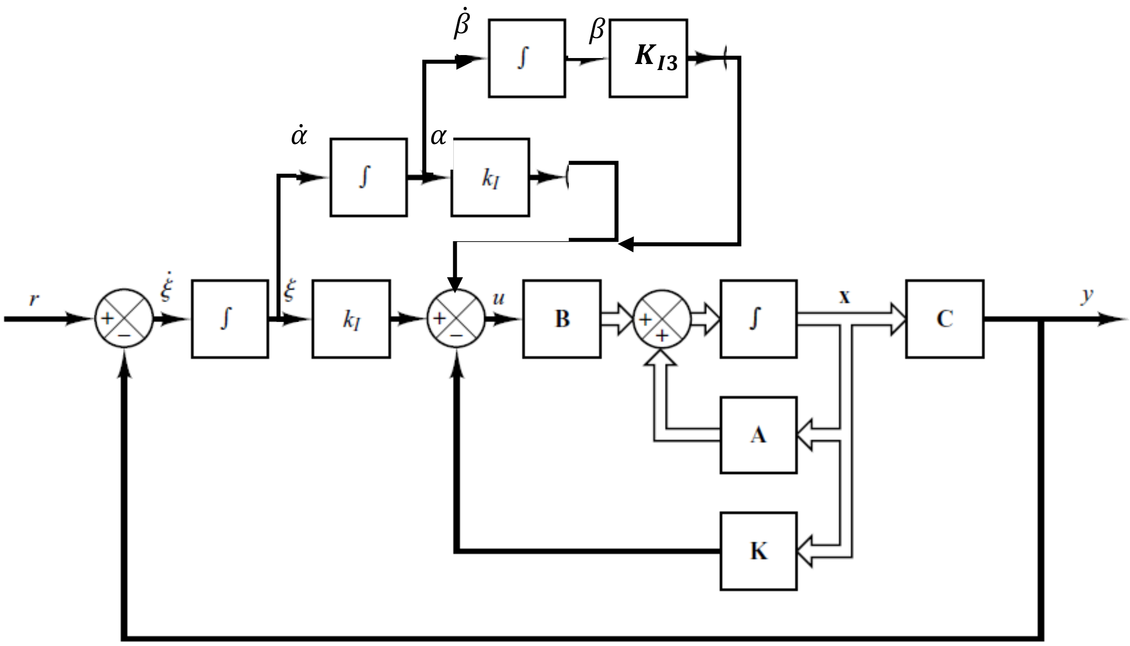
Apuntes de clase semana 9

Andrés castro

1. Servo sistemas tipo 3.
2. Introducción análisis en la frecuencia sistemas de control.
3. Los diagramas de Bode (Factores Básicos)
4. Prototipo de segundo orden en el dominio de la frecuencia.
5. Margen de fase y margen de ganancia.

Servosistema tipo 3 con entrada parábola



Matriz ampliada para usar por el método de sustitución directa o asignación de polos.

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}) & \boldsymbol{B}\,K_{I1} & \boldsymbol{B}K_{I2} & \boldsymbol{B}K_{I3} \\ -\boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \xi \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} r$$

Polinomio característico en lazo cerrado

$$\det\left(sI - \begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}) & \boldsymbol{B}\,K_{I1} & \boldsymbol{B}K_{I2} & \boldsymbol{B}K_{I3} \\ -\boldsymbol{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) = PD$$

Polinomio deseado

$$PD = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2)(s + \beta\zeta\omega_n)^{n+1}$$

Matriz ampliada para Ackerman y matriz de transformación T

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}$$

$$\dot{\xi} = r - C\boldsymbol{x}$$

$$\dot{\alpha} = \xi$$

$$\dot{\beta} = \alpha$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \xi \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Introducción diseño en la frecuencia.

Hasta el momento el análisis y diseño de sistemas de control se ha realizado tomando como entrada señales de prueba escalón, rampa y parábola ($U(s)$). Se analiza la respuesta en estado estable y el estado transitorio de la respuesta de estas señales ($Y(s)$). Ahora vamos a considerar el análisis y diseño de sistemas de control para una señal senoidal. Analizaremos la respuesta en estado estable del sistema de control con una entrada senoidal cuya frecuencia varia. Examinaremos la función de transferencia $G(s)$ cuando $s = j\omega,\ G(j\omega)$ función de transferencia sinusoidal en estado estacionario. Y utilizaremos herramientas graficas como los diagramas de bode para analizar y diseñar los sistemas de control.

$$r = Asen(\omega t)$$

$$y = B(\omega)sen\left(\omega t \pm \phi(\omega)\right)$$

$$\omega = 2\pi f$$

La función de transferencia de un sistema $G(s)$ se rescribe en el dominio de la frecuencia como.

$$G(s)|_{s=j\omega}$$

$$G(j\omega) = Re\left(G(j\omega)\right) + Im\left(G(j\omega)\right)$$

Coordenadas cartesianas

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

Magnitud

$$|G(j\omega)| = \sqrt{R(\omega)^2 + X(\omega)^2}$$

Fase

$$\phi(\omega) = Tan^{-1}\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right)$$

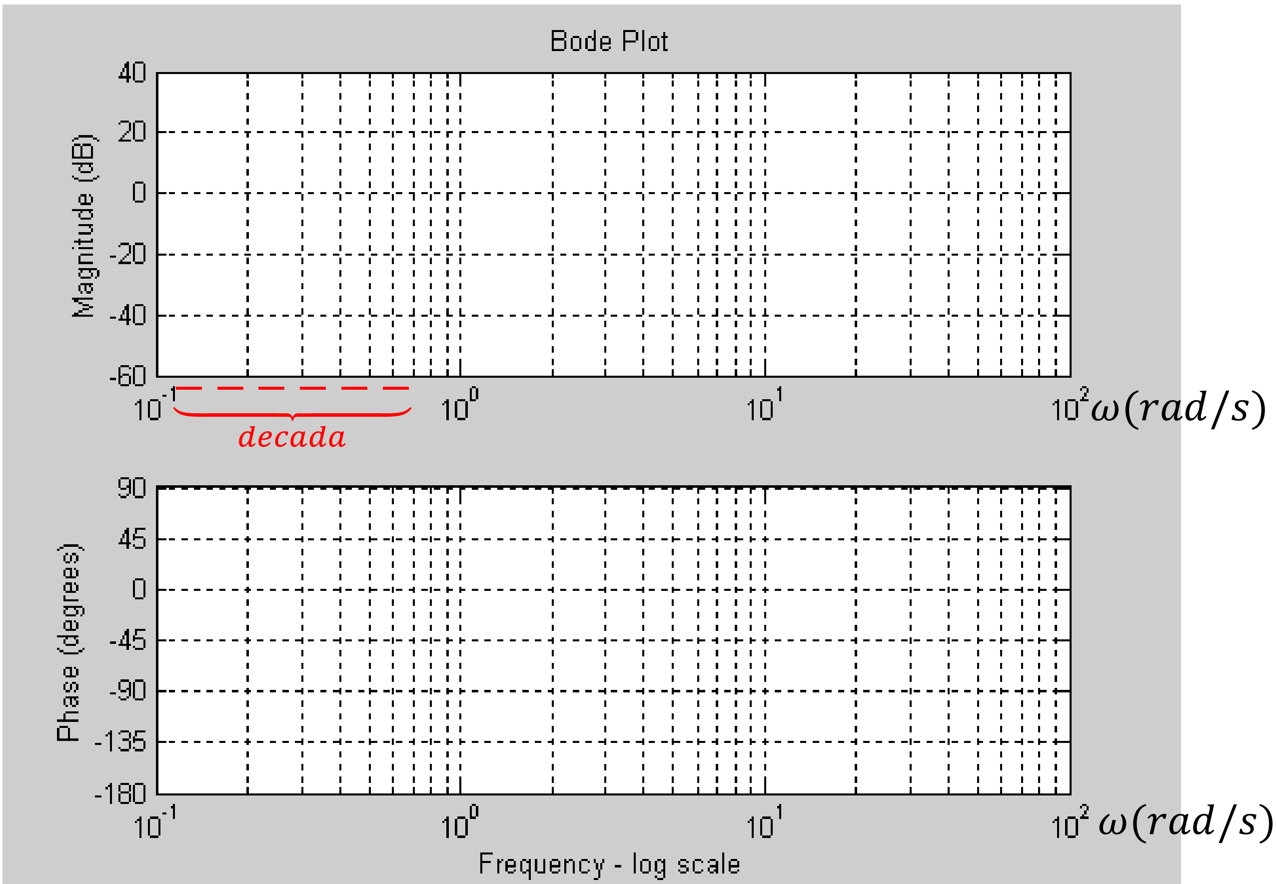
Forma exponencial

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\phi(\omega)}$$

En forma polar

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\angle\phi(\omega)$$

Los diagramas de Bode



Los diagramas de Bode son gráficas semilogarítmicas de la magnitud (en decibeles) y de la fase (en grados) de una función de transferencia en función de la frecuencia.

