

# Control de una bola sobre riel

Caceres Pinzon Brian Sebastian, Gaviria Didier, Lizarazo Nicolas Esteban.  
{u1803245, u1803250 y u1802999}@unimilitar.edu.co

Profesor Adriana Riveros.

**Resumen**—En el siguiente informe se implementará los conocimientos adquiridos sobre modelado de sistemas mecatrónicos y el control por retroalimentación de estados y observadores de estado. En la retroalimentación de estados se observan diferentes métodos para hacer este tipo de control, como ackerman, asignación de polos y la matriz de transformación.

## Palabras Claves

- Retroalimentación de estados.
- Observador de estados.
- Ackerman
- Matriz de transformación.

## I. INTRODUCCIÓN

El control de sistemas es muy importante en los procesos automatizados, ya que ofrece una gran ayuda a la hora de ahorrar recursos, tiempo y además en sistemas de alta precisión como los médicos o los automovilísticos son necesarios para que se eviten accidentes.[2]

El sistema de este laboratorio, está compuesto por un péndulo inverso con un resorte, donde se pretende controlar la posición angular de la bola que está en la punta del péndulo teniendo como entrada una fuerza o un torque.. El sistemas completo se puede apreciar en la figura 1.

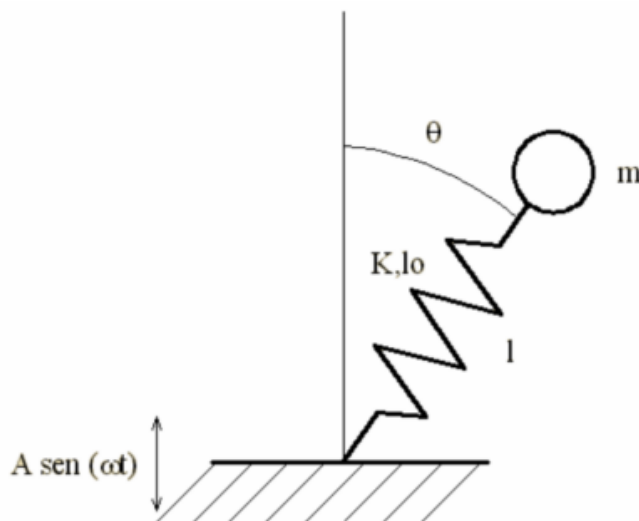


Figura 1. Sistema a controlar.

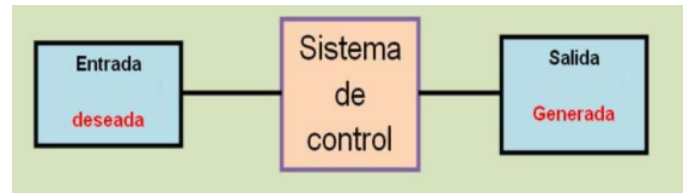
Para la solución de este sistema dan el modelo que describe el sistema, sin embargo se demuestra el modelo del sistema usando el método de Newton y por Lagrange, y se realiza el control por retro estado, también se realiza los observadores.

## II. MARCO TEÓRICO

### Control de sistemas.

Actualmente en un mundo globalizado, y con avances tecnológicos

el control de sistemas hace parte de nuestra vida rutinaria en diferentes aspectos, ya que permite optimizar muchos recursos. El control es la manera por la cual diferentes sistemas automatizados logran el objetivo, teniendo en cuenta que estos tienen una variable de entrada, y la variable que se busca controlar, como la posición, el voltaje, la temperatura, etc.



### RETRO ESTADO

El control por retroalimentación de estado es un método de control usado ampliamente en los sistemas mecatrónicos, su funcionamiento se define por recibir un feedback, o una retroalimentación de las señales de la salida para corregir, modificar o ajustar el comportamiento del sistema. Está compuesto por una constante acompañada de un integrador.[3]

También llamado retro estado, tiene varios métodos de implementación, entre los más usados y conocidos se encuentra la asignación de polos, la matriz de transformación y el método de ackerman.

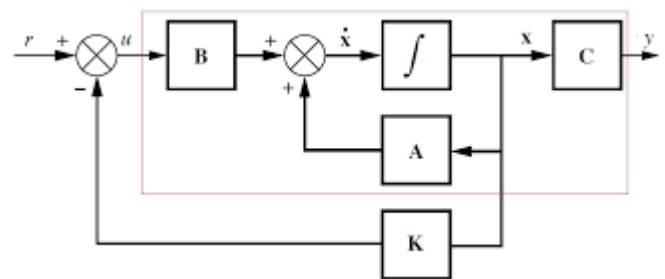


Figura 2. Representación de un controlador por retro-estado

### Asignación de polos

La asignación de polos es un método para determinar los parámetros de un controlador retro estado, donde se toma el denominador de la función de transferencia llamándolo polinomio deseado, y se iguala con el polinomio característico dado por las ecuaciones del método de asignación de polos.

Es tal vez el método más usado en el control por retro estado, debido a su amplia aplicabilidad en sistemas ideales como en sistemas reales.

### Matriz de transformación

Este es otro método para la determinación de parámetros de un controlador por retro estado, consiste en crear una matriz a partir de unas ecuaciones ya establecidas, es importante relatar que para este método es necesario tener el espacio de estados que describe el

sistema y mediante una serie de pasos es posible determinar los valores de  $K_i$ , que es la constante que acompaña al integrador. Así como las  $K_n$ .

