Ecuaciones en diferencias y transformada Z

Caceres Sebastian, Troncoso Camila
{1803245, 1803307}@unimilitar.edu.co
Profesor: Nelson Velasco

***Resumen*—En este documento se tratarán los temas del teorema de muestreo, aliasing, unidades de frecuencia, composición de señales y se analizarán diferentes ejercicios en MaTLAB.**

***Palabras clave*— Señal, Frecuencia, aliasing, Muestra, teorema de muestreo,unidades.**

I. Competencias a desarrollar

- Habilidad para identificar, formular y resolver problemas complejos de ingeniería, aplicando principios de ingeniería, ciencias y matemáticas.
- Habilidad para comunicarse efectivamente ante un rango de audiencias.
- Capacidad de desarrollar y aplicar nuevos conocimientos según sea necesario, utilizando estrategias de aprendizaje apropiadas.

II. Desarrollo preguntas metodología

¿Cómo se representa matemáticamente un sistema de tiempo discreto?

Las señales en tiempo discreto se representan matemáticamente como secuencias de números. Una secuencia de números x, en los que el n-ésimo número se indica como x[n], se escribe formalmente así:
$x = \{x[n]\}, -\infty < n < \infty$, siendo un entero. En casos prácticos, estas secuencias surgen frecuentemente de muestrear una señal analógica (es decir, en tiempo continuo) xa(t). En este caso, el valor numérico del n-ésimo número de la secuencia es igual al valor de la señal analógica, xa(t), en el instante temporal nT, es decir,

$$x[n] = x_a(nT), -\infty < n < \infty.$$

La cantidad T se denomina periodo de muestreo, y su inversa es la frecuencia de muestreo.

¿Que es una ecuación en diferencias y que representa?

Una ecuación en diferencias es una expresión que relaciona distintas sucesiones, siendo una de ellas una sucesión desconocida. Son similares a las ecuaciones diferenciales, sustituyendo las funciones por sucesiones. Para su resolución suele utilizarse el método de la transformada Z.
Una ecuación en diferencias lineal de primer orden es aquella que puede expresarse como p1(t)yt+1 + p2(t)yt = q(t), donde pi(t), i = 1, 2 y q(t) son funciones en la variable discreta t.

Describa la ecuación en diferencias para un sistema que amplifica o atenúa la señal de entrada, realice un ejemplo

La ecuación en diferencia que representan un sistema que amplifica o atenúa una señal está dada por:

$$y(n) = |A| * x(n) \quad (1)$$

Describa la ecuación en diferencias para un sistema que genera atrasos o adelantos a la señal de entrada, realice ejemplos.

La ecuación en diferencia que determina atrasos o adelantos en la señal de entrada es definida por:

$$y(n) = x(n) - x(n - k) \quad (2)$$

Siendo k el valor de atraso o adelanto en el tiempo de entrada x(n).

¿Que es un sistema lineal e invariante en el tiempo?, ¿Cuáles son sus características y cómo se demuestran?

Un sistema lineal invariante en el tiempo (Linear Time-Invariant System, o LTI) puede describirse por un conjunto de ecuaciones diferenciales

$$b_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + b_0 y(t) = a_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_0 x(t)$$

(con $m \leq n$), más un conjunto de condiciones iniciales un sistema lineal e invariante con el tiempo con entrada x[n] y respuesta al impulso h[n] producirá la misma salida que otro sistema lineal en invariante con entrada h[n] y respuesta al impulso x[n]. La operación de convolución es también distributiva con respecto a la suma.

¿Qué es un sistema causal? Y ¿Qué es un sistema anticausal?, realice ejemplos

Un sistema es causal (no-anticipativo o físico) si la salida y(t) en un valor arbitrario de tiempo t=t0 depende solo de la entrada x(t) para t ≤ t0 , es decir depende solo de los valores presentes y/o pasados de la entrada; no depende de valores

futuros. No es posible obtener una salida antes de que se aplique la entrada.

Ejemplo: y(t) = x(t - 1)
Si t es en segundos, la salida depende de los valores de x hace un segundo o (t-1)
En el caso contrario, los sistemas no causales muestran una salida anticipada a la señal de entrada.

¿Que es la convolución lineal en sistemas de tiempo discreto?, ¿Qué aplicación tiene en el estudio de las señales y sistemas de tiempo discreto?

