ШКОЛЬНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

В. С. Крамор

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Москва
ОНИКС • Мир и Образование

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я75
К78

Крамор В. С.

К78 Задачи на составление уравнений и методы их решения / В. С. Крамор. — М.: ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2009. — 256 с.: ил. — (Школьный курс математики).

ISBN 978-5-488-01799-3 (ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 978-5-94666-486-8 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

Цель книги — научить выпускников средней школы самостоятельно решать задачи на составление уравнений и помочь усвоить методы их решения.

Пособие содержит свыше 300 задач с подробными решениями и более 100 задач для самостоятельного решения.

Книга может быть использована при подготовке к выпускным экзаменам в средней школе, к сдаче ЕГЭ и вступительным экзаменам в вуз.

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я75

ISBN 978-5-488-01799-3 (ООО «Издательство Оникс»)
ISBN 978-5-94666-486-8 (ООО «Издательство «Мир и Образование»)

ПРЕДИСЛОВИЕ

В течение многих лет задачи на составление уравнений включаются в экзаменационные билеты по математике для абитуриентов высших учебных заведений, а в последние годы такие задачи предлагаются и при сдаче ЕГЭ. Умение решать эти задачи позволяет проверить у будущих студентов наличие логического мышления, сообразительности и наблюдательности, а также способности к анализу полученных результатов.

Вместе с тем в общеобразовательной школе задачам на составление уравнений уделяется недостаточно внимания. Цель данной книги состоит в том, чтобы научить выпускников средней школы решать подобного рода задачи и прочно усвоить различные методы, применяемые в процессе их решения.

Весь изложенный в книге материал разбит на 5 глав, состоящих из нескольких параграфов. Каждый параграф содержит небольшой справочный материал (основные формулы, утверждения, допущения, используемые при решении задач рассматриваемого типа) и набор задач, сопровождающихся подробными решениями. В конце каждой главы приводятся задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

В общей сложности книга содержит свыше 300 задач с решениями, а также 100 задач для самостоятельного решения.

Наряду с традиционными типами задач (задачи на проценты; задачи на растворы, смеси, сплавы; задачи на движение; задачи на работу) в книге рассматриваются и другие типы задач (задачи на числовые зависимости; задачи, приводящие к неравенствам; задачи с целочисленными неизвестными и т.п.).

Приведенные в книге решения задач сопровождаются подробными пояснениями, каждое действие в процесс решения нумеруется, поскольку оно несет определенную смысловую нагрузку. Все этапы решения включают необходимую информацию о правомерности того или иного шага.

Каждая глава завершается параграфом «Разные задачи», в котором содержится большое количество задач, относящихся к данной главе (а в ряде случаев и к другим, уже рассмотренным ранее главам), но не классифицированных по своему типу. Это позволяет обеспечить контроль за умением учащегося решать «вперемешку» задачи из данной главы.

В конце книги приводится список литературы, которой пользовался автор при подготовке настоящего издания. Многие задачи, взятые из указанных пособий, входили в экзаменационные билеты для поступающих в различные вузы страны.

Автор надеется, что данная книга окажется добрым помощником всем, кто будет пользоваться ею в процессе учебы и при подготовке к экзаменам.

Успехов вам, школьники и абитуриенты!

Автор

Глава 1

ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОЦЕНТОВ ДАННОГО ЧИСЛА. СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

1°. *Процентом* называют сотую часть какого-либо числа. Обозначение: $1\% = 0{,}01$.

2°. Процент данного числа a есть число $0{,}01a$. Обозначение: $1\%(a) = 0{,}01a$.

3°. Определить $p\%$ от данного числа a означает найти число $0{,}01pa$. Обозначение: $p\%(a) = 0{,}01pa$.

Например, чтобы найти 17% от 650, надо дробь 0,17 умножить на 650, т.е. $0{,}17 \cdot 650 = 11{,}05$.

4°. Часто возникают ситуации, когда требуется найти проценты от процентов.

а) Пусть некоторая величина A_0 изменяется на $p\%$; тогда ее новое значение A_1 будет равно

$$A_1 = A_0 + A_0 \cdot \frac{p}{100} = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right).$$

б) Пусть теперь величина A_1 изменяется снова на $p\%$; тогда ее новое значение A_2 будет равно

$$A_2 = A_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

в) Если это действие выполняется k раз, то окончательное значение рассматриваемой величины A_k есть

$$A_k = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^k. \qquad (1)$$

г) Если величина A_0 изменяется первый раз на $p_1\%$, второй — на $p_2\%$, ..., последний раз — на $p_k\%$, то окончательное значение этой величины вычисляют по формуле

$$A_k = A_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdots\left(1+\frac{p_k}{100}\right). \qquad (2)$$

5°. Формулы (1) и (2) называют *формулами сложных процентов*.

Задачи с решениями

1. По плану фабрика должна изготовить 3000 изделий. Сколько изделий составляют: 1% от плана; 13% от плана?

1. 1% от плана составляют

$$1\%(3000) = 0{,}01 \cdot 3000 = 30 \text{ изделий.}$$

2. 13% от плана составляют

$$13\%(3000) = 0{,}13 \cdot 3000 = 390 \text{ изделий.}$$

3. *Ответ:* 30 изделий; 390 изделий.

2. Цена первого товара поднялась на 40%, а затем еще на 25%. Цена второго товара поднялась на 30%, после чего оказалось, что цена первого товара на 40% больше, чем второго. На сколько процентов первоначальная цена первого товара больше первоначальной цены второго товара?

1. Пусть a и b — первоначальные цены первого и второго товаров соответственно.

2. Тогда условие задачи приводит к уравнению

$$1{,}25(1{,}4a) = 1{,}4(1{,}3b) \implies \frac{a}{b} = \frac{1{,}3}{1{,}25} = 1{,}04.$$

3. Следовательно, первоначальная цена первого товара на 4% больше первоначальной цены второго товара.

4. *Ответ:* на 4%.

3. Скорость велосипедиста равна 30 км/ч. Скорость грузовой машины на 80% больше скорости велосипедиста, а скорость легковой машины на 60% больше скорости грузовой. Определить скорости грузовой и легковой машин.

1. Скорость грузовой машины составляет 180% от скорости велосипедиста (за 100% принимаем скорость велосипедиста). Значит, скорость грузовой машины равна 180%(30 км/ч) = 1,8·30 км/ч = 54 км/ч.

2. Скорость легковой машины составляет 160% от скорости грузовой (за 100% принимаем скорость грузовой машины. Поэтому скорость легковой машины равна 160%(54 км/ч)=1,6·54 км/ч=86,4 км/ч.

3. *Ответ:* 54 км/ч; 86,4 км/ч.

4. Предприятие выпускало каждый месяц по 8000 изделий. Было решено увеличивать число изделий ежемесячно на 5%. Сколько изделий должно выпустить предприятие через: месяц; два месяца; три месяца?

1. Предприятие выпускало ежемесячно 8000 изделий. Это составляло 100% от плана.

2. При увеличении плана на 5% он будет составлять 105%.

3. Поэтому нужно найти 105% от 8000. Имеем

$$105\%\,(8000) = 1{,}05 \cdot 8000 = 8400 \text{ (изделий)}.$$

Таким образом, через месяц предприятие должно выпустить 8400 изделий.

4. За второй месяц предприятие должно увеличить величину 8400 изделий, принимаемую за 100%, еще на 5%. Значит, за второй месяц оно должно выпустить 105% от 8400 изделий. Это составляет

$$105\%\,(8400) = 1{,}05 \cdot 8400 = 8820 \text{ (изделий)}.$$

5. Аналогично находим, что за следующий (третий) месяц предприятие должно выпустить

$$105\%\,(8820) = 1{,}05 \cdot 8820 = 9261 \text{ (изделие)}.$$

6. *Ответ:* 8400 изделий; 8820 изделий; 9261 изделие.

Замечание. Анализируя решение задачи, заключаем, что мы определяли на самом деле следующие величины: $105 \cdot 8000$; $1{,}05^2 \cdot 8000$; $1{,}05^3 \cdot 8000$.

В общем виде имеем:

а) $p\%$ от числа a составляют $0{,}01pa$;

б) $p\%$ от полученного результата составляют $(0{,}01p)^2a$;

в) $p\%$ от нового результата составляют $(0{,}01p)^3a$ и т.д.

В результате получили так называемые *сложные проценты*.

Формулу

$$N = (0{,}01p)^n a$$

называют *формулой сложных процентов*. Ее можно записать следующим образом:

$$N = q^n a,$$

где $q = 0{,}01p$, причем $q > 1$, поскольку $p > 100$ (как в рассмотренной выше задаче) и $q < 1$ в том случае, когда $p < 100$.

5. Вкладчик положил в банк 250 000 р. при 8% годовых. Какова будет величина вклада через три года?

1. Воспользуемся формулой сложных процентов, где $q = 1{,}08$ и $n = 3$.

2. Значит, величина вклада через три года будет равна

$$N = 1{,}08^3 \cdot 250\,000 \text{ р.} = 314\,928 \text{ р.}$$

3. *Ответ:* 314 928 р.

6. Зарплата некоторой категории служащих повышалась дважды, причем повышение во второй раз было вдвое больше, чем в первый. Определить, на сколько процентов повышалась зарплата каждый раз, если до первого повышения она составляла 7000 р., а после второго повышения — 9240 р.

1. Пусть в первый раз зарплата повысилась на $x\%$; тогда во второй раз она повысилась на $2x\%$. Так как до первого повышения зарплата составляла 7000 р., то после первого повышения она увеличилась на $7000 \cdot \frac{x}{100}$ р. и стала равной

$$\left(7000 + 7000 \cdot \frac{x}{100}\right) \text{ р.} = 7000\left(1 + \frac{x}{100}\right) \text{ р.}$$

2. До второго повышения зарплата составляла $7000\left(1 + \frac{x}{100}\right)$ р., а после второго повышения она увеличилась на $7000\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \frac{2x}{100}$ р. и стала равной

$$\left[7000\left(1 + \frac{x}{100}\right) + 7000\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \frac{2x}{100}\right] \text{ р.}$$

3. Согласно условию, после второго повышения зарплата составляла 9240 р., откуда получаем уравнение

$$7000\left(1 + \frac{x}{100}\right) + 7000\left(1 + \frac{x}{100}\right) \cdot \frac{2x}{100} = 9240,$$

или

$$25\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{50}\right)=33.$$

4. Находим корни уравнения: $x_1 = 10$ и $x_2 = -160$.

5. Поскольку проценты не могут быть отрицательными, условию задачи удовлетворяет только $x = 10$.

6. *Ответ:* В первый раз — на 10%, а во второй — на 20%.

7. Вкладчику на его сбережения банк через год начислил 6000 р. процентных денег. Добавив 44 000 р., вкладчик оставил деньги еще на год. По истечении года вновь были начислены проценты, и тогда вклад вместе с процентами составил 257 500 р. Какая сумма была первоначально положена в банк?

1. Пусть в банк было положено x (р.), а $p\%$ — годовые проценты, которые дает банк.

2. Учитывая, что через год с первоначальной суммы банк начислил 6000 р. процентных денег, получаем уравнение

$$\frac{xp}{100}=6000.$$

3. К концу первого года вклад составил $x + 6000$ (р.).

4. Так как вкладчик добавил 44 000 р., то к началу второго года вклад составил $x + 50\,000$ (р.). Используя условие, запишем еще одно уравнение:

$$(x+5000)+(x+5000)\frac{p}{100}=257\,5000.$$

5. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{xp}{100}=6000,\\ (x+5000)\left(1+\dfrac{p}{100}\right)=257\,500.\end{cases}$$

Решив эту систему, получим две пары чисел: $x_1 = 200\,000$, $p_1 = 3$ и $x_2 = 1500$, $p_2 = 400$. Вторая пара не подходит по смыслу задачи.

6. *Ответ:* 200 000 р.

8. После двух последовательных повышений зарплата возросла в $1\frac{7}{8}$ раза. На сколько процентов повысилась зарплата в первый раз, если второе повышение было в процентном отношении вдвое больше первого?

1. Пусть первоначально зарплата составляла S (р.). Значит, после двукратного повышения она стала равной $\frac{15S}{8}$ (р.).

2. Если в первый раз зарплата повысилась на $p\%$, то во второй раз она повысилась на $2p\%$.

3. Применив формулу сложных процентов (см. формулу (2) на с. 6), имеем

$$\frac{15S}{8} = S\left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right).$$

4. Очевидно, что $S \neq 0$. Сократив на S и полагая $y = \dfrac{p}{100}$, получим уравнение

$$(1+y)(1+2y) = \frac{15}{8}, \quad \text{или} \quad 16y^2 + 24y - 7 = 0,$$

откуда $y_1 = \dfrac{1}{4}$, $y_2 = -\dfrac{7}{4}$ (последнее значение не подходит по смыслу задачи).

5. *Ответ:* на 25%.

9. Автомобиль двигался по магистрали с определенной скоростью. Выехав на проселочную дорогу, он снизил скорость на 20%, а затем на участке крутого подъема уменьшил скорость еще на 30%. На сколько процентов эта новая скорость меньше первоначальной?

З а м е ч а н и е. Некоторые учащиеся на поставленный вопрос отвечают сразу: на 50%. Проверим, так ли это.

1. Пусть скорость автомобиля на магистрали составляла v км/ч. Тогда:

а) на проселочной дороге она равна $80\%(v) = 0{,}8v$;

б) на подъеме она равна $70\%(0{,}8v) = 0{,}56v = 56\%(v)$.

2. Значит, окончательная скорость меньше первоначальной на 44%.

3. *Ответ:* на 44%.

10. При нагревании вода испаряется. Предположим, что за день испаряется 2% воды. Сколько литров воды останется от 100 л через три дня?

1. Так как за один день испаряется 2% воды, то в конце первого дня останется $98\%(100$ л$) = 98$ л воды.

2. В конце второго дня останется $98\%(98$ л$) = 96{,}04$ л воды, а в конце третьего дня — $98\%(96{,}04$ л$) = 94{,}1192$ л воды.

З а м е ч а н и е. Этот результат получается сразу с помощью формулы сложных процентов: $(0{,}98)^3 \cdot 100$.

3. *Ответ:* 94,1192 л.

11. Цена некоторого товара снижается ежегодно на 10%. На сколько процентов по сравнению с первоначальной снизится стоимость товара через четыре года?

1. Снижение цены за первый год на 10% означает, что она составит 90% = 0,9 начальной стоимости.

2. Воспользуемся формулой сложных процентов.

3. Через четыре года стоимость товара будет равна $0{,}9^4 = 0{,}6561 = 65{,}61\%$ первоначальной стоимости, а это на 34,39% ниже.

4. *Ответ:* на 34,39%.

12. Цену товара сначала снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета произвели снижение еще на 10%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

1. Эту задачу проще решить чисто арифметически, не составляя уравнения.

2. Пусть первоначальная цена товара составляла x (р.), что соответствует 100%.

3. Тогда после первого снижения цена товара составит

$$x - 0{,}2x = 0{,}8x \text{ (р.)}.$$

4. После второго снижения она составит

$$0{,}8x - 0{,}15 \cdot 0{,}8x = 0{,}68x \text{ (р.)}.$$

5. После третьего снижения она составит

$$0{,}68x - 0{,}1 \cdot 0{,}68x = 0{,}612x \text{ (р.)}.$$

6. Всего цена товара снизилась на

$$x - 0{,}612x = 0{,}388x \text{ (р.)}.$$

7. Так как x соответствует 100%, то $0{,}388x = 38{,}8\%$.

8. *Ответ:* на 38,8%.

13. За первую поездку автомобиль израсходовал 20% бензина, имевшегося в баке, а за вторую — 25% оставшегося в баке бензина. После этого в баке осталось на 11 л больше, чем было израсходовано за обе поездки. Сколько литров бензина находилось первоначально в баке?

1. Пусть первоначально в баке было x л бензина.

2. За первую поездку автомобиль израсходовал $0{,}2x$ л бензина.

3. За вторую поездку он израсходовал $0{,}25(0{,}8x) = 0{,}2x$ л бензина.

4. Значит, после двух поездок было израсходовано $0{,}4x$ л бензина, а в баке осталось $0{,}6x$ л бензина. Учитывая условие, составим уравнение

$$0{,}6x - 0{,}4x = 11,$$

откуда $x = 55$ (л).

5. *Ответ:* 55 л.

14. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{5}$ м. Определить катеты, если известно, что после того как один из них увеличить на $133\frac{1}{3}\%$, а другой — на $16\frac{2}{3}\%$, сумма их длин составит 14 м.

1. Обозначим длины катетов (в метрах) через x и y.

2. По условию $x^2 + y^2 = (3\sqrt{5})^2$.

3. После увеличения на $133\frac{1}{3}\%$, т.е. на $\dfrac{133\frac{1}{3}}{100} = 1\frac{1}{3}$ своей длины, первый катет станет равным $2\frac{1}{3}x$.

4. Второй катет после увеличения на $16\frac{2}{3}\%$ будет равен $1\frac{1}{6}y$.

5. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{6}y = 14, \\ x^2 + y^2 = (3\sqrt{5})^2, \end{cases}$$

откуда находим $x = 3$, $y = 6$.

6. *Ответ:* 3 м; 6 м.

15. Цена 60 экземпляров первого тома и 75 экземпляров второго тома составляет 4050 р. Однако при 15%-й скидке на первый том и 10%-й скидке на второй том пришлось заплатить всего 3555 р. Определить цену одного экземпляра первого и второго томов.

1. Пусть цена экземпляра первого тома составляет x р., а экземпляра второго тома — y р.

2. Первое условие дает уравнение

$$60x + 75y = 4050. \qquad (1)$$

3. При скидке в 15% цена экземпляра первого тома составит $0{,}85x$ р.; при скидке в 10% цена экземпляра второго тома составит $0{,}9y$.

4. Из второго условия следует уравнение

$$60 \cdot 0{,}85x + 75 \cdot 0{,}9y = 3555. \qquad (2)$$

5. Решив систему уравнений (1), (2), находим $x = 30$, $y = 30$.

6. *Ответ:* 30 р.; 30 р.

16. Цену некоторого товара сначала снизили на 15%, а затем — еще на 25%. Через некоторое время цену этого товара повысили на 20%. Как и на сколько процентов изменилась в итоге цена данного товара?

1. Пусть A — первоначальная цена товара; тогда после снижения на 15% она станет равной $0{,}85A$.

2. После дальнейшего снижения на 25% новая цена окажется равной

$$0{,}75 \cdot 0{,}85A = 0{,}6375A.$$

3. Наконец, после повышения цены на 20% получаем

$$1{,}2 \cdot 0{,}6375A = 0{,}765A = 76{,}5\%\,(A).$$

4. Итак, товар стал дешевле на 23,5%. Можно сказать, что цена изменилась на $-23{,}5\%$.

5. *Ответ:* $-23{,}5\%$.

17. Магазин должен реализовать в течение месяца товар на 23 млн р. За первую неделю магазин реализовал 23% всего товара; за вторую — 75% от количества товара, реализованного на первой неделе; за третью — 60% от количества товара, реализованного за первые две недели. Сколько выручил магазин за последнюю неделю?

1. Выручка магазина составляет:
а) за первую неделю: 23% (23 млн р.) $=$ 5,29 млн р.;
б) за вторую неделю: 75% (5,29 млн р.) $=$ 3,9675 млн р.;
в) за две недели: $5{,}29 + 3{,}9675 = 9{,}2575$ млн р.;
г) за третью неделю: 60% (9,2575 млн р.) $=$ 5,5545 млн р.;
д) за первые три недели: $9{,}2575 + 5{,}5545 = 14{,}812$ млн р.;
е) за четвертую неделю: $23 - 14{,}812 = 8{,}188$ млн р.

2. *Ответ:* 8,188 млн р.

18. За первый день в бассейн было налито 680 м^3 воды, за второй — на 15% меньше, а за третий — на 15% больше, чем за второй. Сколько кубометров воды было налито в бассейн за три дня?

1. За второй день было налито 85% от 680 м^3, т.е. $0{,}85 \cdot 680 = 578$ (м^3).

2. За третий день было налито 1,15% от 578 м^3 воды, т.е. $1{,}15 \cdot 578 = 664{,}7$ (м^3).

3. За три дня в бассейн было налито $680+578+664{,}7=1922{,}7$ (м^3).

4. *Ответ:* 1922,7 м^3.

19. Фермер получил кредит в банке под определенные проценты годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк $\frac{3}{4}$ всей суммы, которую он был должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каковы годовые проценты по кредиту в данном банке?

1. Пусть x (где x — десятичная дробь) — годовые проценты по кредиту в данном банке.

2. Величину кредита примем за единицу.

3. Долг фермера банку к началу второго года составит $\frac{1}{4}(1+x)$, а к концу второго года он составит $\frac{1}{4}(1+x)+\frac{1}{4}(1+x)x=\frac{1}{4}(1+x)^2$.

4. Учитывая условие задачи, получим уравнение

$$\frac{1}{4}(1+x)^2 = 1{,}21 \quad (x>0),$$

откуда $x=1{,}2$, или $x=120\%$.

5. *Ответ:* 120%.

20. Банк выделил определенную сумму денег на кредиты трем организациям сроком на год. Организация A получила кредит в размере 40% от выделенной суммы под 30% годовых, организация B — 40% от оставшейся суммы под 15% годовых. Последнюю часть выделенной суммы получила организация C. Через год, когда кредиты были погашены, оказалось, что банк получил прибыль в размере 21%. Под какие проценты был выдан кредит организации C?

1. Пусть S — сумма, выделенная банком на кредиты организациям A, B и C; α — проценты (в долях), под которые был выдан кредит организации C.

2. Организации A был выделен кредит в размере $0{,}4S$, который через год принес банку прибыль, равную $0{,}4S \cdot 0{,}3 = 0{,}12S$.

3. Организации B был выделен кредит в размере $(S-0{,}4S)\cdot 0{,}4 = 0{,}24S$, который через год принес банку прибыль, равную $0{,}24S \cdot 0{,}15 = 0{,}036S$.

4. Организации C был выделен кредит в размере $S - 0{,}4S - 0{,}24S = 0{,}36S$, который через год принес банку прибыль, равную $0{,}36S\alpha$.

5. Суммарная прибыль банка от этих трех кредитов составит

$$0{,}12S + 0{,}036S + 0{,}36S\alpha = 0{,}156S + 0{,}36S\alpha.$$

6. С другой стороны, эта прибыль равна $0{,}21S$. Следовательно, $0{,}156S + 0{,}36S\alpha = 0{,}21S$, откуда $\alpha = 0{,}15$, или $\alpha = 15\%$.

7. *Ответ:* 15%.

21. Из учащихся, выполнявших контрольную работу, 30% получили оценку «5», 40% — оценку «4», 8 учащихся — оценку «3», а остальные — оценку «2». Средний балл составил 3,9. Сколько учащихся выполняли работу?

1. Пусть работу выполняли x (учащихся). Тогда:
а) оценку «5» получили $0{,}3x$ (учащихся);
б) оценку «4» получили $0{,}4x$ (учащихся);
в) оценку «3» получили 8 (учащихся);
г) оценку «2» получили $x - (0{,}3x + 0{,}4x) - 8 = 0{,}3x - 8$ (учащихся).

2. Составим средний балл и приравняем его к 3,9:

$$\frac{5 \cdot 0{,}3x + 0{,}4x \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 2(0{,}3x - 8)}{x} = 3{,}9,$$

откуда $x = 40$.

3. *Ответ:* 40 учащихся.

22. Антикварный магазин купил два предмета за 22 500 р, а затем продал их, получив 40% прибыли. Сколько заплатил магазин за каждый предмет, если от продажи первого было получено 25% прибыли, а от продажи второго — 50%?

1. Пусть первый предмет был куплен за x р. Тогда второй был куплен за $(22\,500 - x)$ р.

2. При продаже первого предмета получено 25% прибыли. Значит, он был продан за $1{,}25x$ р.

3. Второй предмет, при продаже которого получено 50% прибыли, был продан за $1{,}5(22\,500 - x)$ р.

4. По условию общий процент прибыли (по отношению к покупной цене 22 500 р.) составил 40%.

5. Значит, общая сумма выручки составила

$$1{,}40 \cdot 22\,500 = 31\,500 \text{ р.}$$

6. Получим уравнение

$$1{,}25x + 1{,}5(22\,500 - x) = 31\,500,$$

откуда $x = 9000$.

7. *Ответ:* первый предмет был куплен за 9000 р., а второй — за 13 500 р.

23. За килограмм одного продукта и 10 кг другого заплачено 200 р. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15%, а второй подешевеет на 25%, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 182 р. Сколько стоит килограмм каждого продукта?

1. Пусть x р. — стоимость 1 кг первого продукта, а y р. — стоимость 1 кг второго продукта.

2. Стоимость 1 кг первого продукта после подорожания составит $x + 0{,}15x = 1{,}15x$.

3. Стоимость 1 кг второго продукта после удешевления составит $y - 0{,}25y = 0{,}75y$.

4. Из условия следует, что

$$\begin{cases} x + 10y = 200, \\ 1{,}15x + 0{,}75 \cdot 10y = 182. \end{cases}$$

5. Решив эту систему уравнений, получим $x = 80$, $y = 12$.

6. *Ответ:* 80 р.; 12 р.

2. НАХОЖДЕНИЕ НЕИЗВЕСТНОГО ЧИСЛА ПО ЕГО ЗАДАННЫМ ПРОЦЕНТАМ

1°. Пусть $p\%$ неизвестного числа x равны b. Тогда это неизвестное число находится делением b на $0{,}01p$.

2°. Таким образом, если $p\%(x) = b$, то

$$x = \frac{b}{0{,}01p}, \quad \text{или} \quad x = \frac{100b}{p}.$$

3°. Например, чтобы найти число, 15% которого равны 18, надо 18 разделить на 0,15, т.е. $\frac{18}{0{,}15} = 120$. Значит, число, 15% которого равны 18, есть 120.

Задачи с решениями

1. Найти размер вклада, 12% которого составляют 2700 р.

1. Обозначим размер вклада через x; тогда 12% составляют 2700 р., т.е. $12\%(x) = 2700$, или $0{,}12x = 2700$.

2. Отсюда $x = \frac{2700}{0{,}12} = 22\,500$ (р.).

3. *Ответ:* 22 500 р.

2. Масса изюма, получаемого при сушке винограда, составляет 32% всей массы винограда. Из какого количества винограда получится 2 кг изюма?

1. По условию 2 кг составляют 32% от всей массы винограда.

2. Масса винограда равна $\frac{2 \cdot 100}{32} = 6{,}25$ (кг).

Ответ: 6,25 кг.

3. Морская вода содержит 5% (по массе) соли. Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в последней составило 2%?

1. В 40 кг морской воды содержится $40 \cdot 0{,}05 = 2$ кг соли.

2. Чтобы 2 кг составили 2% общей массы, последняя должна быть равна $2 : 0{,}02 = 100$ (кг).

3. Значит, нужно добавить $100 - 40 = 60$ кг пресной воды.

4. *Ответ:* 60 кг.

4. Свежие фрукты содержат 80% воды, а сухие — 15%. Сколько килограммов сухофруктов получится из 300 кг свежих фруктов?

1. В 300 кг свежих фруктов содержится 80% воды и 20% сухой массы.

2. Сухая масса составляет $20\%(300) = 0{,}2 \cdot 300 = 60$ кг. Она сохраняется и в сухих фруктах.

3. Пусть получили x кг сухофруктов; тогда в них содержится 85% сухой массы, т.е. $0{,}85x$ кг, и это количество равно 60 кг.

4. Из равенства $0{,}85x = 60$ находим $x = \frac{60}{0{,}85} \approx 70{,}6$ (кг).

5. *Ответ:* $\approx 70{,}6$ кг.

5. Фирма, продав продукцию на 3348 р., понесла 4% убытка. Какова себестоимость этой продукции?

1. Убыток исчисляется в процентах по отношению к себестоимости (принимаемой за 100%).

2. Значит, 3348 р. составляют $100\% - 4\% = 96\%$ себестоимости.

3. Следовательно, продукция обошлась фирме в

$$\frac{3348 \cdot 100}{96} = 3487{,}5 \text{ (р.)}.$$

4. *Ответ:* 3487,5 р.

6. Из какого количества молока жирностью 3,5% можно получить 189 кг сметаны жирностью 20%?

1. В 189 кг сметаны содержится $20\%(189) = 0{,}2 \cdot 189 = 37{,}8$ кг жира.

2. Пусть на переработку было взято x кг молока; тогда в нем имеется $3{,}5\%(x) = 0{,}035x$ кг жира, а значит, $0{,}035x = 37{,}8$.

3. Решив это уравнение, находим $x = 1080$.

4. *Ответ:* 1080 кг.

7. Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие — 12%. Сколько килограммов сухих грибов получится из 22 кг свежих?

1. Пусть x кг — масса сухих грибов.

2. Масса воды в свежих грибах: $22 \cdot 0{,}9 = 19{,}8$ (кг).

3. Масса воды в сухих грибах: $x \cdot 0{,}12$ (кг).

4. Масса грибов без воды: $22 - 19{,}8 = 2{,}2$ (кг).

5. Используя условие, составим уравнение $2{,}2 + x \cdot 0{,}12 = x$, откуда $x = 2{,}5$.

6. *Ответ:* 2,5 кг.

8. Собрали 140 кг грибов, влажность которых составляла 98%. После подсушивания их влажность снизилась до 93%. Какова стала масса грибов после подсушивания?

1. Влажность собранных 140 кг грибов равна 98%.

2. Значит, в них содержится 98% воды и 2% сухого вещества, что составляет $140 \cdot 0{,}02 = 2{,}8$ кг.

3. В подсушенных грибах 2,8 кг сухой массы составляют $100\% - 93\% = 7\%$.

4. Поэтому масса подсушенных грибов равна $\frac{2{,}8}{7} \cdot 100 = 40$ (кг).

5. *Ответ:* 40 кг.

3. ПРОЦЕНТНОЕ ОТНОШЕНИЕ ДВУХ ЧИСЕЛ

1°. *Процентным отношением* чисел A и B (или B и A) называется отношение $\frac{A}{B}$ (или $\frac{B}{A}$), выраженное в процентах, т.е. $\frac{A}{B} \cdot 100\%$ (или $\frac{B}{A} \cdot 100\%$). Оно показывает, сколько процентов составляет число A по отношению к B (или число B по отношению к A).

Пусть, например, $A = 4$, $B = 5$. Тогда:

а) $\frac{A}{B} \cdot 100\% = \frac{4}{5} \cdot 100\% = 80\%$, т.е. $4 = 80\%(5)$;

а) $\frac{B}{A} \cdot 100\% = \frac{5}{4} \cdot 100\% = 125\%$, т.е. $5 = 125\%(4)$.

2°. С помощью процентного отношения можно определить, на сколько процентов одно число больше или меньше другого.

3°. В рассмотренных примерах число 4 составляет 80% от числа 5, поэтому оно на 20% меньше, чем число 5. С другой стороны, число 5 составляет 125% от числа 4, т.е. 5 на 25% больше числа 4.

З а м е ч а н и е. Отметим, что если первое число больше (меньше) второго на некоторое количество процентов, то второе меньше (больше) первого на <u>другое</u> количество процентов.

Задачи с решениями

1. Скорость велосипедиста по ровному месту равна 16 км/ч, а под гору — 25 км/ч.

а) На сколько процентов скорость по ровному месту меньше, чем скорость под гору?

б) На сколько процентов скорость велосипедиста под гору больше его скорости по ровному месту?

1. Сравним скорость по ровному месту ($A = 16$) со скоростью под гору ($B = 25$):

$$\frac{A}{B} \cdot 100\% = \frac{16}{25} \cdot 100\% = 64\% = 100\% - 36\%,$$

т.е. скорость по ровному месту на 36% меньше, чем скорость под гору.

2. Сравним теперь скорость под гору ($A = 25$) со скоростью по ровному месту ($B = 16$):

$$\frac{A}{B} \cdot 100\% = \frac{25}{16} \cdot 100\% = 156{,}25\% = 100\% + 56{,}25\%,$$

т.е. скорость велосипедиста под гору больше скорости по ровному месту на $56{,}25\%$.

3. *Ответ:* а) на 36%; б) на $56{,}25\%$.

2. Пачка сигарет стоила до снижения цен 29 р., а после снижения — 26 р. На сколько процентов снижена цена?

1. Цена снижена на 29 р. $-$ 26 р. $= 3$ р.

2. Эта величина составляет $\frac{3}{29} \cdot 100\%$ от старой цены.

3. Число $\frac{3}{29} \cdot 100\% = 10\frac{10}{29}$ заменяем приближенно десятичной дробью.

4. *Ответ:* $\approx$ на $10{,}34\%$.

3. Оптовая база оплачивает фермеру 90% предлагаемой им цены, а продает полученный от фермера товар по этой цене. Сколько процентов составляет наценка оптовой базы?

1. Пусть x (р.) — цена товара, предлагаемая фермером.

2. Тогда база должна заплатить фермеру $0{,}9x$ (р.).

3. Так как база продает товар по цене x (р.), то наценка базы составляет

$$\frac{x - 0{,}9x}{0{,}9x} 100\% = \frac{100}{9}\% \approx 11{,}11\%.$$

4. *Ответ:* $\approx 11{,}11\%$.

4. Бригада строителей за первую неделю перевыполнила план на 6%, а за вторую — еще на 4%. На сколько процентов бригада перевыполнила двухнедельный план?

1. Обозначим еженедельный план бригады через A (A — объем работы).

2. За первую неделю бригада выполнила работу в объеме $1{,}06A$.

3. За вторую неделю бригада выполнила работу в объеме $1{,}04 \times \times 1{,}06A = 1{,}1024A$.

4. Двухнедельный объем работы бригады должен быть равен $2A$.

5. Фактически за две недели бригада выполнила работу в объеме $1{,}06A + 1{,}1024A = 2{,}1624A$.

6. Находим $\frac{2{,}1624A}{2A} = 1{,}0812 = 108{,}12\%$.

7. *Ответ:* на $8{,}12\%$.

5. Длина прямоугольника в 4 раза больше его ширины. Как и на сколько процентов изменится площадь прямоугольника, если его длину уменьшить на 25%, а ширину увеличить на 40%?

1. Обозначим длину прямоугольника через a, а ширину — через b. Тогда по условию $a = 4b$.

2. Площадь прямоугольника со сторонами a и b составляет $S = ab$.

3. Так как $a = 4b$, то площадь данного прямоугольника равна

$$S_1 = 4b^2.$$

4. Длина нового прямоугольника равна $0{,}75a$, ширина равна $1{,}4b$, а его площадь (с учетом того, что $a = 4b$) есть

$$S_2 = 0{,}75a \cdot 1{,}4b = 0{,}75 \cdot 4b \cdot 1{,}4b = 4{,}2b^2.$$

5. Остается найти процентное отношение S_2 и S_1:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{4{,}2b^2}{4b^2} = 1{,}05 = 105\%.$$

Таким образом, площадь нового прямоугольника на 5% больше площади первоначального, что и запишем в виде $+5\%$.

6. *Ответ:* $+5\%$.

6. На заводе производительность труда в текущем году повысилась на 20% по сравнению с прошедшим годом. На сколько процентов меньше была производительность труда в прошедшем году, чем в текущем?

1. Пусть A и B — производительность труда на заводе соответственно в прошедшем и текущем году. Согласно условию,

$$\frac{B - A}{A}\,100\% = 20\%. \tag{1}$$

2. Нам требуется найти величину

$$x = \frac{B - A}{B}\,100\%. \tag{2}$$

3. Из уравнения (1) следует, что $B = 1{,}2A$.

4. Подставив это выражение в равенство (2), получим

$$x = \frac{1{,}2A - A}{1{,}2A} \cdot 100\% \approx 16{,}6\%.$$

5. *Ответ:* $\approx$ на 16,6%.

4. ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ, ПРОПОРЦИИ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ

Задачи с решениями

1. Два фермера продали товар на 60 000 р., причем в то время как первый продавал 2 ед. товара, второй продавал 3 ед. товара. На какую сумму продал товар каждый фермер?

1. Заметим сначала, что стоимость товара пропорциональна количеству проданных единиц.

2. Предположим, что первый фермер продал товар на x р., а второй — на y р.

3. Тогда, согласно условию, $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, откуда $y = \frac{3}{2}x$.

4. Вместе фермеры продали товар на 60 000 р., значит, $x + y = 60\,000$.

5. Составим систему

$$\begin{cases} y = \frac{3}{2}x, \\ x + y = 60\,000, \end{cases}$$

откуда находим $x = 24\,000$; $y = 36\,000$.

6. *Ответ:* 24 000 р.; 36 000 р.

2. Числители дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели соответственно пропорциональны числам 1, 3, 7. Среднее арифметическое дробей равно $\frac{200}{441}$. Найти эти дроби.

1. Пусть x, $2x$, $5x$ — числители дробей, а y, $3y$, $7y$ — соответствующие знаменатели.

2. Тогда искомые дроби имеют вид $\frac{x}{y}, \frac{2x}{3y}, \frac{5x}{7y}$.

3. Согласно условию, имеем

$$\frac{1}{3}\left(\frac{x}{y} + \frac{2x}{3y} + \frac{5x}{7y}\right) = \frac{200}{441}, \quad \text{или} \quad \frac{50x}{21y} = \frac{200}{147},$$

откуда $\frac{x}{y} = \frac{4}{7}$.

4. Итак, $\frac{x}{y} = \frac{4}{7}$ — первая дробь, $\frac{2x}{3y} = \frac{8}{21}$ — вторая дробь, $\frac{5x}{7y} =$ $= \frac{20}{49}$ — третья дробь.

5. *Ответ:* $\frac{4}{7}; \frac{8}{21}; \frac{20}{49}$.

3. За первый квартал автозавод выполнил 25% годового плана выпуска машин. Количество машин, выпущенных за второй, третий и четвертый кварталы, оказалось пропорциональным числам 15, 16 и 18. Определить перевыполнение годового плана выпуска в процентах, если во втором квартале автозавод выпустил продукции на 8% больше, чем в первом.

1. Пусть x, y, u, v — количество машин, выпущенных соответственно за первый, второй, третий и четвертый квартал.

2. Найдем связь между этими величинами, приняв за A годовой план выпуска машин. Используя условия задачи, имеем

$$x = 0{,}25A, \quad y : u : v = 15 : 16 : 18, \quad y = 1{,}08x = 0{,}27A.$$

3. Составим пропорции:

а) $\frac{y}{u} = \frac{15}{16}$; $u = \frac{16}{15}y = \frac{16}{15} \cdot 0{,}27A = 0{,}288A$;

б) $\frac{y}{v} = \frac{15}{18}$; $v = \frac{18}{15}y = \frac{6}{5}y = \frac{6}{5} \cdot 0{,}27A = 0{,}324A$.

4. Найдем количество машин, выпущенных за четыре квартала:

$$x + y + u + v = 0{,}25A + 0{,}27A + 0{,}288A + 0{,}324A = 1{,}132A.$$

Это значит, что годовой план перевыполнен на 13,2%.

5. *Ответ:* 13,2%.

4. Однотипные детали обрабатывают на двух станках. Производительность первого станка на 40% больше производительности второго. Сколько деталей обработано за смену каждым станком, если первый работал 6 ч, а второй — 8 ч, причем оба станка вместе обработали 1640 деталей?

1. Пусть x — число деталей, обрабатываемых вторым станком в течение часа.

2. Из условий задачи следует:

а) первый станок обрабатывает за час $1{,}4x$ деталей;

б) второй станок обрабатывает за смену $8x$ деталей;

в) первый станок обрабатывает за смену $6 \cdot 1{,}4x = 8{,}4x$ деталей;

г) вместе за смену станки обрабатывают $8x + 8{,}4x = 16{,}4x$ деталей;

д) полученная величина равна 1640; значит, $16{,}4x = 1640$, откуда $x = 100$.

3. Итак, второй станок обрабатывает за смену $8x = 800$ деталей, а первый станок $8{,}4 \cdot 100 = 840$ деталей.

4. *Ответ:* 840 деталей; 800 деталей.

5. Вкладчик взял из банка $\frac{1}{4}$ своего вклада, затем $\frac{4}{9}$ остатка и еще 6400 р. После этого у него осталось 15% вклада. Какова была первоначальная величина вклада?

1. Обозначим величину вклада через x (р.).

2. После того как вкладчик взял $\frac{1}{4}$ своего вклада, т.е. $\frac{1}{4}x$, в банке осталось $\frac{3}{4}x$ (р.).

3. После того как он взял еще $\frac{4}{9}$ оставшихся денег, т.е. $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1}{3}x$ (р.), у него осталось $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}x = \frac{5}{12}x$ (р.).

4. Наконец, после того как он взял еще 6400 р. остаток вклада составил $\frac{5}{12}x - 6400$, и эта величина по условию равна $0{,}15x$.

5. Получаем уравнение

$$\frac{5}{12}x - 6400 = 0{,}15x,$$

откуда находим $x = 24\,000$.

6. *Ответ:* $x = 24\,000$ р.

6. Первое из неизвестных чисел составляет 140% второго, а отношение первого к третьему равно $\frac{14}{11}$. Найти эти числа, если разность между третьим и вторым на 40 меньше числа, составляющего 12,5% суммы первого и второго чисел.

1. Обозначим второе число через x.

2. Тогда первое число равно $1{,}4x$, а третье число равно $\frac{11}{14} \cdot 1{,}4x = 1{,}1x$.

3. Из условия задачи следует уравнение

$$1{,}1x - x = 0{,}125(1{,}4x + x) - 40.$$

4. Решив это уравнение, получим $x = 200$; тогда $1{,}4x = 280$, $1{,}1x = 220$.

5. *Ответ:* 280; 200; 220.

7. Зарплаты рабочего за октябрь и ноябрь относятся как $1{,}5 : \frac{4}{3}$, а за ноябрь и декабрь — как $2 : \frac{8}{3}$. За декабрь он получил на 1500 р. больше, чем за октябрь, и за три месяца рабочему начислили премию в размере 20% от трехмесячного заработка. Найти размер премии.

1. Обозначим зарплаты рабочего за октябрь, ноябрь и декабрь соответственно через x, y и z.

2. Согласно условию задачи, имеем:

$$\frac{x}{y} = \frac{1{,}5}{\frac{4}{3}}; \tag{1}$$

$$\frac{y}{z} = \frac{2}{\frac{8}{3}}; \tag{2}$$

$$z = x + 1500. \tag{3}$$

3. Из пропорции (1) следует, что $y = \frac{8}{9}x$, а из пропорции (2) — что $z = \frac{4}{3}y = \frac{32}{27}x$. Тогда равенство (3) дает уравнение $\frac{32}{27}x = x + 1500$, откуда $x = 8100$ (р.).

4. Далее последовательно находим $y = 7200$ (р.), $z = 9600$ (р.).

5. Значит, трехмесячный заработок составит $x+y+z = 24\,900$ (р.), а премия $20\%(24\,900) = 4980$ (р.).

6. *Ответ:* 4980 р.

5. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи с решениями

1. На предприятии 35% рабочих — женщины, остальные мужчины, которых на 252 больше, чем женщин. Найти общее количество рабочих на предприятии.

1. Пусть x — количество рабочих на предприятии.

2. Количество женщин равно $35\%(x) = 0{,}35x$.

3. Остальные рабочие, а это $x - 0{,}35x = 0{,}65x$, — мужчины.

4. Это число на 252 больше, чем предыдущее, т.е. $0{,}65x = 0{,}35x + 252$.

5. Из полученного уравнения находим $x = 840$.

6. *Ответ:* 840 рабочих.

2. Вклад, помещенный в банк на два года, достиг 20 808 р. Каков был первоначальный вклад при 2% годовых?

1. Пусть x (р.) — величина первоначального вклада.

2. Тогда в конце первого года вклад станет равным $102\%(x) = 1{,}02x$.

3. В конце второго года вклад составит $102\%(1{,}02x) = 1{,}02^2x$.

4. Так как последняя величина равна 20 808, то $1{,}02^2x = 20\,808$, откуда $x = 20\,000$.

5. *Ответ:* 20 000 р.

3. Сплав из меди и цинка массой в 24 кг при погружении в воду потерял $2\frac{8}{9}$ кг своей массы. Определить количество меди и цинка в этом сплаве, если известно, что медь теряет в воде $11\frac{1}{9}\%$ своей массы, а цинк — $14\frac{2}{7}\%$ своей массы.

1. Пусть x (кг) — масса меди в сплаве; тогда $24 - x$ (кг) — масса цинка.

2. Потеря массы составляет $\frac{1}{9}x$ (для меди) и $\frac{1}{7}(24 - x)$ для цинка.

3. Получаем уравнение

$$\frac{1}{9}x + \frac{1}{7}(24 - x) = \frac{26}{9},$$

откуда $x = 17$.

4. *Ответ:* 17 кг меди; 7 кг цинка.

4. От рельса отрезали часть, составляющую 72% его длины. Масса оставшегося куска равна 45,2 кг. Найти массу отрезанной части.

1. Масса отрезанной части составляет 72% массы всего рельса.

2. Значит, масса оставшегося куска, равная 45,2 кг, составляет $100\% - 72\% = 28\%$ массы всего рельса.

3. Поэтому 1% массы всего рельса составляет $\frac{45{,}2}{28}$ кг, а 72% составляют $\frac{45{,}2}{28} \cdot 72 = 116\frac{8}{35} \approx 116{,}23$ кг.

4. *Ответ:* $\approx 116{,}2$ кг.

З а м е ч а н и е. Вместо того, чтобы определять 1% массы всего рельса, можно составить пропорцию $x : 45{,}2 = 72 : 28$.

5. Пчелы перерабатывают цветочный нектар в мед, освобождая его от значительной части воды. Исследования показали, что нектар обычно содержит около 70% воды, а полученный из него мед — только 17% воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 3 кг меда?

1. Пусть x кг — количество нектара, которое перерабатывают пчелы. Тогда в x кг нектара содержится $70\%(x) = 0{,}7x$ кг воды и $30\%(x) = 0{,}3x$ кг сахарозы (чистого вещества).

2. В 3 кг меда имеется 17% воды и 83% сахарозы, т.е. $83\%(3) = 0{,}83 \cdot 3$ кг сахарозы.

3. Следовательно, $0{,}3x = 0{,}83 \cdot 3$, откуда $x = 8{,}3$.

4. *Ответ:* 8,3 кг.

6. Определить, какая доля воды содержится в сухих лекарственных травах, если известно, что из 160 кг свежих трав получается 22 кг сухих, а свежие травы содержат 88% воды.

1. В 160 кг свежих трав содержится 88% воды и 12% (160 кг) $=$ $= 19{,}2$ кг сухой массы.

2. В сухих травах содержится та же сухая масса. Остальная часть 22 кг $-$ 19,2 кг $=$ 2,8 кг приходится на воду; она составляет долю, равную $\frac{2{,}8}{22} \approx 0{,}127$.

3. *Ответ:* $\approx 0{,}127$.

7. Двое рабочих вместе за одну смену изготовили 144 детали. После того как первый рабочий повысил производительность труда на 15%, а второй — на 25%, вместе за смену они стали изготавливать 172 детали. Сколько деталей изготавливали рабочие за смену до и после повышения производительности?

1. Пусть x — первоначальное количество деталей, изготовленных за смену первым рабочим; тогда второй рабочий изготавливал за смену $144 - x$ деталей.

2. После повышения производительности первый рабочий изготовил $1{,}15x$ деталей, а второй $1{,}25(144 - x)$ деталей.

3. Согласно условию, составим уравнение

$$1{,}15x + 1{,}25(144 - x) = 172,$$

откуда $x = 80$, $144 - x = 64$. Следовательно, до повышения производительности труда первый рабочий изготавливал 80 деталей, а второй — 64 детали.

4. После повышения производительности первый рабочий стал изготавливать $115\%(80) = 92$ детали, а второй — $125\%(64) = 80$ деталей.

5. *Ответ:* 80 и 64 детали; 92 и 80 деталей.

8. В двух бидонах содержится 90 л молока. Если из первого бидона перелить 10% количества молока во второй, то в них получится одинаковое количество молока. Сколько литров молока было в каждом бидоне?

1. Предположим, что в первом бидоне было x л молока. Тогда во втором бидоне было $(90 - x)$ л.

2. Из первого бидона отлили 10% количества молока, что составляет $10\%(x) = 0{,}1x$ (л); поэтому в первом бидоне останется $x - 0{,}1x = 0{,}9x$ (л), а во втором станет $(90 - x) + 0{,}1x = 90 - 0{,}9x$ (л).

3. Так как после этого в обоих бидонах содержится равное количество молока, то приходим к уравнению

$$0{,}9x = 90 - 0{,}9x,$$

т.е. $x = 50$, а $90 - x = 40$.

4. *Ответ:* 50 л; 40 л.

9. В магазин привезли сахар и сахарный песок в 126 мешках, всего 9,6 т. При этом мешков с сахарным песком было на 25% больше, чем с сахаром. Масса каждого мешка с сахаром составляет 75% массы мешка с сахарным песком. Сколько привезли сахара и сколько сахарного песка?

1. Пусть x — количество мешков с сахаром. Тогда количество мешков с сахарным песком равно $1{,}25x$. Так как общее количество мешков равно 126, то $x + 1{,}25x = 126$, откуда $x = 56$.

2. Значит, в магазин привезли 56 мешков с сахаром и $1{,}25 \cdot 56 = 70$ мешков с сахарным песком.

3. Пусть y кг — масса мешка с сахарным песком. Тогда масса мешка с сахаром равна $0{,}75y$ кг.

4. В 70 мешках содержится $70y$ кг сахарного песка, а в 56 мешках содержится $56 \cdot 0{,}75y$ кг $= 42y$ кг сахара.

5. Во всех мешках было 9,6 т $= 9600$ кг, и следовательно, приходим к уравнению относительно y:

$$70y + 42y = 9600.$$

Отсюда $y = \frac{600}{7}$ кг, т.е. масса мешка с сахарным песком равна $\frac{600}{7}$ кг, а масса мешка с сахаром равна $0{,}75 \cdot \frac{600}{7} = \frac{450}{7}$ кг.

6. Масса 70 мешков с сахарным песком составляет $70 \cdot \frac{600}{7} = 6000$ кг, а масса 56 мешков с сахаром $56 \cdot \frac{450}{7} = 3600$ кг.

7. *Ответ:* 3,6 т; 6 т.

10. Бригада должна изготовить некоторое количество деталей. За первый день бригада выполнила 25% всей работы, за второй — $\frac{4}{9}$ оставшейся части работы, а за третий день она изготовила 64 детали. После этого бригаде осталось выполнить еще $\frac{3}{20}$ работы. Сколько деталей должна была изготовить бригада?

1. Обозначим искомое число деталей через x.

2. За первый день изготовлено $25\%(x) = \frac{1}{4}x$ деталей, а значит, осталось выпустить $\frac{3}{4}x$ деталей.

3. За второй день изготовлено $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4}x = \frac{1}{3}x$ деталей.

4. За первые три дня изготовлено $\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + 64$ деталей.

5. Если к числу выпущенных деталей прибавить $\frac{3}{20}x$, то план будет выполнен полностью, т.е.

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{3}x + 64 + \frac{3}{20}x = x.$$

Отсюда находим $x = 240$.

6. *Ответ:* 240 деталей.

11. Баржа с грузом в 600 т была разгружена в три дня, причем в первый и третий дни было выгружено $\frac{2}{3}$ всего груза. Во второй день было выгружено меньше, чем в первый, а в третий меньше, чем во второй; при этом разность между числом процентов уменьшения выгрузки в третий день по отношению к выгрузке второго дня и числом процентов уменьшения выгрузки во второй день по отношению к выгрузке первого дня была равна 5.

Определить, сколько было выгружено в каждый день и число процентов уменьшения выгрузки во второй и третий дни.

1. В первый и третий дни было выгружено $600 \cdot \frac{2}{3} = 400$ т.

2. Во второй день выгружено 600 т $- 400$ т $= 200$ т.

3. Пусть в первый день было выгружено x т; тогда в третий день было выгружено $(400 - x)$ т.

4. Уменьшение выгрузки во второй день по сравнению с первым днем равно $(x - 200)$ т, что составляет $\frac{(x-200)}{x} \cdot 100\%$ от выгрузки первого дня.

5. Уменьшение выгрузки в третий день по сравнению со вторым днем равно $200-(400-x) = (x-200)$ т, что составляет $\frac{(x-200)}{200} \cdot 100\%$ или $\frac{x-200}{2}\%$ от выгрузки второго дня.

6. По условию

$$\frac{x-200}{2} - \frac{(x-200)\cdot 100}{x} = 5.$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1 = 250$; $x_2 = 160$. Второй корень не годится, так как по условию выгрузка с каждым днем уменьшалась, в то время как при $x = 160$ выгрузка составляла бы: в первый день 160 т; во второй 200 т; в третий 240 т.

7. *Ответ:* в первый 250 т, во второй 200 т, в третий 150 т; во второй день по сравнению с первым было выгружено меньше на 20%, в третий по сравнению со вторым — на 25%.

12. Предприятие запланировало за два года увеличить объем продукции в 2,89 раза. Каким (в процентах) должен быть годовой прирост продукции, если он одинаков для каждого года?

1. Пусть прирост продукции за год равен $x\%$, а первоначальный годовой объем производства равен A.

2. Тогда через год объем производства должен составить

$$(100\% + x\%)(A) = (1 + 0{,}01x)A,$$

а через два года

$$(100\% + x\%)(1 + 0{,}01x)A = (1 + 0{,}01x)^2 A.$$

3. Этот объем равен $2{,}89A$, а потому $(1 + 0{,}01x)^2 = 2{,}89$. Отсюда $1 + 0{,}01x = 1{,}7$.

4. *Ответ:* 70%.

13. Число 51,2 трижды увеличивали на одно и то же количество процентов, а затем трижды уменьшали на то же самое количество процентов. В результате получили 21,6. На сколько процентов увеличивали, а затем уменьшали данное число?

1. Пусть данное число увеличивали, а затем уменьшали на $x\%$. Тогда, используя формулу сложных процентов, имеем

$$51{,}2\left(1+\frac{x}{100}\right)^3\left(1-\frac{x}{100}\right)^3=21{,}6,$$

или

$$512\left(1-\left(\frac{x}{100}\right)^2\right)^3=216.$$

2. Извлекая кубический корень из обеих частей равенства, получим

$$8\left(1-\left(\frac{x}{100}\right)^2\right)=6;\quad \left(\frac{x}{100}\right)^2=\frac{1}{4};\quad \frac{x}{100}=\frac{1}{2}.$$

Значит, $x=50$.

3. *Ответ:* на 50%.

14. Три бригады рабочих получили вместе 40 800 р. Заработки, полученные первой и второй бригадами, относятся как $7\frac{1}{2} : 1\frac{3}{4}$; заработок, полученный третьей бригадой, составляет $43\frac{1}{3}\%$ того, что получила первая. Сколько получила каждая бригада?

1. Заработок первой бригады примем за 100%.

2. Тогда заработок второй бригады составит $1\frac{3}{4} : 7\frac{1}{2}=\frac{7}{30}$ заработка первой, или $\frac{7}{30}\cdot 100\%=23\frac{1}{3}\%$.

3. Общий заработок трех бригад, равный 40 800 р., составляет $100\%+23\frac{1}{3}\%+43\frac{1}{3}\%=166\frac{2}{3}\%$ заработка первой.

4. Так как 1% заработка первой бригады составляет $\frac{40\,800}{166\frac{2}{3}}$ р., то первая бригада получила $\frac{40\,800}{166\frac{2}{3}}\cdot 100=24\,480$ р.

5. Вторая бригада получила $23\frac{1}{3}\%$ этой суммы, т.е. $\frac{24\,480}{100}\cdot 23\frac{1}{3}=$ $=5712$ р.

6. Третья бригада получила $\frac{24\,480}{100}\cdot 43\frac{1}{3}=10\,608$ р.

7. *Ответ:* 24 480 р.; 5712 р.; 10 608 р.

15. Вкладчик на свои сбережения через год получил 150 р. процентных денег. Добавив 850 р., он оставил деньги еще на один год. По истечении года вклад вместе с процентами составил 4200 р. Какая сумма была положена первоначально и какие годовые проценты дает банк?

1. Пусть банк дает $x\%$ годовых.

2. Тогда первоначально было положено $\frac{15\,000}{x}$ р.

3. В начале второго года на счете вкладчика было $\frac{15\,000}{x} + 150 +$ $+850$, т.е. $\left(\frac{15\,000}{x} + 1000\right)$ р.

4. По истечении второго года вклад составил

$$\left(\frac{15\,000}{x} + 1000\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right) \text{ р.}$$

5. Получаем уравнение

$$\left(\frac{15\,000}{x} + 1000\right)\left(1 + \frac{x}{100}\right) = 4200.$$

6. Решив его, находим $x = 5$, откуда $\frac{15\,000}{x} = 3000$.

7. *Ответ:* 3000 р.; 5%.

16. В трех сосудах налита вода. Если $\frac{1}{3}$ воды из первого сосуда перелить во второй, затем $\frac{1}{4}$ воды, оказавшейся во втором, перелить в третий и, наконец, $\frac{1}{10}$ воды, оказавшейся в третьем, перелить в первый, то в каждом сосуде окажется по 9 л. Сколько воды было в каждом сосуде?

1. Пусть x, y и z — первоначальное количество воды (в литрах) соответственно в I, II и III сосуде.

2. В следующей схеме указаны количества воды в трех сосудах в результате последовательных переливаний:

$$\begin{array}{lllc}
\text{I} & x; & \frac{2}{3}x; & \frac{1}{10}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) + z\right] + \frac{2}{3}x; \\
\text{II} & y; & \frac{1}{3}x + y; & \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right); \\
\text{III} & z; & \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) + z; & \frac{9}{10}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}x + y\right) + z\right].
\end{array}$$

3. Каждое из выражений последнего столбца по условию равно 9.

4. Решив эту систему уравнений, получим ответ.

5. *Ответ:* 12 л; 8 л; 7 л.

17. В начале года вкладчик положил $\frac{5}{6}$ своих денег в один банк, а остальные — в другой. К концу года сумма на этих вкладах выросла до 1340 р., а к концу следующего года — до 1498 р. Было подсчитано, что если бы с самого начала $\frac{5}{6}$ денег вкладчик положил во второй банк, а остальные — в первый, то по итогам первого года сумма на этих вкладах составила бы 1420 р.

Определить величину вклада по истечении двух лет, предполагая, что вкладчик положил все деньги в первый банк.

1. Обозначим через x (р.) первоначальную сумму денег вкладчика, а через p и q — доли ($p \cdot 100\%$ и $q \cdot 100\%$ — проценты по вкладам) повышения вклада за год в первом и втором банках.

2. Это означает, что если вкладчик положил в первый банк A р., то в конце года он получит $(1+p)A$ р., т.е. $(1+p)\cdot 100\%(A) = A+p\%A$ (р.). Аналогично, если вкладчик положил во второй банк B р., то в конце года он получит $B + q\%B$ (р.).

3. Первое условие задачи выражается уравнением

$$(1+p)\frac{5}{6}x + (1+q)\cdot\frac{1}{6}x = 1340.$$

4. Второе условие задачи запишется так:

$$(1+p)^2\frac{5}{6}x + (1+q)^2\frac{1}{6}x = 1498.$$

5. Третье условие задачи примет вид

$$(1+p)\frac{1}{6}x + (1+q)\frac{5}{6}x = 1420.$$

Требуется найти $(1+p)^2x$.

6. Пусть $1+p=a$, $1+q=b$, $x=6y$. Объединим полученные уравнения в систему

$$\begin{cases} 5ay + by = 1340, \\ 5a^2y + b^2y = 1498, \\ ay + 5by = 1420, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y(5a+b) = 1340, & (1) \\ y(5a^2+b^2) = 1498, & (2) \\ y(a+5b) = 1420. & (3) \end{cases}$$

7. Из равенств (1) и (3) следует пропорция $\dfrac{5a+b}{a+5b} = \dfrac{1340}{1420}$. Отсюда получаем $11b = 12a$, т.е. $b = \dfrac{12a}{11}$. Подставив это выражение в равенство (1), находим $ay = 220$, а тогда $by = 240$.

8. Перепишем теперь уравнение (2) в виде

$$5a(ay) + b(by) = 1498. \qquad (4)$$

Учитывая, что $ay = 200$, $by = 240$, перепишем уравнение (4) так:

$$5a \cdot 220 + b \cdot 240 = 1498.$$

Замена $b = \dfrac{12a}{11}$ дает: $a = 1{,}1$; $b = 1{,}2$; $y = 200$.

