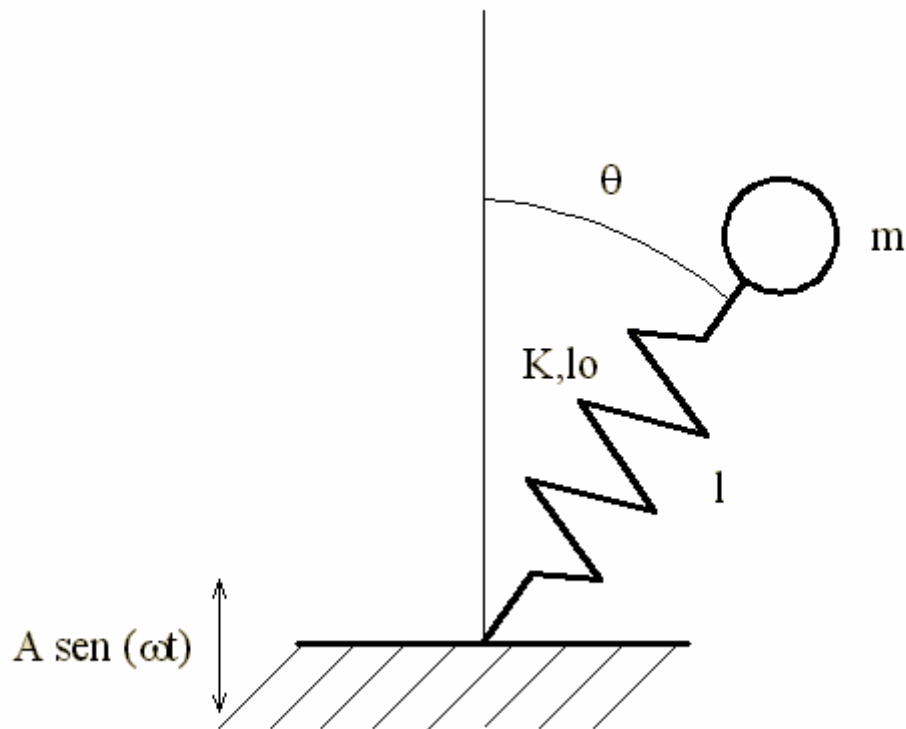


ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS
UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DEL PÉNDULO ELÁSTICO INVERTIDO

PROYECTO FIN DE CARRERA. DICIEMBRE 2007



Autor: Félix Sanz Rodríguez
Director: Emilio Freire Macías

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar debo agradecer al Profesor Emilio Freire Macías su colaboración y disposición a la hora de realizar este proyecto, quien a pesar de tener un año especialmente complicado no tuvo reparos a la hora de aceptarme como alumno suyo, ayudándome en todo momento con un trato cercano y vocación docente.

También debo expresar mi gratitud a mi familia sin la cual este proyecto no sería posible, dándome su apoyo en todo momento y de la cual no puedo más que sentirme orgulloso. En especial quiero dedicar este proyecto a mi hermano Don Federico al cual considero el mejor ingeniero en cuanto a ingenio se refiere.

Por último quiero expresar mi gratitud a mi novia Pilu quien con su alegría me ha hecho este camino más fácil y de la cual he obtenido la motivación necesaria para seguir trabajando en los momentos difíciles

ÍNDICE:

Capítulo 1: Introducción	6
1.1.- Antecedentes históricos.....	6
1.2.- Definición del sistema.....	8
1.2.1.- Modelado.....	8
1.2.2.- Descripción del sistema.....	11
1.2.3.- Hipótesis de modelado.....	13
1.2.4.- Objetivos del proyecto.....	14
 Capítulo 2: Ecuaciones de movimiento del sistema	 15
2.1.- Ecuaciones de Lagrange.....	16
2.2.- Obtención de las ecuaciones generales del sistema.....	18
2.3.- Adimensionalización.....	26
 Capítulo 3: Estudio analítico del modelo	 30
3.1.- Solución canónica: obtención de la solución semitrivial.....	31
3.2.- Modelo linealizado.....	35

Capítulo 4: Análisis numérico del sistema **38**

4.1.- Introducción al análisis numérico.....	39
4.1.1.- Aplicaciones.....	39
4.1.2.- Integración numérica.....	40
4.2.- Bases matemáticas de la integración numérica.....	42
4.3.- Integración numérica de la ecuación.....	44
4.3.1.- Adaptación de la ecuación para trabajar en MATLAB.....	44
4.3.2.- Funciones empleadas.....	45
4.4.- Determinación de las regiones de estabilidad.....	53
4.4.1.- Región de estabilidad para $\mu = 3$	54
4.4.2.- Región de estabilidad para $\mu = 2$	59
4.4.3.- Región de estabilidad para $\mu = 1.2$	62
4.4.4.- Región de estabilidad para $\mu = 1.1$	66
4.4.5.- Región de estabilidad para $\mu = 1.08$	74
4.4.6.- Región de estabilidad para $\mu = 1.05$	78
4.4.7.- Región de estabilidad para $\mu = 1.03$	82

Capítulo 5: Análisis de los resultados obtenidos **88**

5.1.- Condiciones iniciales.....89

5.2.- Influencia de los parámetros.....91

5.2.1.- Influencia del parámetro \mathbf{a} 91

5.2.2.- Influencia del parámetro λ 93

5.2.3.- Influencia del parámetro μ 95

Capítulo 6: Conclusiones **100**

Bibliografía

Capítulo 1

Introducción

1.1.- Antecedentes históricos

El objeto de nuestro proyecto es el análisis de la estabilidad de un péndulo invertido de unas características especiales, por lo que es conveniente que hagamos una breve introducción histórica sobre los avances que se han ido sucediendo en esta línea de investigación.

El péndulo en sí es uno de los sistemas mecánicos que más han sido estudiados en el campo de la mecánica y cuenta con innumerables aplicaciones en muy distintos ámbitos. Dentro de la tipología de péndulo invertido una de las aplicaciones más importantes ha sido dentro del campo de la sismología. A finales del siglo XIX fue James Forbes quien por primera vez propuso la utilización de un péndulo invertido como sismógrafo. El dispositivo utilizado consistía en una varilla vertical de metal en la que se disponía una masa que podía fijarse en diferentes puntos a lo largo de su longitud. A su vez, la varilla se apoyaba sobre un alambre cilíndrico de acero de forma que la rigidez de este apoyo elástico podía modificarse manualmente. De esta forma podía modificarse por medio de la posición de la masa y la rigidez del apoyo, el período libre del péndulo, obteniendo diferentes amplificaciones de la respuesta del mismo ante la acción de un terremoto. La forma de registrar tal efecto se hacía por medio de un lápiz sujeto al extremo libre del péndulo invertido de forma que las oscilaciones quedaran impresas sobre un papel situado para tal fin, consiguiendo de este modo una amplificación del movimiento de la masa por un factor de dos o tres. Así pues el péndulo invertido utilizado por Forbes basa su estabilidad en la posición invertida gracias a la rigidez del apoyo.

Posteriormente, en 1860, Cavalleri dispuso seis péndulos de diferentes frecuencias naturales para poder estudiar el contenido en frecuencias de las ondas del terremoto, de tal forma que la frecuencia dominante del mismo hiciera entrar en resonancia a aquel péndulo cuya frecuencia natural se aproximara más a este valor.

Sin embargo fue en 1908 cuando Andrew Stephenson, profesor de Matemáticas de la Universidad de Manchester, consiguió estabilizar un péndulo rígido en su posición invertida por medio una vibración introducida en el punto de sujeción.

Así pues, suponiendo por simplicidad que toda la masa se encuentra concentrada en el extremo de la varilla rígida, Stephenson demostró que para amplitudes de vibración pequeñas comparadas con la longitud del péndulo, el sistema presenta estabilidad en su posición invertida si la frecuencia de excitación cumple la relación:

$$\omega > \frac{\sqrt{2gl}}{a}$$

Siendo a la amplitud de la vibración vertical introducida y l la longitud del péndulo. Estudios posteriores mostraron la posibilidad de poder estabilizar el sistema con menores frecuencias de excitación y mayores amplitudes, obteniendo unas regiones de estabilidad en función de los valores de los parámetros asociados al sistema físico en cuestión y a la vibración introducida.

En 1951 esta estabilidad fue explicada al detalle por Pjotr Kapitza conociéndose desde entonces este dispositivo como “péndulo de Kapitza”.

Los resultados obtenidos para el péndulo invertido propuesto por Stephenson fueron generalizados por David Acheson en 1993 para un número finito de péndulos unidos unos a otros. En este caso tenemos N péndulos conectados entre sí bajo la acción de la gravedad y estando unidos a un pivote. Si llamamos ω_{\min} la menor de las frecuencias naturales del sistema y ω_{\max} a la mayor de ellas, se supone que ω_{\max}^2 es mucho mayor que ω_{\min}^2 . De este modo, el sistema completo puede ser estabilizado en su posición invertida mediante la acción de una vibración vertical de amplitud a y frecuencia ω tales que:

$$a < \frac{0.45g}{\omega_{\max}^2}$$

$$a\omega > \frac{\sqrt{2}}{\omega_{\min}} g$$

De esta forma Acheson define una región de estabilidad correspondiente al conjunto de valores que deben cumplir los parámetros del sistema para que el conjunto completo presente una posición de equilibrio estable en su posición invertida.

1.2.- Definición del sistema

1.2.1.- Modelado

En el presente proyecto vamos a analizar el comportamiento de un sistema mecánico sometido a vibración con el fin de estudiar la estabilidad del mismo.

Como sistema mecánico entendemos un conjunto de cuerpos que varían su posición ante la acción de una serie de fuerzas. Dentro de la mecánica del sólido rígido se emplean las variables asociadas a la posición del sistema para describir el movimiento del mismo. Al conjunto mínimo de variables necesarias para tal fin se denominan grados de libertad del sistema y su conocimiento en función del tiempo conlleva el conocimiento exacto del movimiento del sistema. En concreto se denominan grado de libertad a cada variable correspondiente a cada movimiento independiente que puede experimentar el sólido. Por tanto un sólido rígido puede tener como máximo seis grados de libertad, tres traslaciones y tres rotaciones, siendo este número menor en función de las restricciones, denominadas también ligaduras, que impongamos a su movimiento. En el caso concreto de una masa puntual cuyo movimiento se restringe a un plano tan solo posee dos grados de libertad.

Para estudiar el comportamiento de un sistema acudimos a un modelo del mismo que no es más que una representación aproximada del sistema real. A la hora de realizar dicho estudio podemos acudir a una reproducción a escala del mismo (modelado a escala) o bien caracterizarlo en forma de expresiones matemáticas (modelo matemático), siendo esta segunda opción la que abordamos en el presente proyecto.

Por lo tanto el modelo de un sistema consiste en un conjunto de expresiones matemáticas que representan la evolución temporal de las magnitudes asociadas al sistema en cuestión. El modelo estará bien planteado cuando el número de ecuaciones independientes obtenidas coincida con el número de grados de libertad del mismo.

Por otra parte, en un modelo también están implicados los parámetros del mismo. Éstos son aquellas magnitudes inherentes al sistema que lo diferencian de otro semejante a él.

En concreto, nuestro sistema esta dentro del conjunto denominado sistemas mecánicos paramétricos. En este caso el término paramétrico corresponde a aquellos casos en los que una acción externa puede provocar una variación en el tiempo de algunos de los parámetros del sistema. Estos cambios en los parámetros del sistema pueden provocar a su vez grandes respuestas del mismo y conducirlo incluso a la inestabilidad.

Los resultados obtenidos al analizar las ecuaciones paramétricas muestran cómo un sistema puede ser estable o inestable según la frecuencia de excitación, la amplitud, masa... es decir, según el valor de los parámetros que tengamos.

Es bien conocido que cuando excitamos un sistema con una frecuencia cercana a la frecuencia natural del mismo la respuesta se ve amplificada considerablemente, fenómeno conocido como resonancia. Pero existen sistemas integrados a su vez por distintos subsistemas en los cuales una parte del mismo puede excitar e la otra a frecuencias cercanas a su frecuencia natural produciendo el mismo efecto anterior y conduciendo a la inestabilidad del mismo. Generalmente estos sistemas están integrados por dos subsistemas. El primero de ellos, denominado primario, que puede tener desde un solo grado de libertad hasta N grados de libertad, puede ser forzado externamente, autoexcitado, sometido a vibración paramétrica, y en general estará vibrando. El

segundo subsistema, denominado secundario, también puede poseer N grados de libertad y se encuentra unido al primario de forma no lineal pudiendo estar en reposo mientras el primario está vibrando. Este caso corresponde a la denominada solución semitrivial o solución vertical del sistema.

En general, el primer paso a la hora de realizar un estudio de estos sistemas consiste en encontrar las regiones de estabilidad correspondientes a diferentes valores de los parámetros que lo definen. Para ello se acude al modelo matemático representado por la ecuación de movimiento del mismo, resultando una ecuación diferencial de segundo orden de coeficientes periódicos de la que no se conoce solución analítica. Ahora bien existen métodos numéricos que con gran exactitud pueden ayudarnos a analizar el modelo y poder estudiar el comportamiento del sistema real, determinando así las regiones de estabilidad e inestabilidad en función del valor de los parámetros.

Un ejemplo clásico de estos sistemas y muy relacionado con el sistema objeto de nuestro estudio es el péndulo elástico, que consiste en una masa unida a un muelle sujeto en el otro extremo, como puede observarse en la figura 1.2.1. Un fenómeno de inestabilidad ocurre cuando las frecuencias de vibración en dirección longitudinal (frecuencia natural del muelle, $\omega_n = \sqrt{k/m}$) y transversal (frecuencia natural del péndulo, $\omega_n = \sqrt{g/\ell}$) cumplen una relación de 2:1. Entonces si el muelle comienza a oscilar entorno a la posición vertical se va transfiriendo energía al movimiento de balanceo del péndulo y el sistema se vuelve inestable.

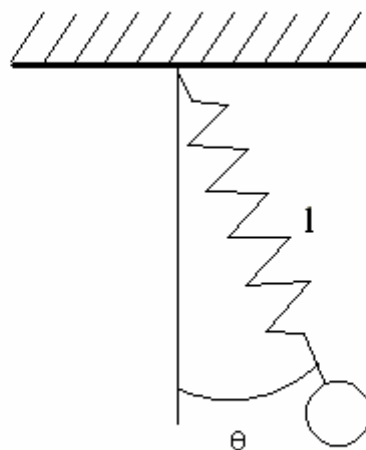


Fig. 1.2.1- Péndulo elástico

Por lo tanto el fenómeno de resonancia paramétrica por el cual se pierde la estabilidad de la solución semitrivial es un efecto indeseable y que deberemos evitar. Por último comentar que este fenómeno depende de la relación entre las frecuencias de vibración de los componentes del sistema y de la unión entre los sistemas primario y secundario. Existen algunos casos en que un sistema mecánico que se encuentra excitado mediante vibración podemos convertirlo en un sistema paramétrico con el fin de que el subsistema secundario que añadimos funcione como absorbedor. Esto se consigue por ejemplo con la adición de un péndulo que absorba energía del sistema y reduzca por tanto la vibración del sistema completo.

Un hecho importante a tener en cuenta es que para obtener dicho modelo se realizan una serie de hipótesis simplificadoras con el fin de poder abordar el problema de una manera más sencilla de lo que ocurre en la realidad. A este proceso es a lo que denominamos modelado de un sistema y hay que hacer notar que el grado de aproximación de nuestro modelo respecto del real dependerá de lo que nos ajustemos a las hipótesis realizadas en la obtención del mismo. Por lo tanto hay que tener en cuenta que un modelo esta sujeto a errores y puede no representar fielmente el comportamiento de un sistema por lo que siempre tendrá asociado un grado de exactitud en función de la aplicación que hagamos de él. De este modo pueden existir dos prioridades a la hora de modelar un problema concreto según el grado de exactitud que busquemos; por un lado puede ser interesante para el análisis del comportamiento de un sistema un modelo simplificado de él que nos permita visualizar características importantes del mismo, mientras que por otra parte puede ser mas interesante obtener un modelo mas exacto con el que reproducir fielmente el comportamiento del sistema aunque ello conlleve un modelo bastante mas complejo. Esta segunda opción es la empleada en la simulación de sistemas mientras que la primera corresponde al análisis de sistemas.

1.2.2.- Descripción del sistema

El sistema mecánico objeto de nuestro estudio consiste en una masa unida a un resorte, estando sujeto en su otro extremo a un punto fijo. La realización de dicho experimento podría llevarse a cabo mediante una varilla sujeta a un punto fijo sobre la que se monta el resorte unido a la masa, pudiendo ésta deslizarse libremente a lo largo de la varilla. Un sistema así dispuesto presenta dos grados de libertad en el plano, pudiendo escogerse entre las dos componentes cartesianas (x, y) o las coordenadas polares (r, θ). Por lo tanto las variables de nuestro problema consisten en los grados de libertad asociados a la posición de la masa que supondremos puntual y de valor m . En el espacio, un sistema así planteado posee tres grados de libertad pero hemos impuesto una restricción más al obligar al sistema a mantenerse en el plano, lo que corresponde a establecer una ecuación de ligadura correspondiente a $z = 0$, lo que resta un grado de libertad. Esto podría llevarse a cabo fácilmente, por ejemplo, fabricando la varilla con un apoyo tipo T restringiendo así uno de los giros.

Hay que observar que el hecho de unir la masa puntual a un muelle no restringe movimiento alguno por lo que no resta grados de libertad, tan solo influye en el hecho de someter a la masa a una fuerza función de la elongación del mismo respecto de su longitud natural l_0 .

Este sistema así dispuesto, posee una posición de equilibrio inestable en posición vertical y por lo tanto cualquier pequeña perturbación de esta posición provocará que el sistema abandone su posición de reposo vertical para no recuperarla ya más. Por otro lado, este sistema así planteado es simplemente el sistema correspondiente a un péndulo elástico que vimos anteriormente y que planteaba fenómenos de inestabilidad según el valor de vibración del muelle respecto de la del péndulo en sí.

A diferencia del péndulo elástico ahora sometemos a nuestro sistema a una vibración vertical en el punto de sujeción de expresión $A \sin(\omega t)$ donde ya vemos dos parámetros que serán determinantes en la estabilidad del sistema, a saber, la amplitud de vibración A , y la frecuencia de excitación ω .

Por lo tanto este sistema está sometido a dos fuerzas que derivan de potencial correspondientes a la gravedad y a la acción del muelle, y por otro lado lo sometemos a vibración en la base. Así nuestro sistema paramétrico consiste en un sistema primario formado por la base, que se encuentra sometido a vibración, y otro, sistema secundario, formado por la masa, que supondremos puntual, y que se encuentra unido al primario mediante un muelle.

En la siguiente figura se muestra el modelo simplificado objeto de nuestro estudio.

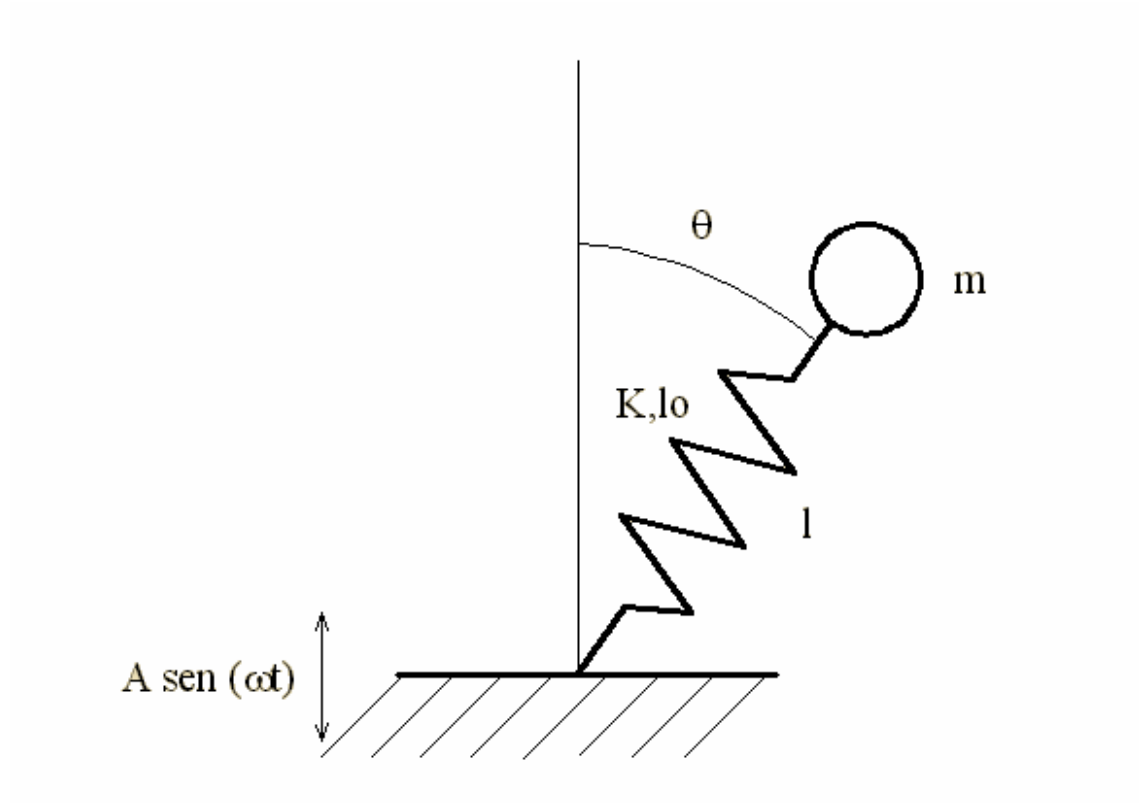


Fig. 1.2.2 Péndulo muelle invertido

1.2.3.- Hipótesis de modelado

Para la obtención de nuestro modelo vamos a realizar una serie de hipótesis simplificadoras con el fin de obtener un modelo sencillo que nos permita estudiar el comportamiento del sistema teniendo en cuenta los aspectos más significativos del mismo. Luego realizaremos otras mas avanzadas con el fin de esclarecer el comportamiento del sistema en unas situaciones más concretas.

Así pues en un primer momento vamos a suponer en nuestro modelo:

- Masa puntual de valor m . Esta hipótesis será correcta siempre y cuando la masa del resorte y la varilla (en caso de realizar esta disposición) sean despreciables respecto a la masa puntual (al menos un orden menor).
- No existe rozamiento con el aire. Despreciamos completamente el rozamiento del aire sobre cualquiera de los elementos del sistema.
- No existe rozamiento en el giro en torno al punto de sujeción. No tendremos en cuenta el posible efecto de un rozamiento en la articulación.
- Movimiento en el plano vertical. Supondremos un movimiento en el plano sin ningún tipo de efecto en cualquier dirección no contenida en él.
- El comportamiento del muelle viene regido por la Ley de Hooke.
- En general no se tendrá en cuenta ningún efecto disipativo de energía como pudieran ser las fuerzas de rozamiento antes señalas ni en el muelle por calentamiento. Por lo tanto tenemos un sistema al que se le está suministrando energía a través de la vibración de la base y que será empleada tan solo en forma de trabajo por desplazamiento de la masa.

1.2.4.- Objetivos del proyecto

El objetivo fundamental de este proyecto es analizar la estabilidad del sistema antes descrito en función de los parámetros que lo definen y la excitación en forma de vibración a la que lo sometemos a través de la amplitud y la frecuencia.

Para ello vamos a realizar en primer lugar un modelo del mismo en función de una serie de hipótesis de partida, para luego analizar el mismo y estudiando la combinación de los valores de los parámetros que hacen que el sistema presente estabilidad o inestabilidad. De esta forma podremos hallar las regiones de estabilidad que se nos presentan, para así predecir el comportamiento del sistema real frente a unos valores concretos de los parámetros.

También veremos cómo influyen cada uno de estos parámetros en el comportamiento del sistema, la sensibilidad que presenta el movimiento frente a una variación de alguno de ellos, y cómo influyen en la estabilidad.

Capítulo 2

Ecuaciones de movimiento del sistema

Una vez presentado el sistema que vamos a estudiar y establecido el conjunto de hipótesis de partida nos proponemos en este capítulo obtener el conjunto de expresiones matemáticas que representan el modelo de nuestro sistema.

Para ello recurrimos a la Mecánica Racional que por medio de las ecuaciones de Lagrange nos proporciona una herramienta potente para obtener las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema. Por otra parte podríamos haber hecho uso de la mecánica Newtoniana para tal fin pero en este caso las ecuaciones de Lagrange nos proporcionan las ecuaciones de movimiento de una manera más rápida y eficaz.

2.1.- Ecuaciones de Lagrange

En Mecánica Racional las ecuaciones de Lagrange constituyen un método directo para la obtención de las ecuaciones de movimiento de un sistema. Su expresión general es de la forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Donde las variables q_i representan las variables independientes del problema que son los grados de libertad del sistema. Por lo tanto tenemos tantas ecuaciones como variables independientes, por lo que el modelo que nos proporciona estará bien planteado. Por otra parte T representa la energía cinética total del sistema y su expresión vendrá dada en función de los grados de libertad q_i , también denominados coordenadas generalizadas del problema. Por último Q_i representa las fuerzas generalizadas en las que participan tan sólo las fuerzas activas del problema.

Este sistema nos proporciona un sistema de ecuaciones diferenciales que son exactamente las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema, y que por tanto, de resolverlo, obtendríamos las expresiones de q_i en función del tiempo y el movimiento del sistema quedaría perfectamente definido.

En el caso de que existan fuerzas que derivan de potencial, las ecuaciones de Lagrange se pueden modificar de la siguiente forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Donde V es la energía potencial del sistema. Dado que la energía potencial no depende de las velocidades generalizadas, operando obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_i} = Q_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Quedando:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

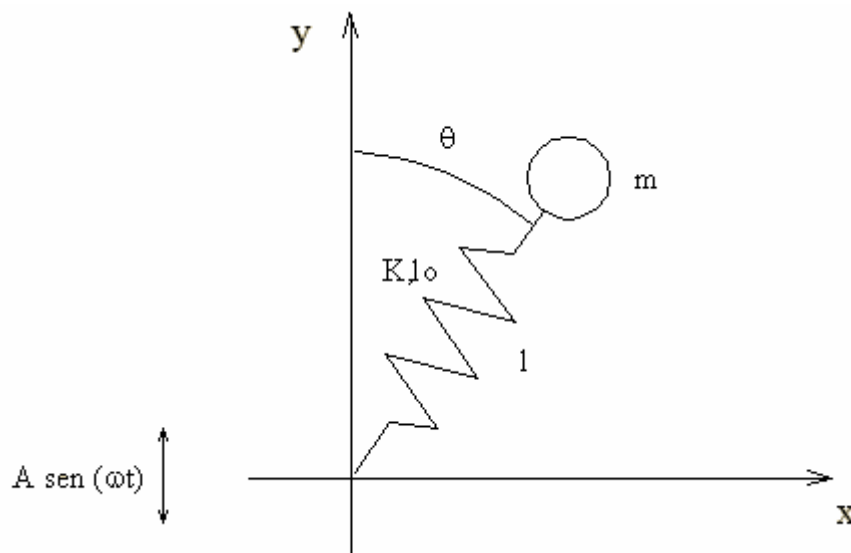
Donde L es la función Lagrangiana del problema, diferencia de la energía cinética y potencial del sistema. En el caso de que todas las fuerzas que actúan sobre el sistema deriven de potencial las ecuaciones de Lagrange toman su expresión más sencilla:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

2.2.- Obtención de las ecuaciones generales del sistema

A continuación pasamos a aplicar las ecuaciones de Lagrange a nuestro problema concreto. De esta forma hallamos el conjunto de ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento del sistema y que modelan el comportamiento de nuestro sistema real.

Nuestro sistema, sujeto a las hipótesis anteriormente comentadas, se muestra en la siguiente figura, donde podemos observar las variables en él involucradas.



Los parámetros que definen nuestro sistema son:

- Masa puntual: m
- Rigidez del muelle: k
- Longitud natural del muelle: l_0

Además tenemos los parámetros que definen la excitación a la que sometemos nuestro sistema:

- Amplitud A
- Frecuencia ω

En esta situación tenemos que todas las fuerzas que actúan sobre nuestro sistema son conservativas y por lo tanto derivan de potencial. Estas fuerzas son la acción de la gravedad y la fuerza que ejerce el muelle sobre la masa.

Por lo tanto las ecuaciones de Lagrange en este caso toman la expresión general:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Como puede observarse en la figura nuestro sistema tiene dos grados de libertad de los que hemos tomado el ángulo respecto a la vertical y la distancia al origen: (l, θ) Por lo tanto la expresión de las ecuaciones de Lagrange aplicadas en este caso toman la forma siguiente:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{I})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \ell} = 0 \quad (\text{II})$$

Pasamos ahora a calcular la Lagrangiana de nuestro problema. Su expresión es:

$$L = T - V$$

Como ya se vio antes los términos T y V representan la energía cinética y potencial del sistema y que a continuación pasamos a calcular.

- Energía cinética

La energía cinética total de nuestro sistema tiene la siguiente expresión en coordenadas cartesianas:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \right)$$

Poniendo estas variables en función de las coordenadas generalizadas de nuestro problema tenemos:

$$x = \ell \operatorname{sen}(\theta)$$

$$y = \ell \cos(\theta) + A \operatorname{sen}(\omega t)$$

donde observamos el efecto de la vibración en dirección vertical. De esta expresión hallamos la velocidad en función de los grados de libertad que hemos escogido.

$$\dot{x} = \operatorname{sen}(\theta) \dot{\ell} + \ell \cos(\theta) \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \cos(\theta) \dot{\ell} - \ell \operatorname{sen}(\theta) \dot{\theta} + A \omega \cos(\omega t)$$

Sustituyendo esta expresión en la de la energía cinética obtenemos:

$$T = \frac{1}{2} m \left[\dot{\ell}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + (A \omega \cos(\omega t))^2 + 2 A \omega \cos(\omega t) \left[\cos(\theta) \dot{\ell} - \ell \operatorname{sen}(\theta) \dot{\theta} \right] \right]$$

donde ya tenemos expresada la energía cinética en función de nuestras coordenadas generalizadas, los grados de libertad (ℓ, θ)

- Energía potencial

Las fuerzas que actúan sobre la masa son la fuerza de la gravedad y la fuerza del muelle, ambas conservativas y por lo tanto derivan de potencial.

