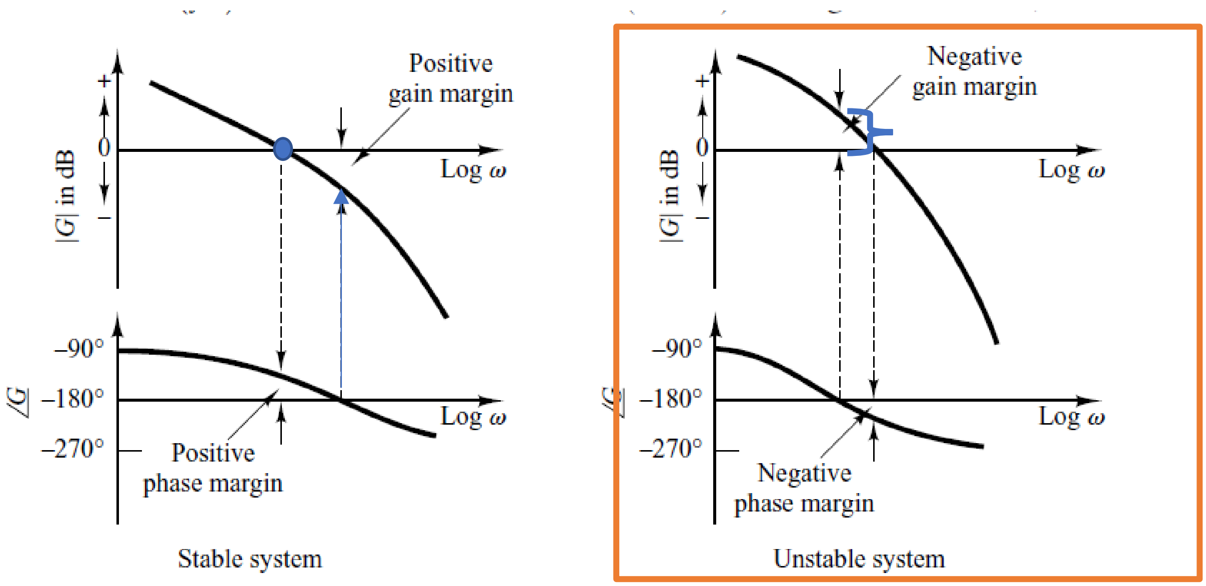
Notas de clase semana 10

Andrés Castro

1. Margen de fase y margen de ganancia.
2. Prototipo de segundo orden en el dominio de la frecuencia.
3. Diseño de compensadores de adelanto. (bode y lugar geométrico de las raíces).
4. Dudas.

Especificaciones de un sistema de control en el dominio de la frecuencia.

El margen de fase y margen de ganancia permiten determinar el grado de estabilidad de un sistema con retroalimentación a partir de los diagramas de bode.



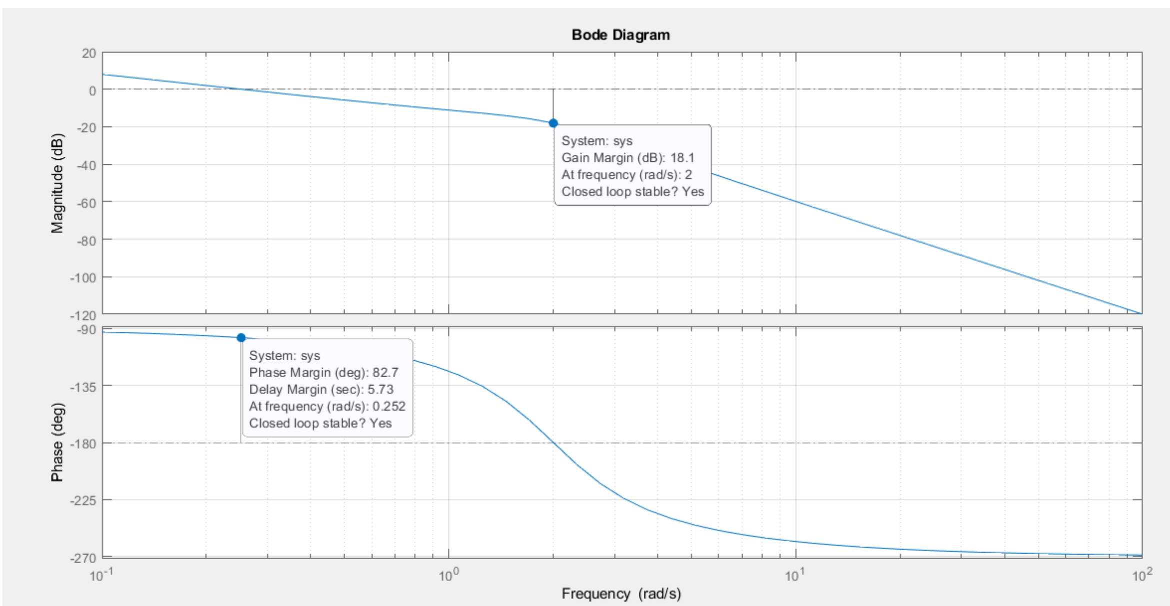
El margen de fase es el ángulo que hace falta a G(s) para llegar a -180º y volver inestable el sistema en lazo cerrado cuando la ganancia es 0dB. Si la ganancia no cruza por 0dB ósea es inferior. El margen de fase será infinito.