9. Возвращаясь к старым неизвестными p, q, x, находим $p = a - 1 = 0{,}1 = 10\%$; $q = b - 1 = 0{,}2 = 20\%$; $x = 6y = 1200$.

10. Таким образом, $(1 + p)^2 x = a^2 x = 1{,}21 \cdot 1200$.

11. *Ответ:* 1452 р.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько чистого спирта надо прибавить к 735 г 16%-го раствора йода в спирте, чтобы получить 10%-й раствор?

2. Сплав массой 2 кг состоит из серебра и меди, причем масса серебра составляет $14\frac{2}{7}\%$ массы меди. Какое количество серебра в этом сплаве?

3. Зарплата продавца составляет 3% выручки. Он реализовал товар стоимостью 6000 р. по цене на 5% выше его себестоимости. На сколько повысилась зарплата продавца?

4. Из ведра в бочку сначала перелили половину имевшейся в нем воды, затем еще 1 л и, наконец, 5% остатка. В результате количество воды в бочке увеличилось на 10%. Сколько воды было в ведре, если в бочке первоначально было 51,5 л воды?

5. Предприятие за I квартал выпустило 25% годовой продукции, за II квартал — 33% оставшейся части годового задания, за III квартал — 60% продукции, выпущенной за первые два квартала вместе. Каков годовой план, если для его выполнения предприятию за IV квартал необходимо выпустить 816 ед. продукции?

6. В двух мешках находится 140 кг муки. Если из первого мешка переложить во второй 12,5% муки, находящейся в первом мешке, то в обоих мешках муки будет поровну. Сколько килограммов муки в каждом мешке?

7. При продаже товара за 1386 р. фермер получил 10% прибыли. Какова себестоимость товара?

8. В результате двукратного повышения (на 10% каждый раз) цена товара стала равной 2662 р. Найти первоначальную цену товара.

9. В трех ящиках содержится 64,2 кг сахара. Во втором ящике находится 0,8 того, что есть в первом ящике, а в третьем — 42,5% того, что есть во втором. Сколько килограммов сахара в каждом ящике?

10. Цена книги снижалась дважды на одно и то же число процентов. В результате окончательная цена составила 64% от первоначальной. На сколько процентов снижалась цена?

11. При выполнении контрольной работы 12% учеников класса вовсе не решили задачи, 32% решили с ошибками, остальные 14 человек решили верно. Сколько учеников было в классе?

12. За 3 кг одного продукта и 5 кг другого заплатили 176 р. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 20%, а второй подешевеет также на 20%, то за такое же количество этих продуктов нужно будет заплатить 161 р. 20 к. Определить цену 1 кг каждого продукта.

13. Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие — 12%. Из какого количества свежих грибов можно получить 450 кг сухих?

14. Жирность молока составляет 5%, а сметаны — 25%. Сколько килограммов сметаны можно получить из 800 кг молока?

15. Вкладчику на его сбережения банк начислил 1600 р. процентных денег. Добавив 400 р., вкладчик оставил деньги еще на год. По истечении года снова были начислены проценты, и тогда вклад вместе с процентами составил 23 760 р. Какая сумма была положена в банк первоначально и сколько процентов начисляет банк?

16. Одна сторона прямоугольника в 2,5 раза меньше другой. Как и на сколько процентов изменятся его периметр и площадь, если бóльшую сторону уменьшить на 25%, а меньшую увеличить на 80%?

17. Рабочий день уменьшился с 8 до 7 ч. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках зарплата выросла на 5%?

18. В магазин завезли товар на 30 000 р. После подорожания на 20% было продано $\frac{1}{4}$ товара. На остальную часть цену повысили еще на 20%. Найти выручку магазина после полной продажи всего товара.

19. Некоторый вклад находился в банке под 2% годовых (проценты простые, т.е. они начисляются ежегодно только на первоначальную сумму). Через некоторое время этот вклад был взят вместе с полученными на него процентными деньгами, что составило 8502 р. Если бы этот же вклад был положен под 3% годовых, но сроком на один год меньше, то процентные деньги с него составили бы 819 р. Каков был вклад, помещенный в банк, и какое время он там находился?

20. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенное число процентов (свое для каждого банка). В начале года $\frac{5}{6}$ некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 ден. ед., а к концу следующего года — 749 ден. ед. Было подсчитано, что если бы первоначально $\frac{5}{6}$ исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки составила бы 710 ден. ед.

В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком было положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

Ответы

1. 441 г. **2.** 250 г. **3.** На 9 р. **4.** 8 л. **5.** 4000 ед. **6.** 80 кг; 60 кг. **7.** 1260 р. **8.** 2220 р. **9.** 30 кг; 24 кг; 10,2 кг. **10.** На 20%. **11.** 25 учеников. **12.** 17 р; 25 р. **13.** Из 3960 кг. **14.** 160 кг. **15.** 20 000 р.; 8%. **16.** +5%; +35%. **17.** На 20%. **18.** 41 400 р. **19.** 7800 р.; 4,5 года. **20.** 726 ден. ед.

Глава 2

ЗАДАЧИ НА РАСТВОРЫ, СМЕСИ, СПЛАВЫ

1°. Предположим, что m г некоторого вещества растворяется в M г воды. Тогда:

а) $\dfrac{m}{M+m}$ — доля вещества в растворе;

б) $\dfrac{M}{M+m}$ — доля воды в растворе;

в) при этом $\dfrac{m}{M+m} + \dfrac{M}{M+m} = 1$;

г) $\dfrac{m}{M+m} \cdot 100\%$ — концентрация раствора, или процентное содержание вещества в нем;

д) $\dfrac{M}{M+m} \cdot 100\%$ — «водность» раствора, или процентное содержание воды в нем;

е) при этом $\dfrac{m}{M+m} \cdot 100\% + \dfrac{M}{M+m} \cdot 100\% = 100\%$.

З а м е ч а н и е 1. Вместо воды можно брать любую жидкость, в которой растворяется то или иное вещество.

З а м е ч а н и е 2. С математической точки зрения растворы, смеси, сплавы не отличаются друг от друга. Поэтому доля или процентное содержание вещества в растворе, смеси, сплаве определяются по одному правилу.

2°. Если некоторое вещество входит в раствор (смесь, сплав) с процентным содержанием $p\%$, то в A кг раствора (смеси, сплава) содержится $p\%(A) = 0{,}01pA$ кг этого вещества.

3°. Основные допущения при решении задач на растворы, смеси, сплавы:

а) все смеси однородны;

б) при слиянии двух растворов получается смесь, масса которой равна сумме масс соответствующих растворов.

4°. Концентрация элемента в смеси есть доля массы этого элемента от массы смеси, умноженная на 100%, т.е. результат, полученный из обычной пропорции.

5°. Аналогично определяются объемные концентрации.

1. ЗАДАЧИ НА СМЕШИВАНИЕ

Задачи с решениями

1. Смешали 22 кг 15%-го раствора кислоты и 18 кг 25%-го раствора той же кислоты. Определить концентрацию нового раствора.

1. В 22 кг 15%-го раствора содержится 15%(22 кг) = 3,3 кг чистой кислоты.

2. В 18 кг 25%-го раствора содержится 25%(18 кг) = 4,5 кг кислоты.

3. Новый раствор содержит 3,3 кг + 4,5 кг = 7,8 кг кислоты.

4. Масса нового раствора равна 22 кг + 18 кг = 40 кг.

5. Концентрация нового раствора составляет $\frac{7{,}8}{40} \cdot 100\% = 19{,}5\%$.

6. *Ответ:* 19,5%.

2. Смешали 30%-й раствор кислоты с 10%-м раствором той же кислоты и получили 300 г 15%-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

1. Предположим, что взяли x г первого раствора и $(300 - x)$ г второго раствора.

2. В x г 30%-го раствора содержится $0{,}3x$ г кислоты, а в $(300-x)$ г 10%-го раствора содержится $0{,}1(300 - x)$ г кислоты.

3. Новый раствор массой 300 г содержит $(0{,}3x + 0{,}1(300 - x))$ г $=$ $= (30 + 0{,}2x)$ г кислоты.

4. Так как концентрация нового раствора равна 15%, то получаем уравнение

$$\frac{30 + 0{,}2x}{300} = 0{,}15.$$

Отсюда $x = 75$, тогда $300 - x = 225$.

Ответ: 75 г; 225 г.

3. В двух сплавах меди и цинка отношение меди к цинку равно 4 : 3 и 2 : 3 соответственно. После совместной переплавки 140 кг первого сплава, 150 кг второго и некоторой массы чистой меди получили сплав, в котором меди на 20 кг больше, чем цинка. Найти массу нового сплава.

1. В 140 кг первого сплава масса меди составляет $140 \cdot \frac{4}{4+3} = 80$ кг, а масса цинка равна 60 кг.

2. В 150 кг второго сплава масса меди составляет $150 \cdot \frac{2}{2+3} = 60$ кг, а масса цинка равна 90 кг.

3. Обозначим через x массу чистой меди, добавленную в новый сплав. Тогда в новом сплаве масса меди составит $80+60+x = 140+x$, а масса цинка равна $60 + 90 = 150$ кг.

4. По условию $140 + x - 150 = 20$, откуда $x = 30$ (кг).

5. Тогда масса нового сплава равна $140 + 150 + 30 = 320$ (кг).

6. *Ответ:* 320 кг.

4. Один бак содержит смесь кислоты с водой в отношении $4 : 7$, а другой — в отношении $3 : 8$. Сколько килограммов смеси нужно взять из каждого бака, чтобы получить смесь в количестве 110 кг и чтобы кислота и вода в ней были бы в отношении $71 : 149$?

1. В первом баке содержится 11 частей смеси, 4 из которых составляет кислота, т.е. доля кислоты равна $\frac{4}{11}$.

2. Во втором баке доля кислоты равна $\frac{3}{11}$.

3. Предположим, что из первого бака взяли x кг смеси, а из второго $(110-x)$ кг. Тогда в этих количествах смеси находится $\left(\frac{4}{11}x+\frac{3}{11}(110-x)\right)$ кг $= \left(\frac{1}{11}x + 30\right)$ кг кислоты.

4. С одной стороны, доля кислоты в новой смеси равна $\frac{\frac{1}{11}x + 30}{110}$, а с другой — эта доля должна составлять $\frac{71}{220}$. Получим уравнение

$$\frac{\frac{1}{11}x + 30}{110} = \frac{71}{220}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{11}x + 30 = \frac{71}{2}.$$

Отсюда $x = 60{,}5$ и $110 - x = 49{,}5$.

5. *Ответ:* 60,5 кг; 49,5 кг.

5. Имеются два сплава меди с другим металлом, причем относительное содержание меди в одном из этих сплавов на 40% меньше, чем во втором. После того как сплавили кусок первого сплава, содержащий 6 кг меди, с куском второго сплава, содержащим 12 кг меди, получили слиток, содержащий 36% меди. Определить процентное содержание меди в первом сплаве.

1. Пусть $x\%$ — процентное содержание меди в первом сплаве; тогда $(x+40)\%$ — процентное содержание меди во втором сплаве.

2. Найдем массу полученного слитка: $\dfrac{6+12}{0{,}36} = 50$ (кг).

3. Она складывается из массы куска первого сплава, равной $\dfrac{6\cdot 100}{x}$ (кг), и массы куска второго сплава, равной $\dfrac{12\cdot 100}{x+40}$ (кг).

4. Составим уравнение

$$\frac{600}{x} + \frac{1200}{x+40} = 50,$$

откуда $x_1 = 20$, $x_2 = -24$ (не подходит по смыслу задачи).

5. *Ответ:* 20%.

6. Имеются два сплава золота с серебром. В первом количество этих металлов относится как $2:3$, во втором — как $3:7$. Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении $5:11$?

1. В x кг первого сплава содержится $\frac{2}{5}x$ кг золота и $\frac{3}{5}x$ кг серебра.

2. В $(8-x)$ кг второго сплава содержится $\frac{3}{10}(8-x)$ кг золота и $\frac{7}{10}(8-x)$ кг серебра.

3. Согласно условию, получаем уравнение

$$\frac{\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(8-x)}{\frac{3}{5}x + \frac{7}{10}(8-x)} = \frac{5}{11},$$

откуда находим $x = 1$, а $8 - x = 7$.

4. *Ответ:* 1 кг первого сплава и 7 кг второго.

7. Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в отношении $1:2$, а другой содержит те же металлы в отношении $2:3$. Из скольких частей обоих сплавов можно получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении $17:27$?

1. Пусть третий сплав содержит x частей первого и y частей второго сплава, т.е. на x кг первого сплава приходится y кг второго сплава.

2. Тогда в $(x+y)$ кг третьего сплава содержится $\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right)$ кг первого металла и $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{5}y\right)$ кг второго металла.

3. По условию

$$\frac{\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}y}{\frac{2}{3}x+\frac{3}{5}y}=\frac{17}{27},$$

откуда $\frac{x}{y}=\frac{9}{35}$.

4. *Ответ:* 9 частей первого сплава и 35 частей второго сплава.

8. Если к сплаву меди с цинком добавить 20 г меди, то ее содержание в сплаве увеличится на 10%, Если же к первоначальному сплаву добавить 100 г цинка, то содержание меди уменьшится на 20%. Найти первоначальную массу сплава.

1. Пусть x (г) — первоначальная масса меди в сплаве, а y (г) — первоначальная масса всего сплава.

2. Тогда из условия задачи следует система

$$\begin{cases} \frac{x+20}{y+20}-\frac{x}{y}=0{,}1, \\ \frac{x}{y}-\frac{x}{y+100}=0{,}2. \end{cases}$$

3. Решив эту систему, находим $y=100$.

4. *Ответ:* 100 г.

9. Имеются два слитка сплавов золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в 2,5 раза больше, чем во втором. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором содержится 40% золота.

Во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по массе частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35% золота?

1. Пусть в 1 г второго слитка содержится x г золота; тогда в 1 г первого слитка содержится $2{,}5x$ г золота.

2. Если сплавить по 1 г из каждого слитка, то получится слиток массой в 2 г, содержащий $3{,}5x$ г золота.

3. По условию $3{,}5x$ г составляют 35% от 2 г, поэтому $3{,}5x=\frac{35}{100}\cdot 2$, откуда $x=0{,}2$.

4. Итак, в 1 г второго слитка содержится 0,2 г золота, а в 1 г первого слитка содержится 0,5 г золота.

5. Пусть y (г) — масса первого слитка, а z (г) — масса второго слитка. Тогда в первом слитке имеется $0{,}5y$ г золота, в во втором — $0{,}2z$ г золота.

6. Сплавив оба слитка вместе, получим слиток массой $y + z$ г, в котором содержится $0{,}5y + 0{,}2z$ г золота.

7. По условию $0{,}5y + 0{,}2z$ г составляют 40% от $y + z$ г; значит

$$0{,}5y + 0{,}2z = \frac{40}{100}(y + z).$$

8. Из этого равенства находим, что $y = 2z$. Это означает, что первый слиток в 2 раза тяжелее второго.

9. *Ответ:* в 2 раза.

10. Имеются два слитка сплавов золота с медью. В первом слитке отношение золота к меди равно $1 : 2$, а во втором — $2 : 3$. Если сплавить $\frac{1}{3}$ первого слитка с $\frac{5}{6}$ второго, то в полученном слитке окажется столько золота, сколько было меди в первом слитке, а если сплавить $\frac{2}{3}$ первого слитка с $\frac{1}{2}$ второго, то в полученном слитке окажется меди на 1 кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота было в каждом слитке?

1. Пусть в первом слитке было x (кг) золота, тогда в нем содержалось $2x$ (кг) меди.

2. Пусть во втором слитке было y (кг) золота, тогда в нем содержалось $\frac{3}{2}y$ (кг) меди.

3. После того как сплавили $\frac{1}{3}$ первого и $\frac{5}{6}$ второго слитков, полученный слиток будет содержать $\left(\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y\right)$ (кг) золота — столько же, сколько было меди в первом слитке, т.е. $2x$ (кг).

4. Получаем первое уравнение

$$\frac{1}{3}x + \frac{5}{6}y = 2x. \qquad (1)$$

5. Аналогично составляем второе уравнение

$$\frac{4}{3}x + \frac{3}{4}y = y + 1. \qquad (2)$$

6. Решив систему уравнений (1), (2), находим $x = 1{,}2$, $y = 2{,}4$.

7. *Ответ:* 1,2 кг; 2,4 кг.

11. В первом из двух сплавов содержалось серебра на 25% больше, чем во втором. После их совместной переплавки был получен сплав, содержащий 30% серебра. Определить массы сплавов до переплавки, если известно, что в первом сплаве было 4 кг серебра, а во втором — 8 кг.

1. Пусть x (кг) — масса первого сплава, а y (кг) — масса второго.

2. Тогда $\frac{4}{x}\cdot 100\%$ — процентное содержание серебра в первом сплаве, а $\frac{8}{y}\cdot 100\%$ — процентное содержание серебра во втором сплаве.

3. Масса сплава, полученного после переплавки двух исходных сплавов, равна $x+y$ (кг).

4. Значит, $\frac{12}{x+y}\cdot 100\%$ — процентное содержание серебра в этом сплаве.

5. Получаем систему

$$\begin{cases} \frac{4}{x}\cdot 100-\frac{8}{y}\cdot 100=25, \\ \frac{12}{x+y}\cdot 100=30, \end{cases}$$

откуда находим $x=8$, $y=32$.

6. *Ответ:* масса первого сплава 8 кг, масса второго 32 кг.

12. Если из сплава олова, меди и цинка отделить кусок массой 20 г и сплавить его с 2 г олова, то в полученном сплаве масса меди будет равна массе олова. Если же отделить от первоначального сплава кусок массой 30 г и сплавить его с 9 г цинка, то в этом новом сплаве масса олова будет равна массе цинка. Определить процентный состав первоначального сплава.

1. Пусть x и y — соответственно процентное содержание олова и меди в первоначальном сплаве.

2. Тогда $100-x-y$ — процентное содержание цинка в первоначальном сплаве.

3. Масса олова в 20 г первоначального сплава равна $\frac{20}{100}x$ (г).

4. Масса меди в 20 г первоначального сплава равна $\frac{20}{100}y$ (г).

5. Масса цинка в 30 г первоначального сплава равна $\frac{30}{100}(100-x-y)$ (г).

6. Масса олова в 30 г первоначального сплава равна $\frac{30}{100}x$ (г).

7. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{20y}{100} = \dfrac{20x}{100} + 2, \\ \dfrac{30x}{100} = \dfrac{30}{100}(100 - x - y) + 9, \end{cases}$$

откуда находим $x = 40$, $y = 50$.

8. *Ответ:* 40% олова, 50% меди, 10% цинка.

13. От двух кусков сплавов с различным процентным содержанием меди, массы которых равны m кг и n кг, отрезано по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаково. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

I способ. **1.** Пусть масса каждого из отрезанных кусков равна x (кг).

2. Для краткости будем называть первый сплав (массой m кг) сплавом A, а второй (массой n кг) — сплавом B.

3. Из двух полученных слитков первый содержит $(m - x)$ кг сплава A и $(n - x)$ кг сплава B.

4. По условию процентное содержание меди в обоих слитках одинаково. Это возможно лишь в том случае, когда в этих слитках количества сплава A и сплава B пропорциональны.

5. Получим уравнение

$$\frac{m-x}{x} = \frac{x}{n-x},$$

откуда $x = \dfrac{mn}{m+n}$.

6. *Ответ:* $\dfrac{mn}{m+n}$ кг.

II способ. **1.** Пусть u (кг) — масса меди в 1 кг сплава A, v (кг) — масса меди в 1 кг сплава B.

2. Тогда в первом слитке содержится $(m - x)u + xv$ кг меди, т.е. на 1 кг первого слитка приходится $\dfrac{(m-x)u + xv}{m}$ кг меди.

3. Аналогично выразится масса меди, приходящейся на 1 кг второго сплава; она равна $\dfrac{(n-x)v + xu}{n}$.

4. Приравняв два найденных выражения, получим уравнение

$$n[(m - x)u + xv] = m[(n - x)v + xu], \qquad (1)$$

содержащее три неизвестных x, u, v.

5. Уравнение (1) можно переписать в виде

$$(u-v)(mx+nx-mn)=0. \qquad (2)$$

6. По условию сплавы A и B имеют различные процентные содержания меди, т.е. величина $u-v$ в уравнении (2) не может быть равна нулю.

7. Следовательно, $mx+nx-mn=0$, откуда $x=\dfrac{mn}{m+n}$.

14. Из сосуда, наполненного медом, отлили 2 кг, а к оставшемуся меду долили 2 кг воды. После перемешивания отлили 2 кг смеси и долили 2 кг воды. Наконец, перемешав еще раз, снова отлили 2 кг смеси и долили 2 кг воды. После этих операций воды в сосуде стало на 3 кг больше, чем меда. Определить массу меда, находившегося в сосуде с самого начала.

1. Предположим, что начальная масса меда равна p кг.

2. После первой операции получили смесь, содержащую $(p-2)$ кг меда.

3. Полная масса смеси остается прежней, т.е. p кг, а доля меда в ней равна $\dfrac{p-2}{p}$.

4. После второй операции получили новую смесь массой p кг; масса меда в ней

$$(p-2)-\frac{p-2}{p}\cdot 2=\frac{(p-2)^2}{p} \text{ кг},$$

а его доля равна $\left(\dfrac{p-2}{p}\right)^2$.

5. После третьей операции получили новую смесь прежней массой в p кг, содержащую

$$\frac{(p-2)^2}{p}-\left(\frac{p-2}{p}\right)^2\cdot 2=\frac{(p-2)^3}{p^2} \text{ кг меда}.$$

Вода в этой смеси занимает оставшуюся часть массы, т.е. $\left(p-\dfrac{(p-2)^3}{p^2}\right)$ кг, и по условию эта величина на 3 кг больше, чем масса меда.

6. Таким образом, приходим к уравнению

$$p-\frac{(p-2)^3}{p^2}=\frac{(p-2)^3}{p^2}+3 \iff 2\cdot\frac{(p-2)^3}{p^2}-p+3=0. \qquad (1)$$

7. Выполнив равносильные преобразования уравнения (1), получим

$$p^3 - 9p^2 + 24p - 16 = 0, \quad \text{или} \quad (p-1)(p-4)^2 = 0.$$

Условию задачи удовлетворяет только корень $p = 4$.

8. *Ответ:* 4 кг.

15. Из сосуда, наполненного чистым глицерином, отлили 1 л, а затем долили 1 л воды. После перемешивания отлили 1 л смеси и долили 1 л воды. Наконец, снова после перемешивания отлили 1 л смеси и долили 1 л воды. В результате этих операций количество воды в сосуде оказалось в 7 раз больше по объему, чем оставшегося в нем глицерина.

Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде после всех операций?

1. Пусть x (л) — объем сосуда.

2. Объем чистого глицерина в сосуде перед началом операций также равен x (л).

3. Проследим за изменением количества глицерина и воды после каждой операции.

4. После первой операции в сосуде оказалось:

а) $(x-1)$ л глицерина;

б) 1 л воды,

т.е. смесь с долей глицерина $\frac{x-1}{x}$ и с долей воды $\frac{1}{x}$.

5. После второй операции:

а) $x - 1 - \frac{x-1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$ л глицерина;

б) $1 - \frac{1}{x} + 1 = 2 - \frac{1}{x}$ л воды,

т.е. смесь с долей глицерина $\frac{(x-1)^2}{x^2}$ и с долей воды $\frac{2-\frac{1}{x}}{x} = \frac{2x-1}{x^2}$.

6. После третьей операции:

а) $\frac{(x-1)^2}{x} - \frac{(x-1)^2}{x^2} = \frac{(x-1)^3}{x^2}$ л глицерина;

б) $2 - \frac{1}{x} - \frac{2x-1}{x^2} + 1 = 3 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}$ л воды.

7. Условие задачи приводит к уравнению

$$3 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 7 \cdot \frac{(x-1)^3}{x^2} \iff 7x^3 - 24x^2 + 24x - 8 = 0. \qquad (1)$$

8. Преобразуем уравнение (1) так:

$$7x^3 - 14x^2 - 10x^2 + 20x + 4x - 8 = 0;$$
$$7x^2(x-2) - 10x(x-2) + 4(x-2) = 0,$$
$$(x-2)(7x^2 - 10x + 4) = 0. \tag{2}$$

9. Уравнение (2) имеет единственный корень $x = 2$.

10. Итак, объем сосуда равен 2 л. После третьей операции глицерина в сосуде осталось $\left.\dfrac{(x-1)^3}{x^2}\right|_{x=2} = \dfrac{1}{4}$ л, а воды $\dfrac{7}{4}$ л.

З а м е ч а н и е 1. Значение функции $f(x)$ при данном значении переменной $x = x_0$ обозначается так: $f(x)|_{x=x_0} = f(x_0)$.

11. *Ответ:* 0,25 л; 1,75 л.

З а м е ч а н и е 2. При решении этой задачи мы специально следили за объемом глицерина и воды в отдельности после каждой операции. Это должно тренировать и закреплять соответствующие математические модели отдельных бытовых действий.

2. ЗАДАЧИ НА РАЗБАВЛЕНИЕ И НАСЫЩЕНИЕ

Задачи с решениями

1. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды надо добавить к 300 кг морской воды, чтобы концентрация соли снизилась до 2%?

1. В 300 кг морской воды содержится $5\%(300) = 15$ кг соли.

2. Предположим, что к этим 300 кг морской воды добавили x кг пресной воды и получили новый раствор массой $(300 + x)$ кг, содержащий 15 кг соли.

3. Доля соли в новом растворе равна $\dfrac{15}{300+x}$, и эта величина должна быть равна 0,02. Получаем уравнение $\dfrac{15}{300+x} = 0{,}02$, откуда $x = 450$.

4. *Ответ:* 450 кг.

2. К раствору, содержащему 18 г соли, добавили еще 600 г воды, после чего концентрация раствора уменьшилась на 4%. Найти первоначальную концентрацию соли в растворе.

1. Пусть x (г) — масса первоначального раствора. Тогда $x+600$ (г) — масса нового раствора.

2. Доля соли в первоначальном растворе равна $\frac{18}{x}$, а в новом она равна $\frac{18}{x+600}$.

3. Так как доля соли в первоначальном растворе на 0,04 больше доли соли в новом растворе, то получаем уравнение

$$\frac{18}{x} = \frac{18}{x+600} + 0{,}04,$$

откуда находим $x = 300$ (г).

4. Значит, первоначальная концентрация соли в растворе составляла $\frac{18 \cdot 100\%}{300} = 6\%$.

5. *Ответ:* 6%.

3. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45% меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав содержал 40% меди?

1. В 12 кг сплава было 45% меди, а олова в нем было 55%, т.е. $12 \cdot \frac{55}{100}$ кг олова.

2. Пусть к первоначальному сплаву добавили x кг олова. Тогда получилось $(12 + x)$ кг нового сплава, в котором олова стало 60%, т.е. $\frac{60(12+x)}{100}$ кг.

3. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{55 \cdot 12}{100} + x = \frac{60(12+x)}{100}.$$

4. Решив это уравнение, найдем $x = 1{,}5$.

5. *Ответ:* 1,5 кг.

4. Сколько уксусной эссенции надо добавить к 100 г 5%-го раствора уксуса, для того чтобы его концентрация стала равной 10%?

1. В 100 г 5%-го раствора уксуса содержится 5 г чистой эссенции.

2. Если к этому раствору добавить x г чистой эссенции, то получим раствор с массой $(100 + x)$ г, в котором содержится $(x + 5)$ г эссенции.

3. Концентрация нового раствора равна $\frac{x+5}{100+x} \cdot 100\%$, что по условию составит 10%. Получаем уравнение $\frac{x+5}{x+100} = \frac{1}{10}$, откуда $x = \frac{50}{9}$.

4. *Ответ:* $\frac{50}{9}$ г.

5. Имеется сплав золота с серебром, содержащий 80 г золота. После того как он был сплавлен с 100 г чистого золота, содержание золота в сплаве повысилось на 20%. Сколько серебра первоначально было в сплаве?

1. Пусть x (г) — искомая масса серебра в сплаве, тогда масса сплава была равна $(x + 80)$ г, а стала равной $(x + 180)$ г.

2. Значит, процентное содержание золота в сплаве было равно $\frac{80}{x+80} \cdot 100\%$, а стало равным $\frac{180}{x+180} \cdot 100\%$.

3. Согласно условию, составим уравнение

$$\frac{180}{x+180} \cdot 100\% - \frac{80}{x+80} \cdot 100\% = 20\%,$$

откуда $x = 120$.

4. *Ответ:* 120 г.

6. Имеются два сплава золота с медью — 950-й пробы и 800-й пробы. Их сплавляют с 2 кг чистого золота и получают новый сплав 906-й пробы, масса которого равна 25 кг. Каковы массы первоначальных сплавов?

1. Пусть M — общая масса некоторого сплава, m — масса «благородного» металла, t — проба. Тогда справедлива формула

$$t = \frac{m}{M}. \qquad (1)$$

2. Предположим, что взято x кг одного сплава и y кг другого.

3. Используя формулу (1), имеем

$$0{,}950x + 0{,}800y + 2 = 25 \cdot 0{,}906. \qquad (2)$$

4. Кроме того,

$$x + y + 2 = 25. \qquad (3)$$

5. Из системы уравнений (2), (3) находим $x = 15$, $y = 8$.

6. *Ответ:* 15 кг; 8 кг.

7. К сплаву меди со свинцом, имеющему массу 5 кг, добавили 1 кг меди. В новом сплаве меди оказалось в 2 раза больше, чем свинца. Определить процентное содержание меди в первоначальном сплаве.

1. Пусть x (кг) — количество меди в первоначальном сплаве.

2. Составим следующую таблицу:

Металл	**Было**	**Стало**
Медь	x	$x+1$
Свинец	$5-x$	$5-x$

3. По условию меди стало в 2 раза больше, чем свинца, т.е. $x+1 = 2(5-x)$, откуда $x = 3$ (кг).

4. Если массу всего сплава, равную 5 кг, принять за 100%, то 3 кг меди составят 60%.

5. *Ответ:* 60%.

8. Сколько воды надо выпарить из 300 кг целлюлозной массы, содержащей 80% воды, чтобы получить массу с содержанием 40% воды?

1. В 300 кг целлюлозной массы содержится $80\%(300 \text{ кг}) = 240$ кг воды и $20\%(300 \text{ кг}) = 60$ кг чистой целлюлозы.

2. Предположим, что из данной массы следует выпарить x кг воды. Тогда в новой массе будет $(240-x)$ кг воды, а вся новая целлюлозная масса составит $(300-x)$ кг.

3. «Водность» нового раствора должна быть равна 40%, т.е.

$$\frac{240-x}{300-x} \cdot 100\% = 40\%, \quad \text{или} \quad \frac{240-x}{300-x} = \frac{2}{5}.$$

Решив это уравнение, находим $x = 200$.

4. *Ответ:* 200 кг.

9. Сплав меди с серебром содержит серебра на 1845 г больше, чем меди. Если к нему добавить некоторое количество серебра, по массе равное $\frac{1}{3}$ чистого серебра, первоначально содержавшегося в сплаве, то получится новый сплав, содержащий 83,5% серебра. Определить массу данного сплава и процентное содержание серебра в нем.

1. Пусть x г — масса серебра в данном сплаве; тогда $(x-1845)$ г — масса меди в нем, $(2x-1845)$ г — масса всего сплава.

2. К этому сплаву добавили кусок серебра массой $\frac{1}{3}x$. Значит, $\frac{4}{3}x$ г — масса серебра в новом сплаве, а $\left(\frac{4}{3}x + x - 1845\right)$ г $= \left(\frac{7}{3}x - 1845\right)$ г — общая масса нового сплава.

3. Согласно условию, получаем уравнение

$$\frac{\frac{4}{3}x}{\frac{7}{3}x - 1845} = 0{,}835,$$

откуда $x = 2505$.

4. Итак, масса данного сплава составляет $(2x - 1845)$ г $= 3165$ г, а процентное содержание серебра в нем равно $\frac{2505}{3165} \cdot 100\% \approx 79{,}1\%$.

5. *Ответ:* 3165 г; $\approx 79{,}1\%$.

10. Имеются два раствора серной кислоты в воде: первый 40%-й, второй — 60%-й. Эти два раствора смешали, добавили 5 кг чистой воды и получили 20%-й раствор. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 80%-го раствора серной кислоты, то получился бы 70%-й раствор. Найти массу каждого из исходных растворов.

1. Пусть x (кг) — масса 40%-го раствора, y (кг) — масса 60%-го раствора.

2. В x (кг) 40%-го раствора содержится $0{,}4x$ (кг) концентрированной серной кислоты, в y (кг) 60%-го раствора — $0{,}6y$ (кг) кислоты.

3. В результате первого смешивания получили 20%-й раствор, значит, он содержит $0{,}2(x + y + 5)$ (кг) концентрированной серной кислоты.

4. Приравнивания эти массы, получим уравнение

$$0{,}4x + 0{,}6y = 0{,}2(x + y + 5).$$

5. Аналогично получим второе уравнение

$$0{,}4x + 0{,}6y + 0{,}8 \cdot 5 = 0{,}7(x + y + 5).$$

6. Приходим к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными, которая после преобразований примет вид

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 3x + y = 5, \end{cases}$$

откуда $x = 1$, $y = 2$.

7. *Ответ:* 1 кг; 2 кг.

11. Из сосуда вместимостью 54 л, наполненного кислотой, вылили несколько литров и долили сосуд водой, затем снова вылили столько же литров смеси. Оставшаяся в сосуде смесь содержит 24 л чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?

1. Пусть в первый раз вылили x (л) кислоты, тогда в сосуде осталось $(54 - x)$ л кислоты.

2. Добавив в сосуд воду, получили 54 л смеси, в которой растворено $(54 - x)$ л кислоты.

3. Значит, 1 л смеси содержит $\frac{54 - x}{54}$ л кислоты (концентрация раствора).

4. Во второй раз также вылили x л смеси. В этом количестве содержится $\frac{54 - x}{54}x$ (л) кислоты.

5. С другой стороны, первоначально в сосуде было 54 л кислоты, а после выливания осталось 24 л, т.е. вылили 30 л кислоты.

6. Следовательно, получаем уравнение

$$x + \frac{54 - x}{54} \cdot x = 30.$$

Решив его, находим $x_1 = 90$, $x_2 = 18$. Значение $x = 90$ не удовлетворяет условию задачи.

7. *Ответ:* 18 л.

12. Сосуд вместимостью 20 л наполнен спиртом. Из него вылили некоторое количество спирта в другой, равный ему, и, дополнив остальную часть второго сосуда водой, затем дополнили этой смесью первый сосуд. Далее из первого сосуда отлили $6\frac{2}{3}$ л смеси во второй, после чего в обоих сосудах количество спирта стало одинаковым. Сколько спирта перелили первоначально из первого сосуда во второй?

1. Пусть x (л) — количество спирта, которое первоначально перелили из первого сосуда во второй; дополнив второй сосуд водой, будем иметь во втором сосуде $\frac{x}{20}$ л спирта на каждый литр смеси.

2. Обратно в первый сосуд перелили x л смеси; в них содержится $\frac{x}{20} \cdot x$ л спирта.

3. После обратного переливания количество спирта в первом сосуде составляет $\left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right)$ л.

4. Затем из первого сосуда во второй отлили $6\frac{2}{3}$ л смеси, что составляет $\frac{6\frac{2}{3}}{20} = \frac{1}{3}$ всего количества этой смеси.

5. Вместе с тем на $\frac{1}{3}$ уменьшится и количество спирта в первом сосуде, т.е. в нем останется $\frac{2}{3}\left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right)$ л спирта.

6. Так как суммарное количество спирта в двух сосудах неизменно равно 20 л, а по условию в обоих сосудах теперь содержится одинаковое количество спирта (т.е. по 10 л), то $\frac{2}{3}\left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right) = 10$.

7. *Ответ:* 10 л.

13. Сосуд вместимостью 8 л наполнен воздухом, содержащим 16% кислорода. Из этого сосуда выпустили некоторое количество воздуха и впустили такое же количество азота, затем снова выпустили такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять дополнили таким же количеством азота. В новой смеси оказалось 9% кислорода. Сколько литров выпускали каждый раз из сосуда?

1. Пусть в первый раз из сосуда выпустили x л воздуха и впустили такое же количество азота.

2. В оставшемся количестве $(8-x)$ л воздуха содержится $(8-x)\times$ $\times 0{,}16$ л кислорода. Это количество кислорода приходится на 8 л смеси, так что на 1 л смеси приходится $\frac{(8-x)\cdot 0{,}16}{8}$ л кислорода.

3. Следовательно, когда вторично x л смеси заменили на x л азота, оставшееся количество $(8-x)$ л смеси содержит

$$\frac{(8-x)\cdot 0{,}16}{8}\cdot(8-x) = (8-x)^2\cdot 0{,}02 \text{ л кислорода.}$$

4. Значит, по отношению к общему количеству смеси (8 л) содержание кислорода составляет

$$\frac{(8-x)^2\cdot 0{,}02}{8}\cdot 100 = \frac{(8-x)^2}{4}.$$

5. По условию $\frac{(8-x)^2}{4} = 9$.

6. Из двух корней этого уравнения ($x_1 = 2, x_2 = 14$) годится только первый, так как больше 8 л выпустить из сосуда нельзя.

7. *Ответ:* 2 л.

3. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи с решениями

1. Кусок сплава меди с оловом массой 12 кг содержит 55% меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску, чтобы новый сплав содержал 30% меди?

1. Данный сплав содержит 12 кг $\cdot$ 0,55 = 6,6 кг меди.
2. Так как в новом сплаве эти 6,6 кг меди составляют по массе 30%, то масса нового сплава равна 6,6 : 0,30 = 22 кг олова.
3. Значит, нужно добавить 22 − 12 = 10 (кг) олова.
4. *Ответ:* 10 кг.

2. Из молока 5%-й жирности изготовляют творог жирностью 26%, при этом остается сыворотка жирностью 1%. Сколько творога получается из 500 кг молока?

1. В задаче имеется в виду, что 500 кг превращается в некоторое количество творога (x кг), а остальное количество $(500 - x)$ кг — сыворотка.
2. В 500 кг молока содержится 5% жира, т.е. 5%(500) = 25 кг жира. Это количество жира должно попасть в x кг творога и в $(500 - x)$ кг сыворотки, т.е.

$$26\%(x) + 1\%(500 - x) = 25.$$

3. Это уравнение перепишем так:

$$0{,}26x + 0{,}01(500 - x) = 25, \quad \text{или} \quad 0{,}25x = 20.$$

4. *Ответ:* 80 кг.

3. Первый слиток содержит 30% меди, а второй — 74%. Если их сплавить, то получится слиток, содержащий 50% меди. На сколько процентов масса первого слитка больше массы второго?

1. Пусть первый слиток содержит x г меди, а второй — y г меди.
2. Полученный сплав будет содержать $(0{,}3x + 0{,}74y)$ г меди, а его масса составит $(x + y)$ г.
3. Согласно условию, получим уравнение

$$0{,}5(x + y) = 0{,}3x + 0{,}74y, \quad \text{или} \quad 0{,}24y = 0{,}2x,$$

откуда
$$\frac{x}{y} = \frac{0{,}24}{0{,}2} = 1{,}2.$$

4. Итак, масса первого слитка на 20% больше массы второго.

5. *Ответ:* на 20%.

4. В сосуде содержится 20 мл спирта и 120 мл воды. Из сосуда отлили половину его содержимого, после чего в оставшуюся часть долили некоторое количество воды и вдвое меньшее количество спирта. Сколько миллилитров спирта было добавлено в раствор, если процентное содержание спирта в нем стало равным 20%?

1. Пусть в раствор было добавлено x мл спирта.

2. Тогда воды добавили $2x$ мл.

3. Из условия задачи следует уравнение
$$20 - 70 \cdot \frac{1}{7} + x = 0{,}2(70 + 3x),$$
откуда находим $x = 10$.

4. *Ответ:* 10 мл.

5. Из бака вместимостью 64 л, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой. Затем из бака вылили столько же литров смеси; тогда в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько спирта вылили в первый раз и сколько во второй?

1. Задача составлена в предположении, что объем смеси равен сумме объемов спирта и воды. На самом деле он несколько меньше.

2. Пусть в первый раз вылили x л спирта, тогда осталось $(64 - x)$ л спирта.

3. Во второй раз вылили $\frac{64 - x}{64} \cdot x$ л спирта.

4. Значит, осталось
$$64 - x - \frac{64 - x}{64}x = \frac{1}{64}(64 - x)^2 \text{ л}$$
спирта.

5. Получаем уравнение
$$\frac{1}{64}(64 - x)^2 = 49,$$
откуда находим $x = 8$.

6. *Ответ:* в первый раз вылили 8 л; во второй раз 7 л.

6. Имеется сталь двух сортов с содержанием никеля в 5% и 40%. Сколько стали каждого сорта следует взять, чтобы после переплавки получилось 140 т стали с содержанием никеля в 30%?

1. Пусть x т — количество стали с 5%-м содержанием никеля, а y т — количество стали с 40%-м содержанием никеля.

2. В x т стали содержится 5% никеля, т.е. собственно никеля имеется $\frac{x \cdot 5}{100}$ т, а в y т стали собственно никеля имеется $\frac{y \cdot 40}{100}$ т.

3. Так как в полученных 140 т нового сплава содержится 30% никеля, т.е. $140 \cdot \frac{30}{100}$ т, то составляем уравнение

$$\frac{5x}{100} + \frac{40y}{100} = \frac{30 \cdot 140}{100}.$$

Кроме того,

$$x + y = 140.$$

4. Таким образом, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 5x + 40y = 140 \cdot 30, \\ x + y = 140. \end{cases}$$

5. Из этой системы находим $x = 40$, $y = 100$. По смыслу задачи $0 < x < 140$, $0 < y < 140$. Найденные значения x и y этим условиям удовлетворяют.

6. *Ответ:* 40 т стали с 5%-м содержанием никеля, 100 т стали с 40%-м содержанием никеля.

7. Из сосуда, вмещающего 54 кг кислоты, отлили некоторое ее количество и долили сосуд водой. Затем, тщательно перемешав, отлили еще такое же количество смеси и снова долили водой. Сколько кислоты отливали каждый раз из сосуда, если доля кислоты в последнем растворе равна $\frac{4}{9}$?

1. Пусть x (кг) — количество отлитой в первый раз кислоты.

2. После отливания x кг кислоты в сосуде останется $(54 - x)$ кг кислоты, а после доливания x кг воды получается раствор, в котором доля кислоты равна $\frac{54 - x}{54}$.

3. В повторно отлитом количестве x кг раствора содержится $\frac{54-x}{54}\cdot x$ кг кислоты, а значит, в сосуде останется $\left((54-x-\frac{54-x}{54}\cdot x\right)$ кг кислоты. Запишем это так:

$$(54-x)\left(1-\frac{x}{54}\right)=\frac{(54-x)(54-x)}{54}=\frac{(54-x)^2}{54}.$$

4. После доливания воды получится новый раствор с долей кислоты, равной $\frac{(54-x)^2}{54}:54=\frac{(54-x)^2}{54^2}$, и по условию эта величина равна $\frac{4}{9}$.

5. Получаем уравнение

$$\left(\frac{54-x}{54}\right)^2=\frac{4}{9},\quad \text{т.е.}\quad \frac{54-x}{54}=\frac{2}{3},\quad \text{откуда}\ x=18.$$

6. Итак, в первый раз отлили 18 кг чистой кислоты. Доля кислоты в следующем растворе равна $\frac{54-x}{54}=\frac{36}{56}=\frac{2}{3}$, а значит, в 18 кг этого раствора содержится $18\cdot\frac{2}{3}=12$ кг кислоты.

7. *Ответ:* 18 кг; 12 кг.

8. В двух сосудах имеются два раствора кислоты: 80%-й и 20%-й концентрации. Какое количество раствора нужно взять из каждого сосуда, чтобы новый раствор имел объем 220 л при 45%-й концентрации?

1. Для решения задачи составим следующую схему (рис. 1).

	I сосуд	**II сосуд**
Первоначальная концентрация	80%	20%
Отлили из сосуда для третьего раствора	x л	y л
Количество чистой кислоты	$0{,}8x$ л	0,2 л
Количество нового раствора	$(x+y)$ л	
Количество чистой кислоты в новом растворе	$(0{,}8x+0{,}2y)$ л	

Рис. 1

2. Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} 0{,}8x + 0{,}2y = 0{,}45(x + y), \\ x + y = 220, \end{cases}$$

откуда находим $x = \dfrac{275}{3}$, $y = \dfrac{385}{3}$.

3. *Ответ:* $91\frac{2}{3}$ л из первого сосуда; $128\frac{1}{3}$ л из второго сосуда.

9. Проценты содержания (по массе) спирта в трех растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в новом отношении $2 : 3 : 4$, то получится раствор, содержащий 32% спирта. Если же смешать их в отношении $3 : 2 : 1$, то получится раствор, содержащий 22% спирта. Сколько процентов спирта содержит каждый раствор?

1. Пусть в первом растворе x% спирта, y% — во втором, и z% — в третьем.

2. Это означает, что в 1 г первого раствора содержится $\dfrac{x}{100}$ г спирта, а в 1 г второго и третьего раствора соответственно $\dfrac{y}{100}$ г и $\dfrac{z}{100}$ г спирта.

3. Если взять 2 г первого раствора, 3 г второго и 4 г третьего, то получится 9 г смеси, содержащей $\left(2 \cdot \dfrac{x}{100} + 3 \cdot \dfrac{y}{100} + 4 \cdot \dfrac{z}{100}\right)$ г спирта.

4. По условию смесь содержит 32% спирта, т.е. в 9 г смеси содержится $9 \cdot \dfrac{32}{100}$ г спирта. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{2x + 3y + 4z}{100} = \frac{9 \cdot 32}{100}.$$

5. Аналогично получаем еще одно уравнение

$$\frac{3x + 2y + z}{100} = \frac{6 \cdot 22}{100}.$$

6. Так как по условию числа x, y и z образуют геометрическую прогрессию, то $y^2 = xz$.

7. Составим систему

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 9 \cdot 32, \\ 3x + 2y + z = 6 \cdot 22, \\ y^2 = xz. \end{cases}$$

откуда находим $x = 12$, $y = 24$, $z = 48$.

8. *Ответ:* 12%; 24%; 48%.

10. В двух одинаковых сосудах объемом по 30 л содержится всего 30 л спирта. Первый сосуд долили сверху водой и полученной смесью долили второй сосуд. Затем из второго сосуда отлили в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если после всех переливаний во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

1. Пусть в первом сосуде было x л спирта, тогда во втором было $(30 - x)$ л спирта, а после того как в первый сосуд долили воду, в 1 л полученной смеси будет содержаться $\frac{x}{30}$ л спирта и $\left(1 - \frac{x}{30}\right)$ л воды.

2. После переливания смеси во второй сосуд в нем оказалось $\left[(30 - x) + \frac{x}{30} \cdot x\right]$ л спирта и $\left(1 - \frac{x}{30}\right)x$ л воды.

3. Эта новая смесь такова, что в 1 л ее содержится $\left[1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right]$ л спирта.

4. После того как 12 л новой смеси отлили в первый сосуд, в нем оказалось

$$12\left[1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right] + \frac{x}{30}(30 - x) \text{ л спирта},$$

а во втором —

$$18\left[1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right] \text{ л спирта.}$$

5. Согласно условию задачи, составим уравнение

$$18\left[1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right] + 2 = 12\left[1 - \frac{x}{30} + \left(\frac{x}{30}\right)^2\right] + x - \frac{x^2}{30}.$$

6. *Ответ:* 20 л; 10 л.

11. Из полного бака, содержащего 729 кг кислоты, отлили a кг и долили бак водой. После тщательного перемешивания отлили a кг раствора и снова долили бак водой. После того как такая процедура была проделана 6 раз, раствор в баке стал содержать 64 кг кислоты. Найти величину a, а также количество чистой кислоты, которое отливали каждый раз.

1. Для наглядности проиллюстрируем изменения содержимого бака, которые происходят в результате данных операций (рис. 2)

2. При решении задачи важно правильно определить вид отдельных однотипных выражений — количество кислоты и долю кислоты в растворах.

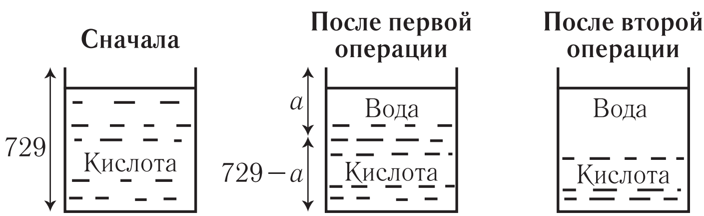


Рис. 2

3. Опишем математически первые две операции, о которых идет речь в задаче.

а) Первоначально в баке было 729 кг кислоты, т.е. раствор с долей кислоты, равной 1.

б) После того как отлили a кг кислоты, в баке осталось $(729 - a)$ кг чистой кислоты, а после доливания получили раствор с долей кислоты, равной $\dfrac{729 - a}{729}$.

в) После того как отлили a кг раствора, в котором содержалось $a \cdot \dfrac{729 - a}{729}$ кг чистой кислоты, в баке осталось

$$729 - a - \frac{729 - a}{729} \cdot a = \frac{(729 - a)^2}{729} \text{ кг кислоты.}$$

После доливания воды получили раствор с долей кислоты, равной

$$\frac{(729 - a)^2}{729^2} = \left(\frac{729 - a}{729}\right)^2.$$

Результаты первых двух операций запишем в следующую таблицу:

Содержимое сосуда	**Сначала**	**После первой операции**	**После второй операции**
Количество раствора (кг)	729	729	729
Количество кислоты (кг)	729	$729 - a$	$\dfrac{(729 - a)^2}{729}$
Доля кислоты	1	$\dfrac{729 - a}{729}$	$\dfrac{(729 - a)^2}{729^2}$

4. После того как отлили a кг раствора, в котором содержалось $\left(\frac{729-a}{729}\right)^2 a$ кг кислоты, в баке осталось

$$\frac{(729-a)^2}{729}-\frac{(729-a)^2\cdot a}{729^2}=\frac{(729-a)^2}{729}\left(1-\frac{a}{729}\right)=\frac{(729-a)^3}{729^2}\text{ кг кислоты.}$$

После доливания воды получили раствор с долей кислоты, равной

$$\frac{(729-a)^3}{729^3}=\left(\frac{729-a}{729}\right)^3.$$

5. Повторяя аналогичные рассуждения для 4-й, 5-й и 6-й операций, заключаем, что в итоге получен раствор с долей кислоты, равной $\left(\frac{729-a}{729}\right)^6$, и в нем содержится $\frac{(729-a)^6}{729^5}$ кг кислоты.

6. По условию эта величина равна 64 кг. Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{(729-a)^6}{729^5}=64.$$

Так как $64=2^6$, а $729=3^6$, то из этого уравнения следует, что $729-a = 2\cdot 3^5=486$, т.е. $a=243$.

7. *Ответ:* 243 кг.

Задачи для самостоятельного решения

1. Сколько воды нужно выпарить из 50 кг целлюлозной массы, содержащей 85% воды, чтобы получить массу с 75%-м содержанием воды?

2. Кусок сплава меди с цинком массой 36 кг содержит 45% меди. Сколько меди нужно добавить к этому куску, чтобы новый сплав содержал 60% меди?

3. В сосуде было 10 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили и дополнили сосуд таким же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров отливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался 64%-й раствор соляной кислоты?

4. Два раствора, из которых первый содержал 800 г серной кислоты, а второй — 600 г серной кислоты, соединили вместе и получили 10 кг нового раствора. Определить массу каждого из растворов, если известно, что число процентов содержания кислоты в первом растворе на 10 больше, чем во втором.

5. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл — 4% примесей. Какое количество металла можно получить из 24 т руды? Известно, что при выплавке металл не теряется, а только уменьшается часть примесей.

6. Одно ведро содержит смесь спирта с водой в отношении 2 : 3, а другое — в отношении 3 : 7. Сколько килограммов нужно взять из каждого ведра, чтобы получить 12 кг смеси, в которой спирт и вода были бы в отношении 3 : 5?

7. Из 38 т сырья второго сорта, содержащего 25% примесей, после переработки получается 30 т сырья первого сорта. Сколько процентов примесей содержится в сырье первого сорта?

8. Пчелы, перерабатывая цветочный нектар в мед, освобождают его от значительной части воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 1 кг меда, если известно, что нектар содержит 70% воды, а полученный из него мед — 17% воды?

9. Сплавили два сорта чугуна с различным процентным содержанием хрома. Если одного сорта взять в 5 раз больше другого, то процентное содержание хрома в сплаве вдвое превысит процентное содержание хрома в меньшей из сплавляемых частей. Если же взять одинаковое количество обоих сортов, то сплав будет содержать 8% хрома. Найти процентное содержание хрома в каждом сорте чугуна.

10. Масса двух кусков латуни составляет 60 кг. Первый кусок содержит 10 кг чистой меди, второй — 8 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок, если второй содержит меди на 15% больше первого?

11. В каждой из двух бутылей растворили по 2 кг кислоты, причем концентрация раствора в первой бутыли на 10% больше, чем во второй, а масса раствора в первой бутыли на 10 кг меньше, чем во второй. Найти концентрацию раствора в каждой из бутылей.

12. Из 40 т руды выплавили 20 т металла, содержащего 6% примесей. Каков процент примесей в руде?

13. От двух кусков сплавов массой в 12 и 8 кг с различным процентным содержанием меди отрезали поровну. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого, после чего процентное содержание меди в новых сплавах стало одинаковым. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

14. Первый сплав содержит 30% цинка и 70% меди, а второй — 40% цинка и 60% меди. Сколько граммов первого сплава нужно прибавить к 120 г второго сплава, чтобы получить сплав, содержащий 32% цинка?

15. В одном сосуде имеется 15%-я йодная настойка, а в другом — 20%-я. Сколько граммов настойки нужно взять из каждого сосуда, чтобы получить 300 г 18%-й настойки?

16. Имеется сплав серебра с медью. Найти массу и пробу данного сплава, если после переплавки его с 3 кг чистого серебра получается сплав 900-й пробы, а после переплавки его с 2 кг сплава 900-й пробы получается сплав 840-й пробы.

17. В расплаве массой 500 кг содержатся медь и олово. Из этой смеси отлили часть, по массе превышающую на 100 кг массу меди в расплаве, и добавили количество олова, равное по массе отлитой части расплава. После этого отлили столько же получившейся смеси. В результате последней операции количество меди в расплаве уменьшилось в 6,25 раза по сравнению с ее содержанием в исходном расплаве. Определить процентное содержание олова в исходном расплаве.

18. Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 л, а к оставшемуся глицерину долили 2 л воды. После перемешивания отлили 2 л смеси и долили 2 л воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 л больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько глицерина и сколько воды оказалось в сосуде в результате проведенных операций?

19. Имеются 6 л раствора A и 4 л раствора B с разными концентрациями соли. Сначала от обоих растворов отливают по одинаковому количеству жидкости, а затем часть, отлитую от раствора A, вливают в раствор B, а часть, отлитую от раствора B, вливают в раствор A. В результате концентрации соли во вновь полученных растворах оказываются одинаковыми. Определить количество жидкости, отлитое от каждого раствора.

20. Имеется раствор, содержащий 20% примесей. Найти наименьшее число фильтров, через которые нужно пропустить раствор так, чтобы окончательное содержание примесей не превышало 0,01%. Известно, что каждый фильтр поглощает 80% примесей.

Ответы

1. 20 кг. **2.** 13,5 кг. **3.** 2 л. **4.** 4 кг; 6 кг. **5.** 15 т. **6.** 9 кг; 3 кг. **7.** 5%. **8.** $2\frac{23}{30}$ кг. **9.** 5%; 11%. **10.** 25%. **11.** 5%; 4%. **12.** 53%. **13.** 4,8 кг. **14.** 480 г. **15.** 120 г; 180 г. **16.** 3 кг; 800-я проба. **17.** 60%. **18.** 0,5 л глицерина; 3,5 л воды. **19.** 2,4 л. **20.** 5 фильтров.

Глава 3

ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

1. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ ДВИЖЕНИЯ

1°. Основными компонентами в задачах на движение являются: а) пройденный путь (s); б) скорость (v); в) время (t).

2°. Зависимость между этими величинами выражается известными формулами

$$s = vt; \quad v = \frac{s}{t}; \quad t = \frac{s}{v} \tag{1}$$

(указанные величины должны быть заданы в одной системе единиц; например, если путь измеряется в километрах, а время — в часах, то скорость должна измеряться в километрах в час).

3°. План решения этого типа задач обычно сводится к следующему:

а) выбирают одну из величин, которая по условию задачи является неизвестной, и обозначают ее через x, или y, или z и т.д.;

б) устанавливают, какая из величин является по условию задачи известной;

в) третью (из оставшихся) величин выражают через неизвестную (x) и известную с помощью одной из формул (1);

г) используя условие задачи, составляют уравнение, связывающее неизвестную величину с известными;

д) решают полученное уравнение и отбирают те его корни, которые удовлетворяют условию.

З а м е ч а н и е. Наглядная интерпретация задачи в виде чертежа часто очень помогает анализировать задачу и составить уравнение. Рекомендуется делать чертеж к задаче независимо от ее сложности. Это воспитывает и тренирует способность к рассуждениям, снимает напряженность при анализе.

4°. Основные допущения при решении задач на движение:

а) движение считают равномерным, т.е. происходящим с постоянной скоростью (если нет специальных оговорок);

б) скорость считают величиной положительной;

в) всякое изменение направление движения и переходы на новый режим движения считают происходящими мгновенно.

Задачи с решениями

1. Первый турист проехал 2 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч. Отдохнув 2 ч, он отравился дальше с прежней скоростью. Спустя 4 ч после старта велосипедиста ему вдогонку выехал второй турист на мотоцикле со скоростью 56 км/ч. На каком расстоянии от места старта мотоциклист догонит велосипедиста?

1. Выполним схематический чертеж (рис. 3).

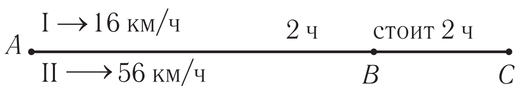


Рис. 3

2. На рис. 3 изображены: точка отправления A; скорости туристов; место стоянки велосипедиста (точка B); точка C, в которой мотоциклист догнал велосипедиста.

3. Чтобы преодолеть расстояние AC, мотоциклист затратил на 2 ч меньше, чем велосипедист.

4. Пусть $AC = s$. Велосипедист проехал это расстояние за время $t_1 = \frac{s}{v_1} = \frac{s}{16}$ ч, а мотоциклист — за время $t_2 = \frac{s}{v_2} = \frac{s}{56}$ ч.

5. Из условия следует, что $t_1 - t_2 = 2$, а это приводит к уравнению $\frac{s}{16} - \frac{s}{56} = 2$. Отсюда $s = 44{,}8$.

6. *Ответ:* 44,8 км.

2. Велосипедист проезжает 5 км за такое же время, за которое пешеход проходит 2 км. Найти это время, если скорость велосипедиста на 6 км/ч больше скорости пешехода. Определить также скорости пешехода и велосипедиста.

<u>I способ.</u> **1.** Искомое время (в часах) обозначим через t. Тогда, согласно формуле $v = \frac{s}{t}$, скорость велосипедиста равна $\frac{5}{t}$ км/ч, а скорость пешехода равна $\frac{2}{t}$ км/ч.

2. Из условия задачи вытекает уравнение

$$\frac{5}{t} - \frac{2}{t} = 6.$$

Отсюда $t = 0{,}5$, т.е. скорость пешехода равна 4 км/ч, а велосипедиста — 10 км/ч.

3. *Ответ:* 0,5 ч; 4 км/ч; 10 км/ч.

<u>II способ.</u> **1.** Обозначим через v (км/ч) скорость пешехода. Тогда скорость велосипедиста составит $(v + 6)$ км/ч.

2. Согласно формуле $t = \frac{s}{v}$, искомое время выразится так:

$$t = \frac{5}{v+6} = \frac{2}{v}.$$

3. Их этих равенств находим $v = 4$, $t = 0{,}5$.

3. Сначала турист проехал на автомобиле $\frac{5}{8}$ всего пути, а остальную часть — на катере, скорость которого на 20 км/ч меньше скорости автомобиля. При этом на автомобиле турист ехал на 15 мин меньше, чем на катере. Каковы скорости автомобиля и катера, если расстояние, которое проехал турист, равно 160 км?

1. На автомобиле турист проехал $\frac{5}{8} \cdot 160 = 100$ (км), а на катере $160 - 100 = 60$ (км).

