FUNCIÓN TRANSFERENCIA (parte 2) Y ANÁLISIS FRECUENCIAL

Caceres Sebastian, Troncoso Camila
{1803245, 1803307}@unimilitar.edu.co
Profesor: Nelson Velasco

***Resumen*—En este documento se tratarán los temas del teorema de muestreo, aliasing, unidades de frecuencia, composición de señales y se analizarán diferentes ejercicios en MaTLAB.**

***Palabras clave*— Señal, Frecuencia, aliasing, Muestra, teorema de muestreo,unidades.**

I. Competencias a desarrollar

- Habilidad para identificar, formular y resolver problemas complejos de ingeniería, aplicando principios de ingeniería, ciencias y matemáticas.
- Habilidad para comunicarse efectivamente ante un rango de audiencias.
- Capacidad de desarrollar y aplicar nuevos conocimientos según sea necesario, utilizando estrategias de aprendizaje apropiadas.

II. Desarrollo ejercicios prácticos.

EJERCICIO PRÁCTICO:

(Parte 1)

Considere los sistema representados por las siguientes ecuaciones en diferencias (Ver tarea anterior):

Sistema 1:

$y(n) = x(n) - 0.5x(n-1) + 0.25x(n-2)$

Sistema 2:

$y(n) = 0.5x(n) + 0.1x(n-1) - 0.1y(n-1) + 0.2y(n-2)$

Considere la señal de duración finita:

x (n) =[-1,1,-0.5,0.5]

● Realice la convolución entre los valores de la respuesta impulsional de los sistemas con la señal x (n) (utilice matlab).

```
%señales discretas
n=-3:5;
y=[0 0 0 0 1 -0.5 0.25 0 0];
x=[0 0 0 0 -1 1 -0.5 0.5 0];
stem(n,x,'filled');
w=conv(y,x)
```

Figura 1. Código de matlab.

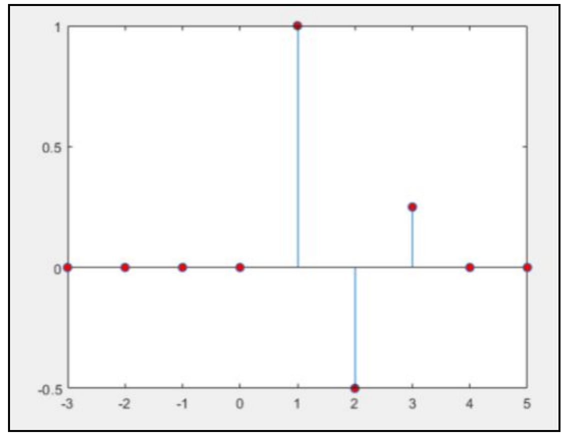


Figura 2. Sistema 1.

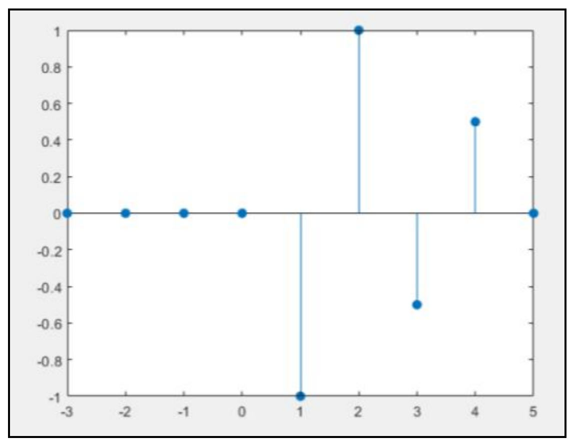


Figura 3. Sistema 2.

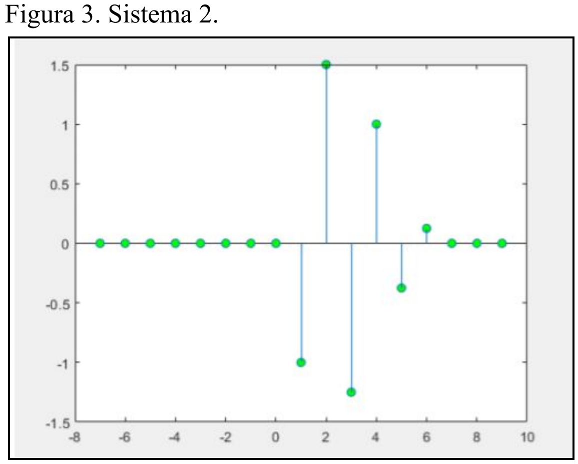


Figura 3. Convolución de los sistemas.

● Realice en el archivo de excel (TF y AF.xls hoja Sis. Disc. disponible en el aula virtual) la
simulación de la aplicación de la señal x (n) a cada uno de los sistemas.

Para la convolución del sistema 1 se obtuvieron estos valores ´-1.0000 1.5000 -1.2500 1.0000 -0.3750 0.1250 Usando el archivo tf y af.xls se realizó la aplicación de la señal ˜x1(n) a cada uno de los sistemas, se modificó la escala de la gráfica para una mejor visualización: Para el primer sistema:

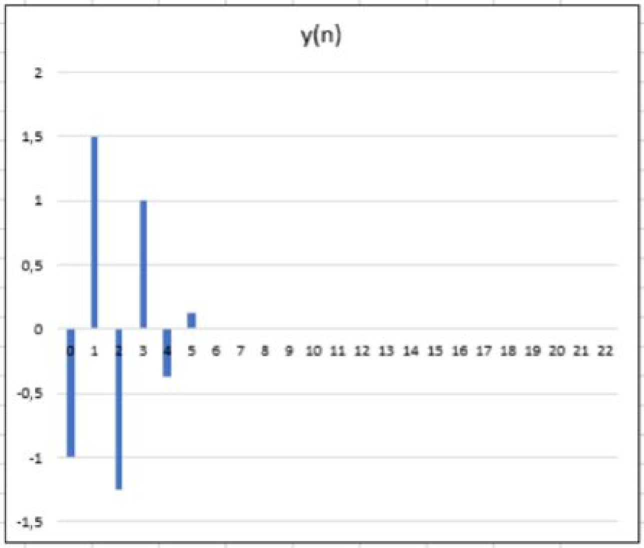


Figura 4. Convolución de excel.

● Observe los resultados de las convoluciones y las simulaciones en excel, ¿qué puede concluir?

Analizando las convoluciones y las simulaciones en excel se observa que son similares y que el único factor que varía es nuestro punto de origen debido a que en matlab inicia desde 1 debido a los vectores que nosotros introducimos y en excel comienza desde 0.

