Notas de clase semana 1

Castro Andrés

Temas:

- ✓ Presentación e Introducción al del curso de control.
- ✓ Repasos modelados hidráulicos y modelado por Newton-Euler y Euler Lagrange.

1. Introducción al control.

Figura 1: Clepsidra egipcio

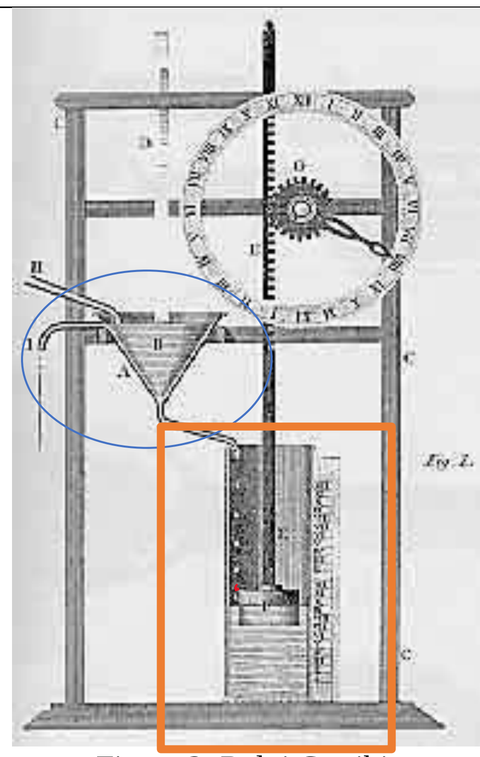
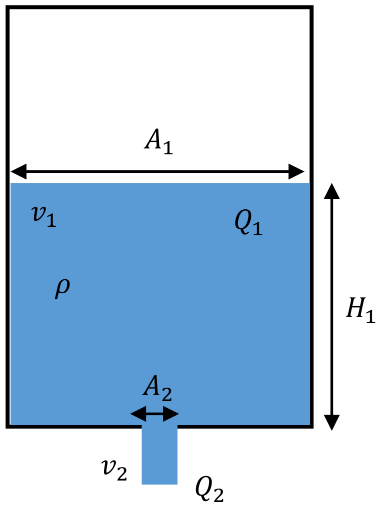


Figura 2: Reloj Ctesibio

El reloj de agua o clepsidra (En la civilización griega era llamado ladrón de agua) es un dispositivo que usa el flujo de agua bajo la acción de la gravedad para medir el tiempo. Y este era usado por los oradores o abogados para medir el tiempo que duraban dando los argumentos en un debate. Sin embargo, este reloj presentaba el problema que la velocidad con que salía agua ósea el caudal no era contante a medida que se vaciaba. Ctesidio un inventor griego se percató que si se mantenía la altura constante del líquido dentro de la vasija el caudal de salida es constante. Por lo que se propuso desarrollar un dispositivo para controlar la cantidad del liquido que entraba a la vasija. Es fue el primer reloj mecánico y el inicio de hidráulica. También como el primer sistema de control automático. Consultar el siguiente video [1].

Ejercicio: Hallar la expresión matemática que relaciona la velocidad v_2 con altura H_1 (El modelo matemático) del fluido del tanque.



A_1 Área transversal del tanque [m^2]

v_1 Velocidad del fluido en el tanque [m/s]

H_1 Altura del tanque [m]

Q_1 Caudal del fluido en el tanque [Kg/s]

A_2 Área transversal del orificio [m^2]

v_2 Velocidad del fluido en el orificio [m/s]

Q_2 Caudal del fluido en el orificio [m^3/s]

ρ densidad del fluido [Kg/m^3]

Para solucionar el problema vamos a emplear varios principios de la ciencia y la ingeniería. Principio de la masa, ley de continuidad, ley de Bernoulli.

$$m = \rho V \quad (1)$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho {v_1}^2 + pgH_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + pgH_2 \quad (2)$$

$$Q_1 = Q_2 \quad (3)$$

$$P = \rho gh + P_a \quad (4)$$

$$Q_1 = A_1 v_1$$

$$Q_2 = A_2 v_2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

$$\text{Si } \boxed{\frac{A_2}{A_1} \ll 1}$$

$$v_1 \cong 0$$

$$\cancel{P_a} + \overbrace{\frac{1}{2}\rho {v_1}^2}^{\cong 0} + pgH_1 = \cancel{P_a} + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2 + \overbrace{pgH_2}^{0}$$

