

Коллоквиум по дисциплине: Комбинаторика и Теория Графов
(Задания на создание программных модулей в системе “Wise Task Graph”)

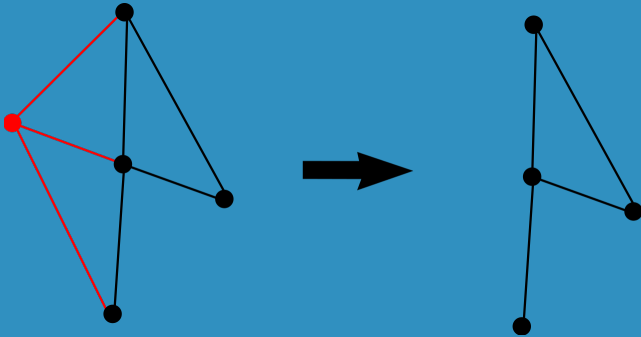
выполнил студент группы 3384
Пьянков Михаил

Задание

Проверка содержит ли граф индуцированный полный двудольный подграф $K_{2,2}$

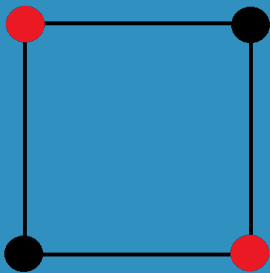
Терминология:

- индуцированный подграф это граф, образованный из подмножества вершин графа вместе со всеми рёбрами, соединяющими пары вершин из этого подмножества.



- полный двудольный граф — вид двудольного графа, у которого любая вершина первой доли соединена со всеми вершинами второй доли.

- граф $K_{2,2}$:



Задание

В задании не указано для какого графа осуществляется проверка: ориентированного или неориентированного.

Заметим, что ориентированность графа не влияет на содержание в нём индуцированного полного двудольного подграфа $K_{2,2}$ (неориентированного).

Очевидно, что если такой подграф есть в ориентированном графе, то он так же будет и в том же графе, но неориентированном, так как только появляются новые направления, и с точки зрения ориентированного графа число рёбер удваивается.

Таким образом реализовав алгоритм для неориентированного графа, он также будет применим для ориентированного графа, так как его можно сделать неориентированным и необходимые свойства не будут потеряны.

Решение

Рассмотрим различные варианты решения данной задачи

- Наивное решение: перебрать все четвёрки вершин в исходном графе и проверить двудольность такого подграфа. Количество операций: $C(n,4) * c$, где c - количество операций для проверки, если нашли (a,b,c,d) , то надо проверить $C(4,2)$ вариантов разделения на $\{(u,v), (m,n)\}$. То есть: $(u,m) \in E, (u,n) \in E, (v,m) \in E, (v,n) \in E, (u,v) \notin E, (m,n) \notin E$. Таким образом $c = C(4,2) * 6$.

Итоговое число операций $9n*(n-1)*(n-2)*(n-3)$, $O(n^4)$.

- Использование возведения матрицы смежности в 4-ую степень, проверка диагональных элементов и в случае не нулевого значения запуск из них DFS глубиной 4. Возведение матрицы смежности в 4-ую степень это $3*n^3$ операций. Проверка диагональных элементов: $n*1$ операций. DFS с глубиной 4: $(n-1)*(n-2)*(n-3)*1$ операций.

Итоговое число операций: $3*n^3 + n*(n-1)*(n-2)*(n-3)$, $O(n^4)$.

Решение

- Перебор пар несмежных вершин (u, w) , поиск пар несмежных вершин (a, b) в пересечении множеств соседей $N(u)$ и $N(w)$. При таком подходе не требуется проверка на двудольность. Перебор несмежных пар: $C(n, 2) \cdot 1$. Построение пересечения множеств соседей: n . Поиск несмежных пар в пересечении множеств соседей $C(n-2, 2) \cdot 1$.

Итоговое количество операций: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) / 4$, $O(n^4)$.

В каждом из вариантов также необходимо проверить все 4 вершины найденного подграфа на отсутствие петель: при выборе очередной вершины v проверяем что нет ребра (v, v) . Такая проверка производится за 1 операцию, поэтому не влияет на сравнение методов.

Последний вариант решения предлагает наибольшую эффективность вычислительных затрат, поэтому он и будет реализован.