#### Ackerman:

El método de Ackerman es el otro método que se explicará y que se usará a lo largo de este laboratorio, en este método se pretende encontrar los  $K$  mediante una fórmula, sin embargo, antes de aplicar la fórmula es necesario aplicar una serie de cosas como por ejemplo encontrar el polinomio deseado y característico.

sistema, posteriormente

## II. DESARROLLO DE LA PRÁCTICA

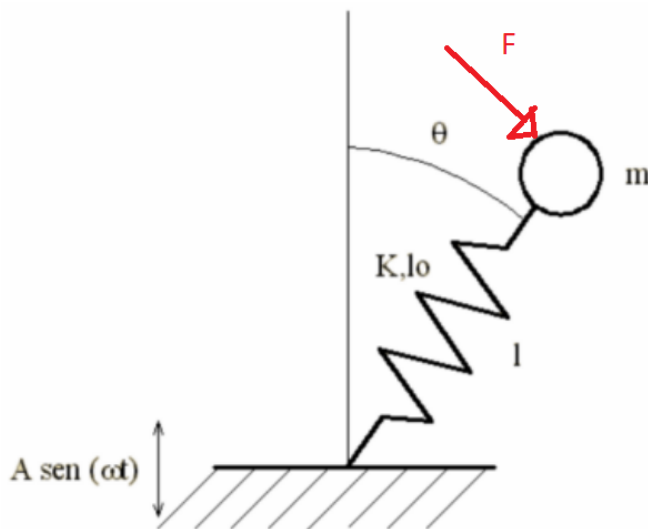


Figura 3. Sistema a controlar agregando una fuerza de entrada.

$$l \ddot{\theta} + 2 \dot{l} \dot{\theta} + [A \omega^2 \sin(\omega t) - g] \sin \theta = 0$$

$$\ddot{l} - l \dot{\theta}^2 + \frac{K}{m} [l - l_0] + [g - A \omega^2 \sin(\omega t)] \cos \theta = 0$$

- Verificar la correspondencia del modelo mostrado anteriormente, realizando el modelado por Newton-Euler y Euler-Lagrange, asignando una entrada en fuerza o torque.

#### Euler-Lagrange:

Sacaremos cada una de las energías presentes en el sistema, de ese modo:

La energía cinética está dada por:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Sin embargo, la velocidad posee componentes en ambos ejes, y la velocidad es la derivada de la posición. De tal manera que:

$$v = \dot{x} + \dot{y}$$

Y las posiciones de “X” y “Y” está descrito de la siguiente manera.

$$x = l \sin(\theta)$$

$$y = l \cos(\theta) + A \sin(\omega t)$$

En la ecuación de Y se puede observar la perturbación presente en el sistema. Ahora tenemos que derivar cada una de las componentes.

$$\dot{x} = \sin(\theta) \dot{l} + l \cos(\theta) \dot{\theta}$$

$$\dot{y} = \cos(\theta) \dot{l} - l \sin(\theta) \dot{\theta} + A \omega \cos(\omega t)$$

Sustituyendo todo en la fórmula de la energía cinética se tiene:

$$T = \frac{1}{2} m \left[ \dot{l}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + (A \omega \cos(\omega t))^2 + 2 A \omega \cos(\omega t) [\cos(\theta) \dot{l} - l \sin(\theta) \dot{\theta}] \right]$$

Para la energía potencial:

Presentes tenemos la gravedad de la masa y también la energía elástica del resorte.

$$V = V_m + V_g = \frac{1}{2} K [l - l_0]^2 + m g y$$

Ya sabemos como está definida la componente de Y, de ese modo:

$$V = V_m + V_g = \frac{1}{2} K [l - l_0]^2 + m g [l \cos(\theta) + A \sin(\omega t)]$$

En este punto, ya se halla el lagrangiano.

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \left[ \dot{l}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + (A \omega \cos(\omega t))^2 + \right.$$

$$\left. 2 A \omega \cos(\omega t) [\cos(\theta) \dot{l} - l \sin(\theta) \dot{\theta}] \right] -$$

$$\frac{1}{2} K [l - l_0]^2 - m g [l \cos(\theta) + A \sin(\omega t)]$$

Se halla las derivadas respectivas con el primer estado que es el ángulo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_L$$

Para simplificar la solución, se escribirá cada una de los términos, y luego se pondrá la solución final.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m \ell^2 \dot{\theta} - m A \omega \cos(\omega t) \ell \sin(\theta)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -m A \omega \cos(\omega t) \left[ \sin(\theta) \dot{\ell} + \ell \cos(\theta) \dot{\theta} \right] + m g \ell \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right] = m \ell^2 \ddot{\theta} + 2 m \ell \dot{\ell} \dot{\theta} + m A \omega^2 \sin(\omega t) \ell \sin(\theta) -$$

$$m A \omega \cos(\omega t) \left[ \dot{\ell} \sin \theta + \ell \cos \theta \dot{\theta} \right]$$

Finalmente expresamos la ecuación final obtenida.

$$m \ell^2 \ddot{\theta} + 2 m \ell \dot{\ell} \dot{\theta} + m A \omega^2 \sin(\omega t) \ell \sin(\theta) -$$

$$m A \omega \cos(\omega t) \left[ \dot{\ell} \sin \theta + \ell \cos \theta \dot{\theta} \right]$$

$$+ m A \omega \cos(\omega t) \left[ \sin(\theta) \dot{\ell} + \ell \cos(\theta) \dot{\theta} \right]$$

$$m g \ell \sin \theta = F L$$

Haciendo el álgebra correspondiente se puede simplificar y se tiene:

$$\ell^2 \ddot{\theta} + 2 \ell \dot{\ell} \dot{\theta} + [A \omega^2 \sin(\omega t) - g] \ell \sin \theta = F L$$

Y para obtener la primera ecuación se divide todo entre l:

$$\ell \ddot{\theta} + 2 \dot{\ell} \dot{\theta} + [A \omega^2 \sin(\omega t) - g] \sin(\theta) = F L$$

Ahora hacemos el mismo procedimiento del Lagrangiano pero con el otro estado, que es la longitud.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \ell} = 0$$

Escribimos los términos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} = m \ell \dot{\theta}^2 - m A \omega \cos(\omega t) \sin(\theta) \dot{\theta} - K [\ell - \ell_0] - m g \cos \theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \ell} = m \dot{\ell} + m A \omega \cos(\omega t) \cos \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\ell}} \right] = m \ddot{\ell} - m A \omega^2 \sin(\omega t) \cos \theta - m A \omega \cos(\omega t) \sin(\theta) \dot{\theta}$$

