

# 实验三

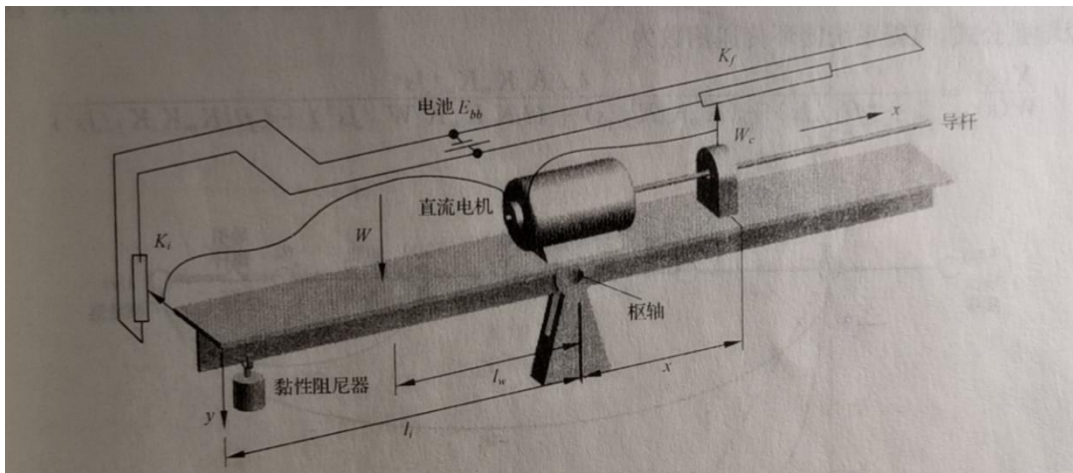
## （一）自动平衡称系统

### 1. 实验目的

- （1）根据实际建立系统的模型及信号流程图，在根轨迹图上确定根轨迹增益  $K^*$  的取值。
- （2）观察分析平衡称系统的阶跃响应曲线，了解主导极点和近似系统的概念。
- （3）用 Matlab 建模，按照题目要求用根轨迹法进行设计（提示：用 rtool 工具）；
- （4）比较分析设计前后的动态性能。

### 2. 实验原理

自动平衡秤能自动完成称重操作，其示意图如下图所示。



称重时，由下面一个电动反馈环节控制其自动平衡，图中所示为无重物时的平衡状态。图中， $x$  是砝码  $W_c$  离枢轴的距离；待称重物  $W$  将放置在离枢轴  $L_w=5\text{cm}$  处；重物方还有一个黏性阻尼器，其到枢轴的距离  $L_i=20\text{cm}$ 。平衡秤系统的有关参数如下：

枢轴惯量  $J=0.05\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2$ ；电池电压  $E_{bb}=24\text{V}$ ；

黏性阻尼器的阻尼系数  $f=10 \sqrt{3}\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}/\text{rad}$ ，反馈电位计增益  $K_f=400\text{V}/\text{m}$ ；

导引螺杆增益  $K_s=(1/4000\pi)\text{m}/\text{rad}$ ；输入电位计增益  $K_i=4800\text{V}/\text{m}$ ；

砝码  $W_c$  的质量依需要的称重范围而定，本例  $W_c=2\text{kg}$ 。

### 3. 实验内容

- （1）建立系统的模型及信号流程图；
- （2）在根轨迹图上确定根轨迹增益  $K^*$  的取值；
- （3）确定系统的主导极点；

设计后的系统达到以下性能指标要求：

1) 阶跃输入下： $K_p=\infty$ ， $\text{ess}(\infty)=0$ ；

2) 欠阻尼响应： $\zeta=0.5$ ；

3) 调节时间： $t_s < 2\text{s}$  ( $\Delta=2\%$ )；

### 4. 数据记录和结果分析

- （1）首先建立平衡运动方程，设系统略偏其平衡状态，偏差角  $\theta=y/L_i$ ；

因  $J=d^2 \theta / dt^2 = \Sigma \text{ 扭矩}$ ，

故平衡秤关于枢轴的扭转矩方程为

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = l_w W - \chi W_c - f l_i^2 \frac{d\theta}{dt}$$