Según Ogata. El margen de fase es la cantidad de atraso de la fase adicional en la frecuencia de corte con ganancia 0dB que hace falta para inestabilizar el sistema en lazo cerrado. **El margen de Ganancia**. Es la ganancia cuando la fase cruza por -180º. Es el valor por el cual hay que multiplicar la ganancia (o sumar en dB) la función de transferencia G(s) para que el sistema en lazo cerrado sea inestable. Si la fase no cruza por -180 grados el margen de ganancia será infinito.

Ejemplo:

$$G(s) = 5 * \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 4s}$$

```
>> num=[1]

num =

     1

>> den=[1 2 4 0]

den =

     1     2     4     0

>> bode(num,den)
```



El margen de fase es de 82.7 grados.

Y el margen de ganancia es de 18.1 dB.

Relación de las especificaciones en el dominio del tiempo y en la frecuencia.

Relación ω_{BW} y t_s .

$$\omega_{BW} = \omega_n \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

$$\omega_{BW} = \left(\frac{4}{\zeta t_s}\right) \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

Aproximación lineal de la relación ω_{BW} y t_s .

$$\omega_{BW} \approx \omega_n(-1.19\zeta + 1.85)$$

Relación ϕ_m y ζ

$$0.3 \leq \zeta \leq 0.8$$

$$\phi_m = tan^{-1}\left(2\zeta\left[\frac{1}{4(\zeta^4+1)^{1/2} - 2\zeta^2}\right]^{1/2}\right)$$

Aproximación lineal de la relación ϕ_m y ζ

$$\phi_m \approx 100\zeta \quad 0 \leq \zeta \leq 0.7$$

Prototipo de segundo orden en el dominio de la frecuencia.

Frecuencia de resonancia se obtiene el máximo valor de la respuesta en frecuencia.

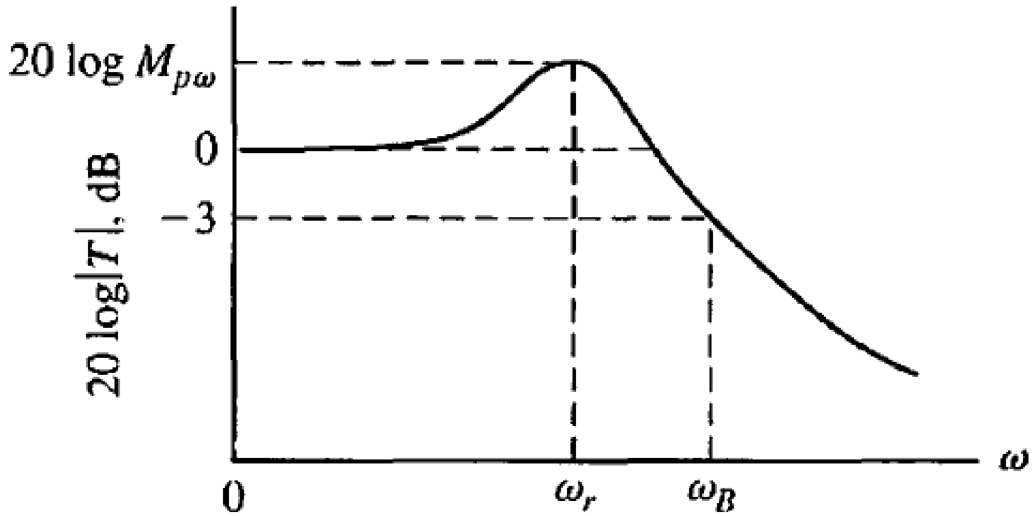
Ancho de banda es la frecuencia en donde la ganancia decae -3dB.

