Estimación y Procesos Estocásticos

Caceres Sebastian, Troncoso Camila
{1803245, 1803307}@unimilitar.edu.co
Profesor: Nelson Velasco

***Resumen*—En este documento .**

***Palabras clave*— Señal, filtro adaptativo, convolución, filtros FIR, filtros IIR, análisis de frecuencia.**

I. Competencias a desarrollar

- Habilidad para identificar, formular y resolver problemas complejos de ingeniería, aplicando principios de ingeniería, ciencias y matemáticas.
- Habilidad para comunicarse efectivamente ante un rango de audiencias.
- Capacidad de desarrollar y aplicar nuevos conocimientos según sea necesario, utilizando estrategias de aprendizaje apropiadas.

II. Desarrollo ejercicios prácticos.

Investigue sobre la teoría de la estimación. Busque su definición, cuáles son sus aplicaciones y mencione cuáles estrategias o métodos emplea comúnmente. Describa cómo la teoría de la estimación es aplicada en:

● **Radar y/o Sonar:** Este dispositivo sirve para encontrar la ubicación relativa de un objeto respecto al objeto que emite la señal de radar, este emite pulsos y espera su eco para determinar la presencia de un objeto y la distancia a la que se encuentra; debido a que las ondas se transmiten por un medio físico y muchas veces el radar debe ubicar objetos a distancias largas, las señales de eco son muy susceptibles al ruido; la estimación se utiliza para eliminar el ruido del medio y determinar la correcta medida del tiempo de rebote de la señal.

● **Reconocimiento de lenguaje hablado (fonemas):** El reconocimiento de voz se realiza analizando una señal de entrada que es comparada con distintos patrones para extraer la información de esta; para este fin muchas veces se utilizan inteligencias artificiales para que el sistema de reconocimiento sea capaz de adaptarse a los patrones de voz de su usuario particular; en este caso también el ruido juega un papel muy importante, debido a que la cantidad de sonidos dentro del espectro audible que podemos encontrar en casi todos los espacios; para eliminar estos factores se utiliza una herramienta llamada cancelación activa de ruido, pero para interpretar de manera correcta la voz de una persona también se debe estimar la entrada de voz con ayuda de patrones ya conocidos de la voz humana.

Investigue los siguientes conceptos básicos:

● **Ruido y tipos de ruido:** Se considera como toda señal no deseada que se mezcla con una señal de interés, la cual se debe transmitir.

Ruido binario o impulsivo: Es el ruido que se puede encontrar en las señales debido a errores en los sistemas de medición o adquisición de datos, lo que causa “spikes” (picos).
Ruido multiplicativo: Se debe a interferencias constructivas o destructivas en la energía que puede afectar ciertas características de las ondas, como su longitud; dentro de estas interferencias se encuentran la superposición y reflexión de distintas ondas.

● **Sesgo de un estimador (Bias);** Es la diferencia entre el valor esperado y el valor real de la variable que se está estimando; es deseable que el sesgo sea lo menor posible, y el caso ideal es que el sesgo sea 0.

● **Varianza de un estimador (Variance):** La varianza es una medida de dispersión de datos que se mide respecto a su media o tendencia central; en el caso de un estimador, entre más pequeña sea su varianza significa que es más precisa y eficiente.

● **Estimador de mínima varianza (Minimum variance estimator):** Este estimador puede ser sesgado o sin sesgo (invariante), pero se caracteriza por tener una varianza mínima que le permite tener una fuerte consistencia y precisión en la estimación, esto se logra cuando la función de estimación es muy parecida a la función del parámetro que se está estimando.

● **Estimador sin sesgo (Unbiased estimator):** Este estimador no tiene varianza ni error en la estimación debido a que el valor estimado y el real son el mismo, esto sucede cuando la función de estimación y la función del parámetro son exactamente iguales.

Responda las siguientes preguntas:

●¿Qué diferencias existen entre la teoría de estimación clásica (frecuentista) y la teoría de estimación bayesiana?

La principal diferencia entre estas dos teorías es la interpretación del concepto de probabilidad, la estimación frecuentista se basa en la elección de parámetros que maximizan la probabilidad de observar los datos, mientras que la estimación bayesiana se basa en tomar los parámetros como variables aleatorias cuya distribución de probabilidad puede ser estudiada.

● **¿Qué es el teorema de Bayes?**

Es un teorema de probabilidad que expresa la probabilidad condicional de un evento A dado otro B en términos de la probabilidad condicional de un evento B dado otro A y la distribución de probabilidad de solo A; esto significa que se relacionan eventos causales para determinar su probabilidad.

● **Describa cómo el teorema de bayes se aplica a la teoría de estimación de señales.**

Debido a que dentro de la transmisión de señales podemos encontrar tanto la señal deseada como distintas interferencias, se puede decir que la señal y el ruido dentro de esta están relacionadas de manera que se pueden estimar los valores de la señal; dentro de la estimación bayesiana se consideran los parámetros como variables aleatorias a las que se les asigna una distribución de probabilidad antes de ser muestreados.

