

Control de la posición de una masa usando compensadores

Enemoción Paula, Telléz Santiago
{1803151 1803214}@unimilitar.edu.co

Profesor: Adriana Riveros

Resumen—En esta práctica se desea hacer un control para la posición lineal de una masa utilizando compensadores tanto por diagrama de Bode como por lugar geométrico de las raíces y se requiere un error en estado estable para entrada escalón y rampa.

Palabras clave—Compensadores, Bode, controlador, lugar geométrico de las raíces.

I. INTRODUCCIÓN

Los compensadores son un método de control para sistemas mecatrónicos, que consisten en modificar los polos y ceros de forma que el sistema se estabilice en los diseños deseados. Existen dos tipos de métodos para diseñar los compensadores diagrama de Bode y lugar geométrico de las raíces.

En este laboratorio se diseña por ambos métodos para entrada escalón y rampa y así poder controlar la posición lineal de la masa.

II. MARCO TEÓRICO

Compensadores

Son aquellos sistemas en los cuales las especificaciones tienen que ver con la respuesta en frecuencia o con la estabilidad relativa se pueden utilizar compensadores, que mediante la incorporación de polos y ceros en el lazo de control, permiten aproximar al sistema a uno que cumpla con las especificaciones solicitadas. Existen técnicas originalmente aplicables a sistemas continuos cuya implementación se puede realizar en forma digital. El procedimiento se aplica considerando la planta discreta y realizando la transformación bilineal del mismo para llevarlo a un plano con condiciones similares a la de los sistemas continuos.

Lugar geométrico de las raíces

El diseño por el método del lugar de las raíces se basa en dar forma al lugar de las raíces del sistema agregando polos y ceros al circuito abierto del sistema función de transferencia y obligando a los lugares de las raíces a pasar a través de los polos de bucle cerrado deseados en el plano s . La característica del diseño del lugar de las raíces es que se basa en el supuesto de que el sistema de circuito cerrado tiene un par de polos de circuito cerrado dominantes, de ceros y polos

adicionales no afectan mucho las características de respuesta. [1].

Bode

Un diagrama de Bode consta de dos gráficos, uno es un diagrama del logaritmo de la magnitud de la función de transferencia sinusoidal, el otro es un diagrama del ángulo de fase, ambos se representan contra la frecuencia en una escala logarítmica. [1].

III. TRABAJO PREVIO

¿Cómo es el diseño de compensadores mediante BODE (redes de atraso, adelanto y combinación de ellas)?

¿Cómo es el diseño de compensadores mediante Lugar geométrico de las raíces (redes de atraso, adelanto y combinación de ellas)?

¿Cómo se puede relacionar el margen de ganancia M_G y de fase M_ϕ con los coeficientes temporales (t_s y ζ) propios de una respuesta de un sistema de segundo orden?

IV. DESARROLLO DE LA PRACTICA

IV-A. Modelado de sistemas (diagramas y cálculos):

Se realiza el modelo matemático que representa el comportamiento del sistema mostrado en la Figura 1, su respectiva representación lineal y el espacio de estados para así hallar su función de transferencia.

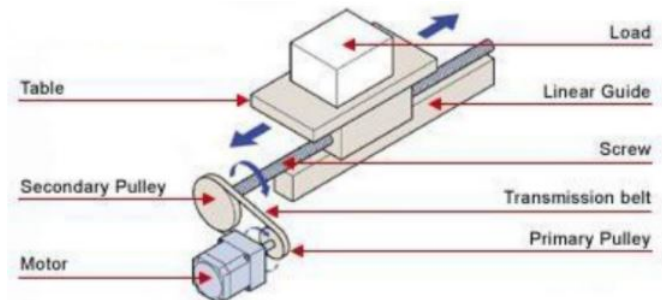


Figura 1. Sistema husillo de avance + motor DC.

Relación de poleas, la velocidad angular de ambas poleas debe ser igual para que giren simultáneamente por lo tanto.

$$w_1 R_1 = w_2 R_2$$

Se despeja la velocidad angular de la polea a la que le entra el voltaje del motor.

$$w_1 = \frac{w_2 R_2}{R_1} \quad (1)$$

Para relacionar la posición es necesario integrar la Ecuación 1 y dejarla expresada en términos de posición angular.

$$\int w_1 = \int \frac{w_2 R_2}{R_1}$$

$$\theta_1 = \frac{\theta_2 R_2}{R_1} \quad (2)$$

Posición lineal de la caja (tornillo sin fin), se despeja la posición angular de la polea relacionada al tornillo.