电机输入电压

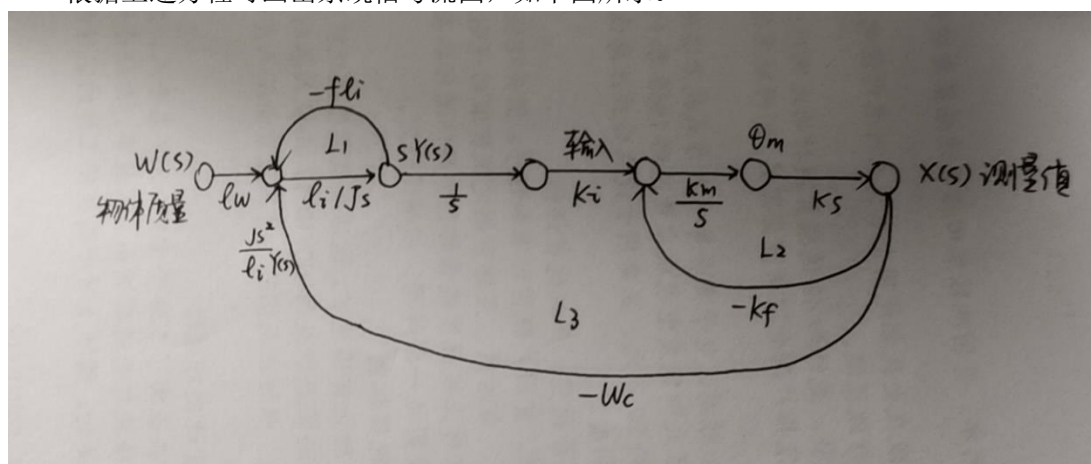
$$U_m(t) = K_i y - K_f \chi$$

电机的传递函数

$$\frac{\Phi_m(s)}{V_m(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

式中  $\theta_m$  为输出轴转角； $K_m$  为电机传递系数； $T_m$  为电机机电时间常数，与系统时间常数相比，可略去不计。

根据上述方程可画出系统信号流图，如下图所示。



由信号流图可见，从物体质量  $W(s)$  到测量值  $X(s)$  的前向通路中，在节点测量高度  $Y(s)$  之前有一个纯积分环节，因此该系统为 I 型系统，在阶跃输入作用下，能实现静态位置误差系数  $K_p = \infty$  及稳态误差  $ess(\infty) = 0$  的要求，应用梅森增益公式，可得系统闭环传递函数为

$$\frac{X(s)}{W(s)} = \frac{l_w l_i K_i K_m K_s / J s^3}{1 + (f l_i^2 / J s) + (K_m K_f K_s / s) + (l_i K_i K_m K_s W_c / J s^3) + (f l_i^2 K_m K_s K_f / J s^2)}$$

闭环传递函数可化为

$$\frac{X(s)}{W(s)} = \frac{l_w l_i K_i K_m K_s}{s(J s + f l_i^2) (s + K_f K_m K_s) + W_c l_i K_i K_m K_s}$$

当重物  $W$  放在自动平衡称上时， $W(s) = |W|/s$ ，系统的稳态增益为  $2.5\text{cm/kg}$ ；

为了绘制电动机传递系数(含放大器附加增益) $K_m$ 变化时系统的根轨迹，令  $K^* = K_m/10\pi$ ；  
等效根轨迹方程

$$1 + K^* \frac{P(s)}{Q(s)} = 1 + K^* \frac{(s+6.93+j6.93)(s+6.93-j6.93)}{s^2(s+13.86)}$$

