Semana 8 Taller en clase.

1. Servosistemas tipo 1 seguimiento a escalón. Sistemas lineales.
2. Asignación de polos, Matriz de transformación T, Ackerman.
3. Definición Sistemas de fase No mínima.
4. Ejercicio retroalimentación de estados sistemas no lineales.

1. Usar el método de Ackerman, transformación T y Asignación de polos para calcular el vector de ganancia K del siguiente sistema. El máximo sobre impulso debe ser del 10% para entrada escalón y el error de estado estable debe ser cero. Seleccione un tiempo de establecimiento. Simular el sistema de control.

$$A = \begin{bmatrix} -12 & -10 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Asignación de polos

$$\boldsymbol{A - BK} = \begin{bmatrix} -12 & -10 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K1 & K2 & K3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -12 - K1 & -10 - K2 & -5 - K3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A - BK} & \boldsymbol{B}\,K_I \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 - K1 & -10 - K2 & -5 - K3 & KI \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico

$$s^4 + (K1 + 12)s^3 + (K2 + 3Ki + 10)s^2 + (K3 + 5Ki + 5)s - 5Ki$$

Polinomio deseado

$$\zeta = 0.59$$

$$T_{ss} = 20seg$$

$$\beta = 10$$

$$PD = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2)(s + \beta\zeta\omega_n)(s + \beta\zeta\omega_n)$$

$$PD = s^4 \ + \ 44s^3 \ \ + \ 571.44s^2 \ + \ 2057.84s \ + 4578.43$$

Igualar los coeficientes de PC y PD

$$(K1 \ + \ 12) = 44$$

$$(K2 \ + \ 3Ki \ + \ 10) = 571.44$$

$$(K3 \ + \ 5Ki \ + \ 5) = 2057.84$$

$$-\ 5Ki = 4578.43$$

$$K = [-7.59 \qquad -4.01 \qquad -2.48 \quad -0.091]$$

Por Ackerman usar este modelo

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & 0 \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & -10 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -5 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K = [0\ 0 \dots 0\ 1]\hat{P_c}^{-1}\phi(\hat{A})$$

La matriz de controlabilidad

$$\widehat{Pc} = [\hat{B} \quad \hat{A}\hat{B} \quad \hat{A}^2\hat{B} \quad \hat{A}^3\hat{B}]$$

$$\widehat{Pc} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 134 & -1493 \\ 0 & 1 & -12 & 134 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & -3 & 31 & -337 \end{bmatrix}$$

$$\phi(\hat{A}) = s^4 + 44s^3 + 571.44s^2 + 2057.84s + 4578.43$$

$$\phi(\hat{A}) = \hat{A}^4 + 44\hat{A}^3 + 571.44\hat{A}^2 + 2057.84\hat{A} + 4578.43 * I$$

$$K = [0\ 0\ 0\ 1]\widehat{P_c}^{-1}\phi(\hat{A})$$

$$K = [-7.59 \quad -4.01 \quad -2.48 \quad 0.091]$$

Transformación T

Polinomio característico de $\hat{A}$

$$PC = s^4 + 12s^3 + 10s^3 + 5s + 0$$

$$W = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 12 & 1 \\ 10 & 12 & 1 & 0 \\ 12 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{Pc} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 134 & -1493 \\ 0 & 1 & -12 & 134 \\ 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & -3 & 31 & -337 \end{bmatrix}$$

$$PD = s^4 + 44s^3 + 571.44s^2 + 2057.84s + 4578.43$$

$$T = P_C * W$$

$$K = [\alpha_n - a_n \quad \alpha_{n-1} - a_{n-1} \quad \ldots \quad \alpha_1 - a_1]T^{-1}$$

$$K = [4578.43\text{-}0 \quad 2057.84 - 5 \quad 571.44 - 10 \quad 44 - 12]T^{-1}$$

$$K = [-7.59 \quad -4.01 \quad -2.48 \quad 0.091]$$

Sistema de fase mínima y No mínima

Una función de transferencia se denomina función de transferencia de fase mínima si todos sus ceros están en la parte izquierda del plano complejo s. Se denomina función de transferencia de fase NO mínima si tiene cero en la parte derecha del plano complejo s.

2.Realizar un control por retroalimentación de estados con observador con entrada escalón para el siguiente sistema (péndulo invertido). Hallar el vector de retroalimentación por lo tres métodos: Ackerman, matriz de transformación y asignación de polos. Simular con el sistema lineal y no lineal. Seleccionar sobre impulso y tiempo de establecimiento.