● Encuentre la transformada Z de la función x(n) .
Sistema 1.

$$
\begin{aligned}
y_{(n)} &= x_{(n)} - 0{,}5x_{(n-1)} + 0{,}25x_{(n-2)} \\
y_{(z)} &= x_{(z)} - 0{,}5z^{-1}x_{(z)} + 0{,}25z^{-2}x_{(z)} \\
\frac{y_{(z)}}{x_{(z)}} &= \frac{z^2 - 0{,}5z + 0{,}25}{z^2} \\
h_1(z) &= \frac{z^2 - 0{,}5z + 0{,}25}{z^2}
\end{aligned}
$$

Sistema 2.

$$
\begin{aligned}
y_{(n)} &= 0{,}5x_{(n)} + 0{,}1x_{(n-1)} - 0{,}1y_{(n-1)} + 0{,}2y_{(n-2)} \\
y_{(z)} &= 0{,}5x_{(z)} + 0{,}1z^{-1}x_{(z)} - 0{,}1z^{-1}y_{(z)} + 0{,}2z^{-2}y_{(z)} \\
\frac{y_{(z)}}{x_{(z)}} &= \frac{\frac{1}{2}z(z + 0{,}2)}{z^2 + 0{,}1z - 0{,}2} \\
\frac{y_{(z)}}{x_{(z)}} &= \frac{(0{,}5z + 0{,}1)}{z^2 + 0{,}1z - 0{,}2} \\
h_2(z) &= \frac{(0{,}5z + 0{,}1)}{z^2 + 0{,}1z - 0{,}2}
\end{aligned}
$$

Transformada z de x(n)

$$
\begin{aligned}
Función: x_1(n) &= [-1,\ 1, -0{,}5,\ 0{,}5] \\
Transformada: x_1(n) &= 1Z^0 + 1Z^{-1} - 0{,}5Z^{-2} + 0{,}5Z^{-3} \\
&= \frac{-1}{0{,}5Z^3 - 0{,}5Z^2 + Z}
\end{aligned}
$$

● Multiplique cada función de transferencia (sistemas 1 y 2) por la transformada Z de x (n) .
Sistema 1 multiplicado por x(z)

$$
y_1(z) = h_1(z) * x_{(z)}
$$
$$
y_1(z) = \frac{-z^2 + 0,5z - 0,25}{0,5z^5 - 0,5z^4 + z^3}
$$

Sistema 2 multiplicado por x(z)

$$
y_2(z) = h_2(z) * x_{(z)}
$$
$$
y_1(z) = \frac{-(0{,}5z + 0{,}1)}{0,5z^5 - 0,45z^4 + 0,85z^3 + 0,2z^2 - 0,2z}
$$

● Aplique un método de inversión de la transformada Z para encontrar los valores en el tiempo de la respuesta de los sistemas ante la entrada propuesta.

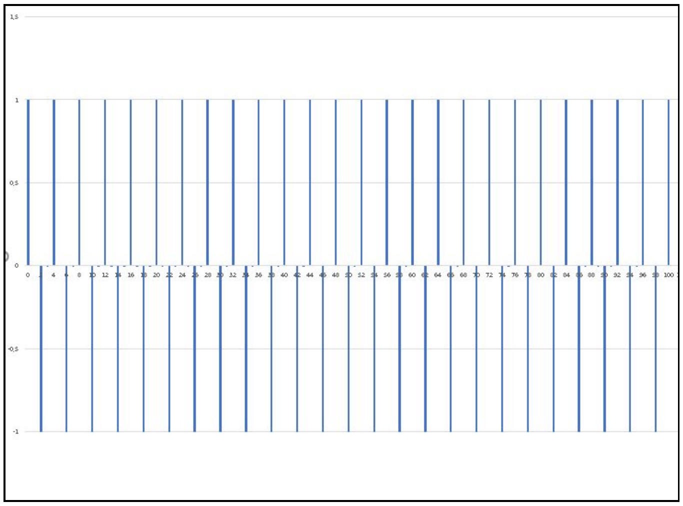
● Compare estos resultados con los de la simulación en excel. ¿Qué puede concluir?

● Teniendo en cuenta lo visto del comportamiento de los sistemas y la forma del mapeo de la función de transferencia en el plano Z, ¿Que cree que ocurre en dicho plano al aplicar la entrada a un sistema?.

● Realice las simulaciones y cálculos pertinentes para demostrar lo que dijo en el punto anterior.

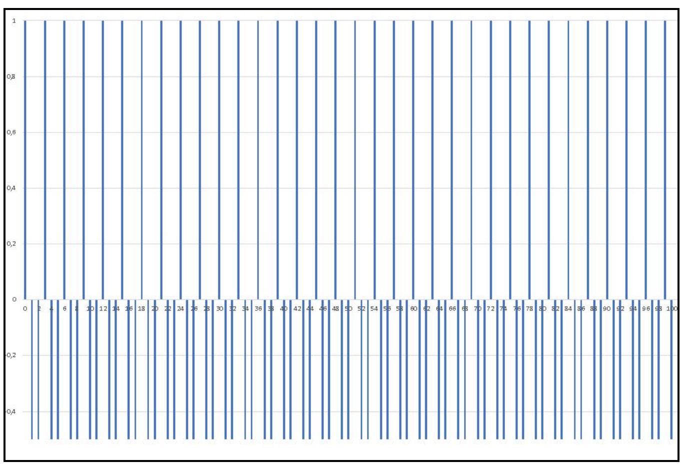
(Parte 2)
Revise el archivo de Hoja de cálculo ya mencionado. Considere el sistema cuya ecuación en diferencias es:
y(n) = x(n) , modifique los valores de la entrada (columna x(n)) teniendo en cuenta las siguientes funciones y observe las gráficas:

● x (n)= cos(2π(1/4)n)



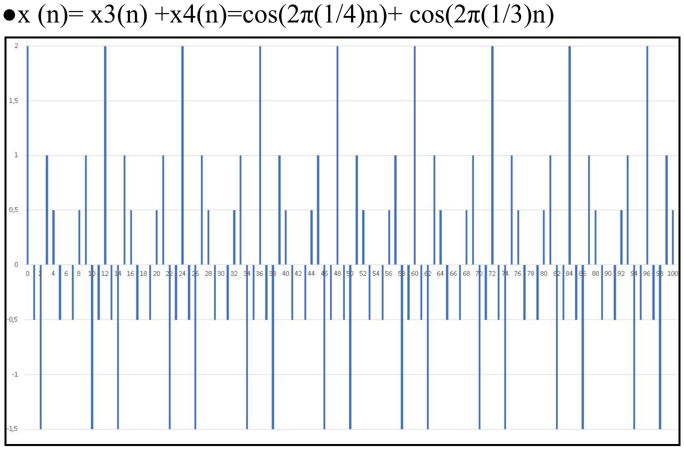
Periodo:4 muestras por ciclo.
Frecuencia:¼ ciclos por muestra.