$$\text{gain} = |\mathbf{H}(\omega)| = \frac{|\mathbf{Y}(\omega)|}{|\mathbf{X}(\omega)|}$$

$$\text{phase shift} = \angle\mathbf{H}(\omega) = \angle\mathbf{Y}(\omega) - \angle\mathbf{X}(\omega)$$

Escala decibelios

$$\boxed{H_{dB} = 20\log_{10} H}$$

Ejemplo: El diagrama de bode

$$G(s) = \frac{1}{(3s+1)(0.2s+1)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1 + j0}{3(j\omega) + 1}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (3\omega)^2}}$$

$$|G(j\omega)|dB = 20\log_{10}\frac{1}{\sqrt{1^2 + \ (3\omega)^2}} = 20\cancel{\log_{10}(1)} - 20\log_{10}\left(\sqrt{(3\omega)^2 + 1^2}\right)$$

$$|G(j\omega)|dB = -20\log_{10}\left(\sqrt{1^2 + (3\omega)^2}\right)$$

Fase

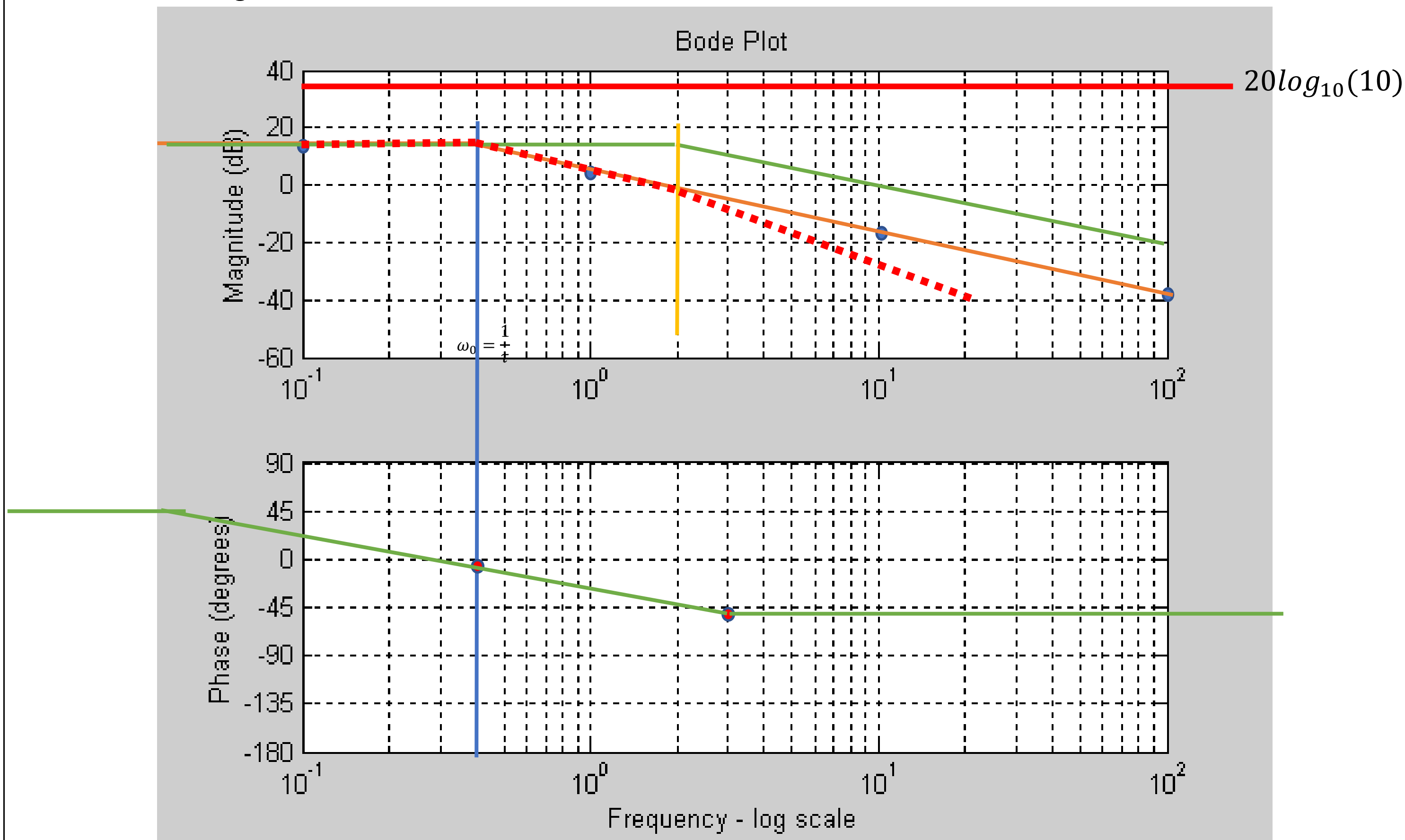
$$\angle G(j\omega) = \frac{\angle\, 1 + j0}{\angle 3(j\omega) + 1} = \frac{tan^{-1}(0/1)}{tan^{-1}(3\omega/1)} = \cancel{tan^{-1}(0/1)} - tan^{-1}(3\omega/1)$$

