ШКОЛЬНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

В. С. Крамор

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Москва
ОНИКС • Мир и Образование
2007

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72
К78

Крамор В. С.

К78 Задачи с параметрами и методы их решения / В. С. Крамор. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2007. — 416 с.: ил. — (Школьный курс математики).

ISBN 978-5-488-01066-6 (ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 978-5-94666-362-5 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

Цель книги — научить школьников и абитуриентов вузов самостоятельно решать задачи с параметрами и помочь прочно усвоить различные методы их решения.

Пособие содержит около 350 типовых задач с методическими указаниями и 300 задач для самостоятельного решения и ответы к ним.

Книга может быть использована при подготовке к выпускным экзаменам в средней школе, к сдаче ЕГЭ и вступительным экзаменам в вуз.

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72

Учебное издание

ШКОЛЬНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Крамор Виталий Семенович

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ
и методы их решения

Редактор *А. М. Суходский*. Младший редактор *Н. А. Карасева*
Техн. редактор *Е. А. Вишнякова*. Компьютерная верстка *Е. Ю. Пучковой*

Подписано в печать 26.02.2007. Формат 60x90 1/16. Гарнитура «Школьная».
Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,00. Тираж 5000 экз. Заказ № .

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательство Оникс».
127422, Москва, ул. Тимирязевская, д. 38/25. Почтовый адрес: 117418, Москва, а/я 26.
Отдел реализации: тел. (495) 119-02-20, 110-02-50. Internet: www.onyx.ru; e-mail: mail@onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001. 109193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.
Тел./факс: (495) 120-51-47, 129-09-60, 742-43-54. E-mail: mir-obrazovanie@onyx.ru

ISBN 978-5-488-01066-6 (ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 978-5-94666-362-5 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Задачи с параметрами являются одними из наиболее трудных задач курса элементарной математики. Их решение по существу представляет собой исследование функций, входящих в условие задачи, и последующее решение уравнений или неравенств с числовыми коэффициентами. При решении уравнений (неравенств) с параметрами необходимо выяснить, при каких значениях параметра заданное уравнение (неравенство) имеет решение, и найти все эти решения. В том случае, когда хотя бы одно из допустимых значений параметра не исследовано, задание не считается полностью решенным.

В течение многих лет задачи с параметрами включаются в экзаменационные билеты по математике для абитуриентов высших учебных заведений, а в последние годы такие задачи предлагаются и при сдаче ЕГЭ.

Как правило, немногие абитуриенты могут решить подобные задачи, что приводит к снижению оценки за письменную работу, и часто именно из-за этого нехватает нужного количества баллов при зачислении в вуз.

Общеобразовательная школа по многим причинам не может научить своих учеников решать задачи с параметрами. Это очень трудный материал, требующий большого количества времени; кроме того, прежде чем приступать к решению подобных задач учащийся должен в совершенстве овладеть общим курсом математики.

Цель данной книги состоит в том, чтобы попытаться научить выпускников средней школы и абитуриентов вузов самостоятельно решать задачи с параметрами и прочно усвоить различные методы, применяющиеся в процессе их решения.

Весь учебный материал разбит на 18 тем, имеющих одну и ту же структуру. Каждая тема (за исключением тем 10 и 11) содержит: справочный материал; задачи с решениями; задачи для самостоятельного решения и ответы к ним. Кроме того, имеются два приложения: «Текстовые задачи на составление уравнений и неравенств» и «Разные задачи».

В общей сложности книга содержит около 350 задач с решениями и около 300 задач для самостоятельного решения.

В разделе «Справочный материал» приводятся формулировки определений, правил, теорем и т. д.

Теоретические сведения изложены конспективно в той же последовательности, что и при изучении их в школе. Указанный раздел является весьма важным, поскольку в случае затруднений при анализе решений задач или при их самостоятельном решении учащийся может получить необходимые консультации, обращаясь к справочному материалу.

В разделе «Задачи с решениями» приводятся решения задач с параметрами, относящихся к заданной теме. Этот раздел содержит большое количество задач, решения которых основаны, с одной стороны, на общих теоретических сведениях из школьного курса математики (определениях, правилах, теоремах, следствиях), а с другой — на специфических особенностях задач, содержащих параметры (умении определенным образом классифицировать значения параметра, переходе от исходной задачи к равносильной ей, использовании наиболее рационального метода решения, умении мыслить логически и т. д.). Каждая задача из этого раздела решается подробнейшим образом, каждое действие в процессе решения нумеруется, поскольку оно несет определенную смысловую нагрузку. В качестве заключительного действия любая задача сопровождается подробным ответом, в котором для каждого допустимого значения параметра записывается соответствующее этому значению решение задачи.

Раздел «Задачи для самостоятельного решения» предназначен для тех учащихся, которые уже усвоили предыдущий раздел и хотят закрепить свои знания и умения самостоятельно.

Книга завершается двумя приложениями. Приложение 1 содержит текстовые задачи на составление уравнений и неравенств с параметрами, а Приложение 2 — разные задачи, не только аналогичные тем, что и в уже рассмотренных темах, но и такие, которые по тем или иным причинам в эти темы не вошли.

В конце книги приводится обширный список литературы, которой пользовался автор при подготовке настоящего издания. Многие задачи, взятые из указанных пособий, входили в экзаменационные билеты для поступающих в различные вузы страны.

В заключение несколько слов о том, как пользоваться этим пособием. По мнению автора, не следует начинать с анализа тех решений, которые приведены в книге. Прежде всего нужно в совершенстве владеть методами решения примеров и задач, не содержащих параметры. В частности, усвоению таких методов может способствовать книга: *В. С. Крамор*. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа (М.: ОНИКС, Мир и Образование, 2007). Из упомянутой книги следует усвоить только один раздел: «Упражнения с решениями». Лишь после этого можно переходить к анализу решенных в настоящей книге задач с параметрами. Сначала попробуйте самостоятельно решить какую-либо задачу, а в случае затруднений обращайтесь к ее решению, приведенному в книге. Усваивайте приемы, использованные при решении этой задачи, так как в дальнейшем тот или иной прием может оказаться полезным.

Успехов вам, школьники и абитуриенты!

Автор

Тема 1

1. Натуральные числа
2. Простые и составные числа
3. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби
4. Множество целых чисел, множество рациональных чисел
5. Модуль числа
6. Возведение рациональных чисел в степень с натуральным показателем
7. Свойства степени с натуральным показателем
8. Числовые выражения. Выражения с переменными. Тождественно равные выражения
9. Одночлены. Многочлены
10. Формулы сокращенного умножения

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Натуральные числа

1°. Понятие ***натурального числа*** относится к простейшим, первоначальным понятиям математики и не определяется через другие, более простые понятия.

2°. Натуральные числа возникли в результате счета предметов. В порядке возрастания их можно записать как ряд чисел 1, 2, 3, 4, ... , т. е. это целые положительные числа.

3°. Множество натуральных чисел обозначают $\boldsymbol{N}$.

2. Простые и составные числа

1°. Число a называют ***простым***, если его делителями являются только единица и само число a.

2°. Число a, имеющее более двух натуральных делителем (кроме 1 и a), называют ***составным***.

3°. Заметим, что число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

3. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби

1°. Одну или несколько равных частей единицы называют ***обыкновенной дробью***.

2°. Обыкновенную дробь записывают с помощью черты и двух натуральных чисел.

3°. Число, записанное под чертой и показывающее, на сколько равных частей разделена единица, называют ***знаменателем*** дроби.

4°. Число, записанное под чертой и показывающее, сколько взято таких равных частей, называют ***числителем*** дроби.

5°. Дробь, в которой числитель меньше знаменателя, называют ***правильной***.

6°. Дробь, в которой числитель равен знаменателю или больше его, называют ***неправильной***.

7°. <u>Основное свойство дроби</u>. При умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же число, отличное от нуля, значение дроби не меняется.

4. Множество целых чисел, множество рациональных чисел

1°. Числа натуральные, им противоположные, а также число нуль составляют ***множество целых чисел***. Его обозначают $\boldsymbol{Z}$.

2°. Множество натуральных чисел, дополненное нулем, называют ***множеством целых неотрицательных чисел*** и обозначают $\boldsymbol{Z}_0$.

3°. Объединение множеств целых и дробных чисел (положительных и отрицательных) составляет множество рациональных чисел. Его обозначают $\boldsymbol{Q}$.

5. Модуль числа

1°. ***Модулем*** (***абсолютной величиной***) действительного числа a называют:

а) само это число, если $a \geqslant 0$;

б) противоположное число $(-a)$, если $a < 0$.

2°. Модуль числа a обозначают $|a|$.

3°. Итак,

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ (-a), & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

4°. Геометрически $|a|$ означает расстояние на координатной прямой от точки, изображающей число a, до начала отсчета.

6. Возведение рациональных чисел в степень с натуральным показателем

1°. ***Степенью*** числа a с показателем k, где $k \in \boldsymbol{N}$, $a \in \boldsymbol{Q}$, называют произведение k множителей, каждый из которых равен a:

$$a^k = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ раз}}.$$

2°. Число a называют ***основанием степени***, а число k — ***показателем степени***.

7. Свойства степени с натуральным показателем

1°. При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остается прежним:

$$a^k \cdot a^l = a^{k+l}, \text{ где } k, l \in \boldsymbol{N}.$$

2°. При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются, а основание остается прежним:

$$a^k : a^l = a^{k-l}, \text{ где } k, l \in \boldsymbol{N}.$$

3°. При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются, а основание остается прежним:

$$(a^k)^l = a^{kl}, \text{ где } k, l \in \boldsymbol{N}.$$

4°. Степень произведения равна произведению степеней множителей:

$$(abc)^k = a^k b^k c^k, \text{ где } k \in \boldsymbol{N}.$$

5°. Степень частного равна частному степеней делимого и делителя:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k}, \text{ где } b \neq 0, k \in \boldsymbol{N}.$$

8. Числовые выражения. Выражения с переменными. Тождественно равные выражения

1°. Из чисел, знаков действий и скобок можно составить различные ***числовые выражения***.

2°. Примерами ***выражений с переменными*** являются выражения $\frac{a+3}{5}$, $x^2 + y - 2$ и т. д.

3°. Значение выражения, содержащего переменную, зависит от значения переменной.

4°. Множество значений переменных, при которых выражение с переменными имеет смысл, называют ***областью определения*** этого ***выражения***.

5°. Выражение $\frac{3}{x-5}$ при $x = 5$ не имеет смысла, так как при $x = 5$ знаменатель дроби обращается в нуль.

6°. Два выражения называют ***тождественно равными***, если при всех значениях входящих в них переменных, принадлежащих общей области определения, соответственные значения этих выражений равны.

7°. Равенства, верные при всех допустимых значениях переменных, называют ***тождествами***.

9. Одночлены. Многочлены

1°. Выражение, представляющее собой произведение чисел, переменных и их степеней, называют ***одночленом***.

2°. Одночлены, отличающиеся только числовыми коэффициентами или равные между собой, называют ***подобными***.

3°. Алгебраическую сумму одночленов называют ***многочленом***.

4°. Преобразование многочлена в произведение двух или нескольких многочленов (среди которых могут быть и одночлены), называют ***разложением многочлена на множители***.

10. Формулы сокращенного умножения

1°. $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ (***разность квадратов***).

2°. $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + y^2 + 2xy$ (***квадрат суммы***).

3°. $(x - y)^2 = (x - y)(x - y) = x^2 + y^2 - 2xy$ (***квадрат разности***).

4°. $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 + y^2 - xy)$ (***сумма кубов***).

5°. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2 + xy)$ (***разность кубов***).

6°. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$ (***куб суммы***).

7°. $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3x^2y + 3xy^2$ (***куб разности***).

8°. $(a + x + y)^2 = a^2 + x^2 + y^2 + 2ax + 2ay + 2xy$.

9°. $(a - x - y)^2 = a^2 + x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + 2xy$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти все действительные решения уравнения

$$8a^4(x^4 + y^4) - 4a^2(x^2 + y^2) + 1 = 0. \tag{1}$$

1. Данное уравнение содержит параметр a и две переменные x и y.

2. Преобразуем уравнение (1) так:

а) разделив уравнение (1) на 2, раскроем скобки и получим

$$4a^4x^4 + 4a^4y^4 - 2a^2x^2 - 2a^2y^2 + \frac{1}{2} = 0; \tag{2}$$

б) в уравнении (2) представим $\frac{1}{2}$ как $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$;

в) сгруппируем члены $4a^4x^4 - 2a^2x^2 + \frac{1}{4}$ и $4a^4y^4 - 2a^2y^2 + \frac{1}{4}$; тогда уравнение (2) примет вид

$$4\left(a^2x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + 4\left(a^2y^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = 0; \tag{3}$$

г) разделив уравнение (3) на 4, получим

$$\left(a^2x^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(a^2y^2 - \frac{1}{4}\right)^2 = 0. \tag{4}$$

3. Левая часть уравнение (4) есть сумма двух неотрицательных слагаемых. Поэтому уравнение (4) может иметь место только при условиях

$$\begin{cases} a^2x^2 - \dfrac{1}{4} = 0, \\ a^2y^2 - \dfrac{1}{4} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

4. Решив систему (5), находим $|ax| = |ay| = \frac{1}{2}$, откуда $|x| = |y| =$ $= \frac{1}{2|a|}$ (при условии, что $a \neq 0$).

5. *Ответ*: если $a = 0$, то решений нет;

если $a \neq 0$, то $x_1 = \frac{1}{2a}$, $y_1 = \frac{1}{2a}$; $x_2 = -\frac{1}{2a}$, $y_2 = -\frac{1}{2a}$;

$x_3 = \frac{1}{2a}$, $y_3 = -\frac{1}{2a}$; $x_4 = -\frac{1}{2a}$, $y_4 = \frac{1}{2a}$.

2. Пусть m и n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

1. Так как $\frac{m}{n}$ — правильная дробь, то $m < n$ и потому $(3n - m)$ — натуральное число.

2. Пусть p $(p > 1)$ — натуральное число, на которое можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$.

3. Это значит, что натуральные числа $3n - m$ и $5n + 2m$ делятся на p, т. е. существуют натуральные числа N и M такие, что $3n - m =$ $= pN$ и $5n + 2m = pM$.

4. Отсюда следует, что

$$11n = p(2N + M),\ 11m = p(3M - 5N),$$

т. е. числа $11n$ и $11m$ делятся на p.

5. Так как дробь $\frac{m}{n}$ несократима, т. е. числа n и m не имеют общих делителей, то 11 делится на p.

6. Поскольку $p > 1$ и 11 — простое число, отсюда следует, что $p = 11$.

7. *Ответ*: 11.

3. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существуют четыре натуральных числа x, y, u, v, удовлетворяющих равенствам

$$(x + y)(x + y + 20) = (140 - a)(a - 80), \tag{1}$$

$$a(8u^2 + 2v^2 - a) = (4u^2 - v^2)^2. \tag{2}$$

1. Преобразуем равенство (2) следующим образом:

$$2a(4u^2 + v^2) - a^2 = (4u^2 - v^2)^2;$$
$$-a^2 + 2a(4u^2 + v^2) - (4u^2 + v^2)^2 = (4u^2 - v^2)^2 - (4u^2 + v^2)^2;$$
$$-[a - (4u^2 + v^2)]^2 = (4u^2 - v^2 - 4u^2 - v^2)(4u^2 - v^2 + 4u^2 + v^2);$$
$$-(a - 4u^2 - v^2)^2 = -2v^2 \cdot 8u^2; \; |a - 4u^2 - v^2| = 4uv;$$
$$a = (2u \pm v)^2. \qquad (3)$$

2. Так как u и v — натуральные числа, то число a должно быть точным квадратом некоторого натурального числа (или же нулем).

3. Левая часть равенства (1) положительна. Поэтому $(140 - a) \times \times (a - 80) > 0$, т. е. a должно удовлетворять двойному неравенству $80 < a < 140$. В этом интервале существуют три числа, являющиеся точными квадратами целых чисел: 81, 100 и 121.

4. Из равенства (1) для суммы $(x + y)$ получаем квадратное уравнение, которое, очевидно, должно иметь целые решения. Однако только при $a = 100$ это условие выполняется. Итак, решением задачи служит число 100.

5. *Ответ*: $a = 100$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все действительные решения уравнения:

а) $\frac{1}{a^2}(x^2 + 4y^2) - \frac{4}{a}(x - y) + 5 = 0;$

б) $x^6 + a^2y^6 + 4a(x^3 - y^3) + 4(a^2 + 1) = 0.$

2. Установить, при каких значениях параметра a существуют четыре натуральных числа x, y, u, v, удовлетворяющих равенствам:

а) $xy(40 + xy) = (150 - a)(a - 90),$
$a(8u^2 + 18v^2 - a) = (4u^2 - 9v^2)^2;$

б) $x^2 + y^2 = (107 - a)(a - 91),$
$54(u^2 + v^2) = a(15u + 3v - a).$

Ответы

1. а) Если $a = 0$, то решений нет (уравнение не имеет смысла); если $a \neq 0$, то $x = 2a$, $y = -0{,}5a$; б) если $a = 0$, то решений нет; если $a \neq 0$, то $x = -\sqrt[3]{2a}$, $y = \sqrt[3]{\frac{2}{a}}$. **2.** а) $a = 100$; б) $a = 99$.

Тема 2

1. Дробь
2. Целые и дробные выражения
3. Понятие об иррациональном числе
4. Числовые промежутки
5. Корень *k*-й степени из действительного числа
6. Преобразования арифметических корней
7. Степень с целым и дробным показателем

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Дробь

1°. ***Дробью*** называют выражение вида $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$), где буквами a и b обозначены числовые выражения или выражения с переменными.

2°. Область определения дроби $\frac{a}{b}$ — это множество чисел, при которых дробь имеет числовое значение. Следовательно, областью определения дроби $\frac{a}{b}$ является множество пар чисел (a; b), где $b \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3°. Дробь $\frac{a}{b}$ равна нулю тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b \neq 0$.

2. Целые и дробные выражения

1°. ***Целыми выражениями*** называют:

все числовые выражения;

выражения с переменными, содержащие операции сложения, вычитания, умножения и возведения переменных в натуральную степень.

2°. Выражения $4ab^{-3}$; $\frac{x}{y}$ не являются целыми, так как они содержат операции возведения в целую отрицательную степень и деления на переменную.

3°. Одночлены и многочлены являются целыми выражениями.

4°. Если в выражении с переменными, кроме операций сложения, умножения, вычитания и возведения в натуральную степень, производится и операция деления на переменную, то такие выражения называют ***дробными выражениями***.

3. Понятие об иррациональном числе

1°. Любое рациональное число вида $\frac{m}{n}$, где $n \neq 0$, можно представить в виде конечной или бесконечной периодической дроби.

2°. ***Иррациональным числом*** называют бесконечную десятичную непериодическую дробь, например, 0,31133417... .

3°. Объединение множества рациональных чисел и множества иррациональных чисел (бесконечных десятичных непериодических дробей) дает ***множество R действительных чисел***.

4. Числовые промежутки

Для ***числовых промежутков*** вводятся следующие обозначения:

1°. $[a; b]$ или $a \leqslant x \leqslant b$ — ***замкнутый промежуток*** (или ***отрезок***) с началом a и концом b.

2°. $(a; b)$ или $a < x < b$ ***открытый промежуток*** (или ***интервал***).

3°. $(a; b]$; $[a; b)$ или $a < x \leqslant b$; $a \leqslant x < b$ — ***полуоткрытые промежутки*** (***полуинтервалы***).

4°. $[a; +\infty)$ или $x \geqslant a$, $(-\infty; b]$ или $x \leqslant b$ — ***лучи***.

5°. $(a; +\infty)$ или $x > a$, $(-\infty; b)$ или $x < b$ — ***открытые лучи***.

6°. $(-\infty; +\infty) = R$ — ***числовая (координатная) прямая***.

5. Корень k-й степени из действительного числа

1°. ***Корнем k-й степени***, где $k \in N$ и $k \neq 1$, из действительного числа a называют действительное число b, k-я степень которого равна a.

2°. Корень k-й степени из числа a обозначают символом $\sqrt[k]{a}$. Согласно определению, $(\sqrt[k]{a})^k = a$.

3°. Число k называют ***показателем корня***, число a — ***подкоренным выражением***.

4°. Заметим, что $\sqrt[2n]{a}$, где $n \in \boldsymbol{N}$ и $a < 0$, не существует.

5°. Корень нечетной степени извлекается и из отрицательного числа.

6°. Определение арифметического корня: ***арифметическим корнем*** k-й степени из неотрицательного числа a ($a \geqslant 0$) называют неотрицательное число b, k-я степень которого равна a, где $k > 1$ — натуральное число.

З а м е ч а н и е. В школьном курсе (и в этой книге) рассматривается только арифметическое значение корня, т. е. $\sqrt[k]{a}$ имеет смысл лишь при $a \geqslant 0$ и принимает только неотрицательное значение.

6. Преобразования арифметических корней

1°. $\sqrt[k]{ab} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ (правило извлечения корня из произведения).

2°. $\sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$, где $a \geqslant 0$, $b > 0$ (правило извлечения корня из дроби).

3°. $\sqrt[k]{\sqrt[c]{a}} = \sqrt[kc]{a}$, где $a \geqslant 0$, $k \in \boldsymbol{N}$, $k > 1$, $c > 1$ (правило извлечения корня из корня).

4°. $(\sqrt[k]{a})^m = \sqrt[k]{a^m}$, где $a \geqslant 0$ (правило возведения корня в степень).

5°. $\sqrt[k]{a^m} = \sqrt[kn]{a^{m \cdot n}}$, где $a \geqslant 0$, $m \in \boldsymbol{N}$, $n \in \boldsymbol{N}$, т. е. показатель корня и показатель подкоренного выражения можно умножить на одно и то же число.

6°. Если $a_1 > a_2 > 0$, то $\sqrt[k]{a_1} > \sqrt[k]{a_2} > 0$, т. е. большему положительному подкоренному выражению соответствует и большее значение корня.

З а м е ч а н и е. Все указанные выше формулы часто применяют в обратном порядке (т. е. справа налево).

7. Степень с целым и дробным показателем

1°. Если $p = 0$, то $a^0 = 1$ (при $a \neq 0$).

2°. Если $p < 0$, то $a^p = \dfrac{1}{a^{-p}}$ (при $a \neq 0$).

3°. Выражение $a^{\frac{p}{q}}$ в общем виде имеет смысл только при $a > 0$.

Если $a > 0$, $p \in \boldsymbol{Z}$, $q \in \boldsymbol{N}$, то по определению $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. Известно, что

$$\frac{\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{a^2(a-b)^2}} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}}(\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3})}{b^2\sqrt[3]{a-b}} = 7.$$

Во сколько раз значение параметра a больше значения параметра b, если оба эти числа положительны?

1. Имеем $(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3})(\sqrt{a^3} - \sqrt{b^3}) = a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

2. Выполнив дальнейшие тождественные преобразования левой части исходного выражения, получим

$$\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)a^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{a^2(a-b)^2}b^2\sqrt[3]{a-b}} = \frac{a^2+ab+b^2}{b^2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + 1 = 7.$$

3. Пусть $x = \dfrac{a}{b}$. Решив квадратное уравнение $x^2 + x + 1 = 7$, находим $x_1 = -3$; $x_2 = 2$.

4. Так как по условию $a > 0$ и $b > 0$, то $x = \dfrac{a}{b} > 0$. Значит, $x_1 = -3$ является посторонним корнем. Итак, $a = 2b$.

5. *Ответ*: в 2 раза.

2. В зависимости от параметров m и n найти значение выражения

$$A = \frac{2n\sqrt{x^2-4}}{x - \sqrt{x^2-4}}, \text{ где } x = \sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

1. Так как $\sqrt{\dfrac{m}{n}}$ и $\sqrt{\dfrac{n}{m}}$ имеют арифметические значения, то $\dfrac{m}{n} > 0$, $\dfrac{n}{m} > 0$, т. е. $mn > 0$.

2. Возведем выражение $x = \sqrt{\dfrac{m}{n}} + \sqrt{\dfrac{n}{m}}$ в квадрат: $x^2 = \dfrac{m}{n} + \dfrac{n}{m} + 2$. Тогда получим

$$\sqrt{x^2 - 4} = \sqrt{\frac{(m-n)^2}{mn}} = \frac{|m-n|}{\sqrt{mn}}.$$

3. Пусть $m > 0$, $n > 0$. Упростим выражение A:

$$A = \frac{2n\dfrac{|m-n|}{\sqrt{mn}}}{\left(\sqrt{\dfrac{m}{n}} + \sqrt{\dfrac{n}{m}}\right) - \dfrac{|m-n|}{\sqrt{mn}}} = \frac{2n|m-n|}{\sqrt{mn}\left(\sqrt{\dfrac{m}{n}} + \sqrt{\dfrac{n}{m}}\right) - |m-n|} = \frac{2n|m-n|}{m+n-|m-n|}.$$

Учитывая, что

$$|m-n| = m-n \text{ при } m > n,\ |m-n| = -(m-n) \text{ при } m < n,$$

находим:

а) если $m > n$, то $A = \dfrac{2n(m-n)}{m+n-m+n} = m - n$;

б) если $m < n$, то $A = \dfrac{2n(n-m)}{m+n-n+m} = \dfrac{n(n-m)}{m}$.

4. Пусть $m < 0$, $n < 0$. В этом случае, преобразуя выражение A, надо учесть, что

$$\sqrt{mn}\left(\sqrt{\frac{m}{n}} + \sqrt{\frac{n}{m}}\right) = \sqrt{m^2} + \sqrt{n^2} = |m| + |n| = -m - n.$$

Поэтому

$$A = \frac{2n|m-n|}{(-m-n)-|m-n|},$$

откуда находим:

а) если $m > n$, то $A = \dfrac{2n(m-n)}{-m-n-m+n} = \dfrac{n(n-m)}{m}$;

б) если $m < n$, то $A = \dfrac{2n(n-m)}{-m-n-n+m} = m - n$.

5. *Ответ*: если $0 < n < m$, то $A = m - n$;

если $0 < m < n$, то $A = \frac{n(n-m)}{m}$;

если $n < m < 0$, то $A = \frac{n(n-m)}{m}$;

если $m < n < 0$, то $A = m - n$.

3. Определить все такие целые числа a и b, для которых один из корней уравнения

$$3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0 \tag{1}$$

равен $\sqrt{3} + 1$.

1. Для того чтобы многочлен $P_3(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$ в левой части уравнения (1) имел своим корнем число $\sqrt{3} + 1$, необходимо, чтобы выполнялось равенство $P_3(\sqrt{3} + 1) = 0$, т. е.

$$3(\sqrt{3} + 1)^3 + a(\sqrt{3} + 1)^2 + b(\sqrt{3} + 1) + 12 = 0. \tag{2}$$

2. После упрощения равенство (2) примет вид

$$(4a + b + 42) + \sqrt{3}(2a + b + 18) = 0. \tag{3}$$

3. Так как a и b — целые числа, то целыми числами будут также выражения, записанные в круглых скобках в равенстве (3).

4. Эти выражения должны быть равны нулю, иначе придем к противоречию: целое число равно иррациональному числу.

5. Итак, необходимо, чтобы

$$\begin{cases} 4a + b + 42 = 0, \\ 2a + b + 18 = 0, \end{cases}$$

откуда находим $a = -12$, $b = 6$.

6. *Ответ*: $a = -12$, $b = 6$.

4. Число a подобрано так, что уравнение

$$\sqrt{x - \sqrt{3}} + a^2x^2 + 2ax(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 6\sqrt{2} - 9 \tag{1}$$

имеет решение. Найти это решение.

1. Пусть x_0 — действительное число, являющееся решением уравнения (1).

2. Тогда справедливо равенство

$$\sqrt{x_0 - \sqrt{3}} + a^2 x_0^2 + 2ax_0(\sqrt{6} - \sqrt{3}) - 6\sqrt{2} + 9 = 0. \qquad (2)$$

3. Равенство (2) можно переписать в виде

$$a^2 + 2a\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{x_0}\right) + \frac{\sqrt{x_0 - \sqrt{3}} + 9 - 6\sqrt{2}}{x_0^2} = 0,$$

или, выделив полный квадрат относительно a, в виде

$$\left(a + \frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{x_0}\right)^2 + \frac{\sqrt{x_0 - \sqrt{3}}}{x_0^2} = 0.$$

4. Отсюда ясно, что одновременно справедливы два равенства:

$$a = -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{x_0} \text{ и } \sqrt{x_0 - \sqrt{3}} = 0.$$

5. Из второго равенства получаем $x_0 = \sqrt{3}$; тогда из первого равенства следует, что $a = 1 - \sqrt{2}$.

6. Легко установить, что при найденном значении $a = 1 - \sqrt{2}$ число $x_0 = \sqrt{3}$ действительно есть корень исходного уравнения.

7. *Ответ*: $\sqrt{3}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти зависимость между значениями параметров a и b, если известно значение заданного выражения:

а) $\dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{a+b}}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{a+b}}\left(1 + \dfrac{a^2 + b^2 - 4}{2ab}\right)(a + b + 2)^{-2} = \dfrac{1}{6}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq -b$;

б) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{2ba^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1} + b\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{2ab^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1} = 8$, $a > 0$, $b > 0$;

в) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}:(a-b)+\dfrac{b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}=5$, $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

2. Найти все целые числа a и b, для которых один из корней уравнения:

а) $x^3+ax^2+bx-8=0$ равен $1-\sqrt{3}$;

б) $ax^3+bx^2-12x+5=0$ равен $\sqrt{6}-1$.

Ответы

1. а) $b=\dfrac{3}{a}$; б) $b=\dfrac{4}{a}$; в) $b=0{,}8a$. **2.** а) $a=2$, $b=-10$; б) $a=2$, $b=3$.

Тема 3

1. Уравнения с одной переменной
2. Понятие о равносильности уравнений
3. Свойства числовых равенств и теоремы о равносильности уравнений
4. Линейное уравнение с одной переменной, содержащее параметр

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Уравнения с одной переменной

1°. Пусть заданы функции $f(x)$ и $\varphi(x)$. Если относительно равенства $f(x) = \varphi(x)$ поставлена задача найти все значения переменной, при которых получается верное числовое равенство, то говорят, что задано ***уравнение с одной переменной***.

2°. Значение переменной, обращающее уравнение в истинное равенство, называют ***корнем уравнения***.

3°. Решить уравнение — значит найти множество его корней или доказать, что их нет. Это множество называют также ***решением уравнения***.

4°. Множество всех x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $\varphi(x)$, называют ***областью определения уравнения***.

5°. Для того чтобы установить область определения уравнения, необходимо найти пересечение множеств, на которых определены данные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$.

2. Понятие о равносильности уравнений

1°. Два уравнения называют ***равносильными*** (или ***эквивалентными***) на данном числовом множестве, если каждое решение (корень) одного уравнения является решением (корнем) другого, и наоборот.

2°. Заметим, что если оба уравнения не имеют решений на данном числовом множестве, то их также считают равносильными на этом множестве.

3°. Например, уравнения $x^2 + 3 = 0$ и $x^4 + 2 = 0$ равносильны на множестве действительных чисел, так как множество решений каждого из них пустое.

3. Свойства числовых равенств и теоремы о равносильности уравнений

1°. Числовое равенство не нарушится, если к обеим его частям прибавить или отнять одно и то же число.

2°. Если к обеим частям уравнения $f(x) = \varphi(x)$ прибавить одну и ту же функцию $A(x)$, имеющую смысл при всех допустимых значениях переменной, то получится новое уравнение $f(x) + A(x) = \varphi(x) + A(x)$, равносильное данному.

3°. Любое слагаемое можно перенести из одной части уравнения в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.

4°. Числовое равенство не нарушится, если обе его части умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля.

5°. Если обе части уравнения $f(x) = \varphi(x)$ умножить (или разделить) на одну и ту же функцию $A(x) \neq 0$, имеющую смысл для любого x из области определения, то получится новое уравнение $A(x) \cdot f(x) = A(x) \cdot \varphi(x)$ или $\dfrac{f(x)}{A(x)} = \dfrac{\varphi(x)}{A(x)}$, равносильное данному.

4. Линейное уравнение с одной переменной, содержащее параметр

1°. Пусть дано уравнение вида

$$f(a, b, c, \ldots, k, x) = \varphi(a, b, c, \ldots, k, x), \tag{1}$$

где $a, b, c, \ldots, k, x$ — переменные величины.

2°. Переменные $a, b, c, \ldots, k$, которые при решении уравнения (1) считаются постоянными, называют ***параметрами***, а само уравнение называют ***уравнением, содержащим параметры***.

3°. Решить уравнение (1) — значит указать, при каких значениях параметров существуют значения x, удовлетворяющие данному уравнению.

З а м е ч а н и я.

1. В дальнейшем уравнение

$$F(x, a) = 0 \tag{2}$$

условимся понимать не как уравнение с двумя переменными, а как уравнение с одной переменной x и одним параметром a.

2. Решить уравнение (2) — это значит решить (на множестве действительных чисел) семейство уравнений, которые получаются из уравнения (2) при различных действительных значениях параметра a.

3. При решении уравнения с параметром (параметрами) стремятся выделить «особые» значения параметра (иногда их называют «контрольными»), в которых или при переходе через которые происходит качественное изменение уравнения.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $ax = 0$.

1. Это уравнение содержит параметр a (переменную, которая в условии данного примера сохраняет одно и то же значение).

2. а) Пусть $a = 0$; тогда $0 \cdot x = 0$, т. е. $x \in \boldsymbol{R}$.

б) Пусть $a \neq 0$; тогда $x = \frac{0}{a} = 0$.

3. *Ответ*: если $a = 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$;
если $a \neq 0$, то $x = 0$.

2. В зависимости от значений параметра a решить уравнение $ax = a$.

1. Данное уравнение содержит параметр a.

2. а) Пусть $a = 0$; тогда $0 \cdot x = 0$, т. е. $x \in \boldsymbol{R}$.

б) Пусть $a \neq 0$; тогда $x = \frac{a}{a} = 1$.

3. *Ответ*: если $a = 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$;
если $a \neq 0$, то $x = 1$.

3. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$x + 2 = ax. \qquad (1)$$

1. Данное уравнение содержит параметр a.

2. После упрощения уравнение (1) примет вид $x - ax = -2$, т. е.

$$x(1 - a) = -2. \qquad (2)$$

3. а) Пусть $1 - a = 0$, т. е. $a = 1$; тогда получим уравнение $x \cdot 0 = -2$, которое не имеет корней.

б) Пусть $1 - a \neq 0$, т. е. $a \neq 1$; тогда уравнение (2) имеет единственный корень $x = \frac{2}{a-1}$.

4. *Ответ*: если $a = 1$, то нет корней;

если $a \neq 1$, то единственный корень $x = \dfrac{2}{a-1}$.

З а м е ч а н и е. Как понимать выражение: «уравнение имеет единственный корень»?

Это означает, что каждому допустимому значению a соответствует единственное значение x.

Например, если $a = 0$, то $x = -2$; если $a = 2$, то $x = 2$ и т. д.

4. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$(a^2 - 1)x = 2a^2 + a - 3. \qquad (1)$$

1. Приведем уравнение (1) к виду

$$(a - 1)(a + 1)x = (2a + 3)(a - 1). \qquad (2)$$

2. а) Пусть $a = 1$; тогда уравнение (2) примет вид $0 \cdot x = 0$. Его решением является любое действительное число, т. е. $x \in \boldsymbol{R}$.

б) Пусть $a = -1$; тогда уравнение (2) примет вид $0 \cdot x = -2$. Это уравнение не имеет решений.

в) Пусть $a \neq -1$ и $a \neq 1$; тогда уравнение (2) имеет единственное решение

$$x = \frac{2a+3}{a+1}.$$

3. *Ответ*: если $a = 1$, то $x \in \boldsymbol{R}$;

если $a = -1$, то нет корней;

если $a \neq -1$, $a \neq 1$, то $x = \dfrac{2a+3}{a+1}$.

5. Решить уравнение

$$2a(a - 2)x = a - 2. \qquad (1)$$

1. Пусть $a = 0$; тогда уравнение (1) примет вид $0 \cdot x = -2$. Это уравнение не имеет решений.

2. Пусть $a = 2$; тогда уравнение (1) примет вид $0 \cdot x = 0$. Корнем этого уравнения служит любое действительное число.

3. Пусть $a \neq 0$ и $a \neq 2$; тогда из уравнения (1) следует, что $x = \dfrac{a-2}{2a(a-2)}$, откуда находим $x = \dfrac{1}{2a}$.

4. *Ответ*: если $a = 0$, то корней нет;
если $a = 2$, то $x \in \boldsymbol{R}$;
если $a \neq 0$, $a \neq 2$, то $x = \dfrac{1}{2a}$.

6. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$\frac{a + x}{x^2 - 5x - 6} = 0.$$

1. По смыслу уравнения должно быть $x^2 - 5x - 6 \neq 0$, т. е. $x \neq -1$, $x \neq 6$.

2. При $x \neq -1$ и $x \neq 6$ данное уравнение имеет решение $x = -a$.

3. Из условий $x \neq -1$ и $x \neq 6$ следует, что $a \neq 1$ и $a \neq -6$.

4. *Ответ*: если $a \neq -6$, $a \neq 1$, то $x = -a$;
если $a = -6$, $a = 1$, то $x \in \varnothing$.

7. При каких значениях параметра b уравнение

$$ax - b = 2a + 3x \qquad (1)$$

имеет решение для любого a?

1. Преобразуем уравнение (1) к виду

$$(a - 3)x = b + 2a. \qquad (2)$$

2. Пусть $a \neq 3$; тогда уравнение (2) имеет решение

$$x = \frac{b + 2a}{a - 3}$$

при любом значении b.

3. Следовательно, единственным значением a, при котором могут отсутствовать решения уравнения (2), является $a = 3$. В этом случае уравнение (2) примет вид

$$0 \cdot x = b + 6. \qquad (3)$$

4. Если $b \neq -6$, то уравнение (3) не имеет решений. Если же $b = -6$, то любое $x \in \boldsymbol{R}$ есть решение уравнения (3).

5. Итак, $b = -6$ есть единственное значение параметра b, при котором уравнение (2) имеет решение для любого a (а именно, $x = 2$ для $a \neq 3$ и $x \in \boldsymbol{R}$ для $a = 3$).

6. *Ответ*: $b = -6$.

8. В зависимости от значений параметра k решить уравнение

$$\frac{3kx-5}{(k-1)(x+3)}+\frac{3k-11}{k-1}=\frac{2x+7}{x+3}. \qquad (1)$$

1. По смыслу уравнения должно быть $(k-1)(x+3)\neq 0$, т. е. $k\neq 1$, $x\neq -3$.

2. Упростив уравнение (1), получим

$$3kx-5+(3k-11)(x+3)=(2x+7)(k-1),$$

или

$$(4k-9)x=31-2k. \qquad (2)$$

3. Из уравнения (2) при $k\neq \frac{9}{4}$ находим

$$x=\frac{31-2k}{4k-9}.$$

4. Теперь проверим, существуют ли такие k, при которых найденное значение x равно (-3). Имеем

$$\frac{31-2k}{4k-9}=-3,$$

откуда $k=-\frac{2}{5}$.

5. Таким образом, при $k\neq 1$, $k\neq \frac{9}{4}$, $k\neq -\frac{2}{5}$ уравнение (1) имеет единственное решение $x=\frac{31-2k}{4k-9}$; при $k=\frac{9}{4}$ и при $k=-\frac{2}{5}$ решений нет; при $k=1$ уравнение не имеет смысла.

6. *Ответ*: если $k\neq -\frac{2}{5}$, $k\neq 1$, $k\neq \frac{9}{4}$, то $x=\frac{31-2k}{4k-9}$;

если $k=-\frac{2}{5}$ или $k=\frac{9}{4}$, то корней нет;

если $k=1$, то уравнение не имеет смысла.

З а м е ч а н и я.

1. Необходимо иметь в виду, что если при каком-либо значении параметра $k=k_0$ данное уравнение не имеет смысла, то, разумеется, нет и его решения при $k=k_0$.

2. Обратное утверждение неверно. Например, нельзя утверждать, что при $k = -\frac{2}{5}$ рассмотренное выше уравнение не имеет смысла.

3. Подставив в уравнение (1) значение $k = -\frac{2}{5}$, получим

$$\frac{6x+25}{7(x+3)} + \frac{61}{7} = \frac{2x+7}{x+3}. \tag{3}$$

Таким образом, при $k = -\frac{2}{5}$ уравнение (1) имеет смысл. Однако это уравнение не имеет корней, так как корень $x = -3$ уравнения $53x = -159$, к которому сводится уравнение (3), является для него посторонним.

9. Решить относительно x уравнение

$$\frac{a^2+x}{b^2-x} - \frac{a^2-x}{b^2+x} = \frac{4abx+2a^2-2b^2}{b^4-x^2}. \tag{1}$$

1. По смыслу уравнения $x \neq \pm b^2$.

2. Так как $b^4 - x^2 \neq 0$, то, умножив обе части уравнения (1) на $b^4 - x^2$, получим

$$(a-b)^2 x = a^2 - b^2. \tag{2}$$

3. Пусть $a = b$; тогда уравнение (2) примет вид $0 \cdot x = 0$, т. е. оно удовлетворяется при любом действительном значении x, кроме $x = \pm b^2$.

4. Пусть $a \neq b$; тогда уравнение (2) примет вид

$$x = \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a-b}.$$

5. Найдем теперь те значения a и b, при которых выполняются равенства $\frac{a+b}{a-b} = b^2$ и $\frac{a+b}{a-b} = -b^2$:

а) $\frac{a+b}{a-b} = b^2$; $a + b = ab^2 - b^3$, откуда $a = \frac{b(b^2+1)}{b^2-1}$;

б) $\frac{a+b}{a-b} = -b^2$; $a + b = -ab^2 + b^3$, откуда $a = \frac{b(b^2-1)}{b^2+1}$.

6. *Ответ*: если $a \neq b$, $a \neq \dfrac{b(b^2+1)}{b^2-1}$, $a \neq \dfrac{b(b^2-1)}{b^2+1}$, то $x = \dfrac{a+b}{a-b}$;

если $a = b$, то $x \in \boldsymbol{R}$, кроме $x = \pm b^2$;

если $a = \dfrac{b(b^2+1)}{b^2-1}$ или $a = \dfrac{b(b^2-1)}{b^2+1}$, то корней нет.

10. Найти значения параметра m, при которых уравнение

$$m^2x - m^2 + 6 = 4x + m \qquad (1)$$

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений.

1. Приведем уравнение (1) к виду

$$(m^2 - 4)x = m^2 + m - 6. \qquad (2)$$

2. Уравнение (2) имеет единственное решение, если $m^2 - 4 \neq 0$, т. е. если $m \neq \pm 2$.

3. Уравнение (2) не имеет решений, если выполнены условия

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0, \\ m^2 + m - 6 \neq 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} m = \pm 2, \\ m \neq 2;\ m \neq -3, \end{cases} \text{ откуда } m = -2.$$

4. Уравнение (2) имеет бесконечное множество решений, если и коэффициент при x, и правая часть одновременно равны нулю:

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0, \\ m^2 + m - 6 = 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} m = \pm 2, \\ m = 2;\ m = -3, \end{cases} \text{ откуда } m = 2.$$

5. *Ответ*: а) $m \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$;
б) $m = -2$; в) $m = 2$.

11. В зависимости от значений параметра k решить уравнение

$$\frac{2}{kx+2} = \frac{1}{2x+k}. \qquad (1)$$

1. Допустимыми значениями x и k являются те, при которых $kx + 2 \neq 0$ и $2x + k \neq 0$, т. е. $kx \neq -2$ и $2x \neq -k$.

2. Упростив уравнение (1) при допустимых значениях k и x, получим $4x + 2k = kx + 2$, или

$$(k - 4)x = 2(k - 1). \qquad (2)$$

3. Пусть $k = 4$; тогда уравнение (2) не имеет решений.

Пусть $k \neq 4$; тогда $x = \frac{2(k-1)}{k-4}$.

4. Исключим теперь значения k, при которых $kx = -2$ и $2x = -k$.

а) $kx = -2$, т. е. $\frac{2k(k-1)}{k-4} = -2$ или

$$\begin{cases} k^2 - k = -k + 4, \\ k \neq 4, \end{cases} \quad \text{откуда } k = \pm 2,\ k \neq 4.$$

б) Эти же значения k получим, решив уравнение $2x = -k$. Действительно, $2x = -k$, т. е. $\frac{4(k-1)}{k-4} = -k$ или

$$\begin{cases} 4k - 4 = -k^2 + 4k, \\ k \neq 4, \end{cases} \quad \text{откуда } k = \pm 2,\ k \neq 4.$$

5. *Ответ*: если $k \neq \pm 2$, $k \neq 4$, то $x = \frac{2(k-1)}{k-4}$;

если $k \in \{\pm 2;\ 4\}$, то $x \in \varnothing$.

12. В зависимости от значений параметров a и b решить уравнение

$$\frac{ax-1}{x-1} + \frac{b}{x+1} - \frac{a(x^2+1)}{x^2-1} = 0. \qquad (1)$$

1. Уравнение имеет смысл при всех $x \neq \pm 1$.

2. С учетом ОДЗ преобразуем уравнение (1) в равносильное:

$$(ax-1)(x+1) + b(x-1) = a(x^2+1),$$

или

$$x(a+b-1) = a+b+1. \qquad (2)$$

3. а) Пусть $a + b = 1$; тогда уравнение (2) не имеет решений.

б) Пусть $a + b \neq 1$; тогда $x = \frac{a+b+1}{a+b-1}$.

4. Из условия $x \neq -1$ следует, что $a + b + 1 \neq -(a + b - 1)$, т. е. $a + b \neq 0$.

5. Равенство $x = 1$, т. е. $a + b + 1 = a + b - 1$, не выполняется ни при каких значениях a и b.

6. *Ответ*: если $a + b \neq 0$, $a + b \neq 1$, то $x = \frac{a+b+1}{a+b-1}$;

если $a + b = 0$ или $a + b = 1$, то $x \in \varnothing$.

13. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$\frac{a+2x}{1+ax}=1. \tag{1}$$

1. В области определения данного уравнения, т. е. при $1+ax\neq 0$, имеем

$$\frac{a+2x-1-ax}{1+ax}=0, \text{ или } (2-a)x=1-a. \tag{2}$$

Полученное уравнение (2) — линейное.

2. Если коэффициент при неизвестном в линейном уравнении отличен от нуля, то уравнение имеет корень и притом единственный.

Значит, если $a\neq 2$, то уравнение (2) имеет единственный корень $x=\frac{1-a}{2-a}$. При этом для исходного уравнения (1) должно выполняться условие $1+ax\neq 0$, т. е.

$$1+a\cdot\frac{1-a}{2-a}\neq 0, \text{ откуда } a\neq\pm\sqrt{2}.$$

3. Если коэффициент при неизвестном в линейном уравнении равен нулю, а свободный член не равен нулю, то уравнение не имеет корней.

Этот случай для уравнения (2) реализуется при $a=2$. Следовательно, исходное уравнение (1) при $a=2$ и при $a=\pm\sqrt{2}$ не имеет корней.

4. Если коэффициент при неизвестном и свободный член в линейном уравнении равны нулю, то уравнение имеет бесконечное множество корней.

Последний случай для уравнения (2) не имеет места ни при каких a.

5. *Ответ*: если $a\neq 2$, $a\neq\pm\sqrt{2}$, то уравнение имеет единственный корень $x=\frac{1-a}{2-a}$;
если $a=2$ или $a=\pm\sqrt{2}$, то уравнение не имеет корней.

14. При каких значениях a уравнения $x^2-a=0$ и $\sqrt{x}-a=0$ равносильны?

1. Если $a>0$, то первое уравнение имеет два корня, а второе — только один, и в этом случае о равносильности речь идти не может.

2. Если $a = 0$, то решения уравнений совпадают.

3. Если $a < 0$, то ни первое, ни второе уравнения решений не имеют. Как известно, такие уравнения считаются равносильными.

4. *Ответ*: $a \leqslant 0$.

15. Определить, при каких значениях параметра a уравнения

$$x^2 + ax + 1 = 0, \tag{1}$$

$$x^2 + x + a = 0 \tag{2}$$

имеют: а) один общий корень; б) два общих корня.

1. Пусть x_1 — общий корень уравнений (1) и (2), т. е.

$$x_1^2 + ax_1 + 1 = 0, \tag{3}$$

$$x_1^2 + x_1 + a = 0. \tag{4}$$

Тогда из равенства (4) следует, что $a = -x_1^2 - x_1$. Подставив это выражение в равенство (3), получим

$$x_1^2 - x_1(x_1^2 + x_1) + 1 = 0, \text{ или } x_1^3 = 1,$$

откуда $x_1 = 1$ и, следовательно, $a = -2$.

2. Проверкой убеждаемся, что при $a = -2$ уравнения (1) и (2) имеют один общий корень $x = 1$.

3. Пусть уравнения (1) и (2) имеют два общих корня. Это имеет место тогда и только тогда, когда коэффициенты уравнений (1) и (2) пропорциональны:

$$\frac{1}{1} = \frac{a}{1} = \frac{1}{a},$$

т. е. когда $a = 1$.

4. При $a = 1$ уравнения (1) и (2) сводятся к одному уравнению $x^2 + x + 1 = 0$. Это уравнение не имеет действительных корней, т. е. значение $a = 1$ не удовлетворяет условию задачи.

5. *Ответ*: а) один общий корень при $a = -2$;
б) нет двух общих корней ни при каких a.

16. При каких a уравнение $ax = a^2$ равносильно неравенству $|x - 3| \geqslant a$?

1. Если $a \neq 0$, то уравнение $ax = a^2$ имеет единственное решение $x = a$, а неравенство $|x - 3| \geqslant a$ — бесконечное множество решений.

2. Если $a = 0$, то решением как неравенства, так и уравнения является множество всех действительных чисел.

3. Таким образом, требованию задачи удовлетворяет только $a = 0$.

4. *Ответ*: $a = 0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить уравнение:

а) $\dfrac{a}{x+1} = 2$; б) $\dfrac{a+5}{x-3} = a$; в) $a^2x - a = 4x + 2$;

г) $9b^2x - 3b = 4x - 2$; д) $x + \dfrac{3}{a^3} = \dfrac{1}{a^2}(9x + 1)$.

2. При каких значениях a имеет бесконечное множество решений уравнение:

а) $6(ax - 1) + a = 3(a - x) - 5$;

б) $\dfrac{2}{3}(x - 1) = \dfrac{4}{3} + a(3 - x)$?

3. При каких значениях a не имеет решений уравнение:

а) $2(3x - 2a) = 2 + ax$;

б) $a^2x = a(1 + 5x) - 2 - 6x$?

4. При каких значениях b уравнение:

а) $(a + 1)x = 2b - a$;

б) $(2a - 1)x = b + a - 1$;

в) $(a + 2)x = 3b - a + 1$

имеет решение для любого значения a?

5. Решить уравнение:

а) $\dfrac{x-a}{x+2} = 0$; б) $\dfrac{x-3}{x+2} + \dfrac{4}{a-1} = \dfrac{2}{(a-1)(x+2)}$;

в) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x+a}{a+3} + \dfrac{a}{3} = 1$; г) $\dfrac{x-a}{a+2} = \dfrac{x+a}{a+1}$;

д) $\dfrac{3x-2}{a^2-2a} + \dfrac{x-1}{a-2} + \dfrac{2}{a} = 0$; е) $\dfrac{5+x-ax}{4-x^2} = 0$.

6. При каких значениях a каждый корень уравнения $2(x - 2a) = 3 + a$ удовлетворяет условию $x \in [-1; 3]$?

Ответы

1. а) Если $a \neq 0$, то $x = \frac{a-2}{2}$; если $a = 0$, то нет корней; б) если $a \neq 0$, $a \neq -5$, то $x = \frac{4a+5}{a}$; если $a = 0$, $a = -5$, то нет корней; в) если $a \neq -2$, $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a-2}$; если $a = -2$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a = 2$, то нет корней; г) если $b \neq -\frac{2}{3}$, $b \neq \frac{2}{3}$, то $x = \frac{1}{3b+2}$; если $b = \frac{2}{3}$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $b = -\frac{2}{3}$, то нет корней; д) если $a \neq 0$, $a \neq -3$, $a \neq 3$, то $x = \frac{1}{a(a+3)}$; если $a = 3$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a = 0$, $a = -3$, то нет корней. **2.** а) При $a = -\frac{1}{2}$; б) при $a = -\frac{2}{3}$. **3.** а) При $a = 6$; б) при $a = 3$. **4.** а) При $b = -\frac{1}{2}$; б) при $b = \frac{1}{2}$; в) при $b = -1$. **5.** а) Если $a \neq -2$, то $x = a$; если $a = -2$, то корней нет; б) если $a \neq -3$, $a \neq 0{,}6$, $a \neq 1$, то $x = \frac{3(a-3)}{a+3}$; если $a = -3$, $a = 0{,}6$, $a = 1$, то корней нет; в) если $a \neq -3$, $a \neq -1{,}5$, $a \neq 0$, то $x = -\frac{a(a^2+3a-9)}{3(2a+3)}$; если $a = -3$, $a = 1{,}5$, $a = 0$, то корней нет; г) если $a \neq -2$, $a \neq -1$, то $x = -(2a^2 + 3a)$; если $a = -2$, $a = -1$, то корней нет; д) если $a \neq -3$, $a \neq 0$, $a \neq 2$, то $x = \frac{6-a}{a+3}$; если $a = -3$, $a = 0$, $a = 2$, то корней нет; е) если $a \neq -1{,}5$, $a \neq 1$, $a \neq 3{,}5$, то $x = \frac{5}{a-1}$; если $a = -1{,}5$, $a = 1$, $a = 3{,}5$, то корней нет. **6.** $a \in [-1; 0{,}6]$.

Тема 4

1. Понятие функции
2. Монотонность функции
3. Четные и нечетные функции
4. Линейная функция и ее график
5. Квадратичная функция и ее график
6. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Понятие функции

1°. Зависимость одной переменной от другой называют ***функциональной зависимостью***.

2°. Зависимость переменной y от переменной x называют ***функцией***, если каждому значению x соответствует единственное значение y. При этом используют запись $y = f(x)$.

3°. Переменную x называют ***независимой переменной*** (или ***аргументом***), а переменную y — ***зависимой переменной***. Говорят, что y является функцией от x.

4°. Значение y, соответствующее заданному значению x, называют ***значением функции***.

5°. Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют ***область определения функции***.

6°. Все значения, которые принимает зависимая переменная, образуют ***множество значений функции***.

7°. Для функции f приняты обозначения:

а) $D(f)$ — область определения функции;

б) $E(f)$ — множество значений функции;

в) $f(x_0)$ — значение функции в точке x_0.

2. Монотонность функции

1°. Функцию $f(x)$ называют ***возрастающей*** на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее значение функции $f(x)$, т. е. если для любых x_1 и x_2 из промежутка X таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

2°. Функцию $f(x)$ называют ***убывающей*** на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует меньшее значение функции $f(x)$, т. е. если для любых x_1 и x_2 из промежутка X таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

3°. Функцию, только возрастающую или только убывающую на данном числовом промежутке, называют ***монотонной*** на этом промежутке.

3. Четные и нечетные функции

1°. Функцию $y = f(x)$ называют ***четной***, если она обладает следующими двумя свойствами:

а) область определения функции симметрична относительно точки O (т. е. если точка a принадлежит области определения, то точка $(-a)$ также принадлежит области определения);

б) для любого значения x, принадлежащего области определения функции, выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

2°. Функцию $y = f(x)$ называют ***нечетной***, если:

а) область определения функции симметрична относительно точки O;

б) для любого значения x, принадлежащего области определения функции, выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

3°. График четной функции $y = x^2$ изображен на рис. 1.

4°. График нечетной функции $y = x^3$ изображен на рис. 2.

5°. Заметим, что не всякая функция является четной или нечетной.

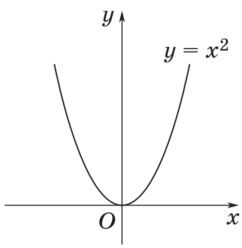


Рис. 1

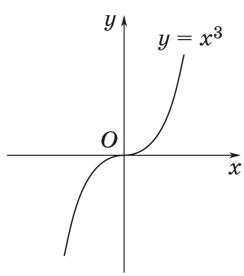


Рис. 2

4. Линейная функция и ее график

1°.Функцию, заданную формулой $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, называют ***линейной***.

2°.График линейной функции $y = kx + b$ есть прямая.

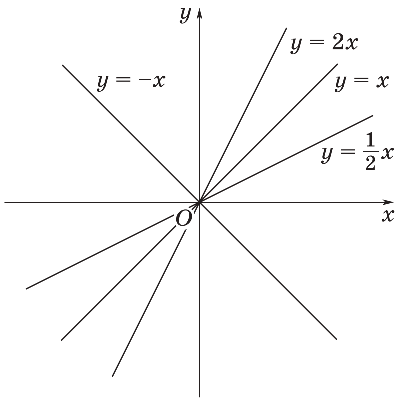


Рис. 3

3°.Коэффициент k характеризует угол, который образует прямая $y = kx$ с положительным направлением оси Ox, поэтому число k называют ***угловым коэффициентом***. При этом:

а) если $k > 0$, то этот угол острый;

б) если $k < 0$, то этот угол тупой;

в) если $k = 0$, то прямая $y = kx$ совпадает с осью Ox.

На рис. 3 изображены прямые $y = kx$ при $k = -1$, $k = \frac{1}{2}$, $k = 1$ и $k = 2$.

4°. Областью определения линейной функции служит множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел, так как выражение $kx + b$ имеет смысл при любых значениях x.

5°. Уравнение вида $kx + b = 0$ называется ***линейным***.

5. Квадратичная функция и ее график

1°. Функцию, заданную формулой $y = ax^2 + bx + c$, где x, y — переменные, a, b и c — заданные числа, причем $a \neq 0$, называют ***квадратичной***.

2°. Областью определения квадратичной функции является множество $\boldsymbol{R}$.

3°. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола. При этом:

а) если $a > 0$, то ее ветви направлены вверх;

б) если $a < 0$, то ее ветви направлены вниз;

в) осью симметрии параболы служит прямая $x = -\frac{b}{2a}$.

4°. Координаты вершины параболы находят по формулам

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \; y_0 = y(x_0) = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

На рис. 4 изображены графики функций $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 2x^2$ и $y = -\frac{1}{3}x^2$, а на рис. 5 — графики функций $y = x^2 + 4x + 3$ и $y = -2x^2 + 7x - 5$.

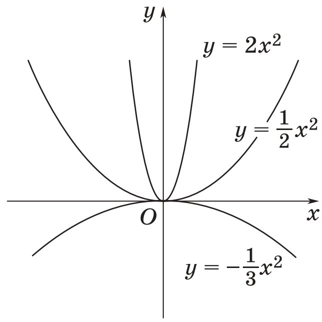


Рис. 4

6. Функция $y = \frac{k}{x}$ и ее график

1°. Если переменная y пропорциональна переменной x, то такая зависимость выражается формулой $y = kx$, где $k \neq 0$ — коэффициент пропорциональности.

2°. Если переменная y обратно пропорциональна переменной x, то такая зависимость выражается формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ — коэффициент обратной пропорциональности.

3°. Область определения функции $y = \frac{k}{x}$ есть множество чисел, отличных от нуля, т. е. $x \in \boldsymbol{R}$, $x \neq 0$.

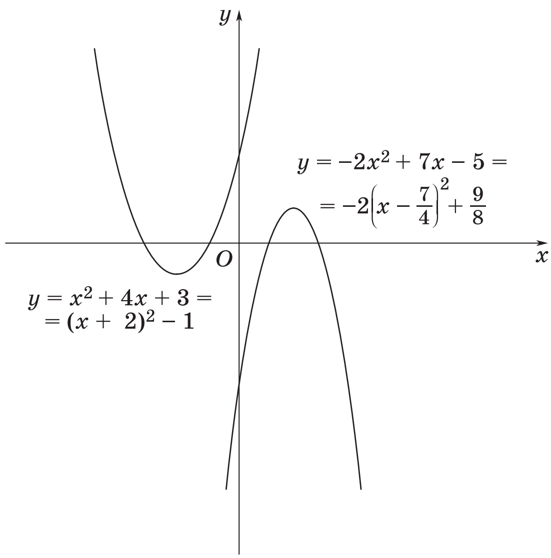


Рис. 5

4°. Графиком обратной пропорциональности $y = \frac{k}{x}$ является кривая, которую называют ***гиперболой***. Она состоит из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. При этом:

а) если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях (рис. 6, *а*);

б) если $k < 0$, то они расположены во II и IV координатных четвертях (рис. 6, *б*).

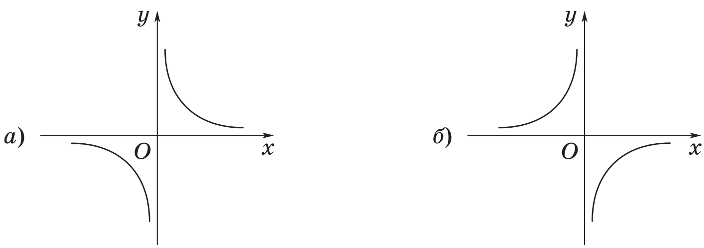


Рис. 6

5°. Заметим, что гипербола не имеет общих точек с осями координат, а лишь сколь угодно близко к ним приближается.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. При каком значении параметра a прямая $y = 2ax - 3$ проходит через точку $A(1; -6)$?

1. Подставив $x = 1$, $y = -6$ в уравнение прямой $y = 2ax - 3$, получим $-6 = 2a - 3$, откуда $a = -1{,}5$.

2. *Ответ*: $a = -1{,}5$.

2. При каком значении параметра a параболы $y = 3x^2 + 2ax - 1$ и $y = ax^2 - 5x + 8$ пересекаются в точке с абсциссой $x_0 = 3$?

1. Подставив значение $x_0 = 3$ в уравнения парабол, получим равенство

$$3 \cdot 9 + 6a - 1 = 9a - 15 + 8,$$

откуда находим $a = 11$.

2. *Ответ*: $a = 11$.

3. Найти все такие a, что при любом b уравнение

$$ax + b = |x| \qquad (1)$$

имеет решение.

1. Наиболее рациональный подход к решению этой задачи — геометрический.

2. Рассмотрим графики функций $y = |x|$ и $y = ax + b$ (рис. 7).

а) Если $b < 0$ и $|a| \leqslant 1$, то графики не пересекаются, а это значит, что уравнение (1) не имеет решений.

б) Если же $b > 0$ и $|a| \leqslant 1$, то хотя графики и пересекаются, это происходит не при любом значении b, а только при $b > 0$.

в) Наконец, если $|a| > 1$, то графики пересекаются при любом значении b.

3. *Ответ*: $|a| > 1$.

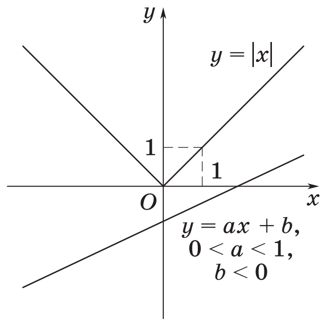


Рис. 7

4. При каких значениях параметра a расстояние между вершинами парабол $y = x^2 + ax + \frac{2}{3}$ и $y = 3x^2 + 5ax + \frac{19a^2}{12}$ больше $\frac{\sqrt{29}}{3}$?

1. Найдем координаты вершин обеих парабол. Для первой из них $x_1 = -\frac{a}{2}$, $y_1 = -\frac{a^2}{4} + \frac{2}{3}$, для второй $x_2 = -\frac{5a}{6}$, $y_2 = -\frac{a^2}{2}$.

2. Расстояние между вершинами парабол выразится так:

$$d = \sqrt{\left(-\frac{5a}{6} + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} - \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{12}\sqrt{9a^4 + 64a^2 + 64}.$$

3. Решив теперь неравенство

$$\frac{1}{12}\sqrt{9a^4 + 64a^2 + 64} > \frac{\sqrt{29}}{3},$$

получаем $a^2 > 4$.

4. *Ответ*: $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

5. При каких значениях параметра a уравнение $|x - 1|(x - 5) + a = 0$ имеет ровно три решения? В ответе указать наибольшее целое значение a.

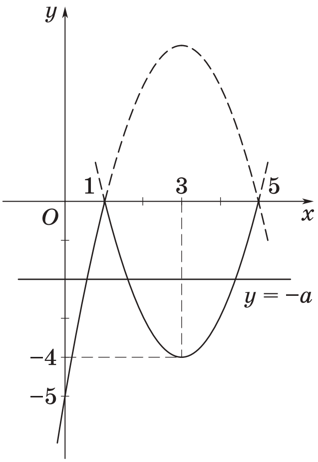


Рис. 8

1. Преобразуем заданное уравнение к виду

$$|x-1|(x-5)=-a.$$

2. Построим график функции $y = |x-1|(x-5)$ (рис. 8). При $x \geqslant 1$ — эта часть параболы $(x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5$, а при $x < 1$ — часть параболы $(1-x)(x-5) = -x^2 + 6x - 5$.

3. График функции $y = -a$ есть прямая, параллельная оси Ox (рис. 8).

4. Из рисунка видно, что эта прямая пересекает график функции $y = |x-1| \times (x-5)$ в трех точках, если $-4 < a < 0$.

5. Следовательно, $a \in (0;\ 4)$. Наибольшее целое значение a из этого интервала равно 3.

6. *Ответ*: $a = 3$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При каких значениях a является четной функция:

а) $y = (a-3)x + 5a - 1$;

б) $y = -ax^2 + (4a+5)x + 3$;

в) $y = \dfrac{1}{(a+1)x^2 - 2ax + 3a - 1}$?

2. При каких значениях a является нечетной функция:

а) $y = (2a-1)x - 6a + 5$;

б) $y = \dfrac{x}{(7a-3)x-9}$;

в) $y = \dfrac{1}{x+a} + \dfrac{1}{x-a}$?

3. Найти значения параметра a, при которых заданная функция монотонно возрастает и монотонно убывает:

а) $y = (a-1)x + a^2 - 3$;

б) $y = (2a+5)x^2 + 4x + a - 1$;

в) $y = \dfrac{7-3a}{x}$;

г) $y = \dfrac{5}{(4a-1)x}$.

4. При каких значениях a множество значений функции:

а) $y = x^2 + 4ax + 5 - 3a^2$ есть промежуток $[-9; +\infty)$;

б) $y = -4x^2 + 12ax + 4a^2 - 5a$ есть промежуток $(-\infty; 8]$?

5. При каком значении a функции $y = \frac{2x + a}{x - 1}$ и $y = \frac{-3ax + 1}{x - 1}$ имеют одно и то же множество значений?

6. При каком значении параметра a прямая:

а) $y = ax - 3$ проходит через точку $A(-2; 9)$;

б) $y = 3x + a$ проходит через точку $A(-1; 5)$?

7. При каком значении параметра a параболы:

а) $y = x^2 - 4ax + 5$ и $y = -2x^2 + 3ax - 4$ пересекаются в точке с абсциссой $x_0 = -1$;

б) $y = ax^2 - 7x + 3$ и $y = 0{,}5ax^2 - 4x + 3{,}5$ пересекаются в точке с ординатой $y_0 = 2$?

8. При каких значениях параметра a уравнение $(2 - x)|x - 8| + a = 0$ имеет единственное решение? В ответе указать наименьшее целое значение a.

9. При каких значениях параметра a уравнение $|x + 3|(x - 3) + a = 0$ имеет ровно три решения? В ответе указать наибольшее целое значение a.

Ответы

1. а) $a = 3$; б) $a = -1{,}25$; в) $a = 0$. **2.** а) $a = \frac{5}{6}$; б) $a = \frac{3}{7}$; в) $a \in \boldsymbol{R}$. **3.** а) Если $a < 1$, то функция убывает; если $a > 1$, то функция возрастает; б) если $a < -2{,}5$, то функция убывает; если $a > -2{,}5$, то функция возрастает; в) если $a < \frac{7}{3}$, то функция убывает; если $a > \frac{7}{3}$, то функция возрастает; г) если $a < \frac{1}{4}$, то функция возрастает; если $a > \frac{1}{4}$, то функция убывает. **4.** а) $a = \pm\sqrt{2}$; б) $a = 1$; $a = -\frac{8}{13}$. **5.** $a = -\frac{2}{3}$. **6.** а) $a = -6$; б) $a = 8$. **7.** а) $a = -\frac{12}{7}$; б) $a = 3{,}25$. **8.** $a = 10$. **9.** $a = 8$.

Тема 5

1. Квадратные уравнения
2. Теорема Виета
3. Уравнения с несколькими переменными
4. Системы уравнений

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Квадратные уравнения

1°. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x — переменная, a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют ***квадратным.***

2°. Формула корней квадратного уравнения имеет вид

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3°. Выражение $b^2 - 4ac$ называют ***дискриминантом*** квадратного уравнения и обозначают буквой D.

4°. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

5°. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных действительных корня.

6°. Если $D = 0$, то существует только одно значение переменной, удовлетворяющее уравнению $ax^2 + bx + c = 0$. Условились говорить, что в этом случае квадратное уравнение имеет два равных действительных корня, а само число $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ называют корнем кратности два.

7°. Уравнение $x^2 + px + q = 0$, в котором первый коэффициент a равен 1, называют ***приведенным.***

8°. Формула корней приведенного квадратного уравнения имеет вид

$$x_{1,\,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

9°. Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называют ***биквадратным.*** С помощью замены переменной по формуле $t = x^2$ оно приводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$.

2. Теорема Виета

1°. **Теорема Виета.** *Сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену*, т. е. $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$.

2°. Выражение вида $ax^2 + bx + c$ называют ***квадратным трехчленом.*** Корни этой функции являются корнями соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

3°. Если дискриминант квадратного трехчлена больше нуля ($D > 0$), то этот трехчлен можно представить в виде

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена.

4°. Справедлива **теорема, обратная теореме Виета.** *Если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.*

3. Уравнения с несколькими переменными

1°. ***Уравнение с двумя переменными*** x и y имеет вид $f(x, y) = \varphi(x, y)$, где f и φ — выражения с переменными x и y.

2°. ***Графиком уравнения с двумя переменными*** называют множество точек, координаты которых служат решениями этого уравнения. Например:

а) график уравнения $ax + by + c = 0$ есть прямая;

б) график уравнения $y = ax^2 + bx + c$ — парабола;

в) график уравнения $xy = k$ ($k \neq 0$) — гипербола.

3°. Графиком уравнения $x^2 + y^2 = r^2$, где x и y — переменные, r — положительное число, является окружность с центром в начале координат и радиусом, равным r.

4. Системы уравнений

1°. Если ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких уравнений с двумя (или более) переменными, то говорят, что надо решить ***систему уравнений.***

Систему двух уравнений с двумя переменными будем записывать так:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \varphi_1(x, y), \\ f_2(x, y) = \varphi_2(x, y). \end{cases}$$

2°. Число переменных может, вообще говоря, не быть равным числу уравнений.

3°. Решить систему уравнений — значит найти все ее решения.

4°. Систему называют:

а) ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение;

б) ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

5°. Систему называют:

а) ***определенной***, если она имеет конечное число решений;

б) ***неопределенной***, если она имеет бесконечное множество решений.

6°. Две системы называют ***равносильными***, если они имеют одно и то же множество решений.

7°. Графическое решение системы уравнений с двумя переменными сводится к отысканию координат общих точек графиков уравнений.

8°. Как известно, прямые на плоскости могут пересекаться в одной точке, быть параллельными или совпадать. Соответственно этому система линейных уравнений с двумя переменными может:

а) иметь единственное решение;

б) не иметь решений;

в) иметь бесконечное множество решений.

9°. Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Не решая эту систему, можно определить число ее решений по коэффициентам при соответствующих переменных.

а) Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, т. е. коэффициенты при x и y не пропорциональны, то система имеет единственное решение. Это решение графически иллюстрируется как точка пересечения двух прямых (рис. 9).

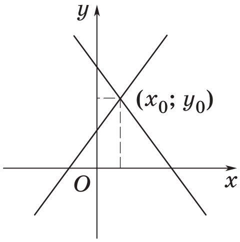


Рис. 9

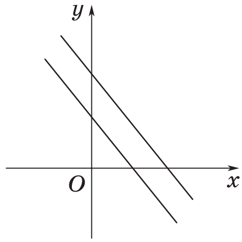


Рис. 10

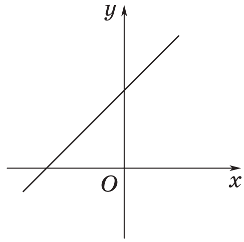


Рис. 11

б) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений. В этом случае прямые, являющиеся графиками уравнений системы, параллельны и не совпадают (рис. 10).

в) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений. В этом случае прямые совпадают друг с другом (рис. 11).

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. При каких значениях параметра a отношение корней уравнения $x^2 + ax + a + 2 = 0$ равно 2?

1. Пусть x_1 и x_2 — корни данного квадратного уравнения, причем

$$\frac{x_1}{x_2} = 2. \tag{1}$$

2. Тогда $\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2}$, т. е. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. С другой стороны,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2},$$

и, значит,

$$\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{x_1x_2} = \frac{5}{2}. \tag{2}$$

3. Для тех значений a, при которых выполнено соотношение (1), должно также выполняться равенство (2).

4. Согласно теореме Виета, $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = a + 2$. Поэтому равенство (2) можно записать следующим образом:

$$\frac{a^2 - 2(a+2)}{a+2} = \frac{5}{2}, \text{ или } 2a^2 - 9a - 18 = 0,$$

откуда $a_1 = 6$, $a_2 = -\frac{3}{2}$.

5. *Ответ*: $a_1 = 6$; $a_2 = -\frac{3}{2}$.

2. В уравнении $3x^2 - 7x + c = 0$ найти значение параметра c, если корни уравнения удовлетворяют соотношению

$$\left(x_1 + \frac{2}{3}\right)(x_2 - 1) = 1. \qquad (1)$$

1. Согласно теореме Виета, имеем

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{3}. \qquad (2)$$

2. Используя равенства (1) и (2), составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} - x_2, \\ \left(\frac{7}{3} - x_2 + \frac{2}{3}\right)(x_2 - 1) = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{3} - x_2, \\ x_2^2 - 4x_2 + 4 = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

откуда $x_2 = 2$.

3. Тогда из первого уравнения системы (3) найдем $x_1 = \frac{7}{3} - 2 = \frac{1}{3}$.

4. Снова воспользуемся теоремой Виета и получим, что $x_1x_2 = \frac{c}{3}$; тогда $\frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{c}{3}$; т. е. $c = 2$.

5. *Ответ*: $c = 2$.

3. Найти все значения a, для которых разность корней уравнения

$$2x^2 - (a + 1)x + a + 3 = 0 \qquad (1)$$

равна 1.

1. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения (1), причем $x_2 > x_1$.

2. Тогда $x_2 - x_1 = 1$, или $(x_2 - x_1)^2 = 1$, т. е.

$$x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 = 1. \qquad (2)$$

3. Упростив левую часть равенства (2), получим

$$x_2^2 - 2x_2x_1 + x_1^2 = (x_2 + x_1)^2 - 2x_2x_1 - 2x_2x_1 =$$
$$= (x_2 + x_1)^2 - 4x_2x_1 = 1. \qquad (3)$$

4. По теореме Виета $x_2 + x_1 = \frac{a+1}{2}$; $x_2x_1 = \frac{a+3}{2}$. Следовательно, равенство (3) можно записать так:

$$\left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{a+3}{2} = 1. \qquad (4)$$

5. Решив уравнение (4), получим ответ.

6. *Ответ*: $a = -3$; $a = 9$.

4. При каких значениях k уравнение

$$kx^2 - x + 3 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственное решение?

1. Пусть $k = 0$. Тогда уравнение (1) имеет единственное решение $x = 3$.

2. Пусть $k \neq 0$. Тогда уравнение (1) является квадратным, а его дискриминант равен $D = 1 - 12k$. Так как уравнение должно иметь единственное решение, то его дискриминант должен быть равен нулю: $1 - 12k = 0$, т. е. $k = \frac{1}{12}$.

3. *Ответ*: $k = 0$; $k = \frac{1}{12}$.

З а м е ч а н и я.

1. Следует обратить особое внимание на распространенную ошибку при решении задач такого типа.

2. Уравнение (1) нельзя считать квадратным. На самом деле это уравнение имеет степень не выше второй.

3. При $k = 0$ получается линейное уравнение, а не квадратное.

5. Найти все значения параметра p, при которых корни уравнения

$$(p-3)x^2 - 2px + 6p = 0 \qquad (1)$$

действительны и положительны.

1. Предположим сначала, что $p \neq 3$. Для того чтобы корни квадратного уравнения были действительными, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант D уравнения (1) был неотрицателен. Так как

$$D = 4p^2 - 24p(p-3) = 4p(18-5p),$$

то неравенство $D \geqslant 0$ выполняется при

$$0 \leqslant p \leqslant 3{,}6. \qquad (2)$$

2. Действительные корни x_1 и x_2 уравнения (1) положительны в том и только в том случае, когда их сумма и произведение положительны, т. е.

$$x_1 + x_2 = \frac{2p}{p-3} > 0,\ x_1x_2 = \frac{6p}{p-3} > 0,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{2p}{p-3} > 0, & (3) \\ \dfrac{6p}{p-3} > 0. & (4) \end{cases}$$

3. Система неравенств (2), (3), (4) удовлетворяется при

$$3 < p \leqslant 3{,}6. \qquad (5)$$

4. Заметим теперь, что при $p = 3$ уравнение (1) имеет единственный положительный корень $x = 3 > 0$. Поэтому все искомые значения p определяются неравенствами (5) и равенством $p = 3$.

5. *Ответ*: $p \in [3;\ 3{,}6]$.

6. Решить относительно x уравнение

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)}. \qquad (1)$$

1. При $a = 0$ уравнение (1) не имеет смысла; кроме того, значения x должны удовлетворять условиям $x \neq -1$, $x \neq -2$.

2. Умножив обе части уравнения (1) на $a(x + 1)(x + 2) \neq 0$, получим уравнение

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a - 3 = 0, \qquad (2)$$

равносильное данному.

3. Уравнение (2) имеет корни $x_1 = a + 1$; $x_2 = a - 3$.

4. Среди полученных корней могут оказаться и посторонние, а именно такие, при которых $(x + 1)(x + 2) = 0$.

5. Чтобы обнаружить их, необходимо определить, при каких значениях a корни x_1 и x_2 (или один из них) принимают значения (-2) или (-1). Имеем:

а) $x_1 = a + 1 = -2$ при $a = -3$; тогда $x_2 = a - 3 = -6$;

б) $x_1 = a + 1 = -1$ при $a = -2$; тогда $x_2 = a - 3 = -5$;

в) $x_2 = a - 3 = -2$ при $a = 1$; тогда $x_1 = a + 1 = 2$;

г) $x_2 = a - 3 = -1$ при $a = 2$; тогда $x_1 = a + 1 = 3$.

6. *Ответ*: если $a \neq 0$, $a \neq -3$, $a \neq \pm 2$, $a \neq 1$, то $x_1 = a + 1$, $x_2 = a - 3$;
если $a = -3$, то $x = -6$;
если $a = -2$, то $x = -5$;
если $a = 1$, то $x = 2$;
если $a = 2$, то $x = 3$;
если $a = 0$, то уравнение не имеет смысла.

7. Решить относительно x уравнение

$$\frac{(k+2)x^2}{(k+1)(x-2)} - \frac{2kx}{(k-1)(x-2)} = \frac{5}{k^2-1} + \frac{12-k^2-k}{(k^2-1)(x-2)}. \qquad (1)$$

1. При $k \neq \pm 1$ и $x \neq 2$ уравнение (1) равносильно уравнению

$$(k + 2)(k - 1)x^2 - (2k^2 + 2k + 5)x + k^2 + k - 2 = 0. \qquad (2)$$

а) Пусть $k = -2$; тогда $x = 0$.

б) Пусть $k \neq -2$ и $k \neq \pm 1$; тогда уравнение (2) имеет корни $x_1 = \frac{k+2}{k-1}$, $x_2 = \frac{k-1}{k+2}$.

2. Теперь необходимо проверить, нет ли таких значений k, при которых корни x_1 и x_2 (или один из них) равны 2.

а) $x_1 = \frac{k+2}{k-1} = 2$ при $k + 2 = 2k - 2$, т. е. при $k = 4$; тогда $x_2 = 0{,}5$;

б) $x_2 = \frac{k-1}{k+2} = 2$ при $k - 1 = 2k + 4$, т. е. при $k = -5$; тогда $x_1 = 0{,}5$.

3. *Ответ*: если $k \neq -2$, $k \neq \pm 1$, $k \neq 4$, $k \neq -5$, то

$$x_1 = \frac{k+2}{k-1},\ x_2 = \frac{k-1}{k+2};$$

если $k = -2$, то $x = 0$;

если $k = 4$ или $k = -5$, то $x = 0{,}5$;

если $k = \pm 1$, то уравнение не имеет смысла.

Замечание. Корни рассмотренных выше уравнений оказались рациональными относительно параметров и использованный при этом способ проверки корней удобен и прост. Однако он может оказаться слишком громоздким в случае, если корни квадратного уравнения являются иррациональными относительно параметра.

8. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|1 - ax| = 1 + (1 - 2a)x + ax^2 \qquad (1)$$

имеет только один корень.

1. Пусть $a = 0$; тогда уравнение (1) запишется в виде $1 = 1 + x$, т. е. при $a = 0$ оно имеет только один корень $x_1 = 0$. Следовательно, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

2. Пусть $a \neq 0$. Положим $z = 1 - ax$ и выразим x через z: $x = \frac{1-z}{a}$.

Подставив это выражение в уравнение (1), получим уравнение

$$|z| = \frac{z^2 + (2a-3)z + 2 - a}{a}. \qquad (2)$$

3. Ясно, что при любом $a \neq 0$ уравнения (1) и (2) имеют одинаковое число корней. Выясним, сколько корней имеет уравнение (2) в каждой из областей $z \geqslant 0$ и $z < 0$.

4. В области $z \geqslant 0$ уравнение (2) примет вид

$$z = \frac{z^2 + (2a-3)z + 2 - a}{a},$$

или

$$z^2 + (a-3)z + 2 - a = 0. \qquad (3)$$

5. Квадратное уравнение (3) имеет два корня: $z_1 = 1$ и $z_2 = 2 - a$. При $a = 1$ эти корни совпадают, и, значит, при $a = 1$ уравнение (2) имеет в области $z \geqslant 0$ единственное решение $z_1 = 1$. При всех $a \neq 1$ корень z_1 лежит в области $z \geqslant 0$.

6. При $a \leqslant 2$ корень z_2 также лежит в области $z \geqslant 0$. Следовательно, все a такие, что $a \leqslant 2$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, не удовлетворяют условию задачи.

7. При $a > 2$ уравнение (2) имеет в области $z \geqslant 0$ единственный корень $z_1 = 1$. Таким образом, если $a = 1$ или если $a > 2$, то уравнение (2) имеет в области $z \geqslant 0$ один корень $z_1 = 1$.

8. В области $z < 0$ уравнение (2) примет вид

$$-z = \frac{z^2 + (2a - 3)z + 2 - a}{a},$$

или

$$z^2 + (3a - 3)z + 2 - a = 0. \qquad (4)$$

Дискриминант этого уравнения $D = (3a - 3)^2 - 4(2 - a)$ при $a > 2$ положителен. Значит, уравнение (4) имеет два корня. Обозначим меньший из них через z_3, а больший — через z_4.

9. При $a > 2$ свободный член уравнения (4) отрицателен ($z_3 z_4 = 2 - a < 0$). Поэтому один из корней z_3 или z_4 лежит в области $z < 0$, а уравнение (2) имеет в области $z < 0$ единственный корень.

10. Итак, если $a > 2$, то уравнение (2) имеет в области $z \geqslant 0$ один корень $z_1 = 1$ и в области $z < 0$ также один корень z_3 или z_4. Значит, все числа $a > 2$ не удовлетворяют условию задачи.

11. Если $a = 1$, то уравнение (4) не имеет корней в области $z < 0$, так как $D = -4 < 0$. Поэтому при $a \neq 0$ только $a = 1$ удовлетворяет условию задачи.

12. *Ответ*: $a = 0$; $a = 1$.

9. Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение

$$(x - p)^2(p(x - p)^2 - p - 1) = -1 \qquad (1)$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

1. Пусть $p = 0$; тогда уравнение (1) примет вид $x^2 = 1$. Это уравнение имеет корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Следовательно, в этом случае число положительных и число отрицательных корней одинаково и такое значение p условию задачи не удовлетворяет.

2. Пусть $p \neq 0$. Положим $z = (x - p)^2$; тогда уравнение (1) примет вид

$$pz^2 - (p + 1)z + 1 = 0. \qquad (2)$$

Корнями уравнения (2) являются $z_1 = 1$ и $z_2 = \frac{1}{p}$.

3. Пусть $p < 0$; тогда исходное уравнение имеет два корня: $x_1 = p + 1$ и $x_2 = p - 1$. Легко установить, что если $-1 < p < 0$, то $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$; если $p < -1$, то $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$, а если $p = -1$, то $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$.

Следовательно, ни при каком $p < 0$ исходное уравнение не имеет положительных корней больше, чем отрицательных, т. е. никакие значения $p < 0$ условию задачи не удовлетворяют.

4. Пусть $p > 0$; тогда исходное уравнение имеет четыре корня: $x_1 = p + 1$, $x_2 = p - 1$, $x_3 = p + \dfrac{1}{\sqrt{p}}$ и $x_4 = p - \dfrac{1}{\sqrt{p}}$.

а) Если $0 < p < 1$, то $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_3 > 0$, $x_4 < 0$, т. е. при любом p таком, что $0 < p < 1$, уравнение (1) имеет два положительных и два отрицательных корня. Значит, никакие значения p из промежутка $0 < p < 1$ условию задачи не удовлетворяют.

б) Если $p = 1$, то $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$, т. е. уравнение (1) имеет два положительных и ни одного отрицательного корня. Таким образом, это значение p удовлетворяет условию задачи.

в) Если $p > 1$, то $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$, $x_4 > 0$, т. е. уравнение (1) имеет четыре положительных и ни одного отрицательного корня, т. е. все такие значения p удовлетворяют условию задачи

г) Итак, условию задачи удовлетворяет любое значение $p \geqslant 1$.

5. *Ответ*: $p \in [1; +\infty)$.

10. Определить все значения a, при которых уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень.

З а м е ч а н и е. Эта задача была решена ранее (см. пример 15, тема 3). Здесь мы приведем другой способ решения.

1. Если при каком-либо a данные уравнения имеют общий корень x, то пара $(a; x)$ является решением системы

$$\begin{cases} x^2 + ax + 1 = 0, \\ x^2 + x + a = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Система (1) равносильна двум системам:

$$\begin{cases} ax - x + 1 - a = 0, \\ x^2 + ax + 1 = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} ax - x + 1 - a = 0, \\ x^2 + x + a = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

3. Как получились системы (2) и (3)?

а) Первое уравнение обеих систем получено вычитанием второго уравнения системы (1) из первого:

$$(x^2 + ax + 1) - (x^2 + x + a) = ax - x + 1 - a = 0. \quad (4)$$

б) Второе уравнение систем — это первое или второе уравнение системы (1).

4. Уравнение (4) после преобразования примет вид $(x - 1)(a - 1) = 0$, оно имеет единственный корень $x = 1$ при $a \in \boldsymbol{R}$ и $a \neq 1$, а вторые уравнения систем (2) и (3) имеют этот корень $x = 1$ только при $a = -2$.

5. *Ответ*: $a = -2$.

11. Даны уравнения

$$x^2 - 5x + k = 0, \quad (1)$$

$$x^2 - 7x + 2k = 0. \quad (2)$$

Определить значения k, при которых один из корней второго уравнения вдвое больше одного из корней первого уравнения.

1. Пусть x — корень уравнения (1); тогда $2x$ должен быть корнем уравнения (2). Составим систему

$$\begin{cases} x^2 - 5x + k = 0, \\ (2x)^2 - 7 \cdot (2x) + 2k = 0. \end{cases} \quad (3)$$

2. Решим систему (3):

$$\begin{cases} x^2 - 5x + k = 0, \\ 2x^2 - 7x + k = 0 \end{cases} \left| \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right. \Rightarrow \begin{cases} 3x - k = 0, \\ x^2 - 5x + k = 0. \end{cases} \quad (4)$$

3. Из системы (4) получаем

$$\begin{cases} x = 0, \\ k = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x = 2, \\ k = 6. \end{cases}$$

Значение $k = 0$ не удовлетворяет условию, а значение $k = 6$ приводит к уравнениям $x^2 - 5x + 6 = 0$ (с корнями $x = 2$ и $x = 3$) и $x^2 - 7x + 12 = 0$ (с корнями $x = 3$ и $x = 4$).

4. *Ответ*: $k = 6$.

12. Для каждого действительного a найти действительные корни уравнения

$$ax^2 + 2(a + 1)x + 2a = 0. \quad (1)$$

1. Прежде всего рассмотрим случай $a = 0$ (при этом значении a обычная схема решения квадратного уравнения неприменима). Тогда уравнение (1) примет вид $2x = 0$, откуда $x = 0$.

2. Пусть теперь $a \neq 0$. Существование и количество корней квадратного уравнения (1) зависят прежде всего от его дискриминанта.

3. Вычислим дискриминант:

$$D = 4(a + 1)^2 - 8a^2 = 4(-a^2 + 2a + 1). \qquad (2)$$

Корнями квадратного трехчлена (2) являются $a_1 = 1 - \sqrt{2}$ и $a_2 = 1 + \sqrt{2}$.

4. При $D < 0$ уравнение (1) действительных корней не имеет. Это будет в том случае, когда $-\infty < a < 1 - \sqrt{2}$ или $1 + \sqrt{2} < a + \infty$.

5. При $D = 0$, т. е. при $a = 1 - \sqrt{2}$ или $a = 1 + \sqrt{2}$, уравнение (1) имеет один корень

$$x = -\frac{a+1}{a},$$

а именно: если $a = 1 - \sqrt{2}$, то $x = \sqrt{2}$; если $a = 1 + \sqrt{2}$, то $x = -\sqrt{2}$.

6. При $D > 0$ (и $a \neq 0$) уравнение (1) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-(a+1) + \sqrt{D}}{a}; \; x_2 = \frac{-(a+1) - \sqrt{D}}{a}.$$

7. *Ответ*: если $-\infty < a < 1 - \sqrt{2}$ или $1 + \sqrt{2} < a < +\infty$, то $x \in \varnothing$;
если $a = 1 - \sqrt{2}$, то $x = \sqrt{2}$;
если $1 - \sqrt{2} < a < 0$ или $0 < a < 1 + \sqrt{2}$, то $x = x_1$, $x = x_2$;
если $a = 0$, то $x = 0$;
если $a = 1 + \sqrt{2}$, то $x = -\sqrt{2}$.

13. При каких k уравнение

$$(k - 2)x^2 + (4 - 2k)x + 3 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственное решение?

1. Ясно, что решение надо начинать со случая, когда коэффициент при x^2 равен нулю: $k - 2 = 0$, т. е. $k = 2$.

2. При $k = 2$ уравнение (1) не имеет решений: $-3 = 0$.

3. Если $k - 2 \neq 0$, т. е. $k \neq 2$, то уравнение (1) квадратное и возможные искомые значения параметра — это корни дискриминанта: $k = 2$ или $k = 5$, но $k = 2$ не подходит (см. п. 2).

4. *Ответ*: $k = 5$.

14. При каких k уравнение

$$k(k+3)x^2 + (2k+6)x - 3k - 9 = 0 \qquad (1)$$

имеет более одного корня?

1. Начнем со случая, когда $k(k + 3) = 0$, т. е. $k = 0$ или $k = -3$.

2. При $k = 0$ уравнение (1) имеет единственное решение:

$$6x - 9 = 0, \text{ т. е. } k = 1{,}5.$$

3. При $k = -3$ решением уравнения (1) служит любое действительное число: $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 9 - 9 = 0$.

4. Дискриминант квадратного уравнения (1) равен

$$4(k+3)^2 + 4k(k+3) \cdot 3(k+3) = 4(3k+1)(k+3)^2$$

и, очевидно, положителен при $k > -\dfrac{1}{3}$.

5. При записи ответа из промежутка $\left(-\dfrac{1}{3}; +\infty\right)$ следует исключить точку $k = 0$.

6. *Ответ*: $k = -3$; $-\dfrac{1}{3} < k < 0$; $k > 0$.

15. Определить все действительные значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^4 - (a+2)x^2 - (a+3) = 0$$

имеет действительные решения, и найти все эти решения.

1. С помощью подстановки $x^2 = t$ $(t \geqslant 0)$ рассматриваемое биквадратное уравнение приводится к смешанной системе

$$\begin{cases} t^2 - (a+2)t - (a+3) = 0, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

Корнями уравнения этой системы являются $t_1 = a + 3$ и $t_2 = -1$ (не удовлетворяет условию $t \geqslant 0$). Значит, система имеет решение $t = a + 3$ при $a \geqslant -3$.

2. Воспользовавшись снова указанной подстановкой, получим $x^2 = a + 3$, $a \geqslant -3$, откуда $x_1 = -\sqrt{a+3}$, $x_2 = \sqrt{a+3}$.

3. *Ответ*: $a \geqslant -3$; $x = \pm\sqrt{a+3}$.

16. Найти все действительные значения параметра a, для каждого из которых уравнение

$$\sqrt{x-a}\,(x^2 + (1 + 2a^2)x + 2a^2) = 0 \qquad (1)$$

имеет только два различных корня.

1. Решив уравнение (1), найдем три значения $x_1 = a$, $x_2 = -1$, $x_3 = -2a^2$, которые обращают в нуль или первый, или второй множитель данного уравнения.

2. Заметим, что при $a \geqslant 0$ выполняются неравенства $x_2 - x_1 < 0$, $x_3 - x_1 < 0$, т. е. $x_2 - a < 0$, $x_3 - a < 0$. Поэтому если при $a \geqslant 0$ в уравнение вместо x подставить x_2 или x_3, то множитель $\sqrt{x-a}$ не имеет смысла. Следовательно, при $a \geqslant 0$ уравнение (1) имеет лишь один корень $x_1 = a$.

3. Будем считать, что $a < 0$. При $a = -1$ имеем $x_1 = x_2 > x_3$, т. е. $x_3 - x_1 = x_3 - a < 0$; значит, $x_3 = -2a^2$ не является корнем уравнения при $a = -1$; уравнение (1) имеет два совпадающих корня $x_1 = x_2$, что не удовлетворяет условию задачи. При $a = -2a^2$, т. е. при $a = -\frac{1}{2}$, имеем $x_2 - a = -1 + \frac{1}{2} < 0$, т. е. $x_2 = -1$ не является корнем уравнения; уравнение (1) имеет два совпадающих корня $x_1 = x_3$, что также не удовлетворяет условию задачи.