$$X = \frac{P \theta_2}{2\pi}$$

$$\theta_2 = \frac{2\pi X}{P} \quad (3)$$

Con la Ecuación 3 en términos de la posición angular se hace el respectivo reemplazo en la Ecuación. 2

$$\theta_1 = \frac{2\pi X R_2}{R_1 P}$$

Se deja en términos de salida sobre entrada y se le hace transformada de Laplace.

$$\frac{X(s)}{\theta_1(s)} = \frac{R_1 P}{2\pi R_2}$$

Se sabe que el modelo de un motor DC es

$$\frac{\theta_1(s)}{V(s)} = \frac{k}{s(\tau s + 1)}$$

$$\frac{X(s)}{\theta_1(s)} * \frac{\theta_1(s)}{V(s)} = \frac{X(s)}{V(s)}$$

La función de transferencia del sistema es

$$\frac{X(s)}{V(s)} = \frac{k * (R_1 * P)}{(s^2 \tau + s)(2\pi R_2)}$$

Función de transferencia

Se buscan poleas comerciales y diámetros de paso para el tornillo sin fin y se obtiene estas constantes $R_1=16\text{mm}$, $R_2=31.83\text{mm}$, $P=8\text{mm}$, $k=34.9$, $\tau=0.0698$.

$$G(s) = \frac{0,3345}{s(s + 14,33)} \quad (4)$$

IV-B. Lugar geométrico de las raíces

Con la función de transferencia obtenida en la ecuación 4 se diseña un compensador. La planta del sistema es tipo 1, para lograr un error en estado estable de cero para entrada rampa se multiplica por un integrador.

$$G(s) = \frac{0,3345}{s^2(s + 14,33)} \quad (5)$$

Polinomio deseado

Para hallar el polinomio deseado se tienen en cuenta los parámetros dados $e_{ss}=0$, $\zeta=0.8$ y $T_s = 90\%$ del tiempo

en lazo abierto, sin embargo la función de transferencia es inestable y se asume un tiempo de establecimiento de 5s.

$$P_d = s^2 + 1,6s + 1 \quad (6)$$

Se obtiene las raíces del polinomio de la ecuación 6 y se toma el valor del imaginario positivo.

$$S_{1,2} = -0,8 \pm 0,6i$$

Una vez obtenida la raíz se reemplaza en la ecuación 5, con el fin de obtener el ángulo a compensar.

$$G(s) = \frac{0,3345}{(-0,8 + 0,6i)^3 + (-0,8 + 0,6i)^2}$$

$$G(s) = 0,0079 + 0,0234i$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{0,0234}{0,0079}\right) = 71,2$$

$$\phi = 180 - 71,02 = 108,79$$

El ángulo a compensar debe ser menor a 60° , para este caso se realizan dos compensadores cada uno debe compensar un ángulo de $\alpha=54,33^\circ$.

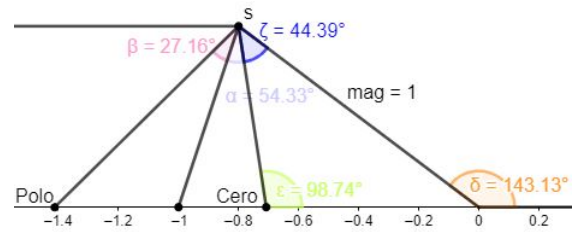


Figura 2. Lugar geométrico de las raíces.

Para hallar los ángulos de la imagen 2 se realizan las siguientes operaciones:

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{0,6}{-0,8}\right) = 143,13$$

$$\theta = 180 - 143,13 = 36,87$$

$$mag = |-0,8 + 0,6i| = 1$$

$$\zeta = \frac{143,13}{2} - \frac{54,33}{2} = 44,39$$

$$\varepsilon = 180 - 44,39 - 36,87 = 98,74$$

Teorema del seno

$$\frac{\sin(98,74)}{1} = \frac{\sin(44,39)}{\text{Cero}}$$

$$\text{Cero} = 0,7078$$

$$\frac{\sin(44,39)}{1} = \frac{\sin(98,74)}{\text{Polo}}$$

$$\text{Polo} = 1,4126$$

Compensador adelante

Una vez obtenidos los ceros y polos del compensador se calcula T y α para realizar el montaje físico del compensador.

$$G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}$$

$$T = \frac{1}{0,7078} = 1,4128$$

$$\alpha = \frac{1}{(1,4128)(1,4126)} = 0,5$$

Por ultimo se realiza el calculo para obtener el valor de K_c , se debe tener en cuenta que son 2 compensadores.

$$K_c \left(\frac{s + 0,7078}{s + 1,4126} \right)^2 * \frac{0,3345}{s^2(s + 14,33)} = 1$$

$$K_c = 80,88$$

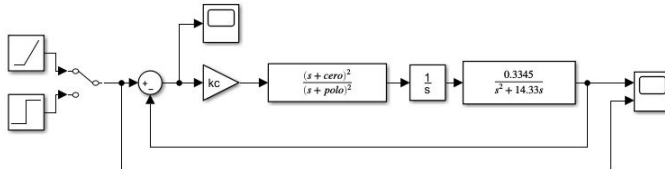


Figura 3. Diagrama de bloques compensador LGR.

