

## DODATEK DO ĆWICZENIA 2

### Opis matematyczny, modelowanie i charakterystyki układów dynamicznych

#### ***Modelowanie matematyczne zjawisk fizycznych***

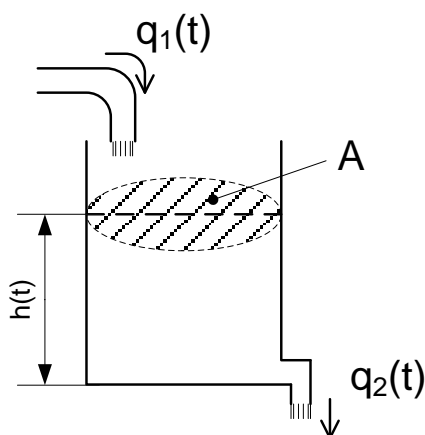
Przyjmijmy następującą definicję modelu – wyrażony w sposób matematyczny, system założeń, pojęć i zależności między nimi, pozwalający opisać (zamodelować) w przybliżony sposób jakiś aspekt rzeczywistości. W powyższej definicji należy zwrócić szczególną uwagę na pojęcie „przybliżony”. Odpowiednio zbudowany model matematyczny umożliwia zbadanie działania układu na drodze doświadczalnej (obliczeniowej) bez konieczności budowy modelu fizycznego. Podejście takie umożliwia dowolną modyfikację parametrów modelu, typów i wartości wielkości wejściowych oraz wyznaczenie interesujących nas wielkości wyjściowych w sposób niewymagający dodatkowych nakładów finansowych. Obliczeniowy proces badania odpowiedzi modelu, o określonych parametrach, na zmianę wybranych wielkości wejściowych zwykło się nazywać symulacją (komputerową). Modelowanie i symulacja znalazły szerokie zastosowanie m.in. w projektowaniu układów sterowania.

Znakomita większość zjawisk fizycznych ma charakter nieliniowy. W związku z tym większość modeli budowana jest z uwzględnieniem nieliniowości, a następnie dla uproszczenia analizy poddawana linearyzacji. Z matematycznego punktu widzenia, model nieliniowy to taki, który nie spełnia zasady superpozycji, czyli taki w którym odpowiedź na wiele jednoczesnych wymuszeń nie równa się sumie odpowiedzi na każde z tych wymuszeń z osobna. Innym kryterium klasyfikacji modelu może być postać jego charakterystyki statycznej. Charakterystyka statyczna to zależność wielkości wyjściowej  $y$  modelu od wielkości wejściowej  $x$  w stanie ustalonym. W przypadku modeli liniowych (zlinearyzowanych) charakterystyka statyczna jest linią prostą, czyli ma postać  $y=ax+b$ , w przypadku nieliniowych charakterystyka odbiega od prostej, tym bardziej im silniejsze nieliniowości występują w modelu.

Narzędziem do budowy modeli matematycznych systemów dynamicznych są równania różniczkowe. W trakcie ćwiczenia analizie podlegają będą modele o jednym

wejściu i jednym wyjściu (SISO), istotnie łatwiejsze w analizie od modeli o wielu wejściach i wyjściach (MIMO).

Rozpatrzmy prosty przykład systemu nieliniowego. Do walcowego zbiornika o nieograniczonej wysokości i polu podstawy  $A[m^2]$  pompowana jest ciecz, jej przepływ objętościowy wynosi  $q_1(t) [m^3/s]$ . Jednocześnie ciecz wypływa ze zbiornika przez zawór o stałej wypływu  $C$ , przepływ równa się  $q_2(t) [m^3/s]$ . W analizowanym systemie wielkością wejściową jest  $q_1(t)$ , wielkościami wyjściowymi mogą być  $q_2(t)$  lub  $h(t)$   $[m]$  (wysokość słupa cieczy w zbiorniku), a  $A$  i  $C$  to parametry systemu.



