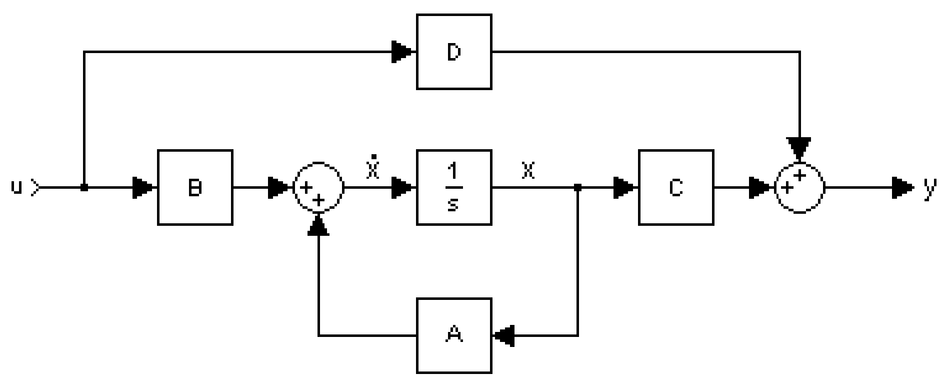
Notas de clase semana 6

Andrés Castro

1. Control moderno.
2. Espacio de estados.
3. Forma canónica controlable
4. Forma canónica observable
5. Ejemplos forma canónica controlable y observable.
6. Controlabilidad.
7. Observabilidad.
8. Control retroalimentación de estados.
9. Servosistema tipo 1 para entrada escalón.
10. Observador de orden completo.

La teoría de control moderna se basa en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de n ecuaciones diferenciales de primer orden, que se expresan en una ecuación diferencial **matricial** de primer orden o ecuación diferencial de estados.



$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \cdots + b_{1m}u_m,$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + \cdots + b_{2m}u_m,$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \cdots + b_{nm}u_m,$$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}\cdots b_{1m} \\ \vdots \qquad \vdots \\ b_{n1}\cdots b_{nm} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}.$$

El uso de notación matricial simplifica la representación matemática de los sistemas de control. Además, un sistema de control moderno posee varias entradas y varias salidas que se relacionan entre sí. Y para analizar este tipo de sistemas, es esencial reducir la complejidad matemática y el análisis a sistemas de ecuaciones diferenciales escalares de primer orden.

