

Modelado de sistemas mecatronicos

Cáseres Pinzón Brian Sebastian, Garcia Didier, Lizarazo Nicolas Esteban.

{u1803245, u18003250 y u1802999}@unimilitar.edu.co

Profesor Adriana Riveros.

Resumen—La respuesta temporal de sistemas es una de las diversas aplicaciones que pueden surgir a partir de la fuerza elástica, mecánicas y eléctricas. En el siguiente laboratorio se realizará un análisis de un sistema eléctrico donde se evidencia una respuesta temporal. De este se obtendrá la función de transferencia que describe su comportamiento y se comparará con simulaciones realizadas en software especializado en sistemas eléctricos.

Palabras Claves

- Electrónico.
- Respuesta Temporal.
- Estabilidad

I. INTRODUCCIÓN

Se analiza un sistema eléctrico, donde se evalúa su comportamiento y respuesta a partir de un impulso de entrada. Adicional a esto se encuentra la función de transferencia que describe el comportamiento del sistema, teniendo en cuenta el criterio de polos dominantes y sus diferentes equivalencias de la respuesta del sistema.

II. OBJETIVO



- Obtener teóricamente la función de transferencia implementa Laplace y espacios de estados
- Simular y analizar el comportamiento del circuito teniendo en cuenta el criterio de Routh-Hurwitz.



III. MARCO TEÓRICO

Señales de Prueba

En el análisis y diseño de sistemas de control es necesario tener una base para comparar los sistemas de control. Esto se hace especificando señales de entrada de prueba y comparando las respuestas de varios sistemas a estas señales de entrada.

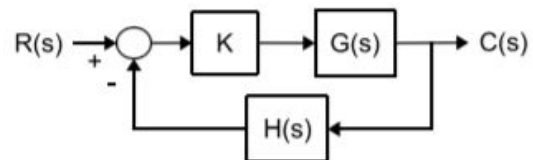
Las señales de prueba que se usan regularmente son funciones escalón, rampa, parábola, impulso, senoidal, etc.

Impulse	$\delta(t)$	
Step	$u_s(t)$	

Ramp	$r(t) = t u_s(t)$	
Senoidal	$\sin(\omega t) u_s(t)$	

Construcción del Lugar Geométrico de las Raíces

El método de construcción para el lugar geométrico de las raíces de la ecuación característica a lazo cerrado cuando se varía un parámetro se fundamenta en un esquema de control de retroalimentación simple como el que se muestra en la Fig. 3, para el cual la ecuación característica a lazo cerrado es la que expresa la Ec. 1, cuyas soluciones representan los polos del lazo cerrado.



$$1 + KG(s)H(s) = 0 \quad (1)$$

El lugar geométrico de las raíces se realizará para variaciones de K desde cero hasta infinito, aún cuando es posible realizarlo para K menor que cero, lo que se conoce como lugar geométrico inverso. Partiendo del hecho de que s es una variable compleja, es posible reescribir la Ec. 1 en forma polar, tal como lo expresa la 2. A partir de dicha ecuación se pueden identificar dos condiciones que deben cumplirse para satisfacer la ecuación anterior, las cuales son conocidas como la condición de módulo y la condición de ángulo y se expresan según las Ecs. 3 y 4, respectivamente.

$$|KG(s)H(s)| \angle KG(s)H(s) = -1 + j0 \quad (2)$$

$$|KG(s)H(s)| = 1 \quad (3)$$

$$\angle KG(s)H(s) = 180^\circ \pm k360^\circ \quad (4)$$

donde $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Si la función de transferencia a lazo abierto se factoriza en polos y ceros, tal como se muestra en la Ec 5, las condiciones de módulo y de ángulo pueden reescribirse según se muestra en las Ecs. 6 y 7, respectivamente.

$$KG(s)H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{j=1}^n (s+p_j)} \quad (5)$$

$$K \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{\prod_{j=1}^n (s+p_j)} = 1 \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^m [\angle(s+z_i)] - \sum_{j=1}^n [\angle(s+p_j)] = 180^\circ \pm k360^\circ \quad (7)$$

Las dos condiciones anteriores deben cumplirse para cada una de las raíces que formen parte del lugar geométrico, de forma tal que se garantice que cada una de ellas sea solución de la ecuación característica a lazo cerrado. Gracias a la condición de ángulo se determina la ubicación geométrica de las raíces, es decir, la forma del lugar geométrico, en tanto que la condición de módulo permite determinar el valor de la ganancia K a lo largo de dicho lugar geométrico.

Es por ello que se concluye que el lugar geométrico de las raíces comienza en los polos del lazo abierto y termina en los ceros de lazo abierto a medida que K aumenta desde cero hasta infinito. También se puede concluir que el número de tramos o ramas del lugar geométrico será igual al número de polos de la función de transferencia de lazo abierto y que siempre será simétrico respecto al eje real.

IV. Desarrollo

• ¿Que tipo de analogías existen?

Las analogías más conocidas son las de los sistemas mecánicos y la de los sistemas eléctricos, sin embargo existen más tipos de analogías como por ejemplo los hidráulicos o los magnéticos. Cada analogía está compuesta por diferentes elementos que la caracterizan como por ejemplo los resortes en el mecánico o las resistencias en el eléctrico.

• ¿Qué elementos son necesarios para modelar los diferentes tipos de sistemas? ¿Cuales son sus unidades?

Resistencia: Es la oposición que presenta un componente conductor al paso de la electricidad o corriente eléctrica, se mide en ohmios.

Masa: Es la cantidad de materia que posee un cuerpo, su medida es en Kg en el sistema internacional.

Capacitor: Dispositivo usado para almacenar cargas eléctricas durante un determinado tiempo.

• ¿Qué propiedades debe cumplir un sistema lineal?

Para que un sistema se considere lineal debe cumplir dos propiedades. La primera propiedad es la de la suma o también llamada la propiedad aditiva que dice:

La segunda propiedad se llama propiedad homogénea, algunas veces llamada propiedad de la

multiplicación que dice:

• ¿Cómo se puede determinar la linealidad de un sistema?

Principalmente deben cumplirse las condiciones $A*f(t)=f(A*t)$ y $f(A)+f(B)=f(A+B)$, si esto no se cumple, usando puntos de equilibrio y puntos de operación se consigue la linealidad, alrededor de un punto de operación específico.

• ¿Cómo se define la variable de estado?

Son el conjunto mínimo de variables dependientes que cambian con el tiempo.

• ¿Qué dimensión debe tener cada una de las matrices de estados si se tienen q entradas, en estados y p salidas?