所以等效开环传递函数为

$$G(s)H(s) = K^*(s+6.93+j6.93)(s+6.93-j6.93)/s^2(s+13.86)$$

(2) 令  $K^*$  从 0 变化到  $\infty$ ，利用 matlab rlocus 函数画根轨迹

代码：

```
k=1;%假设 K*=1，根据 K*确定根轨迹；
```

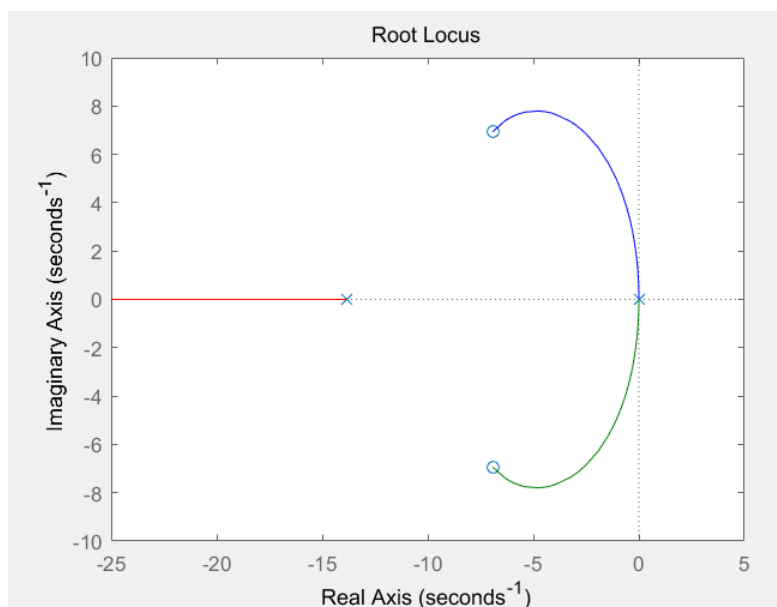
```
z=[-6.93+6.93i -6.93-6.93i];%零点
```

```
p=[0 0 -13.86];%极点
```

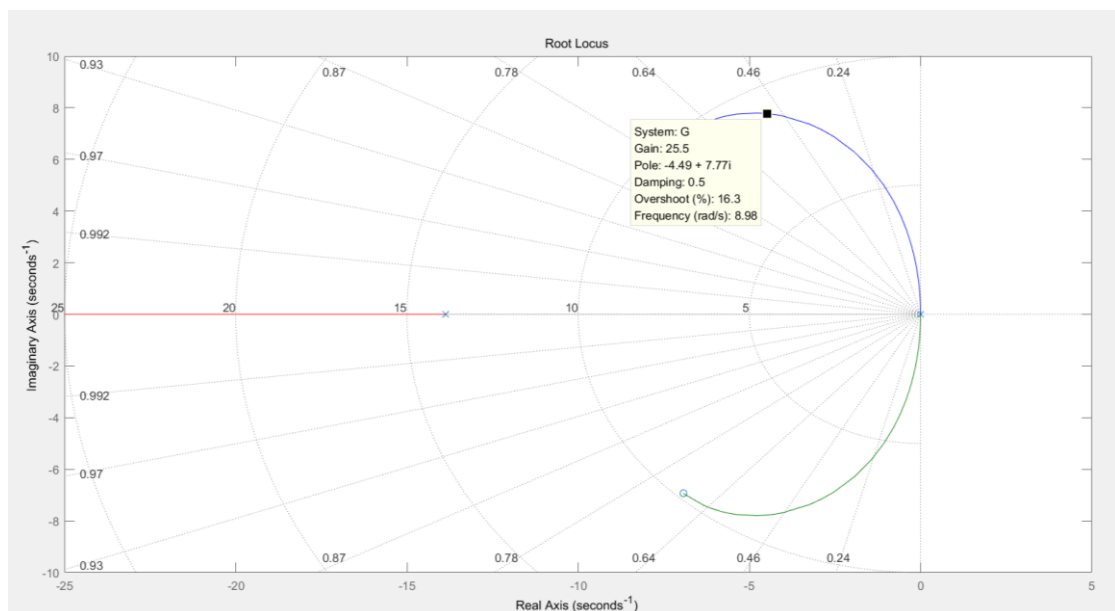
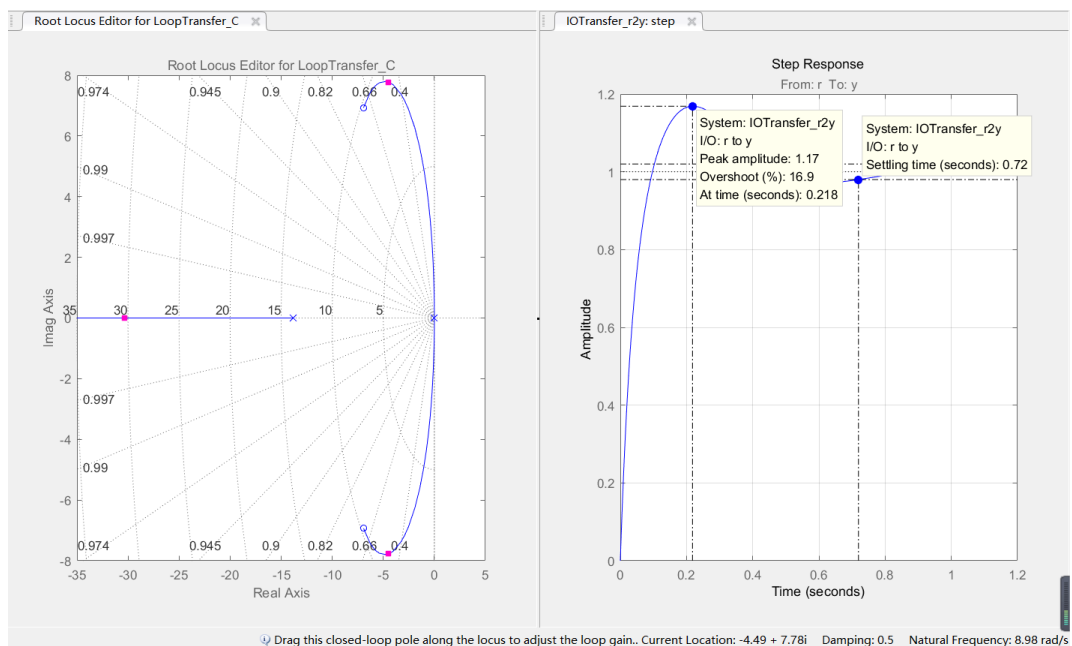
```
G=zpk(z,p,k);
```

```
rlocus(G);%根轨迹
```