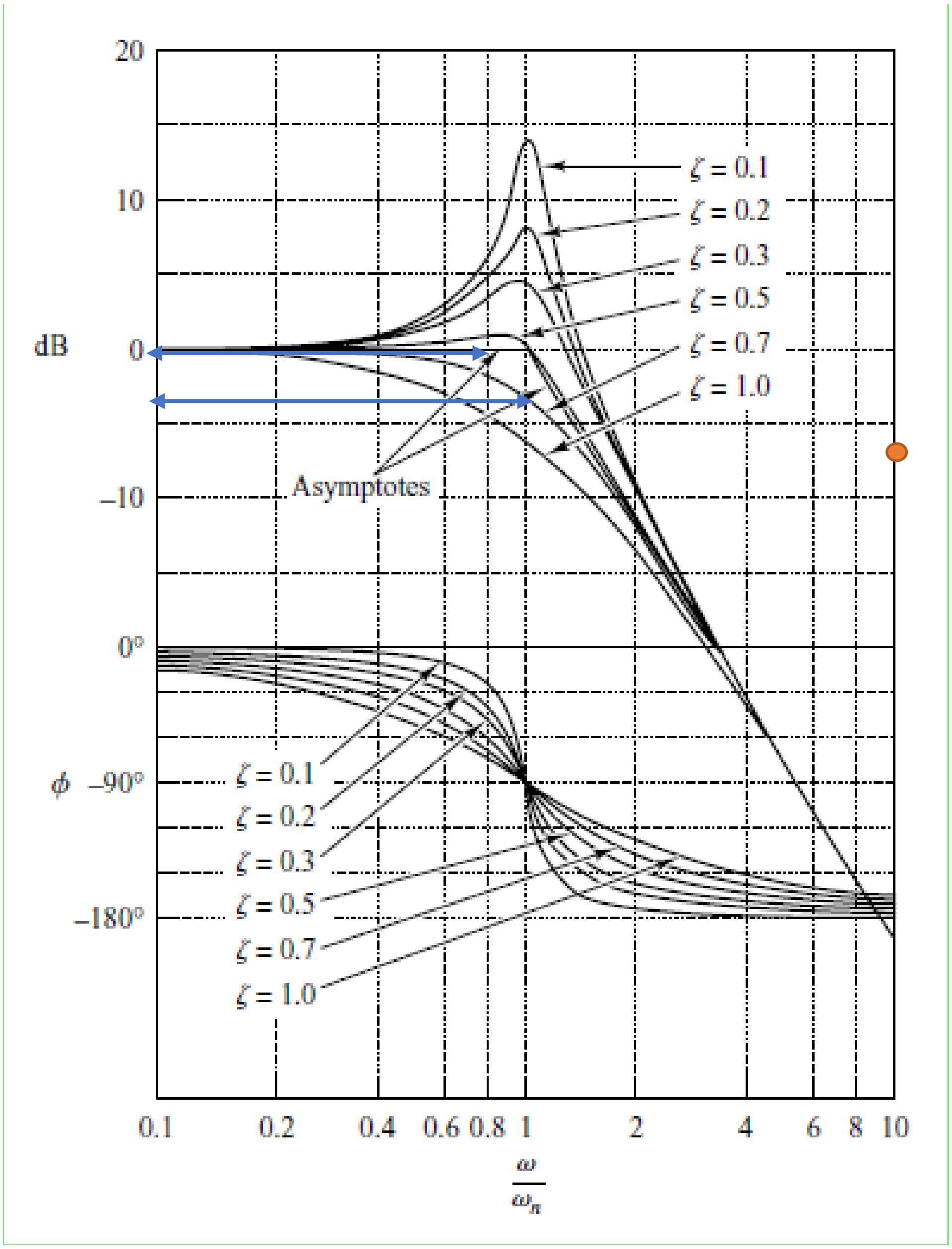
Frecuencia de resonancia.