Vector de estados

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

Ecuaciones de estado

$$\boxed{\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}.}$$

Ecuación de salida

$$\boxed{\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u},}$$

$x\ Vector\ de\ estados$

y *Vector de salida*

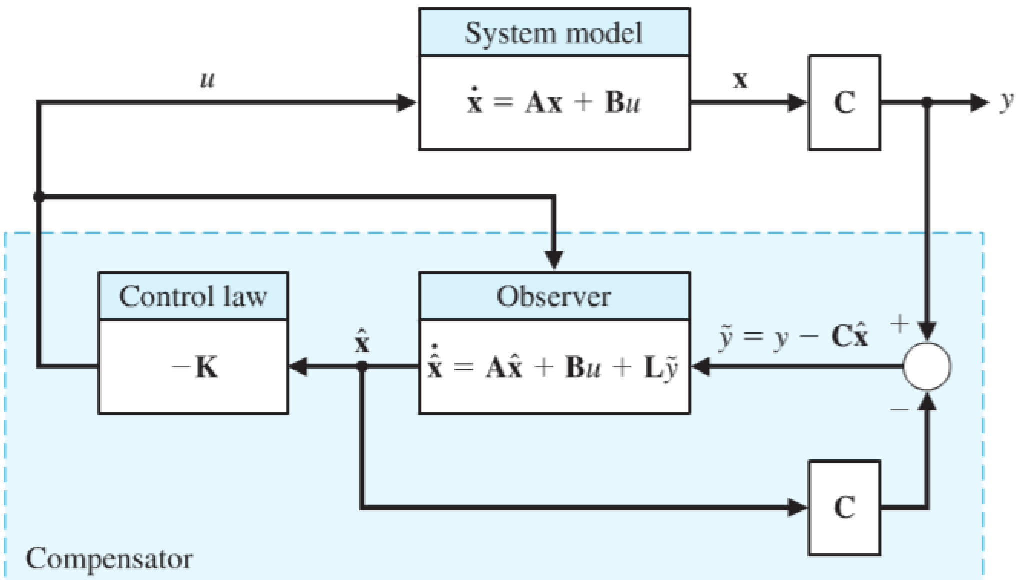
u *Vector de entrada u control*

A *Matriz de estados*

B *Matriz de entrada*

C *Matriz de salida*

D *matriz de transmisión directa*



Sistema de control moderno

Forma canónica controlable (Función de transferencia propia)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[b_n - a_n b_0 \;\vdots\; b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; b_1 - a_1 b_0\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Esta realización del espacio de estado se denomina forma canónica controlable porque garantiza que el modelo resultante es controlable (es decir, dado que el control entra en una cadena de integradores, puede modificar todos y cada uno de los estados). Si un sistema no es controlable, entonces no es posible expresarlo en esta forma canónica.

Forma 1

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 & \dots & b_{n-1} - a_{n-1} b_0 & b_n - a_n b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Forma canónica observable

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Esta disposición se denomina forma canónica observable y, el modelo resultante es necesariamente observable (esto es, al proceder la salida de una cadena de integradores, su valor se ve afectado por todos y cada uno de los estados). Un sistema no observable no puede ponerse en esta forma.

$$\text{Transfer function} = G(s) = \left.\frac{\mathscr{L}[\text{output}]}{\mathscr{L}[\text{input}]}\right|_{\text{zero initial conditions}}$$

$$= \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

Ejemplo

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$$a_0 = 1 \;\; a_1 = 3 \;\; a_2 = 2 \;\; b_0 = 0 \;\; b_1 = 1 \; b_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \left[b_n - a_n b_0 \;\vdots\; b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; b_1 - a_1 b_0 \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Controllable Canonical Form:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

$a_0 = 1 \;\; a_1 = 3 \;\; a_2 = 2 \;\; b_0 = 0 \;\; b_1 = 1 \; b_2 = 3$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$

Observable Canonical Form:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+6}{s^2+5s+6} = \frac{s+6}{(s+3)(s+2)}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1}s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

$b_0 = 0 \quad a_0 = 1$

$b_1 = 1 \quad a_1 = 5$

$b_2 = 6 \quad a_2 = 6$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\left[b_n - a_n b_0 \;\vdots\; b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \;\vdots\; \cdots \;\vdots\; b_1 - a_1 b_0 \right]$$

$$C = [6 \quad 1]$$

Forma canónica controlable forma 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Forma observable forma 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Forma canónica controlable forma 2

$$\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6u$$

$$Y(s)(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = 6U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Forma observable forma 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ks + b}{s^2 + as + b}$$

Forma canónica controlable forma 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b & K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Forma observable forma 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ 1 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ K \end{bmatrix} u$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Forma canónica controlable forma 2

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3s^3 + 25s^2 + 72s + 80}{s^4 + 8s^3 + 40s^2 + 96s + 80}$$

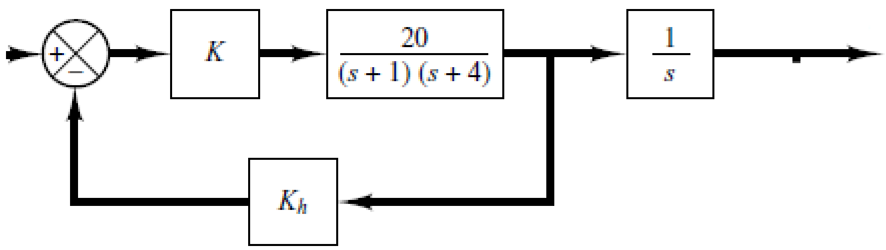
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -80 & -96 & -40 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 80 & 72 & 25 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Forma observable forma 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -80 \\ 0 & 1 & 0 & -96 \\ 0 & 0 & 1 & -40 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 80 \\ 72 \\ 25 \\ 3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$



$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{20K}{(s^3 + 5s^2 + 20KK_h s)}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -20KK_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [20\text{K} \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Forma observable forma 2

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -20KK_h \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Eigenvalores de una matriz.

Los valores propios o eigenvalores de la matriz de estado A son los polos del polinomio característico del sistema. Además, el principal objetivo en el diseño, de un sistema de control por retroalimentación de estados, es ubicar los eigenvalores en lazo cerrado en el plano complejo.