$$\angle G(j\omega) = -tan^{-1}(3\omega)$$

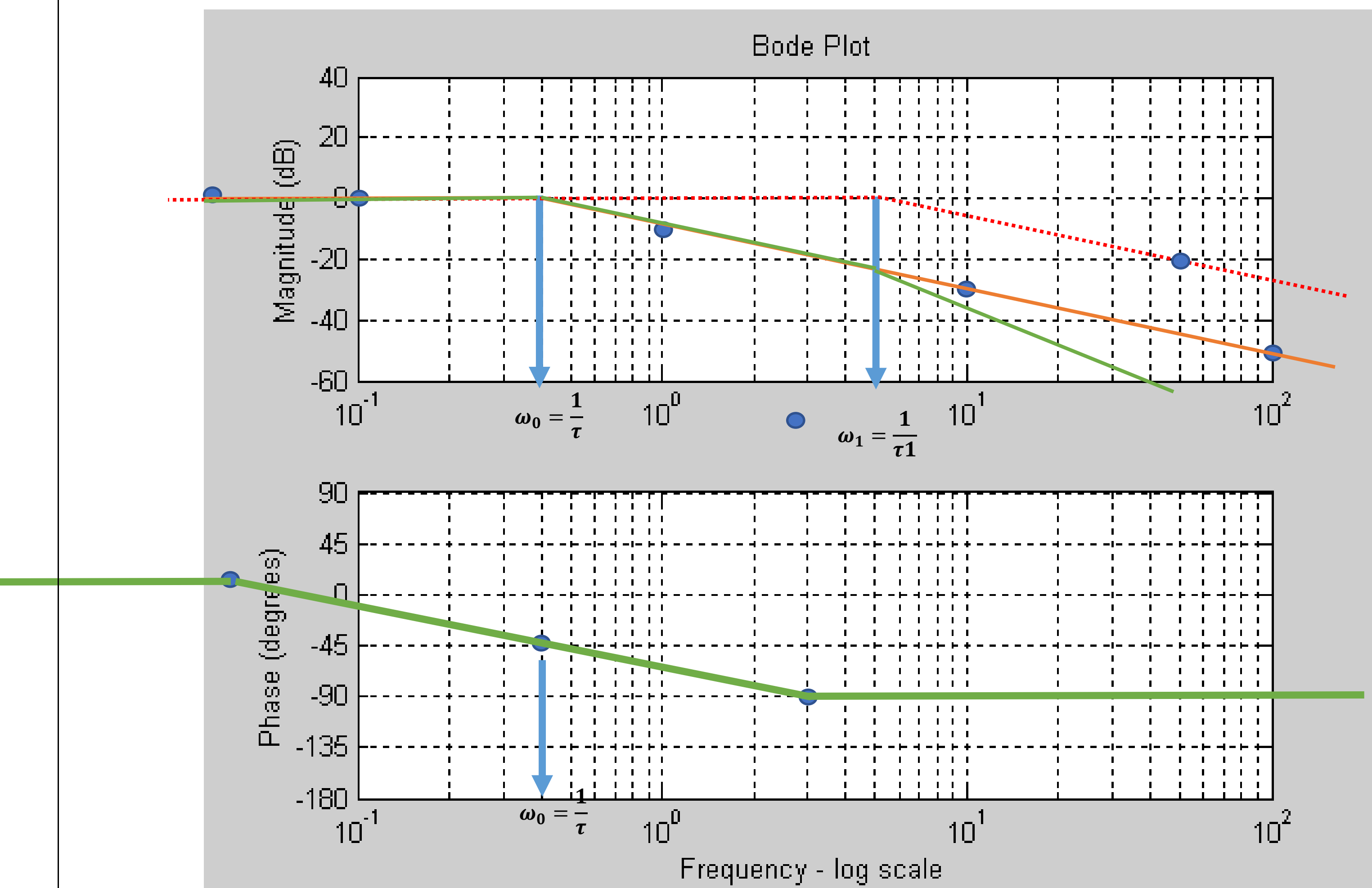
Graficar…

w		HdB
	0,1	0
	1	-10
	10	-30
	100	-50

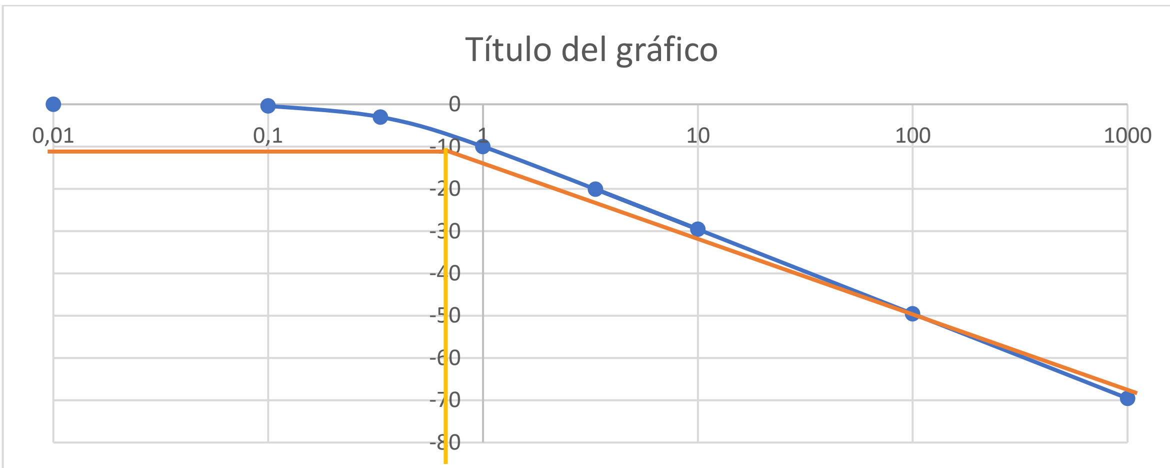
LA magnitud en la frecuencia de corte es de -3dB



w	Magnitud	Fase
0,01	0	-2
0,03333333		-6
0,1	0	-17
0,33333333	-3	-45
1	-10	-72
10	-30	-88
3,33333333	-20	-84
100	-50	-90
1000	-70	-90



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K\left(\frac{s}{Z_1} + 1\right)}{s^N\left(\frac{s}{p_1} + 1\right)\left(1 + 2\zeta\, {}^{s}/_{\omega_n} + \left({}^{s}/_{\omega_n}\right)^2\right)}$$



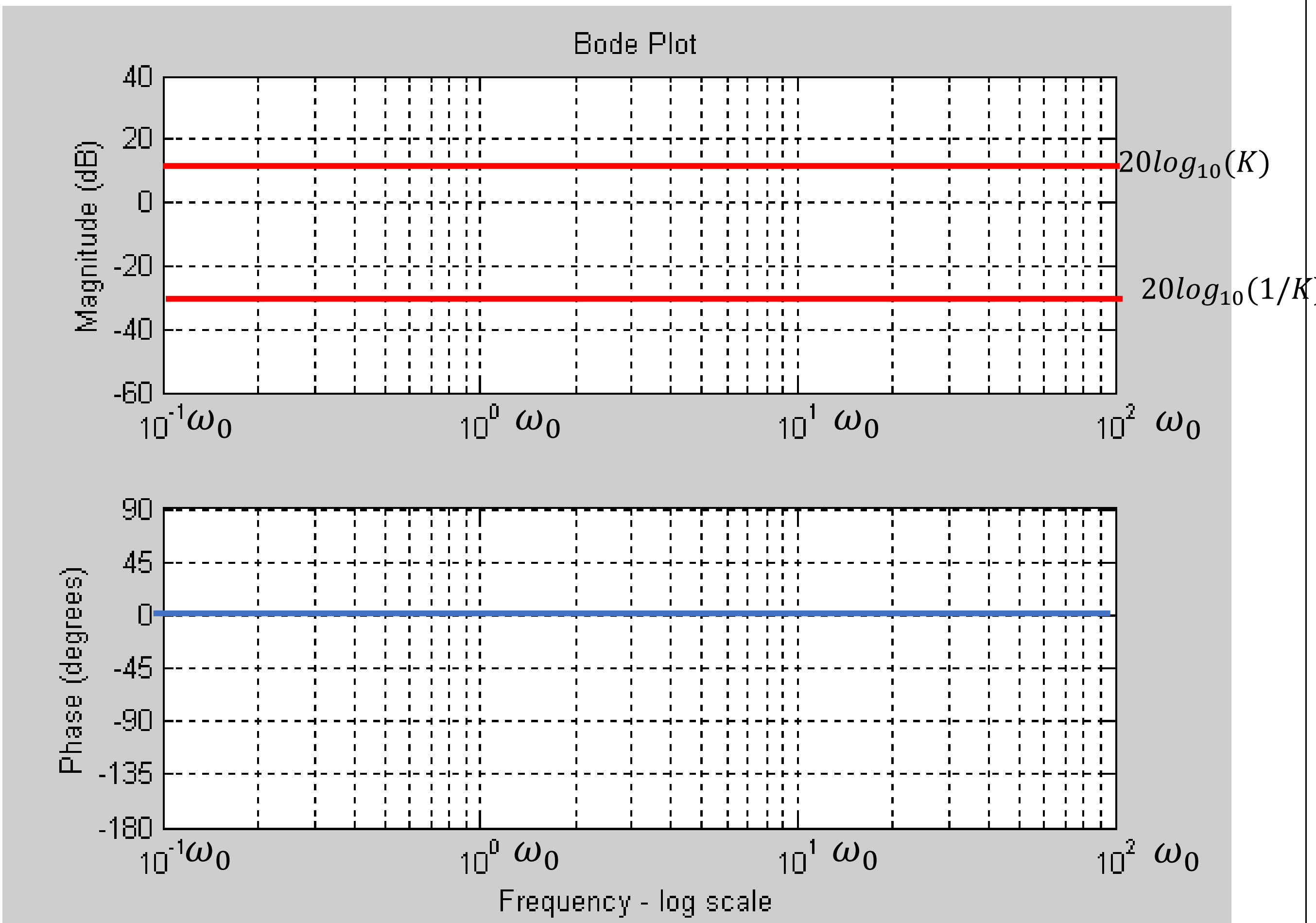
$\omega_0 = \frac{1}{\tau}$ frecuencia de corte

Factores Básicos

1. La ganancia K
2. Factores integrales $H(j\omega) = \frac{1}{j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}}$ y factor derivador $H(j\omega) = j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}$
3. Factores de primer orden $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}}$ $H(j\omega) = 1 + j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}$
4. Factores cuadráticos $H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta j\,{}^{\omega}/_{\omega_0} + \left(j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}$, $H(j\omega) = 1 + 2\zeta j\,{}^{\omega}/_{\omega_0} + \left(j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2$

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\,{}^{\omega}/_{\omega_1}} * j\,{}^{\omega}/_{\omega_2} * \left(1 + 2\zeta j\,{}^{\omega}/_{\omega_4} + \left(j\,{}^{\omega}/_{\omega_4}\right)^2\right)}{1 + 2\zeta j\,{}^{\omega}/_{\omega_3} + \left(j\,{}^{\omega}/_{\omega_3}\right)^2}$$