Modelo no lineal péndulo invertido.

$$(mlcos\theta)\ddot{\theta} + (M+m)\ddot{x} = -b\dot{x} - (mlsen\theta)\dot{\theta}^2 + F \quad (1)$$

$$(ml^2 + I)\ddot{\theta} + (mlcos\theta)\ddot{x} = -C\dot{\theta} + mglsen\theta \quad (2)$$

Los puntos de operación son $\bar{X}_{1,} = 0.1$ $\bar{X}_{2,} = 0$ $\bar{X}_{3,} = X$ $\bar{X}_{4,} = 0$ $\bar{F} = 0$

Los valores a los parámetros y espacio de estados son.

```
%% Móvil
M = 0.48; % masa
b = 3.83; % constante de fricción
%% Péndulo
m = 0.16; % masa
L = 0.25; % longitud del péndulo
I = 0.0043; % momento de inercia alrededor del centro de gravedad
C = 0.00218; % constante de fricción
g = 9.8; % aceleración de gravedad
```

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 33.22 & -0.1847 & 0 & 20.28 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.076 & 0.01154 & 0 & -7.2522 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -5.29 \\ 0 \\ 0 \\ 1.89 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Solución.

1. Se hallan la matriz de controlabilidad y se halla el determinante.

$$Pc = \begin{bmatrix} -5.29 & 0 & -137.0 & -29.9 \\ 0 & -137.0 & -29.9 & -4180.0 \\ 0 & 1.89 & -2.72 & 18.2 \\ 1.89 & -2.72 & 18.2 & 153.0 \end{bmatrix}$$

$|Pc| \neq 0$ el sistema es controlable

Observabilidad si se mide θ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$Po = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 33.2 & -0.185 & 0 & 20.3 \\ -48.2 & 33.5 & 0 & -151 \end{bmatrix}$$

$|Pc| = 0$ el sistema no es observable si se mide θ

Pero si se mide x, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ el sistema si es observable.

$$Po = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2.08 & 0.0115 & 0 & -7.25 \\ 15.4 & -2.16 & 0 & 52 \end{bmatrix}$$

$$|Pc| \neq 0$$

2. Hallar la matriz de ganancias K del control por retroalimentación de estados.

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} & \boldsymbol{B}\, K_I \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\boldsymbol{K} = [k1\ k2\ k3\ k4]$$

Se halla el polinomio característico

$s^5 + (1.89k4 - 5.29k1 + 7.44)s^4 + (1.89k3 - 137.0k2 - 39.3k1 + 11.3k4 - 32.1)s^3 + (32.5k1 - 1050.0k2 + 11.3k3 - 62.7k4 + 1.89ki - 199.0)s^2 + (11.3ki - 62.7k3)s - 62.7ki$

Se halla a un polinomio deseado

$$PD = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2)(s + \beta\zeta\omega_n)^3$$

$$s^5 + 18.3s^4 + 118.0s^3 + 305.0s^2 + 253.0\text{s} + 75.2$$

Se igualan los coeficientes de ambos polinomios y se despeja el sistema lineal.

$$[k1\ \ k2\ \ k3\ \ k4\ ki] = [-2.3895, -0.5448, -4.2444\,, -0.9480, -1.1988]$$

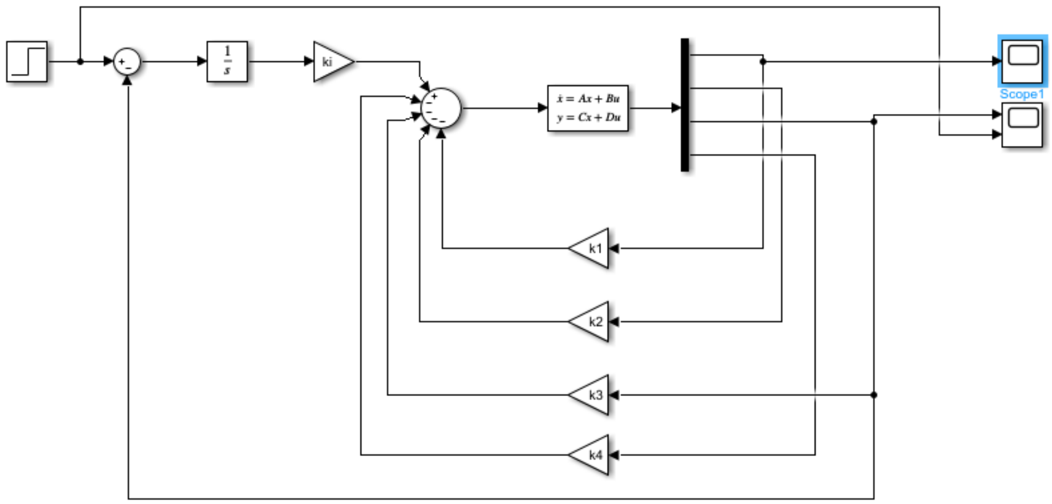
Para verificar el cálculo se puede usar la función place de Matlab la cual usa la fórmula de Ackerman

