Diseño de Filtros Digitales

Nelson F. Velasco Toledo
Docente T.C.

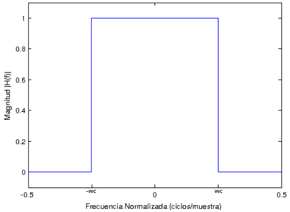
Universidad Militar Nueva Granda
Facultad de Ingeniería
Ingeniería Mecatrónica
Procesamiento Digital de Señales

Outline

1. Introducción
2. Diseño de Filtros FIR
   - Generalidades
   - Métodos de diseño
3. Diseño de Filtros IIR
   - Generalidades
   - Métodos de diseño

El filtro ideal

- Magnitud:
  $$| H(\omega) |= \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < \omega \leq \pi \end{cases}$$
  ω_c: frecuencia de corte
- Fase (comportamiento lineal):
  $\Theta(\omega) = -\omega n_0 \Rightarrow \frac{d\Theta(\omega)}{d\omega} = n_0 = Cte.$



Pasa bajo ideal

Outline

Filtro FIR

- Ecuación en diferencias (Implementación)

$$
\begin{aligned}
y(n) &= b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \ldots + b_{M-1} x(n-M+1) \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} b_k x(n-k)
\end{aligned}
$$

- Función de transferencia

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \sum_{k=0}^{M-1} b_k z^{-k} \\
&= \sum_{k=0}^{M-1} h(k) z^{-k}
\end{aligned}
$$

Simetría y fase lineal

Un filtro FIR tiene fase lineal si:

$$h(n) = \pm h(M-1-n), \quad n = 0, 1, \ldots, M-1$$

Método de enventanado

Se busca la respuesta impulsional $h(n)$ truncando $h_d(n)$ en algun punto

$$h(n) = h_d(n)w(n)$$

$w(n)$ es una ventana.
En matlab se usa la función fir1(...)

Método de muestreo en frecuencia

Se plantea $H_d(n)$ y se muestrea en lugares equiespaciados $\omega_k = \frac{2\pi}{M}(k + \alpha)$.

Se resuelve para obtener $h(n)$.

En Matlab se us la función fir2(...)

Fase lineal con rizado constante

- Aproximación de Chevisev.
- Criterio de diseño óptimo.
- Rizados en banda pasante y banda rechazada

En Matlab se usa la función remez(...), o aun mejor firpm(...)

Ejemplo

Diseñar un filtro digital FIR de fse lineal:

- señal de prueba: $(n = 0, 1, 2, \ldots, 511)$
  $x(n) = sen(2\pi\frac{1}{4}n) + sen(2\pi\frac{1}{8}n) + sen(2\pi\frac{1}{32}n) + sen(2\pi\frac{1}{128}n)$
- Obtener espectro de frecuencia (FFT).
- Realizar el filtro pasabajos $\omega_c = \frac{1}{32}$ (los 3 métodos).
- Filtrar la señal y obtener el espectro de frecuencia.
- Comparar con el original.

Outline

Filtros IIR

- Ecuación en diferencias (Implementación)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

- Función de transferencia

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Filtros IIR

- Ecuación en diferencias (Implementación)

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$$

- Función de transferencia

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum\limits_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

A partir de filtros análogos

- $$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$
- $$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k s^k}$$
- $$H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k s^k} \implies \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

A partir de filtros análogos

- $\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$
- $H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k s^k}$
- $H_a(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k s^k} \implies \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$

A partir de filtros análogos

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$
- $H_a(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)} = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k s^k}$
- $H_a(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)} = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} \beta_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} \alpha_k s^k} \Longrightarrow \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$

Requisitos

- El eje $j\Omega$ del plano s debe corresponder con la circunferencia unitaria del plano z. (Correspondencia entre las variables de frecuencia).
- El semiplano izquierdo del plano s debe corresponderse con el interior de la circunferencia unidad en el plano z. (Filtro análogo estable $\Longrightarrow$ filtro digital estable).

Métodos de diseño

- Aproximación de derivadas.
- Invarianza al impulso.
- Transformación bilineal.

Aproximación de derivadas (I)

- Método más sencillo.
- Aproximar una eq. diferencial por medio de una eq. en diferencias.
- Frecuentemente utilizado para resolver numericamente las eq. diferenciales.

