Scribe

③ Air containing 0,06 carbon dioxide is pumped into room whose volumen is 8000 ft^3. The air is pumped in at rate 2000 ft^3/min, and the circulated air is pumped out at the same rate. if the is on initial concentration of 0,2 % carbon dioxide in the room, determine the subsequent amount in the room at time t. What is the concentratio of carbon dioxide at 2 minutes?. Solve this equation and approximate the result using Runge Kutta method with $h=0,1$.

Modelo del sistema: $\frac{dv}{dt} = R_{in} - R_{out}$

Sabiendo que: R_{in} = (Concentración de CO_2) · (Entrada de aire)

$R_{in} = (0{,}06\%) \cdot (2000\ ft^3/min) = \frac{0{,}06}{100} * (2000\ ft^3/min)$

$R_{in} = 1{,}2\ ft^3/min$

R_{out} = (CO_2 que entra) (salida de aire)

$R_{in} = \left(\frac{V(t)}{8000}\right) \cdot (2000\ ft^3/min) = \frac{V(t)}{4}\ ft^3/min$

Sustituyendo $\Rightarrow$ $\frac{dV}{dt} + \frac{1}{4} V = 1{,}2$

4,5

La ecuacoń ya está normalizada

* Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$

$$e^{\int 1/4\,dt} = e^{\frac{t}{4}}$$

$$e^{\frac{t}{4}}\left[\frac{dv}{dt} + \frac{1}{4}e^{\frac{t}{4}}v\right] = 1,2e^{t/4} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{t/4}v\right] = 1,2e^{\frac{t}{4}}$$

$$e^{t/4}v = \int 1,2e^{\frac{t}{4}} \Rightarrow e^{t/4}v = 4,8e^{t/4} + C$$

$$V = 4,8 + Ce^{-t/4}$$

Sabiendo que el volumen inicial de CO_2 es $V(0) = 0,2\%$

$$V(0) = 0,2\% \times 8000\,ft^3 = \frac{0,2}{100} \times 8000 = 16\,ft^3$$

Entonces: $V(0) = 16$

$$16 = 4,8 + C \Rightarrow C = 16 - 4,8 \Rightarrow C = 11,2$$

$$V(t) = 4,8 + 11,2e^{-t/4}$$

Concentracoń en dos minutos:

$$V(2) = 4,8 + 11,2\,e^{-2/4}$$

$$\boxed{V = 11,59\,ft^3}$$

6. Determine el número n de particiones, por el método de trapecios,

$$\int_{0,1}^{2} f(x)\,dx.$$

Si se sabe que $f'(x) = -\frac{5}{4}\ln(2x^2+1)$ y se quiere aproximar con un error menor a 10^{-2}, hallar el valor de la integral haciendo uso del número de particiones hallado.

Solución:

En primer lugar se hallara el número de particiones partiendo de la primera derivada

$$f'(x) = -\frac{5}{4}\ln(2x^2+1)$$

$$f''(x) = -\frac{5}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}x}{2x^2+1}$$

$$= \frac{-5x}{2x^2+1}$$

$$f'''(x) = -5\cdot\frac{(2x^2+1)-(x)(4x)}{(2x^2+1)^2}$$

$$= -5\cdot\frac{2x^2+1-4x^2}{(2x^2+1)^2}$$

$$= -5\cdot\frac{-2x^2+1}{(2x^2+1)^2}$$

Puntos críticos en la segunda derivada.

$$f'''(x) = 0.$$

$$-5\cdot\frac{-2x^2+1}{(2x^2+1)^2} = 0$$

$$-2x^2+1 = 0.$$

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}} \longrightarrow \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Reemplazar en la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{-5x}{2x^2+1}$$

$$\bullet\ f''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{-5\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2+1} \qquad \bullet\ f''\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \frac{-5\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}{2\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2+1}$$

$$= \frac{\frac{-5}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{1}} \qquad = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{1}}$$

$$= -\frac{5}{2\sqrt{2}} \qquad = \frac{5}{2\sqrt{2}}$$

Cota Superior en el punto $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)$
(K)

Encontrar el número de particiones (n)

$$E_T \leq \left|\frac{K(b-a)^3}{12n^2}\right| \longrightarrow n \leq \frac{K(b-a)^3}{12E_T}$$

$$n \leq \frac{5}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{(2-0,1)^3}{12\times10^{-2}} = 101,093$$

$$n = 101 \text{ particiones.}$$

Con el número de particiones podemos hallar Δx

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-0,1}{101}$$

$$\Delta x = \frac{19}{1010}$$

Con la primera derivada podemos hallar la función y derivar.