Równanie bilansu przepływów w zbiorniku będzie miało postać:

$$\frac{dV(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t) \quad (1)$$

Wykorzystując zależność  $V(t) = Ah(t)$  (objętość cieczy w zbiorniku) oraz zakładając, że przepływ wyjściowy jest burzliwy, tzn.  $q_2(t) = C\sqrt{h(t)}$  otrzymamy:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) - C\sqrt{h(t)} \quad (2)$$

W stanie ustalonym wysokość słupa cieczy jest stała ( $h$ ) więc  $\frac{dh(t)}{dt} = 0$  czyli  $q_1 = C\sqrt{h}$

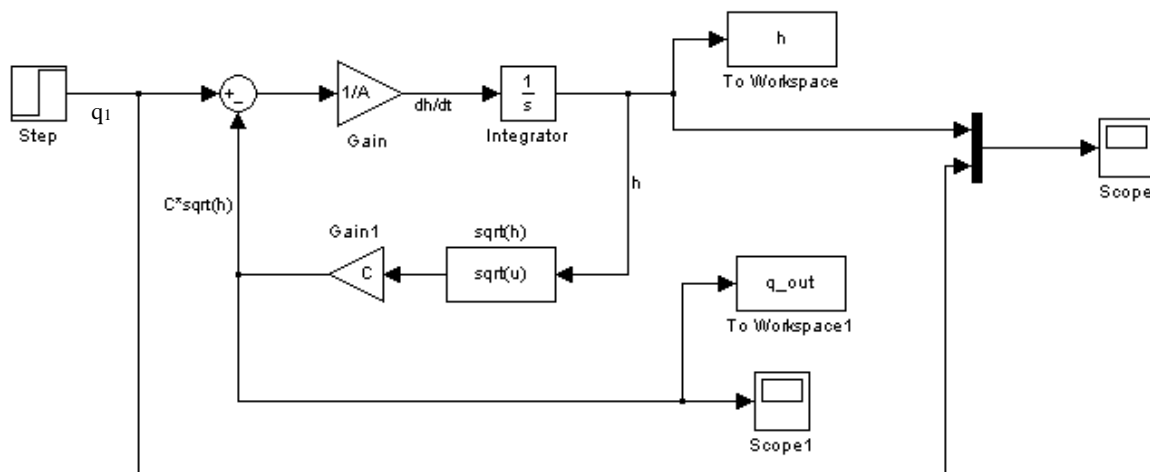
. Z takiej zależności możemy wyznaczyć analityczną postać charakterystyki statycznej:

$$h = \left( \frac{q_1}{C} \right)^2.$$

Wróćmy do równania (2). Równanie w tej postaci możemy bezpośrednio zamodelować w systemie Matlab/Simulink. Podstawowym elementem służącym do modelowania równań różniczkowych jest integrator (wzmacniacz całkujący). Prześledźmy teraz proces budowy modelu w systemie Simulink. Dla wygody przekształćmy równanie (2) do następującej postaci:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A} (q_1(t) - C\sqrt{h(t)}) \quad (3)$$

**WSKAZÓWKA:** Najprostszą metodą przygotowania równań różniczkowych zwyczajnych do modelowania jest pozostawienie po lewej stronie równania jedynie najwyższej pochodnej występującej w równaniu.

