Notas de clase semana 4

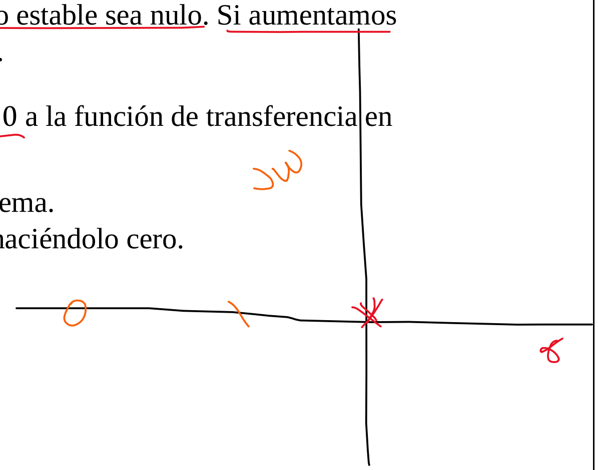
Andrés Castro

- ✓ Control PI.
- ✓ Control PD
- ✓ Control PID
- ✓ Derivador pasa bajas para un derivador.
- ✓ Tiempos muertos.
- ✓ Prefiltro.
- ✓ Ejercicios.

Control PI

El control integral produce una señal que es proporcional a la integral con respecto al tiempo del error. Colocar una acción integral provoca que el error de estado estable sea nulo. Si aumentamos demasiado su acción provoca que el sistema comience a oscilar.

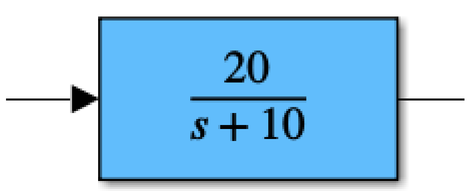
1. El control PI añade un cero $s = \frac{-K_I}{K_P}$ y un polo en $s = 0$ a la función de transferencia en lazo abierto.
2. Este polo en el origen incrementa en un el tipo del sistema.
3. Mejora el error de estado estable del sistema original haciéndolo cero.
4. Incrementa el tiempo de levantamiento.



$$T(s) = \frac{(K_p s + K_I)}{s} G(s)$$

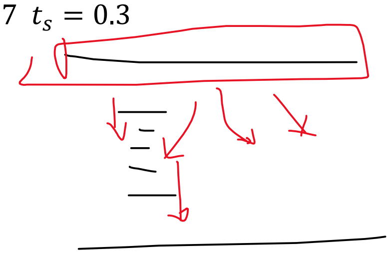
$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int e(t)dt$$

Es una técnica de diseño de donde el objetivo es ubicar los polos del sistema de control en lazo cerrado en una región deseada del plano complejo.



Planta control PI

Hallar el controlador para que el sistema tenga $e_{ss} = 0$ para escalón $\zeta = 0.7$ $t_s = 0.3$



$$G(s) = \frac{20}{s+10}$$

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$$

La función de transferencia en lazo abierto con el controlador

$$G(s) = \frac{20}{s+10}\left(K_p + \frac{K_I}{s}\right)$$

$$G(s) = \frac{20}{s+10}\left(K_p + \frac{K_I}{s}\right)$$

$$G(s) = \frac{20(K_p s + K_I)}{s(s+10)}$$

$e_{ss} = 0$ para escalón por que el sistema es tipo 1

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema de control

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{20(K_p s + K_I)}{s(s+10)}}{1 + \dfrac{20(K_p s + K_I)}{s(s+10)}}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20(K_p s + K_I)}{s(s+10) + 20(K_p s + K_I)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20(K_p s + K_I)}{s^2 + 10s + 20K_p s + 20K_I}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20(K_p s + K_I)}{s^2 + (10 + 20K_p)s + 20K_I} = \frac{{\omega_n}^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2}$$

Igualar el polinomio característico de la función de transferencia en lazo cerrado del sistema de control a un polinomio deseado.