La ganancia K



$$H(j\omega) = K$$

$$H(j\omega)dB = 20log_{10}(|H(j\omega)|)$$

$$H(\omega)dB = 20log_{10}(K)$$

$$H(\omega)dB = 20log_{10}(1/K)$$

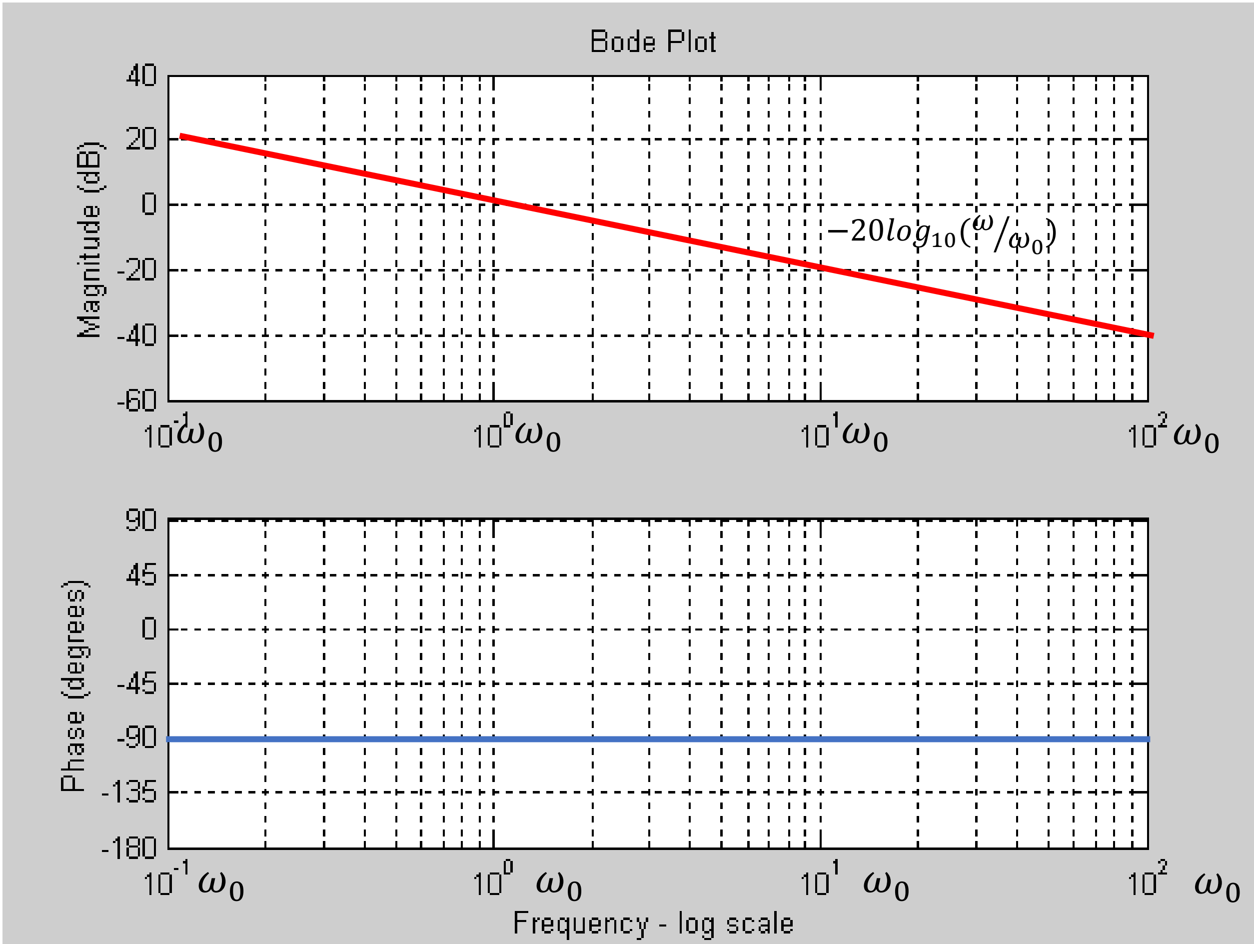
$$H(\omega)dB = 20log_{10}(1) - 20log_{10}(K)$$

$$H(\omega)dB = -20log_{10}(K)$$

$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{Im(H)}{Re(H)}\right)$$

$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{0}{K}\right) = 0$$

1. Factores integrales $H(j\omega)=\frac{1}{j^{\omega}/_{\omega_0}}$ y factor derivador $H(j\omega)=j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}$



$$H(j\omega)=\frac{1}{j^{\omega}/_{\omega_0}}$$

$$|H(j\omega)|)=\frac{1}{\sqrt{0^2+\left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}}$$

$$H(j\omega)dB=20log_{10}(|H(j\omega)|)$$

$$H(j\omega)dB=20log_{10}\left(\frac{1}{{}^{\omega}/_{\omega_0}}\right)$$

$$H(j\omega)dB=20log_{10}(1)-20log_{10}({}^{\omega}/_{\omega_0})$$

Magnitud

$$H(j\omega)dB = -20log_{10}\left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)$$

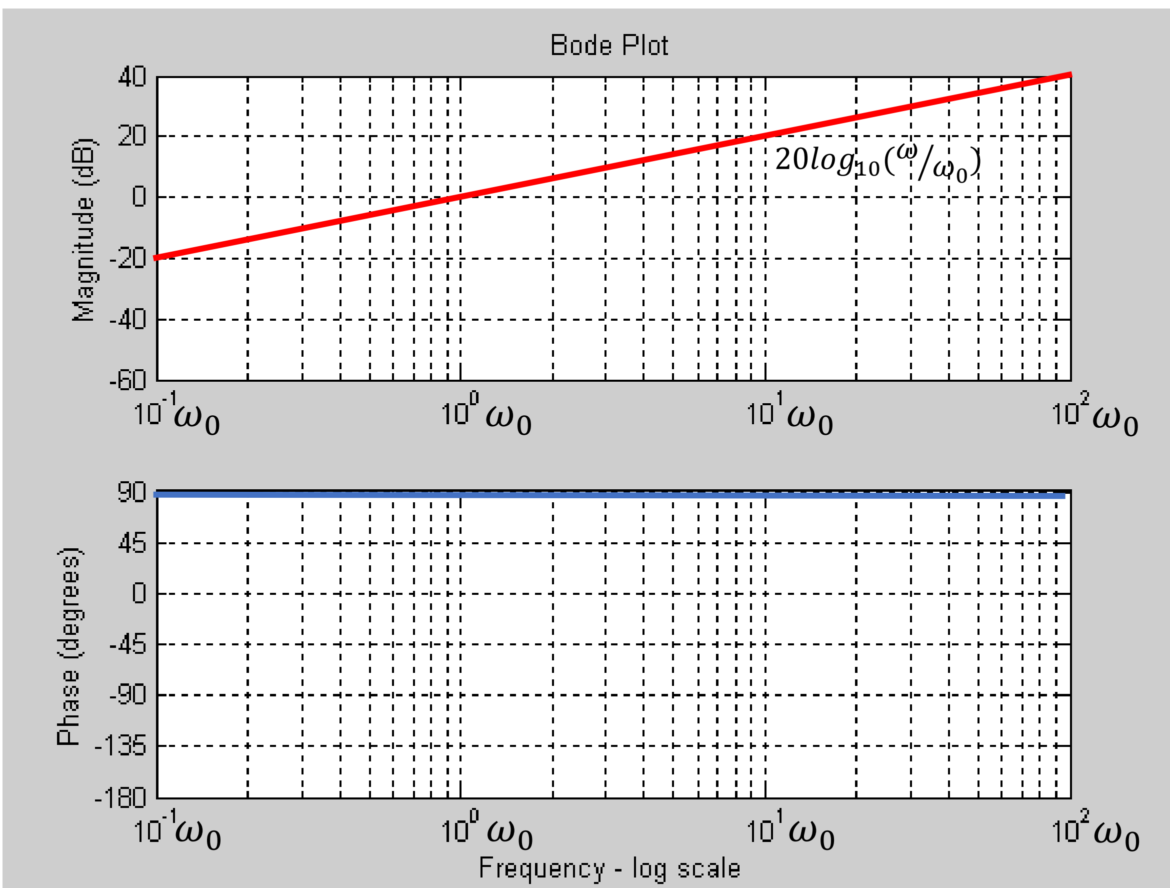
$$H(j\omega) = \frac{j1}{jj\,{}^{\omega}/_{\omega_0}}$$

$$H(j\omega) = -j\,\frac{1}{{}^{\omega}/_{\omega_0}}$$

Fase

$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{\frac{-1}{{}^{\omega}/_{\omega_0}}}{0}\right) = -90^{o}$$

factor derivador $H(j\omega) = j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}$



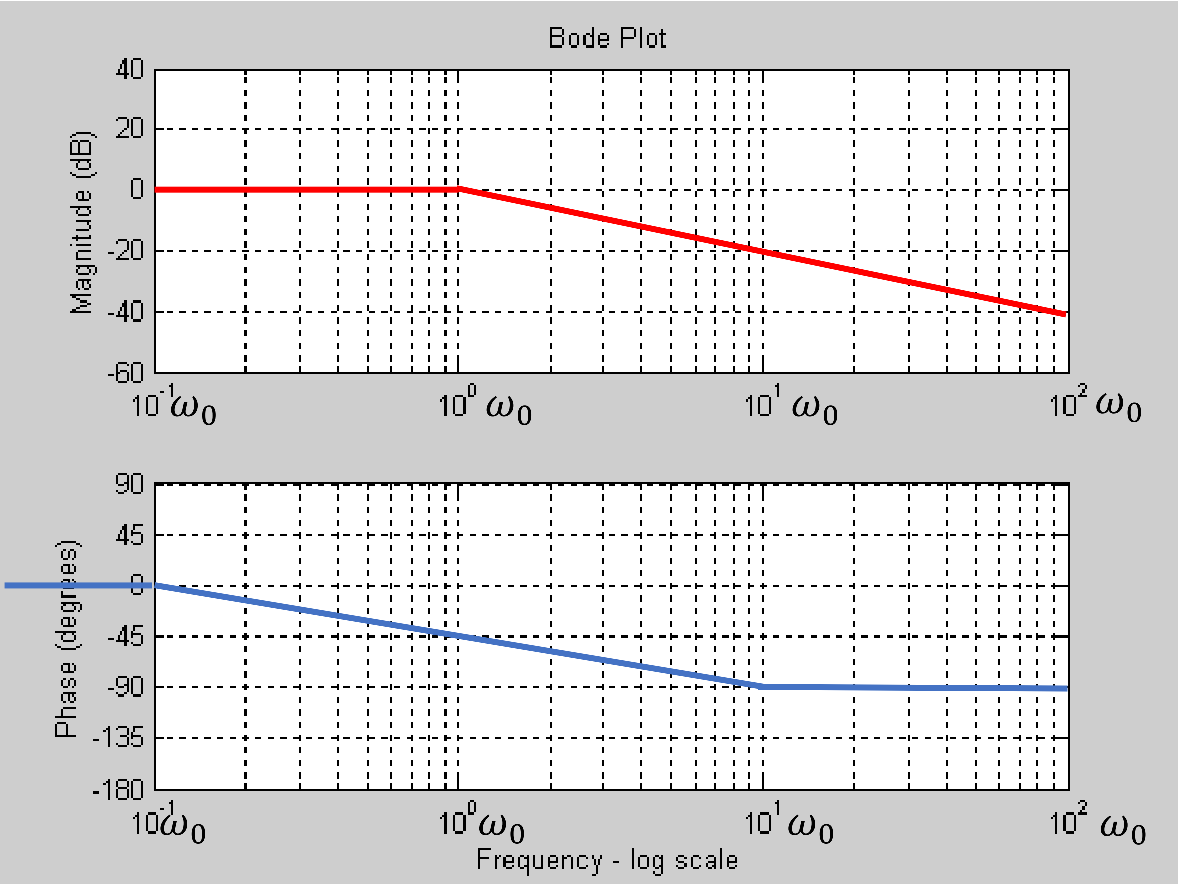
$$H(j\omega) = j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}$$