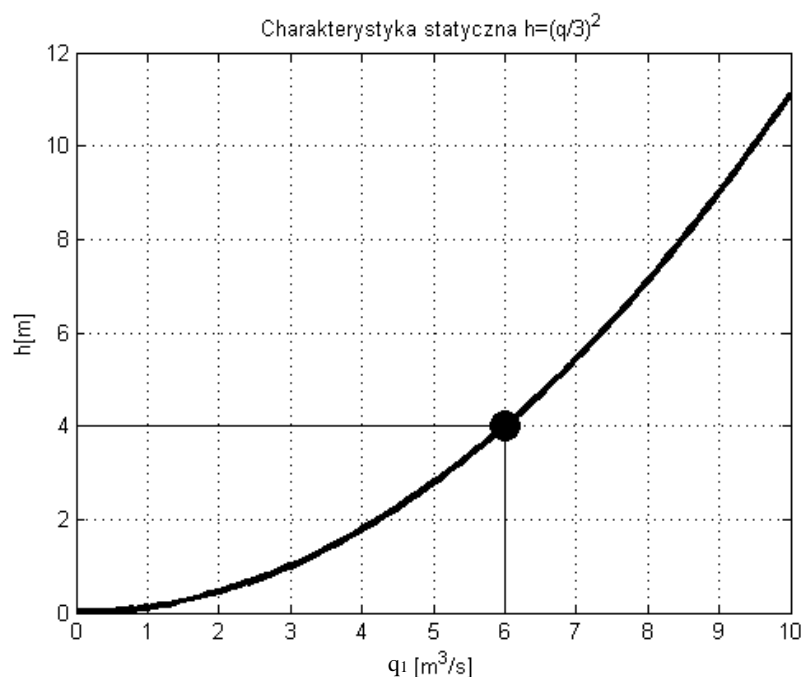


Podając sygnał pochodnej, w tym przypadku  $\frac{dh(t)}{dt}$ , na wejście integratora, na wyjściu otrzymamy jego całkę, czyli sygnał  $h(t)$ . Do wyliczenia sygnału pochodnej potrzebna jest różnica dwóch składników  $q_1(t) - C\sqrt{h(t)}$ , którą następnie dzielimy przez  $A$ . Zauważmy, że jako źródło sygnału wymuszającego  $q_1(t)$  wykorzystaliśmy bloczek *step* realizujący skok jednostkowy. Skok jednostkowy jest sygnałem chętnie wykorzystywanym w tego typu symulacjach. W praktyce taka postać sygnału jest niemożliwa do zrealizowania (oznaczałoby to, że czas potrzebny na przełączenie wartości sygnału np. od 0 do 1 jest zerowy co do wartości), jednak jeżeli model zachowuje się poprawnie przy pobudzeniu skokiem jednostkowym, możemy mieć pewność, że będzie się tak zachowywał również dla sygnałów o bardziej łagodnych zboczach. Innym, istotnym sygnałem pobudzającym może być sinusoida

$y = \sin(\omega t + \varphi)$ , o pulsacji  $\omega$  i fazie początkowej  $\varphi$ . Sygnały uzyskiwane w czasie symulacji możemy zapisać do przestrzeni roboczej Matlaba w celu dalszej obróbki lub wykreślić za pomocą bloku *scope* (przypominającego oscyloskop). W bloku *scope* można wykreślić kilka sygnałów (oscyloskop wielokanałowy) podając je poprzez, widoczny na schemacie, blok *mux* (multiplekser).

### **Charakterystyka statyczna, linearyzacja modeli matematycznych**

Wróćmy teraz do pojęcia charakterystyki statycznej. Możemy ją potraktować jako zbiór tzw. punktów pracy. Choć zachowanie układu w stanach nieustalonych (przejściowych) jest bardzo istotne, z punktu widzenia projektanta systemów, większość rzeczywistej pracy systemów odbywa się w stanie ustalonym, zwykle występują jedynie niewielkie odchyłki od tego stanu, spowodowane niewielkimi zmianami np. wielkości wejściowych lub parametrów systemu (w naszym przykładzie możemy sobie wyobrazić np. spadek ciśnienia pompy, a co za tym idzie zmniejszenie ilości cieczy dopływającej do zbiornika w ciągu sekundy). Przez punkt pracy będziemy rozumieć ustalone wartości wielkości wejściowych i odpowiadające im wielkości wartości wyjściowych modelu. Wygodną, upraszczającą analizę, reprezentacją modelu nieliniowego, poprawną dla niewielkich odchyłek od parametrów punktu pracy, jest jego postać zlinearyzowana wokół punktu pracy. Przyjrzyjmy się charakterystyce statycznej modelu zbiornika:



Na charakterystyce wybrano punkt pracy o parametrach  $q_{10}=6[\text{m}^3/\text{s}]$ ,  $h_0=4[\text{m}]$  dla stałej  $C = 3$ . Oznacza to, że przy stałym przepływie równym  $q_{10}$  oraz stałej zaworu  $C = 3$ , wysokość słupa cieczy w zbiorniku będzie w stanie ustalonym wynosiła  $h_0$ . Należy zwrócić uwagę, że zachowanie układu w stanie ustalonym zależy jedynie od wartości  $q_{10}$  i  $C$ , nie zależy natomiast od warunków początkowych (pierwotnej wysokości słupa cieczy w zbiorniku), ani od wymiarów geometrycznych zbiornika. Od tych parametrów zależy jedynie czas i sposób dojścia do stanu ustalonego. Wyprowadzimy teraz równanie modelu zlinearyzowanego wokół obranego punktu pracy ( $q_{10}$ ,  $h_0$ ). Linearyzacja sprowadza się do rozwinięcia, zapisanej za pomocą równania funkcji, w szereg Taylora, wokół wartości parametrów stanu ustalonego, z uwzględnieniem jedynie wyrazów liniowych względem przyrostów tych wartości. Mówiąc prościej sprowadza się to do obliczenia pochodnych cząstkowych wyrażenia po wszystkich występujących w równaniu zmiennych, wymnożenia ich przez przyrosty odpowiednich wielkości oraz podstawienia parametrów stanu ustalonego. Dla naszego przykładu (2) otrzymujemy:

$$A|_0 \Delta \dot{h}(t) = \Delta q_1(t) - C \frac{1}{2\sqrt{h}}|_0 \Delta h(t) \quad (4)$$

Ponieważ w stanie ustalonym wszystkie sygnały mają wartości stałe to wszystkie pochodne tych sygnałów przyjmują wartość zero, więc w konsekwencji otrzymujemy zależność liniową:

$$\Delta q_1 = C \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \Delta h,$$

lub po przekształceniu:

$$\Delta h = \frac{2\sqrt{h_0}}{C} \Delta q_1.$$

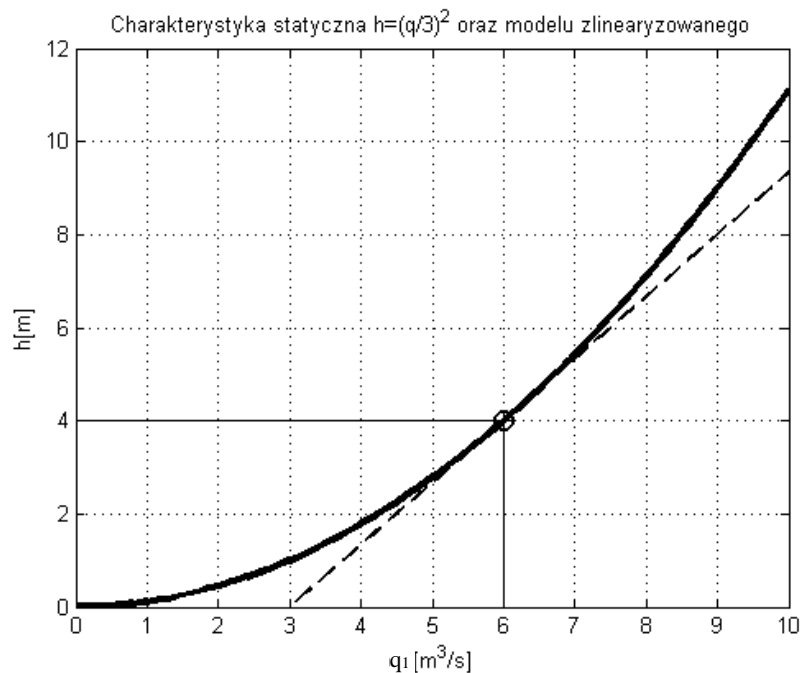
Aby wykreślić charakterystykę statyczną modelu zlinearyzowanego musimy zapisać ją w nieco odmiennej formie:

$$h - h_0 = \frac{2\sqrt{h_0}}{C} (q - q_{10}),$$

czyli

$$h = \frac{2\sqrt{h_0}}{C} (q - q_{10}) + h_0.$$

Wielkości  $q_{10}$  i  $h_0$  to oczywiście przepływ i odpowiadająca mu wysokość słupa cieczy w zbiorniku, w stanie ustalonym.