Entrada escalón

En la figura 4 se observa que el sistema se estabiliza en un tiempo de casi 10 segundos por lo tanto no cumple con los parámetros establecidos esto se debe a que el sistema se ve forzado en estabilizarse en un tiempo de establecimiento tan pequeño.

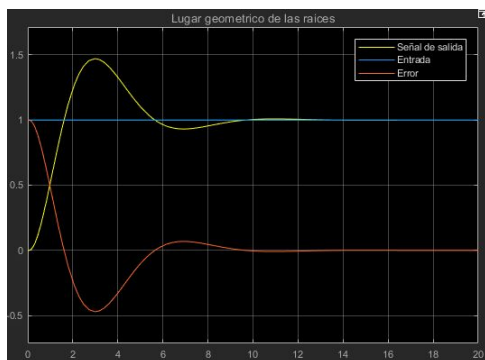


Figura 4. Respuesta del sistema entrada escalón.

Señal de control

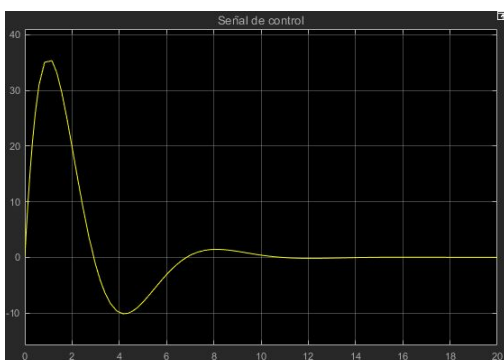


Figura 5. Señal de control entrada escalón.

Entrada rampa

En la figura 7 se observa que el sistema tiene un error en estado estable para una entrada rampa de cero sin embargo no cumple los otros parámetros establecidos.

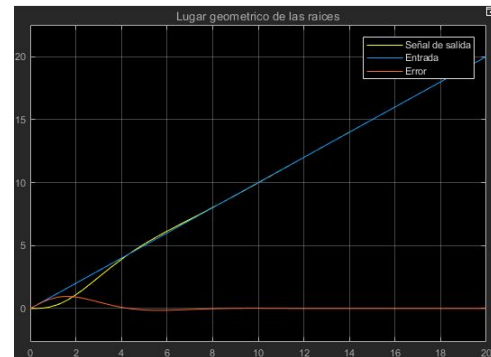


Figura 6. Respuesta del sistema entrada rampa.

Señal de control

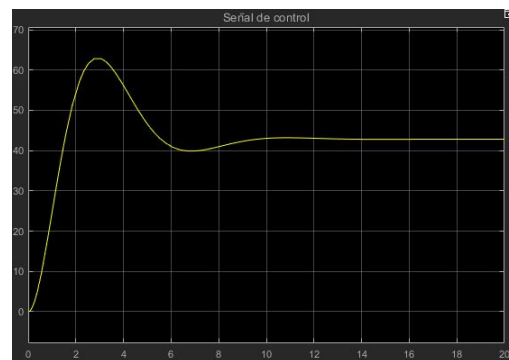


Figura 7. Señal de control entrada rampa.

Mecanismo controlado

Para observar el comportamiento físico del sistema se realiza la simulación en Simscape con la herramienta toolbox que permite renderizar un modelo 3D y su comportamiento.

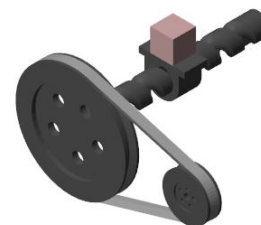


Figura 8. Mecanismo implementado.

Control implementado

En la imagen 9 se realiza la configuración del modelo renderizado 3D, en el cual se establecen los parámetros de cada uno de los componentes.

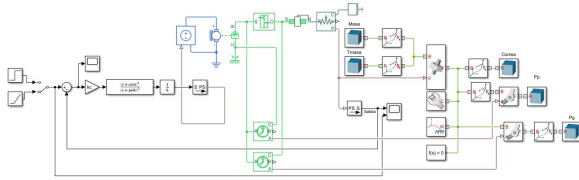


Figura 9. Implementación Simscape LGR.

