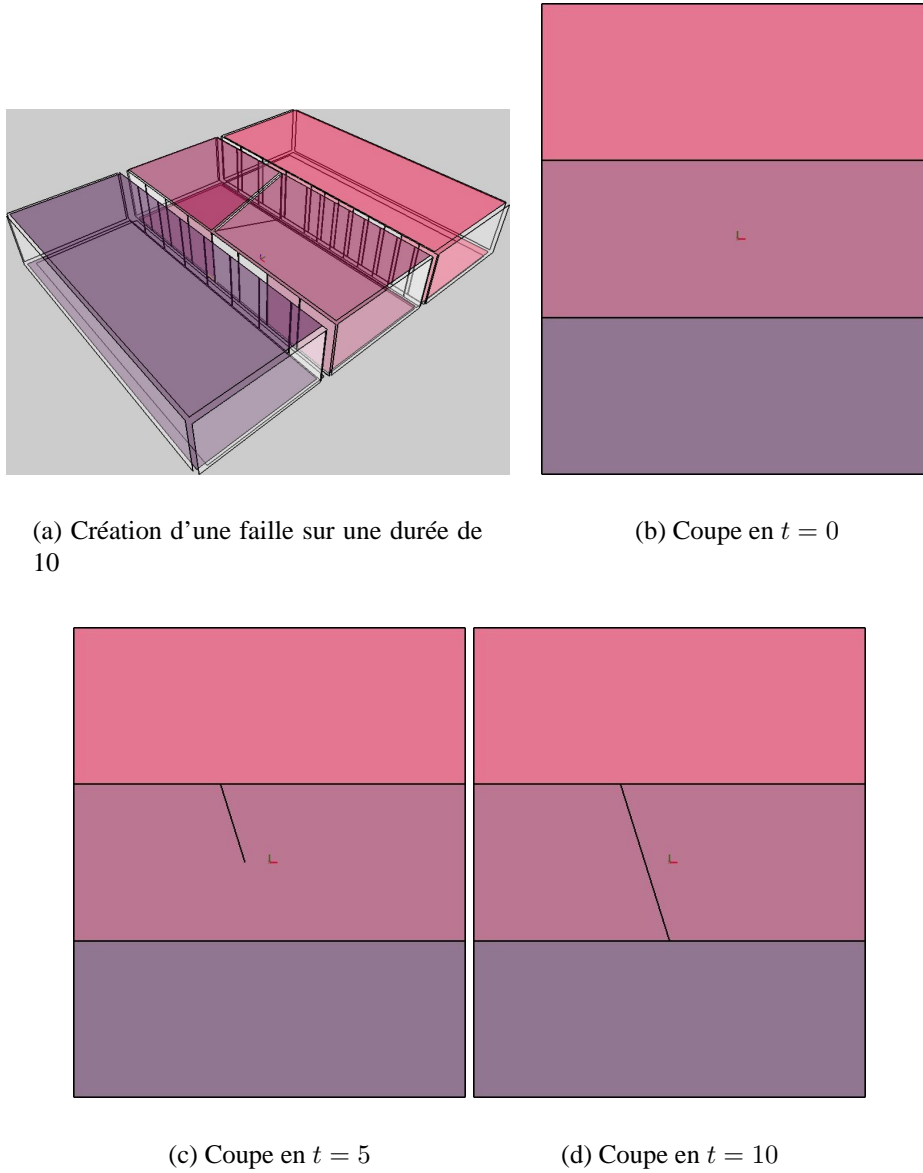


FIG. 36 – Création d'une faille

La figure 37 montre un glissement effectué sur la faille de la figure 36. Pour réaliser cette opération, il a suffi de réaliser une nouvelle extrusion et d'y appliquer deux éclatements de sommets (un en chaque extrémité de la faille). Ensuite comme pour la sédimentation, il suffit de translater les sommets éclatés (fi-



gure 37a). Les sous-figures b, c, d montrent trois coupes l'objet spatio-temporel.

