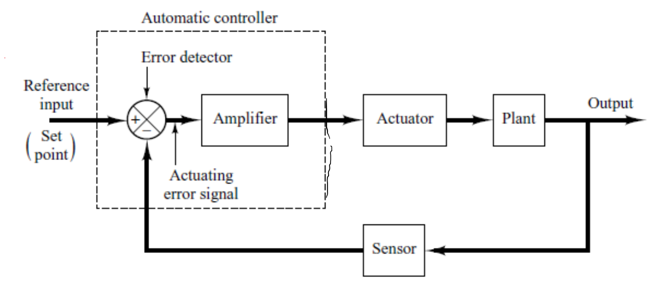
Notas de clase semana 3

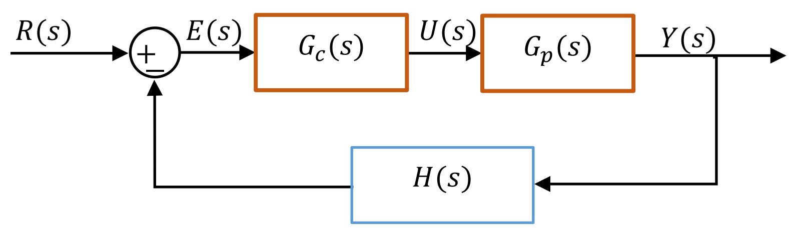
Castro Andrés

Temas:

- ✓ Sistemas de control con retroalimentación unitaria.
- ✓ Especificaciones de funcionamiento en el dominio del tiempo.
- ✓ Respuesta dinámica y teoría del error.
- ✓ Sintonización PID Zigler Nichols.
- ✓ Resolver dudas de la tarea.

En esta semana vamos a analizar el comportamiento de los sistemas de control con retroalimentación. Comportamiento transitorio y en estado estable.



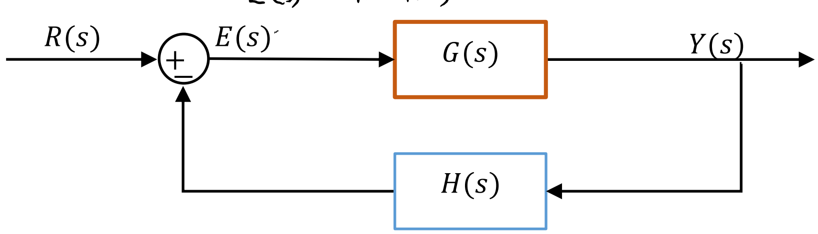


Función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = G_c(s)G_p(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)}$$

R(s) − H(s) Y(s)



Función de transferencia en lazo cerrado

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}\right)$$

$$R(s) - H(s)Y(s) = E(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)}$$

$$E(s) = \frac{Y(s)}{G(s)}$$

$$R(s) - H(s)Y(s) = \frac{Y(s)}{G(s)}$$

$$R(s) = \frac{Y(s)}{G(s)} + H(s)Y(s)$$

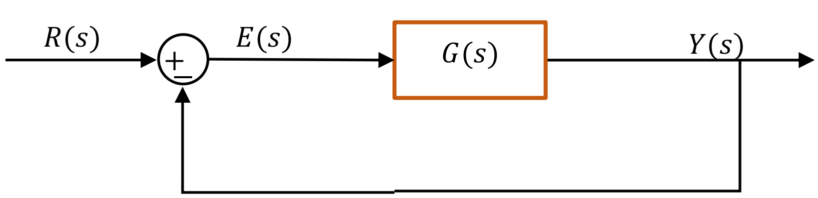
$$R(s) = \left(\frac{1}{G(s)} + H(s)\right)Y(s)$$

$$R(s) = \left(\frac{1 + G(s)H(s)}{G(s)}\right)Y(s)$$

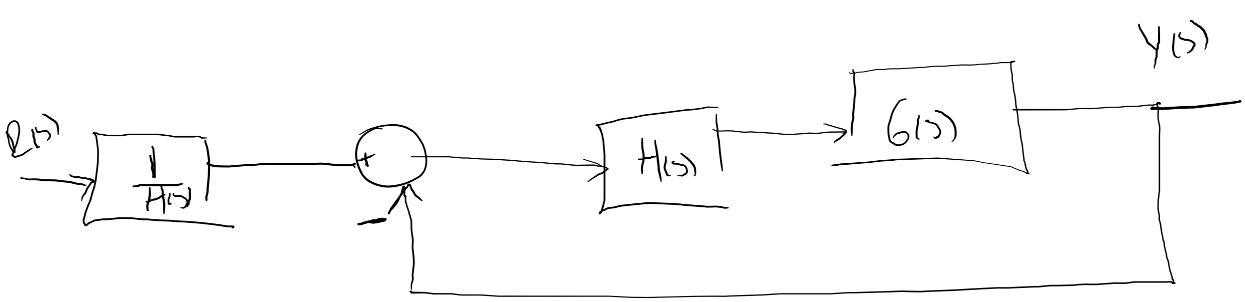
$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \left(\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}\right)$$