$$F(x) = \int f'(x)\, dx.$$

$$F(x) = \int -\frac{5}{4} \ln(2x^2+1)\, dx$$

$$= -\frac{5}{4}\int \ln(2x^2+1)\, dx.$$

Integración por partes $\quad u \cdot v - \int v\, du$

$$u = \ln(2x^2+1) \qquad dv = dx$$

$$du = \frac{4x}{2x^2+1}\, dx \qquad v = x.$$

$$-\frac{5}{4}\left(x \cdot \ln(2x^2+1) - 4\int \frac{x^2}{2x^2+1}\, dx. \right)$$

Sostitución

$$u = 2x^2 \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}} u \longrightarrow u = \sqrt{2}\, x$$

$$-\frac{5}{4}\left(x \cdot \ln(2x^2+1) - 4\int \frac{u^2}{2\sqrt{2}\,(1+u^2)}\, du \right)$$

$$-\frac{5}{4}\left(x \ln(2x^2+1) - 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{u^2}{1+u^2}\, du \right)$$

$$-\frac{5}{4}\left(x \ln(2x^2+1) - \frac{2}{\sqrt{2}}\int -\frac{1}{1+u^2} + 1\, du \right)$$

$$-\frac{5}{4}\left(x \ln(2x^2+1) - \frac{2}{\sqrt{2}}\left(-tg^{-1}(u) + u \right) \right)$$ reemplazar

$$-\frac{5}{4}\left(x \ln(2x^2+1) - \sqrt{2}\left(-tg^{-1}(\sqrt{2}\,x) + \sqrt{2}\,x \right) \right) + C.$$

Integral a desarrollar. por método de trapecios

$$\int_{0,1}^{2} f(x)\, dx$$

$$\int_{0,1}^{2} -\frac{5}{4}\left(x\ln(1+x^2) - \sqrt{2}\left(-\tan^{-1}(\sqrt{2}x) + \sqrt{2}x\right)\right)$$

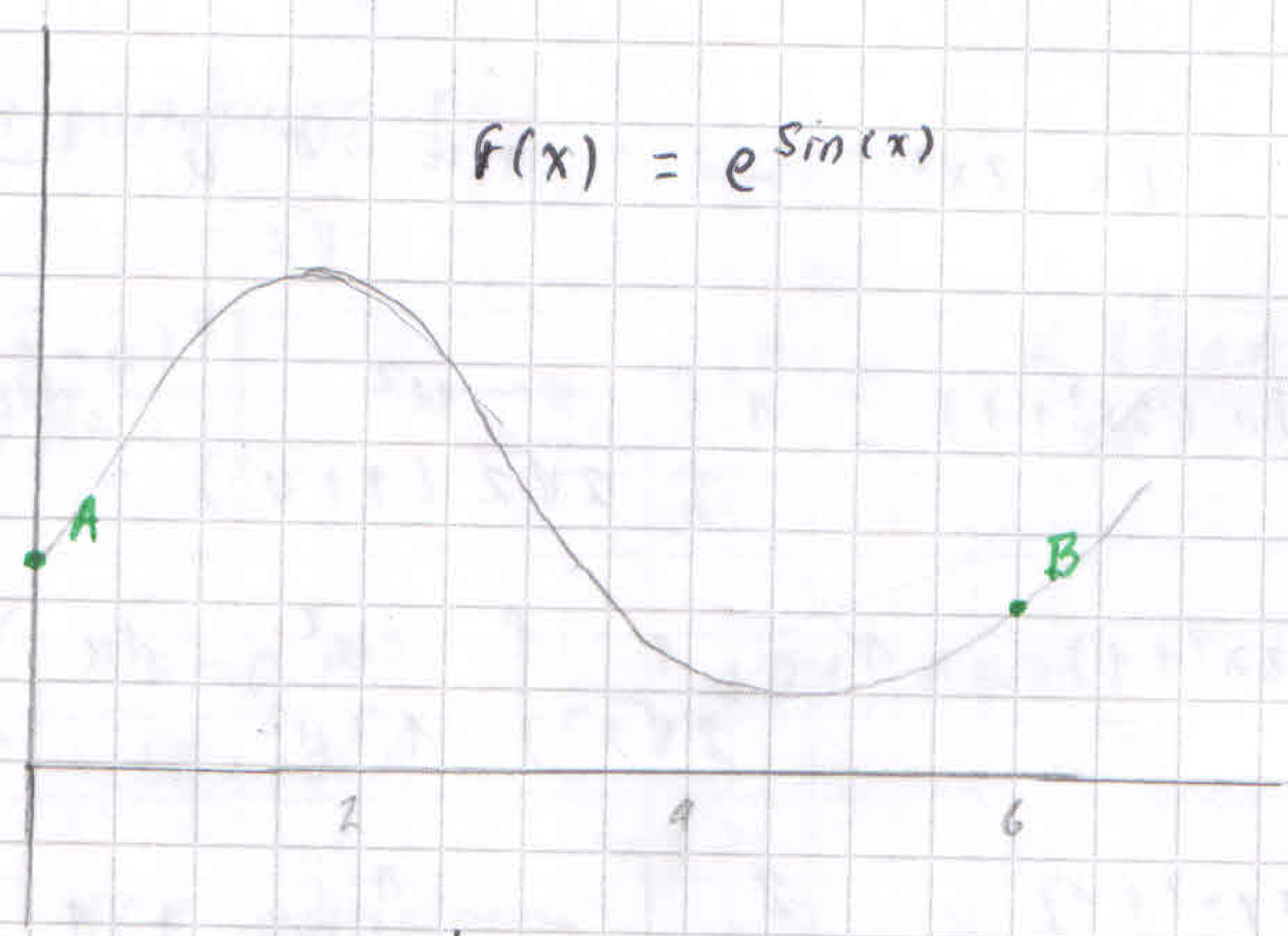
$$\approx \frac{19}{1000} \cdot \frac{1}{2}\left(f(x_0) + 2\left(\sum_{i=1}^{100} f(x_i)\right) + f(x_{101})\right)$$