4. Рассмотрим теперь следующие три случая: 1) $a \in (-\infty; -1)$, 2) $a \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, 3) $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

а) В случае 1 имеем $-2a^2 < a < -1$, т. е. $x_3 < x_1 < x_2$. Отсюда следует, что $x_3 - x_1 = x_3 - a < 0$ и x_3 не является корнем уравнения, а $x_2 - x_1 = x_2 - a > 0$ и, значит, x_2 является корнем уравнения. Итак, при $a \in (-\infty; -1)$ уравнение (1) имеет только два различных корня $x_1 = a$ и $x_2 = -1$.

б) В случае 2 имеем $-1 < a$ и $a < -\frac{1}{2}$, т. е. $a^2 > -\frac{a}{2}$ или $-2a^2 < a$. Следовательно, $x_2 - x_1 = x_2 - a < 0$ и $x_3 - x_1 = x_3 - a < 0$, т. е. ни x_2, ни x_3 не являются корнями уравнения; при $a \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ уравнение (1) имеет только один корень $x_1 = a$.

в) В случае 3 имеем $a > -\frac{1}{2}$, следовательно, $-2a^2 > -1$, т. е. $x_2 < x_1 < x_3$; тогда $x_3 - x_1 = x_3 - a > 0$, а $x_2 - x_1 = x_2 - a < 0$. Таким образом, x_3 является корнем уравнения, а x_2 не является его корнем. Итак, при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ уравнение имеет два различных корня $x_1 = a$ и $x_3 = -2a^2$.

5. *Ответ*: если $a \in (-\infty; -1)$, то $x_1 = a$, $x_2 = -1$;

если $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, то $x_1 = a$, $x_3 = -2a^2$.

17. Решить относительно x уравнение

$$\frac{x}{b+1} + \frac{2x}{x-2} = \frac{3b-4}{(b+1)(x-2)}. \tag{1}$$

1. При $(b+1)(x-2) \neq 0$ уравнение (1) равносильно уравнению

$$x^2 + 2bx - 3b + 4 = 0. \tag{2}$$

2. Найдем корни уравнения (2):

$$x_1 = -b - \sqrt{b^2 + 3b - 4}, \quad x_2 = -b + \sqrt{b^2 + 3b - 4}. \tag{3}$$

3. Необходимо проверить, нет ли таких значений b, при которых один из полученных корней равен 2.

4. Оказывается, что такое значение b имеется: если в уравнение (2) подставим $x = 2$, то получим $b = -8$.

5. Подставив значение $b = -8$ в выражения (3), находим $x_1 = 2$ (посторонний корень), $x_2 = 14$.

6. Итак, при $b = -8$ уравнение (2) имеют один корень $x = 14$; при $b \neq -8$, $b \neq -1$ — два корня.

7. Решив неравенство $b^2 + 3b - 4 \geqslant 0$, заключаем, что эти корни действительны при $b \leqslant -4$ $(b \neq -8)$ и при $b \geqslant 1$; уравнение не имеет корней при $-4 < b < 1$ $(b \neq -1)$.

8. При $b = -1$ уравнение не имеет смысла.

9. *Ответ*: если $-\infty < b < -8$, $-8 < b < -4$, $b > 1$, то $x_1 = -b -$
$- \sqrt{b^2 + 3b - 4}$, $x_2 = -b + \sqrt{b^2 + 3b - 4}$;
если $b = -8$, то $x = 14$;
если $b = -4$, то $x = 4$;
если $-4 < b < -1$, $-1 < b < 1$, то уравнение не имеет корней;
если $b = -1$, то уравнение не имеет смысла;
если $b = 1$, то $x = -1$.

18. Решить на множестве действительных чисел уравнение

$$\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\sqrt[3]{a^2 - x^2}. \qquad (1)$$

1. Если $a \neq 0$, то $x = a$ не является корнем уравнения.

2. Разделив обе части уравнения (1) на $\sqrt[3]{(a-x)^2}$, получим

$$\sqrt[3]{\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2} + 4 = 5\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}. \qquad (2)$$

3. Пусть $t = \sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}}$; тогда уравнение (2) примет вид $t^2 - 5t + 4 =$ $= 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = 4$.

а) Уравнение $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} = 1$ имеет корень $x = 0$.

б) Уравнение $\sqrt[3]{\frac{a+x}{a-x}} = 4$ имеет корень $x = \frac{63a}{65}$.

4. Если $a = 0$, то уравнение (1) имеет один корень $x = 0$.

5. *Ответ*: если $a \neq 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{63a}{65}$;
если $a = 0$, то $x = 0$.

19. Решить уравнение $\frac{x^2 - 2mx + m^2 - 9}{x - 2} = 0$.

1. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 2mx + m^2 - 9 = 0, & (1) \\ x - 2 \neq 0. & (2) \end{cases}$$

2. Из уравнения (1) находим $x = m \pm 3$, т. е. $x_1 = m - 3$, $x_2 =$ $= m + 3$.

3. Из условия $x - 2 \neq 0$, т. е. $x \neq 2$, следует, что $m - 3 \neq 2$, $m + 3 \neq \neq 2$, откуда $m \neq 5$, $m \neq -1$.

4. Значит, $x_1 = m - 3$ — корень данного уравнения, если $m \neq 5$; $x_2 = m + 3$ — корень данного уравнения, если $m \neq -1$.

5. *Ответ*: если $m = -1$, то $x = -4$;
если $m = 5$, то $x = 8$;
если $m \neq -1$, $m \neq 5$, то $x_1 = m - 3$, $x_2 = m + 3$.

20. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 - ax + a - 1 = 0 \qquad (1)$$

будет наименьшей?

1. Уравнение (1) имеет корни при любом a, так как

$$D = a^2 - 4(a - 1) = (a - 2)^2 \geqslant 0.$$

2. При этом $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = a - 1$.

3. Найдем сумму квадратов корней уравнения (1):

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2a + 2 = (a - 1)^2 + 1 \geqslant 1.$$

Эта сумма минимальна при $a = 1$.

4. *Ответ*: $a = 1$.

21. Найти все пары значений параметров a и b, при которых уравнения

$$x^2 - ax + a = 0 \qquad (1)$$

и

$$x^2 + b^2x - 8b = 0 \qquad (2)$$

равносильны.

1. Решение задачи основано на том, что если даны два уравнения $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$, то они равносильны только в двух случаях:

а) когда дискриминанты D_1 и D_2 этих уравнений отрицательны, т. е. когда уравнения не имеют решений;

б) когда $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$.

2. В первом случае для уравнения (1) дискриминант $D_1 < 0$, если $0 < a < 4$. Для уравнения (2) дискриминант $D_2 < 0$, если $-2\sqrt[3]{4} < < b < 0$.

3. Таким образом, в данном случае искомой парой является любая пара значений параметров a и b, где значение a выбирается из интервала (0; 4), а значение b — из интервала $(-2\sqrt[3]{4}\ ; 0)$.

4. Во втором случае приходим к системе

$$\begin{cases} -a = b^2, \\ a = -8b. \end{cases}$$

Это система имеет два решения: а) $a = b = 0$; б) $a = -64$, $b = 8$.

5. *Ответ*: (0; 0); (−64; 8); $(a; b)$, где $a \in (0; 4)$, $b \in (-2\sqrt[3]{4}\ ; 0)$.

22. Для каждого k решить уравнение

$$x^2 + |x| + k = 0. \qquad (1)$$

1. Положим $|x| = y \geqslant 0$. Так как $x^2 = |x|^2 = y^2$, то уравнение (1) примет вид

$$y^2 + y + k = 0. \qquad (2)$$

2. Решив уравнение (2), получим

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4k}}{2},$$

где

$$\begin{cases} 1 - 4k \geqslant 0, \\ \sqrt{1-4k} \geqslant 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} k \leqslant \dfrac{1}{4}, \\ k \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{т. е. } k \leqslant 0.$$

а) При $k > 0$ уравнение (1) не имеет корней.

б) Очевидно, что $\dfrac{-1-\sqrt{1-4k}}{2} < 0$ при $k \leqslant 0$, поэтому уравнение $|x| = \dfrac{-1-\sqrt{1-4k}}{2}$ не имеет корней.

в) Из равенства $|x| = \dfrac{-1+\sqrt{1-4k}}{2}$ следует, что $x_{1,\,2} = \pm\dfrac{\sqrt{1-4k}-1}{2}$ при условии $k < 0$.

г) При $k = 0$ получаем $x = 0$.

3. *Ответ*: если $k > 0$, то уравнение не имеет корней;
если $k = 0$, то $x = 0$;
если $k < 0$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = \dfrac{\sqrt{1-4k}-1}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1-4k}}{2}$.

23. Установить, при каких значениях параметра a уравнения

$$x^2 - (2a + 1)x + a + 1 = 0,\ 2x^2 - (4a - 1)x + 1 = 0$$

имеют общий корень. Найти соответствующий корень.

1. Пусть k — общий корень данных уравнений. Тогда справедливы два числовых равенства:

$$k^2 - (2a + 1)k + a + 1 = 0, \quad (1)$$

$$2k^2 - (4a - 1)k + 1 = 0. \quad (2)$$

2. Умножив равенство (1) на (-2), имеем

$$-2k^2 + 2(2a + 1)k - 2a - 2 = 0. \quad (3)$$

3. Сложив равенства (3) и (2), получим $3k - 2a - 1 = 0$, откуда $k = \dfrac{2a+1}{3}$.

4. Подставив в любое, например в первое из данных уравнений, вместо x найденное значение k, имеем

$$\left(\frac{2a+1}{3}\right)^2 - \frac{(2a+1)^2}{3} + a + 1 = 0. \quad (4)$$

5. Решив уравнение (4), находим $a_1 = 1$, $a_2 = -\dfrac{7}{8}$. Вычислим соответствующие значения x:

а) $k = \dfrac{2a+1}{3} = \dfrac{2 \cdot 1 + 1}{3} = 1 = x_1$;

б) $k = \dfrac{2a+1}{3} = \dfrac{2 \cdot \left(-\frac{7}{8}\right) + 1}{3} = -\dfrac{1}{4} = x_2$.

6. *Ответ*: $a_1 = 1$, $x_1 = 1$; $a_2 = -\dfrac{7}{8}$, $x_2 = -\dfrac{1}{4}$.

24. Решить уравнение

$$x^4 + x^3 - 3ax^2 - 2ax + 2a^2 = 0, \quad (1)$$

где a — положительный параметр.

1. Перепишем заданное уравнение в виде

$$2a^2 - (3x^2 + 2x)a + x^4 + x^3 = 0. \quad (2)$$

2. Решив уравнение (2) как квадратное относительно a, находим $a_1 = \dfrac{x^2}{2}$, $a_2 = x^2 + x$.

3. Таким образом, решение уравнения (1) сводится к нахождению корней уравнений:

а) $x^2 = 2a$; б) $x^2 + x - a = 0$.

4. *Ответ*: $x_1 = -\sqrt{2a}$, $x_2 = \sqrt{2a}$, $x_3 = \dfrac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$,

$$x_4 = \frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}.$$

25. Найти все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} bx + 2y = b + 2, \\ 2bx + (b+1)y = 2b + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

1. Из первого уравнения системы следует, что $y = \dfrac{b+2-bx}{2}$. Подставив это выражение во второе уравнение системы, приходим к равносильной системе

$$\begin{cases} y = \dfrac{b+2-bx}{2}, \\ b(b-3)x = (b+2)(b-3). \end{cases} \qquad (1)$$

2. а) Если $b = 0$, то система (1) несовместна.

б) Если $b = 3$, то система (1) имеет бесконечно много решений вида $x = a$, $y = \dfrac{5-3a}{2}$, где a — любое число.

в) Если $b \neq 0$ и $b \neq 3$, то система (1) имеет единственное решение $x = \dfrac{b+2}{b}$, $y = 0$.

3. Следовательно, данная система имеет хотя бы одно решение при любом b, кроме $b = 0$.

4. *Ответ*: $b \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

26. При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} 8x + (a^2 + ab + b^2)y = 4, \\ (a-b)x + 26y = 2 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет бесконечное множество решений?

1. На координатной плоскости xOy множество точек $(x; y)$, удовлетворяющих уравнениям системы (1), состоит из двух прямых.

2. Решением системы (1) являются точки пересечения этих прямых. Поэтому данная система будет иметь бесконечное множество решений в том и только в том случае, когда эти прямые совпадают.

3. В общем случае две прямые, заданные уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, совпадают, если $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$ (при $k_1 \neq k_2$ они имеют одну точку пересечения, при $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$ точек пересечения у них нет).

4. Следовательно, система (1) будет иметь бесконечно много решений, если совместна система

$$\frac{a-b}{8} = \frac{26}{a^2+ab+b^2} = \frac{1}{2}, \qquad (2)$$

где $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

5. Решив систему (2), получаем $a_1 = -2$, $b_1 = -6$ или $a_2 = 6$, $b_2 = 2$.

6. *Ответ*: (−2; −6); (6; 2).

27. Найти значения параметра m, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (m-2)x + y = (m-2)^2, & (1) \\ x + (m-2)y = 1 & (2) \end{cases}$$

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечное множество решений.

1. Выразим x из уравнения (2) и подставим в уравнение (1):

$$x = 1 - (m-2)y, \qquad (3)$$

$$(m-2)(1-(m-2)y) + y = (m-2)^2. \qquad (4)$$

Упростив уравнение (4), получим

$$(1-(m-2)^2)y = (m-2) - (m-2)^2. \qquad (5)$$

2. Уравнение (5) (а, значит, и данная система) имеет единственное решение, если коэффициент при y не равен нулю, т. е. $1-(m-2)^2 \neq 0$, т. е. если $m \neq 1$ и $m \neq 3$.

3. Система не имеет решений, если коэффициент при y в уравнении (5) равен нулю, а правая часть не равна нулю, т. е.

$$\begin{cases} 1-(m-2)^2 = 0, \\ (m-2)-(m-2)^2 \neq 0, \end{cases}$$

что выполняется только при $m = 1$.

4. Система имеет бесконечное множество решений при условиях

$$\begin{cases} 1 - (m-2)^2 = 0, \\ (m-2) - (m-2)^2 = 0, \end{cases}$$

которые выполняются только при $m = 3$.

5. *Ответ*: а) $m \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$; б) $m = 1$; в) $m = 3$.

28. При каких значениях c и d система уравнений

$$\begin{cases} (c+1)^2x - (c+1)y = -c, \\ (d-1)x + (5-2d)y = c + d \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$?

1. Подставив значения $x = 1$, $y = 1$ в систему (1), получим

$$\begin{cases} c^2 + 2c = 0, \\ c + 2d = 4. \end{cases} \qquad (2)$$

2. Система (2) имеет два решения: а) $c = 0$, $d = 2$; б) $c = -2$; $d = 3$. Таким образом, только при этих значениях c и d система (1) имеет решение $x = 1$, $y = 1$, но это не означает, что найденные значения параметров c и d обеспечивают единственность решения.

3. Мы установили пока только необходимое условие, которому удовлетворяют искомые параметры.

4. Достаточность же этого условия должна быть установлена, либо опровергнута в процессе проверки.

а) Если $c = 0$, $d = 2$, то получим систему

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 2, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$.

б) Если $c = -2$, $d = 3$, то получим систему

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x - y = 1, \end{cases}$$

которая также имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$.

5. *Ответ*: $c = 0$, $d = 2$ или $c = -2$, $d = 3$.

29. При каких значениях a для любого b найдется хотя бы одно c такое, что система

$$\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c, \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет по крайней мере одно решение?

1. Система (1) при $b \neq \pm 2$ и при любых a и c имеет единственное решение

$$x = \frac{2ac^2 + 2c - bc + b}{4 - b^2}, \; y = \frac{2c - 2 - abc^2 - bc}{4 - b^2}.$$

2. Если $b = 2$, то система (1) примет вид

$$\begin{cases} 2x + 2y = ac^2 + c, \\ 2x + 2y = c - 1. \end{cases} \qquad (2)$$

3. Чтобы система (2) имела решения, должно выполняться условие $ac^2 + c = c - 1$, т. е. $ac^2 = -1$. Рассматривая последнее соотношение как уравнение относительно c, замечаем, что оно имеет решение при любых $a \in (-\infty; 0)$.

4. Если $b = -2$, то система (1) примет вид

$$\begin{cases} 2x - 2y = ac^2 + c, \\ -2x + 2y = c - 1. \end{cases} \qquad (3)$$

5. Чтобы система (3) имела решения, должно выполняться условие $ac^2 + c = 1 - c$, т. е. $ac^2 + 2c - 1 = 0$. Рассматривая последнее соотношение как уравнение относительно c, замечаем, что оно имеет решения, если $1 + a \geqslant 0$, т. е. $a \in [-1; +\infty)$.

6. Таким образом, при $a \in [-1; 0)$ всегда найдется такое c, что для любого значения b заданная система имеет по крайней мере одно решение.

7. *Ответ*: $a \in [-1; 0)$.

30. При каких значениях a и b системы уравнений

$$\begin{cases} x - 3y = b^2 - 2, \\ 2x + y = 5 \end{cases} \qquad (1)$$

и

$$\begin{cases} 2x + 4by = 3a + 2, \\ x + 2y = 4 \end{cases} \qquad (2)$$

являются равносильными?

1. Система (1) имеет единственное решение $x_0 = \frac{b^2+13}{7}$, $y_0 =$ $= \frac{9-2b^2}{7}$ при любом значении параметра b.

2. Поэтому если при некоторых значениях параметров a и b заданные системы равносильны, то и система (2) должна иметь то же самое единственное решение. Подставив это решение во второе уравнение системы (2), получим

$$\frac{1}{7}(b^2 + 13) + \frac{2}{7}(9 - 2b^2) = 4,$$

откуда $b^2 = 1$, или $b = \pm 1$, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

3. Из первого уравнения системы (2) найдем две пары значений a и b: а) $a = 2$, $b = 1$; б) $a = -\frac{2}{3}$, $b = -1$.

Полученные значения a и b выражают лишь необходимое условие, которому должна удовлетворять искомая пара значений a и b. Поэтому обе найденные пары подлежат проверке.

4. Пусть $a = 2$, $b = 1$. Тогда система (2) примет вид

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8, \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

и имеет бесконечно много решений. Следовательно, пара $a = 2$, $b = 1$ не обеспечивает равносильность систем (1) и (2).

5. Пусть $a = -\frac{2}{3}$, $b = -1$. Тогда система (2) примет вид

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0, \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

и имеет единственное решение $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

6. *Ответ*: $a = -\frac{2}{3}$, $b = -1$.

31. При каких значениях параметра k система уравнений

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + y^2 = 1, \\ (x - 3)^2 + y^2 - 4y = k^2 - 4 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение?

1. Первое уравнение системы (1) определяет окружность с центром в точке $(-2; 0)$ и радиусом $r = 1$.

2. После упрощения второго уравнения системы (1) получаем уравнение $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = k^2$, которое определяет окружность с центром в точке $(3; 2)$ и радиусом $R = k$.

3. Система (1) равносильна следующей:

$$\begin{cases} (x + 2)^2 + y^2 = 1, \\ (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = k^2. \end{cases} \qquad (2)$$

4. Система (2) будет иметь единственное решение в двух случаях:

а) окружности касаются внешним образом;

б) окружности касаются внутренним образом.

5. Построим окружности для случая а). Из рис. 12 видно, что окружности I и II в точке N касаются внешним образом. В прямоугольном треугольнике O_1AO_2 гипотенуза O_1O_2 равна сумме двух данных радиусов 1 и k; поэтому $(k + 1)^2 = 2^2 + 5^2$, откуда $k_{1,\,2} = \pm\sqrt{29} - 1$.

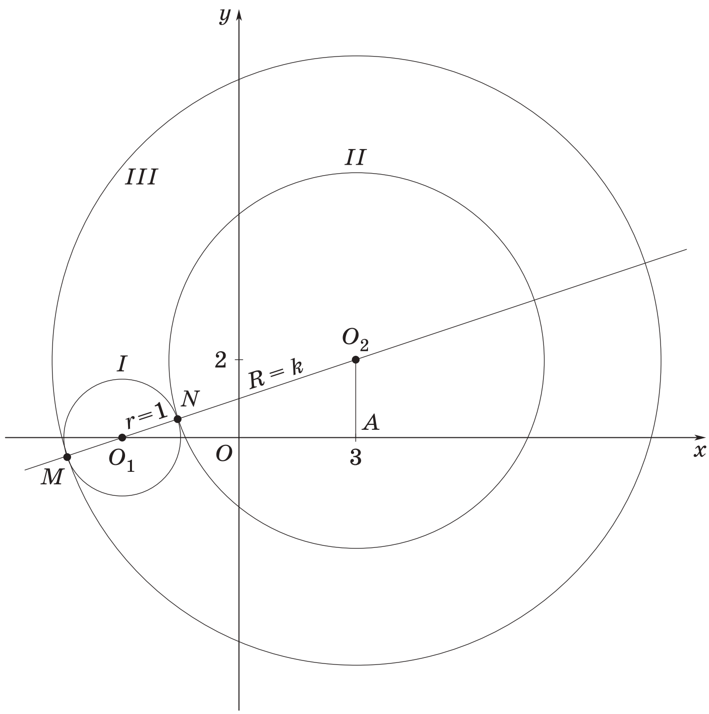


Рис. 12

6. Построим окружности для случая б). Из рис. 12 видно, что окружности I и III в точке M касаются внутренним образом. Радиус окружности III равен $O_2M = O_2N + 2$, откуда следует, что $k_{3,\,4} =$ $= \pm\sqrt{29} + 1$.

7. *Ответ*: $k_{1,\,2} = \pm\sqrt{29} - 1$; $k_{3,\,4} = \pm\sqrt{29} + 1$.

32. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ x + y + z = a \end{cases} \tag{1}$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

1. Подставив выражение для z из первого уравнения системы (1) во второе, получим $x^2 + x + y^2 + y = a$, или

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = a + \frac{1}{2}. \tag{2}$$

2. а) Если $a < -\frac{1}{2}$, то уравнение (2) не имеет решений.

б) Если $a > -\frac{1}{2}$, то уравнение (2), а следовательно, и система (1) имеет более одного решения.

в) Если же $a = -\frac{1}{2}$, то $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$ только при $x =$ $= y = -\frac{1}{2}$.

3. *Ответ*: $a = -\frac{1}{2}$; $x = y = -\frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

33. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + (y - a)^2 = 1, \\ y = |x| \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

1. С геометрической точки зрения количество решений системы — это количество точек пересечения кривых, заданных уравнениями системы.

2. Первое уравнение системы является уравнением окружности с радиусом 1 и с центром в точке $(0;\, a)$.

3. Значение параметра a определяет положение окружности относительно осей координат.

4. График функции $y = |x|$ изображен на рис. 13, *а*.

5. По условию система должна иметь ровно два решения, следовательно, при каждом фиксированном значении a кривые должны иметь две общие точки.

6. В зависимости от значений параметра a возможны следующие взаимные расположения кривых (рис. 13, *б—з*):

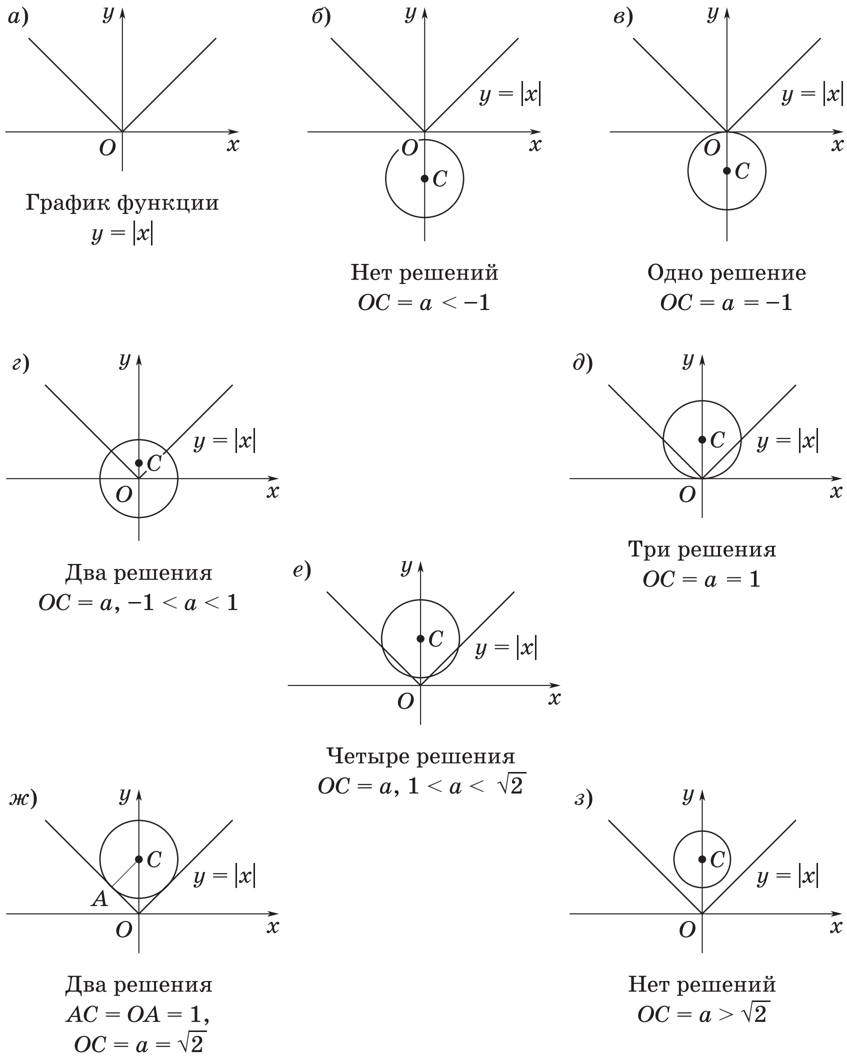


Рис. 13

7. Итак, система имеет два решения, если $a \in (-1;\ 1) \cup \{\sqrt{2}\}$.

8. *Ответ*: $a \in (-1;\ 1) \cup \{\sqrt{2}\}$.

34. В зависимости от значений параметров a и b решить систему

$$\begin{cases} x^7y^{31} = a, \\ x^2y^9 = b. \end{cases} \tag{1}$$

1. Если $a = b = 0$, то система (1) имеет следующие решения: $x = 0$, y — любое; x — любое, $y = 0$.

2. Если $a = 0$, $b \neq 0$, то система (1) не имеет решений.

3. Если $a \neq 0$, $b = 0$, то система (1) также не имеет решений.

4. Рассмотрим, наконец, случай $a \neq 0$, $b \neq 0$. Возведя второе уравнение системы в куб, получим уравнение

$$x^6y^{27} = b^3.$$

Отсюда с учетом первого уравнения системы имеем

$$x^7y^{31} = x^6y^{27}(xy^4) = b^3(xy^4) = a,$$

т. е.

$$x = \frac{a}{b^3y^4}\,. \tag{2}$$

5. Подставив выражение (2) во второе уравнение системы (1), находим

$$y = \frac{b^7}{a^2}\,,\ x = \frac{a^9}{b^{31}}\,.$$

6. *Ответ*: если $a = b = 0$, то $x = 0$, $y \in \boldsymbol{R}$ и $y = 0$, $x \in \boldsymbol{R}$;
если $a = 0$, $b \neq 0$ и $a \neq 0$, $b = 0$, то решений нет;
если $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $x = a^9b^{-31}$, $y = b^7a^{-2}$.

35. При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x + y) = x - y + a, & (1) \\ x^2 + y^2 + bxy = 1 & (2) \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений?

1. Перепишем уравнение (1) в виде

$$(x - y + a)(x + y - 1) = 0. \tag{3}$$

2. Тогда исходная система равносильна совокупности следующих двух систем:

а) $\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + bxy = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y + a = 0, \\ x^2 + y^2 + bxy = 1. \end{cases}$

Каждая из этих систем может иметь либо не более двух, либо бесконечное множество решений, поэтому исходная система имеет не менее пяти решений в том и только в том случае, когда хотя бы одна из систем а) и б) имеет бесконечное множество решений.

3. Выразив из первого уравнения системы а) переменную y и подставив это выражение во второе уравнение той же системы, получим уравнение

$$(2 - b)x^2 + (b - 2)x = 0. \qquad (4)$$

4. При $b = 2$ решением уравнения (4) является любое $x \in \boldsymbol{R}$. При $b \neq 2$ уравнение (4) имеет не более двух решений.

5. Рассмотрим систему б). Поступая так же, как и в п. 3, приходим к уравнению

$$(2 + b)x^2 + a(b + 2)x + a^2 - 1 = 0,$$

откуда следует, что система уравнений (1) и (2) будет иметь не менее пяти (а именно, бесконечное множество) решений в случае, когда $b = -2$, $a = \pm 1$.

6. *Ответ*: $a \in \boldsymbol{R}$, $b = 2$; $a = \pm 1$, $b = -2$.

36. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, & (1) \\ x^2 - 2(a - 1)x + a(a - 2) = 0. & (2) \end{cases}$$

1. Решим первое уравнение системы. Для этого освободимся сначала от знака модуля. Так как $x^2 - 5x + 4 = 0$ при $x = 1$ и $x = 4$, то разобьем числовую прямую на промежутки $x \leqslant 0$, $0 < x \leqslant 1$, $1 < x \leqslant 4$, $x > 4$ и найдем решения уравнения в каждом из этих промежутков.

2. Пусть $x \leqslant 0$; тогда $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$, $|x| = -x$, а уравнение (1) запишется в виде

$$-18x^2 - 10x + 8 = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет корни $x_1 = -1$ и $x_2 = \dfrac{4}{9}$. В рассматриваемый промежуток входит только $x_1 = -1$. Значит, в промежутке $x \leqslant 0$ уравнение (1) имеет один корень $x_1 = -1$.

3. Пусть $0 < x \leqslant 1$; тогда $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$, $|x| = x$, а уравнение (1) запишется в виде

$$2x^2 - 10x + 8 = 0. \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет корни $x_3 = 1$ и $x_4 = 4$, из которых в рассматриваемый промежуток входит только $x_3 = 1$. Значит, в промежутке $0 < x \leqslant 1$ уравнение (1) имеет один корень $x_3 = 1$.

4. Пусть $1 < x \leqslant 4$; тогда $|x^2 - 5x + 4| = -(x^2 - 5x + 4)$, $|x| = x$, а уравнение (1) равносильно тождеству $0 = 0$, т. е. удовлетворяется при любом значении x из промежутка $1 < x \leqslant 4$. Поэтому любое значение x из промежутка $1 < x \leqslant 4$ является решением уравнения.

5. Пусть $4 < x < +\infty$; тогда $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$, $|x| = x$, а уравнение (1) запишется в виде

$$2x^2 - 10x + 8 = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) имеет корни $x_5 = 1$ и $x_6 = 4$, ни один из которых не входит в рассматриваемый промежуток. Значит, в промежутке $4 < x < +\infty$ уравнение (1) не имеет решений.

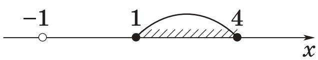


Рис. 14

6. Собрав вместе все найденные выше решения, получаем, что решениями уравнения (1) являются $x = -1$ и все x из промежутка $1 \leqslant x \leqslant 4$.

На числовой прямой (рис. 14) отметим решения уравнения (1).

7. Второе уравнение системы имеет два корня: $x_7 = a$ и $x_8 = a - 2$. Очевидно, что любого a решения уравнения (2) связаны соотношением $x_8 = x_7 - 2$.

8. Выясним теперь, при каких значениях a система уравнений (1) и (2) совместна; для этого будем рассматривать различные значения a, двигаясь по числовой прямой слева направо.

9. Для любого $a < -1$ оба корня уравнения (2) лежат левее любого корня уравнения (1), а потому система (1), (2) несовместна.

10. Если $a = -1$, то, поскольку x_8 лежит левее точки $x = -1$, система (1), (2) имеет единственное решение $x_7 = -1$.

11. Для любого a из промежутка $-1 < a < 1$ число x_7 лежит между корнями уравнения (1), а x_8 лежит левее корня уравнения (1), равного -1. Значит, система (1), (2) несовместна.

12. Если $a = 1$, то, очевидно, система (1), (2) имеет два решения $x_7 = 1$ и $x_8 = -1$.

13. Для любого a из промежутка $1 < a < 3$ система (1), (2) совместна. Ее решением является только $x_7 = a$, так как x_8 будет лежать между числами -1 и 1.

14. Для любого a из промежутка $3 \leqslant a \leqslant 4$ система (1), (2) имеет два решения $x_7 = a$ и $x_8 = a - 2$, так как оба эти числа лежат на промежутке $[1; 4]$.

15. Для любого a из промежутка $4 < a \leqslant 6$ система (1), (2) совместна, ее решением является $x_8 = a - 2$, так как x_7 будет находиться правее отрезка $[1; 4]$.

16. Для любого $a > 6$ система (1), (2) несовместна, поскольку $x_7 > 6$ и $x_8 > 4$.

17. Так как нас интересуют лишь те значения a, для каждого из которых система (1), (2) имеет единственное решение, то из предыдущего вытекает, что условию задачи удовлетворяют $a = -1$, а также любые a из двух промежутков $1 < a < 3$ и $4 < a \leqslant 6$.

18. *Ответ*: $a = -1$, $1 < a < 3$, $4 < a \leqslant 6$.

37. Найти значения k, при которых решения системы

$$\begin{cases} 3x - 6y = 1, \\ 5x - ky = 2 \end{cases}$$

удовлетворяют условиям $x < 0$ и $y < 0$.

1. Из первого уравнения системы выразим $x = \frac{1}{3}(1 + 6y)$ и подставим во второе. Получим $3y(10 - k) = 1$.

а) Если $k = 10$, то система не имеет решений.

б) Если $k \neq 10$, то

$$x = \frac{12 - k}{3(10 - k)},\ y = \frac{1}{3(10 - k)}.$$

2. Найдем теперь значения k, при которых $x < 0$ и $y < 0$. Для этого решим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{12 - k}{3(10 - k)} < 0, \\ \dfrac{1}{3(10 - k)} < 0. \end{cases}$$

Из второго неравенства следует, что $10 - k < 0$, тогда из первого получаем $12 - k > 0$, т. е. $10 < k < 12$.

3. *Ответ*: $k \in (10; 12)$.

38. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^3 - ay^3 = 0{,}5(a+1)^2, \\ x^3 + ax^2y + xy^2 = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно решение и всякое ее решение удовлетворяет уравнению $x + y = 0$ (a, x, y — действительные числа).

1. По условию $y = -x$. Тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} x^3 + ax^3 = 0{,}5(a+1)^2, \\ x^3 - ax^3 + x^3 = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^3(1+a) = 0{,}5(1+a)^2, & (2) \\ x^3(2-a) = 1. & (3) \end{cases}$$

2. Если $a + 1 \neq 0$, $2 - a \neq 0$, то выразим x^3 из уравнений (2) и (3): а) $x^3 = \frac{0{,}5(1+a)^2}{1+a}$; б) $x^3 = \frac{1}{2-a}$.

3. Приравняв полученные выражения, приходим к уравнению относительно a:

$$\frac{0{,}5(1+a)^2}{1+a} = \frac{1}{2-a}, \text{ т. е. } a^2 - a = 0.$$

4. *Ответ*: $a = 0$; $a = 1$.

39. При каких a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a), \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$$

имеет в точности два решения?

1. Пусть a — искомое значение параметра и $(x_0; y_0)$ — решение системы. Легко установить, что пары чисел $(-x_0; -y_0)$, $(y_0; x_0)$, $(-y_0; -x_0)$, также будут решениями системы.

2. Решения $(x_0; y_0)$ и $(-x_0; -y_0)$ различны, так как в противном случае $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$, и тогда пара чисел $(x_0; y_0)$ не удовлетворяет второму уравнению системы.

3. Решения $(x_0; y_0)$ и $(-y_0; -x_0)$ также различны; в противном случае $x_0 + y_0 = 0$ и снова не удовлетворяется второе уравнение системы.

4. По условию система имеет в точности два решения, значит, решения $(-x_0; -y_0)$ и $(-y_0; -x_0)$ должны совпадать, т. е. должно выполняться равенство $y_0 = x_0$.

5. Подставив x_0 вместо y_0 во второе уравнение системы, получаем уравнение $4x_0^2 = 14$, которое имеет два корня: $(x_0)' = \sqrt{\frac{7}{2}}$ и $(x_0)'' = -\sqrt{\frac{7}{2}}$.

6. Значит, если при данном a пара $(x_0; y_0)$ — решение исходной системы, то либо $x_0 = y_0 = \sqrt{\frac{7}{2}}$, либо $x_0 = y_0 = -\sqrt{\frac{7}{2}}$. В обоих случаях, подставив $(x_0; y_0)$ в первое уравнение системы, получим $2(1 + a) = \frac{7}{2} + \frac{7}{2}$, откуда $a = \frac{5}{2}$.

7. Таким образом, если a — искомое значение параметра, то оно может принимать только значение $\frac{5}{2}$.

8. При $a = \frac{5}{2}$ исходная система уравнений примет вид

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7, \\ (x + y)^2 = 14. \end{cases} \tag{1}$$

9. Умножим первое уравнение системы (1) на 2 и вычтем результат из второго уравнения системы (1). Получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7, \\ -(x - y)^2 = 0, \end{cases} \tag{2}$$

равносильную системе (1).

10. Система (2) в свою очередь равносильна системе

$$\begin{cases} y = x, \\ 2x^2 = 7, \end{cases}$$

которая имеет в точности два решения: $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}; \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ и $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}; -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$.

Итак, действительно, $a = \frac{5}{2}$ и только это значение удовлетворяет условию задачи.

11. *Ответ*: $a = \frac{5}{2}$.

40. Найти множество значений a, при которых уравнение

$$\frac{x^2-(3a-4)x+2a^2-5a+3}{\sqrt{x+1}}=0$$

имеет единственное решение.

1. Находим ОДЗ: $x > -1$.

2. Данное уравнение может иметь единственное решение в двух случаях: либо квадратный трехчлен в числителе имеет единственный корень ($D = 0$), принадлежащий ОДЗ, либо этот трехчлен имеет два корня ($D > 0$), один из которых принадлежит ОДЗ, а другой не принадлежит ОДЗ.

3. Квадратное уравнение

$$x^2 - (3a - 4)x + 2a^2 - 5a + 3 = 0$$

имеет корни $x_{1,\,2} = \dfrac{3a-4 \pm (a-2)}{2}$, т. е. $x_1 = 2a - 3$, $x_2 = a - 1$.

4. Рассмотрим два случая:

1) $D = 0$ при $a = 2$, $x_1 = x_2 = 1 > -1$. Следовательно, $a = 2$ удовлетворяет условию задачи.

2) $D > 0$;

а) $\begin{cases} 2a-3 \leqslant -1, \\ a-1 > -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leqslant 1, \\ a > 0; \end{cases}$ $\quad a \in (0;\, 1]$;

б) $\begin{cases} 2a-3 > -1, \\ a-1 \leqslant -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 1, \\ a \leqslant 0 \end{cases}$ $\quad a \in \varnothing$.

5. *Ответ*: $a \in (0;\, 1] \cup \{2\}$.

41. При каких значениях a уравнение

$$(2x^2 - (5a + 2)x + 3a^2 + 3a)\sqrt{x-1} = 0 \tag{1}$$

имеет ровно два решения?

1. Очевидно, что уравнение (1) имеет одно решение $x = 1$ при любом значении параметра a.

2. Уравнение (1) будет иметь ровно два решения при тех значениях a, при которых система

$$\begin{cases} 2x^2 - (5a + 2)x + 3a^2 + 3a = 0, & (2) \\ x - 1 > 0 & (3) \end{cases}$$

имеет только одно решение.

3. Возможны два случая.

а) Дискриминант уравнения (2) равен нулю и единственный корень этого уравнения больше 1. Так как $D = (a - 2)^2 = 0$, если $a = 2$, а единственный корень уравнения (2) есть $x = 3 > 1$, то при $a = 2$ исходное уравнение будет иметь ровно два решения.

б) Уравнение (2) имеет два корня, но один из этих корней меньше или равен единице. Находим корни уравнения (2): $x_{1,\,2} = \frac{5a + 2 \pm (a - 2)}{4}$, т. е. $x_1 = \frac{3a}{2}$, $x_2 = a + 1$. Значит, система (2), (3) будет иметь только одно решение, если a удовлетворяет следующей совокупности систем неравенств:

$$\begin{cases} \frac{3a}{2} \leqslant 1, \\ a + 1 > 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3a}{2} > 1, \\ a + 1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Решив первую систему, получим $a \in \left(0;\ \frac{2}{3}\right]$, вторая система не имеет решений.

4. Таким образом, уравнение (1) имеет ровно два решения, если $a \in \left(0;\ \frac{2}{3}\right] \cup \{2\}$.

5. *Ответ*: $a \in \left(0;\ \frac{2}{3}\right] \cup \{2\}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При каких значениях a сумма корней уравнения $x^2 + (a^2 - 4a - 5)x + a^2 - 6a + 1 = 0$ равна нулю?

2. При каких значениях a разность корней уравнения $2x^2 - (a + 1)x + a - 1 = 0$ равна их произведению?

3. Найти значения a, при которых отношение корней уравнения $x^2 - (2a + 4)x + a^2 + 4 = 0$ равно 5.

4. При каких значениях a имеют общий корень уравнения:

а) $3ax^2 - 5x + 2a = 0$ и $2x^2 + ax - 3 = 0$;

б) $x^2 - (a - 1)x = 3$ и $4x^2 - (4a + 3)x + 9 = 0$?

5. При каких значениях a один из корней уравнения $x^2 - 5x - 3a = 0$ втрое больше одного из корней уравнения $x^2 - 6x + 4a = 0$?

6. Найти все значения a, при которых квадратный трехчлен $(a^2 - 1)x^2 + 2(a - 1)x + 1$ положителен для всех значений x.

7. При каких значениях a уравнение:

а) $x^2 - 7x + a = 0$ имеет два равных корня;

б) $x^2 + x\sqrt{a^2 - 1} + a - 1$ имеет два равных корня;

в) $(a - 2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0$ имеет единственный корень?

8. Решить уравнение:

а) $a(a + 1)x^2 + x - a(a - 1) = 0$;

б) $ax^2 + (2a - 1)x + a - 2 = 0$;

в) $(a^2 + a - 2)x^2 + (2a^2 + a + 3)x + a^2 - 1 = 0$;

г) $(a^2 - b^2)x^2 - 2ax + 1 = 0$.

9. Решить уравнение:

а) $\frac{a}{x} + \frac{a-1}{x-1} = 2$; б) $\frac{x}{a} + \frac{a-1}{x-1} = 2$;

в) $x + \frac{bx}{x-2a} = \frac{2ab}{x-2a}$; г) $\frac{x^2 - (a+1)x - (a+2)}{(x+2)(x-3a)} = 0$.

10. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

11. Найти все значения b такие, чтобы при любом a система

$$\begin{cases} 2x = a + 3y, \\ ax = b - 4y \end{cases}$$

имела хотя бы одно решение.

12. Найти все значения a такие, чтобы при любом b нашлось значение c, для которого система

$$\begin{cases} bx = y + ac^2, \\ (b - 4)x = 1 - 2c - 3by \end{cases}$$

имела хотя бы одно решение.

13. При каких значениях a система уравнений:

а) $\begin{cases} (a + 1)x - y = a, \\ (a - 3)x + ay = -9 \end{cases}$ имеет единственное решение;

б) $\begin{cases} a^2x + (2 - a)y = 4 + a^3, \\ ax + (2a - 1)y = a^5 - 2 \end{cases}$ не имеет решений;

в) $\begin{cases} x + ay = 2a, \\ 2x + 2ay = 5 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

14. При каких значениях a система

$$\begin{cases} 7ax + 4y = -8, \\ x + 7ay = 49a^2 \end{cases}$$

имеет более одного решения?

15. Решить относительно x и y систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2ay - a^2 = 0, \\ y^2 - 2bx - b^2 = 0 \end{cases}$$

(x, y, a, b — действительные числа).

16. Найти значения a и b, при которых заданная система имеет бесконечное множество решений:

а) $\begin{cases} ax + by = 3a + 5, \\ bx + 4ay = 6b - 5a; \end{cases}$

б) $\begin{cases} b^2x + ay = 2b^2 + 8a, \\ ax + a^2y = 2{,}25 - 5a; \end{cases}$

в) $\begin{cases} a^2x - by = a^2 + 2b, \\ 4bx - b^2y = 4 - 3b. \end{cases}$

17. Найти значения a, при которых заданная система имеет ровно два решения:

а) $\begin{cases} |y| = x, \\ (x - a)^2 + y^2 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = 3 - |x|, \\ x^2 + (y - a)^2 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = 5 - |y|, \\ (x - a)^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = \sqrt{3}\,|x|, \\ x^2 + (y - a)^2 = 4. \end{cases}$

Ответы

1. $a = 5$. **2.** $a = 2$. **3.** $a = 1$, $a = 4$. **4.** а) $a = -1$, $a = 1$; б) $a = 3$. **5.** $a = 2$. **6.** $a \in [1; +\infty)$. **7.** а) $a = 12{,}25$; б) $a = 1$, $a = 3$; в) $a = 1$, $a = 2$, $a = 6$. **8.** а) Если $a = -1$, то $x = 2$; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, то $x = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}$; если $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $x = -\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$; если $a \neq -1$, $a \neq 0$, $a \neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, то $x_1 = -\frac{a}{a + 1}$, $x_2 = \frac{a - 1}{a}$; б) если $a < -\frac{1}{4}$, то нет корней; если $a = -\frac{1}{4}$, то $x = -3$; если $a = 0$, то $x = -2$; если $-\frac{1}{4} < a < 0$ или $a > 0$, то $x_{1,\,2} = \frac{1 - 2a \pm \sqrt{4a + 1}}{2a}$; в) если $a = -2$, то $x =$

$= -\frac{1}{3}$; если $a = 1$, то $x = 0$; если $a \neq -2$, $a \neq 1$, то $x_1 = \frac{1-a}{2+a}$, $x_2 = \frac{1+a}{1-a}$; г) если $a^2 - b^2 \neq 0$, то $x = \frac{1}{2a}$; если $a \neq 0$, $b = 0$, то $x = \frac{1}{a}$; если $a = 0$, $b = 0$, то нет корней; если $a^2 \neq b^2$, $b \neq 0$, то $x_1 = \frac{1}{a-b}$, $x_2 = \frac{1}{a+b}$. **9.** а) Если $a \neq 0$, $a \neq 1$, то $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = a$; если $a = 0$, $a = 1$, то $x = 0{,}5$; б) если $a \neq 0$, $a \neq 1$, то $x_1 = a$, $x_2 = a + 1$; если $a = 1$, то $x = 2$; если $a = 0$, то нет корней; в) если $b \neq -2a$, то $x = -b$; если $b = -2a$, то нет корней; г) если $a \neq -4$, $a \neq -3$, $a \neq -\frac{1}{3}$, $a \neq 1$, то $x_1 = -1$, $x_2 = a + 2$; если $a = -4$, $a = -3$, $a = 1$, то $x = -1$; если $a = -\frac{1}{3}$, то $x = \frac{5}{3}$. **10.** $a = 0$, $a = 2$. **11.** $b = \frac{32}{9}$. **12.** $a \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right]$. **13.** а) $a \neq -3$, $a \neq 1$; б) $a = 1$; в) $a = 1{,}25$. **14.** $a = -\frac{2}{7}$. **15.** Если $a \geqslant 0$, то $x_1 = a + \sqrt{2ab}$, $y_1 = b + \sqrt{2ab}$, $x_2 = a - \sqrt{2ab}$, $y_2 = b - \sqrt{2ab}$; если $a \leqslant 0$, то $x_1 = -a + \sqrt{-2ab}$, $y_1 = -b + \sqrt{-2ab}$, $x_2 = -a - \sqrt{-2ab}$, $y_2 = -b - \sqrt{-2ab}$. **16.** а) $a_1 = \frac{10}{11}$, $b_1 = -\frac{20}{11}$; $a_2 = 10$, $b_2 = 20$; б) $a_1 = -1{,}125$, $b_1 = 1$; $a_2 = -1{,}125$, $b_2 = -1$; $a_3 = 0{,}25$, $b_3 = 1$; $a_4 = 0{,}25$, $b_4 = -1$; в) $a_1 = -2$, $b_1 = -4$; $a_2 = -2$, $b_2 = 0{,}5$; $a_3 = 2$, $b_3 = -4$; $a_4 = 2$, $b_4 = 0{,}5$. **17.** а) $a \in (-2; 2) \cup \{2\sqrt{2}\}$; б) $a \in (1; 5) \cup \{3 - 2\sqrt{2}\}$; в) $a \in (2; 8) \cup \{5 - 3\sqrt{2}\}$; г) $a \in (-2; 2) \cup \{4\}$.

Тема 6

1. Неравенства
2. Основные свойства неравенств
3. Действия с неравенствами
4. Решение линейных и квадратных неравенств

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Неравенства

1°. Запись $x \geqslant y$ ($y \leqslant x$) означает, что либо $x > y$, либо $x = y$, и читается так: «x больше или равно y» или «x не меньше y».

2°. Запись, в которой два числа или два выражения, содержащие переменные, соединены знаком $>$, $<$, $\geqslant$ или $\leqslant$, называют ***неравенством***.

3°. Неравенства, составленные с помощью знаков $>$ или $<$, называют ***строгими***; неравенства, составленные с помощью знаков $\geqslant$ или $\leqslant$, — ***нестрогими***.

4°. Два неравенства вида $a > b$ и $c > d$ называют ***неравенствами одинакового смысла***, а неравенства вида $a > b$, $c < d$ — ***неравенствами противоположного смысла***.

5°. Вместо двух неравенств $x < a$, $a < y$ употребляется запись $x < a < y$. Такое неравенство называют ***двойным***.

6°. Если неравенство представляет собой истинное высказывание, то его называют ***верным***.

7°. Неравенства, содержащие только числа, называют ***числовыми***.

2. Основные свойства неравенств

1°. Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство, т. е. если $a > b$, то $a + c > b + c$.

2°. Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство.

3°. Если обе части верного неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.

4°. Так как деление можно заменить умножением на число, обратное делителю, то аналогичные правила справедливы и в отношении деления.

3. Действия с неравенствами

1°. Неравенства одинакового смысла можно почленно складывать. Например:

а) $$+\begin{array}{r} a > b \\ c > d \\ \hline a + c > b + d; \end{array}$$ б) $$+\begin{array}{r} a < b \\ c < n \\ \hline a + c < b + n. \end{array}$$

2°. Неравенства противоположного смысла можно почленно вычитать, оставляя знак того неравенства, из которого производится вычитание. Например,

$$-\begin{array}{r} a > b \\ c < d \\ \hline a - c > b - d. \end{array}$$

3°. Неравенства одинакового смысла с положительными членами можно почленно умножать. Например, если $a > b$, то $a^k > b^k$, где $a > 0$, $b > 0$, $k \in \boldsymbol{N}$.

Верно и обратное утверждение: если $a^k > b^k$, $a > 0$, $b > 0$, $k \in \boldsymbol{N}$, то $a > b$.

З а м е ч а н и е. Часто используют следующие важные неравенства:

а) $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$.

Это неравенство означает, что среднее арифметическое двух неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического, причем равенство достигается только в том случае, когда $a = b$.

б) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, если $a > 0$ и $b > 0$.

Это неравенство означает, что сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше 2.

4. Решение линейных и квадратных неравенств

1°. ***Линейным неравенством*** называют неравенство вида $ax + b > 0$ (или $ax + b < 0$).

а) Если $a > 0$, то неравенство $ax + b > 0$ равносильно неравенству $x > -\frac{b}{a}$.

б) Если $a < 0$, то неравенство $ax + b > 0$ равносильно неравенству $x < -\frac{b}{a}$.

2°. ***Квадратным неравенством*** называют неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (или $ax^2 + bx + c < 0$), где $a \neq 0$.

3°. Два неравенства называют ***равносильными***, если множества решений этих неравенств совпадают.

4°. Пусть требуется решить неравенство $ax^2 + bx + c > 0$.

В зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ возможны три случая:

а) Если $D < 0$, то график квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ не пересекает ось Ox и лежит выше этой оси при $a > 0$ и ниже ее при $a < 0$. Тогда при $a > 0$ множество решений неравенства есть вся числовая прямая (рис. 15, *а*), а при $a < 0$ оно является пустым (рис. 15, *б*).

б) Если $D > 0$, то график квадратного трехчлена пересекает ось Ox в точках x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$), служащих корнями уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Эти точки разбивают числовую прямую на три промежутка: $(-\infty;\ x_1)$, $(x_1;\ x_2)$ и $(x_2;\ +\infty)$. При этом знак квадратного трехчлена совпадает со знаком коэффициента a во всех точках про-

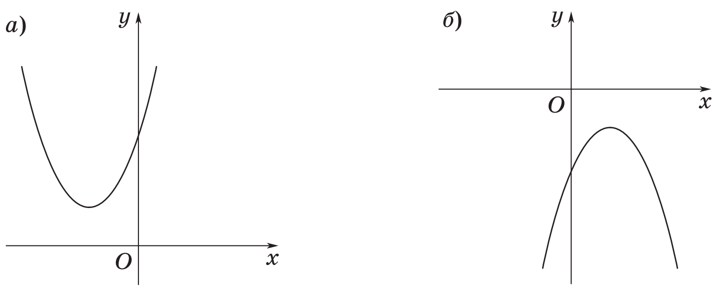


Рис. 15

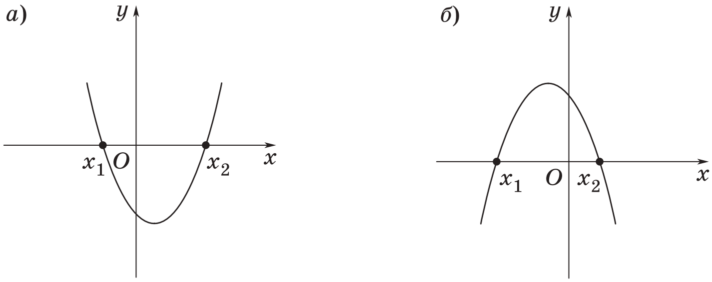


Рис. 16

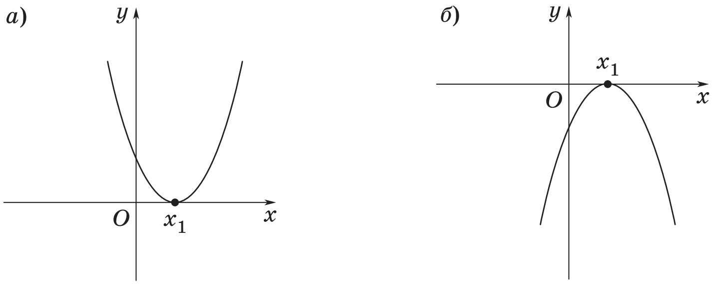


Рис. 17

межутков $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$ и противоположен знаку коэффициента a во всех точках промежутка $(x_1; x_2)$ (рис. 16, *а* и *б*).

в) Если $D = 0$, то график квадратного трехчлена касается оси Ox в точке x_1, являющейся единственным корнем уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Точка x_1 разбивает числовую прямую на два промежутка: $(-\infty; x_1)$ и $(x_1; +\infty)$. Знак квадратного трехчлена совпадает со знаком a при $x \neq x_1$ (рис. 17, *а* и *б*).

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. При каких значениях a неравенство

$$(x - a)(x - 2) \leqslant 0$$

имеет единственное решение?

1. Легко догадаться, что если $a = 2$, то требование задачи удовлетворяется. Действительно, при $a = 2$ получаем неравенство

$$(x-2)^2 \leqslant 0,$$

имеющее единственное решение.

2. В случае, когда $a \neq 2$, решением данного неравенства, очевидно, является отрезок.

3. *Ответ*: $a = 2$.

2. При каких значениях параметра m неравенство $(m-2)x^2 - 2x + m - 2 < 0$ выполняется для всех x?

1. Пусть $m \neq 2$. Тогда ветви параболы $y = (m-2)x^2 - 2x + m - 2$ должны быть направлены вниз и парабола не должна пересекать ось Ox.

2. Для этого необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\begin{cases} a < 0, \\ \dfrac{D}{4} < 0, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} m - 2 < 0, \\ 1 - (m-2)^2 < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

3. Решив систему неравенств (1), получим $m < 1$.

4. Пусть $m = 2$. Тогда данное неравенство примет вид $-2x < 0$, т. е. оно выполняется только при $x > 0$. Поэтому значение $m = 2$ не удовлетворяет требованию задачи.

5. *Ответ*: $m \in (-\infty; 1)$.

3. Найти все значения a, для которых выражение

$$(a^2-1)x^2 + 2(a-1)x + 2 \qquad (1)$$

положительно при всех действительных значениях x.

1. Пусть $a^2 - 1 = 0$, т. е. либо $a = 1$, либо $a = -1$. Тогда в случае $a = 1$ выражение (1) равно 2 при всех x, а в случае $a = -1$ выражение (1) примет вид $-4x + 2$ и, значит, не будет положительным при всех x.

2. Пусть $a^2 - 1 \neq 0$. Тогда выражение (1) представляет собой квадратный трехчлен, который положителен при всех значениях x, если коэффициент при x^2 положителен, а дискриминант квадратного трехчлена отрицателен:

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ \dfrac{D}{4} = (a-1)^2 - 2(a^2-1) < 0. \end{cases} \qquad (2)$$

3. Система (2) равносильна следующей:

$$\begin{cases} a^2 - 1 > 0, \\ a^2 + 2a - 3 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |a| > 1, \\ (a - 1)(a + 3) > 0, \end{cases}$$

откуда $a > 1$, $a < -3$.

4. *Ответ*: $a \in (-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$.

4. При каких значениях параметра m графики функций $y = x^2 + m^2 + 12$ и $y = 2(m + 2)x$ пересекаются в двух различных точках?

1. Графики пересекутся в двух различных точках, если уравнение

$$x^2 + m^2 + 12 = 2\,(m + 2)x$$

имеет два различных корня.

2. Преобразуем это уравнение к виду

$$x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + 12 = 0.$$

3. Так как $\frac{D}{4} = (m + 2)^2 - (m^2 + 12) > 0$, или $m^2 + 4m + 4 - m^2 - 12 > 0$, то $m > 2$.

4. *Ответ*: $m \in (2; +\infty)$.

5. При каких значениях параметра k графики функций $y = 2kx + 1$ и $y = (k - 6)x^2 - 2$ не пересекаются?

1. Графики функций не пересекутся, если уравнение

$$2kx + 1 = (k - 6)x^2 - 2 \qquad (1)$$

не будет иметь корней.

2. Преобразуем уравнение (1) к виду

$$(k - 6)x^2 - 2kx - 3 = 0. \qquad (2)$$

3. Уравнение (2) не будет иметь корней, если $\frac{D}{4} < 0$, т. е. $k^2 + 3(k - 6) < 0$, откуда $-6 < k < 3$.

4. *Ответ*: $k \in (-6; 3)$.

6. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$(a^2 + a + 1)x - 3a > (2 + a)x + 5a. \qquad (1)$$

1. После упрощения неравенство (1) примет вид

$$(a^2 - 1)x > 8a. \qquad (2)$$

2. а) Пусть $|a| > 1$; тогда неравенство (2) имеет решение $x >$ $> \frac{8a}{a^2 - 1}$.

б) Пусть $|a| < 1$; тогда неравенство (2) имеет решение $x < \frac{8a}{a^2 - 1}$.

в) Пусть $a = 1$; тогда неравенство (2) примет вид $0 \cdot x > 8$ и не будет иметь решений.

г) Пусть $a = -1$; тогда неравенство (2) примет вид $0 \cdot x > -8$ и будет выполняться при любом значении x.

3. *Ответ*: если $-\infty < a < -1$ или $1 < a < +\infty$, то $x > \frac{8a}{a^2 - 1}$;

если $-1 < a < 1$, то $x < \frac{8a}{a^2 - 1}$;

если $a = -1$, то $x \in \boldsymbol{R}$;

если $a = 1$, то нет решений.

7. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$56x^2 + ax - a^2 < 0. \tag{1}$$

1. Найдем дискриминант квадратного трехчлена: $D = 225a^2 \geqslant 0$; корнями трехчлена являются $x_1 = -\frac{a}{7}$, $x_2 = \frac{a}{8}$.

2. При $a > 0$ неравенство (1) имеет решение $-\frac{a}{7} < x < \frac{a}{8}$.

3. При $a < 0$ неравенство (1) имеет решение $\frac{a}{8} < x < -\frac{a}{7}$.

4. При $a = 0$ неравенство (1) не имеет решений.

5. *Ответ*: если $a > 0$, то $-\frac{a}{7} < x < \frac{a}{8}$;

если $a < 0$, то $\frac{a}{8} < x < -\frac{a}{7}$;

если $a = 0$, то нет решений.

8. Пусть x_1 и x_2 — действительные корни уравнения $x^2 - ax + a = 0$, где a — действительное число. Найти такое значение a, чтобы величина выражения $x_1^2 + x_2^2$ была наименьшей.

1. Уравнение $x^2 - ax + a = 0$ имеет действительные корни при условии неотрицательности его дискриминанта:

$$D = a^2 - 4a \geqslant 0,$$

откуда

$$a \leqslant 0 \text{ и } a \geqslant 4. \tag{1}$$

2. Требуется найти минимум неотрицательного выражения

$$y = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

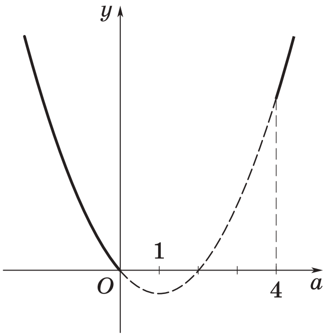


Рис. 18

которое согласно теореме Виета можно записать в виде

$$y = a^2 - 2a. \qquad (2)$$

3. Таким образом, задача сводится к отысканию наименьшего значения квадратного двучлена (2) в области (1) при условии $y(a) \geqslant 0$.

4. Нетрудно установить (рис. 18), что квадратный двучлен (2) достигает наименьшего значения на границе области (1), а именно при $a = 0$.

5. *Ответ*: $a = 0$.

9. При каком значении параметра t сумма квадратов корней уравнения

$$x^2 + (2 - t)x - t^2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

принимает наименьшее значение?

1. Воспользуемся формулами Виета и выразим $x_1^2 + x_2^2$ через параметр t. Получим

$$f(t) = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$$
$$= (t - 2)^2 - 2(-t^2 + 1) = 3t^2 - 4t + 2.$$

2. Если бы областью определения функции $f(t)$ была вся числовая прямая, то наименьшее значение этой функции достигалось бы в точке $t = \dfrac{2}{3}$ (абсциссе вершины параболы), причем $f_{\text{наим}} = f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{2}{3}$.

3. Однако корни уравнения (1) существуют только в случае $D \geqslant 0$. Решив неравенство

$$D = (2 - t)^2 + 4(t^2 - 1) = 5t^2 - 4t \geqslant 0,$$

получаем $t \in (-\infty; 0] \cup \left[\dfrac{4}{5}; +\infty\right)$ и $\dfrac{2}{3} \notin (-\infty; 0] \cup \left[\dfrac{4}{5}; +\infty\right)$.

а) На промежутке $(-\infty; 0]$ функция $f(t)$ убывает и принимает наименьшее значение при $t = 0$; $f(0) = 2$.

б) На промежутке $\left[\frac{4}{5}; +\infty\right)$ функция $f(t)$ возрастает и принимает наименьшее значение при $t = \frac{4}{5}$; $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{18}{25} < 2$ (рис. 19).

4. *Ответ*: $t = \frac{4}{5}$.

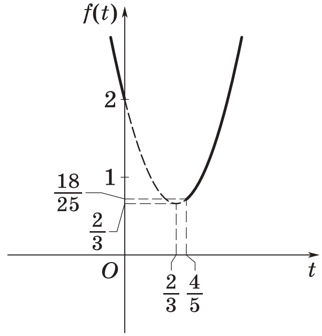


Рис. 19

10. При каких значениях параметра t наименьшее значение квадратного трехчлена

$$f(x) = 4x^2 - 4tx + t^2 - 2t + 2 \qquad (1)$$

на промежутке $0 \leqslant x \leqslant 2$ равно 3?

1. При каждом фиксированном значении параметра t графиком квадратного трехчлена (1) является парабола, абсцисса вершины которой $x = \frac{t}{2}$.

2. В зависимости от положения вершины параболы требуемые значения параметра t можно найти, рассматривая следующие три возможных случая:

а) $\begin{cases} \frac{t}{2} \leqslant 0, \\ f(0) = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0 < \frac{t}{2} < 2, \\ f\left(\frac{t}{2}\right) = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{t}{2} \geqslant 2, \\ f(2) = 3. \end{cases}$

3. Решив каждую из этих трех систем с учетом того, что

$$f(0) = t^2 - 2t + 2,\ f\left(\frac{t}{2}\right) = -2t + 2,\ f(2) = t^2 - 10t + 18,$$

заключаем, что в первом случае $t = 1 - \sqrt{2}$; во втором $t \in \varnothing$; в третьем $t = 5 + \sqrt{10}$.

4. *Ответ*: $t \in (1 - \sqrt{2}; 5 + \sqrt{10})$.

11. При каких значениях параметра a вершины парабол $y = 4x^2 + 8ax - a$ и $y = 4ax^2 - 8x + a - 2$ лежат по одну сторону от прямой $y = -5$?

1. Найдем координаты вершин обеих парабол.

а) Абсцисса вершины первой из них $x_1 = -a$, ее ордината $y_1 = -4a^2 - a$.

б) Абсцисса вершины второй параболы $x_2 = \frac{1}{a}$, ее ордината $y_2 = -\frac{4}{a} + a - 2$.

2. Точки $A_1(-a; -4a^2 - a)$ и $A_2\left(\frac{1}{a}; -\frac{4}{a} + a - 2\right)$ будут лежать по одну сторону от прямой $y = -5$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$(-4a^2 - a + 5)\left(-\frac{4}{a} + a - 2 + 5\right) > 0,$$

т. е.

$$(1 - a)\left(a + \frac{5}{4}\right)a(a - 1)(a + 4) > 0,$$

или

$$a(a + 4)\left(a + \frac{5}{4}\right)(a - 1)^2 < 0.$$

3. Решив это неравенство, получим ответ.

4. *Ответ*: $a \in (-\infty; -4) \cup \left(-\frac{5}{4}; 0\right)$.

12. Решить уравнение $|x - 3| = kx + 2$.

1. Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} x - 3 < 0, \\ -x + 3 = kx + 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 3 \geqslant 0, \\ x - 3 = kx + 2. \end{cases}$

2. Решим систему а). Имеем

$$\begin{cases} x < 3, \\ x = x_1 = \dfrac{1}{k+1}. \end{cases}$$

Определим значения k, при которых $x_1 < 3$. Из неравенства $\frac{1}{k+1} < 3$ находим $k \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

3. Решим систему б). Имеем

$$\begin{cases} x \geqslant 3, \\ x = x_2 = \dfrac{5}{1-k}. \end{cases}$$

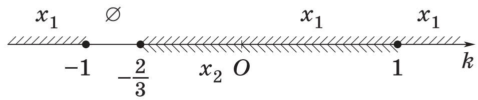


Рис. 20

Так как $x_2 \geqslant 3$, то $\dfrac{5}{1-k} \geqslant 3$, откуда $-\dfrac{2}{3} \leqslant k < 1$.

4. На числовой прямой Ok изобразим промежутки значений k, в которых уравнение имеет решение (рис. 20).

5. *Ответ*: если $k \in (-\infty; -1)$, то одно решение $x_1 = \dfrac{1}{k+1}$;

если $k \in \left[-1; -\dfrac{2}{3}\right)$, то решений нет;

если $k = -\dfrac{2}{3}$, то $x = 3$ $\left(\text{получается из } x_2 \text{ при } k = -\dfrac{2}{3}\right)$;

если $k \in \left(-\dfrac{2}{3}; 1\right)$, то два решения $x_1 = \dfrac{1}{k+1}$, $x_2 = \dfrac{5}{1-k}$;

если $k = 1$, то $x = \dfrac{1}{2}$ (получается из x_1 при $k = 1$);

если $k \in (1; +\infty)$, то одно решение $x_1 = \dfrac{1}{k+1}$.

13. При каких значениях параметра a все решения уравнения

$$2|x - a| + a - 4 + x = 0$$

удовлетворяют неравенству $0 \leqslant x \leqslant 4$?

1. Данное уравнение равносильно совокупности двух смешанных систем:

$$\begin{cases} x - a \geqslant 0, \\ 2(x - a) + a - 4 + x = 0; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x - a < 0, \\ 2(a - x) + a - 4 + x = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

2. Уравнение системы (1) имеет решение $x = \dfrac{a+4}{3}$. Чтобы это решение удовлетворяло условию $x - a \geqslant 0$, должно выполняться неравенство $\dfrac{a+4}{3} - a \geqslant 0$, откуда $a \leqslant 2$.

3. Уравнение системы (2) имеет решение $x = 3a - 4$. Чтобы это решение удовлетворяло условию $x - a < 0$, должно выполняться неравенство $3a - 4 - a < 0$, откуда $a < 2$.

4. Если $a = 2$, то исходное уравнение имеет одно решение $x = 2$, удовлетворяющее неравенству $0 \leqslant x \leqslant 4$.

5. Если же $a < 2$, то исходное уравнение имеет два решения, которые удовлетворяют неравенству $0 \leqslant x \leqslant 4$ при значениях a, являющихся решением системы неравенств

$$\begin{cases} 0 \leqslant \dfrac{a+4}{3} \leqslant 4, \\ 0 \leqslant 3a - 4 \leqslant 4, \end{cases}$$

т. е. при $\dfrac{4}{3} \leqslant a < 2$.

6. *Ответ*: $a \in \left[\dfrac{4}{3}; 2\right]$.

14. Решить относительно x неравенство

$$\frac{2x-5}{a-1} - \frac{x+7}{3} \leqslant \frac{3x-2a}{2(a-1)}. \qquad (1)$$

1. Пусть $a = 1$. Тогда неравенство (1) не имеет смысла.

2. Пусть $a > 1$. Тогда неравенство (1) равносильно неравенству

$$6(2x - 5) - 2(a - 1)(x + 7) \leqslant 3(3x - 2a),$$

или

$$(2a - 5)x \geqslant -8(a + 2). \qquad (2)$$

а) Если $a > 2{,}5$, то $x \geqslant \dfrac{-8(a+2)}{2a-5}$.

б) Если $1 < a < 2{,}5$, то $x \leqslant \dfrac{-8(a+2)}{2a-5}$.

в) Если $a = 2{,}5$, то неравенство (2) примет вид $0 \cdot x \geqslant -36$, т. е. x — любое действительное число.

3. Пусть $a < 1$. Тогда, умножив обе части неравенства (1) на $(a - 1)$ и изменив его знак на противоположный, получим неравенство

$$6(2x - 5) - 2(a - 1)(x + 7) \geqslant 3(3x - 2a),$$

или

$$(2a - 5)x \leqslant -8(a + 2),$$

равносильное неравенству (1). Отсюда $x \geqslant \dfrac{-8(a+2)}{2a-5}$, так как при $a < 1$ имеем $2a - 5 < 0$.

4. *Ответ*: если $a < 1$ или $a > 2{,}5$, то $x \geqslant \frac{-8(a+2)}{2a-5}$;

если $1 < a < 2{,}5$, то $x \leqslant \frac{-8(a+2)}{2a-5}$;

если $a = 1$, то неравенство не имеет смысла;
если $a = 2{,}5$, то $x \in \boldsymbol{R}$.

15. При каких значениях k неравенство $(k-1)x + 2k + 1 > 0$ верно для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 3$?

1. Рассмотрим функцию $f(x) = (k-1)x + 2k + 1$. Очевидно, она является линейной при любом действительном значении k, т. е. при любом $k \in \boldsymbol{R}$ графиком функции служит прямая (рис. 21, *а*—*в*).

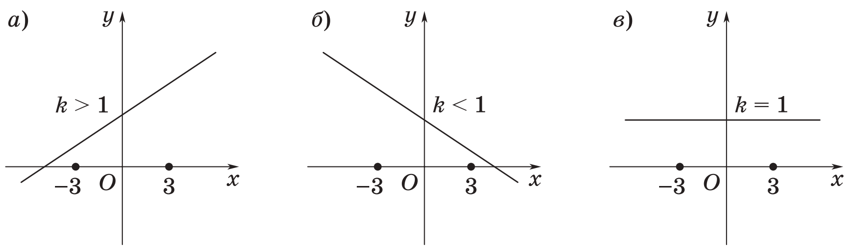


Рис. 21

2. Из этих рисунков видно, что для выполнения данного неравенства на отрезке $[-3; 3]$ нужно, чтобы имела место система неравенств

$$\begin{cases} f(-3) \geqslant 0, \\ f(3) \geqslant 0. \end{cases} \tag{1}$$

3. Так как

$$f(-3) = -3(k-1) + 2k + 1 = 4 - k,$$
$$f(3) = 3(k-1) + 2k + 1 = 5k - 2,$$

то система (1) примет вид

$$\begin{cases} 4 - k \geqslant 0, \\ 5k - 2 \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $0{,}4 \leqslant k \leqslant 4$.

4. *Ответ*: $k \in [0{,}4; 4]$.

16. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$\frac{x - \frac{a}{4}}{x - 2a} < 0 \qquad (1)$$

выполняется для всех x таких, что $2 \leqslant x \leqslant 4$.

1. Здесь требуется найти такие значения a, чтобы множество чисел от 2 до 4 принадлежало множеству решений неравенства (1).

2. Сначала найдем решения данного неравенства. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $a > 0$; тогда $2a > \frac{a}{4}$. Поэтому решение неравенства (1) имеет вид

$$\frac{a}{4} < x < 2a. \qquad (2)$$

б) Пусть $a \leqslant 0$; тогда $2a < \frac{a}{4} \leqslant 0$. Таким образом, решение неравенства (1) имеет вид

$$2a < x < \frac{a}{4}.$$

Очевидно, что случай б) можно не рассматривать, поскольку в этом случае решения вообще не содержат положительных x, а, значит, чисел x таких, что $2 \leqslant x \leqslant 4$.

3. Для того чтобы все числа $2 \leqslant x \leqslant 4$ входили в множество решений неравенства (2), необходимо выполнение неравенств $\frac{a}{4} < 2$ и $2a > 4$. Решив их совместно, находим $2 < a < 8$.

4. *Ответ*: $a \in (2; 8)$.

17. При каких значениях параметра p неравенство

$$\frac{x + 3p - 5}{x + p} > 0 \qquad (1)$$

справедливо для всех x таких, что $1 \leqslant x \leqslant 4$?

1. Данное неравенство равносильно неравенству

$$(x + 3p - 5)(x + p) > 0,$$

т. е.

$$x^2 + (4p - 5)x + 3p^2 - 5p > 0.$$

2. Рассмотрим квадратный трехчлен

$$f(x) = x^2 + (4p - 5)x + 3p^2 - 5p$$

и найдем его дискриминант:

$$D = (4p - 5)^2 - 4(3p^2 - 5p) = 16p^2 - 40p + 25 - 12p^2 + 20p =$$
$$= 4p^2 - 20p + 25 = (2p - 5)^2 > 0 \text{ при } p \neq 2{,}5.$$

Заметим, что при $p = 2{,}5$ исходное неравенство верно.

3. Требования задачи будут выполнены, если корни квадратного трехчлена $f(x)$ будут либо меньше 1, либо больше 4 (рис. 22, *а* и *б*).

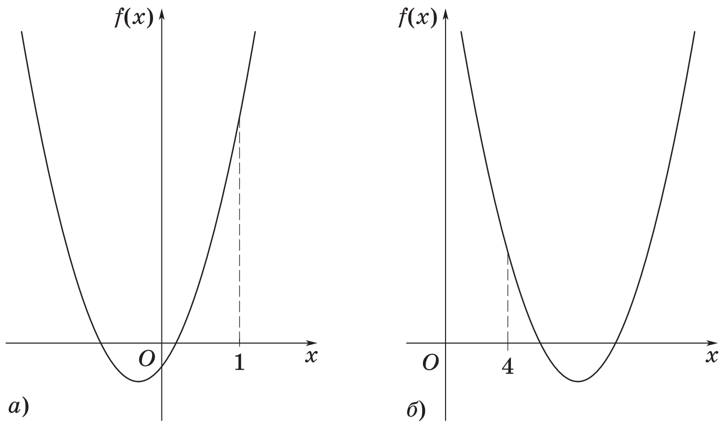


Рис. 22

4. Исходя из геометрической интерпретации трехчлена $f(x)$, заключаем, что искомые значения параметра p удовлетворяют совокупности двух систем неравенств:

а) $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} < 1, \\ f(1) > 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} \dfrac{5 - 4p}{2} < 1, \\ 3p^2 - p - 4 > 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} > 4, \\ f(4) > 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} \dfrac{5 - 4p}{2} > 4, \\ 3p^2 + 11p - 4 > 0. \end{cases}$

5. Решив эти системы, находим $p < -4$; $p > \dfrac{4}{3}$.

6. *Ответ*: $p \in (-\infty; -4) \cup \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$.

18. Найти действительные значения k, при которых неравенство

$$x^2 - (k + 1)x + k + 1 > 0$$

верно для всех значений x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 1$.

1. Введем обозначение: $f(x) = x^2 - (k + 1)x + k + 1$.

2. Найдем дискриминант квадратного трехчлена $f(x)$: $D = (k + 1)^2 - 4(k + 1) = (k + 1)(k - 3)$.

3. Имеем $D < 0$ при $-1 < k < 3$.

а) При этих значениях k знак $f(x)$ совпадает со знаком коэффициента при x^2 для любых действительных значений x.

б) Поэтому при $-1 < k < 3$ неравенство $f(x) > 0$ выполняется на отрезке $[-1; 1]$.

4. Имеем $D = 0$ при $k = -1$ и при $k = 3$.

а) Если $k = -1$, то $f(x) = x^2$, следовательно, $f(x) > 0$ при $x \neq 0$. Это означает, что неравенство $f(x) > 0$ выполняется не при всех x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 1$.

б) Если $k = 3$, то $f(x) = (x - 2)^2$.

Так как $(x - 2)^2 > 0$ при $x \neq 2$, то неравенство $f(x) > 0$ верно на отрезке $[-1; 1]$.

в) Учитывая проведенное выше исследование, заключаем, что неравенство $f(x) > 0$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 1$, при $-1 < k \leqslant 3$.

5. Остается рассмотреть случай $D > 0$, который имеет место при $k < -1$ и при $k > 3$.

Пусть x_1 и x_2 — корни $f(x)$ при этих значениях k, причем $x_1 < x_2$.

Чтобы неравенство $f(x) > 0$ выполнялось для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| \leqslant 1$, достаточно потребовать, чтобы отрезок $[-1; 1]$ был расположен вне промежутка $(x_1; x_2)$, т. е. чтобы выполнялось одно из двух условий:

а) $x_1 < x_2 < -1$ (рис. 23, *а*);

б) $1 < x_1 < x_2$ (рис. 23, *б*).

6. Еще нужно учесть, что $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{k + 1}{2}$.

7. Условие а) будет выполнено при всех значениях k, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(-1) > 0, \\ \dfrac{k+1}{2} < -1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} (k + 1)(k - 3) > 0, \\ 1 + k + 1 + k + 1 > 0, \\ \dfrac{k+1}{2} < -1. \end{cases}$$

Данная система несовместна.

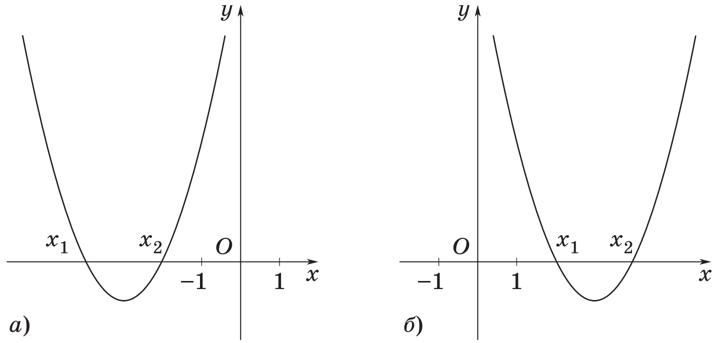


Рис. 23

8. Условие б) будет выполнено при всех значениях k, удовлетворяющих системе

$$\begin{cases} D > 0, \\ f(1) > 0, \\ 1 < \dfrac{k+1}{2}, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} (k+1)(k-3) > 0, \\ 1 - (k+1) + k + 1 > 0, \\ k > 1. \end{cases}$$

Данная система имеет решение $k > 3$.

9. Итак, $f(x) > 0$ для всех x, удовлетворяющих условию $|x| \leqslant 1$, если $-1 < k \leqslant 3$ или если $k > 3$, т. е. если $-1 < k < +\infty$.

10. *Ответ*: $k \in (-1; +\infty)$.

19. Для каждого действительного значения k решить неравенство

$$x^2 + kx + 1 > 0.$$

1. Находим $D = k^2 - 4$.

2. Если $D > 0$, т. е. $k < -2$ или $k > 2$, то решением неравенства является объединение промежутков $\left(-\infty; \dfrac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2}\right)$ и $\left(\dfrac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2}; +\infty\right)$.

3. Если $D = 0$, т. е. $k = -2$ или $k = 2$, то решение неравенства есть объединение промежутков $\left(-\infty; -\dfrac{k}{2}\right)$ и $\left(-\dfrac{k}{2}; +\infty\right)$.

4. Если $D < 0$, т. е. $-2 < k < 2$, то неравенство справедливо при $x \in \boldsymbol{R}$, так как $\begin{cases} a > 0, \\ D < 0. \end{cases}$

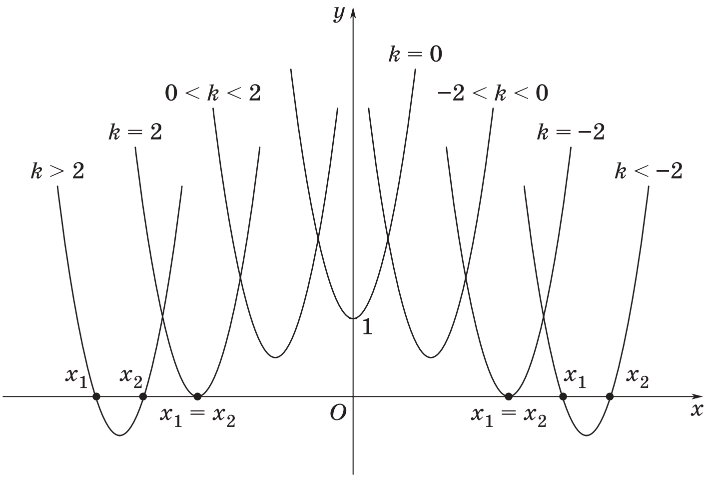


Рис. 24

5. На рис. 24 изображены графики квадратных трехчленов $y = x^2 + kx + 1$ для различных k. Здесь $x_1 = \dfrac{-k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ — корни трехчлена.

6. *Ответ*: если $k < -2$ или $k > 2$, то $x \in \left(-\infty; \dfrac{-k - \sqrt{k^2 - 4}}{2}\right) \cup$

$\cup \left(\dfrac{-k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}; +\infty\right)$;

если $k = -2$ или $k = 2$, то $x \in \left(-\infty; -\dfrac{k}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{k}{2}; +\infty\right)$;

если $-2 < k < 2$, то $x \in (-\infty; +\infty)$.

20. При каких значениях параметра a неравенство

$$x^2 + 4|x - a| \geqslant a^2$$

справедливо для всех значений x?

1. Если $x \geqslant a$, то данное неравенство равносильно неравенству $x^2 + 4(x - a) \geqslant a^2$, или

$$(x - a)(x - (-a - 4)) \geqslant 0,$$

которое справедливо для всех рассматриваемых значений x при $a \geqslant -a - 4$, т. е. при $a \geqslant -2$.

2. Если $x < a$, то приходим к неравенству

$$(x - a)(x - (4 - a)) \geqslant 0,$$

которое справедливо для всех рассматриваемых значений x при $a \leqslant -a + 4$, т. е. при $a \leqslant 2$.

3. *Ответ*: $a \in [-2; 2]$.

21. При каких значениях параметра a множество решений неравенства

$$(a - x^2)(a + x - 2) < 0 \qquad (1)$$

не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leqslant 1$?

1. Пусть $a < 0$. Тогда неравенство (1) равносильно неравенству $a + x - 2 > 0$, и требования задачи будут выполнены при условии

$$x > 2 - a \geqslant 1,$$

т. е. при условии $a < 0$.

2. Пусть $a = 0$. Тогда из неравенства (1) следует, что $-x^2(x - 2) < < 0$, т. е. $x > 2$ и, значит, требования задачи выполнены.

3. Пусть $a > 0$. Перепишем исходное неравенство (1) в виде

$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})(x - (2 - a)) > 0.$$

Нетрудно убедиться, что при $\sqrt{a} \leqslant 1$, т. е. при $0 < a \leqslant 1$, задача не имеет решений.

4. При $a > 1$ рассмотрим следующие возможные случаи расположения точек $x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a}$, $x_3 = 2 - a$ и отрезка $x \in [-1; 1]$ на числовой прямой, когда требования задачи могут быть выполнены:

$$2 - a < -\sqrt{a},\ 2 - a = -\sqrt{a},\ -\sqrt{a} < 2 - a < -1,\ 2 - a = -1.$$

5. Решив последовательно эти неравенства и равенства, соответственно находим $a > 4$, $a = 4$, $3 < a < 4$, $a = 3$.

6. Объединив полученные результаты, запишем ответ.

7. *Ответ*: $a \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$.

22. При каких значениях параметра a больший корень уравнения $x^2 - a(a + 1)x + a^3 = 0$ больше $\frac{1}{2}$?

1. Исходное уравнение имеет корни $x_1 = a$, $x_2 = a^2$.

2. Чтобы найти требуемые значения параметра, составим системы неравенств

а) $\begin{cases} a > a^2, \\ a > \dfrac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a^2 > a, \\ a^2 > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

3. Решениями системы (а) являются все значения a такие, что $\frac{1}{2} < a < 1$.

4. Решениями системы (б) являются все значения a такие, что $-\infty < a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $1 < a < +\infty$.

5. *Ответ*: $a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

23. Найти все значения x, при которых неравенство

$$(2-a)x^3 + (1-2a)x^2 - 6x + 5 + 4a - a^2 < 0$$

справедливо хотя бы для одного значения параметра a из промежутка $[-1; 2]$.

1. Перепишем данное неравенство в виде

$$f(a) = a^2 + (x^3 + 2x^2 - 4)a - (2x^3 + x^2 - 6x + 5) > 0,$$

где переменную x считаем параметром.

2. Тогда требования задачи не будут выполнены, если отрезок $[-1; 2]$ лежит на числовой прямой между корнями трехчлена $f(a)$, т. е. если совместна система

$$\begin{cases} f(-1) = -3x(x+2)(x-1) \leqslant 0, \\ f(2) = 3(x+3)(x-1) \leqslant 0. \end{cases}$$

Это будет иметь место при $x \in [-2; 0] \cup \{1\}$.

3. Поэтому дополнение к записанному множеству и будет решением задачи.

4. *Ответ*: $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

24. При каких значениях a все решения уравнения

$$\frac{2a-3}{x+2} = \frac{3x-1}{(x-2)^2 + x - 14}$$

принадлежат отрезку $[-3; 4]$? В ответе указать наибольшее целое значение a.

1. Упростив данное уравнение, получим

$$\frac{2a-3}{x+2} = \frac{3x-1}{(x+2)(x-5)}. \qquad (1)$$

2. Решим уравнение (1):

$$\begin{cases} (2a-3)(x-5) = 3x-1, \\ x \neq -2,\ x \neq 5, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x = \dfrac{5a-8}{a-3}, \\ x \neq -2,\ x \neq 5. \end{cases}$$

3. Решения уравнения должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} -3 \leqslant x \leqslant 4, \\ x \neq -2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3 \leqslant \dfrac{5a-8}{a-3} \leqslant 4, \\ x \neq -2. \end{cases} \qquad (2)$$

4. Решив систему (2), находим $a \in [-4; 2) \cup \left(2; \frac{17}{8}\right)$.

5. *Ответ*: 1.

25. Для каждого неотрицательного значения параметра a решить неравенство

$$a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 \geqslant 0. \qquad (1)$$

1. Если $a = 0$, то неравенство (1) примет вид $-x + 3 \geqslant 0$, а множество его решений есть промежуток $-\infty < x \leqslant 3$.

2. Пусть теперь a — фиксированное положительное число. Преобразуем левую часть неравенства (1) следующим образом:

$$\begin{gathered} a^3x^4 + 6a^2x^2 - x + 9a + 3 = a(a^2x^4 + 6ax^2 + 9) - x + 3 = \\ = a(ax^2+3)^2 - x + 3 = a((ax^2+3)^2 - x^2) + ax^2 - x + 3 = \\ = a(ax^2 + 3 - x)(ax^2 + 3 + x) + ax^2 - x + 3 = \\ = (ax^2 - x + 3)(a^2x^2 + ax + 3a + 1). \qquad (2) \end{gathered}$$

3. Дискриминант квадратного трехчлена $a^2x^2 + ax + 3a + 1$ равен $D_1 = -a^2(12a + 3)$. Так как $a > 0$, то ясно, что D_1 отрицателен. Следовательно, квадратный трехчлен $a^2x^2 + ax + 3a + 1$ положителен для любого значения x, т. е. исходное неравенство равносильно неравенству

$$ax^2 - x + 3 \geqslant 0. \qquad (3)$$

4. Дискриминант квадратного трехчлена $ax^2 - x + 3$ равен $D_2 = 1 - 12a$. Очевидно, если $a \geqslant \frac{1}{12}$, то D_2 неположителен, т. е. множество решений неравенства (3), а следовательно, и исходного неравенства, есть вся числовая прямая.

5. Если же $0 < a < \dfrac{1}{12}$, то множество решений неравенства (3), а, значит, и исходного неравенства, состоит из двух промежутков:

$$-\infty < x \leqslant \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a} \text{ и } \frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a} \leqslant x < +\infty.$$

6. *Ответ*: если $a = 0$, то $-\infty < x < 3$;

если $0 < a < \dfrac{1}{12}$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$,

$\dfrac{1+\sqrt{1-12a}}{2a} \leqslant x < +\infty$;

если $a \geqslant \dfrac{1}{12}$, то $-\infty < x < \infty$.

26. В зависимости от значений параметров a и n решить неравенство

$$n^2(x^2 + 1) + 6 > a^2 + 2(n^2x + 3). \qquad (1)$$

1. После преобразований неравенство (1) примет вид

$$n^2x^2 - 2n^2x + n^2 - a^2 > 0. \qquad (2)$$

2. Найдем дискриминат квадратного трехчлена (2) и его корни. Имеем $\dfrac{D}{4} = n^2a^2 \geqslant 0$, $x_1 = \dfrac{n-a}{n}$ и $x_2 = \dfrac{n+a}{n}$, где $n \neq 0$.

3. *Ответ*: если $an > 0$, то $x < \dfrac{n-a}{n}$ и $x > \dfrac{n+a}{n}$;

если $an < 0$, то $x < \dfrac{n+a}{n}$ и $x > \dfrac{n-a}{n}$;

если $a = 0$, $n \neq 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$, кроме $x = 1$;

если $n = 0$, то нет решений.

27. Найти все значения a, при которых неравенство

$$(x - 3a)(x - a - 3) < 0 \qquad (1)$$

выполняется для всех x таких, что $1 \leqslant x \leqslant 3$.

1. Решением неравенства (1) является один из промежутков:

$$(3a;\ a + 3) \text{ или } (a + 3;\ 3a).$$

2. По условию каждый из этих промежутков должен содержать отрезок [1; 3]. Возможны два варианта (рис. 25, *а* и *б*).

Рис. 25

3. Поэтому искомые значения параметра — это решения совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} 3a < 1, \\ 3 < a + 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a + 3 < 1, \\ 3 < 3a. \end{cases}$

4. Первая из них имеет решения $0 < a < \frac{1}{3}$, а вторая не имеет решений.

5. *Ответ*: $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

28. Корни x_1 и x_2 уравнения $x^2 + kx + 1 = 0$ удовлетворяют неравенству $x_1^4 + x_2^4 > 1$. Определить возможные значения, которые может принимать параметр k.

1. Воспользуемся формулами, вытекающими из формулы квадрата суммы:

а) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$;

б) $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2)^2 - 2x_1^2x_2^2$.

2. Согласно формулам Виета, имеем

$$x_1 + x_2 = -k,\ x_1x_2 = 1.$$

Неравенство $x_1^4 + x_2^4 > 1$ можно выразить через k так:

$$k^4 - 4k^2 + 2 > 1,\ \text{или}\ k^4 - 4k^2 + 1 > 0.$$

3. Решив неравенство $k^4 - 4k^2 + 1 > 0$, получаем $k^2 > 2 + \sqrt{3}$ и $k^2 < 2 - \sqrt{3}$.

4. Данное уравнение $x^2 + kx + 1 = 0$ имеет два корня при условии $D = k^2 - 4 \geqslant 0$.

5. Искомые значения k должны удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} k^2 < 2 - \sqrt{3},\ k^2 > 2 + \sqrt{3}, \\ k^2 - 4 \geqslant 0. \end{cases}$$

6. *Ответ*: $k \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

29. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$|x+1| + a|x-2| = 3.$$

1. В соответствии с определением модуля задача сводится к нахождению решений следующих уравнений:

$$(a+1)x = 2a - 4, \text{ где } x \in (-\infty; -1); \quad (1)$$

$$(1-a)x = 2 - 2a, \text{ где } x \in [-1; 2); \quad (2)$$

$$(a+1)x = 2 + 2a, \text{ где } x \in [2; +\infty). \quad (3)$$

2. Уравнение (1) имеет решения, если $a \neq -1$. При этом условии должно выполняться неравенство $x = \frac{2a-4}{a+1} < -1$. Отсюда находим, что $a \in (-1; 1)$.

3. Рассмотрим уравнение (2). Отметим, что при $a = 1$ решением уравнения является любое $x \in [-1; 2)$.

Если же $a \neq 1$, то $x = \frac{2(1-a)}{1-a} = 2$. Однако найденное значение x не принадлежит промежутку $[-1; 2)$, поэтому при $a \neq 1$ уравнение (2) не имеет решений.