Entrada escalón

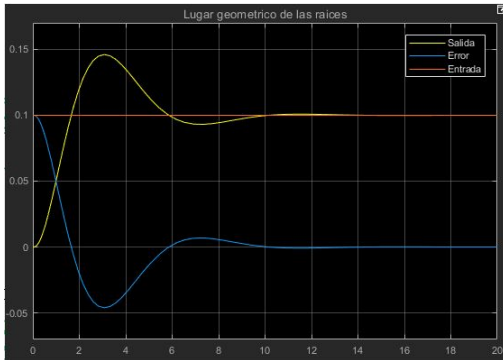


Figura 10. Respuesta del sistema entrada escalón Mecanismo implementado.

Señal de control

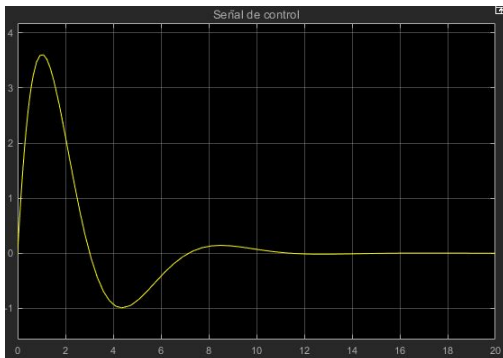


Figura 11. Señal de control entrada escalón Mecanismo implementado.

Entrada rampa

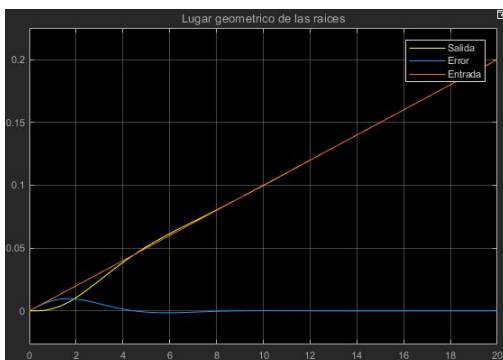


Figura 12. Respuesta del sistema entrada rampa Mecanismo implementado.

Señal de control

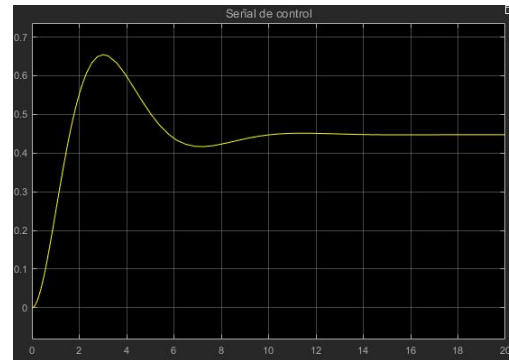


Figura 13. Señal de control entrada rampa Mecanismo implementado.

IV-C. Bode

Con la función de transferencia obtenida en la ecuación 4 se diseña un compensador. La planta del sistema es tipo 1, para lograr un error en estado estable de cero para entrada rampa se multiplica por un integrador.

$$G(s) = \frac{0,3345}{s^2(s + 14,33)} \quad (7)$$

Se calcula el margen de fase con la ecuación 8, ya que se relaciona con el coeficiente de amortiguamiento.

$$M_f = 100 * \zeta \quad (8)$$

$$M_f = 100 * 0,8 = 80$$

Se diseña un compensador en adelante para que el margen de fase sea 80° y el error de aceleración estática K_a sea 1 seg^{-2} .

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \frac{0,3345}{s^2(s + 14,33)} * K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad (9)$$

Donde $K = \alpha K_c$, con la ecuación 9 se realiza el límite y se calcula K.

$$K = \frac{14,33}{0,3345} = 42,84$$

La ganancia K se multiplica por la planta obteniendo una nueva función de transferencia.

$$G_1(s) = \frac{0,3345(42,84)}{s^2(s + 14,33)} \quad (10)$$

Se gráfica el diagrama de bode de la ecuación 10 y se obtiene el margen de fase en el que se encuentra, para llevar a este al margen deseado de 80° calculado anteriormente.

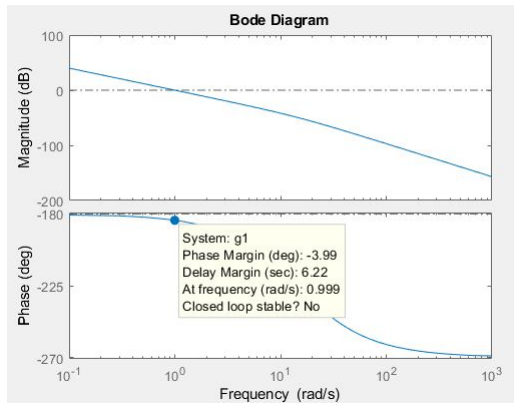


Figura 14. Diagrama de bode.