$$\approx -1.658587\ldots$$

Ver tabla en Excel

Valor Teórico $= -1{,}65850676 9\ldots$

7.



Formula longitud de curva $= \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$

Calcular cuanto ha caminado por el borde de la montaña, haciendo uso de la regla de Simpson con número de particiones igual a 4 veces la longitud lineal de A hasta B.

$$f(x) = e^{\sin(x)}$$

$$f'(x) = e^{\sin(x)} \cdot \cos(x)$$

Intervalo de integración $[a, b] = [0, 6]$

Integral a resolver por la regla de Simpson:

$$\text{longitud recorrida} = \int_0^6 \sqrt{1 + (\cos(x)\, e^{\sin(x)})^2}\, dx$$

$$\text{con} \quad \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{6-0}{4(6)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$\approx \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]$$

$$\approx 7,8644606\ldots$$

Ver tabla en Excel

Valor Teorico $= 7,863700504\ldots$

8. Si un capacitor se mantiene no cargado, el voltaje alrededor de esté, se presenta como una función dada por:

$$V(t) = \frac{1}{c} \int_0^t i(s)\, ds$$

Se sabe que la corriente está dada por:

$$i(t) = (60-t)^2 + (60-t)\sin(\sqrt{t})$$

a. Determine el valor $i'''(t) = 0$, por uno de los métodos vistos en clase.

$$i(t) = (60-t)^2 + (60-t)\operatorname{Sin}\sqrt{t}$$

$$i'(t) = -2(60-t) - \operatorname{Sen}\sqrt{t} + \frac{(60-t)\cdot\operatorname{Cos}(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$$

$$i''(t) = 2 - \frac{\operatorname{Cos}(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(-\frac{\sin(\sqrt{t})(60-t)}{2\sqrt{t}} - \cos(\sqrt{t})\right)\sqrt{t} - \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t})(60-t)}{(\sqrt{x})^2}$$

$$= 2 - \frac{\operatorname{Cos}(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\left(\frac{t\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t}) - t\operatorname{Cos}(\sqrt{t}) - 60\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t}) - 60\operatorname{Cos}(\sqrt{t})}{2x\sqrt{x}}\right)$$