4. Рассмотрим уравнение (3). Здесь при $a = -1$ решением является любое $x \in [2; +\infty)$.

5. *Ответ*: если $a < -1$, то $x = 2$;
если $a = -1$, то $x \geqslant 2$;
если $-1 < a < 1$, то $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{2a-4}{a+1}$;
если $a = 1$, то $-1 \leqslant x \leqslant 2$;
если $a > 1$, то $x = 2$.

30. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$\sqrt{x-4a+16} = 2\sqrt{x-2a+4} - \sqrt{x}. \quad (1)$$

1. Перенеся $\sqrt{x}$ в левую часть и возведя обе части уравнения в квадрат, получим

$$\sqrt{x}\,\sqrt{x-4a+16} = x - 2a. \quad (2)$$

2. Далее, возведя обе части уравнения (2) в квадрат, найдем, что $x = \frac{a^2}{4}$ — единственный возможный корень уравнения (1). Подставив его в это уравнение, получим

$$\sqrt{a^2-16a+64} = 2\sqrt{a^2-8a+16} - \sqrt{a^2},$$

или, в силу того, что радикалы неотрицательны,

$$|a-8| = 2|a-4| - |a|. \qquad (3)$$

3. а) Пусть $a \geqslant 8$; тогда равенство (3) выполняется. Следовательно, уравнение (1) при этом условии имеет корень $x = \dfrac{a^2}{4}$.

б) Пусть $4 \leqslant a < 8$; тогда равенство (3) не выполняется, поскольку $8 - a \neq 2(a-4) - a$.

в) Пусть $0 \leqslant a < 4$; тогда равенство (3) примет вид $8 - a = 2(4-a) - a$ и выполняется лишь при $a = 0$.

г) Пусть $a < 0$; тогда равенство (3) превращается в тождество $8 - a = 2(4-a) + a$, т. е. оно выполняется при всех $a < 0$.

4. *Ответ*: если $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 8$, то уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{a^2}{4}$;

если $0 < a < 8$, то корней нет.

31. Для каждого значения параметра a найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$|x+3| - a|x-1| = 4. \qquad (1)$$

1. Разобьем числовую прямую на три промежутка: 1) $-\infty < x < -3$; 2) $-3 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $1 < x < +\infty$. Решим уравнение (1) в каждом из этих промежутков.

2. Рассмотрим промежуток $-\infty < x < -3$. В этом промежутке уравнение (1) примет вид

$$-(x+3) + a(x-1) = 4, \text{ или } (a-1)x = 7 + a. \qquad (2)$$

Отсюда видно, что при $a = 1$ уравнение (2) не имеет решений.

Если же $a \neq 1$, то уравнение (2) имеет один корень

$$x_1 = \frac{7+a}{a-1}. \qquad (3)$$

3. Теперь следует выяснить, при каких значениях a этот корень удовлетворяет неравенству $-\infty < x < -3$.

а) Для этого надо решить неравенство

$$\frac{7+a}{a-1} < -3. \qquad (4)$$

б) Перепишем неравенство (4) в виде

$$\frac{4(a+1)}{a-1} < 0. \qquad (5)$$

в) Решением неравенства (5) является промежуток $-1 < a < 1$. Следовательно, на множестве $-\infty < x < -3$ исходное уравнение имеет один корень (3) при любом значении a из промежутка $-1 < a < 1$ и не имеет корней при любом значении a, не принадлежащем этому промежутку.

4. Рассмотрим промежуток $-3 \leqslant x \leqslant 1$. В этом промежутке уравнение (1) примет вид

$$x + 3 + a(x - 1) = 4, \text{ или } (a + 1)x = a + 1. \qquad (6)$$

Отсюда видно, что при $a = -1$ решением уравнения (6) является любое действительное число, так как $0 \cdot x = 0$.

Если же $a \neq -1$, то уравнение (6) имеет один корень $x = 1$. Следовательно, в рассматриваемом промежутке уравнение (1) имеет единственный корень $x = 1$ при любом $a \neq -1$, а при $a = —1$ его решением будет любое число из промежутка $-3 \leqslant x \leqslant 1$.

5. Рассмотрим промежуток $1 < x < +\infty$. В этом промежутке уравнение (1) примет вид

$$x + 3 - a(x - 1) = 4, \text{ или } (1 - a)x = 1 - a. \qquad (7)$$

Отсюда видно, что при $a = 1$ решением уравнения (7) является любое действительное число.

Если же $a \neq 1$, то уравнение (7) имеет единственный корень $x = 1$, не лежащий в рассматриваемом промежутке. Следовательно, в промежутке $1 < x < +\infty$ исходное уравнение не имеет корней при любом $a \neq 1$, а при $a = 1$ его решением является любое число из промежутка $1 < x < +\infty$.

6. Подводя итог, получаем, что при $a = 1$ решением исходного уравнения (1) являются все значения x из промежутка $1 < x < +\infty$; при $a = -1$ — все значения x из промежутка $-3 \leqslant x \leqslant 1$; при любом значении a таком, что $|a| < 1$, исходное уравнение имеет два корня $x_1 = \dfrac{7 + a}{a - 1}$ и $x_2 = 1$; при любом значении a таком, что $|a| > 1$, исходное уравнение имеет один корень $x = 1$.

7. *Ответ*: если $a = 1$, то $x \in (1; +\infty)$;
если $a = -1$, то $x \in [-3; 1]$;
если $|a| < 1$, то $x_1 = \dfrac{7 + a}{a - 1}$, $x_2 = 1$;
если $|a| > 1$, то $x = 1$.

32. При каких значениях параметра a уравнение

$$|x^2 - 1| = 2x - x^2 + a \qquad (1)$$

имеет единственное решение?

З а м е ч а н и е 1.

Приведем сначала решение задачи, которое часто дают абитуриенты.

1. Числовая прямая разбивается на три промежутка: $x < -1$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $x > 1$.

2. В промежутках $x < -1$ и $x > 1$ имеем $|x^2 - 1| = x^2 - 1$ и уравнение (1) примет вид

$$2x^2 - 2x - 1 - a = 0. \qquad (2)$$

3. Квадратное уравнение (2) имеет единственное решение при условии, что его дискриминант равен нулю, т. е. $\frac{D}{4} = 1 + 2(a + 1) = 0$, откуда $a = -\frac{3}{2}$ и, значит, $x = \frac{1}{2}$.

4. Однако значение $x = \frac{1}{2}$ не принадлежат ни одному из промежутков $x < -1$ и $x > 1$. Поэтому в данном случае задача не имеет решений.

5. В промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ имеем $|x^2 - 1| = 1 - x^2$ и уравнение (1) примет вид $2x + a = 1$. Это уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{1 - a}{2}. \qquad (3)$$

6. Так как в данном случае должно выполняться ограничение $|x| \leqslant 1$, то $\left|\frac{1-a}{2}\right| \leqslant 1$, откуда $|1 - a| \leqslant 2$, т. е. $-1 \leqslant a \leqslant 3$.

7. Отсюда делается вывод, что уравнение (1) имеет единственное решение $x = \frac{1-a}{2}$ при любых $a \in [-1; 3]$.

З а м е ч а н и е 2.

1. Приведенное решение является неверным. Из него лишь следует, что на отрезке $[-1; 1]$ уравнение (1) имеет единственное решение вида (3) при $a \in [-1; 3]$.

2. Однако это вовсе не означает, что при тех же значениях a уравнение (1) не имеет других решений, отличных от (3), но принадлежащих промежутку $x < -1$ или $x > 1$.

3. Например, если $a = 0$, то из равенства (3) находим $x = \frac{1}{2}$, а из уравнения (2) с учетом условия $|x| > 1$ получим $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

4. Таким образом, при $a = 0$ уравнение (1) имеет два различных решения: $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

5. Это значит, что условие $-1 \leqslant a \leqslant 3$ является лишь необходимым, но не достаточным условием единственности решения.

6. Для получения верного ответа среди значений $a \in [-1; 3]$ нужно было отобрать такие (если они существуют), которые дают единственное решение уравнения (1).

Замечание 3.

Приведем теперь правильное решение задачи.

1. Воспользуемся графическим методом как наиболее наглядным и эффективным в данном случае.

2. Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$|x^2 - 1| + x^2 - 2x = a$$

и будем искать его решения как абсциссы точек пересечения графика функции

$$y = f(x) = |x^2 - 1| + x^2 - 2x$$

и семейства прямых $y = a$.

3. Чтобы построить график функции $f(x)$, освободимся от знака модуля:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 2x - 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}, & \text{если } |x| \geqslant 1; \\ 1 - 2x, & \text{если } |x| < 1. \end{cases}$$

4. График функции $f(x)$ изображен на рис. 26.

5. Построив семейство прямых $y = a$, убеждаемся, что единственная точка пересечения прямой $y = a$ с графиком функции $f(x)$ существует только при $a = -1$ (прямая AB). Тогда $x = 1$ — единственное решение уравнения (1).

6. *Ответ*: единственное решение $x = 1$ при $a = -1$.

33. Найти минимум функции

$$y = \frac{1}{x(1-x)}, \text{ если } 0 < x < 1. \qquad (1)$$

<u>I способ.</u> **1.** Функция $y(x)$ достигает минимума, когда выражение $x(1 - x)$ максимально. Это имеет место при $x = \frac{1}{2}$.

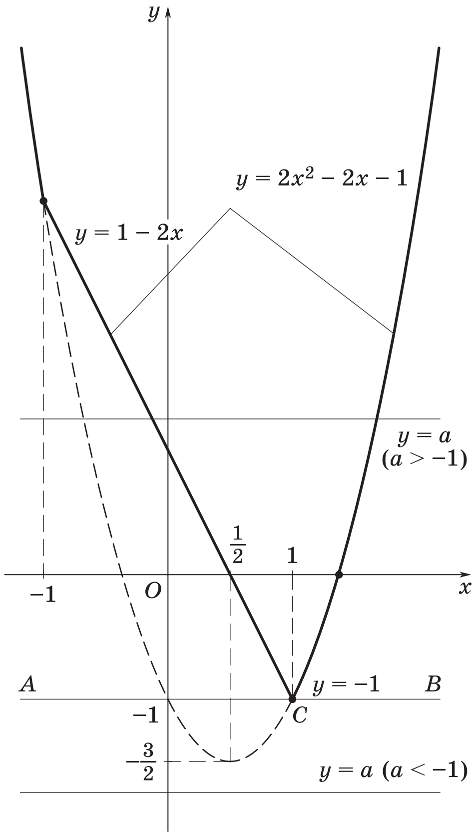


Рис. 26

2. При этом значение выражения $x(1 - x)$ равно $\frac{1}{4}$, а значение данной функции (1) равно 4.

3. *Ответ*: $y_{\min} = 4$.

II способ. **1.** Произведение $x(1 - x)$ двух положительных множителей, сумма которых постоянна: $x + (1 - x) = 1$, максимально при равенстве этих множителей, т. е. когда $x = 1 - x$.

2. Отсюда получаем, что при $x = \frac{1}{2}$ произведение $x(1 - x)$ максимально и равно $\frac{1}{4}$.

3. Следовательно, $y_{\min} = 4$.

III способ. **1.** Будем искать наименьшее значение функции

$$y = \frac{1}{x(1-x)} \ (0 < x < 1,\ y > 0)$$

с помощью исследования множества ее значений.

2. Так как x и y связаны уравнением

$$x(1 - x)y = 1,$$

или, что то же самое, квадратным уравнением

$$yx^2 - yx + 1 = 0 \ (y > 0), \qquad (2)$$

то отыскание множества значений функции (1) эквивалентно отысканию множества всех значений параметра y, при которых уравнение (2) имеет действительные корни.

3. Последнее условие выполняется тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения (2) неотрицателен:

$$D(y) = y^2 - 4y \geqslant 0,$$

откуда $y \geqslant 4$.

4. Итак, $y_{\min} = 4$.

34. Найти все значения параметра a, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ 2x - y = 3, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x > y$.

1. Решив данную систему уравнений, находим

$$x = \frac{a+3}{3},\ y = \frac{2a-3}{3}.$$

2. Следовательно, искомые значения параметра a являются решениями неравенства

$$\frac{a+3}{3} > \frac{2a-3}{3},$$

которому удовлетворяют все a из промежутка $-\infty < a < 6$.

3. *Ответ*: $a \in (-\infty; 6)$.

35. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$$

имеет решения?

1. Преобразуем исходную систему к виду

$$\begin{cases} (x-1)^2 = y + 1, \\ (y-a)^2 + (x-1)^2 = 1. \end{cases}$$

2. Отсюда приходим к смешанной системе

$$\begin{cases} (y-a)^2 + y + 1 = 1, \\ y + 1 \geqslant 0, \end{cases}$$

т. е. к системе

$$\begin{cases} y^2 + (1-2a)y + a^2 = 0, & (1) \\ y \geqslant -1. & (2) \end{cases}$$

3. Решив уравнение (1), получим

$$y_{1,\,2} = \frac{2a - 1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}.$$

4. Требование задачи будет выполнено, если смешанная система уравнений (1), (2) имеет хотя бы одно решение. Искомые значения a находим из неравенств

$$y_{1,\,2} = \frac{2a - 1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} \geqslant -1,$$

решив которые получаем ответ.

5. *Ответ*: $a \in [-2;\ 0{,}25]$.

36. Найти все значения a, при каждом из которых существует хотя бы одна пара $(x;\ y)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{cases} x^2 + (y+3)^2 < 4, \\ y = 2ax^2. \end{cases}$$

1. Очевидно, что система имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда существует хотя бы одно решение неравенства

$$x^2 + (2ax^2 + 3)^2 < 4, \qquad (1)$$

полученного подстановкой в данное неравенство $2ax^2$ вместо y.

2. Положим $x^2 = t$ и обозначим функцию $t + (2at + 3)^2$ через $f(t)$.

3. Неравенство (1) будет иметь решение только в том случае, когда наименьшее значение функции $f(t)$ на множестве $t \geqslant 0$ будет меньше 4. Вычислим это значение $f(t)$.

а) Пусть $a = 0$; тогда $f(t) = t + 9$ и наименьшее значение $f(t)$ на множестве $t \geqslant 0$ равно 9, что больше 4. Следовательно, $a = 0$ не отвечает условию задачи.

б) Пусть $a \neq 0$; тогда график функции $f(t) = t + (2at + 3)^2 = 4a^2t^2 + (12a + 1)t + 9$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх, а абсцисса вершины равна $t_0 = -\dfrac{12a+1}{8a^2}$. Если $t_0 \leqslant 0$, т. е. если $12a + 1 \geqslant 0$, $a \neq 0$, то на множестве $t \geqslant 0$ функция $f(t)$ монотонно возрастает и, значит, ее наименьшее значение на этом множестве равно $f(0) = 9 > 4$. Таким образом, все искомые значения параметра a лежат в области $12a + 1 < 0$. В этом случае точка t_0 лежит в области $t \geqslant 0$ и наименьшее значение $f(t)$ равно

$$f(t_0) = 4a^2\left(-\frac{12a+1}{8a^2}\right)^2 - \frac{(12a+1)^2}{8a^2} + 9 = -\frac{24a+1}{16a^2}.$$

4. Итак, все искомые значения параметра a являются решениями системы неравенств

$$\begin{cases} 12a + 1 < 0, \\ -\dfrac{24a+1}{16a^2} < 4. \end{cases} \qquad (2)$$

5. Система (2) равносильна системе

$$\begin{cases} 12a + 1 < 0, \\ 64a^2 + 24a + 1 > 0. \end{cases}$$

Квадратный трехчлен $64a^2 + 24a + 1$ имеет корни $a_{1,\,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{16}$, причем $\dfrac{-3-\sqrt{5}}{16} < -\dfrac{1}{12}$, а $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{16} > -\dfrac{1}{12}$.

6. Итак, множество решений системы (2), а, значит, и множество значений параметра a, удовлетворяющих условию задачи, есть промежуток $a < \dfrac{-3-\sqrt{5}}{16}$.

7. *Ответ*: $a \in \left(-\infty;\ \dfrac{-3-\sqrt{5}}{16}\right)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить неравенство:

а) $a(3x - 1) > 3x - 2$; б) $(a^2 - 2a - 3)x < a$;

в) $\dfrac{x}{a} > \dfrac{x+2}{4a} - \dfrac{1-3x}{2}$; г) $ax - b > bx + a$.

2. Решить неравенство:

а) $x^2 + 2ax + 4 > 0$; б) $x^2 - 2(a + 1)x + 4a < 0$;

в) $(a^2 - 1)x^2 - 2ax + 1 < 0$; г) $x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1 > 0$.

3. Решить неравенство:

а) $\dfrac{2ax+3}{5x-4a} < 4$; б) $\left|\dfrac{ax-5}{3} + x\right| < 3$.

4. Найти все значения k, для которых при всех значениях x выполняется неравенство:

а) $x^2 - (2 + k)x + 4 > 0$; б) $(k^2 - 1)x^2 + 2(k - 1)x + 2 > 0$;

в) $(k^2 - 1)x^2 + 2(k - 1)x + 2 < 0$; д) $\dfrac{x^2-8x+20}{kx^2+2(k+1)x+9k+4} < 0$.

5. Для всех $a \geqslant 0$ решить неравенство

$$(ax^2 - x + 3)(a^2x^2 + ax + 3a + 1) \geqslant 0.$$

6. Найти все значения a, при которых уравнение

$$x^2 - 2(a - 1)x + 2a + 1 = 0$$

имеет два положительных корня.

7. При каких значениях a каждое решение неравенства $2x + 3 \geqslant x^2$ является решением неравенства $x^2 - 3ax - 6 - 2a \leqslant 0$?

8. Найти все значения параметра a, при которых заданное неравенство справедливо для всех $x \in \boldsymbol{R}$, кроме, быть может, указанного значения x_0. Решить задачу, если:

а) $(2 - a)x^2 + (a + 2)x - a - 2 < 0$; $x_0 = 2$;

б) $(a - 3)x^2 - (a + 1)x + a + 1 > 0$; $x_0 = 2$;

в) $3(1 - a)x^2 - (3a + 1)x - 3a - 1 < 0$; $x_0 = -2$.

9. Найти все значения a, при которых разность между большим и меньшим корнями уравнения

$$ax^2 + (a - 11)x - 2a - 33 = 0$$

не меньше $2\sqrt{5}$.

10. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\dfrac{x-a}{x-8a} < 0$ выполняется для всех x таких, что $|x - 3| \leqslant 1$.

Ответы

1. а) Если $a < 1$, то $x < \frac{a-2}{3(a-1)}$; если $a = 1$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a > 1$, то $x > \frac{a-2}{3(a-1)}$; б) если $a \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$, то $x < \frac{a}{(a+1)(a-3)}$; если $a \in (-1; 3)$, то $x > \frac{a}{(a+1)(a-3)}$; если $a = -1$, то $x \in \varnothing$; если $a = 3$, то $x \in \boldsymbol{R}$; в) если $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, то $x < \frac{2(1-a)}{3(1-2a)}$; если $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, то $x > \frac{2(1-a)}{3(1-2a)}$; если $a = 0$, $a = \frac{1}{2}$, то $x \in \varnothing$; г) если $a = b = 0$, то $x \in \varnothing$; если $a = b > 0$, то $x \in \varnothing$; если $a = b < 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a > b$, то $x > \frac{a+b}{a-b}$; если $a < b$, то $x < \frac{a+b}{a-b}$.

2. а) Если $|a| < 2$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $|a| \geqslant 2$, то $x \in (-\infty; -a - \sqrt{a^2-4}\,) \cup (-a + \sqrt{a^2-4}\,; +\infty)$; б) если $a \in (-\infty; 1)$, то $x \in (2a; 2)$; если $a \in (1; +\infty)$, то $x \in (2; 2a)$; если $a = 1$, то $x \in \varnothing$; в) если $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то $x \in \left(\frac{1}{a+1}; \frac{1}{a-1}\right)$; если $a \in (-1; -1)$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a-1}\right) \cup \left(\frac{1}{a+1}; +\infty\right)$; если $a = -1$, $a = 1$, то $\in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$; г) если $a \in (-\infty; 2)$, то $x \in (-\infty; 2a - 1) \cup (a + 1; +\infty)$; если $a = 2$, то $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; если $a \in (2; +\infty)$, то $x \in (-\infty; a + 1) \cup (2a - 1; +\infty)$.

3. а) Если $a < 10$, то $x \in \left(-\infty; \frac{4a}{5}\right) \cup \left(\frac{3+16a}{20-2a}; +\infty\right)$; если $a > 10$, то $x \in \left(\frac{3+16a}{20-2a}; \frac{4a}{5}\right)$; если $a = 10$, то $x \in (-\infty; 8)$; б) если $a < -3$, то $x \in \left(\frac{14}{a+3}; -\frac{4}{a+3}\right)$; если $a > -3$, то $x \in \left(-\frac{4}{a+3}; \frac{14}{a+3}\right)$; если $a = -3$, то $x \in \boldsymbol{R}$.

4. а) $k \in (-6; 2)$; б) $k \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$; в) $k \in \varnothing$; г) $k \in (-\infty; -0{,}5)$. **5.** Если $a = 0$, то $-\infty < x \leqslant 3$; если $0 < a < \frac{1}{12}$, то $-\infty < x \leqslant \frac{1-\sqrt{1-12a}}{2a}$ и $\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a} \leqslant x < +\infty$; если $a \geqslant \frac{1}{12}$, то $-\infty < x < +\infty$. **6.** $a \in [4; +\infty)$. **7.** $a \in \left[\frac{3}{11}; 5\right]$. **8.** а) $\left[\frac{10}{3}; +\infty\right)$; б) $\left[\frac{13}{3}; +\infty\right)$; в) $\left[\frac{13}{9}; +\infty\right)$. **9.** $a \in [-1; 0) \cup (0; 11]$. **10.** $a \in (0{,}5; 2)$.

Тема 7

1. Системы и совокупности неравенств
2. Решение рациональных неравенств методом промежутков

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Системы и совокупности неравенств

1°. Если ставится задача найти множество общих решений двух или нескольких неравенств, то говорят, что надо решить ***систему неравенств***.

2°. Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют ***решением системы неравенств***.

3°. Множество решений системы неравенств есть пересечение множеств решений входящих в нее неравенств.

4°. Неравенства, входящие в систему, объединяются фигурной скобкой.

5°. Иногда систему неравенств записывают в виде двойного неравенства.

Например, систему $\begin{cases} 3x - 1 > 2, \\ 3x - 1 < 8 \end{cases}$ можно записать так: $2 < 3x - 1 < 8$.

6°. Две системы неравенств называют ***равносильными***, если они имеют общее множество решений, удовлетворяющих этим неравенствам.

7°. Равносильность систем неравенств обозначается так же, как и равносильность систем уравнений, т. е. с помощью знака $\Leftrightarrow$.

8°. Если ставится задача найти множество всех таких значений переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из данных неравенств, то говорят, что надо решить ***совокупность неравенств***.

9°. Значение переменной, при котором хотя бы одно из неравенств совокупности обращается в верное числовое неравенство, называют ***решением совокупности неравенств***.

10°. Множество решений совокупности неравенств есть объединение множеств решений входящих в нее неравенств.

11°. Неравенства, образующие совокупность, объединяют квадратной скобкой. Например, запись $\left[\begin{array}{l} 3x - 5 < 1, \\ 2x + 3 > 4 \end{array}\right.$ означает, что неравенства образуют совокупность.

2. Решение рациональных неравенств методом промежутков

1°. Решение рациональных неравенств вида $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ $\left(\text{или } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0\right)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, основано на следующем свойстве непрерывной функции: если непрерывная функция обращается в нуль в точках x_1 и x_2 ($x_1 < x_2$) и между этими точками не имеет других корней, то в промежутке $(x_1; x_2)$ функция сохраняет знак.

2°. Поэтому для нахождения промежутков знакопостоянства функции $y = f(x)$ поступают так:

а) на координатной прямой отмечают точки, в которых функция $f(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв;

б) эти точки разбивают координатную прямую на несколько промежутков, внутри каждого из которых функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, т. е. сохраняет знак;

в) чтобы определить этот знак, достаточно найти знак функции в какой-либо точке рассматриваемого промежутка координатной прямой.

3°. Изменение знаков функции $f(x)$ удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой, которую чертят справа налево.

4°. На тех промежутках, где кривая проходит выше координатной прямой, выполняется неравенство $f(x) > 0$; на тех же промежутках, где кривая проходит ниже, — неравенство $f(x) < 0$.

З а м е ч а н и я.

1. При установлении знака целой рациональной функции на каждом из интервалов ее знакопостоянства необходимо учитывать кратность корней.

2. В случае, когда кратность корня — четное число, функция сохраняет знак при переходе через этот корень; в случае, когда кратность корня — нечетное число, функция меняет знак.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. При каких значениях параметра k каждый корень уравнения

$$3x = 3(2 - k) - k$$

удовлетворяет условию $2 \leqslant x \leqslant 4$?

1. Преобразуем данное уравнение к виду

$$3x = 6 - 4k,$$

откуда $x = \frac{6-4k}{3}$.

2. Решив двойное неравенство (систему неравенств)

$$2 \leqslant \frac{6-4k}{3} \leqslant 4,$$

находим $-\frac{3}{2} \leqslant k \leqslant 0$.

3. *Ответ*: $k \in \left[-\frac{3}{2}; 0\right]$.

2. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$ имеют разные знаки, и оба по абсолютной величине меньше 4?

1. Обозначим квадратный трехчлен в левой части данного уравнения через $f(x)$. Тогда требования задачи будут выполнены, если совместна система

$$\begin{cases} f(-4) > 0, \\ f(0) < 0, \\ f(4) > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Выразив значения $f(-4)$, $f(0)$, $f(4)$ через a, перепишем систему (1) так:

$$\begin{cases} 10a + 9 > 0, \\ 2a + 1 < 0, \\ -6a + 25 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Системе (2) удовлетворяют все a такие, что $-\frac{9}{10} < a < -\frac{1}{2}$.

3. *Ответ*: $a \in \left(-\frac{9}{10}; -\frac{1}{2}\right)$.

3. При каких a решением неравенства

$$(x-a)^2(x-2)(x+3) \leqslant 0 \qquad (1)$$

является отрезок?

1. Так как $(x-a)^2 \geqslant 0$, то неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} (x-2)(x+3) \leqslant 0, \\ x = a. \end{cases} \qquad (2)$$

2. Решение неравенства этой системы есть отрезок $-3 \leqslant x \leqslant 2$. Следовательно, при $-3 \leqslant a \leqslant 2$ решением системы (2) также будет отрезок.

3. *Ответ*: $a \in [-3; 2]$.

4. Найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x \leqslant 1, \\ x - y + a = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найти соответствующие решения.

1. Данная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} y = x + a, & (1) \\ x^2 + (x+a)^2 + 2x \leqslant 1. & (2) \end{cases}$$

2. Неравенство (2) преобразуется к виду

$$2x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 \leqslant 0. \qquad (3)$$

3. Неравенство (3) имеет единственное решение относительно x тогда и только тогда, когда дискриминант квадратного трехчлена в его левой части равен нулю:

$$(a+1)^2 - 2(a^2-1) = 0, \text{ или } a^2 - 2a - 3 = 0,$$

откуда

$$a_1 = 3,\ a_2 = -1.$$

а) Если $a = 3$, то неравенство (3) примет вид $x^2 + 4x + 4 \leqslant 0$, т. е. $x = -2$, $y = 1$.

б) Если $a = -1$, то неравенство (3) примет вид $x^2 \leqslant 0$, т. е. $x = 0$, $y = -1$.

4. *Ответ*: $a = -1$, $x = 0$, $y = -1$; $a = 3$, $x = -2$, $y = 1$.

5. Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ выполнены неравенства $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$, $f(3) < -4$. Определить знак коэффициента a.

1. Так как $f(-1) = a - b + c$, $f(1) = a + b + c$, $f(3) = 9a + 3b + c$, то получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a - b + c < 1, \\ a + b + c > -1, \\ 9a + 3b + c < -4. \end{cases}$$

2. Перепишем эти неравенства, умножив второе из них на (-2):

$$\begin{cases} a - b + c < 1, \\ -2a - 2b - 2c < 2, \\ 9a + 3b + c < -4. \end{cases} \qquad (1)$$

3. Так как все неравенства системы (1) справедливы, то, складывая почленно их правые и левые части, получим неравенство $8a < -1$. Отсюда вытекает, что коэффициент a отрицателен.

4. *Ответ*: $a < 0$.

6. В зависимости от значений параметра a решить систему неравенств

$$\begin{cases} (a + 3)x < 5a + 6, & (1) \\ x > 3. & (2) \end{cases}$$

1. Пусть $a > -3$; тогда система (1), (2) примет вид

$$\begin{cases} x < \dfrac{5a + 6}{a + 3}, & (3) \\ x > 3. & (4) \end{cases}$$

2. Чтобы найти решение системы (3), (4), нужно сравнить числа $\dfrac{5a + 6}{a + 3}$ и 3 при $a > -3$. Имеем

$$\frac{5a + 6}{a + 3} \vee 3;\ 5a + 6 \vee 3a + 9;\ 2a \vee 3;\ a \vee \frac{3}{2}.$$

Следовательно, если $a > \frac{3}{2}$, то $\frac{5a+6}{a+3} > 3$ и решением системы (3), (4) является промежуток $3 < x < \frac{5a+6}{a+3}$; если же $-3 < a \leqslant \frac{3}{2}$, то $\frac{5a+6}{a+3} \leqslant 3$ и система (3), (4) не имеет решений.

3. Пусть $a < -3$; тогда система (1), (2) примет вид

$$\begin{cases} x > \dfrac{5a+6}{a+3}, & (5) \\ x > 3. & (6) \end{cases}$$

4. Сравним числа $\frac{5a+6}{a+3}$ и 3 при $a < -3$. Имеем

$$\frac{5a+6}{a+3} \vee 3;\ 5a+6 \wedge 3a+9;\ a \wedge \frac{3}{2}.$$

Так как $a < -3$, то знак $\wedge$ соответствует знаку $<$; следовательно, $\frac{5a+6}{a+3} > 3$, т. е. решением системы (5), (6) при $a < -3$ является промежуток $x > \frac{5a+6}{a+3}$.

5. Пусть $a = -3$; тогда система (1), (2) примет вид

$$\begin{cases} 0 \cdot x < -9, \\ x > 3, \end{cases}$$

т. е. она не имеет решений.

6. *Ответ*: если $a < -3$, то $x > \frac{5a+6}{a+3}$;

если $-3 \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$, то решений нет;

если $a > \frac{3}{2}$, то $3 < x < \frac{5a+6}{a+3}$.

7. Найти множество значений a, при которых существует хотя бы одно решение системы

$$\begin{cases} x^2 + (a-1)x - 2a^2 + 4a - 2 \geqslant 0, \\ 2x + a - 4 = 0. \end{cases}$$

1. Из уравнения $2x + a - 4 = 0$ выразим $x = \frac{4-a}{2}$ и подставим в данное неравенство:

$$\frac{a^2-8a+16}{4} - \frac{a^2-5a+4}{2} - 2a^2 + 4a - 2 \geqslant 0. \qquad (1)$$

2. Упростив неравенство (1) получим

$$-9a^2 + 18a \geqslant 0, \text{ или } a(a-2) \leqslant 0.$$

3. *Ответ*: $a \in [0; 2]$.

8. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 \leqslant 0, & (1) \\ x^2 - 2(a-3)x + a^2 - 6a \geqslant 0 & (2) \end{cases}$$

не имеет решений? Найти сумму всех таких целых значений a.

1. Неравенство (1) имеет решение

$$-2 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (3)$$

2. Неравенство (2) имеет решение

$$x \leqslant a - 6 \quad \text{или} \quad x \geqslant a. \qquad (4)$$

3. Из неравенств (3), (4) и условия задачи следует, что

$$\begin{cases} a - 6 < -2, \\ a > 1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad 1 < a < 4.$$

4. Сумма всех целых значений a из этого интервала равна 5.
5. *Ответ*: $a \in (1; 4)$; 5.

9. Найти все значения параметра p, при которых область определения функции

$$y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{\frac{x^2-(p+3)x+3p}{x+5}}$$

состоит из одной точки.

1. Область определения данной функции задается системой неравенств

$$\begin{cases} 1 - x^2 \geqslant 0, \\ \dfrac{x^2-(p+3)x+3p}{x+5} \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x-1)(x+1) \leqslant 0, & (1) \\ \dfrac{(x-p)(x-3)}{x+5} \geqslant 0. & (2) \end{cases}$$

2. Неравенство (1) выполняется на отрезке $[-1; 1]$.

3. Решим неравенство (2). Имеются три различных случая расположения точек $x = -5$, $x = p$, $x = 3$. Эти случаи изображены на рис. 27, *а—в*.

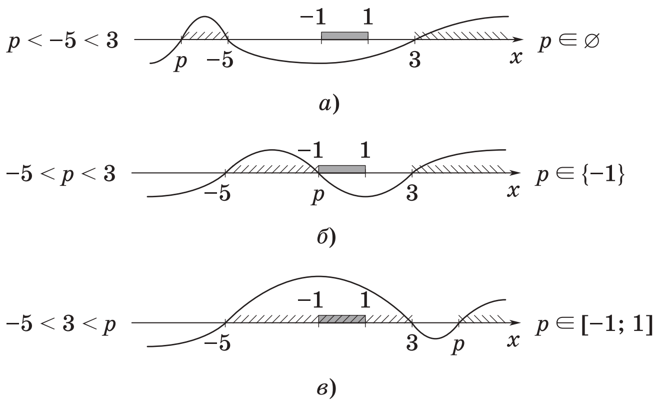


Рис. 27

4. Сопоставляем отрезок $[-1; 1]$ с заштрихованными промежутками.

5. Отрезок $[-1; 1]$ может иметь с заштрихованными промежутками единственную общую точку только в случае, когда $p = -1$. Эта общая точка есть $x = -1$ (рис. 27, *б*); справа от рисунков указано решение системы неравенств (1), (2).

6. *Ответ*: $p = -1$.

10. При каких значениях параметра m уравнение

$$mx^2 - 2\sqrt{15 - m^2}\,x - 2 = 0$$

имеет два различных корня?

1. Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня, если $a \neq 0$ и $D > 0$.

2. В данном случае эти условия приводят к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} m \neq 0 \quad (a \neq 0), \\ 15 - m^2 + 2m > 0 \quad \left(\dfrac{D}{4} > 0\right), \\ 15 - m^2 \geqslant 0 \quad (\text{квадратный корень существует}), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} m \neq 0, \\ (m-5)(m+3) < 0, \\ (m-\sqrt{15})(m+\sqrt{15}) \leqslant 0. \end{cases}$$

Рис. 28

3. Решение этой системы иллюстрирует рис. 28.

4. *Ответ*: $m \in (-3; 0) \cup (0; \sqrt{15}\,]$.

11. Найти наименьшее целое значение a, при котором корни уравнения

$$x^2 + (a+2)x + 3a + 1 = 0 \tag{1}$$

действительны, а сумма их кубов меньше $5a - 2$.

1. Выразим $x_1^3 + x_2^3$ через сумму и произведение корней уравнения:

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) =$$
$$= (x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2). \tag{2}$$

2. Согласно теореме Виета, для уравнения (1) имеем

$$x_1 + x_2 = -(a+2),\ x_1x_2 = 3a + 1. \tag{3}$$

3. Подставив выражения (3) в равенство (2), получим

$$x_1^3 + x_2^3 = -(a+2)((a+2)^2 - 3(3a+1)) = -(a+2)(a^2 - 5a + 1).$$

4. Найдем дискриминант уравнения (1):

$$D = (a+2)^2 - 4(3a+1) = a^2 - 8a.$$

5. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} a(a-8) \geqslant 0, \\ -(a+2)(a^2 - 5a + 1) < 5a - 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a-8)a \geqslant 0, \\ a(a-4)(a+1) > 0. \end{cases} \tag{4}$$

6. Система (4) имеет следующее решение: $-1 < a < 0$, $a \geqslant 8$ (рис. 29).

7. *Ответ*: 8.

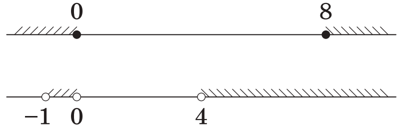


Рис. 29

12. При каких значениях параметра p система неравенств

$$-3 < \frac{x^2 - px - 2}{x^2 - x + 1} < 2 \qquad (1)$$

удовлетворяется для всех значений x?

1. Область определения системы (1) есть $x \in \boldsymbol{R}$.

2. Заменим систему неравенств (1) равносильной системой и упростили ее:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - px - 2}{x^2 - x + 1} < 2, \\ \dfrac{x^2 - px - 2}{x^2 - x + 1} > -3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2 + x(p-2) + 4}{x^2 - x + 1} > 0, \\ \dfrac{4x^2 - x(p+3) + 1}{x^2 - x + 1} > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

3. Поскольку $x^2 - x + 1 > 0$, система (2) равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2 + x(p-2) + 4 > 0, \\ 4x^2 - x(p+3) + 1 > 0. \end{cases} \qquad (3)$$

4. Так как коэффициенты при x^2 в квадратных трехчленах левых частей неравенств (3) положительны, то сами трехчлены будут положительны, если их дискриминанты отрицательны, т. е. приходим к системе

$$\begin{cases} (p-2)^2 - 16 < 0, \\ (p+3)^2 - 16 < 0. \end{cases} \qquad (4)$$

5. Решив систему (4), получим $-2 < p < 1$.

6. *Ответ*: $p \in (-2; 1)$.

13. Решить неравенство $ax^2 + (a+1)x + 1 > 0$.

1. Если $a = 0$, то неравенство примет вид $x + 1 > 0$ и оно справедливо при $x > -1$, т. е. $x \in (-1; +\infty)$.

2. Если $a = 1$, то левая часть неравенства есть полный квадрат. Неравенство $(x+1)^2 > 0$ выполняется при $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

3. При остальных a ($a \neq 0$, $a \neq 1$) представим данное неравенство в виде $a(x+1)\left(x + \dfrac{1}{a}\right) > 0$. Знак левой части этого неравенства

$a < 0$ $\qquad x \in \left(-1; -\frac{1}{a}\right)$

$0 < a < 1$ $\qquad x \in \left(-\infty; -\frac{1}{a}\right) \cup$ $\cup\, (-1; +\infty)$

$a > 1$ $\qquad x \in (-\infty; -1) \cup$ $\cup \left(-\frac{1}{a}; +\infty\right)$

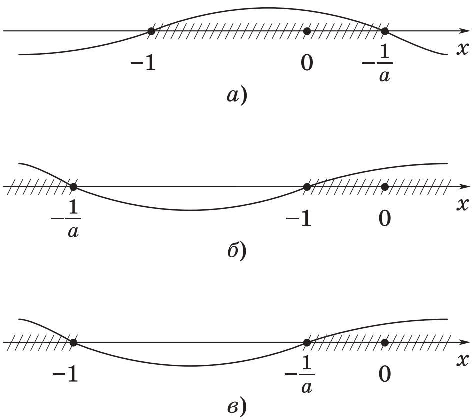


Рис. 30

определяется знаком и величиной a. Три различных случая изображены на рис. 30, a—$в$.

4. *Ответ*: если $a < 0$, то $x \in \left(-1; -\frac{1}{a}\right)$;

если $a = 0$, то $x \in (-1; +\infty)$;

если $a \in (0; 1)$, то $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{a}\right) \cup (-1; +\infty)$;

если $a = 1$, то $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;

если $a > 1$, то $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-\frac{1}{a}; +\infty\right)$.

14. Найти множество значений a, при которых уравнение

$$(3x^2 - (5a + 3)x + 2a^2 + 2a)\sqrt{-x^2 - 4x - 3} = 0 \qquad (1)$$

имеет ровно три корня.

1. Корни уравнения (1) должны удовлетворять условию $-x^2 - 4x - 3 \geqslant 0$, откуда $x \in [-3; -1]$.

2. Преобразуем исходное уравнение в равносильную ему совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3x^2 - (5a + 3)x + 2a^2 + 2a = 0, & (2) \\ -x^2 - 4x - 3 \geqslant 0, & (3) \end{cases} \\ -x^2 - 4x - 3 = 0. \qquad (4) \end{array}\right.$$

3. Очевидно, что уравнение (4) имеет два решения: $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$ любом значении параметра a.

4. Поэтому исходное уравнение будет иметь ровно три корня при тех значениях параметра a, когда система (2), (3) имеет единственное решение, отличное от значений $x_1 = -3$ и $x_2 = -1$.

5. Найдем дискриминант и корни уравнения (2):

$$D = (5a + 3)^2 - 12(2a^2 + 2a) = (a + 3)^2,$$

$$x_3 = a + 1,\ x_4 = \frac{2a}{3}.$$

6. Рассмотрим два возможных случая, когда система (2), (3) будет иметь единственное решение.

1) $D = 0$, а единственный корень уравнения (2) принадлежит интервалу $(-3; -1)$. Очевидно, что $D = 0$ при $a = -3$, и при этом $x_{3,\,4} = -2 \in (-3; -1)$. Следовательно, при $a = -3$ исходное уравнение имеет ровно три корня: $x \in \{-3; -2; -1\}$.

2) $D > 0$ и только один из корней уравнения (2) (x_3 или x_4) принадлежит интервалу $(-3; -1)$. В этом случае возможны следующие четыре варианта:

$$\text{а)} \begin{cases} a \neq -3, \\ x_3 \geqslant -1, \\ x_4 \in (-3; -1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3, \\ a + 1 \geqslant -1, \\ -3 < \dfrac{2a}{3} < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geqslant -2, \\ a \in \left(-\dfrac{9}{2}; -\dfrac{3}{2}\right), \end{cases}$$

т. е. $a \in \left[-2; -\dfrac{3}{2}\right)$;

$$\text{б)} \begin{cases} a \neq -3, \\ x_3 \in (-3; -1), \\ x_4 \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3, \\ -3 < a + 1 < -1, \\ \dfrac{2a}{3} \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3, \\ a \in (-4; -2), \\ a \geqslant -\dfrac{3}{2}, \end{cases}$$

т. е. $a \in \varnothing$;

$$\text{в)} \begin{cases} a \neq -3, \\ x_3 \leqslant -3, \\ x_4 \in (-3; -1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3, \\ a + 1 \leqslant -3, \\ -3 < \dfrac{2a}{3} < -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leqslant -4, \\ a \in \left(-\dfrac{9}{2}; -\dfrac{3}{2}\right), \end{cases}$$

т. е. $a \in \left(-\dfrac{9}{2}; -4\right]$;

г) $\begin{cases} a \neq -3, \\ x_3 \in (-3; -1), \\ x_4 \leqslant -3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3, \\ -3 < a + 1 < -1, \\ \dfrac{2a}{3} \leqslant -3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -3, \\ -4 < a < -2, \\ a \leqslant -\dfrac{9}{2}, \end{cases}$

т. е. $a \in \varnothing$.

7. Объединяя найденные множества значений параметра a, получим ответ.

8. *Ответ*: $a \in \left(-\dfrac{9}{2}; -4\right] \cup \{-3\} \cup \left[-2; -\dfrac{3}{2}\right)$.

15. При каких a все решения уравнения

$$\frac{a-1}{x+6} = \frac{2x+7}{(x+2)^2 - x - 22} \qquad (1)$$

неположительны?

1. После упрощений уравнение (1) примет вид

$$\frac{a-1}{x+6} = \frac{2x+7}{(x+6)(x-3)},$$

или

$$\frac{x(a-3) - 3a - 4}{(x+6)(x-3)} = 0.$$

2. Перейдем к равносильной системе

$$\begin{cases} x(a-3) = 3a + 4, & (2) \\ x \neq -6, & (3) \\ x \neq 3. & (4) \end{cases}$$

3. Рассмотрим уравнение (2).

а) Ясно, что при $a = 3$ оно не имеет решений;

б) Если $a \neq 3$, то $x = \dfrac{3a+4}{a-3}$.

в) Так как нас интересуют только неположительные решения уравнения (1), то искомые значения параметра a найдем, составив и решив следующие две системы:

$$\begin{cases} \dfrac{3a+4}{a-3} \leqslant 0, \\ \dfrac{3a+4}{a-3} \neq -6; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{3a+4}{a-3} \leqslant 0, \\ \dfrac{3a+4}{a-3} \neq 3. \end{cases}$$

4. *Ответ*: $a \in \left[-\dfrac{4}{3}; \dfrac{14}{9}\right) \cup \left(\dfrac{14}{9}; 3\right)$.

16. Решить уравнение

$$\big||3x+5|-7x\big|=9-a.$$

1. Решение этого уравнения не столь сложное, сколь громоздкое, тем более если выбрать нерациональный путь решения.

2. Заметим сразу, что при $a>9$ уравнение не имеет решений.

3. При $a=9$ имеем

$$|3x+5|-7x=0,$$

т. е.

$$|3x+5|=7x.$$

Отсюда при $x>0$ получаем следующую совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} 3x+5=7x, \\ 3x+5=-7x, \end{array}\right. \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5}{4}>0, \\ x=-\dfrac{1}{2}<0. \end{array}\right.$$

Итак, при $a=9$ уравнение имеет один корень $x=\dfrac{5}{4}$.

4. Теперь рассмотрим случай $a<9$. Дальнейшее решение можно выполнять двумя способами в зависимости от того, какой модуль раскрыть раньше — внутренний или внешний.

В данном примере лучше (короче) начинать с раскрытия внутреннего модуля.

5. Пусть $x\geqslant-\dfrac{5}{3}$. Тогда уравнение примет вид

$$|3x+5-7x|=9-a,$$

т. е.

$$|4x-5|=9-a.$$

Раскрывая модуль, приходим к совокупности уравнений (напомним, что правая часть уравнения положительна):

$$\left[\begin{array}{l} 4x-5=9-a, \\ 4x-5=-9+a, \end{array}\right. \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{array}{l} x=x_1=\dfrac{14-a}{4}, \\ x=x_2=\dfrac{a-4}{4}. \end{array}\right.$$

Полученные корни должны удовлетворять условию $x\geqslant-\dfrac{5}{3}$.

а) $x_1 = \dfrac{14-a}{4} \geqslant -\dfrac{5}{3}$ при $a \leqslant \dfrac{62}{3}$ (корень $x = x_1$ — истинный при $a < 9$).

б) $x_2 = \dfrac{a-4}{4} \geqslant -\dfrac{5}{3}$ при $a \geqslant -\dfrac{8}{3}$.

6. Пусть $x < -\dfrac{5}{3}$. Тогда уравнение примет вид

$$|-3x - 5 - 7x| = 9 - a, \text{ т. е. } |10x + 5| = 9 - a.$$

Отсюда получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} 10x + 5 = 9 - a, \\ 10x + 5 = a - 9, \end{array}\right. \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{array}{l} x = x_3 = \dfrac{4-a}{10}, \\ x = x_4 = \dfrac{a-14}{10}. \end{array}\right.$$

Остается решить еще два неравенства:

а) $\dfrac{4-a}{10} < -\dfrac{5}{3}$ при $a > \dfrac{62}{3}$ (поскольку $a < 9$, этот случай не имеет места);

б) $\dfrac{a-14}{10} < -\dfrac{5}{3}$ при $a < -\dfrac{8}{3}$.

7. Все полученные сведения изобразим на рис. 31.

Под осью Oa записаны значения a, над ней — значения x. В частности, при $a = 9$ имеем $x = \dfrac{5}{4}$.

8. *Ответ*: если $a \in \left(-\infty; -\dfrac{8}{3}\right)$, то $x_1 = \dfrac{14-a}{4}$, $x_4 = \dfrac{a-14}{10}$;

если $a \in \left[-\dfrac{8}{3}; 9\right)$, то $x_1 = \dfrac{14-a}{4}$, $x_2 = \dfrac{a-4}{4}$;

если $a = 9$, то $x = \dfrac{5}{4}$;

если $a \in (9; +\infty)$, то нет решений.

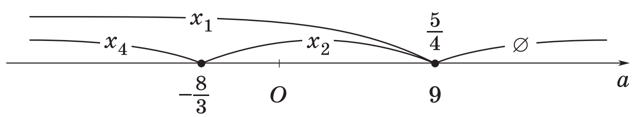


Рис. 31

17. Определить значения k, при которых уравнение

$$(k-2)x^4 - 2(k+3)x^2 + k - 1 = 0$$

имеет четыре действительных корня, отличных от нуля.

1. Если $k \neq 2$, то данное уравнение является биквадратным, т. е. квадратным относительно x^2.

2. Следовательно, для того чтобы его корни были действительными, необходимо и достаточно, чтобы их квадраты были положительны, т. е. чтобы уравнение

$$(k-2)y^2 - 2(k+3)y + k - 1 = 0$$

имело положительные корни. Для этого должны выполняться условия

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ y_1 + y_2 > 0, \\ y_1 y_2 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (k+3)^2 - (k-1)(k-2) \geqslant 0, \\ \dfrac{2(k+3)}{k-2} > 0, \\ \dfrac{k-1}{k-2} > 0. \end{cases}$$

3. Решив последнюю систему, находим $k > 2$.

4. *Ответ*: $k \in (2; +\infty)$.

18. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + 4ax + 3a^2 > 1 + 2a, \\ x^2 + 2ax \leqslant 3a^2 - 8a + 4 \end{cases} \tag{1}$$

имеет хотя бы одно решение?

1. Система (1) равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2 + 4ax + 3a^2 - 2a - 1 > 0, \\ x^2 + 2ax - 3a^2 + 8a - 4 \leqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

2. Квадратный трехчлен $\varphi(x) = x^2 + 2ax - 3a^2 + 8a - 4$ имеет корни $x_1 = -3a + 2$ и $x_2 = a - 2$, поэтому решением второго неравенства системы (2) являются все значения x такие, что

$$\min\{x_1, x_2\} \leqslant x \leqslant \max\{x_1, x_2\}.$$

3. Учитывая это, найдем все значения параметра a, при которых система (2) не имеет решений.

4. Именно, система (2) не будет иметь решений тогда и только тогда, когда совместна система

$$\begin{cases} f(x_1) \leqslant 0, \\ f(x_2) \leqslant 0, \end{cases}$$

где $f(x) = x^2 + 4ax + 3a^2 - 2a - 1$, а, значит,

$$\begin{cases} f(x_1) = -6a + 3 \leqslant 0, \\ f(x_2) = 8a^2 - 14a + 3 \leqslant 0. \end{cases} \qquad (3)$$

5. Множеством решений системы (3) является отрезок

$$0,5 \leqslant a \leqslant 1,5.$$

6. Таким образом, исходная система (1) будет иметь хотя бы одно решение, если $a < 0,5$ или $a > 1,5$.

7. *Ответ*: $a \in (-\infty; 0,5) \cup (1,5; +\infty)$.

19. При каком значении p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством $|2x - y - 4| + |x + y - 2| \leqslant p$, будет равна 54?

1. Чтобы освободиться от знаков модуля, рассмотрим четыре возможных случая:

а) $\begin{cases} 2x - y - 4 < 0, \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$ или $-2x + y + 4 + x + y - 2 \leqslant p$, откуда $y \leqslant$ $\leqslant \dfrac{x}{2} + \dfrac{p-2}{2}$;

б) $\begin{cases} 2x - y - 4 > 0, \\ x + y - 2 > 0 \end{cases}$ или $2x - y - 4 + x + y - 2 \leqslant p$, откуда $x \leqslant \dfrac{p+6}{3}$;

в) $\begin{cases} 2x - y - 4 > 0, \\ x + y - 2 < 0 \end{cases}$ или $2x - y - 4 - x - y + 2 \leqslant p$, откуда $y \geqslant \dfrac{x}{2} -$ $- \dfrac{p+2}{2}$;

г) $\begin{cases} 2x - y - 4 < 0, \\ x + y - 2 < 0 \end{cases}$ или $-2x + y + 4 - x - y + 2 \leqslant p$, откуда $x \geqslant$ $\geqslant \dfrac{6-p}{3}$.

2. Изобразим на плоскости xOy множества точек, являющихся решением рассмотренных систем неравенств.

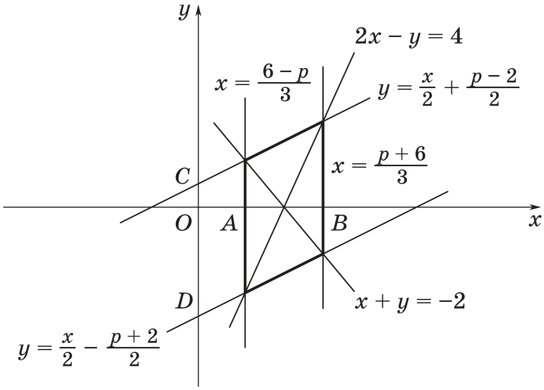


Рис. 32

3. Из построения (рис. 32) видно, что прямые $2x - y = 4$ и $x + y = -2$ разбивают координатную плоскость на четыре области, каждая из которых соответствует одному из рассмотренных случаев.

4. Принадлежность каждой области соответствующему случаю можно определить методом пробной точки.

5. Возьмем, например, точку $M(3; 0)$. Ее координаты удовлетворяют случаю б), следовательно, точки этой области являются решением системы неравенств, рассмотренной в случае б).

6. Заметим, что прямые $y = \frac{x}{2} + \frac{p-2}{2}$ и $y = \frac{x}{2} - \frac{p+2}{2}$, а также прямые $x = \frac{p+6}{3}$ и $x = \frac{6-p}{3}$ попарно параллельны и ограничивают рассмотренные выше области.

7. Итак, заданная на координатной плоскости фигура является параллелограммом.

8. Площадь построенного параллелограмма есть $S = AB \cdot CD$.

9. Найдем координаты точек A, B, C и D: $A\left(\frac{6-p}{3}; 0\right)$, $B\left(\frac{p+6}{3}; 0\right)$, $C\left(0; \frac{p-2}{2}\right)$, $D\left(0; -\frac{p+2}{2}\right)$. Тогда $AB = |x_B - x_A| = \left|\frac{p+6}{3} - \frac{6-p}{3}\right| = \frac{2p}{3}$ и $CD = |y_D - y_C| = \left|-\frac{p+2}{2} - \frac{p-2}{2}\right| = p$. Площадь параллелограмма $S = \frac{2p}{3} \cdot p = 54$.

10. *Ответ*: $p = 9$.

20. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$3 > |x - a| + x^2 \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

1. Пусть a — некоторое фиксированное число. Тогда неравенство (1) можно переписать в виде $|x - a| < 3 - x^2$. Отсюда следует, что оно равносильно двойному неравенству $-(3 - x^2) < x - a < 3 - x^2$, т. е. системе неравенств

$$\begin{cases} x - a < 3 - x^2, \\ -(3 - x^2) < x - a. \end{cases} \qquad (2)$$

2. Поэтому задачу можно переформулировать так: определить те значения a, при каждом из которых множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + x - 3 - a < 0, \\ x^2 - x - 3 + a < 0, \\ x < 0 \end{cases} \qquad (3)$$

содержит хотя бы одно число.

3. Дискриминанты квадратных трехчленов $x^2 + x - 3 - a$ и $x^2 - x - 3 + a$ равны соответственно $13 + 4a$ и $13 - 4a$.

4. Следовательно, для того чтобы первое и второе неравенства системы (3) имели решения, необходимо выполнение неравенств $13 + 4a > 0$ и $13 - 4a > 0$, т. е. $-\frac{13}{4} < a < \frac{13}{4}$. В дальнейшем будем считать, что a удовлетворяет этим неравенствам.

5. Обозначим через x_1, x_2 и x_3, x_4 корни квадратных трехчленов $x^2 + x - 3 - a$ и $x^2 - x - 3 + a$ соответственно. При этом будем считать, что $x_1 < x_2$ и $x_3 < x_4$.

6. Так как множества решений первого и второго неравенств системы (3) имеют соответственно вид $x_1 < x < x_2$ и $x_3 < x < x_4$, причем $x_1 < x_4$ и $x_3 < x_2$, то система (3) будет иметь решение тогда и только тогда, когда $x_1 < 0$ и $x_3 < 0$, т. е. когда

$$\begin{cases} \dfrac{-1 - \sqrt{13 + 4a}}{2} < 0, & (4) \\[2ex] \dfrac{1 - \sqrt{13 - 4a}}{2} < 0. & (5) \end{cases}$$

7. Неравенство (4) выполнено для всех a из интервала $-\frac{13}{4} <$ $< a < \frac{13}{4}$.

8. Неравенство (5) равносильно на этом интервале неравенству $1 < \sqrt{13-4a}$, или неравенству $1 < 13 - 4a$. Множество решений последнего неравенства есть промежуток $-\infty < a < 3$.

9. Итак, система (3) имеет хотя бы одно решение, если параметр a принадлежит интервалу $-\frac{13}{4} < a < 3$.

10. *Ответ*: $a \in \left(-\frac{13}{4}; 3\right)$.

21. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 - a \leqslant 0, \\ x^2 - 2x + 6a - 3 \leqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

имеет единственное решение?

1. Система (1) может иметь решения только тогда, когда дискриминанты левых частей обоих неравенств неотрицательны, т. е. когда

$$\begin{cases} 1 + a \geqslant 0 \\ 2 - 3a \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad -1 \leqslant a \leqslant \frac{2}{3}.$$

2. При $a = -1$ система (1) примет вид

$$\begin{cases} (x + 2)^2 \leqslant 0, \\ x^2 - 2x - 9 \leqslant 0 \end{cases}$$

и имеет единственное решение $x = -2$.

3. При $a = \frac{2}{3}$ система (1) примет вид

$$\begin{cases} x^2 + 4x + \frac{7}{3} \leqslant 0, \\ (x - 1)^2 \leqslant 0 \end{cases}$$

и является несовместной.

4. Пусть теперь $-1 < a < \frac{2}{3}$. В этом случае решениями первого неравенства системы (1) являются значения x из промежутка $x_1 \leqslant$

$\leqslant x \leqslant x_2$, где $x_1 = -2 - \sqrt{1+a}$, $x_2 = -2 + \sqrt{1+a}$, а решениями второго неравенства — значения x из промежутка $x_3 \leqslant x \leqslant x_4$, где $x_3 = 1 - \sqrt{4-6a}$, $x_4 = 1 + \sqrt{4-6a}$.

5. Таким образом, система (1) имеет единственное решение только в том случае, когда отрезки $[x_1;\ x_2]$ и $[x_3;\ x_4]$ имеют одну общую точку.

6. Так как абсцисса вершины параболы $y = x^2 + 4x + 3 - a$ равна (-2), а абсцисса вершины параболы $y = x^2 - 2x + 6a - 3$ равна 1, то рассматриваемые отрезки имеют одну общую точку лишь при условии $x_2 = x_3$, т. е. при условии

$$-2 + \sqrt{1+a} = 1 - \sqrt{4-6a}. \qquad (2)$$

7. Решив уравнение (2), находим $a = 0$.

8. *Ответ*: $a = -1$; $a = 0$.

22. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} |x^2 - 12x + 16| \leqslant 16, & (1) \\ |x - 2a| \geqslant 7 & (2) \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1. Неравенство (1) равносильно двойному неравенству $-16 \leqslant x^2 - 12x + 16 \leqslant 16$ или системе

$$\begin{cases} x^2 - 12x + 32 \geqslant 0, \\ x^2 - 12x \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} (x-8)(x-4) \geqslant 0, \\ x(x-12) \leqslant 0. \end{cases}$$

2. Решив полученную систему методом интервалов (рис. 33, *а*), заключаем, что она выполняется на объединении двух отрезков: $x \in [0; 4] \cup [8; 12]$.

3. Неравенство (2) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x - 2a \geqslant 7, \\ x - 2a \leqslant -7, \end{array}\right. \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{array}{l} x \geqslant 2a + 7, \\ x \leqslant 2a - 7, \end{array}\right.$$

которая выполняется на объединении двух лучей (рис. 33, *б*): $x \in (-\infty; 2a - 7] \cup [2a + 7; +\infty)$.

4. Исходная система имеет единственное решение в двух случаях:

а) $\begin{cases} 2a - 7 = 0, \\ 2a + 7 > 12, \end{cases}$ $\begin{cases} a = 3{,}5, \\ 2 \cdot 3{,}5 + 7 > 12 \end{cases}$ (рис. 33, *в*), т. е. при $a = 3{,}5$.

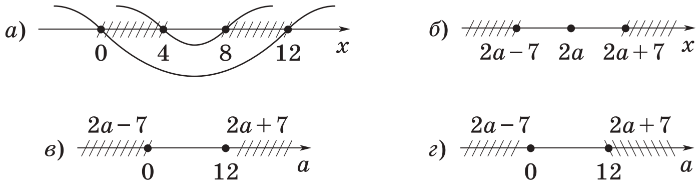


Рис. 33

В этом случае промежутки из пп. 2 и 3 имеют единственную общую точку: $x = 0$.

б) $\begin{cases} 2a - 7 < 0, \\ 2a + 7 = 12, \end{cases}$ $\begin{cases} a < 3{,}5, \\ a = 2{,}5 \end{cases}$ (рис. 33, *г*), т. е. при $a = 2{,}5$.

В этом случае промежутки из пп. 2 и 3 имеют единственную общую точку: $x = 12$.

5. *Ответ*: $a = 2{,}5$; $a = 3{,}5$.

23. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y \geqslant x^2 + a, \\ x \geqslant y^2 + a \end{cases} \qquad (1)$$

имеет единственное решение?

1. Заметим, что если $(x_0;\ y_0)$ — решение системы (1), то и $(y_0;\ x_0)$ — также решение этой системы. Поэтому приходим к выводу, что условие $x = y$ необходимо для существования единственного решения системы (1).

2. Подставив $y = x$ в систему (1), приходим к неравенству

$$x^2 - x + a \leqslant 0,$$

которое имеет единственное решение только тогда, когда дискриминант его левой части $D = 1 - 4a$ равен нулю, т. е. когда $a = \frac{1}{4}$.

3. Теперь подставим значение $a = \frac{1}{4}$ в систему (1):

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{4} \leqslant y, \\ y^2 + \frac{1}{4} \leqslant x. \end{cases}$$

Складывая почленно эти неравенства, приходим к неравенству $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$, которое имеет единственное решение $x =$ $= y = \frac{1}{2}$.

4. *Ответ*: $a = \frac{1}{4}$.

24. При каких значениях параметра a каждое решение системы

$$\begin{cases} y + 2x \geqslant a, \\ y - x \geqslant 2a \end{cases}$$

является решением неравенства $2y - x > a + 3$?

1. Прямые $y + 2x = a$ и $y - x = 2a$ пересекаются на координатной плоскости xOy в точке $A\left(-\frac{a}{3};\ \frac{5a}{3}\right)$.

2. Требование задачи будет выполнено, если точка A лежит выше прямой $2y - x = a + 3$ (рис. 34); в этом случае область координатной плоскости, задаваемая исходной системой, будет содержаться в области, задаваемой неравенством $2y - x > a + 3$.

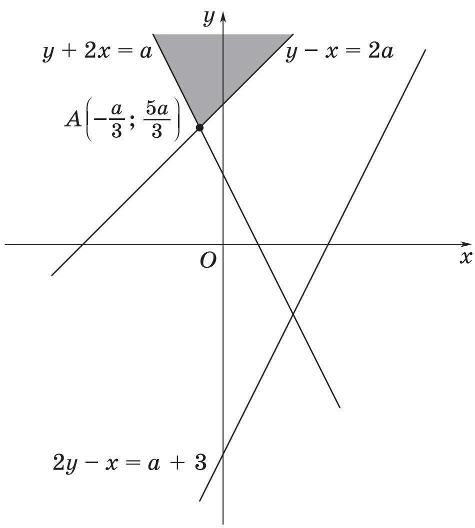


Рис. 34

3. Аналитически условие того, что точка A лежит выше прямой $2y - x = a + 3$, записывается следующим образом:

$$2 \cdot \frac{5}{3}a - \left(-\frac{1}{3}a\right) > a + 3.$$

Решив это неравенство, находим $a > \frac{9}{8}$.

4. *Ответ*: $a \in \left(\frac{9}{8}; +\infty\right)$.

25. Решить уравнение $|x + 4| + 2 = k|x + 1|$.

1. Решим данное уравнение на трех промежутках: $x < -4$; $-4 \leqslant x \leqslant -1$; $x > -1$.

2. $\begin{cases} x < -4, \\ -(x + 4) + 2 = -k(x + 1); \end{cases}$ $x = x_1 = \frac{2 - k}{k - 1}$.

Корень $x = \frac{2 - k}{k - 1}$ должен удовлетворять неравенству $\frac{2 - k}{k - 1} < -4$. Решив его, находим $\frac{2}{3} < k < 1$. Значит, если $\frac{2}{3} < k < 1$, то $x_1 = \frac{2 - k}{k - 1}$.

3. $\begin{cases} -4 \leqslant x < -1, \\ x + 4 + 2 = -k(x + 1); \end{cases}$ $x = x_2 = -\frac{k + 6}{k + 1}$.

Решив двойное неравенство $-4 \leqslant -\frac{k + 6}{k + 1} < -1$, которое равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{k + 6}{k + 1} \leqslant 4, \\ \dfrac{k + 6}{k + 1} \geqslant 1, \end{cases}$$

получаем $k \geqslant \frac{2}{3}$.

4. $\begin{cases} x \geqslant -1, \\ x + 4 + 2 = k(x + 1); \end{cases}$ $x = x_3 = \frac{6 - k}{k - 1}$.

Неравенство $\frac{6 - k}{k - 1} \geqslant -1$ выполняется при $k > 1$.

5. Для записи ответа построим схему (рис. 35), на которой указано, какие корни получаются при тех или иных значениях k.

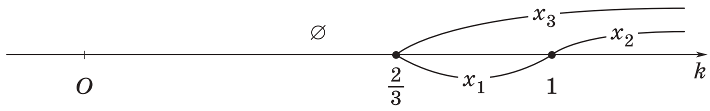


Рис. 35

6. *Ответ*: если $k < \frac{2}{3}$, то уравнение не имеет решений;

если $k = \frac{2}{3}$, то $x = -4$ $\left(\text{получается из } x_2 \text{ при } k = \frac{2}{3}\right)$;

если $\frac{2}{3} < k < 1$, то $x_1 = \frac{2-k}{k-1}$ и $x_2 = -\frac{k+6}{k+1}$;

если $k = 1$, то $x = -\frac{7}{2}$ (получается из x_2 при $k = 1$);

если $k > 1$, то $x_2 = -\frac{k+6}{k+1}$ и $x_3 = \frac{6-k}{k-1}$.

26. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - (2a-7)x + a^2 - 7a < 0, \\ x^2 - 7x - 18 \geqslant 0 \end{cases}$$

не имеет решений? Найти сумму всех таких целых значений a.

1. Исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} (x - (a-7))(x - a) \leqslant 0, \\ (x+2)(x-9) \geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Для того чтобы система (1) не имела решений, нужно, чтобы меньший корень первого неравенства был больше корня $x = -2$ второго неравенства, а больший корень первого неравенства был меньше корня $x = 9$ второго неравенства (рис. 36). Так как $a \in \boldsymbol{R}$, то $a - 7 < a$, поэтому должны выполняться условия $\begin{cases} a - 7 \geqslant -2, \\ a \leqslant 9, \end{cases}$ т. е. $5 \leqslant a \leqslant 9$.

3. Сумма всех целых значений a из этого отрезка равна 35.

4. *Ответ*: $a \in [5; 9]$; 35.

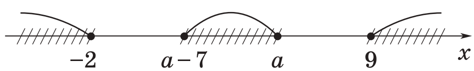


Рис. 36

27. При каких значениях a неравенство

$$(x - a)(x - a - 2) > 0 \qquad (1)$$

является следствием неравенства

$$x^2 - 4x + 3 < 0? \qquad (2)$$

1. Решением неравенства (1) является объединение промежутков $(-\infty; a)$ и $(a + 2; +\infty)$.

2. Решение неравенства (2) есть промежуток $(1; 3)$.

3. По условию решения неравенства (1) должны содержать все решения неравенства (2).

Рис. 37

4. На рис. 37, *а* и *б* показана графическая интерпретация этого требования. Отсюда следует, что нужно найти решения совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} a \geqslant 3, \\ a + 2 \leqslant 1. \end{array}\right.$

5. *Ответ*: $a \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

28. Найти множество значений a, при которых существует хотя бы одно решение системы

$$\begin{cases} (3x - 2a + 3)(x - 4a + 1) \leqslant 0, \\ x^2 + a^2 = 10. \end{cases}$$

1. Для наглядности решения этой смешанной системы воспользуемся геометрическими изображениями неравенства и уравнения (рис. 38, *а*).

2. Сначала в плоскости xOa построим прямую $3x - 2a + 3 = 0$, которая проходит через точки $(1; 3)$ и $(-1; 0)$.

3. Затем построим прямую $x - 4a + 1 = 0$; она проходит через точки $(3; 1)$ и $(-1; 0)$.

4. Уравнение $x^2 + a^2 = 10$ определяет окружность радиуса $\sqrt{10}$ с центром в начале координат. Точки $P(1; 3)$ и $M(3; 1)$ лежат на этой окружности.

5. Неравенство данной системы описывает некоторую область на плоскости xOa, ограниченную построенными двумя прямыми.

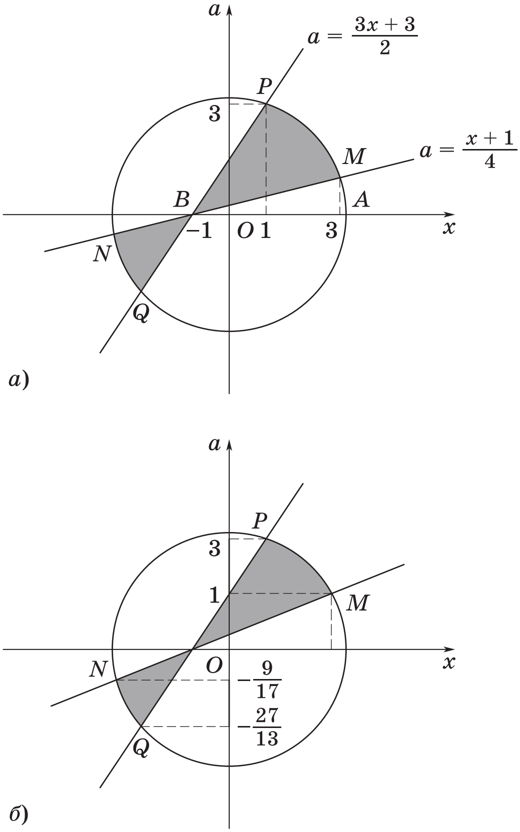


Рис. 38

6. Рассмотрим два случая:

а) $\begin{cases} 3x - 2a + 3 \geqslant 0, \\ x - 4a + 1 \leqslant 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} a \leqslant \dfrac{3x+3}{2}, \\ a \geqslant \dfrac{x+1}{4} \end{cases}$ (этой системе удовлетворяют точки дуги PM);

б) $\begin{cases} 3x - 2a + 3 \leqslant 0, \\ x - 4a + 1 \geqslant 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} a \geqslant \dfrac{3x+3}{2}, \\ a \leqslant \dfrac{x+1}{4} \end{cases}$ (этой системе удовлетворяют точки дуги NQ).

7. Найдем ординаты точек Q, P, N, M окружности. Для этого нужно решить две системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x - 2a + 3 = 0, \\ x^2 + a^2 = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \dfrac{2a-3}{3}, \\ \left(\dfrac{2a-3}{3}\right)^2 + a^2 = 10, \end{cases}$ откуда $a = \dfrac{6 \pm 33}{13}$,

т. е. $a_1 = -\dfrac{27}{13}$, $a_2 = 3$.

б) $\begin{cases} x - 4a + 1 = 0, \\ x^2 + a^2 = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4a - 1, \\ 17a^2 - 8a - 9 = 0, \end{cases}$ откуда $a = \dfrac{4 \pm 13}{17}$, т. е.

$a_3 = -\dfrac{9}{17}$, $a_4 = 1$.

8. Остается записать значения a, соответствующие дугам MP и NQ. Эти значения a определяют вертикальные отрезки на оси Oa (рис. 38, *б*).

9. *Ответ*: $a \in \left[-\dfrac{27}{13}; -\dfrac{9}{17}\right] \cup [1; 3]$.

29. При каких значениях a корни уравнения

$$x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

лежат между корнями уравнения

$$x^2 - 2(a + 1)x + a(a - 1) = 0? \qquad (2)$$

1. Находим корни уравнения (1):

$$x_1 = 1 - |a|,\ x_2 = 1 + |a|,\ x_1 \leqslant x_2.$$

2. Находим корни уравнения (2):

$$x_3 = a + 1 - \sqrt{1 + 3a},\ x_4 = a + 1 + \sqrt{1 + 3a},\ x_3 \leqslant x_4.$$

3. Корни уравнения (2) являются действительными при условии $a \geqslant -\dfrac{1}{3}$. Требуется найти такие a, чтобы выполнялись неравенства

$$a + 1 - \sqrt{1 + 3a} < 1 - |a| \leqslant 1 + |a| < a + 1 + \sqrt{1 + 3a}. \qquad (3)$$

4. Пусть $a < 0$; тогда неравенства (3) примут вил

$$a + 1 - \sqrt{1 + 3a} < 1 + a \leqslant 1 - a < a + 1 + \sqrt{1 + 3a}.$$

В этом случае достаточно, чтобы удовлетворялось лишь неравенство

$$1 - a < a + 1 + \sqrt{1 + 3a}\,,$$

или

$$-2a < \sqrt{1 + 3a}\,,$$

где $-2a > 0$.

5. Возводя в квадрат правую и левую части последнего неравенства, после преобразований получим неравенство $4a^2 - 3a - 1 < 0$, которое выполняется при $a \in (-0{,}25;\ 1)$. Так как $a < 0$, то поставленная задача имеет решение при $a \in (-0{,}25;\ 0)$.

6. Пусть теперь $a \geqslant 0$; тогда неравенства (3) примут вид

$$a + 1 - \sqrt{1 + 3a} < 1 - a \leqslant 1 + a < a + 1 + \sqrt{1 + 3a}\,.$$

В этом случае достаточно, чтобы удовлетворялось лишь неравенство

$$a + 1 - \sqrt{1 + 3a} < 1 - a,$$

или

$$2a < \sqrt{1 + 3a}\,,$$

где $2a \geqslant 0$.

7. Возводя в квадрат правую и левую части последнего неравенства, после преобразований получим неравенство $4a^2 - 3a - 1 < 0$, которое выполняется при $a \in (-0{,}25;\ 1)$. Так как в рассматриваемом случае $a \geqslant 0$, то поставленная задача имеет решение при $a \in$ $\in [0;\ 1)$.

8. Итак, корни уравнения (1) лежат между корнями уравнения (2), если $-0{,}25 < a < 1$.

9. *Ответ*: $a \in (-0{,}25;\ 1)$.

30. При каких значениях параметра a существует единственная пара целых чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющая смешанной системе

$$\begin{cases} -15x^2 + 11xy - 2y^2 = 7, \\ x < y, \\ 2a^2x + 3ay < 0? \end{cases}$$

1. Перепишем уравнение данной системы в виде

$$(y - 3x)(5x - 2y) = 7. \qquad (1)$$

2. Так как по условию числа x и y должны быть целыми, то целыми будут и числа $y - 3x$ и $5x - 2y$.

3. Поэтому все целые числа x и y, которые удовлетворяют уравнению (1), найдем из следующих четырех систем уравнений:

$$\begin{cases} y - 3x = -1, \\ 5x - 2y = -7; \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} y - 3x = -7, \\ 5x - 2y = -1; \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} y - 3x = 1, \\ 5x - 2y = 7; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} y - 3x = 7, \\ 5x - 2y = 1. \end{cases} \tag{5}$$

4. Решениями систем (2), (3), (4), (5) являются соответственно пары чисел (9; 26), (15; 38), (–9; –26), (–15; –38).

5. Второму соотношению данной системы удовлетворяют пары чисел (9; 26) и (15; 38).

6. Подставив значения $x = 9$, $y = 26$ в третье соотношение данной системы, придем к неравенству $3a^2 + 13a < 0$, решением которого являются все a такие, что $-\dfrac{13}{3} < a < 0$.

7. Подставив значения $x = 15$, $y = 38$ в третье соотношение данной системы, придем к неравенству $5a^2 + 19a < 0$, решением которого являются все a такие, что $-\dfrac{19}{5} < a < 0$.

8. Требованию задачи будут удовлетворять те значения параметра a, которые удовлетворяют каждому из неравенств пп. 6 и 7.

9. *Ответ*: $a \in \left(-\dfrac{13}{3}; -\dfrac{19}{5}\right)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти значения a, при которых корень уравнения $a^2(x - 3) - a(4x - 13) = 34 - 4x$ не меньше, чем 4.

2. Установить, при каких значениях a система неравенств:

а) $\begin{cases} 3 - 6x < 2x - 13, \\ 3 + 2x < a + x \end{cases}$ не имеет решений;

б) $\begin{cases} -2(a + 4x) < x - 3, \\ 5 - 3x > 2 + 4(x - a) \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение;

в) $\begin{cases} 2x - (a + 1)y \geqslant 2a + 2, \\ (a - 5)x + 4y \geqslant a - 9 \end{cases}$ имеет решение;

г) $\begin{cases} y - x \leqslant 2, \\ y - 2x \geqslant a, \\ ax + y \geqslant 2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

3. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} a(x - 2) \geqslant x - 3, \\ 8(a + 1)x > 8ax + 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{ax}{a-2} < \dfrac{2x+3}{4} + \dfrac{x-1}{3}, \\ \dfrac{x(a-10)}{2} + 6 > \dfrac{a(x+2)}{2} - 5x - a. \end{cases}$

4. Установить, при каких значениях a неравенство:

а) $(a - 3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$ выполняется для всех значений x;

б) $\dfrac{ax}{a^2+4} < \dfrac{3}{2}$ выполняется для всех значений x;

в) $(a - 1)x^2 + 2(a + 1)x + 2a - 1 \leqslant 0$ выполняется только для одного значения x;

г) $\dfrac{x-2a-1}{x-a} < 0$ справедливо для всех $x \in [1; 2]$?

5. При каком значении a уравнение $|x^2 - 2x - 3| = x + a$ имеет ровно один корень?

6. При каких значениях a двойное неравенство

$$-2 < \frac{x^2 + ax - 2}{x - 1 - x^2} < 3$$

выполняется для всех значений x?

7. Найти все значения a, при которых корни уравнения

$$(a - 2)x^2 - 2(a + 4)x + 4a = 0$$

имеют одинаковые знаки.

8. Решить неравенство:

а) $\dfrac{a}{2a-x} > 3$; б) $\dfrac{x}{x-a} - \dfrac{2a}{x+a} < \dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$.

9. При каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{2 - ax - x^2}{1 - x + x^2} \leqslant 3$$

верно для всех значений переменной?

10. Найти множество значений a, при которых существует хотя бы одно решение системы:

а) $\begin{cases} 2x^2 - (5a + 2)x + 2a^2 - 2a - 4 \leqslant 0, \\ x + a - 5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 + (a - 2)x \leqslant a^2 + 2a; \\ x + 2a - 1 = 0. \end{cases}$

11. Найти все значения параметра p, при которых неравенство $\frac{x^2 + p^2}{p(x + 6)} \geqslant 1$ выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $-1 < x < 1$.

12. При каком значении q площадь фигуры, заданной на координатной плоскости неравенством:

а) $|x - y + 2| + |x + 2y - 1| \leqslant q$, будет равна 96;

б) $|x + y + 2| + |2x - y - 2| \leqslant q$, будет равна 6?

13. Найти множество значений a, при которых уравнение имеет ровно три корня:

а) $(2x^2 - (3a - 6)x + a^2 - 3a)\sqrt{5 + 4x - x^2} = 0$;

б) $(2x^2 - (3a + 6)x + a^2 + 3a)\sqrt{x^2 + x - 2} = 0$;

в) $(3x^2 - 2(2a - 3)x + a^2 - 2a)\sqrt{2 + x - x^2} = 0$.

Ответы

1. $a \in [-3;\ 2) \cup (2;\ 6]$. **2.** а) $a \in (-\infty;\ 5]$; б) $a \in (-0{,}12;\ +\infty)$; в) $a \neq 3$; г) $a = 2$. **3.** а) Если $a < 1$, то $x \in \left(\frac{9}{8};\ \frac{2a-3}{a-1}\right)$; если $a \in \left[1;\ \frac{15}{7}\right]$, то $x \in \left(\frac{9}{8};\ +\infty\right)$; если $a > \frac{15}{7}$, то $x \in \left[\frac{2a-3}{a-1};\ +\infty\right)$; б) если $a \in (-\infty;\ -10) \cup (2;\ +\infty)$, то $x < \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$; если $a \in (-10;\ 2)$, то $x > \frac{5(a-2)}{2(a+10)}$; если $a = -10$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a = 2$, то $x \in \varnothing$. **4.** а) $a \in (6;\ +\infty)$; б) $a \in (-6;\ 6)$; в) $a = 5$; г) $a \in (0{,}5;\ 1)$. **5.** $a = -3$. **6.** $a \in (-1;\ 2)$. **7.** $a \in \left[\frac{8 - 4\sqrt{7}}{3};\ 0\right) \cup \left(2;\ \frac{8 + 4\sqrt{7}}{3}\right]$. **8.** а) Если $a < 0$, то $x \in \left(2a;\ \frac{5a}{3}\right)$; если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $x \in \left(\frac{5a}{3};\ 2a\right)$; б) если $a < 0$, то $x \in (3a;\ a) \cup (-a;\ -2a)$; если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $x \in (-2a;\ -a) \cup (a;\ 3a)$. **9.** $a \in [-1;\ 7]$. **10.** а) $a \in [1;\ 4]$; б) $a \in [0;\ 1]$. **11.** $p \in \left[\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$. **12.** а) $q = 12$; б) $q = 3$. **13.** а) $a \in (-2;\ 2] \cup \{6\} \cup [8;\ 10)$; б) $a \in \{-6\} \cup [-5;\ -4) \cup (-2;\ 2]$; в) $a \in (-3;\ 1] \cup \{3\} \cup [4;\ 6)$.

Тема 8

1. Применение теоремы Виета к определению знаков корней квадратного трехчлена
2. Расположение корней квадратного трехчлена

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Применение теоремы Виета к определению знаков корней квадратного трехчлена

1°. Как известно, между корнями x_1 и x_2 квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и его коэффициентами a, b, c справедливы следующие соотношения (теорема Виета):

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \; x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

С помощью этих соотношений можно исследовать знаки корней квадратного трехчлена.

2°. **Теорема 1.** *Чтобы корни квадратного уравнения* (*трехчлена*) *были действительными и имели одинаковые знаки, необходимо и достаточно выполнение соотношений*:

$$D = b^2 - 4ac \geqslant 0; \; x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0.$$

При этом оба корня будут положительными, если дополнительно выполняется условие

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0,$$

и оба корня будут отрицательными, если выполняется условие

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0.$$

3°. **Т е о р е м а 2.** *Чтобы корни квадратного уравнения (трехчлена) были действительными и имели различные знаки, необходимо и достаточно выполнение соотношений*:

$$D = b^2 - 4ac > 0, \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} < 0.$$

При этом отрицательный корень будет иметь меньшую абсолютную величину, если $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$.

Если же $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$, то отрицательный корень будет иметь бóльшую абсолютную величину.

2. Расположение корней квадратного трехчлена

1°. При решении многих задач требуется знание других важных теорем и их следствий о расположении корней квадратного трехчлена на координатной прямой.

2°. Пусть квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет действительные корни x_1 и x_2 (где $x_1 < x_2$), а x_0 — какое-нибудь действительное число.

3°. **Т е о р е м а 1.** *Чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше, чем число x_0 (т. е. лежали на координатной прямой левее, чем точка x_0), необходимо и достаточно выполнение условий* (рис. 39, *а* и *б*):

$$\text{а)} \begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ -\frac{b}{2a} < x_0, \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)} \begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ -\frac{b}{2a} < x_0 \\ f(x_0) < 0. \end{cases},$$

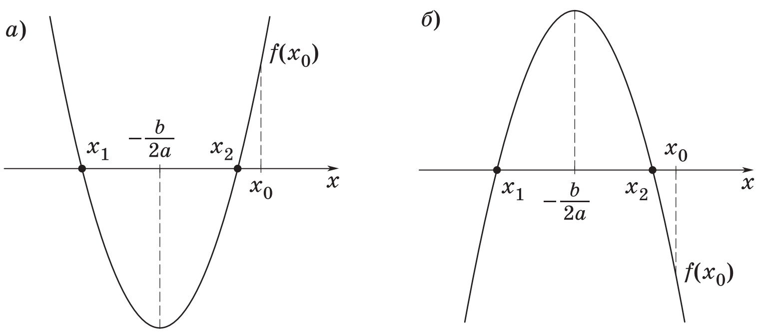


Рис. 39

4°. **Т е о р е м а 2.** *Чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число* x_0 (*т. е. лежали на координатной прямой правее, чем точка* x_0), *необходимо и достаточно выполнение условий* (рис. 40, *а* и *б*):

$$\text{а)}\ \begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > x_0, \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)}\ \begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > x_0, \\ f(x_0) < 0. \end{cases}$$

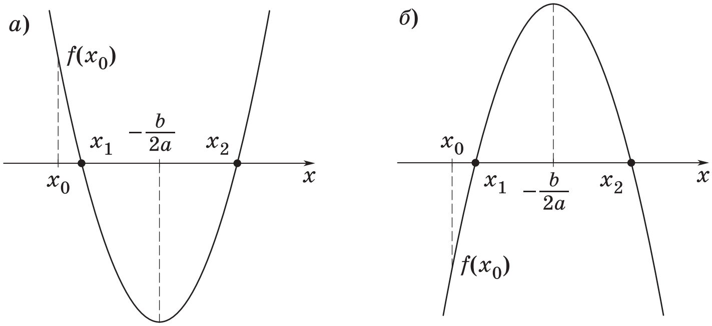


Рис. 40

5°. **Т е о р е м а 3.** *Чтобы один из корней квадратного трехчлена был меньше, чем число* x_0, *а другой больше, чем число* x_0 (*т. е. точка* x_0 *лежала бы между корнями*), *необходимо и достаточно выполнение условий* (рис. 41, *а* и *б*):

$$\text{а)}\ \begin{cases} a > 0, \\ f(x_0) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)}\ \begin{cases} a < 0, \\ f(x_0) > 0. \end{cases}$$

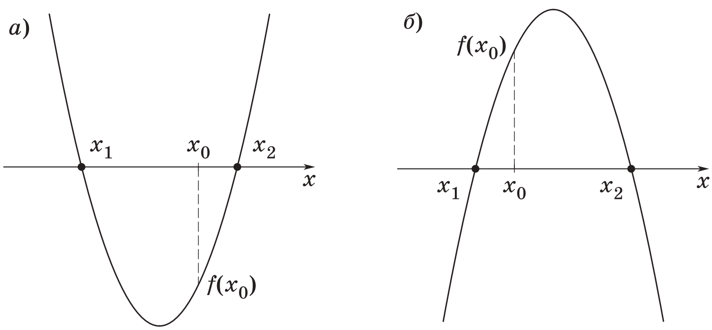


Рис. 41

6°. С л е д с т в и е 1. *Чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше, чем число M, но меньше, чем число N $(M < N)$, т. е. лежали в интервале* $(M; N)$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (рис. 42, *а* и *б*):

$$\text{а)}\ \begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N, \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)}\ \begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N, \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0. \end{cases}$$

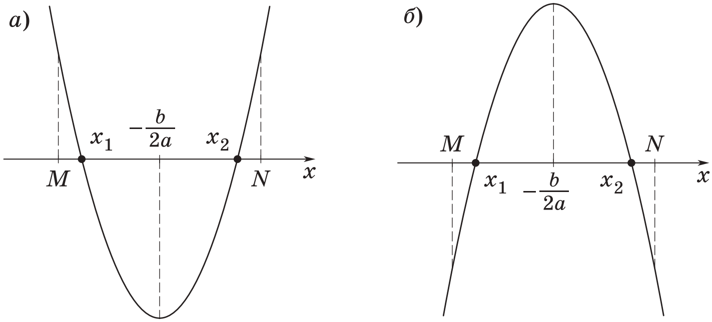


Рис. 42

7°. С л е д с т в и е 2. *Чтобы только больший корень квадратного трехчлена лежал в интервале* $(M; N)$, *необходимо и достаточно выполнение условий* (рис. 43, *а* и *б*):

$$\text{а)}\ \begin{cases} a > 0, \\ f(M) < 0, \\ f(N) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \text{б)}\ \begin{cases} a < 0, \\ f(M) > 0, \\ f(N) < 0. \end{cases}$$

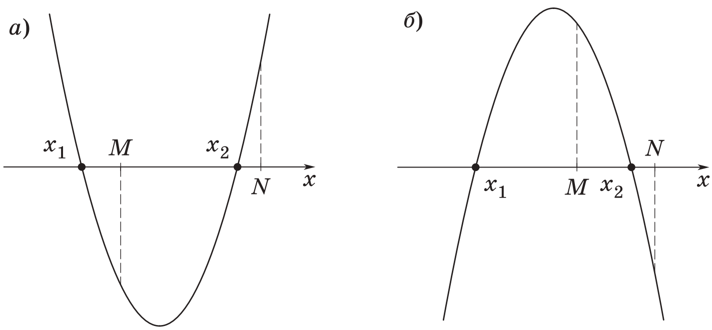


Рис. 43

8°. С л е д с т в и е 3. *Чтобы только меньший корень квадратного трехчлена лежал в интервале* (M; N), *необходимо и достаточно выполнение условий* (рис. 44, *а* и *б*):

а) $\begin{cases} a > 0, \\ f(M) > 0, \\ f(N) < 0 \end{cases}$ или б) $\begin{cases} a < 0, \\ f(M) < 0, \\ f(N) > 0. \end{cases}$

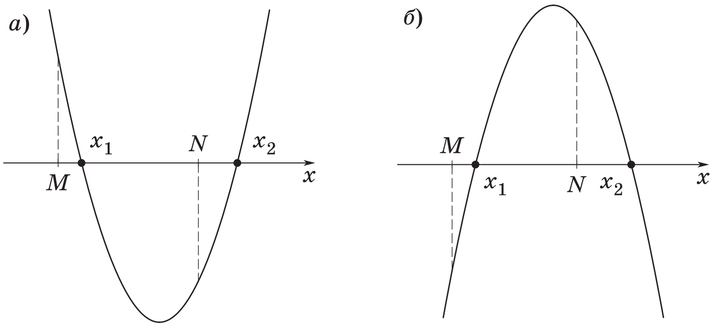


Рис. 44

9°. С л е д с т в и е 4. *Чтобы один корень квадратного трехчлена был меньше, чем* M, *а другой больше, чем* N ($M < N$), *т. е. отрезок* [M; N] *целиком лежал внутри интервала между корнями, необходимо и достаточно выполнение условий* (рис. 45, *а* и *б*):

а) $\begin{cases} a > 0, \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0 \end{cases}$ или б) $\begin{cases} a < 0, \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0. \end{cases}$

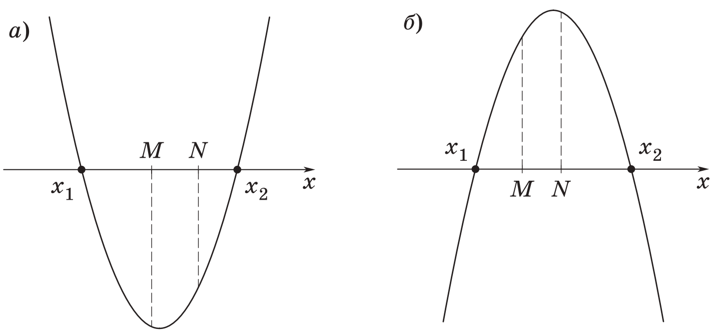


Рис. 45

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. При каких значениях параметра k корни квадратного уравнения

$$(k+2)x^2+2kx+k-4=0$$

имеют разные знаки?

1. Так как степень уравнения равна 2, то $k+2\neq 0$.

2. Уравнение имеет два различных корня при условии $\frac{D}{4}=k^2-(k+2)(k-4)>0$, причем произведение корней отрицательно: $x_1x_2=\frac{k-4}{k+2}<0$.

3. Итак, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} k+2\neq 0, \\ k^2-(k+2)(k-4)>0, \\ \dfrac{k-4}{k+2}<0. \end{cases}$$

4. Решив эту систему, получим $-2<k<4$.

5. *Ответ*: $k\in(-2;\,4)$.

2. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения

$$(a-2)x^2-2ax+2a-3=0 \qquad (1)$$

действительны, и определить знаки корней.

1. Пусть $a=2$; тогда уравнение (1) является линейным и имеет один корень, равный 0,25.

2. Пусть $a\neq 2$; тогда уравнение (1) имеет действительные корни, если дискриминант квадратного трехчлена неотрицателен, т. е.

$$\frac{D}{4}=a^2-(a-2)(2a-3)\geqslant 0,$$

откуда, учитывая, что $a\neq 2$, находим

$$1\leqslant a<2,\ 2<a\leqslant 6. \qquad (2)$$

3. Для определения знаков корней воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{2a}{a-2}, \\ x_1x_2=\dfrac{2a-3}{a-2}. \end{cases}$$

4. Корни имеют одинаковые знаки, если их произведение положительно. Если при этом положительна и сумма корней, то оба они положительны. Таким образом,

$$\begin{cases} x_1x_2 = \dfrac{2a-3}{a-2} > 0, \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2a}{a-2} > 0, \end{cases}$$

откуда с учетом неравенств (2) находим $2 < a \leqslant 6$.

5. Если произведение корней положительно, а их сумма отрицательна, то оба корня отрицательны. Значит,

$$\begin{cases} x_1x_2 = \dfrac{2a-3}{a-2} > 0, \\ x_1 + x_2 = \dfrac{2a}{a-2} < 0, \end{cases}$$

откуда с учетом неравенств (2) находим $1 \leqslant a < 1{,}5$.

6. Если корни имеют разные знаки, то произведение корней отрицательно и выполняется неравенство

$$x_1x_2 = \frac{2a-3}{a-2} < 0$$

откуда с учетом неравенств (2) находим $1{,}5 < a < 2$.

7. Если хотя бы один из корней уравнения равен нулю, то $x_1x_2 = \dfrac{2a-3}{a-2} = 0$, откуда следует, что $a = 1{,}5$. Так как при $a = 1{,}5$ сумма корней отрицательна, то другой корень отрицателен.

8. *Ответ*: корни уравнения действительны при $1 \leqslant a \leqslant 6$;
если $2 < a \leqslant 6$, то оба корня положительны;
если $a = 2$, то один положительный корень;
если $1{,}5 < a < 2$, то корни имеют разные знаки;
если $a = 1{,}5$, то один из корней равен нулю, а другой отрицателен;
если $1 \leqslant a < 1{,}5$, то оба корня отрицательны.