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \quad \zeta < 0.7$$

La magnitud en la frecuencia de resonancia.

$$M_{pw} = |G(\omega_r)| = \left(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)^{-1}$$


20 log $M_{p\omega}$
0
−3
20 log|T|, dB
0
ω_r
ω_B
ω

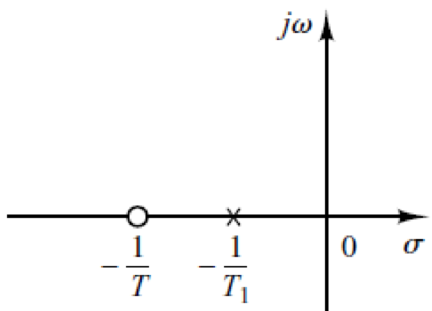


20
10
0
−10
dB
ζ = 0.1
ζ = 0.2
ζ = 0.3
ζ = 0.5
ζ = 0.7
ζ = 1.0
Asymptotes
0°
−90°
−180°
ϕ
ζ = 0.1
ζ = 0.2
ζ = 0.3
ζ = 0.5
ζ = 0.7
ζ = 1.0
0.1
0.2
0.4
0.6
0.8
1
2
4
6
8
10
ω/ωn

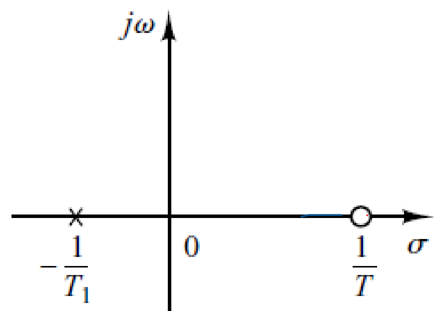
Sistemas de fase mínima y no mínima

Sistemas de fase mínima: Es un sistema cuya función de transferencia no tiene polo y/o cero en el semiplano derecho del plano s.

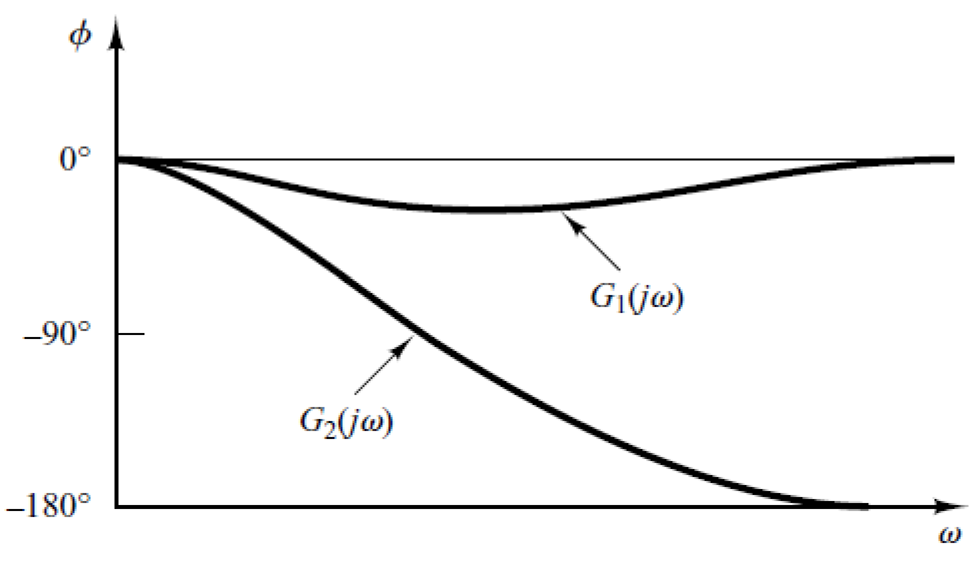
Sistemas de fase NO mínima: Es un sistema cuya función de transferencia tiene polo y/o cero en el semiplano derecho del plano s.



$$G_1(s) = \frac{1 + Ts}{1 + T_1 s}$$



$$G_2(s) = \frac{1 - Ts}{1 + T_1 s}$$



Compensadores.

El problema de diseño es la selección de la ganancia K, el cero z y el pole p. Con el propósito de proporcionar el comportamiento deseado.

$$\boxed{G_c = K_c \frac{s+z}{s+p}}$$

Si |z|<|p| es un compensador de adelanto de fase.

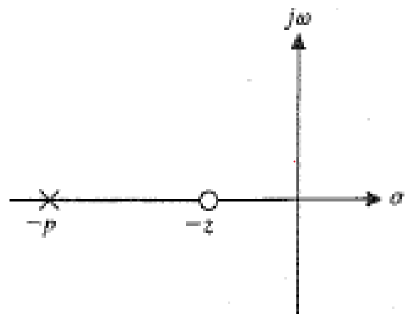
Si |z|>|p| es un compensador de atraso de fase.

La respuesta transitoria se mejora con un compensador de adelanto. La precisión de la respuesta en estado estable no la cambia mucho. Y acentua los efectos del ruido de alta frecuencia.

El compensador de atraso mejora notablemente la respuesta en estado estable pero aumenta el tiempo de la respuesta transitoria y suprime el ruido de alta frecuencia.