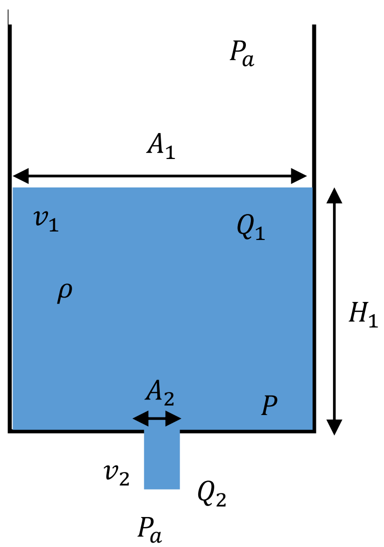
$$\cancel{\rho} gH_1 = \frac{1}{2}\cancel{\rho} {v_2}^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gH_1}$$

$$A_2 v_2 = A_2\sqrt{2gH_1}$$

$$Q_2 = A_2\sqrt{2gH_1}$$

Principio de Torricelli



Modelado del tanque

$$P = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A} = \frac{\rho V g}{A} = \frac{\rho g \cancel{A} h}{\cancel{A}} = \rho g h$$

$$P = \rho g h + P_a \quad (4)$$

$$h = \frac{P - P_a}{\rho g}$$

$$m = \rho V \quad (1)$$

$$\dot{m} = \rho Q_1 - \rho Q_2$$

$$\cancel{\rho}\dot{V} = \cancel{\rho} Q_1 - \cancel{\rho} Q_2$$

$$\dot{V} = Q_1 - Q_2$$

$$\frac{dV}{dt} = Q_1 - Q_2$$

$\frac{dV}{dP}\frac{dP}{dt}$ regla de la cadena

$$\frac{dV}{dP}\frac{dP}{dt} = Q_1 - Q_2$$

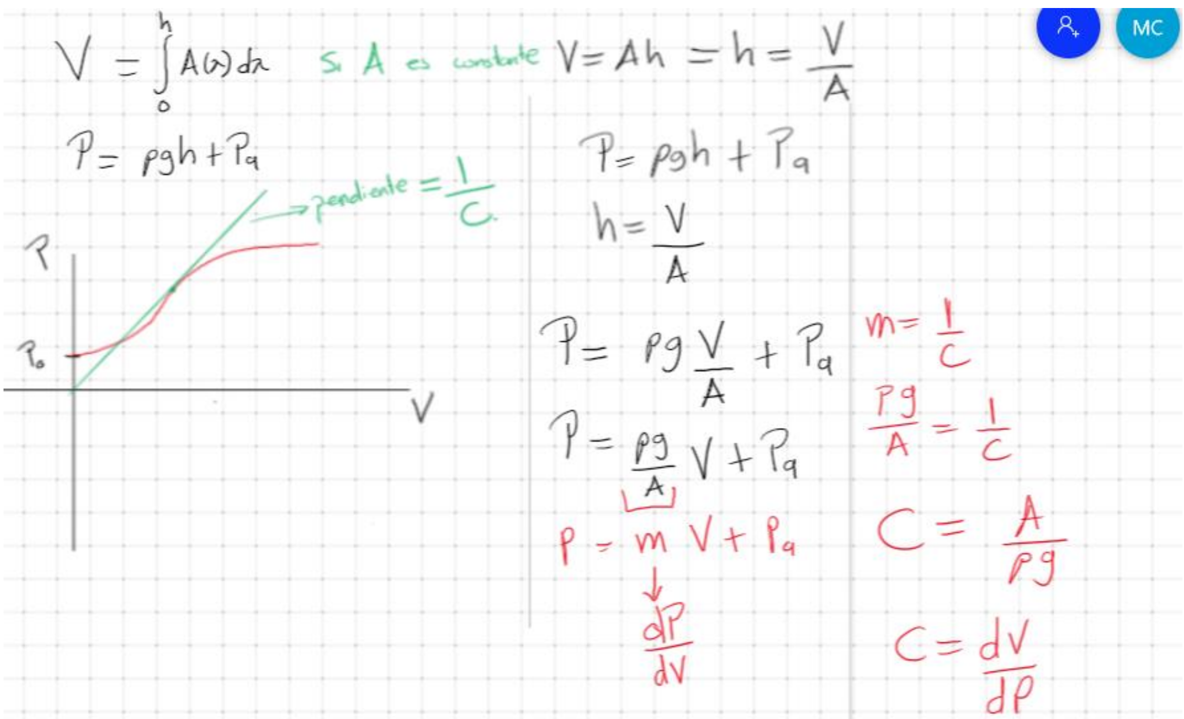
Capacitancia hidráulica.