●x (n)= cos(2π(1/3)n)



Periodo:3 muestras por ciclo
Frecuencia:⅓ ciclos por muestra

●x (n)= x3(n) +x4(n)=cos(2π(1/4)n)+ cos(2π(1/3)n)



Periodo:12 muestras por ciclo

Frecuencia: 1/12 ciclos por muestra

● ¿Cómo se puede determinar esos valores sin tener la gráfica?
Sabiendo que la ecuación general de una señal coseno discreta es de la forma: x(n) = cos(2π(f)n) (13) Se puede obtener la frecuencia directamente de cada una de las ecuaciones de x3(n) y x4(n). Para el caso de x5(n), la frecuencia es el máximo común divisor de las frecuencias de cada función.

● ¿Se calculan igual que si fueran señales de tiempo continuo?

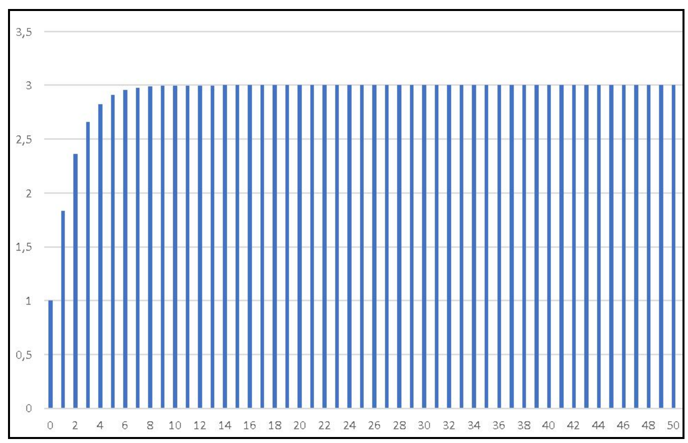
Modifique los valores de los coeficientes de la ecuación en diferencias (valores de b y a), representan las siguientes operaciones:

$$H(z) = 1/(1-(5/6)z^{-1}+(1/6)z^{-2})$$

$$H(n) = -2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

○ Ante la entrada impulso unitario

$$H(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\cdot 1^n$$



○ Ante la entrada x (n) 1

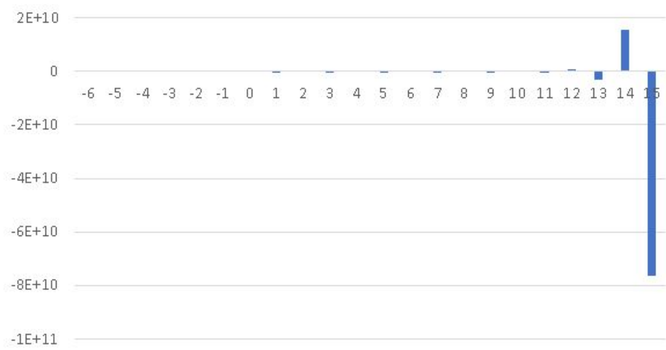
○ Ante la entrada x (n) 5

● Representa un sistema inestable y muestra las gráficas anteriores.

$$H(z) = \frac{3z}{z+\frac{1}{2}}$$

○ Ante la entrada impulso unitario

$$H(n) = \frac{1}{2} \cdot (1)^n + \frac{5}{2} \cdot (-5)^n$$



Se plantea el siguiente sistema inestable.
Sistema inestable 1:
y(n) = x(n) − 1, 8y(n − 1) − 1, 3y(n − 2).

● Explore diferentes combinaciones de valores de coeficientes y señales de entrada para familiarizarse con el comportamiento de los sistemas de tiempo discreto.

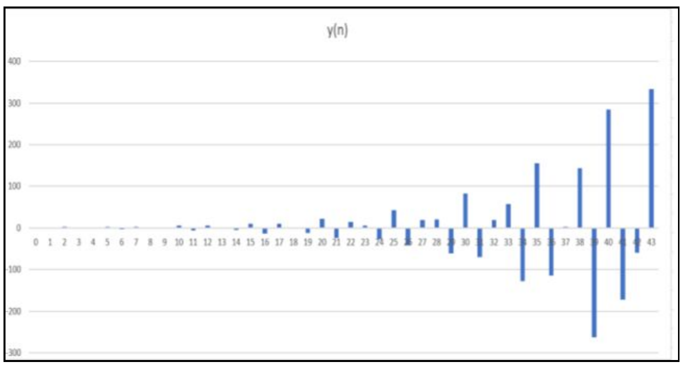


Figura x. Respuesta del sistema inestable 1 al impulso unitario.

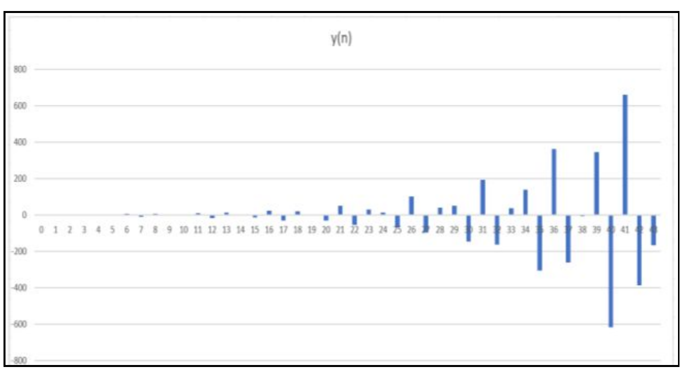


Figura x. Respuesta del sistema inestable 1 a x1(n)

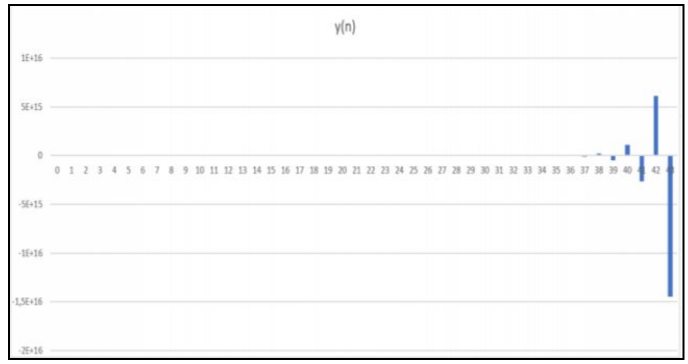


Figura x. Respuesta del sistema inestable 1 a x5(n)

Se plantea el siguiente sistema inestable.
Sistema inestable 2.
y(n) = x(n) + 1, 3y(n − 1)

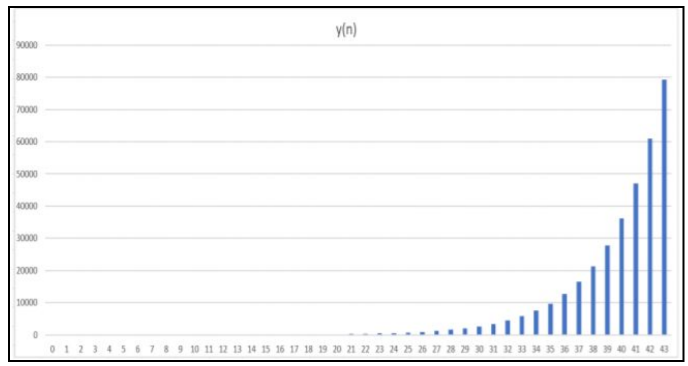


Figura x. Respuesta del sistema inestable 2 a impulso unitario.