$$s^2 + (10 + 20K_p)s + 20K_I = s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2$$

$$\zeta = 0.7$$

$$t_s = 0.3$$

$$\omega_n = \frac{4}{0.7*0.3} = 19.05 \quad 2\%$$

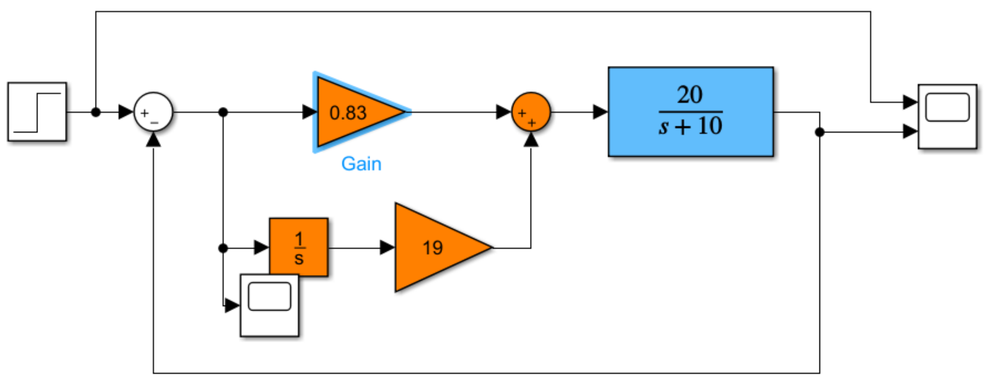
$$2\zeta\omega_n = (10 + 20K_p)$$

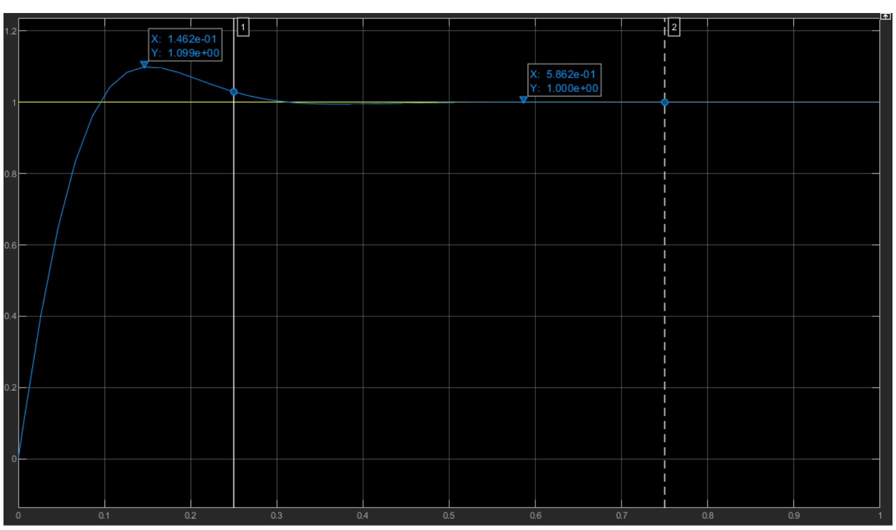
$$20K_I = {\omega_n}^2$$

$$\frac{2\zeta\omega_n - 10}{20} = K_p = 0.83$$

$$K_I = \frac{{\omega_n}^2}{20} = 18.1$$

$$\omega_n = \frac{4}{0.7*0.3} = 19.05 \quad 2\%$$





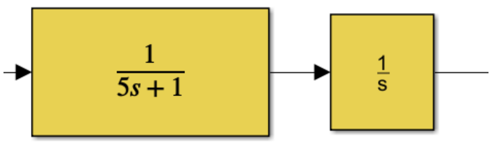
Control PD

El control derivativo es esencialmente un control anticipativo. Ya que $\frac{de(t)}{dt}$ representa la pendiente de e(t). Al conocer la pendiente el controlador se puede anticipar la dirección del error y emplearla para controlar mejor el proceso. Si el error e(t) es cambia muy rápido debido a una entrada muy grande. El control derivativo medirá la pendiente de ese cambio y predice un sobrepaso alto adelante en el tiempo. Luego realiza un esfuerzo correctivo antes que el sobre paso excesivo ocurra. El control PD no altera el tipo de sistema.

