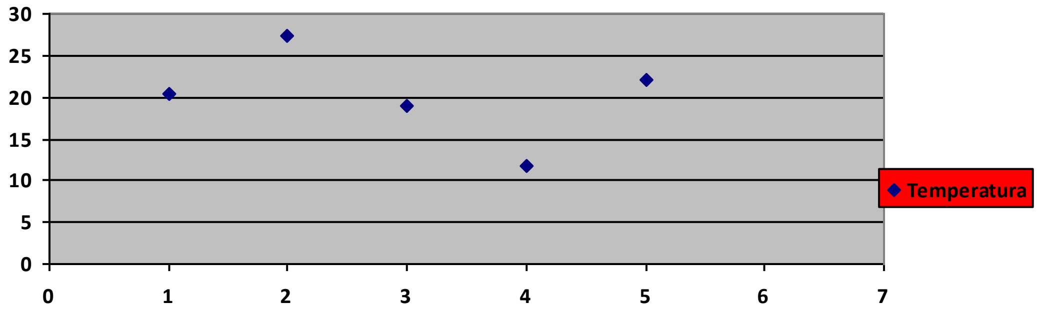
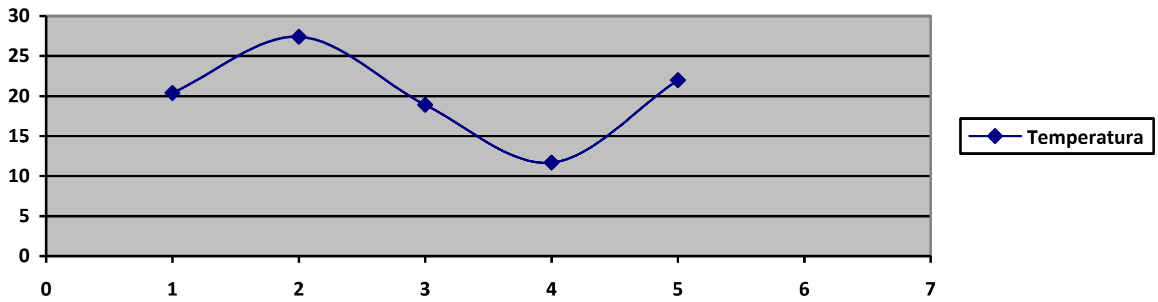
POLINOMIOS DE LAGRANGE

INTRODUCCIÓN

Todo fenómeno o experimento se produce como relación entre dos o más variables, lo cual permite recolectar datos de dicho fenómeno y modelarlo por medio de funciones continuas, con el fin de aproximar algunos datos no extraídos del problema. Este proceso es conocido como interpolación.



En el gráfico, se tiene un muestreo de temperatura con respecto al tiempo, tomando el tiempo pos semanas.



En este gráfico se presenta la misma tabla de datos, pero se ha trazado una curva de interpolación, por medio de un polinomio

$$F(x) = a_0(x - x_1) + a_1(x - x_0) \rightarrow Polinomio\ lineal\ (1)$$

$$F(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) + a_1(x - x_0)(x - x_2) + a_2(x - x_0)(x - x_1)\ \ (2)$$

$$F(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + a_1(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3) + a_2(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ \ (3)$$

Se toman tantos factores como grados del polinomio

$$Fn(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

$x_i \; x_0 \ldots x_n$

$y_i \; y_0 \ldots y_n$

“Grado 1”

$x = x_0$ $\qquad\qquad$ $x = x_1$

$y_0 = a_0(x_0 - x_1)$ $\qquad\qquad$ $y_1 = a_0(x_0 - x_1) + a_1(x_1 - x_0)$

$a_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)}$ $\qquad\qquad$ $a_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)}$

En (1)

$L_0(x)$ $\qquad\qquad$ $L_1(x)$

$$F(x) = y_0\left[\frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}\right] + y_1\left[\frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}\right]$$

$$F(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x)$$

En (2)

$$F(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

En (n)

$$F(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad i \neq j$$

MINIMOS CUADRADOS

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
x_1	y_1	x_1^2	x_1y_1
x_2	y_2	x_2^2	x_2y_2
x_3	y_3	x_3^2	x_2y_2
. . .	. . .	. . .	. . .
x_n	y_n	x_n^2	x_ny_n
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$	$\sum_{i=1}^{n} x_iy_i$

Construir una función lineal que minimice el error de aproximación

$F(x) = a_2 + a_1x,$

Se toma la distancia entre la función de aproximación el punto *y_i*, así:

$d_1^2 = |a_0 + a_1x_1 - y_1|^2$

$d_2^2 = |a_0 + a_1x_2 - y_2|^2$

.

.

.