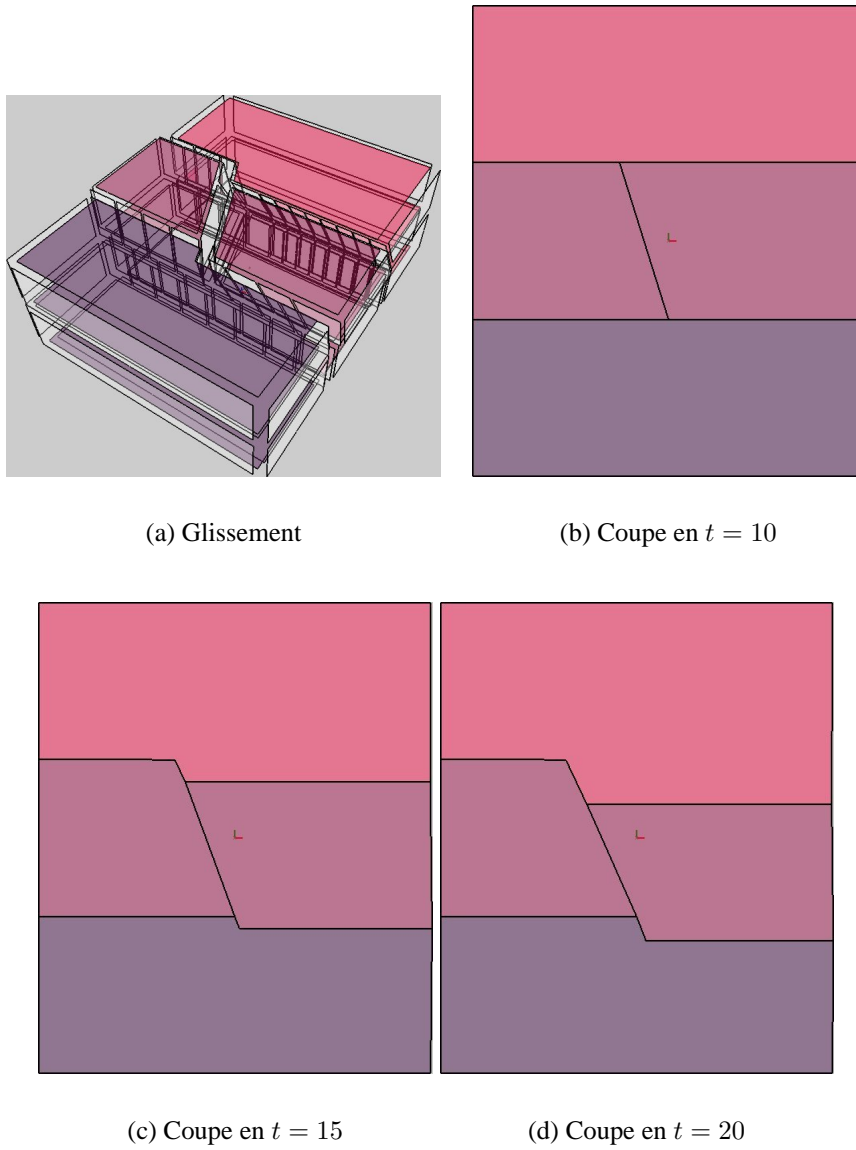


FIG. 37 – Création d'un glissement

## 5 Conclusion et Perspectives

### 5.1 Conclusion

Le sujet de notre étude est la simulation d'évolution de couches géologiques. Nous nous sommes efforcés, tout le long de ce rapport, d'en faciliter la compréhension. Ainsi, en introduction, nous avons choisi de rappeler certains termes de géologie en les définissant le plus succinctement possible. Ensuite, nous avons exprimé les phénomènes géologiques en opérations topologiques. Pour tester ces résultats, nous nous sommes servi du modelleur topologique Moka. L'utilisation de ce modelleur nous a permis d'utiliser un certain nombre d'opérations prédéfinies, comme l'extrusion et la contraction. Pour répondre à nos besoins, nous avons ajouté les opérations définies en 3.2 page 20, à savoir, les opérations d'éclatements et de scissions puis, nous avons adapté le modelleur à nos besoins en y ajoutant par exemple notre système de coupe. Nous avons de même modifié le modèle pour y ajouter des informations spécifiques (identifiants de couches par exemple). Enfin, nous avons réalisé quelques tests pour valider la définition des opérations de base.

### 5.2 Perspectives

#### 5.2.1 Terminer le $2D + 1$

Il faut terminer le  $2D + 1$ . Pour cela, il faut définir et implanter les opérations topologiques qui nous manquent comme la suppression d'arête. Il faut rendre plus utilisable le modelleur en permettant de cacher les brins spatio-temporels par exemple. Enfin, il faudrait effectuer une batterie de tests d'exécution de scénarii.