$$= 2 - \frac{\operatorname{Cos}(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} + \frac{t\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t}) - t\operatorname{Cos}(\sqrt{t}) - 60\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t}) - 60\operatorname{Cos}(\sqrt{t})}{4x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-3t\operatorname{Cos}(\sqrt{t}) + t\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t}) - 60\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t}) - \cos(\sqrt{t})}{4t\sqrt{t}} + 2$$

$$i'''(t) = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{-3t\operatorname{Cos}(\sqrt{t}) + t\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t}) - 60\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t}) - \operatorname{Cos}(\sqrt{t})}{t\sqrt{t}}\right) + 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(-3t\operatorname{Cos}(\sqrt{t}) + t\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t}) - 60\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t}) - \operatorname{Cos}(\sqrt{t})\right)$$

$$= -3\left(\operatorname{Cos}(\sqrt{t}) - \frac{\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t})}{2}\right) + \frac{x\operatorname{Cos}(\sqrt{t}) + 3\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t})}{2} + \frac{30\operatorname{Sin}(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$$

$$- 60\left(\frac{\operatorname{Sin}(\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} + \frac{\cos(\sqrt{t})}{2}\right)$$

$$= \frac{t\operatorname{Cos}(\sqrt{t}) + 6\sqrt{t}\operatorname{Sin}(\sqrt{t})}{2} - 33\operatorname{Cos}(\sqrt{t})$$

$$\frac{d}{dt}(t\sqrt{t}) = \frac{d}{dt} = t^{3/2}$$

$$= \frac{3}{2}t^{1/2} = \frac{3}{2}\sqrt{t}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{t\cos(\sqrt{t}) + 6\sqrt{t}\sin(\sqrt{t})}{2} - 33\cos\sqrt{t}\right)t\sqrt{t} - \frac{3\sqrt{t}}{2}\left(-3t\cos(\sqrt{t}) + t\sqrt{t}\sin(\sqrt{t}) - 60\sqrt{t}\sin(\sqrt{t}) - 60\cos(\sqrt{t})\right)}{(t\sqrt{t})^2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2\sqrt{t}\cos(\sqrt{t}) + 3t^2\sin(\sqrt{t}) + 180t\sin(\sqrt{t}) - 57t\sqrt{t}\cos(\sqrt{t}) + 180\sqrt{t}\cos(\sqrt{t})}{2t^3}$$

$$= \frac{t^{5/2}\cos(\sqrt{t}) + 3t^2\sin(\sqrt{t}) + 180t\sin(\sqrt{t}) - 57t^{3/2}\cos(\sqrt{t}) + 180\sqrt{t}\cos(\sqrt{t})}{8t^3}$$

$$f'''(t) = 0$$

$$\frac{t^{5/2}\cos(\sqrt{t}) + 3t^2\sin(\sqrt{t}) + 180t\sin(\sqrt{t}) - 57t^{3/2}\cos(\sqrt{t}) + 180\sqrt{t}\cos(\sqrt{t})}{8t^3} = 0$$

$$t^{5/2}\cos(\sqrt{t}) + 3t^2\sin(\sqrt{t}) + 180t\sin(\sqrt{t}) - 57t^{3/2}\cos(\sqrt{t}) + 180\sqrt{t}\cos(\sqrt{t}) = 0$$

$$\cos(\sqrt{t})(t^{5/2} - 57t^{3/2} + 180t^{1/2}) + \sin(\sqrt{t})(3t^2 + 180t) = 0$$

$$(\cos(\sqrt{t}) + \sin\sqrt{t})(t^{5/2} - 57t^{3/2} + 180t^{1/2} + \cancel{3t^2} + 180t) = 0$$

Cota Superior en (15.3 , 2,64907615)   Ver tabla en Excel.

b. Determine el número de particiones n por el método de trapecios para un tiempo de $t = 16$ min, con una aproximación menor a 10^{-2}.