Estas fuerzas tienen la forma:

Gravedad: $\overrightarrow{F_g} = m \overrightarrow{g}$

Muelle: $\overrightarrow{F_m} = -K(\ell - \ell_o) \overrightarrow{r}/r$

La expresión que toman ambos potenciales son:

Gravedad: $V_g = m g y$

Muelle: $V_m = \frac{1}{2} K [\ell - \ell_o]^2$

Por lo tanto la expresión de la energía potencial total del sistema es:

$$V = V_m + V_g = \frac{1}{2} K [\ell - \ell_o]^2 + m g y$$

Poniendo esto en función de las coordenadas generalizadas tenemos:

$$V = V_m + V_g = \frac{1}{2} K [\ell - \ell_o]^2 + m g [\ell \cos(\theta) + A \sin(\omega t)]$$

Sustituyendo las expresiones de la energía cinética y potencial en de la Lagrangiana del sistema obtenemos:

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left[\dot{\ell}^2 + \ell^2 \dot{\theta}^2 + (A \omega \cos(\omega t))^2 + 2 A \omega \cos(\omega t) [\cos(\theta) \dot{\ell} - \ell \sin(\theta) \dot{\theta}] \right] - \frac{1}{2} K [\ell - \ell_o]^2 - m g [\ell \cos(\theta) + A \sin(\omega t)]$$

donde ya la tenemos expresada en función de nuestras variables. En general y en nuestro caso en particular esta función depende de las coordenadas generalizadas, sus velocidades y del tiempo en la forma:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

Pasamos ahora a calcular el sistema de ecuaciones que nos proporcionarán las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema:

-1ª ecuación: correspondiente al grado de libertad θ :

La expresión general de la ecuación es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

A continuación calculamos cada uno de los términos de la ecuación:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m A \omega \cos(\omega t) \left[\sin(\theta) \dot{\ell} + \ell \cos(\theta) \dot{\theta} \right] + m g \ell \sin \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \ell^2 \dot{\theta} - m A \omega \cos(\omega t) \ell \sin(\theta)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] &= m \ell^2 \ddot{\theta} + 2 m \ell \dot{\ell} \dot{\theta} + m A \omega^2 \sin(\omega t) \ell \sin(\theta) - \\ &\quad - m A \omega \cos(\omega t) \left[\dot{\ell} \sin \theta + \ell \cos \theta \dot{\theta} \right] \end{aligned}$$

Sustituimos en la expresión de la ecuación:

$$\begin{aligned} m \ell^2 \ddot{\theta} + 2 m \ell \dot{\ell} \dot{\theta} + m A \omega^2 \sin(\omega t) \ell \sin(\theta) - m A \omega \cos(\omega t) \left[\dot{\ell} \sin \theta + \ell \cos \theta \dot{\theta} \right] \\ + m A \omega \cos(\omega t) \left[\sin(\theta) \dot{\ell} + \ell \cos(\theta) \dot{\theta} \right] - m g \ell \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

Simplificando obtenemos:

$$\ell^2 \ddot{\theta} + 2 \ell \dot{\ell} \dot{\theta} + [A \omega^2 \sin(\omega t) - g] \ell \sin \theta = 0$$

Con el fin de obtener una expresión mas clara dividimos entre ℓ y llegamos a:

$$\ell \ddot{\theta} + 2 \dot{\ell} \dot{\theta} + [A \omega^2 \sin(\omega t) - g] \sin \theta = 0$$

Esta es la primera de las dos ecuaciones de movimiento que nos proporcionan las ecuaciones de Lagrange.

-2ª ecuación: correspondiente al grado de libertad 1:

La expresión general de la ecuación es:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \ell} = 0$$

Procedemos al igual que antes a calcular cada uno de los términos de la ecuación:

$$\frac{\partial L}{\partial \ell} = m \ell \dot{\theta}^2 - m A \omega \cos(\omega t) \sin(\theta) \dot{\theta} - K [\ell - \ell_0] - m g \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} = m \dot{\ell} + m A \omega \cos(\omega t) \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} \right] = m \ddot{\ell} - m A \omega^2 \sin(\omega t) \cos \theta - m A \omega \cos(\omega t) \sin(\theta) \dot{\theta}$$

Sustituimos en la expresión de la ecuación:

$$m\ddot{\ell} - m A \omega^2 \sin(\omega t) \cos \theta - m A \omega \cos(\omega t) \sin(\theta) \dot{\theta} - \\ - m \ell \dot{\theta}^2 + m A \omega \cos(\omega t) \sin(\theta) \dot{\theta} + K [\ell - \ell_o] + m g \cos \theta = 0$$

Simplificando y reordenando los términos obtenemos:

$$\ddot{\ell} - \ell \dot{\theta}^2 + \frac{K}{m} [\ell - \ell_o] + [g - A \omega^2 \sin(\omega t)] \cos \theta = 0$$

Esta es la segunda ecuación de movimiento que tenemos y que junto a la primera nos proporcionan el sistema de ecuaciones diferenciales que modela el movimiento de nuestro sistema.

Así pues nuestro sistema de ecuaciones es:

$$\ell \ddot{\theta} + 2 \dot{\ell} \dot{\theta} + [A \omega^2 \sin(\omega t) - g] \sin \theta = 0 \quad (\text{I})$$

$$\ddot{\ell} - \ell \dot{\theta}^2 + \frac{K}{m} [\ell - \ell_o] + [g - A \omega^2 \sin(\omega t)] \cos \theta = 0 \quad (\text{II})$$

Hay que observar que es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal y cuya solución analítica no es conocida.

En este sistema de ecuaciones observamos cómo aparecen unos términos cruzados entre las variables que lo hacen no lineal y que en la primera de las ecuaciones corresponde a la aceleración de Coriolis producto de ambas velocidades. A este sistema podríamos haber llegado haciendo uso de la mecánica newtoniana pero el método de Lagrange es más directo aunque deje menos patente la física del problema. En concreto el método de Lagrange aquí aplicado responde a un balance energético del sistema.

Otro aspecto importante a tener en cuenta, a la vista de las ecuaciones, es cómo aparece un término periódico correspondiente a la vibración junto a la gravedad. La idea de la que parte este proyecto es cómo el sistema por sí solo, actuando únicamente la fuerza de la gravedad, es inestable, mientras que al introducir este nuevo término puede contrarrestar este efecto y pueden aparecer valores de amplitud y frecuencia de vibración para las cuales el sistema presente estabilidad en su posición invertida.

2.3.- Adimensionalización

Como hemos visto en el apartado anterior nuestro sistema posee dos grados de libertad e intervienen cinco parámetros además de la gravedad g . Estos son:

- masa puntual: m
- Rigidez del muelle: k
- Longitud natural del muelle: ℓ_o
- Amplitud de excitación periódica: A
- Frecuencia de vibración: ω

Sin embargo es posible reducir el número de parámetros de nuestro modelo mediante la técnica de adimensionalización. Esto es posible gracias a que no todos los parámetros influyen sobre el problema independientemente sino relacionados unos con otros formando grupos funcionales. Aplicando este método conseguimos que los parámetros aparezcan agrupados formando grupos funcionales, lo que conlleva grandes ventajas a la hora de realizar un análisis del modelo.

En primer lugar definimos el tiempo adimensional τ como el producto del tiempo real y la frecuencia de vibración que introducimos. Así tenemos:

$$\tau = \omega t$$

A la vista de las ecuaciones vamos a adimensionalizar la distancia al origen dividiendo ésta entre la longitud natural del muelle por lo que definimos nuestra nueva variable como:

$$\ell \longrightarrow r = \ell / \ell_o$$

Aplicando este cambio de variables a los grados de libertad de nuestro problema tenemos:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega \theta'$$

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega^2 \theta''$$

Donde θ' y θ'' representan las derivadas del ángulo θ respecto del tiempo adimensional τ .

Operando del mismo modo con el grado de libertad correspondiente a la distancia al origen tenemos:

$$\dot{\ell} = \omega \ell' = \omega \ell_o r'$$

$$\ddot{\ell} = \omega^2 \ell'' = \omega^2 \ell_o r''$$

A continuación aplicamos el cambio de variables en nuestro sistema de ecuaciones.

- 1ª Ecuación:

$$(\ell_o r)(\omega^2 \theta'') + 2 (\omega \ell_o r')(\omega \theta') + [A \omega^2 \sin \tau - g] \sin \theta = 0$$

Dividiendo esta ecuación por $\ell_o \omega^2$:

$$r \theta'' + 2 r' \theta' + \left[\frac{A}{\ell_o} \sin \tau - \frac{g/\ell_o}{\omega^2} \right] \sin \theta = 0 \quad (I)$$

- 2ª Ecuación:

$$\omega^2 \ell_o r'' - \ell_o r \omega^2 \theta'^2 + \frac{K}{m} \ell_o (r-1) + [g - A \omega^2 \sin \tau] \cos \theta = 0$$

Dividiendo de nuevo por $\ell_o \omega^2$:

$$r'' - r \theta'^2 + \frac{K/m}{\omega^2} (r-1) + \left[\frac{g/\ell_o}{\omega^2} - \frac{A}{\ell_o} \sin \tau \right] \cos \theta = 0 \quad (II)$$

El sistema de ecuaciones formado por las expresiones I y II son nuestras ecuaciones de movimiento expresadas ya en función de nuestras variables adimensionales r y θ .

A la vista de estas ecuaciones todavía podemos reducir el número de parámetros implicados en las ecuaciones definiendo los parámetros adimensionales que definirán nuestro problema. Por lo tanto definimos:

$$\mu = \frac{K/m}{\omega^2}$$

$$\lambda = \frac{g/\ell_o}{\omega^2}$$

$$a = \frac{A}{\ell_o}$$

Mediante un sencillo análisis dimensional se comprueba que todos ellos son adimensionales por lo que nuestras ecuaciones estarán expresadas en términos adimensionales.

Este paso es fundamental ya que hemos conseguido reducir el número de parámetros implicados en las ecuaciones tan sólo a tres por lo que el análisis será mucho más claro y el coste computacional mucho menor.

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones tenemos nuestras ecuaciones adimensionalizadas objeto de estudio del presente proyecto:

$$r \theta'' + 2 r' \theta' + [a \operatorname{sen} \tau - \lambda] \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (\text{I})$$

$$r'' - r \theta'^2 + \mu (r-1) + [\lambda - a \operatorname{sen} \tau] \cos \theta = 0 \quad (\text{II})$$

El sistema de ecuaciones obtenido es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineal por lo que abordarlo analíticamente se hace imposible lo que hace que recurramos en primera instancia a una serie de hipótesis simplificadoras para luego analizarlo mediante herramientas de cálculo numérico mediante programación en MATLAB.

A la vista de las ecuaciones vemos cómo el término correspondiente a la excitación introducida por medio de vibración de la base ($a \sin \tau$) aparece en ambas ecuaciones junto al término correspondiente a la gravedad asociada al parámetro adimensional λ . Este hecho, como ya se comentó anteriormente, es de suma relevancia ya que buscamos contrarrestar el efecto de la gravedad por la cual la posición invertida sería una posición de equilibrio inestable.

Capítulo 3

Estudio analítico del modelo

En el capítulo anterior hemos obtenido de ecuaciones de ecuaciones diferenciales de movimiento que, bajo las hipótesis citadas, representan el comportamiento de nuestro sistema. Como se dijo anteriormente este sistema de ecuaciones es no lineal y de coeficientes no constantes, lo que hace que no podamos obtener una solución analítica de la respuesta.

Así pues en este capítulo nos planteamos analizar el sistema de forma que podamos estudiar cómo se comporta el sistema con el fin de obtener un modelo más sencillo. Para ello haremos uso de una serie de hipótesis adicionales y veremos qué implicaciones tienen sobre nuestro sistema.

Por otra parte, este análisis previo del sistema de ecuaciones, nos permitirá profundizar en el sentido físico de los parámetros adimensionales que hemos obtenido en el capítulo anterior, dejando de relieve los grupos funcionales a los que hacíamos referencia en su obtención, y en qué rango de valores se moverán. No hay que olvidar que buscamos estudiar la estabilidad de nuestro sistema real en unas situaciones concretas.

3.1.- Obtención de la solución canónica.

El sistema de ecuaciones que hemos obtenido y a partir del cual nos proponemos estudiar la estabilidad del sistema es:

$$r \theta'' + 2 r' \theta' + [a \operatorname{sen} \tau - \lambda] \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (\text{I})$$

$$r'' - r \theta'^2 + \mu (r-1) + [\lambda - a \operatorname{sen} \tau] \cos \theta = 0 \quad (\text{II})$$

Para obtener la solución canónica o semitrivial vamos a mantener la posición vertical fija y analizamos la respuesta en estas condiciones que nos proporcionan las ecuaciones del modelo.

Así tenemos:

$$\theta = 0$$

$$\dot{\theta} = 0$$

En esta situación tenemos el muelle en posición vertical y sometemos al sistema a vibración en la base. Sustituyendo en el sistema de ecuaciones eliminamos la primera de ellas, correspondiente al grado de libertad θ , y de la segunda obtenemos:

$$r'' + \mu r + [\lambda - a \operatorname{sen} \tau] = \mu$$

Reordenando los términos:

$$r'' + \mu r = \mu - \lambda + a \operatorname{sen} \tau \quad (1)$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial lineal de segundo orden, de coeficientes constantes y donde el término independiente incluye el término relativo a la vibración. Esta ecuación sí tiene solución analítica conocida y a continuación procedemos a calcularla.

En ausencia de la excitación $\operatorname{sen} \tau$ la ecuación (1) tiene como solución particular la correspondiente a la posición de equilibrio estático vertical, que obtenemos con un sencillo equilibrio de fuerzas:

$$m g = K(\ell_o - \ell_e)$$

Dividiendo entre ℓ_o obtenemos la expresión de dicho equilibrio en términos de nuestra variable r :

$$\frac{m g}{\ell_o} = K (1 - r_e) \quad \rightarrow \quad r_e = 1 - \frac{g \ell_o}{K/m}$$

Poniendo esta última expresión en función de nuestros parámetros adimensionales obtenemos:

$$r_e = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

De la primera de estas condiciones podemos obtener información sobre el valor que toman los parámetros en ella incluidos, λ y θ . Esta relación deriva de la imposición física de que esta condición inicial debe ser siempre mayor que cero ya que el muelle tiene una longitud mínima en compresión. Esto matemáticamente se traduce en:

$$r_e = 1 - \frac{\lambda}{\mu} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

De aquí obtenemos la primera restricción al valor que pueden tomar los parámetros que definen nuestro problema y a partir de los cuales queremos estudiar la estabilidad del mismo.

La solución general de la ecuación (1) es de la forma:

$$r(\tau) = r_h + r_p$$

Donde r_h y r_p representan respectivamente la solución general de la ecuación homogénea y una particular de la ecuación completa. A continuación calculamos ambas:

- Ecuación homogénea:

$$r'' + \mu r = 0$$

La solución general de esta ecuación es conocida y tiene la siguiente expresión:

$$r_h = A^* \cos(\sqrt{\mu} \tau) + B^* \sin(\sqrt{\mu} \tau) \quad (2)$$

- Solución particular:

Para obtener una solución particular de la ecuación completa (1) ensayamos con una expresión general de la forma del término independiente. Así tenemos:

$$r_p = C + D \operatorname{sen}(\tau)$$

Sustituyendo en la ecuación (1) obtenemos el valor de las constantes C y D

$$-D \operatorname{sen}(\tau) + \mu(C + D \operatorname{sen}(\tau)) = \mu - \lambda + a \operatorname{sen} \tau$$

Igualando los términos:

$$D(\mu - 1) = a \quad \rightarrow \quad D = \frac{a}{\mu - 1}$$

$$\mu C = \mu - \lambda \quad \rightarrow \quad C = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Por lo que la expresión de la solución particular es:

$$r_p = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{a}{\mu - 1} \operatorname{sen}(\tau) \quad (3)$$

Sustituyendo las expresiones (2) y (3) en la expresión general de la solución tenemos:

$$r(\tau) = A^* \cos(\sqrt{\mu} \tau) + B^* \operatorname{sen}(\sqrt{\mu} \tau) + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{a}{\mu - 1} \operatorname{sen}(\tau)$$

Las constantes A y B se determinan sin más que sustituir las condiciones iniciales.

A la vista de la solución obtenida y de las ecuaciones asociadas de las que la hemos obtenido vemos que ambos términos corresponden a efectos muy distintos.

El primero de ellos, solución de la ecuación homogénea asociada, corresponde a la respuesta del muelle ante un desplazamiento de su posición de equilibrio. Por lo tanto se corresponde a la parte de la solución denominada respuesta natural y en la que no existe influencia de la vibración exterior. Como se vio en el capítulo 2 esta respuesta se corresponde con la vibración libre de la masa.

El segundo término, asociado a la solución particular de la ecuación completa, es el correspondiente a la vibración forzada, y por lo tanto donde se refleja el efecto de la misma en el movimiento de la masa. Este término, denominado respuesta forzada, es el término que denominamos solución semitrivial y es la solución que queremos estabilizar.

Por lo tanto la solución semitrivial o canónica de nuestro problema tiene la siguiente expresión:

$$r_c(\tau) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{a}{\mu - 1} \operatorname{sen}(\tau)$$

3.2.- Modelo linealizado

La idea fundamental en la que se basa este proyecto se plantea en este punto y consiste en la obtención de un modelo que nos permita estudiar la estabilidad de la solución semitrivial obtenida en el apartado anterior.

De este modo nos planteamos el caso en el que las oscilaciones entorno a la vertical sean pequeñas y por lo tanto la respuesta semitrivial esté próxima a la respuesta real del sistema. Planteando esto en términos de perturbaciones respecto de esta situación tenemos:

$$\bar{r} = r(\tau) - r_c(\tau)$$

$$\bar{\theta} = \theta - 0$$

Donde \bar{r} representa la desviación de la posición respecto a la solución semitrivial y $\bar{\theta}$ perturbaciones respecto a la posición vertical.

Por lo tanto en nuestra solución buscamos que ambos valores sean tan pequeños como sea posible, por lo que sustituyendo en el sistema de ecuaciones el valor de nuestras variables en función de estas perturbaciones tenemos:

Sustituyendo en (I):

$$(\bar{r} + r_c) \bar{\theta}'' + 2(\bar{r}' + r_c') \bar{\theta}' + [a \operatorname{sen} \tau - \lambda] \operatorname{sen} \bar{\theta} = 0$$

Teniendo en cuenta que el valor de estas perturbaciones cumplen:

$$\bar{r} \ll r_c$$

$$\bar{\theta} \approx 0 \rightarrow \operatorname{sen}(\bar{\theta}) \approx \bar{\theta}$$

Podemos simplificar la ecuación de la siguiente forma:

$$r_c \bar{\theta}'' + 2 r_c' \bar{\theta}' + [a \operatorname{sen} \tau - \lambda] \bar{\theta} = 0 \quad (\text{ III })$$

Operando del mismo modo en la ecuación (II) tenemos:

$$(\bar{r}'' + r_c'') - (\bar{r} + r_c) \bar{\theta}'^2 + \mu (\bar{r} + r_c) + [a \operatorname{sen} \tau - \lambda] \cos \bar{\theta} = \mu$$

Simplificando y aproximando:

$$\bar{\theta} \approx 0 \rightarrow \cos(\bar{\theta}) \approx 1$$

Además sabemos que la solución semitrivial cumple:

$$r_c'' + \mu r_c = \mu - \lambda + a \operatorname{sen} \tau$$

Por lo que aplicando todo ello obtenemos:

$$\bar{r}'' + \mu \bar{r} = 0 \quad (\text{IV})$$

De esta manera hemos modificado el sistema de ecuaciones obteniendo así un modelo mucho mas sencillo que nos permitirá estudiar en qué condiciones podemos obtener una solución estable del sistema.

El sistema de ecuaciones formado por (III) y (IV) es:

$$r_c \bar{\theta}'' + 2 r_c' \bar{\theta}' + [a \operatorname{sen} \tau - \lambda] \bar{\theta} = 0 \quad (\text{III})$$

$$\bar{r}'' + \mu \bar{r} = 0 \quad (\text{IV})$$

En él observamos cómo, en estas condiciones, el movimiento de elongación del muelle está desacoplado del movimiento angular, y no se ve afectado salvo como desplazamiento de la posición de equilibrio del muelle, que es una respuesta periódica y estable. Esto, como era de esperar, se debe al haber aproximado nuestra respuesta a la solución semitrivial, que es donde realmente se refleja el efecto de la vibración sobre la elongación del muelle. Así pues, al aplicar esto sobre el sistema de ecuaciones completo, en la ecuación correspondiente a esta variable nos quedará siempre la expresión de la ecuación homogénea. Por lo tanto la ecuación que nos proporcionará la información necesaria para estudiar la estabilidad del sistema será la ecuación (III) que es donde se modela la variable angular del problema.

Por lo tanto, a partir de ahora nuestro modelo se reduce a la ecuación (III) sin olvidar las hipótesis aquí realizadas y que nos han llevado a aproximar el movimiento de elongación del muelle por la solución semitrivial del sistema de ecuaciones.

Aún es posible obtener una expresión más sencilla de la ecuación sin más que aplicar el cambio de variable de la forma:

$$\theta = \alpha \varphi$$

Y escogiendo α de manera que anulemos los términos en derivada primera resulta:

$$\alpha = 1/r_c$$

Aplicando este cambio de variable y sustituyendo el valor de r_c por su expresión obtenida en el apartado anterior:

$$r_c(\tau) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{a}{\mu - 1} \operatorname{sen}(\tau)$$

Después de reordenar los parámetros de forma que lleguemos a la expresión más sencilla posible obtenemos la expresión de la ecuación a través de la cual vamos a estudiar la estabilidad de nuestro sistema:

$$\varphi'' + \mu \left[1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{a}{\mu - 1} \operatorname{sen} \tau} \right] \varphi = 0$$

Capítulo 4

Análisis numérico del sistema

En los capítulos precedentes hemos realizado en primer lugar una serie de hipótesis sobre el comportamiento del sistema para así obtener un modelo que se ajuste al sistema real en la medida de lo posible y nos permita realizar un análisis del mismo.

Así, en primera instancia, hemos obtenido un sistema de ecuaciones correspondiente a los dos grados de libertad que gobiernan el movimiento del sistema. Como se indicó en su momento, el sistema de ecuaciones diferenciales obtenido no tiene solución analítica conocida por lo que a continuación realizamos un estudio analítico, entendiendo éste no como un intento de obtener su solución analítica, sino como un estudio del comportamiento del sistema en unas situaciones concretas. Ello nos ha permitido estudiar una situación próxima al caso de estabilidad que buscamos, para obtener una ecuación simplificada que modele el comportamiento del sistema en posiciones cercanas ésta.

Sin embargo, y a pesar de haber obtenido una ecuación cuya expresión es mucho más sencilla que el sistema de ecuaciones del que partimos, ésta, aunque lineal, es una ecuación diferencial de segundo orden de coeficientes no constantes, aunque sí periódicos, cuya solución analítica también se desconoce. Es por ello que recurrimos al análisis numérico para realizar el estudio del modelo a través de esta ecuación. De este modo el análisis numérico nos proporciona una serie de herramientas potentes para abordar dicho problema de manera que realizando su implementación por medio del programa MATLAB obtengamos los resultados sobre la estabilidad del sistema.

4.1.- Introducción al análisis numérico

El objeto del Análisis Numérico es proporcionar métodos computacionales para el estudio y la solución de problemas matemáticos. Para la resolución de estos problemas se crean una serie de métodos estandarizados de solución denominados algoritmos. Por lo tanto podríamos definir al Análisis Numérico como la rama de las matemáticas encargada de describir, analizar y crear algoritmos que nos permitan estudiar problemas matemáticos.

Desde este punto de vista los algoritmos describen un procedimiento para la obtención de una solución aproximada de cada problema concreto. Por otra parte, el Análisis Numérico también tiene como objetivo estudiar la estabilidad de tales procedimientos así como el grado de exactitud que obtenemos de él en función de la aplicación concreta que realicemos.

Otro hecho importante a este respecto es que el Análisis Numérico toma especial relevancia con la llegada de los ordenadores y por lo tanto la potencia de cálculo que ello conlleva a la hora de implementar estos algoritmos. No hay que olvidar que un programa es la implementación de un algoritmo por medio de algún lenguaje de programación. Es por ello que hoy en día el Análisis Numérico es una herramienta fundamental a la hora de realizar modelos precisos de sistemas.

4.1.1.- Aplicaciones

El desarrollo de estos métodos numéricos nace de la necesidad de dar respuesta a una serie de problemas cuya solución por otros caminos sería extremadamente complicada o imposible. Por ello, y con ayuda de los ordenadores se implementan estos procedimientos de cálculo de forma que obtenemos una solución numérica aproximada de la respuesta real del problema, permitiendo así un modelado de sistemas que en un principio seríamos incapaces de abordar. Son muchas las ramas de la ciencia en la que los resultados están siempre sujetos a errores y por lo tanto tan importante es obtener una solución como controlar el grado de exactitud del método empleado en su obtención. No hay que olvidar que los errores y su medida están siempre presentes en la ciencia experimental.

Atendiendo a la motivación por la cual podemos acudir al análisis numérico podemos hacer una primera clasificación de las aplicaciones que de esta rama de las matemáticas se derivan:

- Por un lado la resolución de problemas cuya solución analítica nos es desconocida o su obtención es extremadamente compleja.
- Por otro lado puede que podamos obtener una solución analítica de un problema concreto pero el análisis del mismo por medio de ella directamente sea poco práctico.
- Otro caso es el de problemas para los cuales el análisis numérico sea más rentable que otro método a la hora de abordar el problema en cuestión en número de operaciones y tiempo.

4.1.2.- Integración numérica

Nuestro problema se reduce al análisis de una ecuación diferencial de la que desconocemos su solución analítica. Las ecuaciones diferenciales son una herramienta fundamental en el modelado de problemas físicos y puesto que la gran mayoría de ellas no pueden resolverse analíticamente, la integración numérica de ecuaciones diferenciales constituye una de las partes más importantes del Análisis Numérico y por lo que haremos una breve introducción a este problema.

El problema básico de integración de una ecuación diferencial ordinaria responde a la forma general:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

En general esta ecuación representa un sistema de m ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\begin{cases} y'_1(t) = f_1(t, y_1(t), \dots, y_m(t)) \\ \vdots \\ y'_m(t) = f_m(t, y_1(t), \dots, y_m(t)) \end{cases}$$

Este problema así planteado posee infinitas soluciones, pero solamente una (si f es regular) que en un instante determinado tome un valor determinado. Así pues podemos enunciar el problema de integración numérica del sistema de ecuaciones, una vez fijadas las condiciones iniciales, también denominado **problema de valor inicial (PVI) o problema de Cauchy**, en un intervalo $[t_0, t_f]$, como:

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$y(t_0) = y_0$$

Existen numerosos métodos que proporcionan una solución numérica de la ecuación por medio de procesos iterativos, y cuya base matemática comentamos en el siguiente apartado.

Las razones por la que acudimos a estos métodos numéricos para obtener una solución de la ecuación pueden ser muy distintas. Por un lado puede suceder que la función f sea sólo conocida en ciertos puntos, por ejemplo resultado de un muestreo, o por otro lado que el cálculo de la primitiva de la función no sea posible, como en el caso de e^{-x^2} . Por último también puede ser interesante acudir a dichos métodos por cuestiones prácticas ya que pueden proporcionarnos una forma más sencilla de aproximar la solución que por otros caminos.

4.2.- Bases matemáticas de la integración numérica

La idea general en la cual se basan la mayoría de los métodos empleados en la integración numérica del problema de Cauchy reside en la aproximación de la solución en un intervalo de tiempos determinado mediante una partición del mismo en la que se aproxima la función mediante una recurrencia. De esta forma cuanto más fina hagamos la partición del intervalo, en general, obtendremos una aproximación más ajustada a la solución real.

El más sencillo de ellos, y del que parten los distintos métodos empleados en general para tal fin, es el método de Euler. Así dado el problema de valores iniciales:

$$\left. \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_o) = y_o \end{array} \right\} t \in [t_o, t_f]$$

Consideramos una partición del intervalo de tiempo tal que:

$$t_o < t_1 < \dots < t_N = t_f$$

Para esta partición se obtienen las siguientes aproximaciones de la función:

$$y_n \approx y(t_n) \quad n = 1, 2, \dots, N$$

mediante la recurrencia:

$$y_{n+1} = y_n + h f(t_n, y_n) \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

donde

$$h = t_{n+1} - t_n \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

La idea del método de Euler es, en cada subintervalo $[t_n, t_{n+1}]$, sustituir la curva solución por su recta tangente, es decir, una aproximación en cada subintervalo del valor de la función real en función del anterior.

Son muchos los métodos basados en esta idea de aproximación de la función en cada intervalo en función del anterior, entre los que podemos citar el método de Euler mejorado, Runge-Kutta clásico, Heun, etc.... y en general los métodos de Runge-Kutta explícitos de s etapas en los que se basan las funciones de integración que emplearemos para el análisis de nuestro problema en MATLAB.

La expresión general de la recurrencia empleada por dichos métodos viene dada por:

$$y_{n+1} = y_n + h_n (b_1 k_1 + \dots + b_s k_s)$$

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + c_2 h_n, y_n + h_n a_{21} k_1)$$

$$k_3 = f(t_n + c_3 h_n, y_n + h_n (a_{31} k_1 + a_{32} k_2))$$

$$\vdots$$

$$k_s = f(t_n + c_s h_n, y_n + h_n (a_{s1} k_1 + \dots + a_{s,s-1} k_{s-1}))$$

Donde s representa la partición realizada del intervalo de tiempo. Se puede demostrar que tomando cada vez particiones más finas del intervalo la solución que obtenemos se aproxima cada vez más a la solución real que buscamos en el intervalo $[t_n, t_{n+1}]$. Por lo tanto cuanto mayor sea el número de etapas empleadas en el método mayor será la convergencia a la solución exacta.

Por otra parte también se puede demostrar que no es práctico ni recomendable tomar los incrementos de tiempo iguales, esto es: $h_n = (t_f - t_o) / N$ puesto que es posible tomarlo en función del error local que se cometa en cada paso, ya que la función no se comporta de la misma forma en todo el intervalo, por lo que es posible optimizar el proceso iterativo tomando particiones mas finas en una zonas que en otras, ahorrando tiempo de cálculo y obteniendo resultados más exactos. El método que en este aspecto ha resultado ser más adecuado es el de los pares encajados de Runge-Kutta.

Por último comentar que son numerosas las funciones existentes en la librería de MATLAB para realizar la integración numérica del problema formulado anteriormente. Entre ellas, las más empleadas son ode23 y ode45. La función ode45 integra un problema de valor inicial utilizando el par encajado DOPRI(4) de Dormand y Price, esto es, obtiene aproximaciones y_n con un método de orden 5, mientras que el comando ode23 lo hace con un método de segundo orden debido a Bogacki y Shampine.