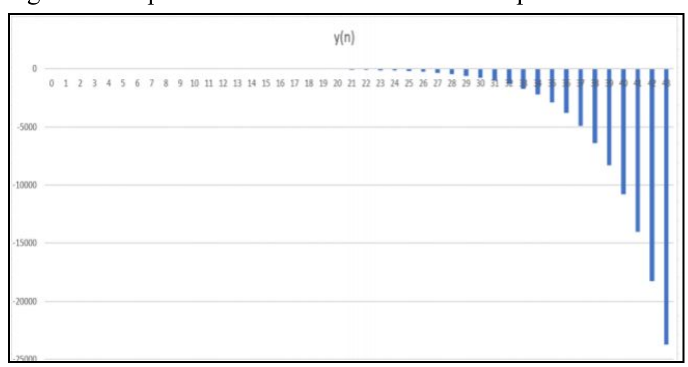


Figura x. Respuesta del sistema inestable 2 a x1(n)

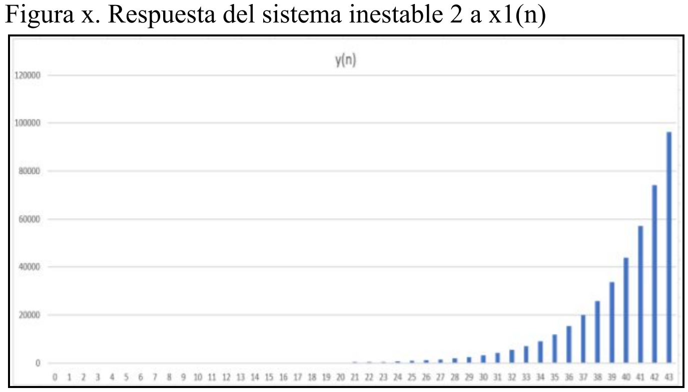


Figura x. Respuesta del sistema inestable 2 a x5(n)

Análisis frecuencial

Una herramienta habitual en el procesamiento y análisis de señales y sistemas es el análisis frecuencial
● ¿Qué es el análisis frecuencial (análisis de Fourier)?

El análisis de Fourier es una de las herramientas más útiles en procesado de señal. Se basa en la descomposición de una señal en términos de un conjunto de funciones base (sinusoidales de diferente frecuencia).

● ¿Qué utilidad práctica en ing. Mecatrónica tiene que hacer análisis frecuencial?

Principalmente para el análisis de señales

● ¿Qué es y para que se usa la serie de Fourier?

Las series de Fourier constituyen la herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para analizar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples (como combinación de senos y cosenos con frecuencias enteras).

● ¿Qué es y para que se usa la transformada de Fourier?

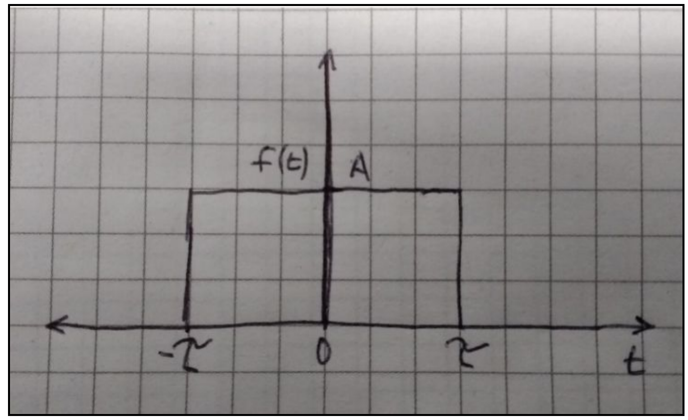
es una transformación matemática empleada para transformar señales entre el dominio del tiempo (o espacial) y el dominio de la frecuencia, que tiene muchas aplicaciones en la física y la ingeniería. Es reversible, siendo capaz de transformarse en cualquiera de los dominios al otro. El propio término se refiere tanto a la operación de transformación como a la función que produce.

● ¿Qué características tiene una señal periódica desde el punto de vista del análisis frecuencial?

Hay dos formas de realizar el análisis en frecuencia, una es mediante el analizador FFT y otra es mediante el filtrado digital (que se describe en el apartado 4.6 Analizadores). A continuación se muestra un diagrama de bloques para el análisis FFT. El principio del Análisis de Fourier es que toda función periódica puede representarse mediante una serie de senos y cosenos.

Una vez estudiado y entendido el análisis frecuencial para señales y sistemas. Haga un gráfico de los
espectros de frecuencia de las señales representadas en las siguientes figuras:

● Pulso cuadrado continuo de amplitud A y duración 2τ



Espectro de frecuencia de la señal:

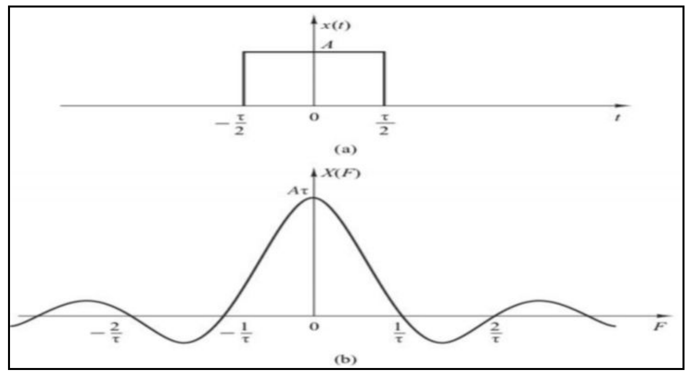
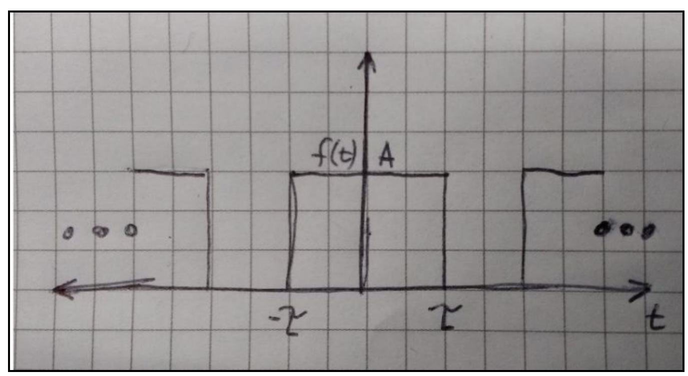


Figura x.Espectro de frecuencia de pulso cuadrado continuo periodico.