● **¿Cómo se define el concepto de estimador frecuentista?**

El estimador frecuentista permite determinar las propiedades de un conjunto de datos utilizando distintos datos estadísticos, esto permite calcular medidas de tendencia central, distribuciones, intervalos de confianza, entre otros.

● **¿Qué es el estimador de Máxima Verosimilitud (MLE)?, ¿Cómo se aplica al problema de estimación de parámetros o señales?**

● **¿Cómo se define el concepto de estimador bayesiano?**

Es un estimador que a diferencia del frecuentista utiliza distintos datos estadísticos para determinar una distribución de probabilidad de un dato antes de que este sea conocido (muestreado).

● **¿Qué es un Apriori o prior (conocimiento previo)?**

En el caso de los estimadores bayesianos prior se define como una inferencia realizada antes de muestrear el

siguiente dato correspondiente, en los estimadores es posible que la exactitud de este valor va mejorando a lo largo del tiempo debido a distintos métodos de "aprendizaje".

● **¿Cómo se obtiene o genera un Apriori?**

Estos datos son generalmente obtenidos de funciones de densidad que indican los valores que tienen una probabilidad mas alta de ser correctos.

● **¿Que es el estimador de Maximum A Posteriori (MAP)?, ¿Cómo se aplica al problema de estimación de parámetros o señales?.**

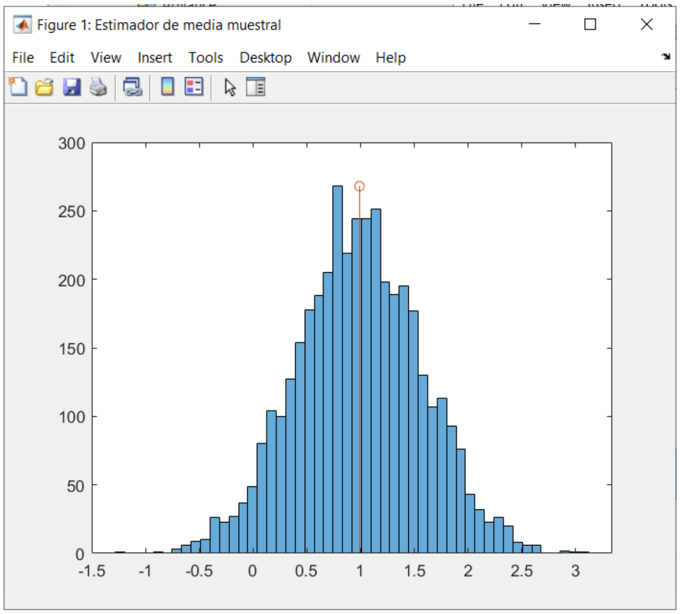
En la estimación bayesiana, un MAP es un estimador estadístico cuya predicción a priori es igual al dato muestreado posteriormente a la predicción.

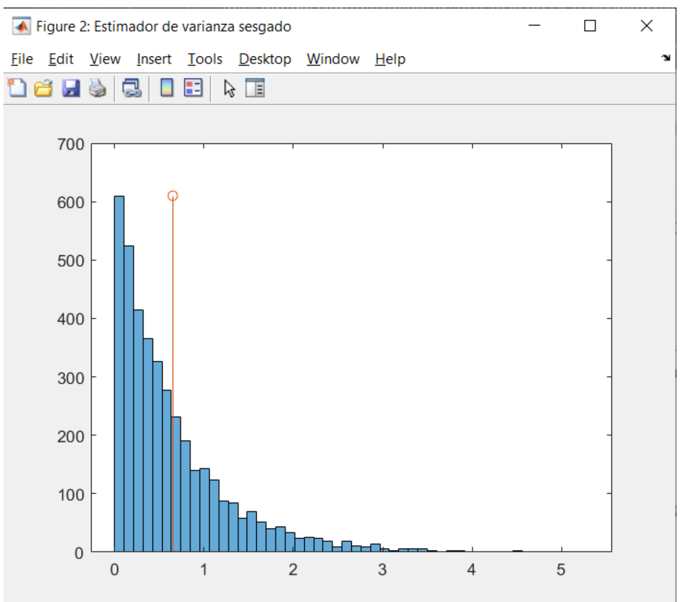
EJERCICIO PRÁCTICO:

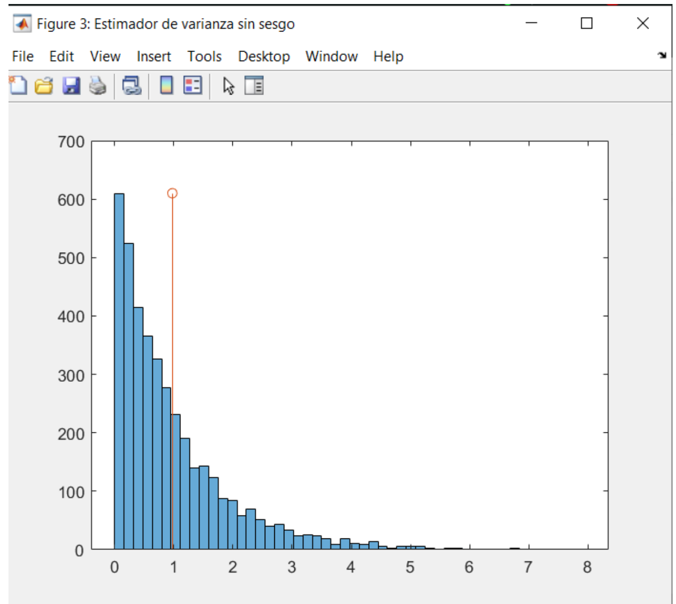
Ejercicio 1:

```
%Estimadores con sesgo y sin sesgo
m=1;
s=1;
N=4000;
P=3;
%Generando observaciones
x=normrnd(m,sqrt(s),N,P);
%Calculando estimador de media muestral
m_h=mean(x,2);
media=mean(m_h)
%Histograma de estimador de media muestral
figure('Name','Estimador de media muestral')
h1=histogram(m_h,50);
hold on
stem(mean(m_h),max(h1.Values))
hold off
%Estimador de varianza sesgado
s_b=var(x,1,2);
var_sesgo=mean(s_b)
%Histograma de varianza sesgado
figure('Name','Estimador de varianza sesgado')
h2=histogram(s_b,50);
hold on
stem(mean(s_b),max(h2.Values))
hold off
%Estimador de varianza insesgado
s_u=var(x,0,2);
var_unses=mean(s_u)
%Histograma de varianza sin sesgo
figure('Name','Estimador de varianza sin sesgo')
h3=histogram(s_u,50);
hold on
stem(mean(s_u),max(h3.Values))
hold off
```

Observe, ejecute y comprenda su funcionamiento. Compruebe las características que se mencionan en los videos.



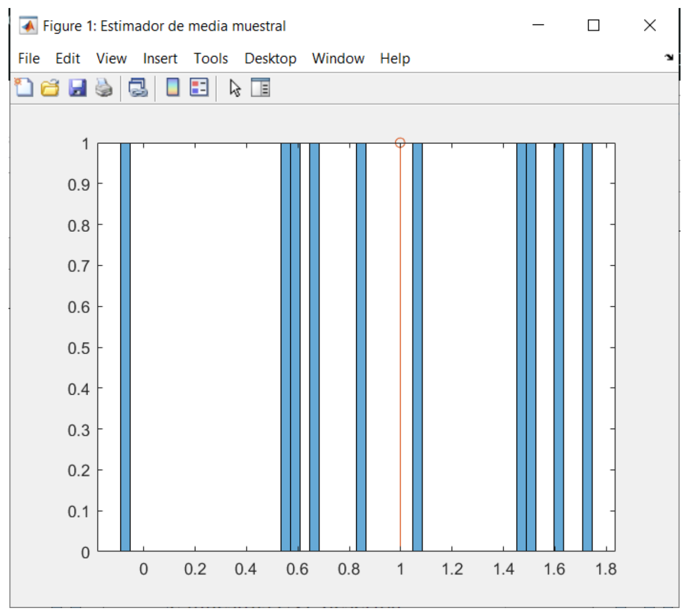




Repita nuevamente el experimento haciendo los siguiente ajustes:

● Haga pruebas variando el número de muestras (N), describa cómo cambian las características del estimador.

N=10



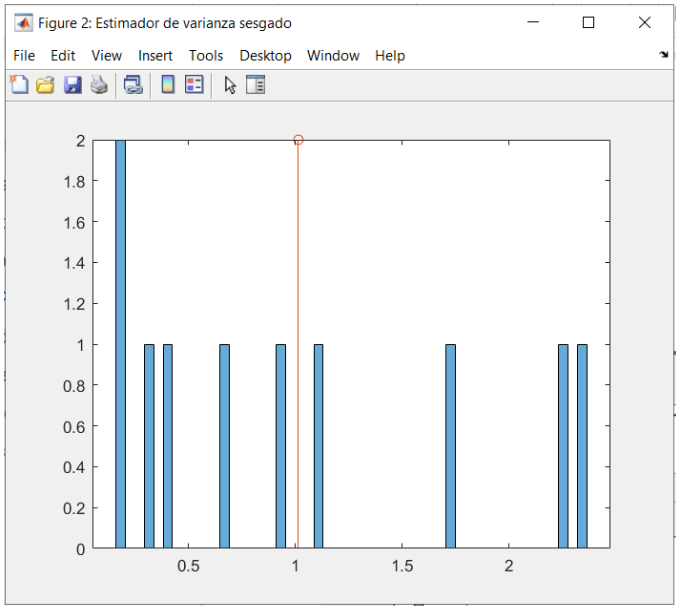


Figure 2: Estimador de varianza sesgado
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5
2