4.3.- Integración numérica de la ecuación

En este apartado pasamos a aplicar el Análisis numérico a nuestro modelo, lo que conlleva realizar una integración numérica de la ecuación que obtuvimos en el capítulo anterior. En un primer momento vamos a adaptar esta ecuación de forma que podamos emplear los métodos de integración descritos anteriormente para luego presentar los programas y las funciones empleadas para tal fin. Para ello se ha empleado el programa de matemáticas MATLAB ya que se adapta bien a nuestras exigencias en cuanto a precisión de cálculo y presentación de los resultados.

4.3.1.- Adaptación de la ecuación para su integración numérica

La ecuación que tenemos como modelo del sistema obtenida anteriormente es:

$$\varphi'' + \mu \left[1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{a}{\mu - 1} \operatorname{sen} \tau} \right] \varphi = 0$$

Para emplear los métodos de integración comentados anteriormente, y en los cuales se basan las funciones que vamos a emplear en MATLAB, debemos adaptarla para tal fin. Esta ecuación es una ecuación de segundo orden, lineal, pero mediante un sencillo cambio de variables podemos extraer de ella un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden en la forma del problema de valores iniciales citado anteriormente. Así pues la expresión general de nuestra ecuación es de la forma:

$$\varphi'' + \gamma(\tau) \varphi = 0$$

El cambio de variables propuesto es:

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{bmatrix}$$

Aplicando el cambio de variables obtenemos:

$$Y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi' \\ \varphi'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -\gamma(\tau) y_1 \end{bmatrix} \quad (\text{VI})$$

Donde $\gamma(\tau)$ representa el coeficiente de nuestra ecuación:

$$\gamma(\tau) = 1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{a}{\mu - 1} \operatorname{sen} \tau}$$

La expresión (VI) ya se corresponde con un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo:

$$Y' = f(t, Y)$$

por lo que ya podemos proceder a implementar los métodos de integración sobre ella en MATLAB.

4.3.2.- Funciones empleadas

Pasamos ahora a describir el procedimiento empleado para la integración del sistema de ecuaciones (VI) en MATLAB. En la librería del programa existen numerosas funciones para realizar tales operaciones de las cuales las más utilizadas, como ya se comentó anteriormente, son `ode23` y `ode45`. Las dos funciones están enfocadas a la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales como el nuestro. Sin embargo, si bien las dos funciones parten de los mismos métodos numéricos para realizar la integración, la función `ode45` presenta un orden de convergencia superior al de `ode23`. Por el contrario ello lleva aparejado un coste computacional mayor por lo que al realizar la elección de cuál de ellos emplear habrá que sopesar las ventajas e inconvenientes que ello conlleva.

En nuestro caso, y puesto que carecemos de solución analítica, aproximada o no, de la ecuación con la que poder comparar resultados hemos escogido para el análisis numérico el empleo de `ode45` principalmente por el hecho de obtener una solución lo más aproximada posible a la solución exacta del sistema.

La forma general en MATLAB de ejecutar la función ode45 es de la forma:

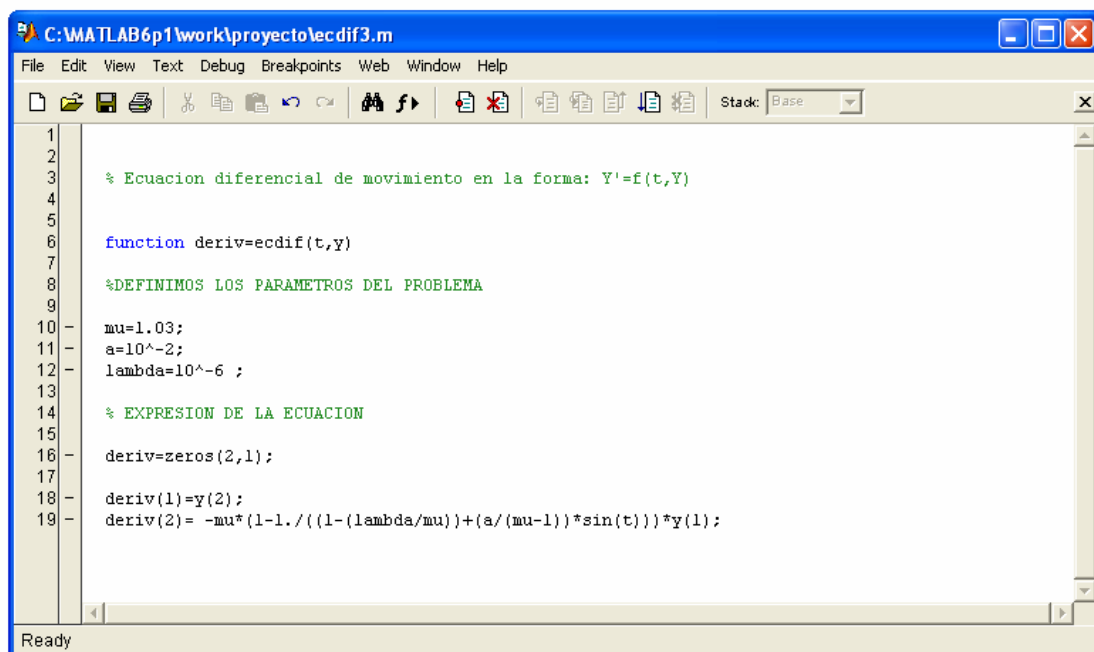
$[t, y] = \text{ode45}(@ \text{funcion}, \text{tiempos}, y0, \text{opciones})$

Los argumentos de la función son:

- Por un lado la expresión *@funcion* es una llamada al archivo .m donde tenemos almacenada la expresión de la función que queremos integrar y que dados (t,y) nos devuelve el valor f(t,y) del segundo miembro del sistema de ecuaciones diferenciales del PVI, de forma que $y' = f(t,y)$.
- El vector *tiempos* se corresponde con el intervalo de tiempos donde queremos integrar nuestro sistema, por lo tanto será $[t_o, t_f]$
- El vector *y0* son las condiciones iniciales de nuestro problema concreto
- El argumento *opciones* representa una estructura creada mediante el comando *odeset* donde podemos indicar, entre otros, los valores de las tolerancias para el control del error local en la integración.

Por lo tanto el primer paso para trabajar en MATLAB será crear la función que nos evalúe en cada punto el sistema de ecuaciones dado por la expresión (VI).

En la siguiente figura podemos observar el archivo .m que hemos creado para tal fin, al que hemos denominado **ecdif.m**



```
C:\MATLAB6p1\work\proyecto\ecdif3.m
File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help
% Ecuacion diferencial de movimiento en la forma: Y'=f(t,Y)

function deriv=ecdif(t,y)

%DEFINIMOS LOS PARAMETROS DEL PROBLEMA

mu=1.03;
a=10^-2;
lambda=10^-6 ;

% EXPRESION DE LA ECUACION

deriv=zeros(2,1);

deriv(1)=y(2);
deriv(2)= -mu*(1-1./((1-(lambda/mu))+a/(mu-1))*sin(t))*y(1);
```

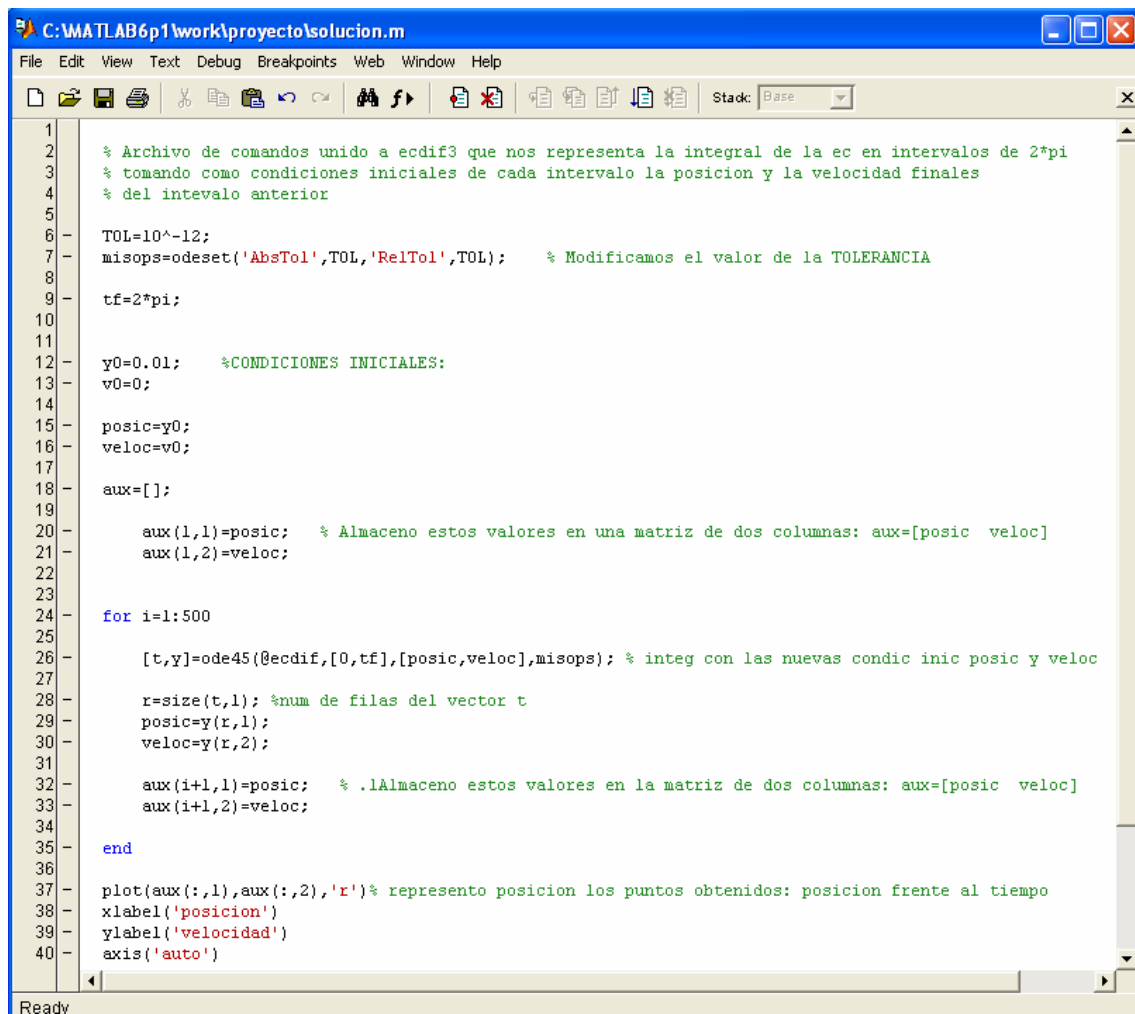
En él observamos cómo recibe dos argumentos:

- el escalar t correspondiente al instante en el que se evalúa la expresión de la función.
- El vector y formado por dos elementos correspondientes a la expresión del sistema de ecuaciones por la cual se corresponden a la posición y a la velocidad angular de nuestro problema.

Con estas entradas la función nos devuelve el valor de la derivada según la expresión (VI).

También podemos observar cómo es aquí donde hemos definido los parámetros del sistema aunque podríamos haberlos definido en el programa de llamada a éste. Esto se ha hecho así por simplificar el paso de valores de un archivo a otro y hacer mas claro la llamada de un programa a otro.

En la siguiente figura se muestra el archivo .m que hemos construido para realizar la integral numérica de nuestro sistema y que hemos denominado **solucion.m**



```

1
2  % Archivo de comandos unido a ecdif3 que nos representa la integral de la ec en intervalos de 2*pi
3  % tomando como condiciones iniciales de cada intervalo la posicion y la velocidad finales
4  % del intervalo anterior
5
6  TOL=10^-12;
7  misops=odeset('AbsTol',TOL,'RelTol',TOL); % Modificamos el valor de la TOLERANCIA
8
9  tf=2*pi;
10
11
12  y0=0.01; %CONDICIONES INICIALES:
13  v0=0;
14
15  posic=y0;
16  veloc=v0;
17
18  aux=[];
19
20  aux(1,1)=posic; % Almaceno estos valores en una matriz de dos columnas: aux=[posic veloc]
21  aux(1,2)=veloc;
22
23
24  for i=1:500
25
26  [t,y]=ode45(@ecdif,[0,tf],[posic,veloc],misops); % integ con las nuevas condic inic posic y veloc
27
28  r=size(t,1); %num de filas del vector t
29  posic=y(r,1);
30  veloc=y(r,2);
31
32  aux(i+1,1)=posic; % .lAlmaceno estos valores en la matriz de dos columnas: aux=[posic veloc]
33  aux(i+1,2)=veloc;
34
35  end
36
37  plot(aux(:,1),aux(:,2),'r')% represento posicion los puntos obtenidos: posicion frente al tiempo
38  xlabel('posicion')
39  ylabel('velocidad')
40  axis('auto')

```

En este archivo observamos varios aspectos importantes del proceso de integración que hemos realizado. En primer lugar hemos modificado el valor de la tolerancia a 10^{-12} ya que de unas primeras pruebas sin este cambio observamos que la curva obtenida solución de la integración, y correspondiente a la posición angular del péndulo, dependía del intervalo de tiempos en que realizamos la integración, por lo que la solución no era válida. Esto se debía a que el valor relativo era del orden del valor absoluto de la solución. Con este cambio se solucionaba tal problema.

Otro aspecto importante en el método utilizado es que hemos integrado en intervalos de tiempo de 0 a 2π . Para ello nos hemos basado en la periodicidad del coeficiente de nuestra ecuación por lo que en cada intervalo hemos tomado como condiciones iniciales la posición y la velocidad finales obtenidas en el intervalo anterior. Este hecho nos permitirá observar la estabilidad del sistema sin emplear intervalos de tiempo (y por lo tanto intervalos de integración) excesivamente grandes por lo que simplificamos las operaciones a realizar y ahorramos tiempo de cálculo. Por último en este archivo observamos que las condiciones iniciales que hemos tomado en nuestro problema han sido:

$$y_1(0) = \varphi(0) = 0.01$$

$$y_2(0) = \dot{\varphi} = 0$$

Estos valores se han tomado así por coherencia con el modelo que estamos tratando. Como se ha comentado en capítulos anteriores nuestro sistema reproduce el comportamiento del sistema real siempre y cuando nos atengamos a las hipótesis realizadas para su obtención. Así pues nosotros, para obtener el modelo que representa el comportamiento del péndulo muelle invertido, hemos supuesto posiciones cercanas a la vertical por lo que hemos partido de esta situación para ajustar los resultados a la situación real. Por el contrario el hecho de haber obtenido un sistema de ecuaciones lineales hace que la solución que obtengamos de él no dependa de las condiciones iniciales de las que partamos, esto es, sólo influye en la amplitud de la respuesta, y no en la forma de ésta, por lo que no influirán en la estabilidad de la misma.

Por último el programa que hemos construido nos representa la velocidad frente a la posición final obtenida en cada intervalo de integración 2π . Así pues soluciones estables se corresponderán a curvas que se mantengan lógicamente en rangos de posición aceptables y podremos estudiar el modo de oscilación que obtengamos.

A modo de ejemplo realizamos la integración para unos valores concretos de los parámetros y vemos dos situaciones muy distintas:

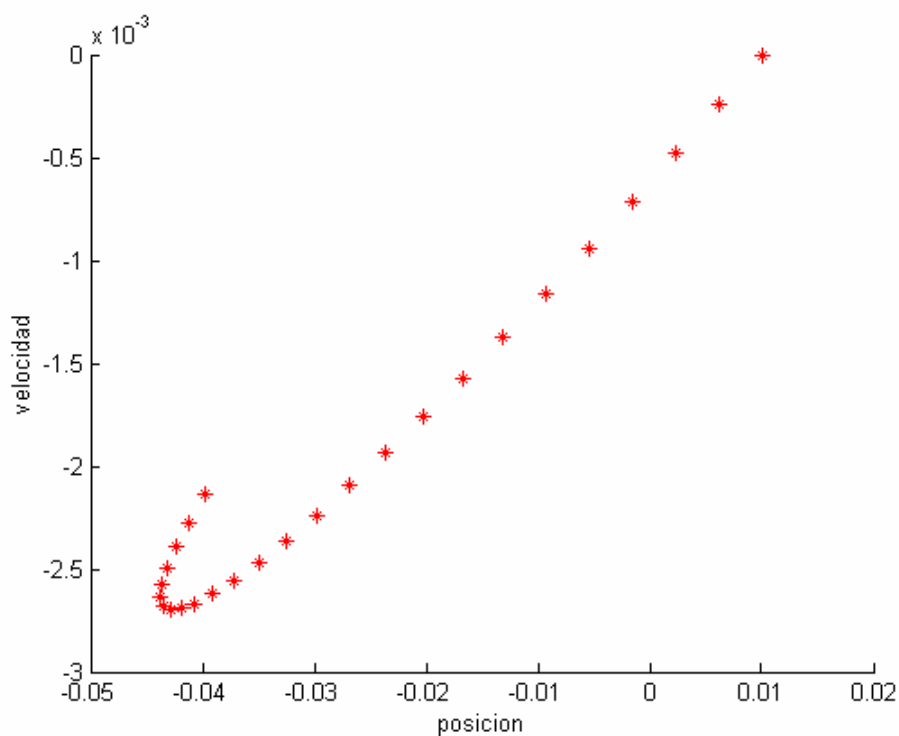
Aplicamos la integración para los siguientes valores de los parámetros:

$$\mu = 1.02$$

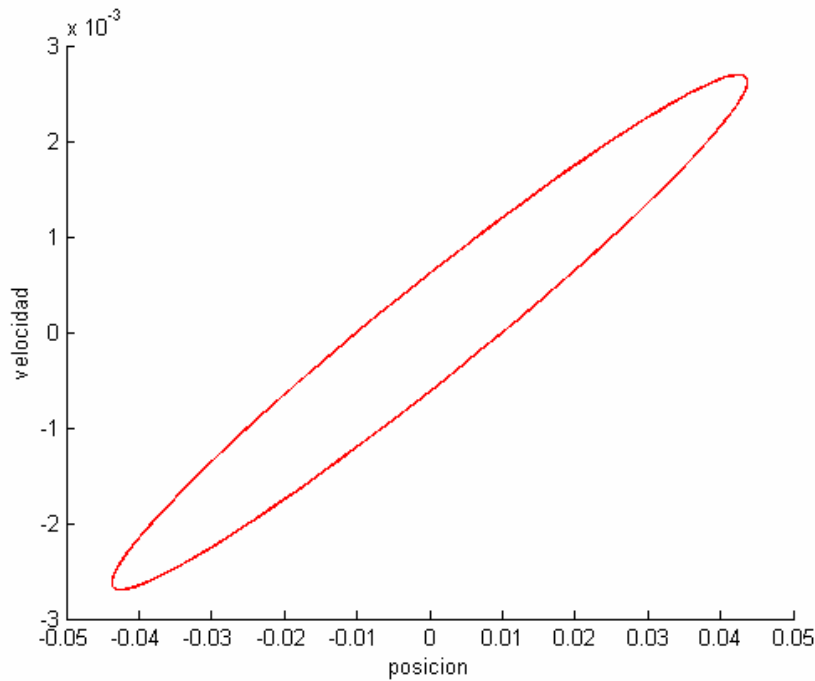
$$a = 0.01$$

$$\lambda = 10^{-4}$$

Resultando:

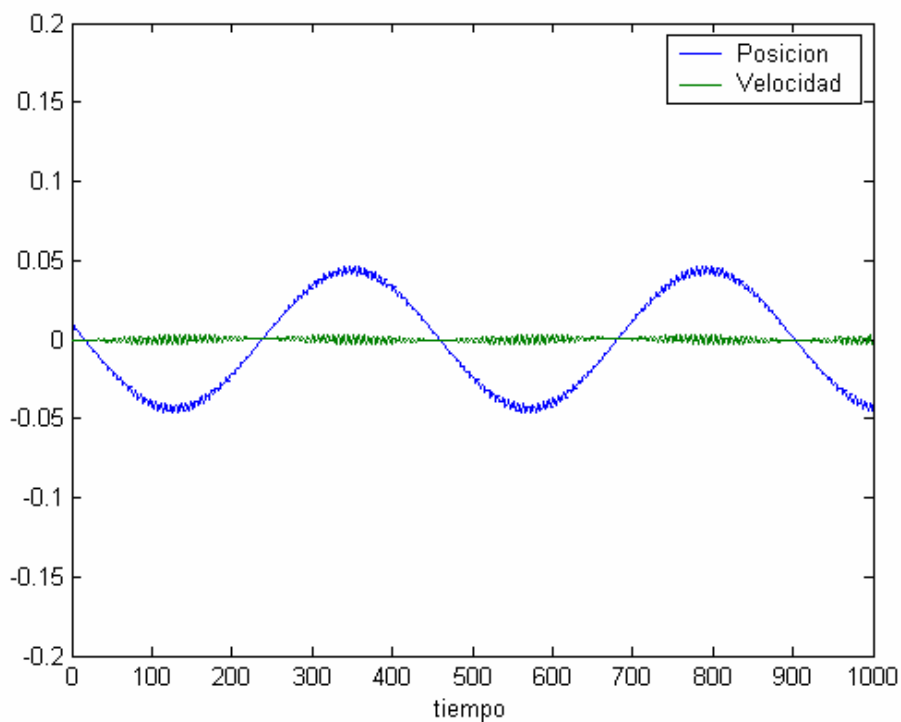


En ella observamos cómo, partiendo del punto inicial, el péndulo pasa por la posición vertical para tomar valores negativos del ángulo y consigue recuperar en última instancia, por lo que puede presentar estabilidad. Vemos si es así realizando más pasos en el bucle de integración y obtenemos la siguiente gráfica:



En esta gráfica observamos cómo el péndulo realiza un movimiento de oscilación entorno a la posición vertical por lo que podemos afirmar que esta combinación de valores de los parámetros hace que nuestro sistema sea estable. El objetivo de este proyecto será determinar las regiones de estabilidad que se nos presentan en función de dichos parámetros, esto es, en función de la excitación que introducimos mediante vibración y los parámetros relativos a nuestro sistema concreto.

Representando esta respuesta frente al tiempo observamos el mismo hecho:



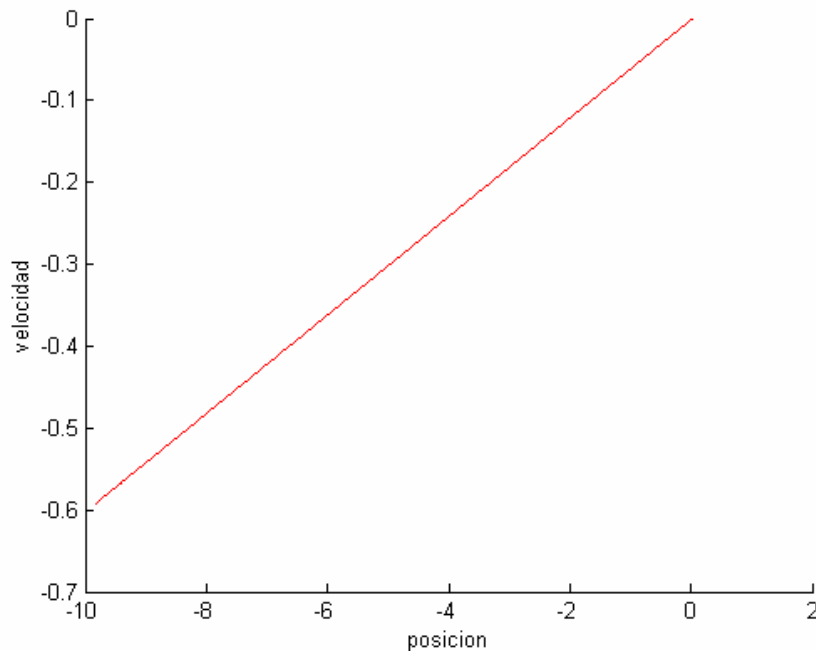
A la vista de la representación de la posición frente al tiempo observamos una componente en altas frecuencias de la posición, debida a la alta frecuencia de excitación, que no se observa en la anterior. Esto se debe a que en esta última gráfica se representa la posición en cada instante de tiempo mientras que en la primera de ellas se representa únicamente la posición frente a la velocidad final obtenida en cada subintervalo 2π de integración por lo que este efecto no se aprecia.

Sin embargo con otros valores de los parámetros obtenemos:

$$\mu = 1.02$$

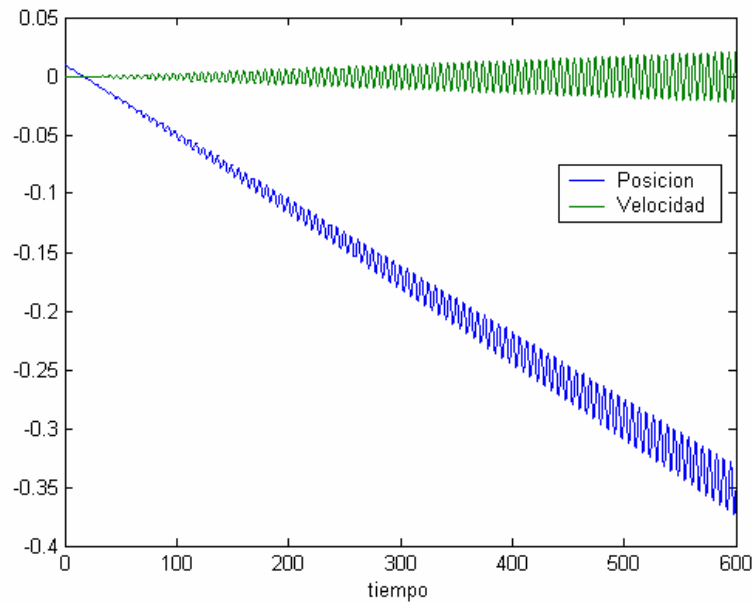
$$a = 0.01$$

$$\lambda = 0.3 \cdot 10^{-3}$$



En esta situación el sistema presenta claramente un comportamiento inestable ya que no consigue recuperar la posición vertical y cae.

Representando como hicimos anteriormente la solución obtenida frente al tiempo vemos este efecto:



En esta gráfica observamos cómo el péndulo, al igual que antes posee una componente en altas frecuencias debida a la excitación introducida por la vibración, pero en este caso presenta un comportamiento claramente inestable. Sin embargo vemos cómo para estudiar la estabilidad del sistema representando la posición frente al tiempo necesitamos intervalos muy grandes mientras que este comportamiento queda mucho más claro mediante el tipo de representación en intervalos de 2π .

4.4.- Determinación de las regiones de estabilidad

En este apartado vamos a analizar la estabilidad de nuestro sistema en función del valor que toman los tres parámetros en él implicados. Para ello en un primer momento vamos a hacer un análisis cualitativo de los mismos para ver el rango de valores que pueden tomar y así centrar nuestra búsqueda de las regiones de estabilidad. Los tres parámetros a los que redujimos el conjunto inicial son:

$$\mu = \frac{K/m}{\omega^2}$$

$$\lambda = \frac{g/\ell_o}{\omega^2}$$

$$a = \frac{A}{\ell_o}$$

Las dos primeras expresiones definen a los parámetros μ y λ como la relación entre las frecuencias naturales del muelle y del péndulo respectivamente respecto de la frecuencia de la vibración que introducimos en la base. En un primer momento obtuvimos una relación entre ambos parámetros como consecuencia de la longitud mínima que realmente tiene el muelle y que resultaba:

$$\frac{\lambda}{\mu} < 1$$

En cuanto al valor que puede tomar el parámetro λ vemos que, dado que la frecuencia de vibración ha de ser muy alta para lograr estabilizar el sistema, el valor que tomará ha de ser muy pequeño, por lo que podemos afirmar que:

$$\lambda \ll 1$$

Otro parámetro del que podemos conocer su orden de magnitud a priori es el parámetro a , relación entre la amplitud de oscilación y la longitud natural del muelle. Esta relación también debe ser pequeña debido a que la amplitud de la vibración será al menos de un orden inferior a la longitud natural del muelle para lograr estabilizar el sistema.

Por lo tanto nos queda conocer el rango de valores que puede tomar el parámetro μ . Éste expresa la relación entre la frecuencia natural del muelle respecto a la frecuencia de vibración, y por lo tanto será el término que nos de información sobre el efecto que introduce el muelle en la estabilidad del péndulo invertido. Por ahora sólo sabemos que debe ser menor que λ , pero además podemos partir de resultados obtenidos en el modelado de otros sistemas relacionados con el nuestro, que pueden servir como punto de partida para estudiar la influencia que tiene la rigidez del muelle en la estabilidad del sistema.

De otros estudios sobre el péndulo invertido sabemos que el sistema constituido por una varilla rígida sometida a vibración de la base presenta estabilidad en su posición invertida cuando la sometemos a frecuencias altas de vibración y pequeñas amplitudes. Esto traducido a nuestro sistema sería equivalente a dar una rigidez muy alta al muelle, por lo que en esta situación nuestro sistema debe presentar un comportamiento estable en función del valor del resto de parámetros implicados.

Por lo tanto el procedimiento que seguiremos para el estudio de la estabilidad de nuestro sistema será comenzar con valores altos de la rigidez del muelle e ir disminuyendo ésta paulatinamente obteniendo en cada caso las regiones de estabilidad que se nos presentan. De este modo, a través del parámetro μ , podremos estudiar la influencia que tiene el muelle en la estabilidad de nuestro sistema.

4.4.1.- Región de estabilidad para $\mu = 3$

En este primer caso partimos de una rigidez muy alta de modo que obtengamos la estabilidad del sistema en función de los otros dos parámetros de los cuales sabemos que orden de magnitud han de tener, a saber, λ y a .

Así pues el procedimiento para obtener la región de estabilidad que se nos ha de presentar será introducir un valor del parámetro a concreto, y comenzar con frecuencias de vibración muy altas, lo que conlleva valores pequeños del parámetro λ , de modo que consigamos estabilizar el sistema, para ir sucesivamente bajándola de modo que obtengamos el punto en el que el sistema se hace inestable. Este punto representará el primer punto de la región de estabilidad que presenta el sistema en función de λ y a para este valor concreto de μ .

