

Tabla 5.6 Cambios de variable para linealizar los datos.

Función, $y = f(x)$	Linealización, $Y = Ax + B$	Cambios
$y = \frac{A}{x} + B$	$y = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}, Y = y$
$y = \frac{D}{x+C}$	$y = \frac{-1}{C}(xy) + \frac{D}{C}$	$X = xy, Y = y$
		$C = \frac{-1}{A}, D = \frac{-B}{A}$
$y = \frac{1}{Ax+B}$	$\frac{1}{y} = Ax + B$	$X = x, Y = \frac{1}{y}$
$y = \frac{x}{Ax+B}$	$\frac{1}{y} = A\frac{1}{x} + B$	$X = \frac{1}{x}, Y = \frac{1}{y}$
$y = A \ln(x) + B$	$y = A \ln(x) + B$	$X = \ln(x), Y = y$
$y = Ce^{Ax}$	$\ln(y) = Ax + \ln(C)$	$X = x, Y = \ln(y),$ $C = e^B$
$y = Cx^A$	$\ln(y) = A \ln(x) + \ln(C)$	$X = \ln(x), Y = \ln(y),$ $C = e^B$
$y = (Ax+B)^{-2}$	$y^{-1/2} = Ax + B$	$X = x, Y = y^{-1/2}$
$y = Cxe^{-Dx}$	$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = -Dx + \ln(C)$	$X = x, Y = \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ $C = e^B, D = -A$
$y = \frac{L}{1+Ce^{Ax}}$	$\ln\left(\frac{L}{y} - 1\right) = Ax + \ln(C)$	$X = x, Y = \ln\left(\frac{L}{y} - 1\right),$ $C = e^B$

matricial. La clave está en darse cuenta de que la matriz F y su traspuesta F' , que damos a continuación, juegan un papel fundamental:

$$F = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_M(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_M(x_2) \\ f_1(x_3) & f_2(x_3) & \cdots & f_M(x_3) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_N) & f_2(x_N) & \cdots & f_M(x_N) \end{bmatrix},$$

$$F' = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_M(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_M(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_N) & f_2(x_N) & \cdots & f_M(x_N) \end{bmatrix}$$

Consideremos el producto

$$(22) \quad F'Y = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_M(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_M(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_N) & f_2(x_N) & \cdots & f_M(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

El elemento de la i -ésima fila y j -ésimo de la matriz columna es el producto escalar de la i -ésima fila de la matriz columna F y el j -ésimo elemento del vector Y ; esto es,

$$(23) \quad \sum_{k=1}^N f_i(x_k) y_k$$

Ahora consideremos el producto

$$F'F =$$

$$\begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_M(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_M(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_N) & f_2(x_N) & \cdots & f_M(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_M(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_M(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_N) & f_2(x_N) & \cdots & f_M(x_N) \end{bmatrix}$$

El elemento que ocupa la i -ésima fila y j -ésimo de la matriz $F'F$ es el producto escalar de la i -ésima fila de la matriz columna F y el j -ésimo elemento del vector F ; esto es,

$$(24) \quad \sum_{k=1}^N f_i(x_k) f_j(x_k) = f_i \cdot f_j$$

Cuando M es pequeño, una forma de encontrar los coeficientes óptimos en mínimos cuadrados es calcular la matriz F , calcular $F'F$ y

$$(25) \quad F'FC = F'Y$$