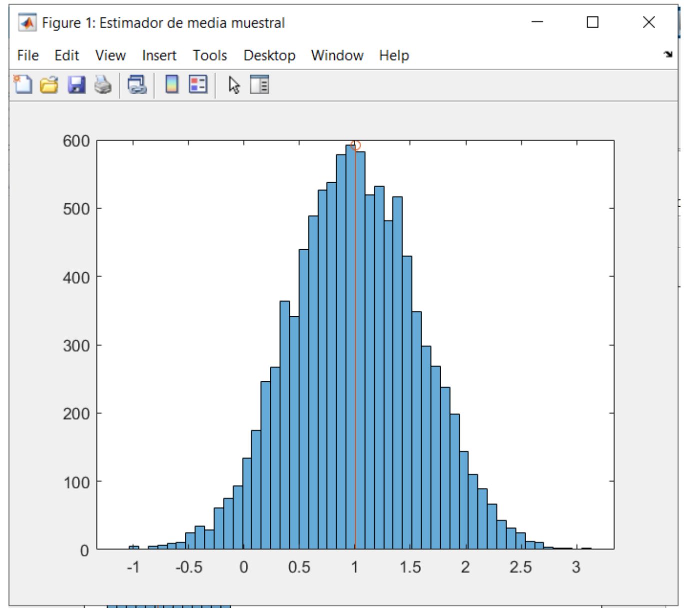


Figure 1: Estimador de media muestral
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
600
500
400
300
200
100
0
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

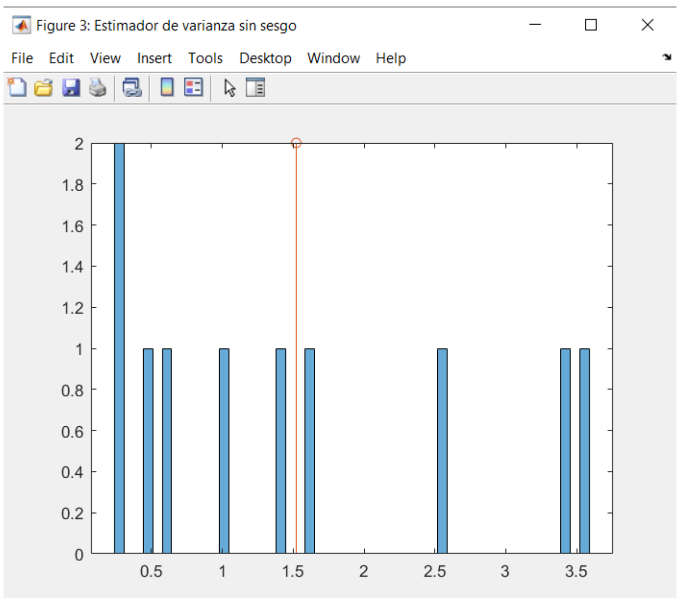


Figure 3: Estimador de varianza sin sesgo
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