Se sustituye todo:

$$m \ddot{\ell} - m A \omega^2 \sin(\omega t) \cos \theta - m A \omega \cos(\omega t) \sin(\theta) \dot{\theta} -$$

$$m \ell \dot{\theta}^2 + m A \omega \cos(\omega t) \sin(\theta) \dot{\theta} + K [\ell - \ell_0] + m g \cos \theta = 0$$

Simplificando y dividiendo todo sobre m, se obtiene la segunda ecuación que describe el sistema.

$$\ddot{\ell} - \ell \dot{\theta}^2 + \frac{K}{m} [\ell - \ell_0] + [g - A \omega^2 \sin(\omega t)] \cos \theta = 0$$

#### - Encontrar los punto de equilibrio del sistema

Lo primero es hacer el jacobiano del sistema, esto debido a que es un sistema no lineal, con el fin de encontrar el espacio de estados:

A =

$$\begin{pmatrix} -\frac{2v}{l} & -\frac{2w}{l} & \frac{981 \cos(t)}{100l} & \frac{F}{l} - \frac{\frac{981 \sin(t)}{100} + F l - 2vw}{l^2} \\ l & 0 & \frac{981 \sin(t)}{100} & w - 100 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B =

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C = (0 0 1 0)

D = 0

Posterior a esto, se pone los puntos de equilibrio, derivadas igual a 0, y se encuentra los puntos de operación utilizando matlab.

$$w = 0$$

$$v = 0$$

$$t = 30$$

$$v_p = 48.487 - 100.0 \, l$$

$$l = 0.48487$$

$$w_p = 1.0 \, F - 19.99$$

$$F = 19.99$$

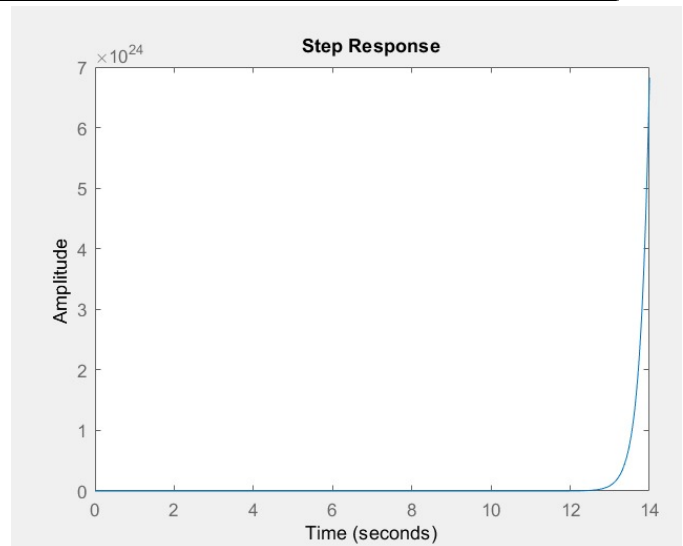


Figura 4. Respuesta al escalón sistema.

### Hallar la representación lineal del sistema:

En la siguiente figura se puede observar el espacio de estados evaluando los puntos de operación.

$$\theta = 30^\circ \quad F = 19.99 \, \text{N} \quad L = 0.48487 \, \text{m}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3.1209 & 41.2281 \\ 0.4849 & 0 & -9.6926 & -100.0000 \\ 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = 0$$

Ahora sigue obtener la función de transferencia.

$$ft =$$

$$\frac{s^2 + 100}{s^4 + 1.443e-15 s^3 + 96.88 s^2 - 19.99 s + 87.52}$$

Continuous-time transfer function.

La función de transferencia responde a las siguientes constantes:

$$g=9.81; \quad l=0.5; \quad k=100; \quad m=1;$$

La respuesta del sistema se aprecia en la siguiente figura, donde se ve que la da inestable.

- Diseñar los controladores por retroalimentación de estado que permitan controlar la posición angular del péndulo, considerando un error en estado estable igual a cero para entrada escalón, rampa y parábola.

Para el diseño del controlador se decidió usar el método de ackerman, así que después de obtener el espacio de estados se obtiene Agorrito, que y Bgorrito, se escogen los valores para para el polinomio deseado.

Como el polinomio característico es de grado 4, tenemos que convertir el polinomio deseado en uno de grado 4, por eso se multiplica dos veces por  $(s + \beta \cdot \zeta \cdot \omega)$ , donde  $\beta$  es igual 5, la sección del código se puede observar a continuación.

```

Agorrito=[ A [0; 0; 0; 0]; -C 0
Bgorrito=[ B;0 ]
cd=0.7;
ts=3;
wnd=4/(ts*cd)%Hallar omega
PD=[1 2*cd*wnd wnd^2];
PD=conv(PD,[1 5*cd*wnd]) %el 1x1
PD=conv(PD,[1 5*cd*wnd])
PD=conv(PD,[1 5*cd*wnd])

```

Figura 5. Código para hallar las constantes del controlador para entrada escalón.

De esta manera se puede obtener el valor de las K, en la siguiente imagen se puede observar los valores encontrados.

$$K = \begin{bmatrix} 22.6667 & 160.1711 & 15.7538 & 40.1366 & -10.7500 \end{bmatrix}$$

Donde el último número es negativo, indicando que es el  $-K_i$  que retro-alimenta a todo el sistema. Estos valores aplican y funcionan para una entrada en escalón. De ese modo se volvió a hacer todo el proceso, pero con una entrada escalón, que es igual, pero con un polinomio de grado mayor, esto debido a que al ser una entrada en rampa, se tienen que hallar dos  $K_i$ .



```
%Para rampa <[:{v
Agorrito1=[ A zeros(4,1) zeros(4,1) ;
Bgorrito1=[ B;0;0 ]

PD1=[1 2*cd*wnd wnd^2];
PD1=conv([PD1],[1 5*cd*wnd]) %e1 1x10^3
PD1=conv([PD1],[1 5*cd*wnd])
PD1=conv([PD1],[1 5*cd*wnd])
PD1=conv([PD1],[1 5*cd*wnd])

K1=acker(Agorrito1,Bgorrito1,roots(PD1))
```