得到根轨迹如下图所示：



在根轨迹图上，作  $\zeta = 0.5$  阻尼比线，利用 grid 添加阻尼比辅助线，利用 rltool 函数，在根轨迹上拖动点找到当  $\zeta = 0.5$  时，闭环极点  $s_{1,2} = -4.49 \pm j7.78$ ， $s_3 = -30.4$ ，对应的增益  $K^* = 25.5$ ，单位阶跃响应如右图所示；



根据仿真的结果，设计的系统动态性能：

$K_p \rightarrow \infty$  时， $ess \rightarrow 0$ ； $\zeta = 0.5$ ， $t_s = 0.72 < 2s$  ( $\Delta = 2\%$ )，满足设计要求；

(3) 分析上述结果：

$\text{Re}[s_3]/\text{Re}[s_{1,2}] = 6.77$

因为  $s_3 = -30.4$  的实部  $>$   $s_{1,2} = -4.49 \pm j7.78$  的实部的 2~3 倍；所以可以确定， $s_{1,2} = -4.49 \pm j7.78$  为系统主导极点，而  $s_3 = -30.4$  为非主导极点。非主导极点其对动态响应的影响甚微，可略去不计。

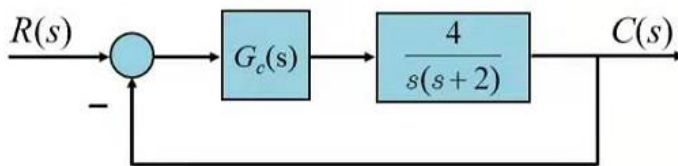
## (二) 超前校正元件的设计

### 1. 实验目的

- 1) 了解和掌握超前校正的构成方法及其对系统阶跃响应的影响。
- 2) 观察和分析系统加入超前校正前后，根轨迹的变化，分析超前校正对系统根轨迹及动态性能的影响。
- 3) 设计一个超前校正元件， $G_c(s)$  使  $t_s=1.75s$ ,  $M_p=16.3\%$ ;
- 4) 用 Matlab 建模，按照题目要求用根轨迹法进行设计（提示：用 `rltool` 工具）；
- 5) 比较分析设计前后的动态性能。

### 2. 实验原理

- 1) 示例单位负反馈系统的方框图如下：



- 2) 传递函数及参数：

I 型二阶系统的闭环传递函数标准式为

$$\phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

**Solution.** The CL transfer function for the system is

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4}{s^2 + 2s + 4} \Rightarrow \begin{cases} s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{3} \\ \zeta = 0.5, \omega_n = 2\text{rad/s} \end{cases}$$

from which we obtain that  $t_s = 3.5s$ ,  $M_p = 16.3\%$

### 3. 实验内容

#### 步骤：

- 1) 由目标动态特性求取阻尼比  $\zeta$  和振荡频率  $\omega_n$ ，写出期待的闭环极点
- 2) 通过绘制原系统的根轨迹，确定单独的  $K^*$  是否可以产生所需要的闭环极点
- 3) 设计所需要的校正元件
- 4) 求出超前校正的零极点的位置，
- 5) 写出校正元件的增益

### 4. 数据记录和结果分析

- 1) 由期望的动态性能

$t_s=1.75s$ ,  $M_p=16.3\%$ ;