La matriz A debe ser una matriz cuadrada, debe tener la misma cantidad de columnas y filas, el número depende de la cantidad de estados, debe ser una matriz nxn. La matriz B debe ser qxn

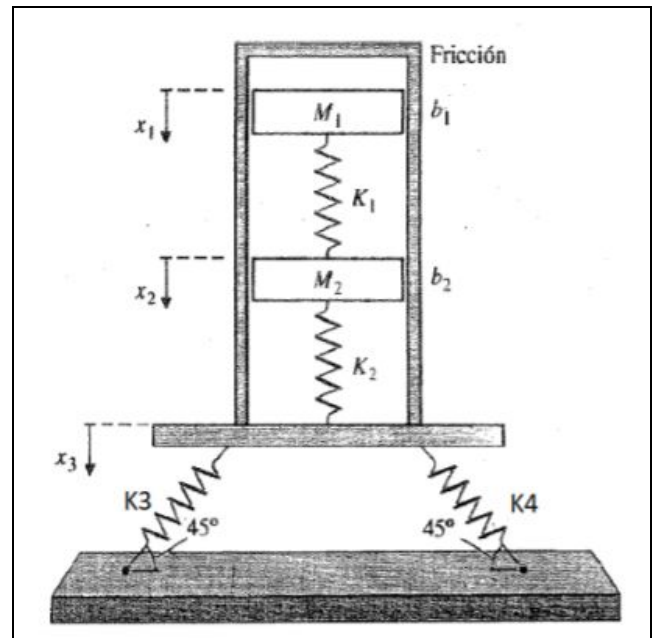


Figura 1: Sistema Mecánico.

Análisis por Euler-Newton.

Realizando el diagrama de cuerpo libre se obtienen las siguientes ecuaciones.

Modelo Matemático.

$$M_1 \ddot{x}_1 = -k_1(x_1 - x_2) - 2B_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + M_1 g \quad (1)$$

$$M_2 \ddot{x}_2 = -2B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - k_2(x_2 - x_3) + k_1(x_1 - x_2) + M_2 g \quad (2)$$

$$M_3 \ddot{x}_3 = 2B_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_3) + 2B_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_2(x_1 - x_3) - \sin(45^\circ)k_3x_3 - \sin(45^\circ)k_4x_3 \quad (3)$$

Análisis por Euler-Lagrange.

$$T = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} M_3 \dot{x}_3^2$$

$$U = M_1 g x_1 + \frac{1}{2} K_1 (x_1 - x_2)^2 + M_2 g x_2 + \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_3)^2 + M_3 g x_3 + \frac{1}{2} K_3 \left(\frac{x_3}{\sin(45^\circ)} \right)^2 + \frac{1}{2} K_4 \left(\frac{x_3}{\sin(45^\circ)} \right)^2$$

$$L = \frac{1}{2} M_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} M_3 \dot{x}_3^2 - M_1 g x_1 - \frac{1}{2} K_1 (x_1 - x_2)^2 - M_2 g x_2 - \frac{1}{2} K_2 (x_2 - x_3) - M_3 g x_3 - \frac{1}{2} K_3 \left(\frac{x_3}{\sin(45)} \right)^2 - \frac{1}{2} K_4 \left(\frac{x_3}{\sin(45)} \right)^2$$

$$M_1 \ddot{x}_1 - M_1 g + K_1 (x_1 - x_2) = -B_1 \dot{x}_1$$

$$M_2 \ddot{x}_2 - M_2 g - K_1 (x_1 - x_2) + K_2 (x_2 - x_3) = -B_2 \dot{x}_2$$

$$M_3 \ddot{x}_3 - M_3 g - K_2 (x_2 - x_3) + K_3 \sin(45) + K_4 \sin(45) = F(t)$$

Espacio de estados con jacobiano.

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2b_1}{m_1} & 0 & \frac{2b_1}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & 0 \\ 0 & -\frac{2b_2}{m_2} & \frac{2b_2}{m_2} & \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} \\ \frac{2b_1}{m_3} & \frac{2b_2}{m_3} & -\frac{2b_1+2b_2}{m_3} & \frac{k_2}{m_3} & 0 & -\frac{k_2+\frac{7k_3}{10}+\frac{7k_4}{10}}{m_3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{m_3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$$

$$D = 0$$

Función de transferencia.

```
ftgeneral =
```

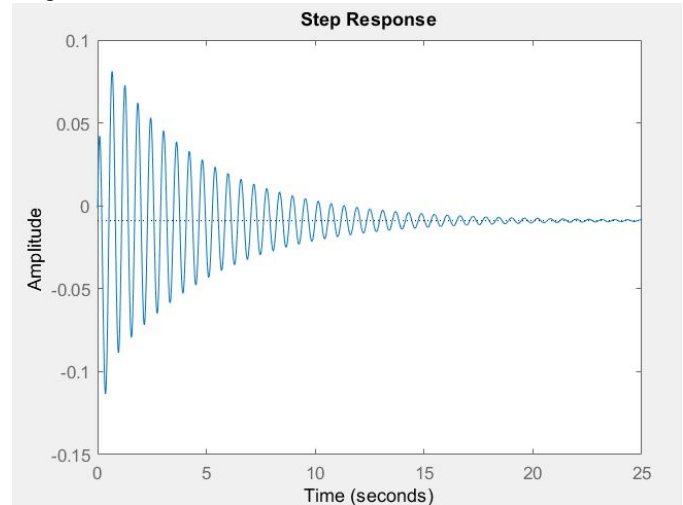
$$\frac{(10m_1m_2m_3)s^6 + (20b_1m_1m_2 + 20b_2m_1m_2 + 20b_1m_1m_3 + 20b_2m_1m_3)s^5 + (40b_1b_2m_1 + 40b_1b_2m_2 + 40b_1b_2m_3 + 10k_1m_1m_3 + 10k_1m_1m_2 + 10k_2m_1m_2 + 10k_1m_2m_3 + 10k_2m_1m_3 + 7k_3m_1m_2 + 7k_4m_1m_2)s^4 + (20b_1k_1m_1 + 20b_1k_1m_2 + 20b_1k_2m_1 + 20b_2k_1m_1 + 20b_2k_1m_2 + 20b_2k_1m_3 + 20b_2k_2m_1 + 20b_2k_2m_2 + 14b_1k_3m_2 + 20b_2k_3m_3 + 14b_2k_3m_1 + 14b_1k_4m_2 + 14b_2k_4m_1)s^3 + (-20b_1m_2)s^3 + (-40b_1b_2)s^2 + (-20b_1k_1 - 20b_1k_2 - 20b_2k_1)s - 10k_1k_2}{20b_1k_1m_3 + 20b_2k_1m_2 + 20b_2k_2m_1 + 20b_1k_2m_3 + 14b_1k_3m_2 + 20b_2k_3m_3 + 14b_2k_3m_1 + 14b_1k_4m_2 + 14b_2k_4m_1)s^3 + (10k_2^2m_1 + 28b_1b_2k_3 + 28b_1b_2k_4 + 10k_1k_2m_1 + 10k_1k_2m_2 + 7k_1k_3m_1 + 10k_1k_2m_3 + 7k_1k_3m_2 + 7k_1k_4m_1 + 7k_2k_3m_1 + 7k_1k_4m_2 + 7k_2k_4m_3)s^2 + (14b_1k_1k_3 + 14b_1k_1k_4 + 14b_1k_2k_3 + 14b_2k_1k_3 + 14b_2k_1k_4 + 14b_2k_2k_3 + 7k_1k_2k_3 + 7k_1k_2k_4 + 7k_2k_3k_4)s + (b_1jb_2ra^2 + j_1ja_1rb^2)s^3 + (b_1jb_2ra^2 + b_1ja_1rb^2)s^2 + (j_1k_1rb^2 + ja_1k_1rb^2 + jb_1k_1ra^2)s + b_1k_1rb^2}$$

Función de transferencia evaluada.

```
ftgeneral =
```

$$\frac{-2000s^3 - 400000s^2 - 2000000s - 1500000}{3s^6 + 2600s^5 + 405620s^4 + 2448000s^3 + 47870000s^2 + 224000000s + 168000000}$$

Respuesta del sistema. Salida x1



Matlab Function.