2. Пусть x (км/ч) — скорость автомобиля; тогда $x - 20$ (км/ч) — скорость катера.

3. Время, в течение которого турист ехал на автомобиле, равно $\frac{100}{x}$ (ч), а время путешествия на катере равно $\frac{60}{x-20}$ (ч).

4. Согласно условию, получаем уравнение

$$\frac{100}{x} - \frac{60}{x-20} = \frac{1}{4}, \quad \text{или} \quad x^2 - 180x + 8000,$$

корнями которого являются $x_1 = 100$, $x_2 = 80$.

5. Значит, скорость автомобиля равна 100 км/ч или 80 км/ч, а скорость катера соответственно равна 80 км/ч или 60 км/ч.

6. *Ответ:* 100 км/ч; 80 км/ч или 80 км/ч; 60 км/ч.

4. Из пункта A в пункт B отправились три машины друг за другом с интервалом в 1 ч. Скорость первой машины равна 50 км/ч, а второй — 60 км/ч. Найти скорость третьей машины, если известно, что она догнала первые две машины одновременно.

1. Выполним схематический чертеж (рис. 4).

На нем отмечены лишь пункты отправления A, назначения B и пункт C, в котором третья машина догнала и первую, и вторую (точка B при решении задачи никакой роли не играет).

Рис. 4

2. Обозначим через t ч время, за которое первая машина доехала до пункта C.

3. Тогда вторая машина приехала в пункт C через $(t-1)$ ч, а третья — через $(t-2)$ ч.

4. Приравнивая расстояния, пройденные всеми машинами, получаем следующие равенства:

$$AC = 50t = 60(t-1) = v(t-2),$$

где v (км/ч) — скорость третьей машины.

5. а) Из равенства $50t = 60(t-1)$ получаем $t = 6$.

б) Из равенства $AC = 50t$ находим $AC = 300$ км.

в) Из равенства $60(t-1) = v(t-2)$, т.е. $300 = 4v$, определяем искомую скорость: $v = 75$ км/ч.

6. *Ответ:* 75 км/ч.

5. Поезд был задержан в пути на 12 мин, а затем на расстоянии 60 км наверстал потерянное время, увеличив скорость на 15 км/ч. Найти первоначальную скорость поезда.

I способ. **1.** Из условия следует, что если бы поезд после остановки в пункте B (рис. 5) продолжал двигаться с прежней скоростью, то затратил бы на 12 мин (12 мин $= \frac{1}{5}$ ч) больше, чем предусмотрено расписанием.

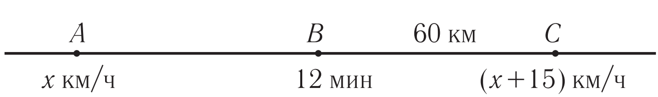


Рис. 5

2. Пусть x — первоначальная скорость поезда (в км/ч). Тогда $t_1 = \frac{60}{x}$, $t_2 = \frac{60}{x+15}$, $t_1 - t_2 = \frac{1}{5}$.

3. Согласно условию, получаем уравнение

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} = \frac{1}{5}, \quad \text{или} \quad x^2 + 15x - 4500 = 0,$$

откуда $x_1 = 60$, $x_2 = -75$ (не подходит по смыслу задачи).

4. *Ответ:* 60 км/ч.

<u>II способ.</u> **1.** Составим таблицу, которая содержит плановые и фактические компоненты движения:

Компоненты движения	**По плану**	**Фактически**
Путь (км)	60	60
Скорость (км/ч)	x	$x+15$
Время (ч)	$\frac{60}{x}$	$\frac{60}{x+15}$

2. Здесь через x обозначена плановая скорость движения, а через $x + 15$ — увеличенная (или фактическая) скорость.

3. Экономию времени в 12 мин$= \frac{1}{5}$ ч описывает уравнение

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+15} = \frac{1}{5},$$

т.е. то же уравнение, что и при I способе решения.

6. Расстояние между станциями A и B равно 103 км. Из A в B вышел поезд и, пройдя некоторое расстояние, был задержан, а потому оставшийся до B путь проходил со скоростью, на 4 км/ч большей, чем прежняя.

Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что оставшийся до B путь был на 23 км длиннее пути, пройденного до задержки, и что на прохождение пути после задержки было затрачено на 15 мин больше, чем на прохождение пути до нее.

1. Условию задачи отвечает рис. 6, где точка C соответствует остановке поезда.

Рис. 6

2. Пусть расстояние от A до C равно x км; тогда расстояние от C до B равно $(x + 23)$ км.

3. Имеем $103 = 2x + 23$, откуда $x = 40$ км.

4. От станции A до пункта C скорость поезда равна v км/ч, а от пункта C до станции B она равна $(v + 4)$ км/ч.

5. Составим уравнение

$$\frac{63}{v+4} - \frac{40}{v} = \frac{1}{4},$$

откуда $v_1 = 80$, $v_2 = 8$ (не подходит по смыслу задачи).

6. *Ответ:* 80 км/ч.

7. Мотоциклисту надо было проехать расстояние в 30 км. Выехав на 3 мин позже назначенного срока, он двигался со скоростью, на 1 км/ч большей, чем предполагалось, и прибыл на место вовремя. Определить скорость, с которой ехал мотоциклист.

1. Предположим, что мотоциклист ехал со скоростью v км/ч.

2. Тогда скорость, с которой он предполагал ехать, равна $(v - 1)$ км/ч.

3. Фактически мотоциклист затратил $\frac{30}{v}$ ч, а собирался быть в пути $\frac{30}{v-1}$ ч.

4. По условию

$$\frac{30}{v-1} - \frac{30}{v} = \frac{3}{60},$$

откуда находим $v_1 = 25$, $v_2 = -24$ (не подходит по смыслу задачи).

5. *Ответ:* 25 км/ч.

8. Скорость автомобиля по ровному участку на 5 км/ч меньше, чем скорость под гору, и на 15 км/ч больше, чем скорость в гору. Дорога из A в B идет в гору и равна 100 км. Определить скорость автомобиля по ровному участку, если расстояние от A до B и обратно он проехал за 1 ч 50 мин.

1. Воспользуемся таблицей, в которой через x обозначена скорость автомобиля по ровному участку:

Компоненты движения	**Движение от A до B**	**Движение от B к A**
Расстояние (км)	100	100
Скорость (км/ч)	$x - 5$	$x + 15$
Время (ч)	$\frac{100}{x-5}$	$\frac{100}{x+15}$

2. Так как расстояние от A до B и обратно автомобиль проехал за 1 ч 50 мин $= \frac{11}{6}$ ч, то математическая модель задачи описывается уравнением

$$\frac{100}{x-5} + \frac{100}{x+15} = \frac{11}{6}.$$

3. Имеем $11x^2 - 1090x - 6825 = 0$, откуда $x_1 = 105$ и $x_2 = -\frac{65}{11}$ (не подходит по смыслу задачи).

4. *Ответ:* 105 км/ч.

9. Автобус проходит расстояние между пунктами A и B по расписанию за 5 ч. Однажды, выйдя из A, автобус был задержан на 10 мин в 56 км от A и, чтобы прибыть в B по расписанию, он должен был оставшуюся бо́льшую часть пути двигаться со скоростью, превышающей первоначальную на 2 км/ч.

Найти скорость движения автобуса по расписанию и расстояние между пунктами A и B, если известно, что это расстояние превышает 100 км.

1. Пусть v км/ч — скорость автобуса по расписанию. Тогда $AB = 5v$ км.

2. Расстояние в 56 км от пункта A автобус преодолел за $\frac{56}{v}$ ч. Оставшееся расстояние $(5v - 56)$ км он проехал со скоростью $(v + 2)$ км/ч и затратил на это $\frac{5v-56}{v+2}$ ч.

3. Сумма указанных отрезков времени равна $\left(5 - \frac{1}{6}\right)$ ч $= \frac{29}{6}$ ч (автобус стоял 10 мин $= \frac{1}{6}$ ч).

4. Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{56}{v} + \frac{5v-56}{v+2} = \frac{29}{6}, \quad \text{или} \quad v^2 - 58v + 672 = 0.$$

Отсюда $v_1 = 42$ или $v_2 = 16$.

5. Скорость 16 км/ч не удовлетворяет условию задачи, поскольку в таком случае расстояние между пунктами A и B составляло бы $16 \cdot 5 = 80$ км, что противоречит условию.

6. *Ответ:* 42 км/ч; 210 км.

10. Старший брат на мотоцикле, а младший на велосипеде совершили двухчасовую безостановочную поездку. При этом мотоциклист проезжал каждый километр на 4 мин быстрее, чем велосипедист. Сколько километров проехал каждый из братьев за 2 ч, если известно, что путь, пройденный старшим братом за это время, на 40 км больше?

1. Пусть s_1 — путь, пройденный старшим братом за 2 ч.

2. Тогда:

а) $s_2 = s_1 - 40$ — путь, пройденный младшим братом за 2 ч;

б) $v_1 = \dfrac{s_1}{2}$ — скорость старшего брата;

в) $v_2 = \dfrac{s_1 - 40}{2}$ — скорость младшего брата;

г) $\dfrac{1}{v_1}$ — время, за которое старший брат проедет 1 км;

д) $\dfrac{1}{v_2}$ — время, за которое младший брат проедет 1 км.

3. Согласно условию, составим уравнение

$$\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = \frac{1}{15}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\frac{s_1 - 40}{2}} - \frac{1}{\frac{s_1}{2}} = \frac{1}{15}, \quad \text{или} \quad \frac{2}{s_1 - 40} - \frac{2}{s_1} = \frac{1}{15}.$$

4. Решив это уравнение, находим $s_1 = 60$ (второй корень $s = -20$ не подходит по смыслу задачи).

5. *Ответ:* 60 км; 20 км.

11. Поезд проходит мимо платформы за 32 с. За сколько секунд поезд проедет мимо неподвижного наблюдателя, если длина поезда равна длине платформы?

1. Введем обозначения: l (м) — длина платформы (и поезда), v (м/с) — скорость поезда, t (с) — время, за которое поезд проедет мимо неподвижного наблюдателя.

Изобразим схематически условия задачи на рис. 7.

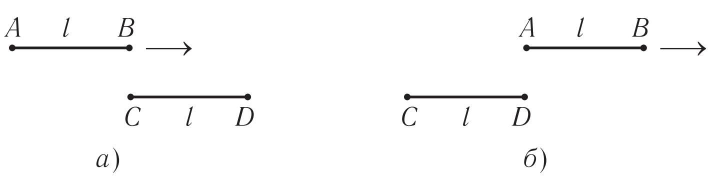


Рис. 7

2. В начальный момент движения электровоз B находится в начале платформы C (рис. 7, a); в конечный момент последний вагон A находится в конце платформы D (рис. 7, $б$). За это время точка B (или A, или любая другая точка поезда) совершит путь $2l$ со скоростью v. Поэтому, согласно формуле $s = vt$, имеет место равенство $2l = 32v$, или $l = 16v$.

3. С другой стороны, точка B (электровоз), двигаясь со скоростью v, за время t пройдет мимо неподвижного наблюдателя путь l, т.е. $l = vt$.

4. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} l = 16v, \\ l = vt, \quad \text{т.е.} \quad t = 16. \end{cases}$$

5. *Ответ:* за 16 с.

З а м е ч а н и е. Решение данной задачи показывает, что число введенных неизвестных может быть избыточным, т.е. больше числа уравнений. В этом случае (при условии корректности условия) хотя бы одна из переменных сократится, т.е. она несущественна для решения задачи.

12. Дорога от A до D длиной в 23 км идет сначала в гору, затем — по ровному участку, а потом — под гору. Пешеход, двигаясь из A в D, прошел весь путь за 5 ч 48 мин, а обратно, из D в A, — за 6 ч 12 мин. Скорость его движения в гору равна 3 км/ч, по ровному участку — 4 км/ч, а под гору — 5 км/ч. Определить длину дороги по ровному участку.

1. Выполним схематический чертеж (рис. 8).

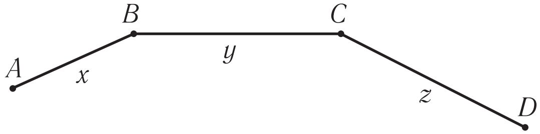


Рис. 8

2. Обозначим через x, y и z длины участков дороги (в км) соответственно в гору, по ровному месту и под гору при движении от A к D.

3. Так как по условию их общая длина равна 23 км, то

$$x + y + z = 23. \tag{1}$$

4. Другие два уравнения составим, исходя из времени, затраченного пешеходом на путь из A в D и на путь из D в A:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 5{,}8, \tag{2}$$

$$\frac{z}{3} + \frac{y}{4} + \frac{x}{5} = 6{,}2 \tag{3}$$

(5,8 ч = 5 ч 48 мин, 6,2 ч = 6 ч 12 мин).

5. Сложив почленно уравнения (2) и (3), имеем

$$\frac{8}{15}(x+z)+\frac{y}{2}=12. \tag{4}$$

6. Подставляя в равенство (4) выражение $x+z=23-y$, вытекающее из уравнения (1), получаем

$$\frac{8}{15}(23-y)+\frac{y}{2}=12,$$

откуда $y=8$.

7. *Ответ:* 8 км.

13. Расстояние между двумя населенными пунктами равно 18 км. Велосипедист проезжает это расстояние за 3 ч 41 мин. Дорога между этими пунктами идет сначала в гору, потом — по ровному участку, а затем — под гору. Какова протяженность дороги по ровному участку, если в гору велосипедист едет со скоростью 8 км/ч, по ровному участку — 10 км/ч, а под гору — 12 км/ч?

<u>I способ.</u> **1.** Воспользуемся схематическим чертежом (см. рис. 8).

2. По условию

$$x+y+z=18. \tag{1}$$

3. Время движения велосипедиста от A до D равно

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{10}+\frac{z}{12}.$$

Время движения велосипедиста от D до A равно

$$\frac{z}{8}+\frac{y}{10}+\frac{x}{12}.$$

Сумма этих отрезков времени равна 3 ч 41 мин $=\frac{221}{60}$ ч. Значит,

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{10}+\frac{z}{12}+\frac{z}{8}+\frac{y}{10}+\frac{x}{12}=\frac{221}{60}. \tag{2}$$

4. Получили систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y+z=18, \\ \frac{5}{24}(x+z)+\frac{y}{5}=\frac{221}{60}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+z=18-y, \\ \frac{5}{24}(18-y)+\frac{y}{5}=\frac{221}{60}. \end{cases} \tag{3}$$

Решив ее, находим $y=8$.

З а м е ч а н и е. Полученная система (3) не позволяет однозначно определить x и z.

5. *Ответ:* 8 км.

II способ. **1.** Обозначим через s расстояние (в км) по ровному участку. Тогда сумма расстояний под гору и в гору равна $18 - s$ (км).

2. Так как велосипедист едет из A в D и обратно, то каждый участок пути он проезжает дважды.

3. Туда и обратно велосипедист поднимается в гору на расстояние $(18 - s)$ км (AB по дороге туда и DC по дороге обратно) со скоростью 8 км/ч. Аналогично, он спускается с горы на расстояние $(18 - s)$ км со скоростью 12 км/ч.

4. Подсчет времени, потраченного им на дорогу, приводит к уравнению

$$\frac{18-s}{8} + \frac{2s}{10} + \frac{18-s}{12} = \frac{221}{60},$$

откуда $s = 8$.

2. ЗАДАЧИ НА СОВМЕСТНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДВУХ И БОЛЕЕ ТЕЛ

Предположим, что два тела движутся со скоростями v_1 и v_2. Тогда справедливы следующие утверждения.

1°. При движении навстречу друг другу они сближаются со скоростью v_1+v_2 и за время t преодолевают вместе расстояние $s = (v_1+v_2)t$.

2°. При движении в противоположных направлениях они удаляются друг от друга со скоростью $v_1 + v_2$.

3°. При движении друг за другом расстояние между ними может как увеличиваться, так и уменьшаться со скоростью $|v_1 - v_2|$, причем сближаются они или удаляются друг от друга, зависит от того, какое тело находится впереди: с меньшей или с большей скоростью.

4°. Расстояния s_1 и s_2, пройденные этими телами за одно и то же время t, пропорциональны их скоростям, т.е. отношение расстояний равно отношению скоростей:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Задачи с решениями

1. В 5 ч утра со станции A вышел почтовый поезд по направлению к станции B, отстоящей от A на 1080 км. В 8 ч утра со станции B по направлению к A вышел пассажирский поезд, который проходил в час на 15 км больше, чем почтовый. Когда встретились поезда, если их встреча произошла в середине пути AB?

1. Пусть поезда встретились через x (ч) после выхода пассажирского поезда.

2. Тогда почтовый поезд в момент встречи находился в пути $(x+3)$ ч.

3. До места встречи каждый поезд прошел $1080 : 2 = 540$ км.

4. Значит, скорость пассажирского поезда равна $\frac{540}{x}$ км/ч, а почтового — $\dfrac{540}{x+3}$ км/ч.

5. Согласно условию, получаем уравнение

$$\frac{540}{x} - \frac{540}{x+3} = 15,$$

откуда находим $x = 9$, $x = -12$ (не годится).

6. *Ответ:* в 5 ч дня.

2. Из пункта A в пункт B отправились три велосипедиста. Первый из них ехал со скоростью 12 км/ч. Второй отправился на 0,5 ч позже первого и ехал со скоростью 10 км/ч.

Какова скорость третьего велосипедиста, который отправился на 0,5 ч позже второго, если известно, что он догнал первого через 3 ч после того как догнал второго?

1. Выразим время, которое понадобилось третьему велосипедисту, чтобы догнать первого и второго велосипедистов.

2. Пусть скорость третьего велосипедиста равна x км/ч. Тогда, сокращая расстояние до первого велосипедиста со скоростью $(x-12)$ км/ч, путь в 12 км (именно на столько отдалился от пункта A за 1 ч первый велосипедист) третий велосипедист преодолел за $\dfrac{12}{x-12}$ ч.

3. Аналогично, третий велосипедист догнал второго через $\dfrac{5}{x-10}$ ч.

4. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{12}{x-12} - \frac{5}{x-10} = 3,$$

откуда находим $x_1 = 15$, $x_2 = 2\frac{2}{3}$.

5. По смыслу задачи скорость третьего велосипедиста должна быть больше, чем скорости первого и второго велосипедистов, т.е. $x > 12$.

6. *Ответ:* 15 км/ч.

3. Пассажир поезда, идущего со скоростью 108 км/ч, заметил, что встречный поезд прошел мимо него за 3 с. Найти длину встречного поезда, если его скорость равна 20 м/с.

1. Пусть s (м) — искомая длина встречного поезда.

2. Скорость движения встречного поезда относительно пассажира равна сумме скоростей поездов, т.е. $30 + 20 = 50$ м/с (поскольку 108 км/ч = 30 м/с).

3. Путь, пройденный встречным поездом относительно пассажира, равен длине встречного поезда. Поэтому $s = 50 \cdot 3 = 150$ (м).

4. *Ответ:* 150 м.

4. Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из A в B и из B в A. После встречи один из них был в пути еще 2 ч, а другой — $\frac{9}{8}$ ч. Определить скорости автомобилей, если расстояние между A и B равно 210 км.

1. Обозначим скорость первого автомобиля через x (км/ч), а второго — через y (км/ч).

2. Воспользуемся чертежом (рис. 9), на котором обозначены направления движения автомобилей и их место встречи — точка C.

Рис. 9

3. Так как первый автомобиль после встречи должен пройти расстояние CB за 2 ч, то $CB = 2x$; аналогично $CA = \frac{9}{8}y$.

4. Значит, получаем уравнение $2x + \frac{9}{8}y = 210$.

5. До своей встречи автомобили затратили одинаковое время, т.е. $\frac{AC}{x} = \frac{BC}{y}$, где $AC = \frac{9}{8}y$, $BC = 2x$. Получаем уравнение

$$\frac{9y}{8x} = \frac{2x}{y}, \quad \text{или} \quad 9y^2 = 16x^2,$$

откуда $3y = 4x$.

6. Приходим к системе

$$\begin{cases} 3y = 4x, \\ 2x + \frac{9}{8}y = 210. \end{cases}$$

Решив ее, получим $x = 60$, $y = 80$.

7. *Ответ:* 60 км/ч; 80 км/ч.

5. Из пункта A в пункт B сначала выехал грузовик, а через 1 ч — легковой автомобиль. В пункт B автомобили прибыли одновременно. Если бы из пунктов A и B машины выехали одновременно навстречу друг другу, то встреча произошла бы через 1 ч 12 мин после их выезда. За какое время проедет расстояние от A до B грузовик?

1. Пусть грузовик проезжает расстояние от A до B за x (ч).

2. Тогда легковой автомобиль проедет это расстояние за $(x-1)$ ч.

3. Полагая расстояние AB равным y км, найдем, что скорость грузового автомобиля равна $\frac{y}{x}$ км/ч, а легкового равна $\frac{y}{x-1}$ км/ч.

4. Так как при движении навстречу друг другу автомобили сближаются со скоростью $\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{x-1}\right)$ км/ч, а весь путь они проезжают за $\frac{6}{5}$ ч, то получаем уравнение

$$\frac{6}{5}\left(\frac{y}{x}+\frac{y}{x-1}\right)=y, \quad \text{или} \quad \frac{6}{5}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)=1,$$

откуда $x_1=3$, $x_2=0{,}4$.

5. По смыслу задачи $x>1$. Более того, ясно, что грузовик пройдет расстояние AB за время, большее, чем $\frac{6}{5}$ ч, т.е. $x>\frac{6}{5}$. Из найденных значений x этому условию удовлетворяет только $x=3$.

6. *Ответ:* за 3 ч.

6. Два поезда — товарный длиной в 490 м и пассажирский длиной в 210 м — двигались навстречу друг другу по двум параллельным путям. Машинист пассажирского поезда заметил товарный поезд, когда он находился от него на расстоянии 700 м; через 28 с после этого поезда встретились.

Определить скорость каждого поезда, если известно, что товарный поезд проходит мимо светофора на 35 с медленнее пассажирского.

1. Пусть x (м/с) — скорость товарного поезда, а y (м/с) — скорость пассажирского поезда.

2. За 28 с товарный поезд прошел $28x$ (м), а пассажирский $28y$ (м).

3. Согласно условию, получаем уравнение

$$28x+28y=700. \tag{1}$$

4. Товарный поезд проезжает мимо светофора за $\frac{490}{x}$ (с), а пассажирский — за $\frac{210}{y}$ (с).

5. Согласно условию, запишем еще одно уравнение:

$$\frac{490}{x} - \frac{210}{y} = 35. \qquad (2)$$

6. Решив систему уравнений (1), (2), находим $x = 10$, $y = 15$.

7. Значит, скорость товарного поезда равна 10 м/с, т.е. 36 км/ч, а скорость пассажирского равна 15 м/с, т.е. 54 км/ч.

8. *Ответ:* 36 км/ч; 54 км/ч.

7. Два пешехода идут навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 30 км. Если первый пешеход выйдет на 2 ч раньше второго, то встреча произойдет через 2,5 ч после выхода второго пешехода. Если же второй пешеход выйдет на 2 ч раньше первого, то они встретятся через 3 ч после выхода первого пешехода. С какой скоростью идет каждый пешеход?

1. Пусть x (км/ч) — скорость первого пешехода, y (км/ч) — скорость второго.

2. Если первый пешеход выйдет на 2 ч раньше второго, то до их встречи он затратит 4,5 ч, а второй — 2,5 ч.

3. Если второй пешеход выйдет на 2 ч раньше первого, то до их встречи он затратит 5 ч, а первый — 3 ч.

4. Тогда согласно условию задачи получим систему

$$\begin{cases} 4{,}5x + 2{,}5y = 30, \\ 3x + 5y = 30, \end{cases}$$

откуда $x = 5$, $y = 3$.

5. *Ответ:* 5 км/ч; 3 км/ч.

8. Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 50 км друг от друга, одновременно вышли два пешехода и встретились через 5 ч. После встречи первый пешеход, идущий из A, уменьшил скорость на 1 км/ч, а второй, идущий из B, увеличил скорость на 1 км/ч. В результате первый пришел в B на 2 ч раньше, чем второй в A. Определить скорости пешеходов до их встречи.

1. Воспользуемся чертежом (рис. 10), на котором C — место встречи, и таблицей компонентов движения.

2. Обозначим через v_1 (км/ч) скорость первого пешехода до встречи, а через v_2 (км/ч) — скорость второго.

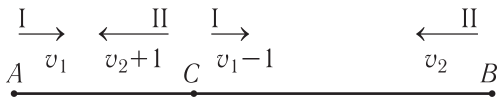


Рис. 10

3. Составим таблицу:

Компоненты движения		**До встречи**	**После встречи**
Скорость (км/ч)	первого	v_1	$v_1 - 1$
	второго	v_2	$v_2 + 1$
Путь (км)	первого	$AC = 5v_1$	$BC = 5v_2$
	второго	$BC = 5v_2$	$AC = 5v_1$
Время (ч)	первого	5	$\dfrac{BC}{v_1 - 1} = \dfrac{5v_2}{v_1 - 1}$
	второго	5	$\dfrac{AC}{v_2 + 1} = \dfrac{5v_1}{v_2 + 1}$

4. Согласно чертежу и таблице получим два уравнения:

$$AC + BC = 50 \iff 5v_1 + 5v_2 = 50 \iff v_1 + v_2 = 10, \qquad (1)$$

$$\frac{5v_1}{v_2 + 1} - \frac{5v_2}{v_1 - 1} = 2. \qquad (2)$$

5. Подставив выражение $v_2 = 10 - v_1$ в уравнение (2), приходим к квадратному уравнению

$$\frac{5v_1}{11 - v_1} - \frac{50 - 5v_1}{v_1 - 1} = 2,$$

откуда $v_1 = 6$ (корень $v_1 = -44$ не годится).

6. *Ответ:* 6 км/ч; 4 км/ч.

9. Два спортсмена стартовали один за другим с интервалом в 2 мин. Второй спортсмен догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта, а пробежав от точки старта 5 км, он повернул обратно и встретился с первым. Эта встреча произошла через 20 мин после старта первого спортсмена. Найти скорость второго спортсмена.

1. Пусть x (км/ч) — скорость первого, а y (км/ч) — скорость второго спортсмена.

2. Первый спортсмен пробегал 1 км за $\frac{1}{x}$ ч, а второй — за $\frac{1}{y}$ ч.

3. По условию второй спортсмен затратил на 1 км на 2 мин меньше времени, чем первый; следовательно,

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{30}. \qquad (1)$$

4. К моменту второй встречи первый спортсмен, находясь в пути 20 мин, пробежал $\frac{1}{3}x$ км. Значит, второй спортсмен к этому моменту пробежал $\left(10 - \frac{1}{3}x\right)$ км.

5. Так как второй спортсмен бежал 18 мин, то справедливо равенство

$$10 - \frac{1}{3}x = \frac{18}{60}y. \qquad (2)$$

6. Из уравнения (1) следует, что $x = \dfrac{30y}{30+y}$. Подставляя это выражение вместо x в уравнение (2), после преобразований получаем уравнение

$$y^2 + 30y - 1000 = 0,$$

которое имеет корни $y_1 = 20$, $y_2 = -50$ (не подходит по смыслу задачи).

7. *Ответ:* 20 км/ч.

10. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч 20 мин. Какое время понадобится каждому из них, чтобы пройти все расстояние, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 5 ч позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

1. Особенностью этой задачи является то, что в ней нет никаких данных о пройденном расстоянии.

2. В таких случаях удобно все расстояние принять за единицу, тогда скорость $v_1 = \frac{1}{x}$, а $v_2 = \frac{1}{y}$, где x (ч) — время в пути первого пешехода, а y (ч) — время второго пешехода.

3. Согласно условию составим систему уравнений

$$\begin{cases} 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y} = 1, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

4. Решив эту систему, получим $y = 5$, $x = 10$.

5. *Ответ:* 10 ч; 5 ч.

З а м е ч а н и е. В задачах такого типа пройденный путь принимается за единицу, а единственной данной величиной является время.

11. Два велосипедиста выехали одновременно из двух пунктов в третий, куда они договорились прибыть одновременно. Первый прибыл на место встречи через 2 ч, а второму, чтобы прибыть вовремя, надо было проезжать каждый километр на 1 мин быстрее первого, так как его путь длиннее на 6 км. Какова скорость каждого велосипедиста?

1. Особенностью этой задачи является не прямое, а косвенное указание скорости велосипедистов.

2. Пусть первый велосипедист проезжал каждый километр за x мин, т.е. его скорость равна $\frac{60}{x}$ км/ч. Тогда скорость второго велосипедиста равна $\dfrac{60}{x-1}$ км/ч.

3. Составим уравнение

$$\frac{60}{x-1}\cdot 2-\frac{60}{x}\cdot 2=6,$$

откуда $x_1=5$, $x_2=-4$ (посторонний корень).

4. Следовательно, $v_1=\frac{60}{5}=12$ (км/ч), $v_2=\frac{60}{4}=15$ (км/ч).

5. *Ответ:* 12 км/ч; 15 км/ч.

12. Из A в B через равные промежутки времени отправляются три автомашины, которые прибывают в пункт B одновременно, а затем выезжают в пункт C, расположенный на расстоянии 120 км от B. Третья машина, прибыв в C, сразу поворачивает обратно и в 40 км от C встречает первую машину, которая прибывает в C через 1 ч после второй. Какова скорость второй машины?

1. Пусть s (км) — расстояние от A до B; x, y, z (км/ч) — скорости первой, второй и третьей машины соответственно.

Рис. 11

2. Условию задачи отвечает рис. 11, где $AB=s$ км; $BC=120$ км; $CK=40$ км; $BC+CK=160$ км; $BK=BC-CK=80$ км.

3. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{s}{x} - \frac{s}{y} = \frac{s}{y} - \frac{s}{z}, \\ \frac{160}{z} = \frac{80}{x}, \\ \frac{120}{x} = \frac{120}{y} + 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}, \\ z = 2x, \\ \frac{120}{x} = \frac{120}{y} + 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{4}y, \\ \frac{160}{y} = \frac{120}{y} + 1, \end{cases}$$

откуда $\frac{40}{y} = 1$, т.е. $y = 40$.

4. *Ответ:* 40 км/ч.

13. Турист A и турист B должны были выйти одновременно навстречу друг другу из поселка M и поселка N соответственно. Однако турист A задержался и вышел позже на 6 ч. При встрече выяснилось, что A прошел на 12 км меньше, чем B. Отдохнув, туристы одновременно покинули место встречи и продолжили путь с прежней скоростью. В результате A пришел в поселок N через 8 ч, а B пришел в поселок M через 9 ч после встречи. Определить расстояние MN и скорости туристов.

1. Пусть D — место встречи туристов, $v_A = x$ (км/ч), $v_B = y$ (км/ч); тогда $ND = 8x$ (км), $MD = 9y$ (км) (рис. 12).

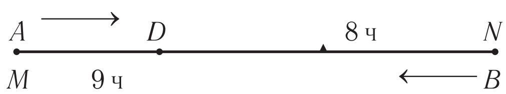


Рис. 12

2. Значит, $t_A = \frac{9y}{x}$ (ч) — время, которое затратил турист A на путь из M в D; $t_B = \frac{8x}{y}$ (ч) — время, которое затратил турист B на путь из N в D.

3. Из условия следует, что

$$8x - 9y = 12. \tag{1}$$

4. Так как турист B вышел на 6 ч раньше, чем A, то получаем второе уравнение:

$$\frac{8x}{y} - \frac{9y}{x} = 6. \tag{2}$$

5. Решив систему уравнений (1), (2), получим $x = 6$, $y = 4$.

6. Находим искомое расстояние: $MN = 8 \cdot 6 + 9 \cdot 4 = 84$ (км).

7. *Ответ:* 84 км; 6 км/ч; 4 км/ч.

14. Два пешехода одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов A и B и встречаются через 3 ч. Если бы они оба направились из пункта A в пункт B, причем второй пешеход вышел бы на 3 ч позже первого, то второй догнал бы первого, пройдя $\frac{2}{3}$ расстояния от A до B. Какое время понадобится первому пешеходу, чтобы пройти из пункта A в пункт B?

1. Замечаем, что величины с размерностью длины в условие задачи не входят.

2. Поэтому можно ввести единицу длины, приняв за нее расстояние между пунктами A и B.

3. Далее введем в качестве неизвестных скорости пешеходов v_1 и v_2 (ед/ч).

4. Тогда искомое время $t = \frac{1}{v_1}$, причем $t > 3$.

5. Теперь запишем условия задачи в виде системы уравнений

$$\begin{cases} 3(v_1 + v_2) = 1, & (1) \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{v_1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{v_2} + 3. & (2) \end{cases}$$

6. Согласно уравнению (1), имеем $v_2 = \frac{1}{3} - v_1$; тогда из уравнения (2) следует:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2}\right) = 3; \quad \frac{2}{3}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{\frac{1}{3} - v_1}\right) = 3; \quad 9v_1^2 - 7v_1 + \frac{2}{3} = 0.$$

7. Корнями полученного квадратного уравнения являются $(v_1)_1 = \frac{2}{3}$ и $(v_1)_2 = \frac{1}{9}$. Следовательно, $t_1 = \frac{3}{2}$ и $t_2 = 9$. Поскольку $t > 3$, лишь второе значение дает решение задачи.

8. *Ответ:* 9 ч.

15. Два пловца стартовали один за другим в 50-метровом бассейне на дистанцию 100 м. Второй пловец плыл со скоростью 1,5 м/с и догнал первого на отметке 21 м, а затем, доплыв до противоположной стенки бассейна, повернул обратно и встретил первого пловца через $\frac{2}{3}$ с после момента поворота. Найти интервал времени между моментами старта пловцов.

1. На рис. 13 изображены длина бассейна $AE = 50$ м, отрезок $AC = 21$ м, направления движения пловцов и точка D, в которой встретились пловцы.

Рис. 13

2. Второй пловец стартовал после того как первый достиг точки B.

3. Второй пловец отрезок DE проплыл за $\frac{2}{3}$ с; следовательно, $DE = 1{,}5 \cdot \frac{2}{3} = 1$ м.

4. Имеем $CD = AE - (AC + DE) = 50 - (21 + 1) = 28$ (м).

5. Чтобы проплыть отрезок $CD = 28$ м, первый пловец затратил такое же время, что и второй пловец для преодоления расстояния $CD + DE + ED = 30$ м, после чего их встреча состоялась в точке D, т.е. $t_1 = t_2$.

6. Время, затраченное пловцами до встречи в точке D, выразится так: $t_1 = \frac{28}{v_1}$; $t_2 = \frac{30}{v_2}$. Поскольку $t_1 = t_2$, получим $\frac{28}{v_1} = \frac{30}{1{,}5}$, откуда $v_1 = 1{,}4$ м/с.

7. Первый пловец проплыл расстояние $AD = AC + CD = 49$ м. На это он затратил время $t_1 = \frac{49}{v_1} = \frac{49}{1{,}4} = 35$ (с).

8. Второй пловец до встречи с первым в точке D проплыл расстояние $AE + ED = 51$ (м). На это он затратил время $t_2 = \frac{51}{1{,}5} = 34$ (с).

9. *Ответ:* 1 с.

16. Из пункта A в пункт B отправился велосипедист. В тот момент, когда он проехал 0,25 расстояния между A и B, из B в A выехал мотоциклист, который, прибыв в A, не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в пункт B. Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из A в B. Считая скорости мотоциклиста при движении из A в B и из B в A различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из A в B больше скорости велосипедиста.

1. Пусть s (км) — расстояние между пунктами A и B; u (км/ч) — скорость мотоциклиста на пути из B в A; v (км/ч) — скорость велосипедиста; x — искомое отношение скорости мотоциклиста на пути из A в B к скорости велосипедиста.

2. Тогда скорость мотоциклиста на пути из A в B равна xv (км/ч).

3. Расстояние между пунктом A и пунктом B мотоциклист проехал за $\frac{s}{xv}$ ч. По условию точно такое же время прошло между моментом выезда мотоциклиста из пункта B и моментом первой встречи с велосипедистом.

4. За это время велосипедист проехал $\frac{s}{xv} \cdot v$ км, а мотоциклист проехал $\frac{s}{xv} \cdot u$ км.

5. Так как в момент выезда мотоциклиста из пункта B расстояние между ним и велосипедистом составляло $\frac{3}{4}s$ км, то справедливо равенство

$$\frac{s}{xv} \cdot v + \frac{s}{xv} \cdot u = \frac{3}{4}\, s,$$

или, поскольку $v > 0$, $s > 0$, равенство

$$\frac{1}{x} + \frac{u}{xv} = \frac{3}{4}. \qquad (1)$$

6. Мотоциклист находился в пути $\left(\frac{s}{u} + \frac{s}{xv}\right)$ ч. За это время велосипедист проехал $\frac{3}{4}\, s$ км. Поэтому

$$\left(\frac{s}{u} + \frac{s}{xv}\right) = \frac{3}{4}\, s, \quad \text{или} \quad \frac{v}{u} + \frac{1}{x} = \frac{3}{4}. \qquad (2)$$

7. Из уравнения (2) следует, что $\frac{u}{v} = \frac{4x}{3x-4}$. Подставляя это выражение вместо $\frac{u}{v}$ в уравнение (1), получим уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{3x-4} = \frac{3}{4}, \quad \text{или} \quad 9x^2 - 40x + 16 = 0,$$

корнями которого являются $x_1 = 4$ и $x_2 = \frac{4}{9}$.

8. Из условия ясно, что скорость мотоциклиста на пути из A в B больше скорости велосипедиста, т.е. $x > 1$. Значит, $x = 4$.

9. *Ответ:* в 4 раза.

17. Два велосипедиста выехали из пункта A одновременно в одном направлении. Первый велосипедист двигался со скоростью 7 км/ч, а второй — со скоростью 10 км/ч. Через 30 мин из пункта A в том же направлении выехал третий велосипедист, который сначала догнал первого, а через 1,5 ч после этого догнал и второго. Определить скорость третьего велосипедиста.

1. Пусть t (ч) — время, прошедшее от начала движения первого велосипедиста до точки, в которой его догнал третий велосипедист; v (км/ч) — скорость третьего велосипедиста. Заметим, что $v > 10$.

2. Из условия задачи вытекает уравнение

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)v = 7t.$$

3. Аналогично можно записать уравнение движения относительно второго и третьего велосипедистов:

$$\left(t-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)v = 10\left(t+\frac{3}{2}\right).$$

4. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \left(t-\frac{1}{2}\right)v = 7t, \\ (t+1)v = 10\left(t+\frac{3}{2}\right). \end{cases}$$

5. Исключив из этих уравнений время t, получим квадратное уравнение $v^2 - 18v + 70 = 0$, имеющее корни $v_1 = 9 + \sqrt{11}$, $v_2 = 9 - \sqrt{11}$ (не подходит, так как $v > 10$).

6. *Ответ:* $9 + \sqrt{11}$ км/ч.

18. Вторая машина догоняет первую, которая в начальный момент находится от нее на некотором расстоянии s. Время, за которое вторая машина догонит первую, на 1,5 ч больше времени, за которое первая машина может пройти расстояние s, и на 2 ч больше времени, за которое вторая машина может пройти это же расстояние. Найти время, за которое вторая машина догонит первую.

1. Пусть t_1 и t_2 (ч) — время, за которое может пройти расстояние s первая и вторая машина соответственно, а t (ч) — время, за которое вторая машина догонит первую.

2. Из условия задачи получаем два уравнения:

$$t = t_1 + 1{,}5, \quad t = t_2 + 2.$$

3. Третье уравнение получается из условия, что когда вторая машина догонит первую, она пройдет расстояние, на s большее, чем первая:

$$v_2 t - v_1 t = s, \quad \text{или} \quad \frac{v_2}{s} - \frac{v_1}{s} = \frac{1}{t},$$

т.е.

$$\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} = \frac{1}{t}.$$

4. Составим систему

$$\begin{cases} t = t_1 + 1{,}5, \\ t = t_2 + 2, \\ \dfrac{1}{t_2} - \dfrac{1}{t_1} = \dfrac{1}{t}, \end{cases}$$

откуда $t = 3$, $t = 1$ (не подходит, так как при $t = 1$ имеем $t_1 < 0$, $t_2 < 0$).

5. *Ответ:* 3 ч.

19. Расстояние между двумя городами экспресс проходит на 4 ч быстрее товарного поезда и на 1 ч быстрее пассажирского. Найти расстояние между городами, если известно, что скорость товарного поезда составляет $\frac{5}{8}$ скорости пассажирского и на 50 км/ч меньше скорости экспресса.

1. Пусть s (км) — расстояние между двумя городами; x (км/ч) — скорость экспресса; y (км/ч) — скорость пассажирского поезда; z (км/ч) — скорость товарного поезда.

2. Тогда:

а) $\frac{s}{x}$ ч — время, за которое экспресс проходит расстояние s;

б) $\frac{s}{y}$ ч — время, за которое пассажирский поезд проходит расстояние s;

в) $\frac{s}{z}$ ч — время, за которое товарный поезд проходит расстояние s.

3. Согласно условию, получим систему

$$\begin{cases} \frac{s}{z} - \frac{s}{x} = 4, & (1) \\ \frac{s}{y} - \frac{s}{x} = 1, & (2) \\ z = \dfrac{5}{8}\,y, & (3) \\ z = x - 50. & (4) \end{cases}$$

4. С помощью уравнения (3) исключим z из уравнения (1) и запишем систему двух уравнений с двумя неизвестными $\frac{s}{x}$ и $\frac{s}{y}$, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{8s}{5y} - \frac{s}{x} = 4, \\ \frac{s}{y} - \frac{s}{x} = 1 \end{cases} \implies \frac{3s}{5y} = 3 \implies$$

$$\implies \frac{s}{y} = 5, \ \frac{s}{x} = 4, \ \frac{s}{z} = 8, \quad \text{или} \quad x = \frac{s}{4}, \ y = \frac{s}{5}, \ z = \frac{s}{8}.$$

5. Используя уравнение (4), имеем $z = x - 50$ или $\frac{s}{8} = \frac{s}{4} - 50$, откуда $s = 400$.

6. *Ответ:* 400 км.

20. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них, а тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отстал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

I способ. **1.** Пусть $v_\text{м}$ (км/ч) — скорость мотоциклиста, $v_\text{в}$ (км/ч) — скорость велосипедиста, $v_\text{п}$ (км/ч) — скорость пешехода.

2. Предположим, что с момента встречи пешехода и велосипедиста до встречи мотоциклиста и пешехода прошло t_1 (ч), а с момента встречи пешехода и велосипедиста до встречи мотоциклиста и велосипедиста прошло t_2 (ч).

3. За время t_1 мотоциклист проехал $v_\text{м}t_1$ км, а пешеход прошел $v_\text{п}t_1$ км.

4. Согласно условию, имеем уравнение

$$v_\text{м}t_1 - v_\text{п}t_1 = 6.$$

5. С момента встречи мотоциклиста и пешехода до встречи мотоциклиста и велосипедиста прошло $(t_2 - t_1)$ ч. За это время мотоциклист проехал $v_\text{м}(t_2 - t_1)$ км, а пешеход прошел $v_\text{п}(t_2 - t_1)$ км; так как пешеход отстал на 3 км, то имеем еще одно уравнение:

$$v_\text{м}(t_2 - t_1) - v_\text{п}(t_2 - t_1) = 3.$$

6. Наконец, из условия, что велосипедист обогнал пешехода на 3 км, получаем третье уравнение:

$$v_\text{в}t_2 - v_\text{п}t_2 = 3.$$

7. Итак, получили систему уравнений

$$\begin{cases} v_\text{м}t_1 - v_\text{п}t_1 = 6, & (1) \\ v_\text{м}(t_2 - t_1) - v_\text{п}(t_2 - t_1) = 3, & (2) \\ v_\text{в}t_2 - v_\text{п}t_2 = 3. & (3) \end{cases}$$

8. Требуется найти, на сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист.

9. Так как это произошло через t_1 (ч), то за указанное время велосипедист проехал $v_{\text{в}}t_1$ (км), а пешеход прошел $v_{\text{п}}t_1$ (км). Следовательно, искомое расстояние x равно $(v_{\text{в}}t_1 - v_{\text{п}}t_1)$ км.

10. Из уравнения (1) имеем $(v_{\text{м}} - v_{\text{п}})t_1 = 6$, а из уравнения (2) имеем $(v_{\text{м}} - v_{\text{п}})(t_2 - t_1) = 3$, откуда $2 = \dfrac{t_1}{t_2 - t_1}$, т.е. $t_2 = \dfrac{3}{2}\,t_1$.

11. Из уравнения (3) следует, что $v_{\text{в}} - v_{\text{п}} = \dfrac{3}{t_2}$, поэтому

$$x = v_{\text{в}}t_1 - v_{\text{п}}t_1 = \frac{3}{t_2} \cdot t_1 = 2\,(\text{км}).$$

12. *Ответ:* 2 км.

<u>II способ.</u> **1.** Обозначим через $v_{\text{м}}$ (км/ч) — скорость мотоциклиста, через $v_{\text{в}}$ (км/ч) — скорость велосипедиста, через $v_{\text{п}}$ (км/ч) — скорость пешехода.

2. Время, за которое велосипедист обогнал пешехода на 3 км, равно $\dfrac{3}{v_{\text{в}} - v_{\text{п}}}$.

3. Из условия следует, что это время равно $\dfrac{9}{v_{\text{м}} - v_{\text{п}}}$, откуда

$$\frac{3}{v_{\text{в}} - v_{\text{п}}} = \frac{9}{v_{\text{м}} - v_{\text{п}}}, \quad \text{или} \quad \frac{v_{\text{в}} - v_{\text{п}}}{v_{\text{м}} - v_{\text{п}}} = \frac{1}{3}.$$

4. Мотоциклист догнал пешехода за время $\dfrac{6}{v_{\text{м}} - v_{\text{п}}}$. Следовательно, за это время велосипедист обогнал пешехода на

$$\frac{6}{v_{\text{м}} - v_{\text{п}}}(v_{\text{в}} - v_{\text{п}}) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2\,(\text{км}).$$

21. Из A в B и из B в A одновременно отправились два пешехода. Когда первый (вышедший из A) прошел половину пути, второму оставалось пройти еще 24 км. Когда же второй прошел половину пути, первому оставалось пройти только 15 км. Сколько оставалось пройти второму пешеходу, когда первый закончил свой путь?

З а м е ч а н и е. В этой и следующих задачах используется тот факт, что отношение расстояний равно отношению скоростей.

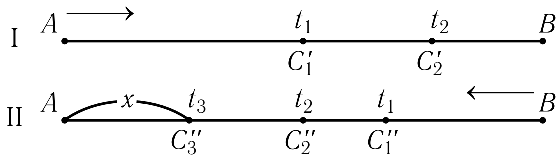


Рис. 14

1. На рис. 14 изображены точки, в которых находились пешеходы в одни и те же фиксированные моменты времени.

2. При этом $AC_1' = BC_1' = \frac{1}{2}AB$, $AC_1'' = 24$, $C_2'B = 15$, $AC_2'' = BC_2'' = \frac{1}{2}AB$, $AC_3'' = x$, где x — искомая величина, т.е. отрезок пути, оставшийся второму пешеходу в тот момент, когда первый дошел до пункта B.

3. Обозначим через v_1 и v_2 скорости пешеходов. Поскольку отношение расстояний равно отношению скоростей, имеют место следующие пропорции (цепочка равенств):

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{1}{2}AB}{AB-24} \overset{(1)}{=} \frac{AB-15}{\frac{1}{2}AB} \overset{(2)}{=} \frac{AB}{AB-x}.$$

4. Тогда из пропорции (1) находим $AB = 40$, а затем из пропорции (2) определяем $x = 8$.

5. *Ответ:* 8 км.

22. Два брата, имея один велосипед, одновременно направились из A в B, старший на велосипеде, а младший — пешком. На некотором расстоянии от A старший брат оставил велосипед и дальше пошел пешком до B. Младший, дойдя до велосипеда, сел на него и приехал в B одновременно со старшим. На обратном пути братья повторили этот прием, причем старший проехал на велосипеде на 1 км больше, чем в первый раз. Из-за этого младший брат приехал в A на 21 мин позже.

Найти скорость ходьбы каждого брата, если на велосипеде они ехали с одинаковой скоростью 20 км/ч, а при ходьбе старший затрачивал на каждый километр на 3 мин меньше, чем младший.

1. Обозначим через s расстояние между A и B; v_1 и v_2 — скорости ходьбы старшего и младшего братьев, $a = AC$ — расстояние от A до точки C, где старший брат первый раз оставил велосипед (рис. 15, a).

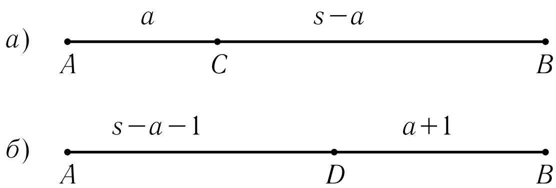


Рис. 15

2. Дорогу от A до B старший брат преодолел за $\frac{a}{20}+\frac{s-a}{v_1}$ ч, а младший — за $\frac{a}{v_2}+\frac{s-a}{20}$ ч. Поскольку они вышли из A и прибыли в B одновременно, получаем уравнение

$$\frac{a}{20}+\frac{s-a}{v_1}=\frac{a}{v_2}+\frac{s-a}{20}. \qquad (1)$$

3. Обратный путь схематически изображен на рис. 15, *б*.

4. Составим аналогичное уравнение:

$$\frac{a+1}{20}+\frac{s-a-1}{v_1}=\frac{a+1}{v_2}+\frac{s-a-1}{20}-\frac{7}{20}. \qquad (2)$$

5. Так как v_1 и v_2 — скорости ходьбы братьев, то величины $\frac{1}{v_1}$ и $\frac{1}{v_2}$ означают время, которое они затрачивают на преодоление 1 км. При этом по условию

$$\frac{1}{v_2}-\frac{1}{v_1}=\frac{1}{20}. \qquad (3)$$

6. Получили три уравнения с четырьмя неизвестными (нам нужно найти только скорости v_1 и v_2).

7. Если из уравнения (2) вычесть уравнение (1), то переменные s и a взаимно уничтожатся. Действительно,

$$\frac{a+1}{20}+\frac{s-a-1}{v_1}-\frac{a}{20}-\frac{s-a}{v_1}=\frac{a+1}{v_2}+\frac{s-a-1}{20}-\frac{7}{20}-\frac{a}{v_2}-\frac{s-a}{20}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=\frac{9}{20}. \qquad (4)$$

8. Остается решить систему уравнений (3), (4), из которой легко находим $v_1=5$, $v_2=4$.

9. *Ответ:* 5 км/ч; 4 км/ч.

23. Три пловца должны проплыть в бассейне дорожку длиной 50 м, а затем немедленно повернуть обратно и вернуться к месту старта. Сначала стартует первый пловец, через 5 с — второй, еще через 5 с — третий. В определенный момент времени, еще не достигнув конца дорожки, пловцы оказались на одном расстоянии от старта. Третий пловец, доплыв до конца дорожки и повернув назад, встретил второго в 4 м от конца дорожки, а первого — в 7 м от конца дорожки. Найти скорости пловцов.

1. Воспользуемся схематическим чертежом (рис. 16).

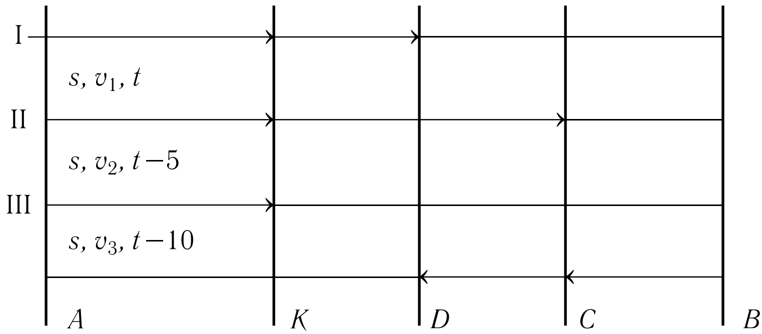


Рис. 16

2. На рисунке обозначены: A — линия старта; K — линия, на которой все пловцы оказались одновременно; C — линия, на которой встретились третий и второй пловцы, $AC = 46$ м, $BC = 4$ м; D — линия, на которой встретились третий и первый пловцы, $AD = 43$ м, $BD = 7$ м.

Далее положим: $AK = s$; v_1, v_2, v_3 — скорости пловцов; t, $t - 5$, $t - 10$ — промежутки времени, за которые пловцы достигли линии K.

3. Из основных формул движения вытекают следующие равенства:

$$s = v_1 t = v_2(t - 5) = v_3(t - 10). \qquad (1)$$

4. Воспользуемся тем, что расстояния пропорциональны скоростям.

а) Третий пловец проплыл расстояние между пунктами K, B и C (условно KBC), а второй за то же время — отрезок KC. При этом $KBC = AB + BC - AK = 50 + 4 - s = 54 - s$, $KC = 46 - s$. Следовательно,

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{54 - s}{46 - s}. \qquad (2)$$

б) Третий пловец проплыл расстояние KBD, а первый за то же самое время — отрезок KD. При этом $KBD = 57 - s$, $KD = 43 - s$. Значит,

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{57 - s}{43 - s}. \tag{3}$$

5. В итоге получили (разрозненно) пять уравнений с пятью неизвестными. Из уравнений (1) следует, что

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{t-5}{t-10}, \quad \frac{v_3}{v_1} = \frac{t}{t-10}.$$

Подставив эти соотношения в уравнения (2) и (3), приходим к системе

$$\begin{cases} \dfrac{54 - s}{46 - s} = \dfrac{t-5}{t-10}, \\ \dfrac{57 - s}{43 - s} = \dfrac{t}{t-10}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 8t + 5s = 310, \\ 7t + 5s = 285. \end{cases}$$

Отсюда $t = 25$, $s = 22$.

6. Наконец, скорости пловцов находим из уравнений (1).

7. *Ответ:* $v_1 = \frac{22}{25}$ м/с; $v_2 = \frac{11}{10}$ м/с; $v_3 = \frac{22}{15}$ м/с.

24. Два судна движутся равномерно и прямолинейно в один и тот же порт. В начальный момент времени положения судов и порта образуют правильный треугольник. После того как второе судно прошло 80 км, указанный треугольник превратился в прямоугольный. В момент прибытия первого судна в порт второму оставалось пройти еще 120 км. Найти расстояние между судами в начальный момент времени.

1. Выполним схематический чертеж (рис. 17). Положим $x = OA = AB = OB$, v_1 и v_2 — скорости судов.

2. По условию $BD = 80$, $EO = 120$.

3. Воспользуемся тем, что отношение расстояний равно отношению скоростей. Имеем

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{AC}{BD} = \frac{AO}{BE}. \tag{1}$$

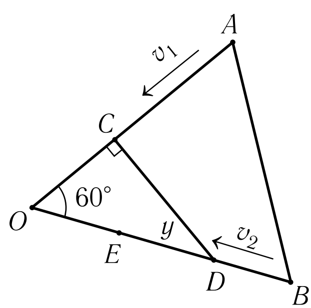


Рис. 17

4. При этом $OC = \frac{1}{2}OD$. Значит, $OC = \dfrac{x-80}{2}$, поскольку $OD = OB - BD =$

$= x - 80$. Далее, $AC = AO - OC = x - \dfrac{x-80}{2} = \dfrac{x+80}{2}$, $BE = BO - OE =$ $= x - 120$.

5. Таким образом, пропорция (1) примет вид

$$\frac{\frac{x+80}{2}}{80} = \frac{x}{x-120}.$$

Отсюда $x = 240$.

6. *Ответ:* 240 км.

Замечание. В задачах 25–27 обозначения не соответствуют условиям.

Имеются в виду задачи, в которых требуется найти некоторый компонент движения, например, путь, а в качестве неизвестной вводится другой компонент, скажем, скорость или время. Это происходит потому, что относительно искомой величины получаются более сложные уравнения.

25. Два туриста вышли одновременно из пункта A в пункт B. Первый турист проходил каждый километр на 5 мин быстрее второго. Пройдя 20% расстояния от A до B, первый турист повернул обратно, пришел в A, пробыл там 10 мин, снова пошел в B и оказался там одновременно со вторым туристом. Определить расстояние от A до B, если второй турист прошел его за 2,5 ч.

1. Пусть v_1 (км/ч) и v_2 (км/ч) — скорости туристов. Тогда $\dfrac{1}{v_1}$ (ч) и $\dfrac{1}{v_2}$ (ч) — отрезки времени, за которые первый и второй туристы соответственно проходят 1 км. Эти отрезки отличаются на 5 мин $= \dfrac{1}{12}$ ч, причем $\dfrac{1}{v_2} > \dfrac{1}{v_1}$.

2. Значит, получаем уравнение

$$\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = \frac{1}{12}. \qquad (1)$$

3. На весь путь второй турист затратил 2,5 ч. Поэтому $AB = 2{,}5v_2$.

4. Первый турист прошел расстояние AB и, кроме того, еще 40% этого расстояния (по 20% — в ту и другую сторону).

5. Следовательно, первый турист прошел расстояние, равное $1{,}4AB = 1{,}4 \cdot 2{,}5v_2 = 3{,}5v_2$. На это он потратил 2 ч 20 мин $= \dfrac{7}{3}$ ч (10 мин турист пробыл в пункте A).

6. Поэтому $3{,}5v_2 = \frac{7}{3}v_1$, т.е.

$$v_1 = \frac{3}{2}v_2. \qquad (2)$$

7. Подставив v_1 в уравнение (1), получим $\frac{1}{v_2} - \frac{2}{3v_2} = \frac{1}{12}$, откуда $v_2 = 4$. Тогда $AB = 2{,}5v_2 = 10$.

8. *Ответ:* 10 км.

26. Из двух пунктов одновременно навстречу друг другу выехали легковой и грузовой автомобили, и встреча их произошла через 1 ч 12 мин после начала движения. Легковой автомобиль пришел в конечный пункт на 1 ч раньше, чем грузовой. Какое время находился в пути грузовой автомобиль?

1. Обозначим скорость легкового автомобиля через x (км/ч), а грузового — через y (км/ч).

2. Так как через 1 ч 12 мин $= \frac{6}{5}$ ч автомобили встретились, то за это время легковой автомобиль прошел путь, равный $\frac{6}{5}x$, а грузовой — путь, равный $\frac{6}{5}y$.

3. После встречи легковому автомобилю предстояло еще пройти путь $\frac{6}{5}y$, а грузовому — путь $\frac{6}{5}x$.

4. Легковой автомобиль до конца пути затратил время $\frac{6y}{5x}$, а грузовой — время $\frac{6x}{5y}$.

5. Последние величины отличаются на 1 ч (до встречи автомобили затратили одинаковое количество времени). Значит, получаем уравнение

$$\frac{6x}{5y} - \frac{6y}{5x} = 1. \qquad (1)$$

6. Полагая $\frac{x}{y} = z > 0$, приведем уравнение (1) к виду

$$6z^2 - 5z - 6 = 0. \qquad (2)$$

7. Решив уравнение (2), найдем $z = \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, т.е. $x = \frac{3}{2}y$ (скорость легкового автомобиля в 1,5 раза больше скорости грузового).

8. До встречи грузовой автомобиль затратил $\frac{6}{5}$ ч, а после встречи — $\frac{6}{5} \cdot \frac{x}{y}$ ч (см. п. 4); эта величина равна $\frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{5}$ ч.

9. Следовательно, грузовой автомобиль преодолел весь путь за $\frac{6}{5} + \frac{9}{5} = 3$ (ч).

10. *Ответ:* 3 ч.

27. Из пункта A выехали одновременно два велосипедиста, а через 1 ч после них оттуда же выехал автобус. Через некоторое время автобус догнал первого велосипедиста, а через $\frac{2}{5}$ ч — второго. Через какой промежуток времени после отправления из пункта A автобус догнал первого велосипедиста, если скорость второго в $\frac{7}{6}$ раза больше скорости первого?

1. Введем обозначения: v_1, v_2, v_3 — скорости первого, второго велосипедистов и автобуса соответственно; t — время, которое понадобилось автобусу, чтобы догнать первого велосипедиста.

2. Из условия задачи вытекают следующие равенства.