可求得

$\zeta=0.5$ ,  $\omega_n=4\text{ rad/s}$

所以期望极点为

$s_{1,2}=-2 \pm j2\sqrt{3}$ ;

2) 有系统结构图，可知系统开环传递函数

$$G(s)H(s)=4/(s^2+2s)$$

利用 matlab 的 rlocus 函数绘制原系统根轨迹及单位阶跃响应

代码:

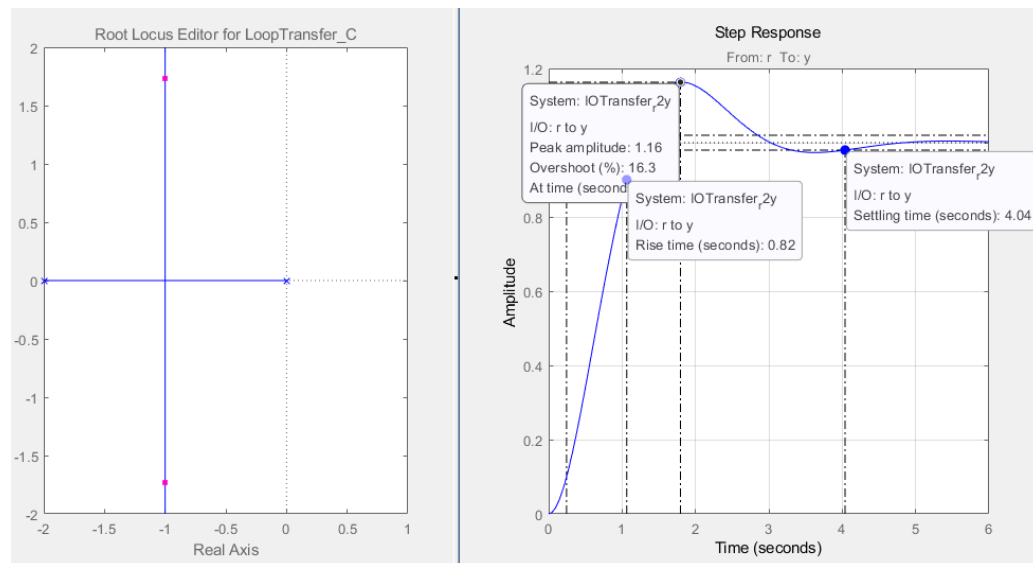
```
num = [4];
```

```
den=[1 2 0];
```

```
sys=tf(num,den);
```

```
rlocus(sys);
```

结果



分析可知，单独的  $K^*$  无论怎么变化都无法产生所需要的闭环极点  $s_{1,2}$ ;

3) 这就需要根轨迹左移，即增加一个超前校正装置

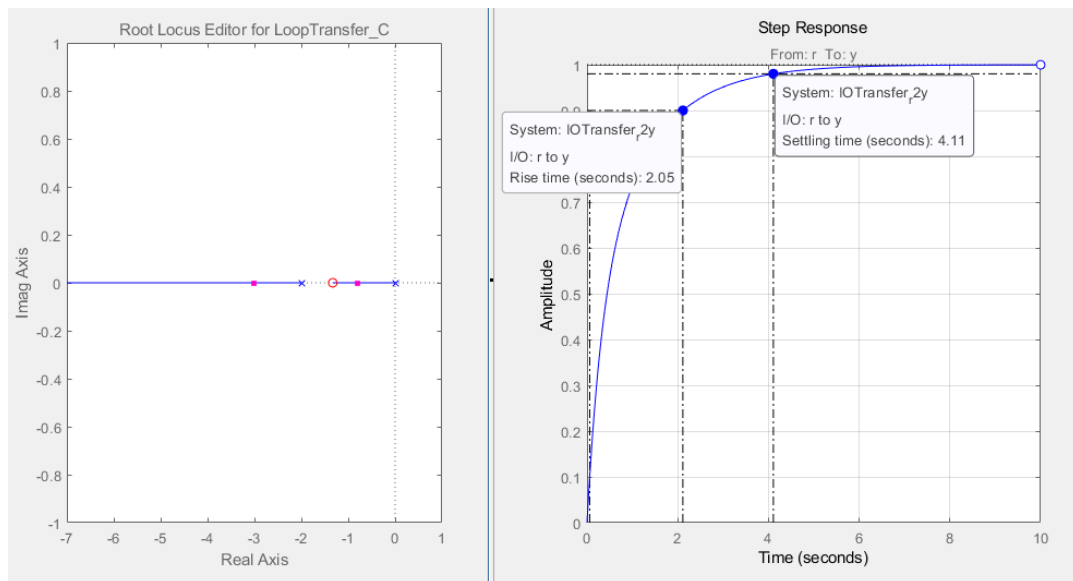
$$G_c(s) = \frac{K_c}{\alpha} \frac{\alpha Ts + 1}{Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{\alpha T}}{s + \frac{1}{T}}, \quad \alpha > 1$$