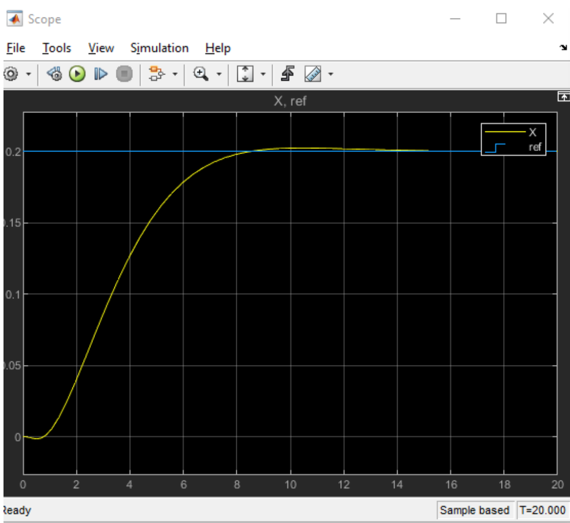
```
% por ackerman
 Ab=[A [0;0 ;0; 0];-C 0]
 Bb=[B;0]
 K = place(Ab,Bb,[-0.5714 + 0.2768i -0.5714 - 0.2768i -5.7 -5.72 -5.71])
```

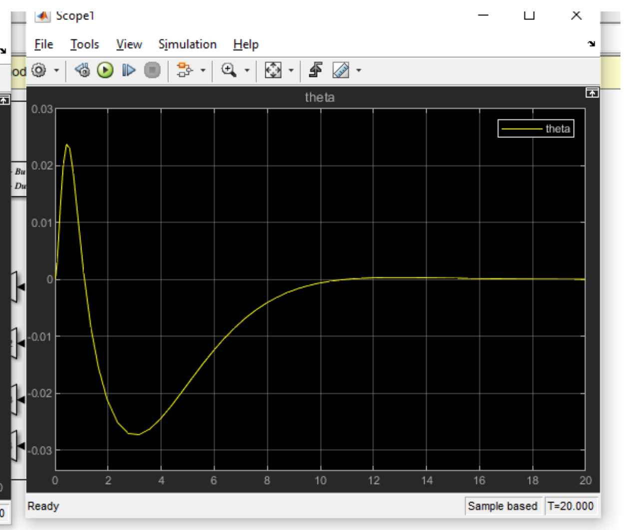
```
K =

   -2.3854   -0.5443   -4.2351   -0.9433    1.1960
```

3. Se prueba el control en Simulink







4. Diseño del observador de orden completo. Primero se calcula el polinomio característico del observador.

$$\boldsymbol{det(sI - (A - Lc))}$$

$$s^4 + (L3 + 7.44)s^3 + (7.44L3 + L4 - 32.1)s^2 + (0.0115L2 - 2.08L1 - 32.1L3 + 0.185L4 - 199.0)s - 0.000309L1 - 2.08L2 - 199.0L3 - 33.2L4$$