а) Так как первый велосипедист за время $t+1$ и автобус за время t проезжают одинаковое расстояние, то

$$v_1(t+1) = v_3 t. \tag{1}$$

б) Второй велосипедист за время $t + \frac{7}{5}$ и автобус за время $t + \frac{2}{5}$ также проезжают одинаковое расстояние. Поэтому

$$v_2\left(t + \frac{7}{5}\right) = v_3\left(t + \frac{2}{5}\right). \tag{2}$$

в) Наконец, последнее уравнение получается из сравнения скоростей велосипедистов:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{7}{6}. \tag{3}$$

3. Разделим уравнение (2) на уравнение (1):

$$\frac{v_2\left(t + \frac{7}{5}\right)}{v_1(t+1)} = \frac{v_3\left(t + \frac{2}{5}\right)}{v_3 t}. \tag{4}$$

Заменив в соотношении (4) $\frac{v_2}{v_1}$ на $\frac{7}{6}$, получим уравнение относительно t:

$$5t^2 + 7t - 12 = 0, \quad \text{откуда} \quad t = 1$$

$\left(t = -\frac{12}{5}\right.$ не подходит смыслу задачи$\left.\right)$.

4. *Ответ:* через 1 ч.

28. Из города A в город B, расстояние между которыми 200 км, мотоциклист ехал 6 ч. Сначала он двигался со скоростью v_1, превышающей 15 км/ч, а затем — со скоростью v_2, причем время движения с каждой скоростью пропорционально этой скорости. Через 4 ч после отправления мотоциклист был в 120 км от города A. Определить скорости v_1 и v_2.

1. Обозначим время движения мотоциклиста со скоростью v_1 через t_1, а со скоростью v_2 — через t_2.

2. Тогда условия задачи приводят к трем уравнениям с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} v_1 t_1 + v_2 t_2 = 200, & (1) \\ t_1 + t_2 = 6, & (2) \\ \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{t_1}{t_2}. & (3) \end{cases}$$

3. Однако еще одно уравнение в этой задаче однозначным образом составить нельзя. Неясно, то ли 120 км были пройдены за 4 ч со скоростью v_1, то ли движение на этом пути происходило с той и с другой скоростью.

4. Поэтому необходимо рассмотреть два случая.

а) Если $t_1 \geqslant 4$, то дополнительное уравнение имеет вид $4v_1 = 120$, т.е. $v_1 = 30$ км/ч.

б) Если $t_1 < 4$, то дополнительное уравнение таково:

$$v_1 t_1 + (4 - t_1) v_2 = 120$$

и отсюда с учетом уравнений (1) и (2) находим $v_2 = 40$ км/ч.

5. Рассмотрим случай а) ($v_1 = 30$ км/ч); тогда имеем смешанную систему

$$\begin{cases} 30t_1 + v_2 t_2 = 200, \\ t_1 + t_2 = 6, \\ \dfrac{30}{v_2} = \dfrac{t_1}{t_2}, \\ 4 \leqslant t_1 < 6. \end{cases}$$

Исключив t_2 и v_2 из уравнений системы, получаем уравнение

$$3t_1^2 - 28t_1 + 54 = 0.$$

Один из его корней меньше 4, а другой больше 6, и, значит, такой случай отпадает.

6. Во случае б) ($v_2 = 40$ км/ч) получаем смешанную систему

$$\begin{cases} v_1 t_1 + 40 t_2 = 200, \\ t_1 + t_2 = 6, \\ \dfrac{t_1}{t_2} = \dfrac{v_1}{40}, \\ 0 < t_1 < 4, \end{cases}$$

из которой находим $t_1 = 2 < 4$, $v_1 = 20$ км/ч.

7. *Ответ:* $v_1 = 20$ км/ч; $v_2 = 40$ км/ч.

29. Из пункта A одновременно вышли три пешехода и одновременно вернулись в тот же пункт, обойдя маршрут, состоящий из прямолинейных отрезков AB, BC, CD и DA, которые образуют равнобедренную трапецию (AB и CD — боковые стороны). На указанных отрезках скорости всех пешеходов постоянны и равны соответственно: у первого — 6; 8; 5 и 8 км/ч, у второго — 7; 7; 6 и 8 км/ч. Скорость третьего пешехода на каждом из отрезков равна либо 7 км/ч, либо 8 км/ч, причем на всем пути он меняет скорость один раз. Определить отношение меньшего основания трапеции к боковой стороне.

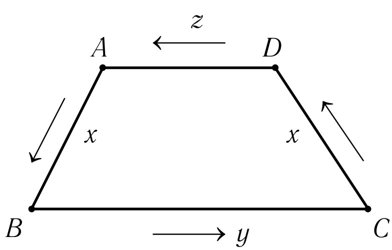


Рис. 18

1. Обозначим стороны трапеции $ABCD$ (рис. 18) через x, y, x, z соответственно.

2. Тогда условие, состоящее в том, что первый и второй пешеходы пройдут весь маршрут за одно и то же время, запишется в виде уравнения

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{8} + \frac{x}{5} + \frac{z}{8} = \frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{x}{6} + \frac{z}{8},$$

из которого следует

$$\frac{2}{35}\,x = \frac{1}{56}\,y, \quad \text{или} \quad \frac{y}{x} = \frac{16}{5}. \tag{1}$$

3. Второе уравнение сразу написать нельзя: неизвестно, на каких участках каковы были скорости третьего пешехода.

4. Так как известно, что в процессе движения он менял скорость только один раз, то необходимо рассмотреть 6 случаев: скорость третьего пешехода на одном, двух или трех участках была 7 км/ч и скорость того же пешехода на одном, двух или трех участках была 8 км/ч.

5. Соответственно этому возможны 6 вариантов второго уравнения:

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x}{7}+\frac{x+y+z}{8}, \tag{2}$$

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y}{7}+\frac{x+z}{8}, \tag{3}$$

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y+x}{7}+\frac{z}{8}, \tag{4}$$

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x}{8}+\frac{y+x+z}{7}, \tag{5}$$

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y}{8}+\frac{x+z}{7}, \tag{6}$$

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{8}+\frac{x}{5}+\frac{z}{8}=\frac{x+y+x}{8}+\frac{z}{7}. \tag{7}$$

6. Проведем анализ уравнений (2)–(7). Уравнение (2) противоречиво. Из уравнения (3) следует $\frac{y}{x}=\frac{83}{15}$, что противоречит условию (1). Из уравнения (4) следует $\frac{y}{x}=\frac{68}{15}$, что также противоречит условию (1). Далее, из уравнения (5) получаем, что $\frac{z}{x}=\frac{7}{3}$, из уравнения (6) — что $\frac{z}{x}=\frac{83}{15}$, из уравнения (7) — что $\frac{z}{x}=\frac{98}{15}$.

7. Рассмотрим три последних отношения:

$$\frac{z}{x}=\frac{7}{3};\quad \frac{z}{x}=\frac{83}{15};\quad \frac{z}{x}=\frac{98}{15}.$$

Они не противоречат условию (1). Однако нужно еще проверить, может ли при таком соотношении сторон существовать трапеция. Для этого необходимо проверить выполнение неравенств $x+y+x \geqslant z$ и $x+z+x \geqslant y$, т.е. $2x+y \geqslant z$ и $2x+z \geqslant y$, откуда

$$\frac{z}{x}-\frac{y}{x} \leqslant 2,\quad \frac{y}{x}-\frac{z}{x} \leqslant 2.$$

8. Итак, решения уравнений (6) и (7) не удовлетворяют этим условиям; решение уравнения (5) дает ответ задачи.

9. Поскольку $\frac{7}{3} < \frac{16}{5}$, меньшее основание трапеции равно z.

10. Итак, отношение меньшего основания трапеции к боковой стороне равно 7 : 3.

11. *Ответ:* 7 : 3.

3. ДВИЖЕНИЕ ПО ВОДНОМУ ПУТИ

1°. Постоянная скорость, с которой рассматриваемый объект двигался бы в неподвижной (стоячей воде), называется его *собственной скоростью*.

2°. Если тело имеет собственную скорость $v_{\text{соб}}$, а скорость течения реки равна $v_{\text{теч}}$, то скорость движения тела по течению выражается формулой

$$v_{\text{по теч}} = v_{\text{соб}} + v_{\text{теч}}, \qquad (1)$$

а скорость движения против течения — формулой

$$v_{\text{пр. теч}} = v_{\text{соб}} - v_{\text{теч}}. \qquad (2)$$

3°. В тех случаях, когда в задаче речь идет о движении плотов, полагают, что плот движется со скоростью течения реки.

Задачи с решениями

1. Из пункта A по течению реки отправилась моторная лодка. На расстоянии 60 км от A лодка остановилась, а через 2 ч повернула обратно и приплыла в пункт A спустя 6,5 ч после отплытия из A. Определить скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

1. Обозначим через v (км/ч) собственную скорость лодки и составим таблицу движения:

Компоненты движения	По течению	Против течения
Расстояние (км)	60	60
Скорость (км/ч)	$v+3$	$v-3$
Время (ч)	$\frac{60}{v+3}$	$\frac{60}{v-3}$

2. Согласно условию, получим уравнение

$$\frac{60}{v+3}+\frac{60}{v-3}=6{,}5-2, \quad \text{или} \quad 3v^2-80v-27=0.$$

Отсюда $v=27$ или $v=-\frac{1}{3}$ (не подходит по смыслу задачи).

3. *Ответ:* 27 км/ч.

2. Рыбак проплыл на лодке от пристани против течения 5 км и возвратился обратно на пристань. Скорость течения реки равна 2,4 км/ч. Если бы рыбак греб с той же силой в неподвижной воде озера на лодке с парусом, увеличивающим скорость на 3 км/ч, то он за то же время проплыл бы 14 км. Найти скорость лодки в неподвижной воде.

1. Обозначим через v (км/ч) скорость лодки в неподвижной воде.

2. Тогда $(v+2{,}4)$ км/ч — скорость лодки по течению реки; $(v-2{,}4)$ км/ч — скорость лодки против течения; $\left(\frac{5}{v+2{,}4}+\frac{5}{v-2{,}4}\right)$ ч — время, которое рыбак плыл по реке.

3. Далее, $(v+3)$ км/ч — скорость лодки под парусом, а $\frac{14}{v+3}$ — время движения лодки по озеру.

4. Условие задачи приводит к уравнению

$$\frac{5}{v+2{,}4}+\frac{5}{v-2{,}4}=\frac{14}{v+3}, \quad \text{или} \quad 4v^2-30v-80{,}64=0.$$

Отсюда находим $v_1=9{,}6$; $v_2=-2{,}1$ (не подходит по смыслу задачи).

5. *Ответ:* 9,6 км/ч.

3. Моторная лодка проплыла по озеру, а потом спустилась вниз по реке, вытекающей из озера. Расстояние, пройденное лодкой по озеру, на 15% меньше расстояния, пройденного по реке. Время движения лодки по озеру на 2% больше, чем по реке. На сколько процентов скорость движения лодки вниз по реке больше скорости движения по озеру?

1. Пусть x (км) — расстояние, пройденное лодкой по реке; тогда $0{,}85x$ (км) — расстояние, пройденное ею по озеру.

2. Обозначим время движения лодки по реке через y (ч); тогда время движения по озеру равно $1{,}02y$ ч.

3. Учитывая условия, составим пропорцию

$$\frac{x}{y} \;—\; a\%,$$

$$\frac{0{,}85x}{1{,}02y} \;—\; 100\%,$$

откуда $a\%=120\%$.

4. *Ответ:* на 20%.

4. Моторная лодка спустилась вниз по течению реки на 18 км и вернулась обратно, затратив на этот путь 1 ч 45 мин. Найти собственную скорость лодки и скорость течения, если известно, что 6 км по течению реки лодка проплывает на 5 мин быстрее, чем против течения.

1. Пусть x — собственная скорость лодки, v — скорость течения (в км/ч).

2. Тогда $x + v$ — скорость лодки по течению, $x - v$ — скорость лодки против течения, $\frac{1}{x+v}$ и $\frac{1}{x-v}$ — время, затраченное на 1 км пути по течению и против течения соответственно.

3. Согласно условию, составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{18}{x+v} + \dfrac{18}{x-v} = \dfrac{7}{4}, \\ \dfrac{6}{x-v} - \dfrac{6}{x+v} = \dfrac{1}{12}. \end{cases} \tag{1}$$

4. Для решения этой системы (1) введем новые переменные $a = \frac{1}{x+v}$ и $b = \frac{1}{x-v}$. Относительно этих переменных система примет вид

$$\begin{cases} 18a + 18b = \dfrac{7}{4}, \\ 6b - 6a = \dfrac{1}{12}, \end{cases} \qquad \text{откуда} \quad b = \frac{1}{18}, \ \ a = \frac{1}{24}.$$

5. Наконец, возвращаясь к переменным x и v, получаем систему

$$\begin{cases} x + v = 24, \\ x - v = 18, \end{cases}$$

откуда $x = 21$, $y = 3$.

6. *Ответ:* 21 км/ч; 3 км/ч.

5. Турист проплыл в лодке по реке из города A в город B и обратно, затратив на это 10 ч. Расстояние между городами равно 20 км. Найти скорость течения реки, зная, что турист проплывал 2 км против течения реки за такое же время, как 3 км по течению.

1. Пусть x (км/ч) — скорость течения реки, y (км/ч) — скорость лодки в стоячей воде.

2. Используя условия задачи, составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{20}{y+x} + \dfrac{20}{y-x} = 10, \\ \dfrac{2}{y-x} = \dfrac{3}{y+x}. \end{cases}$$

3. Для решения этой системы удобно положить

$$\frac{1}{y+x} = u; \quad \frac{1}{y-x} = v.$$

4. Решив систему

$$\begin{cases} 20u + 20v = 10, \\ 2v = 3u, \end{cases}$$

получим $u = \frac{1}{5}$, $v = \frac{3}{10}$, т.е. $y + x = 5$, $y - x = \frac{10}{3}$.

5. Наконец, из системы

$$\begin{cases} y + x = 5, \\ y - x = \frac{10}{3} \end{cases}$$

находим $x = \frac{5}{6}$.

6. *Ответ:* $\frac{5}{6}$ км/ч.

6. От пристани A одновременно отправились вниз по течению реки катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, повернул обратно и вернулся в A через 14 ч. Найти скорость плота, если катер на обратном пути встретил плот в 24 км от A.

1. Пусть v (км/ч) — скорость катера в стоячей воде, v_1 (км/ч) — скорость течения (скорость плота). Тогда скорость катера по течению равна $v + v_1$ км/ч, следовательно, на путь вниз по течению катер затратил $\frac{96}{v+v_1}$ ч, а на обратный путь $\frac{96}{v-v_1}$ ч.

2. По условию задачи имеем

$$\frac{96}{v+v_1} + \frac{96}{v-v_1} = 14. \tag{1}$$

3. До момента встречи катер и плот двигались одно и то же время. При этом катер прошел 96 км по течению и $96 - 24 = 72$ км против течения, а плот проплыл 24 км по течению.

4. Получим уравнение

$$\frac{24}{v_1} = \frac{96}{v+v_1} + \frac{72}{v-v_1}. \tag{2}$$

5. Упростив уравнения (1) и (2), придем к системе

$$\begin{cases} 96v = 7v^2 - 7v_1^2, \\ 7vv_1 = v^2. \end{cases}$$

6. Так как по условию $v \neq v_1$, то из второго уравнения системы следует, что $v = 7v_1$. Подставив это выражение в первое уравнение, находим $v_1 = 2$.

7. *Ответ:* 2 км/ч.

7. Моторная лодка, двигаясь по течению реки, обогнала плот. Спустя $\frac{1}{3}$ ч после обгона лодка развернулась и поплыла в противоположном направлении. Через сколько минут после разворота лодка и плот встретятся?

<u>I способ.</u> **1.** Введем обозначения: $v_п = v_т$ — скорость плота и течения, $v_л$ — собственная скорость лодки, $v_л + v_т$ — скорость лодки по течению, $v_л - v_т$ — скорость лодки против течения (все эти величины выражены в км/ч); t (ч) — время, которое прошло с момента разворота лодки до встречи с плотом.

2. Расстояние между лодкой и плотом спустя $\frac{1}{3}$ ч после обгона равно

$$s = (v_л + v_т) \cdot \frac{1}{3} - v_т \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\, v_л.$$

3. За время t лодка и плот сближаются и вместе проходят расстояние, равное s.

4. С другой стороны, это расстояние равно $s_1 + s_2$, где $s_1 = v_т t$ — расстояние, пройденное плотом, $s_2 = (v_л - v_т)t$ — расстояние, пройденное лодкой против течения.

5. Таким образом, приходим к уравнению

$$v_т t + (v_л - v_т)t = \frac{1}{3}v_л,$$

т.е. $v_л t = \frac{1}{3}\, v_л$. Отсюда $t = \frac{1}{3}$.

6. *Ответ:* через 20 мин.

<u>II способ.</u> **1.** Так как плот движется со скоростью течения, то скорость лодки относительно плота (вне зависимости от направления движения) постоянна и равна собственной скорости лодки.

2. Учитывая это, можно считать, что движение происходит по озеру, при этом плот все время стоит.

3. Следовательно, для того чтобы вернуться к плоту, лодке потребуется столько же времени, сколько она удалялась от него, т.е. $\frac{1}{3}$ ч.

8. Моторная лодка, плывя по течению реки, обогнала баржу, движущуюся в том же направлении. Спустя 1 ч после обгона лодка развернулась и поплыла в противоположном направлении. Через сколько минут после разворота лодка и баржа снова встретятся, если собственная скорость лодки в 3 раза больше собственной скорости баржи?

1. Пусть $v_т$ — скорость течения, $v_б$ — собственная скорость баржи, $v_л$ — собственная скорость лодки (все величины — в км/ч).

2. Через 1 ч после обгона расстояние между лодкой и баржей составит

$$s = (v_т + v_л) \cdot 1 - (v_т + v_б) \cdot 1 = v_л - v_б.$$

3. Пусть t — время, прошедшее с момента разворота лодки до ее встречи с баржей. Тогда

$$s = (v_б + v_т)t + (v_л - v_т)t = (v_л + v_б)t.$$

4. Значит, $(v_л + v_б)t = v_л - v_б$, откуда

$$t = \frac{v_л - v_б}{v_л + v_б}.$$

5. Так как по условию $v_л = 3v_б$, то $t = \frac{1}{2}$.

6. *Ответ:* через 30 мин.

9. Лодочник начал грести против течения быстрой реки. Однако через 4 мин лодка оказалась на 80 м ниже по течению. Развернув ее, лодочник перестал грести и пока он отдыхал, лодку снесло на 40 м. Затем он принялся грести по течению, причем лодка двигалась относительно воды с той же скоростью, как и в первые 4 мин, и прошла еще 40 м. В целом после разворота лодки прошло 100 с. Какова скорость течения?

1. Пусть u (м/мин) — скорость течения реки; v (м/мин) — скорость движения лодки в стоячей воде, когда лодочник греб.

2. Так как лодку сносит, когда лодочник гребет против течения, то $u > v$.

3. Значит, если лодочник гребет против течения, то лодка движется вниз по течению со скоростью $(u - v)$ м/мин и за 4 мин проходит расстояние, равное $4(u - v)$ м.

4. Согласно условию, за 4 мин лодка продвинулась вниз по течению на 80 м, поэтому

$$4(u - v) = 80. \tag{1}$$

5. После разворота, когда лодочник отдыхал, лодка прошла расстояние 40 м за $\frac{40}{u}$ мин.

6. Когда лодочник греб по течению, он проплыл расстояние 40 м за $\frac{40}{u+v}$ мин, а всего на путь после разворота он затратил 100 с; значит,

$$\frac{40}{u} + \frac{40}{u+v} = \frac{100}{60}. \tag{2}$$

7. Решив систему уравнений (1) и (2), находим $u_1 = 40$ и $u_2 = 6$.

8. **Анализ.** Скорость течения реки равна 40 м/мин, либо 6 м/мин. Однако надо проверить, могут ли оба значения u удовлетворять всем условиям задачи. Очевидно, что всем условиям задачи не удовлетворяет u_2, поскольку из уравнения (1) следует, что $u > 20$.

9. *Ответ:* 40 м/мин.

10. В реку впадает приток. Катер отходит от пункта A, находящегося на притоке, идет по течению 80 км до впадения притока в реку в пункте B, а затем идет вверх по реке до пункта C. Путь от A до C он прошел за 18 ч, а обратный путь — за 15 ч.

Найти расстояние от пункта B до пункта C, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч, а собственная скорость катера равна 18 км/ч.

1. Пусть расстояние от B до C равно x (км).

2. Чтобы выразить время, за которое катер проходит расстояние от A до C, введем новую переменную: положим скорость течения в притоке равной y (км/ч).

3. Тогда скорость катера при движении в притоке от A до B (по течению) составит $(18 + y)$ км/ч, а при движении от B до A (против течения) она составит $(18 - y)$ км/ч.

4. Время, за которое катер прошел расстояние от A до B, равно $\frac{80}{18+y}$ ч, а время, затраченное им на расстояние от B до A, равно $\frac{80}{18-y}$ ч.

5. При движении катера по реке от B до C (против течения) его скорость равна $18 - 3 = 15$ (км/ч), а при движении от C до B она равна $18 + 3 = 21$ (км/ч).

6. Следовательно, время, за которое он прошел расстояние от B до C, равно $\frac{x}{15}$ ч, а время, затраченное им на расстояние от C до B, равно $\frac{x}{21}$ ч.

7. Таким образом, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{80}{18+y} + \dfrac{x}{15} = 18, \\ \dfrac{x}{21} + \dfrac{80}{18-y} = 15, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 210$, $y_1 = 2$; $x_2 = 19\frac{2}{3}$, $y_2 = -66$.

8. По смыслу задачи $x > 0$ и $0 < y < 18$. Поэтому остается лишь решение $x = 210$, $y = 2$.

9. *Ответ:* 210 км.

11. От пристани вниз по течению реки одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 ч и отправился назад в A. В тот момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход, отплывший из A на 40 ч позже первого, нагнал плот, успевший к тому времени проплыть 144 км. Считая, что скорости пароходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определить эти скорости, а также скорость течения реки.

1. Пусть x (км/ч) — скорость каждого из пароходов, y (км/ч) — скорость течения реки.

2. Время, прошедшее с момента отплытия плота от пристани A до того момента, когда его нагнал второй пароход, равно $\frac{144}{y}$ ч.

3. Второй пароход до момента встречи с плотом находился в пути $\frac{144}{x+y}$ ч.

4. Из условия следует равенство

$$\frac{144}{y} - \frac{144}{x+y} = 40. \qquad (1)$$

5. За время $\frac{144}{y}$ ч первый пароход успел проплыть 324 км по течению со скоростью $(x + y)$ км/ч, простоять 18 ч у пристани B и проплыть $324-180 = 144$ (км) против течения реки, двигаясь со скоростью $(x - y)$ км/ч.

6. Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{144}{y} = \frac{324}{x+y} + 18 + \frac{144}{x-y}. \qquad (2)$$

7. Итак, для нахождения x и y имеем систему уравнений (1) и (2).

8. Из уравнения (1) следует, что $x = \frac{5y^2}{18-5y}$, подставляя это выражение в уравнение (2), получаем

$$\frac{8}{y} = \frac{18-5y}{y} + 1 + \frac{4(18-5y)}{5y^2-9y}.$$

9. После упрощений приходим к уравнению $10y^2 - 33y + 9 = 0$, откуда $y_1 = 0{,}3$, $y_2 = 3$. Соответственно находим $x_1 = \frac{3}{110}$, $x_2 = 15$.

10. Из условия следует, что $x > y$. Поэтому подходят лишь значения $x = 15$, $y = 3$.

11. *Ответ:* 15 км/ч; 3 км/ч.

4. ДВИЖЕНИЕ ВДОЛЬ ОКРУЖНОСТИ

1°. Если тело движется по окружности, длина которой не известна, то пройденное им расстояние измеряют в угловых (дуговых) градусах (градусная мера дуги равна градусной мере центрального угла), а угловую скорость — в градусах за единицу времени (возможно также — в числе оборотов за единицу времени; один оборот равен 360°). Если длина окружности известна, то задачу можно свести к движению по прямой.

2°. Пусть два тела движутся по окружности радиуса R с постоянными скоростями v_1 и v_2 в противоположных направлениях. Тогда время между их встречами вычисляется по формуле

$$t = \frac{2\pi R}{v_1 + v_2}. \tag{1}$$

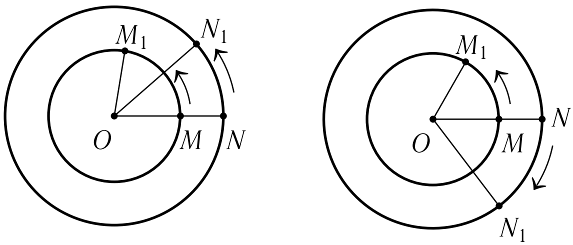
3°. Пусть два тела движутся по окружности радиуса R со скоростями v_1 и v_2 ($v_1 > v_2$) в одном направлении. Тогда время между их встречами вычисляется по формуле

$$t = \frac{2\pi R}{v_1 - v_2}. \tag{2}$$

Задачи с решениями

1. По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому за 1 мин успевает сделать на два оборота больше. Считая, что в начале движения точки находились на одном луче, выходящем из центра окружностей, вычислить величину угла между этими точками через 1 с.

1. Для наглядности изобразим движение соответствующих точек (рис. 19).



а) *б*)

Рис. 19

На рис. 19, *а* точки M и N движутся в одном направлении, а на рис. 19, *б* — в противоположных направлениях.

2. Один оборот точки по окружности составляет 360°. Предположим, что точка N совершает полный оборот за t с, тогда точка M — за $(t-5)$ с. Поэтому за 1 с точка N повернется на $\frac{360^\circ}{t}$, а точка M — на $\frac{360^\circ}{t-5}$; за 1 мин точка N повернется на $\frac{60\cdot 360^\circ}{t}$, а точка M — на $\frac{60\cdot 360^\circ}{t-5}$.

3. Согласно условию,

$$\frac{60\cdot 360^\circ}{t-5}-\frac{60\cdot 360^\circ}{t}=2\cdot 360^\circ, \quad \text{или} \quad \frac{30}{t-5}-\frac{30}{t}=1.$$

Отсюда $t^2-5t-150=0$, т.е. $t_1=15$, $t_2=-10$ (не подходит по смыслу задачи).

4. Таким образом, точка N совершает полный оборот за 15 с, а точка M — за 10 с. Поэтому за 1 с точка N повернется на $\frac{360^\circ}{15}=24^\circ$, а точка M — на 36°.

5. Если точки M и N движутся в одном направлении (рис. 19, *а*), то искомый угол $\angle N_1OM_1=\angle MOM_1-\angle NON_1=36^\circ-24^\circ=12^\circ$.

6. Если же точки движутся в противоположных направлениях (рис. 19, *б*), то искомый угол $\angle N_1OM_1 = \angle MOM_1 + \angle NON_1 = 36^\circ + 24^\circ = 60^\circ$.

7. *Ответ:* $12^\circ; 60^\circ$.

2. Две точки движутся равномерно по окружности в одном направлении. Первая точка проходит окружность на 2 с быстрее второй и догоняет ее каждые 12 с. За какое время проходит окружность первая точка?

1. Пусть t с — время полного оборота первой точки, тогда $t+2$ с — время полного оборота второй точки. Первая точка впервые догонит вторую, когда совершит $\frac{12}{t}$ оборотов, а вторая — $\frac{12}{t+2}$ оборотов.

2. Так как первая точка догнала вторую, т.е. совершила на один оборот больше, то получаем уравнение

$$\frac{12}{t} - \frac{12}{t+2} = 1, \quad \text{или} \quad t^2 + 2t - 24 = 0,$$

которое имеет корни $t_1 = 4$ и $t_2 = -6$ (не подходит по смыслу задачи).

3. *Ответ:* за 4 с.

3. По окружности, длина которой равна 100 м, равномерно движутся две точки. Они встречаются через каждые 4 с, двигаясь в противоположных направлениях, и через каждые 20 с, двигаясь в одном направлении. Найти скорости этих точек.

1. Пусть скорость первой точки равна x м/с, а скорость второй равна y м/с, причем $x > y$.

2. За 4 с первая точка проходит расстояние $4x$ м, а вторая — $4y$ м.

3. При движении в противоположных направлениях встреча этих точек происходит каждые 4 с, т.е. суммарно за 4 с они проходят 100 м; значит,

$$4x + 4y = 100. \qquad (1)$$

4. При движении в одном направлении первая точка догоняет вторую каждые 20 с. Это значит, что за 20 с первая точка проходит расстояние на один оборот (т.е. на 100 м) больше второй.

5. За 20 с первая точка проходит расстояние $20x$ м, а вторая — $20y$ м. Таким образом, получаем уравнение

$$20x - 20y = 100. \qquad (2)$$

6. Решив систему уравнений (1) и (2), находим $x = 15$, $y = 10$.

7. По смыслу задачи $x > y > 0$. Ясно также, что $4x < 100$, $4y < 100$ и $20x > 100$. Следовательно, $5 < x < 25$, $0 < y < 25$. Найденные значения x и y этим условиям удовлетворяют.

8. *Ответ:* 15 м/с; 10 м/с.

4. По окружности длиной 60 м равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее другой. При этом совпадение точек происходит каждый раз через 1 мин. Определить скорости точек.

1. Пусть первая точка совершает полный оборот за x с, а вторая — за y с.

2. Тогда скорости точек будут равны $v_1 = \frac{60}{x}$ м/с $= \frac{3600}{x}$ м/мин, $v_2 = \frac{60}{y}$ м/с $= \frac{3600}{y}$ м/мин.

3. Предположим, что $x < y$; тогда из условия задачи следует уравнение

$$y - x = 5. \tag{1}$$

4. Так как совпадение точек происходит каждую минуту и первая движется быстрее, то она должна за 1 мин пройти полную окружность длиной 60 м и еще столько, сколько успеет пройти за 1 мин вторая точка, т.е. $\frac{3600}{y}$ м.

5. Отсюда имеем второе уравнение:

$$\frac{3600}{x} = \frac{3600}{y} + 60. \tag{2}$$

6. Решив систему уравнений (1), (2), получим $x = 15$, $y = 20$. Значит, $v_1 = \frac{60}{15} = 4$, $v_2 = \frac{60}{20} = 3$.

7. *Ответ:* 4 м/с; 3 м/с.

5. По окружности движутся два тела; первое пробегает окружность на 5 с быстрее второго. Если тела движутся в одном направлении, то они сходятся через каждые 100 с. Какую часть окружности (в градусах) пробегает каждое тело за 1 с?

1. Пусть за 1 с первое тело пробегает x градусов, а второе — y градусов.

2. Из условия следует, что

$$\frac{360}{y} - \frac{360}{x} = 5. \tag{1}$$

3. Каждую секунду расстояние между телами (по дуге) увеличивается на $(x - y)$ градусов.

4. За время, прошедшее от одного совпадения тел до следующего (т.е. за 100 с), расстояние между ними увеличивается на 360°.

5. Поэтому

$$100(x - y) = 360. \qquad (2)$$

6. Система уравнений (1), (2) имеет два решения: $x_1 = 18$, $y_1 = 14{,}4$; $x_2 = -14{,}4$, $y_2 = -18$.

7. Оба этих решения годятся, их физический смысл один и тот же (меняются только номера тел и направления движения).

8. *Ответ:* 18°; 14°24′.

6. Предполагая, что стрелки часов движутся без скачков, установить, через какое время после того как часы показывали 4 ч, минутная стрелка догонит часовую.

1. За 1 мин минутная стрелка поворачивается на 6°, а часовая — на угол, в 12 раз меньший, т.е. на $\left(\frac{1}{2}\right)^\circ$.

2. В тот момент, когда часы показывают 4 ч, угол между часовой и минутной стрелками равен 120°.

3. За x минут минутная и часовая стрелки поворачиваются соответственно на $6x$ и $\frac{1}{2}x$ градусов.

4. Согласно условию, получаем уравнение

$$6x - \frac{1}{2}x = 120,$$

откуда находим искомое значение x.

5. *Ответ:* через $21\frac{9}{11}$ мин.

7. Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке стадиона. При этом скорость каждого из них постоянна и на пробег всей дорожки один затрачивает на 5 с меньше другого. Если они начнут бег с общего старта, то окажутся рядом через 30 с. Через какое время они встретятся, если побегут с общего старта одновременно в противоположных направлениях?

1. Пусть v_1 и v_2 — скорости спортсменов (в м/с), s — длина замкнутой дорожки (в м).

2. Тогда $\frac{s}{v_1}$, $\frac{s}{v_2}$ — промежутки времени, за которые пробегут один круг первый и второй спортсмены.

3. Предположим, что $v_2 > v_1$. Тогда получим уравнение

$$\frac{s}{v_1} - \frac{s}{v_2} = 5.$$

4. За 30 с спортсмены пробегают $30v_1$ м и $30v_2$ м соответственно.

5. Если они бегут в одном направлении, то в момент встречи второй пробежит на один круг больше, т.е.

$$s = 30(v_2 - v_1), \quad \text{или} \quad \frac{v_2}{s} - \frac{v_1}{s} = \frac{1}{30};$$

6. Положим $x = \frac{v_1}{s}$, $y = \frac{v_2}{s}$; тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 5, \\ y - x = \frac{1}{30}, \end{cases}$$

откуда $y = x + \frac{1}{30}$, $150x^2 + 5x - 1 = 0$, $x = \frac{1}{15}$ (так как $x > 0$), $y = \frac{1}{10}$.

7. Если спортсмены побегут одновременно с общего старта, но в противоположных направлениях, то они встретятся через

$$\frac{s}{v_1 + v_2} = \frac{1}{x + y} = \frac{1}{\frac{1}{15} + \frac{1}{10}} = 6\,(\text{с}).$$

8. *Ответ:* через 6 с.

8. Три гонщика A, B и C, стартовав одновременно, движутся с постоянным скоростями в одном направлении по кольцевому шоссе. В момент старта гонщик B находится перед гонщиком A на расстоянии $\frac{1}{3}$ длины шоссе, а гонщик C перед гонщиком B на таком же расстоянии. Гонщик A впервые догнал гонщика B в тот момент, когда B закончил свой первый круг, а еще через 10 мин гонщик A впервые догнал гонщика C. Гонщик B затрачивает на круг на 2,5 мин меньше, чем гонщик C. За сколько минут проезжает круг гонщик A?

1. Пусть длина кольцевого шоссе равна s м; время (в минутах), которое затрачивают на полный круг гонщики A, B и C, обозначим соответственно через x, y и z; скорости гонщиков (в м/мин) — соответственно через u, v и w. Тогда справедливы соотношения

$$ux = vy = wz = s. \tag{1}$$

2. Согласно условию, в момент одновременного старта гонщик B находится впереди (по направлению движения) гонщика A на расстоянии $\frac{s}{3}$, а гонщик C — впереди гонщика A на расстоянии $\frac{2s}{3}$.

3. Гонщик A впервые догнал гонщика B в тот момент, когда последний закончил свой первый круг, т.е. через y мин после старта, и за это время гонщик A проехал расстояние, на $\frac{s}{3}$ большее, чем гонщик B.

4. Таким образом, получаем уравнение

$$uy = \frac{4s}{3}. \tag{2}$$

5. Гонщик A впервые догнал гонщика C еще через 10 мин после того, как он догнал гонщика B, т.е. через $(y + 10)$ мин после старта. За это время гонщик A проехал расстояние, на $\frac{2s}{3}$ большее, чем гонщик C.

6. Следовательно, справедливо соотношение

$$u(y + 10) = w(y + 10) + \frac{2s}{3}. \tag{3}$$

7. Наконец, так как гонщик B затрачивает на круг на 2,5 мин меньше, чем C, то имеет место уравнение

$$z = y + \frac{5}{2}. \tag{4}$$

8. В результате приходим к системе уравнений (1)–(4).

9. Из этой системы нужно определить только значение x.

10. Подставляя выражения для u, v, w из (1) в (2) и (3) и сокращая полученные равенства на s (что возможно, так как $s \neq 0$ по смыслу задачи), имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} y = \frac{4}{3}x, \\ \frac{y+10}{x} = \frac{y+10}{z} + \frac{2}{3}, \\ z = y + \frac{5}{2}. \end{cases}$$

11. После исключения y и z получим квадратное уравнение $4x^2 - 45x - 225 = 0$, которое имеет корни $x_1 = 15$ и $x_2 = -\frac{15}{4}$ (не подходит по смыслу задачи).

12. *Ответ:* 15 мин.

5. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи с решениями

1. Турист, идущий к поезду, пройдя за первый час 3,5 км, рассчитал, что двигаясь с такой скоростью, он опоздает на 1 ч. Поэтому остальное расстояние он шел со скоростью 5 км/ч и пришел на станцию за 30 мин до отхода поезда. Определить, какое расстояние должен был пройти турист.

1. Пусть искомое расстояние равно x км; тогда при скорости 3,5 км/ч турист должен пройти это расстояние за $\frac{x}{3{,}5}$ ч.

2. Так как при этой скорости он опоздает к поезду на 1 ч, то в момент его выхода до отхода поезда оставалось $\left(\frac{x}{3{,}5}-1\right)$ ч.

3. Через 1 ч после выхода туриста до отхода поезда оставалось $\left(\frac{x}{3{,}5}-2\right)$ ч, а пройти нужно было еще $(x-3{,}5)$ км.

4. При скорости 5 км/ч турист прошел это расстояние за $\frac{x-3{,}5}{5}$ ч.

5. Так как он пришел за 0,5 ч до отхода поезда, то получаем уравнение

$$\frac{x}{3{,}5}-2-\frac{x-3{,}5}{5}=\frac{1}{2},$$

откуда находим $x=21$.

6. *Ответ:* 21 км.

2. Пассажир поезда знает, что на данном участке пути скорость поезда равна 40 км/ч. Как только мимо окна начал проходить встречный поезд, пассажир включил секундомер и заметил, что встречный поезд проходил мимо окна в течение 3 с. Определить скорость встречного поезда, если известно, что его длина равна 75 м.

1. Пусть x м/с — скорость встречного поезда.

2. Скорость поезда, в котором ехал пассажир, равна

$$40 \text{ км/ч} = \frac{40\,000}{3600}=\frac{100}{9} \text{ м/с}.$$

3. Встречный поезд за 3 с проехал расстояние $3x$ м, а поезд с пассажиром — расстояние $\frac{3\cdot 100}{9}=33\frac{1}{3}$ м.

4. По условию оба поезда вместе проехали 75 м, следовательно,

$$33\frac{1}{3}+3x=75,\quad x=13\frac{8}{9}\text{ м/с}=\frac{125\cdot 3600}{9\cdot 1000}=50\text{ км/ч}.$$

5. *Ответ:* 50 км/ч.

3. Дорога от пункта A до пункта B длиной в 11,5 км идет сначала в гору, затем по ровному участку, а потом под гору. Пешеход, идя из A в B, прошел весь путь за 2 ч 54 мин, а на обратный путь затратил 3 ч 6 мин. Скорость ходьбы составляла: в гору — 3 км/ч, по ровному месту — 4 км/ч, под гору — 5 км/ч. На каком протяжении дорога идет по ровному участку?

1. Пусть x км — длина дороги по ровному участку, y км — длина дороги в гору на пути из A в B.

2. Тогда длина дороги под гору на пути из A в B равна $11{,}5-(x+y)$ км.

3. Время, затраченное пешеходом на путь из A в B, составит

$$\frac{y}{3}+\frac{x}{4}+\frac{11{,}5-(x+y)}{5},$$

а время, затраченное пешеходом на путь из B в A, равно

$$\frac{11{,}5-(x+y)}{3}+\frac{x}{4}+\frac{y}{5}.$$

4. Таким образом, получим систему

$$\begin{cases}\dfrac{y}{3}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{11{,}5-(x+y)}{5}=2{,}9,\\ \dfrac{11{,}5-(x+y)}{3}+\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}=3{,}1,\end{cases}$$

откуда находим $x=4$.

5. *Ответ:* 4 км.

4. Дорога от почты A до поселка B идет сначала в гору на протяжении 2 км, затем — 4 км по ровному участку, а потом — 3 км под гору. Почтальон тратит на дорогу от A до B 2 ч 16 мин, а обратно — 2 ч 24 мин. Известно, что если почтальон, пройдя в направлении от A к B половину пути по ровному участку, вернется опять на почту, то на это он потратит 2 ч 4 мин. Определить скорости почтальона в гору, по ровному участку и под гору.

1. Воспользуемся схематическим чертежом к задаче (рис. 20), обозначив через u, v, w скорости почтальона в гору, по ровному участку и под гору соответственно.

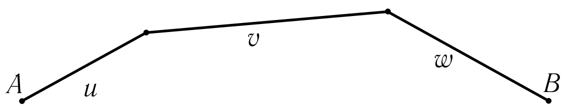


Рис. 20

2. Выразим время движения почтальона на каждом участке дороги через известные расстояния и введенные скорости, сложим их и приравняем к величинам, данным в условии:

$$\begin{cases} \frac{2}{u} + \frac{4}{v} + \frac{3}{w} = 2\frac{4}{15}, \\ \frac{3}{u} + \frac{4}{v} + \frac{2}{w} = 2\frac{2}{5}, \\ \frac{2}{u} + \frac{2}{v} + \frac{2}{v} + \frac{2}{w} = 2\frac{1}{15}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2a + 4b + 3c = \frac{34}{15}, & (1) \\ 3a + 4b + 2c = \frac{12}{5}, & (2) \\ a + 2b + c = \frac{31}{30}, & (3) \end{cases}$$

где $a = \frac{1}{u}$, $b = \frac{1}{v}$, $c = \frac{1}{w}$.

3. Решим полученную систему.

а) Сложив уравнения (1) и (2), получим

$$5a + 8b + 5c = \frac{14}{3}, \quad \text{или} \quad 8b + 5(a + c) = \frac{14}{3}. \qquad (4)$$

б) Из уравнения (3) выразим $a + c = \frac{31}{30} - 2b$ и подставим это выражение в (4):

$$8b + \frac{31}{6} - 10b = \frac{14}{3}.$$

Отсюда $b = \frac{1}{4}$ и $v = \frac{1}{b} = 4$.

в) Подставив $b = \frac{1}{4}$ в уравнения (2) и (3), получим систему

$$\begin{cases} 3a + 2c = \frac{7}{5}, \\ a + c = \frac{8}{15}, \end{cases}$$

откуда $a = \frac{1}{3}$, $c = \frac{1}{5}$.

4. *Ответ:* 3 км/ч; 4 км/ч; 5 км/ч.

5. Турист преодолел расстояние в 20 км, причем 1 ч он проехал на велосипеде, а 2 ч прошел пешком. Найти скорость туриста при движении на велосипеде, если каждый километр на велосипеде он преодолевал на 10 мин быстрее, чем пешком.

1. Пусть x км/ч — скорость туриста при движении на велосипеде, а y км/ч — скорость движения туриста пешком.

2. Согласно условия задачи получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 20, & (1) \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6}. & (2) \end{cases}$$

3. Из уравнения (1) следует, что $x = 20 - 2y$. Подставив это выражение в уравнение (2), получим квадратное уравнение $y^2 - 19y + 60 = 0$. Оно имеет два корня: $y_1 = 4$, $y_2 = 15$, из которых второй, очевидно, является посторонним.

4. Итак, $x = 12$.

5. *Ответ:* 12 км/ч.

6. Две машины выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Одна машина едет со скоростью 50 км/ч, другая — 40 км/ч. Спустя 0,5 ч из того же пункта и в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую на 1,5 ч позже, чем вторую. Найти скорость третьей машины.

1. Пусть v (км/ч) — скорость третьей машины, t (ч) — время движения второй машины до того момента, когда ее обогнала третья.

2. К тому моменту, когда третья машина догнала вторую, они проехали соответственно $v(t - 0{,}5)$ км и $40t$ км.

3. К тому моменту, когда третья машина догнала первую, они проехали соответственно $v(t + 1)$ км и $50(t + 1{,}5)$ км.

4. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} 40t = v(t - 0{,}5), \\ 50(t + 1{,}5) = v(t + 1), \end{cases}$$

откуда $v = 60$.

5. *Ответ:* 60 км/ч.

7. Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль со скоростью 50 км/ч. Одновременно из B в A выехал легковой автомобиль. Через 2 ч расстояние между автомобилями сократилось вдвое.

Найти расстояние между A и B, если легковой автомобиль после их встречи прибыл в A на 6 ч раньше, чем грузовой в B.

1. Пусть s (км) — расстояние между пунктами A и B, v (км/ч) — скорость легкового автомобиля.

2. Воспользуемся чертежом (рис. 21), на котором обозначены направления движения и место встречи — точка C.

Рис. 21

3. В начальный момент времени расстояние между автомобилями было равно s км; за 2 ч грузовой автомобиль проехал 100 км, а легковой — $2v$ км и расстояние между ними составило $\frac{s}{2}$ км.

4. Исходя из сказанного получим уравнение

$$100 + 2v = \frac{s}{2}, \quad \text{или} \quad 200 + 4v = s. \qquad (1)$$

5. Очевидно, что автомобили встретятся через 4 ч. За это время грузовой автомобиль проедет путь $AC = 200$ км, а легковой — путь $BC = 4v$ км.

6. Путь от C до B грузовой автомобиль проедет за $\frac{4v}{50}$ ч, а путь от C до A легковой автомобиль проедет за $\frac{200}{v}$ ч.

7. Согласно условию, имеем уравнение

$$\frac{4v}{50} - \frac{200}{v} = 6. \qquad (2)$$

8. Решив систему уравнений (1), (2), находим $v = 100$, $s = 600$.

9. *Ответ:* 600 км.

8. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Когда они встретились, оказалось, что первый проехал на 8 км больше, чем второй. После встречи каждый из них продолжал свой путь и первый приехал в B через 1 ч 30 мин, а второй в A — через 2 ч 40 мин. Найти расстояние между A и B.

1. Введем обозначения: s (км) — путь, пройденный до встречи вторым велосипедистом; v_1 и v_2 (км/ч) — скорости первого и второго велосипедистов.

2. Запишем соответствующую условиям задачи систему

$$\begin{cases} \dfrac{s+8}{v_1} = \dfrac{s}{v_2}, \\ \dfrac{s}{v_1} = \dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{s+8}{v_2} = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{s+8}{s} = \dfrac{v_1}{v_2}, \\ v_1 = \dfrac{2}{3}s, \\ v_2 = \dfrac{3}{8}(s+8) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{s+8}{s} = \dfrac{2}{3}s \cdot \dfrac{8}{3(s+8)} = \dfrac{16}{9} \cdot \dfrac{s}{s+8}, \\ v_1 = \dfrac{2}{3}s, \\ v_2 = \dfrac{3}{8}(s+8). \end{cases}$$

3. Из первого уравнения системы находим $s = 24$.

4. Второй велосипедист проехал до встречи 24 км, а первый $24 + {}$ $+8 = 32$ (км). Итак, искомое расстояние равно 56 км.

5. *Ответ:* 56 км.

9. Из точек A и B одновременно начали двигаться два тела навстречу друг другу. Первое в первую минуту прошло 1 м, а в каждую последующую проходило на 0,5 м больше, чем в предыдущую. Второе тело проходило каждую минуту по 6 м. Через сколько минут оба тела встретились, если расстояние между A и B равно 117 м?

1. Пусть n (мин) — время, прошедшее с момента начала движения тел до их встречи. Очевидно, что расстояние, пройденное первым телом, равно сумме n членов арифметической прогрессии.

2. Эта сумма выражается формулой

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n,$$

где $a_1 = 1$, $d = 0{,}5$, т.е.

$$S_n = \frac{2 \cdot 1 + 0{,}5(n-1)}{2} \cdot n = \frac{1{,}5 + 0{,}5n}{2} \cdot n.$$

3. Расстояние, пройденное вторым телом, равно $6n$.

4. Составим уравнение

$$\frac{1{,}5 + 0{,}5n}{2} \cdot n + 6n = 117, \quad \text{или} \quad n^2 + 27n - 468 = 0,$$

которое имеет корни $n_1 = 12$, $n_2 = -39$ (не подходит по смыслу).

5. *Ответ:* через 12 мин.

10. Расстояние между двумя станциями экспресс проходит на 1 ч 20 мин быстрее товарного поезда и на 30 мин быстрее пассажирского. Скорость товарного поезда составляет $\frac{9}{14}$ скорости пассажирского и на 48 км/ч меньше скорости экспресса. Найти скорость товарного поезда.

1. Пусть s (км) — расстояние между станциями; $t_{\text{э}}$, $t_{\text{п}}$, $t_{\text{т}}$ — промежутки времени, за которое проходят это расстояние экспресс, пассажирский и товарный поезд соответственно (в часах): $v_{\text{э}}$, $v_{\text{п}}$, $v_{\text{т}}$ — скорости этих поездов (в км/ч).

2. Согласно условию получаем систему

$$\begin{cases} t_{\text{т}} - t_{\text{э}} = \frac{4}{3}, \\ t_{\text{п}} - t_{\text{э}} = \frac{1}{2}, \\ v_{\text{т}} = \frac{9}{14} v_{\text{п}}, \\ v_{\text{т}} = v_{\text{э}} - 48. \end{cases}$$

3. Так как $v_{\text{э}} = \frac{s}{t_{\text{э}}}$, $v_{\text{п}} = \frac{s}{t_{\text{п}}}$, $v_{\text{т}} = \frac{s}{t_{\text{т}}}$, то находим решение системы: $s = 84$, $t_{\text{т}} = \frac{7}{3}$, $v_t = 36$.

4. *Ответ:* 36 км/ч.

11. Из пункта A в пункт B доставлена почта. Сначала ее вез мотоциклист; проехав $\frac{2}{3}$ расстояния от A до B, он передал почту ожидавшему его велосипедисту, который и доставил ее в пункт B (время, потребовавшееся на передачу почты, считается равным нулю). При этом почта была доставлена из A в B за время, необходимое, чтобы проехать от A до B со скоростью 40 км/ч. Известно, что если бы мотоциклист и велосипедист выехали из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу, то они встретились бы через промежуток времени, необходимый для проезда от A до B со скоростью 100 км/ч.

Найти скорость мотоциклиста, считая, что она больше скорости велосипедиста.

1. Пусть s (км) — расстояние между пунктами A и B; x (км/ч) — скорость мотоциклиста, а y (км/ч) — скорость велосипедиста.

2. Расстояние $\frac{2}{3}s$ км мотоциклист проехал за $\frac{2}{3} \cdot \frac{s}{x}$ ч, а расстояние $\frac{1}{3}s$ км велосипедист проехал за $\frac{1}{3} \cdot \frac{s}{y}$ ч.

3. Почта из A в B была доставлена за $\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{s}{y}\right)$ ч, и это время по условию составляет $\frac{s}{40}$ ч.

4. Поэтому имеем первое уравнение

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{s}{y}=\frac{s}{40}. \qquad (1)$$

5. Если бы мотоциклист и велосипедист выехали навстречу друг другу, то они встретились бы через $\frac{s}{x+y}$ ч, и это время по условию составляет $\frac{s}{100}$ ч.

6. Поэтому имеем второе уравнение

$$\frac{s}{100}=\frac{s}{x+y}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{100}=\frac{1}{x+y}. \qquad (2)$$

7. Для нахождения x и y получаем систему

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{y}=\frac{1}{40}, \\ \frac{1}{100}=\frac{1}{x+y}. \end{cases} \qquad (3)$$

8. Из второго уравнения системы (3) следует, что $y=100-x$; подставляя $100-x$ вместо y в первое уравнение системы (3), получим уравнение

$$\frac{2}{3x}+\frac{1}{3(100-x)}=\frac{1}{40},$$

которое имеет корни $x_1=80$, $x_2=\frac{100}{3}$.

9. Значит, система (3) имеет два решения: $x_1=80$, $y_1=20$; $x_2=\frac{100}{3}$, $y_2=\frac{200}{3}$.

10. Так как по условию скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста, то требованиям задачи удовлетворяет только одно решение системы (3), а именно: $x_1=80$, $y_1=20$.

11. *Ответ:* 80 км/ч.

12. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу одновременно выезжают пассажирский поезд и экспресс. Каждый из них едет с постоянной скоростью, и в некоторый момент времени они встречаются. Если оба поезда шли со скоростью экспресса, то их встреча произошла бы на 3 ч раньше фактического момента встречи. Если же оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на 5 ч позже фактического момента встречи. Найти скорости поездов.

1. Обозначим скорости пассажирского поезда и экспресса соответственно через v_1 (км/ч) и v_2 (км/ч).

2. Тогда время, прошедшее от момента выхода поездов из начальных пунктов до их встречи, равно $\dfrac{2400}{v_1 + v_2}$ ч.

3. Если бы оба поезда ехали со скоростью v_2, то время в пути составило бы $\dfrac{2400}{2v_2}$ ч.

4. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{2400}{v_1 + v_2} - \frac{2400}{2v_2} = 3. \qquad (1)$$

5. Аналогично составляем второе уравнение:

$$\frac{2400}{2v_1} - \frac{2400}{v_1 + v_2} = 5. \qquad (2)$$

6. Приведя дроби к общему знаменателю, после упрощения получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{v_2 - v_1}{v_2(v_1 + v_2)} = \dfrac{1}{400}, & (3) \\ \dfrac{v_2 - v_1}{v_1(v_1 + v_2)} = \dfrac{1}{240}. & (4) \end{cases}$$

7. Почленно разделив уравнение (4) на уравнение (3), имеем $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{5}{3}$, или $v_2 = \dfrac{5}{3}\,v_1$.

8. Подставив $\dfrac{5}{3}\,v_1$ вместо v_2 в уравнение (4), находим $v_1 = 60$. Тогда $v_2 = 100$.

9. *Ответ:* 60 км/ч; 100 км/ч.

13. Два приятеля в одной лодке прокатились по реке вдоль берега и вернулись по одной и той же речной трассе через 5 ч с момента отплытия. Протяженность всего рейса составила 10 км. По их подсчетам получилось, что на каждые 2 км против течения в среднем потребовалось столько же времени, сколько на каждые 3 км по течению. Найти скорость течения реки, а также время проезда туда и время проезда обратно.

1. Пусть x — скорость течения реки; v — скорость гребцов.

2. Тогда $v + x$ — скорость движения лодки по течению; $v - x$ — скорость движения лодки против течения.

3. Далее, $\dfrac{5}{v + x}$ — время движения по течению; $\dfrac{5}{v - x}$ — время движения против течения.

4. Составим систему

$$\begin{cases} \dfrac{5}{v+x} + \dfrac{5}{v-x} = 5, \\ \dfrac{2}{v-x} = \dfrac{3}{v+x}, \end{cases}$$

откуда находим $x = \dfrac{5}{12}$, $v = \dfrac{25}{12}$.

5. Значит, время движения по течению реки равно $\dfrac{5}{\frac{25}{12}+\frac{5}{12}} = 2$ (ч), а против течения $\dfrac{5}{\frac{25}{12}-\frac{5}{12}} = 3$ (ч).

6. *Ответ:* $\dfrac{5}{12}$ км/ч; 2 ч и 3 ч.

14. Спускаясь по движущемуся эскалатору, пассажир проходит до его конца 30 ступенек. При движении против хода эскалатора ему приходится преодолевать 150 ступенек. Сколько ступенек он пройдет, если будет спускаться по неподвижному эскалатору?

1. Отметим, что требуется найти длину эскалатора не в метрах, а в ступеньках (ст.).

2. Движение по ходу эскалатора и против его хода аналогично движению по реке.

3. В соответствии с этим пусть N (ст.) — длина эскалатора, v (ст./мин) — скорость пассажира, v_1 (ст./мин) — скорость эскалатора. Тогда время движения пассажира по ходу эскалатора составит $\dfrac{N}{v+v_1}$ мин, а против хода $\dfrac{N}{v-v_1}$ мин.

4. Так как произведение времени на скорость дает путь, а пассажир по ходу движения эскалатора проделал путь в 30 ступенек, то

$$\frac{N}{v+v_1} \cdot v = 30. \tag{1}$$

5. Аналогично при движении против хода эскалатора имеем

$$\frac{N}{v-v_1} \cdot v = 150. \tag{2}$$

6. Решим систему уравнений (1), (2).

7. Разделив уравнение (1) на уравнение (2), получим $\dfrac{v-v_1}{v+v_1} = \dfrac{1}{5}$, откуда $v_1 = \dfrac{2}{3}v$.

8. Подставляя это выражение в любое из уравнений (1) или (2), находим $N = 50$.

9. *Ответ:* 50 ступенек.

15. Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 ч утра из A в B отправляется плот. В тот же момент времени из B в A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 ч. Доплыв до A, лодка поворачивает обратно и приплывает в B одновременно с плотом. Успеют ли лодка и плот прибыть в B к 9 ч вечера того же дня?

1. Лодка и плот отправляются одновременно и встречаются через 5 ч.

2. Пусть v_1 (км/ч) — собственная скорость лодки; v_2 (км/ч) — скорость движения плота (скорость течения); s (км) — расстояние между A и B.

3. Тогда $\frac{s}{v_2}$ — время движения плота, $\dfrac{s}{v_1+v_2}$ — время движения лодки по течению и $\dfrac{s}{v_1-v_2}$ — время движения лодки против течения.

4. Согласно условию, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{s}{v_2+(v_1-v_2)} = 5, \\ \dfrac{s}{v_2} = \dfrac{s}{v_1-v_2} + \dfrac{s}{v_1+v_2}, \end{cases}$$

откуда следует, что $\frac{s}{v_1} = 5$, $\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{2}-1$. Значит,

$$\frac{s}{v_2} = \frac{\frac{s}{v_1}}{\frac{v_2}{v_1}} = \frac{5}{\sqrt{2}-1} = 5(\sqrt{2}+1) > 12.$$

5. *Ответ:* не успеют.

16. Пристань A расположена в 27 км от пристани B ниже по течению реки. От A по направлению к B отходит первая лодка, а через 1 ч после этого навстречу ей от B отходит вторая лодка. Лодки встречаются в 18 км от пристани B. Если бы лодки отошли от пристаней A и B навстречу друг другу одновременно, то они встретились бы через 2,25 ч. Найти скорость первой лодки в стоячей воде, если известно, что она вдвое больше скорости течения реки.

1. Обозначим через v_1 и v_2 собственные скорости лодок, а через u — скорость течения реки (все величины в км/ч). Тогда

$$v_1 = 2u. \qquad (1)$$

2. Далее, из условия задачи следует уравнение

$$\frac{27}{v_1 + v_2} = \frac{9}{4}. \qquad (2)$$

3. Наконец, еще одно условие задачи можно записать в виде уравнения

$$\frac{27 - (v_1 - u)}{v_1 + v_2} \cdot (v_2 + u) = 18. \qquad (3)$$

Здесь отношение $\frac{27 - (v_1 - u)}{v_1 + v_2}$ определяет время, затраченное лодками до встречи друг с другом и отсчитываемое от момента выхода второй лодки.

4. Исключая величины v_1 и v_2 из уравнения (3) с помощью равенств (1) и (2), приходим к квадратному уравнению

$$u^2 - 39u + 108 = 0,$$

откуда $u_1 = 36$ км/ч; $u_2 = 3$ км/ч. Первое значение не подходит, поскольку тогда $v_1 = 2u = 72$, а из уравнения (2) следует, что $v_1 + v_2 = 12$ $(v_2 > 0)$. Итак, $u = 3$ км/ч.

5. *Ответ:* 6 км/ч.

17. Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, сходятся через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то встречались бы через каждые 8 мин. Известно, что при движении в противоположных направлениях расстояние (по окружности) между сближающимися телами уменьшилось с 40 м до 26 м за 24 с. Сколько метров в минуту проходит каждое тело и какова длина окружности?

1. Обозначим скорость одного тела (выраженную в м/мин) через x, а скорость другого — через y. Предположим, что $x > y$.

2. Пусть тела движутся в одном и том же направлении и сходятся в некоторой точке A.

3. Пусть ближайшая следующая встреча происходит в точке B (заранее не исключается, что точка B совпадает с точкой A; это будет, например, в случае, если скорость первого тела вдвое больше скорости второго; тогда до ближайшей встречи первое тело сделает два полных оборота, а второе — один).

4. На пути от A к B (этот путь для одного тела или для обоих может покрывать сам себя) второе тело отстает от первого, и в момент ближайшего совпадения отставание составит длину полной окружности.

5. Так как между двумя ближайшими совпадениями тел протекает 56 мин, за которые первое тело проходит $56x$ м, а второе $56y$ м, то длина окружности равна $56x - 56y$.

6. Пусть тела движутся в противоположных направлениях. Тогда расстояния, пройденные за время, протекающее между двумя ближайшими встречами, т.е. за 8 мин, в сумме составят длину окружности. Следовательно, длина окружности равна $8x + 8y$.

7. Имеем уравнение

$$56x - 56y = 8x + 8y. \qquad (1)$$

8. Согласно условию, за 24 с расстояние между телами уменьшилось на $40 - 26 = 14$ (м).