Magnitud

$$H(j\omega)dB = 20log_{10}(\omega/\omega_0)$$

$$\phi = tan^{-1}\left(\frac{\omega/\omega_0}{0}\right) = 90^o$$

1. Factores de primer orden $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j^{\omega}/\omega_0}$ $H(j\omega) = 1 + j\,^{\omega}/\omega_0$



$$H(j\omega)dB = -20log_{10}\left(\sqrt{1^2 + (\omega/\omega_0)^2}\right)$$

$$H(j\omega)dB = -20log_{10}\left(\sqrt{1^2 + \left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$$\text{Si } \omega \ll \omega_0 \; H(j\omega)dB = 0dB$$

$$\text{Si } \omega = \omega_0 \; H(j\omega)dB = -3dB$$

$$\text{Si} \gg \omega_0 \; H(j\omega)dB = -20log_{10}\left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)dB$$

$$\angle H(j\omega) = \frac{\angle 1}{\angle 1 \; + \; j \, {}^{\omega}/_{\omega_0}}$$

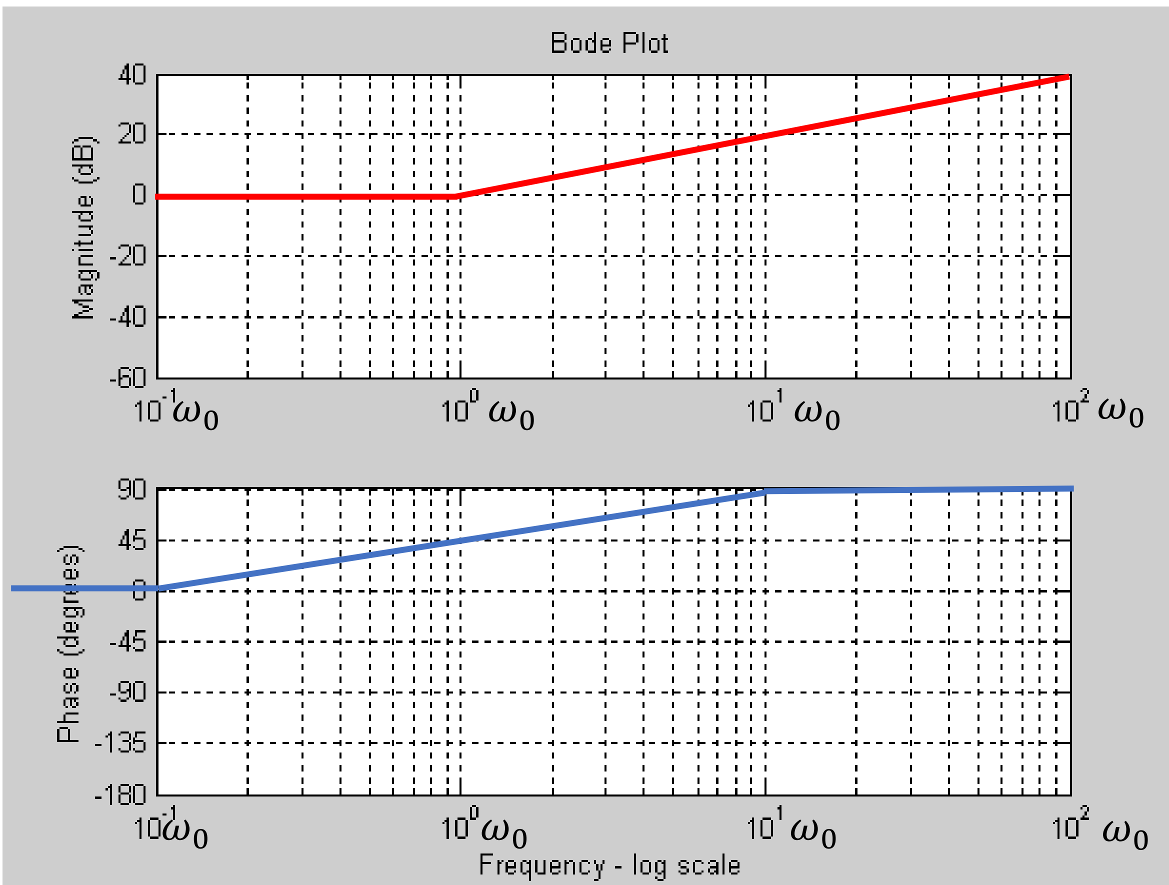
$$\angle H(j\omega) = \frac{tan^{-1}(0/1)}{tan^{-1}({}^{\omega}/_{\omega_0}/1)}$$

$$\angle H(j\omega) = tan^{-1}\left(\frac{0}{1}\right) - tan^{-1}\left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)$$

$$\angle H(j\omega) = 0 - tan^{-1}\left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)$$

$$\angle H(j\omega) = -tan^{-1}\left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)$$

ω	$\lvert H(\omega)\rvert_{dB}$	$\lvert H(\omega)\rvert_{dB}$	ϕ
$0.01\omega_0$	$-20LOG_{10}\left(\sqrt{\left({}^{0.01\omega_0}/_{\omega_0}\right)^2 + 1}\right)$	0 dB	$\angle -tan^{-1}\left({}^{0.01\cancel{\omega_0}}/_{\cancel{\omega_0}}\right)$ 0^0
$0.1\omega_0$	$-20LOG_{10}\left(\sqrt{\left({}^{0.1\omega_0}/_{\omega_0}\right)^2 + 1}\right)$	0 dB	$\angle -tan^{-1}\left({}^{0.1\cancel{\omega_0}}/_{\cancel{\omega_0}}\right)$ 0^0
$1\omega_0$	$-20LOG_{10}\left(\sqrt{\left({}^{1\omega_0}/_{\omega_0}\right)^2 + 1}\right)$	-3 dB	-45^0
$10\omega_0$	$-20LOG_{10}\left(\sqrt{\left({}^{10\omega_0}/_{\omega_0}\right)^2 + 1}\right)$	-20 dB	-90^0
$100\omega_0$	$-20LOG_{10}\left(\sqrt{\left({}^{100\omega_0}/_{\omega_0}\right)^2 + 1}\right)$	-40 dB	-90^0
$1000\omega_0$	$-20LOG_{10}\left(\sqrt{\left({}^{1000\omega_0}/_{\omega_0}\right)^2 + 1}\right)$	-60 dB	-90^0



$$H(j\omega) = 1 + j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}$$

$$|H(j\omega)| = \sqrt{1^2 + \left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}$$

$$H(j\omega)dB = 20log_{10}\left(\sqrt{1^2 + \left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$$\text{Si } \omega \ll \omega_0 \; H(j\omega)dB = 0dB$$

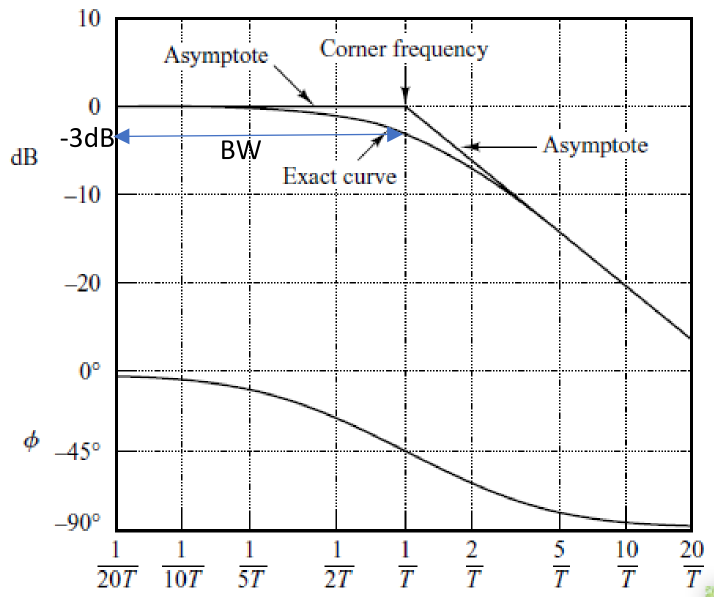
$$\text{Si } \omega = \omega_0 \; H(j\omega)dB = 3dB$$

$$\text{Si } \omega \gg \omega_0 \; H(j\omega)dB = 20log_{10}\left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)dB$$