Решение

Псевдокод:

```
// Инициализация списка смежности
adj = НОВЫЙ_СЛОВАРЬ()
for v in V:
    adj[vertex] = ∅

// Заполнение списка смежности
for e=(u, v) in E:
    adj[u].add(v)
    adj[v].add(u)

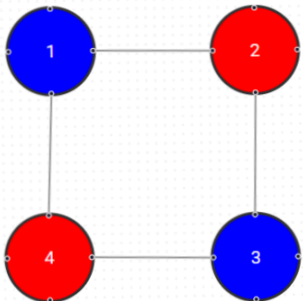
// Поиск индуцированного полного двудольного подграфа  $K_{2,2}$ 
for u in V:
    // Пропуск, если есть петля у u
    if u ∈ adj[u]:
        CONTINUE
    for v in V, v > u: // Сравнивается номер вершины, чтобы не повторяться
        // Пропуск, если u и v смежны или есть петля у v
        if v ∈ adj[u] или v ∈ adj[v]:
            CONTINUE

        // Нахождение общих соседей u и v
        common = adj[u] ∩ adj[v]
        if |common| < 2:
            CONTINUE

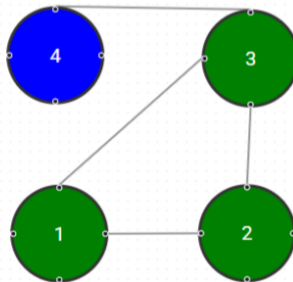
        // Перебор пар общих соседей
        for w in common:
            // Пропуск, если есть петля у w
            if w ∈ adj[w]:
                CONTINUE
            for z in common, z > w:
                // Если w и z не смежны и у z нет петли, то такой вариант подходит
                if z ∉ adj[w] и не(z ∈ adj[z]):
                    EXIST 1 // Найден цикл u-w-v-z
```

EXIST 0

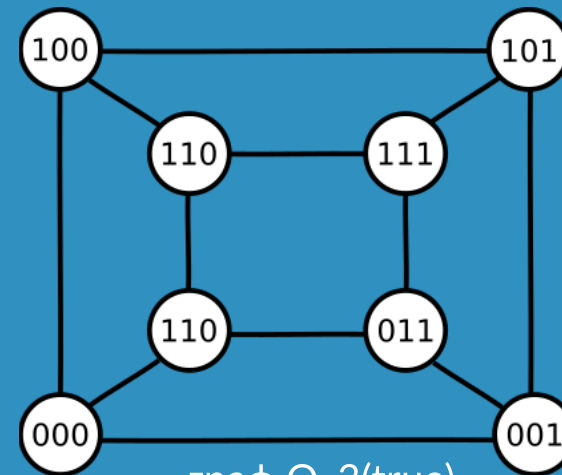
Тестирование



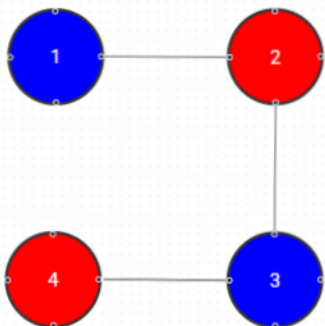
граф $K_{2,2}$ (true)



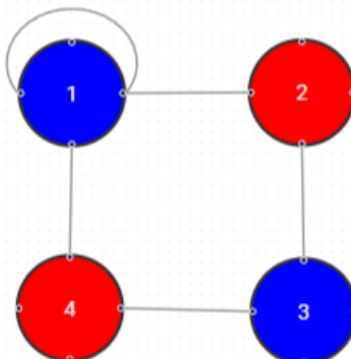
граф - треугольник с доп. вершиной(false)



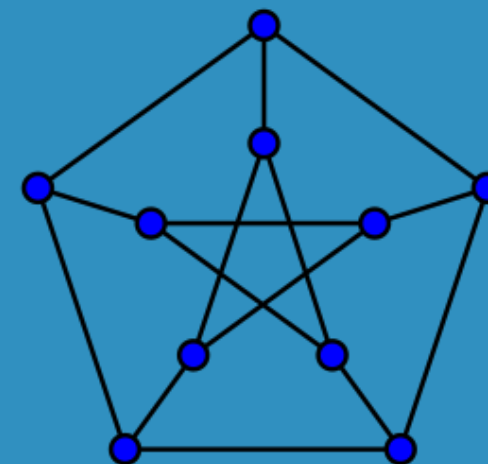
граф Q_3 (true)



граф P_4 (false)