Sistema de control con retroalimentación unitaria

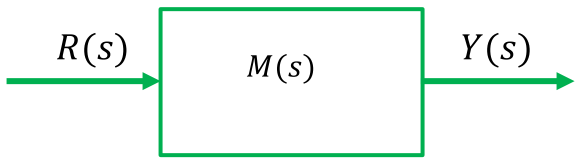
$$H(s) = 1$$



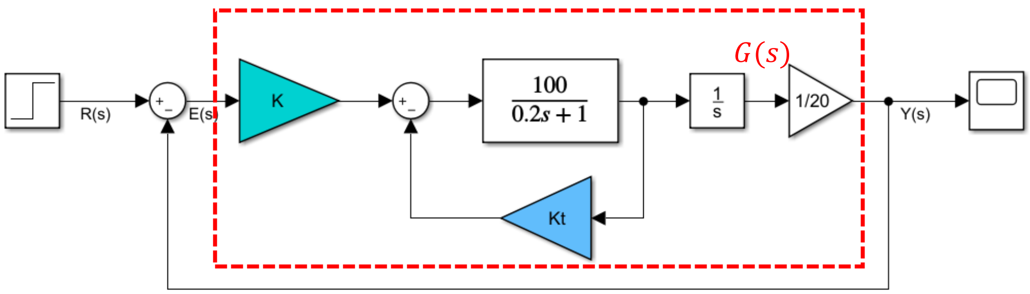
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(\frac{G(s)}{1 + G(s)}\right)$$



$$M(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{\underbrace{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}_{polinomio\ característico\ en\ lazo\ cerrado}}$$



Ejercicio1. Es diagrama de bloques de la figura representa un sistema de control para un motor DC. Hallar la función de transferencia en lazo cerrado. Si K=2 Kt=$6x10^{-4}$ Simular y obtener la respuesta en el tiempo de y(t).



Función de transferencia en lazo abierto

$$G(s) = \frac{100K}{20s(1 + 100K_t + 0.2s)}$$

Función de transferencia en lazo cerrado

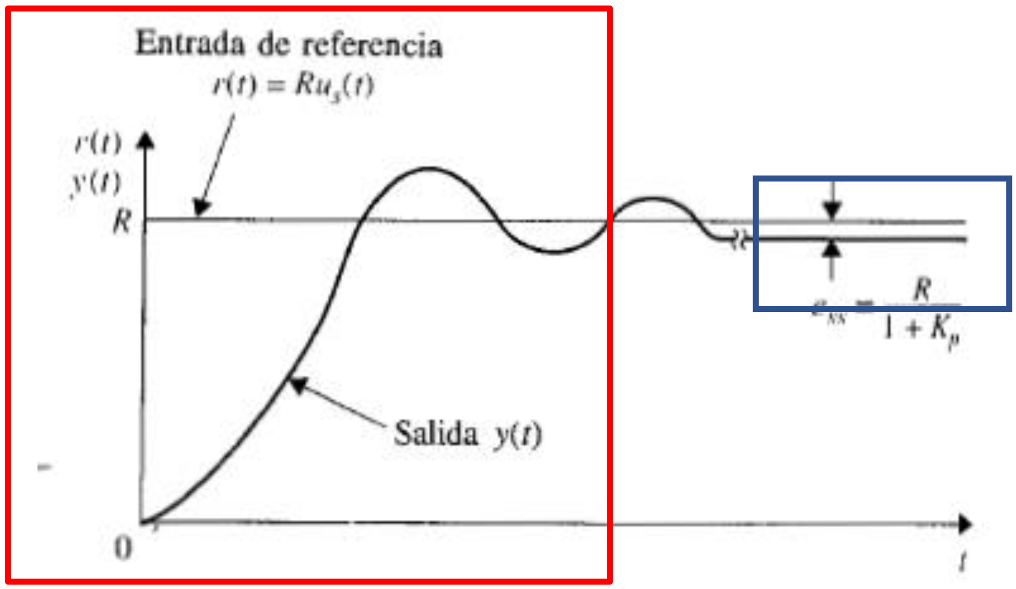
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100K}{4s^2 + 20(1 + 100K_t)s + 100K}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{100(2)}{4s^2+20(1+100(6\text{x}10^{-4}))s+100(2)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{200}{4s^2+21.2s+200}$$

Respuesta transitoria al escalón y especificaciones en el tiempo de un sistema de control.



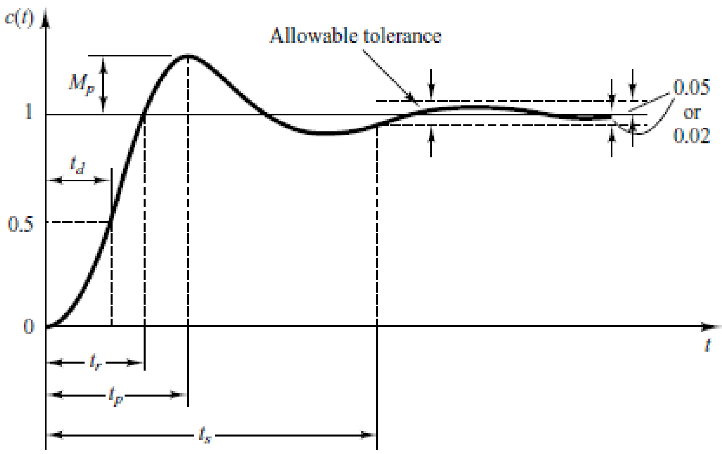
Los sistemas de control tienen una respuesta transitoria y una respuesta en estado estacionario. La respuesta transitoria desaparece en el tiempo, pero esta respuesta es importante, ya que la amplitud del sobre impulso (estabilidad relativa) y la duración del transitorio (rapidez) debe mantenerse dentro de los limites o márgenes tolerables o de diseño. La respuesta en estado estable permanece en el tiempo siguiendo la señal de entrada o referencia. También, es importante ya que indica en donde terminará la salida e indicará la exactitud final del sistema (error de estado estable).