A la vista de la definición del parámetro a los valores en los que nos moveremos serán:

$$a = 0.001$$

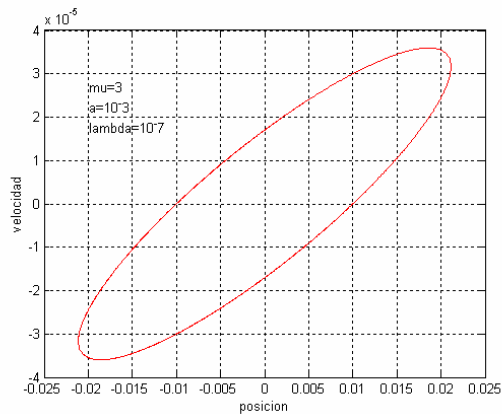
$$a = 0.01$$

$$a = 0.1$$

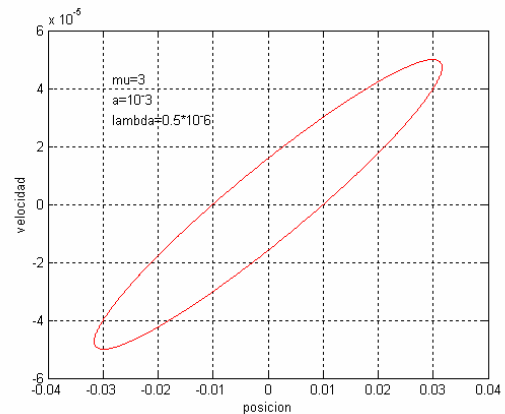
Comenzamos con el proceso:

$$-a = 0.001$$

$$\lambda = 10^{-7}$$

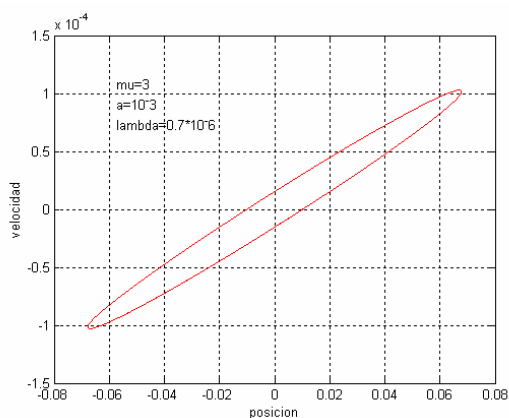


$$\lambda = 0.5 * 10^{-6}$$

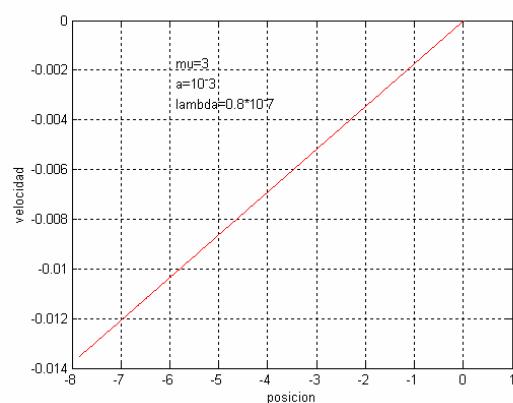


Hemos comenzado con valores muy altos de frecuencia hasta conseguir estabilizar el sistema para a continuación ir bajándola, lo que se traduce en ir aumentando λ , hasta encontrar el punto donde se hace inestable. Continuamos con el proceso:

$$\lambda = 0.7 * 10^{-6}$$



$$\lambda = 0.8 * 10^{-6}$$

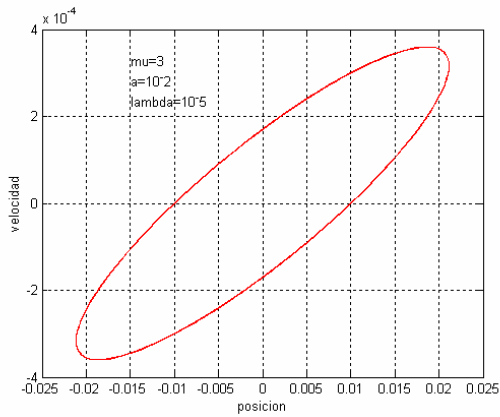


Vemos cómo a medida que aumentamos λ el sistema comienza a oscilar con amplitudes mayores hasta llegar a hacerse inestable para un valor de $\lambda = 0.8 * 10^{-6}$, representando este el primer punto de la región de estabilidad que buscamos.

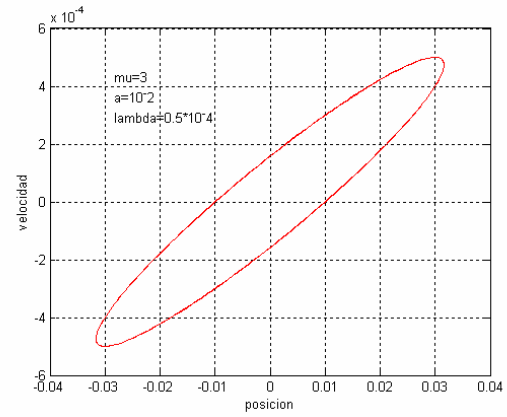
Continuamos con el proceso para el nuevo valor de a :

- $a = 0.01$

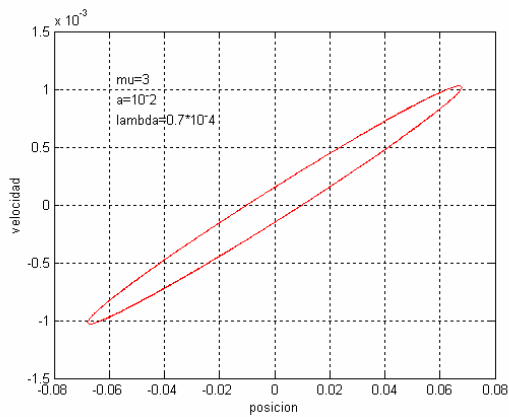
$$\lambda = 10^{-5}$$



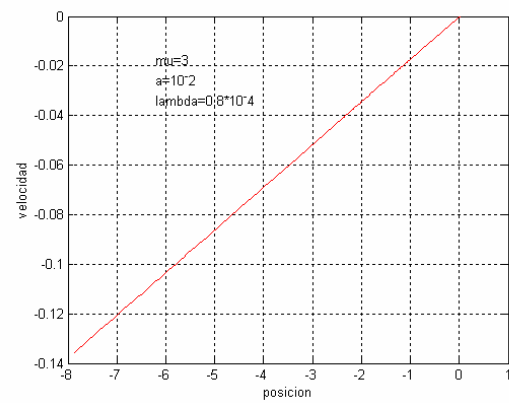
$$\lambda = 0.5 * 10^{-4}$$



$$\lambda = 0.7 * 10^{-6}$$



$$\lambda = 0.8 * 10^{-6}$$

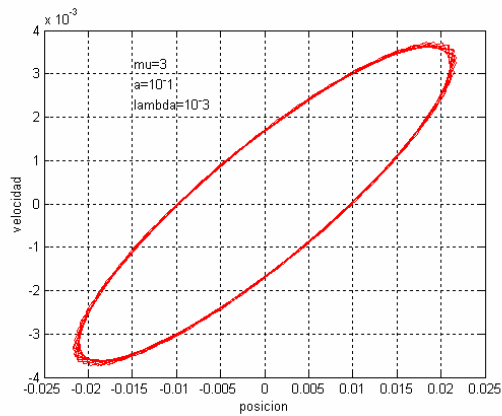


En esta situación encontramos también un rango de valores del parámetro λ para el que el sistema presenta estabilidad, con pequeñas oscilaciones periódicas entorno a la posición vertical, hasta encontrar el nuevo punto de la región de estabilidad en el cual el sistema deja de ser estable.

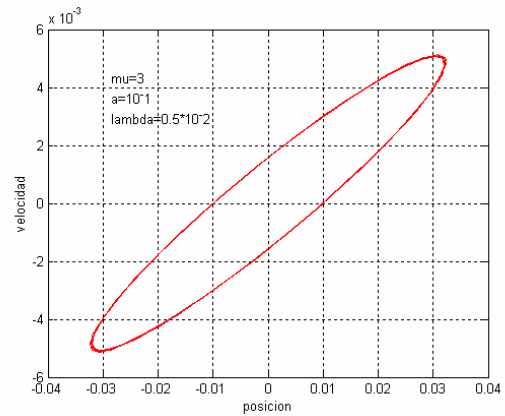
Por último tomamos el valor más alto de la amplitud de vibración para el cual tenemos:

$$- a = 0.1$$

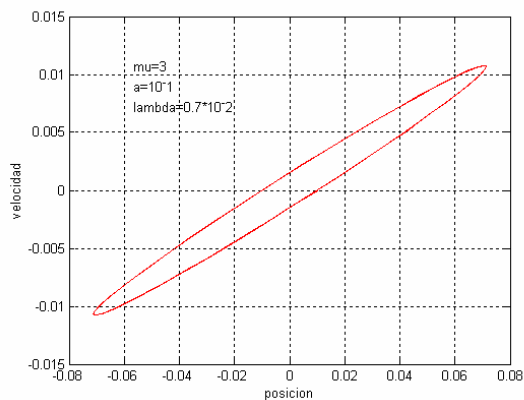
$$\lambda = 10^{-3}$$



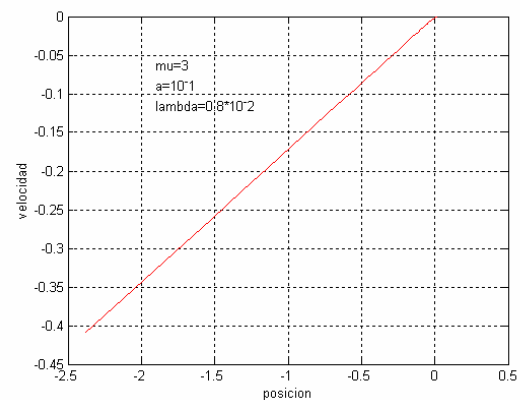
$$\lambda = 0.5 * 10^{-2}$$



$$\lambda = 0.7 * 10^{-2}$$



$$\lambda = 0.8 * 10^{-2}$$



A la vista de los resultados obtenidos vemos una serie de hechos que van a caracterizar el comportamiento de nuestro sistema en función del valor de los parámetros.

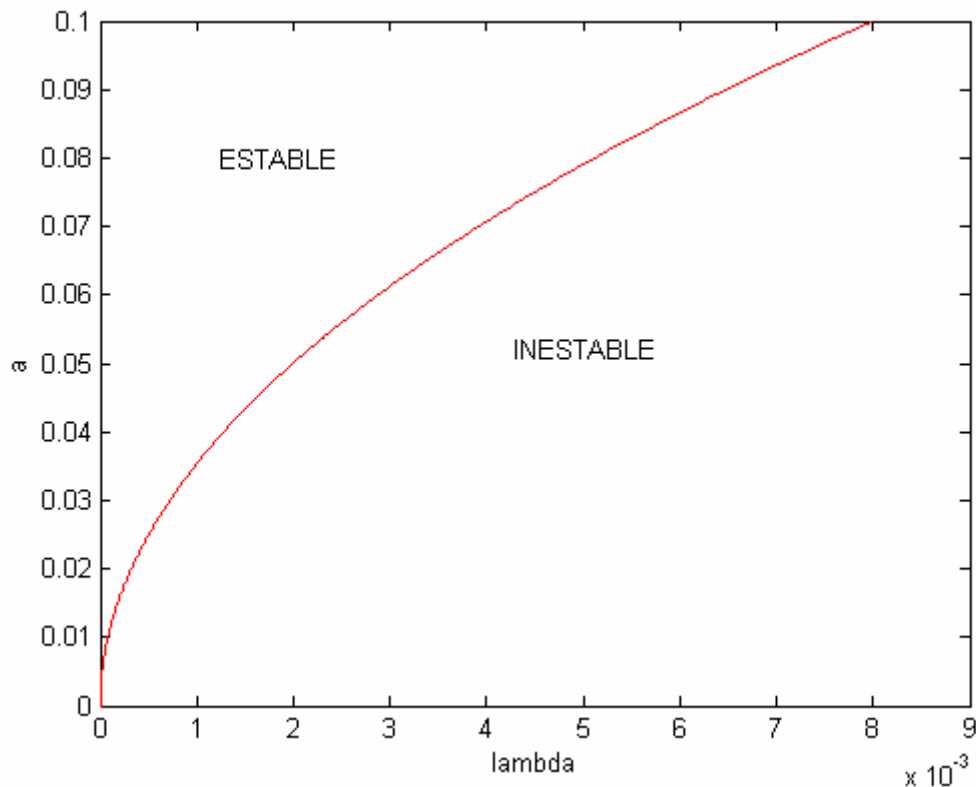
En primer lugar la forma de oscilación del sistema en situación estable es similar en todos los casos, presentando oscilaciones entorno a la posición vertical, de amplitudes mayores conforme nos acercamos a la situación inestable, que se corresponde a frecuencias de vibración menos altas.

Otro hecho característico es que los puntos en función de λ y a en que el sistema deja de ser estable obedecen todos a una misma ley:

$$\lambda \approx 0.8 a^2$$

Representando los puntos obtenidos obtenemos la región de estabilidad correspondiente a este valor concreto de μ , y que cumplen la relación antes citada. Así tenemos que la región de estabilidad obtenida en este caso es:

$$\mu = 3$$



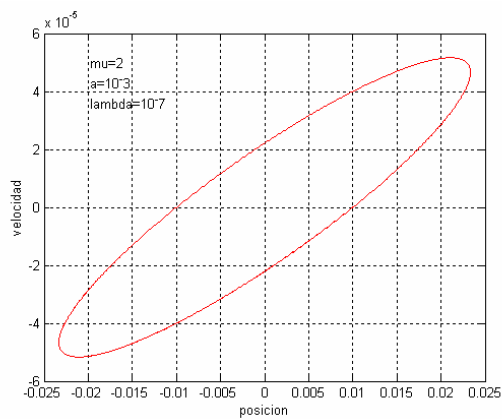
Este resultado se corresponde a un valor de la rigidez del muelle muy alto por lo que se asemeja al caso de la varilla rígida comentado anteriormente. El estudio de la estabilidad de nuestro sistema consistirá en ir disminuyendo la rigidez del muelle, lo que se traduce en disminuir el parámetro μ , tanto como sea posible para obtener las distintas regiones de estabilidad que se nos presentan.

4.4.2.- Región de estabilidad para $\mu=2$

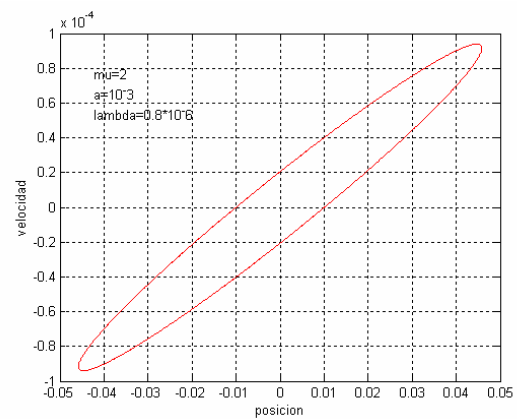
Comenzamos con el proceso para cada valor de a :

- $a = 0.001$

$$\lambda = 10^{-7}$$



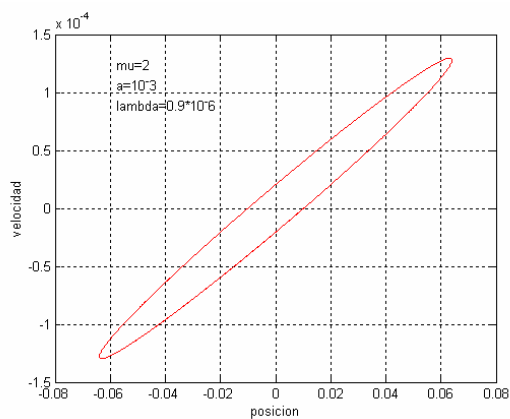
$$\lambda = 0.8 * 10^{-6}$$



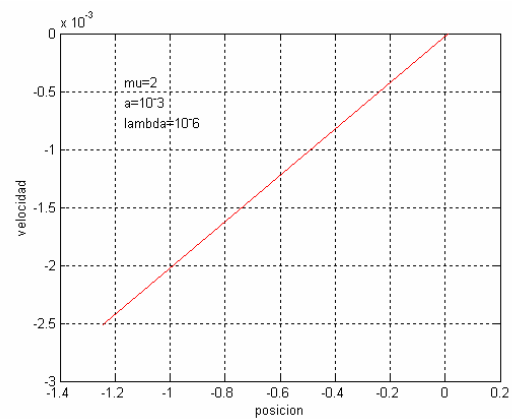
A la vista de esta segunda gráfica vemos que para estos valores de los parámetros a y λ en el caso anterior teníamos una situación de inestabilidad mientras que con el nuevo valor de μ presenta estabilidad. Comparando con el resultado anterior ya vemos que el ancho de frecuencias para el cual el sistema es estable ha aumentado al disminuir la rigidez del muelle.

Continuamos con el proceso en busca del punto en el cual el sistema se hace inestable:

$$\lambda = 0.9 * 10^{-6}$$

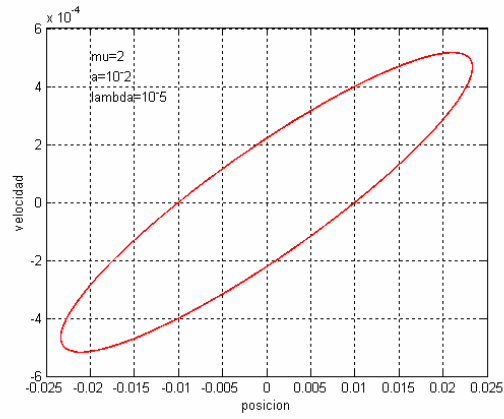


$$\lambda = 10^{-6}$$

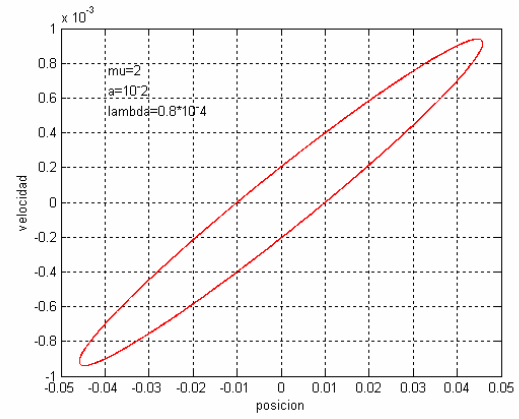


$$-a = 0.01$$

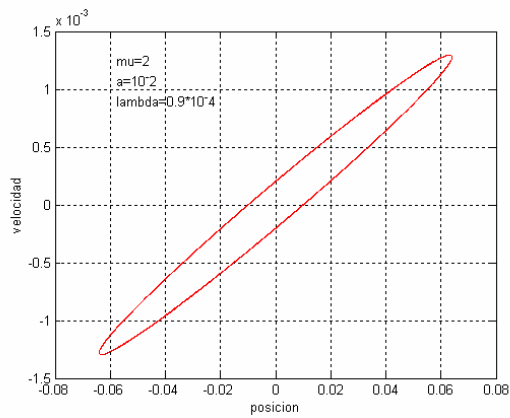
$$\lambda = 10^{-5}$$



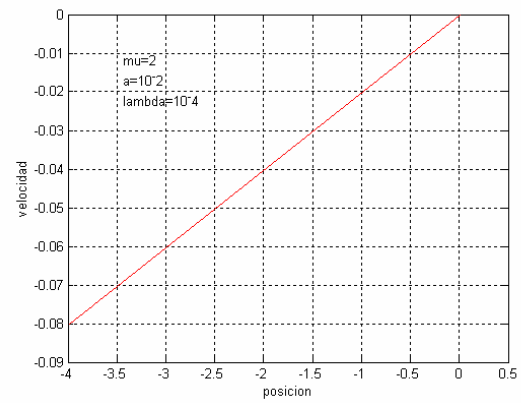
$$\lambda = 0.8 * 10^{-4}$$



$$\lambda = 0.9 * 10^{-4}$$

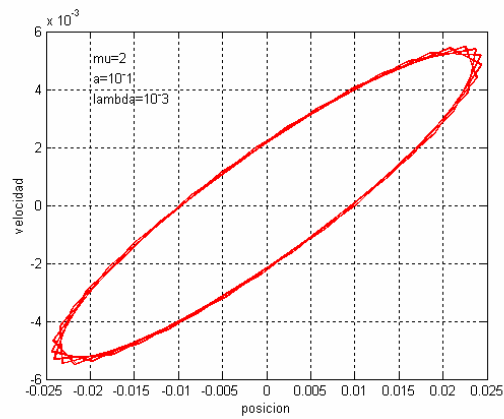


$$\lambda = 10^{-4}$$

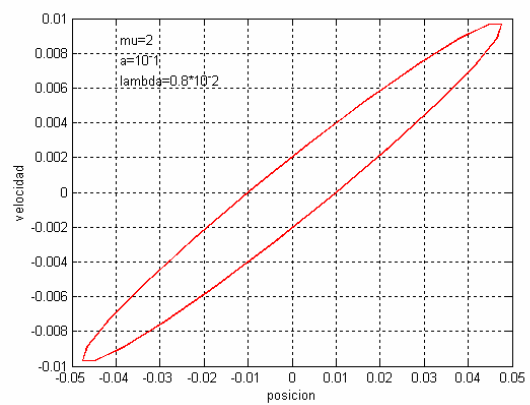


$$-a = 0.1$$

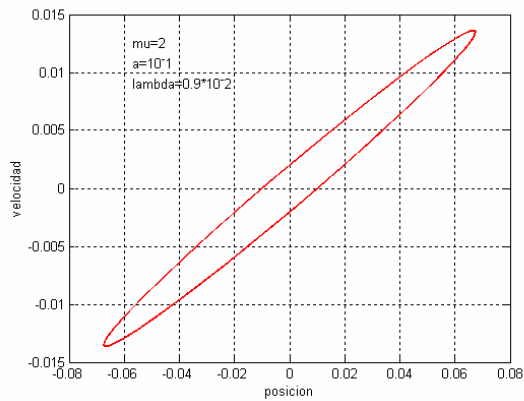
$$\lambda = 10^{-3}$$



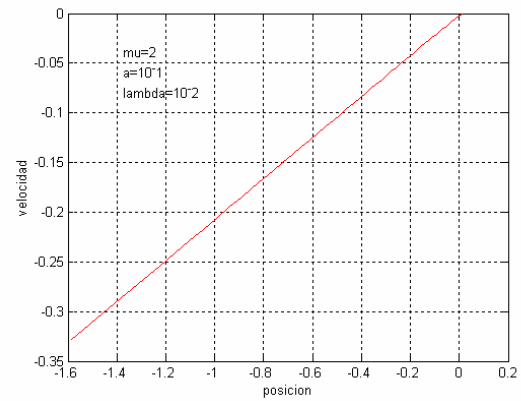
$$\lambda = 0.8 * 10^{-2}$$



$$\lambda = 0.9 \cdot 10^{-2}$$



$$\lambda = 10^{-2}$$

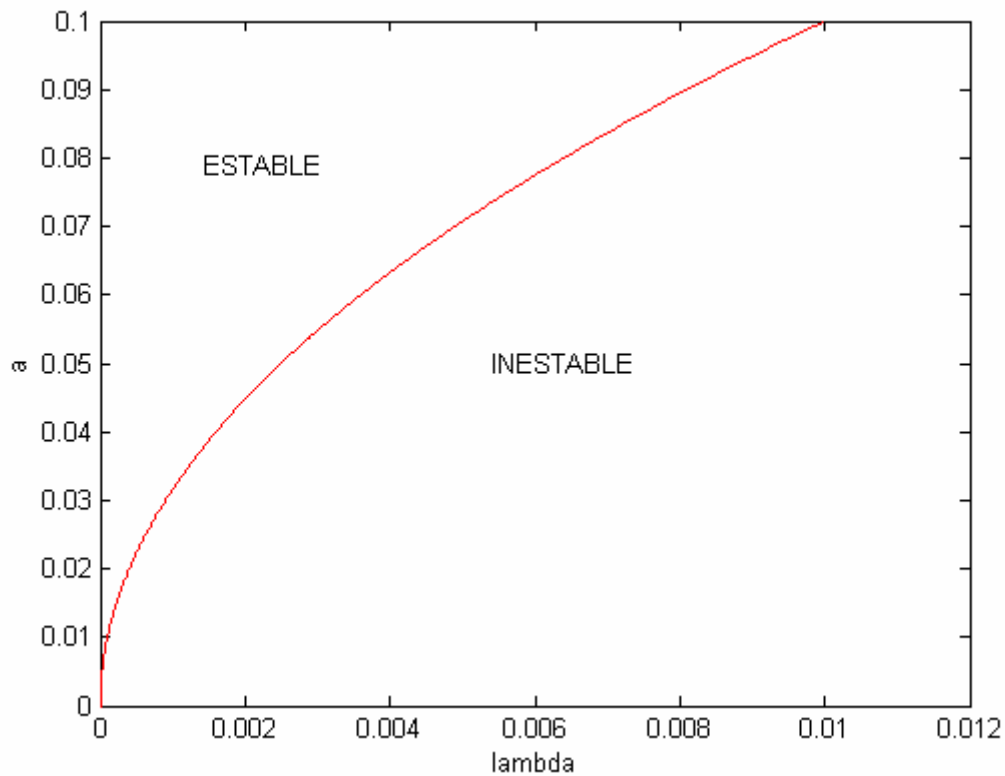


A la vista de los resultados obtenidos vemos que los puntos en que el sistema deja de ser estable corresponden todos ellos a una misma ley en función de λ y a , que tiene la forma:

$$\lambda \approx a^2$$

Así pues representando los puntos obtenidos tenemos la región de estabilidad para este valor del parámetro μ :

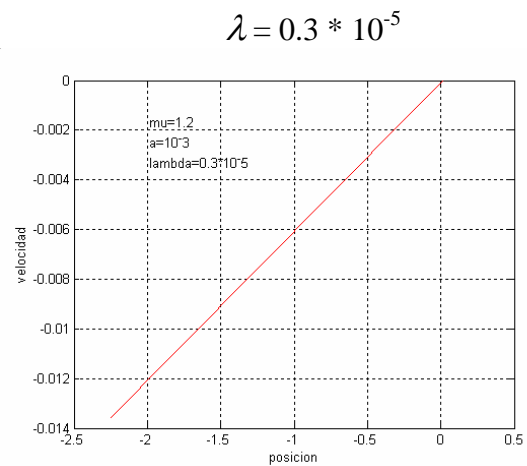
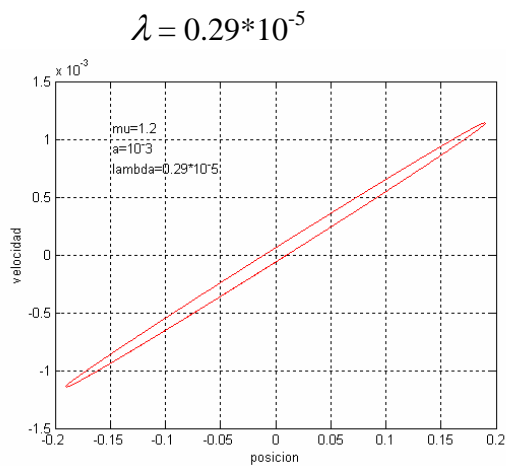
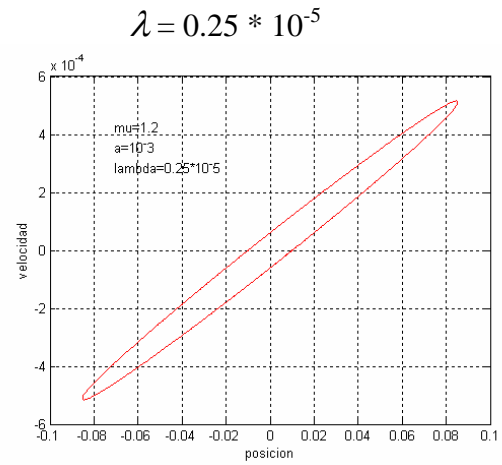
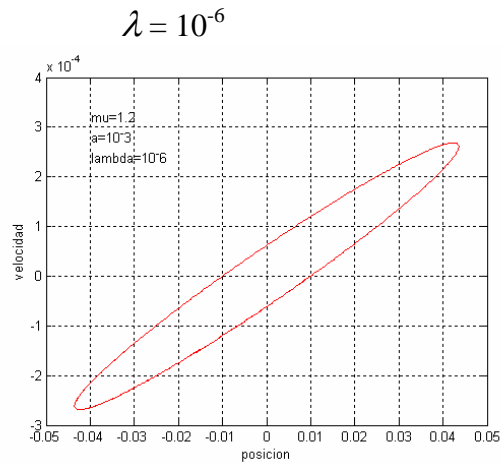
$$\mu=2$$



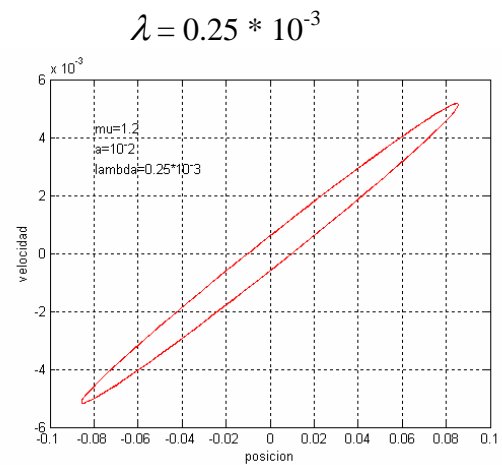
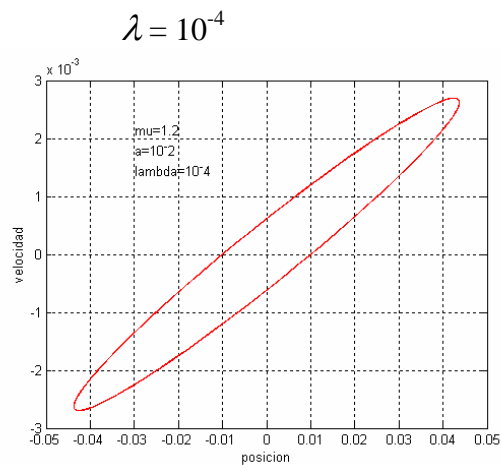
4.4.3.- Región de estabilidad para $\mu=1.2$

Repetimos el proceso disminuyendo la rigidez relativa del muelle.