9. За эти 24 с тела не встречались; поэтому уменьшение расстояния равно сумме расстояний, пройденных телами за 24 с$= \frac{2}{5}$ мин. Получаем уравнение

$$\frac{2}{5}x + \frac{2}{5}y = 14. \qquad (2)$$

10. Решив систему уравнений (1), (2), находим $x = 20$, $y = 15$.

11. *Ответ:* 20 м/мин; 15 м/мин; 280 м.

Задачи для самостоятельного решения

1. Половина пути из пункта A в пункт B идет в гору, а другая половина — под гору. Машина перевозила груз из A в B и вернулась обратно порожней. Скорость машины с грузом составляет: в гору 20 км/ч, под гору 30 км/ч; скорость порожней машины составляет: в гору 40 км/ч, под гору 60 км/ч. Найти среднюю скорость машины, с которой она преодолела путь из A в B и обратно.

2. После 1125 км пути из города A в город B самолет сделал вынужденную посадку и задержался на 30 мин. Для того чтобы прибыть по расписанию, скорость самолета была увеличена на 187,5 км/ч. Какова была первоначальная скорость самолета, если расстояние между городами A и B равно 3000 км?

3. Расстояние между пунктами A и B равно 78 км. Из пункта A выезжает велосипедист по направлению к B. Через 1 ч навстречу ему из пункта B отправляется другой велосипедист, проезжающий за 1 ч на 4 км больше первого. Велосипедисты встретились на расстоянии 60 км от B. Сколько часов и с какой скоростью ехал до встречи каждый велосипедист?

4. Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 100 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Через 4 ч они встретились. После встречи скорость первого велосипедиста, едущего из A в B, возросла на 5 км/ч, а скорость второго велосипедиста, едущего из B в A, возросла на 10 км/ч. Известно, что первый велосипедист прибыл в пункт B на 1 ч раньше, чем второй прибыл в пункт A. Какова первоначальная скорость первого велосипедиста?

5. Из пункта A в пункт B отправился товарный поезд. Через 1,5 ч вслед за ним отправился пассажирский поезд, скорость которого на 5 км/ч больше скорости товарного. Спустя 15 ч после своего выхода пассажирский поезд не только обогнал товарный, но и был впереди на 21 км. Найти скорость товарного поезда.

6. Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч. За какое время пройдет все расстояние каждый турист, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 2,5 ч позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

7. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 300 км, одновременно навстречу друг другу выехали грузовой и легковой автомобили. Через 4 ч после начала движения они встретились. После встречи легковой автомобиль, едущий из A в B, увеличил свою скорость на 15 км/ч, а грузовой увеличил свою скорость на 30 км/ч. Определить первоначальную скорость легкового автомобиля, если известно, что он прибыл в пункт B на 1 ч раньше, чем грузовой автомобиль прибыл в пункт B.

8. Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 16 км от A, по горной дороге со скоростью 4 км/ч поднимается в гору турист. Одновременно с ним из A в B выехал мотоциклист. Доехав до пункта B менее, чем за 1 ч, мотоциклист поехал обратно навстречу туристу и встретил его через 15 мин после начала движения из пункта B. Найти скорость движения мотоциклиста на подъеме, если известно, что она на 20 км/ч меньше скорости на спуске.

9. Баржа, отчалив от пристани A, спустилась вниз по течению реки на 60 км до устья впадающего в реку притока и поднялась вверх по притоку (против течения) на 20 км до пристани B. Весь путь от A до B баржа прошла за 7 ч. Скорость течения реки и скорость течения притока равны 1 км/ч. Найти собственную скорость баржи.

10. Две точки движутся по окружности в одном и том же направлении. Длина окружности равна 24 м. Первая точка обходит окружность на 9 мин быстрее второй и обгоняет вторую каждые 4 мин. Определить скорости точек.

11. Две точки движутся по окружности длиной 1,2 м с постоянными скоростями. Если они движутся в разных направлениях, то встречаются через каждые 15 с. При движении в одном направлении одна точка догоняет другую через каждые 60 с. Определить скорости точек.

12. Считая, что стрелки часов движутся равномерно (без скачков), установить, через сколько минут после того как часы показывают 8 ч, минутная стрелка догонит часовую.

13. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно отправились два туриста. Через 1 ч после их встречи расстояние между ними составило 9 км. Первый турист прибыл в B через 2 ч, а второй в A — через 3 ч 7,5 мин после встречи. Найти скорость первого туриста.

14. Катер плыл вниз по реке и обогнал моторную лодку, скорость которой в неподвижной воде в 3 раза меньше собственной скорости катера. Спустя 2 ч после обгона катер повернул обратно и встретил моторную лодку. Какое время прошло с момента обгона до встречи?

15. Если пассажир из города в A в город B отправится поездом, то он затратит на эту поездку 20 ч. Если же он дождется самолета (а ждать придется более 5 ч), то он доберется до B за 10 ч (учитывая время ожидания самолета). В сколько раз скорость самолета больше скорости поезда, если пассажир, дождавшись самолета, догонит поезд через $\frac{8}{9}$ ч после вылета?

16. Трасса велогонки представляет собой контур прямоугольного треугольника с разностью катетов в 2 км, причем гипотенуза пролегает по проселочной дороге, а оба катета — по шоссе. Один из гонщиков прошел отрезок проселочной дороги со скоростью 30 км/ч, а оба отрезка по шоссе за то же время — со скоростью 42 км/ч. Найти протяженность трассы.

17. Моторная лодка проплыла вверх по течению реки 24 км и вернулась обратно, затратив на весь путь 1 ч 45 мин. Какова собственная скорость лодки, если известно, что она проплыла 4 км вниз по течению на $\frac{7}{8}$ ч быстрее, чем это сделал бы плот?

18. Юноша пошел к железнодорожной станции, расположенной в 10,5 км от его дома. Через 0,5 ч из того же дома вышел его брат и, двигаясь со скоростью 4 км/ч, догнал юношу, передал ему забытую им вещь, тут же повернул обратно и направился домой с той же скоростью. Какова скорость юноши, если известно, что он подошел к станции в тот момент, когда его брат вернулся домой?

19. В реку впадает приток. Пароход отходит от пристани A на притоке, идет вниз по течению 80 км до реки, далее по реке вверх против течения до пристани B, затратив 18 ч на весь путь от A до B. Затем пароход возвращается обратно. Время обратного движения от B до A по тому же пути равно 15 ч. Собственная скорость парохода равна 18 км/ч, а скорость течения реки равна 3 км/ч. Каково расстояние от пристани A до пристани B и какова скорость течения притока?

20. Пароход плывет от пристани A к пристани B и после 10-минутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с одной и той же постоянной скоростью. На пути из A в B в 8 ч пароход догоняет лодку, которая движется из A в B с постоянной скоростью 3 км/ч. В 8 ч 10 мин лодка находится на расстоянии 1,5 км от A. Пароход, направляясь из B в A после стоянки, встречается в 8 ч 20 мин с лодкой и затем прибывает в A в то же время, когда лодка приходит в B. Определить время прибытия лодки в B.

Ответы

1. 32 км/ч. **2.** 7500 км/ч. **3.** 14 км/ч и 3 ч; 18 км/ч и 2 ч. **4.** 15 км/ч. **5.** 36 км/ч. **6.** 7,5 ч; 5 ч. **7.** 45 км/ч. **8.** 32 км/ч. **9.** 11 км/ч. **10.** 8 м/мин; 2 м/мин. **11.** 0,03 м/с; 0,05 м/с. **12.** Через $43\dfrac{7}{11}$ мин. **13.** 5 км/ч. **14.** 1 ч. **15.** В 10 раз. **16.** 24 км. **17.** 28 км/ч. **18.** 3 км/ч. **19.** 290 км; 2 км/ч. **20.** 8 ч 30 мин.

Глава 4

ЗАДАЧИ НА РАБОТУ

1. ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПОНЕНТОВ РАБОТЫ

1°. Задачи на работу во многих случаях схожи с задачами на движение. Основными компонентами в задачах на работу являются:

а) объем работы (A);

б) производительность труда (W), т.е. количество единиц работы, выполняемых за единицу времени (скорость выполнения работы);

в) время выполнения всего количества работы (t).

2°. Зависимость между этими величинами напоминает зависимость между соответствующими компонентами движения:

$$A = Wt, \quad W = \frac{A}{t}, \quad t = \frac{A}{W}. \tag{1}$$

3°. Если объем работы выражается в каких-либо единицах, то производительность труда измеряется в ед./мин, ед./ч, ед./день и т.д. Например, производительность станка может выражать число деталей, изготавливаемых в минуту, час, день и т.д.

Задачи с решениями

1. Одна тракторная бригада вспахала 240 га, а другая — на 35% больше, чем первая. Ежедневно первая бригада вспахивала на 3 га меньше, чем вторая, но закончила работу на два дня раньше второй. Сколько гектаров земли вспахивала каждая бригада за один рабочий день, если известно, что намеченная ежедневная норма в 20 га перевыполнялась обеими бригадами?

1. Прежде всего заметим, что вторая бригада вспахала поле площадью в $135\%(240 \text{ га}) = 324$ га.

2. Обозначим через x (га/день) производительность второй бригады (т.е. x — количество вспаханных гектаров в день).

3. Составим следующую таблицу:

Компоненты работы	**Первая бригада**	**Вторая бригада**
Объем работы (га)	240	324
Производительность (га/день)	$x-3$	x
Время (дни)	$\frac{240}{x-3}$	$\frac{324}{x}$

4. Учитывая, что первая бригада работала на два дня меньше, получаем уравнение

$$\frac{324}{x} - \frac{240}{x-3} = 2, \quad \text{или} \quad x^2 - 45x + 486 = 0, \quad x_1 = 27, \quad x_2 = 18.$$

Так как по условию $x > 20$, то искомая производительность второй бригады есть $x = 27$. Тогда производительность первой бригады равна $x - 3 = 24$.

5. *Ответ:* 24 га/день; 27 га/день.

2. Бригада рабочих должна была изготовить за смену 7200 деталей, причем каждый рабочий планировал изготовить одинаковое количество деталей. Однако трое рабочих заболели, поэтому для выполнения нормы каждому из оставшихся рабочих пришлось сделать на 400 деталей больше. Сколько рабочих было в бригаде первоначально?

1. Обозначим искомое число рабочих через n. Тогда каждый рабочий за смену должен был изготовить $\frac{7200}{n}$ деталей (это плановая производительность рабочего).

2. На самом деле было $n - 3$ рабочих, поэтому каждый изготавливал по $\frac{7200}{n-3}$ деталей (фактическая производительность).

3. Так как фактическая производительность была выше плановой на 400 деталей, то получаем уравнение

$$\frac{7200}{n-3} - \frac{7200}{n} = 400, \quad \text{или} \quad \frac{18}{n-3} - \frac{18}{n} = 1, \quad \text{или } n^2 - 3n - 54 = 0,$$

откуда $n_1 = 9$, $n_2 = -6$ (не подходит по смыслу задачи).

4. *Ответ:* 9 рабочих.

3. Цех должен был изготовить 8000 одинаковых изделий в определенный срок. Фактически работа была выполнена на 8 дней раньше срока, так как цех ежедневно выпускал на 50 изделий больше, чем было предусмотрено планом. В какой срок цех должен был закончить работу и на сколько процентов ежедневно перевыполнялся план?

1. Составим следующую таблицу:

Компоненты работы	**По плану**	**Фактически**
Объем (шт.)	8000	8000
Время (дни)	x	$x-8$
Производительность (шт./день)	$\frac{8000}{x}$	$\frac{8000}{x-8}$

2. Теперь, используя условие, получим уравнение

$$\frac{8000}{x-8}-\frac{8000}{x}=50, \quad \text{или} \quad x^2-8x-1280=0,$$

откуда $x_1=40$, $x_2=-32$ (не подходит по смыслу задачи).

3. Следовательно, плановый срок составляет 40 дней, фактический срок — 32 дня; плановая производительность — 200 шт./день, а фактическая — 250 шт./день.

4. Перевыполнение плана на 50 шт./день составляет $\frac{50}{200}\cdot 100\% =$ $= 25\%$.

5. *Ответ:* 40 дней; 25%.

4. Токарь вытачивает шахматные пешки для определенного числа комплектов шахмат. Он хочет научиться изготавливать ежедневно на 2 пешки больше, чем теперь, тогда такое же задание он выполнит на 10 дней быстрее. Если бы ему удалось научиться изготавливать ежедневно на 4 пешки больше, чем теперь, то срок выполнения такого же задания уменьшился бы на 16 дней. Сколько комплектов шахмат обеспечивает пешками токарь, если для каждого комплекта нужно 16 пешек?

1. Предположим, что токарь вытачивает x пешек для определенного числа комплектов шахмат, причем в день он вытачивает y пешек.

2. Тогда он выполнит задание за $\frac{x}{y}$ дней.

3. Соответственно если он будет вытачивать в день $(y+2)$ пешки или $(y+4)$ пешки, то выполнит задание за $\frac{x}{y+2}$ дня или за $\frac{x}{y+4}$ дня.

4. Согласно условию, составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \dfrac{x}{y+2} = 10, \\ \frac{x}{y} - \dfrac{x}{y+4} = 16, \end{cases}$$

откуда находим $x = 240$, $y = 6$.

5. Так как на каждый комплект нужно 16 пешек, то число комплектов равно $240 : 16 = 15$.

6. *Ответ:* 15 комплектов.

5. Бригада рыбаков намеревалась выловить в определенный срок 1800 ц рыбы. Треть этого срока был шторм, вследствие чего плановое задание ежедневно недовыполнялось на 20 ц. Однако в остальные дни бригаде удавалось ежедневно вылавливать на 20 ц больше ежедневной нормы, и плановое задание было выполнено за день до срока. Сколько центнеров рыбы намеревалась вылавливать бригада рыбаков ежедневно?

1. Пусть x дней — планируемый срок лова рыбы, а y ц — планируемый улов рыбы в день.

2. Составим уравнение

$$xy = 1800. \qquad (1)$$

3. Так как $\frac{1}{3}$ планируемого срока был шторм, т.е. за это время бригада выловила $(y - 20)\frac{x}{3}$ (ц).

4. В оставшееся время бригада выловила $(y + 20)\left(\frac{2x}{3} - 1\right)$ (ц).

5. Составим уравнение

$$(y - 20)\frac{x}{3} + (y + 20)\left(\frac{2}{3}x - 1\right) = 1800. \qquad (2)$$

6. Решив систему уравнений (1), (2), находим $y = 100$.

7. *Ответ:* 100 ц.

6. Заказ по выпуску машин завод должен был выполнить за 20 дней. Выпуская ежедневно по 3 машины сверх плана, завод уже за два дня до срока изготовил на 6 машин больше, чем было предусмотрено в заказе. Сколько машин согласно заказу должен был выпустить завод?

1. Пусть завод должен был выпускать в день x машин.

2. На самом деле завод выпускал в день $(x + 3)$ машин.

3. Всего по плану завод должен был выпустить $20x$ машин.

4. За два дня до срока завод выпустил $18(x+3)$ машин.

5. Согласно условию, составим уравнение

$$18(x+3) - 20x = 6,$$

откуда $x = 24$.

6. Итак, завод должен был выпустить $24 \cdot 20 = 480$ машин.

7. *Ответ:* 480 машин.

7. Тракторист должен вспахать 27 га. Проработав 2,5 ч, он стал вспахивать в час на 2 га больше и закончил работу на 30 мин раньше предусмотренного срока. Сколько гектаров в час тракторист вспахивал первоначально?

1. Пусть тракторист вспахивал первоначально x га/ч.

2. Тогда за 2,5 ч он вспахал $2{,}5x$ га.

3. Ему осталось вспахать $(27 - 2{,}5x)$ га; эту оставшуюся часть он вспахал за $\dfrac{27-2{,}5x}{x+2}$ ч.

4. Всего на вспашку 27 га тракторист затратил

$$\left(\frac{27-2{,}5x}{x+2} + 2{,}5\right) \text{ ч.}$$

5. Согласно условию, получим уравнение

$$\frac{27-2{,}5x}{x+2} + 2{,}5 = \frac{27}{x} - 0{,}5,$$

откуда $x_1 = 6$, $x_2 = -18$ (не подходит по смыслу задачи).

6. *Ответ:* 6 га/ч.

8. По плану предприятие на протяжении нескольких месяцев должно было изготовить 6000 насосов. Увеличив производительность, предприятие стало изготавливать в месяц на 70 насосов больше, чем было предусмотрено, и на один месяц раньше условленного срока перевыполнило плановое задание на 30 насосов. Сколько месяцев предприятие должно было работать, чтобы выполнить план?

1. Пусть выполнение планового задания составляет x месяцев.

2. Тогда за $(x-1)$ месяцев было изготовлено 6030 насосов.

3. Предприятие планировало изготавливать за месяц $\dfrac{6000}{x}$ насосов, а фактически изготавливало $\dfrac{6030}{x-1}$ насосов.

4. Из условия задачи следует уравнение

$$\frac{6030}{x-1} - \frac{6000}{x} = 70.$$

5. Решив это уравнение, получим $x_1 = 10$, $x_2 = -\frac{60}{7}$ (не подходит по смыслу задачи).

6. *Ответ:* 10 месяцев.

9. Бригада лесорубов должна была заготовить 216 м^3 древесины. После первых трех дней работы бригада стала перевыполнять плановую дневную норму на 8 м^3, поэтому за один день до планируемого срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Определить плановую дневную норму бригады.

1. Пусть W м^3 — плановая дневная норма.

2. Тогда по плану бригада должна была работать $\frac{216}{W}$ дней.

3. За первые три дня работы бригада заготовила $3W$ м^3 древесины.

4. Значит, работая с производительностью $(W+8)$ м^3, за оставшееся время бригада заготовила $(232-3W)$ м^3 древесины, затратив на это $\dfrac{232-3W}{W+8}$ дней.

5. Учитывая, что работа была закончена за один день раньше планируемого срока, составим уравнение

$$\frac{216}{W} = 3 + \frac{232-3W}{W+8} + 1, \quad \text{или} \quad W^2 + 48W - 1728 = 0,$$

откуда находим $W_1 = 24$, $W_2 = -72$ (не подходит по смыслу задачи).

6. *Ответ:* 24 м^3.

10. Мастер изготовил за день некоторое количество деталей. В дальнейшем он ежедневно увеличивал число производимых деталей на $p\%$ ($p < 50\%$). Во второй день он изготовил на 5 деталей больше, чем в первый. В третий день он изготовил 36 деталей. Сколько деталей изготовил мастер за три дня?

1. Пусть в первый день мастер изготовил x деталей; p — увеличение производительности труда мастера (в долях).

2. Тогда согласно условию получим систему уравнений

$$\begin{cases} xp = 5, \\ (x+5)(1+p) = 36, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} p = \frac{5}{x}, \\ (x+5)\left(1+\frac{5}{x}\right) = 36, \end{cases}$$

откуда $x_1 = 1$ (не подходит поскольку $p < 50\%$), $x_2 = 25$.

3. Следовательно, $p = \frac{5}{25} \cdot 100\% = 20\%$.

4. Итак, в первый день мастер изготовил 25 деталей, во второй — 30, в третий — 36.

5. *Ответ:* 91 деталь.

2. ЗАДАЧИ НА СОВМЕСТНУЮ РАБОТУ

1°. Содержание задач такого рода обычно сводится к следующему. Некоторую работу, объем которой не указывается и не является искомым (например, перепечатка рукописи, рытье котлована, заполнение резервуара и т.д.) выполняют несколько человек или механизмов, работающих равномерно (т.е. с постоянной для каждого из них производительностью). В таких задачах объем всей работы, которая должна быть выполнена, принимают за единицу.

2°. Пусть объем всей работы, принятой за единицу, выполняется одним субъектом за время t_1, а другим — за время t_2; тогда производительность труда при совместном выполнении того же объема работы выражается формулой

$$W_{\text{совм}} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}, \tag{1}$$

а время, которое потребуется для совместного выполнения этого объема работы, — формулой

$$t_{\text{совм}} = \frac{1}{W_{\text{совм}}} = \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}. \tag{2}$$

Задачи с решениями

1. Две бригады, работая одновременно, обрабатывают участок земли за 12 ч. За какое время этот участок могла бы обработать первая бригада отдельно, если скорости выполнения работы первой и второй бригадами относятся как 3 : 2?

1. Пусть W_1 — производительность первой бригады, а W_2 — производительность второй бригады.

2. Величину участка земли принимаем за единицу.

3. Согласно условию, получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{1}{W_1 + W_2} = 12, \\ \dfrac{W_1}{W_2} = \dfrac{3}{2}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad W_1 = \frac{1}{20}, \;\; W_2 = \frac{1}{30}.$$

4. Так как требуется найти время, за которое первая бригада, работая отдельно, могла бы обработать участок, то $t = \dfrac{1}{\frac{1}{20}} = 20$ (ч).

5. *Ответ:* за 20 ч.

2. Двое рабочих могут вместе выполнить $\frac{2}{3}$ некоторого задания за 4 дня. За сколько дней каждый рабочий выполнит все задание, если первый из них может сделать это на 5 дней быстрее, чем второй?

1. Примем объем задания за единицу.

2. Пусть x — число дней, за которое первый рабочий выполнит все задание; тогда $x + 5$ — число дней, за которое выполнит все задание второй рабочий.

3. За 4 дня первый рабочий выполнит $\frac{4}{x}$ всего задания, а второй $\dfrac{4}{x+5}$ всего задания.

4. Согласно условию, получим уравнение

$$\frac{4}{x} + \frac{4}{x+5} = \frac{2}{3}, \quad \text{или} \quad x^2 - 7x - 30 = 0,$$

откуда $x_1 = 10$, $x_2 = -3$ (не подходит по смыслу задачи).

5. *Ответ:* за 10 дней; за 15 дней.

3. Одна бригада может убрать поле за 12 дней, а другая выполняет ту же работу за 75% времени, необходимого первой бригаде. После того как в течение 5 дней работала первая бригада, к ней присоединилась вторая и они вместе закончили работу. Сколько дней бригады работали вместе?

1. Предположим, что бригады работали вместе x дней.

2. Первая бригада за один день выполняет $\frac{1}{12}$ часть работы.

3. Вторая бригада выполняет всю работу за 75% (12 дней), т.е. за 9 дней, а значит, за один день она выполняет $\frac{1}{9}$ часть работы.

4. За 5 дней первая бригада выполнила $\frac{5}{12}$ частей всей работы.

5. За один день совместной работы обе бригады выполнили $\frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{7}{36}$ частей всей работы, а за x дней — $\frac{7x}{36}$ частей.

6. Составим уравнение

$$\frac{5}{12} + \frac{7x}{36} = 1,$$

откуда $x = 3$.

7. *Ответ:* 3 дня.

4. Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как первый проработал 7 ч, а второй — 4 ч, оказалось, что они выполнили $\frac{5}{9}$ всего задания. Проработав совместно еще 4 ч, они установили, что им остается выполнить $\frac{1}{18}$ всего задания. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, смог бы выполнить все задание?

1. Пусть x (ч) — время, за которое все задание в одиночку выполнит первый рабочий, y (ч) — время, за которое все задание в одиночку выполнит второй рабочий. Тогда $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ — части задания, выполняемые первым и вторым рабочим за 1 ч.

2. По условию

$$\frac{1}{x} \cdot 7 + \frac{1}{y} \cdot 4 = \frac{5}{9}. \qquad (1)$$

3. После этого они проработали вместе еще 4 ч и выполнили $\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y}\right)$ часть всего задания, которая равна $1 - \left(\frac{5}{9} + \frac{1}{18}\right) = \frac{7}{18}$.

4. Поэтому

$$\frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{7}{18}. \qquad (2)$$

5. Решив систему уравнений (1), (2), находим $x = 18$, $y = 24$.

6. *Ответ:* за 18 ч; за 24 ч.

5. Двум машинисткам было поручено выполнить некоторое задание. Вторая приступила к работе на 1 ч позже первой. Через 3 ч после того как первая начала работу, им осталось выполнить еще $\frac{9}{20}$ всего задания. По окончании работы оказалось, что каждая машинистка выполнила половину всего задания. За сколько часов каждая из них в отдельности могла бы выполнить все задание?

1. Пусть первой машинистке для выполнения всего задания требуется x (ч), а второй — y (ч).

2. Когда первая проработала 3 ч, вторая проработала 2 ч, причем вместе обе они выполнили $1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}$ всего задания.

3. Получаем уравнение

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{y} = \frac{11}{20}. \qquad (1)$$

4. По окончании работы выяснилось, что каждая машинистка выполнила половину всего задания.

5. Значит, первая потратила $\frac{x}{2}$ ч, а вторая — $\frac{y}{2}$ ч.

6. Так как первая машинистка работала на 1 ч больше, чем вторая, то имеем уравнение

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1. \qquad (2)$$

7. Система уравнений (1), (2) имеет два решения, но одно из них не годится, так как дает для y отрицательное значение.

8. *Ответ:* за 10 ч; за 8 ч.

6. Два экскаватора, работая одновременно, вырыли котлован за 4 ч. Если бы производительность второго экскаватора была увеличена на 20%, а первого — в 2 раза, то первый вырыл бы котлован на 5 ч быстрее, чем второй. За какое время выроет котлован второй экскаватор, работая отдельно?

1. Обозначим производительность первого экскаватора через x, а второго — через y. Объем котлована примем за единицу.

2. Тогда за 4 ч первый экскаватор выполнит $4x$ частей работы, второй — $4y$, а вместе $4x + 4y$ частей работы.

3. Так как за 4 ч они вырыли весь котлован, то

$$4x + 4y = 1. \qquad (1)$$

4. Увеличенная производительность первого экскаватора равна $2x$, второго — $1{,}2y$. При этом первый экскаватор выроет котлован за $\frac{1}{2x}$ ч, второй — за $\frac{1}{1{,}2y}$ ч.

5. Из условия следует, что

$$\frac{1}{1{,}2y} - \frac{1}{2x} = 5. \qquad (2)$$

6. Решив систему уравнений (1), (2), находим $x = 0{,}15$; $y = 0{,}1$.

7. Второй экскаватор имеет производительность, равную 0,1, т.е. за 1 ч он выроет 0,1 часть котлована, а всю работу выполнит за 10 ч.

8. *Ответ:* за 10 ч.

7. Один трактор типа A и три трактора типа B вспахали поле за 8 ч. Три трактора типа A и шесть тракторов типа B за 1 ч вспашут $\frac{7}{24}$ этого поля. За сколько часов вспашут поле два трактора типа A и три трактора типа B?

1. Объем всей работы (площадь поля) примем за единицу; x, y — производительности тракторов типа A и B соответственно (x, y — доли поля, которые вспашут тракторы за 1 ч).

2. Один трактор типа A за 8 ч вспашет $8x$ частей поля, три трактора типа B за 8 ч — $24y$ частей поля, а все вместе за 8 ч — все поле:

$$8x + 24y = 1. \tag{1}$$

3. Три трактора типа A за 1 ч вспашут $3x$ частей поля, шесть тракторов типа B за 1 ч — $6y$ частей поля, а все вместе за 1 ч — $\frac{7}{24}$ частей поля:

$$3x + 6y = \frac{7}{24}. \tag{2}$$

4. Решив систему уравнений (1), (2), находим $x = \frac{1}{24}$; $y = \frac{1}{36}$.

5. Итак, за 1 ч трактор типа A вспашет $\frac{1}{24}$ часть поля, а трактор типа B — $\frac{1}{36}$ часть поля.

6. Два трактора типа A за 1 ч вспашут $\frac{1}{12}$ часть поля, три трактора типа B за 1 ч — $\frac{1}{12}$ часть поля, а все вместе за 1 ч — $\frac{1}{6}$ часть поля. Итак, все поле они вспашут за 6 ч.

7. *Ответ:* за 6 ч.

8. Две бригады, работая вместе, должны отремонтировать некоторый участок дороги за 18 дней. В действительности же получилось так, что сначала работала только первая бригада, а заканчивала ремонт участка одна вторая бригада, производительность которой выше, чем у первой бригады. В результате ремонт участка продолжался 40 дней, причем первая бригада в свое рабочее время выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько дней был бы отремонтирован участок дороги каждой бригадой отдельно?

1. Пусть всю работу первая бригада может выполнить за x дней, а вторая — за y дней.

2. Принимая всю работу за единицу, имеем:

а) $\frac{1}{x}$ — производительность первой бригады;

б) $\frac{1}{y}$ — производительность второй бригады;

в) $\frac{1}{y} \cdot 18$ — часть работы, которую могла выполнить вторая бригада за 18 дней;

г) $\frac{1}{x} \cdot 18$ — часть работы, которую могла выполнить первая бригада за 18 дней.

3. Так как обе бригады, работая совместно, могли выполнить всю работу за 18 дней, то получаем уравнение

$$\frac{1}{x} \cdot 18 + \frac{1}{y} \cdot 18 = 1. \tag{1}$$

4. Далее, из условия следует, что первая бригада выполнила $\frac{2}{3}$ всей работы, следовательно, она затратила на это $\frac{2}{3}\,x$ дней, а вторая бригада выполнила $\frac{1}{3}$ всей работы, поэтому она затратила на это $\frac{1}{3}\,y$ дней.

5. Поскольку всего было затрачено 40 дней, получаем еще одно уравнение:

$$\frac{2}{3}\,x + \frac{1}{3}\,y = 40. \tag{2}$$

6. Решив систему уравнений (1), (2), находим $x_1 = 24$, $x_2 = 45$; $y_1 = 72$, $y_2 = 30$.

7. Так как производительность второй бригады была выше, чем у первой, то условию задачи удовлетворяют значения $x = 45$ и $y = 30$.

Проверка. 1) Пусть известно, что первая бригада может выполнить всю работу за 45 дней, а вторая бригада — за 30 дней; тогда за 1 день первая бригада выполнит $\frac{1}{45}$ часть всей работы, а вторая — $\frac{1}{30}$ всей работы, и, следовательно, вместе за 1 день они выполнят $\frac{1}{45} + \frac{1}{30} = \frac{1}{18}$ всей работы.

2) Значит, на выполнение всей работы им понадобится 18 дней, что соответствует условию задачи.

3) Рассуждая аналогично, получим, что первая бригада выполнит $\frac{2}{3}$ всей работы за $\frac{2}{3} \cdot 45 = 30$ дней, а вторая бригада выполнит $\frac{1}{3}$ всей работы за $\frac{1}{3} \cdot 30 = 10$ дней, т.е. всего будет затрачено $30 + 10 = 40$ дней, что также соответствует условию.

8. *Ответ:* за 45 дней; за 30 дней.

9. Если половину заказа выполнит первый рабочий, а затем другую половину — второй рабочий, то весь заказ будет выполнен за 2 ч 15 мин. Если же первый рабочий выполнит $\frac{2}{3}$ заказа, а оставшуюся часть выполнит второй, то весь заказ будет выполнен за 2 ч 20 мин. На сколько процентов производительность первого рабочего меньше производительности второго?

1. Пусть x — производительность первого рабочего, y — производительность второго.

2. Объем всего заказа примем за единицу.

3. Из условия следует система уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} = \frac{9}{4}, \\ \frac{2}{3x} + \frac{1}{3y} = \frac{7}{3}. \end{cases}$$

4. Положим $t_1 = \frac{1}{x}$, $t_2 = \frac{1}{y}$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = \frac{9}{2}, \\ 2t_1 + t_2 = 7 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{5}{2}, \\ t_2 = 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5}, \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \frac{x}{y} = 0{,}8.$$

5. Следовательно, производительность первого рабочего на 20% меньше производительности второго.

6. *Ответ:* на 20%.

10. Два поезда отправляются из пунктов A и B навстречу друг другу. Они встретятся на половине пути, если поезд из A выйдет на 2 ч раньше, чем поезд из B. Если же оба поезда выйдут одновременно, то через 2 ч расстояние между ними составит $\frac{1}{4}$ расстояния между пунктами A и B. За какое время каждый поезд проходит весь путь?

1. На первый взгляд эта задача кажется типовой задачей на движение. Однако следует обратить внимание на то, что в ней нет никаких данных о пройденном пути. Поэтому будем рассматривать ее как задачу на совместную работу, где всю работу (пройденный путь) примем за единицу.

2. Предположим, что первый поезд пройдет весь путь за x (ч), а второй — за y (ч).

3. Учитывая, что первый поезд вышел на 2 ч раньше, составим уравнение
$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = 2. \qquad (1)$$

4. Скорости первого и второго поездов равны соответственно $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$, следовательно,
$$\frac{1}{x} \cdot 2 + \frac{1}{y} \cdot 2 = \frac{3}{4}. \qquad (2)$$

5. Решив систему уравнений (1), (2), получим $x = 8$, $y = 4$.

6. *Ответ:* за 8 ч; за 4 ч.

11. Две машины, работающие с двух сторон тоннеля, должны закончить проходку в 60 дней. Если первая машина выполнит 30% всей работы, которую за это время она должна была сделать, а вторая — $26\frac{2}{3}$% своей работы, то обе они пройдут 60 м тоннеля. Если же первая машина выполнит $\frac{2}{3}$ всей работы второй машины по проходке тоннеля, а вторая — 0,3 всей работы первой машины, то первой понадобится для этого на 6 дней больше, чем второй. Определить, сколько метров в день проходит каждая машина.

1. Пусть первая машина проходит в день x м, а вторая — y м.

2. В первом случае первая машина выполнит 30% всей работы, т.е. $\frac{60x \cdot 30}{100} = 18x$ (м), а вторая $\frac{60y \cdot 80}{300} = 16y$ (м).

3. Согласно условию, имеем уравнение
$$18x + 16y = 60. \qquad (1)$$

4. Во втором случае первая машина пройдет $\frac{2}{3} \cdot 60y$ (м), затратив на это $\frac{2}{3} \cdot 60 \cdot \frac{y}{x}$ дней, а вторая машина затратит $\frac{3}{10} \cdot 60 \cdot \frac{x}{y}$ дней.

5. Имеем второе уравнение
$$\frac{40y}{x} - \frac{18x}{y} = 6. \qquad (2)$$

6. Систему уравнений (1), (2) легко решить, если в уравнении (2) положить $\frac{y}{x} = t$. Тогда получим значения $t_1 = \frac{3}{4}$, $t_2 = -\frac{3}{5}$ (не подходит по смыслу задачи). Отсюда следует, что $x = 2$, $y = 1{,}5$.

7. *Ответ:* 2 м; 1,5 м.

12. Три машинистки, работая одновременно, в течение 4 ч перепечатывают вместе 216 страниц. За 1 ч третья машинистка печатает на столько страниц больше, чем вторая, на сколько вторая печатает больше, чем первая. За 5 ч третья машинистка печатает столько же страниц, сколько первая за 7 ч. Сколько страниц в час печатает каждая машинистка?

1. Пусть v_1, v_2, v_3 (стр./ч) — скорости, с которыми печатают машинистки.

2. Согласно условию, получаем следующие уравнения:

$$4(v_1 + v_2 + v_3) = 216, \tag{1}$$

$$v_3 - v_2 = v_2 - v_1, \tag{2}$$

$$5v_3 = 7v_1. \tag{3}$$

3. Решив систему трех уравнений (1), (2), (3), получим ответ.

4. *Ответ:* 15 стр./ч, 18 стр./ч, 21 стр/ч.

13. Два экскаватора должны вырыть три одинаковых котлована. Если они будут работать вместе, то выроют их за два дня. Первый экскаватор может вырыть один такой котлован на день быстрее второго. В один из дней первый экскаватор работал полдня, а второй работал весь день. Какая часть всей работы была выполнена за этот день?

1. Обозначим производительности экскаваторов через u и v соответственно, а всю работу примем за единицу.

2. Тогда, согласно условию, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2(u+v) = 1, \\ \dfrac{1}{3v} - \dfrac{1}{3u} = 1. \end{cases}$$

3. Выразив u из первого уравнения и подставив это выражение во второе уравнение, имеем

$$6v^2 - 7v + 1 - 0,$$

откуда $v_1 = 1$, $v_2 = \dfrac{1}{6}$.

4. Учитывая, что по условию должно быть $u < 1$ и $v < 1$, подходит лишь значение v, равное $\dfrac{1}{6}$. Тогда $u = \dfrac{1}{3}$.

5. Требуется определить часть работы, выполненную экскаваторами за тот день, когда первый работал полдня, а второй — полный день, т.е. найти величину $\frac{1}{2}u + v$. Она равна

$$\frac{1}{2}u + v = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

6. *Ответ:* $\frac{1}{3}$.

14. Три каменщика (разной квалификации) выложили кирпичную стену, причем причем первый проработал 6 ч, второй — 4 ч, а третий — 7 ч. Если бы первый каменщик работал 4 ч, второй — 2 ч, третий — 5 ч, то было бы выполнено лишь $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько часов каменщики закончили бы кладку, если бы они работали вместе одно и то же время?

1. Примем объем всей работы за единицу и обозначим производительности каменщиков через W_1, W_2 и W_3 соответственно.

2. Тогда условия задачи дают уравнения

$$\begin{cases} 6W_1 + 4W_2 + 7W_3 = 1, & (1) \\ 4W_1 + 2W_2 + 5W_3 = \frac{2}{3}. & (2) \end{cases}$$

3. Получили два уравнения с тремя неизвестными, из которых сами неизвестные, разумеется, нельзя найти однозначно.

4. В условии задачи требуется найти не каждую неизвестную в отдельности, а лишь отношение

$$\frac{1}{W_1 + W_2 + W_3}.$$

5. Это можно сделать, заметив, что из системы уравнений (1) и (2) легко находится сумма производительностей каменщиков.

6. Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), получим

$$2(W_1 + W_2 + W_3) = \frac{1}{3}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{W_1 + W_2 + W_3} = 6.$$

7. *Ответ:* за 6 ч.

15. Пять человек выполняют некоторое задание. Первые три из них, работая вместе, выполнят все задание за 7,5 ч; первый, третий и пятый — за 5 ч; первый, третий и четвертый — за 6 ч; второй, четвертый и пятый — за 4 ч. За какое время выполнят это задание все пять человек, работая вместе?

1. Объем работы примем за единицу. Производительности труда рабочих обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5.

2. Согласно условию, запишем систему:

$$\begin{cases} 7{,}5(x_1 + x_2 + x_3) = 1, \\ 5(x_1 + x_3 + x_5) = 1, \\ 6(x_1 + x_3 + x_4) = 1, \\ 4(x_2 + x_4 + x_5) = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = \dfrac{1}{7{,}5}, & (1) \\ x_1 + x_3 + x_5 = \dfrac{1}{5}, & (2) \\ x_1 + x_3 + x_4 = \dfrac{1}{6}, & (3) \\ x_2 + x_4 + x_5 = \dfrac{1}{4}. & (4) \end{cases}$$

3. Требуется найти такое t (время), что $t(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5) = 1$, или, что то же самое,

$$t = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}.$$

4. Это можно сделать, не определяя значений каждой неизвестной в отдельности. Сложив все уравнения системы, получим

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 = \frac{3}{4}. \tag{5}$$

Воспользуемся уравнением (4):

$$3x_1 + 3x_3 + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad \text{т.е.} \quad x_1 + x_3 = \frac{1}{12}. \tag{6}$$

5. Сложив уравнения (6) и (4), получаем

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $t = 3$.

6. *Ответ:* за 3 ч.

16. Для разгрузки парохода выделено две бригады. Если сложить промежутки времени, за которые могут самостоятельно разгрузить пароход первая и вторая бригады, то получится 12 ч. Определить эти промежутки, если их разность составляет 45% времени, за которое обе бригады могут разгрузить пароход совместно.

1. Пусть первая бригада может самостоятельно разгрузить пароход за x ч, а вторая — за y ч. Тогда

$$x + y = 12. \tag{1}$$

2. Первая бригада за 1 ч выполняет $\frac{1}{x}$ часть всего задания, а вторая — $\frac{1}{y}$ часть всего задания.

3. Поэтому, работая вместе, за 1 ч они выполнят $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ часть всего задания.

4. Значит, работая вместе, они затратят на все задание $\dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ ч.

5. Пусть для определенности первая бригада работает медленнее, т.е. пусть $x > y$. Тогда $x - y$ ч есть 45% от $\dfrac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ ч, или

$$x - y = \frac{45}{100} \cdot \frac{xy}{x + y}. \qquad (2)$$

6. Из уравнения (1) следует, что $y = 12 - x$. Подставляя $12 - x$ вместо y в уравнение (2), получим уравнение

$$x - 12 + x = \frac{9}{20} \cdot \frac{x(12 - x)}{12},$$

которое можно переписать так:

$$3x^2 + 124x - 960 = 0. \qquad (3)$$

7. Уравнение (3) имеет два корня $x_1 = -48$, $x_2 = \frac{20}{3}$.

8. По условию $x > 0$. Значит, $x = \frac{20}{3}$, а тогда $y = \frac{16}{3}$.

9. *Ответ:* $6\frac{2}{3}$ ч; $5\frac{1}{3}$ ч.

3. ЗАДАЧИ НА «БАССЕЙНЫ И ТРУБЫ»

1°. Задачи на «бассейны и трубы» относятся к задачам на работу. При этом *производительность трубы* — это объем воды (жидкости), протекающей через нее в единицу времени.

2°. Если две трубы работают в одном направлении (например, через них наполняется или опорожняется какая-то емкость), то их производительности складываются (это напоминает совместную работу).

3°. Если же трубы работают в противоположных направлениях, т.е. через одну вода вливается, а через другую выливается, то их производительности вычитаются.

Задачи с решениями

1. Бассейн наполняется двумя трубами за 6 ч. Одна первая труба заполняет его на 5 ч быстрее, чем одна вторая труба. За какое время каждая труба, действуя отдельно, наполнить бассейн?

1. Объем бассейна примем за единицу. Пусть первая труба наполняет бассейн за x ч; тогда вторая наполняет его за $(x+5)$ ч.

2. Производительность первой трубы составляет $\frac{1}{x}$, а производительность второй равна $\frac{1}{x+5}$.

3. Согласно условию, получаем уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6},$$

откуда находим $x_1=10$, $x_2=-3$ (не подходит по смыслу задачи).

4. *Ответ:* за 10 ч; за 15 ч.

2. К бассейну подключены две трубы. Через первую бассейн наполняется, а через вторую вода из бассейна вытекает. Спустя полчаса после одновременного начала работы труб первую из них также переключили на спуск воды из бассейна. Через какое время после переключения первой трубы уровень воды в бассейне станет первоначальным, если производительность первой трубы вдвое больше производительности второй?

1. Пусть W_1 и W_2 — производительности труб (в м^3/ч).

2. По условию производительности связаны соотношением $W_1 = 2W_2$.

3. За 0,5 ч в бассейн поступило $0{,}5(W_1-W_2)$ м^3 воды.

4. Предположим, что через t ч после переключения первой трубы уровень воды в бассейне станет первоначальным.

5. За это время через две трубы из бассейна выльется (W_1+W_2) м^3 воды. Значит, имеем уравнение

$$t(W_1+W_2)=0{,}5(W_1-W_2), \quad \text{или} \quad 3W_2t=0{,}5W_2.$$

6. Отсюда $t=\frac{1}{6}$ ч, т.е. $t=10$ мин.

7. *Ответ:* через 10 мин.

3. Через первую трубу бассейн может наполниться за 3 ч, а через вторую его можно полностью осушить за 2 ч. Бассейн заполнен наполовину. Первую трубу включили для заполнения бассейна, а через вторую трубу вода из бассейна выливается. Через сколько часов бассейн наполнится или станет пустым?

1. Объем бассейна примем за единицу. Через первую трубу бассейн наполняется за 3 ч, поэтому ее производительность равна $\frac{1}{3}$.

2. Аналогично производительность второй трубы равна $\frac{1}{2}$.

3. Поскольку через первую трубу вода вливается, а через вторую выливается, общая производительность обеих труб равна разности

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

4. Вследствие того, что производительность трубы, через которую вода вытекает из бассейна, выше, бассейн в конце концов опустеет. При этом если бы он был полным, то это произошло бы через 6 ч $\left(\text{общая производительность равна } \frac{1}{6}\right)$, а так как он заполнен только наполовину, то вся вода из него вытечет через 3 ч.

5. *Ответ:* бассейн опустеет через 3 ч.

4. Если две трубы, подающие воду в бак, открыты одновременно, то бак наполнится через 2 ч 24 мин. В действительности же сначала бак наполнялся только через первую трубу в течение $\frac{1}{4}$ того времени, которое необходимо для наполнения бака второй трубой. Затем бак наполнялся только через вторую трубу в течение $\frac{1}{4}$ времени, необходимого для его наполнения первой трубой. После этого бак оказался наполненным на $\frac{13}{24}$. Какое время необходимо для наполнения бака через каждую трубу в отдельности?

1. Примем объем бака за единицу; пусть x и y — время (в часах), необходимое для наполнения бака первой и второй трубами соответственно.

2. Тогда $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$ — производительности труб.

3. Первое условие (с учетом того, что 24 мин=0,4 ч) дает уравнение

$$\frac{2{,}4}{x} + \frac{2{,}4}{y} = 1. \qquad (1)$$

4. Рассмотрим теперь второе условие задачи. Первая труба за $\frac{y}{4}$ ч наполнит $\frac{y}{4} \cdot \frac{1}{x}$ частей бака, вторая труба за $\frac{x}{4}$ ч наполнит $\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{y}$ частей, а вместе — $\frac{13}{24}$ частей бака.

5. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{y}{4x} + \frac{x}{4y} = \frac{13}{24}. \tag{2}$$

6. Решив уравнение (2) относительно новой неизвестной $z = \frac{y}{x}$, находим $z = \frac{2}{3}$ или $z = \frac{3}{2}$.

7. Итак, уравнение (2) распадается на два уравнения: а) $\frac{y}{x} = \frac{2}{3}$; б) $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$.

8. С учетом уравнения (1) в результате получим две системы:

$$\text{а)} \begin{cases} \dfrac{2{,}4}{x} + \dfrac{2{,}4}{y} = 1, \\ y = \dfrac{2}{3}x; \end{cases} \qquad \text{б)} \begin{cases} \dfrac{2{,}4}{x} + \dfrac{2{,}4}{y} = 1, \\ y = \dfrac{3}{2}x. \end{cases}$$

9. Из системы а) следует, что $x = 6$, $y = 4$, а из системы б) — что $x = 4$, $y = 6$.

10. Задача имеет два решения, поскольку не сказано, какая из труб производительнее.

11. *Ответ:* 6 ч и 4 ч или 4 ч и 6 ч.

5. Бассейн может наполняться водой с помощью двух насосов разной производительности. Если половину бассейна наполнить, включив лишь первый насос, а затем, выключив его, продолжить наполнение с помощью второго насоса, то весь бассейн наполнится за 2 ч 30 мин. При одновременной работе обоих насосов бассейн наполнится за 1 ч 12 мин. Какую часть бассейна наполняет за 20 мин работы насос меньшей производительности?

1. Обозначим производительности насосов через W_1 и W_2 соответственно, а объем бассейна примем за единицу.

2. Тогда условия задачи приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2W_1} + \dfrac{1}{2W_2} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{6}{5}(W_1 + W_2) = 1, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} W_1 + W_2 = \dfrac{5}{6}, \\ W_1 W_2 = \dfrac{1}{6}. \end{cases}$$

3. Отсюда следует, что производительность каждого из насосов равна либо $\frac{1}{2}$, либо $\frac{1}{3}$.

4. Поскольку требуется определить, какую часть бассейна наполняет за 20 мин насос меньшей производительности, берем решение

$W_1 = \frac{1}{3}$, т.е. насос меньшей производительности наполняет за 1 ч $\frac{1}{3}$ часть бассейна.

5. Поэтому за 20 мин он наполнит $\frac{1}{9}$ часть бассейна.

6. *Ответ:* $\frac{1}{9}$.

6. Два насоса, работая одновременно, наполнили водой бассейн вместимостью 80 м^3. Если увеличить производительность первого насоса в $\frac{4}{3}$ раза, то он один сможет наполнить бассейн, работая на 2 ч дольше, чем работали оба насоса вместе. Если же уменьшить производительность второго насоса на 1 м^3/ч, то он один сможет наполнить бассейн при условии, что будет работать в $\frac{10}{3}$ раза дольше, чем работали оба насоса вместе.

Сколько кубометров воды в час перекачивает второй насос?

1. Обозначим производительности первого и второго насосов через W_1 и W_2 соответственно.

2. Тогда, согласно условию задачи, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{80}{\frac{4}{3}W_1} = \dfrac{80}{W_1 + W_2} + 2, & (1) \\[2ex] \dfrac{80}{W_2 - 1} = \dfrac{10}{3} \cdot \dfrac{80}{W_1 + W_2}. & (2) \end{cases}$$

3. Уравнение (2) позволяет установить линейную связь между W_1 и W_2:

$$7W_2 - 3W_1 = 10.$$

4. Исключая W_1 из уравнения (1), приходим к уравнению

$$\frac{90}{7W_2 - 10} = \frac{12}{W_2 - 1} + 1, \quad \text{или} \quad 7W_2^2 - 23W_2 - 20 = 0. \qquad (3)$$

Положительный корень уравнения (3) равен 4.

5. *Ответ:* 4 м^3/ч.

7. В резервуар поступает вода из двух труб различных диаметров. В первый день обе трубы, работая одновременно, подали 14 м^3 воды. Во второй день работала лишь малая труба и подала также 14 м^3 воды, поскольку проработала на 5 ч дольше, чем в предыдущий день. В третий день обе трубы сначала подали 21 м^3 воды, а затем работала лишь большая труба, подавшая еще 20 м^3 воды, причем общая продолжительность времени подача воды была такой же, как и во второй день. Определить проиозводительность каждой трубы.

1. Пусть x м^3/ч — производительность большой трубы, y м^3/ч — производительность малой трубы, t (ч) — время работы обеих труб в первый день.

2. Первое условие задачи приводит к уравнению

$$(x+y)t = 14, \tag{1}$$

а второе условие — к уравнению

$$y(t+5) = 14. \tag{2}$$

3. Рассмотрим теперь третье условие. В третий день трубы работали $(t+5)$ ч. Это время состоит из совместного времени работы двух труб $\frac{21}{x+y}$ ч и времени работы большой трубы $\frac{20}{x}$ ч. Следовательно,

$$\frac{21}{x+y} + \frac{20}{x} = t + 5. \tag{3}$$

4. В результате получили три уравнения с тремя неизвестными. Из уравнения (2) следует, что $t+5 = \frac{14}{y}$, т.е. $t = \frac{14}{y} - 5$. Первое выражение подставим в уравнение (3), а второе — в уравнение (1). Тогда придем к системе двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} (x+y)\left(\frac{14}{y} - 5\right) = 14, \\ \frac{21}{x+y} + \frac{20}{x} = \frac{14}{y}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 14x - 5xy - 5y^2 = 0, \\ 14x^2 - 27xy - 20y^2 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

5. Второе уравнение системы (4) запишем так:

$$(2x - 5y)(7x + 4y) = 0.$$

Тогда система (4) распадается на две:

$$\text{а)} \begin{cases} 2x - 5y = 0, \\ 14x - 5xy - 5y^2 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 7x + 4y = 0, \\ 14x - 5xy - 5y^2 = 0, \end{cases}$$

Из системы а) находим $x = 5$, $y = 2$, а система б) не имеет положительных решений (так как $7x + 4xy > 0$).

6. *Ответ:* 5 м^3/ч; 2 м^3/ч.

8. Некоторая жидкость поступает в бак через три входных крана. Если открыть все краны одновременно, то бак наполнится за 6 мин. Если же наполнять бак только через второй кран, то на это потребуется $\frac{3}{4}$ того времени, за которое может наполниться бак только через один первый кран. Через один третий кран этот бак наполняется на 10 мин дольше, чем через один второй кран. На какое время надо открывать каждый кран в отдельности для наполнения бака?

1. Примем объем бака за единицу. Пусть x — время наполнения бака через второй кран; тогда $\frac{3}{4}x$ — время наполнения через первый кран и $\frac{3}{4}x + 10$ — время наполнения через третий кран.

2. Далее, $\frac{1}{x}$ — производительность второго крана; $\frac{1}{\frac{3}{4}x}$ — производительность первого крана; $\frac{1}{\frac{3}{4}x + 10}$ — производительность третьего крана.

3. Так как по условию производительность всех трех кранов, открытых одновременно, равна $\frac{1}{6}$, то получаем уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\frac{3}{4}x} + \frac{1}{\frac{3}{4}x + 10} = \frac{1}{6},$$

положительный корень которого есть $x = \frac{56}{3}$.

4. *Ответ:* на $\frac{56}{3}$ мин; на 14 мин; на 24 мин.

9. Водоем может быть опорожнен через три трубы. При совместном действии первой и второй труб водоем опорожняется за 2 ч, первой и третьей — за 1 ч 12 мин, а второй и третьей — за 1 ч 30 мин. За сколько часов опорожнит водоем каждая труба в отдельности?

1. Примем объем водоема за единицу и обозначим производительности труб через x, y, z (это доли водоема, которые опорожнит каждая труба за 1 ч).

2. Так как за 2 ч первая и вторая трубы опорожнили водоем, то $2(x + y) = 1$. Аналогично получаем еще два уравнения: $\frac{6}{5}(x + z) = 1$ и $1{,}5(y + z) = 1$.

3. Объединим эти уравнения в систему, несколько преобразовав их:

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{2}, \\ x + z = \dfrac{5}{6}, \\ y + z = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

4. Сложив почленно все уравнения, получим $2x + 2y + 2z = 2$, или $x + y + z = 1$. Заметив, что $x + y = \frac{1}{2}$, найдем $z = \frac{1}{2}$. Аналогично $y = \frac{1}{6}$, $x = \frac{1}{3}$.

5. Производительность и время работы взаимно обратны. Поэтому $t_3 = 2$, $t_2 = 6$, $t_1 = 3$.

6. *Ответ:* 3 ч; 6 ч; 2 ч.

10. Три насоса, работая вместе, наполняют бассейн за 4,5 ч. Один второй насос наполняет бассейн на 5 ч быстрее, чем один третий насос. За сколько часов второй насос наполняет бассейн, если первый насос наполняет его втрое дольше, чем второй и третий вместе?

1. Примем объем бассейна за единицу. Пусть W_1, W_2, W_3 — производительности первого, второго и третьего насосов соответственно.

2. Запишем условия задачи в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{W_1 + W_2 + W_3} = \dfrac{9}{2}, \\ \dfrac{1}{W_2} + 5 = \dfrac{1}{W_3}, \\ \dfrac{1}{W_1} = \dfrac{3}{W_2 + W_3}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} W_1 + W_2 + W_3 = \dfrac{2}{9}, & (1) \\ W_2 - 5W_2W_3 - W_3 = 0, & (2) \\ 3W_1 - W_2 - W_3 = 0. & (3) \end{cases}$$

3. Требуется определить величину $t = \frac{1}{W_2}$.

4. Складывая почленно уравнения (1) и (3), находим $W_1 = \frac{1}{18}$.

5. Тогда из равенства (3) следует, что $W_3 = \frac{1}{6} - W_2$. Подставляя последнее выражение в равенство (2), получим квадратное уравнение

$$5W_2^2 + \frac{7}{6}W_2 - \frac{1}{6} = 0,$$

положительный корень которого равен $\frac{1}{10}$.

6. *Ответ:* за 10 ч.

11. В бак проведены три трубы, по которым подается жидкость насосами различной производительности. Если первый насос проработает 2 ч, второй — 1 ч 15 мин, а третий — 45 мин, то бак будет заполнен наполовину. Если же первый насос проработает 3 ч, второй — 2 ч, а третий — 1 ч 20 мин, то бак будет заполнен полностью. За сколько часов заполнят бак три насоса, работая вместе?

1. Примем объем бака за единицу. Пусть x, y, z ($м^3$/ч) — производительности первого, второго и третьего насосов соответственно.

2. Тогда $x+y+z$ — производительность при совместной работе трех насосов, а $\frac{1}{x+y+z}$ — время, за которое заполнят бак три насоса, работая вместе.

3. Из условия задачи следует система уравнений

$$\begin{cases} 2x+\frac{5}{4}y+\frac{3}{4}z=\frac{1}{2}, \\ 3x+2y+\frac{4}{3}z=1. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на -4, а второе на 3; сложив полученные результаты, придем к уравнению $x+y+z=1$. Следовательно, три насоса, работая вместе, заполнят бак за $\frac{1}{x+y+z}=1$ ч.

4. *Ответ:* за 1 ч.

12. Экскаваторы четырех типов и разной производительности рыли котлован. При одновременной работе четырех экскаваторов I типа, трех II типа и двух III типа задание было бы выполнено за 2 ч; при одновременной работе трех экскаваторов II типа, четырех III типа и двух IV типа — за 2 ч 30 мин. Если же одновременно работали бы один экскаватор I типа и два IV типа, то задание было бы завершено за 6 ч 40 мин. За сколько часов будет вырыт котлован при одновременной работе четырех экскаваторов разных типов?

1. Примем объем выполненной работы за единицу и обозначим через x, y, z и t соответственно производительности экскаваторов I, II, III и IV типов.

2. По условию имеем

$$\begin{cases} 4x+3y+2z=\frac{1}{2}, \\ 3y+4z+2t=\frac{1}{2\frac{1}{2}}, \\ x+2t=\frac{1}{6\frac{2}{3}} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x+3y+2z=\frac{1}{2}, \\ 3y+4z+2t=\frac{2}{5}, \\ x+2t=\frac{3}{20}. \end{cases}$$

3. Требуется найти величину $\frac{1}{x+y+z+t}$. Заметим, что если обе части последнего уравнения системы умножить на 2, а затем сложить все уравнения, то получим

$$6(x+y+z+t) = \frac{12}{10}.$$

4. Поэтому искомое время равно

$$\frac{1}{x+y+z+t} = 5 \text{ ч.}$$

5. *Ответ:* за 5 ч.

4. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи с решениями

1. Два мастера, из которых второй начинает работать на 1,5 дня позже первого, могут выполнить задание за 7 дней. Если бы это задание выполнял каждый отдельно, то первому потребовалось бы на 3 дня больше, чем второму. За сколько дней каждый мастер в отдельности выполнил бы это задание?

1. Примем объем задания за единицу. Пусть второй мастер может выполнить задание за x дней; тогда первый — за $(x+3)$ дней.

2. Первый мастер, проработав 7 дней, выполнит $\frac{7}{x+3}$ всего задания.

3. Второй мастер, проработав $7-1{,}5 = 5{,}5$ дня, выполнит $\frac{5{,}5}{x}$ всего задания.

4. Согласно условию, получаем уравнение

$$\frac{7}{x+3} + \frac{5{,}5}{x} = 1, \quad \text{или} \quad 2x^2 - 19x - 33 = 0,$$

положительный корень которого равен 11.

5. *Ответ:* за 14 дней; за 11 дней.

2. Бригада каменщиков взялась уложить 432 м^3 кладки, но в действительности на работу вышло на 4 человека меньше. Сколько всего каменщиков должны были работать в бригаде, если известно, что каждому работавшему каменщику пришлось укладывать на 9 м^3 больше, чем предполагалось первоначально?

1. Пусть в бригаде должны были работать x каменщиков. По условию на работу вышли $x - 4$ каменщика.

2. Каждый каменщик должен был по плану уложить $\frac{432}{x}$ м^3 кладки, фактически же каждый уложил $\frac{432}{x-4}$ м^3.

3. Согласно условию, получаем уравнение

$$\frac{432}{x-4} - \frac{432}{x} = 9, \quad \text{или} \quad x^2 - 4x - 192 = 0,$$

положительным корнем которого является $x = 16$.

4. *Ответ:* 16 каменщиков.

3. Бригада слесарей может выполнить некоторое задание на 15 ч быстрее, чем бригада учеников. Если бригада учеников отработает 18 ч, а затем бригада слесарей продолжит выполнение задания в течение 6 ч, то и тогда будет выполнено только 0,6 всего задания. Какое время требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения задания?

1. Примем объем всего задания за единицу. Пусть x — время, за которое выполнит задание бригада учеников. Тогда $(x - 15)$ — время, за которое выполнит задание бригада слесарей.

2. Значит, $\frac{18}{x}$ — производительность бригады учеников, $\frac{6}{x-15}$ — производительность бригады слесарей.

3. Согласно условию, получим уравнение

$$\frac{18}{x} + \frac{6}{x-15} = 0{,}6, \quad \text{или} \quad x^2 - 55x + 450 = 0,$$

откуда находим $x_1 = 45$, $x_2 = 10$ (не подходит, поскольку должно быть $x > 15$).

4. *Ответ:* 45 ч.