3. В зависимости от значений параметра p исследовать знаки корней уравнения

$$(p+2)x^2 - 2(p+3)x + p + 5 = 0.$$

1. Согласно теореме Виета, для корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ справедливы равенства $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$.

2. Пусть $x_1 > 0$, $x_2 > 0$; тогда получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ \dfrac{b}{a} < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -p - 1 > 0, \\ \dfrac{p+5}{p+2} > 0, \\ \dfrac{-2(p+3)}{p+2} < 0. \end{cases}$$

Решив эту систему (рис. 46, *а*), находим $p \in (-\infty; -5) \cup (-2; -1)$.

3. Пусть $x_1 < 0$, $x_2 < 0$; тогда получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} > 0, \\ \dfrac{c}{a} > 0, \\ \dfrac{b}{a} > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -p - 1 > 0, \\ \dfrac{p+5}{p+2} > 0, \\ \dfrac{-2(p+3)}{p+2} > 0. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений (рис. 46, *б*).

4. Пусть $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1 > |x_2|$; тогда получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} > 0, \\ \dfrac{c}{a} < 0, \\ \dfrac{b}{a} < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -p - 1 > 0, \\ \dfrac{p+5}{p+2} < 0, \\ \dfrac{-2(p+3)}{p+2} < 0. \end{cases}$$

Решив эту систему (рис. 46, *в*), находим $p \in (-5; -3)$.

5. Пусть $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1 < |x_2|$; тогда получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} > 0, \\ \dfrac{c}{a} < 0, \\ \dfrac{b}{a} > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -p - 1 > 0, \\ \dfrac{p+5}{p+2} < 0, \\ \dfrac{-2(p+3)}{p+2} > 0. \end{cases}$$

Решив эту систему (рис. 46, *г*), находим $p \in (-3; -2)$.

6. *Ответ*: $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ при $p \in (-\infty; -5) \cup (-2; -1)$;
$x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1 > |x_2|$ при $p \in (-5; -3)$;
$x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $x_1 < |x_2|$ при $p \in (-3; -2)$;
случай $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ невозможен.

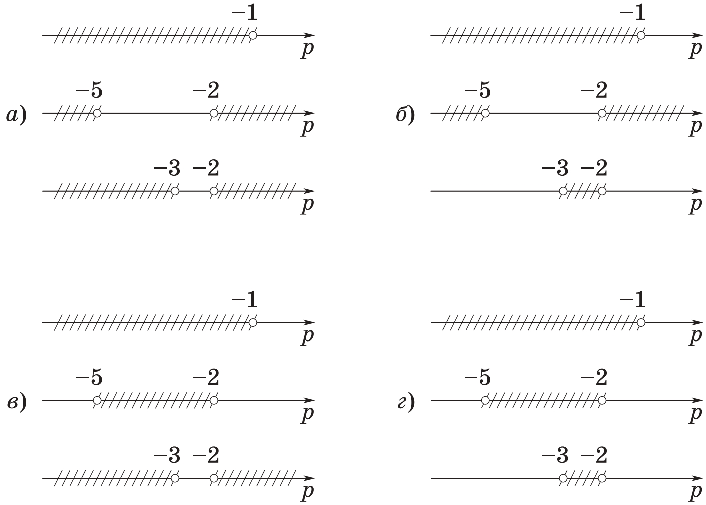


Рис. 46

4. Найти все значения параметра c, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2 + 4cx + 1 - 2c + 4c^2 = 0$$

действительны и меньше, чем (-1).

1. Здесь $a = 1 > 0$.

2. Применяя теорему 1 из п. 2, составим систему

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < -1, \\ f(-1) > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 4c^2 - (1 - 2c + 4c^2) \geqslant 0, \\ -2c < -1, \\ 1 - 4c + 1 - 2c + 4c^2 > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

3. Решив систему (1), находим $c > 1$.

4. *Ответ*: $c \in (1; +\infty)$.

5. Найти все значения параметра k, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2 - 6kx + 2 - 2k + 9k^2 = 0$$

действительны и больше 3.

1. Здесь $a = 1 > 0$.

2. Применяя теорему 2 из п. 2, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > 3, \\ f(3) > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} 9k^2 - (2 - 2k + 9k^2) \geqslant 0, \\ 3k > 3, \\ 9 - 18k + 2 - 2k + 9k^2 > 0. \end{cases} \qquad (1)$$

3. Решив систему (1), находим $k > \dfrac{11}{9}$.

4. *Ответ*: $k \in \left(\dfrac{11}{9}; +\infty\right)$.

6. При каких значениях параметра k один из корней уравнения

$$(k^2 + k + 1)x^2 + (2k - 3)x + k - 5 = 0$$

больше 1, а другой меньше 1?

1. Здесь $a = k^2 + k + 1 > 0$ при всех k.

2. Согласно теореме 3 из п. 2, имеем $f(1) < 0$, т. е.

$$k^2 + k + 1 + 2k - 3 + k - 5 < 0. \qquad (1)$$

3. Решив неравенство (1), находим

$$-2 - \sqrt{11} < k < -2 + \sqrt{11}.$$

4. *Ответ*: $k \in (-2 - \sqrt{11}; -2 + \sqrt{11})$.

7. При каких значениях параметра m корни уравнения

$$x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + 12 = 0$$

принадлежат отрезку [−1; 4]?

1. Ветви параболы $y = x^2 - 2(m + 2)x + m^2 + 12$ направлены вверх (так как $a = 1 > 0$). Эта парабола должна иметь:

а) точки пересечения с осью абсцисс;

б) вершину с абсциссой $-\dfrac{b}{2a}$, принадлежащей отрезку [−1; 4];

в) неотрицательные ординаты $f(4)$ и $f(-1)$.

2. Указанным требованиям отвечает рис. 47.

3. Согласно следствию 1 из п. 2, запишем и решим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} \geqslant 0, \\ -1 \leqslant -\dfrac{b}{2a} \leqslant 4, \\ f(4) \geqslant 0, \\ f(-1) \geqslant 0, \end{cases}$$

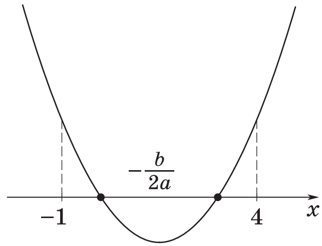


Рис. 47

т. е.

$$\begin{cases} (m+2)^2 - m^2 - 12 \geqslant 0, \\ -1 \leqslant m + 2 \leqslant 4, \\ 16 - 8(m+2) + m^2 + 12 \geqslant 0, \\ 1 + 2(m+2) + m^2 + 12 \geqslant 0. \end{cases}$$

4. *Ответ*: $m = 2$.

8. При каких значениях параметра k корни уравнения

$$kx^2 - (k+1)x + 2 = 0$$

будут действительными и оба по абсолютной величине меньше 1?

1. Корни уравнения должны быть действительными и удовлетворять условиям $-1 < x_1 < 1$ и $-1 < x_2 < 1$.

2. Согласно следствию 1 из п. 2, получаем совокупность двух систем неравенств для нахождения параметра k:

$$\begin{cases} a > 0, \\ D \geqslant 0, \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N, \\ f(M) > 0, \\ f(N) > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a < 0, \\ D \geqslant 0, \\ M < -\dfrac{b}{2a} < N, \\ f(M) < 0, \\ f(N) < 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\text{а)} \begin{cases} k > 0, \\ (k+1)^2 - 8k \geqslant 0, \\ -1 < \dfrac{k+1}{2k} < 1, \\ k + (k+1) + 2 > 0, \\ k - (k+1) + 2 > 0; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} k < 0, \\ (k+1)^2 - 8k \geqslant 0, \\ -1 < \dfrac{k+1}{2k} < 1, \\ k + (k+1) + 2 < 0, \\ k - (k+1) + 2 < 0. \end{cases}$$

3. Решив систему а), находим $k \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$. Система б) не имеет решений.

4. *Ответ*: $k \in [3 + 2\sqrt{2}\,; +\infty)$.

9. При каких значениях параметра p больший корень уравнения $px^2 + (2p - 7)x - 10p = 0$ принадлежит интервалу (4; 6)?

1. Для того чтобы выполнялись требования задачи, нужно, чтобы график квадратного трехчлена $f(x) = px^2 + (2p - 7)x - 10p$ имел вид, изображенный на рис. 48, *а* или на рис. 48, *б*.

2. Согласно следствию 2 из п. 2, получаем совокупность двух систем неравенств:

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(4) < 0, \\ f(6) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(4) > 0, \\ f(6) < 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\text{а)} \begin{cases} p > 0, \\ 16p + 4(2p - 7) - 10p < 0, \\ 36p + 6(2p - 7) - 10p > 0; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} p < 0, \\ 16p + 4(2p - 7) - 10p > 0, \\ 36p + 6(2p - 7) - 10p < 0. \end{cases}$$

3. Из системы а) следует, что $\frac{21}{19} < p < 2$, а система б) не имеет решений.

4. *Ответ*: $p \in \left(\frac{21}{19}\,; 2\right)$.

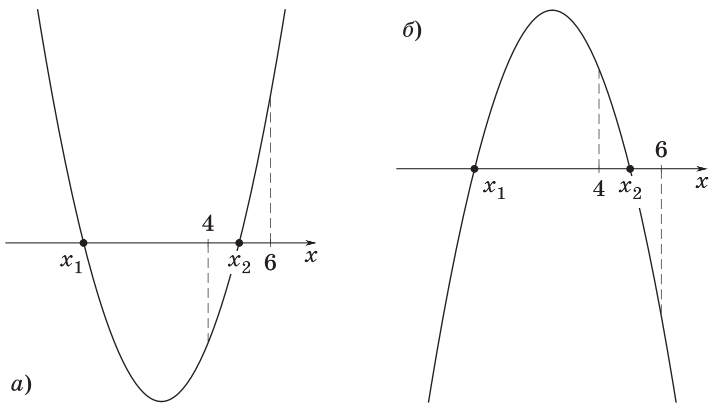


Рис. 48

10. При каких значениях параметра p меньший корень уравнения

$$(1-p)x^2-(3p-8)x+p^2-1=0$$

по модулю меньше 1?

1. По условию меньший корень уравнения должен принадлежать интервалу $(-1;\ 1)$.

2. Поэтому квадратный трехчлен $f(x)=(1-p)x^2-(3p-8)x+$ $+p^2-1$ должен иметь вид, изображенный на рис. 49, *а* или на рис. 49, *б*.

3. Воспользуемся следствием 3 из п. 2 и запишем совокупность двух систем неравенств:

$$\begin{cases} a>0, \\ f(-1)>0, \\ f(1)<0; \end{cases} \quad \begin{cases} a<0, \\ f(-1)<0, \\ f(1)>0, \end{cases}$$

т. е.

$$\text{а)} \begin{cases} 1-p>0, \\ 1-p+3p-8+p^2-1>0, \\ 1-p-3p+8+p^2-1<0; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} 1-p<0, \\ 1-p+3p-8+p^2-1<0, \\ 1-p-3p+8+p^2-1>0. \end{cases}$$

4. Система а) не имеет решений, а из системы б) находим, что $1<p<2$.

5. *Ответ*: $p\in(1;\ 2)$.

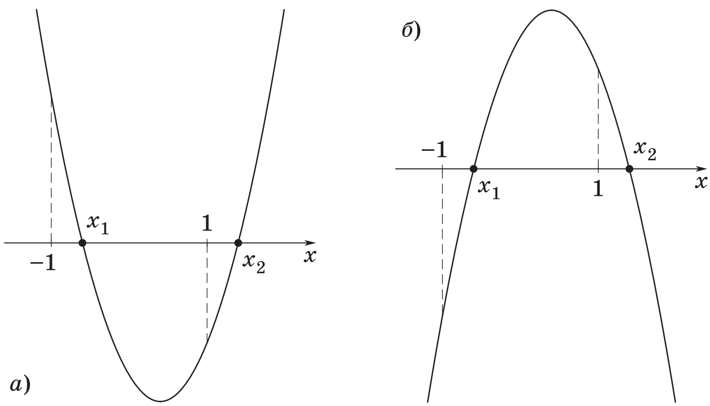


Рис. 49

11. При каких значениях k неравенство $x^2 + kx + k^2 + 6k < 0$ выполняется для всех $1 < x < 2$?

1. Чтобы неравенство $x^2 + kx + k^2 + 6k < 0$ имело место для всех $1 < x < 2$, т. е. чтобы интервал (1; 2) лежал между корнями квадратного трехчлена $f(x) = x^2 + kx + k^2 + 6k$, нужно, чтобы выполнялись требования следствия 4 из п. 2:

$$\begin{cases} f(1) \leqslant 0, \\ f(2) \leqslant 0. \end{cases}$$

2. Отметим, что здесь записаны <u>нестрогие</u> неравенства, поскольку возможно не только расположение параболы, указанное на рис. 50, *а*, но и расположения, изображенные на рис. 50, *б—г*. В последних трех случаях один или оба корня квадратного трехчлена могут совпадать с точками $x_1 = 1$ или $x_2 = 2$, но внутренние точки интервала между корнями удовлетворяют неравенству $1 < x < 2$.

3. Итак, имеем систему неравенств

$$\begin{cases} f(1) = 1 + k + k^2 + 6k \leqslant 0, \\ f(2) = 4 + 2k + k^2 + 6k \leqslant 0. \end{cases}$$

4. Решив эту систему, получим $\dfrac{-7 - 3\sqrt{5}}{2} \leqslant k \leqslant 2\sqrt{3} - 4$.

4. Ответ: $k \in [-0{,}5(7 + 3\sqrt{5}); 2\sqrt{3} - 4]$.

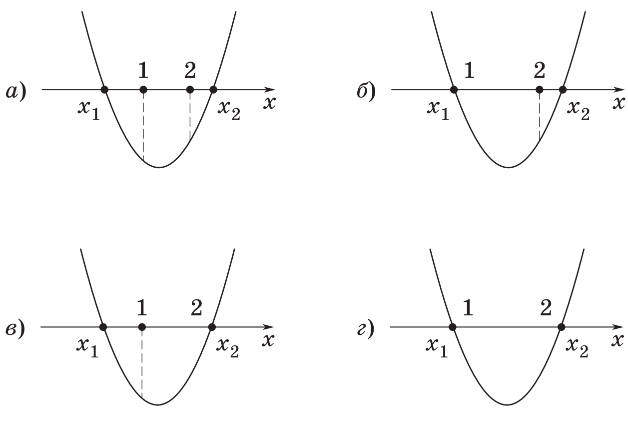


Рис. 50

12. При каких значениях a неравенство $4x^2 - 9ax + 2a^2 < 0$ выполняется для всех x таких, что $|x - 3| \leqslant 1$?

1. Сначала решим неравенство $|x - 3| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant x - 3 \leqslant 1$, откуда $x \in [2; 4]$.

2. Рассмотрим функцию

$$f(x) = 4x^2 - 9ax + 2a^2. \qquad (1)$$

3. Чтобы функция (1) была отрицательной на отрезке [2; 4], достаточно выполнения условий

$$\begin{cases} f(2) \leqslant 0, \\ f(4) \leqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 16 - 18a + 2a^2 \leqslant 0, \\ 64 - 36a + 2a^2 \leqslant 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 \leqslant a \leqslant 8, \\ 2 \leqslant a \leqslant 16. \end{cases} \qquad (2)$$

4. Решив систему (2), находим $2 \leqslant a \leqslant 8$.

5. *Ответ*: $a \in [2; 8]$.

13. При каких значениях k один из корней уравнения

$$(k - 2)x^2 - 2(k + 3)x + 4k = 0 \qquad (1)$$

больше 3, а другой меньше 2?

1. Согласно следствию 4 из п. 2, имеем совокупность двух систем неравенств:

а) $\begin{cases} a > 0, \\ f(2) < 0, \\ f(3) < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} a < 0, \\ f(2) > 0, \\ f(3) > 0. \end{cases}$

2. Система а) в данном случае имеет вид

$$\begin{cases} k - 2 > 0, \\ f(2) = (k - 2) \cdot 4 - 2(k + 3) \cdot 2 + 4k < 0, \\ f(3) = (k - 2) \cdot 9 - 2(k + 3) \cdot 3 + 4k < 0, \end{cases}$$

откуда $2 < k < 5$.

3. Система б) не имеет решений.

4. *Ответ*: $k \in (2; 5)$.

14. При каких значениях параметра a абсолютная величина одного из корней уравнения

$$a^2x^2 + ax - 2 = 0$$

больше 1, а другого меньше 1?

1. Задача равносильна следующей: при каких значениях параметра a один из двух корней квадратного трехчлена

$$f(x) = a^2x^2 + ax - 2 \qquad (1)$$

принадлежит интервалу $(-1; 1)$, а второй расположен вне этого интервала и по модулю не равен 1?

2. Заметим, что ровно один корень трехчлена (1) принадлежит интервалу $(-1; 1)$ только тогда, когда числа $f(-1)$ и $f(1)$ имеют разные знаки (корни по модулю не равны 1). Поэтому требование задачи выполняется только при условии $f(-1)f(1) < 0$, которое в данном случае примет вид

$$(a^2 - a - 2)(a^2 + a - 2) < 0. \qquad (2)$$

3. Решив неравенство (2), находим, что $-2 < a < -1$ или $1 < a < 2$.

4. *Ответ*: $a \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

15. Найти все значения c, при которых корни уравнения $x^2 + x + c = 0$ действительны и оба больше c.

1. Если оба корня квадратного трехчлена $y = x^2 + x + c$ больше c, то его график имеет вид, изображенный на рис. 51.

2. Таким образом, должны выполняться условия теоремы 2 из п. 2:

а) парабола $y = x^2 + x + c$ пересекает ось Ox в двух точках, т. е. $D > 0$, где $D = 1 - 4c$;

б) абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a}$ находится правее точки c, т. е. $-\frac{1}{2} > c$;

в) значение трехчлена $y = x^2 + x + c$ в точке $x = c$ положительно, т. е. $y(c) > 0$, где $y(c) = c^2 + c + c = c^2 + 2c$.

3. В результате приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} 1 - 4c > 0, \\ c < -\frac{1}{2}, \\ c(c + 2) > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} c < \frac{1}{4}, \\ c < -\frac{1}{2}, \\ c < -2;\ c > 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является промежуток $c < -2$.

4. *Ответ*: $c \in (-\infty; -2)$.

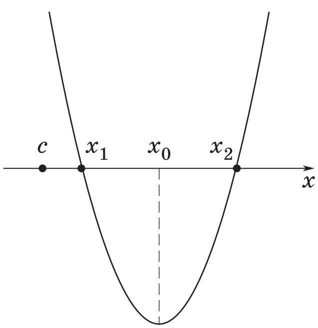


Рис. 51

16. При каких значениях a оба корня квадратного трехчлена

$$(2-a)x^2 - 3ax + 2a$$

действительны и больше $\frac{1}{2}$?

1. Используя теорему 2 из п. 2, получим совокупность двух систем неравенств:

$$\text{а)}\begin{cases} 2-a>0, \\ 9a^2-8a(2-a)\geqslant 0, \\ \dfrac{3a}{2(2-a)}>\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{4}(2-a)-3a\cdot\dfrac{1}{2}+2a>0; \end{cases} \qquad \text{б)}\begin{cases} 2-a<0, \\ 9a^2-8a(2-a)\geqslant 0, \\ \dfrac{3a}{2(2-a)}>\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{4}(2-a)-3a\cdot\dfrac{1}{2}+2a<0. \end{cases}$$

2. Решив систему (а), находим $\frac{16}{17} \leqslant a < 2$; система (б) не имеет решений.

3. *Ответ*: $a \in \left[\frac{16}{17}; 2\right)$.

17. При каких значениях k неравенство

$$(k-1)x^2 + (2k-3)x + k - 3 > 0 \qquad (1)$$

выполняется хотя бы для одного значения $x < 1$?

1. Пусть $k > 1$. Положим $f(x) = (k-1)x^2 + (2k-3)x + k - 3$. Тогда, как видно из рис. 52, *а—в*, всегда найдется хотя бы одно значение $x < 1$, при котором неравенство $f(x) > 0$ верно.

2. Пусть $k = 1$. Тогда неравенство (1) примет вид $-x - 2 > 0$. Оно верно при $x < -2$. Значит, $k = 1$ удовлетворяет условию задачи.

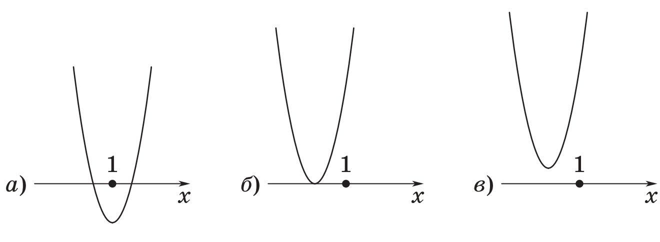


Рис. 52

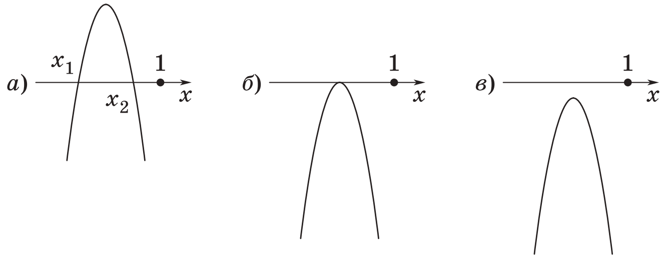


Рис. 53

3. Пусть $k < 1$. На рис. 53, *а—в* изображены графики функции $f(x)$ при $D > 0$, $D = 0$ и $D < 0$. Условию задачи удовлетворяет только случай а). Согласно теореме 1 из п. 2, получим систему

$$\begin{cases} k - 1 < 0, \\ D > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < 1, \\ f(1) < 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} k < 1, \\ (2k - 3)^2 - 4(k - 3)(k - 1) > 0, \\ \dfrac{3 - 2k}{2(k-1)} < 1, \\ k - 1 + 2k - 3 + k - 3 < 0. \end{cases}$$

Решив ее, находим $\dfrac{3}{4} < k < 1$.

4. *Ответ*: $k \in \left(\dfrac{3}{4}; +\infty\right)$.

18. Найти все значения k, при которых неравенство

$$kx^2 - 4x + 3k + 1 > 0 \tag{1}$$

выполняется для всех $x > 0$.

1. Понятно, что значения k должны быть положительны, так как в противном случае всегда найдутся такие $x > 0$, для которых функция $y = kx^2 - 4x + 3k + 1$ принимает отрицательные значения (при $k < 0$ ветви параболы направлены вниз; случай $k = 0$ также не подходит).

2. При $k > 0$ возможны два случая, удовлетворяющие условию задачи.

а) Квадратный трехчлен не имеет действительных корней, если

$$\begin{cases} k > 0, \\ 16 - 4k(3k + 1) < 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $k > 1$.

В этом случае неравенство (1) выполняется для всех x.

б) Корни квадратного трехчлена действительны, но оба меньше или равны нулю: $x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$.

Согласно теореме 1 из п. 2, составим систему

$$\begin{cases} k > 0, \\ D \geqslant 0, \\ \dfrac{2}{k} \leqslant 0, \\ 3k + 1 \geqslant 0, \end{cases}$$

которая несовместна. Таким образом, случай а) исчерпывает все решения задачи.

3. *Ответ*: $k \in (1; +\infty)$.

19. Найти все значения k, при которых из неравенства

$$kx^2 - x + 1 - k < 0 \qquad (1)$$

следует неравенство

$$0 < x < 1. \qquad (2)$$

1. Прежде всего отметим, что одно неравенство является следствием другого, если множество решений первого неравенства целиком содержит множество решений второго. Например, если x удовлетворяет неравенству $|x| < 3$, то $x^2 < 10$, т. е. неравенство $x^2 < 10$ есть следствие неравенства $|x| < 3$. В самом деле, множество решений $(-\sqrt{10}\,;\ \sqrt{10}\,)$ неравенства $x^2 < 10$ целиком содержит множество решений $(-3; 3)$ неравенства $|x| < 3$.

2. Согласно условию, требуется найти все значения k, при которых любое число x, удовлетворяющее неравенству (1), удовлетворяет и неравенству (2).

3. Это означает, что неравенство (1) достаточно для выполнения неравенства (2), а неравенство (2) необходимо для выполнения неравенства (1).

4. Покажем, что число k должно быть положительным.

а) Если $k < 0$, то квадратное неравенство (1) выполняется либо при всех x (рис. 54, *а*), либо при тех x, которые лежат вне отрезка,

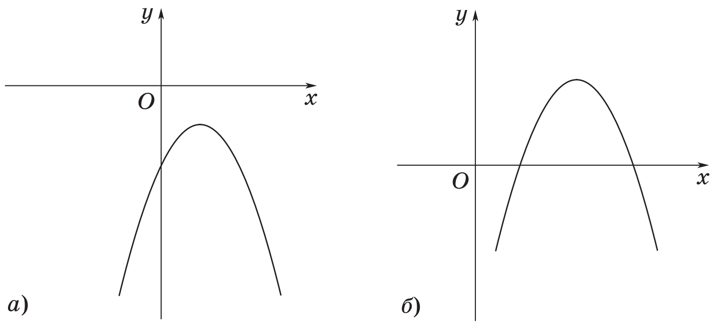


Рис. 54

содержащего корни квадратного уравнения $kx^2 - x + 1 - k = 0$ (рис. 54, *б*).

б) В каждом из рассмотренных случаев обязательно найдутся значения x, удовлетворяющие условию (1), но не удовлетворяющие условию (2), т. е. в этих случаях условие (2) не является необходимым для выполнения условия (1).

в) Если $k = 0$, то из неравенства (1) следует, что $x > 1$, а это противоречит неравенству (2).

5. Итак, $k > 0$. Так как $D = 1 - 4k(1 - k) = (1 - 2k)^2 \geqslant 0$ при любых k, то решения неравенства (1) заключены между корнями квадратного трехчлена.

6. В результате приходим к следующим выводам:

а) чтобы выполнялись требования задачи, нужно, чтобы корни квадратного трехчлена принадлежали отрезку [0; 1] (см. решение задачи 11);

б) последнее означает, что должны выполняться требования следствия 1 из п. 2.

7. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} k > 0, \\ D = (1 - 2k)^2 > 0, \\ 0 < \dfrac{1}{2k} < 1, \\ f(0) = 1 - k \geqslant 0, \\ f(1) = k - 1 + 1 - k \geqslant 0, \end{cases}$$

откуда находим $\frac{1}{2} < k \leqslant 1$.

8. *Ответ*: $k \in \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить уравнение

$$(k-1)x^2-(2k-1)x+k+5=0.$$

Исследовать знаки корней в зависимости от k.

2. Установить, при каких значениях параметра k уравнение:

а) $(k-2)x^2+(2k-3)x+k^2-3k+2=0$ имеет два корня, один из которых меньше (-1), а другой больше (-1);

б) $x^2+(2k-1)x+k^2-6k+8=0$ имеет корни разных знаков;

в) $kx^2-(3k+2)x+2(k+1)=0$ имеет корень, больший, чем 1.

3. Установить, при каких значениях параметра k корни уравнения:

а) $(k-1)x^2-2(k+2)x+k+13=0$ больше 2;

б) $x^2-4kx+3=0$ положительны;

в) $kx^2-2(k-1)x+3k-2=0$ отрицательны;

г) $x^2+2x+k=0$ больше k;

д) $(k+2)x^2+(k-1)x-k=0$ удовлетворяют условиям $x_1<1$, $x_2>3$;

е) $x^2-(2k-2)x+k^2-2k-3=0$ удовлетворяют условиям $-3<x_1<-1$, $1<x_2<3$;

ж) $x^2-(3k-2)x+2k^2-k-3=0$ находятся между корнями уравнения $x^2-(5k-1)x+6k^2-k-2=0$.

4. При каких k любое решение уравнения $(k-1)x^2-2(k+1)x+k-3=0$ удовлетворяет условиям $-1<x<5$?

5. При каких k только один корень уравнения $x^2+kx+4=0$ удовлетворяет условиям $-3<x<-1$?

6. Найти все значения параметра a, при которых заданное уравнение имеет решение на указанном интервале:

а) $x^2+2ax+7a-12=0$; $(-\infty;\ 0)$;

б) $x^2-2ax+8a-15=0$; $(1;\ +\infty)$;

в) $x^2+2ax+6a-8=0$; $(-\infty;\ -1)$.

7. Найти все значения k, при которых квадратный трехчлен $x^2+(2k-15)x+7k-k^2$ отрицателен для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $1<x<2$.

8. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2-(a+5)x-6a+35=0$ имеет два различных корня, причем меньший из них принадлежит отрезку $[-1;\ 8]$.

9. При каких значениях параметра a все решения неравенства $(a - 1)x^2 + 4ax + 3a > 0$ являются также решениями неравенства $x^2 - 2x - 3 < 0$?

10. Дано неравенство $x^2 - (3a + 1)x + a > 0$. Требуется установить, при каких значениях a:

а) это неравенство выполняется для всех $x > 1$;

б) из этого неравенства следует неравенство $x > 1$.

Ответы

1. Если $k < 1$ или $1 < k < \frac{21}{20}$, то $x_{1,\,2} = \frac{2k - 1 \pm \sqrt{21 - 20k}}{2(k - 1)}$; если $k = 1$, то $x = 6$; если $k = \frac{21}{20}$, то $x = 11$; если $k > \frac{21}{20}$, то корней нет; $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ при $k < -5$ или $1 < k < \frac{21}{20}$; $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ при $-5 < k < 1$. **2.** а) $k \in (-\infty;\ 1) \cup (2;\ 3)$; б) $k \in (2;\ 4)$; в) $k \in (-\infty;\ -2) \cup (0;\ +\infty)$. **3.** а) $k \in \left(1;\ \frac{17}{8}\right)$; б) $k \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ +\infty\right)$; в) $k \in \left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; г) $k \in (-\infty;\ -3)$; д) $k \in \left(-2;\ -\frac{15}{11}\right)$; е) $k \in (0;\ 2)$; ж) $k \in \varnothing$. **4.** $k \in \left(\frac{19}{8};\ +\infty\right) \cup \{1\}$. **5.** $k \in \left(\frac{13}{3};\ 5\right) \cup \{4\}$. **6.** а) $a \in (\frac{12}{7};\ 3] \cup [4;\ +\infty)$; б) $a \in (\frac{7}{3};\ 3] \cup [5;\ +\infty)$; в) $a \in (\frac{7}{4};\ 2] \cup [4;\ +\infty)$. **7.** $k \in (-\infty;\ 2) \cup \left(\frac{11 + \sqrt{17}}{2};\ +\infty\right)$. **8.** $a \in (0;\ 0{,}1] \cup (5;\ 10]$. **9.** $a \in (-\infty;\ -3]$. **10.** а) $a \in (-\infty;\ 0)$; б) $a \in \varnothing$.

Тема 9

1. Числовая последовательность
2. Арифметическая прогрессия
3. Геометрическая прогрессия
4. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Числовая последовательность

1°. ***Бесконечной числовой последовательностью*** называют функцию, определенную на множестве натуральных чисел.

2°. Числовую последовательность принято обозначать (x_n), где $n \in N$.

3°. Последовательность (x_n) называют ***ограниченной***, если существуют два числа m и M такие, что для любого $n \in N$ справедливы неравенства $m \leqslant x_n \leqslant M$.

4°. Последовательность (x_n) называют ***возрастающей***, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т. е. если $x_{n+1} > x_n$ для всех натуральных n.

5°. Последовательность (x_n) называют ***убывающей***, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т. е. если $x_{n+1} < x_n$ для всех натуральных n.

2. Арифметическая прогрессия

1°. Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом, называют ***арифметической прогрессией***. Обозначение: $\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$.

2°. Из определения арифметической прогрессии следует, что разность между любым ее членом и ему предшествующим равна одному и тому же числу, т. е. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots$. Это число называют ***разностью*** арифметической прогрессии и обозначают буквой d.

3°. Для того чтобы задать арифметическую прогрессию (a_n), достаточно знать ее первый член a_1 и разность d.

4°. Арифметическая прогрессия является:

а) возрастающей, если ее разность — положительное число;

б) убывающей, если ее разность — отрицательное число;

в) постоянной (все ее члены равны между собой), если ее разность равна нулю.

5°. **Характеристическое свойство арифметической прогрессии.** Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда любой ее член, начиная со второго, есть среднее арифметическое предшествующего и последующего членов, т. е.

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}. \quad (1)$$

6°. Формула n-го члена арифметической прогрессии имеет вид

$$a_n = a_1 + d(n - 1). \quad (2)$$

7°. Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии имеет вид

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \quad (3)$$

или

$$S_n = \frac{2a + d(n-1)}{2} n. \quad (4)$$

8°. Из определения разности арифметической прогрессии следует, что $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots$, т. е. сумма членов, равноотстоящих от концов прогрессии, есть величина постоянная.

3. Геометрическая прогрессия

1°. Числовую последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число, называют ***геометрической прогрессией***. Обозначение: $\div\!\!\div\, b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$.

2°. Из определения геометрической прогрессии следует, что отношение любого ее члена к предшествующему равно одному и тому же числу, т. е. $b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = \ldots = b_n : b_{n-1} = \ldots$. Это число называют ***знаменателем*** геометрической прогрессии и обозначают буквой q.

3°. Для того чтобы задать геометрическую прогрессию (b_n), достаточно знать ее первый член b_1 и знаменатель q. Например, условиями $b_1 = 4$, $q = -3$ $(q < 0)$ задается геометрическая прогрессия $4, -12, 36, -108\ldots$. Эта прогрессия не является ни возрастающей, ни убывающей последовательностью.

4°. Если $q > 0$ $(q \neq 1)$, то прогрессия является монотонной последовательностью. Пусть, например, $b_1 = -2$, $q = 3$; тогда геометрическая прогрессия $-2, -6, -18, \ldots$ есть монотонно убывающая последовательность.

5°. **Характеристическое свойство геометрической прогрессии.** Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, есть среднее геометрическое соседних с ним членов, т. е.

$$b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}. \qquad (1)$$

6°. Формула n-го члена геометрической прогрессии имеет вид

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}, \text{ где } n \in \boldsymbol{N}. \qquad (2)$$

7°. Формула суммы n первых членов геометрической прогрессии имеет вид

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1} \quad (q \neq 1) \qquad (3)$$

или

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad (q \neq 1). \qquad (4)$$

8°. Из определения знаменателя геометрической прогрессии следует, что $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots$, т. е. произведение членов, равноотстоящих от концов прогрессии, есть величина постоянная.

4. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при $|q| < 1$

1°. Пусть (x_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q, где $|q| < 1$ и $x_1 \neq 0$. Тогда ***суммой*** бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой удовлетворяет условию $|q| < 1$, называется предел суммы n первых ее членов при $n \to \infty$.

$2°$. Обозначим сумму бесконечной геометрической прогрессии через S. Тогда справедлива формула $S = \frac{x_1}{1-q}$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа $5^{1+x} + 5^{1-x}$, $\frac{a}{2}$, $25^x + 25^{-x}$, взятые в указанном порядке, составляют арифметическую прогрессию?

1. Положим $y = 5^x + 5^{-x}$. Тогда $25^x + 25^{-x} = (5^x + 5^{-x})^2 - 2 = y^2 - 2$.

2. Так как заданные числа должны составлять арифметическую прогрессию, то, согласно ее характеристическому свойству, имеем

$$\frac{a}{2} = \frac{y^2 + 5y - 2}{2},$$

т. е.

$$y^2 + 5y - a - 2 = 0, \qquad (1)$$

откуда $a = y^2 + 5y - 2$.

3. Заметим, что при любом x значение $y \geqslant 2$, откуда следует, что $a \geqslant 12$.

4. С другой стороны, дискриминант уравнения (1) должен быть неотрицательным, т. е. $D = 25 + 4(a + 2) \geqslant 0$, или $a \geqslant -\frac{33}{4}$.

5. Из неравенств $a \geqslant 12$ и $a \geqslant -\frac{33}{4}$ следует, что $a \geqslant 12$.

6. *Ответ*: $a \in [12; +\infty)$.

2. При каких значениях параметра a корни уравнения

$$x^3 + ax^2 + 14x + 8 = 0 \qquad (1)$$

составляют геометрическую прогрессию?

1. Пусть x_0, x_0q, x_0q^2 — корни уравнения (1), составляющие геометрическую прогрессию, где q — знаменатель прогрессии.

2. Тогда

$$x^3 + ax^2 + 14x + 8 = (x - x_0)(x - x_0q)(x - x_0q^2). \qquad (2)$$

3. Раскрывая скобки в правой части равенства (2), приводя подобные члены и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим систему

$$\begin{cases} x_0 + x_0q + x_0q^2 = -a, \\ x_0^2 q + x_0^2 q^2 + x_0^2 q^3 = 14, \\ x_0^3 q^3 = -8. \end{cases}$$

4. Из первых двух уравнений этой системы следует, что $ax_0q = -14$. Из третьего уравнения вытекает равенство $(ax_0q)^3 = -8a^3$. Таким образом, $a^3 = 7^3$, т. е. $a = 7$.

5. *Ответ*: $a = 7$.

3. Найти все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$x(x - 2) \leqslant (a + 1)(|x - 1| - 1) \qquad (1)$$

содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 1,7.

1. Преобразуем неравенство (1) следующим образом:

$$x^2 - 2x - (a + 1)|x - 1| + a + 1 \leqslant 0;$$
$$x^2 - 2x + 1 - (a + 1)|x - 1| + a \leqslant 0;$$
$$|x - 1|^2 - (a + 1)|x - 1| + a \leqslant 0;$$
$$(|x - 1| - 1)(|x - 1| - a) \leqslant 0. \qquad (2)$$

2. Левая часть неравенства (2) представляет собой квадратный трехчлен $(t - 1)(t - a)$ относительно переменной $t = |x - 1|$. Корни этого трехчлена равны 1 и a, причем ветви соответствующей ему параболы направлены вверх.

3. Так как по условию $x = 1{,}7$ есть решение неравенства (1), то

$$1{,}7(-0{,}3) \leqslant (a + 1)(-0{,}3), \text{ или } 1{,}7 \geqslant a + 1, \text{ т. е. } a \leqslant 0{,}7.$$

Поэтому неравенство (2) равносильно следующему:

$$a \leqslant |x - 1| \leqslant 1. \qquad (3)$$

4. Пусть $a \leqslant 0$. Тогда неравенство $a \leqslant |x - 1|$ верно при всех x. Далее, неравенство $|x - 1| \leqslant 1$ равносильно неравенству $-1 \leqslant x - 1 \leqslant 1$, т. е. оно выполняется для всех x из отрезка $[0; 2]$. Этот отрезок содержит все члены любой геометрической прогрессии с первым членом, равным 1,7, и знаменателем $q \in (0; 1)$. Таким образом, значения $a \leqslant 0$ удовлетворяют требованию задачи.

5. Пусть $0 < a \leqslant 0{,}7$. В этом случае неравенство (3) равносильно системе

$$\begin{cases} |x - 1| \leqslant 1, \\ |x - 1| \geqslant a, \end{cases}$$

решением которой является множество x таких, что $x \in [0; 1 - a] \cup \cup [1 + a; 2]$. Поскольку $1 + a \leqslant 1{,}7$, отрезок $[1 + a; 2]$ содержит число 1,7, т. е. первый член прогрессии. При этом знаменатель $q > 0$ прогрессии всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось неравенство $1{,}7q \leqslant 1 - a$ (например, взять $q = 0{,}1$). Тогда все члены такой бесконечно убывающей геометрической прогрессии, начиная со второго, будут принадлежать отрезку $[0; 1 - a]$. Следовательно, рассматриваемые значения a также удовлетворяют требованию задачи.

6. *Ответ*: $a \in (-\infty; 0{,}7]$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 3x + a = 0$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 - 12x + b = 0$. Известно, что числа x_1, x_2, x_3, x_4 (взятые в указанном порядке) образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Найти a и b.

2. При каких значениях параметра a уравнение $x^3 + 3x^2 - 6x + a = 0$ имеет три различных корня, составляющих геометрическую прогрессию? Найти эти корни.

3. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 + 6x^2 + 11x + a = 0$ составляют арифметическую прогрессию? Найти эти корни.

4. При каких значениях a существуют такие x, что числа $4^{1+x} + 4^{1-x}$, a, $16^x + 16^{-x}$, взятые в указанном порядке, составят арифметическую прогрессию?

5. Произведение 2-го и 12-го членов арифметической прогрессии равно 1, а произведение 4-го и 10-го членов равно a. Найти 7-й член прогрессии.

6. Сумма квадратов 4-го и 10-го членов арифметической прогрессии равна p, а сумма квадратов 5-го и 9-го членов равна 1. Найти произведение 2-го и 12-го членов прогрессии.

Ответы

1. $a = 2$, $b = 32$. **2.** $a = -8$; $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -4$. **3.** $a = 6$; $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = -3$. **4.** $a \in [5; +\infty)$. **5.** $\pm\frac{\sqrt{25a-9}}{4}$, $a \in (1; +\infty)$. **6.** $\frac{34-29p}{10}$, $p \in [1; 2{,}25]$.

Тема 10

1. Градусное и радианное измерение угловых величин
2. Тригонометрические функции числового аргумента
3. Основные тригонометрические тождества
4. Формулы приведения
5. Формулы сложения
6. Формулы двойного аргумента
7. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму
8. Формулы суммы и разности одноименных тригонометрический функций
9. Тригонометрические функции половинного аргумента
10. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

Темы 10 и 11 не содержат задач, а включают только справочный материал, в котором рассматриваются важнейшие тригонометрические формулы, а также определения и свойства тригонометрических и обратных тригонометрических функций. Однако наличие этого материала необходимо для последующего решения тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами.

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Градусное и радианное измерение угловых величин

1°. Фигуру, состоящую из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости, называют ***углом***.

2°. Отметим на оси Ox справа от начала координат точку A и проведем через нее окружность с центром в точке O (рис. 55). Радиус OA называют ***начальным радиусом***.

3°. Условимся считать угол поворота:

а) отрицательным, если начальный радиус повернут около точки O по часовой стрелке;

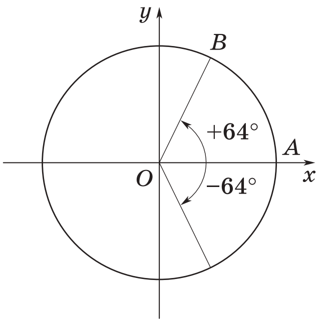


Рис. 55

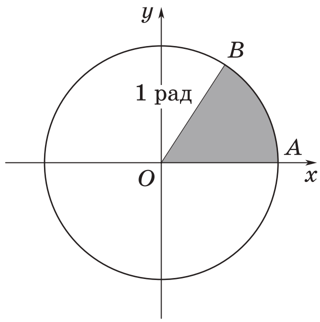


Рис. 56

б) положительным, если начальный радиус повернут около точки O против часовой стрелки.

4°. За единицу измерения углов и дуг принимают соответственно угол в 1 градус и дугу в 1 градус (обозначают 1°).

5°. Рассматривают еще одну единицу измерения величины угла — 1 радиан.

6°. Угол в 1 радиан есть центральный угол, опирающийся на такую дугу окружности, длина которой равна радиусу этой окружности (рис. 56).

7°. Если начальный радиус совершит один полный оборот, то получится угол, равный 360° или 2π радианам.

8°. Радианная мера 1° равна $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$.

2. Тригонометрические функции числового аргумента

1°. Рассмотрим единичную окружность, т. е. окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1 (рис. 57).

2°. На единичной окружности отметим точку $P_0(1;\ 0)$. При повороте начального радиуса около центра O на угол α радианов точка $P_0(1;\ 0)$ перейдет в некоторую точку P_α. Обозначим координаты этой точки x_α и y_α.

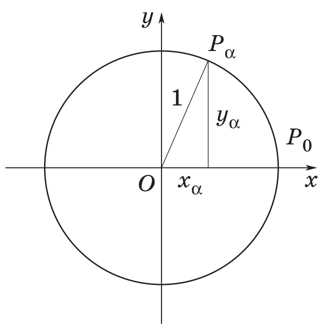


Рис. 57

3°. Определения:

а) ***синусом*** угла α называют отношение ординаты точки P_α к радиусу; таким образом, $\sin\alpha = \dfrac{y_\alpha}{R} = y_\alpha$ (рис. 57);

б) ***косинусом*** угла α называют отношение абсциссы точки P_α к радиусу; таким образом, $\cos\alpha = \dfrac{x_\alpha}{R} = x_\alpha$ (рис. 57).

4°. Каждому углу α соответствует единственная точка $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$ и, следовательно, единственные значения синуса и косинуса этого числа. Поэтому $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ являются функциями числового аргумента.

5°. Основное соотношение между $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выражается формулой

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

откуда следует, что

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha},$$

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

6°. Определения:

а) ***тангенсом*** числа α называют отношение ординаты точки P_α к ее абсциссе (рис. 57); таким образом, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y_\alpha}{x_\alpha}$, причем $\operatorname{tg}\alpha$ определен, если $\cos\alpha \neq 0$;

б) ***котангенсом*** числа α называют отношение абсциссы точки P_α к ее ординате (рис. 57); таким образом, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x_\alpha}{y_\alpha}$, причем $\operatorname{ctg}\alpha$ определен, если $\sin\alpha \neq 0$;

в) ***секансом*** числа α называют величину, обратную $\cos\alpha$, т. е. $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha \neq 0$;

г) ***косекансом*** числа α называют величину, обратную $\sin\alpha$, т. е. $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha \neq 0$.

7°. Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$ и $y = \operatorname{cosec} x$ называют ***тригонометрическими функциями***.

3. Основные тригонометрические тождества

Ранее были рассмотрены тождества:

1°. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,\ \alpha \in \boldsymbol{R}.$ (1)

2°. $\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}\,.$ (2)

3°. $\cos \alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}\,.$ (3)

4°. $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k.$ (4)

5°. $\operatorname{ctg} \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\sin \alpha},\ \alpha \neq \pi k.$ (5)

6°. $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha},\ \alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k.$ (6)

7°. $\operatorname{cosec} \alpha = \dfrac{1}{\sin \alpha},\ \alpha \neq \pi k.$ (7)

Добавим к ним следующие:

8°. Из формул (4) и (5) следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{\pi k}{2}. \quad (8)$$

9°. Из формулы (8) следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi k}{2}; \quad (9)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi k}{2}. \quad (10)$$

10°. Разделив обе части равенства (1) на $\cos^2 \alpha$, получим

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k. \quad (11)$$

11°. Разделив обе части равенства (1) на $\sin^2 \alpha$, получим

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha},\ \alpha \neq \pi k. \quad (12)$$

4. Формулы приведения

1°. ***Формулами приведения*** называют соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ выражаются через значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.

2°. Приведем **правила**:

а) при переходе от функций углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ к функциям угла α название функции изменяют: синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот;

б) при переходе от функций углов $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ к функциям угла α название функции сохраняют;

в) считая α острым углом $\left(\text{т. е. } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, перед функцией угла α ставят такой знак, какой имеет приводимая функция углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$.

5. Формулы сложения

1°. Формулы синуса суммы и разности двух аргументов:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta. \quad (1)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta. \quad (2)$$

2°. Формулы косинуса суммы и разности двух аргументов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \quad (3)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \quad (4)$$

3°. Формулы тангенса суммы и разности двух аргументов:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \quad (6)$$

З а м е ч а н и е. Формула (5) справедлива при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, а формула (6) — при $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $\alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \boldsymbol{Z})$.

4°. Формулы котангенса суммы и разности двух аргументов:

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha}, \quad (7)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + 1}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}. \quad (8)$$

З а м е ч а н и е. Формула (7) справедлива при $\alpha \neq \pi k$, $\beta \neq \pi k$, $\alpha + \beta \neq \pi k$, а формула (8) — при $\alpha \neq \pi k$, $\beta \neq \pi k$, $\alpha - \beta \neq \pi k$ $(k \in \boldsymbol{Z})$.

6. Формулы двойного аргумента

1°. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$ (1)

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$ (2)

$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$ (3)

2°. $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha,$ (4)

$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha.$ (5)

3°. Кроме перечисленных выше формул (1)—(5), полезно знать и формулы

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha, \tag{6}$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha, \tag{7}$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}. \tag{8}$$

7. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

1°. $\sin \alpha \sin \beta = \dfrac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2},$ (1)

2°. $\cos \alpha \cos \beta = \dfrac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2},$ (2)

3°. $\sin \alpha \cos \beta = \dfrac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2},$ (3)

4°. $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \dfrac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta},$ (4)

5°. $\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \dfrac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$ (5)

З а м е ч а н и е. Формулы (4) и (5) справедливы при $\alpha \neq \dfrac{\pi k}{2}$, $\beta \neq \dfrac{\pi k}{2}$ $(k \in \boldsymbol{Z})$. Кроме того, в формуле (4) должно быть $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta \neq 0$, а в формуле (5) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta \neq 0$.

8. Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций

1°. Формулы суммы и разности синусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{1}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{2}$$

2°. Формулы суммы и разности косинусов:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}; \tag{3}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{4}$$

3°. Формулы суммы и разности тангенсов:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\ \text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{6}$$

4°. Формулы суммы и разности котангенсов:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\ \text{где } \alpha \neq \pi k,\ \beta \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}; \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\ \text{где } \alpha \neq \pi k,\ \beta \neq \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. \tag{8}$$

9. Тригонометрические функции половинного аргумента

1°. $\sin\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$. (1)

2°. $\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$. (2)

3°. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$. (3)

4°. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$. (4)

5°. $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$. (5)

10. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

$$1^\circ.\ \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \qquad (1)$$

$$2^\circ.\ \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \qquad (2)$$

Замечание. Область определения рассматриваемых функций: $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

$$3^\circ.\ \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \qquad (3)$$

$$4^\circ.\ \operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}. \qquad (4)$$

Замечание. Формула (3) имеет смысл при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x \neq \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, а формула (4) при $x \neq \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Тема 11

1. Функция $y = \sin x$
2. Функция $y = \cos x$
3. Функция $y = \operatorname{tg} x$
4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$
5. Нахождение периодов тригонометрических функций
6. Обратная функция
7. Функция $y = \arcsin x$
8. Функция $y = \arccos x$
9. Функция $y = \operatorname{arctg} x$
10. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$
11. Некоторые соотношения для обратных тригонометрических функций

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Функция $y = \sin x$

1°. Область определения — множество всех действительных чисел.

2°. Множество значений — отрезок $[-1; 1]$, т. е. синус — функция ограниченная.

3°. Функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

4°. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т. е. $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

5°. $\sin x = 0$ при $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6°. $\sin x > 0$ при всех $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7°. $\sin x < 0$ при всех $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

8°. Функция возрастает от -1 до 1 на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

9°. Функция убывает от 1 до -1 на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

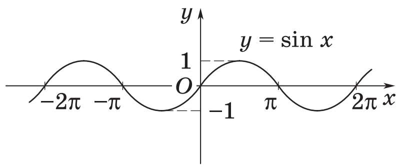


Рис. 58

10°. Функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

11°. Функция принимает наименьшее значение, равное (-1), в точках $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

12°. График функции $y = \sin x$ изображен на рис. 58.

2. Функция $y = \cos x$

1°. Область определения — множество всех действительных чисел.

2°. Множество значений — отрезок $[-1; 1]$, т. е. косинус — функция ограниченная.

3°. Функция четная: $\cos(-x) = \cos x$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

4°. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом 2π, т. е. $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

5°. $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6°. $\cos x > 0$ при всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7°. $\cos x < 0$ при всех $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

8°. Функция убывает от 1 до -1 на промежутках $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

9°. Функция возрастает от -1 до 1 на промежутках $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

10°. Функция принимает наибольшее значение, равное 1, в точках $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

11°. Функция принимает наименьшее значение, равное (-1), в точках $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

12°. График функции $y = \cos x$ изображен на рис. 59.

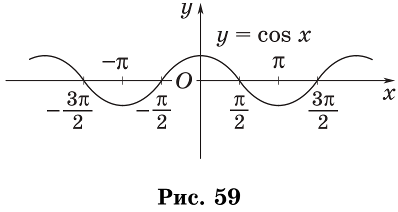


Рис. 59

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$

1°. Область определения — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2°. Множество значений — вся числовая прямая, т. е. тангенс — функция неограниченная.

3°. Функция нечетная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ при всех x из области определения.

4°. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом π, т. е. $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ при всех x из области определения.

5°. $\operatorname{tg} x = 0$ при $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6°. $\operatorname{tg} x > 0$ при всех $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7°. $\operatorname{tg} x < 0$ при всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

8°. Функция возрастает на промежутках $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

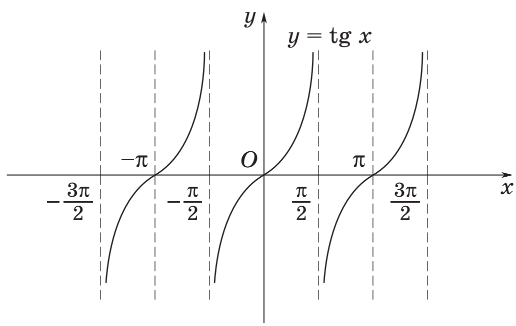


Рис. 60

9°. График функции $y = \operatorname{tg} x$ изображен на рис. 60.

4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$

1°. Область определения — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

2°. Множество значений — вся числовая прямая, т. е. котангенс — функция неограниченная.

3°. Функция нечетная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ при всех x из области определения.

4°. Функция периодическая с наименьшим положительным периодом π, т. е. $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$ при всех x из области определения.

5°. $\operatorname{ctg} x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6°. $\operatorname{ctg} x > 0$ при всех $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

7°. $\operatorname{ctg} x < 0$ при всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

8°. Функция убывает на промежутках $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

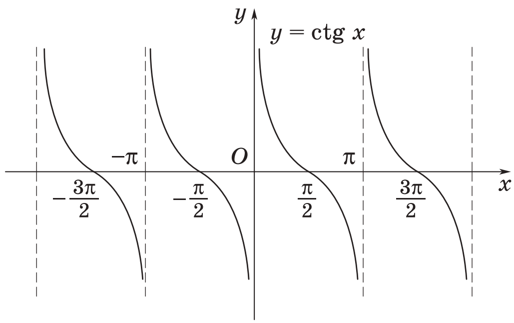


Рис. 61

9°. График функции $y = \operatorname{ctg} x$ изображен на рис. 61.

5. Нахождение периодов тригонометрических функций

1°. Период функции:
а) $y = \sin x$ равен 2π;
б) $y = \cos x$ равен 2π;
в) $y = \operatorname{tg} x$ равен π;
г) $y = \operatorname{ctg} x$ равен π.

2°. Период функции, представляющей собой сумму непрерывных и периодических функций, равен наименьшему кратному периодов слагаемых, если оно существует.

6. Обратная функция

1°. Пусть функция $y = f(x)$ монотонна в своей области определения $D(f)$. Тогда каждому значению $x \in D(f)$ соответствует единственное значение $y \in E(f)$ и обратно, каждое значение $y \in E(f)$ соответствует единственному $x \in D(f)$. Значит, в этом случае можно построить новую функцию, определенную на $E(f)$ и такую, что каждому $y \in E(f)$ ставится в соответствие $x \in D(f)$, удовлетворяющее уравнению $y = f(x)$. Эту новую функцию называют ***обратной*** по отношению к функции $y = f(x)$.

2°. Для нахождения функции, обратной данной $y = f(x)$, надо выразить x через y: $x = g(y)$, а затем записать полученную функцию в общепринятой форму $y = g(x)$.

3°. Отметим, что если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ являются взаимно обратными, то область определения функции f совпадает с множеством значений функции g и, наоборот, область определения функции g — с множеством значений функции f, т. е. $D(f) = E(g)$ и $D(g) = E(f)$.

4°. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$ (рис. 62).

5°. Рассмотрим, например, функцию $y = x^2$, заданную на промежутке $(-\infty; 0]$. На этом промежутке функция убывает и принимает все значения из множества $[0; +\infty)$. Следовательно, для данной функции существует обратная. Из уравнения $y = x^2$ находим $x = \sqrt{y}$ или $x = -\sqrt{y}$; так как переменная x может принимать только неположительные значения, то искомая обратная функция имеет вид $x = -\sqrt{y}$. Поменяв обозначения x на y и y на x, получим формулу $y = -\sqrt{x}$, где $x \geqslant 0$, с помощью которой и задается обратная функция.

Если же рассматривать функцию $y = x^2$, заданную на промежутке $[0; +\infty)$, то обратной для нее служит функция $y = \sqrt{x}$, где $x \geqslant 0$. На рис. 63 изображены график функции $y = x^2$ при $x \geqslant 0$ и график обратной ей функции.

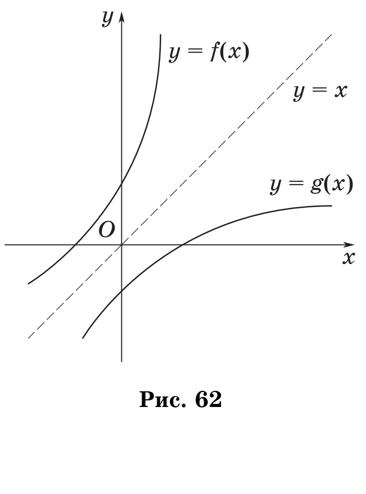


Рис. 62

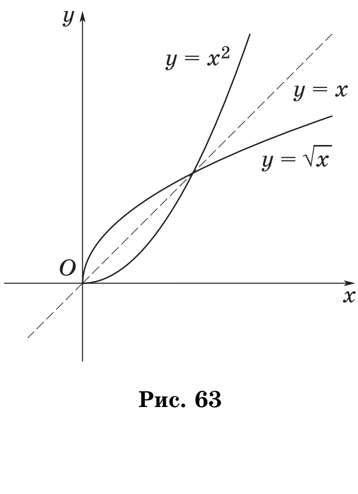


Рис. 63

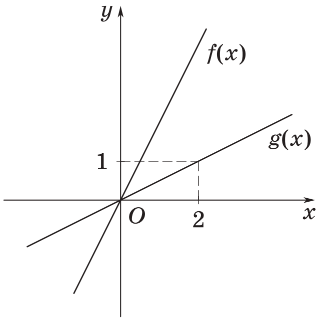


Рис. 64

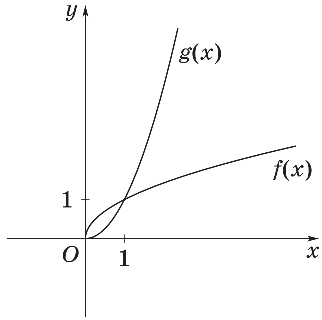


Рис. 65

6°. Приведем другие примеры взаимно обратных функций.

а) Функция $f(x) = 2x$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$ возрастает и принимает все значения из множества $(-\infty; +\infty)$. Поэтому она обратима. Графики функции $f(x) = 2x$ и обратной ей функции $g(x) = \frac{x}{2}$ изображены на рис. 64.

б) Функция $f(x) = \sqrt[4]{x}$ на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает и принимает все значения из множества $[0; +\infty)$. Значит, она обратима. Графики функции $f(x) = \sqrt[4]{x}$ и обратной ей функции $g(x) = x^4$, где $x \geqslant 0$, изображены на рис. 65.

в) Функция $f(x) = x^3 + 1$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$ возрастает и принимает все значения из множества $(-\infty; +\infty)$. Таким образом, функция $f(x)$ обратима. Графики функции $f(x) = x^3 + 1$ и обратной ей функции $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ изображены на рис. 66.

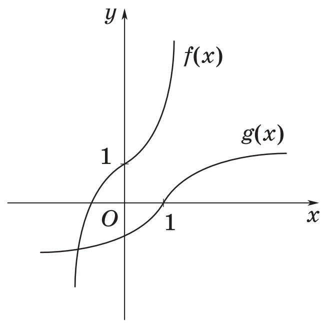
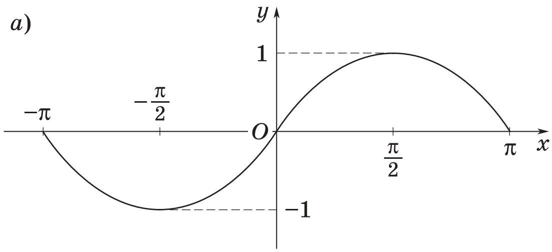


Рис. 66

7. Функция $y = \arcsin x$

1°. Функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает и принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$ (рис. 67, *а*). Поэтому функция $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ обратима, т. е. имеет обратную функ-



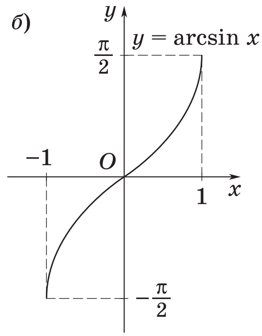


Рис. 67

цию, которую называют ***арксинусом*** и обозначают $y = \arcsin x$. Геометрически $\arcsin x$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен x.

2°. График функции $y = \arcsin x$ изображен на рис. 67, *б*. Этот график симметричен графику функции $y = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, относительно прямой $y = x$.

3°. Отметим свойства функции $y = \arcsin x$:

а) $D(\arcsin) = [-1; 1]$;

б) $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

в) функция нечетная, т. е. $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

г) функция возрастающая.

8. Функция $y = \arccos x$

1°. Функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ убывает и принимает все значения из отрезка $[-1; 1]$ (рис. 68, *а*). Поэтому функция $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которую называют ***арккосинусом*** и обозначают $y = \arccos x$. Геометрически $\arccos x$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $[0; \pi]$, косинус которого равен x.

2°. График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 68, *б*. Этот график симметричен графику функции $y = \cos x$, $x \in [0; \pi]$, относительно прямой $y = x$.

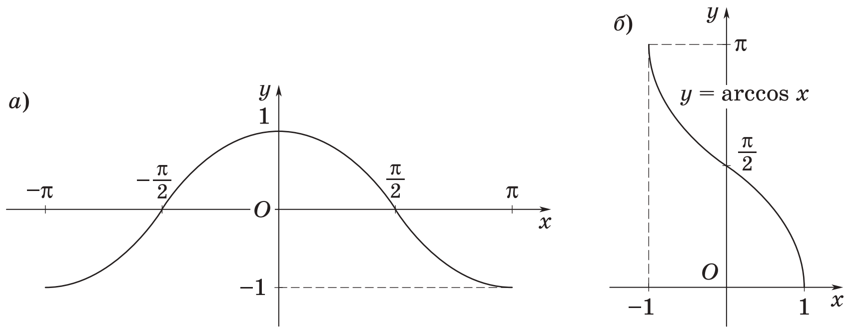


Рис. 68

3°. Отметим свойства функции $y = \arccos x$:

а) $D(\arccos) = [-1;\ 1]$;

б) $E(\arccos) = [0;\ \pi]$;

в) функция убывающая;

г) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

9. Функция $y = \operatorname{arctg} x$

1°. На промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс возрастает (рис. 69, *а*) и принимает все числовые значения, т. е. $E(\operatorname{tg}) = (-\infty;\ +\infty)$. Поэтому функция $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ обратима, т. е. имеет обратную

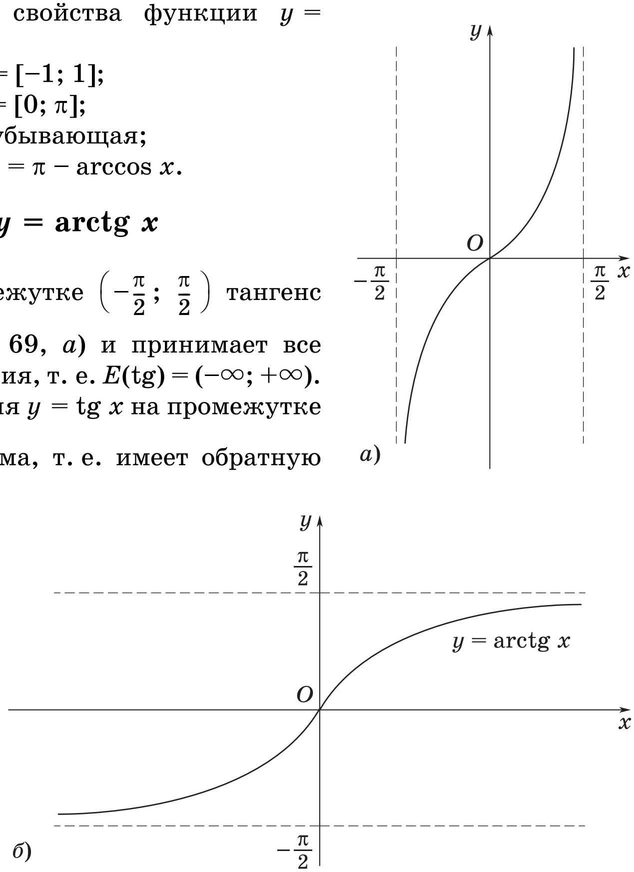


Рис. 69

функцию, которую называют ***арктангенсом*** и обозначают $y = \operatorname{arctg} x$. Геометрически $\operatorname{arctg} x$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен x.

2°. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен на рис. 69, *б*. Этот график симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, относительно прямой $y = x$.

3°. Отметим свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

а) $D(\operatorname{arctg}) = (-\infty; +\infty)$;

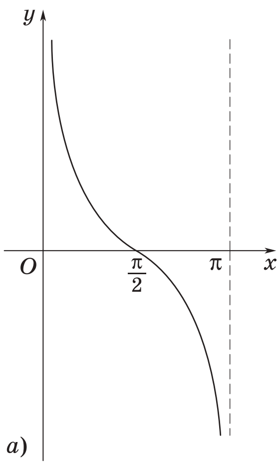
б) $E(\operatorname{arctg}) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

в) функция нечетная, т. е. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

г) функция возрастающая.

10. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$

1°. На промежутке $(0; \pi)$ котангенс убывает (рис. 70, *а*) и принимает все числовые значения, т. е. $E(\operatorname{ctg}) = (-\infty; +\infty)$. Поэтому функция $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $(0; \pi)$ обратима, т. е. имеет обратную функцию, которую называют ***арккотангенсом*** и обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$. Геометрически $\operatorname{arcctg} x$ означает величину угла (дуги), заключенного в промежутке $(0; \pi)$, котангенс которого равен x.



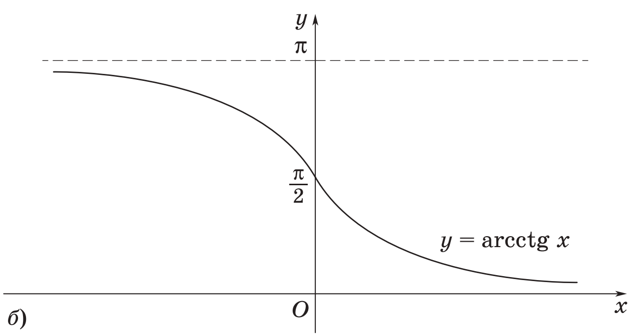


Рис. 70

2°. График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 70, *б*. Этот график симметричен графику функции $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0; \pi)$, относительно прямой $y = x$.

3°. Отметим свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$:

а) $D(\operatorname{arcctg}) = (-\infty; +\infty)$;

б) $E(\operatorname{arcctg}) = (0; \pi)$;

в) функция убывающая;

г) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

11. Некоторые соотношения для обратных тригонометрических функций

1°. Записи $y = \arcsin x$ и $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, равносильны. Следовательно, для любого x, взятого на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$, имеем

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}; \tag{1}$$

$$\sin(\arcsin x) = x. \tag{2}$$

2°. Записи $y = \arccos x$ и $x = \cos y$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$, равносильны. Поэтому для любого x такого, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$, имеем

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi; \tag{3}$$

$$\cos(\arccos x) = x. \tag{4}$$

3°. Записи $y = \operatorname{arctg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, равносильны. Значит, для любого x такого, что $-\infty < x < +\infty$, имеем

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}; \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x. \tag{6}$$

4°. Записи $y = \operatorname{arcctg} x$ и $x = \operatorname{ctg} y$, $0 < y < \pi$, равносильны. Таким образом, для любого x такого, что $-\infty < x < +\infty$, имеем

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi; \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x. \tag{8}$$

5°. Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ называют ***обратными тригонометрическими функциями*** (или ***аркфункциями***).

6°. Приведем еще некоторые формулы, позволяющие находить значения тригонометрических функций от аркфункций.

Например, вычислим $\cos(\arcsin x)$. Положим $\arcsin x = y$. Тогда $\sin y = x$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$; нам нужно найти $\cos y$.

а) Известно, что $\cos y = \pm\sqrt{1 - \sin^2 y}$.

б) Значит, $\cos y = \pm\sqrt{1 - x^2}$.

в) Но $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, а на этом отрезке косинус принимает неотрицательные значения.

г) Таким образом, $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$, т. е.

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \text{ где } -1 \leqslant x \leqslant 1. \qquad (9)$$

7°. Выведем еще одну формулу. Так как $\operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y}$, то из формул (2) и (9) следует, что

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ где } -1 < x < 1. \qquad (10)$$

8°. Аналогично получаются следующие формулы:

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \text{ где } -1 \leqslant x \leqslant 1;\ x \neq 0; \qquad (11)$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \text{ где } -1 \leqslant x \leqslant 1; \qquad (12)$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}, \text{ где } -1 \leqslant x \leqslant 1;\ x \neq 0; \qquad (13)$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \text{ где } -1 < x < 1. \qquad (14)$$

9°. Справедливы тождества:

а) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, $x \in [-1; 1]$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, $x \in \boldsymbol{R}$.

Тема 12

1. Решение тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$
2. Решение тригонометрических уравнений вида $\cos x = a$
3. Решение тригонометрических уравнений вида $\operatorname{tg} x = a$
4. Решение однородных тригонометрических уравнений
5. Решение систем тригонометрических уравнений

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Решение тригонометрических уравнений вида $\sin x = a$

1°. Формула для корней уравнения $\sin x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, имеет вид

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2°. Частные случаи:

а) $\sin x = 0$, $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3°. Формула для корней уравнения $\sin^2 x = a$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$, имеет вид

$$x = \pm\arcsin \sqrt{a} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2. Решение тригонометрических уравнений вида $\cos x = a$

1°. Формула для корней уравнения $\cos x = a$, где $-1 \leqslant a \leqslant 1$, имеет вид

$$x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2°. Частные случаи:

а) $\cos x = 1$, $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3°. Формула для корней уравнения $\cos^2 x = a$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$, имеет вид

$$x = \pm\arccos \sqrt{a} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

3. Решение тригонометрических уравнений вида $\operatorname{tg} x = a$

1°. Формула для корней уравнения $\operatorname{tg} x = a$ имеет вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

2°. Частные случаи:

а) $\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

б) $\operatorname{tg} x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

в) $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3°. Формула для корней уравнения $\operatorname{tg}^2 x = a$, где $a \in [0; +\infty)$, имеет вид

$$x = \pm\operatorname{arctg} \sqrt{a} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

4. Решение однородных тригонометрических уравнений

1°. Уравнение вида

$$a \sin x + b \cos x = 0 \ (a \neq 0,\ b \neq 0)$$

называют ***однородным уравнением первой степени*** относительно $\sin x$ и $\cos x$. Оно решается делением обеих его частей на $\cos x \neq 0$. В результате получается уравнение вида $a\operatorname{tg} x + b = 0$.

2°. Уравнение вида

$$a \sin^2 f(x) + b \sin f(x) \cdot \cos f(x) + c \cos^2 f(x) = 0 \qquad (1)$$

называют ***однородным уравнением второй степени*** относительно $\sin f(x)$ и $\cos f(x)$, если все три коэффициента a, b, c или какие-либо два из них отличны от нуля. Считая, что $a \neq 0$, разделим обе части уравнения на $\cos^2 f(x) \neq 0$; тогда получим

$$a \operatorname{tg}^2 f(x) + b \operatorname{tg} f(x) + c = 0. \qquad (2)$$

3°. Уравнение (2) равносильно уравнению (1), так как корни уравнения $\cos^2 f(x) = 0$ не являются корнями уравнения (1).

4°. Однако если $a = 0$, то уравнение (1) примет вид

$$b \sin f(x) \cdot \cos f(x) + c \cos^2 f(x) = 0.$$

Полученное уравнение решают разложением его левой части на множители:

$$\cos f(x)(b \sin f(x) + c \cos f(x)) = 0.$$

5. Решение систем тригонометрических уравнений

1°. При решении систем тригонометрических уравнений последние сводят либо к одному уравнению с одним неизвестным, либо к системе уравнений относительно самих аргументов или функций этих аргументов.

2°. Рассмотрим лишь некоторые типы систем тригонометрических уравнений и наиболее употребляемые методы их решения.

3°. Решим систему вида

$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = b. \end{cases} \tag{1}$$

а) Складывая и вычитая уравнения системы (1), получаем равносильную систему

$$\begin{cases} \cos (x - y) = a + b, \\ \cos (x + y) = b - a. \end{cases} \tag{2}$$

б) Система (2), а значит, и система (1) имеют решения тогда и только тогда, когда выполняются условия $-1 \leqslant a + b \leqslant 1$ и $-1 \leqslant b - a \leqslant 1$.

Если эти условия выполнены, то

$$\begin{aligned} x - y &= \pm\arccos (a + b) + 2\pi k, \\ x + y &= \pm\arccos (b - a) + 2\pi n, \end{aligned} \tag{3}$$

где k и n — любые целые числа, а знаки выбираются произвольно.

в) Пусть $\arccos (a + b) = \alpha$, $\arccos (b - a) = \beta$. Таким образом, формулы (3) определяют четыре серии решений:

$$\begin{cases} x - y = \alpha + 2\pi k, \\ x + y = \beta + 2\pi n; \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} x - y = -\alpha + 2\pi k, \\ x + y = \beta + 2\pi n; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} x - y = \alpha + 2\pi k, \\ x + y = -\beta + 2\pi n; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} x - y = -\alpha + 2\pi k, \\ x + y = -\beta + 2\pi n. \end{cases} \tag{7}$$

г) Решив эти системы, находим:

$$\begin{cases} x = 0{,}5(\alpha + \beta) + \pi(k + n), \\ y = 0{,}5(\beta - \alpha) + \pi(n - k); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0{,}5(\beta - \alpha) + \pi(k + n), \\ y = 0{,}5(\alpha + \beta) + \pi(n - k); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0{,}5(\alpha - \beta) + \pi(k + n), \\ y = -0{,}5(\alpha + \beta) + \pi(n - k); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -0{,}5(\alpha + \beta) + \pi(k + n), \\ y = 0{,}5(\alpha - \beta) + \pi(n - k). \end{cases}$$

4°. Аналогично решается система вида

$$\begin{cases} \sin x \cos y = a, \\ \cos x \sin y = b. \end{cases}$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. При каких значениях a уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0 \qquad (1)$$

имеет решение?

1. Преобразуем уравнение (1) следующим образом:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin 2x + a = 0,$$

или

$$1 - \sin 2x \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \sin 2x + a = 0. \qquad (2)$$

2. Пусть $\sin 2x = y$, где $|y| \leqslant 1$. Тогда после этой замены уравнение (2) примет вид

$$y^2 - 2y - 2 - 2a = 0. \qquad (3)$$

3. Найдем корни уравнения (3):

$$y = 1 \pm \sqrt{3 + 2a}\,, \text{ где } a \geqslant -\frac{3}{2}\,.$$

4. Решим совокупность двух систем неравенств:

а) $\begin{cases} -1 \leqslant 1 + \sqrt{3 + 2a} \leqslant 1, \\ a \geqslant -\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ откуда $a = -\dfrac{3}{2}$;

б) $\begin{cases} -1 \leqslant 1 - \sqrt{3 + 2a} \leqslant 1, \\ a \geqslant -\dfrac{3}{2}, \end{cases}$ откуда $-\dfrac{3}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$.

5. *Ответ*: $a \in \left[-\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{2}\right]$.

2. Выяснить, при каких значениях параметра a уравнение

$$a^2 - 2a + \sec^2 \pi(a + x) = 0 \tag{1}$$

имеет решения, и найти эти решения.

1. Уравнение (1) равносильно следующему:

$$\frac{1}{\cos^2 \pi(a + x)} = 2a - a^2. \tag{2}$$

2. Для того чтобы уравнение (2) имело решение, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$2a - a^2 \geqslant 1$$

(так как $0 \leqslant \cos^2 \pi(a + x) \leqslant 1$).

3. Тогда

$$a^2 - 2a + 1 \leqslant 0, \text{ или } (a - 1)^2 \leqslant 0. \tag{3}$$

4. Неравенство (3) верно только при $a = 1$.

5. Если $a = 1$, то находим

$$\cos^2 \pi x = 1,\ \pi x = \pi k,\ x = k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

6. *Ответ*: при $a = 1$; $x = k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$\sin^2 x + 4 \sin x - a = 0. \tag{1}$$

1. Решим данное уравнение как квадратное относительно синуса, введя ограничение $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

2. Уравнение (1) сводится к совокупности двух уравнений:

$$\sin x = -2 - \sqrt{4 + a}\,; \tag{2}$$

$$\sin x = -2 + \sqrt{4 + a}\,. \tag{3}$$

3. Уравнение (2) не имеет решений ни при каких a, так как $-2 - \sqrt{4 + a} \leqslant -2$ (по определению арифметического корня).

4. Для уравнения (3) должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} -1 \leqslant -2 + \sqrt{4 + a} \leqslant 1, \\ 4 + a \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

5. Решив систему (4), находим $-3 \leqslant a \leqslant 5$.

6. *Ответ*: если $a \in [-3; 5]$, то

$$x = (-1)^k \arcsin(\sqrt{4 + a} - 2) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

если $a \notin [-3; 5]$, то корней нет.

4. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$\sin^2 x + a \sin x - a^2 + 1 = 0.$$

1. Решим данное уравнение как квадратное относительно синуса, используя ограничение $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

2. Пусть $\sin x = t$; тогда

$$t_1 = \frac{-a - \sqrt{5a^2 - 4}}{2},\ t_2 = \frac{-a + \sqrt{5a^2 - 4}}{2} \text{ при } |a| \geqslant \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

3. Уравнение $\sin x = t_1$ имеет решение, если выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |a| \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \\ -a - \sqrt{5a^2 - 4} \geqslant -2, \\ -a + \sqrt{5a^2 - 4} \leqslant 2. \end{cases} \tag{1}$$

Решением системы (1) являются значения $a \in \left[-2; -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup$ $\cup \left[\dfrac{2}{\sqrt{5}}; 1\right]$.

4. Уравнение $\sin x = t_2$ имеет решение, если выполняется система неравенств

$$\begin{cases} |a| \geqslant \dfrac{2}{\sqrt{5}}, \\ -a + \sqrt{5a^2 - 4} \geqslant -2, \\ -a + \sqrt{5a^2 - 4} \leqslant 2. \end{cases} \qquad (2)$$

Решением системы (2) являются значения $a \in \left[-1; -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup$ $\cup \left[\dfrac{2}{\sqrt{5}}; 2\right]$.

5. *Ответ*: если $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$, то корней нет;
если $a \in [-2; -1]$, то

$$x = (-1)^{n+1} \arcsin \frac{a + \sqrt{5a^2 - 4}}{2} + \pi n;$$

если $a \in \left(-1; -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\dfrac{2}{\sqrt{5}}; 1\right)$, то

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{-a \pm \sqrt{5a^2 - 4}}{2} + \pi n;$$

если $a \in [1; 2]$, то

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{-a + \sqrt{5a^2 - 4}}{2} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

5. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$\sin(x - a) - \sin x = \sin a. \qquad (1)$$

1. Перенесем все члены уравнения (1) в левую часть и воспользуемся формулой разности синусов, а также формулой синуса двойного угла. Тогда получим

$$\sin(x - a) - \sin x - \sin a = 0;$$

$$-2 \sin \frac{a}{2} \cos\left(x - \frac{a}{2}\right) - 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = 0.$$

2. Вынесем общий множитель за скобки:

$$\sin \frac{a}{2} \left(\cos\left(x - \frac{a}{2}\right) + \cos \frac{a}{2}\right) = 0,$$

откуда, применяя формулу суммы косинусов, имеем

$$\sin \frac{a}{2} \cos \frac{x}{2} \cos \left(\frac{x}{2} - \frac{a}{2} \right) = 0. \qquad (2)$$

3. Рассмотрим по отдельности каждый множитель в уравнении (2):

а) $\sin \frac{a}{2} = 0$, т. е. $a = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. В этом случае уравнение (1) удовлетворяется при любом $x \in \boldsymbol{R}$;

б) $\cos \frac{x}{2} = 0$, т. е. $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (независимо от значения параметра a);

в) $\cos \left(\frac{x}{2} - \frac{a}{2} \right) = 0$, т. е. $x = \pi + a + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. *Ответ*: если $a = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $x \in \boldsymbol{R}$;
если $a \neq 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то
$x = \pi + 2\pi k$ и $x = \pi + a + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

6. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$\sin 3x - a \sin x = 0. \qquad (1)$$

1. Выразим $\sin 3x$ через $\sin x$, используя формулу $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x - a \sin x = 0,$$

или

$$\sin x \, (4 \sin^2 x - (3 - a)) = 0. \qquad (2)$$

2. Решим уравнение (2):

а) $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, это равенство не зависит от a, т. е. $a \in \boldsymbol{R}$.

б) $4 \sin^2 x - (3 - a) = 0$. С помощью формулы $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$ приведем это уравнение к виду $\cos 2x = \frac{a - 1}{2}$, более удобному для анализа $\left(\text{чем уравнение } \sin x = \pm\frac{\sqrt{3 - a}}{2} \right)$.

в) Уравнение $\cos 2x = \frac{a - 1}{2}$ имеет решение, если $-1 \leqslant \frac{a - 1}{2} \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant a \leqslant 3$. При этом

$$x = \pm\frac{1}{2} \arccos \frac{a - 1}{2} + \pi k, \; k \in \boldsymbol{Z}.$$

г) Заметим, что значение $a = 3$ приводит уравнение $4\sin^2 x - (3 - a) = 0$ к виду $\sin x = 0$, что совпадает с уравнением из п. а). При записи ответа это следует учитывать.

3. *Ответ*: если $a \in (-\infty; -1) \cup [3; +\infty)$, то $x = \pi k$;

если $a \in [-1; 3)$, то

$$x = \pi k \text{ и } x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

7. При каждом значении параметра b решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = b. \tag{1}$$

1. Понизим степень левой части уравнения (1). Для этого воспользуемся формулой

$$m^4 + n^4 = (m^2 + n^2)^2 - 2m^2n^2, \text{ где } m = \sin x,\ n = \cos x.$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = b. \tag{2}$$

2. Упростив уравнение (2), получим

$$1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = b, \text{ или } \cos 4x = 4b - 3. \tag{3}$$

3. Уравнение (3) имеет решение при условии $-1 \leqslant 4b - 3 \leqslant 1$, т. е. $0{,}5 \leqslant b \leqslant 1$.

4. *Ответ*: если $b \in [0{,}5; 1]$, то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos(4b - 3) + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$;

если $b \notin [0{,}5; 1]$, то корней нет.

8. При каждом значении параметра c решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + c = 0. \tag{1}$$

1. Приведем уравнение (1) к виду

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \sin 2x + c = 0,$$

или

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2c - 2 = 0. \tag{2}$$

2. Уравнение (2) сводится к совокупности двух уравнений:

$$\sin 2x = 1 - \sqrt{2c + 3}\,; \tag{3}$$

$$\sin 2x = 1 + \sqrt{2c + 3}\,. \tag{4}$$

3. Уравнение (3) имеет решение при условии $-1 \leqslant 1 - \sqrt{2c+3} \leqslant$ $\leqslant 1$. Эти неравенства выполняются, если $-1{,}5 \leqslant c \leqslant 0{,}5$.

4. Правая часть уравнения (4) больше или равна 1. Поэтому оно имеет решение только в случае $c = -1{,}5$. Тогда уравнение (4) принимает вид $\sin 2x = 1$ и совпадает с уравнением (3) при $c = -1{,}5$.

5. Итак, уравнение (1) имеет те же решения, что и уравнение (3). Запишем эти решения:

$$x = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin\left(1 - \sqrt{2c+3}\right) + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

6. *Ответ*: если $c \in [-1{,}5;\ 0{,}5]$, то

$$x = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin\left(1 - \sqrt{2c+3}\right) + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z};$$

если $c \notin [-1{,}5;\ 0{,}5]$, то корней нет.

9. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$\cos^2 x - 3\cos x + a = 0. \qquad (1)$$

1. Решим данное уравнение как квадратное относительно косинуса, используя ограничение $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.

2. Уравнение (1) сводится к совокупности двух уравнений:

$$\cos x = \frac{3 - \sqrt{9-4a}}{2}; \qquad (2)$$

$$\cos x = \frac{3 + \sqrt{9-4a}}{2}. \qquad (3)$$

3. Уравнение (3) не имеет решений, так как $\frac{3 + \sqrt{9-4a}}{2} > 1$ при $a \leqslant \frac{9}{4}$.

4. Для уравнения (2) должна выполняться система неравенств

$$\begin{cases} -1 \leqslant \dfrac{3 - \sqrt{9-4a}}{2} \leqslant 1, \\ 9 - 4a \geqslant 0. \end{cases} \qquad (4)$$

5. Решив систему (4), находим $-4 \leqslant a \leqslant 2$.

6. *Ответ*: если $a \in [-4;\ 2]$, то $x = \pm \arccos \frac{3 - \sqrt{9-4a}}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

если $a \notin [-4;\ 2]$, то корней нет.

10. При каждом значении параметра c решить уравнение

$$\cos 2x + (2c - 1)\sin x + c - 1 = 0. \qquad (1)$$

1. Используя формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, преобразуем уравнение (1) к виду

$$2\sin^2 x - (2c - 1)\sin x - c = 0. \qquad (2)$$

2. Уравнение (2) сводится к совокупности двух уравнений:

$$\sin x = c; \qquad (3)$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}. \qquad (4)$$

3. Уравнение (3) имеет решение, если $c \in [-1; 1]$. Тогда

$$x = (-1)^k \arcsin c + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

4. Уравнение (4) имеет решение

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

которое не зависит от параметра c.

5. *Ответ*: если $c \in [-1; 1]$, то $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$,

$$x = (-1)^k \arcsin c + \pi k,\ n, k \in \boldsymbol{Z};$$

если $c \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

11. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$\cos 2x + \cos 4x = 2a\cos x. \qquad (1)$$

1. Применяя формулу суммы косинусов, преобразуем уравнение (1) к виду

$$2\cos 3x\cos x = 2a\cos x. \qquad (2)$$

2. После упрощения уравнения (2) получим

$$2\cos x(\cos 3x - a) = 0. \qquad (3)$$

3. Уравнение $\cos x = 0$ имеет решение при всех $a \in \boldsymbol{R}$, а уравнение $\cos 3x - a = 0$ — только при $|a| \leqslant 1$.

4. *Ответ*: если $a \in [-1; 1]$, то

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \pm\frac{1}{3}\ \arccos a + \frac{2\pi k}{3},\ n,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

$$\text{если } a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty), \text{ то } x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

12. При каждом значении параметра m решить уравнение

$$(m-1)\cos^2 x - 2(m+1)\cos x + 2m - 1 = 0. \qquad (1)$$

1. Пусть $\cos x = t$; тогда уравнение (1) примет вид

$$(m-1)t^2 - 2(m+1)t + 2m - 1 = 0. \qquad (2)$$

2. При $m = 1$ уравнение (2) имеет один корень $t = \frac{1}{4}$, т. е. $\cos x = \frac{1}{4}$. Отсюда

$$x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$$

(этот корень не зависит от параметра).

3. При $m \neq 1$ уравнение (2) имеет два корня:

$$t_1 = \frac{m+1-\sqrt{5m-m^2}}{m-1}; \qquad (3)$$

$$t_2 = \frac{m+1+\sqrt{5m-m^2}}{m-1}, \qquad (4)$$

если $m \in [0; 1) \cup (1; 5]$.

4. Решив неравенства

$$-1 \leqslant \frac{m+1-\sqrt{5m-m^2}}{m-1} \leqslant 1,\ -1 \leqslant \frac{m+1+\sqrt{5m-m^2}}{m-1} \leqslant 1,$$

можно найти ограничения на m, при которых уравнения $\cos x = t_1$ и $\cos x = t_2$ имеют решения.

5. *Ответ*: если $m < 0$ или $m > 4$, то корней нет;

если $m = 1$, то $x = \pm\arccos\frac{1}{4} + 2\pi k$;

если $m \in [0; 1) \cup (1; 4]$, то

$$x = \pm\arccos\frac{m+1-\sqrt{5m-m^2}}{m-1} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

13. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$\cos^2 x - 2\sin x \cos x - \sin^2 x = a. \qquad (1)$$

1. После перехода к функциям двойного аргумента уравнение (1) примет вид

$$\cos 2x - \sin 2x = a. \qquad (2)$$

2. Упростив левую часть уравнения (2), получим

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \sin 2x = a; \ \sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = a,$$

или

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a}{\sqrt{2}}. \qquad (3)$$

3. Уравнение (3) имеет решение при условии $-1 \leqslant \frac{a}{\sqrt{2}} \leqslant 1$, т. е. $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$.

4. Итак,

$$2x + \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{a}{\sqrt{2}} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

5. *Ответ*: если $a \in [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}]$, то

$$x = -\frac{\pi}{8} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{a}{\sqrt{2}} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

если $|a| > \sqrt{2}$, то корней нет.

14. При каждом значении параметра c решить уравнение

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = c. \qquad (1)$$

1. Если использовать формулы тангенса двойного угла и тангенса разности двух углов, то уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} - \frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = c. \qquad (2)$$

2. Упростив уравнение (2), получим

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{c-1}{c+1}. \qquad (3)$$

3. Если $c = -1$, то правая часть равенства (3) не определена. Вместе с тем при $c = -1$ уравнение (1) имеет вид

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ (и его можно решать).}$$

4. Вернемся к уравнению (1) и преобразуем его с помощью формулы разности тангенсов; тогда при $c = -1$ получим

$$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} = -1. \qquad (4)$$

5. Решим уравнение (4).

а) Используя формулу приведения, заменим $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ на $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

б) Значит, при $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0$ левую часть уравнения (4) можно сократить и привести его к виду $\frac{1}{\cos 2x} = -1$, т. е. $\cos 2x = -1$.

в) Отсюда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Такие значения x входят в ОДЗ уравнения (4).

6. Вернемся к уравнению (3). При $c \geqslant 1$ и $c < -1$ оно сводится к уравнению $\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{\frac{c-1}{c+1}}$ и, значит,

$$x = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{c-1}{c+1}} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

7. *Ответ*: если $c \in (-\infty; -1) \cup [1; +\infty)$, то $x = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{c-1}{c+1}} + \pi k$;

если $c = -1$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

если $c \in (-1; 1)$, то корней нет.

15. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$3\cos 2x - 8a \sin 2x = -5. \qquad (1)$$

1. Используя формулы $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, преобразуем уравнение (1) к виду

$$\sin^2 x - 8a \sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0. \qquad (2)$$

2. Почленное деление уравнения (2) на $\cos^2 x$ приводит к уравнению

$$\operatorname{tg}^2 x - 8a \operatorname{tg} x + 4 = 0. \qquad (3)$$

Замечания.

1. Уравнение (2) является однородным.

2. Необходимо убедиться, что деление на $\cos^2 x$ не приводит к потере или приобретению посторонних корней.

3. Решим уравнение (3). Находим

$$\operatorname{tg} x = 4a \pm 2\sqrt{4a^2 - 1}\text{, где } 4a^2 - 1 \geqslant 0.$$

Итак:

а) при $-0{,}5 < a < 0{,}5$ уравнение не имеет решений;

б) при $a = -0{,}5$ получаем $\operatorname{tg} x = -2$, а при $a = 0{,}5$ получаем $\operatorname{tg} x = 2$;

в) при $a > 0{,}5$ или $a < -0{,}5$ получаем $\operatorname{tg} x = 4a \pm 2\sqrt{4a^2 - 1}$.

4. *Ответ*: если $a \in (-0{,}5; 0{,}5)$, то корней нет;
если $a = -0{,}5$, то $x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k$;
если $a = 0{,}5$, то $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$;
если $a \in (-\infty; -0{,}5) \cup (0{,}5; +\infty)$, то

$$x = \operatorname{arctg}(4a \pm 2\sqrt{4a^2 - 1}) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

16. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$3a \sin 2x + (a + 1)\cos 2x - 1 = 0. \qquad (1)$$

1. Применив формулы синуса и косинуса двойного аргумента и основное тригонометрическое тождество, получим однородное уравнение второй степени относительно синуса и косинуса:

$$3a \cdot 2\sin x \cos x + (a + 1)(\cos^2 x - \sin^2 x) - (\cos^2 x + \sin^2 x) = 0. \qquad (2)$$

2. После упрощения уравнения (2) приходим к уравнению

$$(a + 2)\sin^2 x - 6a \sin x \cos x - a\cos^2 x = 0. \qquad (3)$$

а) Если $a = -2$, то уравнение (3) примет вид

$$\cos x\,(6\sin x + \cos x) = 0.$$

Отсюда следует, что $\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{6}$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

б) Если $a = 0$, то уравнение (3) примет вид $\sin^2 x = 0$, т. е. $x = \pi m$, $m \in \boldsymbol{Z}$.

в) Наконец, если $a \neq -2$, $a \neq 0$, то обе части уравнения (3) можно почленно разделить на $\cos^2 x$. Имеем

$$(a + 2)\operatorname{tg}^2 x - 6a \operatorname{tg} x - a = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = \frac{3a \pm \sqrt{2a(5a+1)}}{a+2}. \qquad (4)$$

3. Решим уравнение (4):

а) При $a = -\frac{1}{5}$ получаем $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{3}$, т. е.

$$x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi r,\ r \in \boldsymbol{Z}.$$

б) При $a(5a+1) > 0$, т. е. при $a \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{5}\right) \cup (0; +\infty)$, находим

$$x = \operatorname{arctg}\frac{3a \pm \sqrt{2a(5a+1)}}{a+2} + \pi s,\ s \in \boldsymbol{Z}.$$

4. *Ответ*: если $a \in (-\infty; -2) \cup \left(-2; -\frac{1}{5}\right) \cup (0; +\infty)$, то

$$x = \operatorname{arctg}\frac{3a \pm \sqrt{2a(5a+1)}}{a+2} + \pi s,\ s \in \boldsymbol{Z};$$

если $a = -2$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{6} + \pi n$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$;

если $a = -\frac{1}{5}$, то $x = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \pi r$, $r \in \boldsymbol{Z}$;

если $a \in \left(-\frac{1}{5}; 0\right)$, то корней нет;

если $a = 0$, то $x = \pi m$, $m \in Z$.

17. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$\frac{2\sin^2 2x - 6a\sin 2x\cos 2x - 11\cos^2 2x}{a\cos 2x\,(2\sin 2x - \cos 2x)} = \frac{2(2a+1)\cos 2x}{\cos 2x - 2\sin 2x} - \frac{1}{a}. \qquad (1)$$

1. Уравнение (1) имеет смысл при $a \neq 0$; значения x должны удовлетворять условиям $\cos 2x \neq 0$, $\operatorname{tg} 2x \neq 0{,}5$.

2. Разделив числитель и знаменатель дроби в левой части уравнения (1) на $\cos^2 2x$, а первой дроби в правой части на $\cos 2x$, получим уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg}^2 2x - 6a \operatorname{tg} 2x - 11}{a(2\operatorname{tg} 2x - 1)} = \frac{2(2a+1)}{1 - 2\operatorname{tg} 2x} - \frac{1}{a}. \qquad (2)$$

3. Пусть $t = \operatorname{tg} 2x$. Тогда после упрощения уравнения (2) оно примет вид

$$t^2 - (3a - 1)t + 2a^2 + a - 6 = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет два корня $t_1 = a + 2$ и $t_2 = 2a - 3$.

4. Ранее было отмечено, что значения x должны удовлетворять условию $\operatorname{tg} 2x \neq 0{,}5$. Поэтому необходимо исключить те значения a, при которых t_1 или t_2 (или оба числа) равны 0,5. Имеем:

а) $t_1 = a + 2 = 0{,}5$, откуда $a = -1{,}5$; при этом $t_2 = -6$;

б) $t_2 = 2a - 3 = 0{,}5$, откуда $a = 1{,}75$; при этом $t_1 = 3{,}75$.

5. *Ответ*: если $a = -1{,}5$, то $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-6) + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$;

если $a = 1{,}75$, то $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3{,}75 + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

если $a \neq -1{,}5$, $a \neq 1{,}75$, $a \neq 0$, то

$$x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2a - 3) + \frac{\pi m}{2},\ m \in \boldsymbol{Z};$$

$$x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(a + 2) + \frac{\pi l}{2},\ l \in \boldsymbol{Z}.$$

18. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$\frac{a \sin x - 2}{a - 2\cos x} = \frac{a \cos x - 2}{a - 2\sin x}. \qquad (1)$$

1. Перейдем от дробного уравнения (1) к целому с учетом ОДЗ. При условиях $a - 2\cos x \neq 0$ и $a - 2\sin x \neq 0$ получим равносильное уравнение

$$(\sin x - \cos x)(a^2 - 2a(\sin x + \cos x) + 4) = 0. \qquad (2)$$

2. Уравнение (2) сводится к совокупности уравнений:

а) $\sin x - \cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, независимо от a;

б) $\sin x + \cos x = \dfrac{a^2+4}{2a}$, или

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{a^2+4}{2\sqrt{2}a}. \qquad (3)$$

3. Рассмотрим модуль правой части уравнения (3):

$$\left|\frac{a^2+4}{2\sqrt{2}a}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{a}{2} + \frac{2}{a}\right| \geqslant \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(так как $\left|z + \dfrac{1}{z}\right| \geqslant 2$). Поэтому уравнение (3) не имеет корней.

4. В п. 2 мы установили, что $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, — корни уравнения (2) (не зависящие от параметра a). Однако из множества корней $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right\}$ следует отбросить те корни, при которых $a - 2\cos x = 0$ и $a - 2\sin x = 0$, или $\cos x = \dfrac{a}{2}$, $\sin x = \dfrac{a}{2}$.

5. Представим множество $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \pi n\right\}$ как объединение двух множеств: $\left\{\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k\right\}$ и $\left\{\dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k\right\}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

а) Если $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, то $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \dfrac{a}{2}$ при $a = \sqrt{2}$. Значит, при $a = \sqrt{2}$ корни $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$ — посторонние.

б) Если $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$, то $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos x = \dfrac{a}{2}$ при $a = -\sqrt{2}$. Значит, при $a = -\sqrt{2}$ корни $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$ — посторонние.

6. К этим же выводам приводит и условие $a - 2\sin x = 0$, так как при $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi n$ имеем $\sin x = \cos x$.

7. *Ответ*: если $a \neq -\sqrt{2}$, то $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$;

если $a \neq \sqrt{2}$, то $x = \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi k$;

если $a \neq \pm\sqrt{2}$, то $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

19. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sin^2 3x - (a + 0{,}5) \sin 3x + 0{,}5a = 0 \qquad (1)$$

имеет ровно три корня, принадлежащие отрезку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$?

1. Решив уравнение (1) как квадратное относительно $\sin 3x$, получаем, что оно равносильно совокупности двух уравнений:

$$\sin 3x = 0{,}5; \qquad (2)$$

$$\sin 3x = a. \qquad (3)$$

2. Уравнение (2) на отрезке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ имеет два корня: $x_1 = \frac{13\pi}{18}$ и $x_2 = \frac{17\pi}{18}$.

3. Следовательно, значение параметра a удовлетворяет требованию задачи, если уравнение (3) на данном отрезке имеет один корень.

4. Функция $y = \sin 3x$ на отрезке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ принимает все значения от 0 до 1, причем каждое из этих значений, за исключением 1, — дважды. Поэтому требование задачи будет выполнено только при значении $a = 1$.

5. *Ответ*: $a = 1$.

20. При каких положительных значениях параметра a неотрицательные значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\cos (5a - 9)x = \cos (9a + 17)x \qquad (1)$$

и расположенные в порядке возрастания, образуют бесконечную арифметическую прогрессию?

1. Приведем уравнение (1) к виду

$$\sin (7a + 4)x \sin (2a + 13)x = 0.$$

2. Так как по условию $a > 0$, то $7a + 4 \neq 0$, $2a + 13 \neq 0$ и неотрицательные решения исходного уравнения задаются двумя сериями:

$$x = \frac{\pi k}{7a + 4}, \text{ где } k \in \boldsymbol{Z},\ k \geqslant 0; \qquad (2)$$

$$x = \frac{\pi n}{2a + 13}, \text{ где } n \in \boldsymbol{Z},\ n \geqslant 0. \qquad (3)$$

3. Здесь каждое из соотношений (2) и (3) образует бесконечную арифметическую прогрессию с первым членом, равным нулю, и разностями $d_1 = \dfrac{\pi}{7a+4}$ и $d_2 = \dfrac{\pi}{2a+13}$ соответственно.

4. Эти две арифметические прогрессии образуют одну бесконечную арифметическую прогрессию при условии, что хотя бы одно из чисел $\dfrac{d_1}{d_2}$ или $\dfrac{d_2}{d_1}$ является натуральным.

5. Рассмотрим случай, когда

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{2a+13}{7a+4} = p, \text{ где } p \text{ — натуральное.}$$

Отсюда находим $a = \dfrac{4p-13}{2-7p} > 0$. Из этого неравенства следует, что $p \in \{1; 2; 3\}$, и, значит, $a \in \left\{\dfrac{9}{5}; \dfrac{5}{12}; \dfrac{1}{19}\right\}$.

6. Рассмотрим случай, когда

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{7a+4}{2a+13} = q, \text{ где } q \text{ — натуральное.}$$

Отсюда находим $a = \dfrac{4-13q}{2q-7} > 0$. Здесь также оказывается, что $q \in \{1; 2; 3\}$ и, следовательно, $a \in \left\{\dfrac{9}{5}; \dfrac{22}{3}; 35\right\}$.

7. *Ответ*: $a \in \left\{\dfrac{1}{19}; \dfrac{5}{12}; \dfrac{9}{5}; \dfrac{22}{3}; 35\right\}$.

21. При каких целых отрицательных n функция

$$f(x) = \cos 7nx \sin \frac{25x}{n^2}$$

является периодической с периодом $T = 7\pi$?

1. Так как по условию при любом значении x должно выполняться равенство

$$\cos 7n(x + 7\pi) \cdot \sin \frac{25x}{n^2}(x + 7\pi) = \cos 7nx \cdot \sin \frac{25x}{n^2}, \tag{1}$$

то оно будет выполняться и при $x = 0$.

2. При $x = 0$ получим

$$\cos 7n(0 + 7\pi) \cdot \sin \frac{25}{n^2}(0 + 7\pi) = \cos 49\pi n \cdot \sin \frac{175\pi}{n^2} = 0.$$

3. Так как $\cos 49\pi n \neq 0$ при целых отрицательных n, то должно выполняться равенство

$$\sin \frac{175\pi}{n^2} = 0. \qquad (2)$$

4. Равенство (2) имеет место, когда

$$\frac{175\pi}{n^2} = \pi k, \text{ т. е. } \frac{175}{n^2} = k, \text{ где } k \in \boldsymbol{Z}.$$

5. Поскольку нас интересуют только целые отрицательные n, простым перебором находим, что $n \in \{-1; -5\}$.

6. Подставляя значения $n = -1$ и $n = -5$ в соотношение (2), убеждаемся, что в обоих случаях получается тождество.

7. *Ответ*: $n \in \{-1; -5\}$.

22. В зависимости от значений параметров a и b решить уравнение

$$\sqrt{\operatorname{tg} x - 2a} - \sqrt{\operatorname{tg} x - 2b} = 2.$$

1. Полагая $u = \sqrt{\operatorname{tg} x - 2a}$, $v = \sqrt{\operatorname{tg} x - 2b}$, $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, получим уравнение

$$u - v = 2. \qquad (1)$$

2. Кроме того, имеем

$$u^2 - v^2 = (\operatorname{tg} x - 2a) - (\operatorname{tg} x - 2b),$$

т. е.

$$u^2 - v^2 = 2(b - a). \qquad (2)$$

3. Уравнения (1) и (2) образуют систему

$$\begin{cases} u - v = 2, \\ u^2 - v^2 = 2(b - a), \end{cases}$$

откуда находим $v = \frac{1}{2}(b - a - 2)$; так как $v \geqslant 0$, то $b \geqslant a + 2$.

4. Вернемся к обозначению $v = \sqrt{\operatorname{tg} x - 2b}$. Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим $v^2 = \operatorname{tg} x - 2b$, откуда

$$\operatorname{tg} x = v^2 + 2b, \text{ или } \operatorname{tg} x = \left(\frac{b - a - 2}{2}\right)^2 + 2b.$$

5. *Ответ*: если $b - a \geqslant 2$, то

$$x = \operatorname{arctg}\left(\left(\frac{b-a-2}{2}\right)^2 + 2b\right) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

если $b - a < 2$, то корней нет.

23. При каких значениях параметра k уравнение

$$\cos 2x + 2 \sin x + 2k^2 - 2k - 1 = 0 \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно решение? Найти сумму таких целых значений k.

1. Так как $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$, то уравнение (1) примет вид

$$1 - 2 \sin^2 x + 2 \sin x + 2k^2 - 2k - 1 = 0. \qquad (2)$$

а) Пусть $\sin x = t$, $|t| \leqslant 1$; тогда уравнение (2) запишется так:

$$t^2 - t - k^2 + k = 0. \qquad (3)$$

б) Уравнение (3) имеет корни $t_1 = k$ и $t_2 = 1 - k$.

в) Вернемся к подстановке $t = \sin x$; имеем $t_1 = k = \sin x$, $t_2 = 1 - k = \sin x$.

2. Уравнение (3) имеет хотя бы одно решение, если выполняется совокупность неравенств

$$\left[\begin{array}{l} |k| \leqslant 1, \\ |k-1| \leqslant 1. \end{array}\right.$$

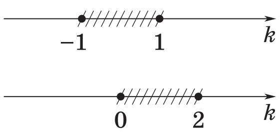


Рис. 71

а) Из рис. 71 видно, что искомыми целыми значениями k являются -1, 0, 1 и 2.

б) Сумма этих целых значений k равна 2.

3. *Ответ*: $k \in [-1; 2]$; 2.

24. При какой зависимости между параметрами a и b имеет решение уравнение $\sin ax \sin bx = 1$?

1. Исходное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} \sin ax = 1, \\ \sin bx = 1; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sin ax = -1, \\ \sin bx = -1. \end{cases} \qquad (2)$$

2. Для системы (1) имеем

$$ax = \frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k + 1),\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$bx = \frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(4n + 1),\ n \in \boldsymbol{Z},$$

откуда следует, что $\frac{a}{b} = \frac{4k+1}{4n+1}$.

3. Для системы (2) имеем

$$ax = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}(4k - 1),\ k \in \boldsymbol{Z},$$

$$bx = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{2}(4n - 1),\ n \in \boldsymbol{Z},$$

и, значит, $\frac{a}{b} = \frac{4k-1}{4n-1}$.

4. *Ответ*: $\frac{a}{b} = \frac{4k+1}{4n+1}$ или $\frac{a}{b} = \frac{4k-1}{4n-1}$, $k, n \in \boldsymbol{Z}$.

25. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$|\cos 2x| = |\sin^2 x - a|. \qquad (1)$$

1. Так как обе части уравнения (1) неотрицательны, то после возведения в квадрат получим равносильное уравнение

$$\cos^2 2x = \sin^4 x + a^2 - 2a \sin^2 x. \qquad (2)$$

2. Упростим уравнение (2):

$$\cos^2 2x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 - 2a\frac{1 - \cos 2x}{2} + a^2,$$

или

$$3 \cos^2 2x + 2(1 - 2a) \cos 2x - (1 - 2a)^2 = 0. \qquad (3)$$

3. Уравнение (3) сводится к следующей совокупности:

$$\cos 2x = 2a - 1; \qquad (4)$$

$$\cos 2x = \frac{1 - 2a}{3}. \qquad (5)$$

4. Решим уравнение (4). Здесь должно выполняться условие $|2a - 1| \leqslant 1$, т. е. $0 \leqslant a \leqslant 1$; имеем

$$x = \pm\frac{1}{2} \arccos (2a - 1) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

5. Решим уравнение (5). Здесь должно выполняться условие $\left|\frac{1-2a}{3}\right| \leqslant 1$, т. е. $-1 \leqslant a \leqslant 2$; имеем

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-2a}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

6. *Ответ*: если $a < -1$ или $a > 2$, то корней нет;
если $-1 < a < 0$ или $1 \leqslant a \leqslant 2$, то

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-2a}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

если $0 \leqslant a \leqslant 1$, то $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-2a}{3} + \pi k$,

$$x = \pm\frac{1}{2}\arccos(2a-1) + \pi n,\ k,\ n \in \boldsymbol{Z}.$$

26. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$|\operatorname{tg} x + a\operatorname{ctg} x| = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \qquad (1)$$

1. Допустимыми значениями переменной x являются все $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. При таких значениях x, полагая $y = \operatorname{tg} x$, перепишем уравнение (1) в виде

$$\left|y + \frac{a}{y}\right| = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \qquad (2)$$

2. Если $a = 0$, то $y = \pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$. При $a \neq 0$ уравнение (2) равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{aligned} &y^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}y + a = 0, \\ &y^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}y + a = 0. \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

3. Дискриминанты обоих уравнений совокупности (3) совпадают и имеют вид $D = 4\left(\frac{4}{3} - a\right)$. Поэтому если $a > \frac{4}{3}$, то уравнение (1) не имеет решений.

4. Пусть $D \geqslant 0$. Тогда, решив уравнения (3), находим

$$y_{1,\,2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{3} - a},\ y_{3,\,4} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{3} - a}. \qquad (4)$$

При $a = \frac{4}{3}$ имеем $y = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$. В остальных случаях все корни определяются формулами (4).

5. *Ответ*: если $a < 0$ или $0 < a < \frac{4}{3}$, то

$$x = \operatorname{arctg}\left(\pm\frac{2\sqrt{3}}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{3} - a}\right) + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

если $a = 0$, то $x = \pm\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{3}}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

если $a = \frac{4}{3}$, то $x = \pm\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3} + \pi m,\ m \in \boldsymbol{Z}$;

если $a > \frac{4}{3}$, то корней нет.

27. Определить все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a - 3)\sin^2 x + (a - 4)\cos x + 1 = 0$$

имеет единственный корень в интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, и указать этот корень.

1. Положим $y = \cos x$, $\sin^2 x = 1 - y^2$ и сведем тригонометрическое уравнение к алгебраическому:

$$(a - 3)y^2 - (a - 4)y + 2 - a = 0. \qquad (1)$$

2. Требуется найти те значения a, при которых уравнение (1) имеет единственный корень в интервале $(0;\ 1)$.

3. Такое требование реализуется в двух случаях:

а) уравнение (1) имеет единственный корень, который принадлежит интервалу $(0;\ 1)$; это в свою очередь возможно либо при $a - 3 = 0$, либо при $D = 0$;

б) уравнение (1) имеет два корня, причем один из них принадлежит интервалу $(0;\ 1)$, а другой находится вне этого интервала.

4. Рассмотрим по отдельности эти возможности.

а) При $a = 3$ уравнение (1) примет вид $y - 1 = 0$. Тогда его корень $y = 1 \notin (0;\ 1)$ и, значит, $a = 3$ не удовлетворяет указанному требованию.

Так как $D = (a - 4)^2 + 4(a - 3)(a - 2) = 5a^2 - 28a + 40 > 0$ при любом a, т. е. случай $D = 0$ не имеет места.

б) Уравнение $f(y) = 0$ имеет единственный корень в интервале $(0; 1)$, если $f(0) \cdot f(1) < 0$. В данном случае

$$f(y) = (a - 3)y^2 - (a - 4)y + 2 - a,$$

т. е. $f(0) = 2 - a$, $f(1) = (a - 3) - (a - 4) + 2 - a = 3 - a$. Искомые значения a должны удовлетворять условию $(2 - a)(3 - a) < 0$, откуда $2 < a < 3$.

5. Итак, уравнение (1) имеет единственный корень в интервале $(0; 1)$, если $a \in (2; 3)$. Найдем этот корень. Имеем

$$y_1 = \frac{a - 4 - \sqrt{5a^2 - 28a + 40}}{2(a - 3)}, \; y_2 = \frac{a - 4 + \sqrt{5a^2 - 28a + 40}}{2(a - 3)}.$$

Так как $2 < a < 3$, то $y_1 > 1$, а $y_2 \in (0; 1)$.

6. Из равенства $\cos x = y_2$ найдем соответствующий корень данного уравнения.

7. *Ответ*: $a \in (2; 3)$; $x = \arccos \dfrac{a - 4 + \sqrt{5a^2 - 28a + 40}}{2(a - 3)}$.

28. Найти все пары чисел $(a; b)$, для каждой из которых при любом x справедливо равенство

$$a \sin x + b = \sin (ax + b). \qquad (1)$$

1. Из условия следует, что равенство (1) должно выполняться, в частности, при $x = 0$.

2. При этом значении x получим равенство $b = \sin b$, которое справедливо только при $b = 0$, т. е. $0 = \sin 0 = 0$.

3. Подставив $b = 0$ в равенство (1), приходим к уравнению

$$a \sin x = \sin ax,$$

которое имеет решение при любом x только в тех случаях, когда $a \in \{-1; 0; 1\}$.

4. *Ответ*: $(-1; 0)$; $(0; 0)$; $(1; 0)$.

29. Найти все пары чисел $(a; b)$, для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos (ax + b^2) - 1. \qquad (1)$$

1. Пусть $(a; b)$ — пара чисел, удовлетворяющих условию задачи. Поскольку данное равенство справедливо при любом x, в частности, оно верно при $x = \pi$ и $x = 2\pi$. Поэтому числа a и b удовлетворяют равенствам

$$-2a + b^2 = \cos(\pi a + b^2) - 1, \qquad (2)$$

$$b^2 = \cos(2\pi a + b^2) - 1. \qquad (3)$$

2. Так как $\cos(2\pi a + b^2) \leqslant 1$, то из равенства (3) следует, что $b^2 \leqslant 0$. Этому условию удовлетворяет только $b = 0$; тогда $\cos 2\pi a = 1$, т. е. a — целое число.

3. При $b = 0$ равенство (2) примет вид $1 - 2a = \cos \pi a$. Но $-1 \leqslant \cos \pi a \leqslant 1$, откуда $-1 \leqslant 1 - 2a \leqslant 1$, т. е. $0 \leqslant a \leqslant 1$. В промежутке $0 \leqslant a \leqslant 1$ имеются только два целых числа: $a = 0$ и $a = 1$.

4. Итак, условию задачи могут удовлетворять только следующие пары чисел: а) $a = 0$, $b = 0$; б) $a = 1$, $b = 0$.

5. Если $a = 0$, $b = 0$, то равенство (1), очевидно, выполняется при всех x.

6. Если $a = 1$, $b = 0$, то равенство (1) также выполняется при всех x.

7. Следовательно, обе пары чисел $a = 0$, $b = 0$ и $a = 1$, $b = 0$ удовлетворяют условию задачи.

8. *Ответ*: (0; 0); (1; 0).

30. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2 + 9)\cos ax = 2(x^2 - 3x + 9) \qquad (1)$$

имеет решения? Найти эти решения.

1. Уравнение (1) равносильно уравнению

$$\cos ax = \frac{2(x^2 - 3x + 9)}{x^2 + 9}, \qquad (2)$$

правая часть которого положительна при всех x и в силу неравенства $|\cos ax| \leqslant 1$ не превосходит единицы.

2. Решив неравенство

$$\frac{2(x^2 - 3x + 9)}{x^2 + 9} \leqslant 1,$$

заключаем, что равенство (2) возможно лишь при $x = 3$, т. е. когда $\cos 3a = 1$.

3. Отсюда следует, что $3a = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, т. е. $a = \dfrac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. *Ответ*: если $a = \dfrac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $x = 3$.

31. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$x^2 + 4x\cos ax + 4 = 0. \qquad (1)$$

1. Перепишем уравнение (1) следующим образом:

$$(x + 2\cos ax)^2 + 4(1 - \cos^2 ax) = 0. \qquad (2)$$

2. Оба слагаемых в левой части уравнения (2) неотрицательны. Следовательно, это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + 2\cos ax = 0, \\ 1 - \cos^2 ax = 0, \end{cases}$$

или, что то же самое, совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x + 2\cos ax = 0, \\ \cos ax = 1; \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} x + 2\cos ax = 0, \\ \cos ax = -1. \end{cases} \qquad (4)$$

3. Решив систему (3), находим $x = -2$, $a = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. Решив систему (4), получим $x = 2$, $a = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

5. *Ответ*: если $a = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $x = 2$;
если $a = \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, то $x = -2$;
при других a уравнение не имеет решений.

32. В зависимости от значений параметра a определить число корней уравнения

$$\sin^4 x - \cos^4 x = a(\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{ctg}^4 x), \qquad (1)$$

принадлежащих интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\sin^4 x - \cos^4 x = a\frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{\sin^4 x \cos^4 x},$$

или

$$(\sin^4 x - \cos^4 x)[\sin^4 x \cos^4 x - a(\sin^4 x + \cos^4 x)] = 0. \qquad (2)$$

2. Уравнение (2) равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{ll} \sin^4 x - \cos^4 x = 0, & (3) \\ \sin^4 x \cos^4 x - a(\sin^4 x + \cos^4 x) = 0. & (4) \end{array}\right.$$

3. Уравнение (3) при любом значении параметра a имеет на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ корень $x = \frac{\pi}{4}$.

4. Уравнение (4) в результате преобразований приводится к виду

$$\sin^4 2x + 8a \sin^2 2x - 16a = 0. \qquad (5)$$

Полагая $y = \sin^2 2x$, получим уравнение

$$y^2 + 8ay - 16a = 0, \qquad (6)$$

которое имеет действительные корни, если его дискриминант $D = 64(a^2 + a) \geqslant 0$, т. е. если $a \geqslant 0$ или если $a \leqslant -1$.

При таких значениях a корнями уравнения (6) являются

$$y_1 = 4(\sqrt{a(a+1)} - a),\ y_2 = -4(\sqrt{a(a+1)} + a).$$

5. Пусть $a > 0$. Тогда $y_2 < 0$ и только корень y_1 уравнения (6) может дать решения уравнения (5).

6. Учитывая, что речь идет об интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, приходим к неравенству

$$0 < 4(\sqrt{a(a+1)} - a) < 1,$$

откуда $0 < a < \frac{1}{8}$. При таких значениях a уравнение (5) имеет на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ два корня.

7. При $a = \frac{1}{8}$ получим $y_1 = 1$, поэтому уравнение (5) имеет на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ только один корень $x = \frac{\pi}{4}$.

8. При $a > \frac{1}{8}$ уравнение (5) решений не имеет.

9. При $a = 0$ на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение (5) также не имеет решений.

10. Если $a \leqslant -1$, то нетрудно убедиться, что корни y_1 и y_2 не удовлетворяют условиям $0 < y_1 < 1$, $0 < y_2 < 1$, и, следовательно, уравнение (5) снова не имеет решений.

11. *Ответ*: если $a \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{8}; +\infty\right)$, то один корень;

$$\text{если } a \in \left(0; \frac{1}{8}\right), \text{ то три корня.}$$

33. При каких значениях параметра a уравнения

$$2\sin^7 x - (1-a)\sin^3 x + (2a^3 - 2a - 1)\sin x = 0 \qquad (1)$$

и

$$2\sin^6 x + \cos 2x = 1 + a - 2a^3 + a\cos^2 x \qquad (2)$$

равносильны?

1. Заметим, что $x = \pi$ — корень уравнения (1) при любом a. Тогда согласно условию это значение должно быть и корнем уравнения (2).

2. Подставляя $x = \pi$ в уравнение (2), получаем равенство $a^3 = a$. Отсюда следует, что искомые значения параметра a могут принадлежать только множеству $\{0; -1; 1\}$.

3. Пусть $a = 0$. Тогда уравнения (1) и (2) перепишутся соответственно в виде

$$\sin x(\sin^2 x - 1)(2\sin^4 x + 2\sin^2 x + 1) = 0,$$

и

$$\sin^2 x\,(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1) = 0.$$

Так как

$$2\sin^4 x + 2\sin^2 x + 1 \neq 0 \text{ и } \sin x + 1 \neq 0,$$

то при $a = 0$ уравнения (1) и (2) равносильны.

4. Пусть $a = -1$. Тогда получим уравнения

$$\sin x\,(2\sin^6 x - 2\sin^2 x - 1) = 0 \text{ и } \sin^2 x\,(2\sin^4 x - 3) = 0,$$

которые, как и в предыдущем случае, равносильны, поскольку

$$2\sin^6 x - 2\sin^2 x - 1 = 2\sin^2 x\,(\sin^4 x - 1) - 1 < 0,$$
$$2\sin^4 x - 3 < 0.$$

Таким образом, и при $a = -1$ уравнения (1) и (2) равносильны.

5. Пусть $a = 1$. Тогда уравнения (1) и (2) примут соответственно вид

$$\sin x\ (2\sin^6 x - 1) = 0,\ \sin^2 x\ (2\sin^4 x - 1) = 0.$$

Следовательно, с одной стороны, $\sin x = \sqrt[6]{\frac{1}{2}}$, а с другой $\sin x = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$. Поэтому при $a = 1$ уравнения (1) и (2) не равносильны.

6. *Ответ*: $a \in \{0; -1\}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все значения a, при которых имеет решение данное уравнение:

а) $\cos^2 x + 6\sin x = 4a^2 - 2$;

б) $5\sin x + 2\cos x = a$;

в) $\sqrt{a}\ \cos x - 2\sin x = \sqrt{2} + \sqrt{2-a}$.

2. Решить относительно x уравнение:

а) $a\sin^2 x + \cos x = 0$;

б) $\cos x - \sin x = a$;

в) $\sin(a + x) + \sin x = \cos\frac{a}{2}$;

г) $\sin(x + a) + \cos(x + a) = \sin(x - a) + \cos(x - a)$;

д) $\sin^4 x - 2\cos^2 x + a^2 = 0$;

е) $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{a}{8}\cos 2x$;

ж) $\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + a = \frac{\sin x - 2}{\sin x - 3}$.

3. Найти корни уравнения $|\cos 2x| = |\sin^2 x - a|$, удовлетворяющие условию $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

4. При каких значениях a уравнение $\frac{2 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = a$ имеет на отрезке $[0; 2\pi]$ ровно один корень?

5. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ x + y = \frac{\pi}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos x - \cos y = a, \\ x + y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$

Ответы

1. а) $|a| \leqslant \sqrt{2}$; б) $|a| \leqslant \sqrt{29}$; в) $a \in [\sqrt{5} - 1;\ 2]$. **2.** а) Если $a \neq 0$, то $x = \pm\arccos \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2a} + 2\pi n$; если $a = 0$, то $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$; б) если $a \in [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\,]$, то $x = -\dfrac{\pi}{4} \pm \arccos \dfrac{a}{\sqrt{2}} + 2\pi n$; если $a \notin [-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\,]$, то $x \in \varnothing$; в) если $a = \pi + 2\pi k$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a \notin \pi + 2\pi k$, то $x = -\dfrac{a}{2} + (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$; г) если $a = \pi k$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a \neq \pi k$, то $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$; д) если $a \in (-\infty;\ -\sqrt{2}\,) \cup (\sqrt{2};\ +\infty)$, то $x \in \varnothing$; если $a = \pm\sqrt{2}$, то $x = \pi k$; если $a \in (-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\,)$, то $x = \pm\dfrac{1}{2} \arccos (3 - 2\sqrt{3 - a^2}\,) + \pi k$; е) если $a \in (-\infty;\ 6] \cup [8;\ +\infty)$, то $x = \dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{\pi}{4}$; если $a \in (6;\ 8)$, то $x_1 = \dfrac{\pi n}{2} + \dfrac{\pi}{4}$, $x_2 = \dfrac{\pi n}{2} \pm \dfrac{1}{4} \arccos (a - 7)$; ж) если $a \in \left[\dfrac{1}{12};\ \dfrac{1}{2}\right]$, то $x = (-1)^n \arcsin \left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{1 + \dfrac{4}{a}}\right) + \pi n$; если $a \notin \left[\dfrac{1}{12};\ \dfrac{1}{2}\right]$, то корней нет.
3. $\dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{1 - 2a}{3}$, $\pi \pm \dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{1 - 2a}{3}$, $2\pi - \dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{1 - 2a}{3}$ (где $-1 \leqslant a \leqslant 2$); $\dfrac{1}{2} \arccos (2a - 1)$, $\pi \pm \dfrac{1}{2} \arccos (2a - 1)$, $2\pi - \dfrac{1}{2} \arccos (2a - 1)$ (где $0 \leqslant a \leqslant 1$).
4. $a = 0{,}5$. **5.** а) Если $a \in (-\infty;\ -\sqrt{2}\,) \cup (\sqrt{2};\ +\infty)$, то решений нет; если $a = -\sqrt{2}$, то $x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $y = -\dfrac{\pi}{4} - 2\pi k$; если $a \in (-\sqrt{2};\ \sqrt{2}\,)$, то $x_1 = \dfrac{\pi}{4} + \arccos \dfrac{a\sqrt{2}}{2} + 2\pi k$, $y_1 = \dfrac{\pi}{4} - \arccos \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - 2\pi k$, $x_2 = \dfrac{\pi}{4} - \arccos \dfrac{a\sqrt{2}}{2} + 2\pi k$, $y_2 = \dfrac{\pi}{4} + \arccos \dfrac{a\sqrt{2}}{2} - 2\pi k$; если $a = \sqrt{2}$, то $x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $y = \dfrac{\pi}{4} - 2\pi k$; б) если $a \in (-\infty;\ -\sqrt{3}\,) \cup (\sqrt{3};\ +\infty)$, то решений нет; если $a = -\sqrt{3}$, то $x = \dfrac{5\pi}{6} - 2\pi k$, $y = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k$; если $a \in (-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\,)$, то $x = \dfrac{\pi}{3} + (-1)^{k+1} \times \arcsin \dfrac{a\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\pi k}{2}$, $y = \dfrac{\pi}{3} + (-1)^k \arcsin \dfrac{a\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\pi k}{2}$; если $a = \sqrt{3}$, то $x = -\dfrac{\pi}{6} - 2\pi k$, $y = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k$.

Тема 13

1. Решение тригонометрических неравенств вида $\sin x > a$, $\sin x < a$
2. Решение тригонометрических неравенств вида $\cos x > a$, $\cos x < a$
3. Решение тригонометрических неравенств вида $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Решение тригонометрических неравенств вида $\sin x > a$, $\sin x < a$

1°. Неравенства, содержащие переменную только под знаком тригонометрической функции, называют ***тригонометрическими***.

2°. При решении тригонометрических неравенств используют свойство монотонности тригонометрических функций, а также промежутки их знакопостоянства.

3°. Для решения простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x > a$, $\sin x < a$ используют единичную окружность или график функции $y = \sin x$.

4°. Важно знать, что:

$\sin x = 0$, если $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\sin x = -1$, если $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\sin x = 1$, если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\sin x > 0$, если $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 72, *а*);

$\sin x < 0$, если $-\pi + 2\pi k < x < 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 72, *б*).

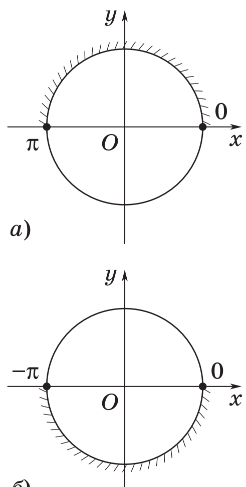


Рис. 72

2. Решение тригонометрических неравенств вида $\cos x > a$, $\cos x < a$

1°. Для решения простейших тригонометрических неравенств вида $\cos x > a$, $\cos x < a$ используют единичную окружность или график функции $y = \cos x$.

2°. Важно знать, что:

$\cos x = 0$, если $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\cos x = -1$, если $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\cos x = 1$, если $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$;

$\cos x > 0$, если $2\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 73, *а*);

$\cos x < 0$, если $2\pi k + \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 73, *б*).

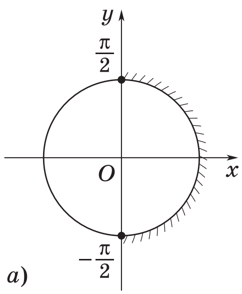


Рис. 73

3. Решение тригонометрических неравенств вида $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$

1°. Для решения простейших тригонометрических неравенств вида $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{tg} x < a$ используют единичную окружность или график функции $y = \operatorname{tg} x$.

2°. Важно знать, что:

$\operatorname{tg} x > 0$, если $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 74, *а*);

$\operatorname{tg} x < 0$, если $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (рис. 74, *б*);

тангенс не существует, если $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

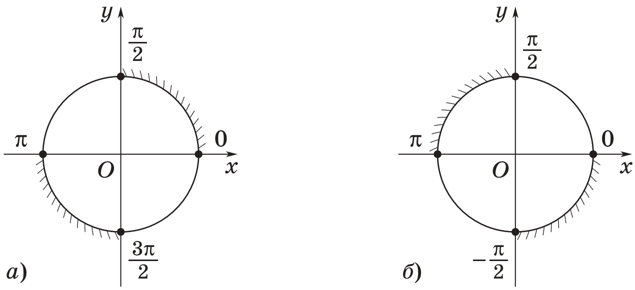


Рис. 74

З а м е ч а н и е. Неравенства $\operatorname{ctg} x > 0$ и $\operatorname{ctg} x < 0$ выполняются на тех же интервалах, что и неравенства $\operatorname{tg} x > 0$ и $\operatorname{tg} x < 0$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. Решить неравенство $\sin x > a$, где $0 < a < 1$.

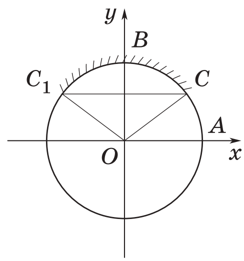


Рис. 75

I способ. **1.** На единичной окружности построим дуги AC и AC_1, синус которых равен a (рис. 75).

2. Из рисунка видно, что данному неравенству удовлетворяют все дуги, началом которых является точка C, а концом — любая внутренняя точка дуги CBC_1, т. е.

$$\arcsin a < x < \pi - \arcsin a.$$

3. Чтобы получить все решения данного неравенства, достаточно прибавить к концам этого промежутка $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. *Ответ*: $\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

II способ. **1.** Построим график функции $y = \sin x$ и прямую $y = a$ (рис. 76).

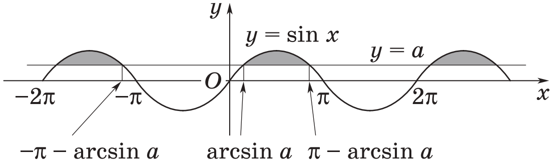


Рис. 76

2. На рисунке отмечены несколько промежутков значений x, удовлетворяющих данному неравенству; одним из них является $(\arcsin a; \pi - \arcsin a)$.

3. Используя периодичность синуса, запишем ответ.

2. Решить неравенство $\sin x < a$, где $0 < a < 1$.

1. Используя рис. 75, заключаем, что данному неравенству удовлетворяют все дуги, началом которых является точка C_1, а концом — любая внутренняя точка дуги C_1AC, т. е.

$$-\pi - \arcsin a < x < \arcsin a.$$

2. Чтобы получить все решения данного неравенства, прибавим к концам этого промежутка $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3. *Ответ*: $-\pi - \arcsin a + 2\pi k < x < \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. Тот же результат получится, если рассмотреть график функции $y = \sin x$ и прямую $y = a$ (см. рис. 76), а затем отметить те промежутки, на которых синусоида лежит ниже прямой $y = a$.

3. Решить неравенство $\cos x > a$, где $-1 < a < 0$.

1. На единичной окружности построим дуги AC и AC_1, косинус которых равен a (рис. 77).

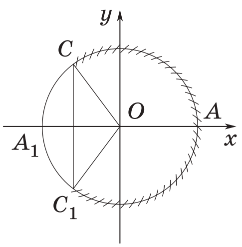


Рис. 77

2. Из рисунка видно, что данному неравенству удовлетворяют все дуги, началом которых является точка C_1, а концом — любая внутренняя точка дуги C_1AC, т. е.

$$-\arccos a < x < \arccos a.$$

3. Учитывая периодичность косинуса, запишем ответ.

4. *Ответ*: $-\arccos a + 2\pi k < x < \arccos a + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. Решить неравенство $\cos x < a$, где $-1 < a < 0$.

1. Используя рис. 77, заключаем, что данному неравенству удовлетворяют все дуги, началом которых является точка C, а концом — любая внутренняя точка дуги CA_1C_1, т. е.

$$\arccos a < x < 2\pi - \arccos a.$$

2. Учитывая периодичность косинуса, запишем ответ.

3. *Ответ*: $\arccos a + 2\pi k < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

5. Решить неравенство $\operatorname{tg} x > a$.

1. Построим единичную окружность и проведем ось тангенсов, которая является касательной к окружности в точке $A(1;\ 0)$ (рис. 78).

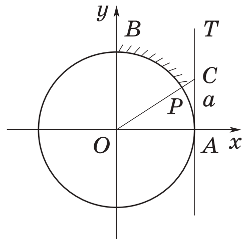


Рис. 78

2. На оси тангенсов находим точку C, ордината которой равна a.

3. Точка пересечения отрезка OC с окружностью есть конец дуги AP, тангенс которой равен a.

4. Из рис. 78 видно, что данному неравенству удовлетворяют все дуги, началом которых является точка P, а концом — любая внутренняя точка дуги PB, т. е.

$$\operatorname{arctg} a < x < \frac{\pi}{2}.$$

5. Используя периодичность тангенса, запишем ответ.

6. *Ответ*: $\operatorname{arctg} a + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

6. Решить неравенство $\operatorname{ctg} x > a$.

1. Построим единичную окружность и проведем ось котангенсов, являющуюся касательной к окружности в точке $B(0;\ 1)$ (рис. 79).

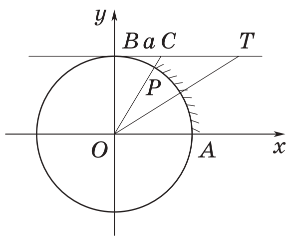


Рис. 79

2. На оси котангенсов возьмем точку C, абсцисса которой равна a.

3. Точка пересечения отрезка OC с окружностью есть конец дуги AP, котангенс которой равен a.

4. Из рис. 79 видно, что данному неравенству удовлетворяют все дуги, началом которых является точка A, а концом — любая внутренняя точка дуги AP, т. е.

$$0 < x < \operatorname{arcctg} a.$$

5. Учитывая периодичность котангенса, запишем ответ.

6. *Ответ*: $\pi k < x < \operatorname{arcctg} a + \pi k$.

З а м е ч а н и е. Задачи 3—6 можно также решить графически, используя графики соответствующих тригонометрических функций.

7. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$\sin ax \leqslant -\frac{1}{2}.$$

1. На единичной окружности находим две точки, ординаты которых равны $-\frac{1}{2}$ (рис. 80).

2. Одна из этих точек является концом каждой из дуг множества $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, а другая — концом каждой из дуг множества $-\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = -\pi + \frac{\pi}{6} + 2\pi k = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

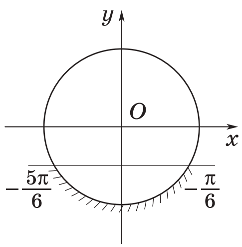


Рис. 80

3. Из рис. 80 видно, что данное неравенство справедливо, когда

$$-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leqslant ax \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

4. а) Отсюда при $a > 0$ получим

$$\frac{1}{a}\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) \leqslant x \leqslant \frac{1}{a}\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

б) При $a < 0$ находим

$$\frac{1}{a}\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \leqslant x \leqslant \frac{1}{a}\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

в) При $a = 0$ решений нет.

5. *Ответ*: если $a = 0$, то решений нет;

если $a > 0$, то $\frac{1}{a}\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right) \leqslant x \leqslant \frac{1}{a}\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$;

если $a < 0$, то $\frac{1}{a}\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \leqslant x \leqslant \frac{1}{a}\left(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$,

$k \in \boldsymbol{Z}$.

8. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$\sin ax < b, \text{ где } 0 < b < 1.$$

1. Построим на единичной окружности две точки с ординатой, равной b.

2. Данное неравенство справедливо, когда

$$-\pi - \arcsin b + 2\pi k < ax < \arcsin b + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

3. а) Отсюда при $a > 0$ находим

$$\frac{1}{a}(\pi(2k-1) - \arcsin b) < x < \frac{1}{a}(\arcsin b + 2\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

б) При $a < 0$ находим

$$\frac{1}{a}(\arcsin b + 2\pi k) < x < \frac{1}{a}(\pi(2k-1) - \arcsin b),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

в) Если $a = 0$, то x — любое действительное число.

4. *Ответ*: если $a = 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$;

если $a > 0$, то

$$\frac{1}{a}(\pi(2k-1) - \arcsin b) < x < \frac{1}{a}(\arcsin b + 2\pi k);$$

если $a < 0$, то

$$\frac{1}{a}(\arcsin b + 2\pi k) < x < \frac{1}{a}(\pi(2k-1) - \arcsin b),$$

$$k \in \boldsymbol{Z}.$$

9. Решить неравенство $\cos\left(ax - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1. На единичной окружности найдем две точки, абсциссы которых равны $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (рис. 81).

2. Данное неравенство верно, когда

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leqslant ax - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{5\pi}{4} + 2\pi k,$$

т. е.

$$\pi + 2\pi k \leqslant ax \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

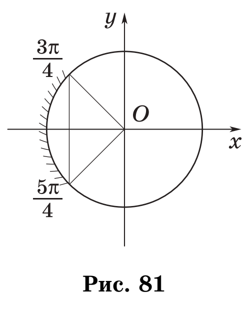


Рис. 81

3. а) Отсюда при $a > 0$ находим

$$\frac{1}{a}(\pi + 2\pi k) \leqslant x \leqslant \frac{1}{a}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

б) При $a < 0$ находим

$$\frac{1}{a}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) \leqslant x \leqslant \frac{1}{a}(\pi + 2\pi k),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

в) При $a = 0$ решений нет.

4. *Ответ*: если $a = 0$, то решений нет;

если $a > 0$, то $\frac{1}{a}(\pi + 2\pi k) \leqslant x \leqslant \frac{1}{a}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$;

если $a < 0$, то $\frac{1}{a}\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) \leqslant x < \frac{1}{a}(\pi + 2\pi k)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

10. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$\operatorname{tg}(ax + 2) \geqslant \sqrt{3}\,.$$

1. На оси тангенсов находим точку C, ордината которой равна $\sqrt{3}$ (рис. 82).

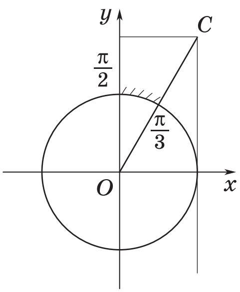


Рис. 82

2. Точка пересечения отрезка OC с окружностью является концом дуги $\frac{\pi}{3}$.

3. Поскольку период тангенса равен π, заключаем, что данное неравенство справедливо при

$$\frac{\pi}{3} + \pi k \leqslant ax + 2 < \frac{\pi}{2} + \pi k,$$

или

$$-2 + \frac{\pi}{3} + \pi k \leqslant ax < -2 + \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

4. а) Отсюда при $a > 0$ имеем

$$\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} - 2 + \pi k\right) \leqslant x < \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - 2 + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

б) При $a < 0$ получим

$$\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - 2 + \pi k\right) < x \leqslant \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} - 2 + \pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

в) Если $a = 0$, то неравенство примет вид $\operatorname{tg} 2 \geqslant \sqrt{3}$, что неверно. Следовательно, при $a = 0$ оно не имеет решений.

5. *Ответ*: если $a = 0$, то решений нет;

если $a > 0$, то $\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} - 2 + \pi k\right) \leqslant x < \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - 2 + \pi k\right)$;

если $a < 0$, то $\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - 2 + \pi k\right) < x \leqslant \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} - 2 + \pi k\right)$,

$k \in \boldsymbol{Z}$.

11. В зависимости от значений параметра m решить неравенство

$$\operatorname{ctg}(mx - 1) \leqslant 2.$$

1. На оси котангенсов находим точку C, абсцисса которой равна 2 (рис. 83).

2. Точка пересечения отрезка OC с окружностью есть конец дуги arcctg 2.

3. Так как период котангенса равен π, то приходим к выводу, что данное неравенство верно при

$$\operatorname{arcctg} 2 + \pi k \leqslant mx - 1 < \pi + \pi k,$$

или

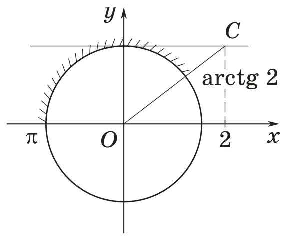


Рис. 83

$$1 + \operatorname{arcctg} 2 + \pi k \leqslant mx < 1 + \pi + \pi k.$$

4. а) Отсюда при $m > 0$ находим

$$\frac{1}{m}(1 + \operatorname{arcctg} 2 + \pi k) \leqslant x < \frac{1}{m}(1 + \pi + \pi k),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

б) При $m < 0$ получим

$$\frac{1}{m}(1 + \pi + \pi k) < x \leqslant \frac{1}{m}(1 + \operatorname{arcctg} 2 + \pi k),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

в) При $m = 0$ неравенство примет вид $\operatorname{ctg}(-1) \leqslant 2$, что верно. Значит, при $m = 0$ неравенство справедливо для любых x.

5. *Ответ*: если $m = 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$;

если $m > 0$, то

$$\frac{1}{m}(1 + \operatorname{arcctg} 2 + \pi k) \leqslant x < \frac{1}{m}(1 + \pi + \pi k);$$

если $m < 0$, то

$$\frac{1}{m}(1 + \pi + \pi k) < x \leqslant \frac{1}{m}(1 + \operatorname{arcctg} 2 + \pi k),\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

12. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$(a-2)\sin x > 3a+4. \qquad (1)$$

1. Очевидно, что при $a = 2$ неравенство (1) не имеет решений.

2. Будем считать, что $a - 2 \neq 0$. При таких значениях параметра a рассмотрим сначала случай $a - 2 < 0$. В этом случае неравенство (1) равносильно неравенству $\sin x < \frac{3a+4}{a-2}$.

Тогда при выполнении условий

$$\begin{cases} a-2<0, \\ \dfrac{3a+4}{a-2} \leqslant -1, \end{cases}$$

т. е. при $-\frac{1}{2} \leqslant a < 2$, неравенство (1) не имеет решений.

3. Если же выполняются условия

$$\begin{cases} a-2<0, \\ \dfrac{3a+4}{a-2} > 1, \end{cases}$$

т. е. если $a < -3$, то решением неравенства (1) является любое x.

4. Далее, если

$$\begin{cases} a-2<0, \\ -1 < \dfrac{3a+4}{a-2} \leqslant 1, \end{cases}$$

т. е. если $-3 \leqslant a < -\frac{1}{2}$, то неравенство (1) имеет следующие решения:

$$-\arcsin\frac{3a+4}{a-2} + \pi(2k-1) < x < \arcsin\frac{3a-4}{a-2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

5. Рассмотрим теперь случай $a - 2 > 0$. В этом случае $\frac{3a+4}{a-2} > 1$, а потому неравенство (1) не имеет решений.

6. *Ответ*: если $a < -3$, то $x \in \boldsymbol{R}$;

если $-3 \leqslant a < -\frac{1}{2}$, то $-\arcsin\frac{3a+4}{a-2} + \pi(2k-1) < x <$

$< \arcsin\frac{3a+4}{a-2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$;

если $a \geqslant -\frac{1}{2}$, то решений нет.

13. При каких значениях параметра a неравенство

$$a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a > 0 \qquad (1)$$

справедливо для любых значений x?

1. Поскольку неравенство (1) должно выполняться при всех значениях переменной x, оно должно выполняться и при $x = \frac{\pi}{2}$. При этом значении x из неравенства (1) следует, что $82a - 3 > 0$.

2. Таким образом, все значения параметра a, удовлетворяющие требованию задачи, принадлежат промежутку $a > \frac{3}{82}$.

3. Замечая теперь, что при любом значении переменной x справедливы неравенства $\cos^2 x \geqslant 0$, $4 - \sin x \geqslant 3$, $(4 - \sin x)^4 \geqslant 81$ и при этом $a > 0$, получим

$$a(4 - \sin x)^4 - 3 + \cos^2 x + a \geqslant 81a - 3 + a = 82a - 3 > 0.$$

4. Итак, все значения a из промежутка $a > \frac{3}{82}$ удовлетворяют требованию задачи.

5. *Ответ*: $a \in \left(\frac{3}{82}; +\infty\right)$.

14. При каких значениях параметра a квадратное уравнение

$$8x^2 + 8x \cos a + 1 = 0 \qquad (1)$$

не имеет действительных корней?

1. Найдем дискриминант уравнения (1):

$$D = (8 \cos a)^2 - 4 \cdot 8 = 32(2 \cos^2 a - 1).$$

Если он отрицателен, т. е. если

$$2 \cos^2 a - 1 < 0, \qquad (2)$$

то квадратное уравнение (1) не имеет действительных корней.

2. Неравенство (2) равносильно неравенству $\cos 2a < 0$, решив которое получим ответ.

3. *Ответ*: $\frac{\pi}{4} + \pi k < a < \frac{3\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

15. При каких значениях параметра a неравенство

$$a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a\cos x > 2$$

справедливо для любого x?

1. Так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ и множество значений функции $y = \cos x$ есть промежуток $[-1; 1]$, то задачу можно переформулировать так: при каких значениях параметра a наименьшее значение квадратного трехчлена

$$f(y) = y^2 - 2ay + a^2 + 2a - 3 \quad (1)$$

на отрезке $-1 \leqslant y \leqslant 1$ положительно?

2. В силу того, что абсцисса вершины параболы (1) равна a, заключаем, что наименьшее значение функции (1) на отрезке $[-1; 1]$ есть:

$$\begin{array}{ll} f(-1) = a^2 + 4a - 2, & \text{если } a \leqslant -1; \\ f(a) = 2a - 3, & \text{если } -1 < a < 1; \\ f(1) = a^2 - 2, & \text{если } a \geqslant 1. \end{array}$$

3. Учитывая, что наименьшее значение функции $f(y)$ должно быть положительным, приходим к совокупности следующих систем неравенств:

$$\begin{cases} a^2 + 4a - 2 > 0, \\ a \leqslant -1; \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2a - 3 > 0, \\ -1 < a < 1; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} a^2 - 2 > 0, \\ a \geqslant 1. \end{cases} \quad (4)$$

4. Решение системы (2) есть промежуток $-\infty < a < -2 - \sqrt{6}$, система (3) несовместна, а решение системы (4) — промежуток $\sqrt{2} < a < +\infty$.

5. *Ответ*: $a \in (-\infty; -2 - \sqrt{6}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

16. При каких значениях параметра k неравенство

$$\sin^6 x + \cos^6 x + k\sin x\cos x \geqslant 0 \quad (1)$$

справедливо для всех значений x?

1. Преобразуем левую часть неравенства (1). Имеем

$$\sin^6 x + \cos^6 x + k \sin x \cos x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 + k \sin x \cos x =$$
$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x) + k \sin x \cos x =$$
$$= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x + \frac{k}{2} \sin 2x. \qquad (2)$$

2. Используя подстановку $y = \sin 2x$, сведем неравенство (2) к равносильному неравенству

$$-\frac{3}{4} y^2 + \frac{k}{2} y + 1 \geqslant 0. \qquad (3)$$

3. Теперь задачу можно переформулировать так: при каких значениях параметра k неравенство (3) справедливо для всех y из промежутка $[-1; 1]$?

4. Обозначим квадратный трехчлен в левой части неравенства (3) через $f(y)$. Так как ветви параболы, соответствующей этому трехчлену, направлены вниз (рис. 84), то требование задачи выполняется, если совместна система

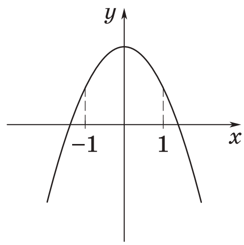


Рис. 84

$$\begin{cases} f(-1) \geqslant 0, \\ f(1) \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 1 - 2k \geqslant 0, \\ 1 + 2k \geqslant 0. \end{cases}$$

Решив последнюю систему, находим $-\frac{1}{2} \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}$.

5. *Ответ*: $k \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

17. При каких значениях a и b система неравенств

$$\begin{cases} a + \sin bx \leqslant 1, & (1) \\ x^2 + ax + 1 \leqslant 0 & (2) \end{cases}$$

имеет единственное решение?

1. Необходимым условием существования единственного решения данной системы является равенство нулю дискриминанта $D = a^2 - 4$ квадратного трехчлена в левой части неравенства (2).

2. Таким образом, требуемыми значениями параметра a могут быть только $a = -2$ и $a = 2$.

3. Если $a = -2$, то $x = 1$, а неравенство (1) примет вид $\sin b \leqslant 3$ и, следовательно, b — любое число.

4. Если $a = 2$, то $x = -1$, а неравенство (1) примет вид $\sin b \geqslant 1$. Решением этого неравенства являются значения $b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

5. *Ответ*: $a = -2$, $b \in \boldsymbol{R}$; $a = 2$, $b = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. В зависимости от значений параметра a решить неравенство:
а) $\sin x > a$ $(-1 < a < 0)$; б) $\cos x \geqslant a$ $(0 < a < 1)$;

в) $\sin\left(ax - \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - ax\right) \leqslant \frac{1}{2}$;

д) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} - ax\right) < \frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\operatorname{ctg}\left(ax + \frac{2\pi}{5}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. Решить неравенство:

а) $\sin^2 \frac{x}{2} + a \sin^2 x \geqslant \frac{1}{2}$; б) $\cos x - \frac{1}{\cos x} \leqslant a$;

в) $0 \leqslant \cos x \leqslant 4 - a^2$; г) $\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \geqslant a$.

3. Найти значения параметра a, при которых для всех $x \in \boldsymbol{R}$ выполняется неравенство:

а) $\sin 2x + (a + 1)\sqrt{2}\, \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) < 2a$;

б) $\sin^2 x - (a + 1)\sin 2x + 2a + 3 > 0$;
в) $\cos^2 x + (a + 1)\sin x < 2 + 3a$.

4. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\sin^5 x + \cos^5 x - a(\sin x + \cos x) \geqslant \frac{a^2 - 11}{2}(\sin x + \cos x)\sin x \cos x$$

верно для всех x таких, что $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Ответы

1. а) $\arcsin a + 2\pi k < x < \pi - \arcsin a + 2\pi k$; б) $2\pi k - \arccos a \leqslant x \leqslant 2\pi k + \arccos a$; в) если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $\frac{1}{a}\left(2\pi k - \frac{5\pi}{12}\right) < x < \frac{1}{a}\left(2\pi k - \frac{\pi}{12}\right)$; если $a < 0$, то $\frac{1}{a}\left(2\pi k - \frac{\pi}{12}\right) < x < \frac{1}{a}\left(2\pi k - \frac{5\pi}{12}\right)$; г) если

$a = 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a > 0$, то $\frac{1}{a}\left(2\pi k - \frac{4\pi}{3}\right) < x < \frac{1}{a} \cdot 2\pi k$; если $a < 0$, то $\frac{1}{a} \cdot 2\pi k < x < \frac{1}{a}\left(2\pi k - \frac{4\pi}{3}\right)$; д) если $a = 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a > 0$, то $\frac{1}{a}\left(-\frac{\pi}{24} + \pi k\right) < x < \frac{1}{a}\left(\frac{5\pi}{8} + \pi k\right)$; если $a < 0$, то $\frac{1}{a}\left(\frac{5\pi}{8} + \pi k\right) < x < \frac{1}{a}\left(-\frac{\pi}{24} + \pi k\right)$; е) если $a = 0$, то решений нет; если $a > 0$, то $\frac{1}{a}\left(\pi k - \frac{2\pi}{5}\right) < x \leqslant \frac{1}{a}\left(\pi k - \frac{\pi}{15}\right)$; если $a < 0$, то $\frac{1}{a}\left(\pi k - \frac{\pi}{15}\right) \leqslant x < \frac{1}{a}\left(\pi k - \frac{2\pi}{5}\right)$. **2.** а) Если $a = 0$, то $\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; если $a \neq 0$, то $\arccos \frac{\sqrt{1+16a^2}-1}{4a} + 2\pi k \leqslant x \leqslant -\arccos \frac{\sqrt{1+16a^2}-1}{4a} + 2\pi(k+1)$; б) если $a < 0$, то $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x \leqslant 2\pi k - \arccos \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2}$, $\arccos \frac{a+\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; если $a = 0$, то $x = \pi(2k+1)$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; если $a > 0$, то $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\arccos \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant -\arccos \frac{a-\sqrt{a^2+4}}{2} + 2\pi(k+1)$; в) если $|a| < \sqrt{3}$, то $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; если $\sqrt{3} < |a| \leqslant 2$, то $\arccos(4 - a^2) + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi k - \arccos(4 - a^2)$; если $|a| > 2$, то решений нет; г) если $a \leqslant 0$, то $x \in \boldsymbol{R}$, кроме $x = \pi k$; если $0 < a < 2$, то решений нет; если $a \geqslant 2$, то $2\pi k < x \leqslant \arcsin \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}} + 2\pi k$, $\pi - \arcsin \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}} + 2\pi k \leqslant x < \pi + 2\pi k$. **3.** а) $a \in (1; +\infty)$; б) $(3 - 2\sqrt{5}; +\infty)$; в) $a \in (5 - 2\sqrt{7}; +\infty)$. **4.** $a \in [-6; 1]$.

Тема 14

1. Приращение аргумента и приращение функции
2. Определение производной
3. Производная суммы, произведения, частного
4. Производная степенной и сложной функции
5. Производные тригонометрических функций
6. Применение производной к нахождению промежутков монотонности функции
7. Критические точки функции, ее максимумы и минимумы
8. Общая схема исследования функции
9. Задачи на отыскание наименьшего и наибольшего значений функции
10. Касательная к графику функции

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Приращение аргумента и приращение функции

1°. Пусть $y = f(x)$ — функция, x и x_0 — два значения независимой переменной из $D(f)$; тогда разность $x - x_0$ называют ***приращением независимой переменной*** (или ***приращением аргумента***) и обозначают Δx (читается: «дельта икс»). Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0. \qquad (1)$$

2°. Из равенства (1) следует, что

$$x = x_0 + \Delta x, \qquad (2)$$

т. е. первоначальное значение переменной получило приращение Δx. Соответственно значение функции изменится на величину

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \qquad (3)$$

3°. Разность между новым значением функции $f(x_0 + \Delta x)$ и первоначальным ее значением $f(x_0)$ называют ***приращением функции*** в точке x_0 и обозначают символом $\Delta f(x_0)$ (читается: «дельта эф в точке x_0»), т. е.

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \qquad \textbf{(4)}$$

4°. Приращение функции f в данной точке x_0 кратко обозначают через Δf или Δy (рис. 85).

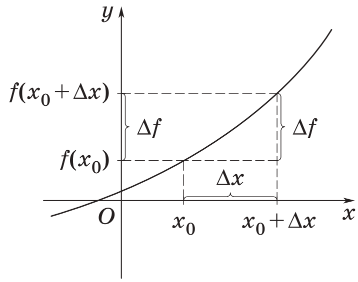


Рис. 85

5°. Понятия приращения функции и приращения аргумента позволяют сформулировать признаки возрастания и убывания функций.

а) Функция $f(x)$ возрастает на промежутке X тогда и только тогда, когда для любых значений x_0 и $x_0 + \Delta x$ ($\Delta x \neq 0$) из промежутка X выполняется неравенство $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} > 0$.

б) Функция $f(x)$ убывает на промежутке X тогда и только тогда, когда для любых значений x_0 и $x_0 + \Delta x$ ($\Delta x \neq 0$) из промежутка X выполняется неравенство $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} < 0$.

2. Определение производной

1°. ***Производной*** функции $f(x)$ в точке x_0 называют предел отношения приращения Δf функции в точке x_0 к приращению Δx аргумента, когда последнее стремится к нулю. Это можно записать так:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

(читается: «эф штрих от x_0»).

2°. Из определения производной следует, что функция может иметь производную в точке x_0 только в том случае, если она определена в некоторой окрестности точки x_0, включая эту точку.

Заметим, что обратное утверждение является неверным.

3°. Нахождение производной функции $y = f(x)$ называют ***дифференцированием*** этой функции.

4°. Вычисление производной функции $y = f(x)$ производится в соответствии с правилом дифференцирования:

а) фиксируют значение аргумента x и находят $f(x)$;

б) дают аргументу x приращение Δx и находят $f(x + \Delta x)$;

в) находят приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$;

г) делят приращение функции Δf на приращение аргумента Δx, т. е. составляют отношение

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x};$$

д) находят предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Найденный предел и есть производная функции $y = f(x)$.

5°. Производная постоянной функции равна нулю: $c' = 0$, где $c = \text{const}$.

6°. Производная функции $y = x$ равна 1: $x' = 1$.

7°. Производная функции $y = \sqrt{x}$ равна $\frac{1}{2\sqrt{x}}$: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

3. Производная суммы, произведения, частного

1°. Производная суммы. Пусть u и v — две функции, определенные на одном и том же промежутке. Тогда производная суммы этих функций равна сумме их производных, если они существуют, т. е.

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x). \tag{1}$$

Эта формула справедлива для любого конечного числа слагаемых.

2°. Производная произведения. Производная произведения двух функций u и v вычисляется по формуле

$$(uv)' = u'v + uv' \tag{2}$$

в предположении, что производные u' и v' существуют.

3°. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$(kf(x))' = kf'(x). \tag{3}$$

4°. Производная частного. Если функции u и v имеют в точке x производные и если $v(x) \neq 0$, то в этой точке существует производная их частного $\frac{u}{v}$, которая вычисляется по формуле

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{4}$$

5°. Частные случаи формулы (4):

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c}u', \tag{5}$$

$$\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{c}{v^2}, \tag{6}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \tag{7}$$

4. Производная степенной и сложной функции

1°. Производная степенной функции. Производная степенной функции x^k, где $k \in \boldsymbol{R}$, $x > 0$, вычисляется по формуле

$$(x^k)' = kx^{k-1}. \tag{1}$$

2°. Заметим, что если $k \in \boldsymbol{Z}$, то формула (1) справедлива для всех значений $x \in \boldsymbol{R}$, кроме $x = 0$. Если же при этом $k > 1$, то формула (1) справедлива для $x \in \boldsymbol{R}$.

3°. Производная сложной функции. Производная сложной функции равна произведению ее производной по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{2}$$

4°. **Формулы дифференцирования**

При условии $u = \varphi(x)$		При условии $u = x$	
		$c' = 0$	(3)
		$x' = 1$	(4)
$(u^k)' = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$, $k \in \boldsymbol{R}$	(5)	$(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$, $k \in \boldsymbol{R}$	(5a)
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	(6)	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	(6a)
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	(7)	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	(7a)

5. Производные тригонометрических функций

1°. Производные тригонометрических функций находятся по следующим формулам:

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Каждая из этих формул справедлива в любой точке области определения соответствующей функции.

2°. **Формулы дифференцирования**

При условии $u = \varphi(x)$		При условии $u = x$	
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	(1)	$(\sin x)' = \cos x$	(1а)
$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	(2)	$(\cos x)' = -\sin x$	(2а)
$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	(3)	$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	(3а)
$(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	(4)	$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	(4а)

6. Применение производной к нахождению промежутков монотонности функции

1°. **Теорема 1.** *Если производная функции f в точке x_0 положительна, то функция возрастает в некоторой окрестности этой точки.*

Если производная функции f в точке x_0 отрицательна, то функция убывает в некоторой окрестности этой точки.

2°. На рис. 86, *а* и 86, *б* графически иллюстрируется возрастание и убывание функции в зависимости от знака ее производной в окрестности данной точки x_0.

Функция, график которой изображен на рис. 86, *а*, возрастает в окрестности точки x_0, так как $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha > 0$; функция, график которой изображен на рис. 86, *б*, убывает в окрестности точки x_0, поскольку $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha < 0$.

3°. **Теорема 2** (достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале). *Если функция f имеет положитель-*

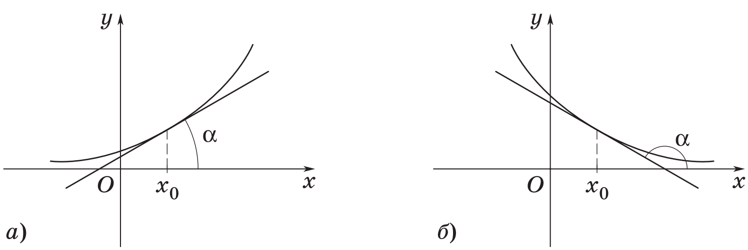


Рис. 86

ную производную в каждой точке интервала (a; b)*, то функция возрастает на этом интервале.*

Если функция f имеет отрицательную производную в каждой точке интервала (a; b)*, то функция убывает на этом интервале.*

4°. Следует отметить, что если функция f монотонна на интервале (a; b) и непрерывна в точках a и b, то она монотонна и на отрезке [a; b].

7. Критические точки функции, ее максимумы и минимумы

1°. Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю или не существует, называют ***критическими***.

2°. Точку x_0 из области определения функции f называют ***точкой минимума*** этой функции, если найдется такая δ-окрестность ($x_0 - \delta$; $x_0 + \delta$) точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

3°. Точку x_0 из области определения функции f называют ***точкой максимума*** этой функции, если найдется такая δ-окрестность ($x_0 - \delta$; $x_0 + \delta$) точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

4°. Точки минимума и максимума называют ***точками экстремума*** данной функции, а значения функции в этих точках — соответственно ***минимумом*** и ***максимумом*** функции (или ***экстремумом*** функции).

5°. а) Функция $y = f(x)$, график которой изображен на рис. 87, в точках x_1 и x_3 имеет минимумы ($y_{\min}$), а в точках x_2 и x_4 — максимумы ($y_{\max}$).

б) Заметим, что точки a и b не считаются точками экстремума функции f, так как у этих точек нет окрестности, целиком входящей в область определения функции.

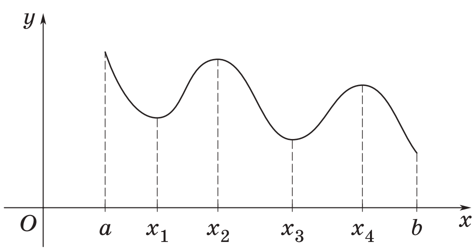


Рис. 87

6°. **Теорема Ферма** (необходимое условие существования экстремума функции). *Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная, то она равна нулю*, т. е. $f'(x_0) = 0$.

Например, функция $f(x) = x^2 - 2x + 1$ в точке $x = 1$ имеет минимум, следовательно, по теореме Ферма производная функции в этой точке равна нулю: $f'(1) = 0$.

7°. Отметим, что теорема Ферма выражает лишь необходимое условие существования экстремума: из того, что производная обращается в нуль или не существует в данной точке x_0, не следует, что x_0 — точка экстремума.

Например:

а) Производная функции $f(x) = x^3$ (рис. 88, *а*) в точке $x = 0$ равна нулю: $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$. Однако в этой точке функция не имеет экстремума.

б) Производная функции $f(x) = 2x + |x|$ (рис. 88, *б*) в точке $x = 0$ не существует. В этой точке функция не имеет экстремума.

8°. Достаточные условия существования экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет производную $f'(x)$ в некоторой окрестности $(a; b)$ этой точки. Тогда:

а) если $f'(x) < 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x_0) > 0$ на интервале $(x_0; b)$ (т. е. производная меняет знак с минуса на плюс), то x_0 — точка минимума функции $f(x)$;

б) если $f'(x) > 0$ на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x_0) < 0$ на интервале $(x_0; b)$ (т. е. производная меняет знак с плюса на минус), то x_0 — точка максимума функции $f(x)$.

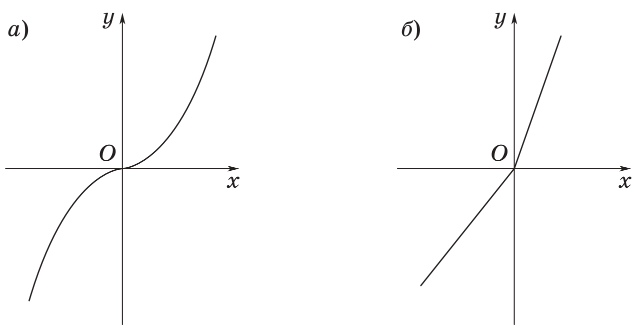


Рис. 88

8. Общая схема исследования функции

1°. Находят область определения функции.

2°. Проверяют, не является ли функция четной или нечетной.

3°. Находят, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции.

4°. Находят производную функции и ее критические точки.

5°. Находят промежутки монотонности и экстремумы функции.

6°. Строят график функции, используя полученные результаты исследования.

9. Задачи на отыскание наименьшего и наибольшего значений функции

1°. На рис. 89 изображен график некоторой функции f, определенной на отрезке $[a; b]$. В точке x_2 функция имеет максимум, а в точках x_1 и x_3 — минимумы.

Как видно из рисунка, функция достигает наименьшего значения в точке x_3 — точке минимума.

Наибольшее значение функция принимает на конце отрезка в точке b, в которой функция не имеет экстремума (так как справа от точки b функция не определена).

2°. Для отыскания наименьшего и наибольшего значений функции, дифференцируемой внутри отрезка и непрерывной на его концах, следует найти все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычислить значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

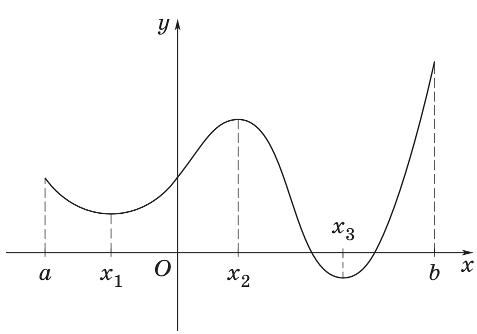


Рис. 89

10. Касательная к графику функции

1°. ***Касательной*** к кривой в данной точке M называют предельное положение секущей NM, когда точка N приближается вдоль кривой к точке M.

2°. В соответствии с определением касательной получаем

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Таким образом, угловой коэффициент касательной к графику функции равен значению производной этой функции в точке касания.

3°. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в заданной точке имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

где $(x_0; y_0)$ — координаты точки касания, $(x; y)$ — текущие координаты, т. е. координаты любой точки, принадлежащей касательной, а $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \varphi$ — угловой коэффициент касательной.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = 2ax^3 + 9ax^2 + 30ax + 66$$

убывает для всех значений x?

1. Функция $f(x)$ убывает для всех значений x, если производная

$$f'(x) = 6ax^2 + 18ax + 30a = 6a(x^2 + 3x + 5) < 0$$

для всех x.

2. Отсюда находим, что $a < 0$.

3. *Ответ*: $a \in (-\infty; 0)$.

2. Определить значения a и b так, чтобы многочлен

$$f(x) = x^5 + ax^2 + bx + 1$$

имел число (-2) корнем не ниже второй кратности.

1. Число (-2) является корнем не ниже второй кратности многочлена $f(x)$, если значения многочлена $f(x)$ и его производной $f'(x) = 5x^4 + 2ax + b$ при $x = -2$ равны нулю.

2. Приравнивая $f(-2)$ и $f'(-2)$ нулю, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4a - 2b = 31, \\ -4a + b = -80, \end{cases}$$

решив которую найдем $a = \dfrac{129}{4}$, $b = 49$.

3. *Ответ*: $a = 32{,}25$, $b = 49$.

3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{2x + a} = x + 3$ имеет ровно один корень. В ответе указать наименьшее целое значение a.

1. В данном случае полезно воспользоваться графической иллюстрацией (рис. 90).

2. Графиком функции $y = x + 3$ является прямая, пересекающая ось абсцисс в точке $x_0 = -3$, а ось ординат — в точке $y_0 = 3$.

3. Графиком функции $y = \sqrt{2x + a}$ для различных значений a является семейство ветвей парабол, вершины которых находятся в точке $\left(-\dfrac{a}{2}; 0\right)$, а сами ветви расположены выше оси Ox.

4. На рис. 90 изображены три такие параболы. Видно, что при увеличении a парабола смещается влево.

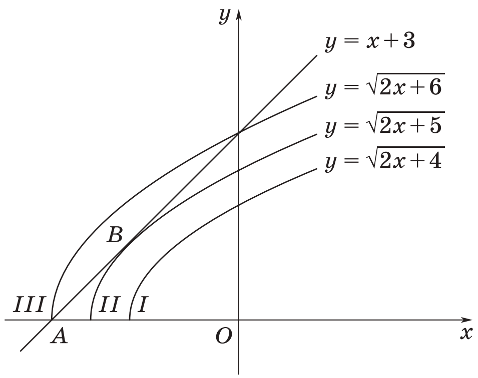


Рис. 90

5. Парабола I не имеет с прямой $y = x + 3$ общих точек, парабола II имеет с этой прямой одну общую точку B (в которой прямая касается параболы) и, наконец, парабола III пересекается с прямой $y = x + 3$ в двух точках.

6. При дальнейшем увеличении a парабола $y = \sqrt{2x + a}$ будет пересекать прямую $y = x + 3$ только в одной точке.

7. Найдем значение параметра, соответствующее точке A. В этой точке имеем $x_0 = -3$ и $2x_0 + a = 0$, поэтому $a = 6$. Значит, при $a > 6$ данное уравнение будет иметь ровно один корень.

8. Найдем значение параметра, соответствующее точке B. Так как в этой точке прямая $y = x + 3$ и парабола $y = \sqrt{2x + a}$ касаются, то производные рассматриваемых функций совпадают, т. е. $\frac{2}{2\sqrt{2x + a}} = 1$, откуда $\sqrt{2x + a} = 1$.

9. Подставив это выражение в исходное уравнение, получим $x + 3 = 1$, откуда $x = -2$. Поэтому $\sqrt{-4 + a} = 1$, т. е. $a = 5$.

10. Таким образом, $a \in (6; +\infty) \cup \{5\}$.

11. *Ответ*: $a = 5$.

4. При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = (a^2 - 3a + 2)\left(\cos^2 \frac{x}{4} - \sin^2 \frac{x}{4}\right) + (a - 1)x + \sin 1$$

не имеет критических точек?

1. Так как данная функция дифференцируема на всей числовой прямой, то критическими точками функции $f(x)$ являются те точки, в которых производная $f'(x) = 0$.

2. В данном случае имеем

$$f'(x) = \frac{1}{2}(a - 1)(a - 2)\left(-\sin \frac{x}{2}\right) + (a - 1).$$

3. Очевидно, что если $a = 1$, то $f'(x) = 0$ при любом $x \in \boldsymbol{R}$, т. е. для заданной функции каждая точка $x \in \boldsymbol{R}$ является критической.

4. Предположим, что $a \neq 1$. Тогда уравнение $f'(x) = 0$ примет вид

$$(a - 2) \sin \frac{x}{2} = 2. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что если $|a - 2| < 2$, т. е. если $a \in (0; 1) \cup (1; 4)$, то уравнение (1) не имеет корней и, значит, при указанных значениях a функция $f(x)$ не имеет критических точек.

5. *Ответ*: $a \in (0; 1) \cup (1; 4)$.

5. При каком значении a минимум функции $y = ax^2 + 4ax + 7a^2 - 1$ равен 2?

1. Найдем критические точки данной функции:

$$y' = 2ax + 4a,\ y' = 0 \text{ при } x = -2.$$

2. В точке $x = -2$ функция имеет экстремум, равный 2. Таким образом, $f(-2) = 4a - 8a + 7a^2 - 1 = 2$, откуда $7a^2 - 4a - 3 = 0$, т. е. $a_1 = -\frac{3}{7}$; $a_2 = 1$.

3. Мы нашли два значения a; какое из них следует взять?

4. Так как данная функция имеет в критической точке минимум, то коэффициент при x^2 должен быть положительным.

5. *Ответ*: $a = 1$.

6. При каком значении a наибольшее значение функции $y = 2x^3 - 6x + a$ на отрезке $[-2; 0]$ равно 5?

1. Выясним, имеет ли функция $y = 2x^3 - 6x + a$ на отрезке $[-2; 0]$ критические точки.

2. Производная данной функции $y' = 6x^2 - 6$ равна нулю при $x = \pm 1$.

3. Следовательно, отрезку $[-2; 0]$ принадлежит одна критическая точка: $x = -1$.

4. Найдем значения функции на концах отрезка и в критической точке: $y(-2) = a - 4$; $y(-1) = a + 4$; $y(0) = a$.

5. Наибольшее из этих значений $y(-1) = a + 4$. Оно и равно 5. Следовательно, $4 + a = 5$, откуда $a = 1$.

6. *Ответ*: $a = 1$.

7. Найти значения параметра a, при которых произведение действительных корней уравнения

$$x^2 + 2(a - 6)x + 2a^2 - 17a + 42 = 0$$

принимает наибольшее значение.

1. Уравнение должно иметь корни, поэтому $D \geqslant 0$.

2. Находим

$$\frac{D}{4} = (a - 6)^2 - (2a^2 - 17a + 42) = -a^2 + 5a - 6 \geqslant 0,$$

откуда $2 \leqslant a \leqslant 3$.

3. Согласно теореме Виета, имеем $x_1x_2 = 2a^2 - 17a + 42$. Следовательно, задача сводится к отысканию наибольшего значения функции $f(a) = 2a^2 - 17a + 42$ на отрезке $2 \leqslant a \leqslant 3$.

4. Находим критические точки функции: $f'(a) = 4a - 17$, $a = 4{,}25 \notin [2; 3]$.

5. Значит, наибольшее значение функции $f(a)$ следует искать на концах отрезка [2; 3]; имеем $f(2) = 16$; $f(3) = 9$.

6. Итак, произведение корней уравнения достигает наибольшего значения при $a = 2$.

7. *Ответ*: $a = 2$.

8. В зависимости от значений параметра a найти наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{1}{2ax^2 - x^4 - 3a^2} \tag{1}$$

на отрезке $[-2; 1]$.

1. Дискриминант квадратного (относительно x^2) трехчлена $2ax^2 - x^4 - 3a^2$ равен $(-8a^2)$, поэтому при любом значении параметра a и любом x из области определения функции $f(x)$ ее значения отрицательны. Кроме того, так как $f(x) = f(-x)$, то график этой функции при каждом фиксированном значении a симметричен относительно оси ординат.

2. Найдем производную функции $f(x)$. Имеем

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - a)}{(2ax^2 - x^4 - 3a^2)^2}. \tag{2}$$

а) Если $a < 0$, то справедливо неравенство $x^2 - a > 0$ и, значит, $f'(x) = 0$ только при $x = 0$.

б) Поэтому $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и $f'(x) > 0$ при $x > 0$.

в) Таким образом, в точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет минимум, а наибольшее значение она принимает на левом конце данного отрезка, т. е. в точке $x = -2$ (в силу симметрии графика относительно оси ординат и того, что $|-2| > 1$).

3. Находим

$$f(-2) = -\frac{1}{3a^2 - 8a + 16}.$$

4. Если $a = 0$, то данная функция примет вид $f(x) = -\frac{1}{x^4}$; эта функция убывает при $x < 0$ и возрастает при $x > 0$ и, следовательно, в точке $x = -2$ она принимает наибольшее значение, которое равно $\left(-\frac{1}{16}\right)$.

5. Если $a > 0$, то производная $f'(x)$ имеет три критические точки: $x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{a}$. В этом случае $f'(x) < 0$ при $x \in$ $\in (-\infty; -\sqrt{a}) \cup (0; \sqrt{a})$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (-\sqrt{a}; 0) \cup (\sqrt{a}; +\infty)$.

6. В точке $x = 0$ функция $f(x)$ имеет локальный максимум, который равен $\left(-\frac{1}{3a^2}\right)$. Для того чтобы полученное значение было наибольшим, нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$-\frac{1}{3a^2-8a+16} \leqslant -\frac{1}{3a^2}, \text{ т. е. } a \geqslant 2.$$

7. *Ответ*: если $a \in (-\infty; 2)$, то $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(-2) = -\frac{1}{3a^2-8a+16}$;

если $a \in [2; +\infty)$, то $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x) = f(0) = -\frac{1}{3a^2}$.

9. В зависимости от значений параметра $t \neq 0$ найти значения параметра a, при которых уравнение

$$2x^3 - 3tx^2 + t = a \tag{1}$$

имеет три различных корня.

1. Для того чтобы уравнение (1) имело три различных корня, функция

$$f(x) = 2x^3 - 3tx^2 + t - a \tag{2}$$

должна иметь локальный максимум и локальный минимум такие, что $f(x_{\max}) > 0$, $f(x_{\min}) < 0$, где $x_{\max} < x_{\min}$.

2. Найдем экстремумы функции (2). Для этого решим уравнение

$$f'(x) = 6x^2 - 6tx = 0.$$

Очевидно, что $x_1 = 0$, $x_2 = t$.

3. Пусть $t > 0$. Тогда $x_1 < x_2$ и x_1 — точка максимума, а x_2 — точка минимума функции $f(x)$. В этом случае имеем

$$f(x_1) = t - a > 0,\ \ f(x_2) = 2t^3 - 3t^3 + t - a = t - t^3 - a < 0,$$

и, следовательно, $t - t^3 < a < t$.

4. Пусть $t < 0$. Тогда $x_2 < x_1$ и теперь x_2 — точка максимума, а x_1 — точка минимума функции $f(x)$. В этом случае имеем

$$f(x_2) = t - t^3 - a > 0,\ \ f(x_1) = t - a < 0$$

и, значит, $t < a < t - t^3$.

5. *Ответ*: если $t < 0$, то $t < a < t - t^3$;
если $t > 0$, то $t - t^3 < a < t$.

10. В зависимости от значений параметра p указать те значения параметра k, при которых уравнение

$$x^3 + 2px^2 + p = k \qquad (1)$$

имеет три различных действительных корня.

1. Для того чтобы уравнение (1) имело три действительных корня, функция

$$f(x) = x^3 + 2px^2 + p - k \qquad (2)$$

должна иметь локальный максимум и локальный минимум, причем $f(x_{\max}) > 0$, а $f(x_{\min}) < 0$.

2. Так как коэффициент при x^3 положителен, то $x_{\max} < x_{\min}$.

3. Найдем экстремумы функции (2). Имеем $f'(x) = 3x^2 + 4px$. Производная обращается в нуль при $x_1 = 0$ и $x_2 = -\frac{4p}{3}$.

4. Возможны три случая.

а) Если $p > 0$, то $x_2 < x_1$ и, следовательно, $f(x_2) = \frac{32}{27}p^3 + p - k > 0$, а $f(x_1) = p - k < 0$, откуда $p < k < \frac{32p^3 + 27p}{27}$.

б) Если $p = 0$, то $x_1 = x_2$ и функция (2) экстремумов не имеет: производная $f'(x)$ всюду, кроме $x = 0$, положительна и функция монотонно возрастает. Таким образом, в этом случае нет таких значений k, при которых данное уравнение имело бы три действительных корня.

в) Если $p < 0$, то $x_1 < x_2$ и, значит, $f(x_1) = p - k > 0$, а $f(x_2) = \frac{32p^3}{27} + p - k < 0$, откуда $\frac{32p^3 + 27p}{27} < k < p$.

5. *Ответ*: если $p < 0$, то $k \in \left(\dfrac{32p^3 + 27p}{27} ; p \right)$;

если $p = 0$, то $k \in \varnothing$;

если $p > 0$, то $k \in \left(p; \dfrac{32p^3 + 27p}{27} \right)$.

11. При каких отличных от нуля значениях параметров a и b все экстремумы функции

$$f(x) = a^2x^3 + ax^2 - x + b \qquad \textbf{(1)}$$

отрицательны и локальный максимум достигается в точке $x_0 = -1$?

1. Так как коэффициент при x^3 положителен, то максимум должен находиться левее минимума.

2. Для отыскания экстремальных точек найдем производную функции (1) и приравняем ее нулю. Имеем

$$f'(x) = 3a^2x^2 + 2ax - 1 = 0,$$

откуда $x_1 = -\dfrac{1}{a}$, $x_2 = \dfrac{1}{3a}$.

3. Пусть $a < 0$; тогда $\dfrac{1}{3a} < -\dfrac{1}{a}$ и, следовательно, $x_2 = x_0 = \dfrac{1}{3a}$, т. е. $\dfrac{1}{3a} = -1$. Таким образом, $a = -\dfrac{1}{3}$.

4. Согласно условию, все экстремумы отрицательны, поэтому при $a = -\dfrac{1}{3}$ имеем $f(-1) = -\dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{3} + 1 + b < 0$. Отсюда находим, что $b < -\dfrac{5}{9}$.

5. Пусть $a > 0$; тогда $-\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{3a}$, а, значит, $x_1 = x_0 = -\dfrac{1}{a}$, т. е. $-\dfrac{1}{a} = -1$, откуда $a = 1$. При $a = 1$ имеем $f(-1) = -1 + 1 + 1 + b < 0$ и, следовательно, $b < -1$.

6. *Ответ*: при $a = -\dfrac{1}{3}$ и $b < -\dfrac{5}{9}$; при $a = 1$ и $b < -1$.

12. При каких значениях параметра a уравнение

$$\cos x + \frac{3}{2} \cos \frac{2x}{3} + 3 \cos \frac{x}{3} = a$$

имеет решения?

1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \cos x + \frac{3}{2} \cos \frac{2x}{3} + 3 \cos \frac{x}{3},$$

которая является периодической с наименьшим положительным периодом $T = 6\pi$.

2. Очевидно, что уравнение (1) будет иметь решения тогда и только тогда, когда $\min f(x) \leqslant a \leqslant \max f(x)$ на промежутке $[0; 6\pi]$.

3. Для нахождения на этом промежутке критических точек решим уравнение $f'(x) = 0$. Это уравнение имеет вид

$$\sin x + \sin \frac{2x}{3} + \sin \frac{x}{3} = 0, \text{ или } \sin \frac{2x}{3} \left(2 \cos \frac{x}{3} + 1 \right) = 0.$$

Отсюда либо $\sin \frac{2x}{3} = 0$, либо $\cos \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$.

4. Из первого уравнения находим $x = \frac{3\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Второе уравнение дает $x = \pm 2\pi + 6\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

5. Таким образом, промежутку $[0; 6\pi]$ принадлежат следующие критические точки функции $f(x)$: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3\pi}{2}$, $x_3 = 2\pi$, $x_4 = 3\pi$, $x_5 = 4\pi$, $x_6 = \frac{9\pi}{2}$, $x_7 = 6\pi$.

6. Вычислив значения функции $f(x)$ в этих точках, находим

$$f(0) = f(6\pi) = \frac{11}{2}, \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f\left(\frac{9\pi}{2}\right) = -\frac{3}{2},$$

$$f(2\pi) = f(4\pi) = -\frac{5}{4}, \; f(3\pi) = -\frac{5}{2}.$$

7. *Ответ*: $-\frac{5}{2} \leqslant a \leqslant \frac{11}{2}$.

13. Найти множество всех чисел a, при каждом из которых функция

$$f(x) = \sin 2x - 8(a + 1)\sin x + (4a^2 + 8a - 14)x$$

является возрастающей на всей числовой прямой и не имеет при этом критических точек.

1. При любом фиксированном a данная функция дифференцируема в каждой точке числовой прямой.

2. Так как функция $f(x)$ возрастает, то в каждой точке x должно выполняться неравенство $f'(x) \geqslant 0$.

3. Так как, кроме того, $f(x)$ не имеет критических точек, то при любом x должно быть выполнено неравенство $f'(x) \neq 0$.

4. Таким образом, если функция удовлетворяет условию задачи, то при всех x должно быть выполнено неравенство $f'(x) > 0$.

5. С другой стороны, если при всех x выполнено неравенство $f'(x) > 0$, то функция, очевидно, не имеет критических точек и возрастает.

6. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = 2\cos 2x - 8(a + 1)\cos x + 4a^2 + 8a - 14.$$

Теперь задачу можно переформулировать так: найти все значения параметра a, при каждом из которых для любого x выполнено неравенство

$$\cos 2x - 4(a + 1)\cos x + 2a^2 + 4a - 7 > 0. \qquad (1)$$

7. Учитывая, что $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$, и полагая $\cos x = t$, где $-1 \leqslant t \leqslant 1$, перепишем неравенство (1) следующим образом:

$$2t^2 - 1 - 4(a + 1)t + 2a^2 + 4a - 7 > 0,$$

или

$$t^2 - 2(a + 1)t + a^2 + 2a - 4 > 0. \qquad (2)$$

8. Обозначив функцию в левой части неравенства (2) через $\varphi(t)$, дадим новую формулировку исходной задачи: найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $\varphi(t)$ на отрезке $[-1; 1]$ положительно.

9. Производная $\varphi'(t) = 2t - 2(a + 1)$ обращается в нуль при $t_0 = a + 1$.

10. Наименьшее значение функции $\varphi(t)$ на отрезке $[-1; 1]$ есть:

$\varphi(-1) = a^2 + 4a - 1$, если $a + 1 \leqslant -1$;

$\varphi(a + 1) = -5$, если $-1 < a + 1 < 1$;

$\varphi(1) = a^2 - 5$, если $a + 1 \geqslant 1$.

11. Так как наименьшее значение функции $\varphi(t)$ на отрезке $[-1; 1]$ должно быть положительно, то значения параметра a, удовлетворяющие условию задачи, принадлежат двум промежуткам: $a \leqslant -2$ и $a \geqslant 0$.

12. Если $a \leqslant -2$, то искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству $a^2 + 4a - 1 > 0$.

13. Если $a \geqslant 0$, то искомые значения параметра a удовлетворяют неравенству $a^2 - 5 > 0$.

14. Следовательно, множество искомых значений a есть объединение решений двух систем неравенств:

$$\begin{cases} a \leqslant -2, \\ a^2 + 4a - 1 > 0; \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} a \geqslant 0, \\ a^2 - 5 > 0. \end{cases} \qquad (4)$$

15. Множество решений системы (3) есть промежуток $-\infty < a <$ $< -2 - \sqrt{5}$, а множество решений системы (4) — промежуток $a > \sqrt{5}$.

16. *Ответ*: $a \in (-\infty; -2 - \sqrt{5}\,) \cup (\sqrt{5}\,; +\infty)$.

14. Прямая $y = 5x + 3$ касается параболы $y = x^2 + bx + c$ в точке $A(-2; -7)$. Найти b и c.

1. Находим производную $y' = 2x + b$ и ее значение $y'(-2) = -4 + b$, которое равно угловому коэффициенту $k = 5$ касательной к параболе в точке A.

2. Таким образом, $-4 + b = 5$, откуда $b = 9$.

3. Значение c найдем из условия, что точка $A(-2; -7)$ лежит на параболе. Имеем $-7 = 4 + 9(-2) + c$, откуда $c = 7$.

4. *Ответ*: $b = 9$, $c = 7$.

15. Известно, что парабола $y = ax^2 + bx + 1$ касается прямой $y =$ $= 7x - 2$ в точке $M(1; 5)$. Найти значение выражения $4a - b^2$.

1. Найдем производную функции $y = ax^2 + bx + 1$:

$$y' = (ax^2 + bx + 1)' = 2ax + b.$$

2. Так как $M(1; 5)$ — точка касания, то $x_0 = 1$, $y_0 = 5$. Следовательно, $5 = a \cdot 1 + b \cdot 1 + 1$ и $2a + b = 7$.

3. Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} 5 = a + b + 1, \\ 2a + b = 7, \end{cases}$$

откуда $a = 3$, $b = 1$.

4. *Ответ*: 11.

16. При каких значениях a прямая $4x + y - 5 = 0$ является касательной к графику функции $y = \frac{2a - x^2}{x^2}$?

1. Пусть x_0, y_0 — координаты точки касания. Тогда

$$y_0 = \frac{2a}{x_0^2} - 1,\ y'(x_0) = -\frac{4a}{x_0^3}.$$

2. Уравнение касательной к графику функции $y = \frac{2a - x^2}{x^2} = \frac{2a}{x^2} - 1$ в точке x_0 имеет вид

$$y = \left(\frac{2a}{x_0^2} - 1\right) + \left(-\frac{4a}{x_0^3}\right)(x - x_0) = -\frac{4a}{x_0^3} \cdot x + \frac{6a}{x_0^2} - 1. \qquad (1)$$

3. Чтобы уравнение (1) совпало с уравнением $y = -4x + 5$, требуется выполнение условий

$$\begin{cases} -\frac{4a}{x_0^3} = -4, \\ \frac{6a}{x_0^2} - 1 = 5. \end{cases} \qquad (2)$$

4. Решив систему (2), находим $x_0 = 1$, $a = 1$.

5. *Ответ*: $a = 1$.

17. При каком наименьшем натуральном k уравнение

$$x^3 + 3x^2 - 45x + k = 0$$

имеет ровно один корень?

1. Построим эскиз графика функции $y_1 = x^3 + 3x^2 - 45x$ и определим наименьшее натуральное значение k, при котором этот график пересекает прямую $y_2 = -k$ ровно в одной точке.