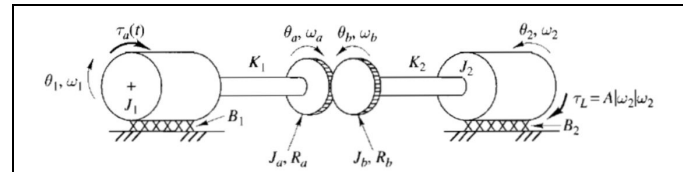
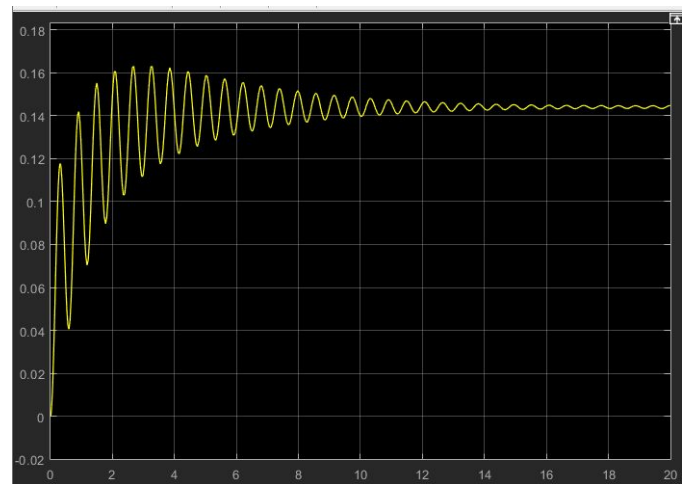


Figura 2: Sistema Rotacional.

Análisis por Euler-Newton.

Realizando el diagrama de cuerpo libre se obtienen las siguientes ecuaciones.

Modelo Matemático.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{J_1} [Ta - B_1 \dot{\theta}_1 - k_1(\theta_1 - \theta_a)] \quad (4)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{J_2} \left[K_2 \left(\frac{\theta_a R_a}{R_b} - \theta_2 \right) - B_2 \dot{\theta}_2 - T_L \right] \quad (5)$$

$$\ddot{\theta}_a = \frac{R_b^2 k_1}{J_a R b^2 + J_b R_a^2} \quad (6)$$

Función de transferencia. Salida wa.

```
ftgeneral =
```

$$\frac{k_1 r b^2}{(j_1 j b r a^2 + j_1 j a r b^2) s^3 + (b_1 j b r a^2 + b_1 j a r b^2) s^2 + (j_1 k_1 r b^2 + j a k_1 r b^2 + j b k_1 r a^2) s + b_1 k_1 r b^2}$$

Espacio de estados.

$$\begin{pmatrix} w1p \\ w2p \\ wap \\ t1p \\ t2p \\ tap \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b_1}{j_1} & 0 & 0 & -\frac{k_1}{j_1} & 0 & \frac{k_1}{j_1} \\ 0 & -\frac{5|w_2| + 5w_2 \text{sign}(w_2)}{j_2} & 0 & 0 & -\frac{b_2 + k_2}{j_2} & \frac{k_2 r_a}{j_2 r_b} \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & -\sigma_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ wa \\ t_1 \\ t_2 \\ ta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{j_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} Ta$$

$$y = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ wa \\ t_1 \\ t_2 \\ ta \end{pmatrix} + (0) \cdot Ta$$

Asignando valores a las constantes.

$$j_1=0.625 \ j_2=1.08 \ j_a=0.135 \ j_b=0.04 \ r_1=0.5 \ r_2=0.6 \ r_a=0.3 \ r_b=0.2 \\ k_1=100 \ k_2=250 \ b_1=10 \ b_2=15$$

$$f_{\text{tevaluada}} = \frac{4}{\frac{9s^3}{1600} + \frac{9s^2}{100} + \frac{17s}{5} + 40}$$

Respuesta del sistema. Salida wa.

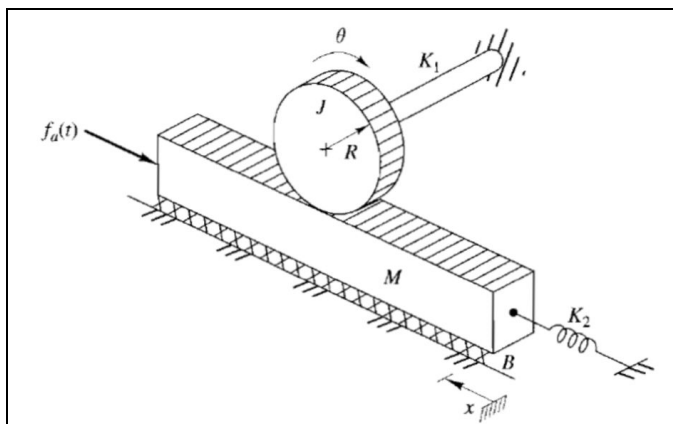
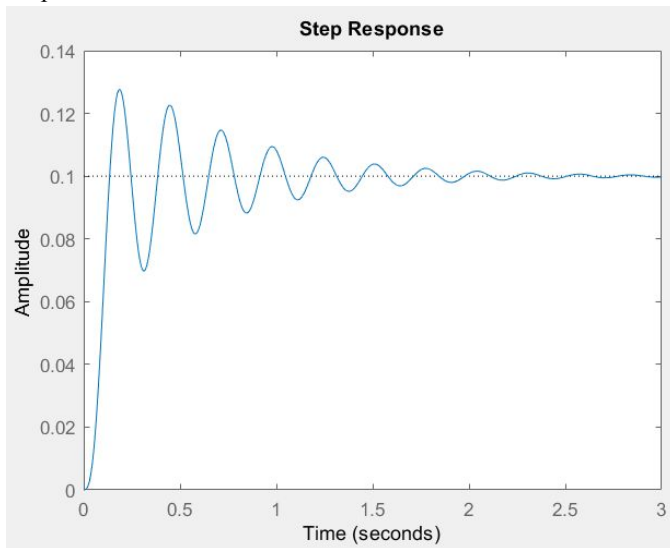


Figura 3: Sistema Mecánico Rotacional Traslacional.

Análisis por Euler-Newton.