● Pulso cuadrado continuo periódico de amplitud A y duración 2τ



Espectro de frecuencia de la señal:

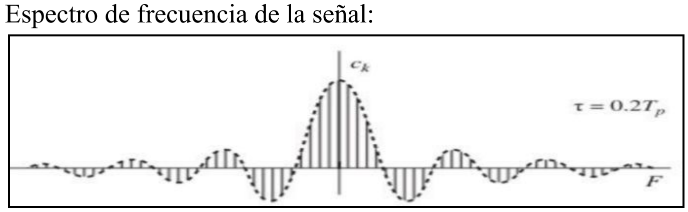
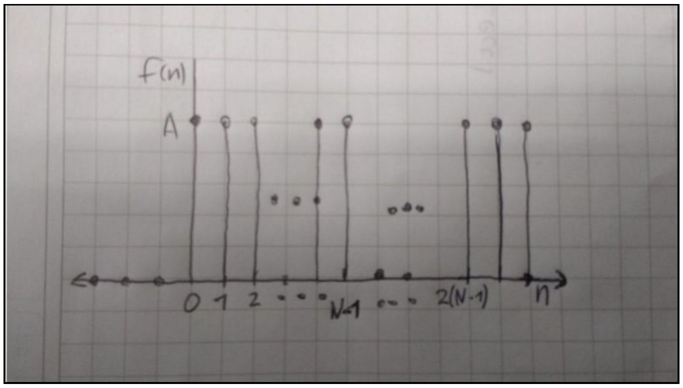


Figura x. Espectro de frecuencia de pulso cuadrado continuo periodico.

● Pulso cuadrado discreto *periódico* de amplitud A y duración N muestras



Espectro de frecuencia de la señal:

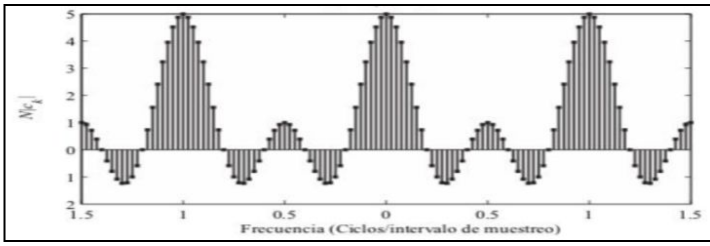
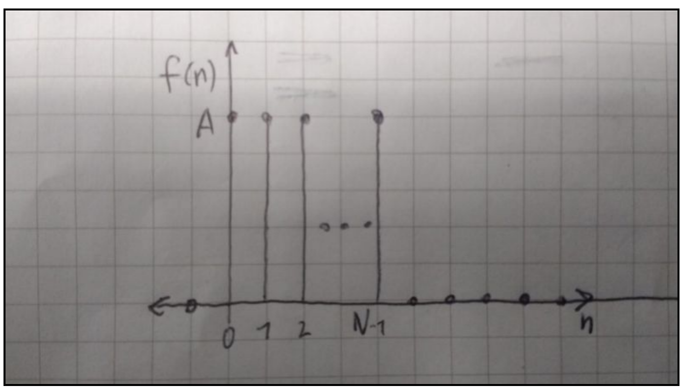


Figura x. Espectro de frecuencia de pulso cuadrado discreto periodico

● Pulso cuadrado discreto *<u>aperiódico</u>* de amplitud A y duración N muestras



Espectro de frecuencia de la señal:

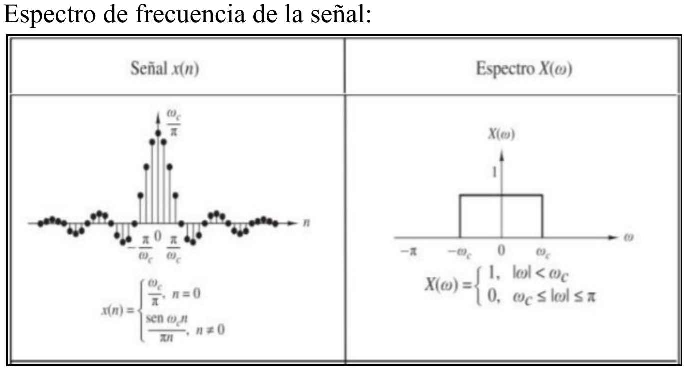


Figura x.Espectro de frecuencia de pulso cuadrado discreto aperiódico.

A partir de los gráficos que realizó en el dominio de la frecuencia, responda:

¿Cómo se relaciona la periodicidad y la continuidad en cada uno de los dominios dependiendo del caso?Revise los gráficos de magnitud en el dominio de la frecuencia.

¿Qué ocurre en el dominio de la frecuencia cuando las señales graficadas se desplazan en tiempo?Revise el gráfico de fase en el dominio de la frecuencia.

EJERCICIO PRÁCTICO:

Hoja de cálculo

En la hoja de cálculo anexa (Hoja An Freq), se tiene un ejemplo de señal periódica de tiempo discreto.

1. Se encuentran formulados los coeficientes ck (real e imaginario) de la serie de Fourier de tiempo discreto para la señal x(n), aparecerán los respectivos valores de magnitud y fase de dichos coeficientes.
2. Observe los gráficos de la señal y de los coeficientes (real e imaginario, magnitud y fase, ya se encuentra configurada la gráfica de la señal x(n)).
3. Varíe los valores de amplitud y cambie los tipos de función entre seno y coseno (No modifique la frecuencia), pruebe con valores de amplitud en 0 excepto una, realice diferentes pruebas y analice los gráficos.