2. а) $D(y_1) = \boldsymbol{R}$;

б) $y_1' = 3x^2 + 6x - 45$;

в) $y_1' = 0$ при $x_1 = -5$; $x_2 = 3$;

г) $y_1(-5) = 175$; $y_1(3) = -81$;

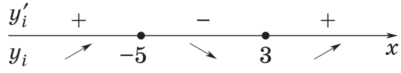


Рис. 91

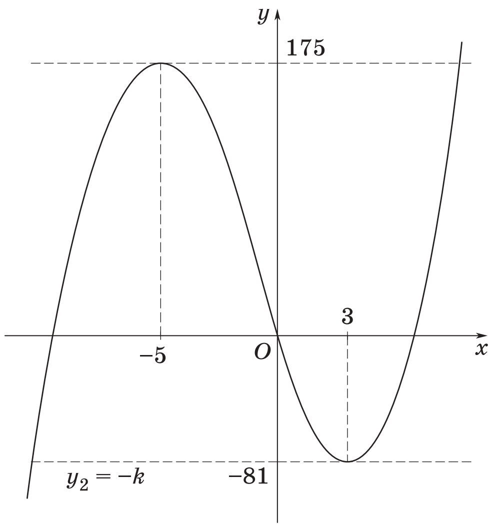


Рис. 92

д) изменение знаков производной y_1' в интервалах $(-\infty; -5)$, $(-5; 3)$ и $(3; +\infty)$ иллюстрирует рис. 91. На рис. 92 дано схематическое изображение графика функции y_1.

3. Очевидно, что данное уравнение имеет единственное решение, если $-k > 175$ или $-k < -81$, т. е. $k < -175$ или $k > 81$. Наименьшее натуральное значение k равно 82.

4. *Ответ*: $k = 82$.

18. При каком значении параметра a минимум функции

$$f(x) = ax^2 - 6ax + a^2 - 9 \quad (1)$$

равен 1?

1. Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = (ax^2 - 6ax + a^2 - 9)' = 2ax - 6a.$$

2. Полагая $f'(x) = 0$, имеем $2ax - 6a = 0$, откуда $a \neq 0$, $x = 3$.

3. Найдем значение функции (1) в точке $x = 3$:

$$f(3) = 9a - 18a + a^2 - 9 = 1. \qquad (2)$$

4. Решив уравнение (2), получим $a_1 = -1$; $a_2 = 10$.

5. Так как по условию требуется определить минимум функции, то ветви параболы (1) направлены вверх, а это значит, что $a_2 = 10$.

6. *Ответ*: $a = 10$.

19. При каком значении параметра a минимум функции

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x + 4a$$

равен 1?

1. $f'(x) = -6x^2 + 6x + 12$.

2. $y' = 0$ при $x_1 = -1$; $x_2 = 2$.

3. $y(2) = 20 + 4a = 1$; $a_1 = -\frac{19}{4}$.

4. $y(-1) = -7 + 4a = 1$; $a_2 = 2$.

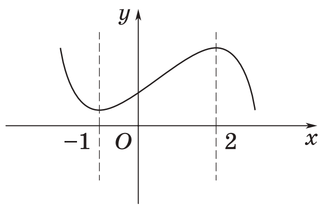


Рис. 93

5. Схематическое изображение графика функции (рис. 93) показывает, что ее минимум достигается в точке $x_1 = -1$; поэтому нужно взять значение $a_2 = 2$.

6. *Ответ*: $a = 2$.

20. Найти множество значений параметра k, при которых касательная к параболе

$$y = -x^2 + (k - 2)x + k - 2 \qquad (1)$$

в точке $x_0 = 1$ является также касательной к параболе

$$y = x^2 - 6x + 5. \qquad (2)$$

1. Уравнение касательной в общем случае имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

2. Находим

$$f(x_0) = f(1) = -1 + (k - 2) \cdot 1 + k - 2 = 2k - 5.$$

3. Имеем

$$f'(x) = -2x + k - 2,\ f'(x_0) = f'(1) = -2 \cdot 1 + k - 2 = k - 4.$$

4. Запишем уравнение касательной к параболе (1):

$$y = 2k - 5 + (k - 4)(x - 1), \text{ или } y = (k - 4)x + k - 1. \qquad (3)$$

Эта касательная должна быть также касательной к параболе (2).

5. Чтобы найти общие точки касательной (3) и параболы (2), составим уравнение

$$(k - 4)x + k - 1 = x^2 - 6x + 5, \text{ или } x^2 - (k + 2)x + 6 - k = 0. \qquad (4)$$

6. Так как прямая (3) является касательной к кривой (2), то она имеет единственную общую точку с этой кривой.

7. Уравнение (4) имеет единственное решение, если дискриминант этого уравнения равен нулю, т. е. $D = 0$.

8. Из равенства $D = (k + 2)^2 - 4(6 - k) = 0$ находим $k_1 = -10$, $k_2 = 2$.

9. *Ответ*: $k \in \{-10; 2\}$.

21. При каком значении параметра a хорда параболы

$$y = -a^2x^2 + 5ax - 4, \qquad (1)$$

касающая кривой

$$y = \frac{1}{1 - x} \qquad (2)$$

в точке с абсциссой $x_0 = 2$, делится этой точкой пополам?

1. Так как в точке $x_0 = 2$ значение функции $f(x) = \frac{1}{1 - x}$ равно (-1), а значение производной $f'(x) = \frac{1}{(1 - x)^2}$ равно 1, то уравнение касательной к кривой (2) в точке $M(2; -1)$ имеет вид $y = x - 3$.

2. Пусть эта касательная пересекает параболу (1) в точках A и B; тогда абсциссы этих точек являются корнями уравнения

$$-a^2x^2 + 5ax - 4 = x - 3. \qquad (3)$$

3. Точка M есть середина отрезка AB, поэтому ее абсцисса равна полусумме абсцисс точек A и B.

4. Перепишем уравнение (3) в виде

$$x^2 - \frac{5a - 1}{a^2}x + \frac{1}{a^2} = 0, \ a \neq 0. \qquad (4)$$

5. Согласно теореме Виета, $x_1 + x_2 = \frac{5a-1}{a^2}$, и, следовательно, $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{5a-1}{2a^2}$. С другой стороны, $\frac{x_1+x_2}{2} = 2$. Таким образом, $\frac{5a-1}{2a^2} = 2$. Отсюда получим $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = 1$.

6. Найдем дискриминант квадратного уравнения (4):

$$D = \left(\frac{5a-1}{a^2}\right)^2 - \frac{4}{a^2} = \frac{21a^2 - 10a + 1}{a^4}. \qquad \textbf{(5)}$$

7. Подставив значение $a = 1$ в выражение (5), замечаем, что $D > 0$, поэтому $a = 1$ удовлетворяет требованию задачи.

8. Если же $a = \frac{1}{4}$, то $D < 0$, т. е. $a = \frac{1}{4}$ требованию задачи не удовлетворяет.

9. *Ответ*: $a = 1$.

22. При каком значении параметра a касательная к графику функции $y = a - x^2$ отсекает от I четверти равнобедренный треугольник с площадью, равной $\frac{9}{32}$?

1. Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ имеет вид $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$, где $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, α — угол наклона касательной к оси абсцисс.

2. Так как по условию касательная к графику данной функции отсекает от I четверти равнобедренный треугольник, то $\alpha = 135°$ и, значит, $f'(x_0) = -1$.

3. С другой стороны, $f'(x_0) = -2x_0$ и, следовательно, $x_0 = \frac{1}{2}$.

4. При $x_0 = \frac{1}{2}$ находим $y_0 = f\left(\frac{1}{2}\right) = a - \frac{1}{4}$ и уравнение касательной к графику данной функции запишется так:

$$y = -x + a + \frac{1}{4}.$$

5. Эта касательная пересекает оси координат в точках $A\left(0; a + \frac{1}{4}\right)$ и $B\left(a + \frac{1}{4}; 0\right)$.

6. Согласно условию, точки A и B лежат на положительных полуосях, поэтому $a > -\frac{1}{4}$.

7. Для площади треугольника, о котором идет речь в задаче, имеем следующее равенство:

$$\frac{9}{32} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{4}\right)^2.$$

Отсюда находим $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = -1$. Учитывая, что $a > -\frac{1}{4}$, окончательно получаем $a = \frac{1}{2}$.

8. *Ответ*: $a = \frac{1}{2}$.

23. При каком значении параметра a прямые, проходящие через точку $M(1;\,1)$ плоскости xOy и касающиеся двух ветвей гиперболы $y = \frac{a}{x}$ $(a < 0)$ в точках A и B, образуют правильный треугольник MAB? Найти площадь S этого треугольника.

1. При некотором фиксированном значении параметра a обозначим через t абсциссу произвольной точки гиперболы $y = \frac{a}{x}$.

2. Тогда уравнение касательной к указанной гиперболе в точке $(t;\, y(t))$ запишется в виде

$$y = y(t) + y'(t)(x - t), \text{ или } y = \frac{a}{t} - \frac{a}{t^2}(x - t),$$

т. е.

$$y = -\frac{a}{t^2}x + \frac{2a}{t}. \qquad (1)$$

3. Так как касательная, заданная уравнением (1), проходит через точку $M(1;\,1)$, то $1 = -\frac{a}{t^2} + \frac{2a}{t}$, или

$$t^2 - 2at + a = 0. \qquad (2)$$

4. При $a < 0$ уравнение (2) имеет два корня t_1 и t_2, которые являются абсциссами точек A и B соответственно. По теореме Виета $t_1 + t_2 = 2a$, $t_1 t_2 = a$.

5. Поскольку ветви рассматриваемой гиперболы симметричны относительно прямой $y = x$, а точка $M(1; 1)$ лежит на этой прямой, точки A и B симметричны относительно прямой $y = x$.

6. Таким образом, если точка A имеет координаты $(t_1; t_2)$, то точка B будет иметь координаты $(t_2; t_1)$. Отсюда следует, что $MA = MB$ при любом $a < 0$.

7. Найдем MA^2 и AB^2. С учетом полученных выше соотношений между корнями t_1 и t_2 имеем

$$MA^2 = (t_1 - 1)^2 + (t_2 - 1)^2 = 4a^2 - 6a + 2,$$
$$AB^2 = (t_1 - t_2)^2 + (t_2 - t_1)^2 = 8a^2 - 8a.$$

8. Согласно условию, треугольник MAB правильный, поэтому $MA = AB$, т. е.

$$4a^2 - 6a + 2 = 8a^2 - 8a.$$

Решив это уравнение с учетом того, что $a < 0$, получим $a = -\frac{1}{2}$.

9. Найдем площадь треугольника MAB:

$$S = \frac{1}{2} \cdot MA \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot AB^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

10. *Ответ*: $a = -\frac{1}{2}$; $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

24. Найти все значения параметра a, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$, при каждом из которых минимум функции

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3(\cos a - \sin a) - 3x^2 \sin 2a$$

на отрезке $-\sin a \leqslant x \leqslant \cos a$ принимает наименьшее значение.

1. Обозначим через $\varphi(a)$ наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-\sin a; \cos a]$ при фиксированном a.

2. Имеем

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2(\cos a - \sin a) - 6x \sin 2a.$$

3. Решив уравнение $f'(x) = 0$, находим корни производной: $x_1 = 0$, $x_2 = \sin a$, $x_3 = -\cos a$.

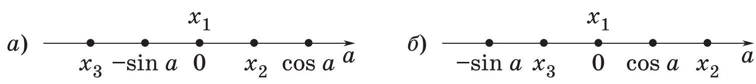


Рис. 94

4. Рассмотрим два случая.

а) Если $0 \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{4}$, то $\sin a \leqslant \cos a$ и по отношению к отрезку $[-\sin a; \cos a]$ корни x_1, x_2, x_3 расположатся так, как показано на рис. 94, *а*. Изменение знаков производной иллюстрирует следующая таблица:

Интервал	$(-\sin a; 0)$	$(0; x_2)$	$(x_2; \cos a)$
Знак $f'(x)$	$+$	$-$	$+$

Отсюда следует, что $\varphi(a) = \min\{f(-\sin a); f(x_2)\}$. Но

$$f(x_2) - f(-\sin a) = f(\sin a) - f(-\sin a) = 8\sin^3 a\,(\cos a - \sin a) \geqslant 0.$$

Значит,

$$\varphi(a) = f(-\sin a) =$$
$$= 3\sin^4 a - 4\sin^3 a\,(\cos a - \sin a) - 6\sin^3 a\cos a =$$
$$= 7\sin^4 a - 10\sin^3 a\cos a.$$

б) Если $\frac{\pi}{4} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\sin a \geqslant \cos a$ и по отношению к отрезку $[-\sin a; \cos a]$ расположение корней производной будет таким, как показано на рис. 94, *б*. Изменение знаков производной иллюстрирует таблица:

Интервал	$(-\sin a; x_3)$	$(x_3; 0)$	$(0; \cos a)$
Знак $f'(x)$	$-$	$+$	$-$

Следовательно, $\varphi(a) = \min\{f(x_3); f(\cos a)\}$. Но

$$f(x_3) - f(\cos a) = f(-\cos a) - f(\cos a) = -8\cos^3 a\,(\cos a - \sin a) \geqslant 0.$$

Значит,

$$\varphi(a) = f(\cos a) =$$
$$= 3\cos^4 a + 4\cos^3 a\,(\cos a - \sin a) - 6\sin a\cos^3 a =$$
$$= 7\cos^4 a - 10\sin a\cos^3 a.$$

5. Итак,

$$\varphi(a)=\begin{cases}7\sin^4 a-10\sin^3 a\cos a, \text{ если } a\in\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right];\\ 7\cos^4 a-10\sin a\cos^3 a, \text{ если } a\in\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right].\end{cases}$$

Отсюда заключаем, что $\varphi(a)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$ при $a\in\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$, и достаточно найти минимум функции $\varphi(a)=7\sin^4 a-10\sin^3 a\cos a$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{4}\right]$.

6. Имеем

$$\varphi'(a)=28\sin^3 a\cos a-30\sin^2 a\cos^2 a+10\sin^4 a=$$
$$=2\sin^2 a\cos^2 a\,(5\operatorname{tg}^2 a+14\operatorname{tg} a-15).$$

Все корни производной $\varphi'(a)$, принадлежащие промежутку $0<a<\frac{\pi}{4}$, являются корнями уравнения $5\operatorname{tg}^2 a+14\operatorname{tg} a-15=0$. Решив его, находим $\operatorname{tg} a_1=\frac{-7+2\sqrt{31}}{5}$, $\operatorname{tg} a_2=\frac{-7-2\sqrt{31}}{5}$.

7. Для значений a из промежутка $0<a<\frac{\pi}{4}$ значения функции $\operatorname{tg} a$ положительны и не превосходят 1; поэтому находим единственный корень производной $\varphi'(a)$, удовлетворяющий неравенствам $0<a<\frac{\pi}{4}$, а именно: $a_1=\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{31}-7}{5}$.

8. На интервале $0<a<a_1$ производная $\varphi'(a)$ отрицательна, на интервале $a_1<a<\frac{\pi}{4}$ положительна. Значит, $a=a_1$ — точка минимума.

9. Из непрерывности $\varphi(a)$ на промежутке $0\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{4}$ и монотонности на интервалах $(0;\ a_1)$ и $\left(a_1,\ \frac{\pi}{4}\right)$ следует, что наименьшее значение $\varphi(a)$ на промежутке $0\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{4}$ равно $\varphi(a_1)$.

10. Такое же значение принимается в точке $\frac{\pi}{2} - a_1$, принадлежащей промежутку $\frac{\pi}{4} \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$.

11. *Ответ*: $a = \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{31}-7}{5}$; $a = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{31}-7}{5}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При каком значении a прямая $y = a + x \ln 81$ является касательной к графику функции $f(x) = 9^x + 2 \cdot 3^{x+1} - x \ln 81$?

2. Установить, при каких значениях a прямая:

а) $3ax + y = a^2x + 7$ параллельна касательной к кривой $3x^2 + \frac{2a}{x} + y = 0$, проведенной в точке $x = 1$;

б) $4a^2x - y = 15ax - 9$ параллельна касательной к кривой $\frac{4a}{x^3} - y + x = 0$, проведенной в точке $x = -1$;

в) $2 - 3ax = 4a^2x - y$ параллельна касательной к кривой $\frac{x^5}{10} - y + \frac{4a}{x} = 0$, проведенной в точке $x = -2$.

В ответе указать наименьшее значение a.

3. Установить, при каких значениях a касательная к кривой:

а) $x^3 - \frac{4a}{x^2} + y = 0$, проведенная в точке $x = 2$, параллельна прямой $8ax - 5 = a^2x - y$;

б) $\frac{27a}{x^2} - y - 2x^2 = 0$, проведенная в точке $x = 3$, параллельна прямой $10ax + y = a^2x + 6$;

в) $x^3 + y - \frac{3a}{x^4} = 0$, проведенная в точке $x = -1$, параллельна прямой $4a^2x - y = 7 - 5ax$.

В ответе указать наибольшее значение a.

4. Найти значение b, при котором наименьшее значение функции:

а) $y - x^3 + 27x + 3b$ на отрезке [2; 5] равно 1;

б) $y = -4x^3 + 48x - 2b$ на отрезке [−4; −1] равно (−60).

5. Найти значение a, при котором наибольшее значение функции:

а) $y = 5x^3 - 60x - a$ на отрезке $[1; 3]$ равно (-50);

б) $y = 2x^3 - 54x + a$ на отрезке $[1; 4]$ равно (-50).

6. Найти множество значений параметра p, при которых касательная к параболе:

а) $y = x^2 - 5x + 6$ в точке $x_0 = 2$ является также касательной к параболе $y = x^2 + px + 3$;

б) $y = x^2 + px + 27$ в точке $x_0 = 6$ является также касательной к параболе $y = x^2 + 2x - 8$.

7. На прямой $x + y = 5$ найти точку $A(x_A; y_A)$, расстояние от которой до точки $B(1; 2)$ минимально. В ответе указать сумму $x_A + y_A$.

8. Найти критические точки функции:

а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4a - a^2}} + 2\sin a \cos x + \dfrac{1}{3}\cos 3x$;

б) $y = \dfrac{1}{3}\sin a \operatorname{tg}^3 x + (\sin a - 1)\operatorname{tg} x + \sqrt{\dfrac{a-2}{8-a}}$.

Ответы

1. 7. **2.** а) 2; б) −0,25; в) −2. **3.** а) 4; б) 6; в) 1. **4.** а) −3; б) −2. **5.** а) 5; б) 2. **6.** а) $\{-3; 1\}$; б) $\{-12; -8\}$. **7.** 5. **8.** а) Если $a \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 4\right)$, то $x = \pi k$, $x = \pi k \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1 + 2\sin a}{2}\right)$; если $a \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$, то $x = \pi k$; б) если $a \in [2; \pi) \cup (2\pi; 8)$, то $x = \pi k \pm \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{\sin a} - 1}$; если $a \in [\pi; 2\pi]$, то критических точек нет.

Тема 15

1. Потерянные и посторонние корни при решении уравнений
2. Решение иррациональных уравнений, посторонние корни иррационального уравнения
3. Иррациональные неравенства

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Потерянные и посторонние корни при решении уравнений

1°. Ранее (см. тему 3, п. 3) мы отмечали, какие действия над уравнениями не нарушают их равносильности.

2°. Рассмотрим теперь такие операции над уравнениями, которые могут привести к новому уравнению, не равносильному исходному.

3°. Пример 1. Дано уравнение $3x(x-1)=5(x-1)$. Упростив его, придем к квадратному уравнению $3x^2-8x+5=0$. Корнями этого уравнения являются $x_1=1$, $x_2=\frac{5}{3}$.

Если сократить обе части данного уравнения на общий множитель $(x-1)$, то получим уравнение $3x=5$, которое не равносильно исходному, так как новое уравнение имеет всего один корень $x=\frac{5}{3}$.

4°. Вывод. Сокращение обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, может привести к потере корней уравнения.

5°. Пример 2. Дано уравнение $2x-3=5$. Это уравнение имеет единственный корень $x=4$. Возведя обе части данного уравнения в квадрат, получим $(2x-3)^2=25$. Решив последнее уравнение, найдем два корня: $x_1=-1$, $x_2=4$.

а) Замечаем, что новое уравнение $(2x-3)^2=25$ не равносильно исходному уравнению $2x-3=5$.

б) Корень $x_1 = -1$ является корнем уравнения $2x - 3 = -5$, которое после возведения обеих его частей в квадрат приводит к уравнению $(2x - 3)^2 = 25$.

6°. Посторонние корни могут появиться также при умножении обеих частей уравнения на множитель, содержащий неизвестное, если этот множитель при действительных значениях x обращается в нуль.

7°. Пример 3. Если обе части уравнения $2x - 1 = 3$ умножим на $x + 2$, то получим новое уравнение $(2x - 1)(x + 2) = 3(x + 2)$, которое после упрощения примет вид $(x + 2)(2x - 4) = 0$, откуда $x = -2$, либо $x = 2$.

Корень $x = -2$ не удовлетворяет уравнению $2x - 1 = 3$, имеющему единственный корень $x = 2$.

8°. Вывод. При возведении обеих частей уравнения в квадрат (вообще в четную степень), а также при умножении на множитель, содержащий неизвестное и обращающийся в нуль при действительных значениях неизвестного, могут появиться посторонние корни.

9°. Все соображения относительно потери и появления посторонних корней уравнения в одинаковой мере относятся к любым уравнениям (алгебраическим, тригонометрическим и др.).

2. Решение иррациональных уравнений, посторонние корни иррационального уравнения

1°. Уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, называют ***иррациональным***; например, $\sqrt{x+6} = 3$, $\sqrt[3]{1-3x} = 8$ — иррациональные уравнения.

2°. Решение иррациональных уравнений сводится к переходу от иррационального к рациональному уравнению с помощью возведения в степень обеих частей уравнения или замены переменной.

3°. Пример. Пусть дано иррациональное уравнение

$$\sqrt{x-1} = 2x - 3.$$

а) Возведя обе его части в квадрат, получим $x - 1 = 4x^2 - 12x + 9$. Найдем корни этого уравнения: $x_1 = \frac{5}{4}$ и $x_2 = 2$.

б) Проверим, удовлетворяют ли эти корни данному уравнению. Если $x_1 = \frac{5}{4}$, то $\sqrt{\frac{5}{4} - 1} \neq 2 \cdot \frac{5}{4} - 3$. Корень $x_1 = \frac{5}{4}$ уравнению не удовлетворяет, следовательно, он является посторонним; второй корень $x_2 = 2$ удовлетворяет уравнению.

4°. При возведении обеих частей уравнения в четную степень возможно появление посторонних корней.

Поэтому при использовании указанного метода следует проверить все найденные корни подстановкой в исходное уравнение.

3. Иррациональные неравенства

1°. Распространенным способом решения иррациональных неравенств является возведение обеих частей неравенства в степень, равную степени радикала. При этом используется следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Если на некотором множестве значений X, принадлежащем области определения неравенства*

$$f_1(x) > f_2(x), \tag{1}$$

функции $f_1(x) \geqslant 0$ и $f_2(x) \geqslant 0$, то при возведении обеих частей неравенства в целую положительную степень получится неравенство

$$f_1^n(x) > f_2^n(x), \tag{2}$$

равносильное неравенству (1) *на данном множестве X.*

2°. При решении иррациональных неравенств часто используют следующие утверждения:

а) неравенство

$$\sqrt{f(x)} < \varphi(x) \tag{3}$$

равносильно системе неравенств

$$\varphi(x) > 0,\ 0 \leqslant f(x) < (\varphi(x))^2; \tag{4}$$

б) неравенство

$$\sqrt{f(x)} > \varphi(x) \tag{5}$$

равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ \varphi(x) < 0; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ \varphi(x) \geqslant 0, \\ f(x) > (\varphi(x))^2. \end{cases} \tag{7}$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. Решить относительно x уравнение

$$(3 + 2a - a^2)\sqrt{x} = a - 3.$$

1. Пусть $3 + 2a - a^2 \neq 0$, т. е. $a \neq -1$ и $a \neq 3$; тогда

$$\sqrt{x} = \frac{a-3}{3+2a-a^2} = -\frac{1}{a+1};$$

при этом $-\frac{1}{a+1} > 0$, откуда $a < -1$. Следовательно,

$$x = \frac{1}{(a+1)^2}, \text{ где } a < -1.$$

2. Пусть $a = 3$; тогда уравнение примет вид $0 \cdot \sqrt{x} = 3 - 3$. Значит, x — любое неотрицательное число.

3. Пусть $a = -1$; тогда уравнение примет вид $0 \cdot \sqrt{x} = -1 - 3$; это уравнение не имеет решений.

4. *Ответ*: если $a < -1$, то $x = \frac{1}{(a+1)^2}$;
если $a = 3$, то $x \geqslant 0$;
если $a \in (-1; 3) \cup (3; +\infty)$, то корней нет.

2. Решить относительно x уравнение

$$\sqrt{x^2 + ax - 2a} = x + 1. \qquad (1)$$

1. Возведя обе части уравнения (1) в квадрат, получим

$$x^2 + ax - 2a = x^2 + 2x + 1,$$

или

$$(a - 2)x = 2a + 1. \qquad (2)$$

2. Пусть $a = 2$; тогда уравнение (2) примет вид $0 \cdot x = 5$, т. е. оно не имеет решений.

3. Пусть $a \neq 2$; тогда уравнение (2) имеет решение

$$x = \frac{2a+1}{a-2}. \qquad (3)$$

4. Для проверки подставим полученное выражение (3) в левую и правую части уравнения (1).

а) Левая часть:

$$\sqrt{\frac{(2a+1)^2}{(a-2)^2}+\frac{a(2a+1)}{a-2}-2a}=\sqrt{\frac{(3a-1)^2}{(a-2)^2}}=\left|\frac{3a-1}{a-2}\right|.$$

При $a \leqslant \frac{1}{3}$ и при $a > 2$ имеем $\left|\frac{3a-1}{a-2}\right| = \frac{3a-1}{a-2}$;

при $\frac{1}{3} < a < 2$ имеем $\left|\frac{3a-1}{a-2}\right| = \frac{1-3a}{a-2}$.

б) Правая часть:

$$\frac{2a+1}{a-2}+1=\frac{3a-1}{a-2}.$$

5. Отсюда следует, что $x = \frac{2a+1}{a-2}$ является корнем уравнения (1) при $a \leqslant \frac{1}{3}$ и при $a > 2$. При $\frac{1}{3} < a \leqslant 2$ решений нет.

6. *Ответ*: если $a \leqslant \frac{1}{3}$ или $a > 2$, то $x = \frac{2a+1}{a-2}$;

если $\frac{1}{3} < a \leqslant 2$, то корней нет.

3. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$x+\sqrt{x}=a. \qquad (1)$$

1. Перепишем уравнение (1) следующим образом:

$$\sqrt{x}=a-x. \qquad (2)$$

2. Уравнение (2) равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} x=(a-x)^2, \\ a-x \geqslant 0, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x^2-(2a+1)x+a^2=0, & (3) \\ a-x \geqslant 0. & (4) \end{cases}$$

3. Найдем корни уравнения (3):

$$x_1=a+\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}+a},\ x_2=a+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+a}.$$

4. Корень x_1 удовлетворяет условию (4), если

$$a - x_1 = \sqrt{\frac{1}{4} + a} - \frac{1}{2} \geqslant 0.$$

Неравенство $\sqrt{\frac{1}{4} + a} \geqslant \frac{1}{2}$ равносильно неравенству $\frac{1}{4} + a \geqslant \frac{1}{4}$, откуда следует, что $a \geqslant 0$.

5. Корень x_2 не удовлетворяет условию (4) ни при каком a, так как

$$a - x_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a} < 0.$$

6. Итак, решением иррационального уравнения (1) является только корень x_1 квадратного уравнения (3), где $a \geqslant 0$.

7. *Ответ*: если $a \geqslant 0$, то $x = a + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + a}$;

если $a < 0$, то корней нет.

4. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$\sqrt[3]{1 - x} + \sqrt[3]{1 + x} = a. \qquad (1)$$

1. Полагая $y = \sqrt[3]{1 + x}$, перепишем уравнение (1) в виде

$$y + \sqrt[3]{2 - y^3} = a.$$

2. Перенеся y в правую часть и возведя обе части полученного уравнения в куб, придем к уравнению

$$3ay^2 - 3a^2y + a^3 - 2 = 0. \qquad (2)$$

3. Решив уравнение (2), находим

$$y_{1,\,2} = \frac{3a^2 \pm \sqrt{3a(8 - a^3)}}{6a}. \qquad (3)$$

4. Значения (3) будут корнями уравнения (2), если $0 < a \leqslant 2$.

5. Возвращаясь к переменной x, запишем ответ.

6. *Ответ*: если $a \in (-\infty;\, 0] \cup (2;\, +\infty)$, то корней нет;

если $a \in (0;\, 2]$, то $x_{1,\,2} = \left(\frac{3a^2 \pm \sqrt{3a(8 - a^3)}}{6a}\right)^3 - 1$.

5. Решить относительно x уравнение

$$x - \sqrt{a - x^2} = 1. \qquad (1)$$

1. Перепишем уравнение (1) в виде

$$x - 1 = \sqrt{a - x^2} \qquad (2)$$

и возведем обе части уравнения (2) в квадрат:

$$(x-1)^2 = a - x^2;\ 2x^2 - 2x + 1 - a = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{2a-1}}{2},\ x_2 = \frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}\ \left(\text{где } a \geqslant \frac{1}{2}\right).$$

2. Если $a < \frac{1}{2}$, то решений нет.

3. Проверим, какие из найденных значений x удовлетворяют уравнению (2).

а) Подставив значение x_1 в уравнение (2), получим, что его левая часть $-\frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}$ отрицательна, а правая $\sqrt{a - \left(\frac{1 - \sqrt{2a-1}}{2}\right)^2}$ неотрицательна, поэтому x_1 не удовлетворяет уравнению.

б) Подставим теперь значение x_2 в уравнение (2). Имеем

$$\frac{\sqrt{2a-1} - 1}{2} = \sqrt{a - \left(\frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}\right)^2}. \qquad (3)$$

Равенство (3) верно тогда и только тогда, когда $\sqrt{2a-1} - 1 \geqslant 0$, т. е. $a \geqslant 1$.

4. *Ответ*: если $a < 1$, то корней нет;

если $a \geqslant 1$, то $x = \frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}$.

6. В зависимости от значений параметра p решить уравнение

$$\sqrt{4x + p} = 2x - 1. \qquad (1)$$

Решим уравнение тремя способами.

I способ.

1. Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} 4x + p = (2x - 1)^2, \\ x \geqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} 4x^2 - 8x + 1 - p = 0, & (2) \\ x \geqslant \dfrac{1}{2}. & (3) \end{cases}$$

2. Решив уравнение (2), находим

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{p + 3}}{2}; \; x_2 = \frac{2 + \sqrt{p + 3}}{2}, \qquad (4)$$

откуда следует, что при $p = -3$ уравнение (2) имеет один корень $x = 1$.

3. Если $p > -3$, то $x_1 < x_2$; поэтому уравнение (2) будет иметь два корня при тех значениях параметра p, которые удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \dfrac{2 - \sqrt{p + 3}}{2} \geqslant \dfrac{1}{2}, \\ p > -3, \end{cases}$$

т. е. при $-3 < p \leqslant -2$.

4. Уравнение (2) будет иметь только один корень x_2, если $x_1 < \dfrac{1}{2}$, а $x_2 \geqslant \dfrac{1}{2}$. В этом случае получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{2 - \sqrt{p + 3}}{2} < \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{2 + \sqrt{p + 3}}{2} \geqslant \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда следует, что $p > -2$.

5. Заметив, что при $p < -3$ дискриминант уравнения (2) отрицателен, запишем ответ.

6. *Ответ*: если $p < -3$, то корней нет;
если $p = -3$, то $x = 1$;
если $-3 < p \leqslant -2$, то $x_{1,\,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{p + 3}}{2}$;
если $p > -2$, то $x = \dfrac{2 + \sqrt{p + 3}}{2}$.

II способ.

1. Возведя обе части уравнения (1) в квадрат, получим уравнение (2), корни которого задаются формулами (4). Однако здесь надо иметь в виду, что при возведении обеих частей уравнения (1) в квадрат могли появиться посторонние корни. Поэтому в данном случае необходимо произвести проверку.

2. Подставив корень x_1 в исходное уравнение (1), придем к соотношению $|1 - \sqrt{p+3}\,| = 1 - \sqrt{p+3}$, откуда $-3 \leqslant p \leqslant -2$.

3. Аналогично, подставив корень x_2 в уравнение (1), придем к соотношению $|\sqrt{p+3} + 1| = \sqrt{p+3} + 1$ и, значит, $p \geqslant -3$.

4. Учитывая теперь, что при $p < -3$ корней нет, а при $p = -3$ имеем $x = 1$, получаем тот же ответ, что и при I способе решения.

III способ.

1. Воспользуемся геометрическим смыслом квадратного трехчлена. Рассматривая равносильную уравнению (1) систему (2), (3), заключаем, что уравнение (1) будет иметь корни x_1 и x_2 в том случае, когда корни квадратного трехчлена $f(x) = 4x^2 - 8x + 1 - p$ не меньше $\frac{1}{2}$.

2. Аналитически соответствующие условия запишем в виде системы

$$\begin{cases} D = 16(3+p) > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{8}{8} > \dfrac{1}{2}, \\ f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - 4 + 1 - p \geqslant 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим, что $-3 < p \leqslant -2$.

3. При $x = -3$ уравнение (1) имеет решение $x = 1$.

4. Если же $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2 - p < 0$, т. е. $p > -2$, то уравнение (1) имеет один корень x_2.

5. При $p < -3$ решений нет.

З а м е ч а н и е. Это уравнение можно решить и графически.

7. Для каждого значения параметра a определить число корней уравнения

$$\sqrt{2|x| - x^2} = a. \qquad (1)$$

1. Если $a < 0$, то уравнение (1) не имеет решений.

2. Если $a \geqslant 0$, то уравнение (1) равносильно уравнению

$$2|x| - x^2 = a^2, \text{ или } |x|^2 - 2|x| + a^2 = 0. \qquad (2)$$

3. Полагая $|x| = z$, получим уравнение

$$z^2 - 2z + a^2 = 0, \qquad (3)$$

дискриминант которого $D = 4(1 - a^2)$.

4. Пусть $a > 1$; тогда уравнение (3), а, значит, и уравнение (2) не имеет решений.

5. Пусть $a = 1$; тогда уравнение (3) имеет единственный корень $z = 1$ и равносильно уравнению $|x| = 1$, имеющему два корня: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

6. Пусть $0 \leqslant a < 1$; тогда уравнение (3) имеет корни $z_1 = 1 + \sqrt{1 - a^2}$ и $z_2 = 1 - \sqrt{1 - a^2}$. Следовательно, уравнение (2) равносильно совокупности двух уравнений:

$$|x| = 1 + \sqrt{1 - a^2}; \qquad (4)$$

$$|x| = 1 - \sqrt{1 - a^2}. \qquad (5)$$

7. Так как z_1 и z_2 неотрицательны, то уравнение (4) имеет два корня: $x_{3,\,4} = \pm(1 + \sqrt{1 - a^2})$, а уравнение (5) также имеет два корня: $x_{5,\,6} = \pm(1 - \sqrt{1 - a^2})$. При этом если $a \neq 0$, т. е. $0 < a < 1$, то все эти числа различны.

Если же $a = 0$, то $x_7 = x_8 = 0$.

8. *Ответ*: если $a < 0$ или $a > 1$, то корней нет;
если $a = 0$, то три корня: $x = 0$, $x = -2$; $x = 2$;
если $0 < a < 1$, то четыре корня: $x = \pm(1 + \sqrt{1 - a^2})$,
$x = \pm(1 - \sqrt{1 - a^2})$;
если $a = 1$, то два корня: $x = -1$, $x = 1$.

8. Для каждого значения параметра a найти все решения уравнения

$$\sqrt{|x| + 1} - \sqrt{|x|} = a. \qquad (1)$$

1. Так как $\sqrt{|x| + 1} - \sqrt{|x|} > 0$ при всех значениях x, то уравнение (1) не имеет решений, если $a \leqslant 0$. В дальнейшем будем считать, что $a > 0$.

2. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\sqrt{|x|+1} = \sqrt{|x|} + a. \qquad (2)$$

3. Учитывая, что при любом значении x левая и правая части уравнения (2) положительны, можно возвести их в квадрат:

$$|x| + 1 = |x| + 2a\sqrt{|x|} + a^2,$$

или

$$2a\sqrt{|x|} = 1 - a^2. \qquad (3)$$

4. При любом значении x левая часть уравнения (3) неотрицательна, поэтому уравнение не имеет решений, если $a > 1$. Будем считать, что $0 < a \leqslant 1$. Тогда уравнение (3) равносильно уравнению

$$4a^2|x| = (1 - a^2)^2, \text{ т. е. } |x| = \frac{(1-a^2)^2}{4a^2},$$

и, следовательно, $x_{1,\,2} = \pm\frac{(1-a^2)^2}{4a^2}$.

5. *Ответ*: если $a \leqslant 0$ или $a > 1$, то корней нет;

если $0 < a < 1$, то два корня: $x_{1,\,2} = \pm\frac{(1-a^2)^2}{4a^2}$;

если $a = 1$, то один корень $x = 0$.

9. В зависимости от значений параметра k решить уравнение

$$\sqrt[k]{(1+x)^2} - \sqrt[k]{(1-x)^2} = \sqrt[k]{1-x^2}. \qquad (1)$$

1. Подстановкой убеждаемся, что $x = 1$ не является корнем уравнения (1).

2. Поэтому после деления обеих частей уравнения (1) на $\sqrt[k]{(1-x)^2}$ получим равносильное уравнение

$$\sqrt[k]{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} - 1 = \sqrt[k]{\frac{1+x}{1-x}}. \qquad (2)$$

3. Полагая $t = \sqrt[k]{\frac{1+x}{1-x}}$, придем к квадратному уравнению $t^2 - 1 = t$, или $t^2 - t - 1 = 0$. Отсюда

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

4. Так как значение t_2 отрицательно, то в случае четного показателя k это значение нужно отбросить.

5. Таким образом, при четном k имеем

$$\sqrt[k]{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1+x}{1-x} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

и, следовательно,

$$x = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - 1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + 1}.$$

6. При нечетном k уравнение (2) имеет два корня:

$$x_{1,\,2} = \frac{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^k - 1}{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^k + 1}.$$

7. *Ответ*: если k — четное, то один корень: $x = \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - 1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + 1}$;

если k — нечетное, то два корня:

$$x_{1,\,2} = \frac{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^k - 1}{\left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^k + 1}.$$

10. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$\sqrt{2x+a} - \sqrt{x-1} = 2. \qquad (1)$$

1. Положим $y = \sqrt{x-1}$, где $y \geqslant 0$. Тогда $x = y^2 + 1$ и уравнение (1) примет вид

$$\sqrt{2y^2+a+2} = y + 2. \qquad (2)$$

2. Уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} y^2 - 4y + a - 2 = 0, \\ y \geqslant 0. \end{cases} \qquad (3)$$

3. Решив уравнение этой системы, находим

$$y_1 = 2 - \sqrt{6-a},\ y_2 = 2 + \sqrt{6-a}.$$

4. Система (3) будет иметь решение в следующих трех случаях: а) $0 \leqslant y_1 = y_2$; б) $0 \leqslant y_1 < y_2$; в) $y_1 < 0 \leqslant y_2$.

5. Случай а) возможен, когда $a = 6$. Тогда $y_1 = y_2 = 2$ и, значит, $x = 5$.

6. Случай б) имеет место, когда $2 - \sqrt{6-a} \geqslant 0$. Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 6 - a > 0, \\ 4 \geqslant 6 - a, \end{cases}$$

из которой следует, что $2 \leqslant a < 6$. При таких значениях параметра a получаем два корня:

$$x_{1,\,2} = 11 - a \pm 4\sqrt{6-a}\,.$$

7. Случай в) возможен, когда выполняются условия

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{6-a} < 0, \\ 2 + \sqrt{6-a} \geqslant 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Решив систему (4), находим, что $a < 2$. При таких значениях a получаем один корень:

$$x = 11 - a + 4\sqrt{6-a}\,.$$

8. *Ответ*: если $a < 2$, то $x = 11 - a + 4\sqrt{6-a}$;
если $2 \leqslant a < 6$, то $x_{1,\,2} = 11 - a \pm 4\sqrt{6-a}$;
если $a = 6$, то $x = 5$;
если $a > 6$, то решений нет.

11. Решить уравнение

$$\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+2} = a. \qquad (1)$$

1. Здесь $\begin{cases} 3x - 2 \geqslant 0, \\ x + 2 \geqslant 0, \end{cases}$ т. е. $x \geqslant \frac{2}{3}$. (Это необходимое условие, которому должны удовлетворять корни уравнения.)

2. Так как $\sqrt{x+2} \geqslant 0$, $\sqrt{3x-2} \geqslant 0$, то $a \geqslant 0$.

3. Пусть $\sqrt{x+2} = z \geqslant 0$. Тогда $x + 2 = z^2$, а $x = z^2 - 2$, т. е. $3x - 2 = 3z^2 - 8$, и уравнение (1) примет вид

$$\sqrt{3z^2-8} = a - z. \qquad (2)$$

З а м е ч а н и е. Функции $z = \sqrt{x+2}$ и $x = z^2 - 2$, где $z \geqslant 0$, — взаимно обратные, обе они однозначны и поэтому уравнения (1) и (2) равносильны.

4. Вернемся к уравнению (2). Значения z должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} z \leqslant a, \\ 3z^2 - 8 \geqslant 0, \\ z \geqslant 0. \end{cases}$$

5. Возведя обе части уравнения (2) в квадрат, получим уравнение

$$3z^2 - 8 = (a - z)^2, \qquad (3)$$

корень которого удовлетворяет неравенству $3z^2 - 8 \geqslant 0$.

6. Следовательно, достаточно проследить за тем, чтобы корни уравнения (3) удовлетворяли неравенствам $0 \leqslant z \leqslant a$.

7. Приведя уравнение (3) к виду

$$3z^2 - 8 = a^2 - 2az + z^2, \text{ или } 2z^2 + 2az - 8 - a^2 = 0,$$

находим

$$z_1 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{3a^2+16}\,);\ z_2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{3a^2+16}\,).$$

8. а) Значение z_1 не является корнем уравнения (2), поскольку $z_1 < 0$.

б) Так как $0 \leqslant z_2 \leqslant a$, то приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(\sqrt{3a^2+16} - a) \leqslant a, \\ \dfrac{1}{2}(\sqrt{3a^2+16} - a) \geqslant 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sqrt{3a^2+16} \leqslant 3a, \\ \sqrt{3a^2+16} \geqslant a, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} 6a^2 \geqslant 16, \\ 2a^2 + 16 \geqslant 0. \end{cases}$$

9. Учитывая, что $a \geqslant 0$ и $2a^2 + 16 \geqslant 0$, получим $a \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Таким образом, при $a \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$ уравнение (2) имеет один корень z_2.

10. Вернемся к подстановке $x = z^2 - 2$. Имеем

$$x = z_2^2 - 2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{3a^2+16} - a\right)^2 - 2,$$

т. е.

$$x = \frac{1}{2}\left(2a^2 + 4 - a\sqrt{3a^2+16}\right)$$

— корень уравнения (1) при $a \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

11. При $a < \frac{2\sqrt{6}}{3}$ уравнение не имеет корней.

12. *Ответ*: если $a < \frac{2\sqrt{6}}{3}$, то корней нет;

если $a \geqslant \frac{2\sqrt{6}}{3}$, то $x = \frac{1}{2}\left(2a^2 + 4 - a\sqrt{3a^2+16}\right)$.

12. Для каждого действительного числа a найти все решения уравнения

$$\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-2} = a. \qquad (1)$$

1. Полагая $\sqrt{x^2-1} = u$, $\sqrt{x^2-2} = v$, получим систему

$$\begin{cases} u + v = a, \\ u^2 - v^2 = 1, \\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Если $a = 0$, то система (2) несовместна.

2. Считая $a \neq 0$, перейдем к системе

$$\begin{cases} u - v = \dfrac{1}{a}, \\ u = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right), \\ v = \dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right). \end{cases}$$

3. Решив систему неравенств $a + \frac{1}{a} \geqslant 0$, $a - \frac{1}{a} \geqslant 0$, находим $a \geqslant 1$.

4. При этих значениях a получим

$$x^2 - 1 = u^2 = \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2, \; x^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2,$$

$$x = \pm\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2}.$$

5. *Ответ*: если $a < 1$, то корней нет;

если $a \geqslant 1$, то $x_{1,\,2} = \pm\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(a + \frac{1}{a}\right)^2}$.

13. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x. \qquad (1)$$

1. Из уравнения (1) непосредственно следует, что если $a = 0$, то и $x = 0$ — частичный ответ.

2. Согласно определению арифметического корня, имеем $x \geqslant 0$, $a - \sqrt{a + x} \geqslant 0$.

3. Решив неравенство $a - \sqrt{a + x} \geqslant 0$, получим

$$x \leqslant a(a - 1). \qquad (2)$$

4. Так как $x \geqslant 0$, то с учетом сказанного ранее заключаем, что неравенство (2) справедливо при $a = 0$ или при $a \geqslant 1$.

5. Сведем уравнение (1) к системе уравнений с помощью подстановки $t = \sqrt{a + x}$, где $t \geqslant 0$. Из уравнения (1) следует, что $x = \sqrt{a - t}$, и приходим к системе

$$\begin{cases} t = \sqrt{a + x}, \\ x = \sqrt{a - t}. \end{cases} \qquad (3)$$

6. Возведя в квадрат оба уравнения системы (3), имеем

$$\begin{cases} t^2 = a + x, \\ x^2 = a - t. \end{cases} \qquad (4)$$

7. Вычтем второе уравнение системы (4) из первого:

$$t^2 - x^2 = x + t, \text{ т. е. } (t + x)(t - x - 1) = 0. \qquad (5)$$

8. Рассмотрим уравнение (5). Так как $t \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$, то $t - x - 1 = 0$; после обратной замены t на $\sqrt{a+x}$ получим уравнение $\sqrt{a+x} = x + 1$. Следовательно,

$$a + x = (x + 1)^2, \text{ или } x^2 + x + 1 - a = 0. \tag{6}$$

9. Решив уравнение (6), находим

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{4a-3}}{2},\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}, \text{ где } a \geqslant \frac{3}{4}.$$

10. Проверим найденные значения:

а) x_1 не удовлетворяет условию $x \geqslant 0$;

б) неравенство $x = \dfrac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2} \geqslant 0$ справедливо при $\sqrt{4a-3} \geqslant 1$, т. е. при $a \geqslant 1$.

11. *Ответ*: если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то корней нет;

если $a \in [1; +\infty)$, то $x = \dfrac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}$;

если $a = 0$, то $x = 0$.

14. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$x + \sqrt{a + \sqrt{x}} = a. \tag{1}$$

1. Из уравнения (1) непосредственно следует, что $0 \leqslant x \leqslant a$. Таким образом, при $a < 0$ уравнение не имеет решений, а при $a = 0$ оно имеет решение $x = 0$.

2. Пусть $a > 0$. Тогда, возведя в квадрат обе части уравнения $\sqrt{a + \sqrt{x}} = a - x$, получим

$$a^2 - (2x + 1)a + x^2 - \sqrt{x} = 0. \tag{2}$$

3. Решив уравнение (2) как квадратное относительно параметра a, находим

$$a = x + \sqrt{x} + 1, \tag{3}$$

$$a = x - \sqrt{x}. \tag{4}$$

4. Так как $x \geqslant 0$, то из равенства (3) следует, что $a \geqslant 1$. При таких значениях параметра a рассмотрим уравнение (3) как квадратное относительно $\sqrt{x}$ и решим его:

$$\sqrt{x} = \frac{-1 - \sqrt{4a-3}}{2},\ \sqrt{x} = \frac{-1 + \sqrt{4a-3}}{2}.$$

5. Согласно определению арифметического корня, годится лишь второе значение: $\sqrt{x} = \frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$, откуда

$$x = \frac{2a-1-\sqrt{4a-3}}{2}.$$

6. Рассмотрим теперь уравнение (4). Решив его относительно $\sqrt{x}$, находим

$$\sqrt{x} = \frac{1-\sqrt{4a+1}}{2},\ \sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}.$$

7. По тем же причинам, что и ранее, годится лишь второе значение: $\sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$. Отсюда получаем

$$x = a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4a+1} > a,$$

т. е. это значение x не может быть корнем исходного уравнения, поскольку оно не удовлетворяет условию $x \leqslant a$.

8. *Ответ*: если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то корней нет;

если $a \in [1; +\infty)$, то $x = \frac{2a-1-\sqrt{4a-3}}{2}$;

если $a = 0$, то $x = 0$.

15. Решить уравнение

$$\sqrt{3x} - \sqrt{a-3x} = 1. \qquad (1)$$

1. Найдем ОДЗ уравнения (1): $x \geqslant 0$, $a - 3x \geqslant 0$ ($a \geqslant 3x \Rightarrow a \geqslant 0$); значит, $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{3}$.

2. Чтобы освободиться от радикалов в данном уравнении, надо дополнительно потребовать выполнения неравенства $\sqrt{3x} - \sqrt{a-3x} \geqslant 0$, поскольку правая часть уравнения (1) — положительное число.

3. Таким образом, условие для возведения в квадрат имеет вид

$$3x > a - 3x,\text{ т. е. } x > \frac{a}{6}.$$

4. Итак, должны выполняться следующие ограничения:

$$a \geqslant 0,\ \frac{a}{6} < x \leqslant \frac{a}{3}.$$

5. Теперь обе части уравнения (1) возведем в квадрат:

$$3x + a - 3x - 2\sqrt{3x} \cdot \sqrt{a - 3x} = 1,$$

или

$$2\sqrt{3x(a - 3x)} = a - 1, \qquad (2)$$

где $a - 1 \geqslant 0$ согласно определению арифметического корня.

6. Возведем обе части уравнения (2) в квадрат и после упрощений получим

$$4 \cdot (3x)^2 - 4a \cdot (3x) + (a - 1)^2 = 0. \qquad (3)$$

7. Решив уравнение (3), находим

$$3x = \frac{a \pm \sqrt{2a - 1}}{2}, \text{ т. е. } x_{1,\,2} = \frac{a \pm \sqrt{2a - 1}}{6}. \qquad (4)$$

8. Полученные значения (4) должно удовлетворять условиям $\frac{a}{6} < x \leqslant \frac{a}{3}$ при $a \geqslant 1$.

9. Проверим значение $x_1 = \frac{a - \sqrt{2a - 1}}{6}$ подстановкой в неравенство $x > \frac{a}{6}$; имеем $\frac{a - \sqrt{2a - 1}}{6} > \frac{a}{6}$, откуда следует $-\sqrt{2a - 1} > 0$, что неверно. Итак, $x = \frac{a - \sqrt{2a - 1}}{6}$ — посторонний корень.

10. Проверим значение $x_2 = \frac{a + \sqrt{2a - 1}}{6}$. Подставив его в двойное неравенство $\frac{a}{6} < x \leqslant \frac{a}{3}$, т. е. $\frac{a}{6} < \frac{a + \sqrt{2a - 1}}{6} \leqslant \frac{a}{3}$, после упрощений получим

$$a < a + \sqrt{2a - 1} \leqslant 2a, \text{ или } 0 < \sqrt{2a - 1} \leqslant a$$

— верное неравенство при $a \geqslant 1$.

11. *Ответ*: если $a < 1$, то корней нет;

$$\text{если } a \geqslant 1, \text{ то } x = \frac{a + \sqrt{2a - 1}}{6}.$$

16. Решить неравенство

$$(a-1)\sqrt{x} \leqslant 0. \qquad (1)$$

1. Понятно, что область определения есть $x \geqslant 0$.

2. Понятно также, что ответ зависит от знака множителя $(a-1)$.

3. При $a \leqslant 1$, очевидно, неравенству (1) удовлетворяет любое значение из области определения, т. е. $x \geqslant 0$.

4. При $a-1>0$ левая часть неравенства (1) неотрицательна; в данном случае $x=0$ — единственное решение.

5. *Ответ*: если $a \leqslant 1$, то $x \geqslant 0$;
если $a > 1$, то $x = 0$.

17. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$x + 4a > 5\sqrt{ax}. \qquad (1)$$

1. Пусть $a<0$; тогда, исходя из вида правой части неравенства, заключаем, что $x \leqslant 0$. Но при таких a и x левая часть неравенства (1) отрицательна, и, значит, ни при каких отрицательных значениях a неравенство не имеет решений.

2. Пусть $a=0$; тогда неравенству (1) удовлетворяет любое $x>0$.

3. Пусть $a>0$; тогда $x \geqslant 0$. Отсюда, в частности, следует, что $x=0$ является решением неравенства. Кроме того, при таких значениях a и x данное неравенство равносильно неравенству

$$(x+4a)^2 > 25ax, \text{ т. е. } x^2 - 17ax + 16a^2 > 0. \qquad (2)$$

Неравенство (2) можно записать в виде

$$(y-1)(y-16) > 0, \text{ где } y = \frac{x}{a},\ a \neq 0. \qquad (3)$$

4. Решив неравенство (3), находим, что $y<1$, $y>16$, и, значит, $0<x<a$, $x>16a$.

5. *Ответ*: если $a \in (-\infty; 0)$, то решений нет;
если $a = 0$, то $x \in (0; +\infty)$;
если $a \in (0; +\infty)$, то $x \in [0; a) \cup (16a; +\infty)$.

18. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a. \qquad (1)$$

1. При $a \leqslant 0$ неравенство (1) не имеет решений.

2. Пусть $a>0$; тогда ОДЗ переменной x задается неравенствами $-a \leqslant x \leqslant a$.

3. При таких значениях x возведем обе части неравенства (1) в квадрат и получим неравенство

$$2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2 - 2a. \qquad (2)$$

4. Рассмотрим следующие три случая:

$$a^2 - 2a < 0;\ a^2 - 2a = 0;\ a^2 - 2a > 0.$$

5. Пусть $a^2 - 2a < 0$; тогда $0 < a < 2$ и неравенство (2) справедливо при всех $|x| \leqslant a$.

6. Пусть $a^2 - 2a = 0$, т. е. $a = 2$; тогда неравенство (2) примет вид $2\sqrt{4 - x^2} > 0$, откуда следует, что $|x| < 2$.

7. Пусть $a^2 - 2a > 0$, т. е. $a > 2$. Тогда, возведя обе части неравенства (2) в квадрат, получим равносильное неравенство

$$4(a^2 - x^2) > a^4 - 4a^3 + 4a^2,$$

или

$$x^2 < \frac{a^3(4-a)}{4}. \qquad (3)$$

а) Если $a \geqslant 4$, то неравенство (3) не имеет решений.

б) Если $2 < a < 4$, то $|x| < \frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}$ и, как легко проверить,

$$\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2} \leqslant a.$$

8. *Ответ*: если $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 4$, то решений нет;
если $0 < a < 2$, то $-a \leqslant x \leqslant a$;
если $a = 2$, то $-2 < x < 2$;
если $2 < a < 4$, то $-\frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2} < x < \frac{a\sqrt{a(4-a)}}{2}$.

19. Для всех значений параметра a решить неравенство

$$\sqrt{x+a} \geqslant x + 2.$$

1. Проведем геометрическое исследование неравенства (рис. 95). Построим графики прямой $y = x + 2$ и «плавающей» параболы $y = \sqrt{x+a}$ с вершиной в точке $(-a; 0)$.

Данное неравенство выполняется для тех значений a, при которых парабола и прямая имеют хотя бы одну общую точку.

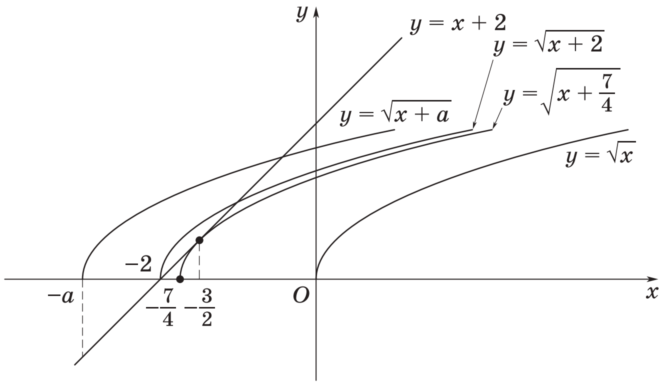


Рис. 95

2. Рассмотрим уравнение $\sqrt{x+a} = x + 2$, т. е. $x^2 + 3x + 4 - a = 0$. Имеем $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{4a-7}}{2}$, где $a \geqslant \dfrac{7}{4}$. При $a = \dfrac{7}{4}$ уравнение имеет один корень $x = -\dfrac{3}{2}$. Это соответствует случаю касания параболы и прямой.

3. При $a < \dfrac{7}{4}$ неравенство не имеет решений.

4. Если $a > \dfrac{7}{4}$, но $a \leqslant 2$, то парабола пересекает прямую в двух точках; данное неравенство справедливо при

$$\frac{-3-\sqrt{4a-7}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{-3+\sqrt{4a-7}}{2}.$$

5. При $a > 2$ парабола пересекает прямую только в одной точке $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{4a-7}}{2}$ и данное неравенство выполняется на отрезке $[-a; x_2]$.

6. *Ответ*: если $a \in \left(-\infty; \dfrac{7}{4}\right)$, то решений нет;

если $a = \dfrac{7}{4}$, то $x = -\dfrac{3}{2}$;

если $a \in \left(\dfrac{7}{4}; 2\right]$, то $x \in \left[\dfrac{-3-\sqrt{4a-7}}{2}; \dfrac{-3+\sqrt{4a-7}}{2}\right]$;

если $a \in (2; +\infty)$, то $x \in \left[-a; \dfrac{-3+\sqrt{4a-7}}{2}\right]$.

20. При каких значениях $a < 0$ неравенства

$$2\sqrt{ax} < 3a - x \qquad (1)$$

и

$$x - \sqrt{\frac{x}{a}} > \frac{6}{a} \qquad (2)$$

имеют общие решения?

1. Так как по условию $a < 0$, а $ax > 0$, то $x < 0$.

2. Левая часть неравенства (1) положительна, поэтому и его правая часть должна быть положительна, т. е. $x < 3a$.

3. Аналогично, записав неравенство (2) в виде $x - \frac{6}{a} > \sqrt{\frac{x}{a}}$, заключаем, что $\frac{6}{a} < x$.

4. Решим неравенство (1):

$2\sqrt{ax} < 3a - x$, т. е. $x^2 - 10ax + 9a^2 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 9a) \cup (a; 0)$.

Но мы установили, что $x < 3a$, следовательно, $x \in (-\infty; 9a)$.

5. Решим неравенство (2):

$$x - \sqrt{\frac{x}{a}} > \frac{6}{a}, \text{ т. е. } x - \frac{6}{a} > \sqrt{\frac{x}{a}}, \text{ т. е. } x^2 - \frac{13x}{a} + \frac{36}{a^2} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{9}{a}\right) \cup \left(\frac{4}{a}; 0\right).$$

Но мы установили, что $x > \frac{6}{a}$, поэтому $x \in (\frac{4}{a}; 0)$.

6. Чтобы неравенства (1) и (2) имели общие решения, интервалы $(-\infty; 9a)$ и $\left(\frac{4}{a}; 0\right)$ должны иметь общие точки, т. е. $\frac{4}{a} \leqslant 9a \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{4}{9} \geqslant a^2$, откуда $-\frac{2}{3} \leqslant a < 0$.

7. *Ответ*: $a \in \left[-\frac{2}{3}; 0\right)$.

21. Для всех значений параметра a решить неравенство

$$|x^2 - 5x + 4| < a. \qquad (1)$$

1. Так как $|x^2 - 5x + 4| \geqslant 0$ при любом x, то при $a \leqslant 0$ неравенство (1) не имеет решений.

2. Пусть $a > 0$. Поскольку $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$, числовая прямая (ОДЗ данного неравенства) разбивается на три промежутка: $x < 1$, $1 \leqslant x \leqslant 4$, $x > 4$. Решим неравенство (1) на каждом из них.

3. Если $x < 1$, то $x^2 - 5x + 4 > 0$, и в этом случае неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 < a, \\ x < 1. \end{cases} \tag{2}$$

а) Дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 5x + (4 - a)$ равен $9 + 4a$ и, следовательно, положителен при $a > 0$.

б) Решив неравенство $x^2 - 5x + 4 - a < 0$, находим

$$\frac{1}{2}(5 - \sqrt{9 + 4a}) < x < \frac{1}{2}(5 + \sqrt{9 + 4a}).$$

в) При каждом положительном a верны неравенства

$$\frac{1}{2}(5 + \sqrt{9 + 4a}) > 4, \ \frac{1}{2}(5 - \sqrt{9 + 4a}) < 1.$$

г) Поэтому из системы (2) следует: каждое x такое, что $\frac{1}{2}(5 - \sqrt{9 + 4a}) < x < 1$ при всех $a > 0$ есть решение неравенства (1).

4. Если $1 \leqslant x \leqslant 4$, то неравенство (1) на этом множестве равносильно неравенству

$$x^2 - 5x + 4 + a > 0. \tag{3}$$

а) Дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 5x + 4 + a$ равен $9 - 4a$.

б) Таким образом, неравенство (3) выполняется при любом действительном x, если $a > \frac{9}{4}$; если же $0 < a \leqslant \frac{9}{4}$, то решением неравенства (3) являются все x из промежутков $-\infty < x < \frac{1}{2}(5 - \sqrt{9 - 4a})$ и $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{9 - 4a}) < x < +\infty$.

в) Кроме того, при $0 < a \leqslant \frac{9}{4}$ справедливы неравенства

$$1 < \frac{1}{2}(5 - \sqrt{9 - 4a}) \leqslant \frac{1}{2}(5 + \sqrt{9 - 4a}) < 4.$$

5. Заключаем, что в случае $1 \leqslant x \leqslant 4$ при $a > \frac{9}{4}$ решением неравенства (1) является отрезок $1 \leqslant x \leqslant 4$, при $0 < a \leqslant \frac{9}{4}$ множество решений неравенства (1) состоит из двух промежутков:

$$1 \leqslant x < \frac{1}{2}(5 - \sqrt{9 - 4a}),\ \frac{1}{2}(5 + \sqrt{9 - 4a}) < x \leqslant 4.$$

6. Если $x > 4$, то неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x > 4, \\ x^2 - 5x + 4 - a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ \frac{1}{2}(5 - \sqrt{9 + 4a}) < x < \frac{1}{2}(5 + \sqrt{9 + 4a}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 < x < \frac{1}{2}(5 + \sqrt{9 + 4a}).$$

7. *Ответ*: если $a \leqslant 0$, то решений нет;

если $0 < a \leqslant \frac{9}{4}$, то

$\frac{1}{2}(5 - \sqrt{9 + 4a}) < x < \frac{1}{2}(5 - \sqrt{9 - 4a})$,

$\frac{1}{2}(5 + \sqrt{9 - 4a}) < x < \frac{1}{2}(5 + \sqrt{9 + 4a})$;

если $a > \frac{9}{4}$, то $\frac{1}{2}(5 - \sqrt{9 + 4a}) < x < \frac{1}{2}(5 + \sqrt{9 + 4a})$.

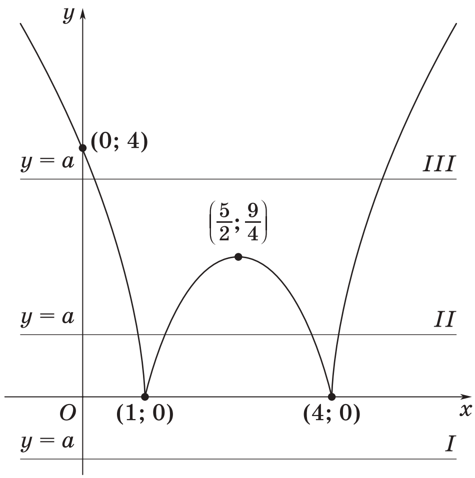


Рис. 96

З а м е ч а н и е. Полученный ответ геометрически иллюстрируется на рис. 96:

а) положение I соответствует случаю $a < 0$;

б) положение II — случаю $0 < a \leqslant \frac{9}{4}$;

в) положение III — случаю $a > \frac{9}{4}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить уравнение:

а) $\sqrt[4]{\frac{a-x}{b+x}} - \sqrt[4]{\frac{b+x}{a-x}} = 2$; б) $\sqrt{a-6x} = x-1$;

в) $\sqrt{3a-2x} + x = a$; г) $\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x} = a$.

2. Решить уравнение:

а) $\sqrt{x} = x - a$; б) $\sqrt{x} + \sqrt{a} = \sqrt{1-(x+a)}$;

в) $1 - x = \sqrt{a^2-x^2}$; г) $x + \sqrt{x^2-x} = a$.

3. Решить уравнение:

а) $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2+4x+4} = a$;

б) $\sqrt{x^2+6x+9} - \sqrt{x^2-4x+4} = a$;

в) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = a$.

4. Найти количество корней уравнения

$$\sqrt{4-x^2} = x + a$$

в зависимости от значений параметра a.

5. Решить неравенство:

а) $\sqrt{x-a^2} + \sqrt{x} \geqslant 2a$; б) $\sqrt{2ax-x^2} \geqslant a - x$;

в) $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} < a$; г) $\sqrt{1-x^2} \geqslant 2x + a$;

д) $\sqrt{x+a} \geqslant x + 1$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $\sqrt{x^2+2ax+a^2} + x^2 < 2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

Ответы

1. а) $x = \dfrac{a - b(1+\sqrt{2})^4}{6(1+\sqrt{2})^2}$, где $\dfrac{a-x}{b+x} > 0$; б) если $a \in (-\infty;\ 6)$, то нет корней; если $a \in [6;\ +\infty)$, то $x = -2 + \sqrt{3+a}$; в) если $a \leqslant 0$, то нет корней; если $a > 0$, то $x = a - 1 - \sqrt{a+1}$; г) если $a \in (-\infty;\ -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6};\ +\infty)$, то нет корней; если $a \in [-\sqrt{6};\ \sqrt{6}]$, то $x = -0{,}5a\sqrt{12 - a^2}$. **2.** а) Если $a < -0{,}25$, то нет корней; если $a = -0{,}25$, то $x = 0{,}25$; если $-0{,}25 < a \leqslant 0$, то $x_{1,\,2} = 0{,}5(2a + 1 \pm \sqrt{4a+1})$; если $a > 0$, то $x = 0{,}5(2a + 1 + \sqrt{4a+1})$; б) если $a \in (-\infty;\ 0) \cup (0{,}5;\ +\infty)$, то нет корней; если $a \in [0;\ 0{,}5]$, то $x = 0{,}5(1 - a - \sqrt{2a - 3a^2})$; в) если $|a| < 0{,}5\sqrt{2}$, то нет корней; если $|a| = 0{,}5\sqrt{2}$, то $x = 0{,}5$; если $0{,}5\sqrt{2} < |a| \leqslant 1$, то $x_{1,\,2} = 0{,}5(1 \pm \sqrt{2a^2 - 1})$; если $|a| > 1$, то $x = 0{,}5(1 - \sqrt{2a^2 - 1})$; г) если $a \in$ $\in (-\infty;\ 0) \cup (0{,}5;\ 1)$, то нет корней; если $a \in [0;\ 0{,}5) \cup [1;\ +\infty)$, то $x = \dfrac{a^2}{2a-1}$.
3. а) Если $a < 3$, то нет корней; если $a = 3$, то $x \in [-2;\ 1)$; если $a > 3$, то $x = -0{,}5(a+1)$, $x = 0{,}5(a-1)$; б) если $a \in (-\infty;\ -5) \cup (5;\ +\infty)$, то нет корней; если $a = -5$, то $x \in (-\infty;\ 3]$; если $a \in (-5;\ 5)$, то $x = 0{,}5(a-1)$; если $a = 5$, то $x \in [2;\ +\infty)$; в) если $a \in (-\infty;\ -1) \cup (3;\ +\infty)$, то нет корней; если $a \in [-1;\ 3)$, то $x = 0{,}5(a+1)^2 + 1$; если $a = 3$, то $x \in [5;\ +\infty)$. **4.** Если $a \in (-\infty;\ -2) \cup$ $\cup (2\sqrt{2};\ +\infty)$, то нет корней; если $a \in [-2;\ 2) \cup \{2\sqrt{2}\}$, то один корень; если $a \in [2;\ 2\sqrt{2})$, то два корня. **5.** а) Если $a \leqslant 0$, то $x \in [a^2;\ +\infty)$; если $a > 0$, то $x \in \left[\dfrac{25}{16}a^2;\ +\infty\right)$; б) если $a < 0$, то $(1 + 0{,}5\sqrt{2})a \leqslant x \leqslant 0$; если $a = 0$, то $x = 0$; если $a > 0$, то $(1 - 0{,}5\sqrt{2})a \leqslant x \leqslant 2a$; в) если $2 < a \leqslant 4$, то $-a \leqslant x <$ $< -0{,}5a\sqrt{4a - a^2}$, $0{,}5a\sqrt{4a - a^2} < x \leqslant a$; если $a > 4$, то $-a \leqslant x \leqslant a$; при остальных значениях a решений нет; г) если $a < -2$, то $-1 \leqslant x \leqslant 1$; если $-2 \leqslant a \leqslant$ $\leqslant 2$, то $-1 \leqslant x \leqslant 0{,}2(\sqrt{5 - a^2} - 2a)$; если $2 < a \leqslant \sqrt{5}$, то $-0{,}4(\sqrt{5 - a^2} + 2a) \leqslant$ $\leqslant x \leqslant 0{,}4(\sqrt{5 - a^2} - 2a)$; если $a > \sqrt{5}$, то решений нет; д) если $a \leqslant 0{,}75$, то решений нет; если $a = 0{,}75$, то $x = -0{,}5$; если $0{,}75 < a \leqslant 1$, то $-0{,}5(1 + \sqrt{4a-3}) \leqslant$ $\leqslant x \leqslant 0{,}5(\sqrt{4a-3} - 1)$; если $a > 1$, то $-a \leqslant x \leqslant 0{,}5(\sqrt{4a-3} - 1)$. **6.** $a \in (-2{,}25;\ 2)$.

Тема 16

1. Показательная функция и ее свойства
2. Показательные уравнения
3. Показательные неравенства
4. Системы показательных уравнений и неравенств

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Показательная функция и ее свойства

1°. Функцию, заданную формулой вида $y = a^x$, где a — некоторое положительное число, не равное единице, называют ***показательной***.

2°. При $a > 1$ функция $y = a^x$ обладает следующими свойствами (рис. 97, *а*):

а) область определения — множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел;

б) множество значений — множество $\boldsymbol{R}_+$ всех положительных чисел;

в) функция возрастает;

г) при $x = 0$ значение функции равно 1;

д) если $x > 0$, то $a^x > 1$;

е) если $x < 0$, то $0 < a^x < 1$.

3°. При $0 < a < 1$ функция $y = a^x$ обладает следующими свойствами (рис. 97, *б*):

а) область определения $D(f) = \boldsymbol{R}$;

б) множество значений $E(f) = \boldsymbol{R}_+$;

в) функция убывает;

г) при $x = 0$ значение функции равно 1;

д) если $x > 0$, то $0 < a^x < 1$;

е) если $x < 0$, то $a^x > 1$.

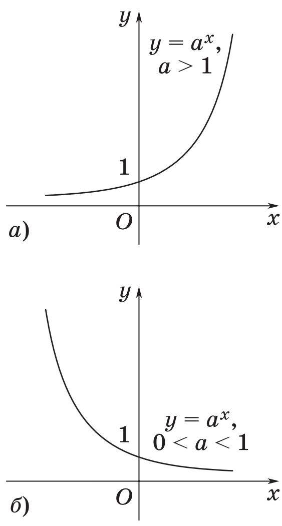


Рис. 97

2. Показательные уравнения

1°. Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называют ***показательным***. Простейшим примером показательного уравнения служит уравнение $a^x = 1$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

2°. Решение показательных уравнений вида $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, основано на том, что это уравнение равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

3°. Уравнение вида $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$ с помощью подстановки $a^x = y$ сводится к квадратному уравнению $Ay^2 + By + C = 0$.

3. Показательные неравенства

1°. Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называют ***показательным***.

2°. Решение показательных неравенств вида $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, основано на следующих утверждениях:

а) если $a > 1$, то неравенства $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$ и $f(x) < \varphi(x)$ равносильны;

б) если $0 < a < 1$, то неравенства $a^{f(x)} < a^{\varphi(x)}$ и $f(x) > \varphi(x)$ равносильны (это следует из того, что при $a > 1$ показательная функция возрастает, а при $0 < a < 1$ убывает).

4. Системы показательных уравнений и неравенств

Известные способы решения систем алгебраических уравнений применяются и к решению систем, содержащих показательные уравнения и неравенства.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$9^x - (4a + 2) \cdot 3^x - 5a^2 + 34a - 24 = 0 \qquad (1)$$

имеет два различных решения?

1. Положим $3^x = t > 0$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$t^2 - 2(2a + 1)t - 5a^2 + 34a - 24 = 0. \qquad (2)$$

2. Найдем дискриминант квадратного уравнения (2):

$$\frac{D}{4} = (2a + 1)^2 + 5a^2 - 34a + 24 = (3a - 5)^2.$$

Следовательно, корнями уравнения (2) являются

$$t_1 = 2a + 1 - (3a - 5) = 6 - a;\ t_2 = 2a + 1 + (3a - 5) = 5a - 4.$$

3. Для того чтобы исходное уравнение имело два различных корня, необходимо выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} t_1 \neq t_2, \\ t_1 > 0, \\ t_2 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 6 - a \neq 5a - 4, \\ 6 - a > 0, \\ 5a - 4 > 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} a \neq \dfrac{5}{3}, \\ a < 6, \\ a > \dfrac{4}{5}. \end{cases}$$

4. *Ответ*: $a \in \left(\frac{4}{5}; \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}; 6\right)$.

2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$4^x - a \cdot 2^x - a + 3 = 0 \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно решение.

1. Положим $2^x = t > 0$; тогда исходное уравнение примет вид

$$t^2 - at - a + 3 = 0. \qquad (2)$$

2. Для того чтобы уравнение (1) имело хотя бы одно решение, необходимо и достаточно, чтобы квадратный трехчлен $t^2 - at - a + 3$ имел хотя бы один положительный корень, и, следовательно, дискриминант этого квадратного трехчлена должен быть неотрицателен.

3. Так как

$$D = a^2 - 4(3 - a) = a^2 + 4a - 12 = (a - 2)(a + 6),$$

то условие $D \geqslant 0$ выполняется при $a \leqslant -6$ и $a \geqslant 2$.

4. Корни t_1 и t_2 уравнения (2) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} t_1 t_2 = 3 - a, \\ t_1 + t_2 = a. \end{cases}$$

а) При $a \leqslant -6$ имеем $t_1 t_2 > 0$, $t_1 + t_2 < 0$; поэтому оба корня t_1, t_2 отрицательны, и, следовательно, уравнение (1) не имеет решений.

б) При $a \geqslant 2$ имеем $t_1 + t_2 > 0$; значит, хотя бы один из корней t_1 или t_2 положителен.

5. Итак, при $a \geqslant 2$ уравнение (1) имеет хотя бы одно решение.

6. *Ответ*: $a \in [2; +\infty)$.

3. Найти множество значений a, при которых уравнение

$$4^x - (3a + 2) \cdot 2^x + 2a^2 - 2a - 24 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственное решение, большее, чем 2.

1. Пусть $2^x = t > 0$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$t^2 - (3a + 2)t + 2a^2 - 2a - 24 = 0. \qquad (2)$$

Найдем дискриминант этого уравнения: $D = (a + 10)^2$.

2. По условию уравнение (1) должно иметь единственное решение $x > 2$. Следовательно, $t = 2^x$ должно быть больше 4.

3. Рассмотрим два возможных случая:

а) $\begin{cases} D = 0, \\ t_{1,\,2} > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a + 10)^2 = 0, \\ \dfrac{3a + 2}{2} > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -10, \\ -28 > 8, \end{cases}$ т. е. $a \in \varnothing$.

б) $D > 0 \Rightarrow (a + 10)^2 > 0$, т. е. $a \neq -10$. Уравнение (2) имеет два различных корня: $t_1 = a - 4$ и $t_2 = 2a + 6$.

Исходное уравнение будет иметь единственное решение, большее, чем 2, если один из корней t_1 или t_2 больше 4, а другой корень неположителен. Это приводит к следующей совокупности систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 4 > 4, \\ 2a + 6 \leqslant 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a - 4 \leqslant 0, \\ 2a + 6 > 4, \end{cases} \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 8, \\ a \leqslant -3; \end{cases} \\ \begin{cases} a \leqslant 4, \\ a > -1, \end{cases} \end{array}\right. \text{ или } \left[\begin{array}{l} a \in \varnothing, \\ -1 < a \leqslant 4, \end{array}\right.$$

т. е. $a \in (-1;\, 4]$.

4. *Ответ*: $a \in (-1;\, 4]$.

4. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$9^{-|x - 2|} - 4 \cdot 3^{-|x - 2|} - a = 0. \qquad (1)$$

1. С помощью подстановки $3^{-|x - 2|} = t$ $(0 < t \leqslant 1)$ уравнение (1) сводится к смешанной системе

$$\begin{cases} t^2 - 4t - a = 0, \\ 0 < t \leqslant 1. \end{cases} \qquad (2)$$

2. Квадратное уравнение системы (2) имеет действительные корни $t_{1,\,2} = 2 \pm \sqrt{4 + a}$ тогда и только тогда, когда $a \geqslant -4$.

а) При этом условии корень $t_1 = 2 + \sqrt{4 + a} > 1$, и, следовательно, не является решением системы (2).

б) Корень $t_2 = 2 - \sqrt{4 + a}$ удовлетворяет условиям $0 < t \leqslant 1$, т. е. неравенствам $0 < 2 - \sqrt{4 + a} \leqslant 1$ при $-3 \leqslant a < 0$.

в) Таким образом, если $-3 \leqslant a < 0$, то система (2) имеет решение $t = 2 - \sqrt{4 + a}$, которому соответствуют следующие корни исходного уравнения:

$$x = 2 \pm \log_3 (2 - \sqrt{4 + a}).$$

3. Если $a < -3$ или $a \geqslant 0$, то смешанная система (2), а, значит, и уравнение (1) не имеет решений.

4. *Ответ*: если $a < -3$ или $a \geqslant 0$, то корней нет;

если $-3 \leqslant a < 0$, то $x_{1,\,2} = 2 \pm \log_3 (2 - \sqrt{4 + a})$.

5. Решить уравнение

$$4^{\sin x} + a \cdot 2^{\sin x} + a^2 - 1 = 0, \tag{1}$$

где a — параметр, изменяющийся на промежутке $[-1;\ 1]$.

1. Воспользуемся подстановкой $y = 2^{\sin x}$. Тогда уравнение (1) примет вид $y^2 + ay + a^2 - 1 = 0$, где $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant 2$, так как $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

2. Вершина параболы

$$f(y) = y^2 + ay + a^2 - 1 \tag{2}$$

имеет абсциссу $y = -\frac{a}{2}$, поэтому из условия $-1 \leqslant a \leqslant 1$ следует, что $-\frac{1}{2} \leqslant -\frac{a}{2} \leqslant \frac{1}{2}$. Следовательно, при $-1 \leqslant a \leqslant 1$ промежутку $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$ может принадлежать только больший корень квадратного трехчлена (2).

3. Этот факт аналитически описывается системой неравенств

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a + a^2 - 1 \leqslant 0, \\ f(2) = 4 + 2a + a^2 - 1 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

4. Решив систему (3) при условии $-1 \leqslant a \leqslant 1$, находим, что она совместна, если $a \in \left[-1;\ \frac{-1 + \sqrt{13}}{4}\right]$.

5. Больший корень квадратного трехчлена (2) есть

$$y = \frac{-a + \sqrt{4 - 3a^2}}{2}.$$

Остается решить уравнение $2^{\sin x} = \dfrac{-a + \sqrt{4 - 3a^2}}{2}$, откуда найдем корни исходного уравнения (1).

6. *Ответ*: если $a \in \left[-1; \dfrac{-1 + \sqrt{13}}{4}\right]$, то

$$x = (-1)^k \arcsin \log_2 \left(\frac{-a + \sqrt{4 - 3a^2}}{2} \right) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$$

при других a решений нет.

6. При каких значениях a уравнение

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{3^{2x - a} - 3^{a - x}} = 0 \qquad (1)$$

имеет единственное решение?

1. Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0, & (2) \\ 3^{2x - a} - 3^{a - x} \neq 0. & (3) \end{cases}$$

2. Находим корни уравнения (2): $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

3. Если существует такое a, что при $x = 4$ условие (3) не выполняется, т. е. имеет место равенство $3^{2x - a} - 3^{a - x} = 0$, то знаменатель данной дроби (1) обращается в нуль. Последнее означает, что в точке $x = 4$ эта дробь не определена и поэтому $x = 4$ не может быть корнем уравнения (1).

4. Таким образом, уравнение (1) имеет единственное решение $x = 3$, если корнем знаменателя данной дроби является $x = 4$. Тогда этот знаменатель при $x = 4$ должен обращаться в нуль, т. е.

$$3^{2 \cdot 4 - a} - 3^{a - 4} = 0,$$

откуда $a = 6$.

5. Рассуждая аналогично, заключаем, что уравнение (1) имеет единственное решение $x = 4$, если корнем знаменателя данной дроби является $x = 3$ (в этом случае дробь при $x = 3$ не определена). Следовательно, знаменатель при $x = 3$ должен обращаться в нуль, т. е.

$$3^{2 \cdot 3 - a} - 3^{a - 3} = 0,$$

откуда $a = 4{,}5$.

6. *Ответ*: $a = 6$; $a = 4{,}5$.

7. Определить все значения параметра a, при которых уравнения

$$4^x + 2^{\,x+1} = 3$$

и

$$a \cdot 49^x + |a - 7| \cdot 7^x = 7$$

равносильны.

1. Решим уравнение

$$4^x + 2 \cdot 2^x - 3 = 0. \qquad (1)$$

Полагая $2^x = y > 0$, придем к квадратному уравнению $y^2 + 2y - 3 = 0$, имеющему корни $y = 1$; $y = -3$ (посторонний корень, так как он не удовлетворяет условию $y > 0$). Значит, $2^x = 1$, откуда $x = 0$. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень $x = 0$.

2. Согласно условию, уравнение

$$a \cdot 49^x + |a - 7| \cdot 7^x - 7 = 0 \qquad (2)$$

также должно иметь только один корень $x = 0$. Подставив в уравнение (2) значение $x = 0$, получим уравнение относительно a:

$$a + |a - 7| - 7 = 0, \text{ или } |a - 7| = 7 - a. \qquad (3)$$

3. В силу определения модуля решением уравнения (3) являются все значения $a \leqslant 7$.

4. При таких значениях a уравнение (2) примет вид

$$a \cdot 7^{2x} - (a - 7) \cdot 7^x - 7 = 0. \qquad (4)$$

5. Положим $7^x = z > 0$ и получим уравнение

$$az^2 - (a - 7)z - 7 = 0. \qquad (5)$$

Уравнение (5) при $a = 0$ имеет единственный корень $z = 1$, а при $a \neq 0$ — два корня $z = 1$ и $z = -\dfrac{7}{a}$. Чтобы уравнение (5) при $a \neq 0$ имело только один корень, нужно, чтобы корень $z = -\dfrac{7}{a}$ был:

а) либо равен 1, т. е. $-\dfrac{7}{a} = 1$, откуда $a = -7$;

б) либо отрицателен, т. е. $-\dfrac{7}{a} < 0$, откуда $a > 0$.

6. Учитывая отмеченные выше условия, при выполнении которых уравнение (2) должно иметь единственный корень, окончательно получаем: $0 \leqslant a \leqslant 7$ и $a = -7$.

7. *Ответ*: $a \in [0;\, 7] \cup \{-7\}$.

8. При каких значениях параметра a уравнение

$$7^x + 7^{-x} - 4 = a(3|x| - 5\cos x)$$

имеет нечетное число корней?

1. Функции $f(x) = 7^x + 7^{-x} - 4$ и $\varphi(x) = a(3|x| - 5\cos x)$ определены при всех $x \in \boldsymbol{R}$ и являются четными:

$$f(-x) = 7^{-x} + 7^{+x} - 4 = 7^x + 7^{-x} - 4 = f(x),$$
$$\varphi(-x) = a(3|-x| - 5\cos(-x)) = a(3|x| - 5\cos x) = \varphi(x).$$

2. В силу четности графики функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ симметричны относительно оси Oy и можно утверждать, что если $x = x_1$ — корень исходного уравнения, то $x = -x_1$ также является корнем этого уравнения.

3. Следовательно, данное уравнение имеет четное число корней, если $x = 0$ не является его корнем, и нечетное число корней, если $x = 0$ — корень этого уравнения.

4. Проверим, является ли $x = 0$ корнем исходного уравнения.

При $x = 0$ получаем равенство

$$1 + 1 - 4 = (0 - 5\cos 0)a, \text{ или } -5a = -2, \text{ откуда } a = \frac{2}{5}.$$

5. Значит, при $a = \frac{2}{5}$ исходное уравнение принимает вид $7^x + 7^{-x} - 4 = \frac{2}{5}(3|x| - 5\cos x)$ и имеет единственный корень $x = 0$: $f(0) = -2$; $\varphi(0) = -2$ (рис. 98).

6. *Ответ*: $a = \frac{2}{5}$.

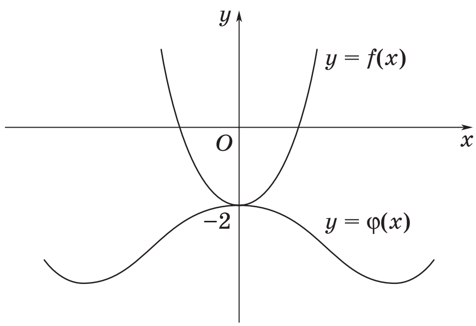


Рис. 98

9. При каких значениях параметра k неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4x + 7} \leqslant x + 3 \qquad (1)$$

и уравнение

$$2^{x+2} - |2^{x+1} - k| = 2^{x+1} + 1 \qquad (2)$$

равносильны?

1. Решив неравенство (1), получим $x \geqslant -1$ и, значит, любое $x \geqslant -1$ должно быть решением уравнения (2).

2. Тогда, подставив значение $x = 0$ в уравнение (2), приходим к уравнению

$$4 - |2 - k| = 3 \qquad (3)$$

относительно неизвестного k.

3. Решив уравнение (3), находим $k = 1$ и $k = 3$.

4. Пусть $k = 1$. Подставим это значение в уравнение (2) и получим уравнение

$$|2^{x+1} - 1| = 2^{x+1} - 1,$$

решением которого является любое $x \geqslant -1$. Итак, при $k = 1$ неравенство (1) и уравнение (2) равносильны.

5. Пусть $k = 3$. При этом значении k уравнение (2) примет вид

$$|2^{x+1} - 3| = 2^{x+1} - 1. \qquad (4)$$

6. Решив уравнение (4), получим $x = 0$ и, значит, неравенство (1) и уравнение (2) при $k = 3$ не равносильны.

7. *Ответ*: $k = 1$.

10. При каждом значении параметра a указать, для каких x выполняется неравенство

$$a^2 - 9^{x+1} - 8 \cdot 3^x \cdot a > 0. \qquad (1)$$

1. Пусть $a = 0$; тогда неравенство (1) имеет вид $-9^{x+1} > 0$ и не выполняется ни для какого x.

2. Пусть a — некоторое число, отличное от нуля. Обозначив 3^x через y, перепишем неравенство (1) так:

$$9y^2 + 8ay - a^2 < 0. \qquad (2)$$

Квадратный трехчлен $9y^2 + 8ay - a^2$ имеет корни $y_1 = -a$, $y_2 = \dfrac{a}{9}$.

3. Если $a > 0$, то $y_1 < y_2$ и множество решений неравенства (2) имеет вид $-a < y < \frac{a}{9}$. Это значит, что при каждом положительном a исходное неравенство равносильно двойному неравенству $-a <$ $< 3^x < \frac{a}{9}$ и, следовательно, множество его решений есть промежуток $-\infty < x < \log_3 \frac{a}{9}$, т. е. $-\infty < x < -2 + \log_3 a$.

4. Если $a < 0$, то $y_2 < y_1$ и множество решений неравенства (2) имеет вид $\frac{a}{9} < y < -a$. Это значит, что при каждом отрицательном a исходное неравенство равносильно двойному неравенству $\frac{a}{9} <$ $< 3^x < -a$ и, следовательно, множество его решений есть промежуток $-\infty < x < \log_3 (-a)$.

5. *Ответ*: если $a = 0$, то решений нет;
если $a > 0$, то $x < -2 + \log_3 a$;
если $a < 0$, то $x < \log_3 (-a)$.

11. Найти все значения параметра a, при которых неравенство

$$4^{x^2} + 2(2a + 1)2^{x^2} + 4a^2 - 3 > 0 \tag{1}$$

выполняется для любых x.

1. Полагая $2^{x^2} = t > 0$, запишем неравенство (1) следующим образом:

$$t^2 + 2(2a + 1)t + 4a^2 - 3 > 0. \tag{2}$$

2. Тем самым решение исходной задачи сводится к отысканию всех значений a, при которых неравенство (2) выполняется для любых $t > 0$.

3. Так как

$$\begin{gathered} t^2 + 2(2a + 1)t + 4a^2 - 3 = \\ = t^2 + 2t(2a + 1) + (2a + 1)^2 - (2a + 1)^2 + 4a^2 - 3 = \\ = (t + 2a + 1)^2 - 4(a + 1), \end{gathered}$$

то при $a + 1 < 0$ (т. е. при $a < -1$) неравенство (2) справедливо для любого t, в том числе и для $t > 0$.

4. При $a + 1 > 0$ имеем $a + 1 = (\sqrt{a+1}\,)^2$; поэтому неравенство (2) равносильно неравенству

$$(t + 2a + 1 + 2\sqrt{a+1}\,)(t + 2a + 1 - 2\sqrt{a+1}\,) > 0. \qquad (3)$$

При таких a справедливо неравенство $-2a - 1 - 2\sqrt{a+1} \leqslant -2a - 1 + 2\sqrt{a+1}$; следовательно, неравенство (3) выполняется для любого $t > 0$, если выполняется неравенство

$$-2a - 1 + 2\sqrt{a+1} \leqslant 0, \text{ т. е. } 2\sqrt{a+1} \leqslant 2a + 1. \qquad (4)$$

5. При $-1 \leqslant a \leqslant -0{,}5$ неравенство (4) не имеет решений. При $a > -0{,}5$ получим систему

$$\begin{cases} a > -0{,}5, \\ 4(a+1) \leqslant 4a^2 + 4a + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -0{,}5, \\ 4a^2 - 3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > -0{,}5, \\ 4\left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow a \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6. Итак, неравенство (2) справедливо для любого $t > 0$, если a принадлежит множеству $(-\infty; -1) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

7. *Ответ*: $a \in (-\infty; -1) \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$.

12. Найти все значения параметра k, при которых неравенство

$$4^x - k \cdot 2^x - k + 3 \leqslant 0 \qquad (1)$$

имеет хотя бы одно решение.

1. Пусть $2^x = t > 0$. Тогда получим квадратное неравенство, содержащее числовой параметр k:

$$t^2 - kt - k + 3 \leqslant 0. \qquad (2)$$

2. Для того чтобы неравенство (2) имело хотя бы одно решение, нужно, чтобы квадратный трехчлен имел хотя бы один положительный корень.

3. Корни квадратного трехчлена будут действительными при условии неотрицательности его дискриминанта:

$$D = k^2 - 4(3 - k) \geqslant 0, \text{ или } k^2 + 4k - 12 \geqslant 0,$$

откуда $k \leqslant -6$ или $k \geqslant 2$.

4. Чтобы выяснить, когда хотя бы один из корней будет положителен, воспользуемся теоремой Виета:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = k, \\ t_1 t_2 = 3 - k. \end{cases}$$

5. Если $k \leqslant -6$, то $t_1 t_2 = 3 - k > 0$; произведение корней положительно, т. е. корни имеют одинаковые знаки. Так как сумма корней $t_1 + t_2 = k < 0$, то оба корня отрицательны. Этот случай не подходит.

6. Если $k \geqslant 2$, то $t_1 t_2 = k > 0$, т. е. сумма корней положительна. Значит, хотя бы один из корней квадратного трехчлена положителен. Итак, $k \geqslant 2$.

7. *Ответ*: $k \in [2; +\infty)$.

13. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2^{b \sin x} + (a + 1)by^2 = a^2, \\ (a - 1)x^3 + y^3 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

имеет решение для любого значения параметра b?

1. Если система (1) при каком-то значении параметра a имеет решение для любого значения параметра b, то эта система имеет решение и для $b = 0$.

2. Подставляя значение $b = 0$ в систему (1), получим систему

$$\begin{cases} a^2 = 1, & (2) \\ (a - 1)x^3 + y^3 = 1. & (3) \end{cases}$$

Из уравнения (2) следует, что $a = \pm 1$.

3. Пусть $a = 1$; тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} 2^{b \sin x} + 2by^2 = 1, & (4) \\ y^3 = 1. & (5) \end{cases}$$

4. Из уравнения (5) находим $y = 1$, а уравнение (4) запишется в виде

$$2^{b \sin x} = 1 - 2b. \tag{6}$$

5. Уравнение (6) имеет решения не для любых значений параметра b, а лишь для тех, которые удовлетворяют неравенству $1 - 2b > 0$, т. е. $b < \frac{1}{2}$.

6. Пусть $a = -1$. В этом случае система (1) примет вид

$$\begin{cases} 2^{b \sin x} = 1, \\ y^3 - 2x^3 = 1, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} b \sin x = 0, \\ y^3 = 2x^3 + 1. \end{cases}$$

Легко установить, что эта система имеет решение для любого значения параметра b.

7. *Ответ*: $a = -1$.