$$y(t)=y_{tt}+y_{ss}$$

$$y_{tt}\ Respuesta\ transitoria$$

$$y_{ss}\ respuesta\ en\ estado\ estable$$

En el diseño de un sistema de control las especificaciones se definen en términos del desempeño transitorio y el error en estado estable. Por lo tanto, los controladores se diseñan para que cumplan estas especificaciones.



M_p *Sobre paso máximo*

t_d *tiempo de retardo*

t_r *Tiempo de levantamiento*

t_s *Tiempo de establecimiento*

t_p *Tiempo pico*

Sobre paso máximo es igual $y_{max} - y_{ss}$ y se expresa en porcentaje como

$$M_p\% = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} \times 100$$

Tiempo de retardo t_d tiempo requerido para que alcance el 50% del valor final.

Tiempo de levantamiento t_r tiempo requerido para que la respuesta se eleve del 0-100% de su valor final.

Tiempo de asentamiento t_s tiempo requerido para que la respuesta el escalón disminuya y permanezca dentro de un porcentaje especifico de su valor final 5% ó **2%**

Estos cuatro índices dan las características transitorias de un sistema de control.

Respuesta de segundo orden y especificaciones en términos de ζ y ω_n ; Mp, ts

El análisis de sistemas de control se basa en la respuesta de segundo orden. Su análisis permite entender el análisis y diseño de sistemas de sistemas de control de orden superior.

$$G(s) = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

Donde:

ζ es el factor de amortiguamiento relativo.

ω_n frecuencia natural no amortiguada.

Sobre impulso	Tiempo de asentamiento 2%	Tiempo del pico	Tiempo de subida
$\mathbf{M_p} = \boldsymbol{e}^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}$	$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n}$	$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$	$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

Si igualamos el polinomio característico a 0

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = 0$$

Sus raíces s_1 y s_2 nos dirán la ubicación de los polos del sistema.

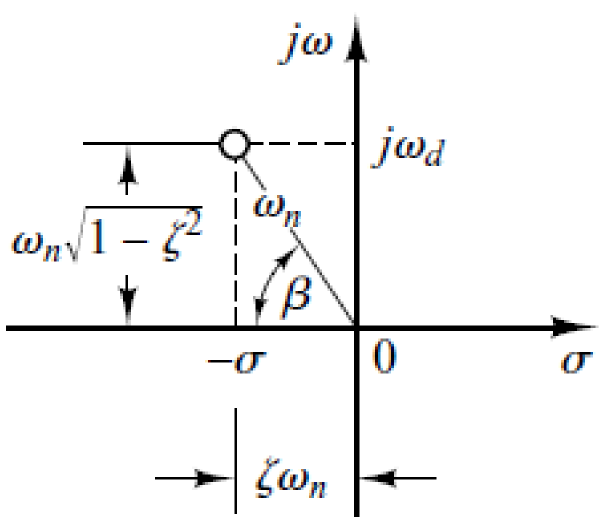
$$s_1 , s_2 = \frac{-2\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta{\omega_n}^2 - 4{\omega_n}^2}}{2}$$

Simplificando

$$s_1 , s_2 = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$s_1 , s_2 = -\sigma \pm j\omega_d$$

Plano complejo



$\sigma = \zeta\omega_n$ factor de amortiguamiento o constante de amortiguamiento.

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ frecuencia natural amortiguada.

Ejercicio 2. Para el sistema de control del ejercicio 1 hallar K y Kt para que el sistema tenga una respuesta transitoria con un $\zeta = 0.7$ y un $t_s = 1s$ Mp=5%

$$\mathrm{M_p} = e^{-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\pi}$$

$$\mathrm{M_p} = 4.5\%$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

$$\omega_n = \frac{4}{\zeta t_s}$$

$$\omega_n = 5.714$$

Polinomio deseado $\zeta = 0.7$ y un $t_s = 1s$, $\omega_n = 5.714$

$$Pd = s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = s^2 + 7.9s + 32.64$$

Igualar el polinomio deseado con el polinomio característico en lazo cerrado.