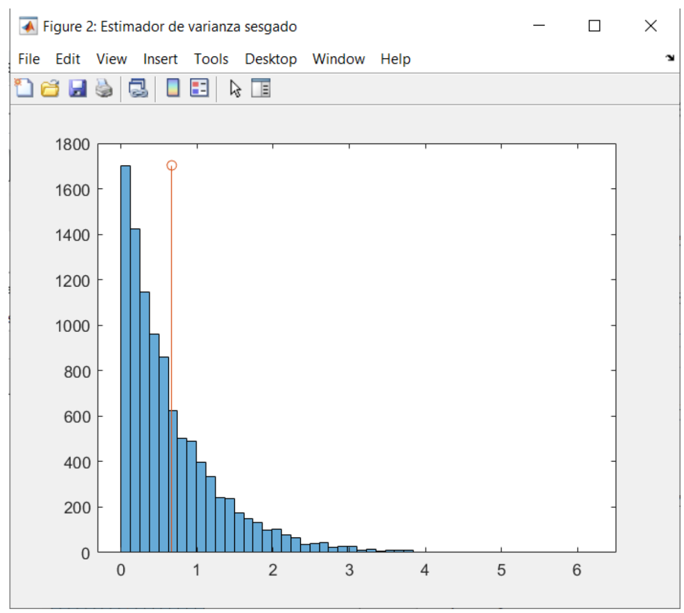
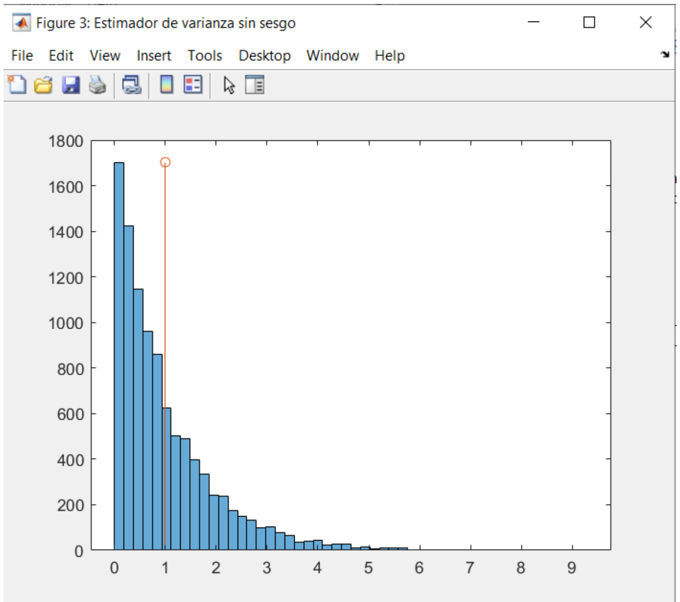
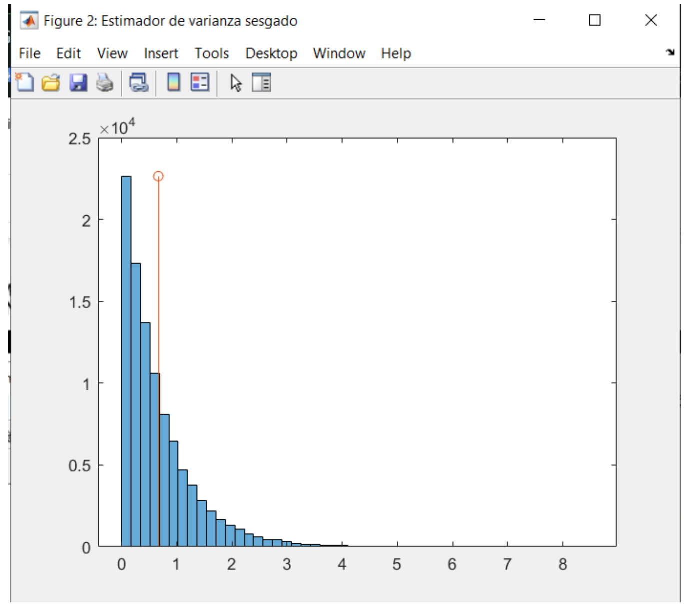


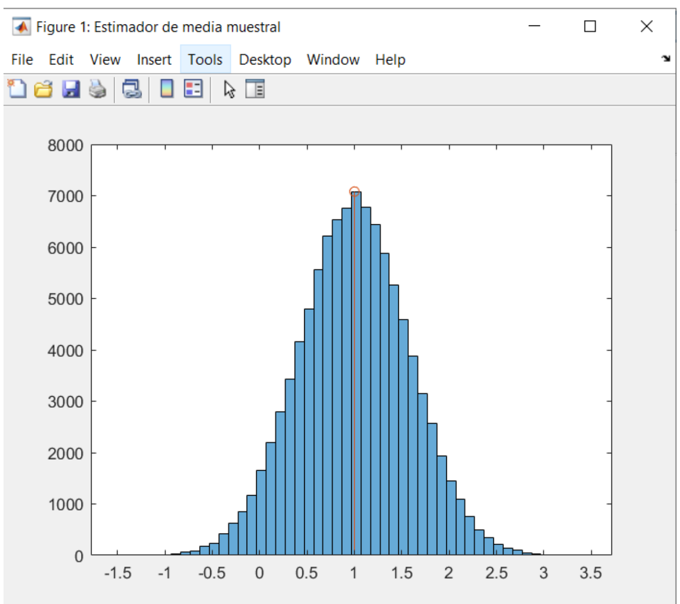
Figure 2: Estimador de varianza sesgado
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
1800
1600
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
0
1
2
3
4
5
6