4. Машинистка должна была выполнить работу в определенный срок, ежедневно печатая определенное количество листов. Она рассчитала, что если будет печатать ежедневно на 2 листа больше установленной нормы, то окончит работу раньше намеченного срока на 2 дня; если же будет печатать на 60% больше нормы, то, закончив работу на 4 дня раньше срока, напечатает на 8 листов больше намеченного объема работы. Сколько листов она должна была печатать в день и в какой срок окончит работу?

1. Пусть плановая ежедневная норма машинистки есть x листов, а плановый срок окончания работы — y дней.

2. Тогда объем работы составляет xy листов.

3. По условию, печатая в день $x+2$ листа, машинистка затратит $y-2$ дня. Значит, объем работы равен $(x+2)(y-2)$ листов.

4. Следовательно,

$$(x+2)(y-2)=xy. \tag{1}$$

5. Аналогично получаем другое уравнение:

$$(x+0{,}6x)(y-4)=xy+8. \tag{2}$$

6. Решив систему уравнений (1), (2), находим $x=10$, $y=12$.

7. *Ответ:* 10 листов в день; 12 дней.

5. Двое рабочих за смену вместе изготовили 72 детали. После того как первый рабочий повысил производительность труда на 15%, а второй — на 25%, вместе за смену они стали изготавливать 86 деталей. Сколько деталей изготавливает каждый рабочий за смену после повышения производительности труда?

1. Пусть x и y — количество деталей, производимых соответственно первым и вторым рабочим.

2. Тогда $x+0{,}15x$ и $y+0{,}25y$ — количество деталей, производимых соответственно первым и вторым рабочим после повышения производительности труда.

3. Согласно условию, получим систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=72, \\ 1{,}15x+1{,}25y=86, \end{cases}$$

откуда $x=40$, $y=32$.

4. Значит, $1{,}15x=46$, а $1{,}25y=40$.

5. *Ответ:* 46 деталей; 40 деталей.

6. На прокладке двух параллельных трубопроводов работали два экскаватора. Первый из них начал работать на 30 мин раньше второго. Когда второй экскаватор прокопал 27 м^3, оказалось, что он отстает от первого на 1 м^3. С какой скоростью работали экскаваторы, если известно, что второй выкапывал в час на 4 м^3 больше, чем первый?

1. Пусть v (м^3/ч) — скорость, с которой работал первый экскаватор; тогда скорость второго экскаватора равна $(v+4)$ (м^3/ч).

2. Пусть t — время, за которое второй экскаватор выкапывает 27 м^3.

3. Согласно условию, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} v\left(t + \frac{1}{2}\right) = 28, \\ (v + 4)t = 27, \end{cases}$$

откуда находим $v = 14$.

4. *Ответ:* 14 м^3/ч; 18 м^3/ч.

7. Имеются два двигателя одинаковой мощности. Один из них, работая, израсходовал 600 г бензина, а второй, работавший на 2 ч меньше, израсходовал 384 г бензина. Если бы первый двигатель расходовал в час столько бензина, сколько второй, а второй, наоборот, столько, сколько первый, то за одно и то же время работы расход бензина в обоих двигателях был бы одинаковым. Сколько бензина в час расходует каждый двигатель?

1. Пусть первый двигатель, работая 1 ч, расходует x г бензина, а второй — y г.

2. Тогда первый двигатель израсходовал 600 г за $\frac{600}{x}$ ч, а второй — 384 г за $\frac{384}{y}$ ч.

3. Согласно условию, имеем

$$\frac{600}{x} - \frac{384}{y} = 2. \qquad (1)$$

4. Если бы первый двигатель в 1 ч расходовал y (г), то за $\frac{600}{x}$ ч он израсходовал бы $\frac{600}{x} \cdot y$ (г).

5. Если бы второй двигатель в 1 ч расходовал x (г), то за $\frac{384}{y}$ ч он израсходовал бы $\frac{384}{y} \cdot x$ (г).

6. Согласно условию, составим уравнение

$$\frac{600y}{x} = \frac{384x}{y}. \qquad (2)$$

7. Решив систему уравнений (1), (2), находим $x = 60$, $y = 48$.

8. *Ответ:* 60 г; 48 г.

8. Два завода A и B должны были выполнить заказ в 12 дней. Через два дня завод A был закрыт на ремонт и в дальнейшем над выполнением заказа работал только завод B. Зная, что производительность завода B составляет $66\frac{2}{3}$ % производительности завода A, определить, через сколько дней будет выполнен заказ.

1. Оба завода вместе могли выполнить в день $\frac{1}{12}$ часть заказа.

2. По условию производительность завода B составляет $66\frac{2}{3}\,\%$, т.е. $\frac{2}{3}$ производительности завода A. Следовательно, производительность обоих заводов составляет $1\frac{2}{3}$ производительности завода A.

3. Значит, завод A может выполнить в день $\frac{1}{12} : 1\frac{2}{3} = \frac{1}{20}$ часть заказа, а завод B — $\frac{1}{20} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{30}$ часть заказа.

4. До остановки завода A была выполнена $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ часть всего заказа.

5. На выполнение остающихся $\frac{5}{6}$ всего заказа заводу B требуется $\frac{5}{6} : \frac{1}{30} = 25$ дней.

6. Итак, заказ будет выполнен через 27 дней.

7. *Ответ:* через 27 дней.

9. Два автомобиля должны были перевезти некоторый груз в течение 6 ч. Второй автомобиль задержался в гараже, и когда он прибыл на место погрузки, первый перевез $\frac{3}{5}$ всего груза; остальную часть груза перевез второй автомобиль, и весь груз был перевезен таким образом за 12 ч. Какое время потребовалось бы каждому автомобилю в отдельности для перевозки груза?

1. Объем всей перевозки примем за единицу. Тогда:

а) $\frac{3}{5}$ — объем перевозки, которая была выполнена первым автомобилем;

б) $\frac{2}{5}$ — объем перевозки, которая была выполнена вторым автомобилем;

2. Пусть x — время, затраченное первым автомобилем для перевозки груза в одиночку. Тогда:

а) $(12 - x)$ — время, затраченное вторым автомобилем для перевозки груза в одиночку;

б) $\frac{3}{5x}$ — производительность первого автомобиля;

в) $\frac{2}{5(12-x)}$ — производительность второго автомобиля.

3. Составим уравнение

$$\frac{3}{5x} + \frac{2}{5(12-x)} = \frac{1}{6},$$

откуда находим $x = 7{,}2$ или $x = 6$. Значит, $12 - x = 4{,}8$ или $12 - x = 6$.

4. *Ответ:* 7,2 ч и 4,8 ч или по 6 ч.

10. Каждый из двух слесарей должен был изготовить по 72 детали. Первый приступил к работе на 27 мин позже второго. Половину работы они выполнили к одному моменту времени, а чтобы завершить работу одновременно, первому слесарю пришлось изготовить за второго еще 4 детали. Сколько деталей в час изготавливал первый слесарь?

1. Пусть x дет./ч, y дет./ч — производительности первого и второго слесарей соответственно.

2. Половину работы (36 деталей) первый слесарь выполнил за $\frac{36}{x}$ ч, второй — за $\frac{36}{y}$ ч.

3. Согласно условию, к моменту окончания половины работы второй слесарь затратил на 27 мин больше первого. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{36}{y} - \frac{36}{x} = \frac{27}{60}, \quad \text{или} \quad \frac{4}{y} - \frac{4}{x} = \frac{1}{20}. \tag{1}$$

4. Первую половину работы слесари завершили одновременно, а чтобы завершить одновременно и всю работу, первый слесарь «помог» второму и изготовил из его части заказа 4 детали.

5. Таким образом, за одно и то же время первый слесарь изготовил 40 деталей, а второй — 32 детали. Отсюда следует, что

$$\frac{32}{y} = \frac{40}{x}, \quad \text{или} \quad \frac{4}{y} = \frac{5}{x}. \tag{2}$$

6. Решив систему уравнений (1), (2), находим $x = 20$, $y = 16$.

7. *Ответ:* 20 деталей.

11. Мастера A и B работали одинаковое количество дней. Если бы A работал на один день меньше, а B — на 7 дней меньше, то A заработал бы 7200 р, а B — 6480 р. Если бы, наоборот, A работал на 7 дней меньше, а B — на один день меньше, то B заработал бы на 3240 р. больше A. Сколько заработал каждый мастер в действительности?

1. Пусть каждый мастер работал по t дней и пусть A заработал x р., а B заработал y р.

2. Значит, заработок мастера A составляет $\frac{x}{t}$ р. в день, а заработок мастера B — $\frac{y}{t}$ р. в день.

3. Используя условия задачи, получим систему

$$\begin{cases} (t-1)\frac{x}{t} = 7200, & (1) \\ (t-7)\frac{y}{t} = 6480, & (2) \\ (t-1)\frac{y}{t} - (t-7)\frac{x}{t} = 3240. & (3) \end{cases}$$

4. Из уравнений (1) и (2) следует, что

$$\frac{t-1}{t} = \frac{7200}{x}, \quad \frac{t-7}{t} = \frac{6480}{y}.$$

5. Подставив эти выражения в уравнение (3), имеем

$$7200\,\frac{y}{x} - 6480\,\frac{x}{y} = 3240,$$

или

$$20\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 9\,\frac{y}{x} - 18 = 0,$$

откуда $\frac{y}{x} = \frac{6}{5}$.

6. Теперь разделим уравнение (2) на уравнение (1) и заменим $\frac{y}{x}$ его значением:

$$\frac{6}{5}\,\frac{t-7}{t-1} = \frac{6480}{7200}; \quad \frac{t-7}{t-1} = \frac{3}{4}, \quad \text{откуда} \quad t = 25.$$

7. Значит,

$$x = \frac{7200 \cdot 25}{24} = 7500\,(\text{р.}), \quad y = 7500 \cdot \frac{6}{5} = 9000\,(\text{р.}).$$

8. *Ответ:* 7500 р.; 9000 р.

12. Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала первый кран был открыт на $\frac{1}{3}$ того времени, которое требуется для наполнения бассейна только через один второй кран. Затем, наоборот, второй кран был открыт на $\frac{1}{3}$ того времени, которое требуется для наполнения бассейна только через один первый кран. После этого оказалось наполненными водой $\frac{13}{18}$ бассейна. Сколько времени нужно для наполнения бассейна каждым из кранов в отдельности, если оба крана, открытых вместе, наполняют бассейн за 3 ч 36 мин?

1. Примем объем бассейна за единицу. Пусть q_1 и q_2 — производительности кранов (л/мин).

2. Тогда
$$t_1 = \frac{1}{q_1}, \quad t_2 = \frac{1}{q_2} \qquad (1)$$
— время наполнения бассейна каждым из кранов.

3. Первое условие запишем так:
$$q_1 \cdot \frac{t_2}{3} + q_2 \cdot \frac{t_1}{3} = \frac{13}{18}.$$

4. С учетом равенств (1) получим
$$\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2 - \frac{13}{6} \cdot \frac{q_1}{q_2} + 1 = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{2}{3}, \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{3}{2}.$$

5. Второе условие запишем так:
$$1 = (3 \cdot 60 + 36)(q_1 + q_2), \quad \text{т.е.} \quad 1 = 216(q_1 + q_2). \qquad (2)$$

6. Из равенств (1) и (2) находим
$$t_1 = \frac{216(q_1 + q_2)}{q_1} = 540 \text{ мин}, \quad t_2 = \frac{216(q_1 + q_2)}{q_2} = 360 \text{ мин}$$
или, наоборот, $t_1 = 360$ мин, $t_2 = 540$ мин.

7. *Ответ:* 540 мин и 360 мин; 360 мин и 540 мин.

13. В бак может поступать вода через одну из двух труб. Через первую трубу бак можно наполнить на 1 ч быстрее, чем через вторую. Если бы вместимость бака была больше на 2 м^3, а пропускная способность второй трубы была бы больше на $\frac{4}{3}$ м^3/ч, то для наполнения бака через вторую трубу понадобилось бы столько же времени, сколько требуется, чтобы пропустить 2 м^3 воды через первую трубу. Какова вместимость бака, если известно, что время его наполнения через вторую трубу равно времени, за которое через первую трубу могло бы поступить 3 м^3 воды?

1. Обозначим вместимость бака через A (м^3), а производительности первой и второй труб — соответственно через x (м^3/ч) и y (м^3/ч).

2. Тогда $\frac{A}{x}$ (ч), $\frac{A}{y}$ (ч) — время наполнения бака через соответственно первую и вторую трубы, причем
$$\frac{A}{y} - \frac{A}{x} = 1. \qquad (1)$$

3. Увеличенная пропускная способность (производительность) второй трубы равна $\left(y+\frac{4}{3}\right)$ м^3/ч; $(A+2)$ м^3 — увеличенная вместимость бака; $\dfrac{A+2}{y+\frac{4}{3}}$ ч — соответствующее время его наполнения; $\frac{2}{x}$ ч — время, необходимое, чтобы пропустить 2 м^3 воды через первую трубу. Таким образом,

$$\frac{A+2}{y+\frac{4}{3}}=\frac{2}{x}. \qquad (2)$$

4. Вторая труба наполняет бак за $\dfrac{A}{y}$ ч. За это время через первую трубу могло бы поступить $\frac{A}{y}\cdot x$ м^3 воды, и, согласно последнему условию задачи, получаем

$$\frac{Ax}{y}=3. \qquad (3)$$

5. Уравнения (1), (2) и (3) после несложных преобразований дают систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} A(x-y)=xy,\\ (A+2)x=2\left(y+\frac{4}{3}\right),\\ y=\frac{Ax}{3}, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=\frac{Ax}{3},\\ A\left(x-\frac{Ax}{3}\right)=x\cdot\frac{Ax}{3},\\ (A+2)x=2\left(\frac{Ax}{3}+\frac{4}{3}\right) \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1-\frac{A}{3}=\frac{x}{3},\\ \frac{Ax}{3}+2x=\frac{8}{3} \end{cases} \Longrightarrow A^2+3A-10=0,$$

откуда находим $A=2$.

6. *Ответ:* 2 м^3.

14. Для заполнения резервуара были открыты две трубы, по которым подавали воду 20 мин, затем открыли третью трубу, и через 5 мин после этого резервуар был заполнен, а все трубы закрыты. Производительность второй трубы в 1,2 раза больше производительности первой. Через вторую и третью трубы, открытые одновременно, резервуар заполняется за 0,9 того времени, которое требуется для заполнения его через первую и третью трубы при их совместной работе. За какое время заполнится резервуар, если одновременно открыть все три трубы?

1. Обозначим через A объем выполненной работы (объем резервуара).

2. Пусть W_1, W_2, W_3 — производительности первой, второй и третьей труб соответственно.

3. Поскольку для заполнения резервуара первая и вторая трубы были открыты на 20 мин, а третья — на 5 мин, имеем

$$20W_1 + 20W_2 + 5W_3 = A. \tag{1}$$

4. Так как производительность второй трубы в 1,2 раза больше производительности первой, то

$$W_2 = 1{,}2W_1. \tag{2}$$

5. Для заполнения резервуара через вторую и третью трубы, открытые одновременно, требуется $\dfrac{A}{W_2 + W_3}$ мин, а через первую и третью — $\dfrac{A}{W_1 + W_3}$ мин. Согласно условию, $\dfrac{A}{W_2 + W_3} = \dfrac{9}{10} \cdot \dfrac{A}{W_1 + W_3}$, откуда

$$10W_1 - 9W_2 + W_3 = 0. \tag{3}$$

6. Получаем систему уравнений (1)–(3).

7. Подставим $W_2 = 1{,}2W_1$ в уравнение (3):

$$10W_1 - 10{,}8W_1 + W_3 = 0,$$

откуда $W_3 = 0{,}8W_1$.

8. Подставив $W_2 = 1{,}2W_1$ и $W_3 = 0{,}8W_1$ в уравнение (1), получим

$$20W_1 + 24W_1 + 4W_1 = A,$$

откуда $W_1 = \dfrac{A}{48}$. Значит, $W_2 = \dfrac{1{,}2A}{48}$, $W_3 = \dfrac{0{,}8A}{48}$.

9. Производительность всех труб при их совместной работе равна

$$W_1 + W_2 + W_3 = \frac{A}{48} + \frac{1{,}2A}{48} + \frac{0{,}8A}{48} = \frac{3A}{48} = \frac{A}{16}.$$

Следовательно, время, необходимое для заполнения резервуара через три одновременно открытые трубы, есть $\dfrac{A}{W_1 + W_2 + W_3} = 16$.

10. *Ответ:* за 16 мин.

15. Две бригады начали работу в 8 ч. Изготовив вместе 72 детали, они стали работать раздельно. В 15 ч выяснилось, что за время раздельной работы первая бригада изготовила на 8 деталей больше, чем вторая. На другой день первая бригада изготавливала за 1 ч на одну деталь больше, а вторая бригада за 1 ч на одну деталь меньше. Как и в первый день, бригады начали работу вместе в 8 ч и, изготовив 72 детали, снова стали работать раздельно. Теперь за время раздельной работы первая бригада изготовила на 8 деталей больше, чем вторая, уже к 13 ч. Сколько деталей в 1 ч изготавливала каждая бригада?

1. Пусть первая бригада изготавливала в час x деталей, а вторая бригада — y деталей, тогда за 1 ч они вместе изготовили $(x+y)$ деталей, а 72 детали изготовили за $\frac{72}{x+y}$ ч.

2. Следовательно, в первый день они работали раздельно $7-\frac{72}{x+y}$ ч. За это время первая бригада изготовила $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x$ деталей, а вторая бригада — $\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y$ деталей.

3. Согласно условию, получаем уравнение

$$\left(7-\frac{72}{x+y}\right)x-\left(7-\frac{72}{x+y}\right)y=8. \qquad (1)$$

4. Во второй день первая бригада изготавливала в час $(x+1)$ деталь, а вторая бригада — $(y-1)$ деталь.

5. Так как обе бригады в час снова изготавливали $(x+y)$ деталей, то 72 детали они изготовили за $\frac{72}{x+y}$ ч и работали раздельно $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)$ ч.

6. За это время первая бригада изготовила $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)$ деталей, а вторая — $\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)$ деталей.

7. Из условия следует, что

$$\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x+1)-\left(5-\frac{72}{x+y}\right)(y-1)=8. \qquad (2)$$

8. Отметим еще, что условию задачи будут удовлетворять те x и y, для которых выполнено неравенство $x>y$.

9. Итак, для нахождения x и y получим смешанную систему

$$\begin{cases} x>y, \\ \left(7-\frac{72}{x+y}\right)(x-y)=8, \\ \left(5-\frac{72}{x+y}\right)(x-y+2)=8. \end{cases} \qquad (3)$$

10. Положим $\frac{72}{x+y} = z$, $x - y = u$; тогда система (3) запишется в виде

$$\begin{cases} u > 0, \\ (7-z)u = 8, \\ (5-z)(u+2) = 8. \end{cases} \tag{4}$$

11. Перепишем систему (4) так:

$$\begin{cases} 7u - 8 = uz, \\ 5u + 10 - 2z = 8 + uz, \\ u > 0, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} 7u = 8 + uz, \\ 5u + 10 - 2z = 7u, \\ u > 0. \end{cases} \tag{5}$$

12. Из второго уравнения системы (5) следует, что $z = 5 - u$. Подставив это выражение в первое уравнение системы (5), получаем уравнение $7u = 8 + u(5-u)$, которое имеет два корня: $u_1 = 2$, $u_2 = -4$. Условию $u > 0$ удовлетворяет лишь один корень $u_1 = 2$.

13. Поэтому система (4) имеет одно решение: $u_1 = 2$, $z_1 = 3$.

14. Значит, для нахождения x и y получаем систему

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ \dfrac{72}{x+y} = 3, \end{cases}$$

откуда $x = 13$, $y = 11$.

15. *Ответ:* 13 деталей; 11 деталей.

16. Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить сменное задание первой линии на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 ч быстрее по сравнению с первой. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.

1. Обозначим через x, y, z время (в часах), за которое соответственно первая, вторая и третья линии могут выполнить сменное задание первой линии.

2. Тогда за 1 ч они могут выполнить соответственно $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$ часть сменного задания первой линии.

3. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза больше производительности первой и второй линий, работающих одновременно, поэтому

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1{,}5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right). \tag{1}$$

4. За 1 ч вторая и третья линии, работая одновременно, выполнят $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ часть сменного задания первой линии.

5. Значит, для того чтобы выполнить все сменное задание первой линии, им потребуется $\dfrac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ ч, причем по условию

$$\frac{1}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=x-\frac{24}{5}. \tag{2}$$

6. Из условия также следует, что

$$y=x-2. \tag{3}$$

7. Перепишем уравнение (2) так:

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{x-\frac{24}{5}}=\frac{5}{5x-24}.$$

Подставляя $\frac{5}{5x-24}$ вместо $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ в левую часть уравнения (1), а также $x-2$ вместо y в правую часть уравнения (1), получим уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{5}{5x-24}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}\right). \tag{4}$$

8. Упростив уравнение (4), имеем

$$\frac{5x^2-43x+24}{x(x-2)(5x-24)}=0,$$

откуда получаем, что оно имеет два корня: $x_1=8$ и $x_2=\frac{3}{5}$ (не подходит, так как из условия следует, что $x>2$).

9. *Ответ:* 8 ч.

17. В бассейн проведены две трубы разной пропускной способности. Первая из труб расположена на боковой стенке, а вторая — на дне бассейна. Обе трубы могут работать на слив и на наполнение. Пропускная способность каждой трубы при переходе от наполнения к сливу не меняется и не зависит от уровня воды над ней. Первая труба работает на слив лишь тогда, когда вода выше расположения ее входа. Сначала бассейн наполнили на $\frac{1}{4}$ и включили первую трубу на слив, а вторую — на наполнение. При этом оказалось, что бассейн наполнился за время, в $\frac{13}{12}$ раза большее, чем то, которое потребуется для наполнения первоначально пустого бассейна только одной второй трубой. В другой раз при наполненном доверху бассейне включили обе трубы на слив, и тогда оказалось, что вся вода вытекла из бассейна за время, составляющее $\frac{5}{18}$ времени, необходимого для наполнения первоначально пустого бассейна только одной первой трубой.

Во сколько раз пропускная способность второй трубы больше пропускной способности первой?

1. Особенность этой задачи состоит в том, что, исходя из ее условий, нельзя сказать сразу, находится ли вход в первую трубу выше $\frac{1}{4}$ высоты бассейна или он ниже этого уровня.

2. В то же время первое условие задачи (первую трубу включили на слив, а вторую — на наполнение) приводит в каждом из возможных случаев расположения входа первой трубы к разным уравнениям.

3. Следовательно, для решения задачи необходимо рассмотреть оба возможных случая.

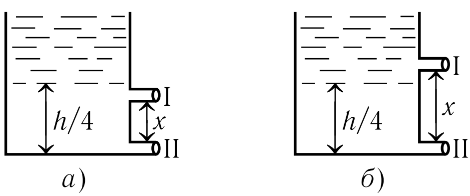


Рис. 22

<u>I случай:</u> $x < \frac{h}{4}$ (рис. 22,*а*). Здесь h — высота бассейна, x — уровень расположения входа первой трубы.

1. Обозначим пропускные способности труб через v_1 и v_2 соответственно, а площадь дна бассейна примем равной 1. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{3h}{4}}{v_2 - v_1} = \dfrac{13}{12} \cdot \dfrac{h}{v_2}, \\ \dfrac{h - x}{v_1 + v_2} + \dfrac{x}{v_2} = \dfrac{5}{18} \cdot \dfrac{h}{v_1}. \end{cases} \qquad (1)$$

2. Заметим, что система (1) фактически содержит только две неизвестные величины: $\frac{x}{h}$ и $\frac{v_2}{v_1}$. Действительно, систему (1) можно записать так:

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{v_2}{v_1} - 1} = \dfrac{13}{12} \cdot \dfrac{1}{\frac{v_2}{v_1}}, \\ \dfrac{1 - \frac{x}{h}}{1 + \frac{v_2}{v_1}} + \dfrac{\frac{x}{h}}{\frac{v_2}{v_1}} = \dfrac{5}{18}. \end{cases} \tag{2}$$

3. Решив систему (2), находим

$$\frac{x}{h} = \frac{169}{288}, \quad \frac{v_2}{v_1} = \frac{13}{4}.$$

4. Неравенство $x < \frac{h}{4}$ в рассматриваемом случае не выполняется. Поэтому решение $\frac{x}{h} = \frac{169}{288}$ не удовлетворяет условиям задачи.

<u>II случай:</u> $x \geqslant \frac{h}{4}$ (рис. 22, *б*). В этом случае система уравнений задачи имеет другой вид:

$$\begin{cases} \dfrac{x - \frac{h}{4}}{v_2} + \dfrac{h - x}{v_2 - v_1} = \dfrac{13}{12} \cdot \dfrac{h}{v_2}, \\ \dfrac{h - x}{v_2 + v_1} + \dfrac{x}{v_2} = \dfrac{5}{18} \cdot \dfrac{h}{v_1}. \end{cases} \tag{1}$$

1. Преобразуя систему (1) так же, как и в предыдущем случае, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\frac{x}{h} - \frac{1}{4}}{\frac{v_2}{v_1}} + \dfrac{1 - \frac{x}{h}}{\frac{v_2}{v_1} - 1} = \dfrac{13}{12} \cdot \dfrac{1}{\frac{v_2}{v_1}}, \\ \dfrac{1 - \frac{x}{h}}{1 + \frac{v_2}{v_1}} + \dfrac{\frac{x}{h}}{\frac{v_2}{v_1}} = \dfrac{5}{18} \end{cases} \tag{2}$$

для определения двух неизвестных $\frac{x}{h}$ и $\frac{v_2}{v_1}$.

2. Решив систему (2), находим

$$\frac{x}{h} = \frac{1}{3}, \quad \frac{v_2}{v_1} = 3.$$

Так как в данном случае $x \geqslant \frac{h}{4}$, то полученное отношение $\frac{v_2}{v_1} = 3$ дает решение задачи.

3. *Ответ:* в 3 раза.

Задачи для самостоятельного решения

1. Школьник прочел книгу в 480 страниц. Ежедневно он прочитывал одинаковое количество страниц. Если бы ежедневно он читал на 16 страниц больше, то прочел бы книгу за 5 дней. Сколько дней школьник читал книгу?

2. На обработку одной детали первый рабочий затрачивает на 6 мин меньше, чем второй. Сколько деталей обработает каждый из них за 7 ч, если первый обрабатывает за это время на 8 деталей больше?

3. Две бригады, работая вместе, отремонтировали участок пути за 6 дней. Одной первой бригаде для выполнения 40% всей работы потребовалось бы на 2 дня больше, чем одной второй бригаде для выполнения $13\frac{1}{3}\%$ всей работы. За сколько дней могла бы отремонтировать весь участок каждая бригада в отдельности?

4. Тракторист должен вспахать 27 га. Проработав 2,5 ч, он стал вспахивать в час на 2 га больше и закончил работу на 30 мин раньше намеченного срока. Сколько гектаров в час вспахивал тракторист?

5. На полях, выделенных агролаборатории для опытов, с двух земельных участков собрали 14,7 ц зерна. На следующий год после применения новых методов агротехники урожай на первом участке повысился на 80%, а на втором — на 24%, благодаря чему с этих же участков было собрано 21,42 ц зерна. Сколько центнеров зерна собирают с каждого участка после применения новых методов агротехники?

6. Рабочий изготовил в срок некоторое количество одинаковых деталей. Если бы он ежедневно изготавливал их на 10 больше, то выполнил бы эту работу на 4,5 дня раньше срока, а если бы он изготавливал в день на 5 деталей меньше, то опоздал бы на 3 дня против срока. Сколько деталей и в какой срок он изготовил?

7. Экскаваторщик получил задание выкопать две траншеи одинаковой глубины на различных участках строительной площадки. Экскаватор сначала вырыл первую траншею длиной 5 м, затем доехал до второго участка и вырыл вторую траншею длиной 3 м. Время, затраченное на рытье первой траншеи, на 1 ч 12 мин меньше, чем время, затраченное на переезд экскаватора и рытье второй траншеи. Если бы производительность экскаватора была в 4 раза меньше, то время, затраченное на рытье первой траншеи, оказалось бы равным времени переезда экскаватора с одного места работы на другое. Определить длину траншеи, вырытой экскаватором за один час.

8. Каждому из трех рабочих для выполнения некоторого задания требуется определенное время, причем третий рабочий выполняет его на 1 ч быстрее первого. Работая все вместе, они выполнят задание за 1 ч. Если же первый рабочий проработает 1 ч и прекратит работу, а затем второй рабочий проработает 4 ч, то они вместе выполнят задание. За какое время может выполнить задание каждый рабочий?

9. Бригада рабочих начала рыть траншею. Через 3 дня к ней присоединилась вторая бригада и им понадобилось еще 8 дней совместной работы, чтобы окончить рытье траншеи. Если бы, наоборот, первые 3 дня работала только вторая бригада, то для окончания работы обеим бригадам вместе потребовалось бы еще 9 дней. За какое время каждая из бригад в отдельности сделала бы всю эту работу?

10. Одна труба наполняет бассейн за 2 ч, а другая — на 4,5 ч дольше, чем наполняют этот бассейн обе трубы, открытые одновременно. За сколько часов может наполнить бассейн каждая труба в отдельности?

11. Соревнуются три бригады лесорубов. Первая и третья бригады обработали древесины в 2 раза больше, чем вторая, а вторая и третья — в 3 раза больше, чем первая. Какая бригада победила в этом соревновании?

12. Двое рабочих выполнили некоторое задание за 30 дней, причем последние 6 дней первый из них не работал. За сколько дней первый рабочий выполнит это задание, если известно, что за 21 день совместной работы они вместе выполнили 80% всего задания?

13. В бассейн проведены две трубы — подающая и отводящая, причем через первую трубу бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на $\frac{1}{3}$ бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым через 8 ч. За сколько часов одна первая труба может наполнить бассейн и за сколько часов одна вторая труба может опорожнить бассейн?

14. Бригада монтеров могла бы окончить проводку в 16 ч, прокладывая в час по 8 м кабеля. После выполнения половины всего задания один рабочий выбыл из бригады. В связи с этим бригада стала прокладывать по 6 м кабеля в час и закончила запланированную на день работу в 18 ч. Сколько метров кабеля было проложено и за сколько часов?

15. Две бригады, работая одновременно, могут выполнить некоторое задание за 8 дней. Если бы работали $\frac{2}{3}$ членов первой бригады и $\frac{4}{5}$ членов второй, то задание было бы выполнено за 11,25 дней. За сколько дней могла бы выполнить это задание каждая бригада в отдельности?

16. К бассейну подведены четыре трубы. Если открыты первая, вторая и третья, то бассейн наполняется за 12 мин; если вторая, третья и четвертая — за 15 мин; если первая и четвертая — за 20 мин. Какое время потребуется для наполнения бассейна всеми четырьмя трубами, открытыми одновременно?

17. Три тракторные бригады вместе вспахивают поле за 4 дня. Это же поле первая и вторая бригады вместе могут вспахать за 6 дней, а первая и третья вместе — за 8 дней. Во сколько раз площадь, вспахиваемая за день второй бригадой, больше, чем площадь, вспахиваемая за день третьей бригадой?

18. В котлован равномерно поступает вода. Известно, что 10 одинаковых насосов, действуя одновременно, могут откачать воду из заполненного котлована за 12 ч, а 15 таких насосов — за 6 ч. Какое время потребуется 25 таким же насосам при их совместной работе, чтобы откачать воду из заполненного котлована?

19. Бассейн заполняется водой через первую трубу на 5 ч быстрее, чем через вторую, и на 30 ч быстрее, чем через третью. Известно, что пропускная способность третьей трубы в 2,5 раза меньше пропускной способности первой и на 24 $м^3/ч$ меньше пропускной способности второй. Найти пропускные способности первой и третьей труб.

20. Трое рабочих должны изготовить 80 одинаковых деталей. Известно, что все трое вместе за 1 ч могут изготовить 20 деталей. Сначала к работе приступил первый рабочий, который изготовил 20 деталей, затратив на это более 3 ч. Оставшуюся часть работы выполняли вместе второй и третий рабочие. На всю работу было затрачено 8 ч. Сколько часов потребовалось бы первому рабочему на изготовление всех 80 деталей?

Ответы

1. 6 дней. **2.** 28 деталей; 20 деталей. **3.** За 10 дней; за 15 дней. **4.** 6 га. **5.** 10,26 ц; 11,16 ц. **6.** 1350 деталей; 27 дней. **7.** 15 м. **8.** За 3 ч; за 6 ч; за 2 ч. **9.** За 15 дней; за 30 дней. **10.** За 5 ч; за 7,5 ч. **11.** Третья бригада. **12.** За 42 дня. **13.** За 8 ч; за 6 ч. **14.** 96 м; за 14 ч. **15.** За 12 дней; за 24 дня. **16.** 10 мин. **17.** В 1,5 раза. **18.** 3 ч. **19.** 60 $м^3/ч$; 24 $м^3/ч$. **20.** 16 ч.

Глава 5

ДРУГИЕ ТИПЫ ЗАДАЧ

1. ЗАДАЧИ НА ЧИСЛОВЫЕ ЗАВИСИМОСТИ

1°. В десятичной системе счисления десять цифр: 0, 1, 2, 3, …, 9. С помощью этих цифр можно записать любое число, в котором каждая цифра имеет свою позицию.

2°. Если дано число, записанное цифрами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (его обычно записывают в виде $\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$), то оно равно следующей сумме:

$$a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_n.$$

Например, $1998 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10 + 8$.

3°. Если к натуральному числу a приписать справа n-значное число b, то получится число $a \cdot 10^n + b$.

4°. Если к n-значному числу a приписать слева натуральное число b, то получится число $b \cdot 10^n + a$.

5°. Если a и b — натуральные числа, причем $a > b$, то существует, и притом только одна, пара натуральных чисел q и r таких, что $a = bq + r$, $0 \leqslant r < b$, где a — делимое, b — делитель, q — частное, r — остаток.

Задачи с решениями

1. Найти двузначное число, зная, что число его единиц на 2 больше числа десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

1. Пусть x — число десятков искомого числа; тогда $x + 2$ — число единиц.

2. Получаем уравнение

$$(10x + (x + 2))(x + (x + 2)) = 144,$$

откуда $x_1 = 2$ и $x_2 = -3\frac{2}{11}$ (этот корень не удовлетворяет условию).

3. *Ответ:* 24.

2. Ученику надо было умножить 78 на двузначное число, в котором цифра десятков втрое больше цифры единиц; по ошибке он переставил цифры во втором сомножителе, отчего и получил произведение, на 2808 меньшее истинного. Чему равно истинное произведение?

1. Пусть цифра единиц истинного множителя есть x (x — целое число, меньшее 10); тогда цифра десятков есть $3x$, а сам множитель равен $3 \cdot 10x + x = 31x$.

2. Ошибочно записанный множитель был $10x + 3x = 13x$.

3. Истинное произведение равно $78 \cdot 31x$, ошибочно полученное произведение есть $78 \cdot 13x$.

4. По условию $78 \cdot 31x - 78 \cdot 13x = 2808$, откуда $x = 2$.

5. Значит, истинный множитель равен 62, а истинное произведение равно 4836.

6. *Ответ:* 4836.

3. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти искомое двузначное число.

1. Пусть x — цифра десятков, y — цифра единиц искомого числа. Тогда само число равно $10x + y$.

2. Из условия следует, что $x + y = 12$, а также $10x + y + 36 = 10y + x$, т.е. получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 12, \\ 9y - 9x = 36, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x + y = 12, \\ y - x = 4. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = 4$, $y = 8$.

3. *Ответ:* 48.

4. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти искомое число.

1. Пусть x — цифра десятков, а y — цифра единиц искомого двузначного числа. Тогда это число имеет вид $10x + y$.

2. Используя условия задачи, получаем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 10x + y - 9 = 10y + x, \end{cases}$$

которая имеет решение $x_1 = 3$, $y_1 = 2$ (решение $x_2 = -2$, $y_2 = -3$ не подходит, так как x и y — цифры).

3. *Ответ:* 32.

5. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 3, а в остатке 7. Если же взять сумму квадратов цифр этого числа и вычесть из нее произведение цифр, то получится первоначальное число. Найти это число.

1. Пусть x — цифра десятков, y — цифра единиц искомого числа. Тогда это число имеет вид $10x + y$.

2. По условию имеем

$$\begin{cases} 10x + y = 3(x + y) + 7, \\ x^2 + y^2 - xy = 10x + y, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 7x - 2y = 7, \\ x^2 + y^2 - xy = 10x + y. \end{cases}$$

3. Данная система имеет решение $x_1 = 3$, $y_1 = 7$; $x_2 = \frac{7}{13}$, $y_2 = -\frac{21}{13}$. Ясно, что условию задачи отвечает только первая пара.

4. *Ответ:* 37.

6. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то в частном получится 6, а в остатке 5. Найти остаток от деления этого числа на произведение его цифр.

1. Двузначное число имеет вид $10a + b$, а сумма его цифр равна $a + b$.

2. Тогда из условия задачи следует

$$\frac{10a + b}{a + b} = 6 + \frac{5}{a + b}. \qquad (1)$$

3. Упростив равенство (1), получим $4a - 5b = 5$, откуда $a = \frac{5 + 5b}{4}$. Так как a — цифра, то $b = 3$, и значит, $a = 5$.

4. Остаток от деления данного числа на произведение его цифр имеет вид $\dfrac{10a+b}{ab}$, откуда $\dfrac{10\cdot 5+3}{5\cdot 3}=3+\dfrac{8}{15}$.

5. *Ответ:* 8.

7. Двузначное число больше суммы своих цифр в 4 раза, а будучи уменьшенным на 8, составляет $\dfrac{4}{9}$ от квадрата этой суммы. Найти искомое число.

1. Пусть $\overline{xy}$ — искомое число, тогда $\overline{xy}=10x+y$.

2. Согласно условию, получим систему

$$\begin{cases} 10x+y=4(x+y), & (1)\\ 10x+y-8=\frac{4}{9}(x+y)^2. & (2)\end{cases}$$

3. Вычитая (1) из (2), приходим к уравнению

$$\frac{4}{9}(x+y)^2-4(x+y)+8=0, \quad \text{или} \quad t^2-9t+18=0,$$

где $t=x+y$. Отсюда $t_1=6$, $t_2=3$.

4. Уравнения $x+y=6$ и $x+y=3$ решаем совместно с уравнением (1):

$$\text{а) } \begin{cases} x+y=6,\\ 10x+y=24;\end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} x+y=3,\\ 10x+y=12.\end{cases}$$

5. Во вторых строках систем а) и б) и получаются искомые числа.

6. *Ответ:* 24 или 12.

8. Остаток от деления натурального числа n на 12 равен 5; остаток от деления n на 16 равен 9. Чему равен остаток от деления наименьшего из возможных чисел n на 24?

1. Пусть n — натуральное число, p и q — целые числа, получающиеся при делении n на 12 на 16 соответственно.

2. Тогда, согласно условию, имеем

$$\begin{cases} n=12p+5,\\ n=16q+9,\end{cases} \qquad \text{или} \quad 12p+5=16q+9,$$

откуда

$$p=\frac{1+4q}{3}. \qquad (1)$$

3. Так как p и q — целые положительные числа, то перебором устанавливаем, что наименьшему значению $q = 2$ в равенстве (1) соответствует целое $p = 3$.

4. Следовательно, наименьшее из искомых возможных чисел n есть $n = 12 \cdot 3 + 5 = 41$; остаток от его деления на 24 равен 17.

5. *Ответ:* 17.

9. Дано двузначное число. Если увеличить на 5 цифру его десятков, поменять местами цифры десятков и единиц у полученного числа и к результату прибавить 25, то получится двузначное число, вдвое большее данного. Найти данное число.

1. Данное число имеет вид $10x + y$.

2. Тогда по условию

$$10y + (x + 5) + 25 = 2(10x + y), \quad \text{или} \quad 19x = 30 + 8y.$$

3. а) Прежде всего ясно, что x — четное число.

б) Так как y — цифра, то выполняются неравенства $0 \leqslant y \leqslant 9$.

в) Поэтому $30 \leqslant 19x \leqslant 102$, т. е. $\frac{30}{19} \leqslant x \leqslant \frac{102}{19}$.

г) Учитывая, что x — целое число, из последних неравенств находим промежуток возможных значений x: $2 \leqslant x \leqslant 5$.

д) Таким образом, возможные значения x — это 2 и 4.

4. Проверка показывает, что годится только $x = 2$; тогда $y = 1$.

5. *Ответ:* 21.

10. Ученик должен был перемножить два трехзначных числа. Однако он не заметил знака умножения и принял оба рядом стоящих множителя за одно шестизначное число. Поэтому получившееся ошибочное число оказалось в 3 раза больше истинного произведения. Какие числа должен был перемножить ученик?

1. Пусть x — первый множитель, y — второй множитель.

2. Тогда истинное произведение равно xy, а ошибочное шестизначное число имеет вид $\overline{xy}$; так как x и y — трехзначные числа, то $\overline{xy} = 1000x + y$.

3. Согласно условию, составим уравнение

$$1000x + y = 3xy.$$

4. Выразив из этого уравнения x через y, получим

$$x = \frac{y}{3y - 1000}.$$

а) Ясно, что $3y - 1000 > 0$, т.е. $3y > 1000$, или $y > 333{,}3$.

б) Далее, x — трехзначное число, поэтому $x \geqslant 100$, т.е. $\dfrac{y}{3y - 1000} \geqslant$ $\geqslant 100$.

в) Следовательно, $y \leqslant 334{,}4$.

г) Так как y — целое число, то $y = 334$.

д) Значит, $x = \dfrac{334}{3 \cdot 334 - 1000} = 167$.

5. *Ответ:* 167 и 334.

11. Найти три числа, из которых второе больше первого на столько, на сколько третье больше второго, если известно, что произведение двух меньших чисел равно 85, а произведение двух бóльших равно 115.

1. Пусть наименьшее число есть x, следующее y и наибольшее z.

2. Согласно условию, имеем три уравнения:

$$y - x = z - y, \tag{1}$$

$$xy = 85, \tag{2}$$

$$yz = 115. \tag{3}$$

3. Из уравнения (1) следует, что $z = 2y - x$; подставляя z в уравнение (3), имеем $2y^2 - xy = 115$, откуда в силу уравнения (2) получим $2y^2 = 200$.

4. Значит, $y_1 = 10$, $y_2 = -10$, откуда находим два решения системы (1)–(3): $x_1 = 8{,}5$, $y_1 = 10$, $z_1 = 11{,}5$; $x_2 = -8{,}5$, $y_2 = -10$, $z_2 = -11{,}5$. Первое удовлетворяет условию (так как $x_1 < y_1 < z_1$), а второе — нет.

5. *Ответ:* 8,5; 10; 11,5.

12. Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то новое число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

1. Пусть x — пятизначное число, следующее за цифрой 2, тогда искомое число равно $200\,000 + x$.

2. Если цифру 2 в искомом шестизначном числе перенести на последнее место, то новое число будет равно $10x + 2$.

3. Согласно условию, имеем

$$10x + 2 = 3(200\,000 + x), \quad \text{откуда} \quad x = 85\,714.$$

4. *Ответ:* 285 714.

13. Найти два таких числа, у которых сумма, произведение и разность квадратов равны.

1. Пусть x и y — искомые числа. Тогда они должны удовлетворять равенствам
$$x + y = xy = x^2 - y^2. \tag{1}$$

2. Равенства (1) равносильны системе
$$\begin{cases} x + y = xy, \\ x + y = x^2 - y^2, \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{x}{x-1}, \\ 1 = x - y. \end{cases} \tag{2}$$

Замечание. Мы исключаем тривиальный случай $x = y = 0$ и невозможный случай $x + y = 0$ и $x - y = 0$.

3. Подставив $y = \dfrac{x}{x-1}$ во второе уравнение системы (2), получаем $x^2 - 3x + 1 = 0$, т.е. $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, откуда $y = x - 1 = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

4. *Ответ:* $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ или $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ и $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

14. Знаменатель несократимой дроби на 2 больше, чем числитель. Если у дроби, обратной данной, уменьшить числитель на 3 и вычесть из этой новой дроби заданную, то получится $\dfrac{1}{15}$. Найти первоначальную дробь.

1. Искомую дробь можно представить в виде $\dfrac{m}{m+2}$; тогда обратная ей дробь есть $\dfrac{m+2}{m}$.

2. Используя условие задачи, составим уравнение
$$\frac{m-1}{m} - \frac{m}{m+2} = \frac{1}{15}, \quad \text{или} \quad m^2 - 13m + 30 = 0,$$
откуда $m = 3$ или $m = 10$.

3. Если $m = 10$, то получим сократимую дробь $\dfrac{10}{12}$, а это противоречит условию задачи.

4. Если $m = 3$, то получим несократимую дробь $\dfrac{3}{5}$.

5. *Ответ:* $\dfrac{3}{5}$.

15. Разность двух чисел равна 48, а разность между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел равна 18. Найти эти числа.

1. Напомним, что числа $\frac{x+y}{2}$ и $\sqrt{xy}$ называются соответственно средним арифметическим и средним геометрическим чисел x и y. При этом $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

2. Искомые числа x и y должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} x - y = 48, \\ \dfrac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = 18. \end{cases}$$

2. Эту систему решим методом подстановки. Из первого уравнения следует, что $x = y + 48$. Подставив это выражение во второе уравнение, получаем

$$y + 24 - 18 = \sqrt{y(y+48)}; \quad (y+6)^2 = y(y+48); \quad 36y = 36; \quad y = 1.$$

3. Значит, $x = 49$.

4. *Ответ:* 49 и 1.

2. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К НЕРАВЕНСТВАМ

1°. Математические модели некоторых задач могут состоять из одних неравенств или из систем равенств и неравенств. Решение таких задач часто сводится к получению единственного решения этих неравенств.

2°. Для этого достаточно использовать основные свойства неравенств и действия с неравенствами. Иногда возможно применение метода интервалов.

3°. В некоторых случаях удается сделать содержательные выводы, используя признаки делимости чисел.

Задачи с решениями

1. В школьной газете сообщается, что количество процентов учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключено в пределах от 2,9% до 3,1%. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.

1. Пусть n — число учеников данного класса, а m — число учеников этого класса, повысивших успеваемость.

2. Тогда количество процентов учеников, повысивших успеваемость, равно $\frac{m}{n} \cdot 100$.

3. Согласно условию задачи, имеем неравенство

$$2{,}9 \leqslant \frac{m}{n} \cdot 100 \leqslant 3{,}1. \qquad (1)$$

4. Из неравенства (1) следует, что $m \neq 0$ (т.е. $m \geqslant 1$) и что $n \geqslant \dfrac{1000}{31} m$.

5. Так как очевидно, что $\dfrac{1000}{31} m \geqslant \dfrac{1000}{31} > 32$, то $n \geqslant 33$.

6. Итак, в данном классе должно быть не менее, чем 33 ученика.

7. Остается выяснить, какое минимальное число учеников все-таки может быть в этом классе.

8. Легко установить, что если в классе имеются 33 ученика и один из них повысит успеваемость, т.е. если $n = 33$ и $m = 1$, то такая пара чисел удовлетворяет неравенству (1).

9. Значит, минимально возможное число учеников в данном классе равно 33.

10. *Ответ:* 33 ученика.

2. Фирма собирается взять кредит на m лет и после этого срока возмещать долг. Какие максимальные годовые проценты возмещения (выраженные целым числом) может позволить себе фирма, если ей необходимо, чтобы за m лет долг вырос не более, чем в k раз? Рассмотреть частный случай: $m = 5$, $k = 3$.

1. Здесь речь идет о сложных процентах. Пусть долг ежегодно увеличивается на $p\%$.

2. Задача сводится к решению относительно p неравенства

$$(1 + 0{,}01p)^m A \leqslant kA, \quad \text{или} \quad (1 + 0{,}01p)^m \leqslant k, \qquad (1)$$

где A — величина кредита (она, по существу, в решении не участвует).

3. Для решения неравенства (1) возведем обе его части в дробную степень $\frac{1}{m}$. Получим

$$1 + 0{,}01p \leqslant k^{\frac{1}{m}}, \quad \text{или} \quad p \leqslant \frac{k^{\frac{1}{m}} - 1}{0{,}01}. \qquad (2)$$

4. Неравенство (2) имеет бесконечно много решений; если число p_0 удовлетворяет этому неравенству, то ему удовлетворяют и все числа $p \in (0; p_0)$.

5. Банк не может дать кредит под слишком малое количество процентов p. Значит, нам нужно указать наибольшее целое p, удовлетворяющее неравенству (2).

6. Если $\dfrac{k^{\frac{1}{m}}-1}{0{,}01}$ — целое число, то $p=\dfrac{k^{\frac{1}{m}}-1}{0{,}01}$. В противном случае $p=\left[\dfrac{k^{\frac{1}{m}}-1}{0{,}01}\right]$ (квадратными скобками обозначена целая часть числа).

Замечание. Целой частью числа a называется наибольшее целое число $a_0=[a]$, удовлетворяющее неравенству $a_0 \leqslant a$.

7. Частный случай $m=5$, $k=3$ приводит к неравенству

$$p \leqslant \frac{3^{\frac{1}{5}}-1}{0{,}01}.$$

С помощью калькулятора находим, что $3^{\frac{1}{5}} \approx 1{,}246$. Значит, $24 < \dfrac{3^{\frac{1}{5}}-1}{0{,}01} < 25$. Следовательно, нужно считать, что $p=24$, т.е. максимальное количество процентов, которое фирма может себе позволить, равно 24% годовых.

8. *Ответ:* 24%.

3. Вкладчик положил некоторую сумму денег в банк под p% годовых. Через какое минимальное количество лет его вклад увеличится не менее, чем в k раз? Рассмотреть частный случай: $p=8\%$, $k=7$.

1. Пусть вкладчик положил в банк A р.; тогда через n лет величина вклада станет равной $(1+0{,}01p)^nA$ р.

2. Таким образом, нужно решить относительно n неравенство

$$(1+0{,}01p)^nA \geqslant kA, \quad \text{или} \quad (1+0{,}01p)^n \geqslant k.$$

3. Последнее неравенство решается логарифмированием:

$$\lg(1+0{,}01p)^n \geqslant \lg k, \quad \text{или} \quad n \geqslant \frac{\lg k}{\lg(1+0{,}01p)}.$$

Если $\dfrac{\lg k}{\lg(1+0{,}01p)}$ — целое число, то $n=\dfrac{\lg k}{\lg(1+0{,}01p)}$. В противном случае

$$n=\left[\frac{\lg k}{\lg(1+0{,}01p)}\right]+1$$

(квадратные скобки означают целую часть числа).

4. Частный случай $p = 8\%$, $k = 7$ приводит к неравенству $n \geqslant \geqslant \frac{\lg 7}{\lg 1{,}08}$. С помощью таблиц логарифмов (или калькулятора) находим $25 < \frac{\lg 7}{\lg 1{,}08} < 26$. Следовательно, вклад увеличится в 7 раз не ранее, чем через 26 лет.

5. *Ответ:* через 26 лет.

4. Один вид железной руды содержит 72% железа, а другой — 58%. Некоторое количество руды первого вида смешали с некоторым количеством руды второго вида и получили руду с 62%-м содержанием железа. Если бы для смеси взяли руды каждого вида на 15 кг больше, чем было взято, то получилась бы руда с p%-м содержанием железа. Сколько килограммов руды первого и второго видов было взято для первой смеси?

1. Предположим, что для первой смеси взято x кг первого вида и y кг второго вида руды.

2. Сравнивая количество железа в первой и второй смесях, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} 0{,}72x + 0{,}58y = 0{,}62(x + y), \\ 0{,}72(x + 15) + 0{,}58(y + 15) = 0{,}01p(x + y + 30). \end{cases} \tag{1}$$

3. Решив систему (1), получаем

$$x = \frac{2(30p - 1950)}{434 - 7p}, \quad y = \frac{5(30p - 1950)}{434 - 7p}.$$

4. Задача имеет решение, если $x > 0$, $y > 0$, т.е. $\frac{30p - 1950}{434 - 7p} > 0$. Это приводит к ограничениям $62 < p < 65$.

5. *Ответ:* $\frac{2(30p - 1950)}{434 - 7p}$; $\frac{5(30p - 1950)}{434 - 7p}$, $62 < p < 65$.

5. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй — 10% меди и 90% марганца, третий — 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

1. Пусть для приготовления сплава, содержащего 40% марганца, взяли x кг первого, y кг второго и z кг третьего сплава.

2. При этом получится $(x + y + z)$ кг нового сплава, который содержит $(0{,}9y + 0{,}6z)$ кг марганца; значит,

$$0{,}9y + 0{,}6z = 0{,}4(x + y + z),$$

откуда

$$4x = 5y + 2z. \qquad (1)$$

3. Новый сплав содержит $(0{,}7x + 0{,}1y + 0{,}25z)$ кг меди, а в 1 кг нового сплава содержится

$$M = \frac{0{,}7x + 0{,}1y + 0{,}25z}{x + y + z} \text{ кг меди.}$$

4. Из равенства (1) следует, что $x = \dfrac{5y + 2z}{4}$; поэтому

$$M = \frac{13y + 8z}{30y + 20z}. \qquad (2)$$

5. Так как для приготовления нового сплава можно брать различное число килограммов первого, второго и третьего сплавов, то y и z в равенстве (2) могут принимать любые неотрицательные значения, причем y и z не могут одновременно быть равными нулю.

6. Если $y = 0$, $z \neq 0$, то $M = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$; если $y \neq 0$, $z = 0$, то $M = \frac{13}{30}$.

7. Если $y \neq 0$, $z \neq 0$, то

$$M = \frac{13 + 8\frac{z}{y}}{30 + 20\frac{z}{y}} = \frac{2}{5} + \frac{1}{30 + 20\frac{z}{y}}.$$

Поскольку $\frac{z}{y} > 0$, легко установить, что в этом случае будут справедливы неравенства

$$\frac{2}{5} < \frac{2}{5} + \frac{1}{30 + 20\frac{z}{y}} < \frac{2}{5} + \frac{1}{30} = \frac{13}{30}.$$

8. Значит, наименьшее процентное содержание меди равно $\frac{2}{5} \times$ $\times 100\% = 40\%$, а ее наибольшее процентное содержание равно $\frac{13}{30} \times$ $\times 100\% = 43\frac{1}{3}\%$.

9. *Ответ:* 40%; $43\frac{1}{3}\%$.

6. В 9 ч утра из пункта A в пункт C отправляется экспресс. В это же время из пункта B, расположенного между A и C, выходят два пассажирских поезда; первый из них следует в пункт A, а второй — в пункт C, причем скорости этих поездов равны. Экспресс встречает первый пассажирский поезд не позже, чем через 3 ч после его отправления, затем проезжает пункт B не ранее 14 ч того же дня, и, наконец, прибывает в пункт C одновременно со вторым пассажирским поездом через 12 ч после встречи с первым пассажирским поездом. Найти время прибытия в пункт A первого пассажирского поезда.

1. Пусть скорость экспресса v_1 (км/ч), скорость пассажирского поезда v_2 (км/ч), расстояние AB равно s км.

2. Так как экспресс встречает первый пассажирский поезд не позже, чем через 3 ч после его отправления, то получаем неравенство

$$\frac{s}{v_1+v_2} \leqslant 3. \tag{1}$$

3. Поскольку экспресс проезжает пункт B не раньше, чем через 5 ч после своего отправления, имеем неравенство

$$\frac{s}{v_1} \geqslant 5. \tag{2}$$

4. До первой встречи поездов прошло $\frac{s}{v_1+v_2}$ ч; поэтому через $12+$ $+\frac{s}{v_1+v_2}$ ч экспресс догонит второй пассажирский поезд. Таким образом, получаем уравнение

$$\left(12+\frac{s}{v_1+v_2}\right)(v_1-v_2)=s. \tag{3}$$

5. Нам требуется найти $x=\frac{s}{v_2}$. Отсюда $s=xv_2$; подставив это выражение для s в соотношения (1), (2) и (3) и полагая $\frac{v_1}{v_2}=a$, приходим к системе

$$\begin{cases} x \leqslant 3(a+1), \\ x \geqslant 5a, \\ x = 6(a^2-1). \end{cases} \tag{4}$$

6. Из системы (4) нужно исключить либо x, либо a и перейти к системе двух неравенств с одной переменной. Подставляя $x=6(a^2-1)$ в два первых неравенства системы (4), получаем

$$\begin{cases} 2a^2-a-3 \leqslant 0, \\ 6a^2-5a-6 \geqslant 0. \end{cases} \tag{5}$$

7. Решив первое неравенство системы (5), находим $-1 \leqslant a \leqslant \frac{3}{2}$. Решение второго неравенства есть $a \geqslant \frac{3}{2}$ или $a \leqslant -\frac{2}{3}$. Значит, решением системы (5) является $a = \frac{3}{2}$, а также все значения a из промежутка $-1 \leqslant a \leqslant -\frac{2}{3}$.

8. Условию задачи удовлетворяет единственное значение $a = \frac{3}{2}$; тогда $x = \frac{15}{2}$.

9. Значит, первый пассажирский поезд прибывает в пункт A в 16 ч 30 мин.

10. *Ответ:* в 16 ч 30 мин.

7. Велосипедист отправляется из A в B. Расстояние от A до B равно 60 км; скорость велосипедиста постоянна. Не задерживаясь в B, он едет обратно с той же скоростью, но через 1 ч после отправления из B останавливается на 20 мин. После этого он продолжает путь, увеличив скорость на 4 км/ч. В каких границах заключена первоначальная скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он потратил времени не более, чем на путь от A до B?

1. Пусть x (км/ч) — первоначальная скорость велосипедиста.

2. Из условия задачи следует, что

$$t_{AB} = \frac{60}{x}\ (\text{ч}), \quad \text{а} \quad t_{BA} = \frac{60-x}{x+4} + \frac{4}{3}\ (\text{ч}) \quad (\text{рис. } 23).$$

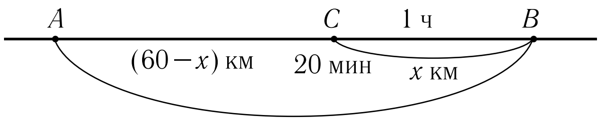


Рис. 23

3. Так как $t_{BA} \leqslant t_{AB}$, то

$$\frac{60-x}{x+4} + \frac{4}{3} \leqslant \frac{60}{x}, \quad \text{или} \quad \frac{(x-20)(x+36)}{x(x+4)} \leqslant 0.$$

Решив это неравенство, получим $0 < x \leqslant 20$.

4. *Ответ:* $0 < x \leqslant 20$ км/ч.

8. Из пункта A в пункт B в 8 ч утра отправляется скорый поезд. В этот же момент из B в A отправляются пассажирский и курьерский поезда, причем скорость пассажирского поезда в 2 раза меньше скорости курьерского. Скорый поезд прибывает в пункт B в 13 ч 50 мин того же дня, а встречает курьерский поезд не ранее 10 ч 30 мин утра. Найти время прибытия пассажирского поезда в пункт A, если известно, что между моментами встреч скорого поезда с курьерским и скорого поезда с пассажирским проходит не менее 1 ч.

1. Выполним схематический чертеж (рис. 24).

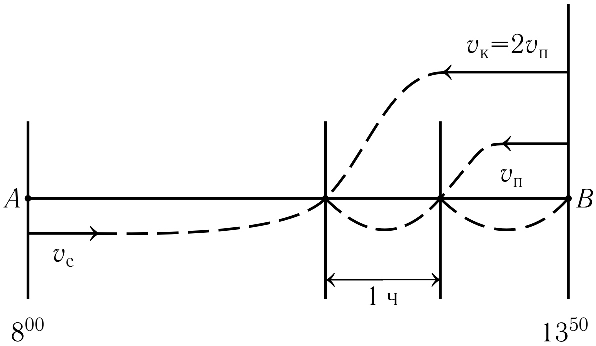


Рис. 24

2. Пусть $AB = s$ — расстояние между A и B; $v_п$ — скорость пассажирского поезда, а $v_с$ — скорого поезда. Тогда скорость курьерского поезда $v_к = 2v_п$.