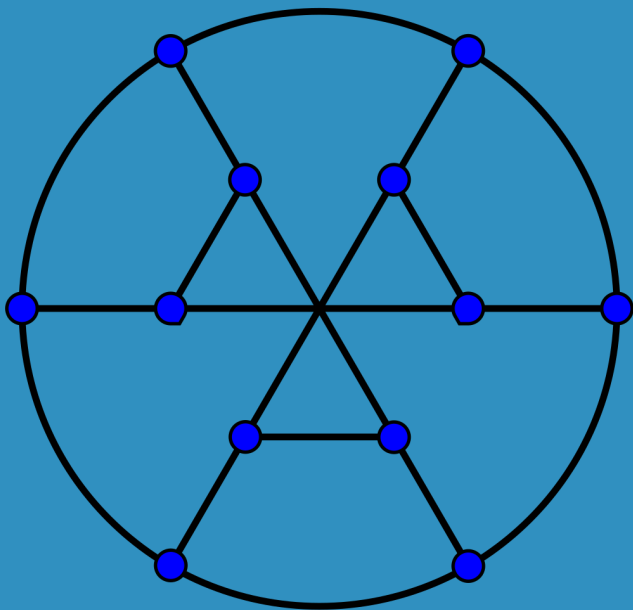


граф $K_{2,2}$ с петлёй (false)

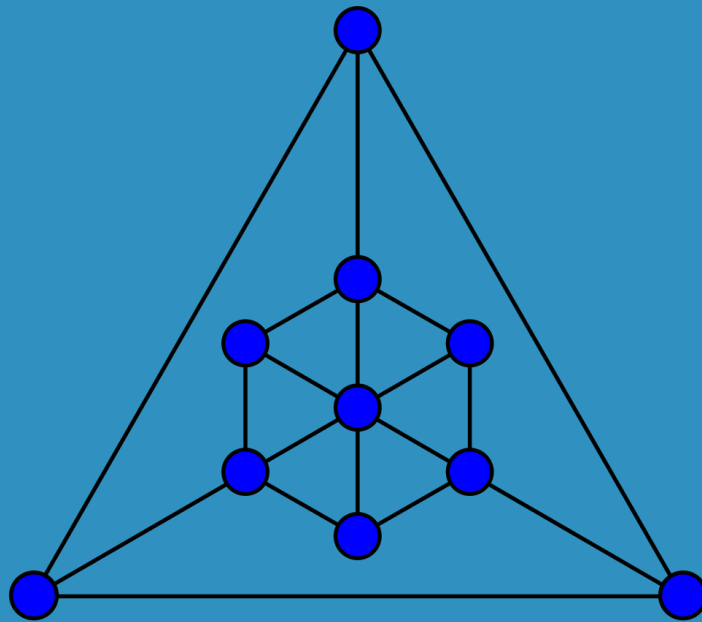


граф Петерсена(false)

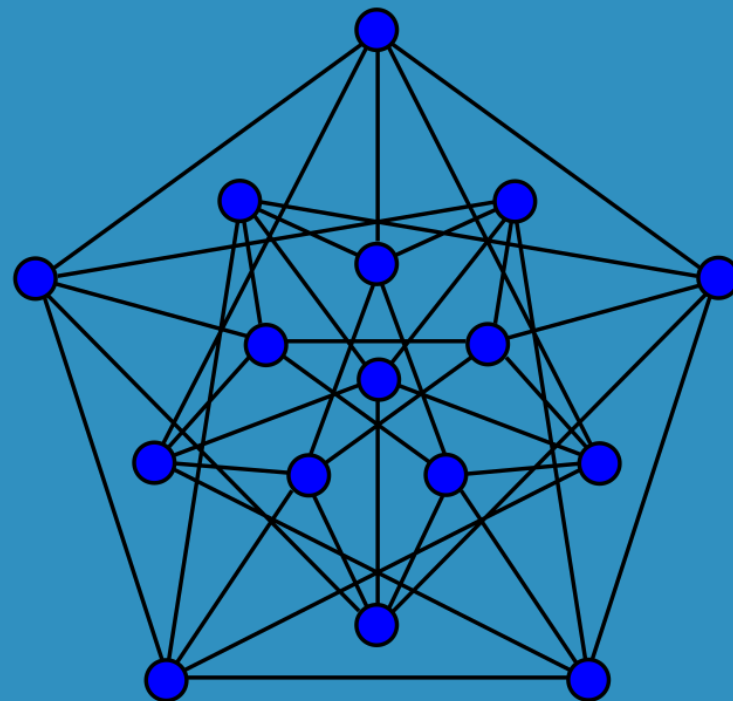
Тестирование



граф Франклина(true)



граф Голомба(false)



граф Клири(true)

Спасибо за внимание

Ссылка на код: <https://clck.ru/3MLvPw>