$$1 + G(s) = PD$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{100K/4}{s^2 + 5(1 + 100K_t)s + (100K)/4}$$

$$s^2 + 5(1 + 100K_t)s + (100K)/4 = s^2 + 7.9s + 32.64$$

Igualar los coeficientes de ambos polinomios

$$5(1 + 100K_t) = 7.9$$

$$(100K)/4 = 32.64$$

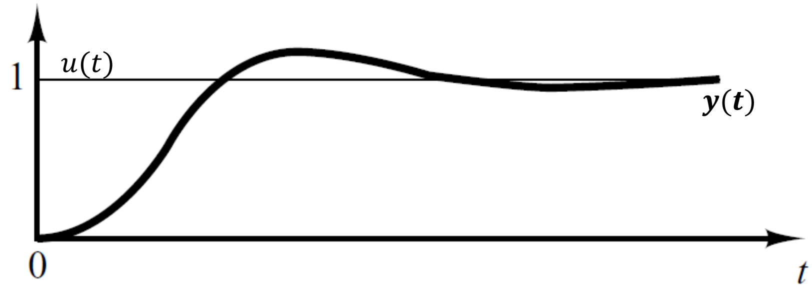
$$K_t = 5.8x10^{-3}$$

$$K = 1.3056$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{32.64}{s^2 + 7.9s + 32.64}$$

Teórico Mp	Simulado Mp
5%	4.95%
Ts teórico	Ts simulado
1s	1.05s

Respuesta en estado estable. La respuesta en estado estable permanece en el tiempo siguiendo la señal de entrada o referencia $R(s)$. También, es importante ya indicará la exactitud con el error de estado estable e_{ss}. La Señales de referencia $R(s)$ para evaluar un sistema de control son: Escalón, rampa y parábola.



Entrada escalón

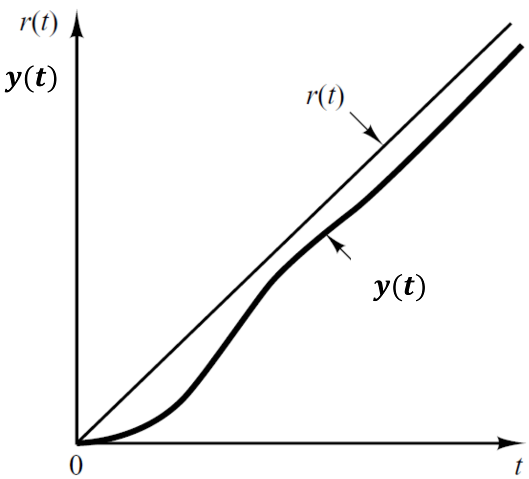
En el tiempo

$$r(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$r(t) = Ru(t)$$

Laplace

$$R(s) = \frac{R}{s}$$

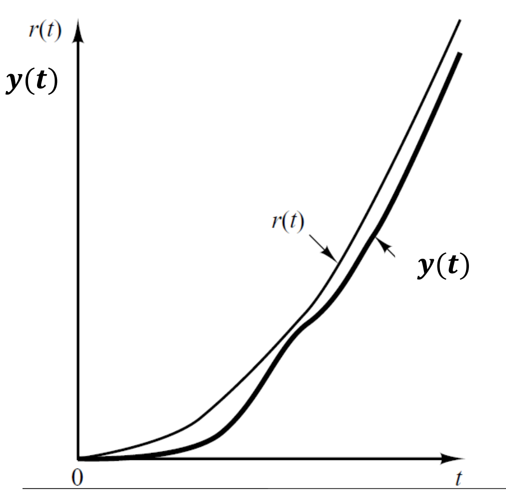


Entrada rampa

$$r(t) = R * t * u(t)$$

Laplace

$$R(s) = \frac{R}{s^2}$$



Entrada Parábola

$$r(t) = R * \frac{t^2}{2} * u(t)$$

Laplace

$$R(s) = \frac{R}{s^3}$$

Clasificación de los sistemas de control:

Los sistemas de control se clasifican de acuerdo con su capacidad de seguir entradas escalón, rampa y parábola. Se determina según el número de polos en el origen (integradores) en lazo abierto.

$$G(s) = G_c(s)G_p(s)$$

$$G(s) = \frac{K\,(\frac{s}{z_1}+1)(\frac{s}{z_2}+1)\cdots(\frac{s}{z_m}+1)}{s^N(\frac{s}{p_1}+1)(\frac{s}{p_2}+1)\cdots(\frac{s}{p_n}+1)}$$

El termino s^N representa en el denominador un polo de multiplicidad N en el origen. Un sistema se denomina de tipo 0 si N es cero, tipo 1 si N es uno, tipo 2 si N es dos etc. Entre mayor el tipo de sistema la precisión va a mejorar (estado estable) pero va a afectar el transitorio (estabilidad relativa). (equilibrio)

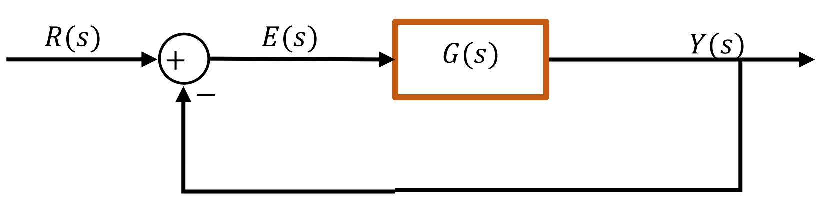
Ejercicio 3. ¿Qué tipo de sistema es el ejercicio 1?