Aproximación de derivadas (II)

- $$\frac{dy(t)}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \text{ Además, } \frac{d}{dt} \stackrel{L}{\Longleftrightarrow} s$$
- $$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT} = \frac{y(nT)-y(nT-T)}{T} = \frac{y(n)-y(n-1)}{T}$$
- Aplicando Tda. Z

$$\frac{y(n)-y(n-1)}{T} \stackrel{z}{\Longrightarrow} \frac{1-z^{-1}}{T}$$

Aproximación de derivadas (II)

- $$\frac{dy(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \text{ Además, } \frac{d}{dt} \overset{L}{\Longleftrightarrow} s$$
- $$\begin{aligned} \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT} &= \frac{y(nT) - y(nT - T)}{T} \\ &= \frac{y(n) - y(n-1)}{T} \end{aligned}$$
- Aplicando Tda. Z
$$\frac{y(n) - y(n-1)}{T} \overset{Z}{\Longrightarrow} \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

Aproximación de derivadas (II)

- $$\frac{dy(t)}{dt} = \lim_{h\to 0} \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \text{ Además, } \frac{d}{dt} \stackrel{L}{\Longleftrightarrow} s$$

- $$\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=nT} = \frac{y(nT)-y(nT-T)}{T} = \frac{y(n)-y(n-1)}{T}$$

- Aplicando Tda. Z

$$\frac{y(n)-y(n-1)}{T} \stackrel{z}{\Longrightarrow} \frac{1-z^{-1}}{T}$$

Aproximación de derivadas (III)

De lo anterior se tendría que:

$$s \approx \frac{1 - z^{-1}}{T}$$

$$s^k \approx \left(\frac{1 - z^{-1}}{T}\right)^k$$

Verificación de correspondencias

- Despejando z

$$z = \frac{1}{1 - sT}$$

- Sustituyendo $s = j\Omega$

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1 - j\Omega T} \\ &= \frac{1}{1 + \Omega^2 T^2} + j\frac{\Omega T}{1 + \Omega^2 T^2} \end{aligned}$$

Verificación de correspondencias

- Despejando z

$$z = \frac{1}{1 - sT}$$

- Sustituyendo $s = j\Omega$

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{1 - j\Omega T} \\ &= \frac{1}{1 + \Omega^2 T^2} + j\frac{\Omega T}{1 + \Omega^2 T^2} \end{aligned}$$

Verificación de correspondencias

$$z = \frac{1}{1+\Omega^2 T^2} + j\frac{\Omega T}{1+\Omega^2 T^2}$$

- Si $\Omega = 0$, $z = 1$
- Si $\Omega \to \infty$, $z \to 0$

Verificación de correspondencias

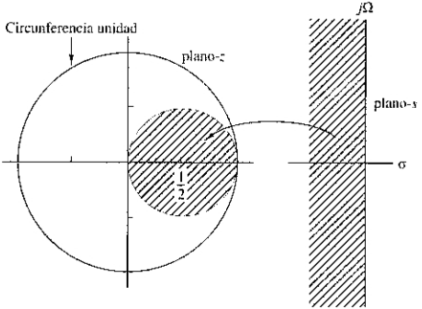
$$z = \frac{1}{1+\Omega^2 T^2} + j\frac{\Omega T}{1+\Omega^2 T^2}$$

- Si $\Omega = 0$, $z = 1$
- Si $\Omega \rightarrow \infty$, $z \rightarrow 0$

Verificación de correspondencias

$$z = \frac{1}{1+\Omega^2 T^2} + j\frac{\Omega T}{1+\Omega^2 T^2}$$

- Si $\Omega = 0$, $z = 1$
- Si $\Omega \to \infty$, $z \to 0$



Invarianza al impulso (I)

Objetivo del método

Diseñar un filtro digital cuya respuesta al impulso $h(n)$ sea la versión muestreada del filtro análogo

$$h(n) \equiv h_a(nT)$$

donde T es el periodo de muestreo

Invarianza al impulso (II)

Tda. Laplace

- $H(s) = \int_{0}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$

Tda. Z

- $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}$

Invarianza al impulso (II)

Tda. Laplace

- $H(s) = \int_{0}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$

Tda. Z

- $H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n)z^{-n}$

Aplicando muestreo a la definición de la Tda. de Laplace

$$e^{-st} \rightarrow e^{-snT} \rightarrow (e^{sT})^{-n}$$

Se prodría decir que:

$$z \approx e^{sT}$$

Invarianza al impulso (III)

Teniendo en cuenta que:

$$s = \sigma + j\Omega \qquad \text{y} \qquad z = re^{j\omega}$$

$$z \approx e^{sT}$$

$$re^{j\omega} \approx e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

Entonces...

$$r = e^{\sigma T}$$

$$\omega = \Omega T$$

Invarianza al impulso (III)

Teniendo en cuenta que:

$$s = \sigma + j\Omega \qquad \text{y} \qquad z = re^{j\omega}$$

$$z \approx e^{sT}$$

$$re^{j\omega} \approx e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

Entonces...

$$r = e^{\sigma T}$$

$$\omega = \Omega T$$

Invarianza al impulso (III)

Teniendo en cuenta que:

$$s = \sigma + j\Omega \qquad \text{y} \qquad z = re^{j\omega}$$

$$z \approx e^{sT}$$

$$re^{j\omega} \approx e^{\sigma T} e^{j\Omega T}$$

Entonces...