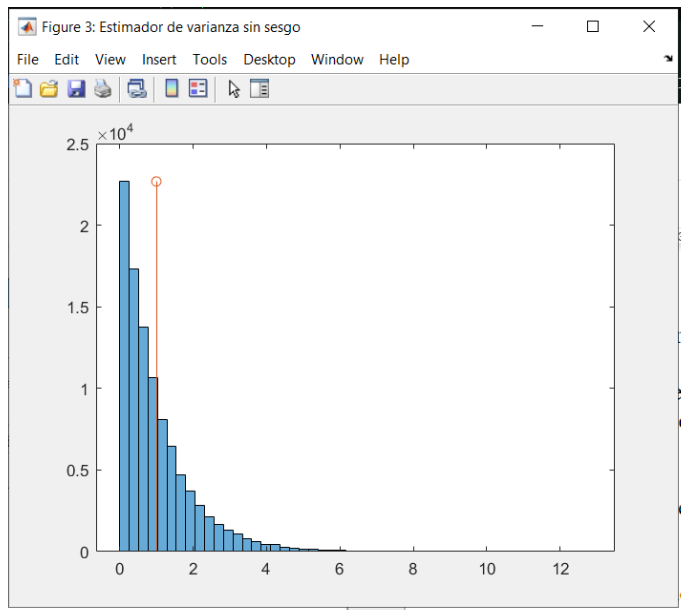
N=10000



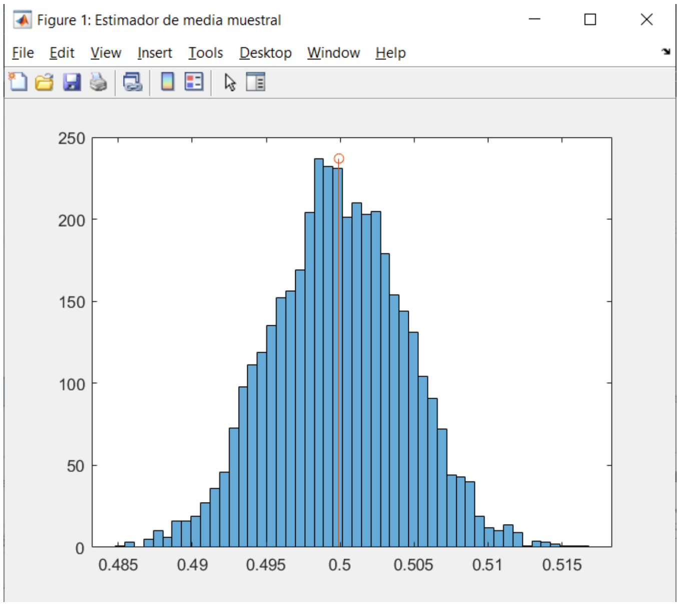


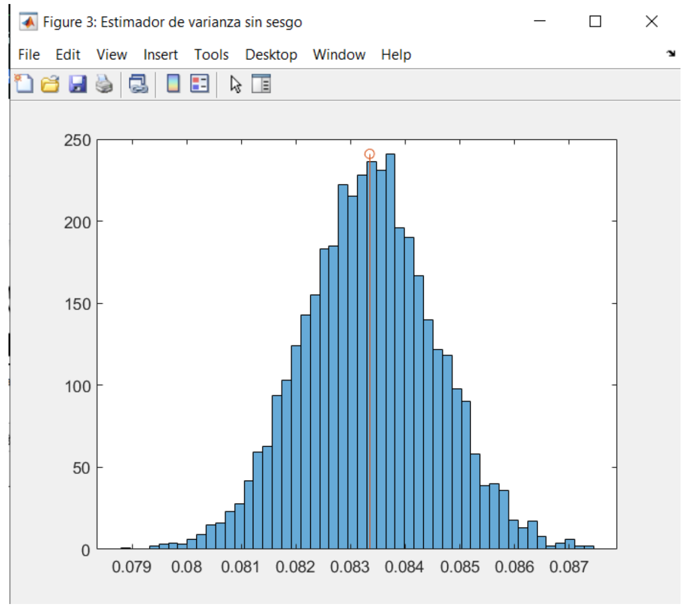
N=100000

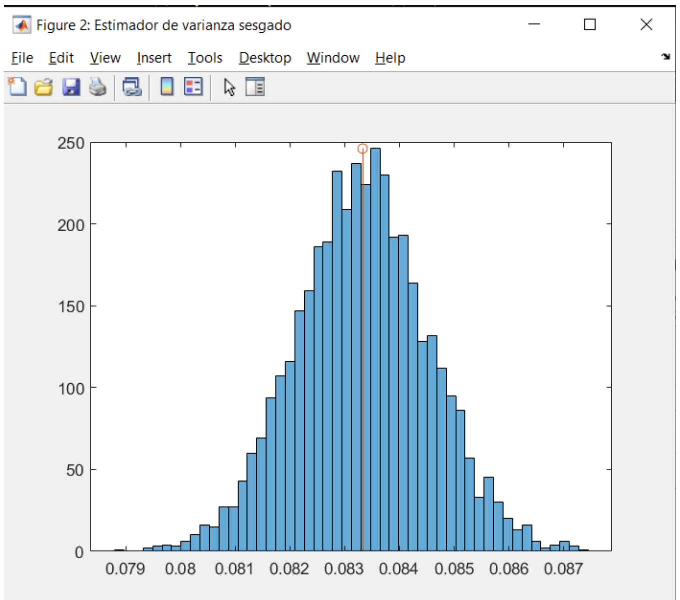




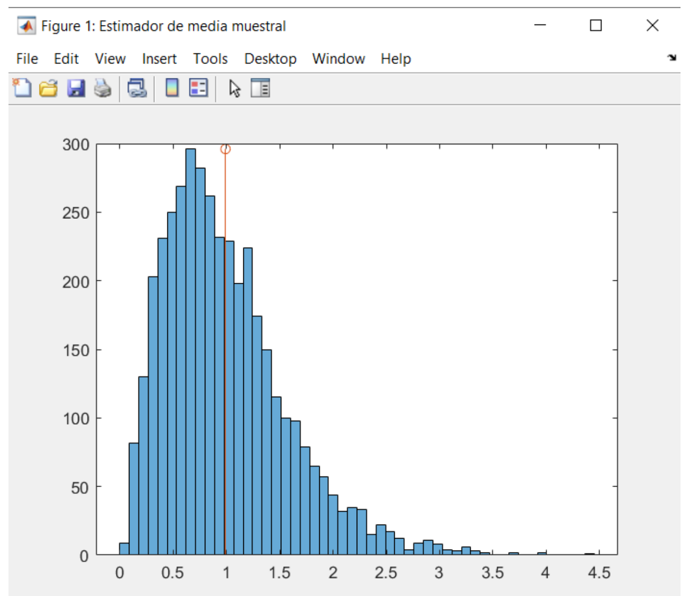
- Utilice una distribución uniforme (Matlab:rand()) para generar las muestras (x1,x2,x3), siga utilizando la misma estrategia de estimación de media y varianza, compare los resultados con los anteriores.