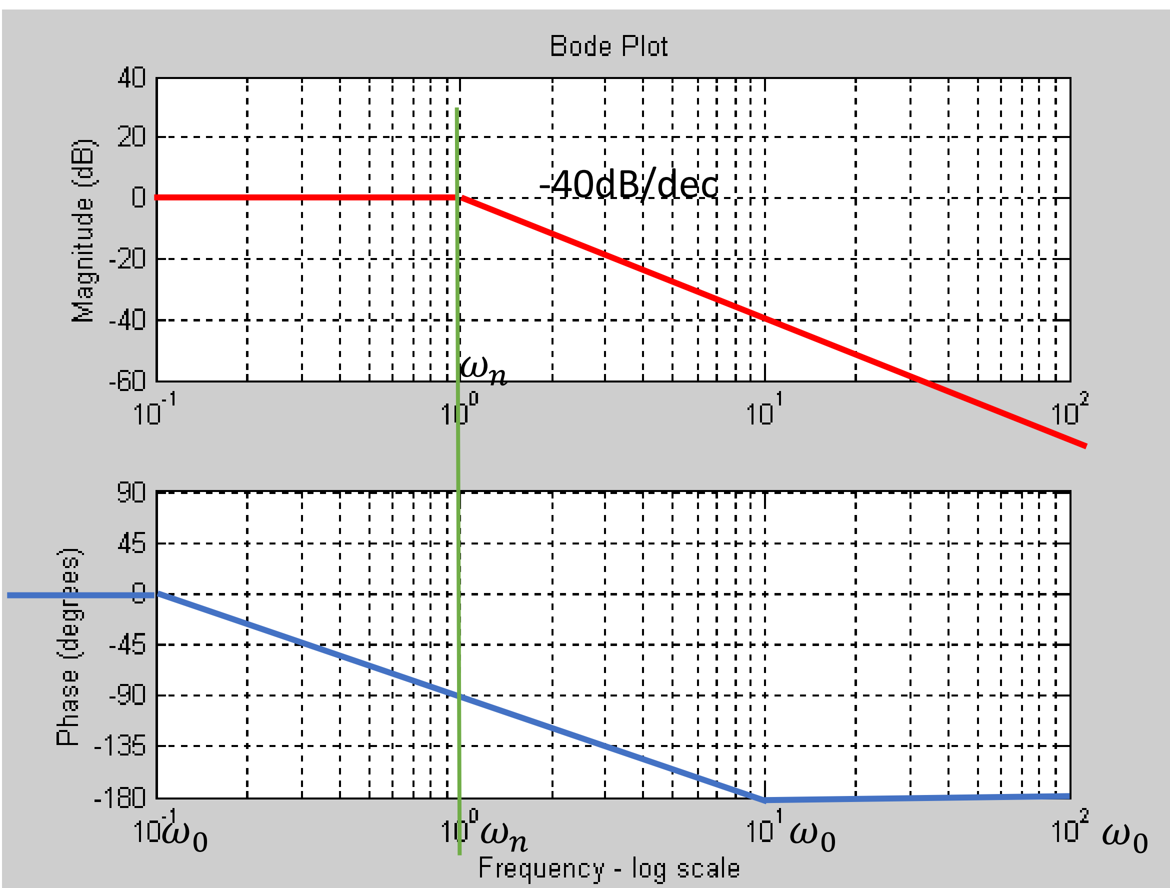
$$\angle H(j\omega) = \angle 1 + j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}$$

$$\angle H(j\omega) = tan^{-1}\left(\frac{{}^{\omega}/_{\omega_0}}{1}\right)$$

ω	$\lvert H(\omega)\rvert_{dB}$	$\lvert H(\omega)\rvert_{dB}$	ϕ
$0.01\omega_0$	$20LOG_{10}\left(\sqrt{\left({}^{0.01\omega_0}/_{\omega_0}\right)^2 + 1}\right)$	0 dB	$\angle tan^{-1}\left({}^{0.01\cancel{\omega_0}}/_{\cancel{\omega_0}}\right)$ 0^0
$0.1\omega_0$	$20LOG_{10}\left(\sqrt{\left({}^{0.1\omega_0}/_{\omega_0}\right)^2 + 1}\right)$	0 dB	$\angle tan^{-1}\left({}^{0.1\cancel{\omega_0}}/_{\cancel{\omega_0}}\right)$ 0^0
$1\omega_0$	$20LOG_{10}\left(\sqrt{\left({}^{1\omega_0}/_{\omega_0}\right)^2 + 1}\right)$	3 dB	45^0
$10\omega_0$	$20LOG_{10}\left(\sqrt{\left({}^{10\omega_0}/_{\omega_0}\right)^2 + 1}\right)$	20 dB	90^0
$100\omega_0$	$20LOG_{10}\left(\sqrt{\left({}^{100\omega_0}/_{\omega_0}\right)^2 + 1}\right)$	40 dB	90^0
$1000\omega_0$	$20LOG_{10}\left(\sqrt{\left({}^{1000\omega_0}/_{\omega_0}\right)^2 + 1}\right)$	60 dB	90^0



1. Factores cuadráticos $H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta j^{\omega}/_{\omega_n} + \left(j^{\omega}/_{\omega_n}\right)^2}$, $H(j\omega) = 1 + 2\zeta j\,^{\omega}/_{\omega_0} + \left(j\,^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2$



$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta j\,{}^{\omega}/_{\omega_0} + \left(j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}$$

$$H(j\omega) = \frac{1 + j0}{1 - \left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2 + j\,2\zeta\,{}^{\omega}/_{\omega_0}}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\,{}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\,{}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\left(1 - \left({}^{\omega_B}/_{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\,{}^{\omega_B}/_{\omega_0}\right)^2}$$

$$H(j\omega)dB = 20log_{10}(|H(j\omega)|)$$

$$H(j\omega)dB = 20log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\,{}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}}\right)$$

$$H(j\omega)dB = -20log_{10}\left(\sqrt{\left(1 - \left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\,{}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}\right)$$

Si $\omega \ll \omega_0$ $H(j\omega)dB = 0dB$

Si $\gg \omega_0$ $H(j\omega)dB = H(j\omega)dB = -40log_{10}\left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707$$

$$H(j\omega)dB = -20log_{10}(2\zeta)$$

Si $\omega = \omega_0 \;\; H(j\omega)dB = -3dB$

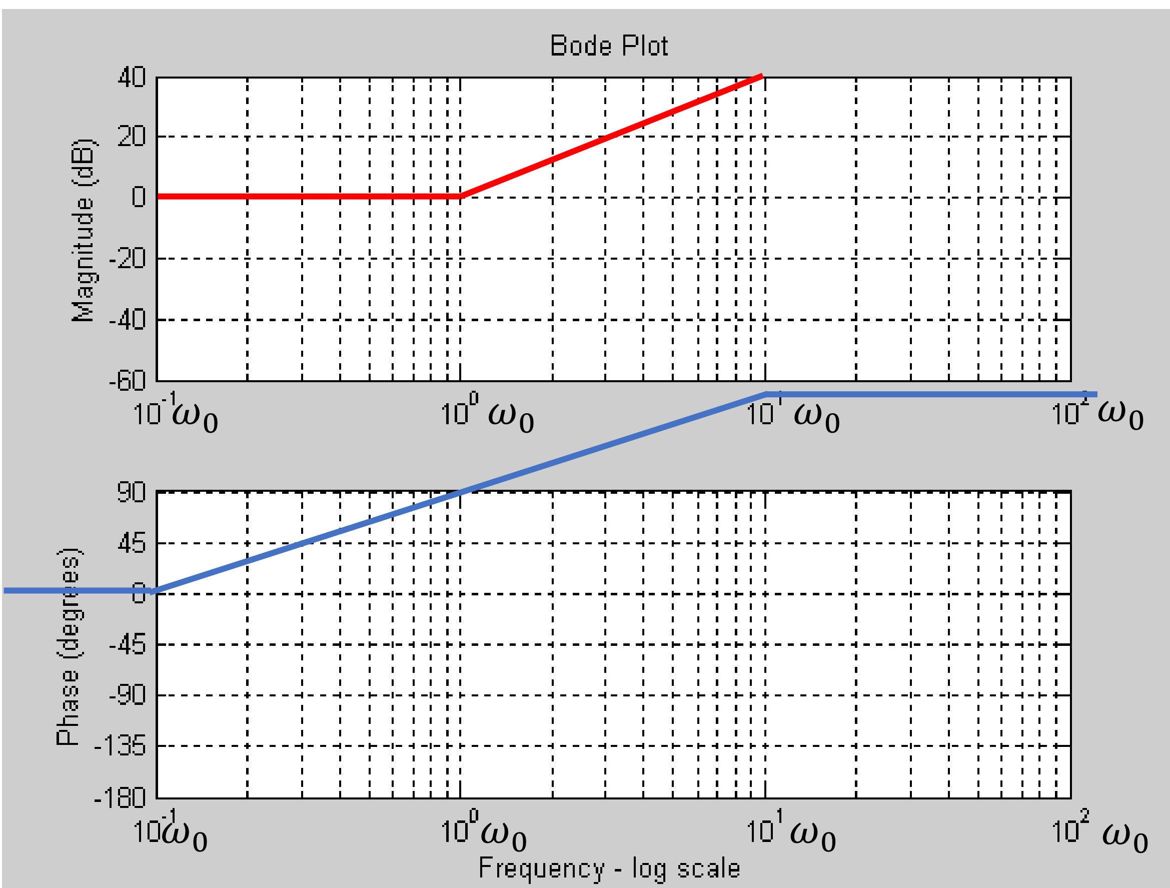
$$\angle H(j\omega) = tan^{-1}(0/1) - tan^{-1}\left(\frac{\zeta\, {}^{\omega}/_{\omega_0}}{1-\left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$$\angle H(j\omega) = -tan^{-1}\left(\frac{\zeta\, {}^{\omega}/_{\omega_0}}{1-\left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}\right)$$

