9. Estimación y Procesos Estocásticos

Conocimientos previos

- Probabilidad y estadística.
- Correlación de señales.

Competencias a desarrollar:

Meta ABET	Indicadores
Habilidad para identificar, formular y resolver problemas complejos de Ingeniería aplicando principios de Ingeniería, ciencias y matemáticas	Conocer las relaciones entre los fenómenos físicos y el modelo mediante leyes, teoremas y principios.
	Escoger los requerimientos necesarios en el planteamiento de soluciones, teniendo en cuenta las partes interesadas
Habilidad para comunicarse efectivamente ante un rango de audiencias	Expresar ideas en forma clara y concisa, mediante un lenguaje apropiado al contexto (comunicación oral y escrita)
	Aplicar una estrategia de comunicación oral y escrita para presentación de propuestas, proyectos, reportes de resultados, reportes técnicos de avances.
Capacidad de desarrollar y aplicar nuevos conocimientos según sea necesario, utilizando estrategias de aprendizaje apropiadas	Relacionar la información existente en las diferentes fuentes respecto a un problema

Metodología:

Revise las fuentes bibliográficas del curso para responder las preguntas teóricas, lleve sus dudas y conclusiones para ser presentadas en clase. Desarrolle los ejercicios prácticos y presente un informe usando la plantilla (overleaf).

PARTE TEÓRICA

Vea los siguientes videos relacionados con el tema:
https://www.youtube.com/watch?v=WKPDZLus8Fo
https://www.youtube.com/watch?v=JmnmZB5VcyE
https://www.youtube.com/watch?v=WKPDZLus8Fo
https://www.youtube.com/watch?v=fjqd0gG-5OE
https://www.youtube.com/watch?v=5NMxiOGL39M
https://www.youtube.com/watch?v=KhAUfqhLakw
https://www.youtube.com/watch?v=IgCL_AoD_0U

Otros enlaces de interés:
https://egertonconsulting.com/a-comparison-of-classical-and-bayesian-statistics/?doing_wp_cron=1560782778.0248889923095703125000
https://www.researchgate.net/post/Bayesian_vs_Classical_Statistics

https://towardsdatascience.com/maximum-likelihood-estimation-how-it-works-and-implementing-in-python-b0eb2efb360f

Puede buscar más recursos en la web para estudiar el tema con mayor detalle.

Investigue sobre la teoría de la estimación. Busque su definición, cuáles son sus aplicaciones y mencione cuáles estrategias o métodos emplea comúnmente. Describa cómo la teoría de la estimación es aplicada en:

- Radar y/o Sonar.
- Reconocimiento de lenguaje hablado (fonemas).
- Mencione y explique al menos 2 aplicaciones más.

Investigue los siguientes conceptos básicos:

- Ruido y tipos de ruido
- Sesgo de un estimador (Bias)
- Varianza de un estimador (Variance)
- Estimador de mínima varianza (Minimum variance estimator)
- Estimador sin sesgo (Unbiased estimator)

Responda las siguientes preguntas:

- ¿Qué diferencias existen entre la teoría de estimación clásica (frecuentista) y la teoría de estimación bayesiana?
- ¿Qué es el teorema de Bayes?
- Describa cómo el teorema de bayes se aplica a la teoría de estimación de señales.
- ¿Cómo se define el concepto de estimador frecuentista?
- ¿Qué es el estimador de *Máxima Verosimilitud* (MLE)?, ¿Cómo se aplica al problema de estimación de parámetros o señales?
- ¿Cómo se define el concepto de estimador bayesiano?
- ¿Qué es un Apriori o prior (conocimiento previo)?
- ¿Cómo se obtiene o genera un Apriori?
- ¿Que es el estimador de *Maximum A Posteriori* (MAP)?, ¿Cómo se aplica al problema de estimación de parámetros o señales?.

EJERCICIOS PRÁCTICOS:

1.Características de un estimador

El siguiente código ejemplo realiza el experimento descrito en el primer video:

```
%Estimadores con sesgo y sin sesgo
m=1;
s=1;
N=4000;
P=3;
%Generando observaciones
x=normrnd(m,sqrt(s),N,P);
%Calculando estimador de media muestral
m_h=mean(x,2);
media=mean(m_h)
```

```
%Histograma de estimador de media muestral
figure('Name','Estimador de media muestral')
h1=histogram(m_h,50);
hold on
stem(mean(m_h),max(h1.Values))
hold off
%Estimador de varianza sesgado
s_b=var(x,1,2);
var_sesgo=mean(s_b)
%Histograma de varianza sesgado
figure('Name','Estimador de varianza sesgado')
h2=histogram(s_b,50);
hold on
stem(mean(s_b),max(h2.Values))
hold off
%Estimador de varianza insesgado
s_u=var(x,0,2);
var_unses=mean(s_u)
%Histograma de varianza sin sesgo
figure('Name','Estimador de varianza sin sesgo')
h3=histogram(s_u,50);
hold on
stem(mean(s_u),max(h3.Values))
hold off
```

Observe, ejecute y comprenda su funcionamiento. Compruebe las características que se mencionan en los videos.

Repita nuevamente el experimento haciendo los siguiente ajustes:

- Haga pruebas variando el número de muestras (N), describa cómo cambian las características del estimador.
- Utilice una distribución uniforme (Matlab:rand()) para generar las muestras (x_1, x_2, x_3), siga utilizando la misma estrategia de estimación de media y varianza, compare los resultados con los anteriores.
- Utilice una distribución exponencial (Matlab:exprnd()) para generar las muestras (x_1, x_2, x_3), siga utilizando la misma estrategia de estimación de media y varianza, compare los resultados con los anteriores.
- ¿En que cambian y por qué cambian los resultados de los experimentos?