#### 5.2.2 Identification des couches

Comme nous l'avons vu au début de ce document, une couche est constituée d'un ensemble de blocs géologiques. Un des problème est donc de connaître l'appartenance d'un bloc à une couche. En effet, les blocs, les couches et les failles apparaissent et disparaissent au cours de phénomènes géologiques. La question est donc la correspondance entre les éléments géologiques avant et après une opération. Ce problème de contrôle doit être analysé dans le scénario. Le problème réside dans son expression et sa prise en compte.

#### 5.2.3 Le plongement

Ce rapport porte sur un ensemble d'opérations dont la réalisation géométrique est liée au plongement. Nous utilisons le plongement linéaire, ce qui nous

contraint à ajouter un certain nombre de sous-événements pour simuler des trajectoires non rectilignes ou pour donner une forme plus complexe aux blocs géologiques. Nous pourrions envisager d'utiliser un autre plongement (par exemple un plongement de Bézier) pour les arêtes.

### 5.2.4 Approche multi-échelle

Nous avons vu que le géologue travaille à plusieurs niveaux. Nous pourrions développer cette idée pour proposer une structure qui lui permet d'appliquer des phénomènes géologiques à différents niveaux de détails. Il serait alors intéressant de développer des opérations qui s'appliquent à différentes échelles.

### 5.2.5 Évolution du modèle en $3D + 1$

Notre étude s'est basée sur l'expression des phénomènes géologiques en  $2D$ . Il est indispensable de faire évoluer le modèle vers l'animation d'un modèle  $3D$ . En effet, le modèle  $2D$  est un modèle simpliste qui ne permet pas de simuler la réalité. L'expression des phénomènes géologiques en opérations topologiques est donc à généraliser aux dimensions supérieures.

## A Extraits de code

Toutes les opérations topologiques en  $2D + 1$  présentées dans ce rapport ont été implantées. Les extraits de code ci-dessous montrent que la traduction des contraintes liées aux opérations topologiques s'expriment directement dans le code.

### A.1 Opération d'éclatement d'un sommet en arête en $2D + 1$

```

void CGMapGeneric::explodeVertex3d(CDart *d1, CDart *d2)
{
    assert(canExplodeVertex3d(d1, d2));

    int phi6 = getNewDirectInfo(); // allocation d'une ressource

    CDart *d[] = { d1, d2, alpha1(d1), alpha1(d2) };

    for (int i = 0; i < 4; ++i) {
        CDart *tmp = addMapDart();
        // phi6
        setDirectInfo(d[i], phi6, tmp);
        // phi6(b)a0 = phi7(b)
        linkAlpha0(tmp, addMapDart());
        // phi7(b)a1 = phi8(b)
        linkAlpha1(alpha0(tmp), addMapDart());
        // phi8(b)a2 = phi9(b)
        linkAlpha2(alpha01(tmp), addMapDart());
    }

    for (int i = 0; i < 2; ++i) {
        // phi8(b)a0 = phi8(ba1)
        linkAlpha0(alpha01(getDirectInfoAsDart(d[i], phi6)),
                   alpha01(getDirectInfoAsDart(d[i + 2], phi6)));
        // phi6(b)a1 = phi6(ba1)
        linkAlpha1(getDirectInfoAsDart(d[i], phi6),
                   getDirectInfoAsDart(d[i + 2], phi6));

        // Modification locale de l'extrusion
        unlinkAlpha1(alpha21012(d[i]));
        unlinkAlpha2(alpha21(d[i]));
        unlinkAlpha2(alpha210(d[i]));

        // phi9(b)a0 = phi9(ba1)
        linkAlpha0(alpha012(getDirectInfoAsDart(d[i], phi6)),
                   alpha012(getDirectInfoAsDart(d[i + 2], phi6)));

        // phi9(b)a1 = phi5(b)