A partir de los resultados de modificar los parámetros de la función x(n)

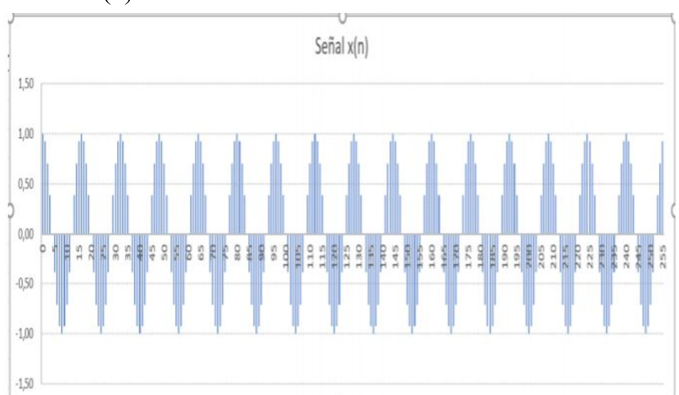


Figura x. Gráfico de x(n).

	Amplitud	Frecuenci	Función
Armónico 1	0	1/4	coseno
Armónico 2	0	1/8	seno
Armónico 3	1	1/16	coseno
Armónico 4	0	1/32	seno
Armónico 5	0	1/64	coseno
N (numero de muestras)	256		

Figura x.Datos de x(n).

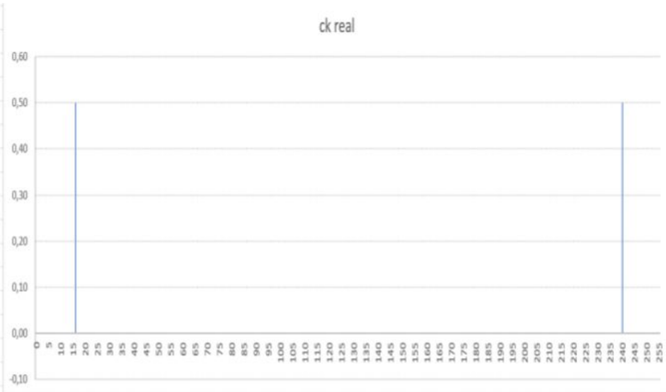


Figura x. Parte real de x(n).

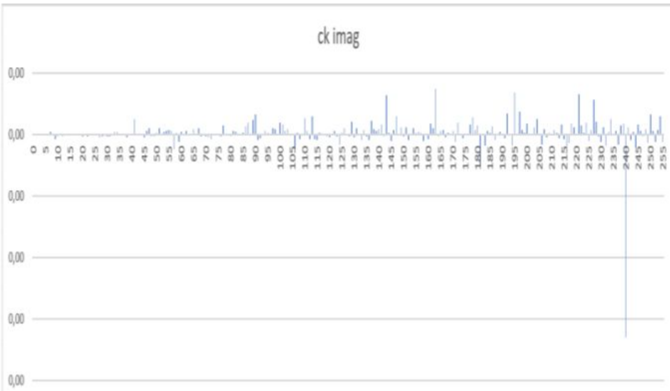


Figura x. Parte imaginaria de x(n).

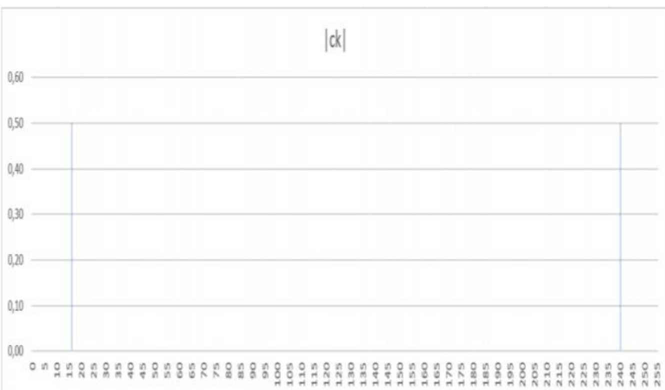


Figura x. Magnitud de x(n).

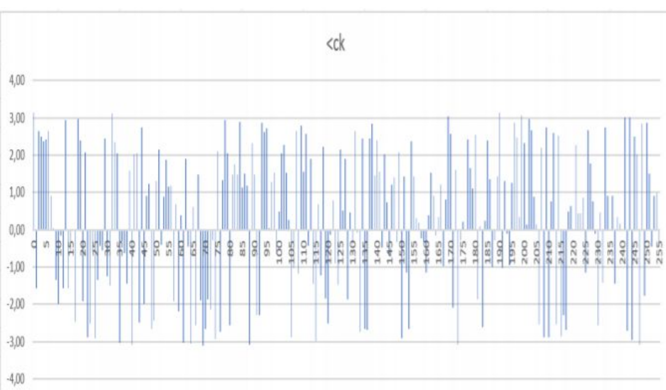


Figura x. Fase de x(n).

Se emplea nuevamente el archivo TF y AF.xls y se establece x2(n) como una función de senos y cosenos.

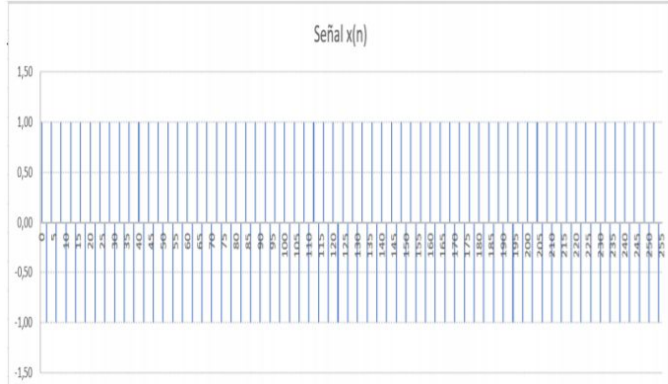


Figura x. Gráfico de x2(n).

	Amplitud	Frecuenci	Función
Armónico 1	1	1/4	coseno
Armónico 2	0	1/8	seno
Armónico 3	0	1/16	coseno
Armónico 4	0	1/32	seno
Armónico 5	0	1/64	coseno
N (numero de muestras)	256		

Figura x.Datos de x2(n).

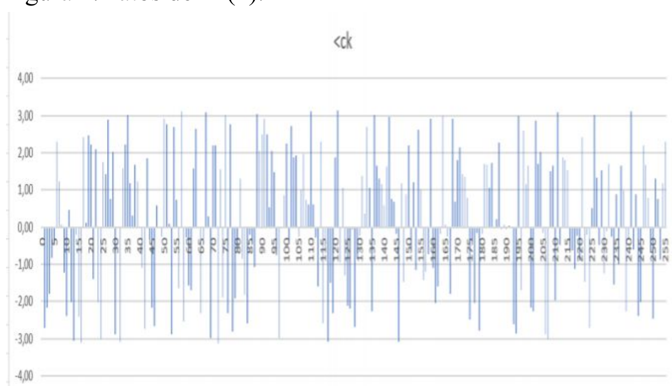


Figura x. Fase de x2(n).