$$\frac{dV}{dP} = C$$

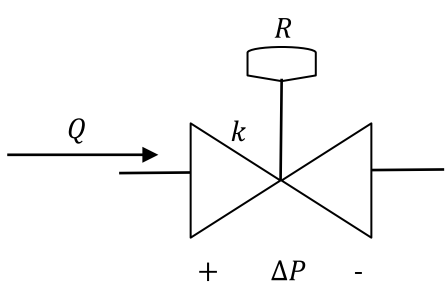
$$C\frac{dP}{dt} = Q_1 - Q_2$$

Ecuación dinámica para la presión

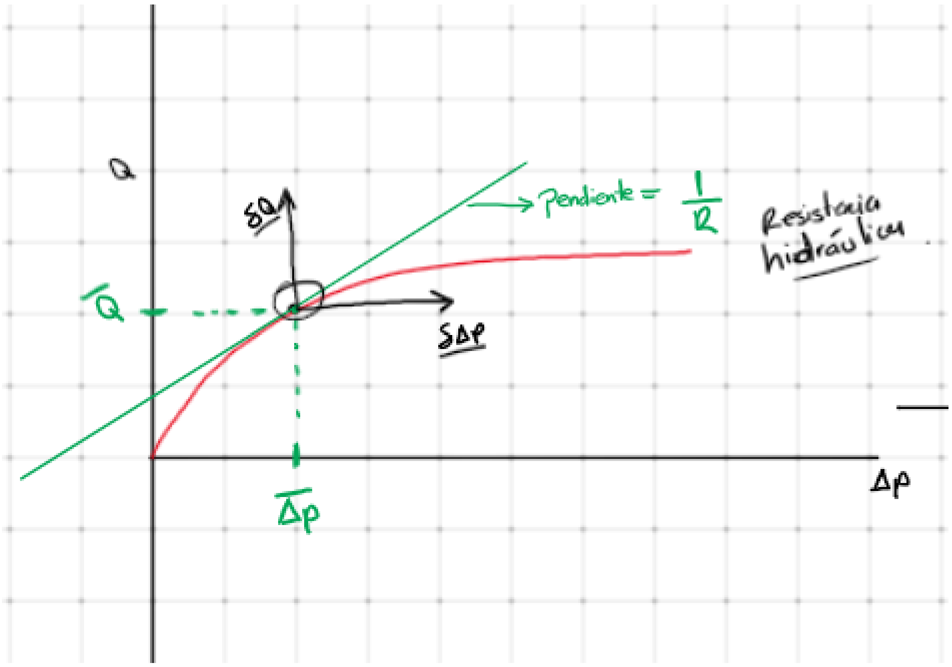
$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{C}[Q_1 - Q_2]$$



Modelo para una válvula



$$Q = k\sqrt{\Delta P}$$



Para el modelo del tanque podemos hallar el caudal.