4) 要使根轨迹经过期望极点，需要满足  $s=s_1$  或  $s_2$  时  $\angle G(s)G_c(s)=(2k+1)*180^\circ$

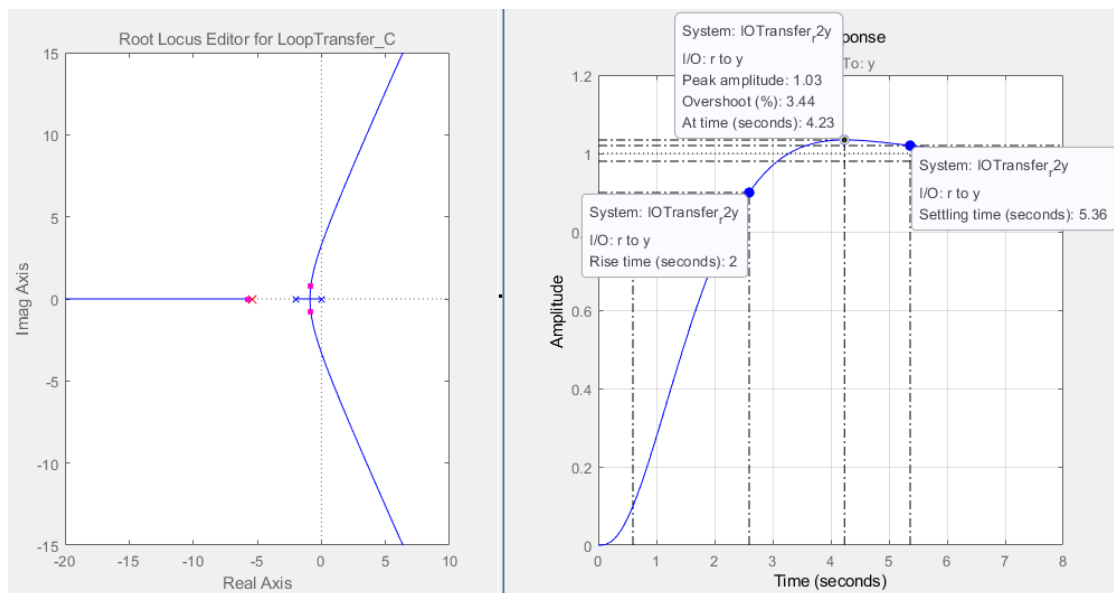
而  $\angle G(s_1)=-210^\circ$ ，因此需要  $\angle G_c(s_1)=30^\circ$

通过 rltool 函数在原系统根轨迹上添加零极点，满足该条件。

① 只增加零点，根轨迹向复平面左侧移动，系统相对稳定性增加， $t_s$  减小;