3. Скорый поезд прибывает в пункт B в 13 ч 50 мин, т. е. через 5 ч 50 мин. Составим уравнение

$$\frac{s}{v_с} = \frac{35}{6}. \tag{1}$$

4. Время, прошедшее от начала движения до встречи скорого поезда с пассажирским, равно отношению $\frac{s}{v_с + v_п}$, а время до встречи скорого поезда с курьерским — отношению $\frac{s}{v_с + 2v_п}$. Согласно условию, между моментами этих встреч проходит не менее 1 ч, т.е. выполняется неравенство

$$\frac{s}{v_с + v_п} - \frac{s}{v_с + 2v_п} \geqslant 1. \tag{2}$$

5. Скорый поезд встречается с курьерским не ранее 10 ч 30 мин утра, т.е. не менее, чем через 2 ч 30 мин. Составим неравенство

$$\frac{s}{v_с + 2v_п} \geqslant \frac{5}{2}. \tag{3}$$

6. Неравенства (3) и (2) перепишем так:

$$\frac{\frac{s}{v_{\text{с}}}}{1+2\,\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{с}}}} \geqslant \frac{5}{2}, \quad \frac{\frac{s}{v_{\text{с}}}}{1+\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{с}}}} - \frac{\frac{s}{v_{\text{с}}}}{1+2\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{с}}}} \geqslant 1.$$

Подставляя в эти неравенства значения отношения $\frac{s}{v_{\text{с}}}$ из уравнения (1) и выполняя преобразования, получим систему неравенств

$$\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{с}}} \leqslant \frac{2}{3}, \quad 12\left(\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{с}}}\right)^2 - 17\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{с}}} + 6 \leqslant 0,$$

или

$$\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{с}}} \leqslant \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leqslant \frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{с}}} \leqslant \frac{3}{4}. \qquad (4)$$

7. Теперь видно, в чем состоит ключевой момент решения задачи. Получена система неравенств (6), так сказать, почти исключающих друг друга. Для того чтобы такая система была совместной, необходимо выполнение равенства $\frac{v_{\text{п}}}{v_{\text{с}}} = \frac{2}{3}$. Таким образом, получаем еще одно дополнительное уравнение.

8. В задаче требуется найти время прибытия пассажирского поезда в пункт A, т.е. величину $\frac{s}{v_{\text{п}}}$. Имеем

$$\frac{s}{v_{\text{п}}} = \frac{s}{v_{\text{с}}} \cdot \frac{v_{\text{с}}}{v_{\text{п}}} = \frac{35}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{35}{4}.$$

9. Итак, пассажирский поезд затрачивает на весь путь 8 ч 45 мин и прибывает в пункт A в 16 ч 45 мин.

10. *Ответ:* 16 ч 45 мин.

9. В 7 ч утра из пункта A в пункт B по течению реки отправляются байдарка и катер. Байдарка достигает пункта B в 17 ч того же дня. Катер же, дойдя до пункта B, мгновенно поворачивает назад и на своем пути из B в A встречает байдарку не позднее 15 ч, а прибывает в пункт A не ранее 23 ч того же дня. Найти время прибытия катера в пункт B, если известно, что собственная скорость катера вдвое больше собственной скорости байдарки.

1. Пусть w, v и u — скорости катера, байдарки (в стоячей воде) и реки соответственно, $w = 2v$, s — расстояние между пунктами A и B.

2. Так как байдарка находилась в пути 10 ч, то

$$\frac{s}{v+u} = 10. \qquad (1)$$

3. Поскольку катер может двигаться против течения, имеем

$$2v > u. \tag{2}$$

4. Пусть t — время (в часах) между встречами катера и байдарки. За это время байдарка прошла расстояние $(v + u)t$, а катер, повернув в пункте B назад и, двигаясь со скоростью $2v - u$, за время $t - \frac{s}{2v+u}$ $\left(\text{где } \frac{s}{2v+u} \text{ — время движения катера вниз по реке из } A \text{ в } B\right)$ прошел расстояние $(2v - u)\left(t - \frac{s}{2v+u}\right)$. Сумма этих расстояний, очевидно, равна s, т.е.

$$(v+u)t + (2v-u)\left(t - \frac{s}{2v+u}\right) = s.$$

5. Выразив из этого равенства время t и учитывая, что по условию $t \leqslant 8$, приходим к неравенству

$$\frac{s + \frac{2v-u}{2v+u}s}{3v} \leqslant 8. \tag{3}$$

6. Наконец, учитывая, что катер прибыл обратно в пункт A не ранее 23 ч того же дня, получим неравенство

$$\frac{s}{2v+u} + \frac{s}{2v-u} \geqslant 16. \tag{4}$$

7. Найдем решение системы неравенств (2)–(4). Разделим числитель и знаменатель каждой из дробей (3) и (4) на $v + u$ и используя равенство (1), получим систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{10 + \frac{2v-u}{2v+u}}{3\frac{v}{v+u}} \leqslant 8, & (5) \\[2ex] \dfrac{\frac{10}{2v+u}}{v+u} + \dfrac{\frac{10}{2v-u}}{v+u} \geqslant 16. & (6) \end{cases}$$

8. Неравенства (5) и (6) после преобразований примут следующий вид:

$$\begin{cases} 5\left(\frac{v}{u} + 1\right) \leqslant 3\left(2\,\frac{v}{u} + 1\right), \\ 5\left(\frac{v}{u} + 1\right)\frac{v}{u} \geqslant 2\left(4\left(\frac{v}{u}\right)^2 - 1\right), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{v}{u} \geqslant 2, \\ -\frac{1}{3} \leqslant \frac{v}{u} \leqslant 2. \end{cases} \tag{7}$$

9. Ясно, что система неравенств (7) непротиворечива, только если $\frac{v}{u} = 2$, т.е. $v = 2u$. Тогда из уравнения (1) получаем $\frac{s}{3u} = 10$, т.е. $\frac{s}{u} = 30$.

10. В задаче требуется найти время прибытия катера в пункт B, т.е. величину

$$T = \frac{s}{2v + u} = \frac{s}{5u} = \frac{30}{5} = 6.$$

11. *Ответ:* 13 ч.

10. Производительность завода A не превышает 950 машин в сутки. Производительность завода B первоначально составляла 95% производительности завода A. После ввода дополнительной линии завод B увеличил производство машин в сутки на 23% от числа машин, выпускаемых в сутки на заводе A, и стал выпускать более 1000 машин в сутки. Сколько машин за сутки выпускал каждый завод до реконструкции завода B? Предполагается, что каждый завод в сутки выпускает целое количество машин.

1. Пусть x — количество машин, производимых в сутки заводом A.

2. Тогда завод B до реконструкции производил в сутки $\frac{95}{100} \cdot x$ машин, а после ввода дополнительной линии стал выпускать $\frac{95x}{100} + \frac{23x}{100}$ машин.

3. Согласно условию, имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x \leqslant 950, \\ \frac{95x}{100} + \frac{23x}{100} > 1000. \end{cases} \tag{1}$$

4. Множество решений системы (1) есть промежуток $854\frac{82}{117} < x \leqslant 950$. Так как числа $\frac{23x}{100}$ и $\frac{95x}{100}$ должны быть целыми, то x должен делиться на 100 и принадлежать указанному промежутку, поэтому $x = 900$.

5. Следовательно, завод A выпускал 900 машин в сутки, а завод B до реконструкции — $\frac{95}{100} \cdot 900 = 855$ машин в сутки.

6. *Ответ:* 900 и 855 машин.

3. ЗАДАЧИ С ЦЕЛОЧИСЛЕННЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1°. В этом параграфе рассматриваются задачи на составление уравнений или неравенств, в которых неизвестные величины могут принимать только целые значения.

2°. Часто эти задачи составлены таким образом, что их однозначное решение находится только при условии существенного использования целочисленности неизвестных.

Задачи с решениями

1. Школьник переклеивает свои марки в новый альбом. Если он будет наклеивать на каждый лист по 20 марок, то ему не хватит этого альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если же в дополнение к старому альбому он возьмет новый, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего станет 500 марок. Сколько листов в новом альбоме?

1. Пусть x — число листов в новом альбоме, y — количество марок. Согласно условию задачи, составим систему

$$\begin{cases} 20x < y, & (1) \\ 23(x-1) \geqslant y, & (2) \\ 21x + y = 500. & (3) \end{cases}$$

2. Из уравнения (3) выразим $y = 500 - 21x$ и подставим это выражение в неравенства (1) и (2). Имеем

$$\begin{cases} 20x < 500 - 21x, \\ 23x - 23 \geqslant 500 - 21x, \end{cases}$$

откуда $11\frac{39}{44} \leqslant x < 12\frac{8}{41}$.

3. Так как x — целое число, то $x = 12$.

4. *Ответ:* 12 листов.

2. Возле дома запланировано посадить более 15 лип и берез. Если число лип увеличить вдвое, а число берез увеличить на 18, то берез станет больше. Если же число берез увеличить вдвое, не меняя число лип, то лип все равно будет больше. Сколько лип и сколько берез планируется посадить возле дома?

1. Обозначив через число лип и число берез через x и y соответственно, из условия задачи получим систему неравенств

$$\begin{cases} x + y > 15, & (1) \\ y + 18 > 2x, & (2) \\ x > 2y. & (3) \end{cases}$$

2. Определение величин x и y, по существу, сводится к получению для них наиболее точных неравенств, желательно двойных. Для этого следует использовать свойства числовых неравенств.

3. Приведем один из путей решения.

а) Сложив неравенства (3) и (2), получим

$$x + y < 18. \qquad (4)$$

б) Из неравенств (2) и (3) следует, что $y + 18 > 2x > 4y$, откуда

$$y < 6. \qquad (5)$$

в) Из неравенств (2) и (5) вытекает, что $2x < y + 18 < 24$, откуда

$$x < 12. \qquad (6)$$

4. Учитывая, что x и y — натуральные числа, заменим строгие неравенства нестрогими.

а) Из неравенств (1) и (4) следует двойное неравенство

$$16 \leqslant x + y \leqslant 17. \qquad (7)$$

Неравенство (6) равносильно тому, что $x \leqslant 11$, а неравенство (5) — тому, что $y \leqslant 5$.

б) Сопоставляя три последних неравенства с (2), приходим к выводу: $x = 11$, $y = 5$.

5. *Ответ:* 11 лип и 5 берез.

3. На заводе изготовили 300 деталей двумя технологическими способами производства. За 1 ч работы первым способом производится 5 деталей и расходуется 5 кг металла и 10 кВт · ч электроэнергии. За 1 ч работы вторым способом производится 10 деталей и расходуется 12 кг металла и 15 кВт · ч электроэнергии.

Сколько деталей было изготовлено первым и вторым способами производства, если было израсходовано не более 340 кг металла и не более 500 кВт · ч электроэнергии?

1. Обозначим через x и y число деталей, изготовленных первым и вторым способами соответственно.

2. При первом способе производства на одну деталь расходуется 1 кг металла и 2 кВт · ч электроэнергии, а на x деталей — x кг металла и $2x$ кВт · ч электроэнергии.

3. Аналогично для второго способа производства одна деталь требует расходов в 1,2 кг металла и 1,5 кВт · ч электроэнергии, а y деталей — $1{,}2y$ кг металла и $1{,}5y$ кВт · ч электроэнергии.

4. Согласно условиям задачи, получаем смешанную систему

$$\begin{cases} x+y=300, \\ x+1{,}2y\leqslant 340, \\ 2x+1{,}5y\leqslant 500, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=300-x, \\ x+360-1{,}2x\leqslant 340, \\ 2x+450-1{,}5x\leqslant 500, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y=300-x, \\ x\geqslant 100, \\ x\leqslant 100. \end{cases}$$

Отсюда однозначно находим $x = 100$, $y = 200$.

5. *Ответ:* 100 деталей; 200 деталей.

4. В автогонках принимают участие команды, имеющие одинаковое число автомобилей марки «Волга» и марки «Москвич», причем в каждой команде число всех автомобилей меньше 7. Если в каждой команде число автомобилей марки «Волга» оставить без изменения, а число автомобилей марки «Москвич» увеличить в 3 раза, то общее число «Москвичей», участвующих в гонках, будет на 50 больше общего числа «Волг», а число автомобилей в каждой команде превысит 12.

Определить число команд, участвующих в гонках, и число «Волг» и «Москвичей» в каждой команде.

1. Обозначим число команд, участвующих в гонках, через N, а число «Волг» и «Москвичей» в каждой команде — через m и n соответственно.

2. Условия задачи приводят к следующей системе уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} m+n<7, & (1) \\ 3nN-mN=50, & (2) \\ m+3n>12. & (3) \end{cases}$$

3. Оказывается, что даже такое небольшое количество информации достаточно для того, чтобы однозначно определить все три целочисленные неизвестные m, n и N.

4. Запишем неравенство (3) в виде

$$(m+n)+2n>12, \quad \text{или} \quad n>6-\frac{m+n}{2}.$$

5. Из неравенства (1) следует, что $2 \leqslant m+n \leqslant 6$; очевидно также, что $n<6$. Используя эти ограничения, имеем $4 \leqslant n<6$.

6. Возможны следующие варианты:

$$\text{а) } n=4,\ m=1; \quad \text{б) } n=4,\ m=2; \quad \text{в) } n=5, m=1.$$

7. Соответственно этому единственное имеющееся в системе уравнение (2) дает:

$$\text{а) } 11N=50; \quad \text{б) } 10N=50; \quad \text{в) } 14N=50.$$

Так как N — целое число, то решение получается только в случае б). Итак, $N=5$.

8. *Ответ:* участвовало 5 команд, в каждой из которых имеются 2 «Волги» и 4 «Москвича».

5. Из города A в город B отправился путешественник, который в первый день преодолел $\frac{1}{n}$ часть всего пути. На следующий день он прошел $\frac{1}{m}$ оставшегося пути. В последующие дни он проходил попеременно то $\frac{1}{n}$ часть, то $\frac{1}{m}$ часть пути, оставшегося к концу предыдущего дня. Через 10 дней такого путешествия выяснилось, что он прошел $\frac{31}{32}$ всего расстояния между городами. Найти числа m и n, если известно, что они целые, причем $m>n$.

1. К концу первого дня расстояние s_1, отделяющее путешественника от города B, равно

$$s_1=s-\frac{1}{n}\cdot s=\left(1-\frac{1}{n}\right)s,$$

где s — расстояние между городами.

2. К концу второго дня расстояние s_2, отделяющее его от города B, станет равным

$$s_2=\left(1-\frac{1}{n}\right)s-\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{n}\right)s=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{m}\right)s.$$

3. Повторяя эти рассуждения (см. формулу сложных процентов), получаем, что к концу 10-го дня пути путешественнику осталось пройти до города B расстояние

$$s_{10} = \left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^5 \left(1 - \tfrac{1}{m}\right)^5 s.$$

4. Поэтому единственное уравнение в этой задаче имеет вид

$$\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)^5 \left(1 - \tfrac{1}{m}\right)^5 s = \frac{1}{32}\, s. \qquad (1)$$

Извлекая корень пятой степени из обеих его частей, получаем

$$\left(1 - \tfrac{1}{n}\right)\left(1 - \tfrac{1}{m}\right) = \frac{1}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{mn}{(m-1)(n-1)} = 2. \qquad (2)$$

5. Таким образом, нужно найти единственное решение одного уравнения с двумя неизвестными. Оказывается, это можно сделать только благодаря тому, что m и n — целые числа ($m > n$).

6. Выразив, например, m из уравнения (2), получим

$$m(n-2) = 2(n-1)$$

и, поскольку $n = 2$ не удовлетворяет этому уравнению, находим

$$m = \frac{2n-2}{n-2} = 2 + \frac{2}{n-2}.$$

Так как m — целое число, то дробь

$$\frac{2}{n-2} \qquad (3)$$

также должна быть целым числом.

7. Учитывая, что $m > 0$ и $n > 0$, легко найти такие числа n, при которых рассматриваемое отношение (3) принимает целые значения: это $n = 3$ и $n = 4$.

8. Если $n = 3$, то $m = 4$; если $n = 4$, то $m = 3$. Далее, учитывая условие $m > n$, получаем единственное решение: $m = 4$ и $n = 3$.

9. Итак, решение найдено. Нетрудно понять, что однозначное решение уравнения (2) получилось только благодаря условию целочисленности входящих в него неизвестных.

10. *Ответ:* $m = 4$; $n = 3$.

6. Встречаются две команды шахматистов A и B. По условиям соревнований каждый участник одной команды играет по одной партии с каждым участником другой команды. Общее число предстоящих партий в 4 раза больше числа всех игроков в обеих командах. Однако из-за болезни два игрока не смогли явиться на матч, в связи с чем число всех сыгранных в матче партий оказалось на 17 меньше предполагавшегося. Сколько игроков выступило в матче за команду A, если известно, что в ней было меньше игроков, чем в команде B?

1. Обозначим количество игроков, которое должно было выступить за команды A и B, соответственно через m и n $(n > m)$.

2. Очевидно, планировалось сыграть mn партий.

3. Первое условие задачи приводит к уравнению

$$mn = 4(m + n).$$

4. Второе уравнение сразу написать нельзя, так как неизвестно, к каким командам относились заболевшие игроки. Возможны три случая:

а) если заболели игроки команды A, то

$$(m - 2)n = mn - 17;$$

б) если заболели игроки команды B, то

$$(n - 2)m = mn - 17;$$

в) если заболели по одному игроку из команд A и B, то

$$(m - 1)(n - 1) = mn - 17.$$

5. Случай а) приводит к равенству $2n = 17$, что невозможно, поскольку n — целое число.

6. Случай б) также невозможен по той же причине: $2m \neq 17$.

7. В случае в) получаем систему

$$\begin{cases} mn = 4(m + n), \\ m + n = 18, \\ n > m. \end{cases}$$

Отсюда находим $m = 6$, $n = 12$.

8. Значит, в команде A было 6 игроков; выступило за команду 5 игроков.

9. *Ответ:* 5 игроков.

З а м е ч а н и е. В данной задаче, помимо условия целочисленности неизвестных, встретилась и другая особенность, присущая целому классу задач на составление уравнений. Ее сущность состоит в том, что иногда формулировка условия задачи не позволяет однозначно составить все уравнения и приходится рассматривать все возможные случаи. При этом, как правило, только один из них непротиворечив и позволяет найти решение.

7. Рабочий изготовил некоторое количество деталей видов A и B, причем деталей A он изготовил больше, чем деталей B. Если он изготовит деталей A в 2 раза больше, то общее число деталей станет меньше 32, а если деталей B в 2 раза больше, то общее число деталей станет больше 28. Сколько деталей A и сколько деталей B изготовил рабочий?

1. Обозначим количество деталей A и количество деталей B через x_a и x_b соответственно (x_a, x_b — целые числа).

2. Тогда задача сводится к решению в целых числах следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x_a > x_b > 0, \\ 2x_a + x_b < 32, \\ x_a + 2x_b > 28, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_a > x_b > 0, & (1) \\ 28 - 2x_b < x_a < \dfrac{32 - x_b}{2}. & (2) \end{cases}$$

3. Из неравенства (2) следует, что

$$28 - 2x_b < \frac{32 - x_b}{2} \iff 56 - 4x_b < 32 - x_b \iff x_b > 8. \quad (3)$$

4. Далее, из неравенства (2) следует, что

$$x_b < x_a < \frac{32 - x_b}{2} \iff x_b < \frac{32 - x_b}{2} \iff$$
$$\iff 3x_b < 32 \iff x_b < \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3}. \quad (4)$$

5. Из (3) и (4) получаем неравенство

$$8 < x_b \leqslant 10. \quad (5)$$

Итак, величина x_b может принимать лишь значения 9 и 10.

6. Рассмотрим каждый из этих случаев.

а) Пусть $x_b = 9$; тогда из (2) находим

$$10 < x_a < \frac{23}{2} = 11\frac{1}{2},$$

откуда $x_a = 11$, что согласуется с соотношением (1).

б) Пусть $x_b = 10$; тогда из (2) находим

$$8 < x_a < 11,$$

откуда следует, что x_a может быть равно 9 или 10, но при этом условие (1) не выполняется. Значит, этот случай не дает решения.

7. Итак, задача имеет единственное решение: $x_a = 11$, $x_b = 9$.

8. *Ответ:* 11 деталей вида A и 9 деталей вида B.

4. ЗАДАЧИ, СОДЕРЖАЩИЕ ПАРАМЕТРЫ

В текстовых задачах, содержащих параметры, числовые данные заменены буквами (переменными). Это придает задачам полную общность, и поэтому при их решении требуется анализ на разрешимость и однозначность решения. Другими словами, необходимо установить соотношения между параметрами задачи, при которых она не имеет решения, имеет единственное решение или имеет несколько решений.

Задачи с решениями

1. Найти четыре члена пропорции, если сумма крайних ее членов равна $2s$, сумма средних равна $2s_1$, а сумма квадратов всех членов пропорции равна $4c^2$.

1. Согласно условию, члены пропорции $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + t = 2s, & (1) \\ y + z = 2s_1, & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4c^2, & (3) \\ xt = yz. & (4) \end{cases}$$

2. Возведя в квадрат уравнения (1) и (2), получаем

$$x^2 + t^2 + 2xt = 4s^2, \quad y^2 + z^2 + 2yz = 4s_1^2.$$

3. Из этих равенств и уравнения (3) следует

$$xt + yz = 2(s^2 + s_1^2 - c^2).$$

Отсюда, учитывая уравнение (4), имеем

$$xt = yz = s^2 + s_1^2 - c^2, \quad \text{или} \quad t = \frac{s^2 + s_1^2 - c^2}{x}, \quad z = \frac{s^2 + s_1^2 - c^2}{y}.$$

4. Используя уравнение (1), находим $x + \dfrac{s^2 + s_1^2 - c^2}{x} = 2s$, откуда

$$x = s \pm \sqrt{c^2 - s_1^2}, \quad t = s \mp \sqrt{c^2 - s_1^2}.$$

5. Аналогично с помощью уравнения (2) определим y и z.

6. *Ответ:* $x = s \pm \sqrt{c^2 - s_1^2}$; $t = s \mp \sqrt{c^2 - s_1^2}$; $y = s_1 \pm \sqrt{c^2 - s^2}$; $z = s_1 \mp \sqrt{c^2 - s^2}$; где $s \leqslant c$, $s_1 \leqslant c$.

2. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают $\frac{1}{n}$ часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на $k\%$. Определить первоначальное процентное содержание соли в растворе.

1. Пусть V — объем раствора в колбе, x — процентное содержание соли в растворе.

2. По условию в пробирку отливают $\frac{V}{n}$ раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли не повысится вдвое.

3. Так как количество соли при этом не изменится, то объем раствора в пробирке уменьшится вдвое, а масса выпаренной воды будет равна $\frac{V}{2n}$.

4. После переливания выпаренного раствора обратно в колбу в ней снова будет то же количество соли, что и раньше, т.е. $\frac{Vx}{100}$, а объем раствора уменьшится на $\frac{V}{2n}$.

5. Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{\frac{Vx}{100}}{V-\frac{V}{2n}}=\frac{x+k}{100},\quad \text{откуда}\ \ x=(2n-1)k.$$

6. *Ответ:* $(2n-1)k\%$.

3. Сосуд, содержащий $p\%$-й раствор кислоты, долили доверху $q\%$-м раствором той же кислоты и после перемешивания отлили такое же количество. Проделав эту операцию k раз, получили $r\%$-й раствор. Какую часть объема сосуда занимал первоначальный раствор?

1. Примем объем сосуда за единицу, а долю сосуда, занимаемую раствором, обозначим через x $(0<x<1)$.

2. После того как сосуд долили $q\%$-м раствором, в нем стало

$$\frac{px}{100}+\frac{q(1-x)}{100}=\frac{(p-q)x+q}{100}$$

кислоты. Так как объем сосуда с новым раствором равен единице, то концентрация нового раствора равна

$$p_1=(p-q)x+q\,\%.$$

При этом $p_1-q=(p-q)x$.

3. После того как сосуд второй раз долили $q\%$-м раствором, в нем осталось $\dfrac{(p_1-q)x+q}{100}$ кислоты, а концентрация нового раствора составила

$$p_2=(p_1-q)x+q=((p-q)x)x+q=(p-q)x^2+q\,\%.$$

При этом $p_2-q=(p-q)x^2$.

4. После того как описанная процедура была проделана k раз, получили раствор с концентрацией

$$p_k=(p-q)x^k+q\,\%.$$

При этом $p_k-q=(p-q)x^k$.

5. Поскольку окончательная концентрация составляет $p_k=r$, мы пришли к уравнению относительно x:

$$r-q=(p-q)x^k,\quad \text{или}\quad x=\sqrt[k]{\frac{r-q}{p-q}}.$$

Заметим, что каждое равенство имеет место при $p > q$ (и тогда $p_1 > q$, $p_2 > q, \ldots, p_k > q$, т.е. $r > q$) или при $p < q$ (и тогда $p_1 < q$, $p_2 < q$, $\ldots, p_k < q$, т.е. $r < q$).

6. *Ответ:* $x = \sqrt[k]{\dfrac{r-q}{p-q}}$ при $r > q$, $p > q$ или при $r < q$, $p < q$.

4. Расстояние между двумя городами равно s км. Пассажирский поезд, скорость которого на a км/ч больше скорости товарного, проходит это расстояние на t ч быстрее. За сколько часов каждый из поездов преодолеет расстояние между этими городами?

1. Ясно, что значения параметров s, a, t положительны.

2. Обозначим через x ч время, за которое пассажирский проходит расстояние s. Тогда это расстояние товарный поезд проходит за $(x+t)$ ч.

3. Скорости пассажирского и товарного поездов равны $\frac{s}{x}$ км/ч и $\dfrac{s}{x+t}$ км/ч соответственно.

4. Поскольку разность скоростей равна a, приходим к уравнению

$$\frac{s}{x} - \frac{s}{x+t} = a, \quad \text{или} \quad ax^2 + atx - st = 0.$$

5. Формально из последнего уравнения находим

$$x_1 = \frac{-at - \sqrt{a^2t^2 + 4tas}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-at + \sqrt{a^2t^2 + 4tas}}{2a}.$$

6. Ясно, что $x_1 \leqslant 0$ (не подходит). При этом $x_2 > 0$, так как $\sqrt{a^2t^2 + 4tas} > at$.

7. Итак, x_2 ч — время, за которое пассажирский поезд пройдет расстояние s.

8. Товарный поезд пройдет это расстояние за

$$x_2 + t = \frac{at + \sqrt{a^2t^2 + 4tas}}{2a} \text{ ч}.$$

9. Тем самым задача разрешима однозначно при всех неотрицательных значениях параметров a, t, s.

10. *Ответ:* $\dfrac{\sqrt{a^2t^2 + 4tas} - at}{2a}$ ч; $\dfrac{\sqrt{a^2t^2 + 4tas} + at}{2a}$ ч.

5. Сначала катер шел a км по течению реки, а затем вдвое большее расстояние по озеру, в которое впадает река. Весь рейс продолжался 1 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки равна c км/ч.

1. Пусть v (км/ч) — скорость катера по озеру.

2. Тогда:

а) $(v + c)$ (км/ч) — скорость катера по течению реки;

б) $t_1 = \dfrac{a}{v+c}$ (ч) — время движения катера по течению реки;

в) $t_2 = \dfrac{2a}{v}$ (ч) — время движения катера по озеру.

3. Составим уравнение

$$\frac{a}{v+c} + \frac{2a}{v} = 1,$$

откуда

$$v = \frac{3a - c \pm \sqrt{9a^2 + 2ac + c^2}}{2}$$

(очевидно, что перед квадратным корнем нужно взять знак «плюс», поскольку $v > 0$).

4. *Ответ:* $\dfrac{3a - c + \sqrt{9a^2 + 2ac + c^2}}{2}$ км/ч.

6. Два трактора различной мощности, работая совместно, вспахали поле за t дней. Если бы сначала работал только первый трактор и вспахал бы половину поля, а затем только второй, который закончил бы работу, то при таких условиях поле было бы вспахано за k дней. За сколько дней каждый трактор, работая отдельно, может вспахать все поле?

1. Пусть один трактор, работая отдельно, может вспахать все поле за x дней, а другой — за y дней.

2. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{t}, \\ \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{2} = k. \end{cases}$$

Эту систему можно привести к виду

$$\begin{cases} x + y = 2k, \\ xy = 2kt, \end{cases}$$

откуда легко найти искомые значения x и y.

3. *Ответ:* за $(k + \sqrt{k^2 - 2kt})$ и $(k - \sqrt{k^2 - 2kt})$ дней, где $k > 2t$.

7. Три бригады выполняют некоторую работу. Если эту работу будет выполнять только одна первая бригада, то она закончит работу на a дней позже, чем при работе всех бригад вместе. Если же эту работу будет выполнять только одна вторая бригада, то она закончит на b дней позже, чем все вместе, а если третья, то ей потребуется в k раз больше времени, чем всем трем бригадам вместе. За сколько дней выполнит работу каждая бригада в отдельности?

1. Объем работы примем за единицу.

2. Обозначим через W_1, W_2, W_3 производительности бригад. Тогда $\frac{1}{W_1}$, $\frac{1}{W_2}$, $\frac{1}{W_3}$ — время (в днях), за которое каждая из бригад отдельно выполнит всю работу.

3. Значит, $W_1 + W_2 + W_3$ — совместная производительность бригад, а $\frac{1}{W_1 + W_2 + W_3}$ — время, за которое все бригады вместе выполнят работу.

4. Согласно условию имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{W_1} = \dfrac{1}{W_1 + W_2 + W_3} + a, & (1) \\ \dfrac{1}{W_2} = \dfrac{1}{W_1 + W_2 + W_3} + b, & (2) \\ \dfrac{1}{W_3} = k \cdot \dfrac{1}{W_1 + W_2 + W_3}. & (3) \end{cases}$$

Из уравнения (3) следует, что $k > 1$.

5. Далее, из уравнения (3) имеем

$$W_1 + W_2 + W_3 = kW_3, \quad \text{т.е.} \quad W_1 + W_2 = (k-1)W_3.$$

6. Преобразуем систему (1)–(3):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{W_1} = a + \dfrac{1}{kW_3}, \\ \dfrac{1}{W_2} = b + \dfrac{1}{kW_3}, \\ W_1 + W_2 = (k-1)W_3, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} W_1 = \dfrac{kW_3}{1 + akW_3}, & (4) \\ W_2 = \dfrac{kW_3}{1 + bkW_3}, & (5) \\ W_1 + W_2 = (k-1)W_3. & (6) \end{cases}$$

7. Сложим уравнения (4) и (5) и используем уравнение (6):

$$\frac{kW_3}{1+akW_3}+\frac{kW_3}{1+bkW_3}=(k-1)W_3, \quad \text{или} \quad \frac{1}{1+akW_3}+\frac{1}{1+bkW_3}=\frac{k-1}{k}.$$

Полагая $kW_3 = t$, получим уравнение относительно t:

$$\frac{1}{1+at}+\frac{1}{1+bt}=\frac{k-1}{k},$$

или

$$(k-1)abt^2-(a+b)t-(k+1)=0,$$

откуда

$$t=\frac{a+b\pm\sqrt{(a+b)^2+4ab(k^2-1)}}{2(k-1)ab}=kW_3.$$

Ясно, что перед корнем нужно взять знак «плюс», иначе $t<0$. Поэтому

$$kW_3=\frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2+4abk^2}}{2(k-1)ab}$$

(мы преобразовали выражение под знаком корня).

8. Время, необходимое каждой из бригад для выполнения всей работы, — это $\frac{1}{W_1}$, $\frac{1}{W_2}$, $\frac{1}{W_3}$. Величину W_3 мы нашли, а из системы (4)—(6) следует

$$\frac{1}{W_1}=\frac{1+akW_3}{kW_3}=a+\frac{1}{kW_3}, \quad \frac{1}{W_2}=b+\frac{1}{kW_3}.$$

9. Выполним преобразования (числитель и знаменатель дроби умножим на сопряженный множитель):

$$\frac{1}{kW_3}=\frac{2(k-1)ab}{a+b+\sqrt{(a-b)^2+4abk^2}}=\frac{\sqrt{(a-b)^2+4abk^2}-(a+b)}{2(k+1)}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{W_3}=k\,\frac{\sqrt{(a-b)^2+4abk^2}-(a+b)}{2(k+1)}, \quad \frac{1}{W_1}=\frac{1}{kW_3}+a, \quad \frac{1}{W_2}=\frac{1}{kW_3}+b.$$

10. *Ответ:* $\dfrac{\sqrt{(a-b)^2+4abk^2}-(a+b)}{2(k+1)}+a$;

$\dfrac{\sqrt{(a-b)^2+4abk^2}-(a+b)}{2(k+1)}+b$;

$k\dfrac{\sqrt{(a-b)^2+4abk^2}-(a+b)}{2(k+1)}$ при любом $k>1$.

5. ЗАДАЧИ НА ОТЫСКАНИЕ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ЗНАЧЕНИЙ

1°. В этом параграфе будут рассмотрены задачи, в которых необходимо найти экстремум той или иной функции, т.е. определить, при каких значениях неизвестной эта функция достигает максимума или минимума.

2°. Необходимое условие существования экстремума. Если точка x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$ и в этой точке существует производная, то она равна нулю: $f'(x_0) = 0$.

3°. Достаточные условия существования экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и имеет производную в некоторой окрестности $(a; b)$ этой точки. Тогда:

если $f'(x) < 0$ в интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) > 0$ в интервале $(x_0; b)$ (т.е. производная меняет знак с минуса на плюс), то x_0 — точка минимума функции $f(x)$;

если $f'(x) > 0$ в интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ в интервале $(x_0; b)$ (т.е. производная меняет знак с плюса на минус), то x_0 — точка максимума функции $f(x)$.

4°. Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой внутри данного отрезка и непрерывной на его концах, находят все критические точки функции, лежащие внутри отрезка, вычисляют значения функции в этих точках и на концах отрезка, а затем из всех полученных таким образом чисел выбирают наибольшее и наименьшее.

5°. В ряде случаев для решения задач на отыскание наибольшего и наименьшего значений используют элементарные методы. В частности, применяют следующие неравенства:

а) если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \qquad (1)$$

(это неравенство называют *неравенством Коши*);

б) если $z > 0$, то

$$z + \frac{1}{z} \geqslant 2. \qquad (2)$$

При этом знак равенства в неравенстве (1) достигается только при $a = b$, а в неравенстве (2) — только при $z = 1$.

Задачи с решениями

1. Представить число 90 в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

1. Пусть x — одно из искомых слагаемых; тогда другое, очевидно, равно $90 - x$.

2. При этом их произведение запишется как $x(90 - x)$. Именно это произведение нам нужно максимизировать, т.е. найти такое $x \in (0; 90)$, при котором функция $x(90 - x)$ достигает максимального значения.

3. Условная запись этой задачи выглядит так:

$$x(90 - x) \to \max.$$

4. Рассмотрим функцию $f(x) = x(90 - x)$ и преобразуем ее:

$$f(x) = -x^2 + 90x = -x^2 + 2 \cdot 45x - 45^2 + 45^2 = 2025 - (x - 45)^2.$$

5. Ясно, что разность $2025 - (x - 45)^2$ не превосходит числа 2025 и достигает своего максимального значения, равного 2025, только если $x - 45 = 0$, т.е. $x = 45$.

6. Итак, первое слагаемое $x = 45$, а второе есть $90 - x = 45$. При этом $x(90 - x) = 2025$.

7. *Ответ:* 45 и 45.

Замечание 1. Максимальное значение функции $f(x)$ можно найти иначе. Известно, что квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ (график которой при $a > 0$ изображен на рис. 25, *а*, а при $a < 0$ — на рис. 25, *б*) имеет минимум при $a > 0$ и максимум при $a < 0$. В том и другом случае экстремум функции достигается в точке $x = -\dfrac{b}{2a}$.

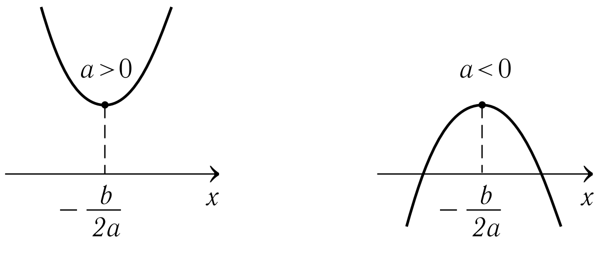


Рис. 25

Для данной функции $f(x) = -x^2 + 90x$ имеем $a = -1$, $b = 90$, поэтому она достигает максимума в точке $x = -\dfrac{90}{-2} = 45$. Это максимальное значение равно $45(90 - 45) = 45^2 = 2025$.

Замечание 2. Максимальное значение функции $f(x) = -x^2 + 90x$ можно найти также с помощью производной. Имеем $f'(x) = -2x + 90$, откуда, полагая $f'(x) = 0$, находим единственную критическую точку $x = 45$. Так как $f'(x) > 0$ при $0 < x < 45$ и $f'(x) < 0$ при $45 < x < 90$, то в точке $x = 45$ функция $f(x)$ достигает максимума. Остается найти максимальное значение функции:

$$f_{\max} = -45^2 + 90 \cdot 45 = 45(90 - 45) = 45^2 = 2025.$$

2. Число 90 представить в виде произведения двух положительных чисел (множителей) так, чтобы их сумма была минимальной.

1. Пусть x — один из множителей; тогда другой множитель равен $\frac{90}{x}$.

2. Решение сводится к нахождению такого числа $x \in (0; 90)$, при котором функция $f(x) = x + \frac{90}{x}$ достигает минимального значения:

$$f(x) = x + \frac{90}{x} \to \min.$$

3. Воспользуемся неравенством $z + \frac{1}{z} \geqslant 2$, где $z > 0$. При этом $z + \frac{1}{z} = 2$ тогда и только тогда, когда $z = 1$.

4. Имеем

$$f(x) = \sqrt{90}\left(\frac{x}{\sqrt{90}} + \frac{\sqrt{90}}{x}\right) \geqslant 2\sqrt{90}.$$

Здесь мы использовали указанное неравенство при $z = \frac{x}{\sqrt{90}}$.

5. Таким образом, минимальное значение $f(x)$ равно $2\sqrt{90}$ и оно достигается при $\frac{x}{\sqrt{90}} = 1$, т.е. при $x = \sqrt{90}$.

6. *Ответ:* $\sqrt{90}$ и $\sqrt{90}$.

3. В две бочки были налиты растворы соли, причем в первую бочку — 16 кг, а во вторую — 25 кг. Оба раствора разбавили водой так, что доля соли уменьшилась в m раз в первой бочке и в n раз во второй. Известно, что $mn = m + n + 3$.

Найти наименьшее количество воды, которое могло быть долито в обе бочки вместе при этих условиях.

1. Пусть x кг и y кг — количество соли в первой и второй бочках соответственно, а u кг и v кг — количество воды, которое можно доливать в первую и вторую бочку соответственно.

2. В этих обозначениях: $\frac{x}{16}$ — доля соли в первой бочке, $\frac{y}{25}$ — доля соли во второй бочке, $\frac{x}{16+u}$, $\frac{y}{25+v}$ — доли соли в бочках после доливания воды.

3. Согласно условию, $\frac{x}{16} : \frac{x}{16+u} = m$, т.е. $\frac{16+u}{16} = m$. Аналогично, $\frac{y}{25} : \frac{y}{25+v} = n$, т.е. $\frac{25+v}{25} = n$.

4. Из этих равенств выразим u и v: $u = 16m - 16$, $v = 25n - 25$.

5. Нам требуется найти наименьшую величину суммы

$$u + v = 16(m-1) + 25(n-1).$$

а) Прежде чем применять неравенство $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ при $a = 16(m-1)$ и $b = 25(n-1)$, заметим, что соотношение $mn = m+n+3$ равносильно следующему:

$$(m-1)(n-1) = 4.$$

б) Теперь применим неравенство Коши:

$$u + v \geqslant 2\sqrt{16(m-1)\cdot 25(n-1)} = 2\sqrt{16\cdot 25\cdot 4} = 80.$$

6. *Ответ:* 80 кг.

4. Три бригады должны выполнить задание; в день первая бригада изготавливает 200 деталей, вторая — на p деталей меньше, чем первая ($0 < p < 200$), а третья — на $5p$ деталей больше, чем первая. Сначала первая и вторая бригады, работая вместе, выполняют 0,2 всего задания, а затем все три бригады, работая вместе, выполняют оставшиеся 0,8 задания.

На сколько деталей в день меньше должна изготавливать вторая бригада, чем первая, чтобы все задание было выполнено указанным способом как можно быстрее?

1. Первая бригада изготавливает в день 200 деталей, вторая $(200 - p)$ деталей, третья $(200 + 5p)$ деталей.

2. Пусть A — общее количество деталей, t — время, затраченное на выполнение всего задания.

3. Тогда $t_1 = \frac{0{,}2A}{400-p}$ — время совместной работы первой и второй бригад; $t_2 = \frac{0{,}8A}{600+4p}$ — время совместной работы всех трех бригад, откуда

$$t = \frac{0{,}2A}{400-p} + \frac{0{,}8A}{600+4p} = \frac{110A}{(400-p)(150+p)}. \qquad (1)$$

4. Числитель дроби (1) не зависит от p, поэтому ее наибольшее значение определяется величиной знаменателя.

5. Функция $t(p)$ достигает минимума, если знаменатель дроби (1) будет наибольшим.

6. Рассмотрим квадратичную функцию

$$z(p) = (400 - p)(150 + p) = -p^2 + 250p + 60\,000.$$

Ее наибольшее значение достигается при $p = -\frac{250}{-2} = 125$.

7. Итак, наименьшее значение функции $t(p)$ равно 125.

8. *Ответ:* на 125 деталей.

5. Пункт B находится на расстоянии 60 км от прямолинейной железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта A до ближайшей к пункту B точки C составляет 285 км. На каком расстоянии от точки C надо построить станцию, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижение между пунктами A и B, если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе равна 20 км/ч?

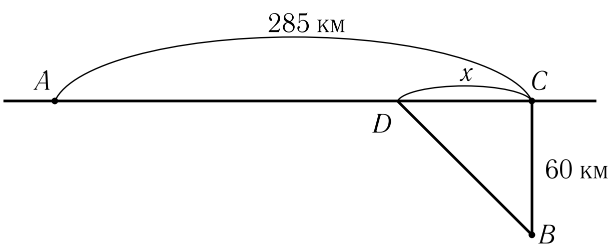


Рис. 26

1. Выполним схематический чертеж (рис. 26). Пусть станция D построена на расстоянии x от точки C ($0 \leqslant x \leqslant 285$).

2. Запишем промежутки времени, затраченного на передвижение по отрезкам AD и DB:

$$t_{AD} = \frac{285 - x}{52}, \quad t_{DB} = \frac{\sqrt{60^2 + x^2}}{20}.$$

3. Согласно условию,

$$t(x) = t_{AD} + t_{DB} = \frac{285 - x}{52} + \frac{\sqrt{60^2 + x^2}}{20} \to \min$$

(минимизируем затраченное время).

4. Находим

$$t' = -\frac{1}{52} + \frac{2x}{2 \cdot 20\sqrt{60^2 + x^2}} = 0,$$

откуда $x = 25$ — критическая точка.

5. Вычислим значения функции $t(x)$ на концах промежутка $[0; 285]$ и в критической точке:

$$t_{x=0} = \frac{285}{52} + \frac{60}{20} \approx 8{,}48,$$

$$t_{x=285} = \frac{\sqrt{60^2 + 285^2}}{20} \approx 14{,}56,$$

$$t_{x=25} = \frac{260}{52} + \frac{\sqrt{60^2 + 25^2}}{20} = 8{,}25.$$

6. *Ответ:* 25 км.

6. Столовая покупает помидоры по цене 17 р. за 1 кг и огурцы по цене 13 р. за 1 кг. На покупку огурцов и помидоров можно затратить 495 р. При этом количество купленных огурцов должно отличаться от количества купленных помидоров не более чем на 5 кг. Необходимо купить максимально возможное количество помидоров и огурцов, причем помидоров нужно купить как можно меньше. Сколько килограммов помидоров и огурцов можно купить при этих условиях, если предполагается, что число килограммов должно быть целым?

1. Пусть x кг и y кг — количество помидоров и огурцов соответственно, которое можно купить, соблюдая условия задачи.

2. Неизвестные x и y должны удовлетворять следующей системе:

$$\begin{cases} 17x + 13y \leqslant 495, & (1) \\ |x - y| \leqslant 5, & (2) \\ x + y \to \max, \\ x \to \min, \quad x > 0, \ \ y > 0. \end{cases}$$

3. Таким образом, математическая модель задачи описывается системой, состоящей из двух неравенств и двух экстремальных условий.

4. Из неравенства (2) получим двойное неравенство $-5 \leqslant x - y \leqslant 5$, т.е.

$$y \geqslant x - 5, \qquad (3)$$

$$x \geqslant y - 5. \qquad (4)$$

5. Используем неравенства (3) и (4) применительно к неравенству (1) в следующих двух вариантах:

а) $495 \geqslant 17x + 13y \geqslant 17(y-5) + 13y = 30y - 85$, откуда $y \leqslant 19\frac{1}{3}$;

б) $495 \geqslant 17x + 13y \geqslant 17x + 13(x-5) = 30x - 65$, откуда $x \leqslant 18\frac{2}{3}$.

Получили дробные оценки сверху для искомых чисел.

6. Есть смысл взять $y = 19$ ($x + y \to \max$, а $x \to \min$, значит, возможно, $y \to \max$), а $x = 14$ (так как $x \geqslant y - 5$, а $y = 19$, то $x \geqslant 14$, но $x \to \min$).

7. Стоимость 14 кг помидоров и 19 кг огурцов составит

$$14 \cdot 17 + 19 \cdot 13 = 485 \text{ р.}$$

8. Остаются неиспользованными 10 р. Увеличить количество килограммов огурцов не хватает денег, а уменьшить количество килограммов помидоров нельзя из-за того, что нарушится условие $y - x \leqslant 5$.

9. *Ответ:* 33 кг; 14 кг помидоров; 19 кг огурцов.

7. В контейнер упакованы изделия двух типов. Стоимость изделия первого типа равна 150 р., второго типа — 300 р. Масса одного изделия первого типа равна 6 кг, второго — 11 кг. Общая масса равна 106 кг. Определить минимально возможную суммарную стоимость изделий, находящихся в контейнере.

1. Пусть x и y — количество изделий первого и второго типов соответственно.

2. Тогда из условия задачи следует

$$\begin{cases} 6x + 11y = 106, \\ 150x + 300y \to \min, \end{cases}$$

где x, y — целые неотрицательные числа.

3. Выразим x из уравнения и подставим его во второе условие системы, которое примет вид

$$150 \cdot \frac{106 - 11y}{6} + 300y \to \min .$$

4. Рассмотрим функцию

$$f(y) = 150 \cdot \frac{106 - 11y}{6} + 300y = 106 \cdot 25 + 25y,$$

выражающую суммарную стоимость изделий. Значения функции зависят от величины слагаемого $25y$.

5. Перебором значений y найдем наименьшее значение этого слагаемого.

а) Если $y = 0$, то $25y = 0$, но $x = \frac{106}{6} = \frac{53}{3}$ не является целым числом; следовательно, $y \neq 0$.

б) Если $y = 1$, то $x = \frac{95}{6}$ также не является целым числом; следовательно, $y \neq 1$.

в) Если $y = 2$, то $x = \frac{84}{6} = 14$ — целое число.

г) Итак, при $x = 14$ и $y = 2$ функция $f(y)$ принимает наименьшее значение, равное 2700.

6. *Ответ:* 2700 р.

8. В круг, площадь которого равна S, требуется вписать прямоугольник наибольшей площади, и найти эту площадь.

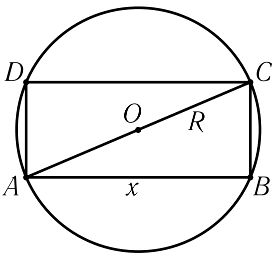


Рис. 27

1. Пусть x — длина одной из сторон искомого прямоугольника $ABCD$ (рис. 27).

2. Тогда длина другой стороны равна $\sqrt{4R^2 - x^2}$. Так как $4R^2 - x^2 \geqslant 0$, то $0 \leqslant x \leqslant 2R$.

3. Поэтому площадь прямоугольника выразится равенством

$$S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}.$$

4. Найдем наибольшее значение функции $S(x)$ на отрезке $[0; 2R]$. Имеем $S'(x) = 0$, т.е.

$$\sqrt{4R^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0, \quad 4R^2 - 2x^2 = 0,$$

откуда $x = R\sqrt{2}$ (значение $x = -R\sqrt{2}$, очевидно, не подходит по смыслу задачи).

5. Таким образом, нужно сравнить значения функции $S(x)$ при $x = R\sqrt{2}$ (в точке экстремума), $x = 0$ и $x = 2R$ (на концах отрезка).

6. Поскольку $S(0) = S(2R) = 0$, а $S(R\sqrt{2}) = 2R^2$, функция $S(x)$ принимает наибольшее значение при $x = R\sqrt{2}$.

7. Тогда длина другой стороны прямоугольника равна $\sqrt{4R^2 - x^2} = R\sqrt{2}$, т.е. искомым прямоугольником является квадрат со стороной $R\sqrt{2}$.

8. Так как площадь круга $S = \pi R^2$, то $R^2 = \frac{S}{\pi}$. Значит, площадь квадрата со стороной $R\sqrt{2}$ равна $2R^2 = \frac{2S}{\pi}$.

9. *Ответ:* $\frac{2S}{\pi}$.

6. ЗАДАЧИ, В КОТОРЫХ ЧИСЛО НЕИЗВЕСТНЫХ ПРЕВЫШАЕТ ЧИСЛО УРАВНЕНИЙ СИСТЕМЫ

1°. Среди задач, рассмотренных в предыдущих параграфах, уже встречались такие, в которых количество неизвестных в системе уравнений превышало число самих уравнений.

2°. Причины, приводившие к такой ситуации, вполне понятны и связаны со способом решения задачи.

3°. Если выбирать неизвестные для составления уравнений, руководствуясь принципом наибольшего удобства математической записи условий задачи, то величина, которую необходимо найти, может не войти в их число.

4°. Как правило, эта величина представляется в виде некоторой комбинации введенных неизвестных.

5°. Поэтому может случиться так, что однозначное определение всех неизвестных из системы уравнений невозможно, однако искомая комбинация этих неизвестных тем не менее находится однозначно.

Задачи с решениями

1. От пристани A по течению реки отправились катер и плот. Катер доплыл до пункта B, повернул обратно и встретил плот через 4 ч после выхода из A. Сколько часов плыл катер от A до B?

1. Пусть t (ч) — искомое время, v (км/ч) — скорость катера в стоячей воде, v_1 (км/ч) — скорость плота (скорость течения реки).

2. Тогда расстояние от A до B будет равно $s = t(v + v_1)$ км.

3. Плот до встречи с катером преодолел расстояние в $4v_1$ км, а катер после поворота в пункте B до встречи с плотом — расстояние $s_1 = (4 - t)(v - v_1)$ км.

4. Значит,

$$4v_1 + (4 - t)(v - v_1) = t(v + v_1).$$

5. Получили одно уравнение с тремя неизвестными, однако после упрощения имеем $(4 - t)v + tv_1 = tv + tv_1$, откуда $2tv = 4v$. Так как $v \neq 0$, то $t = 2$.

6. *Ответ:* 2 ч.

2. Школьник затратил некоторую сумму на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка —

в 2 раза дешевле, а книга — в 2,5 раза дешевле, то такая покупка стоила бы 80 р. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка — в 4 раза дешевле, а книга — в 3 раза дешевле, то за ту же покупку школьник заплатил бы 120 р. Сколько стоит покупка и за что было уплачено больше: за портфель или за авторучку?

1. Пусть портфель стоит x р., авторучка — y р., а книга — z р.

2. Из условий задачи получаем два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2{,}5} = 80, \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 120. \end{cases} \qquad (1)$$

3. Из полученной системы с тремя неизвестными, конечно, нельзя определить все неизвестные, но искомую сумму $x + y + z$ найти можно.

4. Для этого перепишем систему (1) так:

$$\begin{cases} 2x + 5y + 4z = 800, \\ 6x + 3y + 4z = 1440. \end{cases} \qquad (2)$$

Сложив эти два уравнения, получим $x + y + z = 280$. Таким образом, получен ответ на первый вопрос задачи.

5. Остается выяснить, что дороже — портфель или авторучка; иными словами, надо выяснить, какое из неравенств $x > y$ или $y > x$ имеет место.

6. Из второго уравнения системы (2) вычтем первое и получим $2x - y = 320$. Перепишем это уравнение так: $x + (x - y) = 320$. Так как вся покупка стоит 280 р., то заведомо $x < 280$ и из последнего уравнения вытекает, что $x - y > 0$, т.е. портфель дороже авторучки.

7. *Ответ:* 280 р.; портфель дороже авторучки.

3. Шесть коров за 3 дня съедают траву на участке 0,2 га; восемь коров за 4 дня съедают траву на участке 0,3 га. Сколько дней смогут пастись 12 коров на участке площадью 0,6 га, если прирост травы на участке пропорционален его площади и времени?

1. Пусть x (кг) — количество травы, которое съедает одна корова в день, y (кг) — первоначальное количество травы на 1 га, z (кг) — прирост травы на 1 га в день, t (дни) — искомое время.

2. Тогда по условию имеем

$$\begin{cases} 6 \cdot 3x = 0{,}2y + 0{,}2 \cdot 3z, \\ 8 \cdot 4x = 0{,}3y + 0{,}3 \cdot 4z, \\ \ 12tx = 0{,}6y + 0{,}6tz. \end{cases} \tag{1}$$

3. Число неизвестных превышает число уравнений системы, но нам не надо искать x, y, z, поэтому попробуем выразить какое-либо неизвестное x или y из первых двух уравнений системы (1) через другое неизвестное и подставить в третье уравнение этой системы.

4. Итак, рассмотрим первые два уравнения системы (1):

$$\begin{cases} 18x = 0{,}2y + 0{,}6z, & (2) \\ 32x = 0{,}3y + 1{,}2z. & (3) \end{cases}$$

а) Умножая уравнение (2) на 2 и вычитая из него уравнение (3), получим $x = \dfrac{y}{40}$.

б) Теперь подставим выражение для x в любое из двух рассматриваемых уравнений, например в уравнение (2): $\dfrac{18y}{40} = 0{,}2y + 0{,}6z$, откуда $z = \dfrac{5y}{12}$.

в) Полученные выражения $x = \dfrac{y}{40}$ и $z = \dfrac{5y}{12}$ подставим в третье уравнение системы (1).

г) Имеем

$$12t \cdot \frac{y}{40} = 0{,}6y + 0{,}6t\frac{5y}{12}.$$

Так как $y \neq 0$, то $t = 12$.

5. *Ответ:* 12 дней.

4. Имеются два различных сплава меди со свинцом. Если взять 1 кг первого сплава и 1 кг второго сплава и переплавить их, то получится сплав, содержащий 65% меди. Если же взять два куска — кусок I первого сплава и кусок II второго сплава, имеющих суммарную массу 7 кг, и переплавить их, то получится сплав с содержанием 60% меди.

Какова масса меди, содержащейся в сплаве, получающемся при совместной переплавке куска первого сплава, равного по массе куску II, и куска второго сплава, равного по массе куску I?

1. Введем следующие обозначения. Пусть процентные содержания меди в сплавах составляют: $p\%$ — в первом (концентрация меди $p/100$)

и $q\%$ — во втором (концентрация меди $q/100$), масса куска I — x кг и масса куска II — y кг.

2. Согласно условию, 1 кг первого сплава, переплавленный с 1 кг второго сплава, дает сплав, содержащий 65% меди. Составим уравнение

$$\frac{1 \cdot \frac{p}{100} + 1 \cdot \frac{q}{100}}{2} = \frac{65}{100}.$$

3. Суммарная масса кусков I и II равна 7 кг, т.е.

$$x + y = 7.$$

4. Если переплавить кусок I и кусок II, то получится сплав, содержащий 60% меди. Это приводит к уравнению

$$\frac{x \cdot \frac{p}{100} + y \cdot \frac{q}{100}}{x + y} = \frac{60}{100}.$$

5. Таким образом, получим систему трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} p + q = 130, \\ x + y = 7, \\ px + qy = 420. \end{cases} \qquad (1)$$

6. Все четыре неизвестные из системы (1) найти нельзя. Поэтому обратимся к вопросу, на который нужно ответить. Нам требуется определить, какая масса меди содержится в сплаве, получающемся при совместной переплавке куска первого сплава, равного по массе куску II, и куска второго сплава, равного по массе куску I, т.е. величину

$$Q = y \cdot \frac{p}{100} + x \cdot \frac{q}{100} = \frac{qx + py}{100}.$$

7. Система уравнений (1) обладает такой структурой, что величину $qx + py$ можно найти легко. Перемножая почленно первое и второе уравнения и вычитая из произведения третье уравнение, получаем

$$(p + q)(x + y) - (px + qy) = qx + py = 490.$$

8. *Ответ:* 4,9 кг.

5. Три пункта A, B и C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной $\frac{1}{2}AB$; к отрезку дороги BC — квадратное поле со стороной, равной BC, а к отрезку дороги AC — прямоугольный участок леса длиной, равной AC, и шириной 4 км. Площадь леса на 20 км^2 больше суммы площадей квадратных полей. Найти площадь леса.

1. Пусть $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$ (рис. 28). Тогда, исходя из условий задачи, можно составить только одно уравнение:

$$4z - \left(\frac{x^2}{4} + y^2\right) = 20, \quad \text{или} \quad z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + 5. \tag{1}$$

Таким образом, имеется одно уравнение с тремя неизвестными.

2. Решение задачи можно найти, если учесть, что

$$\begin{cases} x + y \geqslant z, & (2) \\ x + z \geqslant y, & (3) \\ z + y \geqslant x. & (4) \end{cases}$$

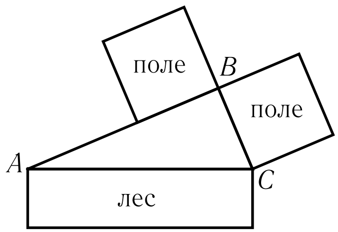


Рис. 28

3. Неравенства (2)–(4) дают необходимые и достаточные условия, при которых три отрезка x, y, z образуют треугольник; в случае, если неравенства обращаются в равенства, треугольник вырождается в отрезок прямой.

4. Подставляя выражение для z из (1) в (2), получаем неравенство

$$x + y \geqslant \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + 5,$$

которое можно переписать в виде

$$\left(\frac{x}{4} - 2\right)^2 + \left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 \leqslant 0. \tag{5}$$

5. Так как сумма двух неотрицательных слагаемых не может быть отрицательной, то неравенство (5) выполняется только в том случае, когда

$$\frac{x}{4} - 2 = 0, \quad \frac{y}{2} - 1 = 0.$$

6. Это и есть те дополнительные уравнения, которые позволяют определить искомое решение. Находим $x = 8$, $y = 2$, $z = 10$.

7. Поскольку $x + y = z$, становится ясным, что пункты A, B и C находятся на одной прямой.

8. Площадь леса, равная $4z$, составляет 40 км^2.

9. *Ответ:* 40 км^2.

7. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи с решениями

1. Определить целое положительное число по следующим данным: если приписать к нему справа цифру 5, то получится число, делящееся без остатка на число, большее искомого на 3, а в частном получится число, на 16 меньшее делителя.

1. Пусть x — искомое число.

2. Приписав к нему справа цифру 5, получим число $10x + 5$.

3. Согласно условию, имеем уравнение

$$10x + 5 = (x + 3)(x - 13),$$

корнями которого являются $x_1 = 22$, $x_2 = -2$ (не подходит по смыслу задачи).

4. *Ответ:* 22.

2. Найти двузначное число, обладающее следующими свойствами: если из него вычесть число, составленное из тех же цифр, записанных в обратном порядке, то получится 36, а сумма квадратов цифр искомого числа равна 58. В ответе указать среднее арифметическое цифр искомого числа.

1. Цифры x и y искомого числа $\overline{xy} = 10x+y$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} (10x + y) - (10y + x) = 36, \\ x^2 + y^2 = 58, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = 58. \end{cases} \tag{1}$$

2. Решив систему (1), находим $x = 7$, $y = 3$, а среднее арифметическое цифр числа 73 равно $\dfrac{7 + 3}{2} = 5$.

3. *Ответ:* 5.

3. Найти четыре числа, образующие пропорцию, если известно, что сумма ее крайних членов равна 14, сумма средних членов равна 11, а сумма квадратов таких четырех чисел равна 221.

1. Запишем пропорцию $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{y_2}{x_2}$, где x_1, x_2, y_1, y_2 — искомые числа.