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

$$\text{G} = \text{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}B = 0$$

Ejemplo cálculo de los autovalores

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$\left|s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix}s & -1\\ 6 & s+5\end{bmatrix}\right| = s(s+5) + 6 = 0$$

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

$$(s+2)(s+3) = 0$$

$$p_1 = -2$$

$$p_2 = -3$$

Forma canónica observable

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -6\\ 1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$C = \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = 0$$

$$\left|s\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & -6\\ 1 & -5\end{bmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & -6\\ 1 & -5\end{bmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{bmatrix}s & 6\\ -1 & s+5\end{bmatrix}\right| = s(s+5) - (-1)(6) = 0$$

$$s^2 + 5s + 6 = 0$$

$$(s+2)(s+3) = 0$$

$$p_1 = -2$$

$$p_2 = -3$$

Para diseñar un sistema de control en el espacio de estados primero debemos determinar si el sistema es controlable y observable. De tal manera, que todos sus estados sean retroalimentados como ley de control.

Controlabilidad

Un sistema es **completamente controlable** si existe un control sin restricciones $u(t)$ que pueda llevar al sistema desde cualquier estado inicial $\boldsymbol{xo(t)}$ a una localización $\boldsymbol{x(t)}$ en un tiempo finito $t_0 \leq t \leq T$.

$$P_c = [B\ AB\ A^2B \dots\ A^{n-1}B]$$

Si el rango de la **matriz de controlabilidad** P_c es igual a el número de columnas o filas nxn el sistema es controlable. (el sistema es linealmente independiente).

La matriz de controlabilidad se escribe en términos de $A\ y\ B$

$$rank(P_c) = n$$

La prueba del determinante se hace con el determinante. Si el determinante es diferente de cero el sistema es controlable.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ 25 \end{bmatrix}$$

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 1 & -6 & 25 \end{bmatrix}$$

$$|P_c| = -1\ el\ sistema\ es\ controlable$$

Observabilidad

Un sistema es observable si y solo si existe un tiempo finito T tal que el estado $\boldsymbol{x(o)}$ se puede determinar a partir de las observaciones de $\boldsymbol{y(t)}$ dado el control $u(t)$ en un tiempo $t_0 \leq t \leq T$.

El sistema es **completamente observable** cuando el determinante de la matriz de observabilidad P_o es diferente de cero.

$$P_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$C = \quad [1 \quad 0 \quad 0]$$

$$[1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -7 \end{bmatrix}$$

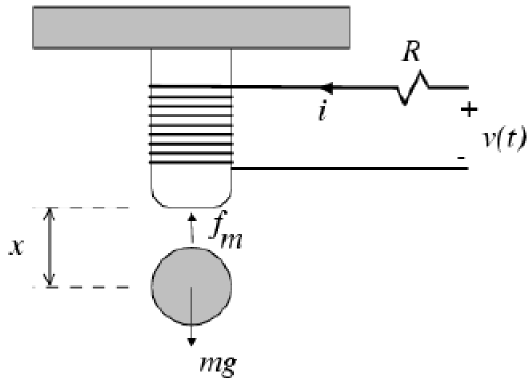
$$CA = [0 \quad 1 \quad 0]$$

$$[1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & -7 \end{bmatrix}^2$$

$$CA^2 = [0 \quad 0 \quad 1]$$

$$P_o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|P_o| = 1 \; El\ sistema\ es\ observable$$



Ejemplo 1

Definir las variables de estado. $x_1 = y$; $x_2 = \dot{y}$; $x_3 = i$ $v(t) = u$

$$L\frac{di}{dt} = -Ri + v(t)$$

$$m\frac{d^2y}{dx^2} = mg - f_m = mg - \frac{ci^2}{y}$$

Sitema NO lineal en variables de estado.

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = g - \frac{c\,{x_3}^2}{m\,x_1}$$

$$\dot{x_3} = -\frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u$$

Puntos de operación

$$0 = \bar{X}_2$$

$$0.1m = \bar{X}_1$$

$$0 = g - \frac{c\,{x_3}^2}{m\,\bar{X}_1}$$

$$\bar{X}_3 = \sqrt{\frac{g * m * \bar{X}_1}{c}}$$

$$0 = -\frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u$$

$$\bar{U} = R\bar{X}_3$$

Espacio de estados.

$$\dot{x_1} = x_2$$

$$\dot{x_2} = g - \frac{c\, {x_3}^2}{m\, x_1}$$

$$\dot{x_3} = -\frac{R}{L} x_3 + \frac{1}{L} u$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{c\, {x_3}^2}{m\, {x_1}^2} & 0 & -\frac{2c\, x_3}{m\, x_1} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}_{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3, \bar{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{c\, {\bar{X}_3}^2}{m\, {\bar{X}_1}^2} & 0 & -\frac{2c\, \bar{X}_3}{m\, \bar{X}_1} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Realizar la prueba de controlabilidad y observavilidad.