1. Mejora el amortiguamiento y reduce el sobre paso máximo.
2. Reduce el tiempo de levantamiento y el tiempo de asentamiento.
3. Puede amplificar el ruido en altas frecuencia.
4. El control PD añade un cero simple en $s = -\frac{K_P}{K_D}$ en la trayectoria directa.

$$u(t) = Kp + Kd\frac{de(t)}{dt}$$

$$T(s) = (K_p + K_D s)G(s)$$



Planta control PD

Hallar el controlador para que el sistema tenga $e_{ss} = 0$ para escalón $\zeta = 0.7 \;\; t_s = 2$

$$G(s) = \frac{1}{s(5s+1)}$$

$$G_c(s) = K_p + K_D s$$

La función de transferencia en lazo abierto con el controlador

$$T(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K_p + K_D s}{s(5s+1)}$$

$e_{ss} = 0$ para escalón por que el sistema es tipo 1

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema de control

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_p + K_D s}{s(5s+1)}}{1 + \frac{K_p + K_D s}{s(5s+1)}}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p + K_D s}{s(5s+1) + K_p + K_D s}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p + K_D s}{s(5s+1) + K_p + K_D s}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(K_p + K_D s)}{5s^2 + (1 + K_D)s + K_p}$$

Función de transferencia en lazo cerrado (polinomio característico)

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{(1/5)(K_p + K_D s)}{s^2 + (1/5)(1 + K_D)s + (1/5)K_p}$$

$$s^2 + \left(\frac{1}{5}\right)(1 + K_D)s + \left(\frac{1}{5}\right)K_p = s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)(1 + K_D) = 2\zeta\omega_n$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)K_p = {\omega_n}^2$$