$$G(s) = \frac{100K}{20s(1+100K_t+0.2s)}$$

Como la FT en lazo abierto tiene un polo en el origen o un integrado el sistema es de tipo 1. (Por lo tanto, el error en estado estable para escalón es igual a cero)

Error de estado estable

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$$



$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$E(s) = R(s) - E(s)G(s)$$

$$E(s) + E(s)G(s) = R(s)$$

$$E(s)\big(1 + G(s)\big) = R(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

Por lo tanto, el error de estado estable e_{ss} se puede calcular con el **teorema del valor final**

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

Para entrada escalón unitario $R(s) = \frac{1}{s}$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s\,(1/s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} G(s)}$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)$$

$$K_p \ Constante\ de\ error\ de\ posición\ estática$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$$

Para una entrada escalón unitario y un sistema tipo cero N=0 calcular $K_p\ y\ e_{ss}$

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)$$

$$\lim_{s\to 0} \frac{K\,(\frac{s}{z_1}+1)(\frac{s}{z_2}+1)\cdots(\frac{s}{z_m}+1)}{(\frac{s}{p_1}+1)(\frac{s}{p_2}+1)\cdots(\frac{s}{p_n}+1)} = K$$

Por lo tanto

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K}$$

Para una entrada escalón unitario y sistema tipo uno N=1 calcular K_p y e_{ss}

$$\lim_{s\to 0} \frac{K\left(\frac{s}{z_1}+1\right)\left(\frac{s}{z_2}+1\right)\cdots\left(\frac{s}{z_m}+1\right)}{s^1\left(\frac{s}{p_1}+1\right)\left(\frac{s}{p_2}+1\right)\cdots\left(\frac{s}{p_n}+1\right)} = \infty$$

Por lo tanto

$$e_{ss} = \frac{1}{1+\infty} = 0$$

Sistema tipo N>1 calcular $K_p = \infty$ y $e_{ss} = 0$

	Error entrada escalón e_{ss}
Sistema Tipo 0	$\frac{1}{1+\mathrm{K}}$
Sistema Tipo 1	0
Sistema Tipo 2	0

Si se pide diseñar un sistema de control con ess=0 para entrada escalón. La función de transferencia en lazo abierto G(s) debe ser tipo 1 al menos.

$$G(s) = G_c(s)G_p(s)$$

Ejercicio 4. Hallar el error en estado estable del sistema ejercicio 1 para una entrada escalón.

El sistema es de tipo 1. Por lo tanto, el error en estado estable para escalón es igual a cero.

Para entrada rampa unitaria $\boldsymbol{R(s)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^2}}$

Usando la definición y remplazando

$$e_{ss} = \boldsymbol{\lim_{s\to 0}} \frac{sR(s)}{1+G(s)}$$

$$e_{ss} = \boldsymbol{\lim_{s\to 0}} \frac{s\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{s^2}}}{1+G(s)} = \boldsymbol{\lim_{s\to 0}} \frac{1}{s+sG(s)} = \frac{1}{\lim_{s\to 0} sG(s)}$$

Constante de error de velocidad estática K_v

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v}$$

Para una entrada rampa y sistema tipo cero N=0 calcular $K_v \; y \; e_{ss}$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = 0$$

Por lo tanto

$$e_{ss} = \infty$$

Para una entrada rampa y sistema tipo uno N=1 calcular $K_v \; y \; e_{ss}$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = K$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K}$$

Para una entrada rampa y sistema tipo dos N=2 calcular $K_v \; y \; e_{ss}$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG(s) = \infty$$

$$e_{ss} = 0$$

	Error entrada rampa e_{ss}
Sistema Tipo 0	∞
Sistema Tipo 1	$\frac{1}{K}$
Sistema Tipo 2	0

Ejercicio 5. Hallar el error de estado estable para una rampa.

$$G(s) = \frac{100K}{20s(1 + 100K_t + 0.2s)}$$

$$K_v = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{100K}{20\cancel{s}(1 + 100K_t + 0.2s)}$$

$$K_v = \frac{100K}{20(1 + 100K_t)} = \mathrm{K}$$

$$\mathrm{e_{ss}} = \frac{1}{\mathrm{K}}$$

Para entrada parábola $\boldsymbol{R(s) = \frac{1}{s^3}}$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a}$$

La constante de error de aceleración estática K_a

	Error entrada parábola e_{ss}
Sistema Tipo 0	∞
Sistema Tipo 1	∞
Sistema Tipo 2	$\frac{1}{K}$

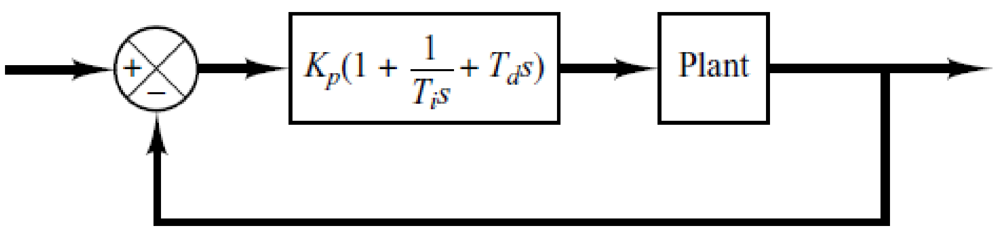
Ejercicio 6. Hallar el error de estado estable para una parábola del ejercicio 1.