Cota Superior(K) = 2,64907615.

$$E_T \leq \left|\frac{K(b-a)^3}{12n^2}\right| \longrightarrow n = \sqrt{\frac{K(b-a)^3}{12 \times E_T}}$$

$$n = \sqrt{\frac{2,64907615 \times (16-0)^3}{12 \times 1 \times 10^{-2}}} = 300,702177$$

$$n = 301$$

Scribe

9. Haga uso del método de trapecios para determinar el número n de particiones necesarias para el cálculo de la siguiente integral con un error de aproximación menor a 2×10^{-4}

$$\int_{0,3}^{1,1} \left(-\frac{1}{3} t^4 \ln(t) + \frac{7}{36} t^4 + \frac{1}{2} t^2\right) dt.$$

Debemos hallar la tercera derivada y los puntos críticos para después ser reemplazados en la segunda derivada para encontrar la cota superior (K)

$$f(x) = -\frac{1}{3} t^4 \ln(t) + \frac{7}{36} t^4 + \frac{1}{2} t^2$$

$$f'(t) = -\frac{1}{3}\left(4t^3 \ln(t) + \frac{t^4}{t}\right) + \frac{28}{36} t^3 + t$$

$$= -\frac{1}{3}\left(4t^3 \ln(t) + t^3\right) + \frac{7}{6} t^3 + t$$

$$= -\frac{4}{3} t^3 \ln(t) - \frac{t^3}{3} + \frac{7}{6} t^3 + t.$$

$$= -\frac{4}{3} t^3 \ln(t) + \frac{4}{9} t^3 + t.$$

$$f''(t) = -\frac{4}{3}\left(3t^2 \ln(t) + \frac{t^3}{t}\right) + \frac{4}{3} t^2 + 1.$$

$$= -4t^2 \ln(t) - \cancel{\frac{4}{3} t^2} + \cancel{\frac{4}{3} t^2} + 1$$

$$= -4t^2 \ln(t) + 1.$$

$$f'''(t) = -4\left(2t \ln(t) + \frac{t^2}{t}\right)$$

$$= -4(2t\ln(t) + t)$$

Hallamos los puntos criticos de la segunda derivada con $f'''(x) = 0$

$$f'''(x) = 0$$

$$-4(2t\ln(t)+t) = 0$$

$$2t\ln(t)+t = 0$$

$$t(2\ln(t)+1) = 0$$

$$t = 0 \qquad 2\ln(t)+1 = 0$$

$$2\ln(t) = -1$$

$$\ln(t) = -\frac{1}{2}$$

$$e^{\ln(t)} = e^{-1/2}$$

$$t = 0,6065306597$$

Reemplazar en la segunda derivada $f''(t) = 4t^2\ln(t)+1$

$$f''(t) = -4t^2\ln(t)+1$$

$$f''(e^{-1/2}) = -4(e^{-1/2})^2\ln(e^{-1/2})+1.$$

$$K = 1,735758882.$$

Con K podemos ya hallar el número de particiones con el error del metodo de trapecios

$$E_T \leq \left|\frac{K(b-a)^3}{12n^2}\right| \longrightarrow n = \sqrt{\frac{K(b-a)^3}{12 \cdot E_T}}$$

$$n = \sqrt{\frac{(1,7358)(1,1-0,3)^3}{12\times 2\times 10^{-4}}} = 19,24305662$$

$$n = 19.$$

Scribe

10. La cantidad de masa transportada por una tubería sobre un periodo de tiempo puede ser calculada por

$$M = \int_{t_1}^{t_2} Q(t)\, c(t)\, dt.$$

donde M = masa (mg), t_1 = tiempo inicial (min), t_2 = tiempo final (min),

$Q(t)$ = tasa de flujo (m^3/min) y $c(t)$ = concentración (mg/m^3)

La representación temporal de las variaciones de flujo y concentración están dadas por:

$$Q(t) = 9 + 4\cos^2(0.4t)$$

$$c(t) = 5e^{-0,5t} + 2e^{0,15t}.$$

Determine la masa transportada entre 2 y 8 minutos haciendo uso del método de Simpson con número de particiones igual a seis veces el promedio de tiempo que se transporta la masa.

Integral a desarrollar por el método de Simpson.

$$\int_{2}^{8} (9 + 4\cos^2(0,4t))(5e^{-0,5t} + 2e^{+0,15t})\, dt.$$

Número de particiones (n):

$$n = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{8+2}{2} = \frac{10}{2} = 5 \times 6 = 30.$$

Ya podemos encontrar el Δx.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{8-2}{30} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

tenemos un paso de $\frac{1}{5}$

Solución Integral por método de Simpson :

$$\approx \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \ldots + 2f(x_{28}) + 4f(x_{29}) + f(x_n) \right]$$

$$\approx 322,348345.$$

Ver Tabla en Excel.

Valor Teorico : 322, 3483673...

La Masa transportada entre 2 y 8 minutos es de 322, 348345.