Modelo Matemático.

Para el modelo matemático lo primero es representar las fuerzas que componen el sistema:

$$-k_1\theta + F_c R = J\ddot{\theta} \quad (1)$$

$$-f_{(a)}t - B\dot{x} - F_c - k_2x = M\ddot{x} \quad (2)$$

Espacio de estados.

Para el espacio de estados es necesario definir las ecuaciones de estado, sin embargo, notamos que en ambas ecuaciones hay constantes que nos está incomodando para hacer el análisis, por lo tanto:

A partir del ángulo se obtiene que:

$$x = \theta R \Rightarrow \theta = \frac{x}{R}$$

Y si se reemplaza en la ecuación 1 y se despeja F_c se tiene:

$$\begin{aligned} -k_1\left(\frac{x}{R}\right) + F_c R &= J\left(\frac{\ddot{x}}{R}\right) \\ F_c R &= J\left(\frac{\ddot{x}}{R}\right) + k_1\left(\frac{x}{R}\right) \\ F_c &= J\left(\frac{\ddot{x}}{R^2}\right) + k_1\left(\frac{x}{R^2}\right) \end{aligned}$$

Finalmente se reemplaza F_c en la ecuación 2, y de esa manera se obtiene una de las ecuaciones en términos de la entrada y de los estados.

$$\frac{-F_{(a)}tR^2 - B\dot{x} + k_1x - k_2x^2}{mR^2 + j} = \ddot{x}$$

Y si tenemos en cuenta que:

$$\dot{\omega}_1 = \ddot{x}_1 \quad \dot{\omega}_2 = \ddot{x}_2$$

De tal manera que ya se puede obtener los espacio de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-BR^2}{mR^2 + J} & \frac{k_1 - k_2 R^2}{mR^2 + J} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-R^2}{mR^2 + J} \\ 0 \end{bmatrix} \cdot F_{(a)}t$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} + [0]F_{(a)}t$$

Donde la salida está representada por X'

Función de transferencia.

Usando la herramienta de Matlab se obtiene la función de transferencia a partir del espacio de estados y nos da lo

siguiente:

Asignando valores a las constantes.

$$ft2 =$$

$$-0.2 \text{ s}$$

$$s^2 + 0.4 \text{ s} - 2.5$$

Respuesta del sistema.

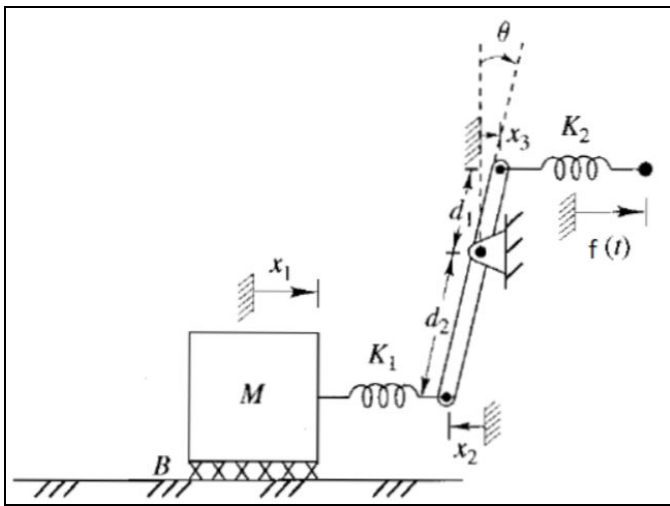
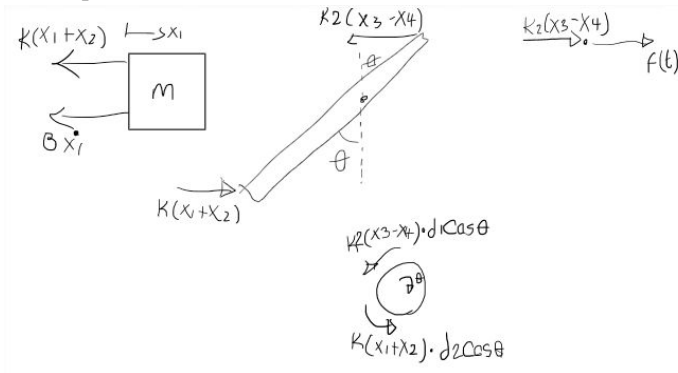


Figura 4: Sistema mecánico con palanca.

Análisis por Euler-Newton.



$$\square) -B\dot{x}_1 - K_1(x_1+x_2) = M\ddot{x}_1$$

•) $x_3 = d_1 \sin \theta$
•) $x_2 = d_2 \sin \theta$

$$\circ) -K_2(x_3-x_4)d_1 \cos \theta - K_1(x_1+x_2)d_2 \cos \theta = 0$$

$$-K_2(x_3-x_4)d_1 - K_1(x_1+x_2)d_2 = 0$$

$$-K_2(x_2 \frac{d_1}{d_2} - x_4)d_1 - K_1(x_1+x_2)d_2 = 0$$

$$\frac{x_3}{d_1} = \frac{x_2}{d_2}$$

$$x_2 \left[-K_2 \frac{d_1^2}{d_2^2} - K_1 d_2 \right] + x_4 K_2 d_1 - x_1 K_1 d_2 = 0$$

$$x_2 = \frac{x_1 K_1 d_2 - x_4 K_2 d_1}{-K_2 \frac{d_1^2}{d_2^2} - K_1 d_2} = - \left(\frac{x_1 K_1 d_2 - x_4 K_2 d_1}{K_2 \frac{d_1^2}{d_2^2} + K_1 d_2} \right)$$

$$-B\dot{x}_1 - K_1(x_1+x_2) = M\ddot{x}_1 \rightarrow$$

$$y = \frac{x_2}{x_4}$$

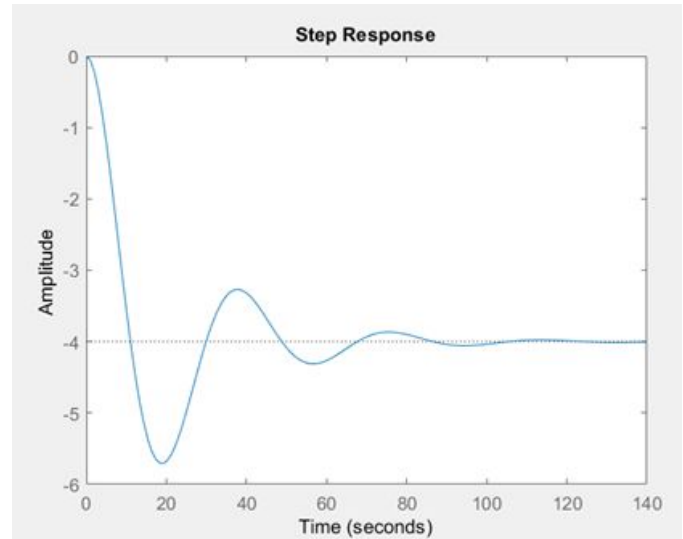
$$-B\dot{x}_1 - K_1 x_1 + \left(\frac{x_1 K_1 d_2 - x_4 K_2 d_1}{K_2 \frac{d_1^2}{d_2^2} + K_1 d_2} \right) K_1 = M\ddot{x}_1$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{M} & -\frac{K_1 + K_1^2 \frac{d_2^2}{K_2 \frac{d_1^2}{d_2^2} + K_1 d_2}}{M} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{K_2 d_1 K_1}{K_2 \frac{d_1^2}{d_2^2} + K_1 d_2} \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} x_4$$