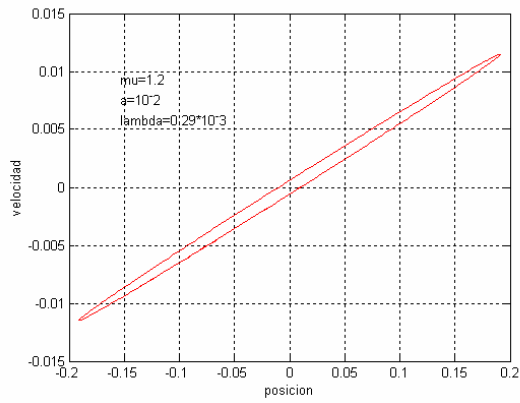
- $a = 0.001$



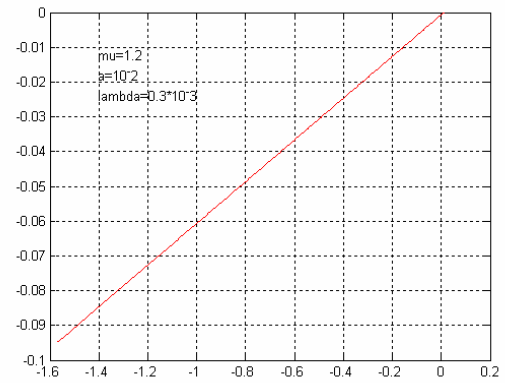
- $a = 0.01$



$$\lambda = 0.29 \cdot 10^{-3}$$

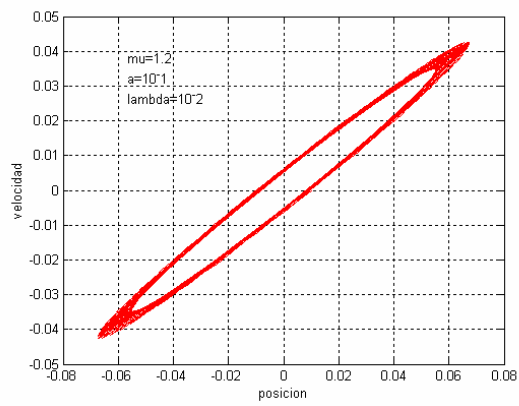


$$\lambda = 0.3 \cdot 10^{-3}$$

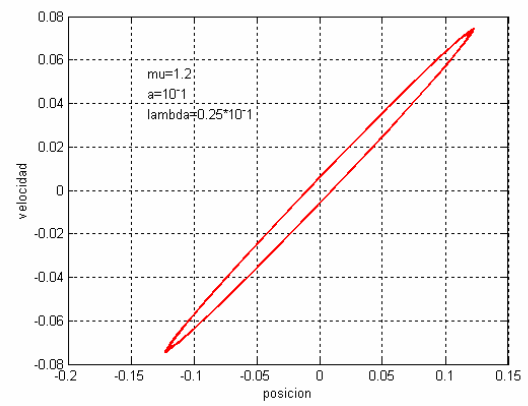


$$-a = 0.1$$

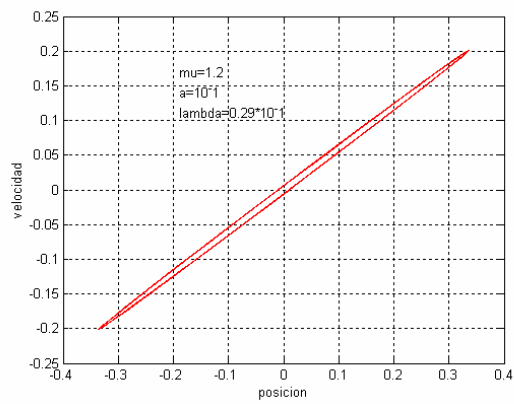
$$\lambda = 10^{-2}$$



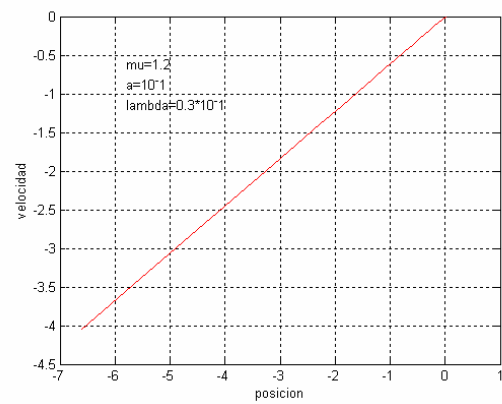
$$\lambda = 0.25 \cdot 10^{-1}$$



$$\lambda = 0.29 \cdot 10^{-1}$$



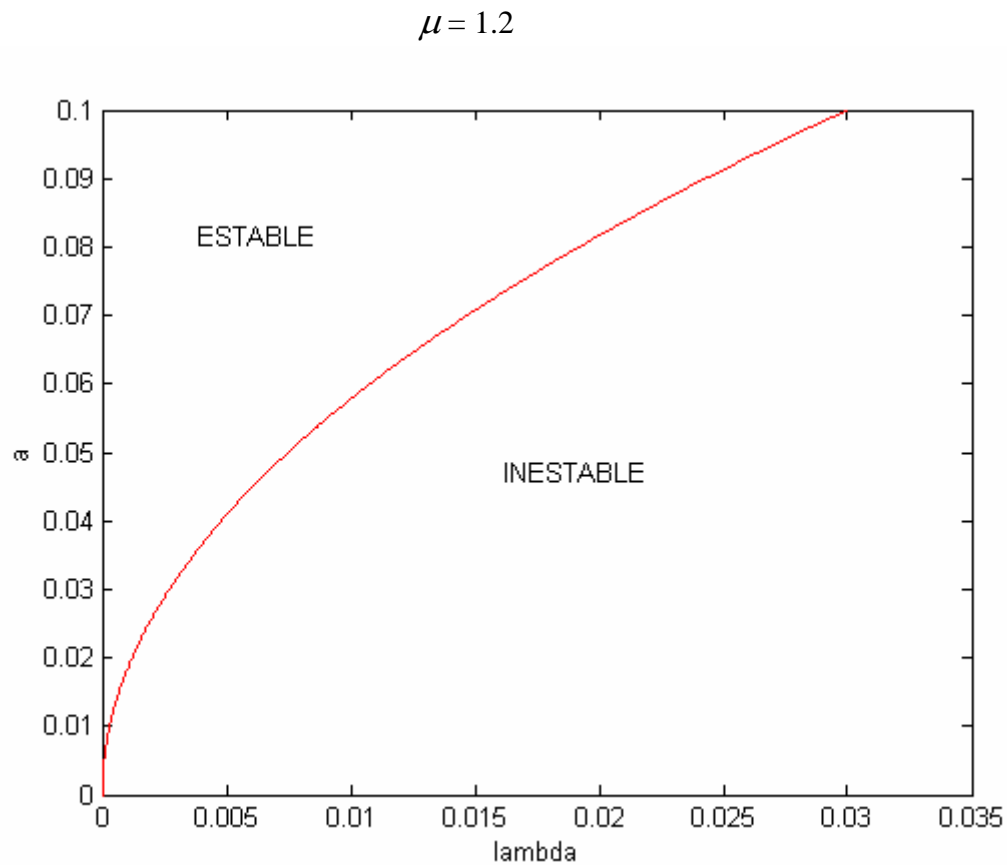
$$\lambda = 0.3 \cdot 10^{-1}$$



En este caso también se cumple una relación entre λ y a para la cual el sistema deja de ser estable del tipo:

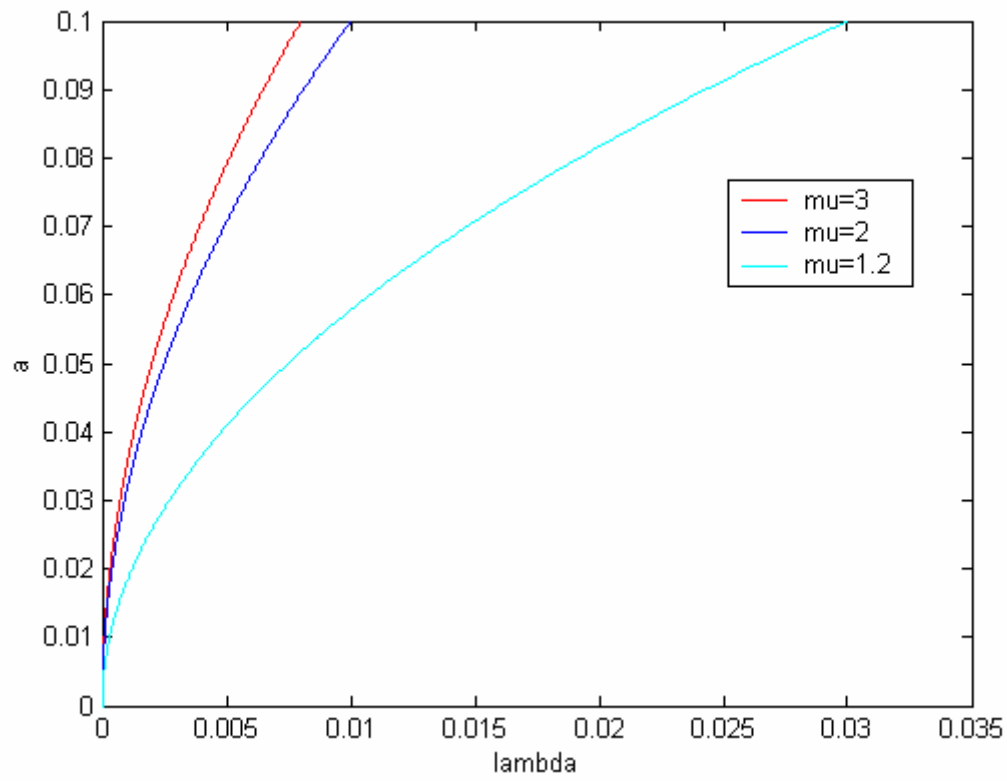
$$\lambda \approx 3 a^2$$

Representando la región de estabilidad obtenida en este caso tenemos:



En este caso seguimos observando el efecto favorecedor que produce la presencia del muelle sobre la estabilidad del sistema ya que el ancho de la zona de estabilidad sigue aumentando conforme reducimos el valor del parámetro μ .

A continuación representamos las tres regiones conjuntamente para ver este efecto:



Hasta el momento hemos tomado valores altos de la relación entre la frecuencia natural del muelle respecto de la frecuencia de vibración introducida. A continuación vamos a seguir reduciéndola hasta hacerla del orden unidad para ver qué valores mínimos de esta relación hacen que el sistema presente estabilidad.

4.4.4.- Región de estabilidad para $\mu=1.1$

En este punto de nuestro estudio debemos hacer un inciso sobre lo que comienza a ocurrir a partir de este valor del parámetro μ . Para ello observamos la ecuación que estamos analizando:

$$\varphi'' + \mu \left[1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{a}{\mu-1} \operatorname{sen} \tau} \right] \varphi = 0$$

En la expresión del coeficiente vemos que tenemos un denominador donde encontramos la señal de excitación dada por el $\operatorname{sen}(\tau)$. Debemos tener en cuenta que para que el modelo se comporte correctamente, y por lo tanto la integración del sistema de ecuaciones a él asociado, este denominador en ningún caso puede ser nulo. Por ello debemos hacer un análisis cualitativo respecto a los valores que introducimos de los parámetros de nuestra ecuación, y que en este punto y en los que vienen a continuación se verán afectados.

Así pues el denominador de nuestra ecuación es:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{a}{\mu-1} \operatorname{sen} \tau$$

Por lo tanto, para que funcione bien el modelo debemos cumplir que no se anule en ningún caso por lo que debe verificar:

$$\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) > \frac{a}{\mu-1} \operatorname{sen} \tau$$

Ahora bien, los valores del primer término que estamos tomando cumplen:

$$\lambda \ll \mu \rightarrow \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \approx 1$$

Esto nos conduce a que el término que multiplica el seno sea estrictamente menor que la unidad para que no se anule la suma de ambos:

$$\frac{a}{\mu-1} < 1 \rightarrow a < \mu-1$$

Por lo tanto hemos obtenido una nueva restricción para el valor del parámetro a y que hasta ahora no nos ha afectado ya que estábamos tomando valores de μ elevados.

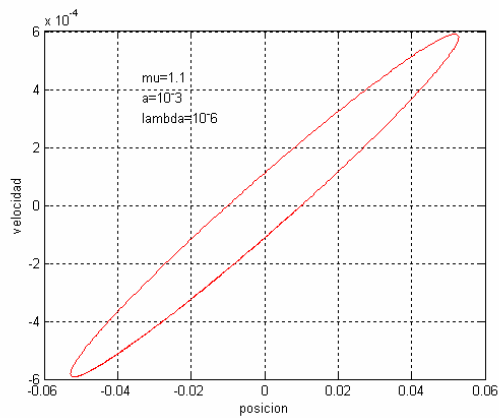
A continuación procedemos a estudiar el comportamiento para $\mu=1.1$ teniendo en cuenta que a debe cumplir estrictamente:

$$a < \mu - 1 = 0.1$$

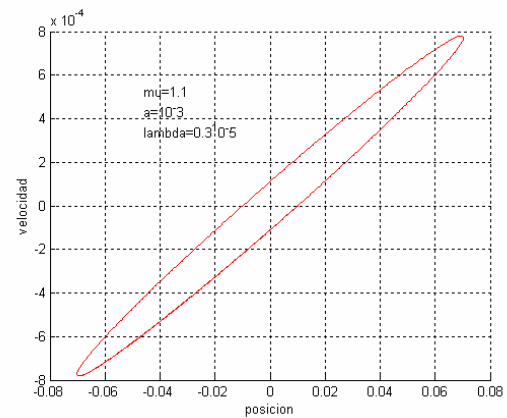
Comenzamos con nuestro proceso:

$$- a = 0.001$$

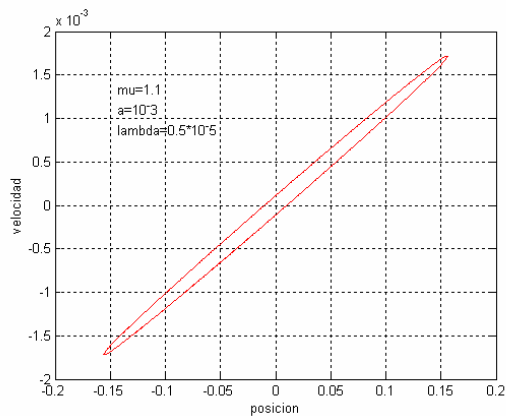
$$\lambda = 10^{-6}$$



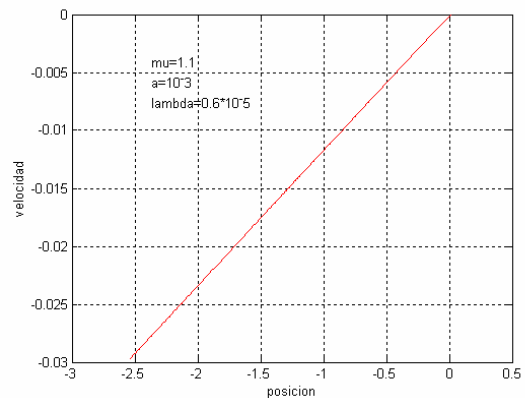
$$\lambda = 0.3 * 10^{-5}$$



$$\lambda = 0.5 * 10^{-5}$$

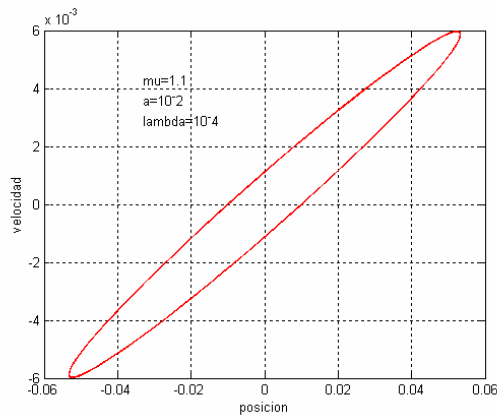


$$\lambda = 0.6 * 10^{-5}$$

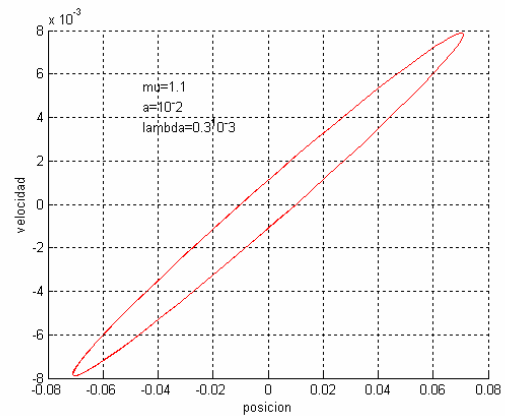


- $a = 0.01$

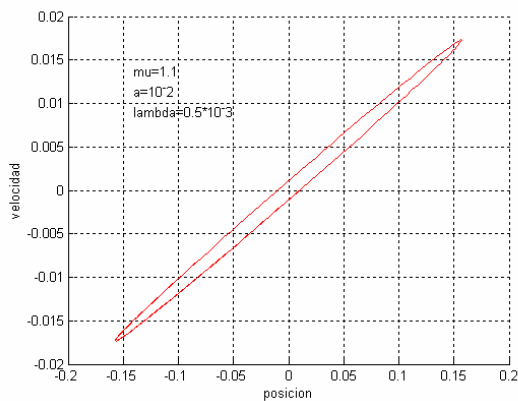
$$\lambda = 10^{-4}$$



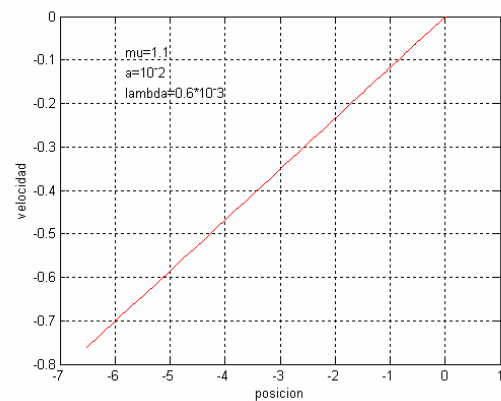
$$\lambda = 0.3 * 10^{-3}$$



$$\lambda = 0.5 * 10^{-3}$$



$$\lambda = 0.6 * 10^{-3}$$



Con el fin de ver que es lo que ocurre cerca del tope que hemos impuesto al parámetro a vamos a ir aproximándonos a este valor.

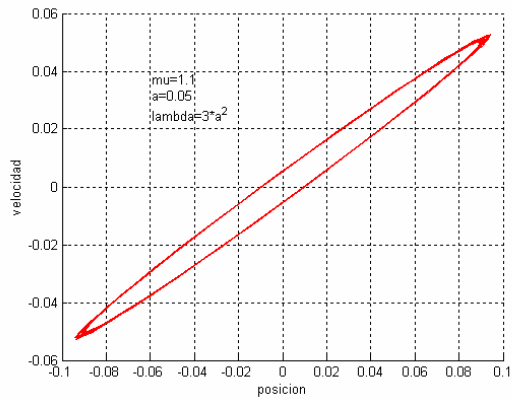
Como vemos la regla general obtenida en los casos anteriores se sigue cumpliendo en este caso por lo que la región de estabilidad está delimitada por una curva de la forma:

$$\lambda \approx c a^2$$

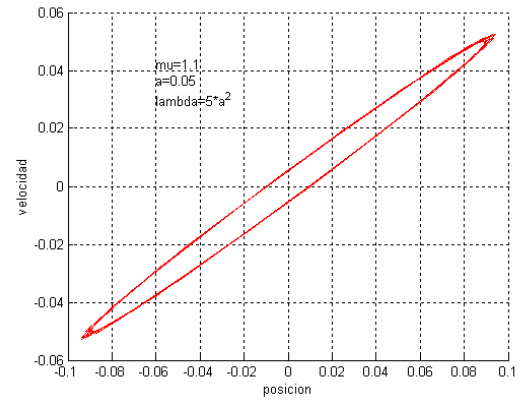
A partir de ahora introduciremos los valores de λ de esta forma para ver si seguimos esta relación.

- $a = 0.05$

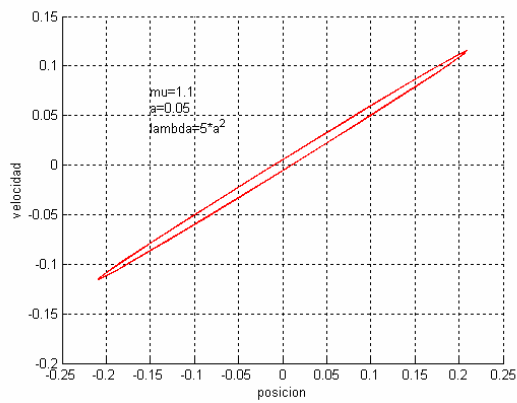
$$\lambda = a^2$$



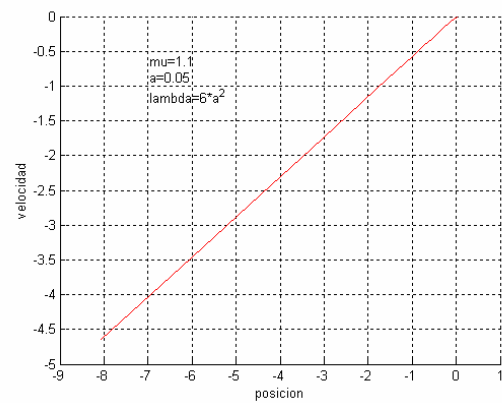
$$\lambda = 3a^2$$



$$\lambda = 5a^2$$

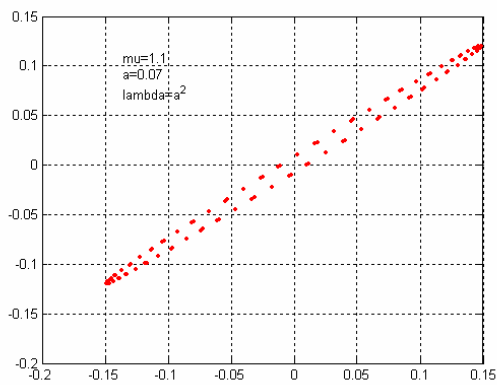


$$\lambda = 6a^2$$

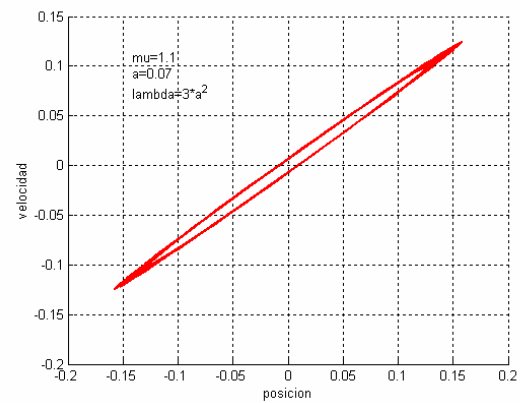


- $a = 0.07$

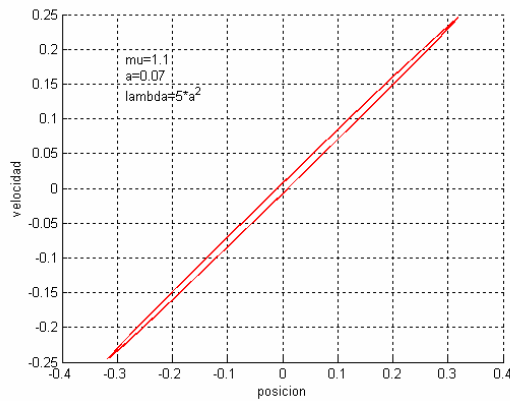
$$\lambda = a^2$$



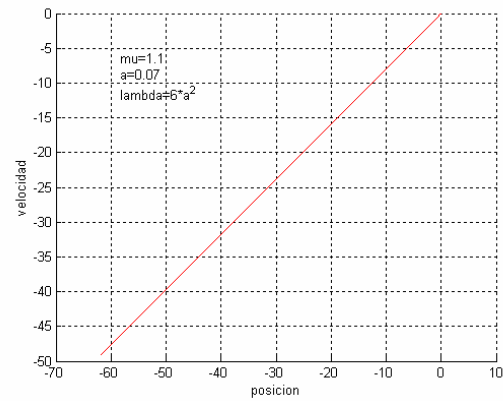
$$\lambda = 3a^2$$



$$\lambda = 5a^2$$



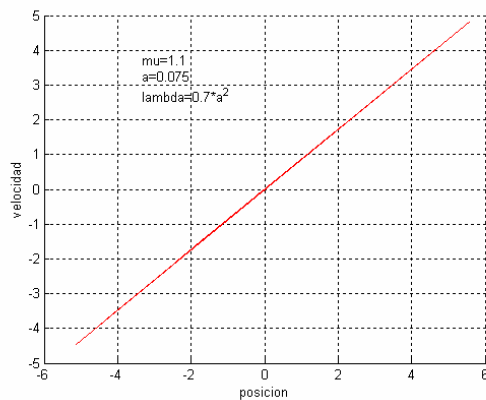
$$\lambda = 6a^2$$



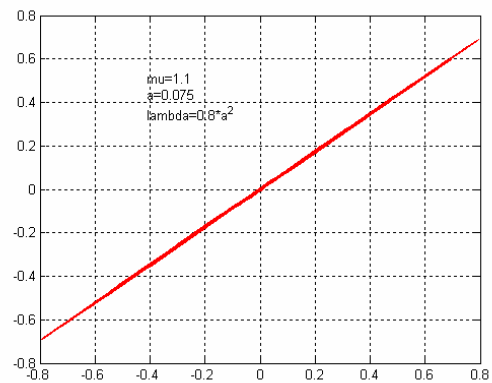
$$- a = 0.075$$

En este caso, cercano al tope que hemos impuesto al valor de a , introducimos el valor de comienzo de nuestra proceso de búsqueda correspondiente a $\lambda=10^{-6}$ y resulta ser inestable, situación que en todos los casos anteriores no ocurría, por lo que seguimos aumentando λ para buscar la estabilidad y encontramos:

$$\lambda = 0.7a^2$$



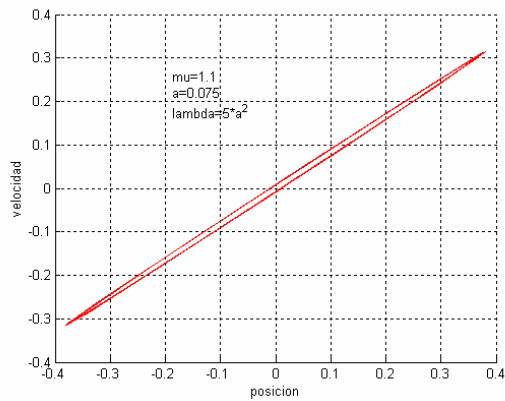
$$\lambda = 0.8a^2$$



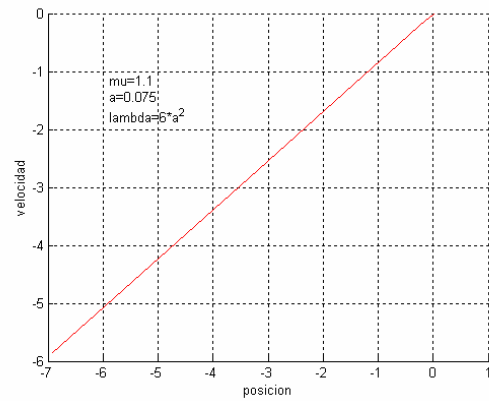
Encontramos la estabilidad en esta segunda gráfica, aunque en este caso no quede claro, la posición queda entorno a $(-0.8, 0.8)$.

Por lo tanto ha aparecido una nueva región de inestabilidad a la izquierda de la anterior, por lo que si seguimos aumentando λ llegaremos a la segunda región, como puede observarse a continuación:

$$\lambda = 5a^2$$



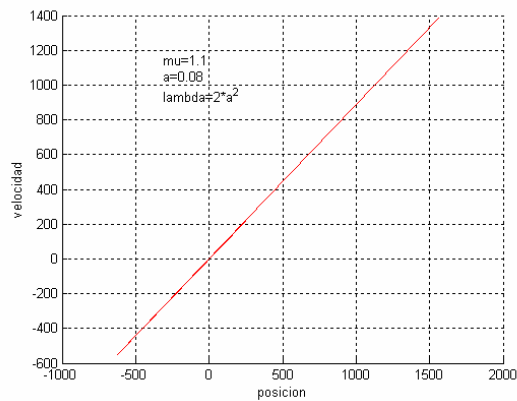
$$\lambda = 6a^2$$



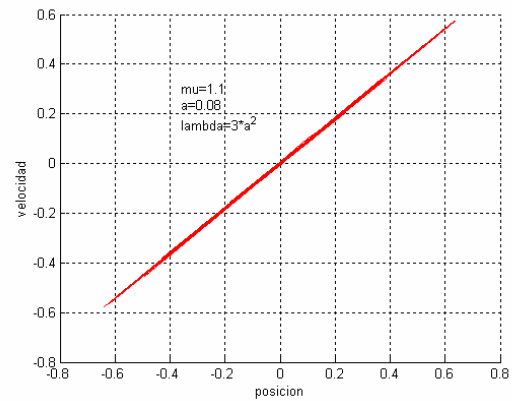
Obteniendo así dos puntos que delimitan la nueva región de estabilidad. Continuamos el proceso aumentando a para hallar ambas curvas.

- $a = 0.08$

$$\lambda = 2a^2$$



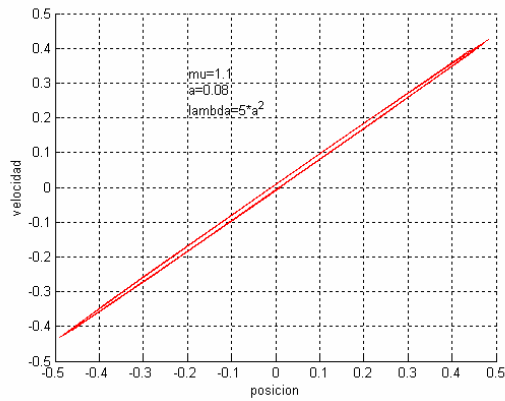
$$\lambda = 3a^2$$



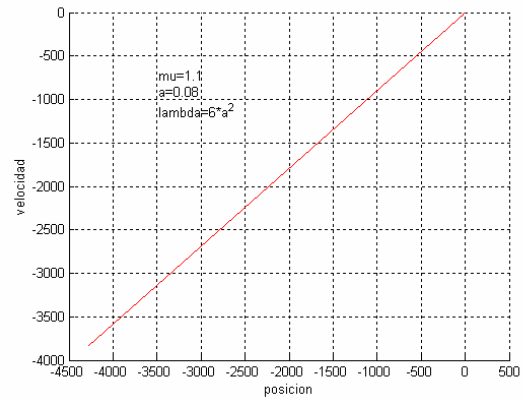
Éstas delimitan la primera región, obteniendo otro punto de esta curva. Hay que observar que el número de pasos para obtener el ciclo completo de oscilación en esta zona de estabilidad es muy bajo, lo que se corresponde con muy altas frecuencias de oscilación, es por ello que en el muestreo que hace nuestro método de representación se produzca prácticamente una recta.