```

```

linkAlpha1(alpha21012(d[i]),
            alpha012(getDirectInfoAsDart(d[i], phi6)));

// phi9(ba1)a1 = phi5(ba1)
linkAlpha1(alpha21012(d[i + 2]),
            alpha012(getDirectInfoAsDart(d[i + 2], phi6)));

// phi6(b)a2 = phi2(b)
// && phi7(b)a2 = phi3(b)
sew2(alpha21(d[i]), getDirectInfoAsDart(d[i], phi6));
// idem :
// phi6(ba1)a2 = phi2(ba1)
// && phi7(ba1)a2 = phi3(ba1)
sew2(alpha21(d[i + 2]), getDirectInfoAsDart(d[i + 2], phi6 ←
));
}

// phi6 à phi9 (b)a3 = ...
sew3(getDirectInfoAsDart(d1, phi6),
      getDirectInfoAsDart(d2, phi6));

freeDirectInfo(phi6); // édsallocation de la ressource

assert(checkTopology());
};

```

## A.2 Opération de scission de face en $2D + 1$

```

void CGMapGeneric::explodeFace3d(CDart *d1, CDart *d2) {
    assert(canExplodeFace3d(d1, d2));

    CDart *from[] = { d1, alpha1(d1) };
    CDart *to[] = { d2, alpha1(d2) };
    CDart *phi6[] = { NULL, NULL };

    for (int i = 0; i < 2; ++i) {
        CDart *current = from[i];

        CDart *tmp = addMapDart();
        phi6[i] = tmp;

        // phi6(b)a0 = phi7(b)
        linkAlpha0(tmp, addMapDart());
        // phi6(b)a2 = phi2(b)
        linkAlpha2(tmp, alpha21(current));

        // phi7(b)a1 = phi8(b)
        linkAlpha1(alpha0(tmp), addMapDart());
        // phi7(b)a2 = phi3(b)
        linkAlpha2(alpha0(tmp), alpha210(current));

        // phi8(b)a0 = phi9(b)
        linkAlpha0(alpha01(tmp), addMapDart());
        // phi8(b)a2 = phi12(b)
        linkAlpha2(alpha01(tmp), addMapDart());

        // phi9(b)a1 = phi10(b)
        linkAlpha1(alpha010(tmp), addMapDart());

        // phi10(b)a0 = phi11(b)
        linkAlpha0(alpha0101(tmp), addMapDart());

        // phi11(b)a1 = phi6(b)
        linkAlpha1(alpha01010(tmp), tmp);

        // phi12(b)a0 = phi13(b)
        linkAlpha0(alpha012(tmp), addMapDart());
        // phi12(b)a1 = phi5(b)
        linkAlpha1(alpha012(tmp), alpha21012(current));

        // phi13(b)a1 = phi5(b)
        linkAlpha1(alpha0(alpha012(tmp)), alpha21012(to[i]));
        // phi13(b)a2 = phi9(b)
        linkAlpha2(alpha0(alpha012(tmp)), alpha010(tmp));
    }
}

```

```
// phin(b)a3 = phin(ba1) with n in [6, 11]
CDart *current[] = { phi6[0], phi6[1] };
for (int i = 0; i < 6; ++i) {
    linkAlpha3(current[0], current[1]);
    current[0] = alpha(current[0], i%2);
    current[1] = alpha(current[1], i%2);
}

// phi10(b) = phi10(ba1)
linkAlpha2(alpha0101(phi6[0]), alpha0101(phi6[1]));
// phi11(b) = phi11(ba1)
linkAlpha2(alpha01010(phi6[0]), alpha01010(phi6[1]));

assert(checkTopology());
}
```

## Références

- [BSP<sup>+</sup>05] Sylvain Brandel, Sébastien Schneider, Michel Perrin, Nicolas Guiard, Jean-François Rainaud, Pascal Lienhardt, and Yves Bertrand. Automatic building of structured geological models. *JCISEV*, 2005.
- [DL03] Guillaume Damiand and Pascal Lienhardt. Removal and contraction for n-dimensional generalized maps, dgci 2003, naples, italy. pages 408–419, 2003.
- [Lie89] Pascal Lienhardt. Subdivisions of surfaces and generalized maps. *Eurographics'89*, pages 439–452, 1989.
- [Per98] Michel Perrin. Geological consistency : an opportunity for safe surface assembly and quick model exploration. *3D Modeling of Natural Objects, A Challenge for the 2000's*, Juin 1998.
- [Sch02] Sébastien Schneider. *Pilotage automatique de la construction de modèles géologiques surfaciques*, École des Mines de Saint-Étienne. PhD thesis, 2002.