$$r = e^{\sigma T}$$

$$\omega = \Omega T$$

Verificación de correspondencias

Condiciones

$$r = e^{\sigma T} \qquad \omega = \Omega T$$

$$\sigma < 0 \Rightarrow 0 < r < 1, \quad \sigma > 0 \Rightarrow r > 1 \quad \text{y} \quad \sigma = 0 \Rightarrow r = 1$$

Existe correspondencia entre semiplano izquierdo y el interior de la circunferencia

Verificación de correspondencias

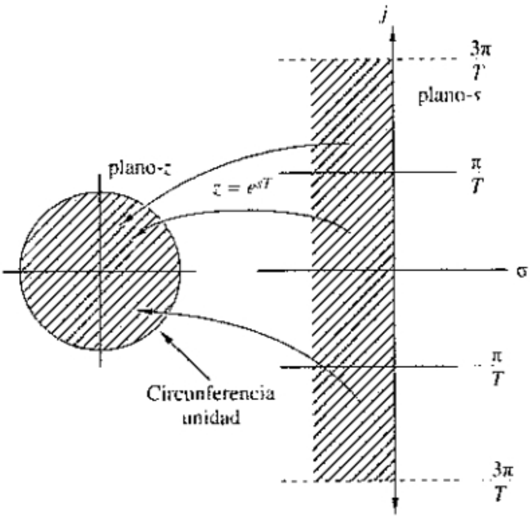
Condiciones

$$r = e^{\sigma T} \qquad \omega = \Omega T$$

$$-\frac{\pi}{T} \leq \Omega \leq \frac{\pi}{T} \qquad \text{se corresponde con} \qquad -\pi \leq \omega \leq \pi$$

Esta correspondencia refleja los efectos del aliasing

Verificación de correspondencias



Uso del método

Dada una Función de transferencia en s

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{s-p_k} \overset{L^{-1}}{\Longrightarrow} h_a(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k t}$$

Aplicando muestreo, se tiene que

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k Tn}$$

Uso del método

Dada una Función de transferencia en s

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{s-p_k} \xrightarrow{L^{-1}} h_a(t) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k t}$$

Aplicando muestreo, se tiene que

$$h(n) = h_a(nT) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k Tn}$$

Uso del Método

Aplicando la transformada z

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

Uso del Método

Aplicando la transformada z

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} c_k e^{p_k Tn} \right) z^{-n}$$

Uso del Método

Aplicando la transformada z

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{p_k T} z^{-1}\right)^n$$

Uso del Método

Aplicando la transformada z

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{p_k T} z^{-1}\right)^n$$

Resolviendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{p_k T} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

Uso del Método

Aplicando la transformada z

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} c_k \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{p_k T} z^{-1}\right)^n$$

y reemplazando, se llega a:

$$H(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{c_k}{1 - e^{p_k T} z^{-1}}$$

Transformación bilineal (I)

- Supera las limitaciones de los métodos anteriores.
- Correspondencia del eje $j\Omega$ con la circunferencia unitaria.
- Evita el efecto de aliasing.

Transformación bilineal (I)

- Supera las limitaciones de los métodos anteriores.
- Correspondencia del eje $j\Omega$ con la circunferencia unitaria.
- Evita el efecto de aliasing.

Transformación bilineal (I)

- Supera las limitaciones de los métodos anteriores.
- Correspondencia del eje $j\Omega$ con la circunferencia unitaria.
- Evita el efecto de aliasing.

Transformación bilineal (II)

Considere un filtro de la forma:

$$H(s) = \frac{b}{s+a} \stackrel{L}{\Longleftarrow} \frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

Mediante la aproximación de la integral por la fórmula trapezoidal...

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau)d\tau + y(t_0)$$

Discretizando y reemplazando $t = nT$ y $t_0 = nT - T$

$$y(nT) = \frac{T}{2}\left[y'(nT) + y'(nT - T)\right] + y(nT - T) \qquad (1)$$

Transformación bilineal (II)

Considere un filtro de la forma:

$$H(s) = \frac{b}{s+a} \stackrel{L}{\Longleftarrow} \frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

Mediante la aproximación de la integral por la fórmula trapezoidal...

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau)d\tau + y(t_0)$$

Discretizando y reemplazando $t = nT$ y $t_0 = nT - T$

$$y(nT) = \frac{T}{2}\left[y'(nT) + y'(nT-T)\right] + y(nT-T) \qquad (1)$$

Transformación bilineal (II)

Considere un filtro de la forma:

$$H(s) = \frac{b}{s+a} \overset{L}{\Longleftarrow} \frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

Mediante la aproximación de la integral por la fórmula trapezoidal...

