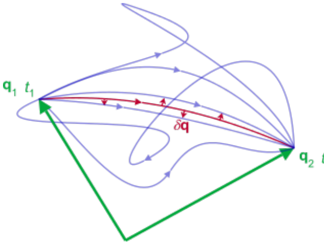
Ecuaciones de movimiento Euler-Lagrange

Andrés Mauricio Castro, M.Sc.

Introducción

La mecánica lagrangiana es una formulación alternativa a la mecánica Newtoniana. En donde, las ecuaciones matemáticas que describen la evolución temporal de un sistema físico se obtienen de cantidades escalares (energía cinética y potencial) y no de cantidades vectoriales (aceleración, fuerza). Lo cual es útil para resolver complejos problemas mecánicos eficientemente en contraste a una formulación newtoniana. A continuación se presenta el procedimiento para derivar las ecuaciones de movimiento de un sistema.



- El primer paso para deducir las ecuaciones de movimiento es definir el conjunto de coordenadas generalizadas del sistema físico $q_1, q_1, ..., q_N$. Estas se definen como las variables mínimas y necesarias para describir completamente el sistema.
- Luego, el lagrangiano del sistema se halla como la resta entre la energía cinética T y la energía potencial U.

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - U \; (i = 1, 2, ..., N) \tag{1}$$

- Finalmente, la solución del sistema se obtiene resolviendo el conjunto de N ecuaciones diferenciales de segundo orden conocidas como ecuaciones de movimiento de Euler –Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{2}$$

- Si el sistema es no conservativo se debe plantear una función de disipación de Raylegh para modelar la energía que se disipa.

$$D = \frac{1}{2}\left(b_1 \dot{\delta_1}^2 + b_2 \dot{\delta_2}^2, ..., b_i \dot{\delta_i}^2\right) \tag{3}$$

  b_i es el coeficienete del i-enésimo amortigudor viscoso y $\dot{\delta_i}^2$ en la diferencia de velocidad a través del i-enésimo amortiguador viscoso.

- Agregar un tercer término a la ecuación de Euler –Lagrange, y si el sistema se somete a fuerzas de entrada en las coordenadas generalizadas, entonces la ecuacion de Euler –Lagrange se iguala a la fuerza de entrada.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_{i(t)} \tag{4}$$

Modelos Mecánicos.

Ejemplo 1

Derivar las ecuaciones que modelan el siguiente sistema mecánico empleando el método de Lagrange. Luego, verificar si el modelo es correcto aplicando las leyes de newton.

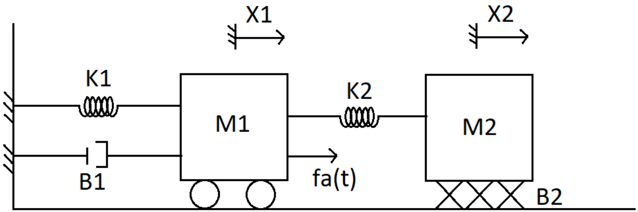


Figure 1: Modelo Mecánico 1

Coordenadas Generalizadas

En este caso las posiciones x1 y x2 de las masa M1 y M2 respectivamente son las coordenadas generalizadas y las ecuaciones de movimiento de Euler–Lagrange son:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = f_{a(t)} \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = 0 \tag{6}$$

Ahora hallamos el lagrangiano y la función de disipación ya que es un sistema no conservativo. Para esto, primero se debe calcular la energía cinética y potencia .

Lagrangiano

Energía cinética

$$T = \frac{1}{2}M_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x_2}^2 \tag{7}$$

Energía potencial

$$U = \frac{1}{2}k_1{x_1}^2 + \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 \tag{8}$$

Entonces el lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2}M_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x_2}^2 - \frac{1}{2}k_1{x_1}^2 - \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 \tag{9}$$

y funcion de disipación

$$D = \frac{1}{2}b_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}b_2\dot{x_2}^2 \tag{10}$$

A continuación se derivan cada uno de los términos de las ecuaciones de Euler–Lagrange

Euler-Lagrange sistemas no conservativos

Cálculos para la masa M1

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = M_1 \dot{x}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1 x_1 - k_2 \left(x_1 - x_2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = M_1 \ddot{x}_1 \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = B_1 \dot{x}_1$$

$$M_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 \left(x_1 - x_2\right) + B_1 \dot{x}_1 = f_{a(t)}$$

Ecuación de movimiento de la masa M1 es:

$$M_1 \ddot{x}_1 + B_1 \dot{x}_1 + \left(k_1 + k_2\right) x_1 - k_2 x_2 = f_{a(t)} \tag{11}$$

Cálculos para la masa M2

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = M_2\dot{x}_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = k_2\left(x_1 - x_2\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = M_2\ddot{x}_2 \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} = B_2\dot{x}_2$$

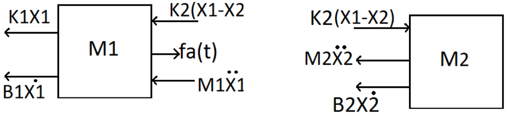
$$M_2\ddot{x}_2 - k_2\left(x_1 - x_2\right) + B_2\dot{x}_2 = 0$$

Ecuación de movimiento de la masa M2 es:

$$M_2\ddot{x}_2 + B_2\dot{x}_2 + k_2x_2 - k_2x_1 = 0 \tag{12}$$

Newton-Euler

Para comprobar los resultados hallamos las ecuaciones de movimiento del modelo mediante un planteamiento Newtoniano. El diagrama de cuerpo libre para M1 Y M2 es:



(a) Masa 1

(b) Masa 2

Figure 2: Diagramas de cuerpo libre

$$-k_1x_1 - B_1\dot{x}_1 - k_2(x_1 - x_2) - M_1\ddot{x}_1 + f_a = 0 \quad (13)$$

$$k_2(x_1 - x_2) - B_2\dot{x}_2 - M_2\ddot{x}_2 = 0 \quad (14)$$

Simplificando y reorganizando los términos de las dos ecuaciones anteriores obtenenemos las ecuaciones de movimiento del modelo.

$$M_1\ddot{x}_1 + B_1\dot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_a \tag{15}$$

$$M_2\ddot{x}_2 + B_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \tag{16}$$

El modelo matetático que se obtuvo por Newton-Euler y Euler-Lagrange es el mismo. Sin embargo, la ventaja de usar un enfoque lagrangiano se puede apreciar en sistemas más complejos.

Newton-Euler