$$-D1 \ D2 \ K1 \ K2$$

$$(K_2 M D1^2 + K1 M D2^2) s^2 + (B K2 D1^2 + B K1 D2^2) s + D1 K1 K2$$



CON INERCIA

$$\begin{aligned} \square) -B\dot{x}_1 - K_1(x_1 + x_2) &= M\ddot{x}_1 \\ \bullet) x_3 &= d_1 \sin \theta \\ \bullet) x_2 &= d_2 \sin \theta \end{aligned}$$

$$(-B\dot{x}_1 - K_1(x_1 + d_2 \sin \theta)) = M\ddot{x}_1$$

Aproximando

$$\rightarrow -B\dot{x}_1 - K_1 x_1 = M\ddot{x}_1$$

$$\frac{x_3}{d_1} = \frac{x_2}{d_2}$$

$$\begin{aligned} \square) -K_2(x_3 - x_4)d_1 \cos \theta - K_1(x_1 + x_2)d_2 \cos \theta &= J\ddot{\theta} \\ \hookrightarrow -K_2(d_1 \sin \theta - x_4)d_1 \cos \theta - K_1(x_1 + d_2 \sin \theta)d_2 \cos \theta &= J\ddot{\theta} \end{aligned}$$

Aproximando

$$(-K_2(x_4 - x_4)d_1 - K_1(x_1 + d_2))d_2 = J\ddot{\theta}$$

θ pequeño $< 10^\circ$
 $\sin \theta \approx 0$
 $\cos \theta \approx 1$

$$\rightarrow K_2 x_4 d_1 - K_1 x_1 d_2 = J\ddot{\theta}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{M} & -\frac{K_1}{M} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_1 d_2}{J} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ x_1 \\ z \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_2 d_1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} x_4$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ x_1 \\ z \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} x_4$$

Función de transferencia.

ft_{general} =

$$\frac{(8clr_3)s^2 + (3lr_3ec^2 + 8cr_2r_3)s + 3ec^2r_2r_3}{(8clr_3)s^2 + (3lr_3ec^2 + 8l + 8cr_2r_3)s + 3r_2r_3ec^2 + 8r_2 + 8r_3}$$

Espacio de estados.

$$\begin{pmatrix} \dot{ec} \\ \dot{il} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3r_3ec^2 + 8}{8cr_3} & \frac{1}{c} \\ -\frac{1}{l} & -\frac{r_2}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ec \\ il \\ \delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{cr_3} \\ \frac{1}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ei \\ \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ec \\ il \\ \delta \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} ei \\ \delta \end{pmatrix}$$

Asignando valores a las constantes.

r₁=10000 r₂=150 r₃=220 c=0.01 l=0.05

Punto de operación ec=0.1v.

ft_{evaluada} =

$$\frac{22s^2}{25} + \frac{1451536768082903s}{549755813888} + 990$$

$$\frac{22s^2}{25} + \frac{5807026681633833s}{2199023255552} + 3950$$

Respuesta del sistema.

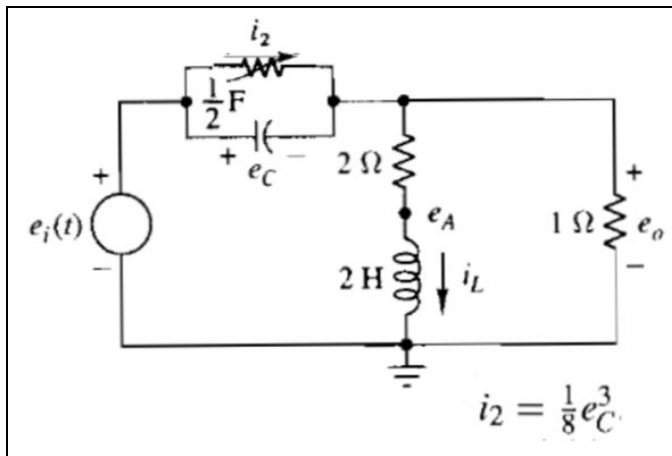


Figura 5: Sistema eléctrico.

Análisis por Euler-Newton.

Modelo Matemático.

$$\dot{e}_c = \frac{1}{c} \left[IL + \frac{e_i}{R_3} + \frac{-8e_c - e_c^3 R_3}{R_3 R_1} \right]$$

$$i_L = \frac{1}{L} [e_i - e_c - ILR_2]$$

$$e_o = e_i - e_c$$

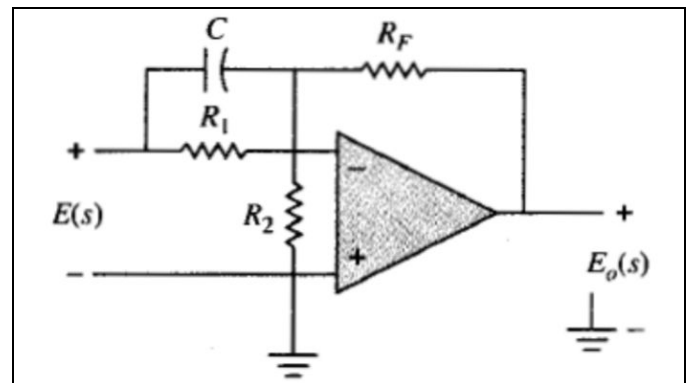


Figura 6: Sistema eléctrico con operacionales

Análisis por Euler-Newton.

$$T_F = \frac{E_o(s)}{E(s)}$$

$$i_1 + i_2 = i_3$$

$$I = \frac{0}{R_2}$$

$$C \dot{E}_s + \frac{E_s}{R_1} = -\frac{E_o}{R_F}$$

$$T_F = -\frac{R_F(CSR_1 + 1)}{R_1}$$

$$E_c = E(s)$$

$$\dot{E}_s = -\frac{E_s - E_o(s)}{CR_1 CR_F}$$

Modelo Matemático.

$$\dot{e}_c = \frac{1}{c} \left[\frac{e(S)}{R_f} + \frac{e_c(-R_1 - R_F)}{R_1 R_f} \right]$$

$$e_0 = e(s) + e_c$$

Función de transferencia.

$$\text{ft2sinreemplazar} = \frac{(c r_1 r_f) s + r_f}{(c r_1 r_f) s + r_1 + r_f}$$

Espacio de estados.

$$\dot{\mathbf{e}}_c = \left(-\frac{r_1 + r_f}{c r_1 r_f} \right) \mathbf{e}_c + \left(-\frac{1}{c r_f} \right) e(s)$$

$$\mathbf{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \mathbf{e}_c + \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} e(s)$$

Asignando valores a las constantes.
r1=10 rf=30 c=0.001

ft3 =

$$\frac{s + 100}{s + 133.3}$$

Respuesta del sistema.