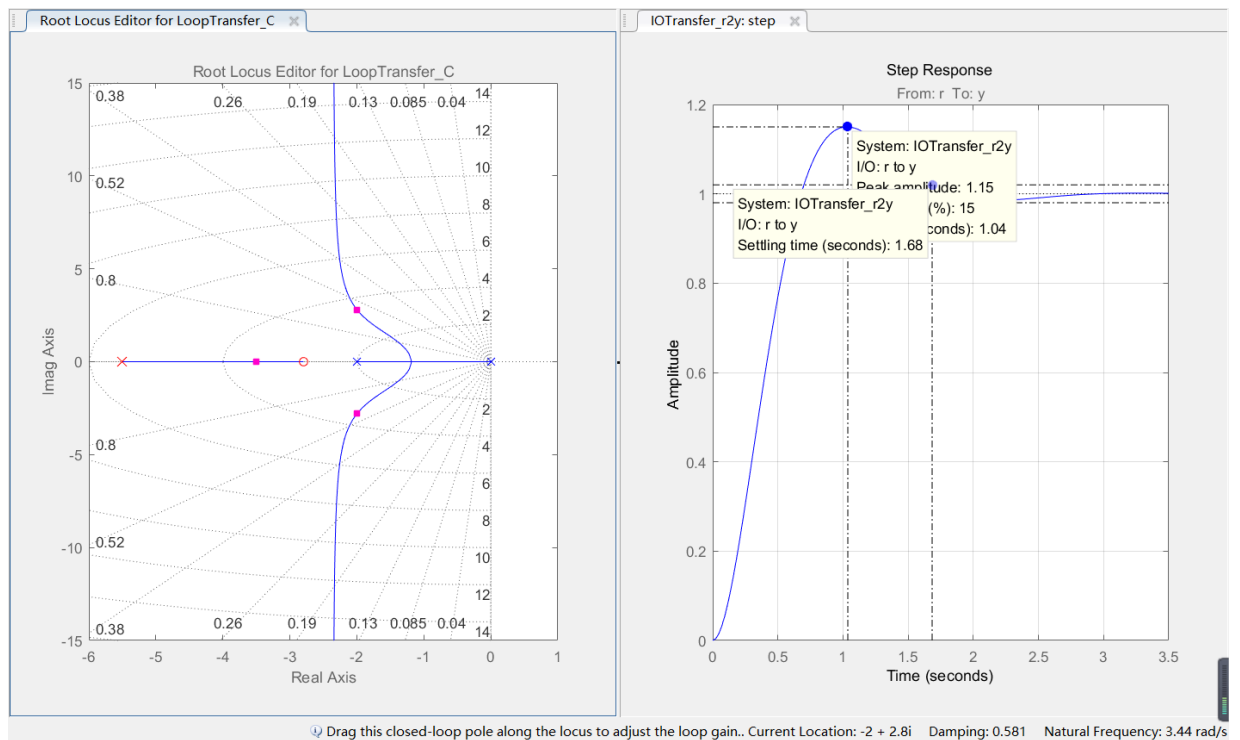


② 只增加极点，根轨迹向复平面右侧移动，系统阻尼比增大， $t_s$  增加， $M_p$  减小；

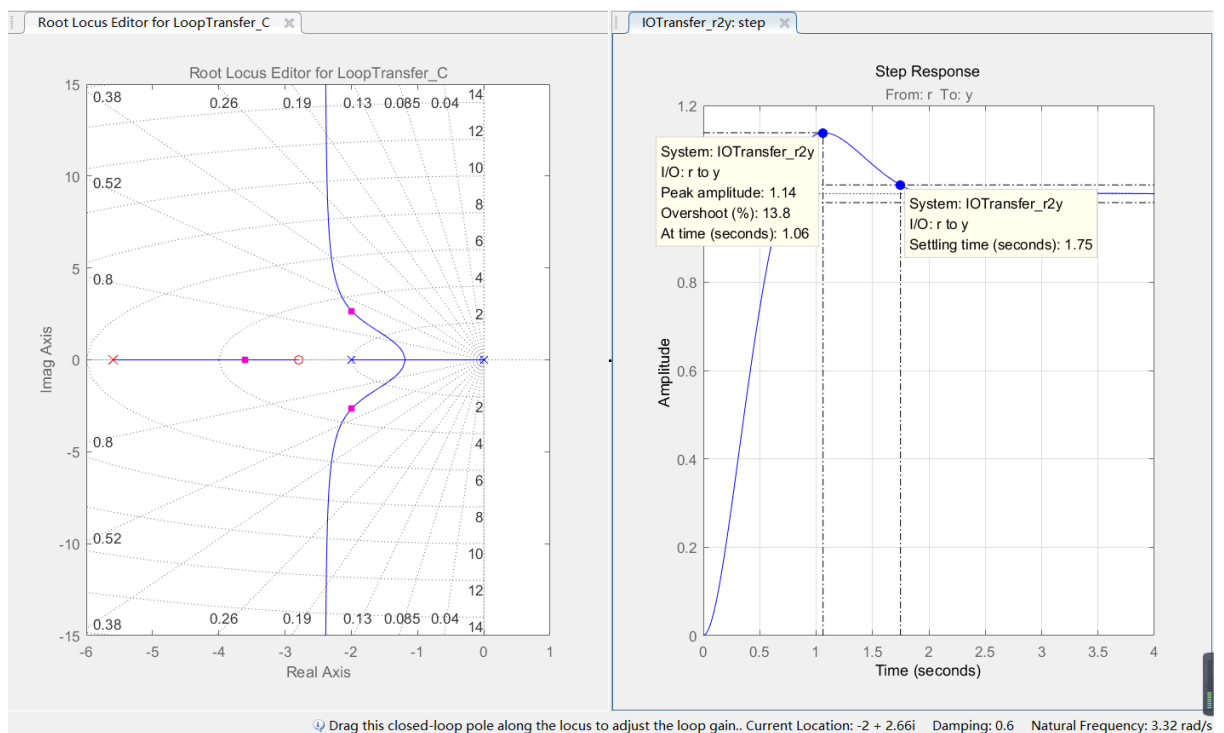


③ 同时添加零点  $z_1$ ，极点  $p_1$ ，（ $z_1 < p_1$ ）  