Figura 6. Código para hallar las constantes del controlador para entrada rampa.

```
K1 =
1.0e+03 *
0.0293 0.1602 0.1668 1.1079 -0.0717 -0.0957
```

Finalmente para la entrada en parábola, se hace el mismo proceso, pero con un polinomio de un grado mayor, porque se necesitan 3 Ki.

```
%Para parabola /:v/
Agorrito2=[ A zeros(4,1) zeros(4,1) ze
Bgorrito2=[ B;0;0;0 ]

PD2=[1 2*cd*wnd wnd^2];
PD2=conv([PD2],[1 5*cd*wnd]) %e1 1x10^3
PD2=conv([PD2],[1 5*cd*wnd])
PD2=conv([PD2],[1 5*cd*wnd])
PD2=conv([PD2],[1 5*cd*wnd])
PD2=conv([PD2],[1 5*cd*wnd])

K2=acker(Agorrito2,Bgorrito2,roots(PD2))
```

Figura 7. Código para hallar las constantes del controlador para entrada parábola.

Se obtiene el vector K, donde se pueden apreciar las 4k, y también las 3 ki que salen negativas.

```
K2 =
1.0e+03 *
0.0360 0.0891 0.3969 2.1762 -0.4778 -0.7095 -0.4978
```

- Encontrar las constantes del observador de estados que permitan realizar una estimación de los mismos, considerando que la única salida medible es la posición angular del péndulo.

Para las constantes del observador, se diseñan con un tiempo de respuesta de 10 veces más rápido y solo es necesario hacer este diseño una vez, para la entrada escalón, ya que funciona sin problema para las otras dos entradas mas, rampa y parábola..

```
%OBSERVADORES

%Para escalon q:v
tso=ts/10;%tiempo de respuesta 10 veces mas rapido
wndo=4/(tso*cd);%Hallar omega
PDobs=[1 2*cd*wndo wndo^2];
PDobs=conv([PDobs],[1 5*cd*wndo]);%el 1x10^3 multiplica a todo el vector
PDobs=conv([PDobs],[1 5*cd*wndo])
L1=acker(A',C',roots(PDobs))'

%Para rampa <[:{v
%same

%Para parabola /:v/
%same
```

Figura 8. Código para hallar las constantes del observador para todas las entradas.

Las constantes encontradas son las siguientes:

```
L1 =
1.0e+04
0.8266
1.9138
0.0160
0.3660
```

- Realizar las simulaciones de los controladores y observadores acoplados, tanto para lineal, como para no lineal.

#### Sistema lineal:

En las siguientes figuras, se pueden observar las tres simulaciones, modificando la entrada en escalón, rampa y parábola

## MODELO LINEAL

### CONTROLES

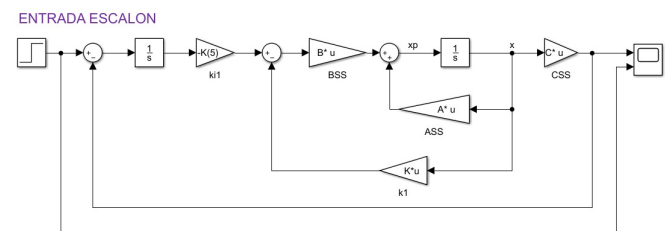


Figura 9. Esquema del controlador para entrada escalón.

En la figura que se puede apreciar a continuación se puede observar la entrada y la respuesta, junto al controlador.

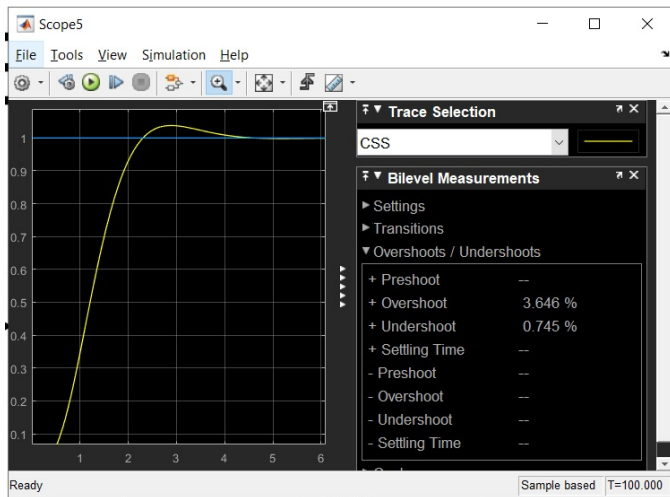


Figura 10. Respuesta del controlador para entrada escalón.

En la siguiente figura se puede apreciar el sistema con entrada escalón y con el observador incluido.

### OBSERVADORES

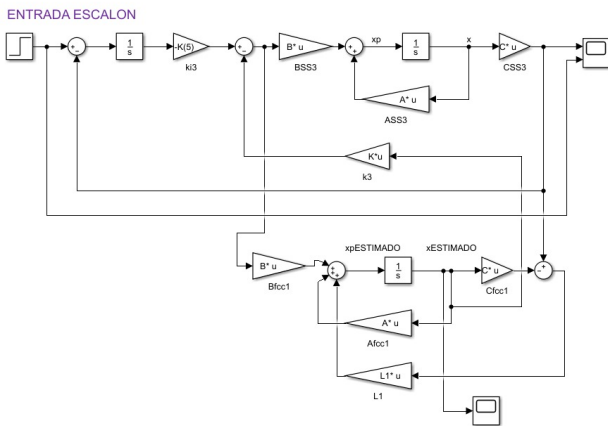


Figura 11. Esquema del controlador para entrada escalón con observador.