$$Q_2 = k\sqrt{P - P_a}$$

$$Q_2 = k\sqrt{P - P_a}$$

$$Q_2 = k\sqrt{\rho g H_1 + P_a - P_a}$$

$$Q_2 = k\sqrt{\rho g H_1}$$

$$Q_2 = k\sqrt{\rho g}\sqrt{H_1}$$

$$Q_2 = A_2\sqrt{2g}\sqrt{H_1}$$

Ecuación dinámica para la altura

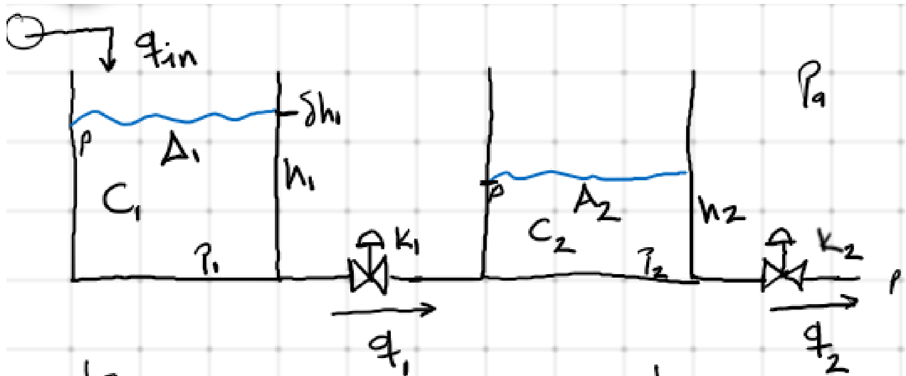
$$\dot{V} = Q_1 - Q_2$$

$$\frac{d(A * h)}{dt} = Q_1 - Q_2$$

$$A\frac{d(h)}{dt} = Q_1 - Q_2$$

$$\frac{d(h)}{dt} = \frac{1}{A}[Q_1 - Q_2]$$

$$Q = k\sqrt{h}$$



$$\frac{dP_1}{dt} = \frac{1}{C_1}\left[q_{in} - q_1\right] \qquad \frac{dP_2}{dt} = \frac{1}{C_2}\left[q_1 - q_2\right]$$

$$q_1 = k_1\sqrt{P_1 - P_2}$$

$$q_2 = k_2\sqrt{P_2 - P_a}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = \dfrac{1}{C_1}\left[q_{in} - k_1\sqrt{P_1 - P_2}\right] \\[2ex] \dfrac{dP_2}{dt} = \dfrac{1}{C_2}\left[k_1\sqrt{P_1 - P_2} - k_2\sqrt{P_2 - P_a}\right] \end{cases}$$

No lineal.

$$h_1 = \frac{P_1 - P_a}{\rho g}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A(h)}(Q_{in} - Q_{out})$$

$$Q = k\sqrt{\Delta h} \quad FLUJO\ TURBULENTO$$

$$Q = \frac{\Delta h}{R} \quad FLUJO\ LAMINAR$$

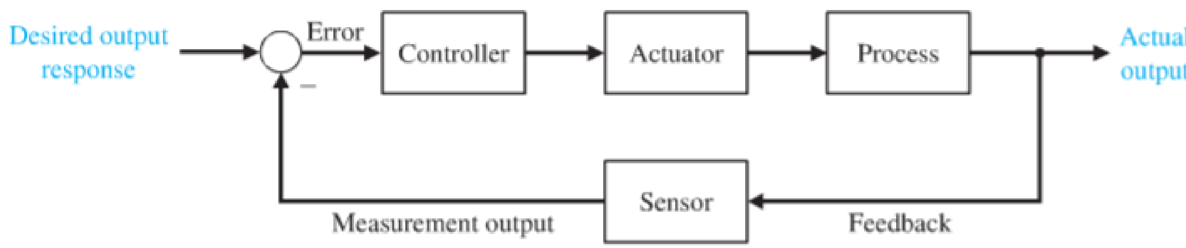
$$\frac{dP}{dt} = \frac{1}{C(h)}(Q_{in} - Q_{out})$$

$$Q_2 = k\sqrt{\Delta P}$$

$$Q = \frac{\Delta P}{R}$$

Sistema de control

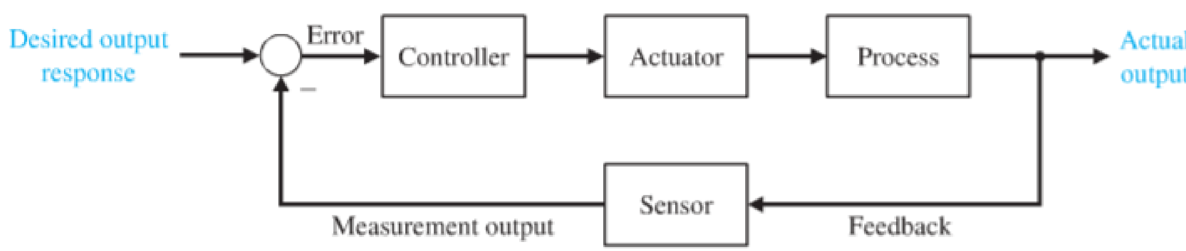
Un sistema de control es una interconexión de componentes o dispositivos tal que la salida del sistema puede seguir una señal deseada.



Sistema de control retroalimentado SISO

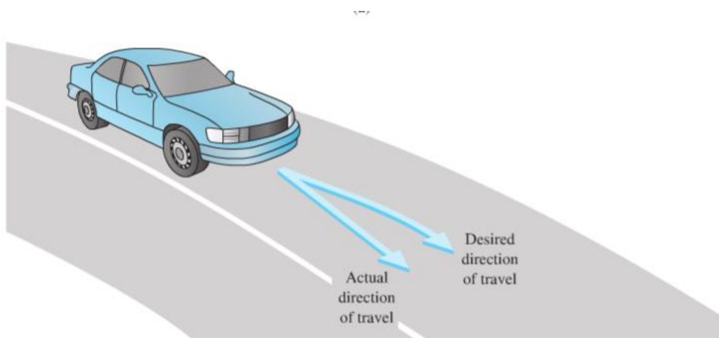
Sistema de control

Un sistema de control es una interconexión de componentes o dispositivos tal que la salida del sistema puede seguir una señal deseada.