$$K_D = 5 * 2\zeta\omega_n - 1$$

$$K_p = 5{\omega_n}^2$$

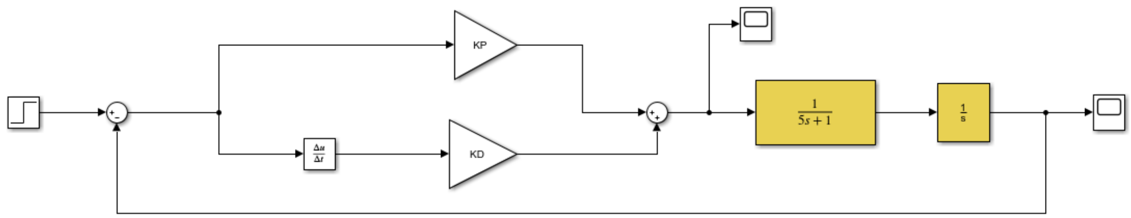
$$\zeta = 0.7$$

$$t_s = 2$$

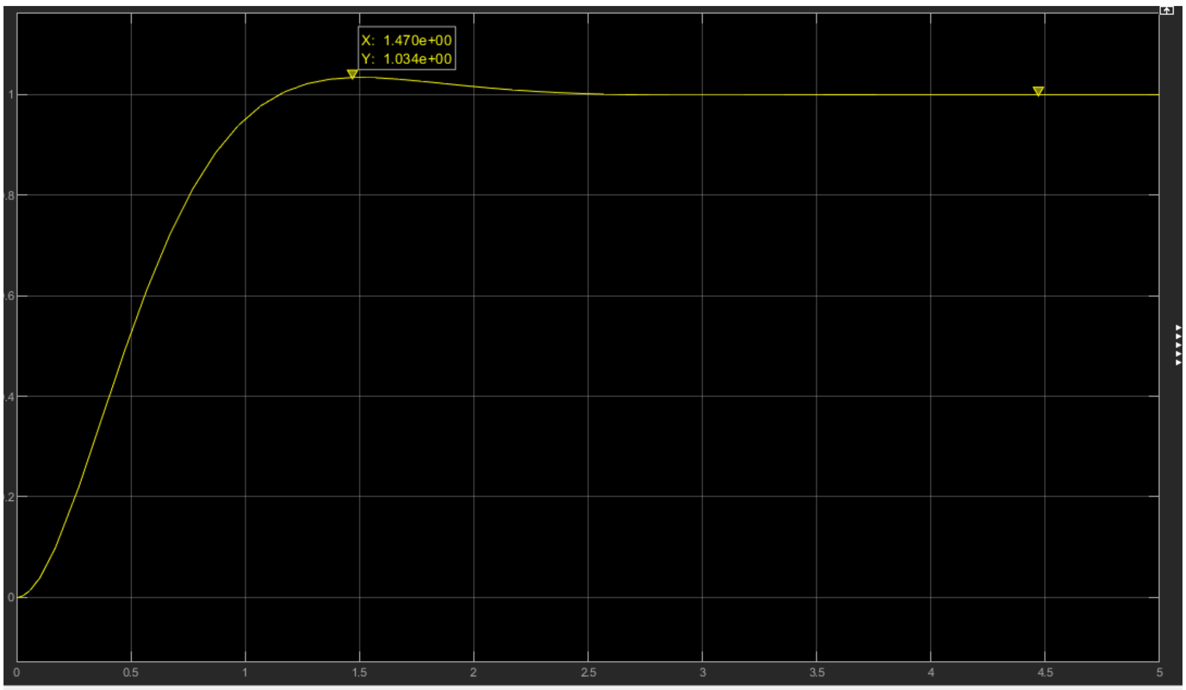
$$\omega_n = \frac{4}{0.7*2} = 2.85$$

$$K_D = 19$$

$$K_p = 41.9$$

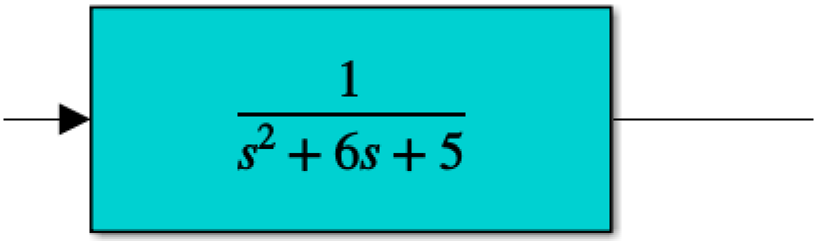


KP
KD
$\frac{\Delta u}{\Delta t}$
$\frac{1}{5s+1}$
$\frac{1}{s}$



X: 1.470e+00
Y: 1.034e+00

Control PI



Planta control PI

Hallar el controlador para que el sistema tenga $e_{ss} = 0$ para escalón $\zeta = 0.7$ Mp = 5% $t_s = 2$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 5}$$

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s}$$

La función de transferencia en lazo abierto con el controlador

$$T(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K_p s + K_I}{s(s^2 + 6s + 5)}$$

$e_{ss} = 0$ para escalón por que el sistema es tipo 1

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema de control

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

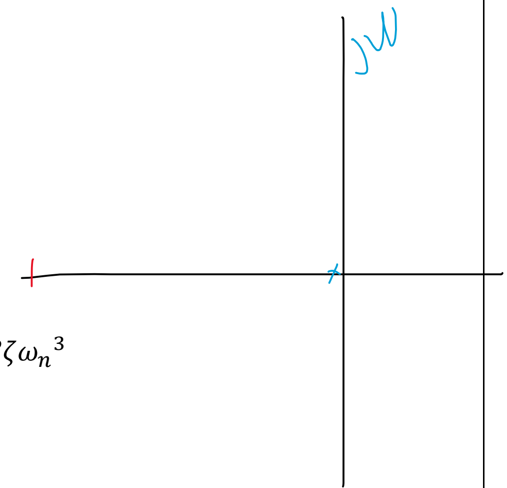
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_p s + K_I}{s(s^2 + 6s + 5)}}{1 + \frac{K_p s + K_I}{s(s^2 + 6s + 5)}}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p s + K_I}{s^3 + 6s^2 + (5 + K_p)s + K_I}$$

$$s^3 + 6s^2 + (5 + K_p)s + K_I = PD$$

$$PD = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2)(s + \beta\zeta\omega_n)$$

$$PD = s^3 + (\beta + 2)\zeta\omega_n s^2 + (2\beta\zeta^2 + 1){\omega_n}^2 s + \beta\zeta{\omega_n}^3$$



$$s^3 + 6s^2 + (5 + K_p)s + K_I = s^3 + (\beta + 2)\zeta\omega_n s^2 + (2\beta\zeta^2 + 1){\omega_n}^2 s + \beta\zeta{\omega_n}^3$$

$$6 = (\beta + 2)\zeta\omega_n$$

$$(5 + K_p) = (2\beta\zeta^2 + 1){\omega_n}^2$$

$$K_I = \beta\zeta{\omega_n}^3$$

$$\beta = \frac{6}{\zeta\omega_n} - 2$$

$$K_p = (2\beta\zeta^2 + 1){\omega_n}^2 - 5$$

Control PID

Hallar el controlador para que el sistema tenga $e_{ss} = 0$ para escalón $\zeta = 0.7$ Mp = 5% $t_s = 2$