Respuesta observador con entrada escalón:

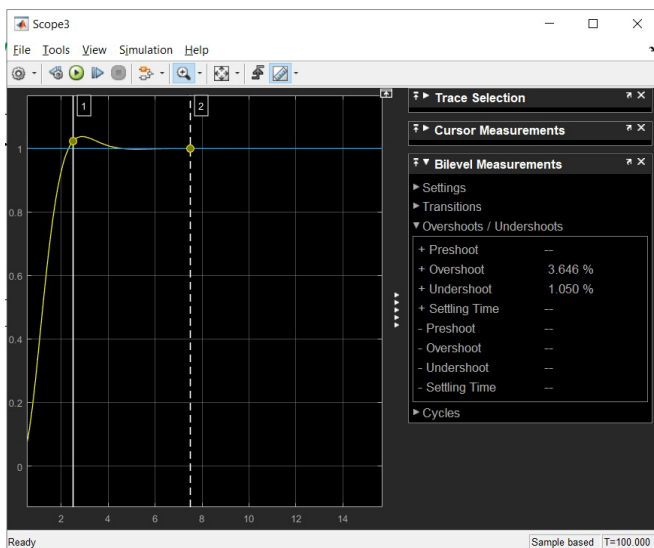


Figura 12. Respuesta del controlador para entrada escalón con observador.

Ahora se presenta la simulación de un sistema controlado con entrada en rampa.

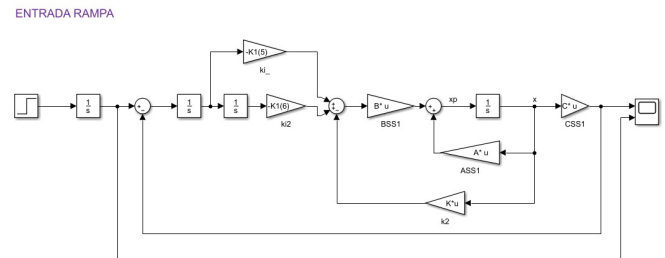


Figura 13. Esquema del controlador para entrada rampa.

Donde se pueden observar los dos integradores y las dos amplificaciones. En la siguiente figura tenemos la respuesta del sistema.

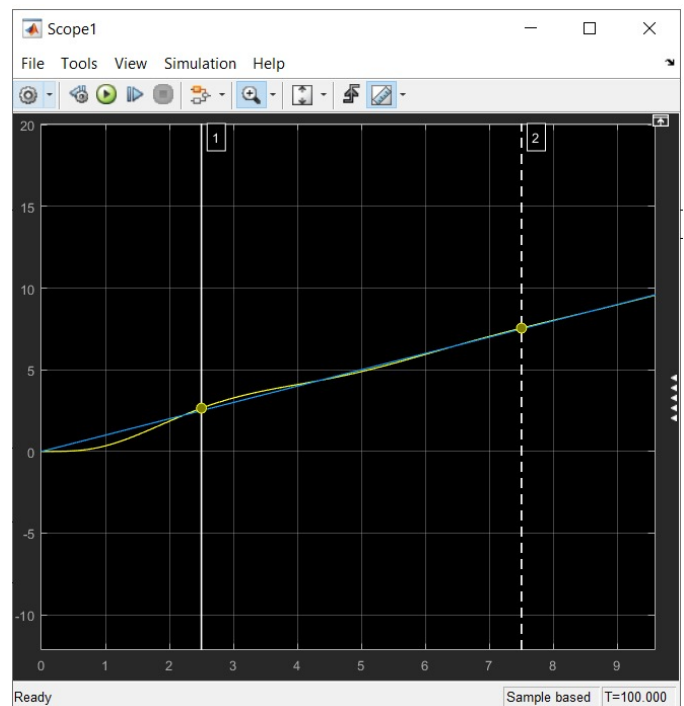
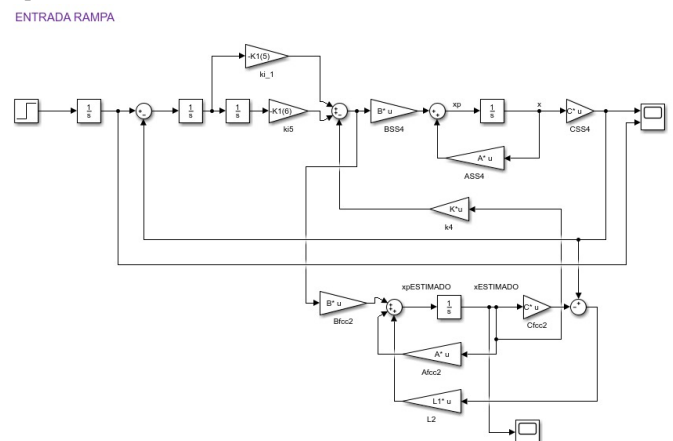


Figura 14. Respuesta del controlador para entrada rampa.

Se puede observar que el sistema se controla sin ningún problema, y a posterior a eso se le agrega el observador con su respectiva respuesta.



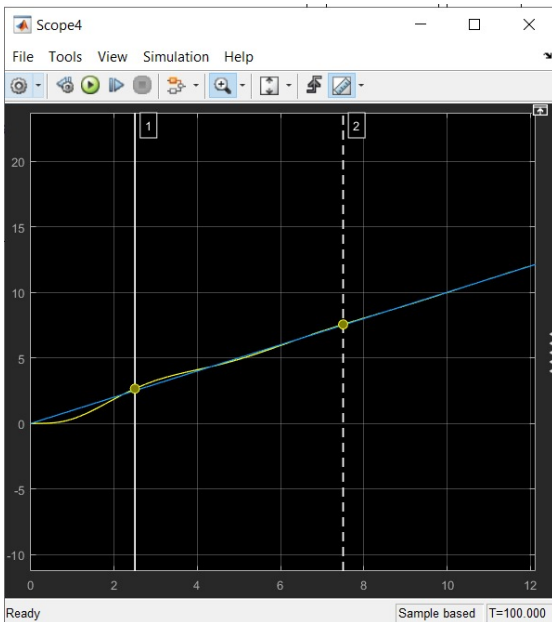


Figura 15. Respuesta del controlador para entrada rampa con observador.