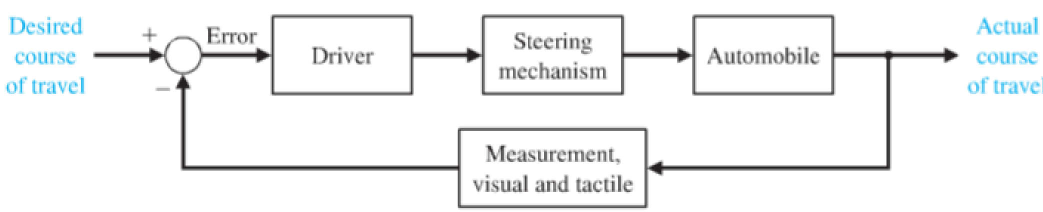


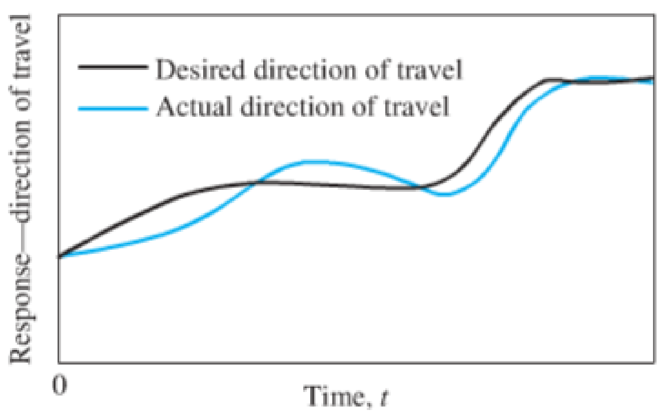
Sistema de control retroalimentado SISO (una entrada una salida)