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 5}$$

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s$$

$$G_c(s) = \frac{K_p s + K_I + K_D s^2}{s}$$

La función de transferencia en lazo abierto con el controlador

$$G(s) = G_c(s)G(s) = \frac{K_p s + K_I + K_D s^2}{s(s^2 + 6s + 5)}$$

$e_{ss} = 0$ para escalón por que el sistema es tipo 1

La función de transferencia en lazo cerrado del sistema de control

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_p s + K_I + K_D s^2}{s(s^2 + 6s + 5)}}{1 + \frac{K_p s + K_I + K_D s^2}{s(s^2 + 6s + 5)}}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p s + K_I + K_D s^2}{s(s^2 + 6s + 5) + K_p s + K_I + K_D s^2}$$

Polinomio característico LAZO CERRADO

$$s(s^2 + 6s + 5) + K_p s + K_I + K_D s^2 = s^3 + (6 + K_D)s^2 + (5 + K_p)s + K_I$$

$$s^3 + (6 + K_D)s^2 + (5 + K_p)s + K_I = PD$$

$$s^3 + (6 + K_D)s^2 + (5 + K_p)s + K_I = s^3 + (\beta + 2)\zeta\omega_n s^2 + (2\beta\zeta^2 + 1){\omega_n}^2 s + \beta\zeta{\omega_n}^3$$

$$(6 + K_D) = (10 + 2)\zeta\omega_n$$

$$(5 + K_p) = (2\beta\zeta^2 + 1){\omega_n}^2$$

$$K_I = \beta\zeta{\omega_n}^3$$

$$\beta = 10$$

$$(K_D) = (\beta + 2)\zeta\omega_n - 6$$

$$\left(K_p\right) = (2\beta\zeta^2 + 1){\omega_n}^2 - 5$$

Derivador filtro pasa bajas

$$\frac{T_D s}{\alpha T_D s + 1}$$

$$T_D = KD/KP$$

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{T_D s}{\alpha T_D s + 1}$$

Tiempos muertos (Transport delay, time delay)

$$e^{-T_d s}$$

$$L(s) = G_c(s)G(s)e^{-T_d s}$$

Aproximación por Taylor

$$e^{-T_d s} = 1 - sT_d + \frac{(sT_d)^2}{2!} + \frac{(sT_d)^3}{3!}$$

$$e^{T_d s} = 1 + sT_d + \frac{(sT_d)^2}{2!} + \frac{(sT_d)^3}{3!}$$

$$G(s) = \frac{20}{s+10} e^{-Tds}$$

$$\frac{20}{(s+10\ )\ \ e^{Tds}}$$

$$G(s) = \frac{20}{(s+10\ )\ \ (1 + sT_d + \frac{(sT_d)^2}{2!})}$$

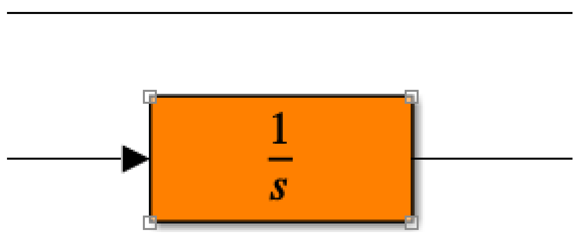
Aproximación Padé

$$e^{-T_d s} = \frac{\frac{-T_d}{2}s + 1}{\frac{T_d}{2}s + 1}$$

```
s = tf('s');
sys = exp(-0.7*s);
sysx = pade(sys,1)

    -s + 2.857
    ----------
    s + 2.857
```

PID con prefiltro



$$G(s) = \frac{1}{s}$$

$$Gc(s) = KP + \frac{KI}{s}$$

Función de transferencia en lazo abierto

$$Gc(s)G(s) = \frac{KPs + KI}{s^2}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{KPs + KI}{s^2}}{1 + \frac{KPs + KI}{s^2}}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KPs + KI}{s^2 + KPs + KI}$$

$$s^2 + KPs + KI = s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2$$

$$KP = 2\zeta\omega_n$$

$$KI = {\omega_n}^2$$

$\zeta = 0.7$ Mp = 5% $t_s = 0.5$

$$KP = 16$$

$$KI = 128$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{16s + 128}{s^2 + 16s + 128}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{16(s + 8)}{s^2 + 16s + 128}$$

Control con prefiltro

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{16(s + 8)}{s^2 + 16s + 128} G_p(s)$$

$$G_p(s) = \frac{p}{s + p}$$

$$G_p(s) = \frac{8}{s + 8}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{16\cancel{(s + 8)}}{s^2 + 16s + 128} * \frac{8}{\cancel{s + 8}}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{128}{s^2 + 16s + 128}$$