En la imagen 14 se observa que el margen de fase es de aproximadamente -3.99° y con este ángulo se puede calcular el ángulo a compensar.

$$\phi = 80 - (-3.99) = 83.99$$

Se suma al ángulo del compensador 5 grados.

$$\phi = 83.99 + 5 = 88.99$$

El ángulo a compensar debe ser menor a 60° , para este caso se realizan dos compensadores cada uno debe compensar un ángulo de 44.5° . Se halla el factor de atenuación α con la ecuación 11.

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\phi)}{1 + \sin(\phi)} \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{1 - \sin(44.5)}{1 + \sin(44.5)} = 0.176$$

Se calcula la frecuencia en donde la magnitud del sistema no es compensado.

$$-20 \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \quad (12)$$

$$-20 \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{0.176}}\right) = -7.54 \text{ dB}$$

Se grafica el diagrama de bode y se observa la magnitud calculada anteriormente para obtener la frecuencia del compensador.

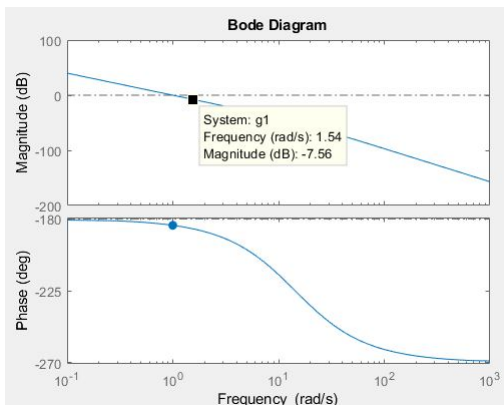


Figura 15. Diagrama de bode.

Frecuencia central del compensador $w_c = 1.54 \text{ rad/s}$.

Se calculan los ceros y polos del compensador.

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha} w_c \quad (13)$$

$$Cero = \sqrt{0.176} * 1.54 = 0.65$$

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{w_c}{\sqrt{\alpha}} \quad (14)$$

$$Polo = \frac{1.54}{\sqrt{0.176}} = 3.67$$

Se halla la ganancia del compensador.

$$K_c = \frac{42.84}{0.176} = 243.41$$

Se reemplazan los valores de constante K_c , polos y ceros y se obtiene el compensador.

$$G_c = 243.41 \left(\frac{s + 0.65}{s + 3.67} \right)^2$$

Entrada escalón

Se obtiene un error en estado estable para entrada escalón de cero, un máximo sobre impulso superior al planteado.

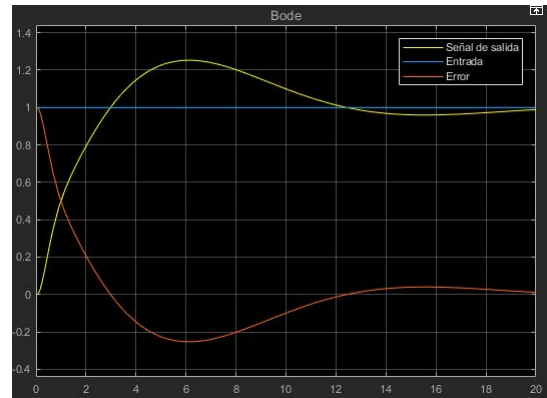


Figura 16. Respuesta del sistema entrada escalón.

Señal de control

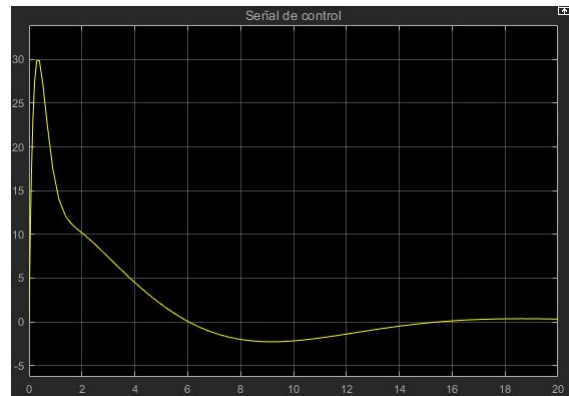


Figura 17. Señal de control entrada escalón.

V. CONCLUSIONES

-
-
-

REFERENCIAS

- [1] Ogata, Katsuhiko. Modern control engineering. Prentice hall, 2010.