Si es controlable y observable para x1.

Diseño del regulador

$$u = -[K1 \;\; K2 \; K3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\det\big(sI - (A - BK)\big) = PD$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 98 & 0 & -62.6 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$(A - BK)$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 98 & 0 & -62.6 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} [K1 \;\; K2 \; K3]$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 98 & 0 & -62.6 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10K1 & 10K2 & 10K3 \end{bmatrix}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 98 & 0 & -62.6 \\ -10K1 & -10K2 & -100 - 10K3 \end{bmatrix}$$

$$sI - (A - BK)$$

$$= s\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 98 & 0 & -62.6 \\ -10K1 & -10K2 & -100 - 10K3 \end{bmatrix}$$

$$sI - (A - BK) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 98 & 0 & -62.6 \\ -10K1 & -10K2 & -100 - 10K3 \end{bmatrix}$$

$$sI - (A - BK) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 98 & 0 & -62.6 \\ -10K1 & -10K2 & -100 - 10K3 \end{bmatrix}$$

$$sI - (A - BK) = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ -98 & s & 62.6 \\ 10K1 & 10K2 & s + 100 + 10K3 \end{bmatrix}$$

Polinomio Característico

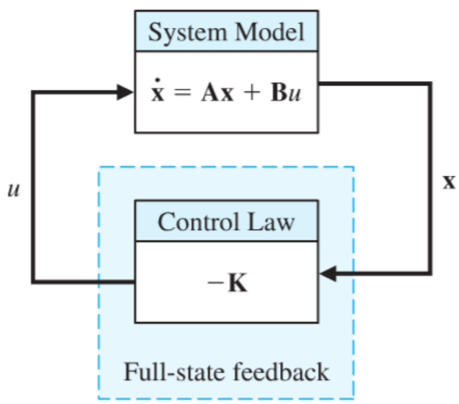
$$\det(sI - (A - BK))$$

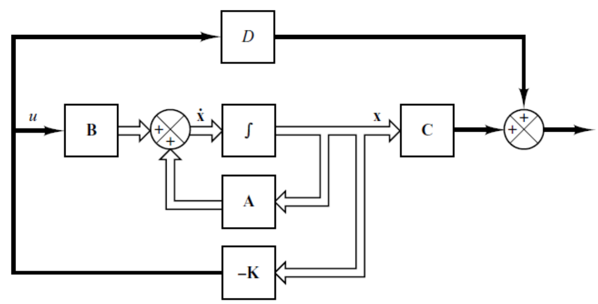
$$s^3 + (10K3 + 100)s^2 + (-626K2 - 98)s - 626.0K1 - 980.0K3 - 9800 = PD$$

$$PD = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2)(s + \beta\zeta\omega_n)$$

CONTINUAR… Hallar K1,K2 ,K3 y Simular.

1. Control retroalimentación completa del estado (regulador)





Ley de control

$$u = -\boldsymbol{Kx}$$

$$u = -[K1\ \ K2\ \ \ldots\ \ Kn]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$u = -K_1x_1 - K_2x_2 \ldots - K_nx_n$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$u = -Kx$$

$$\dot{x} = Ax + B(-Kx)$$

$$\dot{x} = Ax - BKx$$

$$\dot{x} = (A - BK)x$$

$$\det\big(sI - (A - BK)\big) = PD$$

Ejemplo

Método de sustitución directa

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K1 & K2 & K3 \end{bmatrix}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K1 & K2 & K3 \end{bmatrix}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 - K1 & -3 - K2 & -5 - K3 \end{bmatrix}$$

$$s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 - K1 & -3 - K2 & -5 - K3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 - K1 & -3 - K2 & -5 - K3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 2 + K1 & 3 + K2 & s + 5 + K3 \end{vmatrix}$$