$d_n^2 = |a_0 + a_1x_n - y_n|^2$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2$$

$\sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1x_i - y_i)^2$=0 (0)

$\frac{\delta}{\delta a_0}\sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1x_i - y_i)^2$=0

$\sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1x_i - y_i)^2$=0

$$\sum_{i=1}^{n} a_0 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \quad (1)$$

$$na_0 + a_1\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$\frac{\delta}{\delta a_1}\sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1x_i - y_i)^2$=0

$$2\sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1x_i - y_i)x_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_0 x_i + a_1 x_i^2 - y_i x_i = 0$$

$$a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (2)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix} \cdots |B| = \begin{vmatrix} \sum y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix} \cdots |C| = \begin{vmatrix} n & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum x_i y_i \end{vmatrix}$$

$$a_0 = \frac{|B|}{|A|} \qquad\qquad a_1 = \frac{|C|}{|A|}$$

Ejercicio:

1. **Generalizar las ecuaciones de mínimos cuadrados para realizar interpolaciones de polinomios de orden superior.**
2. Se sabe que una estructura recién construida, se hunde en el suelo, la profundidad con que se está hundiendo está representada ecuación; $y = 3 - e^{-ax}$ donde **x** es el número de meses que lleva contraída la estructura.

Se toman los siguientes datos:

X_i	Y_i
2	1,07
4	1,88
6	2,26
12	2,78
18	2,97
24	2,99

Estime el valor de A utilizando mínimos cuadrados.

Solución:

$$y = 3 - 3e^{-ax} \Rightarrow y - 3 = -3e^{-ax}$$

$$3 - y = 3e^{-ax} \Rightarrow \ln(3 - y) = \ln 3 - a_1 x$$

Entonces:

$$y_1 = 3 - 1{,}07 = 1{,}93 \Rightarrow \ln(1{,}93) = 0{,}657$$
$$y_2 = 3 - 1{,}88 = 1{,}12 \Rightarrow \ln(1{,}12) = 0{,}1133$$
$$y_3 = 3 - 2{,}26 = 0{,}74 \Rightarrow \ln(0{,}74) = -0{,}301$$
$$y_4 = 3 - 2{,}78 = 0{,}22 \Rightarrow \ln(0{,}22) = -1{,}514$$
$$y_5 = 3 - 2{,}97 = 0{,}03 \Rightarrow \ln(0{,}03) = -3{,}506$$
$$y_6 = 3 - 2{,}99 = 0{,}01 \Rightarrow \ln(0{,}01) = -4{,}605$$

La tabla con los nuevos valores en **y** queda:

X_i	Y_i	X_i^2	X_iY_i
2	0,657	4	1,314
4	0,113	16	0,452
6	-0,301	36	-1,806
12	-1,514	144	-18,168
18	-3,506	324	-63,108
24	-4,605	576	-110,52

De la tabla anterior, tenemos que:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 1100 \qquad \sum_{i=1}^{n} X_i = 66$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_iY_i = -191{,}835 \qquad \sum_{i=1}^{n} Y_i = -9{,}155$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 66 \\ 66 & 1100 \end{vmatrix} = 2244 \qquad |B| = \begin{vmatrix} -9{,}155 & 66 \\ -191{,}835 & 1100 \end{vmatrix} = 2590{,}61$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 6 & -9{,}155 \\ 66 & -191{,}385 \end{vmatrix} = -546{,}78$$

$$a_0 = \frac{|B|}{|A|} = \frac{2590{,}61}{2244} = 1{,}154$$

$$a_1 = \frac{|C|}{|A|} = \frac{-546{,}78}{2244} = -0{,}243$$

$f(x) = a_0 + a_1 x$

$f(x) = 1{,}154 - 546{,}78x$

Para polinomios de grados mayores a uno, tenemos:

- Grado dos:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$na_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 = \sum y_i \qquad (1)$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum x_i y_i \qquad (2)$$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 = \sum x_i^2 y_i \qquad (3)$$

- Grado tres:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

$$na_0 + a_1 \sum x_i + a_2 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 = \sum y_i \qquad (1)$$

$$a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + a_2 \sum x_i^3 + a_3 \sum x_i^4 = \sum x_i y_i \qquad (2)$$

$$a_0 \sum x_i^2 + a_1 \sum x_i^3 + a_2 \sum x_i^4 + a_3 \sum x_i^5 = \sum x_i^2 y_i \qquad (3)$$

$$a_0 \sum x_i^3 + a_1 \sum x_i^4 + a_2 \sum x_i^5 + a_3 \sum x_i^6 = \sum x_i^3 y_i \qquad (4)$$

Dependiendo del grado del polinomio, se construye un sistema de nxn, el cual se soluciona por regla de Cramer, Jauss Jordan, o la inversa de una matriz.