El compensador de atraso – adenlanto combina ambas características.

Compensador de Adelanto

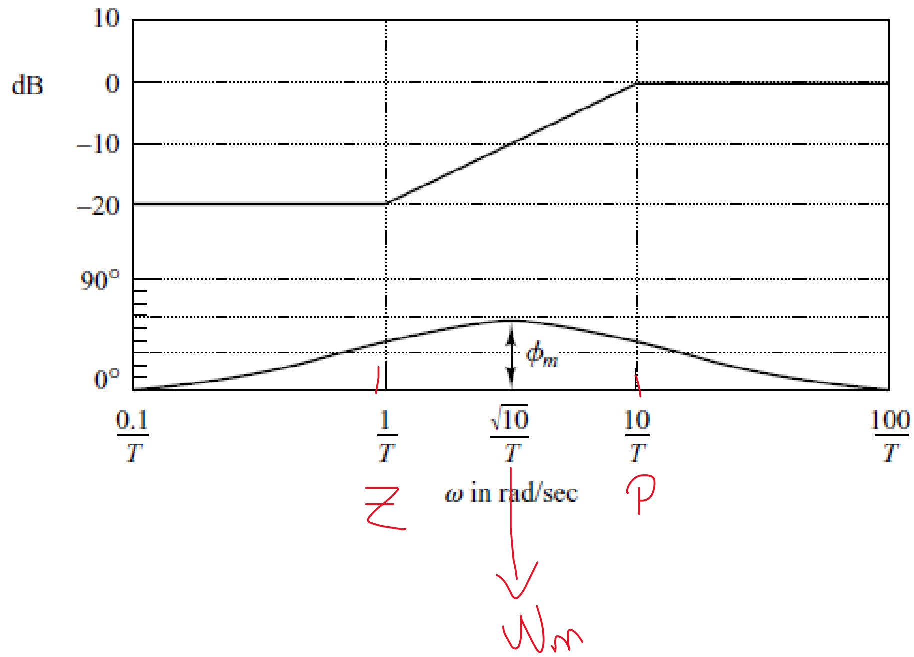


$$z = \frac{1}{T}$$

$$p = \frac{1}{\alpha T}$$

$$G_{c(Lead)} = K_c \frac{\mathrm{jw} + \frac{1}{T}}{\mathrm{jw} + \frac{1}{\alpha T}}$$

$$0 < \alpha < 1$$



El máximo ángulo en el compensador de adelanto se da en la frecuencia ω_m donde ω_m es la media geométrica de $z = \frac{1}{T}$ $p = \frac{1}{\alpha T}$. En la mitad de las frecuencias del polo y el cero en la escala logarítmica frecuencias.

$$\omega_m = \sqrt{zp}$$

El ángulo máximo esta dado por (demostrar)

$$sin(\phi_m) = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}$$

Hay que recordar que el margen de fase modifica indirectamente el sobre impulso y el ancho de banda el tiempo de establecimiento.

$$\phi_m \approx 100\zeta \quad 0 \leq \zeta \leq 0.7$$

$$\omega_{BW} \approx \left(\frac{4}{\zeta t_s}\right)(-1.19\zeta + 1.85)$$

Diseño de compensadores en adelanto.

Diseñar un controlador de adelanto para que margen de fase sea 50º y el constante de estado estático de velocidad K_V sea 10 seg^{-1}

$$\frac{1}{K_v} = error\ para\ rampa = 0.1$$

$$G(s) = \frac{2}{s(s+4)}$$

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

$$G_c = K_c \frac{s+\frac{1}{T}}{s+\frac{1}{\alpha T}}$$

$$G_c = \alpha K_c \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

$$\alpha K_c = K$$

$$G_c = K \frac{Ts+1}{\alpha Ts+1}$$

1. Hallar la ganancia K para que Kv = $10\ \text{seg} - 1$

$$K_v = \lim_{s \to 0} s\, G_{c\,(s)}\, G(s) = 10\ \text{seg} - 1$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} \cancel{s}\, K \frac{\cancel{Ts}+1}{\cancel{\alpha Ts}+1} * \frac{2}{\cancel{s}(\cancel{s}+4)} = 10\ \text{seg} - 1$$