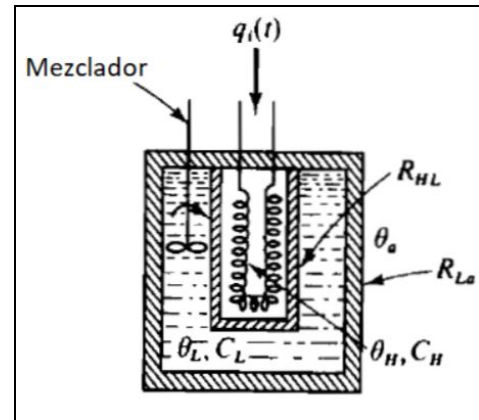
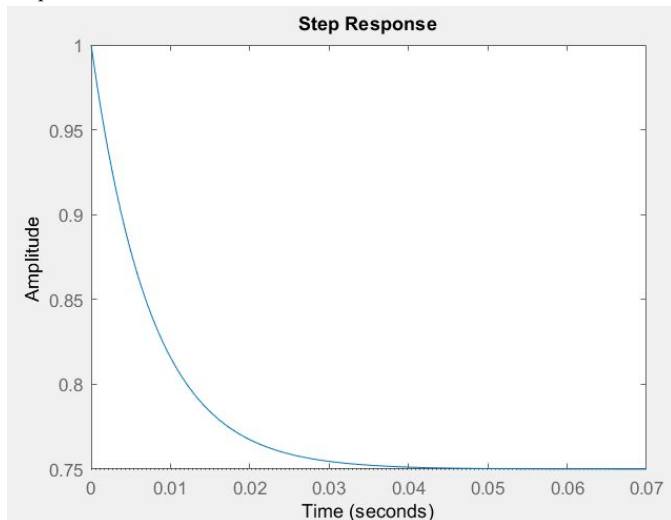


Figura 7: Sistema térmico.

Análisis por Euler-Newton.

Modelo Matemático.

$$\dot{\theta}_L = \frac{1}{c_L} \left[\frac{\theta_H - \theta_L}{R_{HL}} - \frac{\theta_L - \theta_a}{R_{La}} \right]$$

$$\dot{\theta}_H = \frac{1}{c_H} \left[q_i(t) - \frac{\theta_H - \theta_L}{R_{HL}} \right]$$

Función de transferencia.

ftgeneral =

$$\frac{r_{la}}{(ch \ cl \ r_{hl} \ r_{la}) s^2 + (ch \ r_{hl} + ch \ r_{la} + cl \ r_{la}) s + 1}$$

Espacio de estados.

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_H \\ \dot{\theta}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{ch \ r_{hl}} & \frac{1}{ch \ r_{hl}} \\ \frac{1}{cl \ r_{hl}} & -\frac{1}{r_{hl}} + \frac{1}{r_{la}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_H \\ \theta_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{ch} \\ 0 \end{pmatrix} q_i(t)$$

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_H \\ \theta_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} q_i(t)$$

Asignando valores a las constantes.
ch=10 cl=20 rhl=100 rla=200

ftgeneral =

$$\frac{200}{4000000 s^2 + 7000 s + 1}$$

Respuesta del sistema. Salida θ_L .

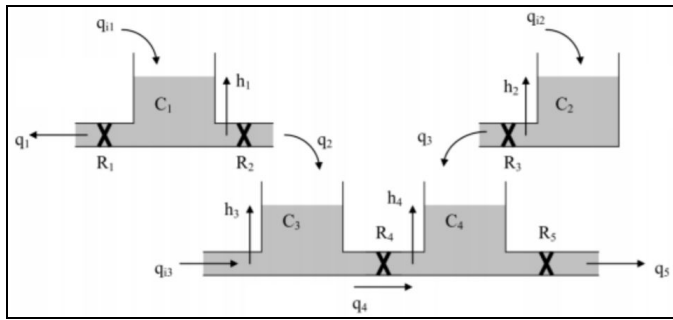
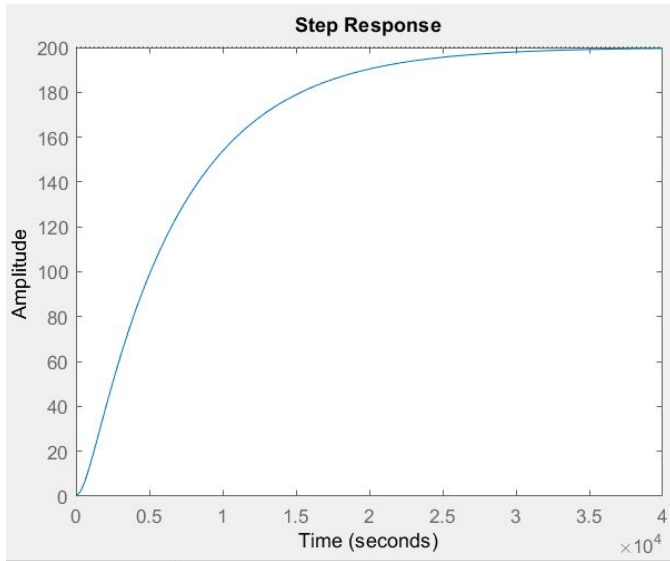


Figura 8: Sistema hidráulico.

Análisis por Euler-Newton.

Modelo Matemático.

$$\dot{h}_1 = \frac{1}{A_1} [q_{i1} - q_1 - q_2]$$

$$\dot{h}_2 = \frac{1}{A_2} [q_{i2} - q_3]$$

$$\dot{h}_3 = \frac{1}{A_3} [q_{i3} - q_4 + q_2]$$

$$\dot{h}_4 = \frac{1}{A_4} [q_4 - q_5 + q_3]$$

$$q_1 = \frac{h_1}{r_1}$$

$$q_2 = \frac{h_1}{r_2}$$

$$q_3 = \frac{h_2}{r_3}$$

$$q_4 = \frac{h_3 - h_4}{r_4}$$

$$q_5 = \frac{h_4}{r_5}$$

Función de transferencia.

Puesto que hay 3 entradas, hay tres funciones de transferencia.