Como el sistema es tipo 1 el error ess para entrada parábola es infinito.

	Error entrada escalón e_{ss}	Error entrada rampa e_{ss}	Error entrada parábola e_{ss}
Sistema Tipo 0	$\frac{1}{1+\mathrm{K_p}}$	∞	∞
Sistema Tipo 1	0	$\frac{1}{K_\mathrm{v}}$	∞
Sistema Tipo 2	0	0	$\frac{1}{K_\mathrm{a}}$

Acciones básicas de control. Control PID

Control PID ideal



$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_p}{T_i s} + K_p T_d s$$

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

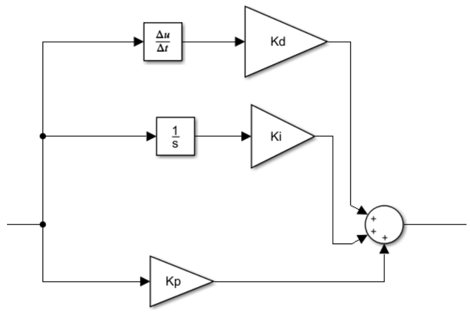
$$K_p$$

$$K_I = \frac{K_p}{T_i}$$

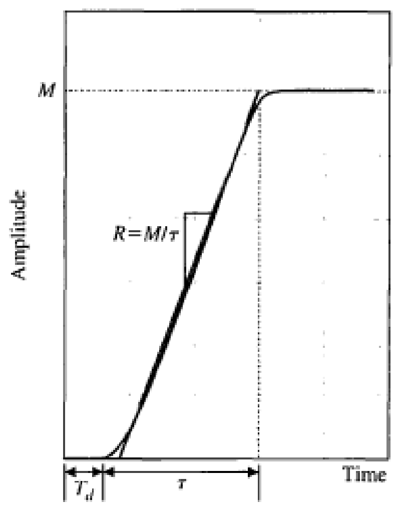
$$K_D = K_p T_d$$

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

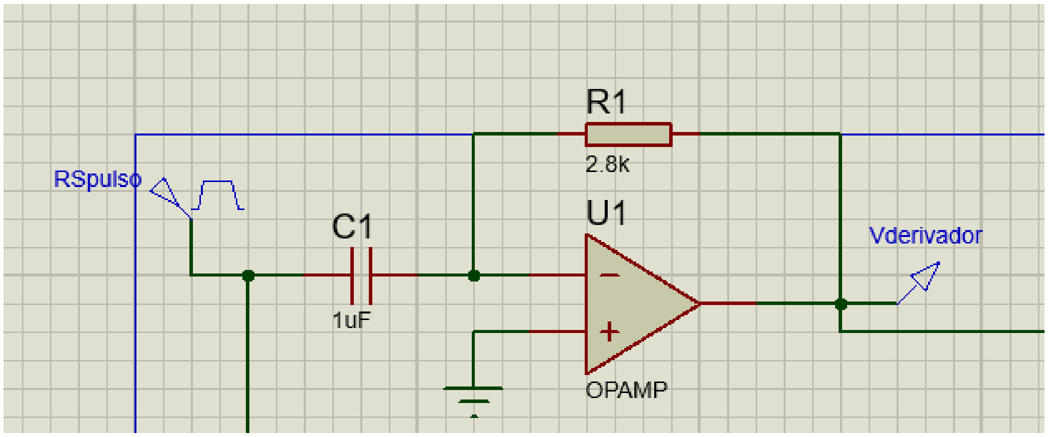
$$G_c(s) = \frac{K_D s^2 + K_p s + K_I}{s}$$



Ziegler-Nichols Método empírico o experimental para hallar el control PID a partir de la **respuesta al escalón.** Solo para sistemas estables y que la respuesta tiene una forma de s.



Controller Type	K_P	K_I	K_D
Proportional (P) $G_c(s) = K_P$	$\frac{1}{RT_d}$	–	–
Proportional-plus-integral (PI) $G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s}$	$\frac{0.9}{RT_d}$	$\frac{0.27}{RT_d^2}$	–
Proportional-plus-integral-plus-derivative (PID) $G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s$	$\frac{1.2}{RT_d}$	$\frac{0.6}{RT_d^2}$	$\frac{0.6}{R}$