Supongamos un sistema lineal e invariante en el tiempo (SLIT). Si la señal de entrada es x[n], la señal de salida y[n] se calcula a través de la convolución

$$y(n) = \sum h(k) * x(n-k)$$

La señal h[n], que se supone conocida, es la respuesta del sistema al impulso unidad d[n]. La interpretación gráfica de la suma de convolución es muy sencilla. Para calcular la salida y[n] en un cierto instante fijo n, primero se dibujan h[k] y la versión "abatida y desplazada" x[n-k] sobre el eje k. En segundo lugar, se multiplican ambas señales para obtener la señal h[k] x[n-k]. Si se suman todos los valores de la nueva señal con respecto a k obtendremos el valor de y[n]. Obsérvese que estas operaciones tienen que repetirse para cada valor .

III. DESARROLLO EJERCICIOS PRÁCTICOS.

Para los sistema representados por las siguientes ecuación en diferencias:
Sistema 1:
$y(n) = x(n) - 0.5x(n-1) + 0.25x(n-2)$
Sistema 2:
$y(n) = 0.5x(n) + 0.1x(n-1) - 0.1y(n-1) + 0.2y(n-2)$

Transformada Z

¿Qué es la transformada Z y cuales son sus principales usos y/o aplicaciones?

La transformada z se utiliza para describir señales y componentes en sistemas de control de tiempo discreto.

$$Zf(k)= f(z)=\Sigma(k)z -k(x)$$

Se define que z es una variable definida por z = μ+jv donde μ y v son variables reales y j = √ −1.
Una de sus principales aplicaciones es en el estudio del

Procesamiento de Señales Digitales, como son el análisis y proyecto de Circuitos Digitales, los Sistemas de Radar o Telecomunicaciones y especialmente los Sistemas de Control de Procesos por computadoras.

El plano Z es un plano conformado por números complejos, donde cada punto del plano representa una función exponencial compleja (Ver tarea anterior).

¿En qué parte o región del plano Z se concentran las funciones crecientes?
Se encuentran donde $|Z| > 1$, es decir fuera del círculo unitario.

¿En qué parte o región del plano Z se concentran las funciones decrecientes?
Se encuentran donde $|Z| < 1$, es decir dentro del círculo unitario.

¿Qué tipo de funciones se encuentran sobre el círculo unitario?
Se encuentran las funciones oscilantes.

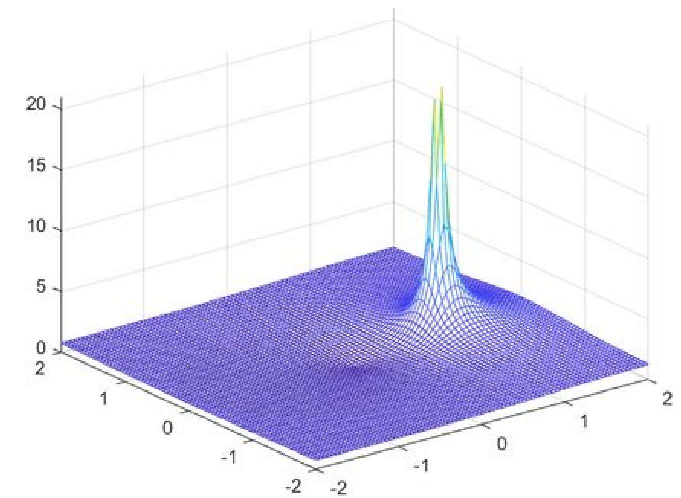
¿Qué ocurre al desplazarse sobre el círculo unitario (Variar el ángulo)?

¿Qué es una función de transferencia?
Para un sistema que es lineal y posee parámetros constantes, la función de transferencia está definida como el cociente entre la transformada de Laplace de la señal de salida Y(s) y la transformada de Laplace de una señal de entrada U(s), suponiendo las condiciones iniciales como nulas:

$$F(s) = \frac{()}{()}$$

¿Qué relación existe entre la función de transferencia y el plano Z?

Observe el gráfico generado en Matlab, revise los valores de la función que se forma sobre el plano Z. Estudie la bibliografía del curso y responda:



¿Cuánto vale la ganancia en el punto Z = 0 + 0j ?

z=0

¿Cuánto vale la ganancia en el punto Z = 1 + 0j ?

tiende a infinito

¿Cómo explica esos resultados, teniendo en cuenta lo que sabe sobre los polos y ceros de un sistema?