Respuesta entrada parábola:

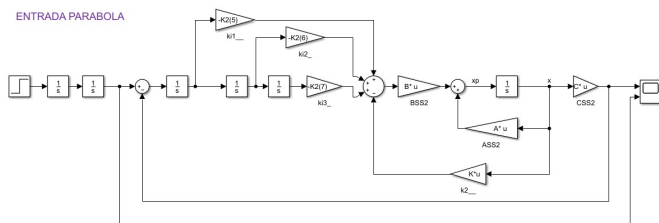


Figura 16. Esquema del controlador para entrada parábola.

En la figura anterior se puede apreciar el sistema para una entrada escalón, donde se puede observar los dos integradores y los  $3K_i$ , mientras que en la siguiente imagen se aprecia la respuesta.

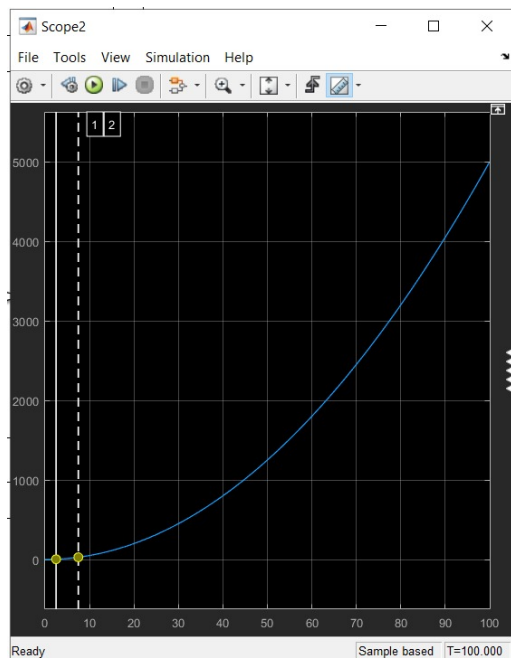


Figura 17. Respuesta del controlador para entrada parábola.

Ahora se mostrará el sistema con el observador, y su respectiva respuesta.

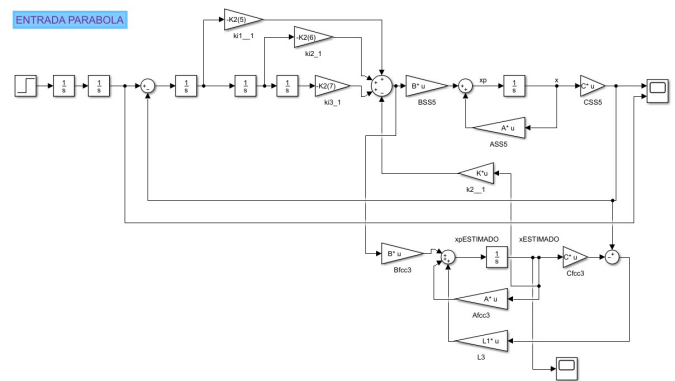


Figura 13. Esquema del controlador para entrada parábola con observador.

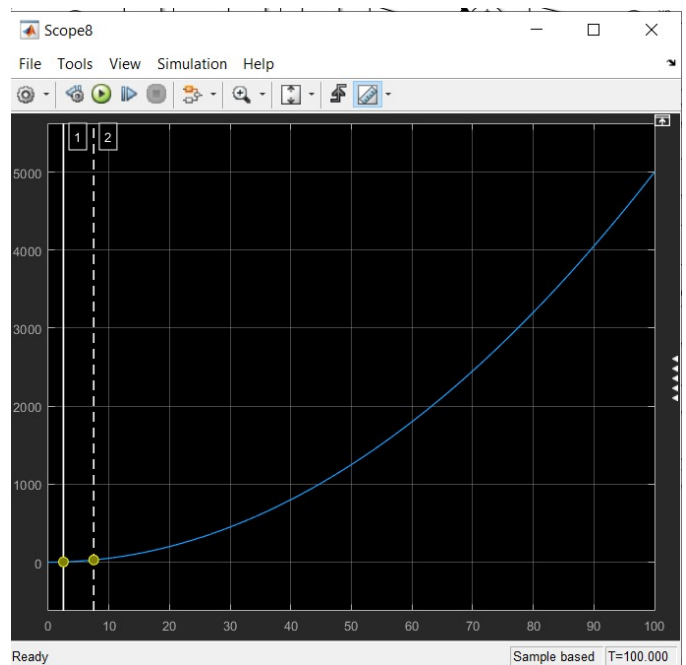


Figura 18. Respuesta del controlador para entrada parábola con observador.

De ese modo se aprecia que los controladores muestran la misma salida cuando tienen observador como cuando no lo tienen, lo cual nos ofrece una veracidad en los resultados obtenidos, para cualquier tipo de entrada que tenga el sistema, además se observa cómo para cada sistema el esquema que se arma debe ser diferente puesto que se agregan constantes  $k_i$  dependiendo del tipo de entrada.

En las siguientes figuras se puede apreciar el comportamiento de los estados en los observadores y las variables, se demuestra que funcionan de buena manera para las tres entradas.