Derivador

$$G_D(s) = -RCs$$

$$\omega_o = \frac{1}{RC}$$

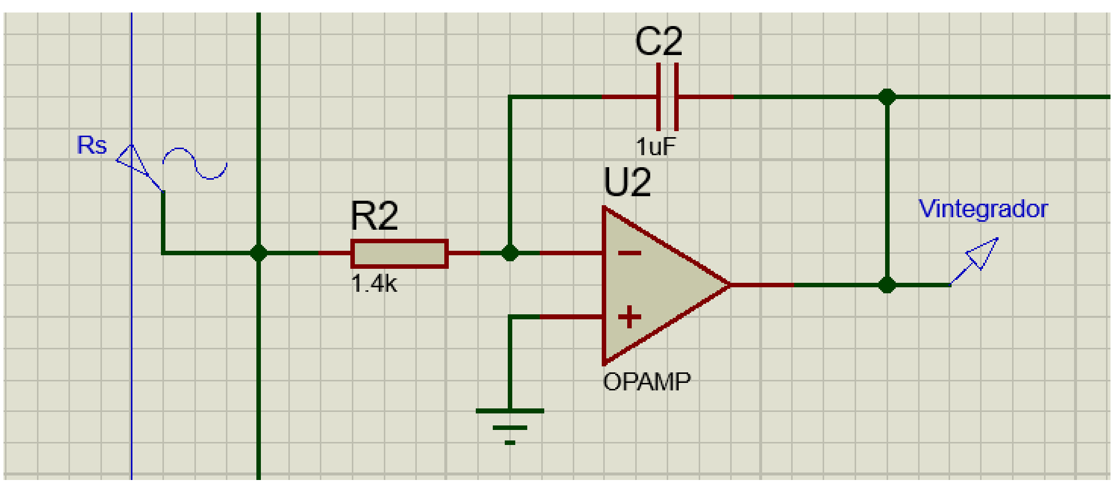
$$\omega_o = 2\pi f_0$$

$$G_D(s) = -\frac{s}{\omega_o}$$

$$G_D(s) = T_D s$$

$$T_D = \frac{1}{\omega_o} = \frac{1}{1/RC}$$

$$\frac{T_D}{C} = R$$



Integrador

$$G_I(s) = -\frac{1}{RCs}$$

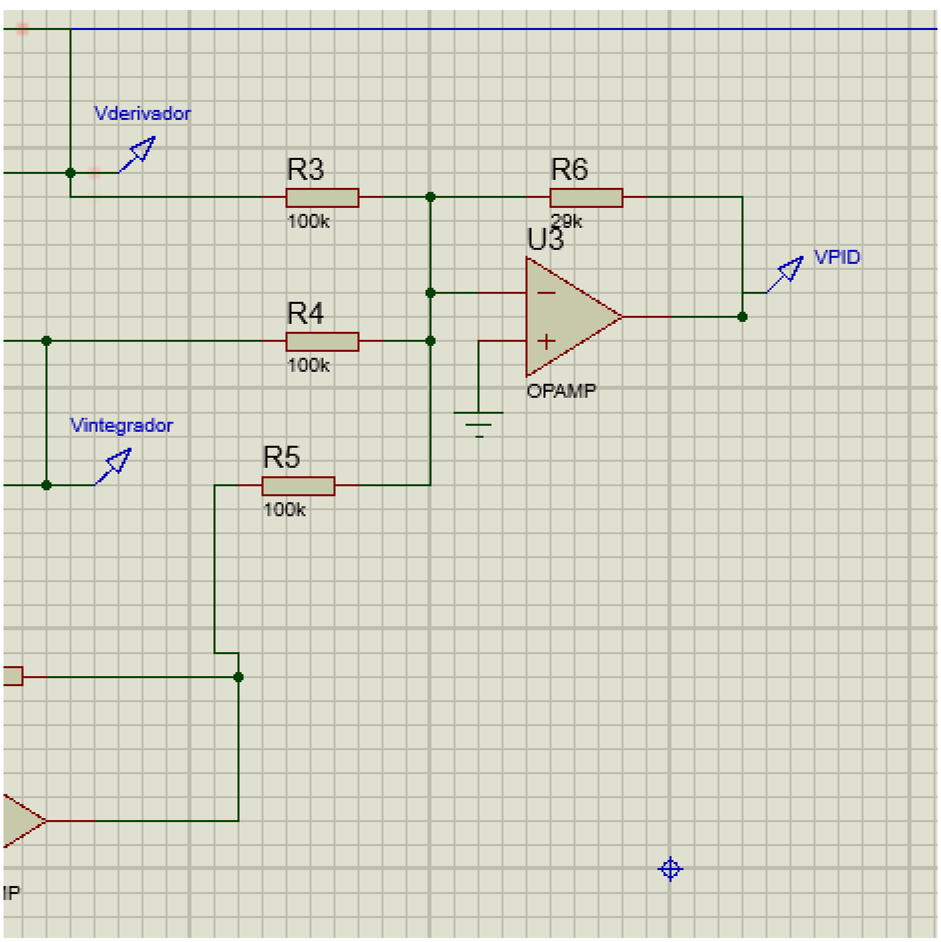
$$G_I(s) = \frac{1}{T_i s}$$

$$T_i = RC$$

$$\frac{T_i}{C} = R$$

$$\omega_o = \frac{1}{RC}$$

$$G_I(s) = \frac{1}{s/\omega_o}$$



$$Vout = -\frac{R6}{R3}VD - \frac{R6}{R4}VI - \frac{R6}{R5}(1)$$

$$R3 = R4 = R5 = R$$

$$Vout = -\frac{R6}{R3}VD - \frac{R6}{R4}VI - \frac{R6}{R5}(1)$$

$$Vout = \frac{R6}{R}\big((1) + VI + VD\big)$$

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right)$$

$$Kp = \frac{R6}{R}$$

$$R6 = Kp\ R$$

Sistemas de orden superior polos dominantes

Diseño de controladores por asignación de polos

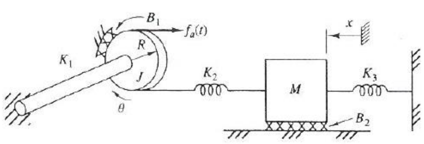
Tarea 2

1. Determinar las constantes de error para una entrada escalón, rampa y parábola de los siguientes sistemas de control con retroalimentación unitaria. Luego calcular el error de estado estable y validar en simulación los resultados obtenidos. La función de transferencia en lazo abierto (trayectoria directa) son:

$$G(s) = \frac{K}{s(1+0.1s)(1+0.5s)}$$

$$G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+s+1)}$$

2. La figura (a) muestra un sistema mecánico. Cuando se aplica una fuerza de 1 N (entrada escalón) al sistema, la dinámica de la respuesta de la planta es como se muestra en la figura (b) Considerando lo anterior, determinar La función de transferencia que relaciona la posición lineal (X(s)) vs. la fuerza (Fa(s)).



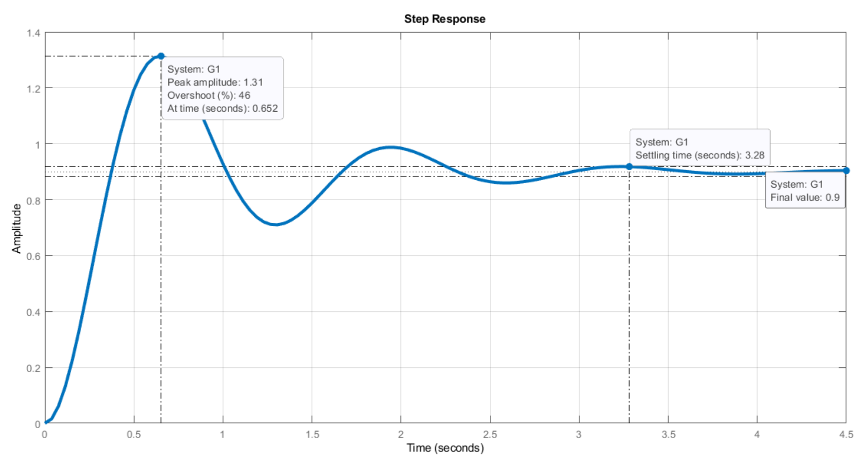
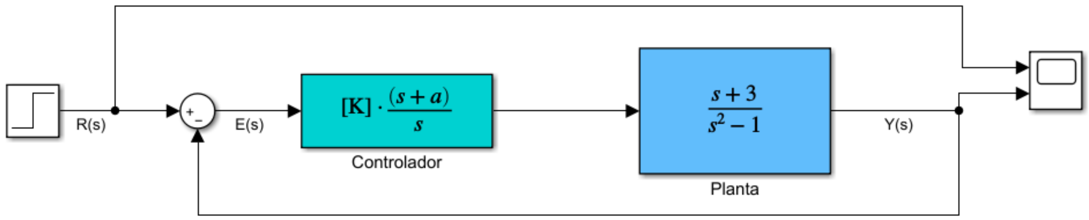


Figura a

Figura b