Ejemplo sistema de control

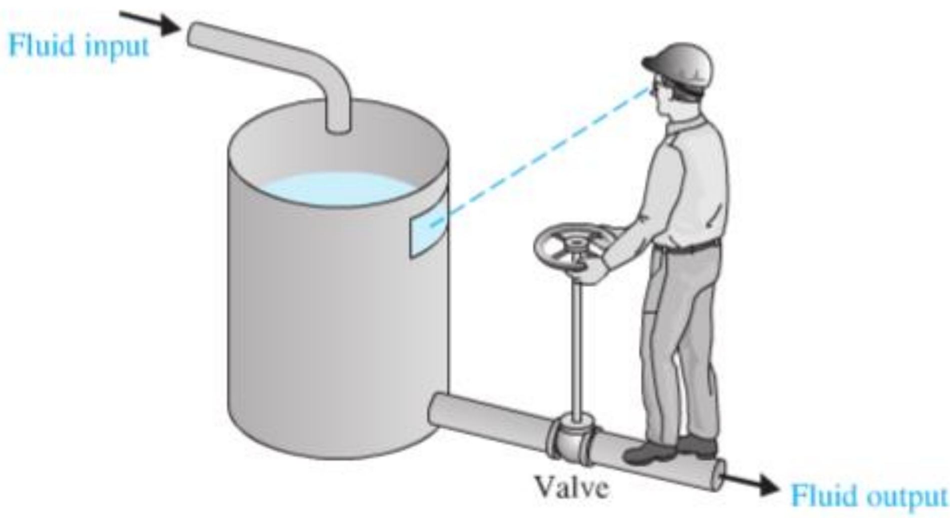


Manejo de un automóvil manual o automático



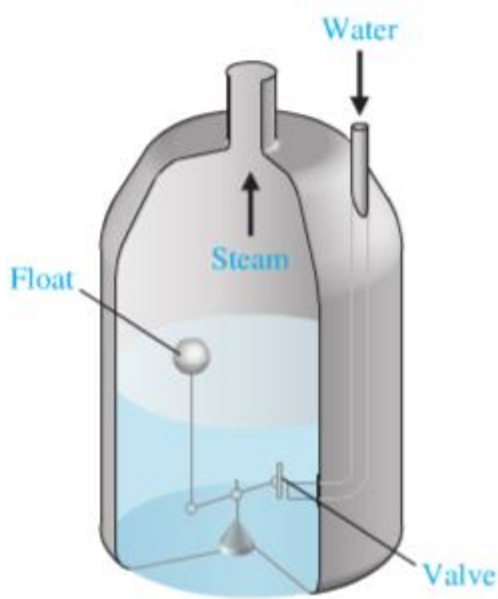


Ejemplo 2

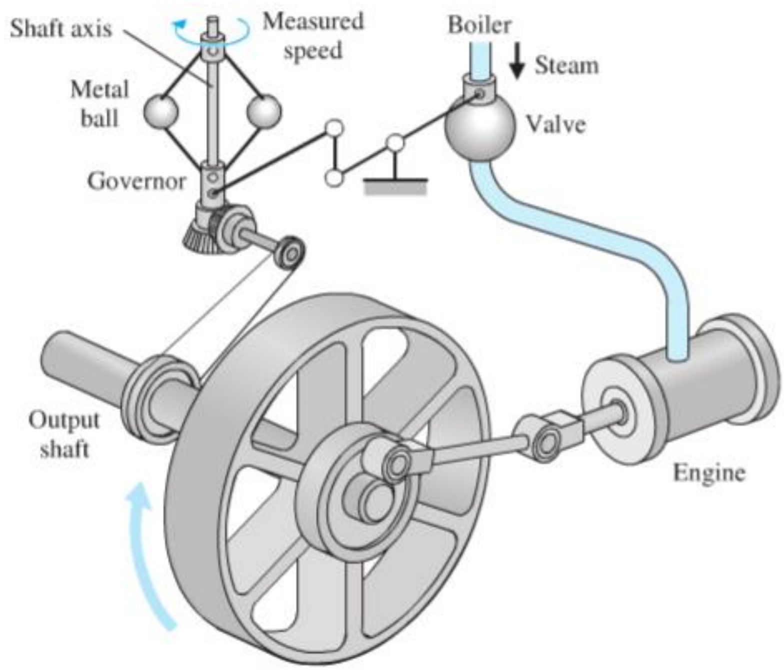


Control manual de nivel de liquido

Ejemplo 3

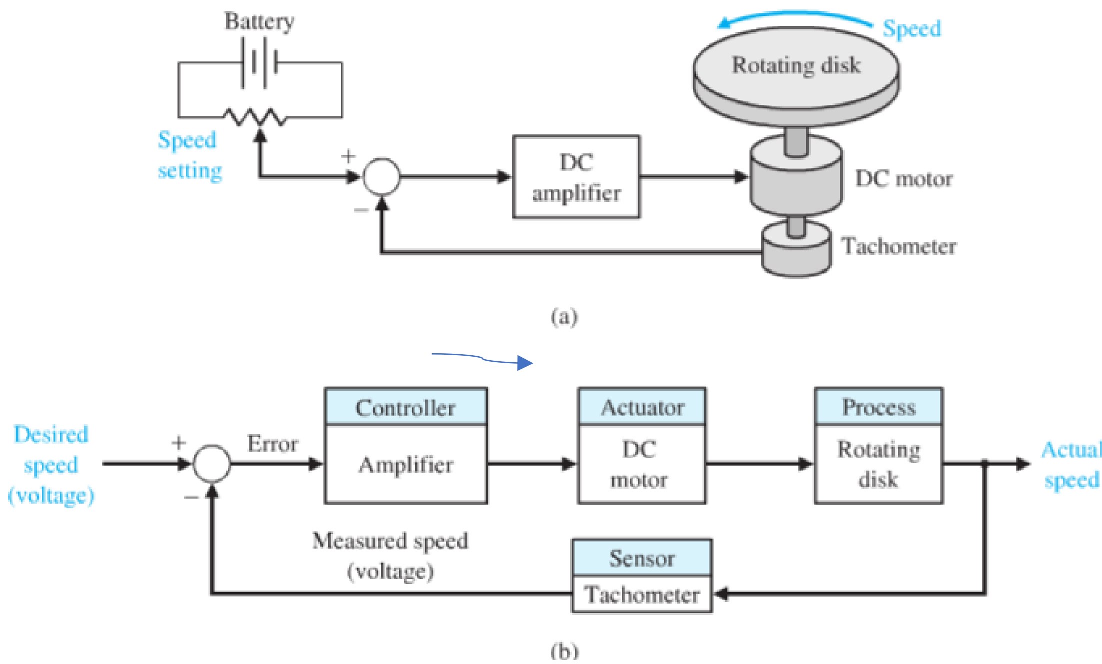


Ejemplo 4 Control de nivel de líquido automático con flotador

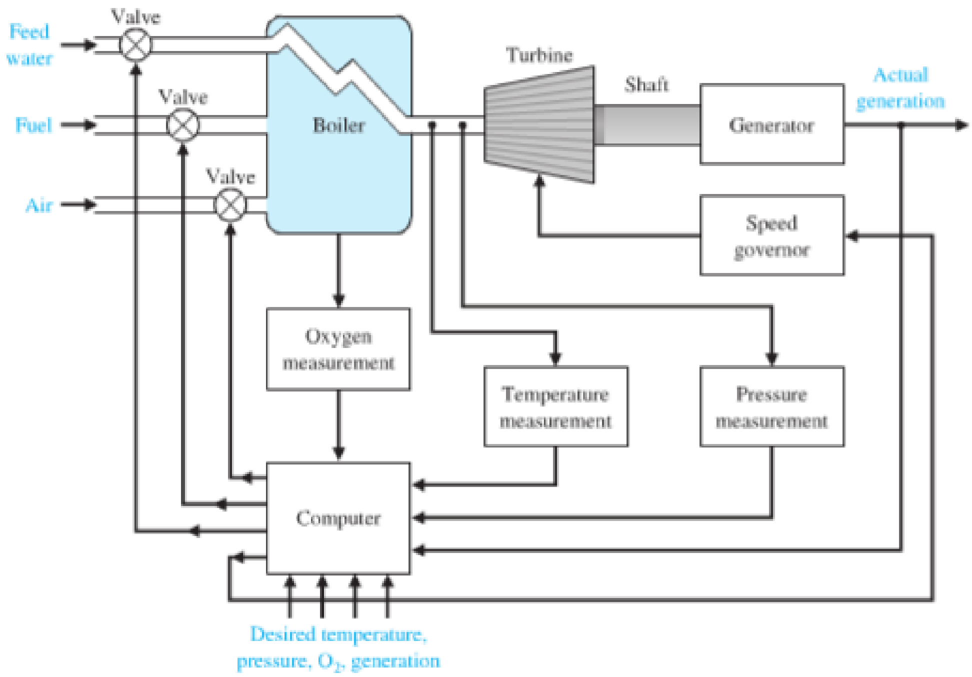


Control de velocidad con regulador mecánico, ver [2]

Ejemplo 5



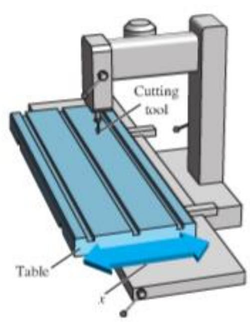
Sistema de control de velocidad retroalimentado para un disco duro