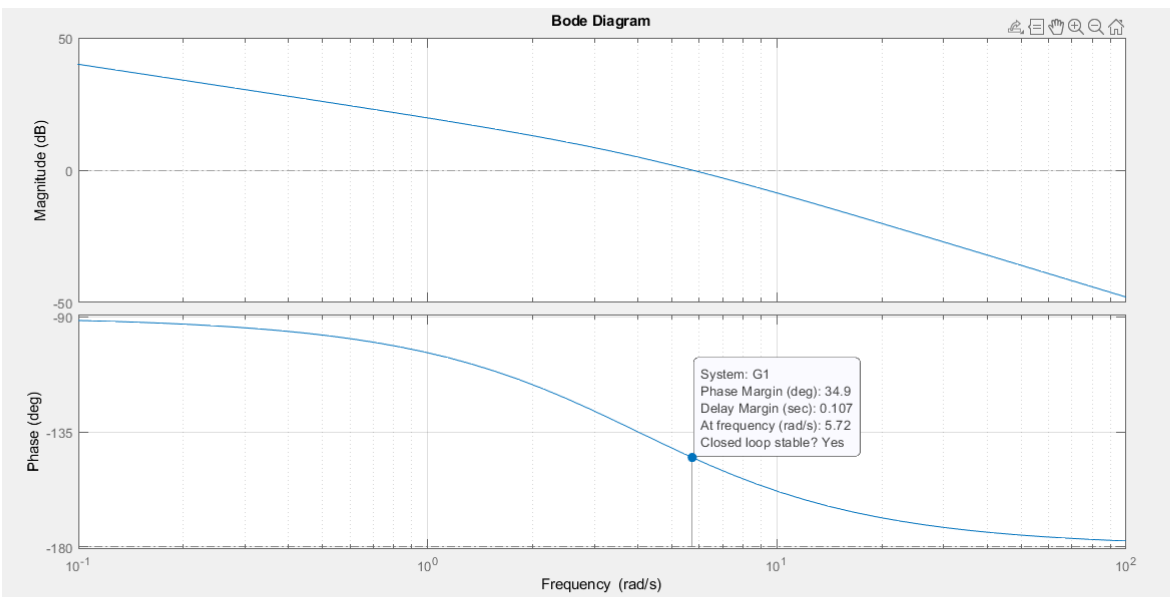
$$K\frac{2}{4} = 10$$

$$K = 20$$

2. Graficar el diagrama de Bode de la planta con la ganancia K y hallar el margen de fase γ

$$G1(s) = \frac{2K}{s(s+4)}$$

$$G1(s) = \frac{2(20)}{s(s+4)}$$



3. Calcular el ángulo del compensador ϕ_m
   γ: margen de fase en lazo abierto con K. 50^0 es el margen de fase deseado.

$$\phi_m = 50^0 - \gamma$$
$$\phi_m = 50^0 - 34.9 = 15.1^0$$

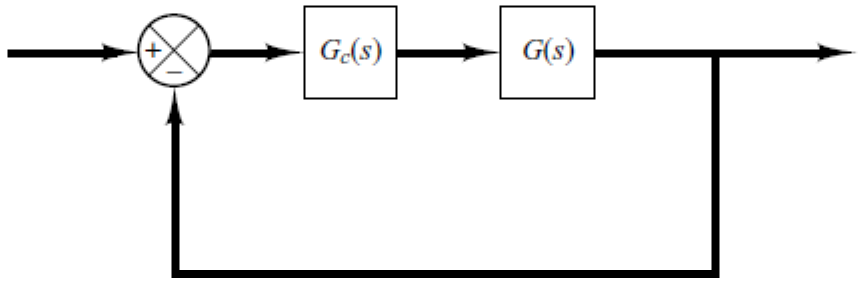
Sumar al ángulo del compensador entre 5 y 12 grados