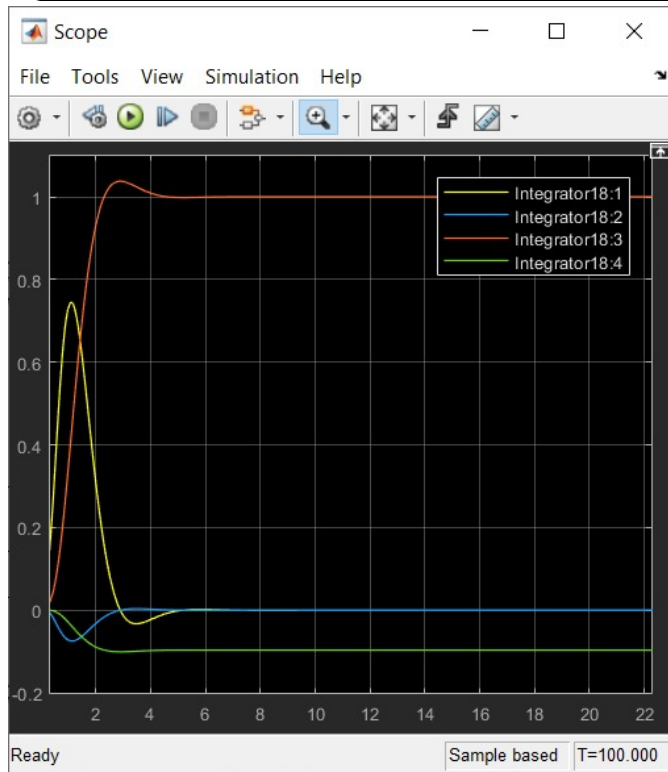


Figura 19. Respuesta del observador para entrada escalón.

Se observa como la señal roja corresponde a la misma salida medida en la figura 10 y 12, también se observa que los demás estados tienen un comportamiento similar, es decir en tienen una respuesta similar, los mismo sucede con la entrada rampa y parábola, figura 20 y 21 donde se aprecia que sus estados estimados tienen una forma lineal y exponencial respectivamente debido a la entrada.

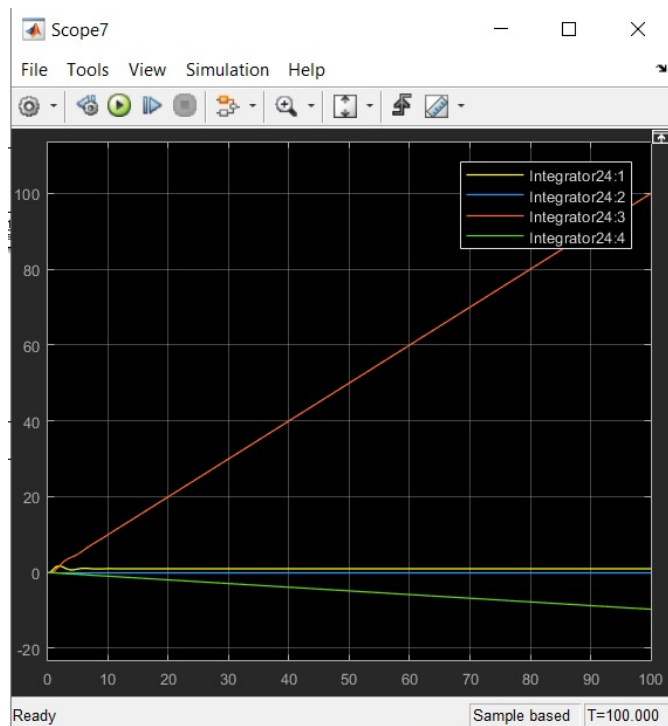


Figura 20. Respuesta del observador para entrada rampa.

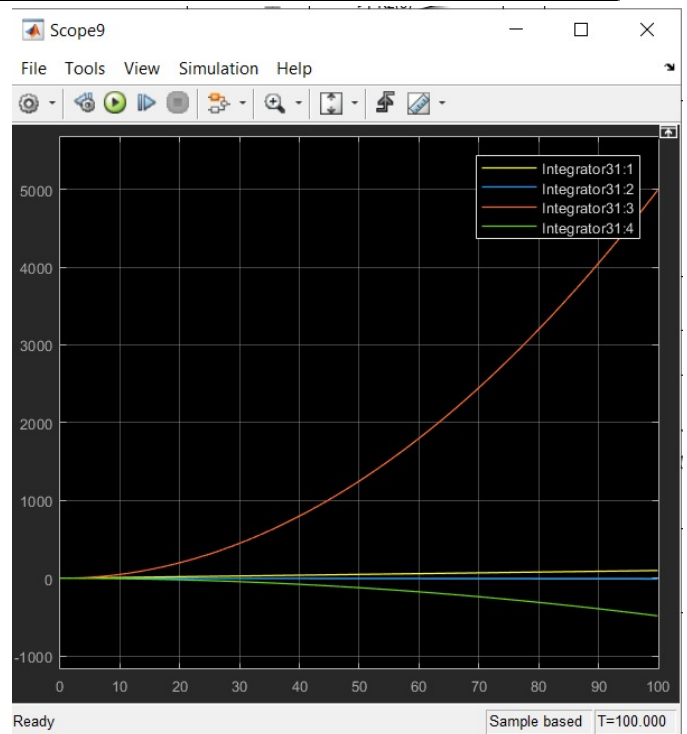


Figura 21. Respuesta del observador para entrada parábola.

**Sistema No Lineal:**

## MODELO NO LINEAL

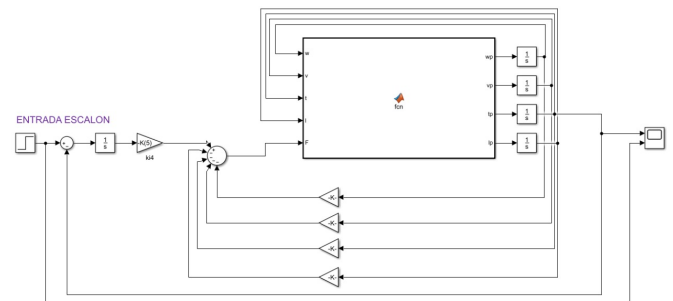


Figura 22. Respuesta del observador para entrada rampa.

Para el modelo no lineal se usó el matlab function, que permite hacer las simulaciones de sistemas que no son lineales. En la siguiente figura se puede apreciar la salida del modelo no lineal donde se agregaron las condiciones iniciales dentro de los integradores.