Si $\omega \ll \omega_0 \;\; \phi = 0^o$

Si $\omega = \omega_0 \;\; \phi = -90^o$

Si $\gg \omega_0 \; \phi = -180^o$



$$H(j\omega) = 1 + 2\zeta j\,{}^{\omega}/_{\omega_0} + \left(j\,{}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2$$

$$H(j\omega)dB = 20log_{10}\left(\sqrt{\left(1\ - \left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2\right)^2 +\ \left(2\zeta\,{}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$$\angle H(j\omega) = tan^{-1}\left(\frac{\zeta\,{}^{\omega}/_{\omega_0}}{1\ - \left({}^{\omega}/_{\omega_0}\right)^2}\right)$$

Si $\omega \ll \omega_0\ \ \phi = 0^o$

Si $\omega = \omega_0\ \ \phi = 90^o$

Si $\gg \omega_0\ \phi = 180^o$

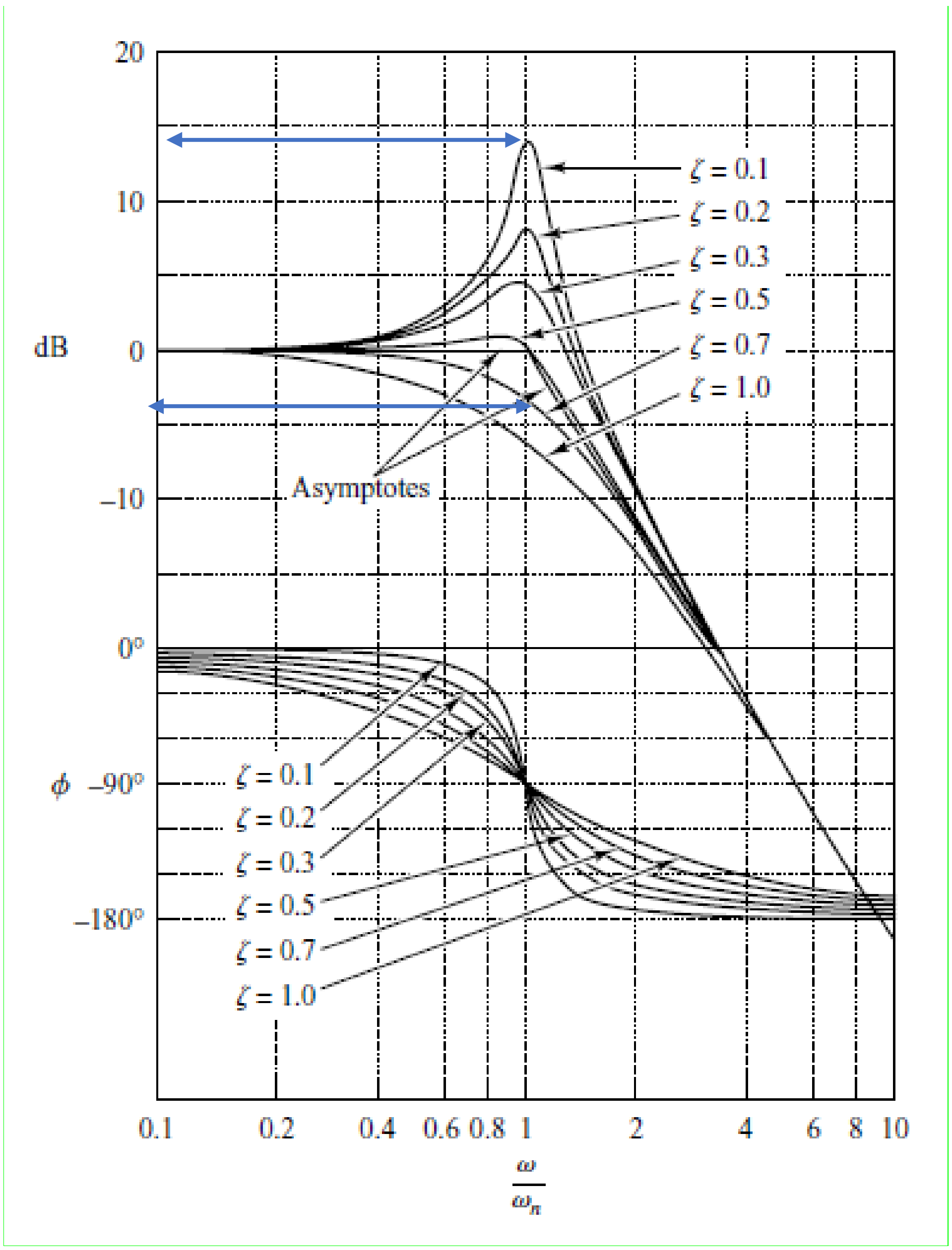
Prototipo de segundo orden en el dominio de la frecuencia.

Frecuencia de resonancia.

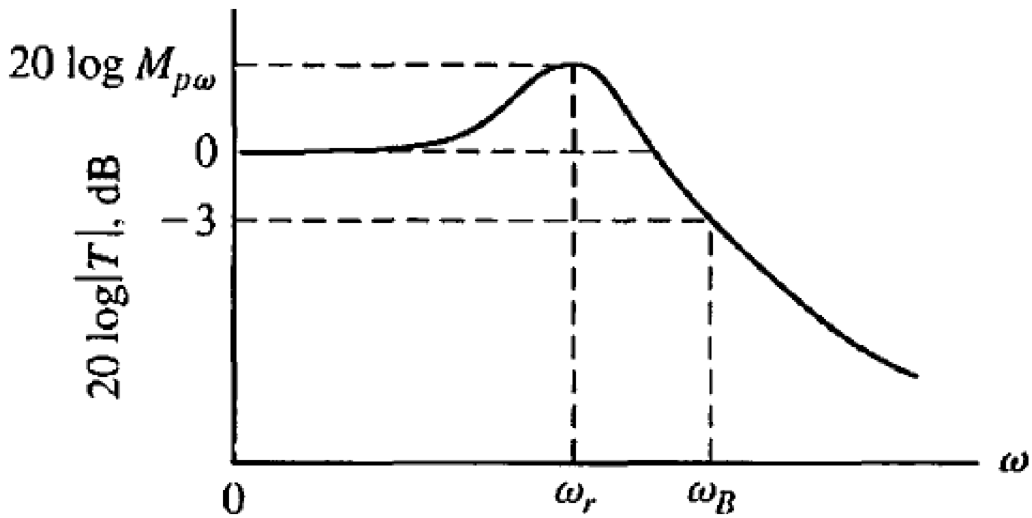
$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \quad \zeta < 0.7$$

La magnitud en la frecuencia de resonancia.

$$M_{pw} = |G(\omega_r)| = \left(2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)^{-1}$$



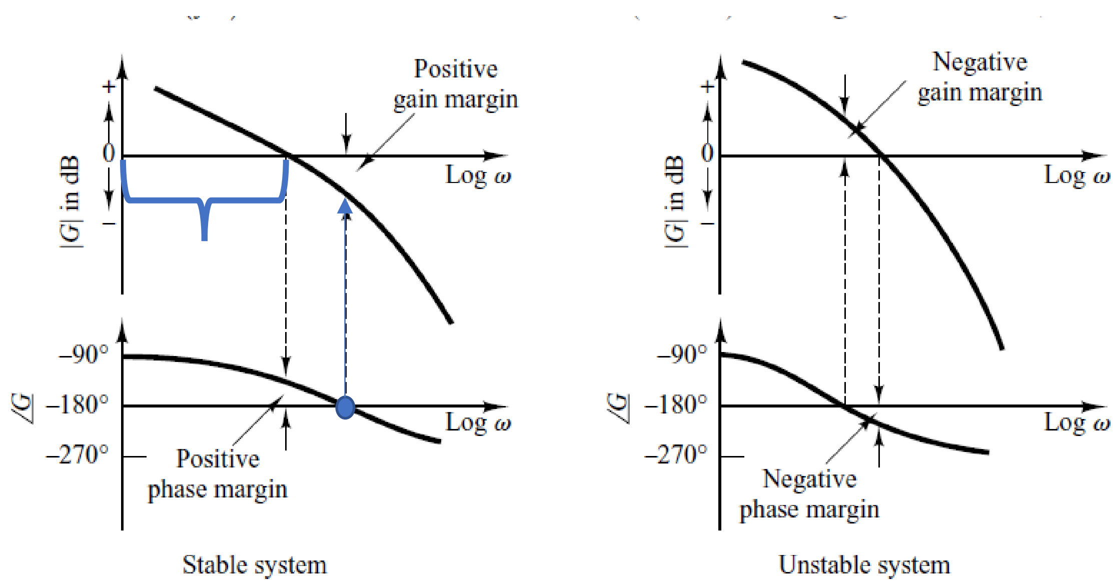
Medidas de la respuesta en la frecuencia



Frecuencia de resonancia se obtiene el máximo valor de la respuesta en frecuencia.