Viendo la variación en las gráficas, se dedujo que entre más separados estén los polos del origen en el eje imaginario, mayor será la frecuencia. La amplitud será la mitad de la asignada, ya que la magnitud introducida en el programa de excel es la magnitud pico a pico. Al igual que en el eje imaginario del caso del seno, el valor de separación de los puntos depende de la frecuencia empleada en la función, y también poseerá una amplitud de la mitad de la ingresada, puesto que esta última es el valor pico a pico.

● ¿Qué ocurre en la parte imaginaria cuando se modifica la

amplitud de la función seno?
Se observó que aumentaba la frecuencia.

- ¿Qué ocurre en la parte real cuando se modifica la amplitud de la función coseno?

- ¿Como explica la ubicación en la gráfica de los coeficientes ck diferentes de cero?

- ¿Qué relación existe entre dicha ubicación de los respectivos coeficientes en la gráfica y la frecuencia de los armónicos?

Compare los valores y gráficos que obtuvo en la hoja de cálculo con los resultantes de aplicar la función FFT a la misma señal en matlab.

- ¿Qué son la DFT y la FFT?

- ¿Qué diferencia existe entre los valores obtenidos en los dos ejercicios?

- ¿Por qué son diferentes?

- ¿En qué consiste tal diferencia?

Realice la implementación de la DFT en Matlab. Realice una simulación de cálculo de la DFT y la FFT (use función FFT de matlab) para uno de los ejemplos que aplicó anteriormente. Compare el tiempo de ejecución entre la DFT y la FFT (use tic - toc en matlab)

Se realizó fourier para la señal x(n), la cual es un señal coseno de amplitud 1 y frecuencia de 1/16 Hertz

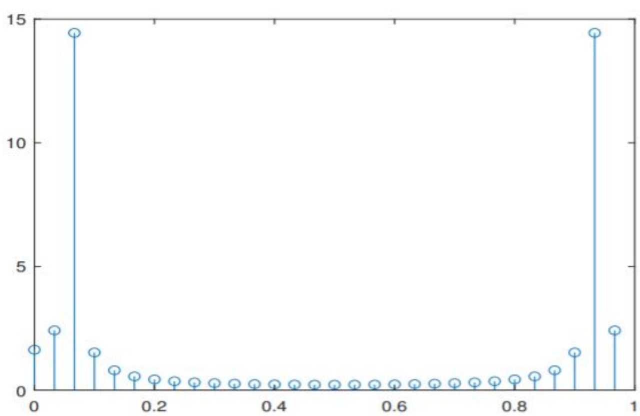


Figura x. Transformada de fourier para x(n)

Se realizó la transformada de Fourier para la señal x2(n), la cual es una señal coseno de amplitud 1 y frecuencia de 1/4 H.

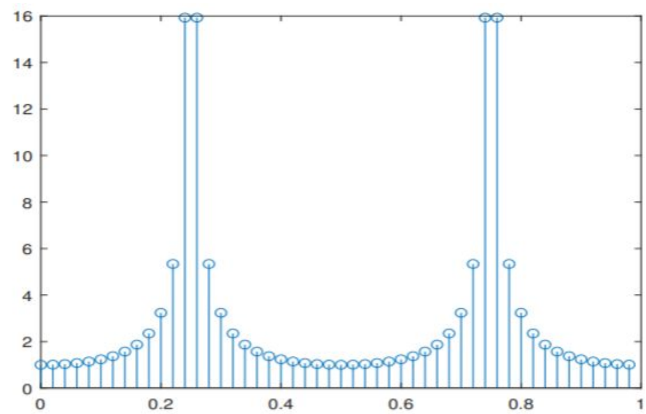


Figura x. Transformada de fourier para x2(n).

Responda:

- ¿Cuántas multiplicaciones y sumas son necesarias para calcular la DFT y la serie de Fourier de tiempo discreto?

- Investigue, ¿Cuántas multiplicaciones y sumas son necesarias para calcular la FFT sobre el mismo ejemplo?

- Suponiendo que tiene un procesador que tarda un milisegundo en cada operación:
  - ¿Cuánto tiempo tarda en realizar la DFT?
  - ¿Cuánto tiempo tarda en realizar la FFT?

Sobre el archivo Excel, variando los valores de frecuencia de los armónicos (use valores entre -1/2 y 1/2)

Señal 1:

	Amplitud	Frecuenci	Función
Armónico 1	20	1/10	coseno
Armónico 2	0	1/8	seno
Armónico 3	0	1/16	coseno
Armónico 4	0	1/32	seno
Armónico 5	0	1/64	coseno
N (numero de muestras)	256		

Figura x. Parámetros de la señal 1.

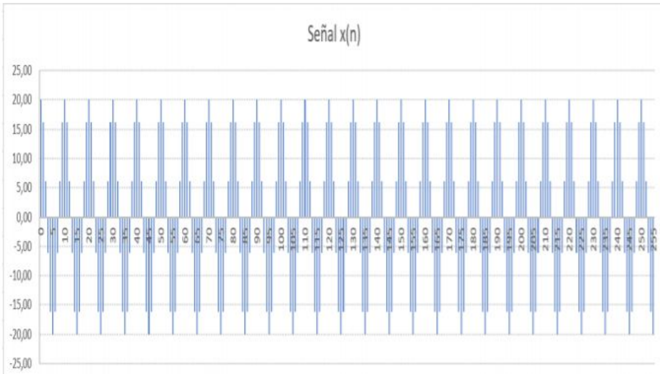


Figura x. Gráfica de la señal 1.

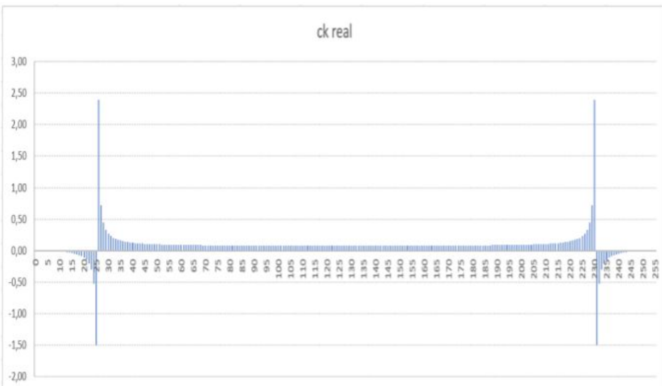


Figura x. Parte real de la señal 1.