Entrada q_{i1}

$$\left(\frac{R_1 R_5}{(A_1 A_3 A_4 R_1 R_2 R_4 R_5) s^3 + (A_1 A_3 R_1 R_2 R_4 + A_1 A_3 R_1 R_2 R_5) s^2 + A_1 A_4 R_1 R_2 R_5 + A_3 A_4 R_1 R_4 R_5 + A_3 A_4 R_2 R_4 R_5} s^2 + (A_1 R_1 R_2 + A_3 R_1 R_4 + A_3 R_1 R_5 + A_3 R_2 R_4 + A_3 R_2 R_5 + A_4 R_1 R_5 + A_4 R_2 R_5) s + R_1 + R_2} \right)$$

Entrada q_{i2}

$$\frac{(A_2 A_3 A_4 R_3 R_4 R_5) s^3 + (A_2 A_3 R_3 R_4 + A_2 A_3 R_3 R_5) s^2 + (A_3 R_4 R_5) s + R_5}{(A_2 A_4 R_3 R_5 + A_3 A_4 R_4 R_5) s^2 + (A_2 R_3 + A_3 R_4 + A_3 R_5 + A_4 R_5)}$$

Entrada q_{i3}

$$\frac{R_5}{(A_3 A_4 R_4 R_5) s^2 + (A_3 R_4 + A_3 R_5 + A_4 R_5) s + 1}$$

Espacio de estados.

$$\begin{pmatrix} \dot{h}_{1p} \\ \dot{h}_{2p} \\ \dot{h}_{3p} \\ \dot{h}_{4p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A_2 R_3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_3 R_2} & 0 & -\frac{1}{A_3 R_4} & \frac{1}{A_3 R_4} \\ 0 & \frac{1}{A_4 R_3} & \frac{1}{A_4 R_4} & -\frac{1}{A_4} + \frac{1}{R_5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ q_{i3} \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{i1} \\ q_{i2} \\ q_{i3} \end{pmatrix}$$

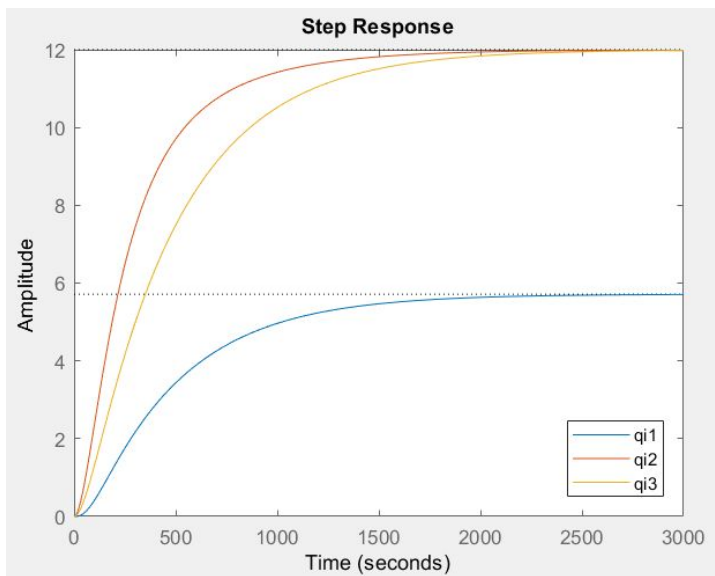
Asignando valores a las constantes.

R1=10 R2=11 R3=22 R4=50 R5=12 A1=5 A2=8 A3=7 A4=6

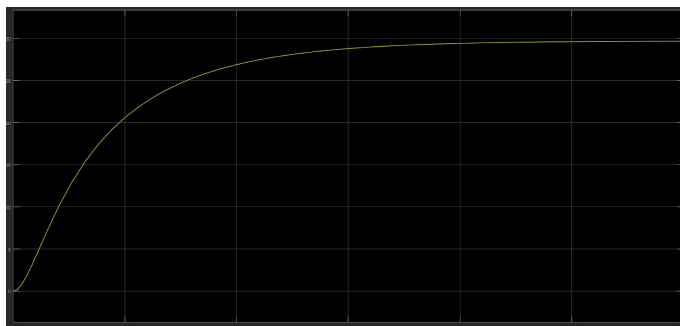
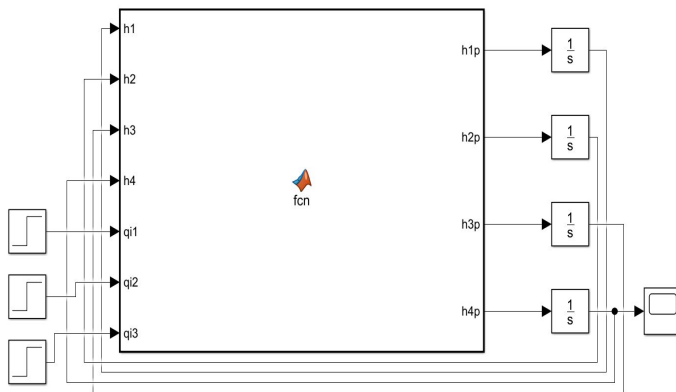
ftgeneral =

$$\left(\frac{120}{13860000s^3 + 807500s^2 + 11176s + 21} \frac{4200s + 12}{4435200s^3 + 114256s^2 + 682s + 1} \frac{12}{25200s^2 + 506s + 1} \right)$$

Respuesta del sistema. Salida h4.



Matlab Function.



Respuesta del sistema por matlab function salida h4.

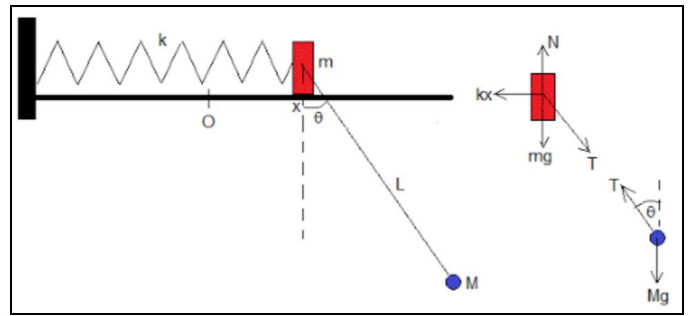
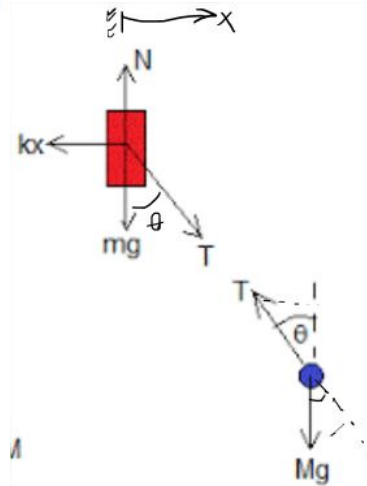


Figura 9: Masa con muelle elástico.