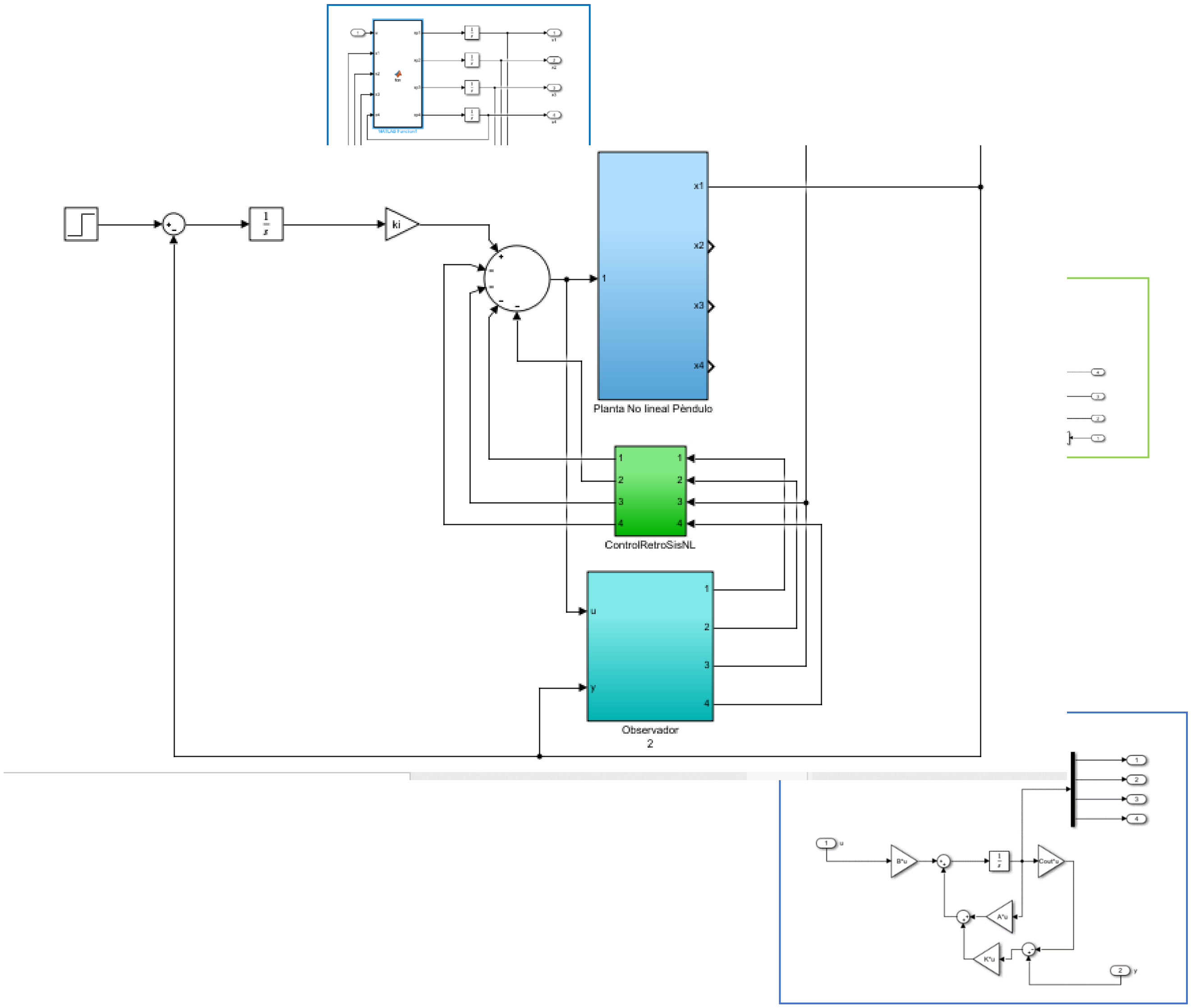
Se calcula un polinomio deseado con polos 10 veces más rápidos que el controlador.

$$s^4 + 126.0s^3 + 4640.0s^2 + 44900s + 218000$$

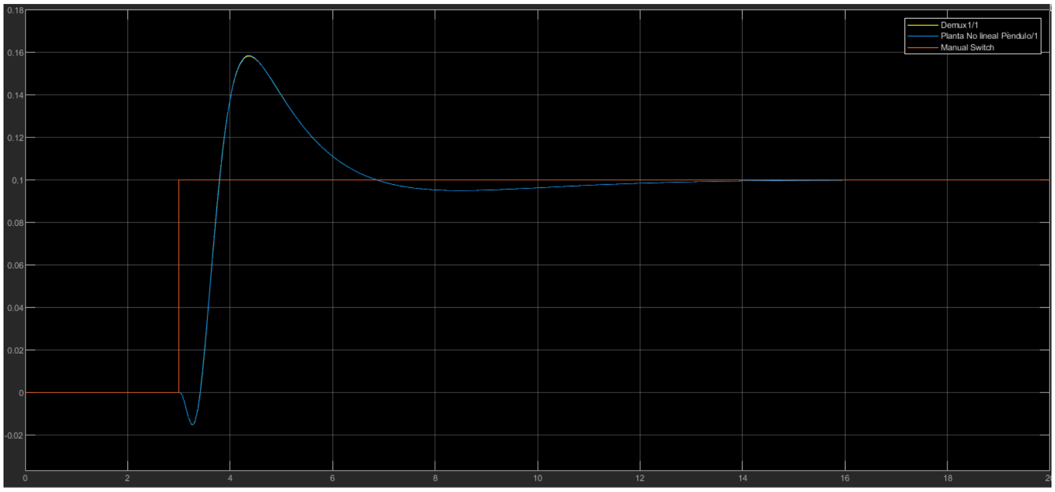
Por lo tanto las ganancias del observador son:

$$[L1\ L2\ L3\ L4\,] = [-24214\,, -176750, 118.3, 3790.5\,]$$

5. Se realizan las simulaciones correspondientes para verificar el diseño del sistema de control.



Respuesta al escalón de x



Respuesta del ángulo theta con perturbación