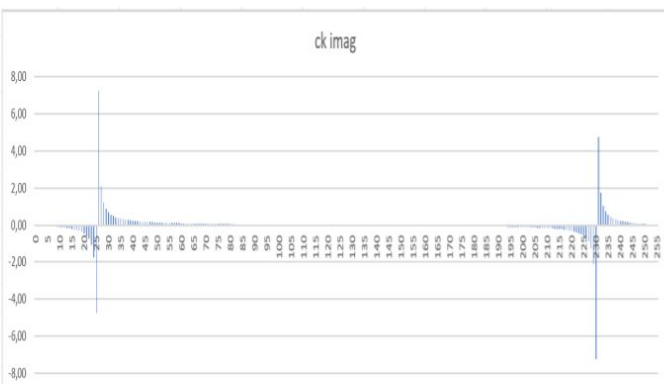


Figura x. Parte imaginaria de la señal 1.

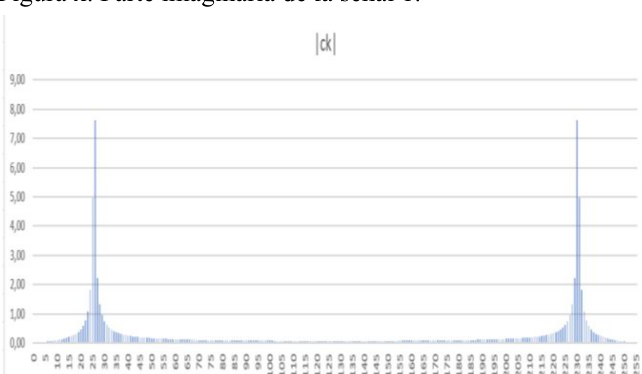


Figura x. Magnitud de la señal 1.

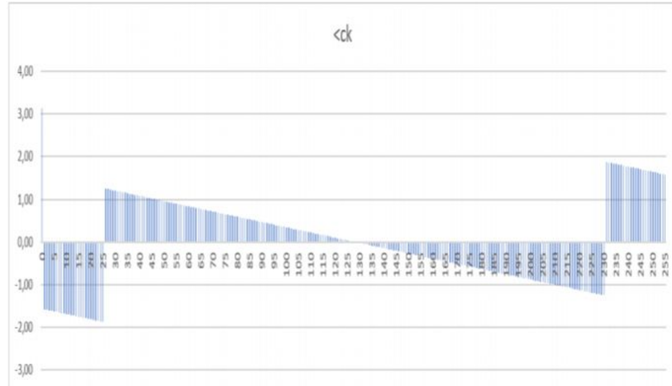


Figura x. Fase de la señal 1.

Señal 2:

	Amplitud	Frecuenci	Función
Armónico 1	20	1/10	coseno
Armónico 2	0	1/8	seno
Armónico 3	0	1/16	coseno
Armónico 4	0	1/32	seno
Armónico 5	0	1/64	coseno
N (numero de muestras)	256		

Figura x. Parámetros de la señal 2.

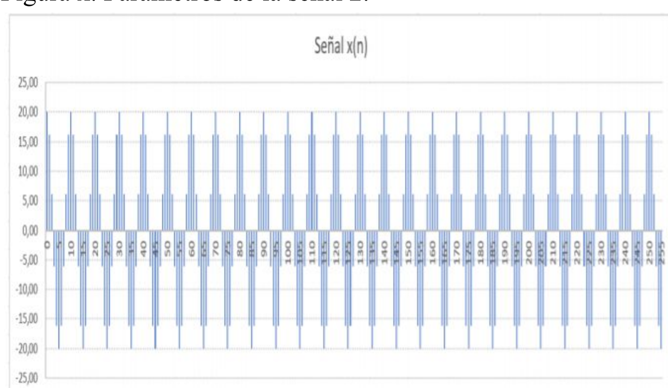


Figura x. Gráfica de la señal 2.

Figura x. Parte real de la señal 2.

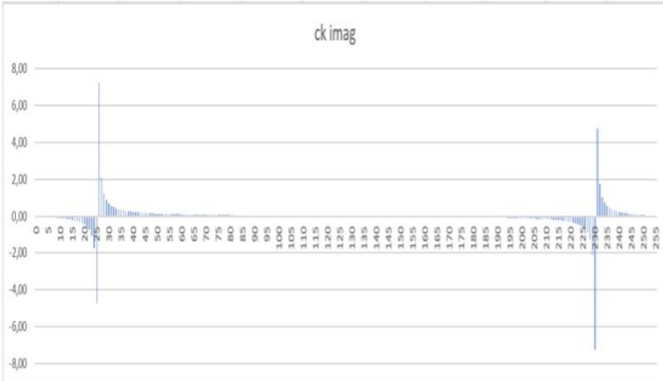


Figura x. Parte imaginaria de la señal 2.

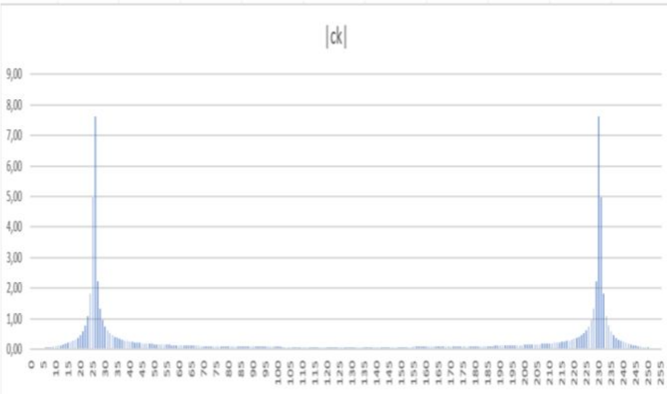


Figura x. Magnitud de la señal 2.

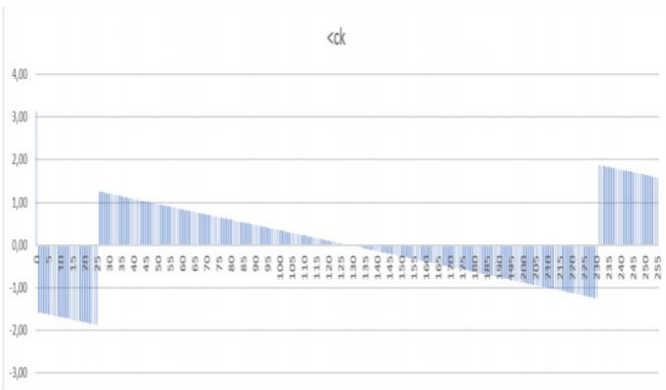


Figura x. Fase de la señal 2.

¿Qué ocurre con el gráfico de los coeficientes ck?

¿Cómo explica la deformación/distorsión en la forma del gráfico?

¿Qué relación existe entre la representación frecuencial y la Tda Z?

Autoevaluación:
1)100%
2)100%
3)97%
4)98%