$$\phi_m = 15.1^0 + 5^0$$
$$\phi_m = 20.1^0$$

4. Hallar el factor de atenuación α con la siguiente ecuación

$$\alpha = \frac{1 - sen(\phi_m)}{1 + sen(\phi_m)} = 0.4884$$

$$\alpha = \frac{1 - sen(20.1)}{1 + sen(20.1)} = 0.4884$$



5. Hallar la frecuencia en donde la magnitud del sistema no compensado es:

$$-20log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)$$

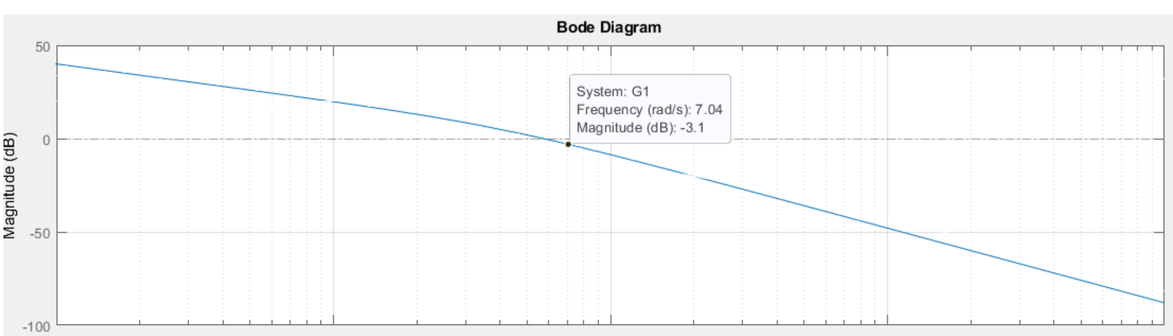
Usar el diagrama de bode.

$$-20log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) = -3.1122dB$$

$$-20log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{0.4884}}\right) = -3.1122$$

Frecuencia del compensador

$$\omega_c = 7.04\, rad/s$$



Esa es la frecuencia central del compensador.

6. Hallar las frecuencias las esquinas del compensador (El cero y el polo del compensador)

Cero z

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha}\omega_c = \sqrt{0.4884} * 7.04 = 4.89$$

Polo p

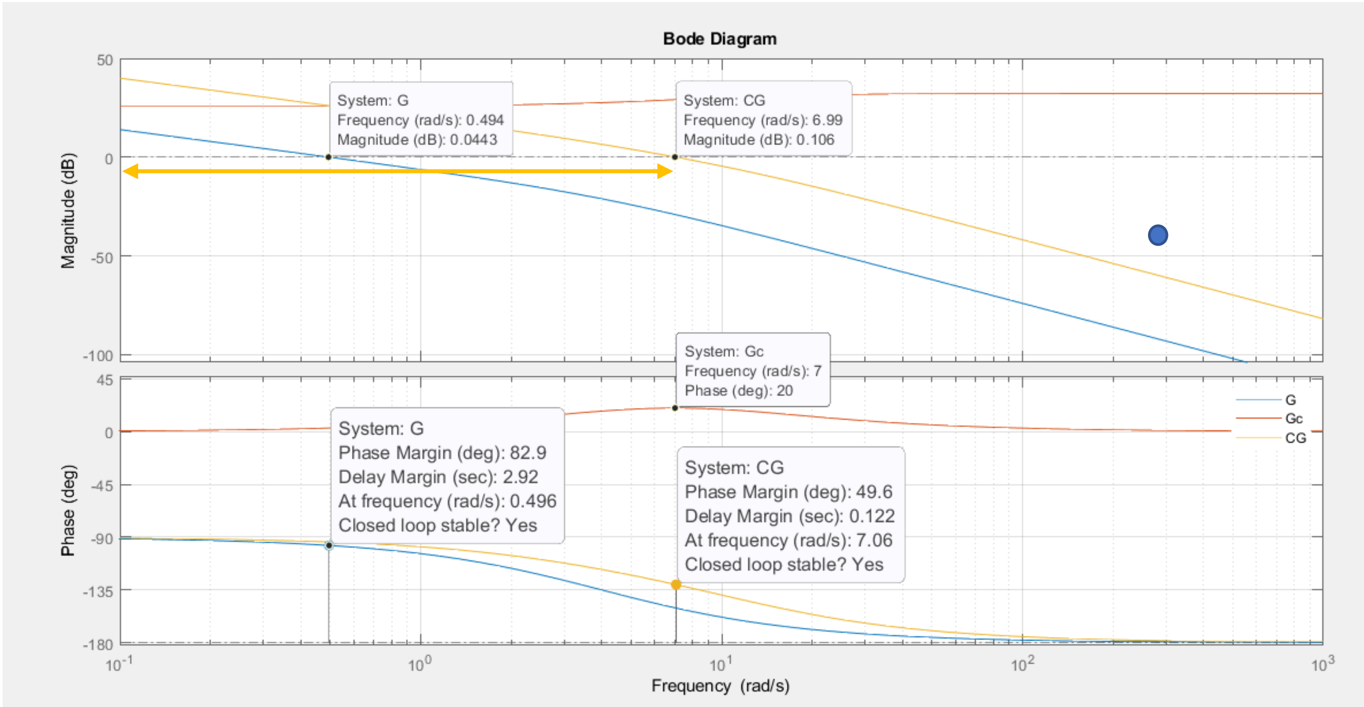
$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_c}{\sqrt{\alpha}} = \frac{7.04}{\sqrt{0.4884}} = 10.01$$