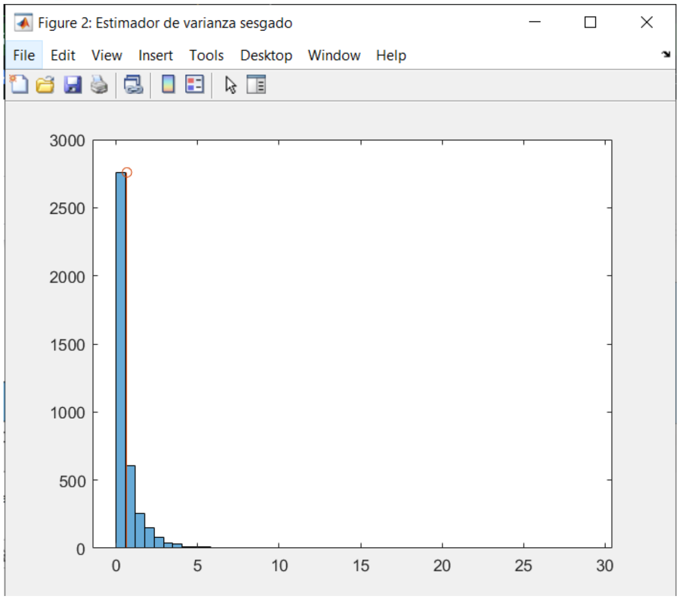


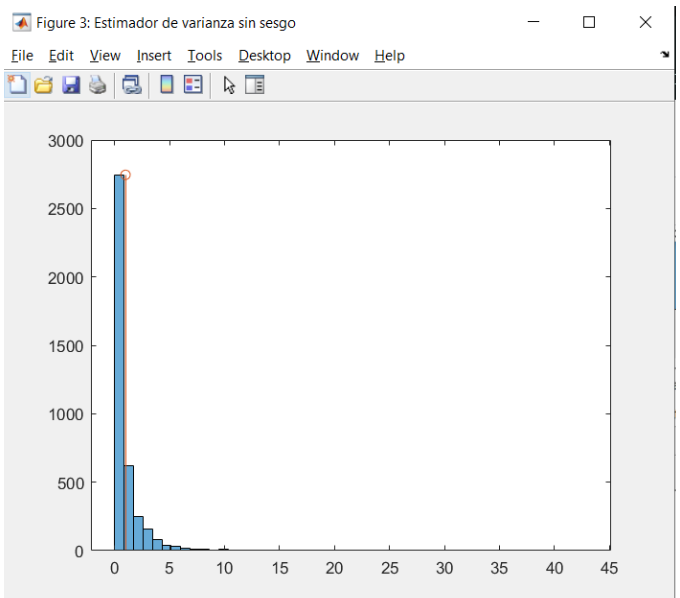




- Utilice una distribución exponencial (Matlab:exprnd()) para generar las muestras (x1,x2,x3), siga utilizando la misma estrategia de estimación de media y varianza, compare los resultados con los anteriores.







- ¿En que cambian y por qué cambian los resultados de los experimentos?

Porque la distribución utilizada es diferente.