Można zauważyć, że w pobliżu punktu pracy charakterystyka statyczna modelu zlinearyzowanego niewiele różni się od charakterystyki modelu nieliniowego, więc wartości wyjść obu modeli, w stanie ustalonym, będą zbliżone. Różnice pojawiają się w miarę oddalania się od punktu pracy. Zakres zmian, dla których model zlinearyzowany dobrze odzwierciedla zachowanie modelu nieliniowego, zależy oczywiście od charakteru nieliniowości. W naszym przykładzie nieliniowość jest stosunkowo niewielka i model liniowy będzie dobrym przybliżeniem w szerokim, rzędu  $\pm 16\%$ , zakresie odchyłek sygnału wejściowego od wartości w punkcie pracy. W przypadku silnych nieliniowości zakres dopuszczalnych odchyłek znacznie się zmniejsza.

### **Transmitancja operatorowa**

Wygodną i powszechnie stosowaną formą reprezentacji modelu liniowego (zlinearyzowanego) jest transmitancja operatorowa. Transmitancja to funkcja przejścia (zależność wyjścia od wejścia modelu) w dziedzinie operatora  $s$  Laplace'a.

Wyprowadzimy teraz transmitancję  $K(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q(s)}$  dla naszego przykładu. Po przekształceniu równania (4) na postać operatorową otrzymamy:

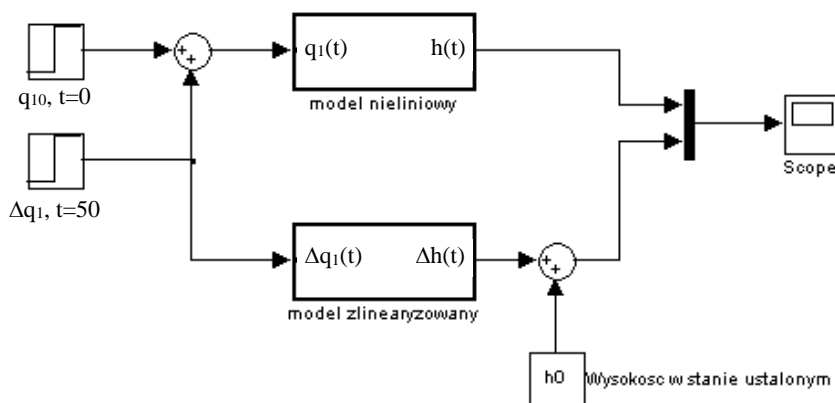
$$As\Delta H(s) = \Delta Q_1(s) - C \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \Delta H(s)$$

czyli:

$$K(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{\frac{2\sqrt{h_0}}{C}}{\frac{2A\sqrt{h_0}}{C}s + 1} = \frac{k}{Ts + 1}.$$

W naszym przykładzie, model zlinearyzowany to element inercyjny pierwszego rzędu o wzmacnieniu  $k$  i stałej czasowej  $T$  - jeden z podstawowych liniowych modeli dynamicznych stosowanych w teorii sterowania. Jedna stała czasowa odpowiada obecności jednego magazynu energii (zbiornik).

W celu wyciągnięcia wniosków na temat maksymalnej wielkości przyrostów wartości sygnałów modelu wokół punktu pracy, dla których model zlinearyzowany właściwie opisuje zachowanie się nieliniowego systemu, porównamy teraz odpowiedzi skokowych modelu liniowego i nieliniowego. Poniższy rysunek przedstawia zaimplementowany w Simulinku schemat układu, umożliwiający przeprowadzenie porównania.



**WSKAZÓWKA:** Dla modelu nieliniowego należy najpierw osiągnąć wybrany punkt pracy (skok  $q_{10}$ ), po czasie potrzebnym na osiągnięcie stanu ustalonego, na wejście modelu wprowadzamy skok równy odchyłce od wartości stanu ustalonego ( $\Delta q_1(t)$ ). W przypadku modelu zlinearyzowanego na wejście podajemy jedynie odchyłkę od stanu ustalonego ( $\Delta q_1(t)$ ). Na wyjściu modelu zlinearyzowanego otrzymamy przebieg przyrostu  $\Delta h(t)$  odpowiadający przyrostowi  $\Delta q_1(t)$ . W celu porównania modeli z wyjściem modelu zlinearyzowanego należy dodać do przyrostu  $\Delta h(t)$  wysokość słupa cieczy w zbiorniku w punkcie pracy  $h_0$ .