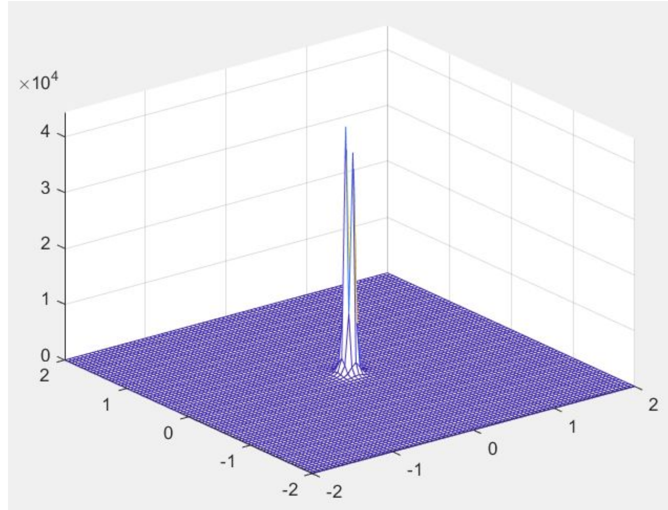
Cuando Z = Z = 0 + 0j se tiene un valor de 0 de la ganancia mientras que cuando Z = 1 + 0j, el valor de la ganancia es el más alto, esto lo podemos observar en el gráfico, ya que el denominador se hace 0, lo que nos genera el aumento de la ganancia hacia infinito en ese punto.

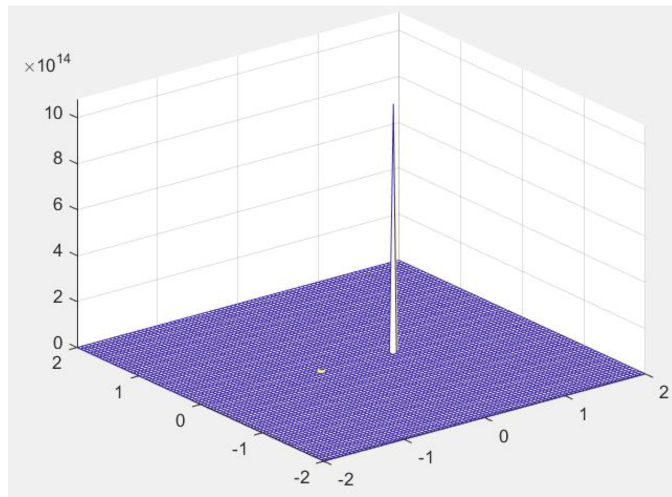
EJERCICIO PRÁCTICO:
Encuentre las funciones de transferencia de los sistemas 1 y 2.

$$y(n) = x(n) - 0.5x(n-1) + 0.25x(n-2)$$
$$z[x(n-k)] = z^{-n}z[x(n)]$$
$$y(z) = x(z) - 0.5z^{-1}x(z) + 0.25z^{-2}x(z)$$
$$y(z) = x(z)[1 - 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}]$$
$$\frac{y(z)}{x(z)} = \frac{1 - 0.5z^{-1} + 0.25z^{-2}}{z^2}$$

$$y(n) = 0.5x(n) + 0.1x(n-1) - 0.1y(n-1) + 0.2y(n-2)$$
$$z[x(n-k)] = z^{-n}z[x(n)]$$
$$y(z) = 0.5x(z) + 0.1z^{-1}x(z) - 0.1z^{-1}y(z) + 0.2z^{-2}y(z)$$
$$y(z)[1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}] = x(z)[0.5 + 0.1z^{-1}]$$
$$\frac{y(z)}{x(z)} = \frac{0.5z^2 + 0.1z}{z^2 + 0.1z - 0.2}$$

● **Realice las gráficas tridimensionales (matlab) respectivas de dichas funciones en el plano Z, modifique el código ejemplo suministrado.**





● **¿Al observar las gráficas que puede concluir?**
La primera presenta un polo en 0.
La segunda presenta polos en -0.5 y 0.4.
● **¿Que representa esa función tridimensional?**
Representa el comportamiento de las funciones de transferencia para cada Z.
● **¿Qué significa que el valor de Z sea reemplazado por algún valor complejo en la función de transferencia de un sistema?**
Significa forzar la función de transferencia a ser evaluada en un punto.
● **¿Que significa que el valor para reemplazar Z en la función de transferencia sea un número complejo cuya norma sea menor que 1?**
Significa que este número complejo va a estar a una distancia menor a una unidad respecto del radio del origen.
● **¿Que significa que el valor para reemplazar Z en la función de transferencia sea un número complejo cuya norma sea mayor que 1?**
Significa que este número complejo va a estar a una distancia mayora una unidad respecto del radio del origen.