14. Найти все значения a, при которых совместна система уравнений

$$\begin{cases} 3^{1-\sqrt{x}} + 1 = 5a - 2\operatorname{tg}^2 y, \\ 4\operatorname{tg}^2 y + 2 = 3a + 3^{-\sqrt{x}}. \end{cases}$$

1. Полагая $u = 3^{-\sqrt{x}}$, $v = \operatorname{tg}^2 y$, перепишем данную систему:

$$\begin{cases} 3 \cdot 3^{-\sqrt{x}} + 1 = 5a - 2\operatorname{tg}^2 y, \\ 4\operatorname{tg}^2 y + 2 = 3a + 3^{-\sqrt{x}}. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3u + 1 = 5a - 2v, \\ 4v + 2 = 3a + u. \end{cases} \quad (1)$$

2. Учитывая, что a — параметр, а u и v — неизвестные, запишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} 3u + 2v = 5a - 1, \\ -u + 4v = 3a - 2. \end{cases} \quad (2)$$

3. Умножив второе уравнение системы (2) на 3 и сложив результат с первым уравнением, получим

$$14v = 14a - 7, \text{ или } v = a - \frac{1}{2}.$$

4. Аналогично, умножив первое уравнение системы (2) на (-2) и сложив результат со вторым уравнением, получим

$$-7u = -7a, \text{ или } u = a.$$

5. Вернемся к первоначальным переменным и запишем систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^2 y = a - \dfrac{1}{2}, \\ 3^{-\sqrt{x}} = a, \end{cases} \qquad (3)$$

равносильную системе (2).

6. Левые части уравнений системы (3) удовлетворяют следующим ограничениям:

$$0 \leqslant \operatorname{tg}^2 y,\ 0 < 3^{-\sqrt{x}} \leqslant 1 \left(\text{поскольку } 3^{-\sqrt{x}} = \frac{1}{3^{\sqrt{x}}}\right).$$

7. Отсюда получаем систему неравенств для параметра a:

$$\begin{cases} 0 \leqslant a - \dfrac{1}{2}, \\ 0 < a \leqslant 1. \end{cases}$$

8. Решим эту систему:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} \leqslant a, \\ 0 < a \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1.$$

9. *Ответ*: $a \in [0{,}5;\ 1]$.

15. Найти все значения a, при которых совместна система уравнений

$$\begin{cases} \sin x - 4 = 3a - 2^{1+y^2}, \\ 2^{2+y^2} - 3 = a + 3\sin x. \end{cases}$$

В ответе указать наименьшее из этих значений.

1. Пусть $u = \sin x$, $v = 2^{y^2}$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} u + 2v = 3a + 4, \\ -3u + 4v = a + 3. \end{cases}$$

2. Исключив из этой системы u, имеем

$$10v = 10a + 15, \text{ или } v = a + \frac{3}{2}.$$

3. Аналогично исключив v, получим

$$-5u = -5a - 5, \text{ или } u = a + 1.$$

4. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} 2^{y^2} = a + \dfrac{3}{2}, \\ \sin x = a + 1. \end{cases}$$

5. Учитывая, что $1 \leqslant 2^{y^2}$, $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, запишем систему неравенств для параметра a:

$$\begin{cases} 1 \leqslant a + \dfrac{3}{2}, \\ -1 \leqslant a + 1 \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leqslant a, \\ -2 \leqslant a \leqslant 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad -\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant 0.$$

6. *Ответ*: $a = -\dfrac{1}{2}$.

16. Найти множество значений a, при которых система

$$\begin{cases} 3 \cdot 5^{y^2} + 2|x| = 21 - a, \\ 5^{1 + y^2} - 3|x| = 11a + 16 \end{cases} \qquad (1)$$

не имеет решений. Найти сумму целых значений a, не входящих в это множество.

1. Полагая $|x| = u$, $5^{y^2} = v$, получим систему

$$\begin{cases} 2u + 3v = 21 - a, \\ -3u + 5v = 16 + 11a. \end{cases} \qquad (2)$$

2. Исключив u из системы (2), имеем

$$v = 5 + a.$$

3. Аналогично, исключив v из системы (2), получим

$$u = 3 - 2a.$$

4. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} |x| = 3 - 2a, & (3) \\ 5^{y^2} = 5 + a. & (4) \end{cases}$$

5. Уравнение (3) не имеет решений, если $3 - 2a < 0$, т. е. если $a > 1{,}5$.

6. Уравнение (4) не имеет решений, если $5 + a < 1$, т. е. если $a < -4$.

7. Итак, система (1) не имеет решений, если либо $a < -4$, либо $a > 1{,}5$, т. е. если $a \in (-\infty; -4) \cup (1{,}5; +\infty)$.

8. Этому множеству не принадлежат числа из отрезка $[-4; 1{,}5]$.

9. Найдем сумму целых значений a из этого отрезка:

$$-4 - 3 - 2 - 1 + 0 + 1 = -9.$$

10. *Ответ*: $a \in (-\infty; -4) \cup (1{,}5; +\infty)$; -9.

17. При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} ax + by = 7, & (1) \\ 3^{2(x-y)} - 6 \cdot 3^{-2x} - 3^{-y} > 0 & (2) \end{cases}$$

имеет решения?

1. Преобразуем неравенство (2) следующим образом:

а) умножив все его члены на $3^{2(x+y)}$, получим

$$3^{2x} \cdot 3^{2x} - 6 \cdot 3^{2y} - 3^{2x} \cdot 3^{y} > 0;\ 6 \cdot 3^{2y} + 3^{2x+y} - 3^{4x} < 0.$$

б) учитывая, что $6 \cdot 3^{2y} = 2 \cdot 3 \cdot 3^{y} \cdot 3^{y}$, $3^{2x+y} = 3 \cdot 3^{y} \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3^{y} \cdot 3^{2x}$, имеем

$$(2 \cdot 3^{y} + 3^{2x})(3 \cdot 3^{y} - 3^{2x}) < 0;$$

в) так как $2 \cdot 3^{y} + 3^{2x} > 0$, то приходим к равносильному неравенству $3^{y+1} - 3^{2x} < 0$, или

$$y < 2x - 1. \qquad (3)$$

2. Система (1), (2) имеет решения, если прямая (1) имеет с областью (3) общие точки.

3. Пусть $b = 0$; тогда очевидно, что система (1), (2) будет иметь решения, если $a \neq 0$.

4. Пусть $b \neq 0$; тогда уравнение (1) можно переписать в виде

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{7}{b}. \qquad (4)$$

5. Рассмотрим прямую

$$y = 2x - 1. \qquad (5)$$

6. Если угловые коэффициенты прямых (4) и (5) различны, т. е. $a \neq -2b$, то система (1), (2) будет иметь решения при любом $b \neq 0$.

7. Если же $a = -2b$, то система (1), (2) будет иметь решения тогда и только тогда, когда прямая (4) расположена ниже прямой (5), т. е. когда $\frac{7}{b} < -1$, откуда следует, что $-7 < b < 0$.

8. *Ответ*: $a \neq 0$, $b = 0$; $a \neq -2b$, $b \neq 0$; $a = -2b$, $-7 < b < 0$.

18. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^y = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1 \end{cases} \tag{1}$$

имеет хотя бы одно решение для любого значения b (a, b, x, y — действительные числа).

1. Так как система (1) должна иметь хотя бы одно решение для любого b, то она должна иметь решение и для $b = 0$.

2. Если $b = 0$, то система (1) примет вид

$$\begin{cases} (x^2+1)^a + 1^y = 2, & (2) \\ a + x^2y = 1. & (3) \end{cases}$$

3. Уравнение (2) удовлетворяется либо при $a = 0$ и любом x, либо при $x = 0$ и любом a.

4. При $x = 0$ из уравнения (3) следует, что $a = 1$.

5. Таким образом, возможны только два значения a: $a = 0$ и $a = 1$.

6. Пусть $a = 0$; тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} (b^2+1)^y = 1, & (4) \\ bxy + x^2y = 1. & (5) \end{cases}$$

7. Уравнение (4) имеет решение для любого b только если $y = 0$. Однако это значение не удовлетворяет уравнению (5).

8. Пусть $a = 1$; тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} x^2 + (b^2+1)^y = 1, \\ bxy + x^2y = 0. \end{cases} \tag{6}$$

9. Очевидно, что система (6) для любого значения b имеет решение $x = 0$, $y = 0$.

10. *Ответ*: $a = 1$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Решить при всех значениях параметра a уравнение:

а) $2^{2x} - (a + 2) \cdot 2^x + 2a = 0$;

б) $5^{2x+1} + (5a - 1) \cdot 5^x - a = 0$;

в) $3^{2(x+1)} - 9(a + 1) \cdot 3^x - 3a = 0$.

2. Установить, при каких значениях a имеет два различных корня уравнение:

а) $49^x - (4a + 2) \cdot 7^x - 21a^2 + 34a - 8 = 0$;

б) $4^x + 2(a - 2) \cdot 2^x - 3a^2 + 8a - 5 = 0$.

3. Найти $x^2 - y^2$, если

$$\begin{cases} 4^{1+\sqrt{x+3}} + 2(y-4)^2 = 2a - 4, \\ (y-4)^2 - 4^{\sqrt{x+3}} = 7 - 2a. \end{cases}$$

4. Найти xy, если

$$\begin{cases} (x+2)^2 + 2 \cdot 3^{|y-2|} = a - 1, \\ 3^{|y-2|+1} - (x+2)^2 = 4a - 9. \end{cases}$$

5. Найти $y^2 - x^2$, если

$$\begin{cases} 2\sqrt{x-1} + 2^{|y-2|} = 2 - a, \\ 2^{1+|y-2|} - \sqrt{x-1} = 3a - 1. \end{cases}$$

6. При каких значениях p уравнение

$$x^2 - (2^p - 1)x - 3(4^{p-1} - 2^{p-2}) = 0$$

имеет равные корни?

7. Найти все значения a, при которых совместна система уравнений

$$\begin{cases} 2 + \cos x = 4a - 6 \cdot 2^{y^2}, \\ 10 - 2^{3+y^2} = a - 5\cos x. \end{cases}$$

В ответе указать наибольшее из этих значений.

8. Решить уравнение и исследовать, при каких значениях параметра a оно имеет решение и при каких — нет:

а) $3 \cdot 4^{x-2} + 27 = a + a \cdot 4^{x-2}$; б) $2^{\frac{a+3}{a+2}} \cdot 32^{\frac{1}{x(a+2)}} = 4^{\frac{1}{x}}$.

9. При каких значениях a уравнение:

а) $4^x - (5a - 3) \cdot 2^x + 4a^2 - 3a = 0$ имеет единственное решение?

б) $25^x - (2a + 3) \cdot 5^x - 3a^2 + 5a + 2 = 0$ имеет два различных решения?

10. При каких значениях a имеет единственное решение уравнение:

а) $\dfrac{x^2-5x+6}{4^{3x-a}-4^{2a-x}}=0$; б) $\dfrac{x^2-6x+8}{5^{2x-a}-5^{a-x}}=0$?

11. Найти множество значений a, при которых уравнение:

а) $16^x-(3a+8)\cdot 4^x+2a^2+13a+15=0$ имеет единственное решение, меньшее, чем 1;

б) $4^x-3(a-5)\cdot 2^x+2a^2-22a+56=0$ имеет единственное решение, принадлежащее отрезку $[1; 2]$;

в) $9^x-(3a-10)\cdot 3^x+2a^2-16a+24=0$ имеет единственное решение, большее, чем 1.

12. Решить неравенство $a^{x^2-x}<a^2$.

13. Найти все значения параметра, при которых для всех $x\in\boldsymbol{R}$ выполняется неравенство:

а) $a\cdot 5^{-x}-(5a+3)\cdot 5^x+a-1<0$;

б) $a\cdot 9^x+(1-a)\cdot 3^x-1{,}75a+1>0$;

в) $k\cdot 7^x+(4-8k)\cdot 7^{-x}>2k-1$.

14. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства $0{,}4^{x^2+1}\geqslant 6{,}25^{a-3x}$ является решением неравенства $x^2-6x+4<a^2$?

Ответы

1. а) Если $a>0$, то $x=1$ и $x=\log_2 a$; если $a\leqslant 0$, то $x=1$; б) если $a\geqslant 0$, то $x=-1$; если $a<0$, то $x=-1$ и $x=\log_5(-a)$; в) если $a\geqslant 0$, то $x=1$; если $a<0$, то $x=1$ и $x=\log_3(-a)$. **2.** а) $a\in\left(\frac{2}{7}; \frac{3}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{5}; \frac{4}{3}\right)$; б) $a\in\left(1; \frac{3}{2}\right)\cup$ $\cup\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{3}\right)$. **3.** -7. **4.** -4. **5.** 3. **6.** $p=-2$ и $p=0$. **7.** 3. **8.** а) Если $3<a<27$, то $x=2+\log_4\frac{a-27}{3-a}$; если $a\leqslant 3$ или $a\geqslant 27$, то нет решений; б) если $a\neq -3$, $a\neq -2$, $a\neq 0{,}5$, то $x=\frac{2a-1}{a+3}$; если $a=-3$, $a=-2$, $a=0{,}5$, то нет решений. **9.** а) $a\in(0; 0{,}75]\cup\{1\}$; б) $a\in\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4}; 2\right)$. **10.** а) $\left\{\frac{8}{3}; 4\right\}$; б) $\{3; 6\}$. **11.** а) $a\in(-5; -1{,}5)$; б) $a\in[5; 6]$; в) $a\in(3{,}5; 6]$. **12.** Если $a>1$, то $x\in(-1; 2)$; если $0<a<1$, то $x\in(-\infty; -1)\cup(2; +\infty)$; если $a=1$, то $x\in\varnothing$. **13.** а) $a\in$ $\in\left[-\frac{3}{5}; 0\right]$; б) $a\in\left[0; \frac{4}{7}\right]$; в) $k\in\left[0; \frac{1}{2}\right]$. **14.** $a\in(-\infty; -3)\cup(1; +\infty)$.

Тема 17

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Понятие логарифма

1°. ***Логарифмом*** положительного числа b по основанию a (где $a > 0$, $a \neq 1$) называют показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить число b.

2°. Логарифм числа b по основанию a обозначают символом $\log_a b$.

3°. Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, то $\log_a b$ по определению есть показатель степени, в которую надо возвести число a, чтобы получить число b.

4°. Поэтому равенство $a^{\log_a b} = b$ есть тождество, которое называют ***основным логарифмическим тождеством***. Например, $3^{\log_3 4} = 4$, $0{,}5^{\log_{0,5} 8} = 8$.

5°. Для обозначения десятичных логарифмов принята специальная запись: вместо $\log_{10} b$, где b — произвольное положительное число, пишут $\lg b$.

2. Свойства логарифмов

1°. Логарифмы существуют только для положительных чисел, т. е. $\log_a N$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) существует, если $N > 0$.

$2°$. При основании $a > 1$ логарифмы чисел $N > 1$ положительны, а логарифмы чисел $0 < N < 1$ отрицательны.

Например, $\log_2 5 > 0$, $\log_2 \frac{1}{3} < 0$.

$3°$. При основании $0 < a < 1$ логарифмы чисел $N > 1$ отрицательны, а логарифмы чисел $0 < N < 1$ положительны.

Например, $\log_{\frac{1}{2}} 5 < 0$, $\log_2 \frac{1}{3} > 0$.

$4°$. Равным положительным числам соответствуют и равные логарифмы, т. е. если $N_1 = N_2$, то $\log_a N_1 = \log_a N_2$.

$5°$. Если $a > 1$, то большему числу соответствует и больший логарифм, т. е. если $N_1 > N_2$, то $\log_a N_1 > \log_a N_2$.

Например, $\log_2 7 > \log_2 5$.

$6°$. Если $0 < a < 1$, то большему числу соответствует меньший логарифм, т. е. если $N_1 > N_2$, то $\log_a N_1 < \log_a N_2$.

Например, $\log_{\frac{1}{3}} 9 < \log_{\frac{1}{3}} 3$.

$7°$. Логарифм единицы по любому основанию ($a > 0$, $a \neq 1$) равен нулю, т. е. $\log_a 1 = 0$.

$8°$. Логарифм самого основания равен 1, т. е. $\log_a a = 1$.

3. Логарифмическая функция, ее свойства и график

$1°$. Показательная и логарифмическая функции при одном и том же основании являются взаимно обратными функциями.

$2°$. На рис. 99, *а* изображен график функции $y = \log_a x$ при $a > 1$, а на рис. 99, *б* — график функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$.

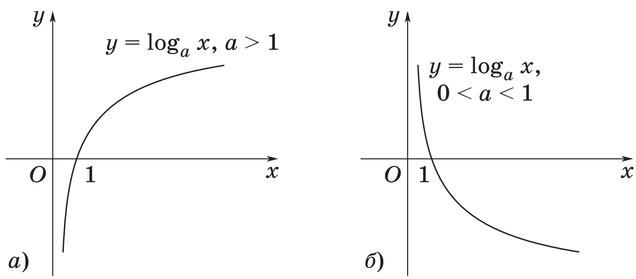


Рис. 99

3°. Свойства функции $y = \log_a x$ при $a > 1$:

а) $D(f) = \boldsymbol{R}_+$;

б) $E(f) = \boldsymbol{R}$;

в) функция возрастает;

г) если $x = 1$, то $\log_a x = 0$;

д) если $0 < x < 1$, то $\log_a x < 0$;

е) если $x > 1$, то $\log_a x > 0$.

4°. Свойства функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$:

а) $D(f) = \boldsymbol{R}_+$;

б) $E(f) = \boldsymbol{R}$;

в) функция убывает;

г) если $x = 1$, то $\log_a x = 0$;

д) если $0 < x < 1$, то $\log_a x > 0$;

е) если $x > 1$, то $\log_a x < 0$.

4. Теоремы о логарифме произведения, частного и степени. Формула перехода к новому основанию

1°. Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей, т. е.

$$\log_a (N_1 N_2 \ldots N_k) = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \ldots + \log_a N_k,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $N_i > 0$.

2°. Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя, т. е.

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $N_1 > 0$, $N_2 > 0$.

3°. Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм ее основания, т. е.

$$\log_a N^c = c \cdot \log_a N, \text{ где } N > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$$

З а м е ч а н и е. Если $N < 0$, а c — четное число, то справедлива формула

$$\log_a N^c = c \log_a |N|,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$.

4°. Формула перехода от логарифма по основанию b к логарифму по основанию a имеет вид

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}, \text{ где } N > 0,\ a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0,\ b \neq 1.$$

5°. Если $a = N$, то формула перехода примет вид

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b},$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

6°. Если основание логарифма и число, находящееся под знаком логарифма, возвести в одну и ту же степень, отличную от нуля, то значение логарифма не изменится, т. е.

$$\log_a N = \log_{a^c} N^c,$$

где $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$.

5. Логарифмирование и потенцирование

1°. ***Логарифмирование*** — это преобразование, при котором логарифм выражения с переменными приводится к сумме или разности логарифмов переменных.

2°. Необходимо четко различать сумму логарифмов $\lg a + \lg b$ и логарифм суммы $\lg (a + b)$. Сумма логарифмов равна логарифму произведения, т. е. $\lg a + \lg b = \lg(ab)$, а для логарифма суммы $\lg (a + b)$ формулы нет.

3°. ***Потенцирование*** — это преобразование, обратное логарифмированию.

6. Логарифмические уравнения

1°. Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называют ***логарифмическим***.

2°. Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$ при дополнительных условиях $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$.

3°. Переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$ к уравнению $f(x) = \varphi(x)$ иногда приводит к появлению посторонних корней. Такие корни можно выявить либо с помощью подстановки найденных значений в исходное логарифмическое уравнение, либо с помощью нахождения области определения исходного уравнения (эта область задается системой неравенств $f(x) > 0$, $\varphi(x) > 0$).

4°. При решении логарифмических уравнений часто бывает полезен метод введения новой переменной.

5°. При решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени, используется метод логарифмирования. Если при этом в показателе степени содержится логарифм, то обе части уравнения надо прологарифмировать по основанию этого логарифма.

7. Логарифмические неравенства

1°. Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называют ***логарифмическим***. Например, неравенства $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$, $\log_a f(x) < \log_a \varphi(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$ являются логарифмическими.

2°. Неравенство $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ равносильно системе $f(x) > \varphi(x) > 0$ при $a > 1$ и системе $0 < f(x) < \varphi(x)$ при $0 < a < 1$.

3°. При решении логарифмических неравенств следует учитывать общие свойства неравенств, свойство монотонности логарифмической функции и область ее определения.

З а м е ч а н и е. Известные способы решения систем алгебраических уравнений и неравенств применяются и к решению систем, содержащих логарифмические уравнения и неравенства.

8. Производные логарифмической и показательной функций. Число e

1°. Приближенное значение числа e таково: $e \approx 2{,}7$.

2°. Показательная функция $y = e^x$ в точке $x = 0$ имеет производную, равную 1.

3°. Показательная функция e^x дифференцируема в каждой точке, причем $(e^x)' = e^x$.

4°. Логарифм по основанию e называется натуральным логарифмом и обозначается символом ln.

5°. **Формулы дифференцирования**

При условии $u = \varphi(x)$	Номер формулы	При условии $u = x$	Номер формулы
$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	(1)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	(1a)
$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	(2)	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	(2a)
$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	(3)	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	(3a)
$(e^u)' = e^u \cdot u'$	(4)	$(e^x)' = e^x$	(4a)

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\log_{9-a}(x^2+4) = \log_{9-a}(ax-3x)$$

имеет два решения. В ответе указать наибольшее целое значение a.

1. Уравнение имеет смысл, если $9 - a > 0$, $9 - a \neq 1$, т. е. если $a \in (-\infty; 8) \cup (8; 9)$.

2. Из равенства логарифмов следует, что

$$x^2 + 4 = ax - 3x, \text{ или } x^2 - (a-3)x + 4 = 0.$$

3. Полученное квадратное уравнение имеет два решения, если $D > 0$, т. е. $(a-3)^2 - 16 > 0$, откуда $a \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$.

4. С учетом ОДЗ находим, что данное уравнение имеет два решения, если $a \in (-\infty; -1) \cup (7; 8) \cup (8; 9)$.

5. *Ответ*: -2.

2. Решить относительно x уравнение

$$a^{x+1} = b^{3-x}. \qquad (1)$$

1. Уравнение (1) имеет смысл при $a > 0$ и $b > 0$.

2. Если $a = b = 1$, то x — любое действительное число.

3. Если $a = 1$ и $b \neq 1$, то $x = 3$; если $b = 1$ и $a \neq 1$, то $x = -1$.

4. Пусть теперь $a \neq 1$ и $b \neq 1$; тогда

$$x + 1 = (3 - x)\log_a b, \text{ или } (1 + \log_a b)x = 3\log_a b - 1. \qquad (2)$$

а) Если $1 + \log_a b = 0$, т. е. $b = \frac{1}{a}$, то правая часть уравнения (2) равна (-4), следовательно, при $b = \frac{1}{a} \neq 1$ решений нет.

б) Если $b \neq \frac{1}{a}$, то $x = \dfrac{3\log_a b - 1}{1 + \log_a b}$.

5. *Ответ*: если $a = 1$, $b = 1$, то $x \in \boldsymbol{R}$;
если $a = 1$, $b \neq 1$, то $x = 3$;
если $a \neq 1$, $b = 1$, то $x = -1$;
если $a = \frac{1}{b} \neq 1$, то корней нет;
если $a \neq \frac{1}{b}$, то $x = \dfrac{3\log_a b - 1}{1 + \log_a b}$.

3. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\lg ax = 2 \lg (x + 1) \tag{1}$$

имеет единственный корень.

1. Ясно, что ОДЗ данного уравнения определяется системой неравенств $ax > 0$, $x + 1 > 0$.

2. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} ax = (x + 1)^2, \\ ax > 0, \\ x + 1 > 0 \end{cases} \tag{2}$$

имеет единственное решение.

3. Записав уравнение $ax = (x + 1)^2$ в виде

$$x^2 + (2 - a)x + 1 = 0, \tag{3}$$

заключаем, что оно имеет решение, если $D = (2 - a)^2 - 4 \geqslant 0$, т. е. если $a \leqslant 0$ или $a \geqslant 4$. При выполнении этих условий уравнение (3) имеет два корня:

$$x_1 = \frac{a - 2 + \sqrt{a^2 - 4a}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{a - 2 - \sqrt{a^2 - 4a}}{2}.$$

а) При $a = 0$ не выполняется неравенство $ax > 0$.

б) При $a < 0$ из системы

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = a - 2 < 0, \end{cases}$$

следует, что оба корня уравнения (3) отрицательны.

в) Для корней x_1 и x_2 выполняются следующие неравенства:

$$x_1 + 1 = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{D}}{2} > 0 \text{ и } x_1 a > 0;$$

$$x_2 + 1 = \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{D}}{2} < 0 \text{ и } x_2 a < 0;$$

поэтому при $a < 0$ система (2), а, значит, и уравнение (1) имеют единственное решение x_1.

4. При $a = 4$ система (2) имеет только одно решение $x = 1$.

5. При $a > 4$ из системы

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = a - 2 > 2, \end{cases}$$

следует, что оба корня уравнения (3) положительны, т. е. система (2), а с ней и уравнение (1) имеют два решения.

6. Итак, уравнение (1) имеет единственное решение, если $a < 0$ или $a = 4$.

7. *Ответ*: $a \in (-\infty;0) \cup \{4\}$.

4. Решить относительно x уравнение

$$\log_a x^2 + 2\log_a (x + 2) = 1. \tag{1}$$

1. Уравнение (1) имеет смысл при $a > 0$, $a \neq 1$, $-2 < x < 0$, $0 < x < +\infty$ — это область определения данного уравнения.

2. В этой области уравнение (1) равносильно следующему:

$$2\log_a |x| + 2\log_a (x + 2) = 1, \text{ или } \log_a |x|(x + 2) = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

3. Пользуясь определением логарифма, от уравнения (2) перейдем к равносильному уравнению

$$|x|(x + 2) = \sqrt{a}. \tag{3}$$

4. Рассмотрим два случая: а) $-2 < x < 0$; б) $x > 0$.

а) Пусть $-2 < x < 0$; тогда уравнение (3) примет вид

$$-x(x + 2) = \sqrt{a}, \text{ или } x^2 + 2x + \sqrt{a} = 0,$$

откуда $x_1 = -1 - \sqrt{1 - \sqrt{a}}$, $x_2 = -1 + \sqrt{1 - \sqrt{a}}$, где $1 - \sqrt{a} > 0$, т. е. $0 < a < 1$. Замечаем, что оба полученных корня удовлетворяют условию $-2 < x < 0$.

б) Пусть $x > 0$; тогда уравнение (3) примет вид

$$x(x + 2) = \sqrt{a}, \text{ или } x^2 + 2x - \sqrt{a} = 0,$$

откуда $x_3 = -1 - \sqrt{1 + \sqrt{a}}$, $x_4 = -1 + \sqrt{1 + \sqrt{a}}$. При этом корень x_3 не удовлетворяет условию $x > 0$, а $x_4 > 0$ при $a > 0$.

5. *Ответ*: если $0 < a < 1$, то три корня: $x = -1 - \sqrt{1-\sqrt{a}}$,

$$x = -1 + \sqrt{1-\sqrt{a}},\ x = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}};$$

если $a > 1$, то один корень $x = -1 + \sqrt{1+\sqrt{a}}$.

5. Решить относительно x уравнение

$$\lg (x-a) - \lg 2 = 0{,}5 \lg (x-b). \qquad (1)$$

1. Областью определения уравнения (1) служит решение системы $\begin{cases} x > a, \\ x > b. \end{cases}$ В этой области уравнение (1) равносильно уравнению

$$\lg \frac{x-a}{2} = \lg \sqrt{x-b}, \text{ или } x - a = 2\sqrt{x-b}. \qquad (2)$$

2. Пусть $a = b$; тогда уравнение (2) примет вид

$$x - a = 2\sqrt{x-a}, \text{ или } \sqrt{x-a}\,(\sqrt{x-a} - 2) = 0. \qquad (3)$$

3. Так как $\sqrt{x-a} \neq 0$ (в силу неравенства $x - a > 0$), то от уравнения (3) перейдем к уравнению $\sqrt{x-a} = 2$, откуда $x = a + 4$.

4. Пусть $a \neq b$. Тогда, возведя в квадрат обе части уравнения (2), получим

$$x^2 - 2ax + a^2 = 4(x-b), \text{ или } x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 4b = 0. \qquad (4)$$

5. Дискриминант уравнения (4) равен $D = 16(a - b + 1)$.

а) Если $D < 0$, т. е. $a < b - 1$, то уравнение (4) не имеет корней.

б) Если $D = 0$, т. е. $a = b - 1$, то $x_1 = x_2 = a + 2$.

в) Если $D > 0$, т. е. $a > b - 1$, то уравнение (4) имеет два различных корня:

$$x_1 = a + 2 - 2\sqrt{a-b+1};\quad x_2 = a + 2 + 2\sqrt{a-b+1}.$$

6. Теперь найдем те значения a и b, при которых корни x_1 и x_2 удовлетворяют условию $x > a$ (условие $x > b$ выполняется, так как x_1 и x_2 — корни уравнения $(x-a)^2 = 4(x-b)$).

7. Введем обозначение

$$f(x) = x^2 - 2(a+2)x + a^2 + 4b$$

и вычислим

$$f(a) = a^2 - 2(a + 2)a + a^2 + 4b = 4(b - a).$$

а) Если $b - 1 < a < b$, то $a < b < x_1 < x_2$, следовательно, x_1 и x_2 — корни уравнения (1).

б) Если $a > b$, то $f(a) < 0$, следовательно, $b < x_1 < a < x_2$, т. е. условию $x > a$ удовлетворяет только x_2.

9. *Ответ*: если $a = b$, то $x = a + 4$;

если $b - 1 \leqslant a < b$, то $x_{1,\,2} = a + 2 \pm 2\sqrt{a - b + 1}$;

если $a > b$, то $x = a + 2 + 2\sqrt{a - b + 1}$;

если $a < b - 1$, то корней нет.

6. Определить, при каких значениях a уравнение

$$\log_3 (9^x + 9a^3) = x \tag{1}$$

имеет ровно два решения.

1. Пусть a — некоторое фиксированное число; ОДЗ данного уравнения состоит из всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $9^x + 9a^3 > 0$.

2. Значит, если $a \geqslant 0$, то ОДЗ совпадает с множеством действительных чисел; если $a < 0$, то ОДЗ есть множество $x > \log_9 (-9a^3)$.

3. На ОДЗ уравнение (1) равносильно уравнению $9^x + 9a^3 = 3^x$.

4. Обозначив 3^x через t, получим квадратное уравнение

$$t^2 - t + 9a^3 = 0. \tag{2}$$

5. Дискриминант уравнения (2) равен $1 - 36a^3$. Поэтому если $1 - 36a^3 < 0$, т. е. если $a > \dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}$, то уравнение (2), а, значит, и уравнение (1) не имеет корней.

6. Если $a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}$, то уравнение (2) имеет единственный корень $t = 0{,}5$. Таким образом, исходное уравнение на своей ОДЗ равносильно уравнению $3^x = 0{,}5$, которое имеет единственный корень $x = \log_3 0{,}5$. Не проверяя, входит ли этот корень в ОДЗ уравнения (1), заключаем, что при $a = \dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}$ уравнение (1) имеет не более одного корня.

7. Если $a < \dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}$, то уравнение (2) имеет два корня: $t_{1,\,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 36a^3}}{2}$. Значит, в этом случае исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$3^x = \frac{1 - \sqrt{1 - 36a^3}}{2}; \qquad (3)$$

$$3^x = \frac{1 + \sqrt{1 - 36a^3}}{2}. \qquad (4)$$

8. При $a \leqslant 0$ выполняется неравенство $\dfrac{1 - \sqrt{1 - 36a^3}}{2} \leqslant 0$ и уравнение (3) не имеет решений. Тогда исходное уравнение равносильно на своей ОДЗ уравнению (4), которое имеет единственное решение $x = \log_3 \dfrac{1 + \sqrt{1 - 36a^3}}{2}$. Следовательно, при $a \leqslant 0$ исходное уравнение имеет не более одного решения.

9. Если a удовлетворяет неравенствам $0 < a < \dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}$, то совокупность уравнений (3), (4) имеет корни

$$x_1 = \log_3 \frac{1 - \sqrt{1 - 36a^3}}{2}, \ x_2 = \log_3 \frac{1 + \sqrt{1 - 36a^3}}{2}.$$

В этом случае ОДЗ исходного уравнения совпадает с множеством всех действительных чисел и, значит, уравнение имеет в точности два корня x_1 и x_2.

10. *Ответ*: $a \in \left(0; \dfrac{1}{\sqrt[3]{36}}\right)$.

7. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_2 (a^2x^3 - 5a^2x^2 + \sqrt{6 - x}) = \log_{2 + a^2} (3 - \sqrt{x - 1}) \qquad (1)$$

при любых значениях параметра a.

1. Так как уравнение (1) должно иметь решения при любых значениях параметра a, то оно будет иметь решение и при $a = 0$.

2. При таком значении a уравнение (1) примет вид

$$\log_2 \sqrt{6-x} = \log_2 (3 - \sqrt{x-1}). \qquad (2)$$

3. Уравнение (2) имеет смысл, если выполняется условие $1 < x < 6$. При этом условии имеем

$$\sqrt{6-x} = 3 - \sqrt{x-1}. \qquad (3)$$

4. Упростив уравнение (3), приходим к уравнению

$$x^2 - 7x + 10 = 0, \qquad (4)$$

корнями которого являются значения $x = 2$ и $x = 5$.

5. Эти два значения x дают необходимые условия существования решений уравнения (1) при всех значениях параметра a.

6. Подставив значение $x = 2$ в уравнение (1), приходим к соотношению $\log_2 (2 - 12a^2) = \log_{2+a^2} 2$, которое имеет смысл, если $2 - 12a^2 > 0$, т. е. если $-\frac{\sqrt{6}}{6} < a < \frac{\sqrt{6}}{6}$. Таким образом, в данном случае уравнение (1) удовлетворяется не при любых значениях a, что противоречит требованию задачи.

7. Если же $x = 5$, то уравнение (1) становится истинным равенством: $\log_2 1 = \log_{2+a^2} 1$.

8. *Ответ*: $x = 5$.

8. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\frac{1}{2}\log_3 4x^2 + \log_3 (4 - x) - \log_3 2^a = 0$$

имеет единственное решение.

1. В области допустимых значений, т. е. при условиях

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 4 - x > 0, \end{cases}$$

исходное уравнение равносильно следующему:

$$\log_3 |2x| + \log_3 (4 - x) = \log_3 2^a,$$

или

$$|2x|(4 - x) = 2^a. \qquad (1)$$

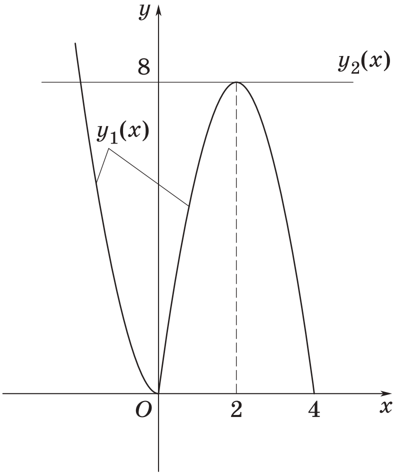


Рис. 100

2. Построим графики функций $y_1 = |2x|(4 - x)$ и $y_2 = 2^a$ (рис. 100).

а) Функцию $y_1(x) = |2x|(4 - x)$ можно записать в виде

$$y_1(x) =$$

$$= \begin{cases} 2x^2 - 8x, & \text{если } x < 0; \\ -2x^2 + 8x, & \text{если } x \in (0;\ 4). \end{cases}$$

б) Так как $2^a > 0$ для любого $a \in \boldsymbol{R}$, то график функции $y_2(x) = 2^a$ представляет собой прямую, параллельную оси Ox и расположенную выше этой оси.

3. Уравнение (1) имеет единственное решение при тех значениях параметра a, когда графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ пересекаются только в одной точке.

4. Очевидно, что это имеет место при $y_2(x) > 8$, т. е. при $2^a > 8$. Следовательно, $a \in (3;\ +\infty)$.

5. *Ответ*: $a \in (3;\ +\infty)$.

9. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$2\log_7(ax - 2) = \log_{\sqrt{7}}(-x^2 - 9x - 18). \qquad (1)$$

1. Уравнение (1) равносильно уравнению

$$\log_7(ax - 2) = \log_7(-x^2 - 9x - 18),$$

которое в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} ax - 2 = -x^2 - 9x - 18, \\ -x^2 - 9x - 18 > 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 + (a + 9)x + 16 = 0, \\ -6 < x < -3. \end{cases} \qquad (2)$$

2. Корни уравнения системы (2), если они существуют, задаются формулами

$$x_1 = \frac{-a-9-\sqrt{(a+1)(a+17)}}{2},\ x_2 = \frac{-a-9+\sqrt{(a+1)(a+17)}}{2}.$$

3. Рассмотрим возможные случаи расположения корней x_1 и x_2 в интервале $(-6; -3)$.

4. Предположим сначала, что дискриминант уравнения системы (2) равен нулю, т. е. что $a = -1$ или $a = -17$. Проверка показывает, что только в случае $a = -1$ корень уравнения $x = -4$ принадлежит интервалу $(-6; -3)$.

5. Теперь рассмотрим случай, когда $a \in (-\infty; -17) \cup (-1; +\infty)$.

а) Если оба корня x_1 и x_2 лежат в интервале $(-6; -3)$, то должна быть совместна система $\begin{cases} x_1 > -6, \\ x_2 < -3. \end{cases}$ Решив эту систему, находим, что $-1 < a < -\frac{2}{3}$.

б) В том случае, когда только больший корень x_2 принадлежит интервалу $(-6; -3)$, должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} -6 < x_2 < -3, \\ x_1 \leqslant -6, \end{cases}$$

откуда следует, что $a \in \varnothing$.

в) Наконец, если только меньший корень x_1 принадлежит интервалу $(-6; -3)$, то имеем систему

$$\begin{cases} -6 < x_1 < -3, \\ -3 \leqslant x_2, \end{cases}$$

решив которую находим, что $-\frac{2}{3} \leqslant a < -\frac{1}{3}$.

6. *Ответ*: если $a < -1$ или $a \geqslant -\frac{1}{3}$, то корней нет;

если $a = -1$, то $x = -4$;

если $-1 < a < -\frac{2}{3}$, то $x_{1,\,2} = -\frac{a+9 \pm \sqrt{(a+1)(a+17)}}{2}$;

если $-\frac{2}{3} \leqslant a < -\frac{1}{3}$, то $x = -\frac{a+9+\sqrt{(a+1)(a+17)}}{2}$.

10. Решить относительно x уравнение

$$\log_{\sqrt{x}} a \cdot \log_{a^2} \frac{a^2-4}{2a-x} = 1.$$

1. Так как $\sqrt{x}$ и a^2 являются основаниями логарифмов, то $x \neq 1$, $a \neq 1$; неизвестное x входит в выражение $\sqrt{x}$, поэтому $x > 0$; так как логарифмы берутся только от положительных чисел, то $a > 0$; кроме того, $0 < \dfrac{a^2-4}{2a-x} < +\infty$ и, следовательно, $a \neq 2$, $x \neq 2a$, причем $x > 2a$, если $0 < a < 2$, и $x < 2a$, если $a > 2$.

2. При указанных условиях имеем

$$\log_{\sqrt{x}} a = \frac{2}{\log_a x},\ \log_{a^2} \frac{a^2-4}{2a-x} = 0{,}5 \log_a \frac{a^2-4}{2a-x}.$$

Тогда данное уравнение можно записать в виде

$$\log_a \frac{a^2-4}{2a-x} = \log_a x \Rightarrow \frac{a^2-4}{2a-x} = x \Rightarrow x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0,$$

откуда $x = a \pm 2$.

3. Так как при $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ 2)$ имеем $x > 2a$, то из двух найденных решений этому неравенству удовлетворяет только $x = a + 2$.

4. При $a > 2$ имеем $x < 2a$ и, следовательно, этому неравенству удовлетворяют оба решения, кроме значения $a = 3$. Действительно, в этом случае $x = a - 2 = 1$, что исключено из значений x; поэтому при $a = 3$ получаем для x лишь одно решение: $x = a + 2 = 5$.

5. *Ответ*: если $a \in (-\infty;\ 0) \cup \{1;\ 2\}$, то $x \in \varnothing$;
если $a \in (0;\ 1) \cup (1;\ 2) \cup \{3\}$, то $x = a + 2$;
если $a \in (2;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$, то $x_{1,\,2} = a \pm 2$.

11. При каких значениях параметра a из интервала $(2;\ 5)$ уравнение

$$\log_2 (3 - |\sin ax|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$$

имеет хотя бы одно решение x такое, что $2 \leqslant x \leqslant 3$?

1. Так как $|\sin ax| \leqslant 1$, то $3 - |\sin ax| \geqslant 2$ и, следовательно, $\log_2 (3 - |\sin ax|) \geqslant 1$.

2. С другой стороны, учитывая, что $\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) \leqslant 1$, получим систему

$$\begin{cases} \sin ax = \pm 1, \\ \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1, \end{cases}$$

откуда находим

$$ax = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \qquad (1)$$

$$x = \frac{1}{6} + 2n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \qquad (2)$$

3. Согласно условию, $2 \leqslant x \leqslant 3$, поэтому в равенстве (2) должно быть $n = 1$, откуда $x = \frac{13}{6}$. Тогда из равенства (1) следует, что $a \cdot \frac{13}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, или $a = \frac{3\pi}{13} + \frac{6\pi k}{13}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

4. Теперь воспользуемся условием $2 < a < 5$; отсюда заключаем, что $k \in \{1;\ 2\}$ и, значит, $a_1 = \frac{9\pi}{13}$, $a_2 = \frac{15\pi}{13}$.

5. *Ответ*: $a_1 = \frac{9\pi}{13}$, $a_2 = \frac{15\pi}{13}$.

12. Для каждого положительного числа a ($a \neq 1$) решить уравнение

$$\log_a^2 \sin x + \log_a \sin x - a = 0. \qquad (1)$$

1. Полагая $t = \log_a \sin x$ и учитывая, что всюду в области определения уравнения (1) выполняются неравенства

$$\log_a \sin x \geqslant 0 \text{ при } 0 < a < 1,\ \log_a \sin x \leqslant 0 \text{ при } a > 1,$$

получаем две смешанные системы:

$$t^2 + t - a = 0,\ t > 0 \text{ при } 0 < a < 1; \qquad (2)$$

$$t^2 + t - a = 0,\ t < 0 \text{ при } a > 1 \qquad (3)$$

(если $t = 0$, то $a = 0$, что невозможно).

2. Если $0 < a < 1$, то квадратное уравнение

$$t^2 + t - a = 0$$

имеет два различных действительных корня:

$$t_1 = -\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2},\ t_2 = \frac{\sqrt{1+4a}-1}{2},$$

причем $t_1 < 0$, $t_2 > 0$.

3. Значит, при $0 < a < 1$ система (2) имеет решение $t = t_2$, откуда находим

$$\log_a \sin x = \frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}. \qquad (4)$$

При $a > 1$ система (3) имеет решение $t = t_1$ и, следовательно,

$$\log_a \sin x = -\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2}. \qquad (5)$$

4. Таким образом, уравнение (1) равносильно совокупности уравнений (4) и (5), решив которые получим ответ.

5. *Ответ*: если $0 < a < 1$, то $x = (-1)^k \arcsin a^{\frac{\sqrt{1+4a}-1}{2}} + \pi k$;

если $a > 1$, то $x = (-1)^k \arcsin a^{-\frac{\sqrt{1+4a}+1}{2}} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

13. Найти все значения параметра a, при которых в область определения функции $y = \lg(a^{ax-2} - a^x)$ входят числа 13, 15, 17, но не входят числа 3, 5, 7.

1. По определению логарифма $x \in D(y)$ в том и только в том случае, если $a^{ax-2} > a^x$. При $a = 1$ область определения пуста.

2. Рассмотрим два случая: а) $0 < a < 1$; б) $a > 1$.

а) Пусть $0 < a < 1$. Тогда показательная функция с основанием a убывает, поэтому из неравенства $a^{ax-2} > a^x$ следует, что $ax - 2 < x$, т. е. $(1-a)x > -2$. Учитывая, что $0 < a < 1$, имеем $1 - a > 0$. Значит, $D(y) = \left(-\frac{2}{1-a};\ +\infty\right)$. Но в этот промежуток входят все положительные числа и, в частности, числа 3, 5, 7. Следовательно, такие значения a не удовлетворяют условию.

б) Пусть $a > 1$. Тогда показательная функция с основанием a возрастает, поэтому из неравенства $a^{ax-2} > a^x$ следует, что $ax - 2 > x$, т. е. $(a-1)x > 2$. Так как $a > 1$, то $a - 1 > 0$. Значит, $D(y) = \left(\frac{2}{a-1};\ +\infty\right)$. Числа 13, 15, 17 входят в этот промежуток только тогда, когда его левый конец меньше 13. Для того же, чтобы этот промежуток не содержал чисел 3, 5, 7, нужно, чтобы его левый конец был не меньше 7.

3. Итак, получаем следующее двойное неравенство для параметра $a > 1$:

$$7 \leqslant \frac{2}{a-1} < 13,\ 7(a-1) \leqslant 2 < 13(a-1),\ \frac{2}{13} < a - 1 \leqslant \frac{2}{7}.$$

4. *Ответ*: $a \in \left(\frac{15}{13}; \frac{9}{7}\right]$.

14. В области определения функции $y = \log_9\left(a^{\frac{7x+3}{x-3}} - a^a\right)$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найти все значения a, при которых такая сумма больше 9, но меньше 16.

1. Графиком дробно-линейной функции $z = \frac{7x+3}{x-3} = 7 + \frac{24}{x-3}$ является гипербола.

2. По условию $x > 0$. Если $0 < x < 3$, то $z < 0$. При неограниченном возрастании x дробь $\frac{24}{x-3}$ монотонно убывает и стремится к нулю, а значения функции z убывают и приближаются к 7 (рис. 101).

3. По определению логарифма область определения $D(y)$ состоит из решений неравенства $a^{\frac{7x+3}{x-3}} > a^a$.

а) При $a = 1$ получаем неравенство, которое не имеет решений.

б) При $0 < a < 1$ показательная функция с основанием a убывает и неравенство $a^{\frac{7x+3}{x-3}} > a^a$ равносильно неравенству $\frac{7x+3}{x-3} < a$. Если $x > 3$, то $\frac{7x+3}{x-3} > 7 > a$, т. е. при $x > 3$ неравенство $\frac{7x+3}{x-3} < a$ не выполняется. Если же $x < 3$, то в интервале $(0; 3)$ имеются всего два целых положительных числа: 1 и 2. Поскольку их сумма меньше 9, рассматриваемые значения a не удовлетворяют условию.

в) При $a > 1$ показательная функция с основанием a возрастает и неравенство $a^{\frac{7x+3}{x-3}} > a^a$ равносильно неравенству $\frac{7x+3}{x-3} > a$. Если $a \leqslant 7$, то любое число, большее 3, является его решением и ука-

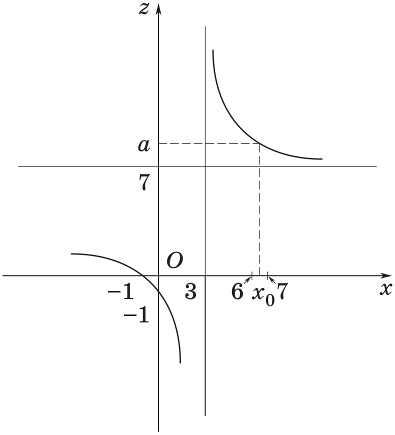


Рис. 101

занную сумму найти нельзя. Если же $a > 7$, то множество его положительных решений — это интервал $(3;\ x_0)$, где $a = z(x_0)$ (рис. 101).

г) Найдем суммы последовательных натуральных чисел, начиная с 4: 4; $4 + 5 = 9$; $4 + 5 + 6 = 15$; $4 + 5 + 6 + 7 = 22$; ... . Значит, указанная сумма будет больше 9 и меньше 16, если число 6 принадлежит интервалу $(3;\ x_0)$, а число 7 этому интервалу не принадлежит, т. е. $6 < x_0 \leqslant 7$. Так как функция $z = \dfrac{7x+3}{x-3}$ убывает на $[6;\ 7]$, то $z(7) \leqslant z(x_0) < z(6)$, или $\dfrac{7 \cdot 7 + 3}{7-3} \leqslant a < \dfrac{7 \cdot 6 + 3}{6-3}$.

4. *Ответ*: $a \in [13;\ 15)$.

15. Для каждого действительного значения параметра a решить уравнение $\log_{|\sin x|} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = a$.

1. Левая часть уравнения представляет собой произведение двух отрицательных множителей (так как $|\sin x| < 1$ и $\sin^2 x < 1$, то $\log_{|\sin x|} 2 < 0$, $\log_{\sin^2 x} 3 < 0$). Следовательно, $a > 0$.

2. Переходя к основанию логарифмов, равному 2, и учитывая, что $\sin^2 x = |\sin x|^2$, получаем систему

$$\begin{cases} \log_2^2 |\sin x| = \dfrac{\log_2 3}{2a}, & (1) \\ 0 < |\sin x| < 1, & (2) \end{cases}$$

где последнее условие задает область определения исходного уравнения.

3. На множестве (2) уравнение (1) равносильно уравнению

$$|\log_2 |\sin x|| = \sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}},$$

или, учитывая, что $|\log_2|\sin x|| = -\log_2|\sin x|$, уравнению

$$\log_2|\sin x| = -\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}.$$

4. Отсюда находим

$$|\sin x| = 2^{-\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}}, \text{ т. е. } \sin x = \pm 2^{-\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}}.$$

5. *Ответ*: если $a \leqslant 0$, то уравнение не имеет корней;

$$\text{если } a > 0, \text{ то } x = \pi k + (-1)^k \arcsin\left(\pm 2^{-\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}}\right), \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

16. Найти все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y = \log_2\left(1 + \dfrac{x}{|x|}\right), \\ (x-a)^2 + (y-a)^2 = 1 \end{cases} \tag{1}$$

имеет единственное решение.

1. Функция $y = \log_2\left(1 + \dfrac{x}{|x|}\right)$ определена только при $x > 0$, при этом $y = \log_2(1+1) = 1$.

2. Подставив $y = 1$ во второе уравнение системы (1), получим квадратное уравнение

$$x^2 - 2ax + 2a^2 - 2a = 0. \tag{2}$$

3. Заданная система (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда уравнение (2) имеет один положительный корень.

4. Квадратное уравнение (2) может иметь один положительный корень в трех случаях.

а) Если дискриминант уравнения равен нулю и при этом корень уравнения положителен, т. е. если

$$\begin{cases} \dfrac{D}{4} = 2a - a^2 = 0, \\ a > 0, \end{cases}$$

откуда $a = 2$.

б) Если корни квадратного уравнения имеют разные знаки, т. е. если $2a^2 - 2a = 2a(a - 1) < 0$, откуда $0 < a < 1$.

в) Если один из корней равен нулю, а другой положителен. Имеем $2a^2 - 2a = 0$, т. е. $a = 0$ или $a = 1$; тогда один корень уравнения равен нулю. При $a = 0$ второй корень также равен нулю; при $a = 1$ второй корень положителен. Значит, $a = 1$.

5. Объединяя найденные в пп. а)—в) значения, получим

$$a \in (0; 1] \cup \{2\}.$$

6. При каждом из этих значений a система имеет единственное решение $x = a + \sqrt{2a - a^2}$, $y = 1$.

7. *Ответ*: $a \in (0; 1] \cup \{2\}$.

17. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} \sin[3(a - y)] + 3\sin x = 0, & (1) \\ 2\log_4(a - y) + 2\log_4(2\sqrt{y}) = \log_2\sqrt{y} + 3\log_8(2x) & (2) \end{cases}$$

имеет четное число решений?

1. Здесь ОДЗ переменных x и y задается системой

$$\begin{cases} a - y > 0, \\ x > 0, \\ y > 0. \end{cases}$$

2. Поэтому от уравнения (2) можно перейти к уравнению

$$2(a - y)\sqrt{y} = 2x\sqrt{y}$$

и, значит, $x = a - y$. Подставив это выражение в уравнение (1), имеем $\sin 3x + 3\sin x = 0$, или, после преобразований,

$$\sin x\,(3 - 2\sin^2 x) = 0.$$

3. Итак, получим уравнение $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, $n \in \boldsymbol{N}$. С другой стороны, $x = a - y$. Таким образом, с учетом ОДЗ приходим к системе

$$\begin{cases} y = a - \pi n, \\ x = \pi n, \\ x > 0, \\ y > 0, \end{cases}$$

из которой следует, что $x = \pi n$ меньше a. Поэтому исходная система имеет четное число решений в том случае, когда

$$2\pi k < a < \pi(2k+1),\ k \in \boldsymbol{N}.$$

4. *Ответ*: $2\pi k < a < \pi(2k+1)$, $k \in \boldsymbol{N}$.

18. Найти область определения функции $y = \log_a \log_a \log_a x$.

1. Область определения находим как решение неравенства

$$\log_a \log_a x > 0. \qquad (1)$$

2. При $a > 1$ неравенство (1) равносильно неравенству $\log_a x > 1$, откуда получим $a < x < +\infty$.

3. При $0 < a < 1$ неравенство (1) равносильно неравенству $0 < \log_a x < 1$, откуда следует, что $a < x < 1$.

4. *Ответ*: если $a > 1$, то $a < x < +\infty$;
если $0 < a < 1$, то $a < x < 1$.

19. Для каждого положительного $a \neq 1$ решить неравенство

$$x^{\log_a x + 1} > a^2 x. \qquad (1)$$

1. Пусть $a > 1$; тогда, логарифмируя по основанию a обе части неравенства (1), получим

$$(\log_a x + 1)\log_a x > \log_a x + 2, \text{ или } \log_a^2 x > 2. \qquad (2)$$

Решив неравенство (2), получим два интервала $-\infty < \log_a x < -\sqrt{2}$ и $\sqrt{2} < \log_a x < +\infty$, откуда находим

$$0 < x < a^{-\sqrt{2}} \text{ и } a^{\sqrt{2}} < x < +\infty.$$

2. Пусть $0 < a < 1$; тогда аналогично получим

$$(\log_a x + 1)\log_a x < \log_a x + 2, \text{ или } \log_a^2 x < 2. \qquad (3)$$

Из неравенства (3) следует, что $-\sqrt{2} < \log_a x < \sqrt{2}$, откуда $a^{\sqrt{2}} < x < a^{-\sqrt{2}}$.

3. *Ответ*: если $a > 1$, то $0 < x < a^{-\sqrt{2}}$, $a^{\sqrt{2}} < x < +\infty$;
если $0 < a < 1$, то $a^{\sqrt{2}} < x < a^{-\sqrt{2}}$.

20. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+2) > 1 \qquad (1)$$

выполняется для любого значения x?

1. Так как $x^2 + 2 \geqslant 2$, то для того чтобы левая часть неравенства (1) была положительной, нужно, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{a}{a+1} > 1, \qquad (2)$$

откуда следует, что $a < -1$.

2. Перепишем неравенство (1) в виде

$$\log_{\frac{a}{a+1}}(x^2+2) > \log_{\frac{a}{a+1}}\frac{a}{a+1}.$$

Это неравенство с учетом (2) равносильно неравенству

$$x^2 + 2 > \frac{a}{a+1},$$

которое будет выполняться для любого значения x, если $\frac{a}{a+1} < 2$, т. е. если $a < -2$, $a > -1$. Из этих значений a только значения $a < -2$ удовлетворяют неравенству (2).

3. *Ответ*: $a \in (-\infty; -2)$.

21. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$\log_{2x+3}(a-2) < 1. \qquad (1)$$

1. Неравенство имеет смысл при $a > 2$. Значения x должны удовлетворять условиям $2x + 3 > 0$, $2x + 3 \neq 1$, т. е. $x > -1{,}5$, $x \neq -1$.

2. Переписав неравенство (1) в виде

$$\log_{2x+3}(a-2) < \log_{2x+3}(2x+3), \qquad (2)$$

заметим, что если $2x + 3 > 1$, т. е. если $x > -1$, то неравенство (2) равносильно неравенству $a - 2 < 2x + 3$, откуда $x > \frac{a-5}{2}$.

3. Для выбора решения сравним числа $\frac{a-5}{2}$ и (-1), т. е. рассмотрим разность $\frac{a-5}{2} - (-1) = \frac{a-3}{2}$. Имеем:

а) $\frac{a-3}{2} \leqslant 0$ при $2 < a \leqslant 3$; б) $\frac{a-3}{2} > 0$ при $a > 3$.

4. Отсюда при $2 < a \leqslant 3$ получим $\dfrac{a-5}{2} \leqslant -1$ и решением системы

$$\begin{cases} x > \dfrac{a-5}{2}, \\ x > -1 \end{cases}$$

служит $x > -1$.

5. При $a > 3$ получим $\dfrac{a-5}{2} > -1$ и решением системы

$$\begin{cases} x > \dfrac{a-5}{2}, \\ x > -1 \end{cases}$$

служит $x > \dfrac{a-5}{2}$.

6. Найдем теперь те решения неравенства (1), которые удовлетворяют условию $0 < 2x + 3 < 1$, т. е. $-1{,}5 < x < -1$. При этом условии неравенство (1) равносильно неравенству

$$a - 2 > 2x + 3, \text{ т. е. } x < \frac{a-5}{2}.$$

7. Так как при $2 < a \leqslant 3$ имеем $\dfrac{a-5}{2} \leqslant -1$, то приходим к системе

$$\begin{cases} x < \dfrac{a-5}{2}, \\ -1{,}5 < x < -1, \end{cases}$$

откуда$-1{,}5 < x < \dfrac{a-5}{2}$ (легко проверить, что $-1{,}5 < \dfrac{a-5}{2}$ при $a > 2$).

8. При $a > 3$ получим $\dfrac{a-5}{2} > -1$, следовательно, при этих значениях a система

$$\begin{cases} x < \dfrac{a-5}{2}, \\ -1{,}5 < x < -1 \end{cases}$$

имеет решение $-1{,}5 < x < -1$.

9. *Ответ*: если $2 < a \leqslant 3$, то $-1{,}5 < x < \dfrac{a-5}{2}$; $-1 < x < +\infty$;

если $a > 3$, то $-1{,}5 < x < -1$, $\dfrac{a-5}{2} < x < +\infty$.

22. При каких значениях a значение выражения

$$(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|} \qquad (1)$$

больше значения выражения

$$0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)} \qquad (2)$$

для всех допустимых значений x?

1. Перейдем к одному и тому же основанию степени в выражениях (1) и (2):

а) $(1-|x|)^{\log_5(1-|x|)-|a-1|} = 5^{\log_5(1-|x|)\cdot\log_5(1-|x|)-|a-1|}$; $\qquad (3)$

б) $0{,}2^{4-a^2-\log_{25}(1+x^2-2|x|)} = (5^{-1})^{4-a^2+\log_{5^2}(1-|x|)^2} =$

$= 5^{a^2-4+\frac{1}{2}\cdot 2\log_5(1-|x|)} = 5^{\log_5(1-|x|)+a^2-4}$. $\qquad (4)$

2. Введем новую переменную $t = \log_5(1-|x|)$. Тогда:

а) ее наибольшее значение равно нулю, а при стремлении x к 1 эта переменная стремится к $(-\infty)$;

б) в силу непрерывности функции t заключаем, что $E(t) = (-\infty; 0]$.

3. Сравнивая выражения (3) и (4), получаем неравенство

$$t(t-|a-1|) > t + a^2 - 4,\ t \leqslant 0,$$

или

$$t^2 - (|a-1|+1)t + 4 - a^2 > 0,\ t \leqslant 0. \qquad (5)$$

4. Абсцисса вершины параболы положительна, ветви направлены вверх. Значит, неравенство (5) верно при всех неположительных t в том и только в том случае, когда свободный член положителен, т. е. $a^2 - 4 < 0$.

5. *Ответ*: $a \in (-2; 2)$.

23. Найти все значения a, при которых неравенство

$$1 + \log_5(x^2+1) \geqslant \log_5(ax^2+4x+a) \qquad (1)$$

выполняется для любого значения x.

1. Неравенство (1) равносильно неравенству

$$\log_5 5(x^2+1) \geqslant \log_5(ax^2+4x+a),$$

которое в свою очередь равносильно системе

$$\begin{cases} 5(x^2+1) \geqslant ax^2+4x+a, \\ ax^2+4x+a > 0. \end{cases}$$

2. Таким образом, требуется найти все значения a, при которых системе неравенств

$$\begin{cases} (a-5)x^2 + 4x + (a-5) \leqslant 0, & (2) \\ ax^2 + 4x + a > 0 & (3) \end{cases}$$

удовлетворяет любое значение x.

а) При $a = 5$ неравенство (2) примет вид $4x \leqslant 0$; оно не выполняется, например, для $x = 1$.

б) При $a = 0$ неравенство (3) примет вид $4x > 0$; оно не выполняется, например, для $x = -1$.

в) Пусть $a > 5$. Рассмотрим неравенство (2). Если $x = 0$, то оно примет вид $a - 5 \leqslant 0$. Это означает, что при любом $a > 5$ значение $x = 0$ не является решением системы (2), (3), а следовательно, и исходного неравенства (1).

г) Пусть $a < 0$. Рассмотрим неравенство (3). Если $x = 0$, то оно примет вид $a > 0$, что противоречит неравенству $a < 0$. Поэтому при $a < 0$ значение $x = 0$ не является решением системы (2), (3), а следовательно, и исходного неравенства.

д) Пусть $0 < a < 5$. Тогда квадратный трехчлен $(a-5)x^2 + 4x + (a-5)$ неположителен для любого x, если его дискриминант $D_1 = 16 - 4(a-5)^2$ неположителен. Квадратный трехчлен $ax^2 + 4x + a$ положителен для любого x, если его дискриминант $D_2 = 16 - 4a^2$ отрицателен.

4. Таким образом, задача сводится к решению системы

$$\begin{cases} 0 < a < 5, \\ 16 - 4(a-5)^2 \leqslant 0, \\ 16 - 4a^2 < 0. \end{cases}$$

Так как

$$\begin{cases} 0 < a < 5, \\ -4 + (a-5)^2 \geqslant 0, \\ a^2 - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 5, \\ (a-7)(a-3) \geqslant 0, \\ (a-2)(a+2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a < 5, \\ a - 3 \leqslant 0, \\ a - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < a \leqslant 3,$$

то исходное неравенство справедливо для всех x при значениях a из промежутка $2 < a \leqslant 3$.

5. *Ответ*: $a \in (2; 3]$.

24. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства

$$\log_{0,5} x^2 \geqslant \log_{0,5}(x+2) \qquad (1)$$

является решением неравенства

$$49x^2 - 4a^4 \leqslant 0? \qquad (2)$$

1. Неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 \leqslant x + 2, \\ x \neq 0, \\ x + 2 > 0, \end{cases}$$

решив которую находим, что

$$-1 \leqslant x < 0,\ 0 < x \leqslant 2. \qquad (3)$$

2. Неравенство (2) равносильно неравенству

$$\left(x - \frac{2}{7}a^2\right)\left(x + \frac{2}{7}a^2\right) \leqslant 0,$$

решениями которого являются все x такие, что $-\frac{2}{7}a^2 \leqslant x \leqslant \frac{2}{7}a^2$.

3. Решения (3) неравенства (1) являются решениями неравенства (2), когда совместна система

$$\begin{cases} -\frac{2}{7}a^2 \leqslant -1, \\ 2 \leqslant \frac{2}{7}a^2, \end{cases}$$

т. е. когда $a \leqslant -\sqrt{7}$ и $a \geqslant \sqrt{7}$.

4. *Ответ*: $a \in (-\infty; -\sqrt{7}\,] \cup [\,\sqrt{7}; +\infty)$.

25. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{x-a} x^2 < 2 \qquad (1)$$

имеет по крайней мере одно решение из интервала $|x| < 0{,}01$?

1. Здесь ОДЗ переменной x определяется системой

$$\begin{cases} x - a > 0, \\ x - a \neq 1, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

причем, как это следует из вида неравенства (1), оно может иметь решение только при $a \neq 0$.

2. Перепишем неравенство (1) в виде

$$\log_{x-a} x^2 < \log_{x-a} (x-a)^2 \qquad (2)$$

и рассмотрим два случая: а) $0 < x - a < 1$; б) $x - a > 1$.

3. Пусть $0 < x - a < 1$, т. е. $a < x < a + 1$; тогда неравенство (2) равносильно неравенству $x^2 > (x - a)^2$ и приходим к системе

$$\begin{cases} a < x < a + 1, \\ a(a - 2x) < 0, \end{cases} \qquad (3)$$

которая при $a < 0$ равносильна системе

$$\begin{cases} a < x < a + 1, \\ x < \dfrac{a}{2}. \end{cases}$$

4. Тогда с учетом условий задачи получаем, что

$$\begin{cases} a < 0, \\ a + 1 > -0{,}01, \\ \dfrac{a}{2} > -0{,}01, \end{cases}$$

откуда $-0{,}02 < a < 0$.

5. При $a > 0$ система (3) равносильна системе

$$\begin{cases} a < x < a + 1, \\ x > \dfrac{a}{2} \end{cases}$$

и тогда

$$\begin{cases} a > 0, \\ a < 0{,}01, \\ \dfrac{a}{2} < 0{,}01, \end{cases}$$

откуда $0 < a < 0{,}01$.

6. Пусть теперь $x - a > 1$, или $a + 1 < x$. В этом случае приходим к системе

$$\begin{cases} a + 1 < x, \\ a(a - 2x) > 0, \end{cases} \qquad (4)$$

которая при $a < 0$ равносильна системе

$$\begin{cases} a + 1 < x, \\ \dfrac{a}{2} < x. \end{cases}$$

С учетом условий задачи отсюда следует, что

$$\begin{cases} a < 0, \\ a + 1 < 0{,}01, \\ \dfrac{a}{2} < 0{,}01, \end{cases}$$

т. е. $a < -0{,}99$.

7. Если же $a > 0$, то система (4) равносильна системе

$$a + 1 < x < \frac{a}{2},$$

которая является несовместной.

8. *Ответ*: $a < -0{,}99$; $-0{,}02 < a < 0$; $0 < a < 0{,}01$.

26. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos a \leqslant 0. \qquad (1)$$

1. Допустимыми значениями переменной x являются положительные x, отличные от 1.

2. Перепишем неравенство (1) в виде

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} + 2\cos a \leqslant 0.$$

3. Заметим, что

$$z + \frac{1}{z} \geqslant 2 \text{ при } z > 0, \qquad (2)$$

$$z + \frac{1}{z} \leqslant -2 \text{ при } z < 0. \qquad (3)$$

Поэтому в случае, когда $0 < x < 1$, получим неравенство

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} \leqslant -2,$$

которое вместе с неравенствами

$$-2 \leqslant 2\cos a \leqslant 2 \qquad (4)$$

означает, что исходное неравенство будет иметь решения при любом значении параметра a. Такими решениями являются все $x \in (0; 1)$.

4. Пусть теперь $x > 1$. В этом случае $\log_2 x > 0$ и тогда из неравенств (2) и (4) следует, что неравенство (1) будет иметь только одно решение $x = 2$, когда $\cos a = -1$, т. е. когда $a = \pi(2k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

5. *Ответ*: если a — любое, то $0 < x < 1$;
кроме того, если $a = \pi(2k + 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то $x = 2$.

27. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_5 [a \cos 2x + (1 + 5a^2 - \sin^2 x) \cos x + 4 + a] \leqslant 1 \qquad (1)$$

справедливо для всех значений x?

1. Неравенство (1) равносильно двойному неравенству

$$0 < a(2 \cos^2 x - 1) + (5a^2 + \cos^2 x) \cos x + 4 + a \leqslant 5.$$

2. Полагая $y = \cos x$, приходим к неравенству

$$-4 < y^3 + 2ay^2 + 5a^2y \leqslant 1. \qquad (2)$$

3. Тогда задачу можно переформулировать так: найти значения a, при которых неравенство (2) выполняется для любых $-1 \leqslant$ $\leqslant y \leqslant 1$.

4. Рассмотрим функцию $f(y) = y^3 + 2ay^2 + 5a^2y$. Так как

$$f'(y) = 3y^2 + 4ay + 5a^2 > 0$$

при всех a, то функция $f(y)$ строго возрастает; поэтому требования задачи будут выполнены, если

$$\begin{cases} f(-1) > -4, \\ f(1) \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} -1 + 2a + 5a^2 > -4, \\ 1 + 2a + 5a^2 \leqslant 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим, что $-0{,}4 \leqslant a \leqslant 0$.

5. *Ответ*: $a \in [-0{,}4; 0]$.

28. Решить неравенство

$$\log_a^2 x - 2b \log_a x + 2|\log_a x - b| + 2 < 0, \qquad (1)$$

где $0 < a \neq 1$ и b — действительные параметры.

1. С помощью подстановки

$$t = |\log_a x - b| \quad (t \geqslant 0) \qquad (2)$$

данное неравенство приводится к следующей системе неравенств:

$$\begin{cases} t^2 + 2t + 2 - b^2 < 0, & (3) \\ t \geqslant 0. & (4) \end{cases}$$

2. Квадратный трехчлен в левой части неравенства (3) при $|b| \geqslant 1$ имеет два действительных различных корня $t_1 = -\sqrt{b^2 - 1} - 1$ и $t_2 =$ $= \sqrt{b^2 - 1} - 1$, причем $t_1 < 0$, $t_1 \leqslant t_2$. Следовательно, решением неравенства (3) является интервал $t_1 < t < t_2$, а система (3), (4) может иметь решение в том случае, когда больший корень положителен, т. е. когда $\sqrt{b^2-1}-1>0$.

3. Последнее неравенство выполняется при $|b|>\sqrt{2}$. При этих значениях параметра b система (3), (4) имеет решение

$$0 \leqslant t < \sqrt{b^2-1}-1.$$

4. Воспользовавшись подстановкой (2), имеем

$$0 \leqslant |\log_a x - b| < \sqrt{b^2-1}-1 \quad (|b|>\sqrt{2}),$$

откуда

$$b-\sqrt{b^2-1}+1 < \log_a x < b+\sqrt{b^2-1}-1 \quad (|b|>\sqrt{2}). \qquad (5)$$

5. Система неравенств (5) равносильна исходному неравенству (1). Решив ее, получим ответ.

6. *Ответ*: если $|b|>\sqrt{2}$, то

$a^{b+\sqrt{b^2-1}+1} < x < a^{b-\sqrt{b^2-1}+1}$ при $0<a<1$,

$a^{b-\sqrt{b^2-1}+1} < x < a^{b+\sqrt{b^2-1}+1}$ при $a>1$;

если $|b|\leqslant\sqrt{2}$, то решений нет.

29. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} \log_{0,5}(x-3a) \geqslant -3, & (1)\\ |x-2a| \geqslant 9 & (2)\end{cases}$$

не имеет решений?

1. Найдем множество решений неравенства (1):

$$\log_{0,5}(x-3a) \geqslant -3, \text{ или } \begin{cases} x-3a>0,\\ x-3a\leqslant 8,\end{cases}$$

откуда $x \in (3a;\ 3a+8]$.

2. Найдем множество решений неравенства (2):

$$|x-2a| \geqslant 9, \text{ или } \left[\begin{array}{l} x-2a\geqslant 9,\\ x-2a\leqslant -9;\end{array}\right.$$

откуда $x \in (-\infty;\ 2a-9] \cup [2a+9;\ +\infty)$.

3. Исходная система неравенств не имеет решений, если полученные множества не пересекаются. Это условие можно записать в виде системы

$$\begin{cases} 3a + 8 < 2a + 9, \\ 3a \geqslant 2a - 9. \end{cases} \qquad (3)$$

4. Решив систему (3), получим $-9 \leqslant a < 1$.

5. *Ответ*: $a \in [-9; 1)$.

30. Найти все значения x, для которых $0{,}5 < x < 2{,}5$ и которые удовлетворяют неравенству

$$\log_{3x - x^2} (3a - ax) < 1 \qquad (1)$$

при всех значениях параметра a из интервала $0 < a < 2$.

1. Исходя из ограничения на x, заданного в условии ($0{,}5 < x < 2{,}5$), оценим основание логарифма в неравенстве (1). Имеем

$$3x - x^2 = -\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \geqslant -\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} = \frac{5}{4} > 1.$$

2. Итак, $3x - x^2 > 1$ при $0{,}5 < x < 2{,}5$. Поэтому неравенство (1) равносильно следующему:

$$0 < 3a - ax < 3x - x^2. \qquad (2)$$

3. Теперь задача сводится к нахождению тех значений x из интервала $0{,}5 < x < 2{,}5$, которые удовлетворяют двойному неравенству (2) при любых значениях a из интервала $0 < a < 2$.

4. Найдем сначала решения неравенства (2), принадлежащие интервалу $(0{,}5; 2{,}5)$. Имеем

$$\begin{cases} a(3 - x) > 0, \\ x^2 - (a + 3)x + 3a < 0, \\ 0{,}5 < x < 2{,}5, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a(3 - x) > 0, \\ (a - x)(3 - x) < 0, \\ 0{,}5 < x < 2{,}5, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x > a, \\ 0{,}5 < x < 2{,}5. \end{cases} \qquad (3)$$

При последнем переходе мы воспользовались тем, что $3 - x > 0$ при $x < 2{,}5$.

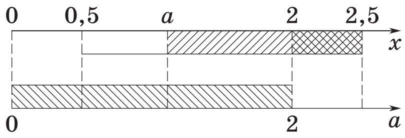


Рис. 102

5. Перейдем теперь к наиболее логически трудной части решения задачи (именно здесь допускаются ошибки): из решений системы (3) нужно отобрать те, которые справедливы при всех a из интервала $(0; 2)$. Этот интервал в сопоставлении с интервалами из системы (3) изображен на рис. 102.

6. Замечаем, что для x, удовлетворяющих неравенству $2 \leqslant x < 2{,}5$, и только для этих x все условия задачи будут выполнены, т. е. система (3) будет удовлетворяться при любых a из интервала $0 < a < 2$.

7. *Ответ*: $x \in [2; 2{,}5)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все значения b, при которых не имеет решений уравнение:

а) $\log_{b+6}(bx + 2x) = \log_{b+6}(x^2 + 3)$;

б) $\log_{b+7}(bx + x) = \log_{b+7}(x^2 + 5)$.

2. Найти все значения a, при которых имеет два различных решения уравнение:

а) $\log_{7-a}(x^2 + 9) = \log_{7-a}(2ax - 4x)$;

б) $\log_{15-a}(x^2 + 1) = \log_{15-a}(ax - 8x)$.

3. При каких целых значениях a неравенство

$$2\log_{0,5} a - 3 + 2x\log_{0,5} a - x^2 < 0$$

выполняется в любой точке оси Ox?

4. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} + \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{a}{x}}} = a.$$

5. Для каждого действительного числа a решить уравнение:

а) $4^x - 4a \cdot 2^x + 2a + 2 = 0$;

б) $144^x - 2 \cdot 12^{|x|} + a = 0$.

6. Найти значения a, при которых уравнение:

а) $\log_2 2x + \log_2 |x - 3| - \log_2 \log_2 a = 0$ имеет два корня;

б) $\frac{1}{2}\log_2 9x^2 + \log_2(6 - x) - \log_2 3^a = 0$ имеет три корня;

в) $\lg\frac{x}{5} + \lg|x - 10| - \lg\log_2 a = 0$ имеет единственный корень;

г) $\log_3 4x + \log_3|x - 2| - \log_3\log_2 a = 0$ имеет три корня.

7. При каких значениях a имеет единственное решение система неравенств:

а) $\begin{cases}\log_2(a + x) \leqslant 1,\\ |a - x| \leqslant 1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_3(a - x) \leqslant 1,\\ |3a - x| \leqslant 5?\end{cases}$

8. При каких значениях a не имеет решений система неравенств:

а) $\begin{cases}\log_{0,5}(x - 4a) \geqslant -3,\\ |x - 3a| \geqslant 7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\log_6(x - a) \leqslant 1,\\ |x - 2a| > 12?\end{cases}$

В ответе указать наименьшее значение a.

9. Найти все значения y, при которых неравенство

$$x^2\left(2 - \log_2\frac{y}{y+1}\right) + 2x\left(1 + \log_2\frac{y}{y+1}\right) - 2\left(1 + \log_2\frac{y}{y+1}\right) > 0$$

выполняется для любых x.

10. В зависимости от значений параметра a решить уравнение

$$\log_3(31 - |x^2 - 6x + 5|) = a.$$

11. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$2\log_4(2x^2 - x + 2a - 4a^2) + \log_{0,5}(x^2 + ax - 2a^2) = 0$$

больше 1?

12. При каких значениях параметра a для любого значения параметра b существуют решения уравнения

$$\log_2(1 - x - x^2) = b + \log_{1-x-x^2} 2,$$

удовлетворяющие условию $0 < x < 0,5$?

13. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\log_{x+a^2+1}(a^2x + 2) = 2\log_{7+2x}(5 - \sqrt{6 - 2x})$$

при любом значении параметра a.

14. При каких значениях параметра a уравнение

$$\lg(x^2 + 2ax) - \lg(8x - 6a - 3) = 0$$

имеет единственное решение?

15. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$\log_a(1 - 8a^{-x}) \geqslant 2(1 - x).$$

Ответы

1. а) $(-\infty; 3) \cup (7; 23]$; б) $[-10; -1) \cup (2; +\infty)$. **2.** а) $\left(-\infty; -\frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; \frac{84}{5}\right]$; б) $\left[-\frac{10}{3}; \frac{5}{2}\right) \cup (5; +\infty)$. **3.** 1, 2, 3, ..., 7. **4.** $x_1 = a^{a^2}$ и $x_2 = a^{\frac{1}{a^2}}$, где $a > 1$. **5.** а) Если $a < -1$, то $x = \log_2(2a + \sqrt{4a^2 - 2a - 2})$; если $a = 1$, то $x = 1$; если $a > 1$, то $x_{1,\,2} = \log_2(2a \pm \sqrt{4a^2 - 2a - 2})$; при остальных a корней нет; б) если $a < 1$, то $x_{1,\,2} = \pm\log_2(1 + \sqrt{1 - a})$; если $a = 1$, то $x = 0$; если $a > 1$, то корней нет. **6.** а) $a = 16\sqrt{2}$; б) $a \in (-\infty; 3)$; в) $a \in (31; +\infty)$; г) $a \in (1; 16)$. **7.** а) 1,5; б) -4. **8.** а) -7; б) -4. **9.** $y \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **10.** Если $a < 3$, то $x_{1,\,2} = 3 \pm \sqrt{35 - 3^a}$; если $a = 3$, то $x_{1,\,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$, $x_3 = 3$; если $3 < a < \log_3 31$, то $x_{1,\,2} = 3 \pm \sqrt{35 - 3^a}$, $x_{3,\,4} = 3 \pm \sqrt{3^a - 27}$; если $a = \log_3 31$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 5$; если $a > \log_3 31$, то корней нет. **11.** $a \in (-1; 0) \cup (0{,}4; 0{,}5)$. **12.** $a \in (0; 4]$. **13.** $x = 1$. **14.** $a \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{3}{22}\right] \cup \{1\}$. **15.** Если $a \leqslant 0$ или $a = 1$, то решений нет; если $0 < a < 1$, то $\log_a(4 + \sqrt{16 + a^2}) \leqslant x < \log_a 8$; если $a > 1$, то $x \geqslant \log_a(4 + \sqrt{16 + a^2})$.

Тема 18

1. Понятие первообразной функции
2. Основное свойство первообразной функции
3. Криволинейная трапеция и ее площадь
4. Формула Ньютона–Лейбница
5. Основные правила интегрирования
6. Вычисление площадей с помощью интеграла

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Понятие первообразной функции

1°. Под дифференцированием функции $f(x)$ мы понимаем нахождение производной $f'(x)$.

Например, если $f(x) = \cos 2x$, то $f'(x) = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2 \sin 2x$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$.

2°. Нахождение функции $f(x)$ по заданной ее производной $f'(x)$ называют операцией ***интегрирования***.

3°. Таким образом, операция интегрирования обратна операции дифференцирования. Следовательно, операция интегрирования состоит в том, что по заданной производной $f'(x)$ находят (восстанавливают) функцию $f(x)$.

4°. Например, пусть $f'(x) = 4x^3$. Следует найти $f(x)$. Опираясь на правило дифференцирования, нетрудно установить, что $f(x) = x^4$. Легко догадаться, что $f(x)$ находится неоднозначно.

5°. В качестве $f(x)$ можно взять и такие функции, как $f(x) = x^4 + 2$, $f(x) = x^4 - 5$, $f(x) = x^4 + \sqrt{5}$ и др., поскольку производная каждой из данных функций равна $4x^3$. Все эти функции отличаются друг от друга только постоянным слагаемым.

6°. Общее решение задачи можно записать в виде $f(x) = x^4 + C$, где C — произвольное действительное число. Любую из найденных функций $f(x)$ называют первообразной для функции $f'(x) = 4x^3$.

7°. Функцию F называют ***первообразной*** для функции f на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка $F'(x) = f(x)$.

Так, функция $F(x) = x^4$ есть первообразная для функции $f(x) = 4x^3$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$, поскольку при всех $x \in \boldsymbol{R}$ справедливо равенство $F'(x) = (x^4)' = 4x^3$.

8°. Множество всех первообразных для функции $f(x)$ можно представить в виде $F(x) + C$, где $C \in \boldsymbol{R}$.

2. Основное свойство первообразной функции

1°. **Теорема.** *Если функция F есть первообразная для функции f на промежутке X, то при любой постоянной C функция*

$$F(x) + C \tag{1}$$

также является первообразной для функции f на промежутке X. Любую первообразную функции f на промежутке X можно записать в виде $F(x) + C$.

2°. Какую бы постоянную в выражении (1) ни подставить вместо C, получится первообразная для функции f. Выражение $F(x) + C$ называют ***общим видом первообразных*** для функции f.

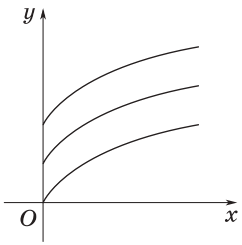


Рис. 103

3°. Какую бы первообразную для функции f ни взять, ее можно получить из выражения (1) при соответствующем подборе постоянной C.

4°. Геометрически основное свойство первообразных можно интерпретировать так: графики всех первообразных данной функции $f(x)$ получаются с помощью параллельного переноса любого из этих графиков вдоль оси Oy (рис. 103).

5°. Таблица первообразных некоторых функций

Функция	Общий вид первообразных	Функция	Общий вид первообразных
k (постоянная)	$kx + C$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
x^α ($\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\alpha \neq -1$)	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	e^x	$e^x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$

3. Криволинейная трапеция и ее площадь

1°. ***Криволинейной трапецией*** называют фигуру, ограниченную графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$.

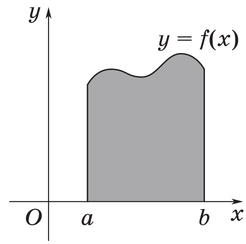


Рис. 104

2°. **Т е о р е м а.** *Пусть f — непрерывная и неотрицательная на отрезке* $[a; b]$ *функция, а S — площадь соответствующей криволинейной трапеции* (рис. 104). *Тогда если F есть первообразная для f на интервале, содержащем отрезок* $[a; b]$, *то* $S = F(b) - F(a)$.

4. Формула Ньютона—Лейбница

1°. ***Интегралом*** от a до b функции f называют приращение первообразной F этой функции, т. е. $F(b) - F(a)$ (очевидно, что это приращение не зависит от выбора первообразной).

2°. Интеграл от a до b функции f обозначается так: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (читается: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс»). Числа a и b называют ***пределами*** интегрирования, a — ***нижним***, b — ***верхним*** пределом. Знак $\int$ называют ***знаком интеграла***, функцию f — ***подынтегральной функцией***, x — ***переменной интегрирования***. Отрезок с концами a и b называют ***отрезком интегрирования***.

3°. Заметим, что верхний предел интегрирования необязательно больше нижнего предела; может быть $a > b$, $a = b$.

4°. По определению интеграла: если $F' = f$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \qquad (1)$$

Это равенство называют ***формулой Ньютона—Лейбница***.

5°. Для удобства записи приращение первообразной $F(b) - F(a)$ сокращенно обозначают так: $F(x)\Big|_a^b$, т. е. $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

6°. Формулу для вычисления площади криволинейной трапеции (см. п. 3) с помощью интеграла можно записать таким образом:

$$S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Формула (2) верна для любой функции f, непрерывной на отрезке $[a;\, b]$.

7°. Интеграл вида $\int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ называют ***интегралом с переменным верхним пределом.*** Этот интеграл есть такая первообразная функции f, которая в точке $x = a$ обращается в нуль, и, следовательно, справедлива формула

$$\left(\int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f'(x).$$

5. Основные правила интегрирования

1°. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла:

$$\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x, \text{ где } k \text{ — постоянная.} \qquad (1)$$

2°. Интеграл от суммы равен сумме интегралов:

$$\int\limits_a^b (f(x) + \varphi(x))\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

3°. Справедлива следующая ***формула замены переменной***:

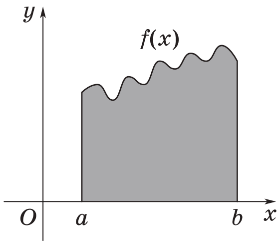
$$\int\limits_a^b f(kx + p)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int\limits_{ka+p}^{kb+p} f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (3)$$

где $t = kx + p$, k и p — постоянные, причем новые пределы интегрирования получаются из формулы $t = kx + p$ заменой x на a и на b.

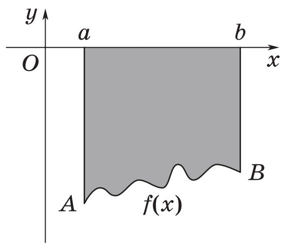
6. Вычисление площадей с помощью интеграла

1°. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;\, b]$. Тогда, как известно, площадь соответствующей криволинейной трапеции (рис. 105, a) находится на формуле

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$



а)



б)

Рис. 105

2°. В том случае, когда непрерывная функция $f(x)$ неположительна на отрезке $[a; b]$, для вычисления площади соответствующей криволинейной трапеции (рис. 105, *б*) следует использовать формулу

$$S = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3°. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и принимает на этом отрезке как положительные, так и отрицательные значения. Тогда нужно разбить отрезок $[a; b]$ на такие части, в каждой из которых функция не изменяет свой знак, затем вычислить по приведенным выше формулам соответствующие этим частям площади и эти площади сложить.

Например, площадь фигуры, изображенной на рис. 106, находится по формуле

$$S = -\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

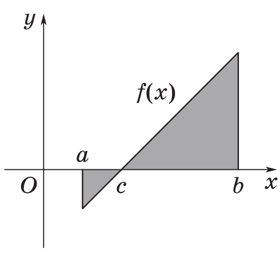


Рис. 106

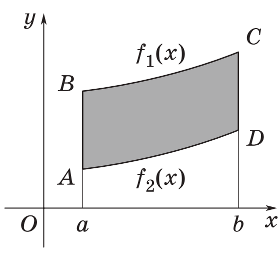


Рис. 107

4°. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух непрерывных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x) \geqslant f_2(x)$ на отрезке $[a; b]$ (рис. 107), находится по формуле

$$S = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. Найти все числа a ($a > 0$), для каждого из которых выполняется неравенство

$$\int_0^a (2 - 4x + 3x^2)\mathrm{d}x \leqslant a.$$

1. Преобразуем левую часть данного неравенства. Согласно формуле Ньютона—Лейбница, имеем

$$\int_0^a (2 - 4x + 3x^2)\,\mathrm{d}x = (2x - 2x^2 + x^3)\Big|_0^a = 2a - 2a^2 + a^3.$$

2. Поэтому исходное неравенство можно переписать так:

$$2a - 2a^2 + a^3 \leqslant a, \text{ или } a(a - 1)^2 \leqslant 0.$$

3. Учитывая условие $a > 0$, получаем, что $a = 1$.

4. *Ответ*: $a = 1$.

2. Найти все решения уравнения

$$\int_0^a \cos\,(x + a^2)\,\mathrm{d}x = \sin a,$$

принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

1. Найдем интеграл в левой части уравнения:

$$\int_0^a \cos\,(x + a^2)\,\mathrm{d}x = \sin\,(x + a^2)\Big|_0^a = \sin\,(a + a^2) - \sin a^2.$$

2. Тогда исходное уравнение можно переписать в виде

$$\sin\,(a + a^2) - \sin a^2 = \sin a.$$

3. Применяя известные формулы, получим

$$2\sin\frac{a}{2}\cos\left(\frac{a}{2}+a^2\right)=2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2};$$

$$\sin\frac{a}{2}\left(\cos\left(\frac{a}{2}+a^2\right)-\cos\frac{a}{2}\right)=0;$$

$$-2\sin\frac{a}{2}\cdot\sin\frac{a^2}{2}\cdot\sin\frac{a^2+a}{2}=0.$$

4. Поэтому исходное уравнение равносильно следующей совокупности уравнений:

$$\sin\frac{a}{2}=0; \qquad (1)$$

$$\sin\frac{a^2}{2}=0; \qquad (2)$$

$$\sin\frac{a^2+a}{2}=0. \qquad (3)$$

5. Уравнение (1) имеет решения $a = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Уравнение (2) имеет решения $a = \pm\sqrt{2\pi n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Уравнение (3) равносильно бесконечной совокупности уравнений

$$a^2 + a - 2l\pi = 0,\ l \in \boldsymbol{Z}. \qquad (4)$$

6. а) Дискриминант каждого из уравнений (4) равен $1 + 8l\pi$, и значит, при целых отрицательных l соответствующие уравнения не имеют решений.

б) Если же l есть одно из чисел 0, 1, 2, ... , то уравнение (4) имеет два корня: $a_{1,\,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{8l\pi+1}}{2}$.

в) Итак, уравнение (3) имеет решения

$$a=\frac{-1\pm\sqrt{8l\pi+1}}{2},\ l = 0, 1, 2, \ldots .$$

7. Теперь в найденных множествах решений совокупности уравнений (1)—(3) выберем числа, принадлежащие отрезку [2; 3].

8. Очевидно, что ни одно из решений уравнения (1) не принадлежит отрезку [2; 3], а из решений уравнения (2) только одно принадлежит этому отрезку: $a = \sqrt{2\pi}$.

9. Рассмотрим решения уравнения (3). Все числа вида $a = \dfrac{-1-\sqrt{8l\pi+1}}{2}$ отрицательны и потому лежат вне отрезка [2; 3]. Из чисел вида $a = \dfrac{-1 + \sqrt{8l\pi + 1}}{2}$ отрезку [2; 3] принадлежат те и только те, которые удовлетворяют двойному неравенству

$$2 \leqslant \frac{-1 + \sqrt{8l\pi + 1}}{2} \leqslant 3, \text{ или } 5 \leqslant \sqrt{8l\pi + 1} \leqslant 7, \text{ или } \frac{3}{\pi} \leqslant l \leqslant \frac{6}{\pi}.$$

10. Ясно, что только число $l = 1$ удовлетворяет этому неравенству. Соответствующее ему решение данного уравнения имеет вид $a = \dfrac{-1 + \sqrt{8\pi + 1}}{2}$.

11. *Ответ*: $\sqrt{2\pi}$; $\dfrac{-1 + \sqrt{8\pi + 1}}{2}$.

3. Найти все значения параметра a ($a \geqslant 1$), при каждом из которых площадь фигуры, лежащей в полуплоскости $x \geqslant 0$ и ограниченной прямыми $y = 1$, $y = 2$ и кривыми $y = ax^2$, $y = \dfrac{1}{2}ax^2$, будет наибольшей. Найти эту площадь S.

1. На рис. 108 изображены данные кривые при фиксированном значении a и прямые $y = 1$, $y = 2$.

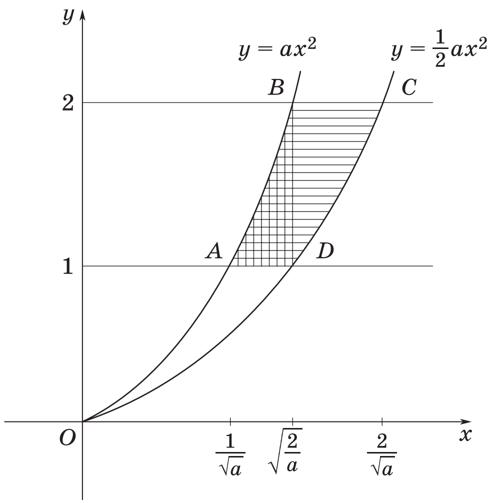


Рис. 108

2. Нужно определить значения параметра a ($a \geqslant 1$), при каждом из которых площадь заштрихованной фигуры $ABCD$ будет наибольшей.

3. Координаты точек A и D являются соответственно решениями систем уравнений

$$\begin{cases} y = ax^2, \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}ax^2, \\ y = 1. \end{cases}$$

4. Координаты точек B и C являются соответственно решениями систем уравнений

$$\begin{cases} y = ax^2, \\ y = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}ax^2, \\ y = 2. \end{cases}$$

5. Учитывая, что абсциссы точек A, B, C, D по условию должны быть неотрицательными, находим $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}; 1\right)$, $D\left(\sqrt{\dfrac{2}{a}}; 1\right)$, $B\left(\sqrt{\dfrac{2}{a}}; 2\right)$, $C\left(\dfrac{2}{\sqrt{a}}; 2\right)$.

6. Точки B и D имеют одинаковые абсциссы, поэтому заштрихованная фигура состоит из двух частей:

а) фигуры, лежащей под кривой $y = ax^2$ и над прямой $y = 1$ на промежутке от $\dfrac{1}{\sqrt{a}}$ до $\sqrt{\dfrac{2}{a}}$;

б) фигуры, лежащей над кривой $y = \dfrac{1}{2}ax^2$ и под прямой $y = 2$ на промежутке от $\sqrt{\dfrac{2}{a}}$ до $\dfrac{2}{\sqrt{a}}$.

7. Найдем площадь заштрихованной фигуры:

$$S = \int\limits_{1/\sqrt{a}}^{\sqrt{2/a}} (ax^2 - 1)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\sqrt{2/a}}^{2/\sqrt{a}} \left(2 - \frac{1}{2}ax^2\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{ax^3}{3} - x\right)\Bigg|_{1/\sqrt{a}}^{\sqrt{2/a}} + \left(2x - \frac{ax^3}{6}\right)\Bigg|_{\sqrt{2/a}}^{2/\sqrt{a}} = \frac{1}{a}\left(\frac{10}{3} - 2\sqrt{2}\right).$$

8. Функция $\frac{1}{a}\left(\frac{10}{3}-2\sqrt{2}\right)$ в области $a \geqslant 1$ монотонно убывает. Поэтому ее наибольшее значение в этой области достигается при $a = 1$ и равно $\frac{10}{3}-2\sqrt{2}$.

9. *Ответ*: $a = 1$; $S = \frac{10}{3}-2\sqrt{2}$.

4. Найти все значения параметра b ($b > 0$), для каждого из которых площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 1 - x^2$ и $y = bx^2$, равна числу c. При каких c задача имеет решение?