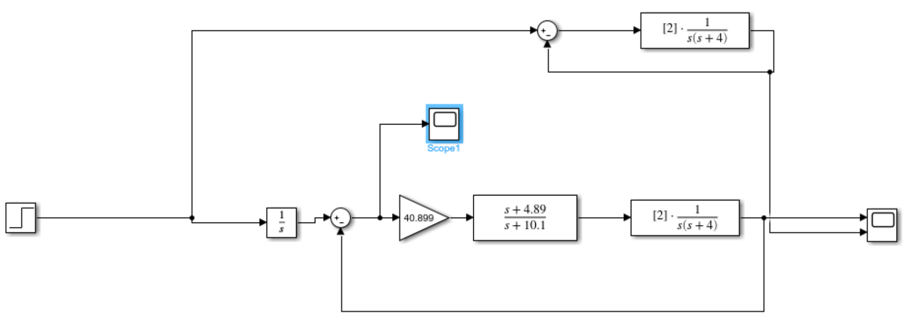
7. Se halla la ganancia del compensador

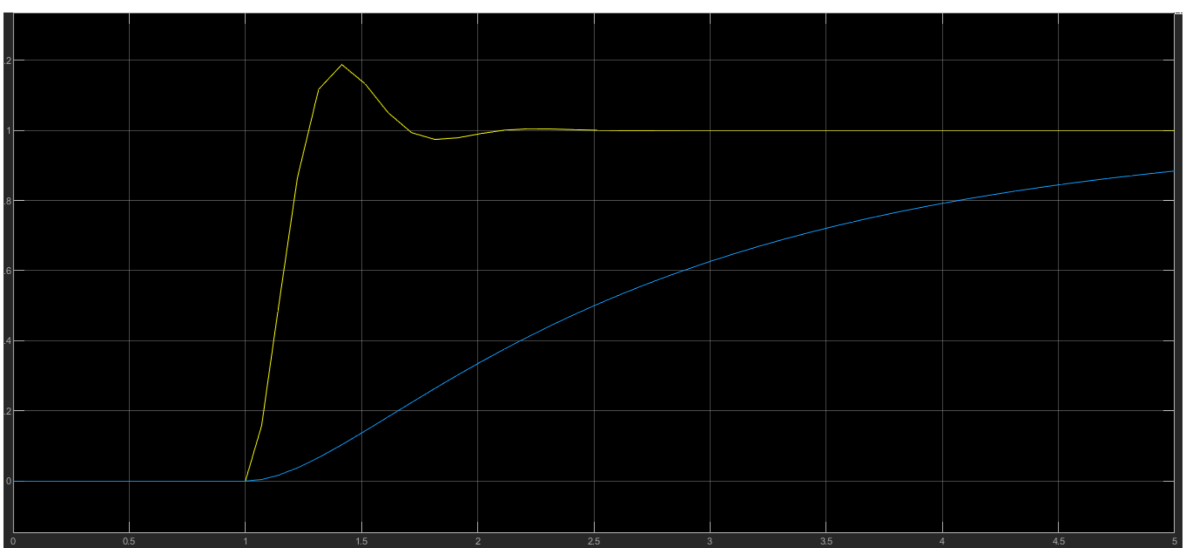
$$\alpha\, K_c = K$$

$$K_c = \frac{20}{\alpha} = \frac{20}{0.4884} = 40.9$$

$$G_{c(lead)} = 40.9\frac{s + 4.89}{s + 10.01}$$


Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
System: G
Frequency (rad/s): 0.494
Magnitude (dB): 0.0443
System: CG
Frequency (rad/s): 6.99
Magnitude (dB): 0.106
System: Gc
Frequency (rad/s): 7
Phase (deg): 20
System: G
Phase Margin (deg): 82.9
Delay Margin (sec): 2.92
At frequency (rad/s): 0.496
Closed loop stable? Yes
System: CG
Phase Margin (deg): 49.6
Delay Margin (sec): 0.122
At frequency (rad/s): 7.06
Closed loop stable? Yes
G
Gc
CG


[2] · 1/(s(s + 4))
Scope1
1/s
40.899
(s + 4.89)/(s + 10.1)
[2] · 1/(s(s + 4))



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -6 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Diseñar un controlador de adelanto para que margen de fase sea mínimo de 50º y el constante de estado estático de velocidad K_V sea 10 seg^{-1}

$$G(s)$$