● ¿Que significa que el valor para reemplazar Z en la función de transferencia sea un número complejo cuya norma sea igual a 1?

Significa que este número complejo va a estar a una distancia igual a una unidad respecto del radio del origen.

● ¿Qué representan los polos del sistema? y ¿Qué representan los ceros del sistema?

Ceros: son los valores de z que hacen que H(z) = 0

Polos: son los valores de z que hacen que H(z) = ∞

● ¿Por qué los polos definen que un sistema sea estable o inestable?

Para que un sistema sea estable debe cumplir una condición necesaria, la cuál es que todos los polos de su función de transferencia posean una parte real negativa. Por lo tanto, hallando las raíces de la ecuación característica se puede llegar a estudiar la estabilidad del sistema. En el caso de que aparezcan polos reales negativos, el sistema presenta una tendencia a estabilizarse alrededor de un valor determinado, por lo cual el sistema poseerá un bucle de realimentación negativo. Mientras que, si aparecen polos reales positivos, el sistema presentará una tendencia al crecimiento exponencial, es decir poseerá un bucle de realimentación positivo.

● ¿Cómo afecta la ubicación de los ceros la respuesta del sistema?

Al agregar un cero en la función de transferencia del sistema en lazo cerrado, disminuye el tiempo de subida e incrementa el tiempo de sobre impulso (overshot) de la respuesta al escalón. Sin embargo, cuando las raíces de la ecuación característica se utilizan para estudiar el amortiguamiento relativo y la estabilidad relativa de sistemas de control lineales, los ceros de la función de transferencia no se deben sobrepasar en sus efectos del desempeño transitorio del sistema.

● ¿Qué ocurre si el valor de Z es reemplazado por una valor cercano a uno de los polos de la función de transferencia?

Ocurre que el sistema se vuelve inestable ya que los polos son las raíces del denominador de la función de transferencia, y si toma valores cercanos el denominador seria cero y tendería a infinito.

● ¿Qué ocurre si el valor de Z es reemplazado por una valor cercano a uno de los ceros de la función de transferencia?

Ocurre que el sistema se atenúa ya que los ceros son las raíces del numerador de la función de transferencia y si toma un valor cercano, la función se haría cero.

Considere la función de transferencia de los sistemas 1 y 2 y la transformada Z del impulso unitario.

● Multiplique respectivamente las funciones de transferencia de los sistemas 1 y 2 por la transformada Z del impulso unitario y Aplique un método de inversión de la transformada Z a los resultados obtenidos.

Primera y(n)/x(n)=x(n-2)-0.5x(n-2)+0.25x(n-3)

Segunda y(n)/x(n)=

● Compare el resultado anterior con las respuestas impulsionales de los sistemas obtenidas anteriormente en excel.

● Luego de realizar estos ejercicios ¿Que puede concluir? Considere ahora la transformada Z del escalón unitario.

● Multiplique respectivamente las funciones de transferencia de los sistemas 1 y 2 por la transformada Z del escalón unitario y Aplique un método de inversión de la transformada Z a los resultados obtenidos.

● Simule en el archivo excel la aplicación del escalón unitario a cada sistema, compare los resultados.

● Con este nuevo ejercicio y los resultados anteriores ¿Qué puede concluir?

● ¿En qué valores respectivamente para cada sistema se estabiliza la respuesta al escalón?

● Realice en matlab el gráfico de las funciones tridimensionales para cada una de las funciones de transferencia y ubique en el plano Z el punto Z=1, para cada una de las funciones tridimensionales de los sistemas 1 y 2, ¿Cuál es el valor en ese punto para cada función tridimensional?

● Reemplace directamente en las funciones de transferencia de los sistemas 1 y 2 el valor Z=1, luego de simplificar y obtener la norma ¿Qué valores, para cada sistema, se obtienen?

● ¿Qué concluye de este ejercicio?

Autoevaluación:
1)100%
2)100%
3)95%
4)90%