1. Пусть b — некоторое фиксированное положительное значение параметра. Для этого значения b найдем абсциссы точек пересечения графиков функций $y(x) = bx^2$ и $y(x) = 1 - x^2$ (рис. 109). Они будут корнями уравнения $bx^2 = 1 - x^2$.

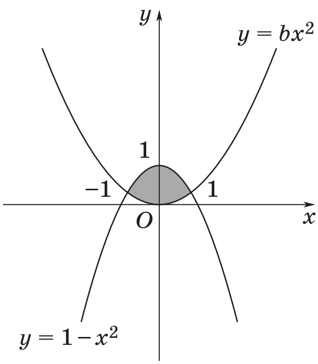


Рис. 109

2. Решив это уравнение, получим $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{b+1}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{b+1}}$.

3. Найдем площадь, ограниченную кривыми $y = 1 - x^2$ и $y = bx^2$:

$$S = \int\limits_{-1/\sqrt{b+1}}^{1/\sqrt{b+1}} ((1-x^2) - bx^2)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left(x - \frac{b+1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-1/\sqrt{b+1}}^{1/\sqrt{b+1}} =$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{b+1}}. \tag{1}$$

4. Так как выражение (1) по условию должно быть равно числу c, то получаем соотношение $\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{b+1}} = c$, откуда следует, что $b = \frac{16}{9c^2} - 1$.

5. Задача имеет решение тогда и только тогда, когда число c удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{16}{9c^2} - 1 > 0, \\ c > 0 \end{cases} \tag{2}$$

(первое неравенство должно выполняться, так как по условию $b > 0$, а второе неравенство есть следствие того, что площадь фигуры должна быть положительна).

5. Решением системы (2) является интервал $0 < c < \frac{4}{3}$; искомое значение b равно $\frac{16}{9c^2} - 1$.

6. *Ответ*: $b = \frac{16}{9c^2} - 1$; $0 < c < \frac{4}{3}$.

5. Найти все значения параметра a ($a > 0$), при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4}$ и прямой $y = \frac{a^2 - ax}{1 + a^4}$, является наибольшей.

1. Пусть a — фиксированное положительное число. Координаты точек пересечения параболы и прямой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4}, \\ y = \dfrac{a^2 - ax}{1 + a^4}. \end{cases}$$

2. Приравнивая правые части уравнений, приходим к равенству $x^2 + 3ax + 2a^2 = 0$, откуда $x_1 = -a$, $x_2 = -2a$. Тогда $y_1 = \frac{2a^2}{1 + a^4}$ и $y_2 = \frac{3a^2}{1 + a^4}$. Итак, прямая пересекает параболу в двух точках: $B\left(-a; \frac{2a^2}{1 + a^4}\right)$ и $C\left(-2a; \frac{3a^2}{1 + a^4}\right)$ (рис. 110).

3. Вычислим площадь фигуры $CmBn$. Имеем

$$S(a) = \int_{-2a}^{-a} \left(\frac{a^2 - ax}{1 + a^4} - \frac{x^2 + 2ax + 3a^2}{1 + a^4} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{1 + a^4} \int_{-2a}^{-a} (x^2 + 3ax + 2a^2)\, \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{1 + a^4} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{3ax^2}{2} + 2a^2x \right) \Bigg|_{-2a}^{-a} = \frac{a^3}{6(1 + a^4)}.$$

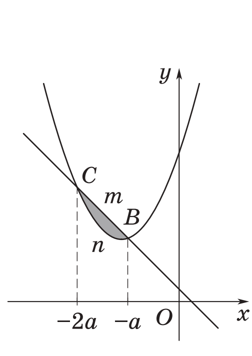


Рис. 110

4. Нужно найти значение a, при котором функция $S(a)$ принимает наибольшее значение на множестве $a > 0$.

5. Функция $S(a)$ дифференцируема в каждой точке, причем

$$S'(a) = \frac{1}{6} \cdot \frac{3a^2(1 + a^4) - 4a^3 \cdot a^3}{(1 + a^4)^2} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{a^2(3 - a^4)}{(1 + a^4)^2}.$$

Уравнение $S'(a) = 0$ имеет в области $a > 0$ единственный корень $a = \sqrt[4]{3}$.

6. В промежутке $0 < a < \sqrt[4]{3}$ производная $S'(a)$ положительна, а в промежутке $\sqrt[4]{3} < a < +\infty$ она отрицательна. Следовательно, функция $S(a)$ возрастает на промежутке $0 < a < \sqrt[4]{3}$ и убывает на промежутке $\sqrt[4]{3} < a < +\infty$.

7. Так как функция $S(a)$ непрерывна в точке $a = \sqrt[4]{3}$, то в этой точке она принимает наибольшее значение, т. е. при $a = \sqrt[4]{3}$ данная фигура имеет наибольшую площадь.

8. *Ответ*: $a = \sqrt[4]{3}$.

6. Найти все значения параметра a ($a > 0$), при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболой

$$y = x^2 - 2x\sqrt[3]{\frac{a}{1 + a^2}} + 3$$

и прямой $y = -3x\sqrt[3]{\dfrac{a}{1 + a^2}} + 3$ является наибольшей. Найти эту наибольшую площадь.

1. Пусть $a > 0$ — некоторое фиксированное число. Координаты точек пересечения указанных линий удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x\sqrt[3]{\dfrac{a}{1 + a^2}} + 3, & (1) \\ y = -3x\sqrt[3]{\dfrac{a}{1 + a^2}} + 3. & (2) \end{cases}$$

2. Приравнивая правые части этих уравнений, приходим к квадратному уравнению

$$x^2 + x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}} = 0,$$

откуда следует, что парабола (1) и прямая (2) пересекаются в точках с абсциссами $x_1 = -\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}$ и $x_2 = 0$, причем $x_1 < x_2$.

3. Нетрудно установить, что фигура, площадь которой требуется определить, находится ниже прямой (2) и выше параболы (1) на промежутке $[x_1; x_2]$.

4. Вычислим искомую площадь:

$$S(a) = \int\limits_{-\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}}^{0} \left[\left(-3x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}} + 3\right) - \left(x^2 - 2x\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}} + 3\right)\right] \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\sqrt[3]{\frac{a}{1+a^2}}}^{0} = \frac{a}{6(1+a^2)}.$$

5. Чтобы найти значение $a > 0$, при котором функция $S(a)$ принимает наибольшее значение, исследуем эту функцию.

6. В каждой точке области $0 < a < +\infty$ функция $S(a)$ имеет производную

$$S'(a) = \frac{1 + a^2 - a \cdot 2a}{6(1+a^2)^2} = \frac{1 - a^2}{6(1+a^2)^2}. \qquad (3)$$

7. Из выражения (3) следует, что на промежутке $0 < a < 1$ производная $S'(a) > 0$, а на промежутке $1 < a < +\infty$ производная $S'(a) < 0$. Значит, функция $S(a)$ возрастает на промежутке $0 < a < 1$ и убывает на промежутке $1 < a < +\infty$.

8. Поскольку функция $S(a)$ непрерывна в точке $a = 1$, ее наибольшее значение достигается при $a = 1$.

9. Итак, при $a = 1$ данная фигура имеет наибольшую площадь; эта площадь есть $S(1) = \frac{1}{12}$.

10. *Ответ*: $a = 1$; $S = \frac{1}{12}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все числа a, для каждого из которых выполняется неравенство:

а) $\int\limits_1^2 (a^2 + (4 - 4a)x + 4x^3)\,\mathrm{d}x \leqslant 12$;

б) $\int\limits_1^a (a - 4x)\,\mathrm{d}x \geqslant 6 - 5a$.

2. Найти все решения уравнения $\int\limits_{-a}^{a} \cos(x + 2a^2 - a)\,\mathrm{d}x = -\sin 2a$, принадлежащие отрезку $[-1{,}5; -0{,}5]$.

3. Найти все решения уравнения $\int\limits_0^{2\beta} \sin(x - \beta^2)\,\mathrm{d}x = \sin 2\beta$, принадлежащие отрезку $[2; 3]$.

4. Найти критические точки функции $\int\limits_0^x (\sin^2 2t - 2\cos^2 2t + a)\mathrm{d}t$.

5. Найти все значения a, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$ и удовлетворяющие уравнению $\int\limits_{\pi/2}^{a} \sin x\,\mathrm{d}x = \sin 2a$.

6. Найти значения параметра a, при которых площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 3x^3 + 2x$, $x = a$, $y = 0$, равна 1;

б) $y = 8x^2 - x^5$, $x = 1$, $x = a$, $y = 0$, равна $\frac{16}{3}$;

в) $y = \frac{4}{x^2}$, $x = 1$, $y = a$, равна $\frac{9}{4}$;

г) $y = \sin 6x$, $x = a$, $x = \frac{\pi}{18}$, равна $\frac{1}{6}$.

7. Найти все значения параметра p ($p > 0$), при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + x\sqrt[3]{\frac{p}{1+p^2}} + 1$ и прямой $y = 2x\sqrt[3]{\frac{p}{1+p^2}} + 1$, является наибольшей.

8. Найти все значения параметра a $(a > 0)$, при каждом из которых площадь фигуры, ограниченной параболой $y = -(1 + a^2)^2 x^2 + a$ и прямой $y = 0$, является наибольшей.

Ответы

1. а) 3; б) 2. **2.** $-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; $\frac{1-\sqrt{1+2\pi}}{2}$. **3.** $\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$. **4.** Если $a \in [-1; 2]$, то $x = \frac{\pi n}{2} \pm \frac{1}{4} \arccos \frac{2a-1}{3}$; если $a \notin [-1; 2]$, то критических точек нет. **5.** $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$. **6.** а) $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) -1; $\sqrt[3]{8-\sqrt{17}}$; в) $\frac{1}{4}$; $\frac{49}{4}$; г) $-\frac{\pi}{18}$; $\frac{\pi}{9}$. **7.** 1. **8.** $\sqrt{3}$.

Приложение 1

Текстовые задачи на составление уравнений и неравенств с параметрами

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. Две точки начинают одновременно равномерное движение от вершины прямого угла вдоль его сторон. С какой скоростью должна двигаться первая из них, чтобы через t с после начала движения расстояние между ними было не менее 10 м, если известно, что скорость второй точки на 2 м/с больше скорости первой?

1. Пусть x м/с — скорость движения первой точки; тогда $(x + 2)$ м/с — скорость движения второй точки.

2. За t с точки пройдут соответственно tx м и $t(x + 2)$ м. При этом расстояние между ними составит $\sqrt{t^2x^2 + t^2(x+2)^2}$.

3. Задача сводится к решению неравенства

$$\sqrt{t^2x^2 + t^2(x+2)^2} \geqslant 10,$$

которое равносильно неравенству

$$2t^2x^2 + 4t^2x + 4t^2 - 100 \geqslant 0. \qquad (1)$$

4. Пусть D — дискриминант квадратного трехчлена

$$f(x) = 2t^2x^2 + 4t^2x + 4t^2 - 100. \qquad (2)$$

Находим $\frac{D}{4} = 4t^4 - 8t^4 + 200t^2 = -4t^4 + 200t^2 = 4t^2(50 - t^2)$.

По смыслу задачи $t > 0$ и $x \geqslant 0$.

5. Имеем $D < 0$ при $50 - t^2 < 0$, т. е. при $t > 5\sqrt{2}$. Тогда неравенство (1) справедливо при любом $x \geqslant 0$.

6. Имеем $D = 0$ при $t = 5\sqrt{2}$. Тогда неравенство (1) примет вид $100(x + 1)^2 \geqslant 0$ и, значит, оно также справедливо при $x \geqslant 0$.

7. Рассмотрим теперь случай $D > 0$, т. е. $0 < t < 5\sqrt{2}$. Тогда квадратный трехчлен (2) имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-t - \sqrt{50 - t^2}}{t};\ x_2 = \frac{-t + \sqrt{50 - t^2}}{t}.$$

8. Очевидно, что $x_1 < 0$ при любых значениях t. Поэтому остается решить систему неравенств

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x \geqslant \dfrac{-t + \sqrt{50 - t^2}}{t}. \end{cases} \qquad (3)$$

9. а) Мы установили, что корень x_1 квадратного трехчлена (2) отрицателен. В силу теоремы Виета если при этом $4t^2 - 100 \leqslant 0$, т. е. $0 < t \leqslant 5$, то корень x_2 неотрицателен и решение системы (3) есть

$$x \geqslant \frac{-t + \sqrt{50 - t^2}}{t}.$$

б) Если же $4t^2 - 100 > 0$, т. е. $5 < t < 5\sqrt{2}$, то $x_2 < 0$ и решением системы (3) служит любое $x \geqslant 0$.

10. *Ответ*: если $t > 5$, то $x \geqslant 0$;

если $0 < t \leqslant 5$, то $x \geqslant \dfrac{-t + \sqrt{50 - t^2}}{t}$.

2. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно s, вышли одновременно два пешехода; в тот же момент из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Проехав путь $\frac{s}{k}$ (от B к A), велосипедист встретил первого пешехода, а затем, проехав $\frac{2}{3}$ всего пути, он встретил второго пешехода. На каком расстоянии l от них в момент встречи находился первый пешеход?

1. Пусть v — скорость первого пешехода, w — скорость велосипедиста.

2. Тогда согласно условию задачи в момент их встречи выполняется равенство

$$\frac{s - \frac{s}{k}}{v} = \frac{s}{kw},$$

откуда следует, что $v = (k - 1)w$.

3. Далее, время, которое затратил велосипедист на прохождение пути от момента встречи с первым пешеходом до момента встречи со вторым пешеходом, определяется равенством

$$t = \frac{s}{w}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{k}\right).$$

4. За это время t первый пешеход прошел от момента встречи с велосипедистом путь

$$vt = \frac{s(k-1)(2k-3)}{3k}.$$

5. Таким образом, расстояние l, на котором находился первый пешеход в момент встречи велосипедиста со вторым пешеходом, равно

$$\frac{s(k-1)(2k-3)}{3k} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{k}\right)s = \frac{s(2k-3)}{3}.$$

Заметим, что из условия задачи вытекает, что $k \geqslant \frac{3}{2}$, причем если $k = \frac{3}{2}$, то пешеходы могут идти с одинаковыми скоростями. Кроме того, $l \leqslant \frac{2s}{3}$, т. е. первый пешеход далее пункта B не движется. Тогда, решив неравенство

$$\frac{s(2k-3)}{3} \leqslant \frac{2s}{3},$$

находим, что $k \leqslant \frac{5}{2}$.

6. *Ответ*: если $\frac{3}{2} \leqslant k < \frac{5}{2}$, то $l = \frac{s(2k-3)}{3}$;

если $k \geqslant \frac{5}{2}$, то $l = \frac{2s}{3}$.

3. Расстояние между пунктами A и B равно s. Из пункта A в пункт B вылетел вертолет, а через время t в том же направлении вылетел самолет, который догнал вертолет на расстоянии r от пункта A, затем долетел до пункта B и сразу повернул обратно. На расстоянии r от пункта B самолет встретил вертолет и вернулся в пункт A позднее, чем вертолет прибыл в пункт B. На сколько раньше вертолет прибыл в пункт B, чем самолет вернулся в пункт A?

1. Пусть x — скорость самолета, а y — скорость вертолета.

2. Тогда до первой встречи самолета с вертолетом первый из них затратил время $\frac{r}{x}$, а второй — время $\frac{r}{y}$.

3. Так как самолет вылетел на время t позже вертолета, то получаем уравнение

$$\frac{r}{y} = \frac{r}{x} + t. \qquad (1)$$

4. К моменту второй встречи вертолет находился на расстоянии r от пункта B и пробыл в полете время $\frac{s-r}{y}$, а самолет преодолел расстояние $s + r$ и пробыл в полете время $\frac{s+r}{x}$.

5. Составим второе уравнение:

$$\frac{s-r}{y} = \frac{s+r}{x} + t. \qquad (2)$$

6. Далее, в соответствии с условием задачи и принятыми обозначениями имеем:

а) вертолет прибыл в пункт B через время $\frac{s}{y}$ после вылета;

б) самолет вернулся в пункт A через время $t + \frac{2s}{x}$ после того как вертолет вылетел из пункта A. Отсюда следует, что

$$t + \frac{2s}{x} - \frac{s}{y} \qquad (3)$$

— это та разница во времени, на которую вертолет прибыл в пункт B раньше, чем самолет вернулся в пункт A.

7. Чтобы найти время (3), вернемся к уравнениям (1) и (2). Умножив обе части уравнения (1) на $r - s$, а уравнения (2) — на r и сложив полученные соотношения, имеем

$$\frac{r(s+r)}{x} + \frac{r(r-s)}{x} + (r-s)t + rt = 0,$$

или

$$\frac{1}{x} = \frac{s-2r}{2r^2} \cdot t. \qquad (4)$$

8. Учитывая теперь, что из соотношений (1) и (4) следует равенство

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{t}{r} = \frac{st}{2r^2},$$

получим

$$t + \frac{2s}{x} - \frac{s}{y} = t + \frac{ts(s-4r)}{2r^2}. \tag{5}$$

9. При этом исходя из смысла задачи должно выполняться неравенство $s - 2r > 0$ и, кроме того, положительной должна быть и правая часть равенства (5). С учетом неравенства $s - 2r > 0$ последнее условие будет выполняться при $s > (2 + \sqrt{2})r$.

10. *Ответ*: $t + \dfrac{ts(s-4r)}{2r^2}$, где $s > (2 + \sqrt{2})r$.

4. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1 : 2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Из скольких частей каждого сплава можно получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении $a : b$?

1. Пусть новый сплав содержит x частей первого сплава и y частей второго сплава.

2. Тогда в новом сплаве будет содержаться $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2y}{5}$ частей первого металла и $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y}{5}$ частей второго металла. Таким образом,

$$\frac{\dfrac{x}{3} + \dfrac{2y}{5}}{\dfrac{2x}{3} + \dfrac{3y}{5}} = \frac{a}{b}, \text{ или } \frac{5x + 6y}{10x + 9y} = \frac{a}{b}. \tag{1}$$

3. Исходя из физических соображений будем считать, что $x > 0$, $y > 0$. Разделив числитель и знаменатель уравнения (1) на y, получим уравнение

$$\frac{\dfrac{5x}{y} + 6}{\dfrac{10x}{y} + 9} = \frac{a}{b},$$

равносильное следующему:

$$5(b - 2a)\frac{x}{y} = 3(3a - 2b). \tag{2}$$

4. При $b = 2a$ уравнение (2) не имеет решений.

5. Пусть $b \neq 2a$. Тогда $\frac{x}{y} = \frac{3(3a-2b)}{5(b-2a)}$ и, следовательно, $\frac{x}{y} > 0$, если

$$\frac{3(3a-2b)}{5(b-2a)} > 0. \qquad (3)$$

6. Неравенство (3) равносильно совокупности двух систем:

а) $\begin{cases} 3a - 2b > 0; \\ b - 2a > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3a - 2b < 0, \\ b - 2a < 0. \end{cases}$

7. Решив систему а), получаем противоречивые неравенства $2a < b < 1{,}5a$.

8. Решив систему б), находим, что $1{,}5a < b < 2a$.

9. *Ответ*: новый сплав можно получить из $3(2b - 3a)$ частей первого сплава и $5(2a - b)$ частей второго сплава, где $a > 0$, $b > 0$, $1{,}5a < b < 2a$.

5. В двух сосудах вместимостью по 5 л содержится раствор некоторого вещества. В первом из них — 3 л раствора с объемной долей вещества, равной a, во втором — 4 л раствора с объемной долей, равной $2a$. Сколько раствора надо перелить из второго сосуда в первый, чтобы объемная доля вещества в первом сосуде стала равной 0,1?

1. Согласно условию, в первом сосуде содержится $3a$ л вещества.

2. Если из второго сосуда перелить в первый x л раствора, то в этом количестве раствора будет содержаться $2ax$ л вещества.

3. Составим уравнение

$$\frac{3a + 2ax}{x + 3} = \frac{1}{10},$$

откуда находим $x = \frac{3 - 30a}{20a - 1}$.

4. Учитывая теперь, что вместимость каждого из сосудов составляет 5 л, приходим к неравенствам

$$0 \leqslant \frac{3 - 30a}{20a - 1} \leqslant 2,$$

решив которые получим, что $\frac{1}{14} \leqslant a \leqslant \frac{1}{10}$.

5. *Ответ*: $x = \frac{3 - 30a}{20a - 1}$, где $a \in \left[\frac{1}{14}; \frac{1}{10}\right]$.

6. Имеются два куска сплава серебра с медью. Один из кусков содержит $a\%$ меди, а другой — $b\%$ меди. В каком отношении нужно взять сплавы первого и второго кусков, чтобы получить новый сплав, содержащий $c\%$ меди?

При каких соотношениях между a, b, c решение задачи возможно и какую максимальную массу нового сплава можно получить, если масса первого куска составляет P г, а второго Q г?

1. Пусть отношение масс сплавляемых кусков равно $m : n$.

2. Тогда, согласно условию, получаем уравнение

$$\frac{\frac{ma}{100} + \frac{nb}{100}}{m+n} = \frac{c}{100}.$$

Отсюда следует, что $\frac{m}{n} = \frac{c-b}{a-c}$.

3. Решение задачи возможно, если $a > c > b$ или $a < c < b$.

4. Чтобы найти максимальную массу нового сплава, рассмотрим отношения $\frac{P}{|c-b|}$ и $\frac{Q}{|a-c|}$, которые с учетом полученных результатов позволяют записать полный ответ.

5. *Ответ*: $\frac{m}{n} = \frac{c-b}{a-c}$, где $a > c > b$ или $a < c < b$;

если $\frac{P}{|c-b|} = \frac{Q}{|a-c|}$, то

максимальная масса равна $\frac{a-b}{c-b}P = \frac{a-b}{a-c}Q$;

если $\frac{P}{|c-b|} < \frac{Q}{|a-c|}$, то

максимальная масса равна $\frac{a-b}{c-b}P$;

если $\frac{P}{|c-b|} > \frac{Q}{|a-c|}$, то

максимальная масса равна $\frac{a-b}{a-c}Q$.

7. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Бриллиант массой в p карат был разбит на две части, после чего его стоимость уменьшилась в k раз (1 карат = 0,2 г). Найти массы частей, на которые был разбит бриллиант.

1. Пусть одна часть имеет массу x карат, тогда другая имеет массу $p - x$ карат.

2. Цены этих частей соответственно равны lx^2 и $l(p - x)^2$, где l — коэффициент пропорциональности.

3. Так как цена целого бриллианта была равна lp^2, то получим уравнение

$$lp^2 = k(lx^2 + l(p - x)^2),$$

которое после упрощений примет вид

$$2kx^2 - 2kpx + p^2(k - 1) = 0,$$

откуда

$$x_{1,\,2} = \frac{1}{2k}\left[kp \pm \sqrt{kp^2(2 - k)}\,\right].$$

4. Проведем исследование.

а) По смыслу задачи $k > 1$, $p > 0$. Следовательно, подкоренное выражение будет неотрицательным, если $k \leqslant 2$, т. е. $1 < k \leqslant 2$.

б) Так как $\sqrt{kp^2(2 - k)} = \sqrt{k^2p^2 - 2kp^2(k - 1)} < kp$ (в силу того, что $k > 1$), то оба значения x неотрицательны.

в) Легко проверить, что $p - x_1 = x_2$.

5. *Ответ*: $\frac{1}{2}p\left(1 - \sqrt{\frac{2}{k} - 1}\,\right)$; $\frac{1}{2}p\left(1 + \sqrt{\frac{2}{k} - 1}\,\right)$, где $1 < k \leqslant 2$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Из одного и того же пункта одновременно в одном направлении по прямолинейному участку шоссе с постоянными, но различными скоростями вышли два пешехода. Через 2 ч расстояние между ними было s км. После этого пешеходы стали идти быстрее и затрачивать на каждый километр пути на 10 мин меньше. Еще через 2 ч расстояние между ними стало равным $3s$ км. Найти расстояния, пройденные пешеходами за первые два часа движения.

2. Два поезда выходят одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии p км от B. Через t ч после их встречи второй поезд, миновав пункт A, находился в q км от него, а первый в это время, миновав пункт B, находился от второго поезда на расстоянии вдвое большем, чем расстояние между A и B. Найти скорости поездов и расстояние между A и B, считая, что поезда нигде не останавливались, а их скорости были постоянными.

3. Куплено несколько килограммов товара двух сортов: I сорта на 4500 р. и II сорта на 2000 р., причем I сорта куплено на 1 кг больше. Стоимость 1 кг товара I сорта на $100a$ р. больше стоимости 1 кг товара II сорта. Сколько килограммов товара каждого сорта было куплено? Определить количество решений в зависимости от различных значений a.

4. В один из двух сосудов, каждый вместимостью по 6 л налито 4 л 70%-ного раствора кислоты, а во второй — 3 л 90%-ного раствора кислоты (в процентах по объему). Сколько раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился раствор концентрации $a\%$?

5. Сосуд, содержащий $p\%$-ный раствор кислоты, долили доверху $q\%$-ным раствором кислоты и после перемешивания отлили то же количество. Проделав эту операцию k раз, получили $r\%$-ный раствор. Какую часть объема занимал первоначальный раствор?

6. Для технических целей смешали 5 л спирта I сорта и 7 л спирта II сорта и получили спирт крепостью в 65°. Если бы взяли 20 л спирта I сорта и 4 л спирта II сорта, то получилась бы смесь крепостью в $p°$. Определить крепость спирта каждого сорта.

7. Имеются два сплава никеля и железа. Первый из них содержит $a\%$ железа, а второй — $2a\%$ никеля (по массе). Сколько килограммов каждого сплава нужно взять для получения 3 кг третьего сплава, в котором содержание железа в 1,5 раза больше, чем никеля?

8. Ракета должна пролететь расстояние, равное h, начиная движение с постоянной скоростью v. В любой момент времени может включиться ее дополнительный двигатель, работающий до конца пути и дающий постоянное ускорение $a > 0$. На участке пути с постоянной скоростью расход топлива пропорционален времени движения с коэффициентом пропорциональности $k_1 > 0$, а на участке пути с включенным дополнительным двигателем расход топлива пропорционален квадрату времени с коэффициентом пропорциональности $k_2 > 0$. Найти время, в течение которого ракета должна лететь с включенным дополнительным двигателем, чтобы общий расход топлива был наименьшим.

Ответы

1. $0{,}5(24 + s - \sqrt{s^2 + 288s})$ и $0{,}5(24 - s - \sqrt{s^2 + 288s})$ км; $s < 6$. **2.** $\frac{2(2p - q)}{t}$ и $\frac{2p}{t}$ км/ч; $3p - q$ км, где $0 \leqslant q < 2p$, $p > 0$, $t > 0$. **3.** $\frac{25 + a + \sqrt{D}}{2a}$ и

$\frac{25-a+\sqrt{D}}{2a}$ кг или $\frac{25+a-\sqrt{D}}{2a}$ и $\frac{25-a-\sqrt{D}}{2a}$ кг, где $D = a^2 - 130a + 625$, причем если $a > 5$, то нет решений, если $0 < a < 5$ — два решения, если $a = 5$ — одно решение (3 и 2 кг). **4.** $\frac{280-4a}{a-90}$ л, где $70 \leqslant a \leqslant \frac{230}{3}$. **5.** $\sqrt[k]{\frac{r-q}{p-q}}$, где либо $r > q$, $p > q$, либо $r < q$, $p < q$. **6.** Крепость спирта I сорта (в градусах) есть $\frac{7p-130}{5}$; крепость спирта II сорта есть $130 - p$, где $30 < p < 90$. **7.** $\frac{6(a-20)}{3a-100}$ и $\frac{3(a-60)}{3a-100}$ кг, где $0 < a \leqslant 20$. **8.** $\frac{vk_1}{2vk_2-ak_1}$, где $2vk_2 - ak_1 > 0$ и $\frac{vk_1}{2vk_2-ak_1} \leqslant$ $\leqslant \frac{-v+\sqrt{v^2+2ah}}{a}$; $\frac{-v+\sqrt{v^2+2ah}}{a}$, где $2vk_2 - ak_1 \leqslant 0$ или $2vk_2 - ak_1 > 0$ и $\frac{vk_1}{2vk_2-ak_1} > \frac{-v+\sqrt{v^2+2ah}}{a}$.

Приложение 2

Разные задачи

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

1. При каких значениях параметра a уравнение

$$\cos^2 ax + \cos x = 2(\cos ax + \cos x - 1) \qquad (1)$$

имеет единственное решение?

1. Так как косинус — четная функция, то если некоторое число x является решением уравнения (1), то и $(-x)$ также есть решение уравнения (1). Поэтому необходимым условием существования единственного решения уравнения (1) является равенство $x = 0$. Это значение x, как показывает проверка, при любом a действительно удовлетворяет уравнению (1).

2. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы указать такие значения параметра a, при которых исходное уравнение имеет единственное решение $x = 0$.

3. Перепишем уравнение (1) в виде

$$\cos^2 ax - 2\cos ax - \cos x + 2 = 0 \qquad (2)$$

и рассмотрим уравнение (2) как квадратное относительно $\cos ax$. Так как его дискриминант $D = 4(\cos x - 1)$, то заключаем, что это уравнение будет иметь решения только при условии $\cos x = 1$, т. е. $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. При таких значениях x из уравнения (2) получаем, что и $\cos ax = 1$, и, значит, $ax = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. Так как значение $a = 0$ не удовлетворяет требованию задачи (при этом значении a исходное уравнение имеет бесконечное множество решений $x = 2\pi k$), то будем считать, что $a \neq 0$.

5. При отличных от нуля значениях a из уравнения $ax = 2\pi n$ находим $x = \dfrac{2\pi n}{a}$. Если теперь предположить, что значения a принадлежат множеству $\boldsymbol{Q}$ рациональных чисел, то исходное уравнение снова будет иметь бесконечное множество решений вида $x = 2\pi k$.

6. Предполагая же, что a — иррациональное, приходим к выводу, что равенство $2\pi k = \dfrac{2\pi n}{a}$ выполняется только при $k = n = 0$, а, значит, при таких значениях k и n мы получим единственное решение $x = 0$.

7. *Ответ*: a — иррациональное число.

2. Найти все значения параметра b, при которых система

$$\begin{cases} \cos(y - b) - 2\cos x = 0, & (1) \\ \log_2(by - y^2) = 2\log_4(-x) - \log_{0,5} 3y & (2) \end{cases}$$

имеет нечетное количество решений.

1. Прежде всего отметим, что допустимые значения x и y должны удовлетворять условиям $x < 0$, $y > 0$. Тогда уравнение (2) можно преобразовать к виду

$$\log_2(by - y^2) = \log_2(-3xy),$$

или

$$by - y^2 = -3xy. \qquad (3)$$

2. Очевидно, что все допустимые значения x и y, удовлетворяющие уравнению (3), удовлетворяют также и условию $by - y^2 > 0$.

3. Упростим уравнение (3), разделив обе его части на y ($y > 0$):

$$b - y = -3x. \qquad (4)$$

Подставив это выражение в уравнение (1), получим

$$\cos 3x = 2\cos x. \qquad (5)$$

4. Используя формулу косинуса тройного аргумента, придем к уравнению

$$4\cos^3 x - 3\cos x = 2\cos x, \text{ т. е. } \cos^3 x = \frac{5}{4}\cos x.$$

а) $\cos x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

б) $\cos^2 x = \dfrac{5}{4}$ — решений нет.

в) Учитывая, что $x < 0$, имеем $n < 0$, т. е. $n = -1, -2, -3, \ldots$.

5. Подставим найденные значения x в выражение (4):

$$y = b + \frac{3\pi}{2} + 3\pi n. \qquad (6)$$

Так как $y > 0$, то при целых $n < 0$ равенство (6) возможно только в том случае, когда $b > 0$.

6. Подберем теперь значения b так, чтобы система уравнений (1), (2) имела нечетное количество решений.

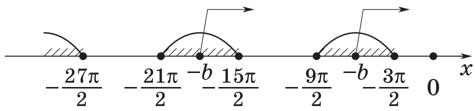


Рис. 111

На рис. 111 изображены числа $\frac{3\pi}{2} + 3\pi n$, где $n = -1, -2, \dots$. Если положительные значения параметра b выбирать согласно одному из условий

$$\frac{3\pi}{2} < b < \frac{9\pi}{2}, \text{ или } \frac{15\pi}{2} < b < \frac{21\pi}{2}, \text{ или } \frac{27\pi}{2} < b < \frac{33\pi}{2},$$

вообще,

$$\frac{3\pi}{2} + 6\pi m < b < \frac{9\pi}{2} + 6\pi m, \text{ где } m \in \boldsymbol{Z}_0,$$

то в каждом случае найдется только нечетное количество целых отрицательных чисел n, при которых $y > 0$, т. е. система будет иметь нечетное количество решений.

7. *Ответ*: $\frac{3\pi}{2} + 6\pi m < b < \frac{9\pi}{2} + 6\pi m$, где $m \in \boldsymbol{Z}_0$.

3. Для каждого действительного числа $0 < a \neq 1$ решить уравнение

$$\log_a^2 \sin x + p \log_a \sin x + q = 0 \ (p^2 - 4q \geqslant 0,\ q \neq 0). \qquad (1)$$

1. В области определения уравнения имеем $\sin x > 0$.

2. Сначала рассмотрим случай $a > 1$. С помощью подстановки

$$t = \log_a \sin x \ (t \leqslant 0), \qquad (2)$$

уравнение (1) сводится к смешанной системе

$$\begin{cases} t^2 + pt + q = 0, & (3) \\ t \leqslant 0. & (4) \end{cases}$$

3. Пусть t_1 и t_2 — действительные корни уравнения (3), причем $t_1 \leqslant t_2$. Так как $q \neq 0$, то ни один из этих корней не равен нулю.

4. Если оба корня положительны, то система (3), (4) не имеет решений, а следовательно, не имеет корней и уравнение (1).

5. Пусть уравнение (3) имеет отрицательные корни $t_1 < 0$ и $t_2 < 0$. Согласно теореме Виета, это имеет место тогда и только тогда, когда $p > 0$ и $q > 0$.

6. Значит, при $p > 0$ и $q > 0$ уравнение (1) равносильно совокупности уравнений $\log_a \sin x = t_{1,\,2}$, где $t_{1,\,2}$ — отрицательные корни уравнения (3). Тогда получим

$$x = (-1)^k \arcsin a^{t_{1,\,2}} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$$

7. Пусть $t_1 < t_2$ и больший корень положителен, а меньший отрицателен. В этом случае число 0 расположено между корнями t_1 и t_2. Необходимым и достаточным условием этого является выполнение неравенства $q < 0$.

8. Таким образом, при $q < 0$ и любом p уравнение (1) равносильно уравнению $\log_a \sin x = t_1$, где t_1 — отрицательный корень уравнения (3). Отсюда находим

$$x = (-1)^n \arcsin a^{t_1} + \pi n,\ n \neq \boldsymbol{Z}.$$

9. Аналогично рассматривается случай $0 < a < 1$. Полагая $\log_a \sin x = t$ и учитывая, что $\log_a \sin x \geqslant 0$, получим смешанную систему

$$\begin{cases} t^2 + pt + q = 0, \\ t \geqslant 0. \end{cases}$$

10. Дальнейшее исследование проводится так же, как и в первом случае.

11. *Ответ*: 1) $a > 1$. Если $q > 0$, то при $p > 0$

$$x = (-1)^k \arcsin a^{t_{1,\,2}} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

где $t_{1,\,2}$ — отрицательные корни уравнения (3),
а при $p < 0$ уравнение (1) корней не имеет;
если $q < 0$, то при любом p

$$x = (-1)^n \arcsin a^{t_1} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

где t_1 — отрицательный корень уравнения (3).
2) $0 < a < 1$. Если $q > 0$, то при $p < 0$

$$x = (-1)^k \arcsin a^{t_{1,\,2}} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},$$

где $t_{1,\,2}$ — положительные корни уравнения (3),
а при $p > 0$ уравнение (1) корней не имеет;
если $q < 0$, то при любом p

$$x = (-1)^n \arcsin a^{t_2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z},$$

где t_2 — положительный корень уравнения (3).

4. Определить, при каких значениях параметра a уравнение

$$a\cos 2x + |a|\cos 4x + \cos 6x = 1 \qquad (1)$$

равносильно уравнению

$$\sin x\cos 2x = \sin 2x\cos 3x - 0{,}5\sin 5x. \qquad (2)$$

1. В уравнении (2) преобразуем произведения в разности синусов:

$$\sin x - \sin 3x = \sin 5x - \sin x - \sin 5x,$$

откуда $\sin 3x = 0$, $x = \dfrac{\pi n}{3}$.

2. Отсюда находим:

$$\cos 2x = \cos\frac{2\pi n}{3} = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 3k, \\ -\dfrac{1}{2} \text{ при } n \neq 3k; \end{cases}$$

$$\cos 4x = \cos\frac{4\pi n}{3} = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 3k, \\ -\dfrac{1}{2} \text{ при } n \neq 3k; \end{cases}$$

$$\cos 6x = \cos\frac{6\pi n}{3} = 1.$$

3. Подставив значения $\cos 2x$, $\cos 4x$ и $\cos 6x$ в уравнение (1), как при $n = 3k$, так и при $n \neq 3k$ получим соотношение $a + |a| = 0$, из которого устанавливаем необходимое условие равносильности данных уравнений: $a \leqslant 0$.

4. Проверим достаточность условия $a \leqslant 0$.

а) При этом условии уравнение (1) примет вид

$$a\cos 2x - a\cos 4x = 1 - \cos 6x,$$

или

$$2a\sin 3x\sin x = 2\sin^2 3x. \qquad (3)$$

б) Уравнение (3) распадается на три уравнения:

$$\sin 3x = 0, \text{ откуда } x = \frac{\pi n}{3},$$

$$\sin x = 0, \text{ откуда } x = \pi k,$$

$$a = 3 - 4\sin^2 x. \qquad (4)$$

5. Для того чтобы уравнение (1) было равносильно уравнению (2), необходимо, чтобы уравнение (4) не имело других решений, кроме $x = \dfrac{\pi n}{3}$.

а) Если $\dfrac{3-a}{4} > 1$ или $\dfrac{3-a}{4} < 0$, откуда в силу условия $a \leqslant 0$ получаем $a < -1$, то уравнение (4) не имеет решений.

б) Если же левая часть уравнения (4) равна 0; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; 1, то решения этого уравнения входят в множество $x = \frac{\pi n}{3}$.

в) Из соотношений $\frac{3-a}{4} = 0$; $\frac{3-a}{4} = \frac{1}{4}$; $\frac{3-a}{4} = \frac{3}{4}$; $\frac{3-a}{4} = 1$ находим $a = 3$; $a = 2$; $a = 0$ и $a = -1$ соответственно.

г) Учитывая условие $a \leqslant 0$, получаем $a = 0$ и $a = -1$.

6. Легко проверить, что условия $a = 0$ и $a \leqslant -1$ являются достаточными и уравнения (1) и (2) при этих условиях равносильны, а их общее решение есть $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

7. *Ответ*: $a \in (-\infty; -1] \cup \{0\}$.

5. Для всех значений параметра a решить неравенство

$$\sqrt{\frac{3x+a}{x-a}} < a - 1. \qquad (1)$$

1. Левая часть неравенства (1) неотрицательна на ОДЗ, поэтому $a - 1 > 0$, т. е. $a > 1$. Найдем ОДЗ данного неравенства. Имеем $\frac{3x+a}{x-a} \geqslant 0$, откуда получаем два промежутка: $-\infty < x \leqslant -\frac{a}{3}$; $a < x < +\infty$.

2. Возведя обе части неравенства (1) в квадрат, получим

$$\frac{3x+a}{x-a} < (a-1)^2,$$

т. е.

$$\frac{x(2+2a-a^2) + a(a^2-2a+2)}{x-a} < 0.$$

3. Это неравенство с учетом ОДЗ и условия $a > 1$ равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1, \\ x \leqslant -\frac{a}{3}, \\ x(2+2a-a^2) + a(a^2-2a+2) > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1, \\ x > a, \\ x(2+2a-a^2) + a(a^2-2a+2) < 0, \end{cases} \end{array}\right.$$

т. е. совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}a > 1,\\ x \leqslant -\dfrac{a}{3},\\ x(a^2-2a-2) < a(a^2-2a+2);\end{array}\right. \qquad (2)\\ \left\{\begin{array}{l}a > 1,\\ x > a,\\ x(a^2-2a-2) > a(a^2-2a+2).\end{array}\right. \qquad (3)\end{array}\right.$$

3. Так как

$$a^2 - 2a - 2 = (a - (1 + \sqrt{3}))(a - (1 - \sqrt{3})),$$

то $a^2 - 2a - 2 < 0$ при $1 - \sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{3}$; $a^2 - 2a - 2 = 0$ при $a_1 = 1 + \sqrt{3}$, $a_2 = 1 - \sqrt{3}$ и $a^2 - 2a - 2 > 0$ при $a > 1 + \sqrt{3}$, $a < 1 - \sqrt{3}$.

4. При $a = 1 + \sqrt{3}$ система (3) не имеет решений, а системе (2) удовлетворяют все x из промежутка $-\infty < x \leqslant \dfrac{-1-\sqrt{3}}{3}$.

5. При $1 < a < 1 + \sqrt{3}$ совокупность систем (2), (3) равносильна соответственно совокупности систем

$$\left\{\begin{array}{l}1 < a < 1 + \sqrt{3},\\ x \leqslant -\dfrac{a}{3},\\ x > \dfrac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2};\end{array}\right. \qquad (4)$$

$$\left\{\begin{array}{l}1 < a < 1 + \sqrt{3},\\ x > a,\\ x < \dfrac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2}\end{array}\right. \qquad (5)$$

и справедливы неравенства

$$\frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2} < -\frac{a}{3}, \quad \frac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2} < a;$$

поэтому решениями системы (4) являются все x из промежутка $\dfrac{a(a^2-2a+2)}{a^2-2a-2} < x \leqslant -\dfrac{a}{3}$, а система (5) решений не имеет.

6. При $a > 1 + \sqrt{3}$ совокупность систем (2), (3) равносильна соответственно совокупности систем

$$\begin{cases} a > 1 + \sqrt{3}, \\ x \leqslant -\dfrac{a}{3}, \\ x < \dfrac{a(a^2 - 2a + 2)}{a^2 - 2a - 2}; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} a > 1 + \sqrt{3}, \\ x > a, \\ x > \dfrac{a(a^2 - 2a + 2)}{a^2 - 2a - 2} \end{cases} \tag{7}$$

и справедливы неравенства

$$\frac{a(a^2 - 2a + 2)}{a^2 - 2a - 2} > -\frac{a}{3}, \quad \frac{a(a^2 - 2a + 2)}{a^2 - 2a - 2} > a;$$

поэтому решениями системы (6) являются все x из промежутка $-\infty < x \leqslant -\dfrac{a}{3}$, а решениями системы (7) — все x из промежутка $\dfrac{a(a^2 - 2a + 2)}{a^2 - 2a - 2} < x < +\infty$.

7. *Ответ*: если $a \leqslant 1$, то решений нет;

если $1 < a < 1 + \sqrt{3}$, то $\dfrac{a(a^2 - 2a + 2)}{a^2 - 2a - 2} < x \leqslant -\dfrac{a}{3}$;

если $a = 1 + \sqrt{3}$, то $-\infty < x \leqslant \dfrac{-1 - \sqrt{3}}{3}$;

если $a > 1 + \sqrt{3}$, то $-\infty < x \leqslant -\dfrac{a}{3}$,

$\dfrac{a(a^2 - 2a + 2)}{a^2 - 2a - 2} < x < +\infty$.

6. Определить, при каких значениях параметра a уравнение

$$2 \sin^7 x = (1 + \sin \pi a)\sin x + a \sin^3 x \tag{1}$$

равносильно уравнению

$$(a - 1)(1 + \cos^2 x) + 2 \sin^6 x = 2 \sin^2 x + 2(a - 1)^3. \tag{2}$$

1. Так как уравнение (1) имеет решение $x = \pi n$, при котором $\sin x = 0$, то для равносильности уравнений (1) и (2) необходимо, чтобы значения $x = \pi n$ удовлетворяли уравнению (2).

2. Подставляя значения $x = \pi n$ в уравнение (2), получаем $2(a-1) = 2(a-1)^3$, откуда $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 2$.

3. Проверим достаточность этих условий.

а) Пусть $a = 1$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$2\sin^7 x = \sin x + \sin^3 x. \qquad (3)$$

Используя разложение на множители, получаем

$$\sin x\,(\sin^2 x - 1)(2\sin^4 x + 2\sin^2 x + 1) = 0,$$

откуда

$$\sin x = 0, \qquad (4)$$

$$\sin^2 x = 1. \qquad (5)$$

Уравнение $2\sin^4 x + 2\sin^2 x + 1 = 0$ не имеет решений, так как дискриминант уравнения $2z^2 + 2z + 1 = 0$ (где $z = \sin^2 x$) отрицателен. Объединяя решения $x = \pi n$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ уравнений (4) и (5), получаем $x = \frac{\pi m}{2}$.

Уравнение (2) при $a = 1$ примет вид

$$2\sin^6 x = 2\sin^2 x, \qquad (6)$$

откуда $\sin x = 0$ и $\sin^2 x = 1$, т. е. решение уравнения (6) также имеет вид $x = \frac{\pi m}{2}$. Следовательно, при $a = 1$ уравнения (1) и (2) равносильны.

б) Пусть $a = 0$. Тогда уравнение (1) примет вид $2\sin^7 x = \sin x$, откуда $\sin x = 0$ и $\sin x = \pm\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$.

Уравнение (2) при $a = 0$ имеет вид

$$-1 - \cos^2 x + 2\sin^6 x = 2\sin^2 x - 2, \text{ или } 2\sin^6 x = \sin^2 x,$$

откуда $\sin x = 0$ и $\sin x = \pm\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$. Очевидно, что при $a = 0$ множества решений уравнений (1) и (2) не совпадают, т. е. эти уравнения не равносильны.

в) Пусть $a = 2$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$2\sin^7 x = \sin x + 2\sin^3 x; \qquad (7)$$

уравнение (7) распадается на два уравнения: $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, и

$$2\sin^6 x - 2\sin^2 x = 1. \tag{8}$$

Полагая $z = \sin^2 x$ ($0 \leqslant z \leqslant 1$), рассмотрим функцию

$$f(z) = 2z^3 - 2z = 2z(z+1)(z-1).$$

Так как $0 \leqslant z \leqslant 1$, то $f(z) \leqslant 0$ и, следовательно, уравнение $f(z) = 1$ не имеет решений при $0 \leqslant z \leqslant 1$, т. е. не имеет решений и уравнение (8).

Множеством решений уравнения (7) являются значения $x = \pi n$. Уравнение (2) при $a = 2$ имеет вид

$$1 + \cos^2 x + 2\sin^6 x = 2\sin^2 x + 2,$$

или

$$2\sin^6 x = 3\sin^2 x. \tag{9}$$

Уравнение (9) распадается на два уравнения: $\sin x = 0$, откуда $x = \pi n$, и $2\sin^4 x = 3$, которое не имеет решений.

4. Итак, при $a = 2$ множества решений уравнений (1) и (2) совпадают ($x = \pi n$) и, следовательно, эти уравнения равносильны.

5. *Ответ*: $a = 1$ и $a = 2$.

7. Найти все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\sqrt{9-(x-a)^2} > |x| \tag{1}$$

имеет хотя бы одно положительное решение.

1. Рассмотрим функции $y_1(x) = \sqrt{9-(x-a)^2}$ и $y_2(x) = |x|$.

2. Неравенство (1) будет иметь хотя бы одно положительное решение, если $y_1(x) > y_2(x)$ при $x > 0$.

3. График функции $y_1(x) = \sqrt{9-(x-a)^2}$ есть полуокружность с радиусом $r = 3$ и центром в точке $C(a;\ 0)$, расположенная выше оси Ox.

4. Действительно, уравнение $y_1(x) = \sqrt{9-(x-a)^2}$ равносильно системе

$$\begin{cases} y_1(x) \geqslant 0, \\ y_1^2(x) = 9 - (x-a)^2, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} y_1(x) \geqslant 0, \\ (x-a)^2 + y_1^2(x) = 9. \end{cases} \tag{2}$$

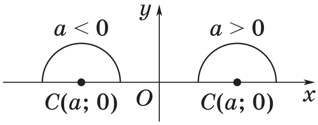


Рис. 112

Уравнение (2) является уравнением окружности с радиусом $r = 3$ и центром в точке $C(a;\ 0)$. Условие $y_1(x) \geqslant 0$ соответствует части окружности, расположенной выше оси Ox.

5. График рассматриваемой функции при $a < 0$ и $a > 0$ изображен на рис. 112.

6. Рассмотрим два возможных случая.

а) Пусть $a \geqslant 0$. Графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ имеют одну общую точку A, если $a = a_1 = 3\sqrt{2}$ (рис. 113, *а*). В этой точке выполняется условие $y_1(x) = y_2(x)$. Очевидно, что исходное неравенство имеет положительные решения (выполняется условие $y_1(x) > y_2(x)$ при $x > 0$), если $a \in [0;\ 3\sqrt{2}\,)$ (рис. 113, *б*).

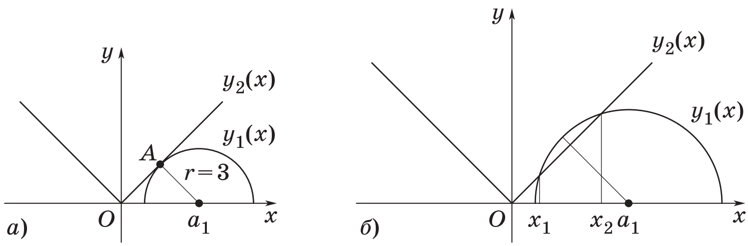


Рис. 113

б) Пусть $a < 0$. Графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ имеют одну общую точку B, если $a = a_2 = -3\sqrt{2}$ (рис. 114, *а*). В этой точке выполняется условие $y_1(x) = y_2(x)$. Очевидно, что исходное неравенство имеет отрицательные решения (выполняется условие $y_1(x) > y_2(x)$ при $x < 0$), если $a \in (-3\sqrt{2}\,;\ -3)$ (рис. 114, *б*), и имеет положительные решения (выполняется условие $y_1(x) > y_2(x)$ при $x > 0$), если $a \in (-3;\ 0)$ (рис. 114, *в*).

7. Объединяя полученные частные решения, делаем вывод: неравенство (1) имеет хотя бы одно положительное решение, если $a \in (-3;\ 3\sqrt{2}\,)$.

8. *Ответ*: $a \in (-3;\ 3\sqrt{2}\,)$.

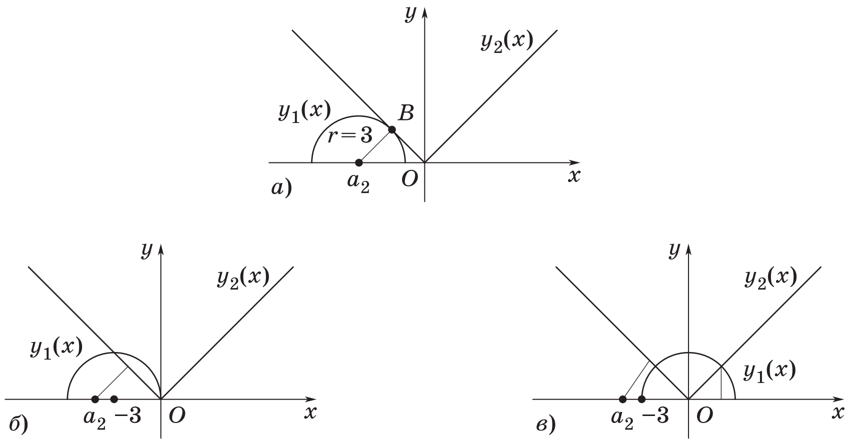


Рис. 114

8. В зависимости от значений параметра a решить неравенство

$$\frac{ax^2}{x-1} - 2a < a^2 + 1. \qquad (1)$$

1. После упрощения неравенство (1) преобразуется к виду

$$\frac{ax^2 - (a+1)^2 x + (a+1)^2}{x-1} < 0. \qquad (2)$$

2. Пусть $a \neq 0$; тогда корнями квадратного уравнения $ax^2 - (a+1)^2 x + (a+1)^2 = 0$ являются $x_1 = a + 1$ и $x_2 = \frac{a+1}{a}$.

3. Таким образом, неравенство (2) можно переписать следующим образом:

$$a(x - (a+1))\left(x - \frac{a+1}{a}\right) < 0. \qquad (3)$$

4. Ясно, что в зависимости от расположения корней будем получать разные решения.

I случай: $1 < \frac{a+1}{a} < a + 1$ (рис. 115, *а*). Тогда

$$\begin{cases} \frac{a+1}{a} < a + 1, \\ \frac{a+1}{a} > 1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} \frac{(a+1)(a-1)}{a} > 0 \\ a > 0, \end{cases}$$

т. е. $a > 1$ (рис. 115, *б*).

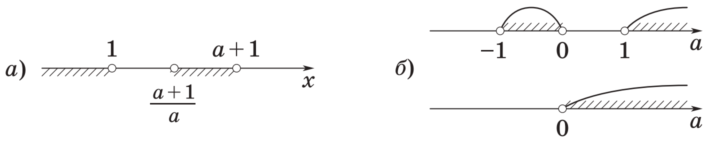


Рис. 115

Возвращаясь к неравенству (3), заключаем, что если $a > 1$, то $x \in (-\infty;\ 1) \cup \left(\dfrac{a+1}{a};\ a+1\right)$ (см. рис. 115, *а*).

<u>II случай:</u> $\dfrac{a+1}{a} < 1 < a + 1$ (рис. 116). Тогда

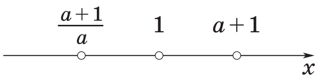


Рис. 116

$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{a} < 1, \\ a + 1 > 1, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} a < 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Этот случай невозможен.

<u>III случай:</u> $\dfrac{a+1}{a} < a + 1 < 1$ (рис. 117, *а*). Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{a+1}{a} < a + 1, \\ a + 1 < 1, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} \dfrac{(a+1)(a-1)}{a} > 0, \\ a < 0, \end{cases}$$

т. е. $-1 < a < 0$ (рис. 117, *б*).

Возвращаясь к неравенству (3), находим, что если $-1 < a < 0$, то $x \in \left(\dfrac{a+1}{a};\ a+1\right) \cup (1;\ +\infty)$ (см. рис. 117, *а*).

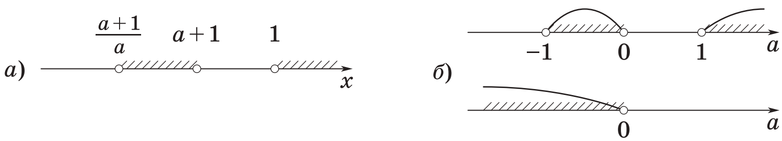


Рис. 117

<u>IV случай:</u> $1 < a + 1 < \dfrac{a+1}{a}$ (рис. 118, *а*). Тогда

$$\begin{cases} 1 < a + 1, \\ a + 1 < \dfrac{a+1}{a}, \end{cases} \text{ т. е. } \begin{cases} a > 0 \\ \dfrac{(a-1)(a+1)}{a} < 0, \end{cases}$$

т. е. $0 < a < 1$ (рис. 118, *б*).

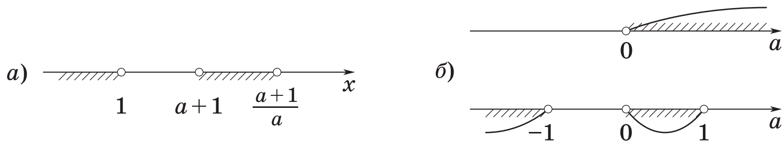


Рис. 118

Возвращаясь к неравенству (3), получим, что если $0 < a < 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup \left(a + 1; \dfrac{a+1}{a}\right)$ (см. рис. 118, *а*).

<u>V случай:</u> $a + 1 < 1 < \dfrac{a+1}{a}$ (рис. 119). Тогда

$$\begin{cases} a + 1 < 1, \\ 1 < \dfrac{a+1}{a}, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} a < 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

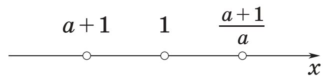


Рис. 119

Этот случай невозможен.

<u>VI случай:</u> $a + 1 < \dfrac{a+1}{a} < 1$ (рис. 120, *а*). Тогда

$$\begin{cases} a + 1 < \dfrac{a+1}{a}, \\ \dfrac{a+1}{a} < 1, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \begin{cases} \dfrac{(a+1)(a-1)}{a} < 0, \\ a < 0, \end{cases}$$

т. е. $a < -1$ (рис. 120, *б*).

Возвращаясь к неравенству (3), находим, что если $a < -1$, то $x \in \left(a + 1; \dfrac{a+1}{a}\right) \cup (1; +\infty)$ (см. рис. 120, *а*).

<u>VII случай:</u> $a + 1 = \dfrac{a+1}{a}$. Тогда

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0, \\ a \neq 0, \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = -1. \end{array} \right.$$

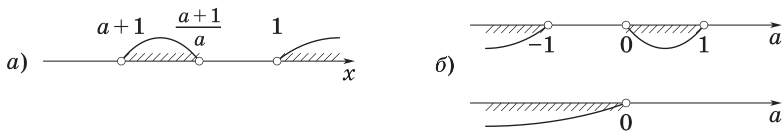


Рис. 120

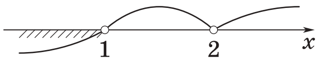


Рис. 121

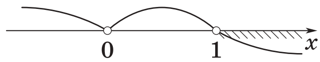


Рис. 122

а) Если $a = 1$, то $a + 1 = \frac{a+1}{a} = 2$. Поэтому неравенство (3) выполняется при $x \in (-\infty; 1)$ (рис. 121).

б) Если $a = -1$, то $a + 1 = \frac{a+1}{a} = 0$. Поэтому неравенство (3) выполняется при $x \in (1; +\infty)$ (рис. 122).

VIII случай: $a = 0$. Тогда неравенство (1) примет вид $\frac{0}{x-1} < 1$, т. е. оно выполняется при $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

5. *Ответ*: если $a < -1$, то $x \in \left(a + 1; \frac{a+1}{a}\right) \cup (1; +\infty)$;

если $a = -1$, то $x \in (1; +\infty)$;

если $-1 < a < 0$, то $x \in \left(\frac{a+1}{a}; a + 1\right) \cup (1; +\infty)$;

если $a = 0$, то $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;

если $0 < a < 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup \left(a + 1; \frac{a+1}{a}\right)$;

если $a = 1$, то $x \in (-\infty; 1)$;

если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1) \cup \left(\frac{a+1}{a}; a + 1\right)$.

9. Исследовать и решить неравенство

$$\frac{(p-2)x^2 + (p+3)x + p + 6}{\sqrt{4 - x^2}} \geqslant 0. \qquad (1)$$

1. Находим ОДЗ переменной x в данном неравенстве: $4 - x^2 > 0$, т. е. $x \in (-2; 2)$.

2. Пусть $p \neq 2$; тогда $D = -3p^2 - 10p + 57$.

3. Если $D = 0$, то $p_1 = -\frac{19}{3}$, $p_2 = 3$. Если $D \neq 0$, то

$$x_1 = \frac{-(p+3) - \sqrt{D}}{2(p-2)}, \; x_2 = \frac{-(p+3) + \sqrt{D}}{2(p-2)}$$

— корни квадратного трехчлена

$$f(p) = (p - 2)x^2 + (p + 3)x + p + 6. \qquad (2)$$

4. Рассмотрим возможные случаи расположения чисел x_1, x_2, -2 и 2.

<u>I случай:</u> $-2 < 2 < x_1 < x_2$ (рис. 123, *а*). Тогда из неравенства $2 < x_1 < x_2$ следует:

$$\begin{cases} D > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > 2, \\ af(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3p^2 - 10p + 57 > 0, \\ -\dfrac{p+3}{2(p-2)} > 2, \\ (p-2)[4(p-2) + 2(p+3) + p + 6] > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{19}{3} < p < 3, \\ \dfrac{5(p-1)}{2(p-2)} < 0, \\ (p-2)(7p+4) > 0. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений (рис. 123, *б*).

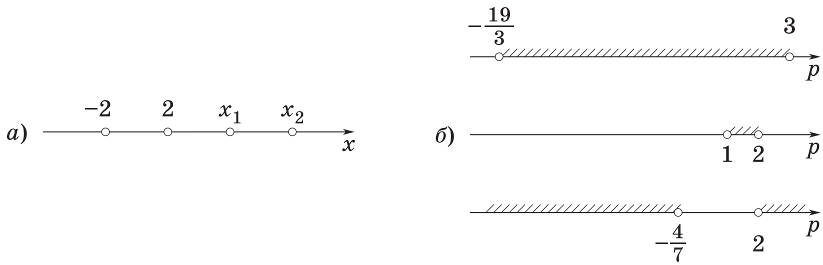


Рис. 123

<u>II случай:</u> $-2 < x_1 < 2 < x_2$ (рис. 124, *а*). Тогда от неравенств $-2 < x_1 < x_2$, $x_1 < 2 < x_2$ переходим к системе

$$\begin{cases} D > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > -2, \\ af(-2) > 0, \\ af(2) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3p^2 - 10p + 57 > 0, \\ -\dfrac{p+3}{2(p-2)} > -2, \\ (p-2)[4(p-2) - 2(p+3) + p + 6] > 0, \\ (p-2)[4(p-2) + 2(p+3) + p + 6] < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{19}{3} < p < 3, \\ \dfrac{3p-11}{2(p-2)} > 0, \\ (p-2)(3p-8) > 0, \\ (p-2)(7p+4) < 0, \end{cases}$$

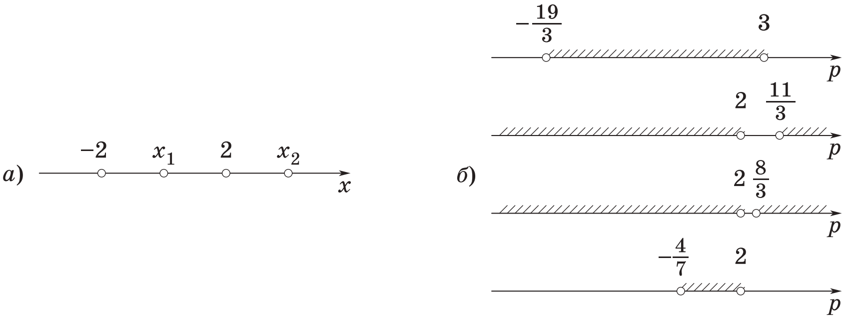


Рис. 124

откуда $-\frac{4}{7} < p < 2$ (рис. 124, *б*). При этих значениях p должны одновременно выполняться неравенства $x_1 < x < x_2$ и $-2 < x < 2$, откуда $x_1 < x < 2$. Итак, если $p \in \left(-\frac{4}{7}; 2\right)$, то $x \in [x_1; 2)$.

<u>III случай:</u> $-2 < x_1 < x_2 < 2$ (рис. 125, *а*). Так как $(x_1; x_2) \subset (-2; 2)$, то получаем систему

$$\begin{cases} D > 0, \\ -2 < -\dfrac{b}{2a} < 2, \\ af(-2) > 0, \\ af(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3p^2 - 10p + 57 > 0, \\ -\dfrac{p+3}{2(p-2)} > -2, \\ -\dfrac{p+3}{2(p-2)} < 2, \\ (p-2)[4(p-2) - 2(p+3) + p + 6] > 0, \\ (p-2)[4(p-2) + 2(p+3) + p + 6] > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{19}{3} < p < 3, \\ \dfrac{3p-11}{2(p-2)} > 0, \\ \dfrac{5(p-1)}{2(p-2)} > 0, \\ (p-2)(3p-8) > 0, \\ (p-2)(7p+4) > 0, \end{cases}$$

откуда $-\frac{19}{3} < p < -\frac{4}{7}$ (рис. 125, *б*). Таким образом, если $p \in \left(-\frac{19}{3}; -\frac{4}{7}\right)$, то $x \in [x_1; x_2]$.

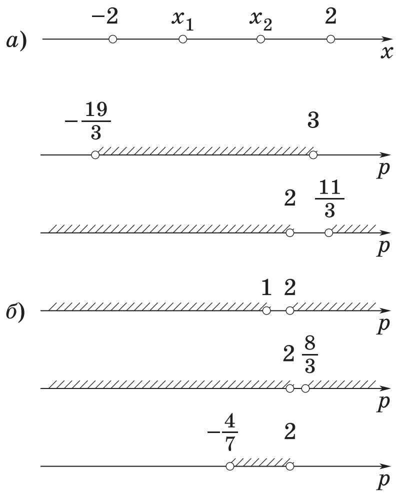


Рис. 125

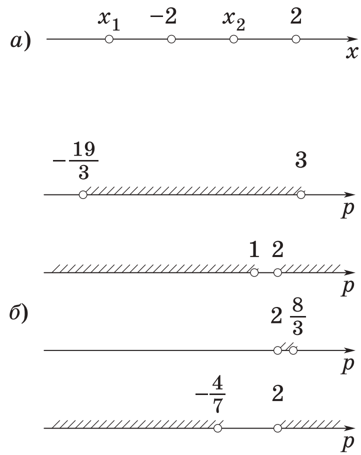


Рис. 126

<u>IV случай:</u> $x_1 < -2 < x_2 < 2$ (рис. 126, *а*). Тогда от неравенств $x_1 < -2 < x_2$ и $x_1 < x_2 < 2$ переходим к системе

$$\begin{cases} D > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < 2, \\ af(-2) < 0, \\ af(2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3p^2 - 10p + 57 > 0, \\ -\dfrac{p+3}{2(p-2)} < 2, \\ (p-2)[4(p-2) - 2(p+3) + p + 6] < 0, \\ (p-2)[4(p-2) + 2(p+3) + p + 6] > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{19}{3} < p < 3, \\ \dfrac{5(p-1)}{2(p-2)} > 0, \\ (p-2)(3p-8) < 0, \\ (p-2)(7p+4) > 0, \end{cases}$$

откуда $2 < p < \frac{8}{3}$ (рис. 126, *б*). При этих значениях p должны одновременно выполняться неравенства $-2 < x < 2$ и $\left[\begin{array}{l} x < x_1, \\ x > x_2, \end{array}\right.$ откуда $x_2 < x < 2$. Значит, если $p \in \left(2; \frac{8}{3}\right)$, то $x \in [x_2; 2)$.

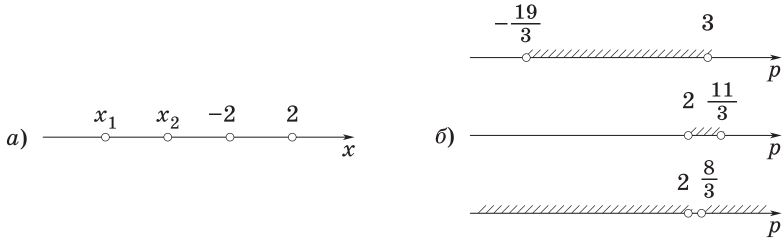


Рис. 127

<u>V случай:</u> $x_1 < x_2 < -2 < 2$ (рис. 127, *а*). Тогда от неравенства $x_1 < x_2 < -2$ перейдем к системе

$$\begin{cases} D > 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < -2, \\ af(-2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3p^2 - 10p + 57 > 0, \\ -\dfrac{p+3}{2(p-2)} < -2, \\ (p-2)[4(p-2) - 2(p+3) + p + 6] > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{19}{3} < p < 3, \\ \dfrac{3p-11}{2(p-2)} < 0, \\ (p-2)(3p-8) > 0, \end{cases}$$

откуда $\frac{8}{3} < p < 3$ (рис. 127, *б*). При этих значениях p неравенству (1) могут удовлетворять только значения x, принадлежащие ОДЗ этого неравенства. Поэтому если $p \in \left(\frac{8}{3}; 3\right)$, то $x \in (-2; 2)$.

<u>VI случай:</u> $\begin{cases} a > 0, \\ D < 0, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} p - 2 > 0, \\ -3p^2 - 10p + 57 < 0 \end{cases}$ (рис. 128). Если $p > 3$, то неравенство $f(p) > 0$ верно при $x \in \boldsymbol{R}$, поэтому неравенство (1) выполняется при $x \in (-2; 2)$.

<u>VII случай:</u> $\begin{cases} a < 0, \\ D < 0, \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} p - 2 < 0, \\ -3p^2 - 10p + 57 < 0 \end{cases}$ (рис. 129). Если $p < -\frac{19}{3}$, то неравенство $f(p) < 0$ справедливо при $x \in \boldsymbol{R}$, поэтому неравенство (1) не имеет решений, так как $\sqrt{4 - x^2} > 0$.

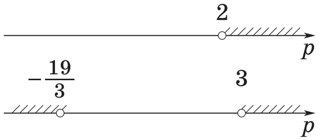


Рис. 128

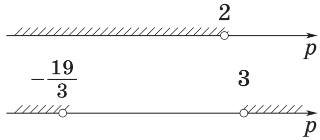


Рис. 129

VIII случай: $p = -\dfrac{19}{3}$. Тогда $D = 0$, $x_1 = x_2 = \dfrac{p+3}{2(2-p)} = \dfrac{-\dfrac{19}{3}+3}{2\left(2+\dfrac{19}{3}\right)} =$

$= -\dfrac{1}{5} \in$ ОДЗ.

IX случай: $p = 3$. Тогда $D = 0$, $x_1 = x_2 = \dfrac{p+3}{2(2-p)} = -3 \notin$ ОДЗ. Значит, неравенство (1) выполняется при $x \in (-2;\ 2)$.

X случай: $p = -\dfrac{4}{7}$. Тогда неравенство $f(p) \geqslant 0$ примет вид

$$\left(-\frac{4}{7} - 2\right)x^2 + \left(-\frac{4}{7} + 3\right)x - \frac{4}{7} + 6 \geqslant 0, \text{ или } 18x^2 - 17x - 38 \geqslant 0,$$

откуда находим корни $x_1 = -\dfrac{19}{18}$ и $x_2 = 2$ соответствующего квадратного уравнения. Поэтому неравенство (1) выполняется при $x \in \left(-2;\ -\dfrac{19}{18}\right]$.

XI случай: $p = 2$. Тогда неравенство $f(p) \geqslant 0$ примет вид $5x + 8 \geqslant 0$, откуда с учетом ОДЗ заключаем, что $x \in [-1{,}6;\ 2)$.

XII случай: $p = \dfrac{8}{3}$. Тогда неравенство $f(p) \geqslant 0$ примет вид

$$\left(\frac{8}{3} - 2\right)x^2 + \left(\frac{8}{3} + 3\right)x + \frac{8}{3} + 6 \geqslant 0, \text{ или } 2x^2 + 17x + 26 \geqslant 0,$$

откуда находим корни $x_1 = -6{,}5$ и $x_2 = -2$ соответствующего квадратного уравнения. Так как x_1 и x_2 не принадлежат ОДЗ неравенства (1), то $x \in (-2;\ 2)$.

5. *Ответ*: если $p \in \left(-\infty;\ -\dfrac{19}{3}\right)$, то $x \in \varnothing$;

если $p = -\dfrac{19}{3}$, то $x = -\dfrac{1}{5}$;

если $p \in \left(-\frac{19}{3}; -\frac{4}{7}\right)$, то $x \in [x_1; x_2]$;

если $p = -\frac{4}{7}$, то $x \in \left(-2; -\frac{19}{18}\right]$;

если $p \in \left(-\frac{4}{7}; 2\right)$, то $x \in [x_1; 2)$;

если $p = 2$, то $x \in [-1{,}6; 2)$;

если $p \in \left(2; \frac{8}{3}\right)$, то $x \in [x_2; 2)$;

если $p \in \left[\frac{8}{3}; +\infty\right)$, то $x \in (-2; 2)$.

10. Определить все значения a, при каждом из которых неравенство

$$25y^2 + \frac{1}{100} \geqslant x - axy + y - 25x^2 \qquad (1)$$

выполняется для любых пар $(x; y)$ чисел таких, что $|x| = |y|$.

1. Пусть a — некоторое число, удовлетворяющее условию задачи. Это значит, что если в неравенстве (1) заменить всюду y на x или всюду y на $-x$, то полученное относительно x неравенство (1) будет выполняться при любом x.

2. Итак, при любом x должны быть справедливы неравенства

$$(a + 50)x^2 - 2x + \frac{1}{100} \geqslant 0, \qquad (2)$$

$$(50 - a)x^2 + \frac{1}{100} \geqslant 0. \qquad (3)$$

3. Неравенство (2) выполняется для всех x при условии $\frac{D}{4} = 1 - \frac{1}{100}(a + 50) \leqslant 0$, т. е. $\frac{D}{4} = \frac{1}{2} - \frac{a}{100} \leqslant 0$, откуда $a \geqslant 50$.

4. Неравенство (3) выполняется для всех x при условии $50 - a \geqslant 0$, т. е. $a \leqslant 50$.

5. Поэтому единственным числом, удовлетворяющим требованию задачи, является $a = 50$.

6. При $a = 50$ исходное неравенство (1) примет вид

$$25y^2 + \frac{1}{100} \geqslant x - 50xy + y - 25x^2,$$

или

$$(5x + 5y)^2 - 2(5x + 5y) \cdot \frac{1}{10} + \frac{1}{100} \geqslant 0,$$

или

$$\left(5x + 5y - \frac{1}{10}\right)^2 \geqslant 0,$$

т. е. значение $a = 50$ есть решение задачи.

7. *Ответ*: $a = 50$.

11. Расположить в порядке возрастания числа 1; 4 и корни уравнения

$$x^2 - 2px + 2p^2 - 4p + 3 = 0.$$

1. Пусть x_1 и x_2 ($x_1 \leqslant x_2$) — корни данного уравнения. Решение задачи сводится к исследованию следующих шести случаев:

1) $x_1 \leqslant x_2 < 1$; 2) $x_1 \leqslant 1 \leqslant x_2 \leqslant 4$; 3) $x_1 < 1$, $x_2 > 4$;

4) $1 < x_1 \leqslant x_2 < 4$; 5) $1 < x_1 < 4 < x_2$; 6) $4 < x_1 \leqslant x_2$.

2. Для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ эти случаи описываются соответственно условиями:

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} < 1, \\ af(1) > 0; \end{cases} \quad (1) \qquad \begin{cases} af(1) \leqslant 0, \\ af(4) \geqslant 0; \end{cases} \quad (2) \qquad \begin{cases} af(1) < 0, \\ af(4) < 0; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ 1 < -\dfrac{b}{2a} < 4, \\ af(1) > 0, \\ af(4) > 0; \end{cases} \quad (4) \qquad \begin{cases} af(1) > 0, \\ af(4) < 0; \end{cases} \quad (5) \qquad \begin{cases} D \geqslant 0, \\ -\dfrac{b}{2a} > 4, \\ af(4) > 0. \end{cases} \quad (6)$$

3. Условия (1) в данном случае имеют вид

$$\begin{cases} -4(p^2 - 4p + 3) \geqslant 0, \\ p < 1, \\ 2(p^2 - 3p + 2) > 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $p \in \varnothing$.

4. К тому же результату мы придем и при рассмотрении условий (3), (5) и (6).

5. Условия (2) запишутся так:

$$\begin{cases} 2(p^2 - 3p + 2) \leqslant 0, \\ 2p^2 - 12p + 19 > 0, \end{cases}$$

откуда находим, что $p \in [1; 2]$.

6. Наконец, условия (4) приводят к системе

$$\begin{cases} -4(p^2 - 4p + 3) \geqslant 0, \\ 1 < p < 4, \\ 2(p^2 - 3p + 2) > 0, \\ 2p^2 - 12p + 19 > 0, \end{cases}$$

откуда находим, что $p \in (2; 3]$.

7. *Ответ:* если $p \in (-\infty; 1] \cup (3; +\infty)$, то решений нет;
если $p = 1$, то $1 = x_1 = x_2 < 4$;
если $p \in (1; 2)$, то $x_1 < 1 < x_2 < 4$;
если $p = 2$, то $x_1 = 1 < x_2 < 4$;
если $p \in (2; 3)$, то $1 < x_1 < x_2 < 4$;
если $p = 3$, то $1 < x_1 = x_2 < 4$.

12. При каких значениях параметра a число решений уравнения

$$3x^2 + (9a^2 - 2)x + 3a^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

не превосходит числа решений уравнения

$$3x^3 + x + (3a - 2)^2 \cdot 3^x = (8^a - 4)\log_3\left(3^a - \frac{1}{2}\right)? \tag{2}$$

1. Задача имеет смысл при условии $3^a > \dfrac{1}{2}$.

2. Рассмотрим сначала уравнение (2). При любом фиксированном значении параметра a правая часть этого уравнения (с учетом ОДЗ) является постоянной.

3. Левая часть уравнения (2) есть строго возрастающая функция, поскольку ее производная положительна:

$$9x^2 + 1 + (3a - 2)^2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 > 0.$$

4. Так как множеством значений указанной функции является интервал $(-\infty; +\infty)$, то уравнение (2) при любом допустимом значении параметра a имеет единственное решение.

5. Согласно требованию задачи, уравнение (1) должно иметь не более одного решения. Это будет выполнено при условии, когда дискриминант уравнения (1) неположителен, т. е. когда

$$D = (9a^2 - 2)^2 - 12(3a^2 - 1) = (9a^2 - 4)^2 \leqslant 0.$$

6. Отсюда находим, что $a_1 = -\frac{2}{3}$, $a_2 = \frac{2}{3}$. Однако значение $a_1 = -\frac{2}{3}$ не подходит, так как $3^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} < \frac{1}{2}$.

7. *Ответ:* $a = \frac{2}{3}$.

13. Функция $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + a}$ определена на отрезке [5; 7]. При каких значениях параметра a наибольшее на этом отрезке значение функции $f(x)$ не превосходит $\frac{1}{10}$?

1. Функция $f(x)$ определена на отрезке [5; 7] тогда и только тогда, когда квадратный трехчлен $\varphi(x) = x^2 - 4x + a$ не имеет корней на этом отрезке.

2. Графиком квадратного трехчлена $\varphi(x)$ при каждом фиксированном a является парабола, вершина которой имеет абсциссу $x = 2$.

3. Указанный трехчлен $\varphi(x)$ не будет иметь корней на отрезке [5; 7], если выполняется неравенство $\varphi(5) \cdot \varphi(7) > 0$, т. е.

$$(5 + a)(21 + a) > 0.$$

Решив это неравенство, находим

$$-\infty < a < -21, \quad -5 < a < +\infty. \tag{1}$$

4. Так как функция $\varphi(x)$ на отрезке [5; 7] строго возрастает, то функция $f(x)$ на этом же отрезке строго убывает.

5. Поэтому требование задачи будет выполнено, если справедливо неравенство $f(5) \leqslant \frac{1}{10}$, т. е. $\frac{1}{5+a} \leqslant \frac{1}{10}$. Решив это неравенство, находим

$$-\infty < a < -5, \quad 5 \leqslant a < +\infty. \tag{2}$$

6. Учитывая неравенства (1) и (2), получаем ответ.

7. *Ответ:* $a \in (-\infty; -21) \cup [5; +\infty)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найти все значения параметров a и b, при которых корни x_1 и x_2 уравнения:

а) $x^2 - (a^2 + 3a + 1)x + 2a + b + 3 = 0$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5, \\ 2x_1 + x_2 = 8; \end{cases}$$

б) $x^2 + (2a - 7)x + b^2 - 8b + 3a + 18 = 0$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 = 13. \end{cases}$$

2. Найти все значения параметра a, при которых совместна система уравнений:

а) $\begin{cases} 1 + 2\cos x = 4a - 2^{1+\sqrt{y}}, \\ 2 - 2^{\sqrt{y}} = 3a - 4\cos x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3^{1+\sqrt{x}} + 1 = 5a - 2\operatorname{tg}^2 y, \\ 4\operatorname{tg}^2 y + 2 = 3a + 3^{\sqrt{x}} \end{cases}$

(в ответе указать наименьшее из этих значений);

в) $\begin{cases} 2 + \cos x = 4a - 6 \cdot 2^{y^2}, \\ 10 - 2^{3+y^2} = a - 5\cos x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3^{1+x^2} - 2 = 4a - \sin^2 y, \\ -6 - 4\sin^2 y = 5a - 3^{2+x^2} \end{cases}$

(в ответе указать наибольшее из этих значений).

3. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 6 \cdot 2^{x^2} + 2 = 4a - \sin y, \\ 5\sin y + 10 = a + 2^{3+x^2} \end{cases}$$

несовместна?

4. При каких значениях параметра m имеет хотя бы одно решение система:

а) $\begin{cases} x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0, \\ |x + 1| \leqslant 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 - 2(m + 2) + m^2 + 4m + 3 = 0, \\ |x - 2| \leqslant 1? \end{cases}$

5. Найти значение k, при котором касательная к указанной кривой y в точке с заданной абсциссой x_0 является одновременно и касательной к заданной параболе $\varphi(x)$, если:

а) $y = 3x^2 + 5x + 4$, $\varphi(x) = 5x^2 - 7x + k$, $x_0 = 0$;

б) $y = 3 + 2x - x^3$, $\varphi(x) = x^2 - 6x + k$, $x_0 = -2$.

6. При каких значениях параметра a корни уравнения

$$(a^2 + 1)x^2 - 2ax = 3$$

удовлетворяют неравенствам $0 < x_1 < 1$, $|x_2| < x_1(1 - x_2)$?

7. В области определения функции $y = \left(a^a - a^{\frac{5x+2}{x+2}} \right)^{-0,5}$ взяли все целые положительные числа и сложили их. Найти все значения a, при которых такая сумма будет больше 5, но меньше 10.

8. При каких значениях параметра a график функции $f(x) = x^4 + 2ax^3 - 2x^2 - 6ax$ имеет вертикальную ось симметрии?

9. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$ имеет только целочисленные корни?

10. В зависимости от значений параметра a решить неравенство $a - x > |1 - |x||$.

11. Исследовать и решить неравенство:

а) $\dfrac{2 - ax - x^2}{1 - x + x^2} < 3$;

б) $(a^2 + a - 2)x^2 + (2a^2 + a + 3)x + a^2 - 1 > 0$;

в) $3(a + 1)x^2 - 6(a^2 + a + 1)x + 7(a^3 - 1) < 0$.

12. Решить уравнение $|2x + a| + |x - 2a| = 20$.

13. При каких значениях параметра a имеет единственное решение система уравнений:

а) $\begin{cases} axy + x - y + 1{,}5 = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} ax^2 + 2ax + y + 3a - 3 = 0, \\ ay^2 + x - 6ay + 11a + 1 = 0? \end{cases}$

14. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство:

а) $5 - (x - a)^2 > |x|$ имеет хотя бы одно положительное решение;

б) $3 - x^2 > |x - a|$ имеет хотя бы одно отрицательное решение;

в) $\sin x > |x - a|$ имеет хотя бы одно решение на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$;

г) $|x - a| < \sqrt{16 - x^2}$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

15. При каких значениях a сумма $\log_a (1 + \cos^2 x) + \log_a (5 + \cos^2 x)$ будет равна 1 хотя бы для одного значения x?

16. При каких значениях a сумма $\log_a \dfrac{3 + 2x^2}{1 + x^2} + \log_a \dfrac{5 + 4x^2}{1 + x^2}$ будет больше 1 для всех значений x?

17. Найти наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $x^3 + 5x^2 + ax + b = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, причем один из них равен (-2).

18. Установить, при каких значениях параметра a для всех допустимых значений x выполняется неравенство:

а) $(\sin x)^{\lg(\sin x) - a^2} > 10^{\log_{100}(1-\cos^2 x) + \log_7 a}$;

б) $(\cos x)^{\log_3(\cos x - |a|)} > 3^{\log_9(1-\sin^2 x) + a(a-2)}$.

19. Найти все значения параметра a, при которых:

а) функция $y = \sqrt[5]{6x^2 - 3ax + 1 - a}$ имеет минимум в точке $x_0 = -2{,}5$;

б) функция $y = \sqrt[5]{-6x^2 + (a+3)x + 5 - a}$ имеет максимум в точке $x_0 = \frac{1}{6}$.

20. Указать все значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_a x + \log_{\sqrt{x}} a\,|a + \log_a x| = a \log_x a$$

имеет решения, и найти соответствующие решения.

Ответы

1. а) $a_1 = -4$, $b_1 = 11$; $a_2 = 1$, $b_2 = 1$; б) $a_1 = 1$, $b_1 = 3$; $a_2 = 1$, $b_2 = 5$. **2.** а) 1; б) 0,5; в) 3; г) 1. **3.** $a \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. **4.** а) $m \in [-4; 2]$; б) $m \in [-2; 2]$. **5.** а) $k = 11{,}2$; б) $k = 17$. **6.** $a \in (-1{,}5; 1 - \sqrt{3}) \cup (1 + \sqrt{3}; +\infty)$. **7.** $a \in \left(\frac{17}{5}; \frac{11}{3}\right)$. **8.** $a \in \{-2; 0; 2\}$. **9.** $a \in \{-0{,}5; 0; 1{,}5\}$. **10.** Если $a \leqslant -1$, то $x \in \varnothing$; если $-1 < a \leqslant 1$, то $x < 0{,}5(a-1)$; если $a > 1$, то $x < 0{,}5(a+1)$. **11.** а) Если $a < -1$, то $x < \frac{3 - a - \sqrt{D}}{8}$, $x > \frac{3 - a + \sqrt{D}}{8}$, где $D = (a-7)(a+1)$; если $a = -1$, то $-\infty < x < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < +\infty$; если $-1 < a < 1$, то $x \in \boldsymbol{R}$; если $a = 7$, то $-\infty < x < -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} < x < +\infty$; если $a > 7$, то $x < \frac{3 - a - \sqrt{D}}{8}$, $x > \frac{3 - a + \sqrt{D}}{8}$; б) если $a < -2$, то $x < \frac{1-a}{a+2}$, $x > \frac{a+1}{1-a}$; если $a = -2$, то $x > -\frac{1}{3}$; если $-2 < a < -\frac{1}{5}$, то $\frac{a+1}{1-a} < x < \frac{1-a}{a+2}$; если $a = -\frac{1}{5}$, то $x \in \varnothing$; если $-\frac{1}{5} < a < 1$, то $\frac{1-a}{a+2} < x < \frac{a+1}{1-a}$; если $a = 1$, то $x > 0$; если $a > 1$, то $x < \frac{a+1}{1-a}$, $x > \frac{1-a}{a+2}$; в) если $a < -\frac{5}{4}$, то $x \in \boldsymbol{R}$;

если $a = -\frac{5}{4}$, то $-\infty < x < -\frac{21}{4}$, $-\frac{21}{4} < x < +\infty$; если $-\frac{5}{4} < a < -1$, то $x < \frac{3(a^2+a+1)+\sqrt{D}}{3(a+1)}$, $x > \frac{3(a^2+a+1)-\sqrt{D}}{3(a+1)}$, где $D = 3(a^2+a+1)(4a+5)(2-a)$; если $a = -1$, то $-\frac{7}{3} < x < +\infty$; если $-1 < a < 2$, то $\frac{3(a^2+a+1)-\sqrt{D}}{3(a+1)} < x < \frac{3(a^2+a+1)+\sqrt{D}}{3(a+1)}$; если $a \geqslant 2$, то $x \in \varnothing$. **12.** Если $a \in (-\infty; -8) \cup (8; +\infty)$, то $x \in \varnothing$; если $a = -8$ или $a = 8$, то $x = 4$; если $a \in (-8; -4)$, то $x = -3a - 20$, $x = \frac{a+20}{3}$; если $a \in [-4; 4)$, то $x = \frac{a+20}{3}$, $x = \frac{a-20}{3}$; если $a \in [4; 8)$, то $x = -3a + 20$, $x = \frac{a-20}{3}$. **13.** а) $a \in \{0{,}5(-7 \pm 4\sqrt{2}); -0{,}5; 1\}$; б) $a \in \{0; \pm 0{,}25\sqrt{2}\}$. **14.** а) $a \in (-\sqrt{5}; 5{,}25)$; б) $a \in (-3{,}25; 3)$; в) $a \in (\frac{\pi}{2} - 1; \pi)$; г) $a \in (-4\sqrt{2}; 4)$. **15.** $a \in [5; 12]$. **16.** $a \in (1; 8]$. **17.** 7. **18.** а) $a \in (0; 1]$; б) $a \in (0; 2)$. **19.** а) $a = -10$; б) $a = -1$. **20.** Если $0 < a < 1$, то уравнение имеет два корня: $x_1 = a^{\sqrt{1-a}-1}$ и $x_2 = a^{1-\sqrt{1+3a}}$; при остальных значениях a корней нет.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел
$\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел
$\boldsymbol{Z}_0$ — множество целых неотрицательных чисел
$\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел
$\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел
$\boldsymbol{R}_+$ — множество действительных неотрицательных чисел
$[a; b]$ — замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b, $a < b$
$(a; b)$ — открытый промежуток (интервал)
$(a; b]$, $[a; b)$ — полуинтервалы
$(a; +\infty)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, $(-\infty; b]$ — бесконечные промежутки
$(-\infty; +\infty)$ — числовая прямая
$\Rightarrow$ — знак следования
$\Leftrightarrow$ — знак равносильности (эквивалентности)
$\in$ — знак принадлежности
$\subset$ — знак включения
$\cup$ — знак объединения множеств
$\cap$ — знак пересечения множеств
$\varnothing$ — пустое множество
$f(x)$ — функция
$f(x_0)$ — значение функции в точке x_0
$D(f)$ — область определения функции f
$E(f)$ — множество значений функции f
ОДЗ — область допустимых значений
$|x|$ — модуль (абсолютная величина) числа x
$\{x\}$ — число x есть элемент множества
$\{$ — знак системы
$[$ — знак совокупности
(x_n) — числовая последовательность
$\div$ — арифметическая прогрессия

$\div\div$ — геометрическая прогрессия

Δx, Δy — приращение аргумента, приращение функции

$f'(x)$ — производная функции $f(x)$

$y_{\min}$ — минимум функции

$y_{\max}$ — максимум функции

$\min\limits_{[a;\, b]} f(x)$ — наименьшее значение функции на отрезке $[a;\, b]$

$\max\limits_{[a;\, b]} f(x)$ — наибольшее значение функции на отрезке $[a;\, b]$

$\log_a b$ — логарифм числа b по основанию a

$\lg b$ — десятичный логарифм

$\ln b$ — натуральный логарифм

e — основание натуральных логарифмов (e $\approx 2{,}7$)

$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ — интеграл от a до b функции $f(x)$

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров Б. И., Моденов П. С.* Пособие по математике для подготовительных курсов МГУ. М., 1967.

2. *Александров Б. И., Лурье М. В., Максимов В. М.* Пособие для подготовки к письменному экзамену по математике в МГУ. М., 1972.

3. *Александров Б. И., Лурье М. В., Максимов В. М.* Экзаменационные задачи по математике. М., 1969.

4. *Александров Б. И., Максимов В. М., Лурье М. В., Колесниченко А. В.* Пособие по математике для поступающих в вузы. М.,1972.

5. *Амелькин В. В., Рабцевич В. Л.* Задачи с параметрами. Мн., 1996.

6. *Андреянов П. А. , Гладких И. М., Сагитов Р. Ф.* Варианты заданий по математике на вступительных экзаменах в РЭА им. Г. В. Плеханова в 1999—2004. М., 2005.

7. *Анисимова Н. Т.* Математика (справочник для абитуриентов МБИ). М., 2002.

8. *Бабайцев В. А., Васенкова Е. К. и др.* Под ред. Бабайцева В. А. и Рылова А. А. Методическое пособие по математике для поступающих в Финансовую академию. М., 2003.

9. *Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И.* Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М., 1987.

10. *Ваховский Е. Б., Рывкин А. А.* Задачи по элементарной математике. М., 2004.

11. *Высоцкий И. Р., Звавич Л. И., Пигарев Б. П. и др.* Под ред. Шестакова С. А. Алгебра и начала анализа. Сборник задач для подготовки и проведения итоговой аттестации за курс средней школы. М., 2005.

12. *Говоров В. М., Дыбов П. Т., Мирошин Н. В., Смирнова С. Ф.* Сборник конкурсных задач по математике. М., 2006.

13. *Денищева Л. О. и др.* Под ред. Ковалевой Г. С. Единый государственный экзамен. М., 2002.

14. *Денищева Л. О., Глазков Ю. А., Краснявская К. А., Рязановский А. Р., Семенов П. В.* Единый государственный экзамен по математике. М., 2004.

15. *Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х.* Пособие по математике для поступающих в вузы. М., 1976.

16. *Дыбов П. Т., Забоев А. И., Калиниченко Д. Ф.* Сборник задач по математике. М., 1972.

17. *Дыбов П. Т., Осколков В. А.* Задачи по математике для поступающих в вузы (с указаниями и решениями). М., 2006.

18. *Камалова Р. А., Паршев Л. П., Струков Ю. А.* Типовые задания конкурсных экзаменов по математике. М., 1996.

19. *Крамор В. С.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. М., 2005.

20. *Крамор В. С.* Примеры с параметрами и их решения. М., 2001.

21. *Крамор В. С., Лунгу К. Н.* Повторяем и систематизируем школьный курс тригонометрии. М., 2001.

22. *Крамор В. С., Лунгу К. Н., Лунгу А. К.* Математика. Типовые варианты. Примеры на вступительных экзаменах. М., 2000.

23. *Кутасов А. Д., Пиголкина Т. С., Чехлов В. И., Яковлева Т. Х.* Под ред. Яковлева Г. Н. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., 2002.

24. *Кущенко В. С.* Сборник конкурсных задач по математике с решениями. Л., 1968.

25. *Лидский В. Б., Овсянников Л. В., Тулайков А. Н., Шабунин М. И.* Задачи по элементарной математике. М., 1969.

26. *Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г.* Задачник-практикум по математике. М., 2005.

27. *Локоть В. В.* Задачи с параметрами. М., 2003.

28. *Ляпин С. Е., Баранова И. В., Борчугова З. Г.* Сборник задач по элементарной алгебре. М., 1973.

29. *Максимов В. М.* Пособие по математике для поступающих в МГУ. М., 1972.

30. *Моденов В. П.* Математика. Пособие для поступающих в вузы. М., 2002.

31. *Мордкович А. Г.* Алгебра и начала анализа. М., 2002.

32. *Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К.* Задачи вступительных экзаменов по математике. М., 1980.

33. *Солодовников А. С., Родина М. А.* Задачник-практикум по алгебре. М., 1985.

34. *Шахмейстер А. Х.* Уравнения и неравенства с параметрами. СПб., М., 2004.

35. *Ястребинецкий Г. А.* Уравнения и неравенства, содержащие параметры. М., 1972.

СОДЕРЖАНИЕ