Análisis por Euler-Newton.



$$-Kx + T \sin \theta = m \ddot{x}$$

$$x_2 = x_1 + L \sin \theta$$

$$y_2 = L \cos \theta$$

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 + L \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\dot{y}_2 = -L \sin \theta \dot{\theta}$$

$$\sum \tau_{M2} = J \ddot{\theta}$$

$$\hookrightarrow -Mg \sin \theta \cdot L = J \ddot{\theta}$$

$$Mg \cos \theta = T$$

$$-Kx + Mg \cos \theta \sin \theta = m \ddot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{-Kx + Mg \cos \theta \sin \theta}{m}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-L \cdot Mg \sin \theta}{J}$$

$$v = [x; \dot{x}; y; \dot{y}]$$

$Y = \Theta$

$A =$

$$\begin{bmatrix} 0, 1, & 0, 0 \\ -k/m, 0, (Mg \cos(y)^2 - Mg \sin(y)^2)/m, 0 \\ 0, 0, & 0, 1 \\ 0, 0, & -(L \cdot Mg \cos(y))/J, 0 \end{bmatrix}$$

$C =$

$$[1, 0, 0, 0]$$

$B =$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$D = 0$

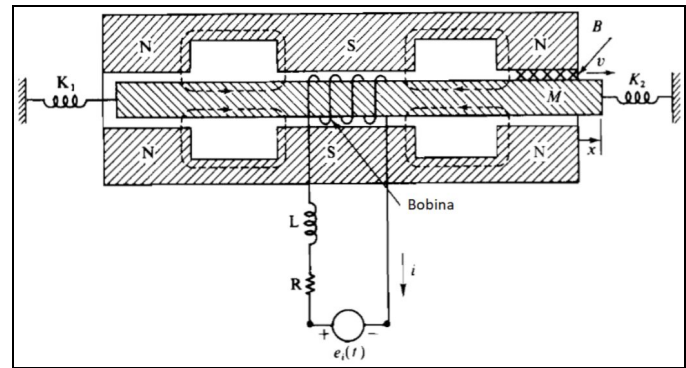


Figura 10: Émbolo magnético.

Análisis por Euler-Newton.

Modelo Matemático.

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = \frac{1}{M} \cdot [-(k_1 + k_2)x - Bv + \alpha i]$$

$$\dot{i}_l = \frac{1}{L} [-\alpha v - R \cdot IL + e_i(t)]$$

Función de transferencia.

$ft_{general} =$

$$\frac{2 \pi B N a}{(L M) s^3 + (B L + M R) s^2 + (4 \pi^2 B^2 N^2 a^2 + R B + K_1 L + K_2 L) s + K_1 R + K_2 R}$$

Espacio de estados.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{v}_p \\ \dot{i}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_1 + K_2}{M} & -\frac{B}{M} & \frac{2 \pi B N a}{M} \\ 0 & -\frac{2 \pi B N a}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \\ i_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} e_i(t)$$

$$y = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x \\ v \\ i_l \end{pmatrix} + (0) e_i(t)$$

Asignando valores a las constantes.

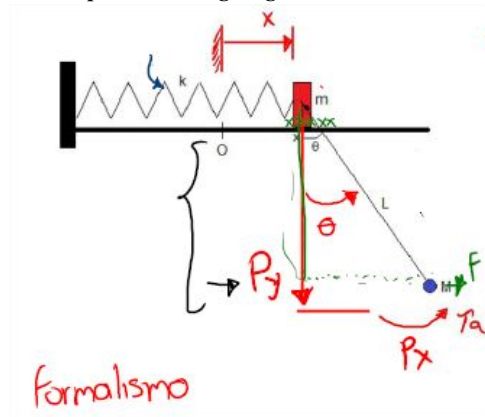
$K_1 = 100 \ K_2 = 150 \ M = 10 \ B = 10 \ R = 1000 \ L = 1 \ N = 50 \ a = 2$

$ft_{general} =$

$$\frac{200 \pi}{s^3 + 1001 s^2 + (400000 \pi^2 + 1025) s + 25000}$$

Respuesta del sistema. Salida x.

Análisis por Euler-Lagrange.



$$V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \left[(2 \dot{\theta})^2 + 2 \cos \theta \dot{\theta} \dot{x}_1 + \dot{x}_1^2 \right]$$

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \left[(2 \dot{\theta})^2 + 2 \cos \theta \dot{\theta} \dot{x}_1 + \dot{x}_1^2 \right]$$

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 + M g L \cos \theta$$

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \left[(2 \dot{\theta})^2 + 2 \cos \theta \dot{\theta} \dot{x}_1 + \dot{x}_1^2 \right] - \frac{1}{2} k x^2 - M g L \cos \theta$$

Para x

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(m \dot{x} + \frac{1}{2} M L \cos \theta \dot{\theta} \right) - (-kx) = 0$$

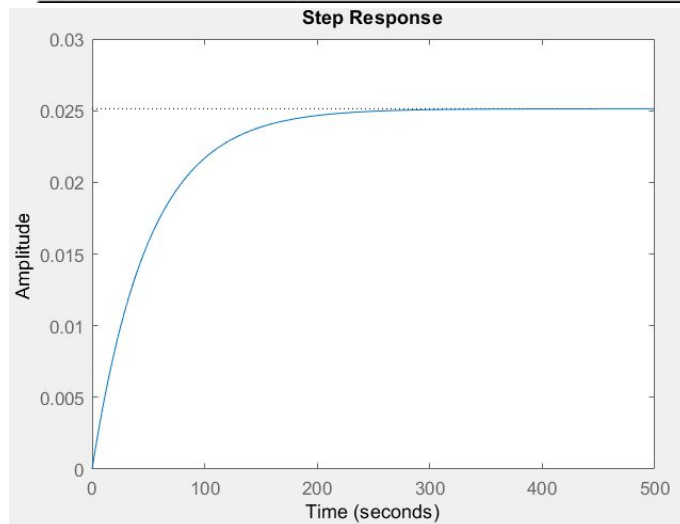
$$2m\ddot{x} - \frac{1}{2} M L \sin \theta \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M L \cos \theta \ddot{\theta} + kx = 0$$

formalismo
Para θ

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau_a$$

$$\frac{d}{dt} \left(M L^2 \dot{\theta} + \frac{1}{2} M L \cos \theta \dot{x} \right) - \left(-\frac{1}{2} M L \sin \theta \dot{x} + M g L \sin \theta \right) = \tau_a$$

$$M L^2 \ddot{\theta} - \frac{1}{2} M L \sin \theta \dot{\theta} \dot{x} + \frac{1}{2} M L \cos \theta \ddot{x} + \frac{1}{2} M L \sin \theta \dot{\theta} \dot{x} - M g L \sin \theta = \tau_a$$



CONCLUSIONES:

- Se observó, que el sistema térmico (Ver Fig 7), es el más demorado en estabilizarse.

- En el sistema hidráulico MiMo (Ver Fig 7), se observa que si la salida del sistema se escoge como h_1 , esta no depende de las entradas 2 y 3, por lo cual f_{t2} y la f_{t3} (entradas q_{i2} y q_{i3}) se hacen cero, por lo cual se observa el criterio de observabilidad varía según cómo se elige la salida, por ello se eligió la salida h_4 , la cual depende de q_{i1} , q_{i2} y q_{i3} , para poder obtener las 3 funciones de transferencia, las cuales al sumarlas producen la función de transferencia total del sistema.

REFERENCIAS.

[1] Riveros Adriana, Clases de modelos, Mec C.

[2] Ogata, K, (2010), Ingeniería de control moderna, Madrid, España, Pearson.