Polinomio característico en lazo cerrado

$$s^3 + (5 + K3)s^2 + (3 + K2)s + (2 + K1)$$

$$\det\big(sI - (A - BK)\big)$$

$$s^3 + (5 + K3)s^2 + (3 + K2)s + (2 + K1)$$

$$\zeta = 0.8\ T_s = 1$$

$$PD = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n{}^2)(s + \beta\zeta\omega_n)$$

$$PD = s^3 + 14.4s^2 + 82.1s + 172.8$$

$$(5 + K3) = 14.4$$

$$(3 + K2) = 82.1$$

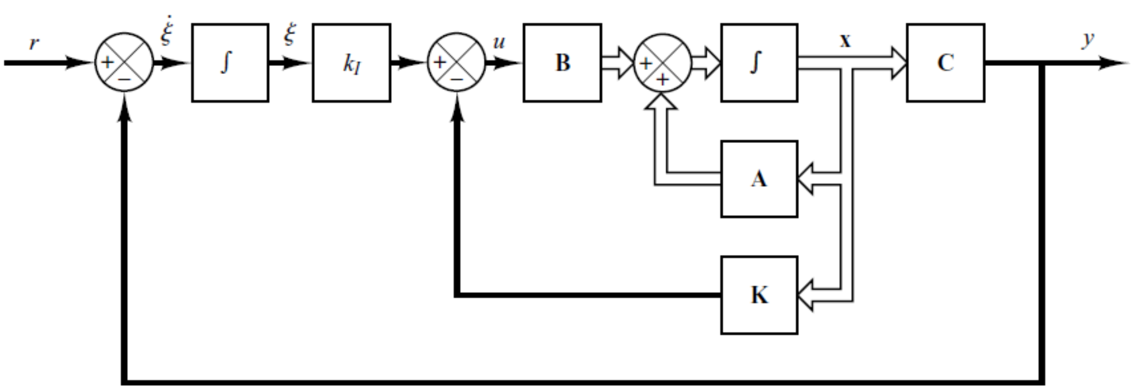
$$(2 + K1) = 172.8$$

$$K1 = 170.8$$

$$K2 = 79.1$$

$$K3 = 9.4$$

Obtener el espacio de estados del siguiente sistema.



$$\xi\ Salida\ del\ integrador, Variable\ de\ estado\ del\ sistema\ escalar$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}$$

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{Kx} + K_I\xi$$

$$\dot{\xi} = r - y$$

$$\dot{\xi} = r - \boldsymbol{Cx}$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{B}(-\boldsymbol{Kx} + K_I\xi)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{BKx} + \boldsymbol{B}\,K_I\xi$$

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\,K_I\xi$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} & \boldsymbol{B}\,K_I \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ 1 \end{bmatrix} r$$

Polinomio característico en lazo cerrado

$$\det\left(sI - \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK} & \boldsymbol{B}\,K_I \\ -\boldsymbol{C} & 0 \end{bmatrix}\right) = PD$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BK}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K1 & K2 & K3 \end{bmatrix}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ K1 & K2 & K3 \end{bmatrix}$$

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 - K1 & -3 - K2 & -5 - K3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A-BK} & \boldsymbol{B}\,K_I \\ \boldsymbol{-C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2-K1 & -3-K2 & -5-K3 & K_I \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$sI - \begin{bmatrix} \boldsymbol{A-BK} & \boldsymbol{B}\,K_I \\ \boldsymbol{-C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2-K1 & -3-K2 & -5-K3 & K_I \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomio característico en lazo cerrado

$$\det\left(\begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2-K1 & -3-K2 & -5-K3 & K_I \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$s^4 + (K3+5)s^3 + (K2+3)s^2 + (K1+2)s + KI = PD$$

$$\zeta = 0.9$$

$$T_2 = 7seg$$

$$\beta = 10$$

$$PD = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2)(s + \beta\zeta\omega_n)(s + \beta\zeta\omega_n)$$

$$PD = s^4 + 12.6s^3 + 46.1s^2 + 41.9s + 13.2$$

$$(K3+5) = 12.6$$

$$(K2+3) = 46.1$$

$$(K1+2) = 41.9$$

$$KI = 13.2$$

$$K3 = 7.6$$

$$K2 = 43.1$$

$$K1 = 39.95$$

$$KI = 13.2$$

Notas de clase semana 6
Andrés Castro