Para la segunda curva seguimos aumentando λ y obtenemos:

$$\lambda = 5a^2$$



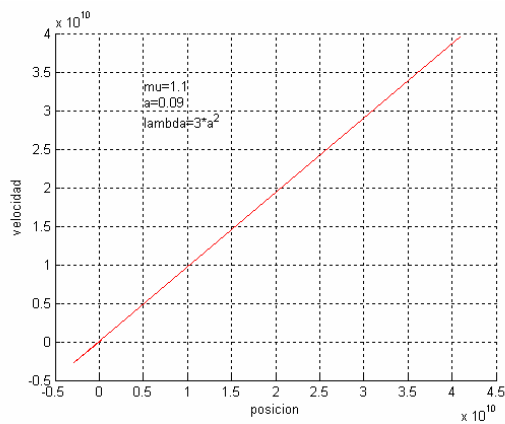
$$\lambda = 6a^2$$



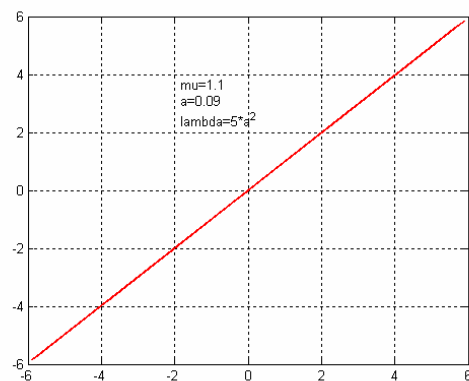
Vemos que esta segunda curva no varía respecto a los casos anteriores y sigue obedeciendo la misma relación entre los parámetros λ y a . Sin embargo, a priori, la nueva curva obtenida no obedece a ninguna relación cuadrática entre ellos.

- $a = 0.09$

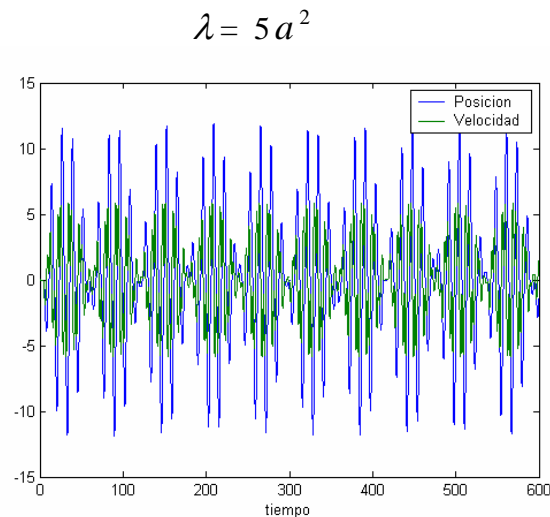
$$\lambda = 3a^2$$



$$\lambda = 5a^2$$

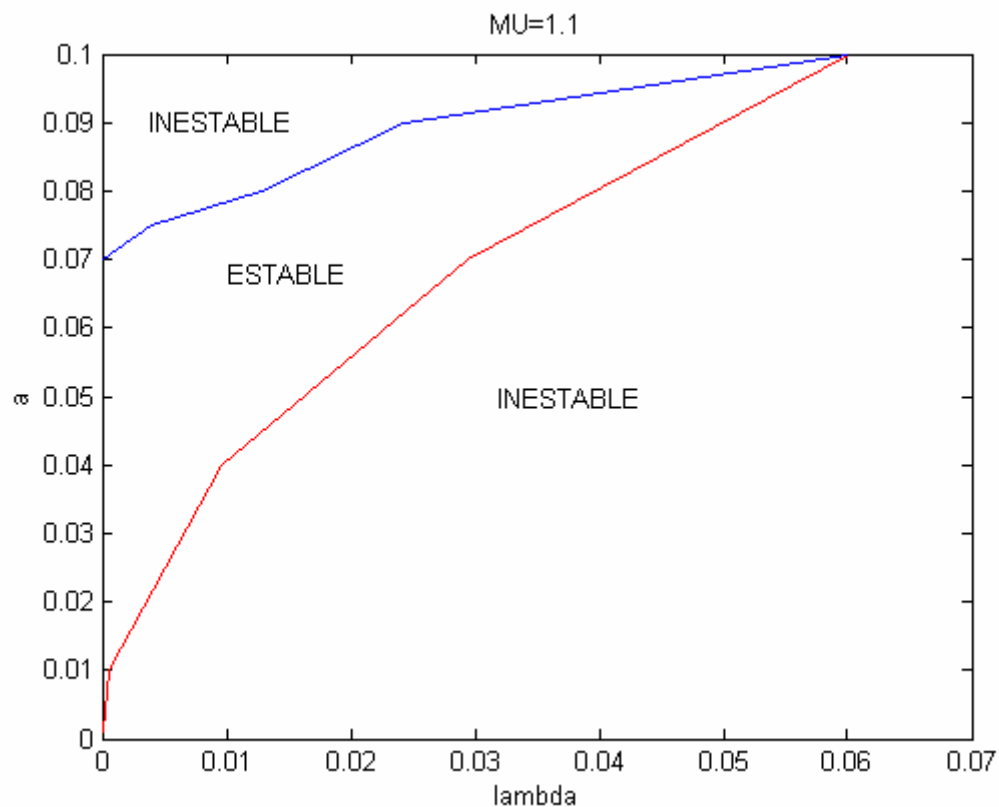


Al igual que sucedía antes esta segunda gráfica se corresponde con un comportamiento supuestamente estable. Esto lo podemos observar representando la solución frente al tiempo, obteniendo el siguiente resultado:



Sin embargo a la vista del rango de valores que toma la posición podemos afirmar que el sistema es inestable. Esto sucede porque estamos cerca del valor máximo que puede tomar a , por lo que el denominador de nuestro coeficiente es prácticamente nulo debido a una diferencia de números muy próximos entre sí, por lo que el modelo ya no es representativo del comportamiento real del sistema.

Con los resultados obtenidos podemos representar la región de estabilidad a partir de los puntos donde el sistema cambia de comportamiento, obteniendo las siguientes curvas:



En ella observamos la nueva región de inestabilidad que se presenta al haber disminuido el valor del parámetro μ a 1.1. Así vemos cómo aparece un nuevo límite de estabilidad a la izquierda del anterior representado por la curva azul. Esta nueva región comienza al aumentar los valores de a , lo que significa mayores amplitudes de vibración, y tomar valores cercanos a su valor límite.

A la vista del resultado obtenido para este valor de μ , podemos ver que al ir disminuyendo su valor, el rango de valores que pueda tomar a será menor. Sin embargo, por otra parte, el segundo límite obtenido representado por la curva roja, sigue obedeciendo una ley cuadrática del tipo:

$$\lambda \approx 6 a^2$$

En ella observamos cómo sigue influyendo positivamente el hecho de disminuir el valor de μ ya que la pendiente de esta curva se hace mayor, y por lo tanto el ancho de la región en esta dirección aumenta.

4.4.5.- Región de estabilidad para $\mu=1.08$

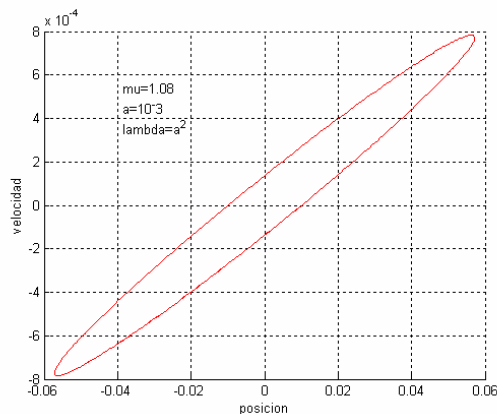
Seguimos con nuestro estudio de las regiones de estabilidad disminuyendo nuevamente el valor de μ . Por lo tanto el rango de valores que tomaremos para a tendrá ahora como límite:

$$a = 0.08$$

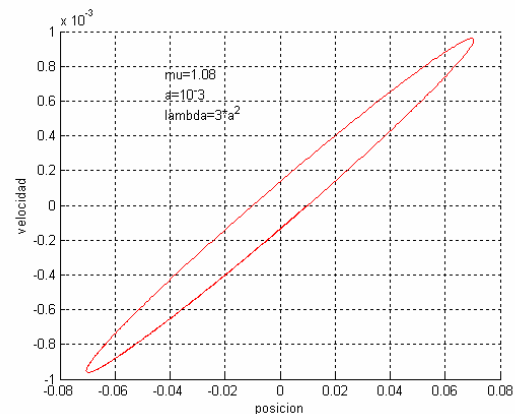
Así pues comenzamos con el proceso:

$$- a = 0.001$$

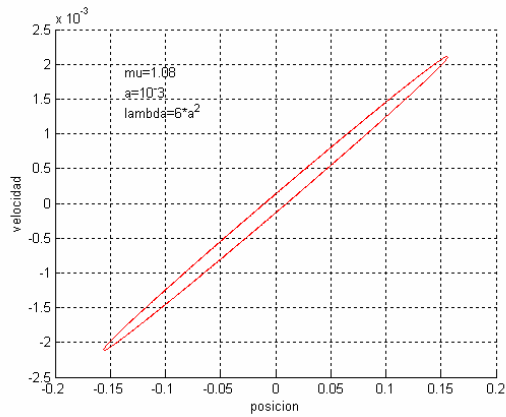
$$\lambda = a^2 = 10^{-6}$$



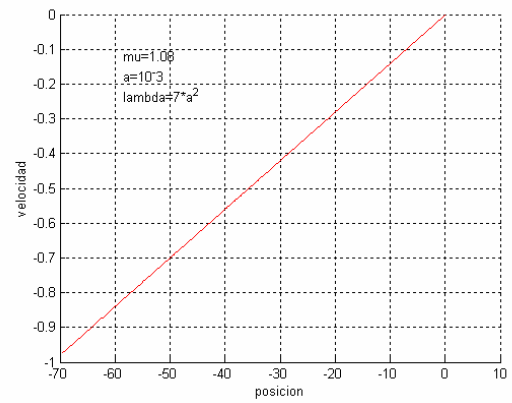
$$\lambda = 3 a^2$$



$$\lambda = 6a^2$$

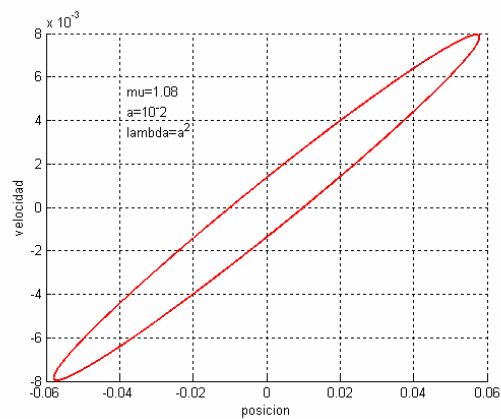


$$\lambda = 7a^2$$

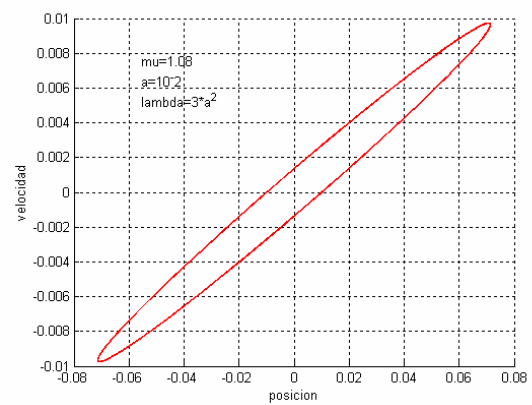


- $a = 0.01$

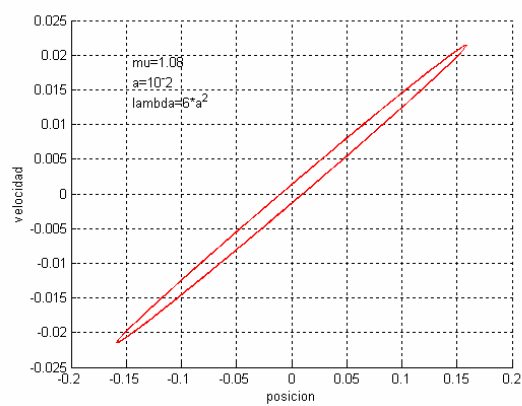
$$\lambda = a^2$$



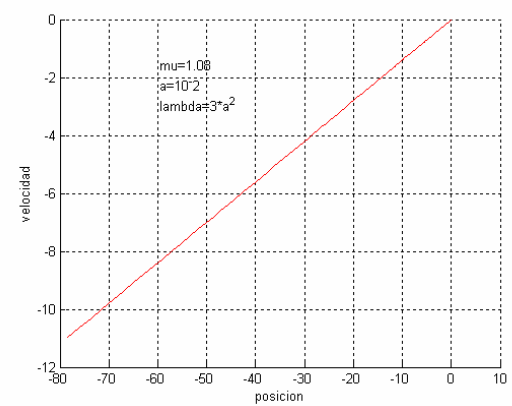
$$\lambda = 3a^2$$



$$\lambda = 6a^2$$

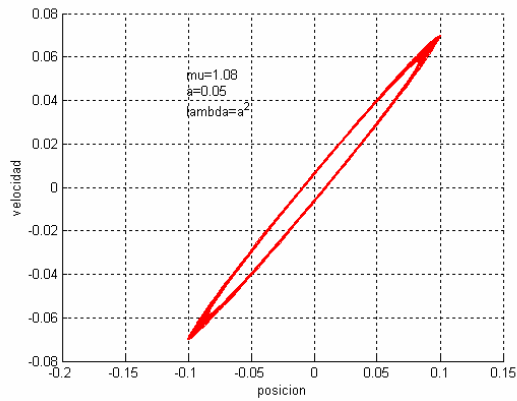


$$\lambda = 7a^2$$

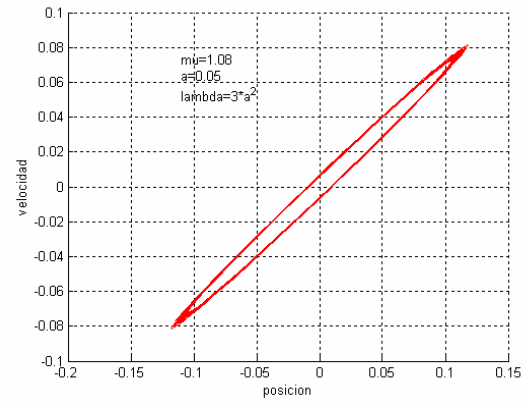


- $a = 0.05$

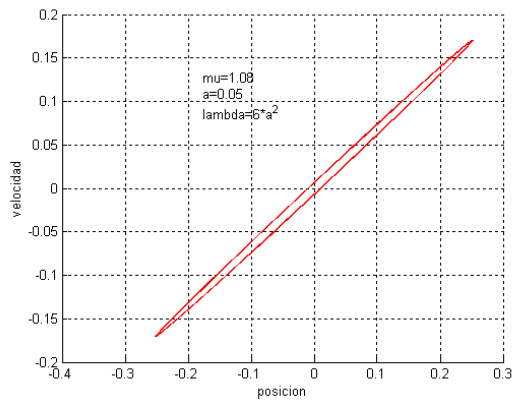
$$\lambda = a^2$$



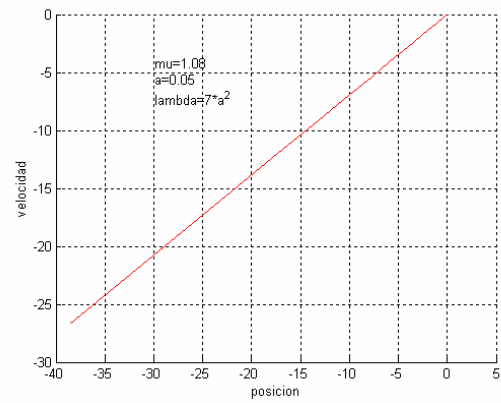
$$\lambda = 3a^2$$



$$\lambda = 6a^2$$



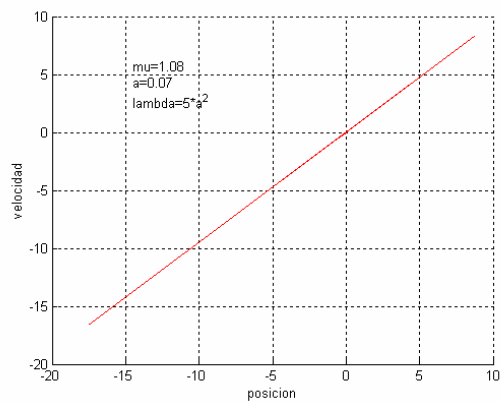
$$\lambda = 7a^2$$



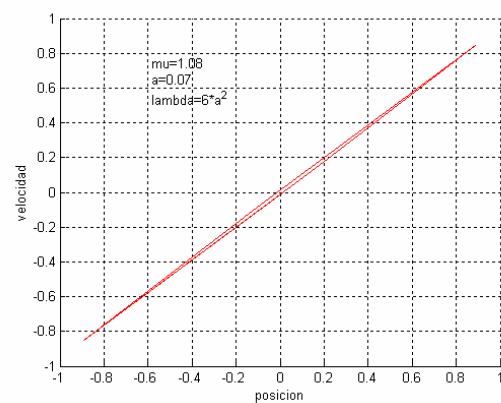
Como vemos en estos casos todavía no se presenta la nueva región de inestabilidad que ha de aparecer por efecto de la amplitud de vibración, cosa que sí ocurre en los siguientes casos:

- $a = 0.07$

$$\lambda = 5a^2$$



$$\lambda = 6a^2$$

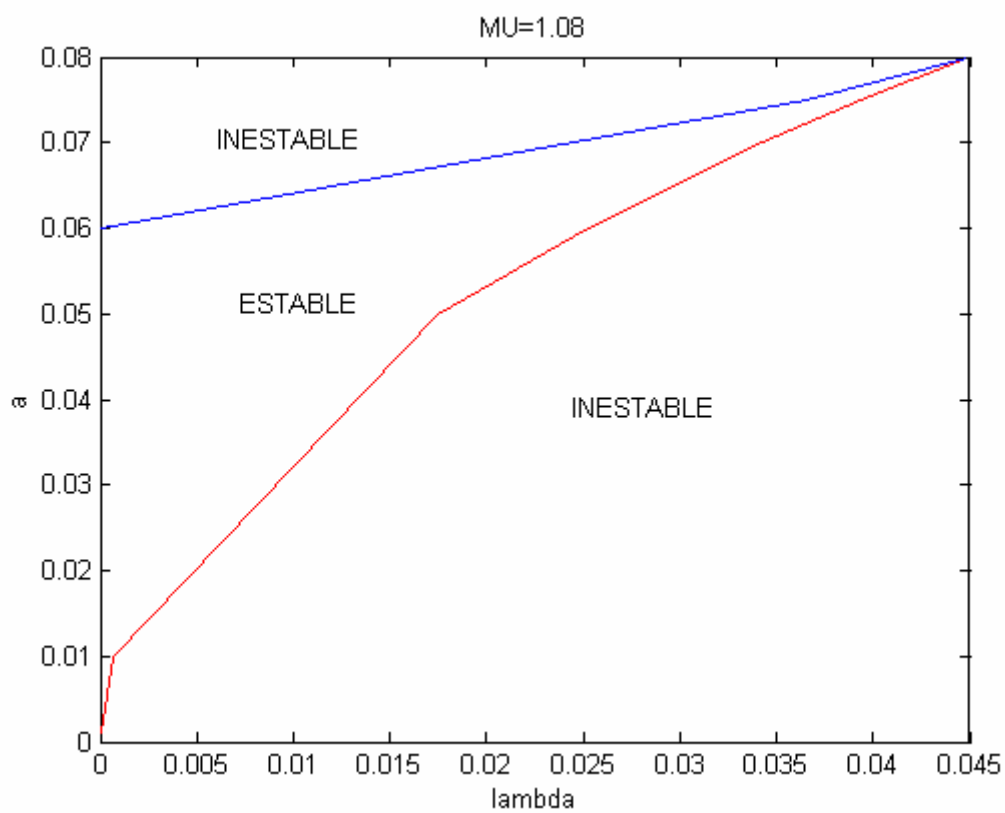


Vemos que este punto se corresponde a la zona nueva zona de inestabilidad sin embargo al aumentar de nuevo λ volvemos a la zona anterior de inestabilidad, dada en este caso por la ley:

$$\lambda \approx 7 a^2$$

Por último probamos con un valor más cercano al límite impuesto al valor de a ($a = 0.075$) pero ya no se encuentra la estabilidad del sistema por lo que ambas curvas están prácticamente unidas.

Representando los puntos obtenidos en la siguiente figura observamos la nueva región de estabilidad que se nos presenta para este valor de μ :

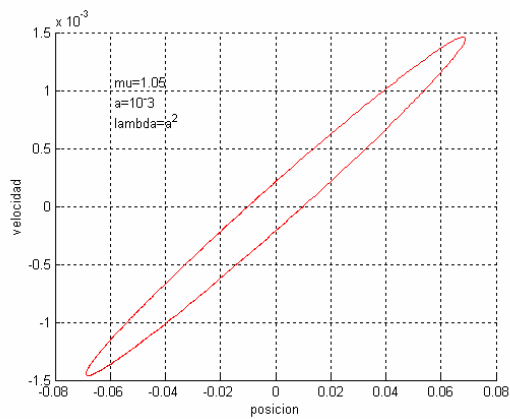


4.4.6.- Región de estabilidad para $\mu=1.05$

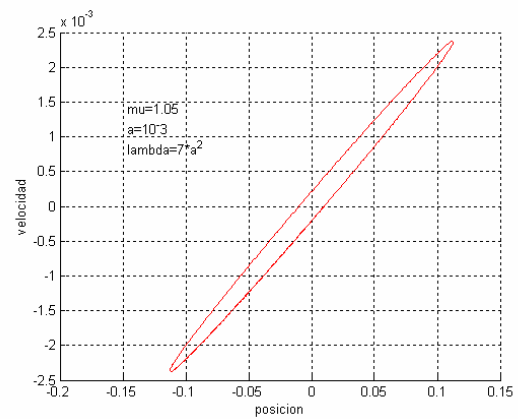
En este caso el límite correspondiente al valor de a se sitúa en $a = 0.05$.
El proceso de búsqueda de la región de estabilidad continúa siendo el mismo, ensayando los siguientes valores del parámetro a :