Sistema de control para generador eléctrico con caldera

(MIMO) Múltiples entradas múltiples salidas

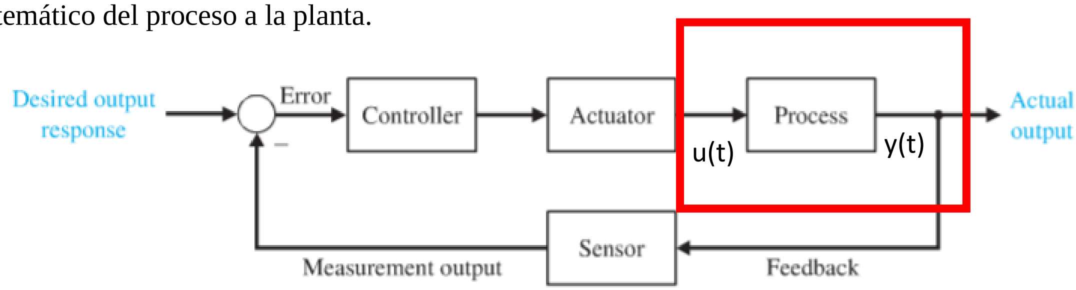
El control o ingeniería de control no se limita a una sola ingeniería. Esta puede aplicarse en la ingeniería aeronáutica, química, mecánica, ambiental, eléctrica, robótica, medicina hasta en la economía.



Ejemplo 7 otros sistemas de control

Modelado matemático

El primer paso para el análisis y diseño de un sistema de control moderno es determinar el modelo matemático del proceso a la planta.