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau)d\tau + y(t_0)$$

Discretizando y reemplazando $t = nT$ y $t_0 = nT - T$

$$y(nT) = \frac{T}{2}\left[y'(nT) + y'(nT - T)\right] + y(nT - T) \qquad (1)$$

Transformación bilineal (II)

Considere un filtro de la forma:

$$H(s) = \frac{b}{s+a} \stackrel{L}{\Longleftarrow} \frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

Mediante la aproximación de la integral por la fórmula trapezoidal...

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(\tau)d\tau + y(t_0)$$

Discretizando y reemplazando $t = nT$ y $t_0 = nT - T$

$$y(nT) = \frac{T}{2}\left[y'(nT) + y'(nT - T)\right] + y(nT - T) \qquad (1)$$

Transformación bilineal (III)

La ecuación diferencial $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$ evaluada en $t = nT$ resulta en

$$y'(nT) = -ay(nT) + bx(nT)$$

y sustituyendo en (1), se obtiene

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right) y(n) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right) y(n-1) = \frac{bT}{2}\left[x(n) + x(n-1)\right] \tag{2}$$

Transformación bilineal (III)

La ecuación diferencial $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$ evaluada en $t = nT$ resulta en

$$y'(nT) = -ay(nT) + bx(nT)$$

y sustituyendo en (1), se obtiene

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right) y(n) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right) y(n-1) = \frac{bT}{2}\left[x(n) + x(n-1)\right] \tag{2}$$

Transformación bilineal (III)

La ecuación diferencial $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$ evaluada en $t = nT$ resulta en

$$y'(nT) = -ay(nT) + bx(nT)$$

y sustituyendo en (1), se obtiene

$$\left(1 + \frac{aT}{2}\right) y(n) - \left(1 - \frac{aT}{2}\right) y(n-1) = \frac{bT}{2}\left[x(n) + x(n-1)\right] \tag{2}$$

Transformación bilineal (IV)

Si en (2) se aplica transformada z y algo de algebra se obtiene:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{bT}{2}(1+z^{-1})}{1+\frac{aT}{2}-\left(1-\frac{aT}{2}\right)z^{-1}} = \frac{b}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a}$$

Por lo tanto

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Transformación bilineal (IV)

Si en (2) se aplica transformada z y algo de algebra se obtiene:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{bT}{2}(1+z^{-1})}{1+\frac{aT}{2}-\left(1-\frac{aT}{2}\right)z^{-1}} = \frac{b}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a}$$

Por lo tanto

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Transformación bilineal (IV)

Si en (2) se aplica transformada z y algo de algebra se obtiene:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{bT}{2}(1+z^{-1})}{1+\frac{aT}{2}-\left(1-\frac{aT}{2}\right)z^{-1}} = \frac{b}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)+a}$$

Por lo tanto

$$s = \frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Verificación de correspondencias

Teniendo en cuenta que:

$$s = \sigma + j\Omega \qquad \text{y} \qquad z = re^{j\omega}$$

Verificación de correspondencias

Teniendo en cuenta que:

$$s = \sigma + j\Omega \qquad \text{y} \qquad z = re^{j\omega}$$

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \\ &= \frac{2}{T}\left(\frac{re^{j\omega}-1}{re^{j\omega}+1}\right) \\ &= \frac{2}{T}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} + j\frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega}\right) \end{aligned}$$

Verificación de correspondencias

Teniendo en cuenta que:

$$s = \sigma + j\Omega \qquad \text{y} \qquad z = re^{j\omega}$$

$$\sigma = \frac{2}{T}\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} \qquad \text{y} \qquad \Omega = \frac{2}{T}\frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega}$$

Verificación de correspondencias

Teniendo en cuenta que:

$$s = \sigma + j\Omega \qquad \text{y} \qquad z = re^{j\omega}$$

$$\sigma = \frac{2}{T}\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} \qquad \text{y} \qquad \Omega = \frac{2}{T}\frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega}$$

Si $r < 1 \;\Rightarrow \sigma < 0$ y si $r > 1 \;\Rightarrow \sigma > 0$, por lo tanto el semiplano izquierdo se corresponde con el inerior de la circunferencia unitaria y el derecho con el exterior.

Verificación de correspondencias

Teniendo en cuenta que:

$$s = \sigma + j\Omega \qquad \text{y} \qquad z = re^{j\omega}$$

$$\sigma = \frac{2}{T}\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\omega} \qquad \text{y} \qquad \Omega = \frac{2}{T}\frac{2r\sin\omega}{1+r^2+2r\cos\omega}$$

Si $r = 1 \Rightarrow \sigma = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{2}{T}\frac{\sin\omega}{1+\cos\omega} \\ &= \frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2} \Rightarrow \omega = 2\tan^{-1}\frac{\Omega T}{2}\end{aligned}$$

Verificación de correspondencias