2.Estimador de media muestral

Considere un sensor del cual no conoce su modelo. En una observación de datos capturados dentro de un intervalo de tiempo, se observa que estos datos pueden ser modelados mediante

$$x(n) = A + w(n)$$

Donde $w(n)$ es ruido aleatorio y A parece ser un nivel DC desconocido. A partir de los valores $x(0), x(1), x(2), ..., x(N-1)$ se desea conocer el valor de A.

A continuación encontrará un ejemplo de estimador que mediante la media muestral minimiza el error de mínimos cuadrados para encontrar el valor de A a partir de las observaciones $x(n)$

- Estimador de media muestral

$$\widehat{A} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)$$

```
%Ejemplo Estimador de media muestral con mínimos cuadrados
A=4; % valor DC de la señal xn "desconocido"
N=100; % número de muestras de xn
xn=A+normrnd(0,1,N,1); % señal con ruido Gaussiano (media=0, sigma=1)
%Optimización por gradiente descendente
% punto de partida
A_h=xn(1);
%parametros de optimizacion
stop = 1;
step=0.1;
max_iter=500;
iter=0;
% loop de optimización
while stop > 0.00001 & iter<max_iter
   A_hp=A_h;
   err=-sum((xn-A_h))/N;
   A_h=A_h-step*err;
   stop = abs(A_h-A_hp);
   iter = iter+1;
End
%Resultado final
A_h
error = abs(A-A_h)
```

Observe, entienda y ejecute el ejemplo y describa brevemente los resultado observados.

Modifique el código ejemplo para que funcione con:

- El estimador de muestra inicial de los datos

$$\overline{A} = x(1)$$

Teniendo ambos programas, realice 50 corridas de cada uno y responda:

- Calcule el valor esperado de ambos estimadores y la varianza para ambos estimadores.
- Grafique las distribuciones de probabilidad (Matlab:hist()) de los resultados de calcular los estimadores.
- ¿Cuál estimador tiene menor varianza?
- ¿Cuál de los estimadores está más cercano al valor real?
- ¿Cuál estimador tiene sesgo y cuál no?

Repita el ejercicio con diferentes amplitudes de ruido y responda

- ¿Cuál de los estimadores es más robusto frente al nivel de ruido?
- Teniendo en cuenta la respuesta anterior, explique el porqué de dicha respuesta.

- ¿Puede diseñar un estimador con mejores características que los planteados?, explique y demuestre su respuesta.

3. Estimadores clásicos (frecuentistas) y bayesianos

Considere un sensor del cual no conoce su modelo. En una observación de datos capturados dentro de un intervalo, se observa que estos datos pueden ser modelados mediante

$$x(n) = A + w(n)$$

Donde $w(n)$ es ruido aleatorio y A es un nivel DC desconocido. A partir de los valores $x(0), x(1), x(2), ..., x(N-1)$ se desea conocer el valor de A. Aplique el MLE y MAP para resolver el problema

<u>Estimador de Maximum Likelihood (MLE)</u>:

Aplique el MLE al problema de estimar el valor A a partir de los valores observados $x(n)$, que obedece al siguiente modelo:

$$x(n) = A + w(n)$$

Donde A es un valor DC desconocido y $w(n)$ es ruido blanco gaussiano ($\mu = 0$, $\sigma = 1$).

Realice el programa en matlab donde se aplique este estimador.

<u>Estimador de Maximum A Posteriori (MAP)</u>:

Aplique el estimador MAP al problema de estimar el valor A a partir de los valores observados $x(n)$, que obedece al siguiente modelo:

$$x(n) = A + w(n)$$

Donde A es un valor DC desconocido y $w(n)$ es ruido blanco gaussiano ($\mu = 0$, $\sigma = 1$).

- Considere una distribución normal para formular el prior
- Considere una distribución uniforme para generar el prior

Realice simulaciones en matlab usando este estimador.

<u>Señal sinusoidal:</u>

Repita los ejercicios (MLE y MAP) en matlab pero ahora

$$x(n) = Acos(2\pi fn) + w(n)$$

- Considere el escenario donde el parámetro desconocido es A y la frecuencia (f) es conocida.
- Considere el escenario donde el parámetro desconocido es la frecuencia (f) y la amplitud A es conocida.

¿Cómo es el desempeño de los estimadores?, explique su respuesta.

Autoevaluación:

En este apartado debe realizar una autoevaluación del proceso desarrollado y de las habilidades adquiridas con las actividades propuestas. Para ello responda las siguientes preguntas otorgando el valor porcentual (0 - 100 %) a cada una de ellas.

1. ¿Desarrolló la totalidad de las actividades propuestas?
2. ¿La metodología le permitió construir saberes significativos que le aporten al desarrollo del tema planteado?
3. ¿Qué tanto fue su grado de dedicación durante el desarrollo de las actividades planteadas?
4. ¿Qué tanto fue su grado de interés en el tema propuesto?
5. Otorgue un valor porcentual a cada uno de los indicadores de las metas propuestas según su cumplimiento

Retroalimentación:

En esta sección se espera que a partir de lo vivido durante el desarrollo de las actividades propuestas, Ud pueda dar algunas recomendaciones o sugerencias sobre el tema y el desarrollo de las mismas. Tenga en cuenta que sus aportes enriquecen el ejercicio docente, gracias.