2.Estimador de media muestral

Considere un sensor del cual no conoce su modelo. En una observación de datos capturados dentro de un intervalo de tiempo, se observa que estos datos pueden ser modelados mediante

x(n) = A + w(n)

Donde w(n) es ruido aleatorio y A parece ser un nivel DC desconocido. A partir de los valores
x(0), x(1), x(2), ..., x(N − 1) se desea conocer el valor de A

A continuación encontrará un ejemplo de estimador que mediante la media muestral minimiza el error de mínimos cuadrados para encontrar el valor de A a partir de las observaciones x(n)

- Estimador de media muestral

$$\widehat{A} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

```
%Ejemplo Estimador de media muestral con mínimos cuadrados
A=4; % valor DC de la señal xn "desconocido"
N=100; % número de muestras de xn
xn=A+normrnd(0,1,N,1); % señal con ruido Gaussiano (media=0, sigma=1)
%Optimización por gradiente descendente
% punto de partida
A_h=xn(1);
%parametros de optimizacion
stop = 1;
step=0.1;
max_iter=500;
iter=0;
% loop de optimización
while stop > 0.00001 & iter<max_iter
A_hp=A_h;
err=-sum((xn-A_h))/N;
A_h=A_h-step*err;
stop = abs(A_h-A_hp);
iter = iter+1;
End
%Resultado final
A_h
error = abs(A-A_h)
```

Observe, entienda y ejecute el ejemplo y describa brevemente los resultado observados.
Modifique el código ejemplo para que funcione con:

- El estimador de muestra inicial de los datos

A = x(1)

```
A_h =

    4.1232


error =

    0.1232
```

Teniendo ambos programas, realice 50 corridas de cada uno y responda:

- Calcule el valor esperado de ambos estimadores y la

varianza para ambos estimadores.
● Grafique las distribuciones de probabilidad (Matlab:hist()) de los resultados de calcular los estimadores.
● ¿Cuál estimador tiene menor varianza?
● ¿Cuál de los estimadores está más cercano al valor real?
● ¿Cuál estimador tiene sesgo y cuál no?
Repita el ejercicio con diferentes amplitudes de ruido y responda
● ¿Cuál de los estimadores es más robusto frente al nivel de ruido?
● Teniendo en cuenta la respuesta anterior, explique el porqué de dicha respuesta.
● ¿Puede diseñar un estimador con mejores características que los planteados?, explique y
demuestre su respuesta.

3. Estimadores clásicos (frecuentistas) y bayesianos
Considere un sensor del cual no conoce su modelo. En una observación de datos capturados dentro de un intervalo, se observa que estos datos pueden ser modelados mediante

$x(n) = A + w(n)$

Donde $w(n)$ es ruido aleatorio y A es un nivel DC desconocido. A partir de los valores $x(0), x(1), x(2), ..., x(N-1)$ se desea conocer el valor de A . Aplique el MLE y MAP para resolver el problema
<u>Estimador de Maximum Likelihood (MLE):</u>
Aplique el MLE al problema de estimar el valor A a partir de los valores observados $x(n)$, que obedece
al siguiente modelo:

$x(n) = A + w(n)$

Donde A es un valor DC desconocido y $w(n)$ es ruido blanco gaussiano ($\mu = 0$, $\sigma = 1$).
Realice el programa en matlab donde se aplique este estimador.
<u>Estimador de Maximum A Posteriori (MAP):</u>
Aplique el estimador MAP al problema de estimar el valor A a partir de los valores observados $x(n)$, que
obedece al siguiente modelo:

$x(n) = A + w(n)$

Donde A es un valor DC desconocido y $w(n)$ es ruido blanco gaussiano ($\mu = 0$, $\sigma = 1$).
● Considere una distribución normal para formular el prior
● Considere una distribución uniforme para generar el prior
Realice simulaciones en matlab usando este estimador.

<u>Señal sinusoidal:</u>
Repita los ejercicios (MLE y MAP) en matlab pero ahora
$x(n) = A\cos(2\pi fn) + w(n)$
● Considere el escenario donde el parámetro desconocido es A y la frecuencia (f) es conocida.
● Considere el escenario donde el parámetro desconocido es la frecuencia (f) y la amplitud A es
conocida.
¿Cómo es el desempeño de los estimadores?, explique su respuesta.

Conclusiones

Autoevaluación:
1)85%
2)89%
3)95%
4)92%

Referencias
[1]“Filtros Digitales - FIR”, Sitio web: http://www3.fi.mdp.edu.ar/tds/material/10-Filtros%20FIR.pdf
[2]“Análisis en el dominio de la frecuencia”, http://bibing.us.es/proyectos/abreproy/3828/fichero/Cap%C3%ADtulos%252F4+An%C3%A1lisis+en+el+dominio+de+la+frecuencia.pdf
[4]Vásquez E. “PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES”, https://prezi.com/x_x2xch1v2et/procesamiento-digital-de-senales/
[6]Tejos C. “Filtros en el dominio de la frecuencia”, http://pteam.pixinsight.com/carlos/G_Cap5.pdf
[7]“Análisis en el dominio de la frecuencia”, http://www.elai.upm.es/webantigua/spain/Asignaturas/Servos/Apuntes/11_RespFr.pdf
[8]Gómez G. E, “Introducción al filtrado digital”, http://www.dtic.upf.edu/~egomez/teaching/sintesi/SPS1/Tema7-FiltrosDigitales.pdf