Ancho de banda es la frecuencia en donde la ganancia decae -3dB.

Margen de fase y margen de ganancia.



El margen de fase y margen de ganancia permiten determinar el grado de estabilidad de un sistema con retroalimentación a partir de los diagramas de bode.

El margen de fase es el ángulo que hace falta a G(s) para llegar a -180º y volver inestable el sistema en lazo cerrado cuando la ganancia es 0dB. Si la ganancia no cruza por 0dB ósea es inferior. El margen de fase será infinito.

Según Ogata. El margen de fase es la cantidad de atraso de la fase adicional en la frecuencia de corte con ganancia 0dB que hace falta para inestabilizar el sistema en lazo cerrado.

Margen de Ganancia. Es la ganancia cuando la fase cruza por -180º. Es el valor por el cual hay que multiplicar la ganancia (o sumar en dB) la función de transferencia G(s) para que el sistema en lazo cerrado sea inestable. Si la fase no cruza por cero el margen de ganancia será infinito.

Relación de las especificaciones en al dominio del tiempo y en la frecuencia.

$$\omega_{BW} = \omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}}$$

$$\omega_{BW} = \left(\frac{4}{\zeta t_s}\right)\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}}$$

$$\omega_{BW} \approx \omega_n(-1.19\zeta+1.85)$$

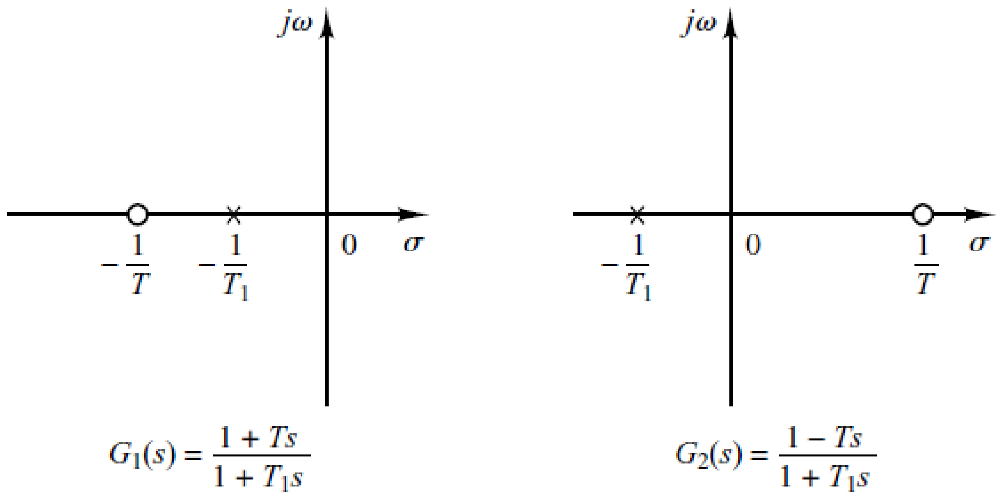
$$\phi_m = \tan^{-1}\left(2\zeta\left[\frac{1}{(4\zeta^4+1)^{1/2}-2\zeta^2}\right]^{1/2}\right). \qquad (9.57)$$

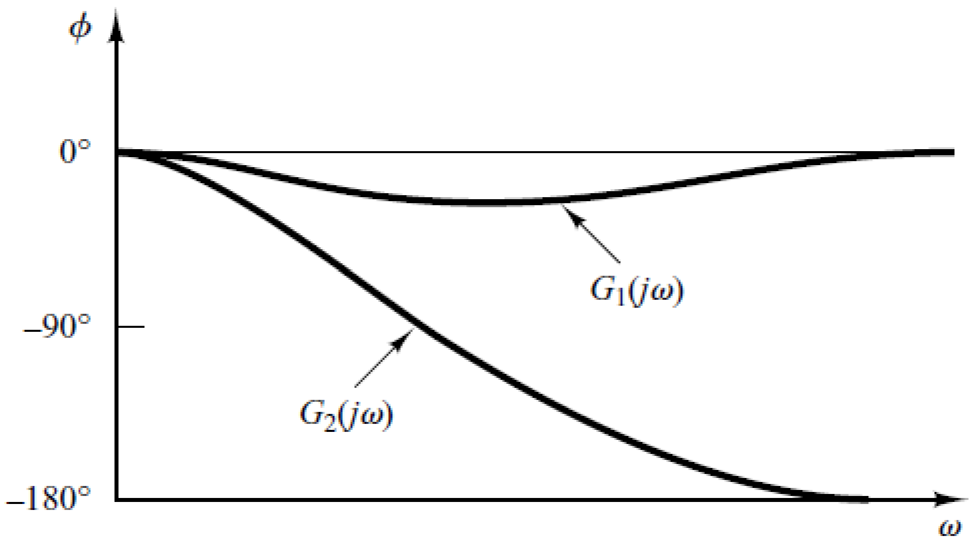
$$\phi_m = 100\zeta \quad 0 \le \zeta \le 0.7$$

Sistemas de fase mínima y no mínima

Sistemas de fase mínima: Es un sistema cuya función de transferencia no tiene polo y/o cero en el semiplano derecho del plano s.

Sistemas de fase NO mínima: Es un sistema cuya función de transferencia tiene polo y/o cero en el semiplano derecho del plano s.





Ejemplo: Hallar la función de transferencia sinusoidal en estado estacionario, la magnitud y la fase.

$$G(s) = \frac{1000}{(s^2 + s + 100)(s + 1)}$$

Graficas de respuesta en frecuencia de $G(j\omega)$

Representación de un número complejo

$z = x + jy$	Rectangular
$z = \|z\|\angle\theta$	Polar
$z = \|z\|e^{j\theta}$	Exponencial

Transformación entre coordenadas

$$|z| = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = 180 - tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\ si\ x < 0$$ -pi/2-pi/2

Atan2(x,y) -pi y pi

$$x = |z|\cos(\theta)$$

$$y = |z|\mathrm{sen}(\theta)$$

$$z = x + jy$$

$$z = |z|\cos(\theta) + j|z|\mathrm{sen}(\theta)$$

$$z = |z|(\cos(\theta) + j\,\mathrm{sen}(\theta))$$

$$z = |z|e^{j\theta}$$

Formula de Euler

$$(\cos(\theta) \pm j\,\mathrm{sen}(\theta)) = e^{\pm j\theta}$$

Ejemplos

Cartesiana o rectangulares

z=3+j4

Polares

$$\mathrm{z} = 5\angle\, 53^{o}$$

$$|z| = \sqrt[2]{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53^o$$

Propiedades de los números complejos

Suma y la resta (Rectangulares)

Suma: $$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$$

Resta: $$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$$

$$\mathrm{z1} = 3 + \mathrm{j}4$$

$$\mathrm{z2} = -5 + \mathrm{j}3$$

$$\mathrm{z1} + \mathrm{z2} = \overbrace{(3 + (-5))}^{\boldsymbol{Re}} + \mathrm{j}\,\overbrace{(4 + 3)}^{\boldsymbol{Im}}$$

$$\mathrm{Z1} + \mathrm{Z2} = -2 + \mathrm{j}7$$

Multiplicación y división

(Coordenadas Polares)

Multiplicación: $$z_1 z_2 = r_1 r_2 \underline{/\phi_1 + \phi_2}$$

División: $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \underline{/\phi_1 - \phi_2}$$

$$\mathrm{z1} = 5\angle\, 53^o$$

$$Z2 = 5.83 \angle 149^{o}$$

Z1*Z2=(5)* (5.83)$\angle(53^{o} + 149^{o})$

Z1*Z2=29.25$\angle 202^{O}$

$$\frac{1}{z1} = \frac{1}{5}\angle - 53^{o}$$

$$z1^{*} = 3 - j4$$

Inverso: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\underline{/-\phi}$

Raíz cuadrada: $\sqrt{z} = \sqrt{r}\,\underline{/\phi/2}$

Conjugado complejo: $z^{*} = x - jy = r\underline{/-\phi} = re^{-j\phi}$

$$\frac{1}{j} = -j$$

$$\frac{1}{j}\frac{j}{j} = \frac{j}{j^{2}} = \frac{j}{\left(\sqrt{-1}\right)^{2}} = \frac{j}{-1} = -j$$

Apuntes de clase semana 9
Andrés castro