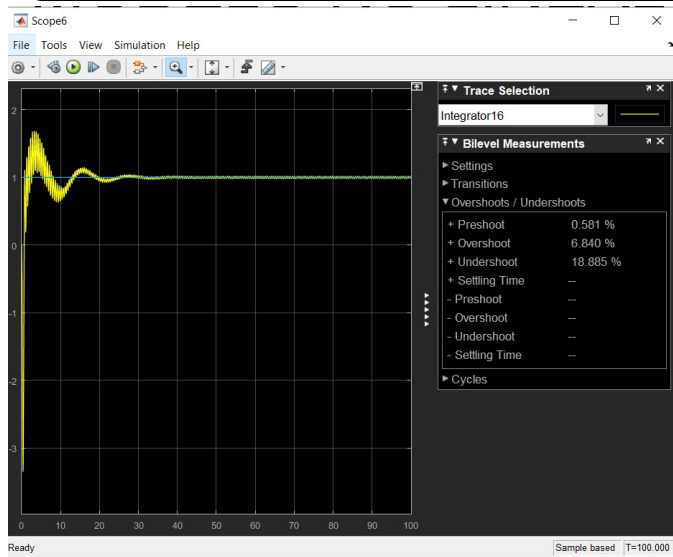


Figura 23. Respuesta del controlador para entrada escalón para sistema no lineal.

Se observa que la señal cambia y presenta oscilaciones estas varían según la condición inicial de la longitud  $L$  entre más pequeña sea esta condición inicial, las amplitudes de las oscilaciones son de menor magnitud adicionalmente se observa que el error en estado estable es cero.

Ahora se le pone las perturbaciones, se le asignan las condiciones iniciales y en la imagen se puede apreciar que controle, mientras que no se puede garantizar el error en estado estable igual a cero, sin embargo si se estabiliza

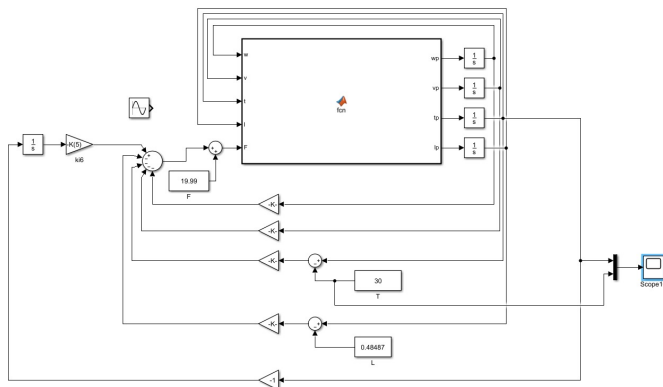


Figura 24. Respuesta del controlador por medio de perturbaciones con condiciones iniciales.

Para este esquema es importante agregar las condiciones iniciales y los puntos de operación los cuales es donde el sistema controla, para ellos se resta en los estados y se suma a la entrada el valor de los mismos.

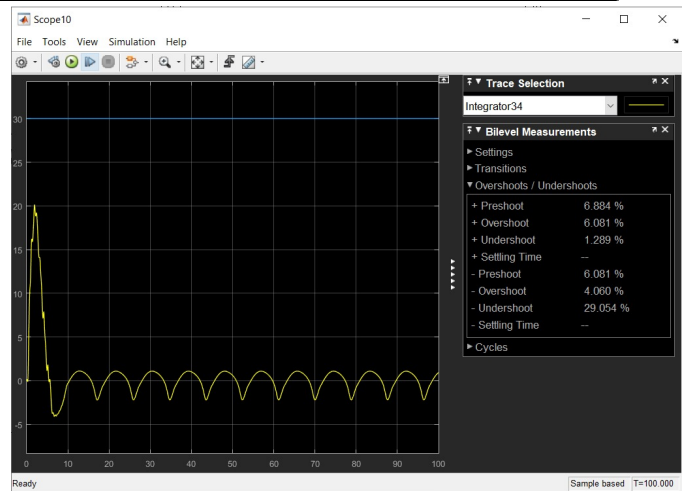


Figura 25. Respuesta del controlador por medio de perturbaciones con condiciones iniciales.

La respuesta del sistema no lineal no tiene un error en estado estable igual a cero, sin embargo este se ve afectado por las condiciones iniciales por ellos no cumple con el overshoot que se presentaba en las figuras 10 y 12, se observa que se estabiliza pero aún tiene una oscilación presente. El efecto de la perturbación se ve mitigado cuando se aumenta la frecuencia demostrando que el controlador tiene un efecto de filtro pasa bajas.

## CONCLUSIONES:

- El control no lineal presenta oscilaciones al controlar, por otro lado el control lineal no las presenta, se cree que esto se debe a que en el modelo no lineal afecta la perturbación y esta afecta la posición del ángulo theta en cual es la salida.

- Se concluye que al agregar el observador de estados la salida sigue siendo la misma, esto se puede apreciar en las figuras 10 y 12 donde el overshoot y respuesta transitoria así como respuesta en estado estable son las mismas para ambos esquemas de control, de igual forma se observa que en la figura 19, la señal roja corresponde al estado que se toma como salida es decir theta y este también corresponde con las figuras anteriormente nombradas, por lo cual el diseño de los controladores y los montajes demuestran que no afecta a la salida el hecho de agregar un observador al controlador.

-Se observó que el control diseñado tiene un efecto de filtro debido a que al aumentar las frecuencia omega de la perturbación en el modelo la magnitud de las oscilaciones en la respuesta en estado estable tendía a desaparecer atenuando, esto se puede observar en la figura 23, donde las oscilaciones aún son presentes, pero al aumentar su frecuencia ya se atenuaban.

## REFERENCIAS.

[1] Riveros Adriana, Clases de modelos, Mec C.

[2] Ogata, K, (2010), Ingeniería de control moderna, Madrid, España, Pearson.

[3][https://cio.mx/archivos/miscelanea\\_Cientifica\\_en\\_Mexico\\_2020/Tomo\\_III\\_CS.pdf#page=296](https://cio.mx/archivos/miscelanea_Cientifica_en_Mexico_2020/Tomo_III_CS.pdf#page=296)