3. Para el siguiente sistema de control determinar la función de transferencia en trayectoria directa y en lazo cerrado. Hallar los valores K y a del controlador tal que el sistema se estabilice en 0.5 segundos y tenga un sobre impulso máximo de 7% del valor final. Simular para comprobar sus resultados. Hallar el error de estado estable para una entrada escalón.



4. Si se incrementa la frecuencia natural no amortiguada se reducirá el tiempo de asentamiento de un sistema de segundo orden. Falso o verdadero.
5. Para el prototipo de segundo orden si se disminuye la frecuencia natural no amortiguada el sobre paso máximo a la salida permanece igual. Falso o verdadero.
6. Si un sistema de control con retroalimentación unitaria es tipo 2. El error de estado estable para una entrada rampa es diferente de cero. Falso o verdadero.
7. Realice un el bosquejo de la región en el plano complejo s en donde se ubicarían los polos con las siguientes especificaciones $\zeta \geq 0.707,\ \omega_{\mathrm{n}} = 2\ \mathrm{rad/s}$.
8. Demostrar que la respuesta el tiempo $y(t)$ de la siguiente función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{{\omega_n}^2}{(s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - \ j\omega_d)}$$

Es

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\sigma t} sen(\omega_d + \theta)$$

Donde

$$\sigma = \zeta\omega_n$$

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$\theta = Tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\zeta}\right)$$

9. Demuestre que para la respuesta de segundo orden el tiempo pico, el sobre impulso máximo y el tiempo de levantamiento son.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

10. Demostrar que para una entrada parábola el sistema debe ser mínimo tipo 3 para que el error en estado estable sea cero $e_{ss} = 0$.