- $a = 0.001$

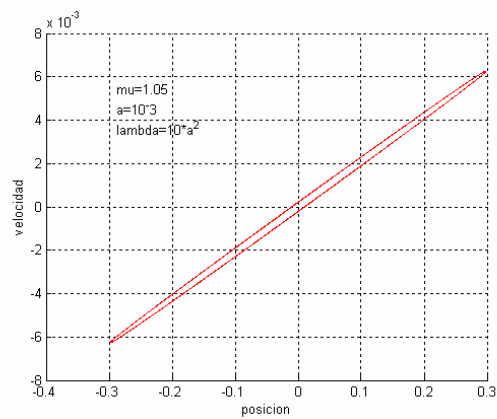
$$\lambda = a^2$$



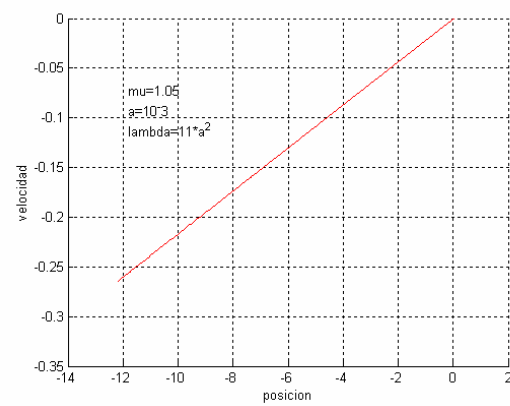
$$\lambda = 7a^2$$



$$\lambda = 10a^2$$

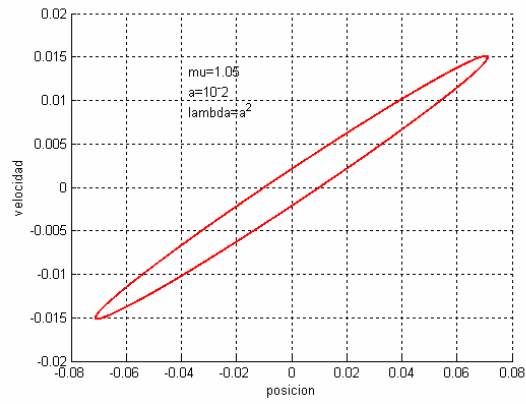


$$\lambda = 11a^2$$

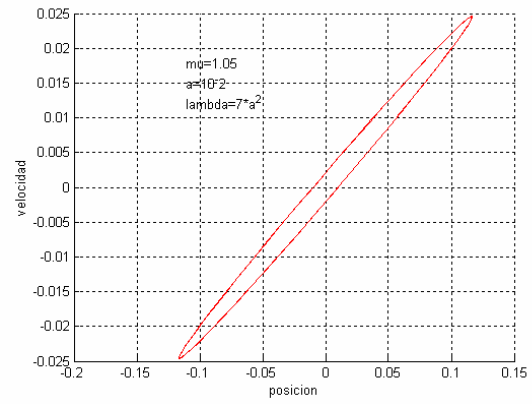


- $a = 0.01$

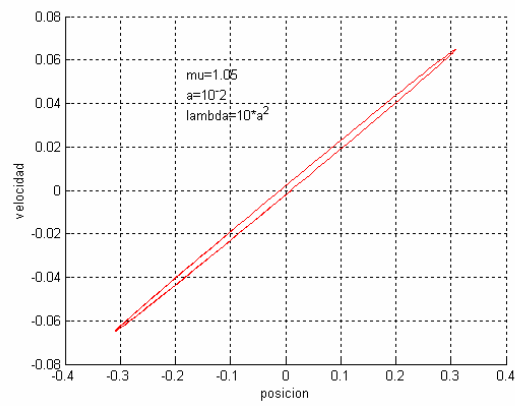
$$\lambda = a^2$$



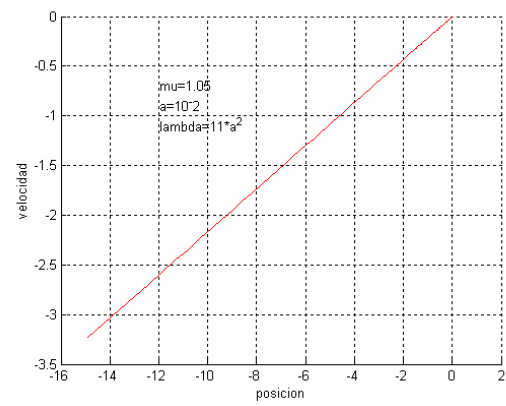
$$\lambda = 7a^2$$



$$\lambda = 10a^2$$

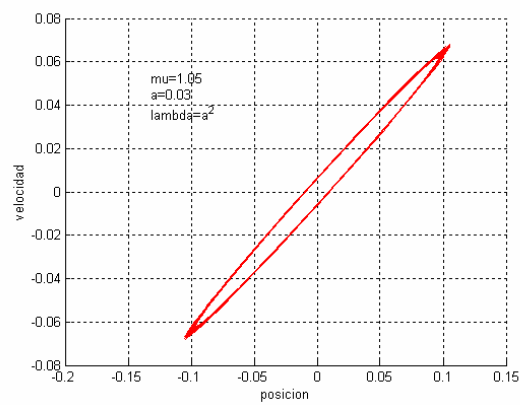


$$\lambda = 11a^2$$

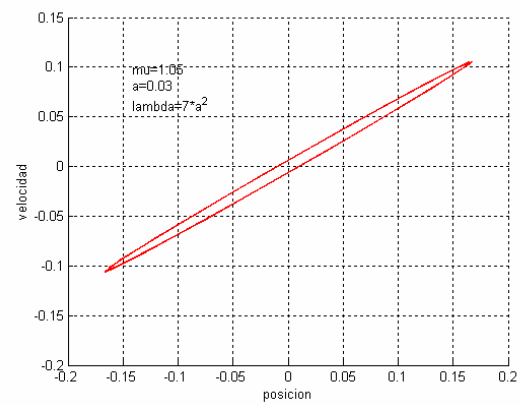


- $a = 0.03$

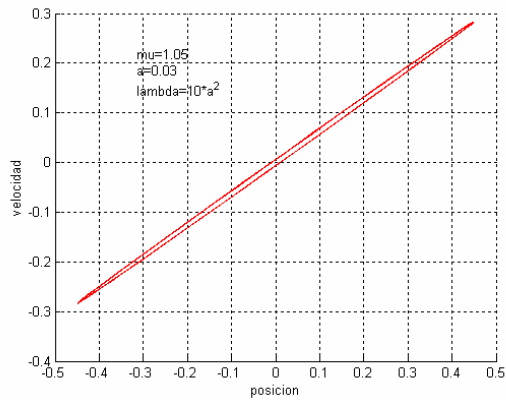
$$\lambda = a^2$$



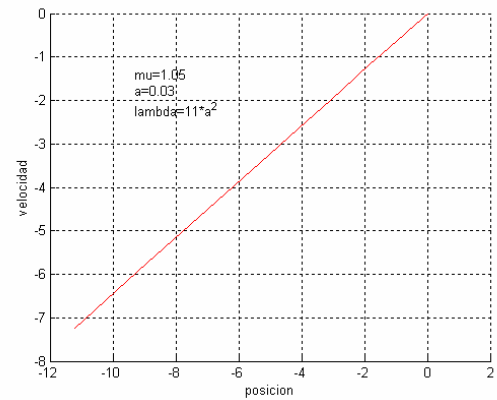
$$\lambda = 7a^2$$



$$\lambda = 10 a^2$$

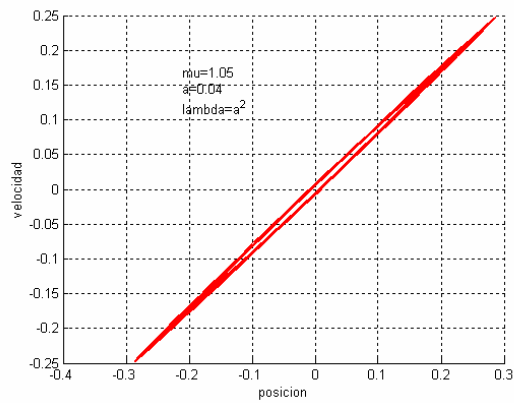


$$\lambda = 11 a^2$$

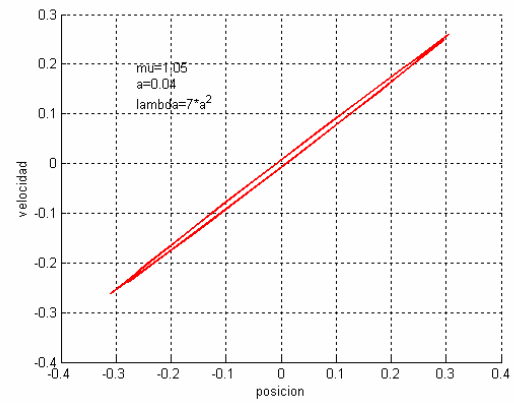


$$- a = 0.04$$

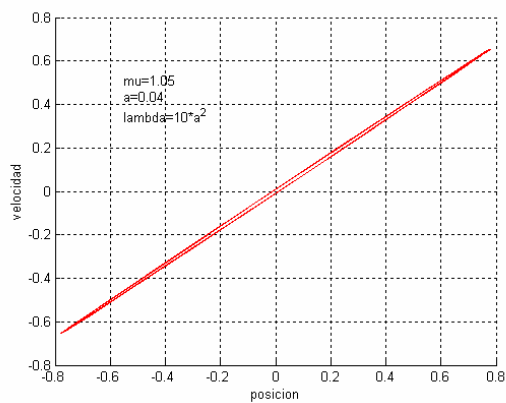
$$\lambda = a^2$$



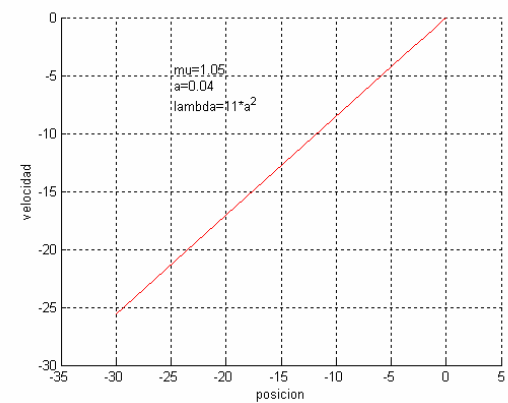
$$\lambda = 7 a^2$$



$$\lambda = 10 a^2$$



$$\lambda = 11 a^2$$

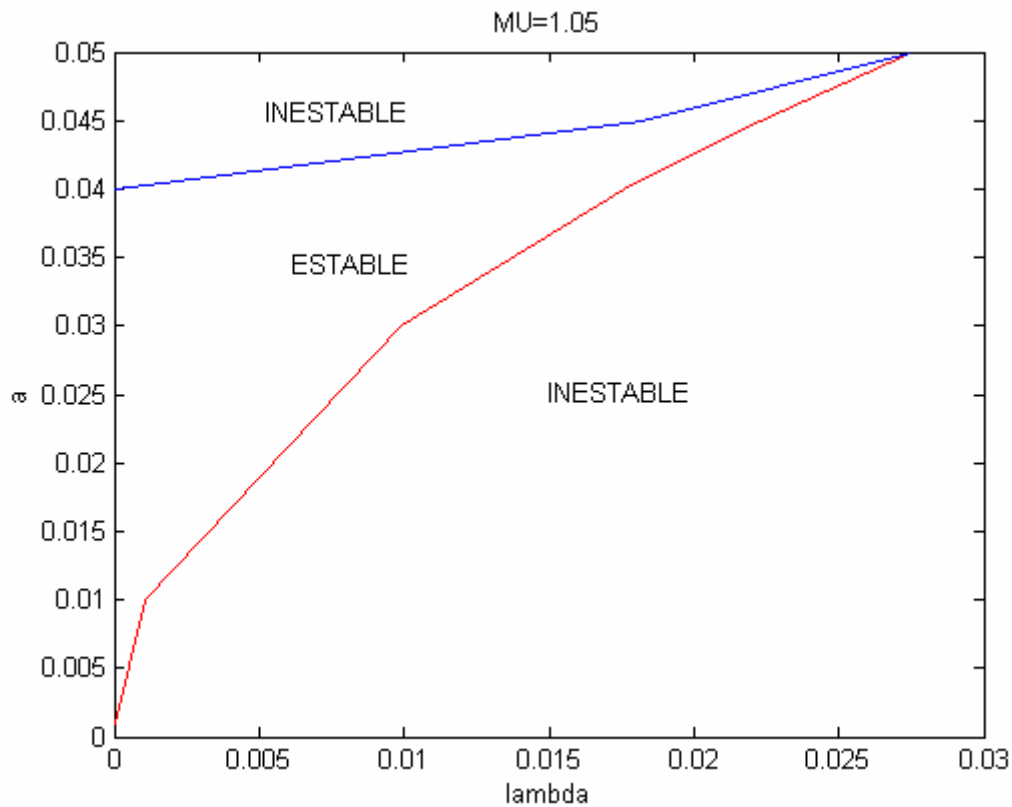


Como sucedía en los casos anteriores cuando nos acercamos al valor límite de a , aparece la nueva región de inestabilidad. Este caso ensayamos con $a=0.045$ obteniendo como resultado una situación de estabilidad ficticia correspondiente a $\lambda=10a^2$, esta situación ya comentada anteriormente, nos indica que las dos regiones de inestabilidad en este punto están prácticamente unidas.

También observamos que en este caso la ley que sigue la curva límite derecha de la región es de la forma:

$$\lambda \approx 11 a^2$$

Así podemos representar la nueva región de estabilidad que se nos presenta ahora:



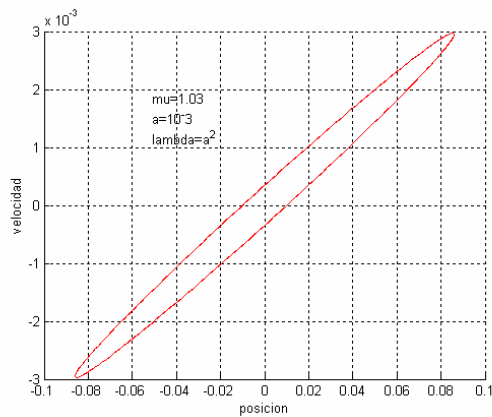
4.4.7.- Región de estabilidad para $\mu=1.03$

Este es el último caso en el que logramos estabilizar el péndulo invertido mediante la vibración por acción del muelle. Es decir, la mínima relación entre la frecuencia natural del muelle respecto d la frecuencia de vibración en la que conseguimos hallar una combinación de los otros dos parámetros que hacen que el sistema oscile entorno a la vertical.

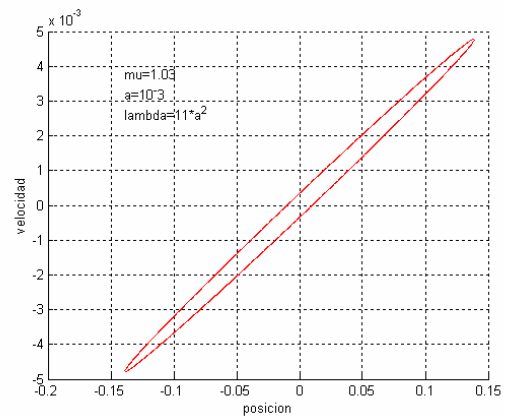
Así pues hallamos la última de las regiones de estabilidad que presenta nuestro sistema.

$$- a = 0.001$$

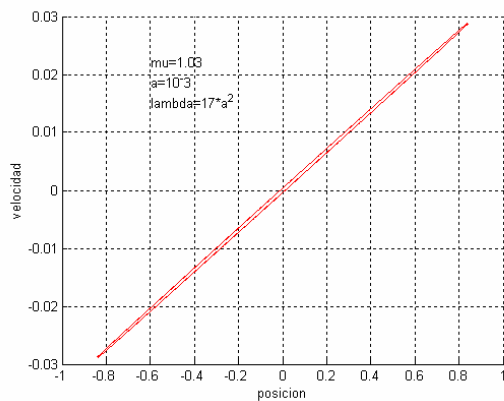
$$\lambda = a^2$$



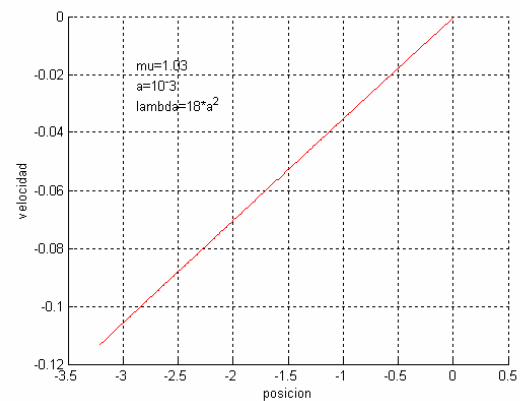
$$\lambda = 11a^2$$



$$\lambda = 17a^2$$

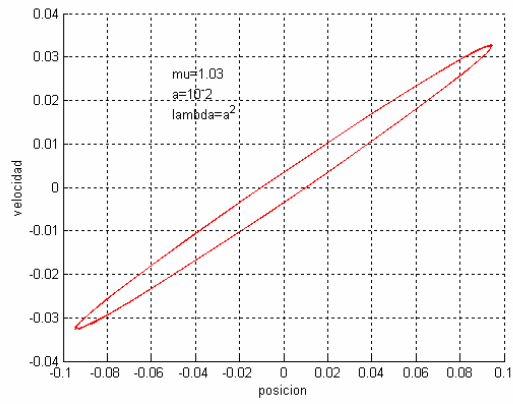


$$\lambda = 18a^2$$

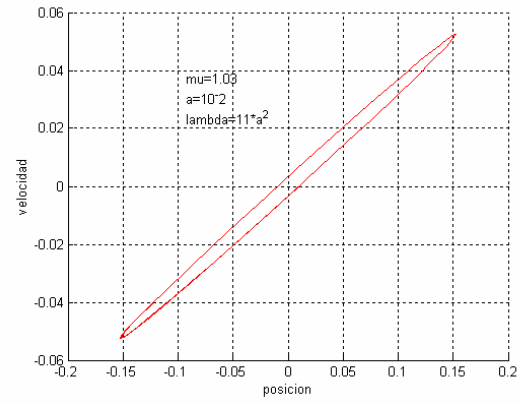


- $a = 0.01$

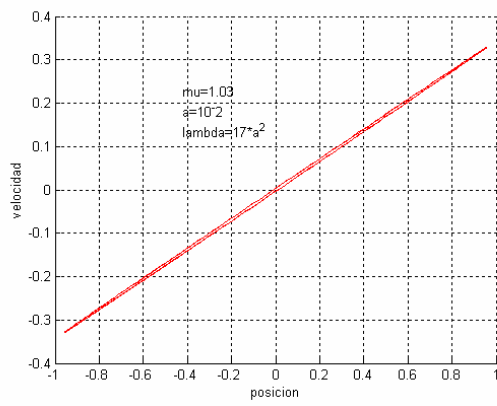
$$\lambda = a^2$$



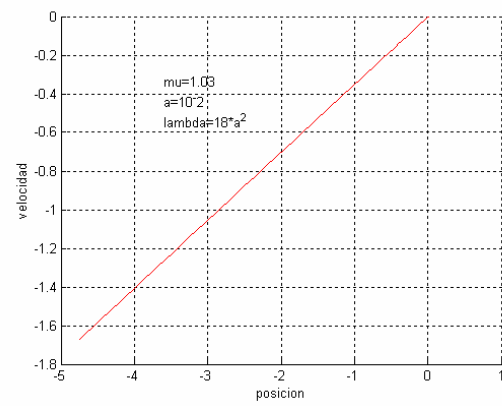
$$\lambda = 11a^2$$



$$\lambda = 17a^2$$

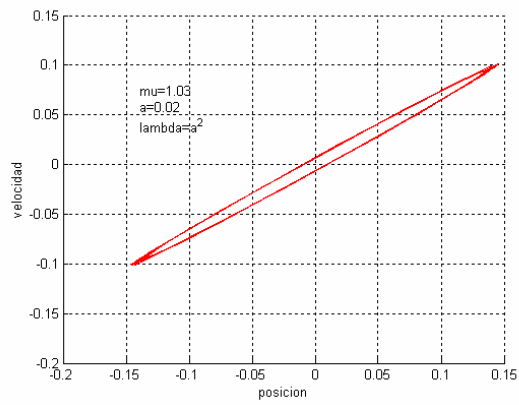


$$\lambda = 18a^2$$

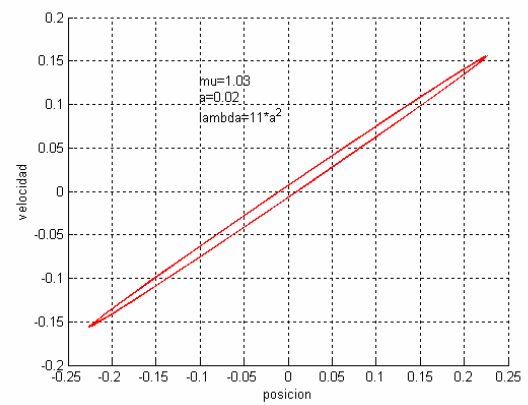


- $a = 0.02$

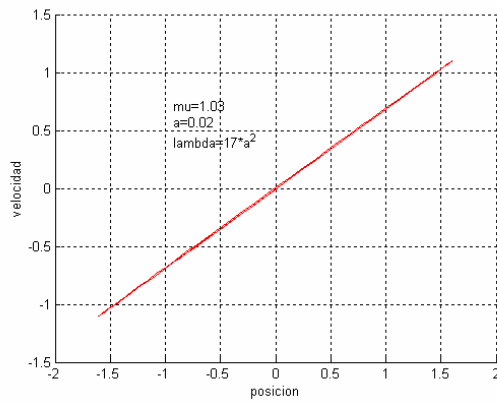
$$\lambda = a^2$$



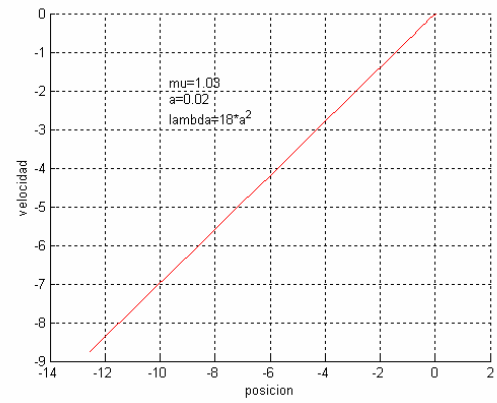
$$\lambda = 11a^2$$



$$\lambda = 17a^2$$

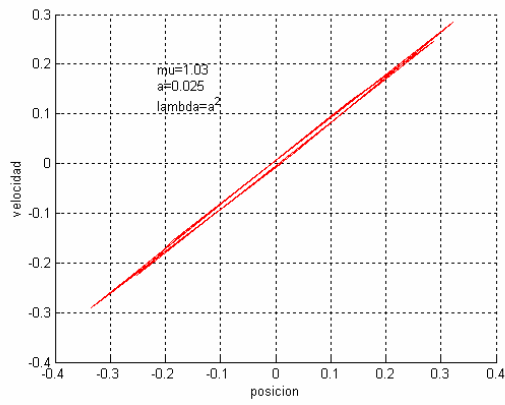


$$\lambda = 18a^2$$

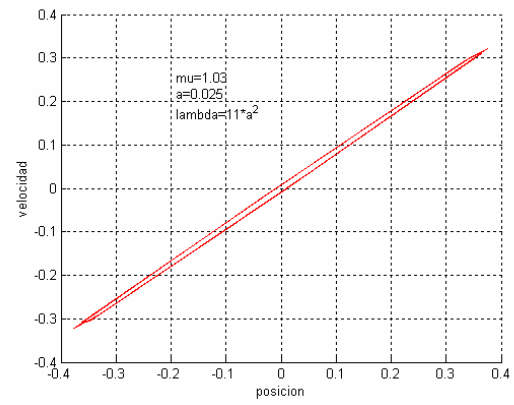


$$-a = 0.025$$

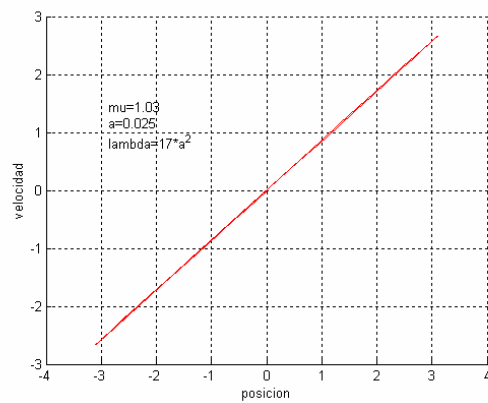
$$\lambda = a^2$$



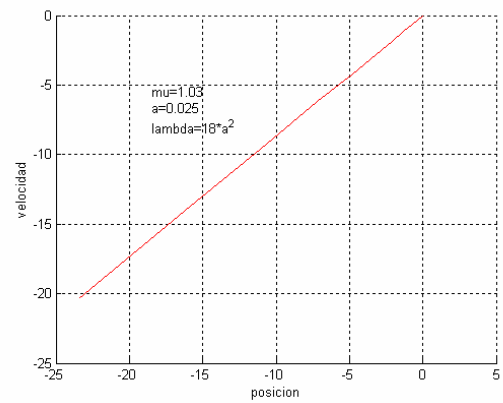
$$\lambda = 11a^2$$



$$\lambda = 17a^2$$



$$\lambda = 18a^2$$



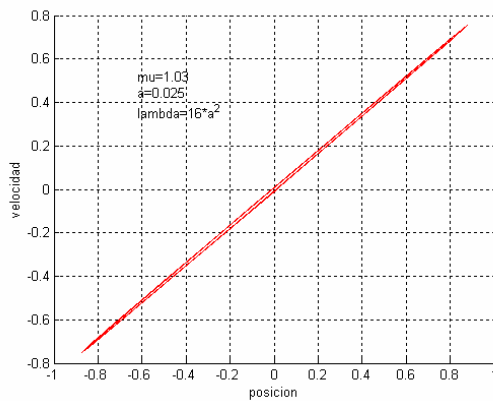
En este último caso vuelve a suceder que el resultado de la integración nos da una curva supuestamente estable que sin embargo, como ya se ha comentado anteriormente, se corresponde a una situación de inestabilidad puesto que el rango de variación de la posición no es aceptable.

Sin embargo el punto justo anterior sí presenta estabilidad por lo que podemos afirmar que en este caso, cuando nos aproximamos al valor límite de a , con valores de μ cercanos a la unidad, la curva límite de la derecha abandona la ley general obtenida anteriormente que relacionaba los parámetros a y λ en este caso en la forma:

$$\lambda \approx 18 a^2$$

Así pues disminuyendo λ tenemos la situación de estabilidad que se muestra a continuación:

$$\lambda = 16 a^2$$

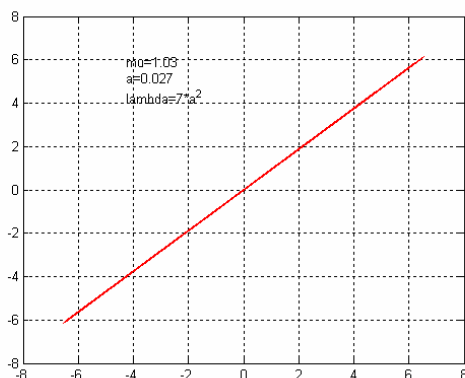


Por lo tanto, en la parte superior de la región de estabilidad se produce un estrechamiento de la misma que no existía anteriormente.

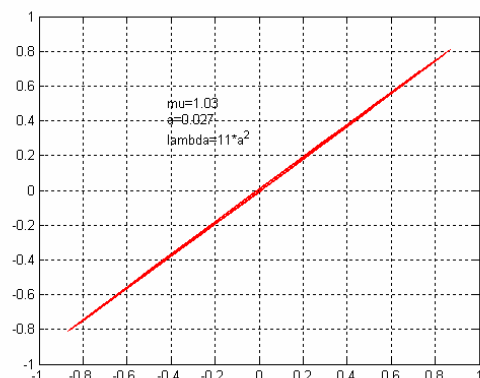
Si seguimos aumentando a vemos cómo aparece la otra región de inestabilidad para valores pequeños del parámetro λ , como se muestra a continuación:

$$- a = 0.027$$

$$\lambda = 7 a^2$$



$$\lambda = 11 a^2$$

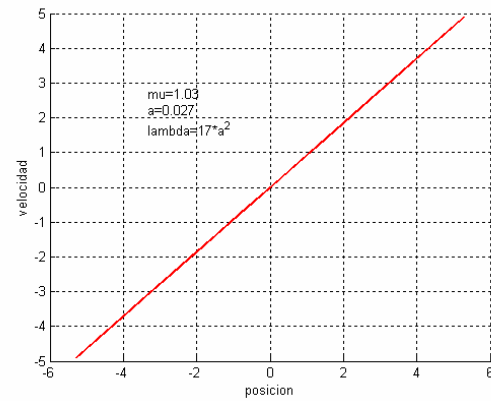
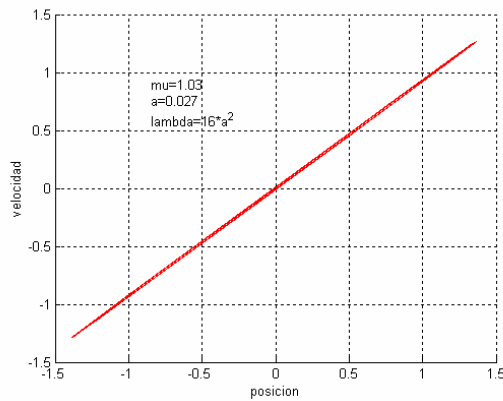


Determinando este comportamiento, como en los casos anteriores, el punto de cambio de la región inestable a la región estable al aumentar el valor de λ .

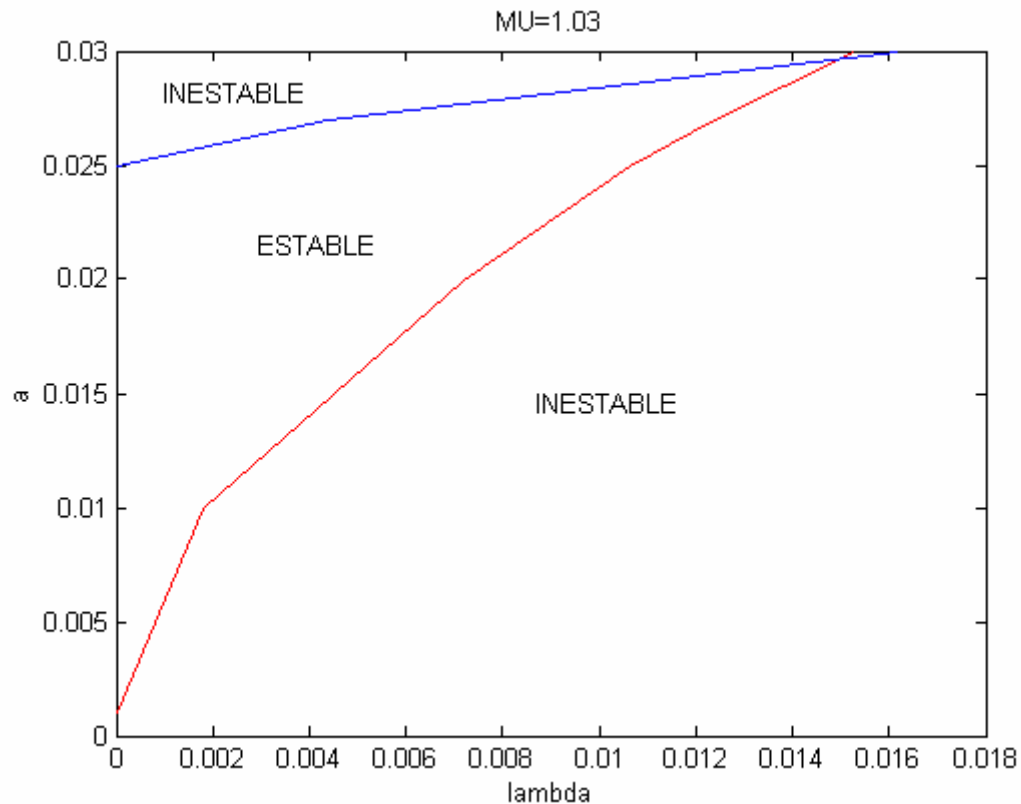
Si seguimos aumentando λ debemos encontrar el punto donde pasamos a la región derecha de inestabilidad, determinando así otro punto de la curva. Así tenemos:

$$\lambda = 16a^2$$

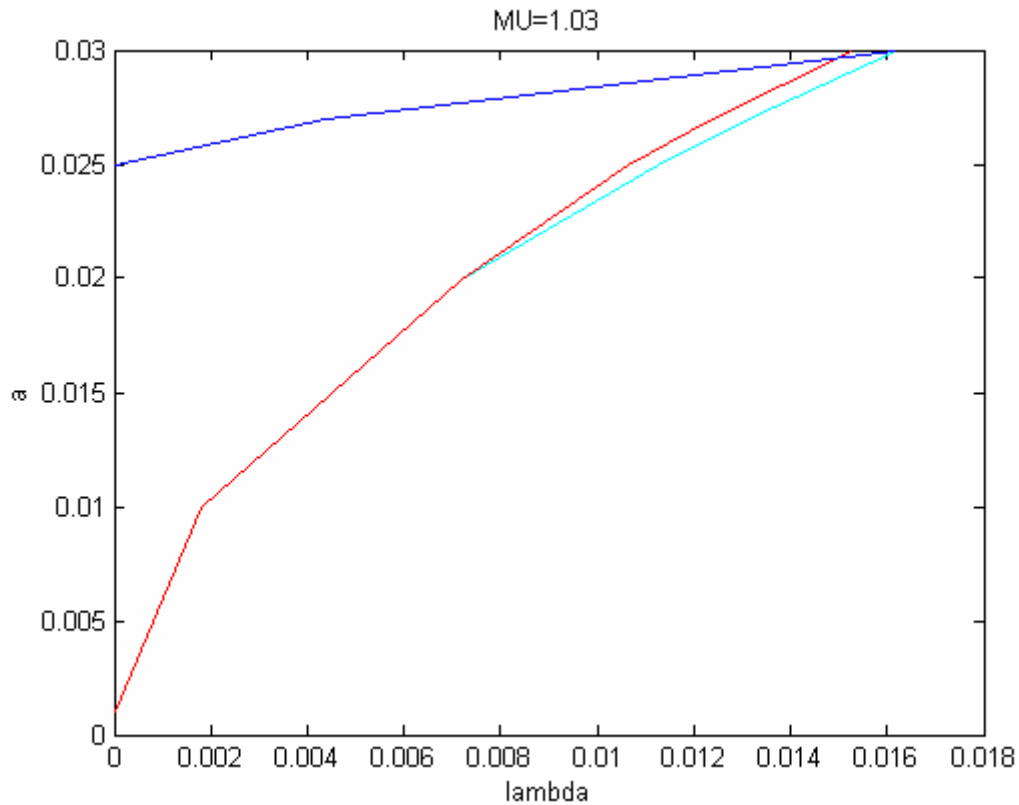
$$\lambda = 17a^2$$



Por último representamos la región de estabilidad obtenida en este caso y que se muestra a continuación:



En la siguiente figura podemos observar el fenómeno de estrechamiento que se produce respecto a la situaciones anteriores por la cual se abandona la ley cuadrática entre λ y a . Representando ambas conjuntamente tenemos:



En la figura se muestra en color rojo la curva real que delimita la región de estabilidad por la derecha mientras que en azul se observa la ley que veníamos obteniendo en los casos anteriores y que aquí deja de ser válida a partir de valores de a entorno a 0.02.

Capítulo 5

Análisis de los resultados obtenidos

En el capítulo anterior hemos realizado un análisis numérico pormenorizado del modelo para estudiar el comportamiento de nuestro sistema en unas situaciones concretas. Como hemos visto, hemos conseguido estabilizar el péndulo en posición vertical obteniendo unas regiones de estabilidad en función de los parámetros que definen nuestro modelo, y por lo tanto nuestro sistema. Cada punto de estas regiones expresa una combinación de los tres parámetros a , λ y μ para los cuales el sistema oscilaría entorno a la posición vertical por acción de la vibración introducida. En nuestro estudio hemos encontrado los puntos en los que el sistema deja de ser estable delimitando así las distintas regiones que se nos presentan.

Ahora nos planteamos ver cómo influyen cada uno de estos parámetros por separado en el comportamiento de nuestro sistema en cuanto al tipo de oscilación y la estabilidad del mismo. Para ello representaremos el tipo de respuesta que obtenemos al ir variando uno de los parámetros y mantener fijo los otros dos. Este análisis, aunque poco riguroso, puede ser ilustrativo para ver en cierta medida cómo influyen cada uno de ellos a pesar de que la influencia que puedan tomar dependa del punto que escojamos para realizarlo. Para ello hemos tomado unos valores y unos incrementos que adecuadamente escogidos que nos permitan visualizar los efectos producidos y siempre con unos rangos de variación coherentes con el sistema que estamos modelando.

Por otra parte, y como punto de partida para estudiar todos los datos introducidos en nuestro modelo, veremos la influencia de las condiciones iniciales sobre nuestra solución.

5.1.- Influencia de las condiciones iniciales.

El modelo estudiado y que obtuvimos en el capítulo 3 consistía en una ecuación diferencial de segundo orden, donde nuestra variable correspondía al ángulo respecto del eje vertical por lo que para realizar la integración numérica de la misma debíamos especificar las condiciones iniciales de las que partíamos, esto es, la posición y la velocidad en $t=0$. Como se indicó en el capítulo anterior, en la obtención de nuestros resultados hemos empleado:

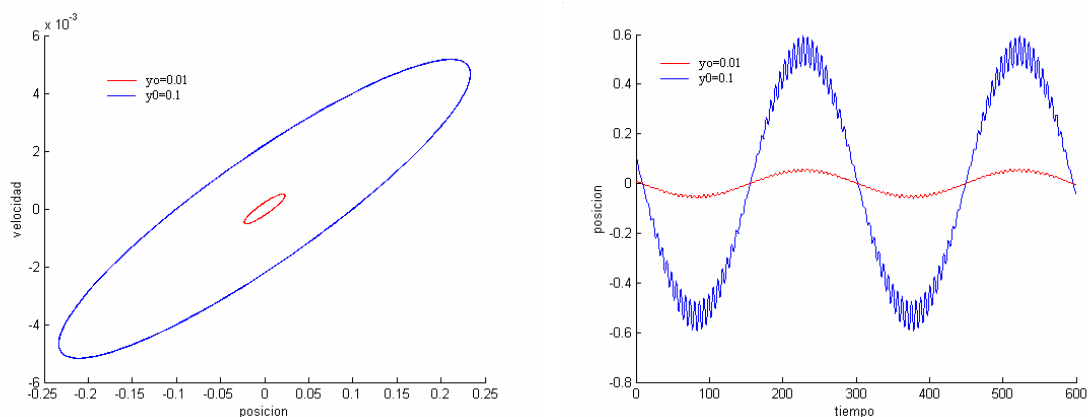
$$y_1(0) = \varphi(0) = 0.01$$

$$y_2(0) = \dot{\varphi} = 0$$

También se comentó en su momento que estos valores se han tomado así por coherencia con el modelo que estamos tratando ya que en su obtención hicimos la suposición de pequeñas oscilaciones respecto a la posición vertical. De ello obtuvimos un modelo linealizado del anterior, lo que reducía la complejidad del problema en gran medida. Sin embargo para que los resultados se ajusten a la realidad hemos tomado estos valores iniciales en todos los casos.