El modelo matemático es generalmente descrito por ecuaciones diferenciales ordinarias EDO y representan al comportamiento dinámico (en el tiempo) del proceso a controlar. Estas se obtienen mediante leyes o relaciones físicas. Este modelo proporciona las bases necesarias para diseñar el controlador.

$$f(t, y, y', y'', .., y^n) = u(t)$$

$t\ tiempo\ es\ la\ varianble\ independiante$

$y, y' \dots, y^n\ es\ la\ varianble\ dependiante\ y\ sus\ derivadas$ (estados)

$u\ \ variable\ dependiante\ o\ termino\ fuente\ (entrada)$

Se dice que una ecuación diferencial es lineal si se puede escribir como una combinación lineal de las derivadas de y.

$$a_n(t)\frac{dy^n}{dt^n} + a_{n-1}(t)\frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_0(t)y = u(t)$$

Si $a_n(t), a_{n-1}(t), a_1(t)$ no cambian entonces es de parámetros constantes.

Además, un sistema es lineal si satisface las propiedades de superposición y homogeneidad.

$$f(ax) = af(x)\ homogenidad$$

Escalar la entrada en un factor a, escala la salida en un factor a

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)\ \ superposición$$

Sumar dos entradas produce la misma salida que aplicar cada entrada y luego sumar las salidas.

Modelo por Euler Lagrange

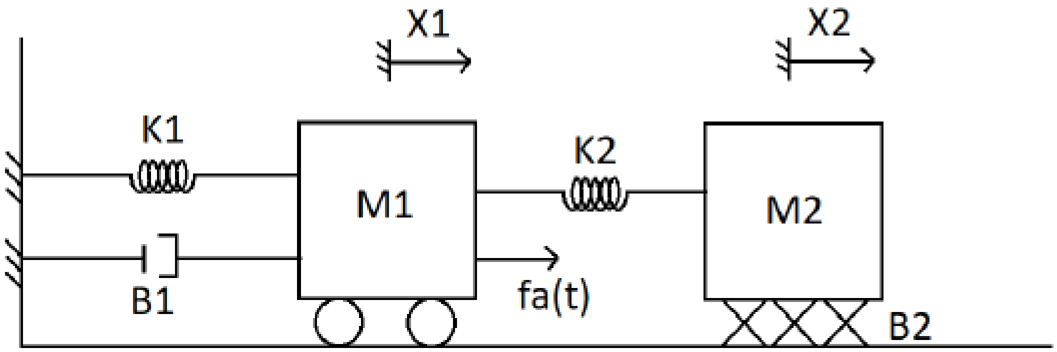


Figure 1: Modelo Mecánico 1

Energía cinética

$$T = \frac{1}{2}M_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x_2}^2 \quad (7)$$

Energía potencial

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 \quad (8)$$

Entonces el lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2}M_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x_2}^2 - \frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_1(x_1 - x_2)^2 \quad (9)$$

y funcion de disipación

$$D = \frac{1}{2}b_1\dot{x_1}^2 + \frac{1}{2}b_2\dot{x_2}^2 \quad (10)$$

A continuación se derivan cada uno de los términos de las ecuaciones de Euler–Lagrange

$$L = \overbrace{\frac{1}{2}M_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M_2\dot{x}_2^2}^{T} - \overbrace{\frac{1}{2}k_1x_1^2 - \frac{1}{2}k_2(x_1 - x_2)^2}^{U}$$

Ecuación de movimiento para la masa 1

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = M_1\dot{x}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = M_1\frac{d}{dt}\dot{x}_1 = M_1\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} = b_1\dot{x}_1$$

$$M_1\ddot{x}_1 - \left(-k_1x_1 - k_2(x_1 - x_2)\right) + b_1\dot{x}_1 = fa(t)$$

$$M_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) + b_1\dot{x}_1 = fa(t)$$

$$M_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 + k_2x_1 - k_2x_2 + b_1\dot{x}_1 = fa(t)$$

[1] Youtube, canal martator. Clepsidra - Antiguo reloj mecánico [Online] Avalible: https://youtu.be/mYOkQpiZNYg

[2] Youtube, James Little. Mechanical governor device [Online] Avalible: https://www.youtube.com/watch?v=u3lEnbrp9pI

[3] Youtube, Muséum Genève. Watt steam engine [Online] Avalible: https://youtu.be/1jVOTBZWkY4?t=132