2. Из условия следует

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 14, & (1) \\ y_1 + y_2 = 11, & (2) \\ x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 = 221. & (3) \end{cases}$$

3. Возведем уравнения (1) и (2) в квадрат:

$$(x_1 + x_2)^2 = 196, \quad (y_1 + y_2)^2 = 121,$$

или

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = 196, \quad y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 = 121, \qquad (4)$$

4. Учитывая, что $x_1x_2 = y_1y_2$, сложим уравнения (4):

$$x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 4x_1x_2 = 317,$$

откуда, используя уравнение (3), получим

$$221 + 4x_1x_2 = 317, \quad \text{т.е.} \quad x_1x_2 = 24.$$

5. Остается решить системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 14, \\ x_1x_2 = 24 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 = 11, \\ y_1y_2 = 24, \end{cases}$$

откуда находим $x_1 = 12$, $x_2 = 2$, $y_1 = 3$, $y_2 = 8$.

6. *Ответ:* 12; 3; 8; 2.

4. Сумма квадратов цифр некоторого трехзначного числа равна 74. В этом числе цифра сотен равна удвоенной сумме цифр десятков и единиц. Найти это число, если известно, что разность между ним и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, равна 495.

1. Пусть x, y, z — цифры искомого числа.

2. Тогда $100x + 10y + z$ — это искомое число, а $100z + 10y + x$ — число, записанное теми же цифрами в обратном порядке.

3. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 74, \\ x = 2(y + z), \\ (100x + 10y + z) - (100z + 10y + x) = 495, \end{cases}$$

решив которую находим $x = 8$, $y = 1$, $z = 3$.

4. *Ответ:* 813.

5. Найти сумму всех трехзначных чисел, кратных 5.

1. Данные трехзначные числа 100, 105, 110, ..., 995 образуют арифметическую прогрессию.

2. Имеем $a_1 = 100$, $a_n = 995$, $d = 5$.

3. Используя формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$, получим уравнение

$$995 = 100 + 5(n-1),$$

откуда $n = 180$.

4. Теперь воспользуемся формулой

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\,n,$$

т.е.

$$S_n = \frac{100 + 995}{2} \cdot 180 = 98\,550.$$

5. *Ответ:* 98 550.

6. Найти трехзначное число, последовательные цифры которого образуют арифметическую прогрессию и которое делится на 45.

1. Пусть x, y, z — соответственно цифры сотен, десятков и единиц искомого числа.

2. Так как числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию, то $y = 0{,}5(x+z)$.

3. Далее, так как искомое число делится на 45, то оно делится на 5 и на 9. Поэтому оно оканчивается либо цифрой 0, либо цифрой 5, а сумма его цифр делится на 9.

4. Следовательно, приходим к совокупности двух систем уравнений

$$\begin{cases} z = 0, \\ y = 0{,}5(x+z), \\ x + y + z = 9k; \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} z = 5, \\ y = 0{,}5(x+z), \\ x + y + z = 9k, \quad \text{где } k \in \boldsymbol{N}. \end{cases} \qquad (2)$$

5. Из системы (1) следует, что

$$\begin{cases} x = 2y, \\ x + y = 9k. \end{cases}$$

Перебрав натуральные значения y от 1 до 9, убеждаемся в том, что этой системе удовлетворяют лишь пары $x = 6$, $y = 3$; $x = 12$, $y = 6$; $x = 18$; $y = 9$. Поскольку x и y — цифры, должны выполняться неравенства $1 \leqslant x \leqslant 9$ и $0 \leqslant y \leqslant 9$. Этим условиям удовлетворяет только пара $x = 6$, $y = 3$.

6. Из системы (2) следует, что

$$\begin{cases} 2y = x + 5, \\ x + y + 5 = 9k. \end{cases}$$

Аналогично, перебрав натуральные значения y от 1 до 9, заключаем, что этой системе удовлетворяют только пары $x = 1$, $y = 3$ и $x = 7$, $y = 6$.

7. Итак, требуемым условиям отвечают три числа: 630, 135 и 765.

8. *Ответ:* 630; 135; 765.

7. Среднее геометрическое двух чисел на 12 больше меньшего из них, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из них. Найти эти числа.

1. Пусть x — меньшее, а y — большее число $(x < y)$.

2. Первое условие дает уравнение $\sqrt{xy} = x + 12$, а второе — уравнение $\dfrac{x+y}{2} = y - 24$, т.е. $y - x = 48$.

3. Решив систему

$$\begin{cases} \sqrt{xy} = x + 12, \\ y - x = 48, \end{cases}$$

находим $x = 6$, $y = 54$.

4. *Ответ:* 6 и 54.

8. Найти все пары натуральных чисел, разность квадратов которых равна 45.

1. Здесь речь идет о решении уравнения $m^2 - n^2 = 45$ в целых числах, точнее, в натуральных числах ($m, n \in \boldsymbol{N}$ и $m > n$).

2. Представим это уравнение в виде

$$(m - n)(m + n) = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5.$$

3. Из последнего равенства следует, что натуральные множители $m - n$ и $m + n$ должны быть делителями правой части.

4. Это приводит к совокупности трех систем:

а) $\begin{cases} m - n = 1, \\ m + n = 45; \end{cases}$ б) $\begin{cases} m - n = 3, \\ m + n = 15; \end{cases}$ в) $\begin{cases} m - n = 5, \\ m + n = 9. \end{cases}$

5. Ответ состоит из соответствующих решений систем а), б), в).

6. *Ответ:* (23;22); (9;6); (7;2).

9. Груз сначала положили в вагоны вместимостью по 80 т, но один вагон оказался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 т. Однако потребовалось на 8 вагонов больше и при этом снова один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 т, хотя понадобилось еще на 5 вагонов больше; при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

1. Обозначим через k количество вагонов вместимостью 50 т, в которые был помещен весь груз. Тогда масса всего груза равна $50k$ т.

2. Вагонов вместимостью 60 т было использовано $k - 5$. Так как в них был помещен весь груз и один вагон оказался не полностью загруженным, то

$$60(k - 5) > 50k \quad \text{и} \quad 60(k - 6) < 50k.$$

Из этих неравенств следует, что $300 < 10k < 360$, или $30 < k < 36$. Поскольку k — целое число, имеем

$$31 \leqslant k \leqslant 35. \qquad (1)$$

3. Вагонов вместимостью 80 т было использовано $k - 13$. Подобно предыдущему, получим, что

$$80(k - 13) > 50k \quad \text{и} \quad 80(k - 14) < 50k,$$

или $\frac{104}{3} < k < \frac{112}{3}$. Так как $\frac{104}{3} = 34\frac{2}{3}$, $\frac{112}{3} = 37\frac{1}{3}$, а k — целое число, то

$$35 \leqslant k \leqslant 37. \qquad (2)$$

4. Из неравенств (1) и (2) следует, что $k = 35$. Значит, масса всего груза равна $50 \cdot 35 = 1750$ т.

5. *Ответ:* 1750 т.

10. Сумма, равная 53 коп., составлена из трехкопеечных и пятикопеечных монет, общее число которых меньше 15. Если в этом наборе трехкопеечные монеты заменить пятикопеечными, а пятикопеечные — трехкопеечными, то полученная в результате сумма уменьшится по сравнению с первоначальной, но не более чем в 1,5 раза. Сколько трехкопеечных монет было в наборе?

1. Здесь можно составить систему уравнений и неравенств, однако ее решение не даст ответа, так как не все условия задачи можно записать в виде уравнений и неравенств.

2. Поэтому в процессе решения задачи нужны некоторые рассуждения.

3. Пусть в наборе было n трехкопеечных монет и m пятикопеечных; тогда справедливо соотношение

$$3n + 5m = 53. \tag{1}$$

4. Очевидно, что равенству (1) удовлетворяют лишь те значения m, для каждого из которых число $53-5m$ делится на 3 (именно это условие и нельзя записать в виде уравнения или неравенства).

5. Поскольку m и n — целые неотрицательные числа, таких значений m лишь четыре: $m_1 = 1$, $m_2 = 4$, $m_3 = 7$, $m_4 = 10$.

6. Из равенства (1) находим соответствующие значения n: $n_1 = 16$, $n_2 = 11$, $n_3 = 6$, $n_4 = 1$.

7. Отметим еще, что для чисел n и m, удовлетворяющих условиям задачи, должны быть справедливы неравенства

$$n + m < 15 \quad \text{и} \quad 1{,}5(3m + 5n) \geqslant 53. \tag{2}$$

8. Легко установить, что неравенствам (2) удовлетворяет лишь одна пара чисел: $m = 7$ и $n = 6$.

9. *Ответ:* 6 трехкопеечных монет.

11. Из пункта A в пункт B вниз по течению реки отправился плот. Одновременно с тем как плот начал движение из A, из B в A навстречу ему вышла лодка, которая встретила плот не ранее, чем через 2 ч после выхода из B. Затем лодка приплыла в A, затратив на весь путь менее 3 ч 20 мин. Успеет ли плот преодолеть расстояние от A до B за 5 ч, если оно равно 20 км?

1. Пусть v (км/ч) — скорость плота (скорость течения реки), v_1 (км/ч) — скорость лодки в стоячей воде.

2. Чтобы плот успел преодолеть расстояние в 20 км за 5 ч, его скорость должна быть не менее $\frac{20}{5} = 4$ км/ч, т.е. $v \geqslant 4$.

3. Так как лодка и плот встретились не ранее, чем через 2 ч после отправления, то $2v + 2(v_1 - v) \leqslant 20$.

4. Лодка затратила на весь путь менее 3 ч 20 мин, поэтому $\frac{10}{3}(v_1 - v) > 20$.

5. Составим систему неравенств

$$\begin{cases} v \geqslant 4, \\ 2v + 2(v_1 - v) \leqslant 20, \\ \frac{10}{3}(v_1 - v) > 20, \end{cases} \qquad \text{откуда} \qquad \begin{cases} v \geqslant 4, \\ v_1 \leqslant 10, \\ v_1 > v + 6. \end{cases} \qquad (1)$$

6. Из второго и третьего неравенств системы (1) получим $v + 6 < v_1 \leqslant 10$. Это неравенство выполняется при $v < 4$. Значит, система неравенств (1) несовместна.

7. *Ответ:* не успеет.

12. Электрик должен проложить электрический кабель, состоящий из трех участков длиной 10 м, 5 м и 5 м. Согласно графику, он начинает работу в 9 ч. Первый участок должен быть проложен к 9 ч 10 мин, второй — к $9\frac{3}{8}$ ч, третий — к 9 ч 40 мин. Сколько метров кабеля в минуту должен прокладывать электрик, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от графика завершения соответствующих участков не превосходила 15 мин?

1. Предположим, что электрику по плану следует прокладывать v м кабеля за 1 мин.

2. Тогда время, необходимое на прокладку 1 м кабеля, равно $\frac{1}{v}$ мин.

3. Чтобы проложить первый участок в 10 м, необходимо $\frac{10}{v}$ мин.

4. На первые два участка в 15 м ему потребуется $\frac{15}{v}$ мин, а на все три участка — $\frac{20}{v}$ мин.

5. Запишем абсолютные величины отклонений этих промежутков времени от графика:

$$\left|\frac{10}{v} - 10\right|, \quad \left|\frac{15}{v} - \frac{45}{2}\right|, \quad \left|\frac{20}{v} - 40\right| \quad \left(\frac{45}{2} \text{ мин} = \frac{3}{8} \text{ ч}\right).$$

6. Необходимо решить неравенство

$$\left|\frac{10}{v} - 10\right| + \left|\frac{15}{v} - \frac{45}{2}\right| + \left|\frac{20}{v} - 40\right| \leqslant 15.$$

7. Положим $t = \frac{5}{v}$ и решим неравенство

$$|2t - 10| + |3t - 22{,}5| + |4t - 40| \leqslant 15$$

методом промежутков (рис. 29).

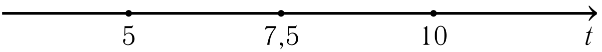


Рис. 29

а) $\begin{cases} t < 5, \\ -2t + 10 - 3t + 22{,}5 - 4t + 40 \leqslant 15, \end{cases}$ $\qquad t \in \varnothing;$

б) $\begin{cases} 5 \leqslant t < 7{,}5, \\ 2t - 10 - 3t + 22{,}5 - 4t + 40 \leqslant 15, \end{cases}$ $\qquad t \in \varnothing;$

в) $\begin{cases} 7{,}5 \leqslant t < 10, \\ 2t - 10 + 3t - 22{,}5 - 4t + 40 \leqslant 15, \end{cases}$ $\qquad t = 7{,}5;$

г) $\begin{cases} t \geqslant 10, \\ 2t - 10 + 3t - 22{,}5 + 4t - 40 \leqslant 15, \end{cases}$ $\qquad t \in \varnothing.$

8. Таким образом, $t = 7{,}5$, т.е. $\frac{5}{v} = 7{,}5$, а значит, $v = \frac{2}{3}$. Итак, электрик по плану должен прокладывать $\frac{2}{3}$ м кабеля в минуту.

9. *Ответ:* $\frac{2}{3}$ м/мин.

13. Числитель правильной дроби на 4 меньше знаменателя. Если числитель увеличить на 6, а знаменатель — на 4, то дробь увеличится менее, чем вдвое. Если же числитель увеличить на 8, а знаменатель — на 1, то дробь увеличится более, чем втрое. Найти эту дробь.

1. Искомая дробь $\frac{m}{m+4}$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{m+6}{m+8} < 2\,\frac{m}{m+4}, \qquad \frac{m+8}{m+5} > 3\,\frac{m}{m+4}.$$

2. Эти неравенства равносильны системе

$$\begin{cases} m^2 + 6m - 24 > 0, \\ 2m^2 + 3m - 32 < 0, \end{cases}$$

решив которую получаем $m \in \left(\sqrt{33} - 3; \frac{\sqrt{265} - 3}{4}\right)$.

3. Найденный интервал содержит единственное натуральное число $m = 3$. Значит, искомая дробь есть $\frac{3}{7}$.

4. *Ответ:* $\frac{3}{7}$.

14. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 40% олова и 60% свинца, второй — 20% свинца и 80% цинка, третий — 20% олова, 20% свинца и 60% цинка. После их совместной переплавки получили сплав, содержащий 10% олова. Какое наибольшее и наименьшее процентное содержание свинца может быть в этом сплаве?

1. Пусть x, y, z (кг) — массы первого, второго и третьего сплавов соответственно; p% — процентное содержание свинца в новом сплаве.

2. Тогда первый сплав содержит $0{,}4x$ кг олова и $0{,}6x$ кг свинца; второй $0{,}2y$ кг свинца и $0{,}8y$ кг цинка; третий $0{,}2z$ кг олова, $0{,}2z$ кг свинца и $0{,}6z$ кг цинка.

3. Новый сплав массой $(x + y + z)$ кг содержит $(0{,}4x + 0{,}2z)$ кг олова.

4. Из условия следует

$$0{,}4x + 0{,}2z = 0{,}1(x + y + z) \implies y = 3x + z.$$

5. В новом сплаве содержится $(0{,}6x + 0{,}2y + 0{,}2z)$ кг свинца.

6. Следовательно, процентное содержание свинца в новом сплаве составляет

$$p = \frac{0{,}6x + 0{,}2y + 0{,}2z}{x + y + z} \cdot 100,$$

откуда, учитывая, что $y = 3x + z$, получаем

$$p = \frac{1{,}2x + 0{,}4z}{4x + 2z} \cdot 100 = 20 \cdot \frac{z + 3x}{z + 2x} = 20\left(1 + \frac{x}{z + 2x}\right).$$

7. Так как x и z принимают только неотрицательные значения, то очевидно, что сомножитель $1 + \frac{x}{z + 2x}$ принимает наименьшее значение, равное 1, при $x = 0$. Поэтому наименьшее значение p равно 20%.

8. Наибольшее значение, равное $\frac{3}{2}$, этот сомножитель принимает при $z = 0$. Таким образом, наибольшее значение p равно 30%.

9. *Ответ:* 20%; 30%.

15. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

1. Обозначим через x число деталей в первом ящике, а через y — число деталей во втором ящике.

2. Тогда, используя условия задачи, получим систему неравенств

$$\begin{cases} x + y > 29, \\ x - 2 > 3y, \\ 3x - 2y < 60. \end{cases} \tag{1}$$

3. Перепишем систему (1) в виде

$$\begin{cases} x > 29 - y, \\ x > 3y + 2, \\ 20 + \frac{2}{3}y > x, \end{cases} \tag{2}$$

откуда приходим к неравенствам

$$20 + \frac{2}{3}y > 29 - y, \tag{3}$$

$$20 + \frac{2}{3}y > 3y + 2. \tag{4}$$

4. Из неравенства (3) следует, что $y > \frac{27}{5}$, а из неравенства (4) — что $y < \frac{54}{7}$.

5. Так как $\frac{54}{7} = 7\frac{5}{7}$, $\frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}$ и y — натуральное число, то y равен либо 6, либо 7.

6. Если $y = 6$, то система (2) примет вид

$$\begin{cases} x > 23, \\ x > 20, \\ x < 24, \end{cases}$$

откуда следует, что нет натуральных чисел x, удовлетворяющих ей.

7. Если $y = 7$, то система (2) примет вид

$$\begin{cases} x > 22, \\ x > 23, \\ x < 24\frac{2}{3}, \end{cases}$$

откуда вытекает, что существует единственное число $x = 24$, ей удовлетворяющее.

8. *Ответ:* в первом ящике 24 детали, а во втором ящике 7 деталей.

16. На данный факультет от школьников подано на 600 заявлений больше, чем от производственников. Девушек среди школьников в 5 раз больше, чем среди производственников, а юношей среди школьников больше, чем среди производственников в k раз, причем $6 \leqslant k \leqslant 12$ (k — целое число). Определить общее число заявлений, если юношей среди производственников на 20 больше, чем девушек.

1. Условия задачи сведем в таблицу:

Абитуриенты	**Юноши**	**Девушки**
Производственники	x	y
Школьники	kx	$5y$

Кроме того, $x - y = 20$ и $x + y + 600 = kx + 5y$.

2. При условии, что $6 \leqslant k \leqslant 12$, получим систему

$$\begin{cases} x - y = 20, \\ (k-1)x + 4y = 600, \end{cases} \qquad (1)$$

которую следует решить в целых числах.

3. Первое уравнение системы (1) сначала умножим на 4, затем на $-(k-1)$ и прибавим ко второму:

$$\begin{cases} (k+3)x=680, \\ (k+3)y=600-20(k-1), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (k+3)x=2\cdot2\cdot2\cdot5\cdot17, \\ (k+3)y=20(31-k). \end{cases} \qquad (2)$$

4. Так как $k \in [6; 12]$, то $k + 3 \in [9; 15]$. Из системы (2) вытекает, что делители числа $k + 3$ должны быть делителями правых частей ее уравнений. Поскольку $k+3 \in [9; 15]$, уже из первого уравнения следует, что $k + 3 = 10$, т.е. $k = 7$.

5. Далее легко получаем: $x = 68$, $y = 48$, $kx = 476$, $5y = 240$. Общее число заявлений равно $x + kx + y + 5y = 832$.

6. *Ответ:* 832 заявления.

17. Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду оказалось равным числу рядов. Сколько солдат было в роте?

1. Обозначим через x число рядов в роте по прибытии роты на парад.

2. Численность роты равна $24x$ солдат.

3. После перестройки роты стало $x-2$ ряда, а число солдат в новом ряду стало $26 + (x - 2) = 24 + x$.

4. Для парада осталось $(x - 2)(24 + x)$ солдат.

5. Число солдат, не участвовавших в параде, составляет

$$24x - (x - 2)(24 + x) = -x^2 + 2x + 48. \qquad (1)$$

6. Корнями квадратного трехчлена (1) являются $x_1 = -6$, $x_2 = 8$.

7. Значит, выражение (1) положительно при $-6 < x < 8$. Так как x — число рядов, то x — число натуральное и поэтому $1 \leqslant x \leqslant 7$.

8. Из промежутка $1 \leqslant x \leqslant 7$ нужно выбрать такие натуральные x, чтобы выражение $24x = A$ являлось бы полным квадратом.

9. Имеем соответственно: $A = 24$ при $x = 1$, $A = 48$ при $x = 2$, $A = 72$ при $x = 3$, $A = 96$ при $x = 4$, $A = 120$ при $x = 5$, $A = 144$ при $x = 6$, $A = 168$ при $x = 7$. Среди найденных чисел A только число 144 является полным квадратом: $144 = 12^2$. Следовательно, $x = 6$ и численность роты равна $24 \cdot 6 = 144$.

10. *Ответ:* 144 солдата.

18. Для перевозки груза было затребовано некоторое количество грузовиков одинаковой вместимости. Однако ввиду неисправности дороги на каждую машину пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, поэтому были затребованы еще 4 такие же машины. Масса перевезенного груза была не менее 55 т, но не превосходила 64 т. Сколько тонн груза было перевезено на каждом грузовике?

1. Пусть x (т) — масса перевезенного груза, а n — намеченное для перевозки число машин.

2. В действительности на каждую машину грузили $\frac{x}{n}-\frac{1}{2}$ (т), а число машин составляло $n + 4$.

3. Согласно условию, получаем уравнение

$$x = \left(\frac{x}{n} - \frac{1}{2}\right)(n + 4), \quad \text{или} \quad n^2 + 4n - 8x = 0,$$

откуда

$$n = 2(-1 + \sqrt{1 + 2x}),$$

где n — натуральное число.

4. В промежутке $55 < x < 64$ подходит только значение $x = 60$; тогда $n = 2(-1 + 11) = 20$.

5. Значит, в перевозке участвовало 24 машины, на каждую из которых грузили по $60 : 24 = 2{,}5$ (т).

6. *Ответ:* 2,5 т.

19. Два зубчатых колеса находятся в сцеплении. Первое колесо имеет 24 зубца, а второе — 108 зубцов. Какое минимальное число оборотов совершит каждое колесо, прежде чем оба они вернутся в исходное положение?

1. Пусть A — точка касания окружностей колес (рис. 30). За некоторое время t точка A перейдет в точку B_1 первого колеса или в точку B_2 второго колеса, причем угловые величины дуг Am_1B_1 и Am_2B_2 равны.

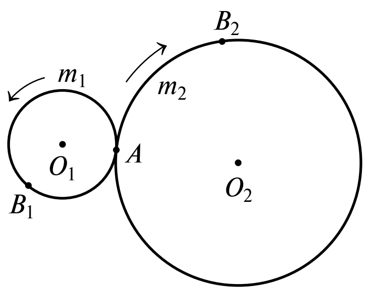


Рис. 30

2. Предположим, что до возвращения в исходное положение первое колесо сделает m полных оборотов, а второе — n оборотов. Тогда, учитывая сказанное выше, приходим к уравнению

$$24m = 108n, \quad \text{или} \quad 2m = 9n, \quad (1)$$

где m и n — натуральные числа.

3. Так как m и n — натуральные числа, то равенство $2m = 9n$ выполняется при $m = 9$, $n = 2$, затем при $m = 18$, $n = 4$, затем при $m = 27$, $n = 6$ и т.д.

4. В общем случае равенство (1) выполняется при $m = 9k$, $n = 2k$, где k — любое натуральное число.

5. *Ответ:* 9 оборотов; 2 оборота.

20. При вращении двух колес, соединенных бесконечным ремнем, меньшее из них совершает в минуту на 400 оборотов больше, чем большее. Чтобы совершить 5 оборотов, большему колесу требуется на 1 с больше, чем меньшему. Сколько оборотов совершает каждое колесо в минуту?

1. Пусть большее колесо совершает x оборотов в минуту, а меньшее — y оборотов в минуту, причем $y > x$.

2. Согласно условию, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 400, \\ \frac{5}{x} - \frac{5}{y} = \frac{1}{60}. \end{cases}$$

3. Второе уравнение можно представить в виде $xy = 300(y - x)$, т.е. $xy = 120\,000$.

4. Тогда получим квадратное уравнение

$$x^2 + 400x - 120\,000 = 0,$$

откуда $x_1 = 200$, $x_2 = -600$ (не подходит по смыслу).

5. *Ответ:* 200 и 600 оборотов.

21. На протяжении 18 м переднее колесо экипажа совершает на 10 оборотов больше заднего. Если окружность переднего колеса увеличить на 6 дм, а окружность заднего уменьшить на 6 дм, то на том же протяжении переднее колесо совершит на 4 оборота больше заднего. Найти длину окружности каждого колеса.

1. Пусть длина окружности переднего колеса равна x дм, а длина окружности заднего — y дм.

2. Имеем два уравнения:

$$\frac{180}{x} - \frac{180}{y} = 10; \quad \frac{180}{x+6} - \frac{180}{y-6} = 4.$$

3. Первое уравнение преобразуется к виду

$$18(y - x) = xy,$$

а второе — к виду

$$39(y - x) = xy + 504.$$

Из этих двух уравнений следует, что

$$y - x = 24; \quad xy = 432.$$

4. Тогда получим квадратное уравнение

$$x^2 + 24x - 432 = 0,$$

откуда $x_1 = 12$, $x_2 = -36$ (не подходит по смыслу).

5. *Ответ:* 12 дм; 36 дм.

22. Два велосипедиста, выехав одновременно из пункта A, движутся с разными, но постоянными скоростями в пункт B; достигнув его, они тотчас же поворачивают обратно. Первый велосипедист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии a км от пункта B, затем, достигнув пункта A и снова повернув к пункту B, он встречает второго, пройдя при этом $\frac{1}{k}$ часть расстояния от A до B. Найти расстояние между A и B.

1. Пусть x (км) — искомое расстояние. До первой встречи первый велосипедист проехал $(x+a)$ км, второй — $(x-a)$ км.

2. До второй встречи они проехали $\left(2x+\frac{1}{k}x\right)$ км и $\left(2x-\frac{1}{k}x\right)$ км соответственно.

3. Так как скорости велосипедистов постоянны, а затраченное ими время одинаково, то получим уравнение

$$\frac{x+a}{x-a}=\frac{2+\frac{1}{k}}{2-\frac{1}{k}},\quad \text{откуда}\quad x=2ak.$$

4. *Ответ:* $2ak$ км.

23. Поезд A, скорость которого v км/ч, выходит после поезда B, скорость которого v_1 км/ч. Задержка выхода поезда A рассчитана так, чтобы оба поезда одновременно прибыли к месту назначения. Поезд B, пройдя $\frac{2}{3}$ пути, вынужден был наполовину уменьшить свою скорость. Вследствие этого поезд A нагнал поезд B за a км до места назначения. Определить длину пути до места назначения.

1. Пусть x (км) — искомая длина пути.

2. Согласно условию, поезд A должен по расписанию нагнать поезд B через $\frac{x}{v}$ ч после выхода.

3. Фактически поезд A нагнал поезд B, пройдя $(x-a)$ км, т.е. через $\frac{x-a}{v}$ ч.

4. Следовательно, оба поезда затратили до встречи на $\frac{a}{v}$ ч меньше положенного времени.

5. Поезд B должен был затратить до встречи $\frac{x}{v_1}$ ч; фактически он прошел расстояние $\frac{2}{3}x$ со скоростью v_1 и расстояние $\frac{1}{3}x-a$ со скоростью $\frac{1}{2}v_1$, затратив на весь этот путь

$$\frac{\frac{2}{3}x}{v_1}+\frac{\frac{1}{3}x-a}{\frac{1}{2}v_1}\ \text{ч.}$$

6. Получаем уравнение

$$\frac{x}{v_1} - \left\{ \frac{\frac{2}{3}x}{v_1} + \frac{\frac{1}{3}x - a}{\frac{1}{2}v_1} \right\} = \frac{a}{v}.$$

7. *Ответ:* $\dfrac{3a(2v - v_1)}{v}$ км; задача имеет решение при $v_1 < 2v$.

24. По окружности длиной C равномерно в одном направлении движутся две точки, которые сходятся через каждые t с. Найти скорость каждой точки, зная, что одна из них пробегает всю окружность на n с быстрее другой.

1. Пусть x и y — положительные числа, выражающие скорости точек в соответствующих единицах (если C — длина окружности в метрах, то единицей скорости является 1 м/с и т.п.).

2. Предположим, что $x > y$. Тогда имеем систему уравнений

$$\begin{cases} tx - ty = C, \\ \dfrac{C}{y} - \dfrac{C}{x} = n. \end{cases}$$

3. Из первого уравнения следует, что $x = \dfrac{C + ty}{t}$; подставив это выражение во второе уравнение, приходим к квадратному уравнению

$$nty^2 + nCy - C^2 = 0.$$

Его положительный корень $y = \dfrac{C(\sqrt{n^2 + 4nt} - n)}{2nt}$ (второй корень отрицателен).

4. Тогда $x = \dfrac{C(\sqrt{n^2 + 4nt} + n)}{2nt}$.

5. *Ответ:* $\dfrac{C(\sqrt{n^2 + 4nt} + n)}{2nt}$; $\dfrac{C(\sqrt{n^2 + 4nt} - n)}{2nt}$.

25. Катер проходит по реке и возвращается обратно со скоростью, равной его собственной скорости. В каком случае на это передвижение потребуется больше времени: по реке с более быстрым или более медленным течением?

1. Введем следующие обозначения:
а) v км/ч — собственная скорость реки;
б) v_1 км/ч — скорость реки с более быстрым течением;
в) v_2 км/ч — скорость реки с более медленным течением;
г) s км — расстояние, пройденное катером в одном направлении;

д) t_1 ч — время, затраченное катером на весь путь туда и обратно по реке с более быстрым течением;

е) t_2 ч — время, затраченное катером на весь путь туда и обратно по реке с более медленным течением.

2. На весь путь туда и обратно катер затратил:

а) по реке с более быстрым течением

$$\frac{s}{v+v_1}+\frac{s}{v-v_1}=\frac{2sv}{v^2-v_1^2}\ (\text{ч});$$

б) по реке с более медленным течением

$$\frac{s}{v+v_2}+\frac{s}{v-v_2}=\frac{2sv}{v^2-v_2^2}\ (\text{ч}).$$

3. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{2sv}{v^2-v_1^2}=t_1,\\[2mm] \dfrac{2sv}{v^2-v_2^2}=t_2.\end{cases}$$

4. Так как $v_1>v_2$, то $v^2-v_1^2<v^2-v_2^2$.

5. Поэтому

$$\frac{2sv}{v^2-v_1^2}>\frac{2sv}{v^2-v_2^2},$$

откуда следует, что $t_1>t_2$.

6. *Ответ:* катер затратит больше времени на передвижение по реке с более быстрым течением.

26. Определить минимальный объем конуса, описанного около шара объемом V.

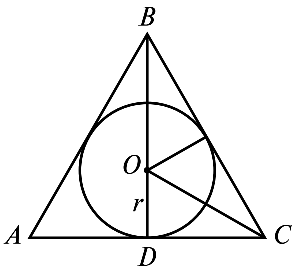


Рис. 31

1. Поскольку объем шара $V=\frac{4}{3}\pi r^3$, радиус данного шара равен $r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$.

2. На рис. 31 изображено осевое сечение шара и описанного около него конуса. Центр шара O расположен на биссектрисе CO угла ACB, а $OD=r$ — радиус шара (он известен).

3. Объем конуса равен $W=\frac{1}{3}\pi R^2H$, где $R=DC$ — радиус основания конуса, а $H=BD$ — его высота.

4. Пусть $\angle DCB = \alpha$, тогда $\angle DCO = \frac{\alpha}{2}$ и из $\triangle ODC$ и $\triangle BDC$ соответственно можно выразить R и H:

$$R = DC = r \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2},$$
$$H = R \operatorname{tg} \alpha = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

5. Следовательно,

$$W = \frac{1}{3}\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha. \qquad (1)$$

6. Нам нужно найти минимальное значение функции $\varphi(\alpha) = \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha$, зависящей от угла α. Сделаем это элементарными средствами.

7. Положим $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = x$. Тогда $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{x}$, а

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

8. Задача сводится к нахождению минимума положительной функции $f(x) = \dfrac{2x^4}{x^2 - 1}$ при $x > 1$.

9. Выполним следующие преобразования:

$$\frac{x^4}{x^2 - 1} = \frac{x^4 - 1 + 1}{x^2 - 1} = x^2 + 1 + \frac{1}{x^2 - 1} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 - 1} + 2.$$

Полагая $x^2 - 1 = z$ и используя неравенство $z + \frac{1}{z} \geqslant 2$, получаем

$$f(x) = \frac{2x^4}{x^2 - 1} \geqslant 2 \cdot 4 = 8,$$

причем равенство $f(x) = 8$ достигается при $x^2 - 1 = z = 1$, т.е. при $x = \sqrt{2}$.

10. Вернемся к равенству (1). Объем W принимает минимальное значение при $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = x = \sqrt{2}$ (в этом случае $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$). Найдем это значение:

$$W_{\min} = \frac{1}{3}\pi r^3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8\pi r^3}{3} = 2V.$$

11. Итак, минимальный объем конуса равен $W = 2V$, где V — объем шара, угол α наклона образующей конуса к основанию определяется из условия $\operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$, т.е. $\alpha = \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$.

12. *Ответ:* $2V$.

27. Окно имеет форму прямоугольника, дополненного полукругом. Периметр окна равен p. При каком отношении сторон прямоугольника окно будет пропускать наибольшее количество света?

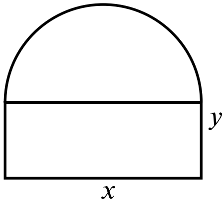


Рис. 32

1. Пусть условиям задачи отвечает рис. 32.

2. Площадь окна равна

$$S = xy + \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

3. Так как $p = x + 2y + \pi\,\frac{x}{2}$, то $y = \frac{p}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\,x$; тогда площадь окна выразится функцией

$$S = x\left(\frac{p}{2} - \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\,x\right) + \pi\frac{x^2}{8} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)x^2 + \frac{p}{2}\,x.$$

4. Найдем производную этой функции:

$$S' = -2x\left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right) + \frac{p}{2}.$$

5. Имеем $S' = 0$ при $x = \dfrac{2p}{4+\pi}$. Нетрудно убедиться в том, что при этом значении x функция S имеет максимум.

6. Если $x = \dfrac{2p}{4+\pi}$, то $y = \dfrac{p}{4+\pi}$, т.е. высота прямоугольника должна быть вдвое меньше его длины.

7. *Ответ:* 1:2.

28. Требуется огородить забором прямоугольный участок земли площадью 294 м^2 и затем разделить этот участок забором на две равные части. При каких линейных размерах участка длина всего забора будет наименьшей?

1. Пусть x и y (рис. 33) — линейные размеры участка (в метрах).

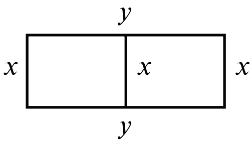


Рис. 33

2. Тогда площадь участка составит $xy = 294$, откуда $y = \frac{294}{x}$.

3. Длина всего забора выразится функцией

$$f(x) = 3x + 2y = 3x + \frac{588}{x} = \frac{3x^2 + 588}{x},$$

где по смыслу задачи $x > 0$.

4. Найдем экстремум этой функции. Имеем

$$f'(x) = \frac{6x \cdot x - (3x^2 + 588) \cdot 1}{x^2} = \frac{3x^2 - 588}{x^2},$$

откуда $f' = 0$ при $x = 14$ (так как $x > 0$). Если $0 < x < 14$, то $f'(x) < 0$, а если $x > 14$, то $f'(x) > 0$. Значит, при $x = 14$ функция $f(x)$ имеет минимум.

5. Итак, наименьшая длина забора получается при $x = 14$, $y = 21$.

6. *Ответ:* 14 м; 21 м.

29. Будем считать, что расходы на топку парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости 15 км/ч расходы на топливо составляют 1,5 т угля в час по цене 18 р., а остальные расходы (не зависящие от скорости) составляют 16 р. в час. Найти наименьшую стоимость прохождения пароходом пути в 2000 км.

1. Пусть v (км/ч) — скорость движения парохода. Тогда время его движения равно $\frac{2000}{v}$ (ч).

2. Далее, пусть kv^3 — количество угля, потребляемого в час. Согласно условию, если $v = 15$, то расходовалось 1,5 т угля в час. Значит, $k \cdot 15^3 = 1{,}5$, откуда $k = \frac{1}{2250}$.

3. Так как в час расходуется $\frac{v^3}{2250}$ т угля, а его стоимость в час составляет $\frac{18v^3}{2250}$ р., то стоимость угля, затраченного на прохождение 2000 км пути, выразится функцией

$$y = \frac{2000}{v}\left(\frac{18v^3}{2250} + 16\right) = 16\left(v^2 + \frac{2000}{v}\right).$$

4. Найдем экстремум этой функции. Имеем

$$y' = 16\left(2v - \frac{2000}{v^2}\right) = \frac{32}{v^2}(v^3 - 1000),$$

откуда следует, что $y' = 0$ при $v = 10$. Если $v < 10$, то $y' < 0$, а если $v > 10$, то $y' > 0$. Значит, при $x = 10$ функция y имеет минимум.

5. Остается найти это минимальное значение:

$$y_{\min} = y(10) = 16\left(100 + \frac{2000}{10}\right) = 16 \cdot 300 = 4800.$$

6. *Ответ:* 4800 р.

30. Автомобиль выезжает из пункта A и едет с постоянной скоростью v км/ч до пункта B, отстоящего от A на 24,5 км. В пункте B автомобиль переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на 54 км/ч, и движется так до полной остановки. Затем автомобиль сразу же поворачивает обратно и возвращается в A с постоянной скоростью v км/ч.

Какова должна быть скорость v, чтобы автомобиль за наименьшее время проехал путь от A до полной остановки и обратно до пункта A указанным выше способом? Найти это наименьшее время.

1. Найдем время, которое затратил автомобиль на весь путь от A до полной остановки и обратно.

а) Расстояние 24,5 км автомобиль проехал за время $t_1 = \dfrac{24{,}5}{v}$.

б) Вслед за этим он двигался до полной остановки с ускорением -54 км/ч^2 в течение времени $t_2 = \dfrac{v}{54}$, пройдя при этом расстояние s, которое определяется по известной формуле для равнозамедленного движения:

$$s = vt_2 - \frac{54t_2^2}{2}, \quad s = \frac{v^2}{54} - \frac{v^2}{2 \cdot 54} = \frac{v^2}{108}.$$

в) Время t_3, затраченное на обратный путь, равно

$$t_3 = \frac{24{,}5 + \frac{v^2}{108}}{v} = \frac{24{,}5}{v} + \frac{v}{108}.$$

г) Поэтому полное время движения автомобиля составляет

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{24{,}5}{v} + \frac{v}{54} + \left(\frac{24{,}5}{v} + \frac{v}{108}\right) = \frac{49}{v} + \frac{v}{36}.$$

2. Итак, время движения автомобиля до пункта A и обратно является функцией только одной переменной v, его скорости на первом участке:

$$t(v) = \frac{v}{36} + \frac{49}{v}.$$

3. Найдем экстремум этой функции. Имеем

$$t' = \frac{1}{36} - \frac{49}{v^2} = \frac{v^2 - 7^2 \cdot 6^2}{36v^2} = \frac{(v+42)(v-42)}{36v^2},$$

откуда следует, что $t' = 0$ при $v = 42$. Если $v < 42$, то $t' < 0$, а если $v > 42$, то $t' > 0$, т.е. при $v = 42$ функция $t(v)$ имеет минимум.

4. Это минимальное значение есть

$$t(42) = \frac{42}{36} + \frac{49}{42} = \frac{7}{6} + \frac{7}{6} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}\ (\text{ч}).$$

5. *Ответ:* 42 км/ч; 2 ч 20 мин.

31. Резервуар снабжается водой с помощью пяти труб. Первая наполняет его за 40 мин; вторая, третья и четвертая трубы, работая одновременно, — за 10 мин; вторая, третья и пятая вместе — за 20 мин, и, наконец, пятая и четвертая вместе — за 30 мин. За какое время наполнят резервуар все пять труб при одновременной работе?

1. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — производительности труб, V — объем резервуара.

2. Тогда

$$x_1 = \frac{V}{40}; \quad x_2 + x_3 + x_4 = \frac{V}{10}, \quad x_2 + x_3 + x_5 = \frac{V}{20}, \quad x_4 + x_5 = \frac{V}{30}.$$

3. Умножив первое равенство на 2 и сложив результат со всеми остальными равенствами, получим

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \frac{7V}{60}.$$

4. Значит,

$$t = \frac{V}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} = \frac{60}{7}.$$

5. *Ответ:* за $\frac{60}{7}$ мин.

32. Две силы приложены к одной точке и составляют между собой прямой угол. Величина одной из них на 4 Н больше величины другой, а величина их равнодействующей на 8 Н меньше суммы величин данных сил. Найти величины данных сил и их равнодействующей.

1. Пусть x (Н) — величина первой силы; тогда $x+4$ (Н) — величина второй силы (рис. 34).

2. Значит, величина равнодействующей силы есть

$$x + x + 4 - 8 = 2x - 4 = 2(x-2)\ \text{Н}.$$

3. Из прямоугольного треугольника OBC следует

$$x^2 + (x+4)^2 = (2(x-2))^2,$$

откуда $x_1 = 12$, $x_2 = 0$ (не подходит по смыслу задачи).

4. Итак, $x = 12$, $x + 4 = 16$, $2(x-2) = 20$.

5. *Ответ:* 12 Н; 16 Н; 20 Н.

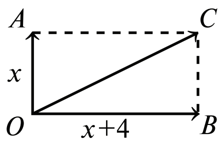


Рис. 34

33. К материальной точке приложены две силы, угол между которыми равен 30°. Величина одной из сил в $7\sqrt{3}$ раза больше величины другой, а величина равнодействующей силы на 24 Н больше, чем величина меньшей силы. Найти величины меньшей и равнодействующей сил.

1. Пусть $F_1 = BC = x$ (Н) — величина меньшей из сил (рис. 35); тогда $F_2 = AB = 7\sqrt{3}x$ (Н) — величина большей силы, а $F = AC = x + 24$ (Н) — величина равнодействующей.

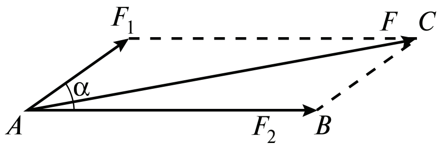


Рис. 35

2. Применив теорему косинусов к треугольнику ABC, получим

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos(180° - \alpha).$$

3. Следовательно,

$$(x+24)^2 = x^2 + 147x^2 - 2x \cdot 7\sqrt{3}x \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

или

$$7x^2 - 2x - 24 = 0,$$

откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -\frac{24}{7}$ (не подходит по смыслу задачи).

4. Итак, $x = 2$, $x + 24 = 26$.

5. *Ответ:* 2 Н; 26 Н.

34. Поезд метро состоит из нескольких вагонов, причем в каждом вагоне находится одинаковое число пассажиров. Количество пассажиров в одном вагоне превосходит число вагонов на 9. Когда на станции во второй вагон вошли 10 человек, а из остальных вагонов вышли по 10 человек, число пассажиров во втором вагоне оказалось равным числу пассажиров, оставшихся во всех остальных вагонах. Сколько пассажиров было первоначально в каждом вагоне?

1. Пусть k — первоначальное количество пассажиров в каждом вагоне.

2. Тогда $(k-9)$ — число вагонов (причем $k > 9$, k — натуральное число).

3. Согласно условию, получаем уравнение

$$k + 10 = (k - 10)(k - 10), \quad \text{или} \quad k^2 - 21k + 90 = 0,$$

корнями которого являются 15 и 6. Второй корень посторонний, поскольку должно быть $k > 9$.

4. *Ответ:* 15 пассажиров.

35. Фрукты в магазин были доставлены двумя машинами по 60 ящиков в каждой; при этом в 21 ящике были груши, а в остальных — яблоки. Сколько ящиков с грушами было в каждой машине, если известно, что в первой машине на один ящик с грушами приходилось в 3 раза больше ящиков с яблоками, чем во второй?

1. Обозначим количество ящиков с грушами в первой машине через x, а во второй машине — через y.

2. Тогда ящиков с яблоками в первой машине было $(60 - x)$, а во второй $(60 - y)$.

3. Согласно условию, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 21, \\ \dfrac{x}{60 - x} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{y}{60 - y}, \end{cases}$$

которая после исключения y приводит к уравнению

$$x^2 + 99x - 630 = 0.$$

4. Положительный корень этого уравнения есть $x = 6$. Следовательно, $y = 15$. Итак, в первой машине было 6 ящиков с грушами, а во второй — 15.

5. *Ответ:* 6 ящиков; 15 ящиков.

36. Из пункта A на прогулку вышел пешеход со скоростью v км/ч. После того как он отошел от A на 6 км, вслед за ним из A выехал велосипедист, скорость которого была на 9 км/ч больше скорости пешехода. Когда велосипедист догнал пешехода, они повернули назад и возвратились вместе в A со скоростью 4 км/ч. При каком значении v время прогулки пешехода окажется наименьшим?

1. Время, за которое велосипедист догонит пешехода, составляет $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ ч.

2. До момента, когда велосипедист догнал пешехода, последний был в пути $\frac{6}{v} + \frac{2}{3}$ (ч) и прошел $v\left(\frac{6}{v} + \frac{2}{3}\right)$ (км).

3. Этот же путь велосипедист и пешеход преодолели обратно с одинаковой скоростью 4 км/ч и затратили на это $\dfrac{v\left(\frac{6}{v} + \frac{2}{3}\right)}{4}$ (ч).

4. Время, затраченное пешеходом на всю прогулку, выразится функцией

$$t(v) = \frac{6}{v} + \frac{2}{3} + \frac{v\left(\frac{6}{v} + \frac{2}{3}\right)}{4} =$$
$$= \frac{6}{v} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} + \frac{v}{6} = \frac{v^2 + 13v + 36}{6v},$$

где $v > 0$.

5. Находим

$$t'(v) = \frac{(2v + 13)v - (v^2 + 13v + 36)}{6v^2} = \frac{v^2 - 36}{6v^2},$$

откуда $t'(v) = 0$ при $v = 6$. Легко установить, что $v = 6$ — точка минимума функции $t(v)$.

6. *Ответ:* 6 км/ч.

37. Группа учащихся, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки «2», «3», «4» и «5». Сумма полученных оценок равна 93, причем «троек» было больше, чем «пятерок», и меньше, чем «четверок». Кроме того, число «четверок» делилось на 10, а число «пятерок» было четным. Установить, сколько каких оценок получила группа.

1. Пусть x, y, z, u — соответственно количество «двоек», «троек», «четверок» и «пятерок». Согласно условию, имеем

$$\begin{cases} x + y + z + u = 30, & (1) \\ 2x + 3y + 4z + 5u = 93, & (2) \\ u < y < z, \end{cases}$$

причем u делится на 2, а z делится на 10.

2. Очевидно, что нельзя взять $z = 0$, поскольку при $z = 0$ условие $y < z$ не может быть выполнено.

3. Умножив уравнение (1) на 2 и вычитая результат из уравнения (2), получим

$$y + 2z + 3u = 33, \qquad (3)$$

откуда следует, что $z \neq 20$. Таким образом, для z остается единственная возможность: $z = 10$.

4. Тогда уравнение (3) примет вид

$$y = 13 - 3u.$$

5. Ясно, что $u \neq 0$, так как если $u = 0$, то $y = 13 > z$, а это противоречит условию $y < z$.

6. Затем возьмем следующее четное значение $u = 2$ и тогда получим $y = 7$; если же взять $u = 4$, то $y = 1 < u$, что противоречит условию $u < y$.

7. Итак, количество «троек» равно 7, а количество «пятерок» равно 2. Тогда количество «двоек» равно 11.

8. *Ответ:* 11 «двоек», 7 «троек», 10 «четверок» и 2 «пятерки».

38. Имеющиеся в агрофирме комбайны, работая вместе, могут убрать урожай за одни сутки. Однако по плану комбайны вступали в работу последовательно: в первый час работал лишь один комбайн, во второй — два, в третий — три и т. д. до тех пор, пока не начали работать все комбайны, действовавшие вместе до полной уборки урожая. Время работы, предусмотренное планом, уменьшилось бы на 6 ч, если бы с самого начала уборки постоянно работали все комбайны, за исключением пяти. Сколько комбайнов было в агрофирме?

1. Примем объем всей работы за единицу и введем три переменные: n — число комбайнов в агрофирме; x – производительность каждого комбайна за 1 ч; t — время совместной работы всех комбайнов по плану (в часах).

2. Согласно условию, n комбайнов, производительность каждого из которых равна x, могут выполнить всю работу за 24 ч и, значит,

$$24nx = 1. \qquad (1)$$

3. По плану в первый час действовал один комбайн, а объем работы, выполненный им за этот час, равен x.

4. Во второй час действовали два комбайна, а объем работы, выполненный ими за этот час, равен $2x$.

5. Аналогично в третий час три комбайна выполнили объем работы, равный $3x$, и т. д., наконец, в $(n-1)$-й час $(n-1)$ комбайнов выполнили объем работы, равный $(n-1)x$.

6. После этого в течение t ч дейтсвовали все n комбайнов, которые выполнили объем работы, равный ntx.

7. Поэтому предусмотренная планом работа комбайнов описывается уравнением

$$x + 2x + \ldots + (n-1)x + ntx = 1. \qquad (2)$$

8. Заметим, что выражение $x + 2x + \ldots + (n-1)x$ представляет собой сумму $n-1$ членов арифметической прогрессии, у которой $a_1 = x$, $d = x$. Согласно известной формуле, имеем

$$x + 2x + \ldots + (n-1)x = \frac{x + (n-1)x}{2}(n-1) = \frac{n(n-1)x}{2}.$$

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{n(n-1)x}{2} + ntx = 1,$$

или

$$nx\Big(\frac{n-1}{2} + t\Big) = 1. \qquad (3)$$

9. Наконец, из условия следует, что если бы с самого начала работали $(n-5)$ комбайнов, то работа продолжалась бы не $(n-1+t)$ ч, как было предусмотрено планом, а на 6 ч меньше, т. е. $(n-1+t-6)$ ч $=$ $= (n+t-7)$ ч, поэтому

$$(n+t-7)(n-5)x = 1. \qquad (4)$$

10. Уравнения (1), (3) и (4) дают следующую систему:

$$\begin{cases} 24nx = 1, \\ nx\Big(\frac{n-1}{2} + t\Big) = 1, \\ (n+t-7)(n-5)x = 1. \end{cases}$$

11. Из первого уравнения этой системы слудет, что $nx = \frac{1}{24}$. Подставив это выражение во второе и третье уравнение, приходим к системе

$$\begin{cases} nx = \frac{1}{24}, \\ \frac{n-1}{2} + t = \frac{1}{24}, \\ (n+t-7)\Big(\frac{1}{24} - 5x\Big) = 1. \end{cases}$$

12. Полученную систему легко решить методом подстановок. Из первого уравнения следует, что $x = \frac{1}{24n}$, а из второго — что $t = \frac{49-n}{2}$. Подставив эти выражения в третье уравнение, имеем

$$\frac{(n+35)(n-5)}{48n} = 1, \quad \text{или} \quad n^2 - 18n - 175 - 0,$$

откуда находим $n_1 = 25$, $n_2 = -7$ (не подходит, так как по смыслу задачи должно быть $n > 1$). Итак, $n = 25$.

13. *Ответ:* 25 комбайнов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Если двузначное число разделить на число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то в частном получится 4, а в остатке 15. Если же из данного числа вычесть 9, то получится сумма квадратов цифр, использованных для записи этого числа. Найти это число.

2. После деления некоторого двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 7, а в остатке 6. После деления этого числа на произведение его цифр в частном получается 3, а в остатке 11. Найти это число.

3. Найти трехзначное число, если сумма его цифр равна 6, сумма квадратов цифр равна 14, а сами цифры, взятые последовательно, образуют убывающую арифметическую прогрессию.

4. В первый раз знаменатель положительной дроби увеличили на 3, а во второй раз уменьшили на 5. Сумма полученных таким образом дробей оказалась равной $\frac{2}{3}$. Найти знаменатель исходной дроби, если ее числитель равен 2.

5. Знаменатель некоторой дроби меньше квадрата ее числителя на 1. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби станет больше, чем $\frac{1}{3}$. Если же из числителя и знаменателя вычесть по 3, то дробь останется положительной, но будет меньше, чем $\frac{1}{10}$. Найти эту дробь.

6. Для составления букетов закупили 60 роз и гвоздик. Если бы роз закупили в 2 раза больше, то общее число цветов было бы меньше 88, а если бы закупили в 2 раза больше гвоздик, то общее число цветов было бы меньше 94. Сколько роз было закуплено?

7. В двух бригадах вместе более 27 рабочих. Число членов первой бригады более чем в 2 раза превышает число членов второй бригады, уменьшенное на 12. Число членов второй бригады более чем в 9 раз превышает число членов первой бригады, уменьшенное на 10. Сколько рабочих в каждой бригаде?

8. На покупку красных и белых роз можно затратить не более 615 р. Красная роза стоит 25 р., а белая — 30 р. При этом число купленных красных роз не должно отличаться от числа купленных белых роз более чем на 4. Требуется купить максимально возможное количество красных и белых роз, причем белых роз нужно купить как можно меньше. Сколько красных и сколько белых роз можно купить при этих условиях?

9. Даны три сплава. Первый содержит 45% олова и 55% свинца, второй — 10% висмута и 50% свинца, третий — 30% висмута и 70%

свинца. Из них нужно составить новый сплав, содержащий 15% висмута. Какое наибольшее и наименьшее процентное содержание свинца может оказаться в новом сплаве?

10. Автобус проходит путь AE, состоящий из участков $AB = 10$ км, $BC = 5$ км, $CD = 5$ км и $DE = 6$ км. Согласно расписанию, автобус выходит из пункта A в 8 ч и должен проезжать пункт B в 8 ч 10 мин, пункт C — в 8 ч 22 мин и пункт D — в 8 ч 40 мин. Возможны отклонения от расписания в зависимости от условий движения. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус с тем, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения пунктов B, C и D, сложенная с временем движения от A до E при скорости v, не превосходила 53,5 мин?

11. В кинозале находится n стульев, расположенных рядами, в каждом из которых одинаковое число стульев. Если к каждому ряду добавить по p стульев, а число рядов уменьшить на m, то общее число мест в кинозале останется прежним. Сколько рядов было в кинозале и сколько стульев было в каждом ряду?

12. Дорога между поселками A и B сначала поднимается в гору, а затем спускается вниз. Велосипедист, двигаясь на спуске со скоростью, на a км/ч большей, чем на подъеме, затрачивает k ч на весь путь от A до B, а на обратный — половину этого времени. Найти скорость велосипедиста на подъеме и на спуске, если расстояние между поселками равно b км.

13. Из колбы, содержащей раствор соли, отлили в пробирку 0,1 часть раствора. Затем часть воды из пробирки испарили, в результате чего процентное содержание соли в пробирке увеличилось в k раз. Каково первоначальное процентное содержание соли в колбе, если известно, что после переливания в нее содержимого пробирки процентное содержание соли в колбе увеличилось на a%?

14. Имеются два куска сплава серебра и меди. Один из них содержит p% меди, а другой — q% меди. В каком отношении нужно взять сплавы от первого и второго кусков, чтобы получить новый сплав, содержащий r% меди?

15. Расстояние между городами A и B равно 100 км. Из A в B одновременно отправляются два автомобиля. Скорость первого на 10 км/ч больше скорости второго. Кроме того, первый автомобиль сделал остановку в пути на 50 мин. Найти скорость первого автомобиля, если он прибывает в город B одновременно со вторым. В каких пределах может изменяться скорость v первого автомобиля при условии, что он прибывает в город B не позже второго?

16. Лодка спускается по течению реки на 10 км. а затем поднимается против течения на 6 км. Скорость течения реки равна 1 км/ч. Найти собственную скорость лодки, если вся поездка заняла 4 ч. В каких пределах может изменяться скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от трех до четырех часов?

17. Лодка плывет по реке против течения, скорость которого равна u км/ч. Через l км пути она попадает в озеро со стоячей водой. С какой собственной скоростью v должна двигаться лодка, чтобы общее расстояние s км она прошла за t ч?

18. Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобилось четыре различных марки на общую сумму 28 р. Найти стоимости марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости образуют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

19. Алексей, Борис и Владимир купили карандаши стоимостью 3 р. и блокноты. Алексей купил 4 карандаша и 2 блокнота, Борис — 6 карандашей и блокнот, Владимир — 3 карандаша и блокнот. Оказалось, что уплаченные ими суммы образуют геометрическую прогрессию. Сколько стоит блокнот?

20. Чтобы огородить клумбу, которая должна иметь форму кругового сектора, имеется кусок проволоки длиной 20 м. Какой радиус круга следует взять, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

Ответы

1. 91. **2.** 83. **3.** 321. **4.** 9. **5.** $\frac{4}{15}$. **6.** 27. **7.** 11 рабочих; 17 рабочих. **8.** 9 белых и 13 красных. **9.** 62,5% и 55%. **10.** 60 км/ч. **11.** $\frac{pm+\sqrt{p^2m^2+4mnp}}{2p}$; $\frac{\sqrt{p^2m^2+4mnp}-pm}{2p}$. **12.** $\frac{4b-3ak+\sqrt{D}}{6k}$; $\frac{4b+3ak+\sqrt{D}}{6k}$, где $D = 16b^2 + 9a^2k^2$. **13.** $\frac{9k+1}{k-1}\cdot a\%$. **14.** В отношении $(r-q):(p-r)$. **15.** 40 км/ч; $10 < v \leqslant 40$. **16.** 4 км/ч; $4 \leqslant v \leqslant \frac{8+\sqrt{61}}{3}$. **17.** $v > \frac{s+ut+\sqrt{(s-ut)^2+4utl}}{2t}$ км/ч. **18.** 4 р.; 6 р.; 8 р.; 10 р. **19.** 18 р. **20.** 5 м.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Александров Б.И., Лурье М.В. Пособие по математике для поступающих в МГУ. М., 1977.

Александров Б.И., Лурье М.В., Максимов В.М. Пособие по подготовке к письменному экзамену математике в МГУ. М., 1972.

Андреянов П.А., Гладких И.М., Ермаков В.И. и др., Варианты заданий по математике на вступительных экзаменах в РЭА им. Г. В. Плеханова в 1999–2006. М., 2006.

Баранов А.И. Конкурсные задачи по математике. М., 1969.

Говоров В.М., Дыбов П.Т., Мирошин Н.В., Смирнова С.Ф. Сборник конкурсных задач по математике. М., 2006.

Егерев В.К., Зайцев В.В., Кордемский Б.А. и др.; Под ред. Сканави М.И. Сборник задач по математике (с решениями) М., 2006.

Камалова Р.А., Паршев Л.П., Струков Ю.А. Типовые задачи конкурсных экзаменов по математике. М., 1996.

Крамор В.С. Готовимся к экзамену по математике. М., 2006.

Крамор В.С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. М., 2006.

Крамор В.С., Лунгу К.Н. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры (в трех книгах). М., 2001.

Кутасов А.Д., Пиголкина Т.С., Чехлов В.И., Яковлева Т.Х.; Под. ред. Яковлева Г.Н. Пособие по математике для поступающих в вузы. М., 2002.

Кущенко В.С. Сборник конкурсных задач по математике с решениями. Л., 1968.

Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.И. Задачи по элементарной математике. М., 1969.

Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Задачник-практикум по математике. М., 2005.

Лурье М.В., Александров Б.И. Задачи на составление уравнений. М., 1976.

Максимов В.М. Пособие по математике для поступающих в МГУ. М., 1972.

Моденов В.П. Математика. Пособие для поступающих в вузы. М., 2002.

Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Варианты экзаменационных задач по математике для поступающих в вузы. М., 2001.

Симонов А.Я., Бакаев Д.С., Эпельман А.Г. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике. М., 1991.

Шахно К.У. Как готовиться к приемным экзаменам в вузы по математике. Мн., 1973.

Шестопалов С.А. Экзаменационные работы в 11 классе. М., 2003.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ШКОЛЬНЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ

Крамор Виталий Семёнович

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ и методы их решения

Ведущий редактор *О. А. Фёдорова*
Редактор *А. М. Суходский*
Технический редактор *В. Н. Журавлёва*
Компьютерная верстка *К. Е. Панкратьева*

Подписано в печать 25.02.2009. Формат 60x90 $^1/_{16}$.
Гарнитура «Литературная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 16,00. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — учебная литература

ООО «Издательство Оникс».
105082, Москва, ул. Б. Почтовая, д. 7, стр. 1.
Почтовый адрес: 117418, Москва, а/я 26.
Отдел реализации: тел. (499) 619-02-20, 619-31-88.
Интернет-магазин: www.onyx.ru

ООО «Издательство «Мир и Образование».
Изд. лиц. ИД № 05088 от 18.06.2001.
109193, Москва, ул. 5-я Кожуховская, д. 13, стр. 1.
Тел./факс (499) 128-11-60, 120-51-47.
E-mail: mir-obrazovanie@onyx.ru