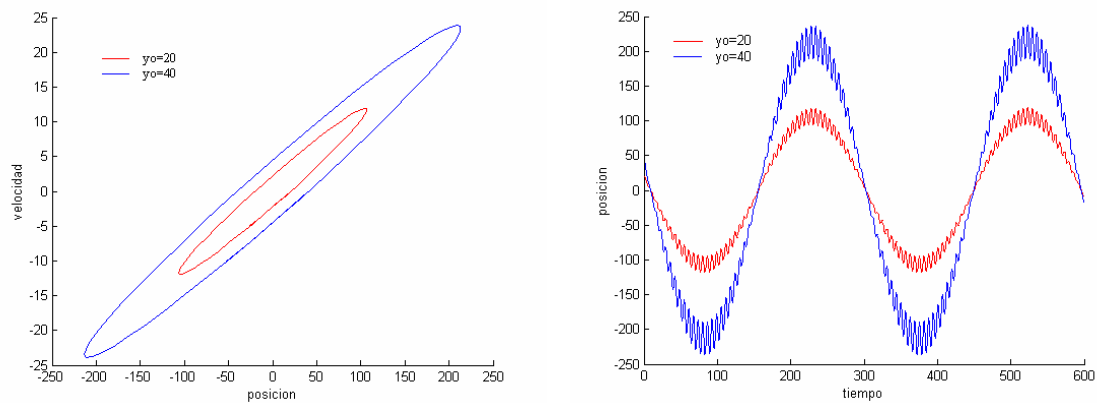
Por otro lado sabemos que al haber obtenido un modelo linealizado, la solución no depende de las condiciones iniciales en cuanto a la forma de la curva, tan sólo afecta a la amplitud de oscilación que obtengamos, por lo que no debe afectar al comportamiento del sistema el hecho de haber tomado unas condiciones iniciales en vez de otras. Esto podemos verlo en las siguientes curvas, donde se han tomado distintos valores de las condiciones iniciales para unos valores determinados de los parámetros del sistema, obteniendo el siguiente resultado:

$$\mu=1.1 \quad a = 0.01 \quad \lambda = 10^{-4}$$



Donde la curva azul se corresponde a $y_0=0.1$, y la roja a $y_0=0.01$, ambas con velocidad inicial nula.

En ambas gráficas se observa cómo la solución presenta el mismo comportamiento, tan sólo variando la amplitud de oscilación, pero si representamos con unos valores que ya no sean coherentes obtenemos también una curva estable que ya deja de ser representativa de nuestro sistema. Así representando para $y_0 = 20$ e $y_0 = 40$ obtenemos:



Obteniendo otras dos curvas semejantes a las anteriores, que por lo tanto presentan estabilidad, pero que ya no son representativas del sistema real en cuanto a la amplitud de oscilación, por lo que nuestro modelo carece de validez en estas situaciones.

5.2.- Influencia de los parámetros

En este apartado procedemos a estudiar la influencia de cada uno de los tres parámetros implicados en nuestro modelo, y en función de los cuales hemos obtenido las regiones de estabilidad en el apartado anterior. Hay que recordar que estos parámetros fueron obtenidos al realizar un análisis adimensional de nuestras ecuaciones agrupando así los parámetros físicos que definen a nuestro sistema en forma de grupos funcionales. Por lo tanto estos parámetros representan una relación entre las magnitudes físicas que definen un problema físico concreto, y que determinarán si el sistema presenta o no estabilidad.

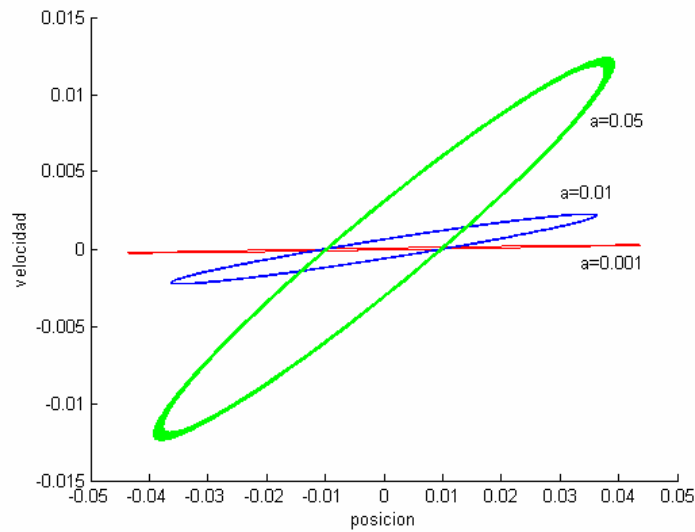
Así pues, recordamos a continuación la definición de estos parámetros con el fin de tener presente su sentido físico:

$$\mu = \frac{K/m}{\omega^2} \qquad \lambda = \frac{g/\ell_o}{\omega^2} \qquad a = \frac{A}{\ell_o}$$

5.2.1.- Influencia del parámetro a

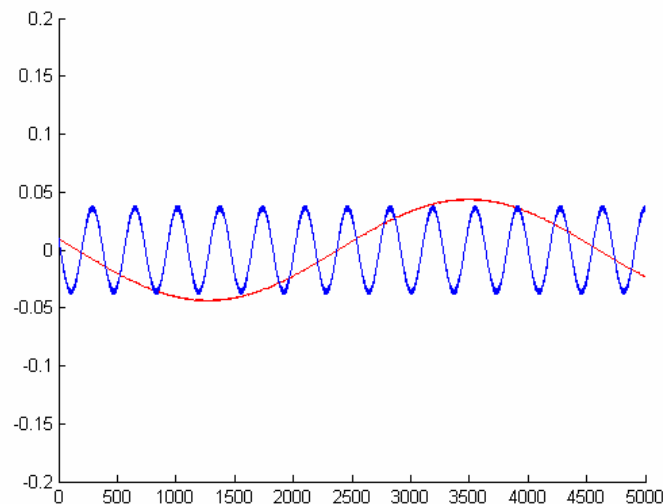
En este caso vamos a partir de una solución estable del modelo y variamos a manteniendo λ y μ constantes con el fin de ver cómo varía el comportamiento del sistema. A la vista de la definición de los parámetros esta situación se corresponde a mantener una frecuencia de vibración sobre un sistema concreto e ir variando progresivamente la amplitud de la misma. Los resultados obtenidos se muestran en las siguientes gráficas donde se ha partido de los siguientes valores de λ y μ :

$$\mu=1.2 \quad \lambda = 10^{-6}$$

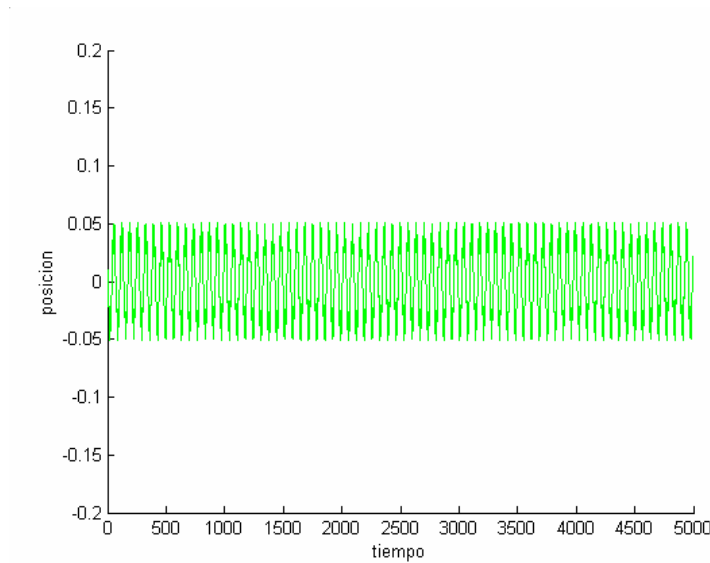


En esta gráfica observamos que la amplitud de oscilación entorno a la posición vertical no se ve prácticamente afectada, presentando oscilaciones muy pequeñas entorno a 0.04rad. Sin embargo sí observamos que las velocidades en cada caso aumentan considerablemente por lo que es de esperar que la frecuencia de oscilación crezca mucho al incrementar el parámetro a . Esto podemos comprobarlo representando estas soluciones frente al tiempo:

$$a=0.001 ; \quad a=0.01$$



$$a=0.05$$

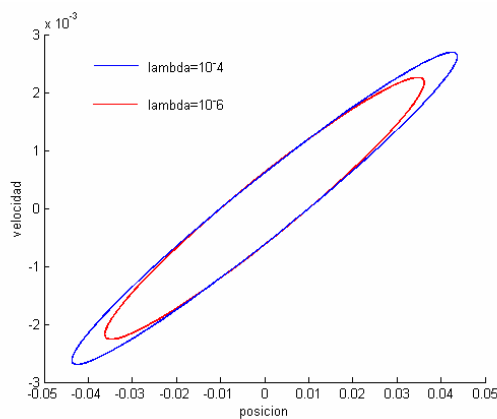


5.2.2.- Influencia del parámetro λ

En este caso variamos λ y mantenemos constantes a y μ . Este experimento presenta un sentido físico menos claro ya que los parámetros λ y μ están ambos relacionados a través de la frecuencia de vibración. Así pues, si variamos el primero de ellos, a la fuerza debemos variar alguno de los parámetros que definen al otro para mantenerlo constante, ello implicaría cambiar el sistema variando la rigidez del muelle o la masa del mismo. Por lo tanto vamos a ver cómo influye sobre el comportamiento de la solución desde un punto de vista matemático. Como hicimos en el caso anterior, partimos de una solución estable y vemos cómo varía la curva que obtenemos.

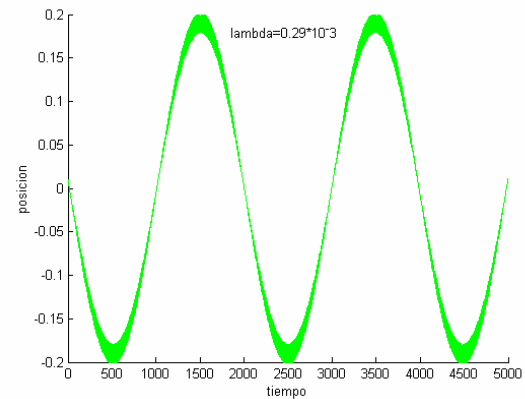
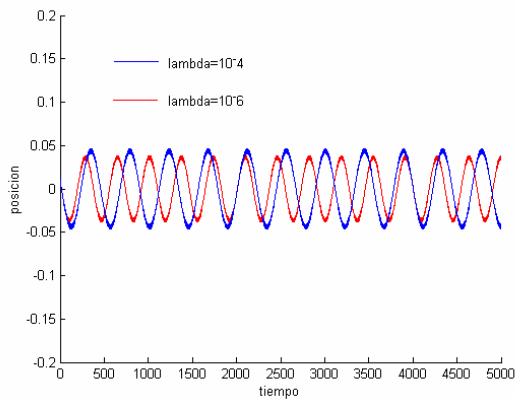
Partimos de los valores: $a=0.01$ $\mu=1.2$

Variando para λ : $[10^{-6}; 10^{-4}; 0.29 \cdot 10^{-3}]$



Donde se ha representado la segunda gráfica por separado por factores de escala. Vemos cómo en este caso sí se ve muy afectada la amplitud de oscilación entorno a la vertical al aumentar λ , correspondiendo la segunda gráfica al valor más alto que mantiene el sistema estable para estos valores de los otros dos parámetros.

Como hicimos antes representamos estas soluciones frente al tiempo para apreciar este fenómeno:

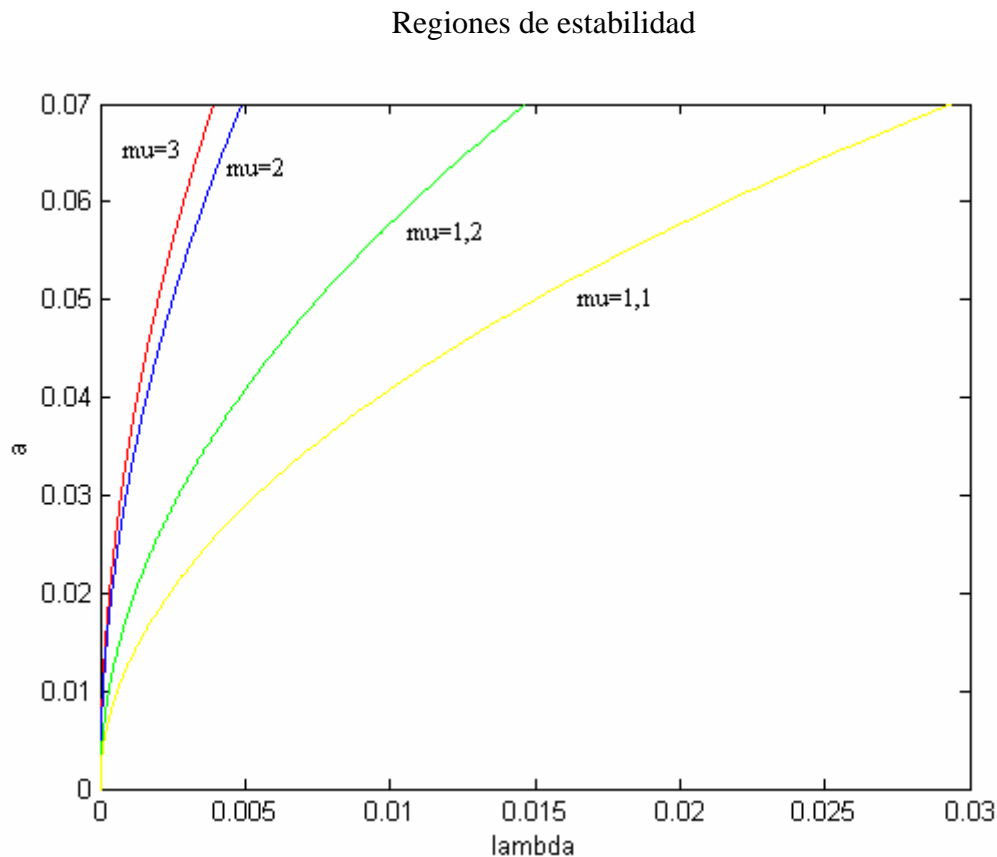


En estas gráficas se observa más claramente el efecto que tiene el hecho de aumentar λ sobre la solución obtenida, presentando oscilaciones de mayor amplitud y frecuencias mucho menores cuanto más nos acercamos a la zona de inestabilidad.

5.2.2.- Influencia del parámetro μ

En este caso vamos a estudiar la influencia que tiene sobre el comportamiento de nuestro sistema el hecho de variar el parámetro μ . Éste representa la relación entre la frecuencia natural de nuestro sistema actuando como muelle respecto de la frecuencia de vibración introducida. Desde el punto de vista de nuestro estudio esta influencia es la más interesante ya que refleja el hecho de haber introducido en el sistema de péndulo invertido un muelle unido a la masa. Por lo tanto vamos a dedicar más énfasis en analizar su influencia.

En primer lugar vamos a ver cómo influye sobre las regiones de estabilidad que obtuvimos en el capítulo anterior el hecho de variar μ . Para ello vamos a representar conjuntamente las regiones correspondientes a valores más altos del parámetro, que corresponden a valores más altos de la rigidez del muelle, obteniendo la siguiente gráfica:



Como vimos en el capítulo anterior la región de estabilidad correspondiente a cada valor del parámetro μ se encuentra a la derecha de cada curva.

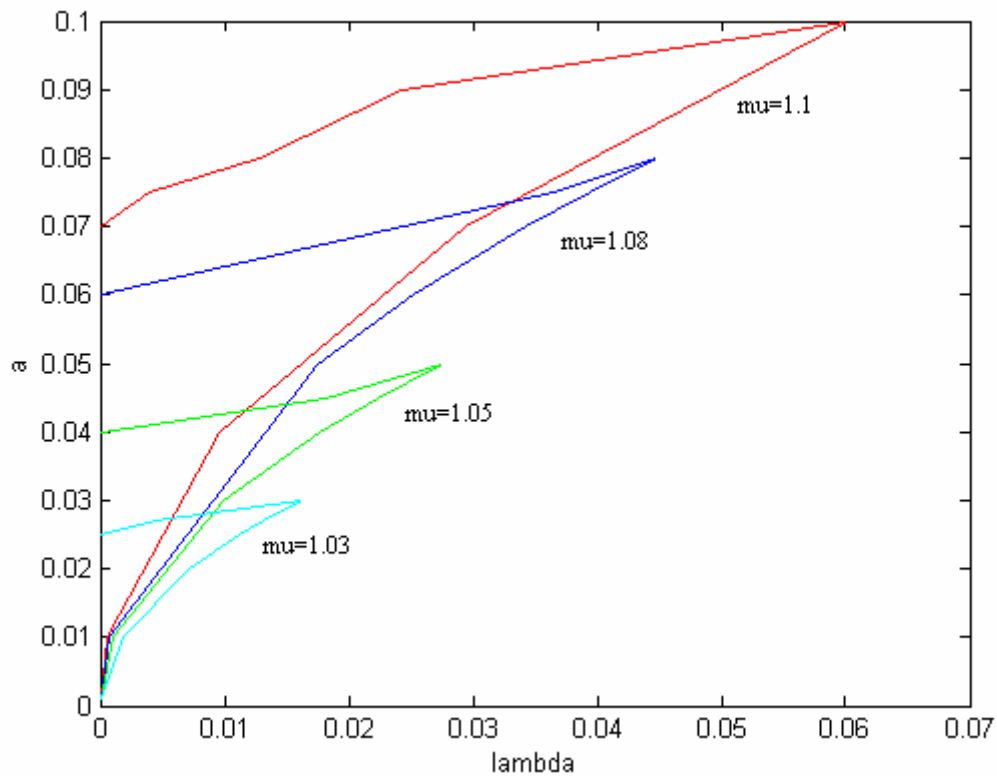
En esta gráfica vemos un primer efecto por el cual resulta favorecedor desde el punto de vista de la estabilidad del sistema el hecho de disminuir μ , ya que aumentan en gran medida el ancho de las regiones, por lo que el sistema presenta un mayor rango de valores correspondientes a los otros dos parámetros para los cuales nuestro péndulo oscilará entorno a la vertical sin caer.

También observamos que cuanto más nos acercamos al valor unidad este fenómeno se acentúa considerablemente. Además la forma de estas curvas son todas similares, aproximándose a una forma cuadrática del tipo:

$$\lambda \approx ca^2$$

Donde la variación de c recoge el efecto por el cual la pendiente de las curvas se hace mayor al disminuir el parámetro μ .

A continuación representamos las regiones obtenidas para valores más bajos del parámetro donde observamos que el comportamiento cambia considerablemente:



El primer hecho que observamos es que en todos estos casos aparece a la izquierda de nuestra región de estabilidad una nueva región de inestabilidad. Otro hecho que salta a la vista es que las regiones se van haciendo más pequeñas a medida que nos acercamos al valor unidad de nuestro parámetro. Esto se debe a que aparece un límite superior para el valor del parámetro a y que según vimos en el capítulo anterior venía dado en función de μ :

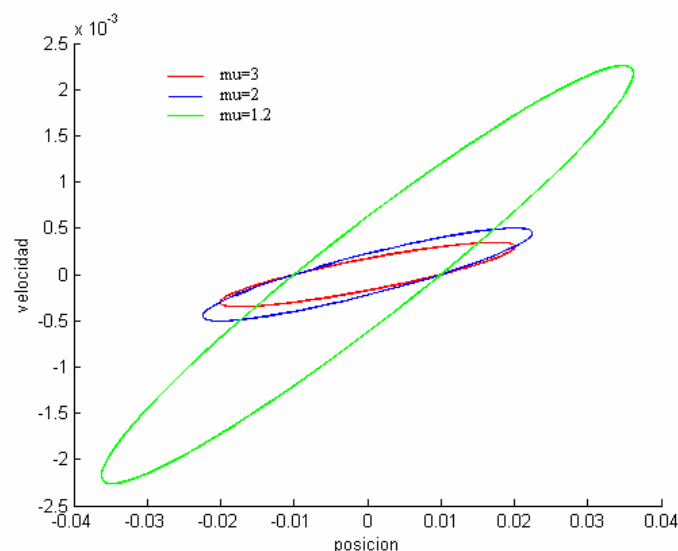
$$a < \mu - 1$$

Por último observamos que la curva límite de la derecha, al igual que los casos anteriores, sigue aumentando considerablemente de pendiente al disminuir la rigidez del muelle. Sin embargo, a la vista de los resultados ello no consigue contrarrestar los dos hechos anteriores por lo que nuestras regiones de estabilidad se hacen más pequeñas al acercarnos a $\mu=1$.

Por otro lado vamos a ver cómo influye en el modo de vibración el hecho de variar μ y mantener constantes los otros dos parámetros. Los valores que hemos tomado han sido los siguientes:

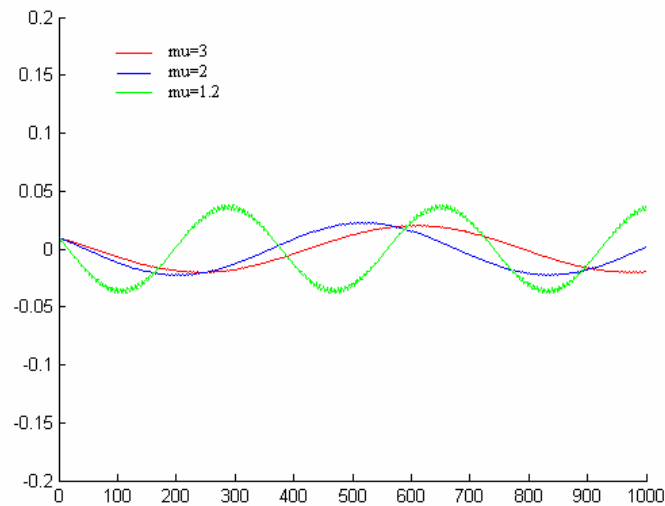
$$a=0.01 \quad \lambda=10^{-6}$$

Al igual que hicimos antes representamos en primer lugar el resultado que obtenemos para valores altos de μ :

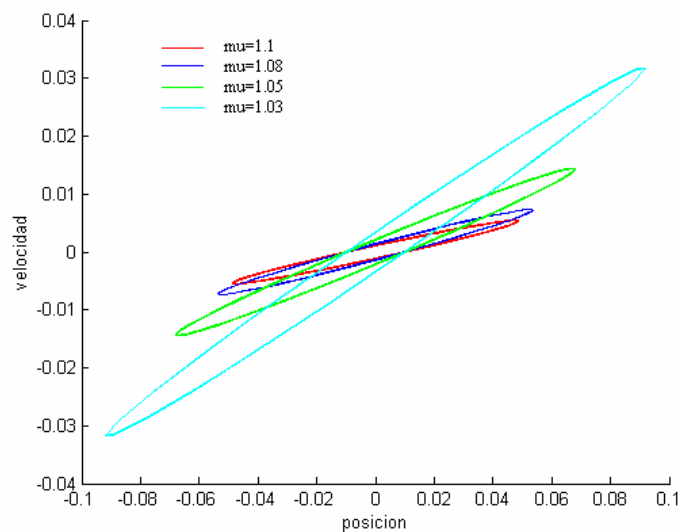


En ella observamos cómo a medida que bajamos la rigidez del muelle la amplitud y la frecuencia de oscilación del péndulo se hacen mayores para estos valores de los otros parámetros, siendo más sensible esta variación a medida que nos acercamos al valor unidad de μ .

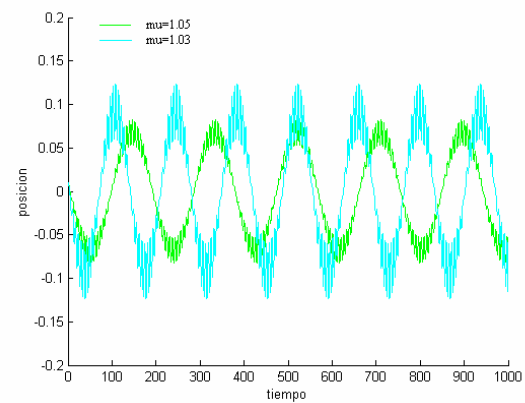
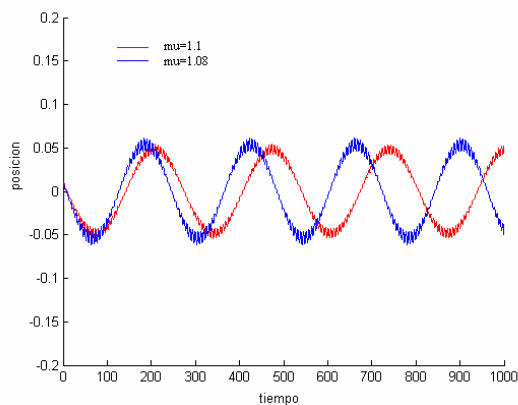
Representando estas soluciones frente al tiempo podemos ver mejor este efecto:



Sin embargo si representamos los resultados obtenidos para valores ya cercanos a la unidad vemos que el comportamiento varía mucho entre unos valores y otros. Así representando para los valores antes estudiados tenemos:



Observamos que tanto la amplitud como la frecuencia siguen creciendo a medida que nos acercamos a $\mu=1$, lo que también era de esperar a la vista de las regiones de estabilidad ya que la operación que estamos realizando representa tomar un punto fijo del plano $a \lambda$ y ver en cada caso el tipo de oscilación que se nos presenta. Como vimos anteriormente, las regiones de estabilidad se van haciendo más pequeñas a medida que reducimos el valor de la rigidez del muelle por lo que el punto que tomamos se acerca a la región de inestabilidad, y por lo tanto también presentará mayores oscilaciones. Representando las distintas soluciones frente al tiempo volvemos a ver este efecto con mayor claridad.



En ellas vemos que la respuesta aumenta en amplitud y frecuencia, sin embargo la sensibilidad no es muy significativa. Otro hecho significativo que podemos observar en estas gráficas es que el contenido en altas frecuencias en la respuesta se hace mayor a medida que disminuimos μ .

Capítulo 6

Conclusiones

En primer lugar hemos visto cómo mediante el uso de las herramientas proporcionadas por la mecánica analítica obtenemos un modelo matemático del problema físico planteado en este proyecto. Posteriormente hemos realizado un análisis adimensional del modelo consiguiendo así reducir el número de parámetros implicados en el mismo. Este análisis nos ha permitido agrupar los parámetros de forma que aparezcan dentro de grupos funcionales, tratando de este modo el problema de manera general. Por lo tanto, bajo las hipótesis realizadas para su obtención, nuestro proyecto se ha centrado en el estudio de la estabilidad del sistema por medio de un análisis numérico del modelo obtenido y que se muestra a continuación:

$$\varphi'' + \mu \left[1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{a}{\mu-1} \operatorname{sen} \tau} \right] \varphi = 0$$

En este análisis hemos empleado como herramienta informática el programa de matemáticas MATLAB, que se ha adaptado bien a nuestras necesidades en cuanto a potencia de cálculo y capacidad representativa de los resultados obtenidos.

Con todo ello hemos realizado un análisis exhaustivo del comportamiento del sistema con el fin de obtener lo más exactamente posible las regiones de estabilidad en función de los parámetros implicados en el modelo, esto es, a , λ y μ . Así hemos conseguido estudiar el efecto que tiene el hecho de colocar un muelle sobre la estabilidad del sistema, obteniendo en cada caso las distintas regiones que se nos presentan en función de la rigidez relativa del mismo, obteniendo valores límite que se nos imponen a través de nuestro modelo.

Por lo tanto la principal conclusión de este proyecto ha sido conseguir estabilizar el sistema en su posición invertida por medio de una acción en forma de vibración vertical, y obtener las distintas regiones de estabilidad que se nos presentan. Estas regiones representan la relación que deben cumplir los parámetros implicados y la excitación introducida para que el sistema presente una situación estable en cada caso. De este modo hemos visto que la estabilidad del péndulo es posible para valores de μ mayores que la unidad, presentando regiones de estabilidad cada vez mas anchas cuanto mas nos acercamos al valor unidad de este parámetro. Por lo tanto en un primer momento resulta favorecedor desde el punto de vista de la estabilidad el hecho de reducir la rigidez relativa del muelle. Sin embargo, cerca de este valor comienza a invertirse este efecto para comenzar a tomar importancia otros efectos desestabilizadores, lo cual se traduce en un estrechamiento de la zona de estabilidad cerca del valor unidad del parámetro μ .

Por último hemos realizado un análisis cualitativo de la influencia que tienen dichos parámetros sobre la estabilidad del sistema y el modo de oscilación que presenta el péndulo entorno a la posición vertical. Para ello hemos representado frente al tiempo las soluciones obtenidas en cada caso, observando el cambio de comportamiento que experimenta el sistema cuando variamos alguno de sus parámetros fijando el resto de ellos.

Finalmente debemos decir que al haber realizado un análisis adimensional del modelo, el estudio que hemos hecho de él es de carácter general por lo que para concretar un sistema particular deberemos escoger los parámetros en él implicados de forma que se cumplan las relaciones aquí obtenidas para que el péndulo elástico presente una posición invertida estable.

Bibliografía

- George F. Simmons *Ecuaciones Diferenciales. Con aplicaciones y notas históricas (2ª ed)*, McGraw-Hill 1993
- Joel Stoer and Roland Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis*. New York: Springer-Verlag 1980.
- *Inverted pendulum as low frequency pre-isolation for advanced gravitational wave detector*. Elsevier Science 2001
- *Main criteria of the harmonic vibration action change of pendulum bracket by vibration force*. Modern Technique and Technologies, 2002.
- *Balancing of an inverted pendulum*. Transactions on Mechatronics, Vol 3, No 2, June 1998.
- J.M. Iñiguez Almench – R. Cid Palacios. *Mecánica Teórica*.