假设  $z_1 = -2.8$ ， $p_1 = -5.5$  时，根轨迹过  $-2 \pm 2.8i$ ；



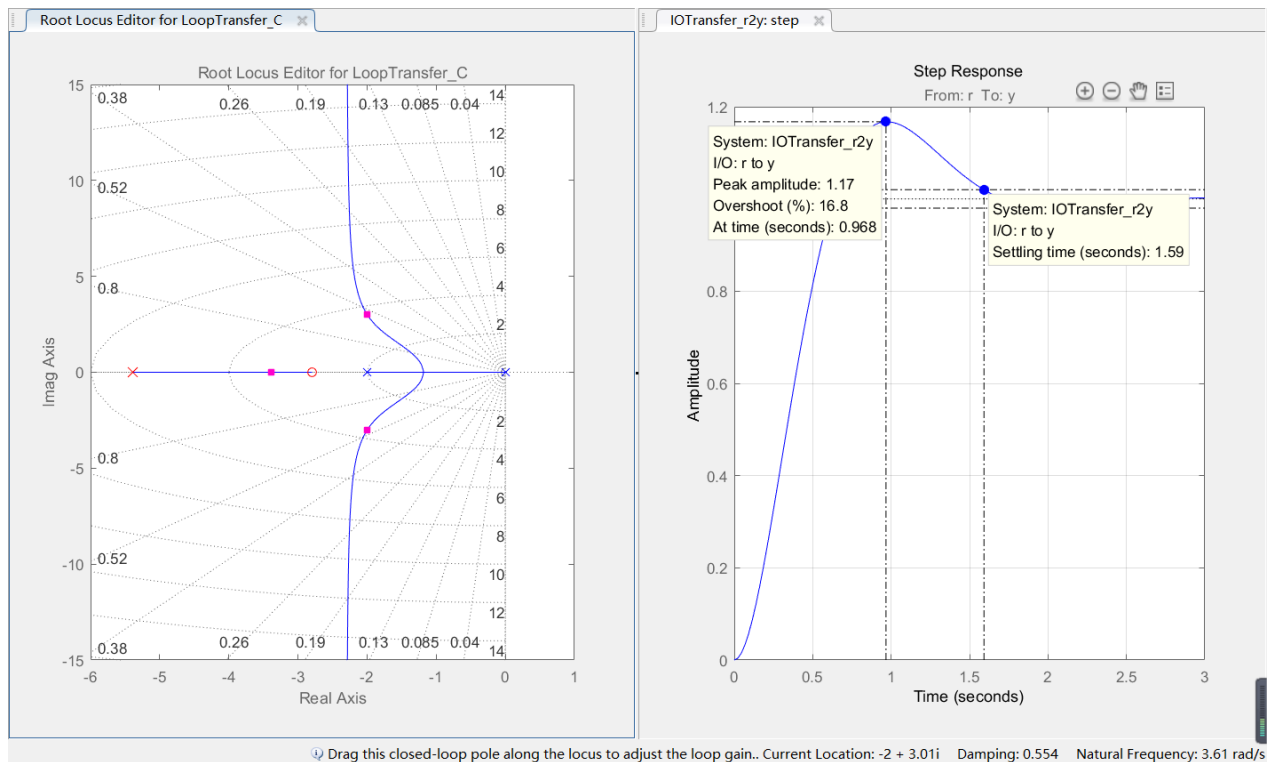


(1) 保持零点  $z_1$  不动，左移极点  $p_1$  至  $-5.6$ ，根轨迹过  $-2 \pm 2.66i$ ；超调量减小，调节时间增大；

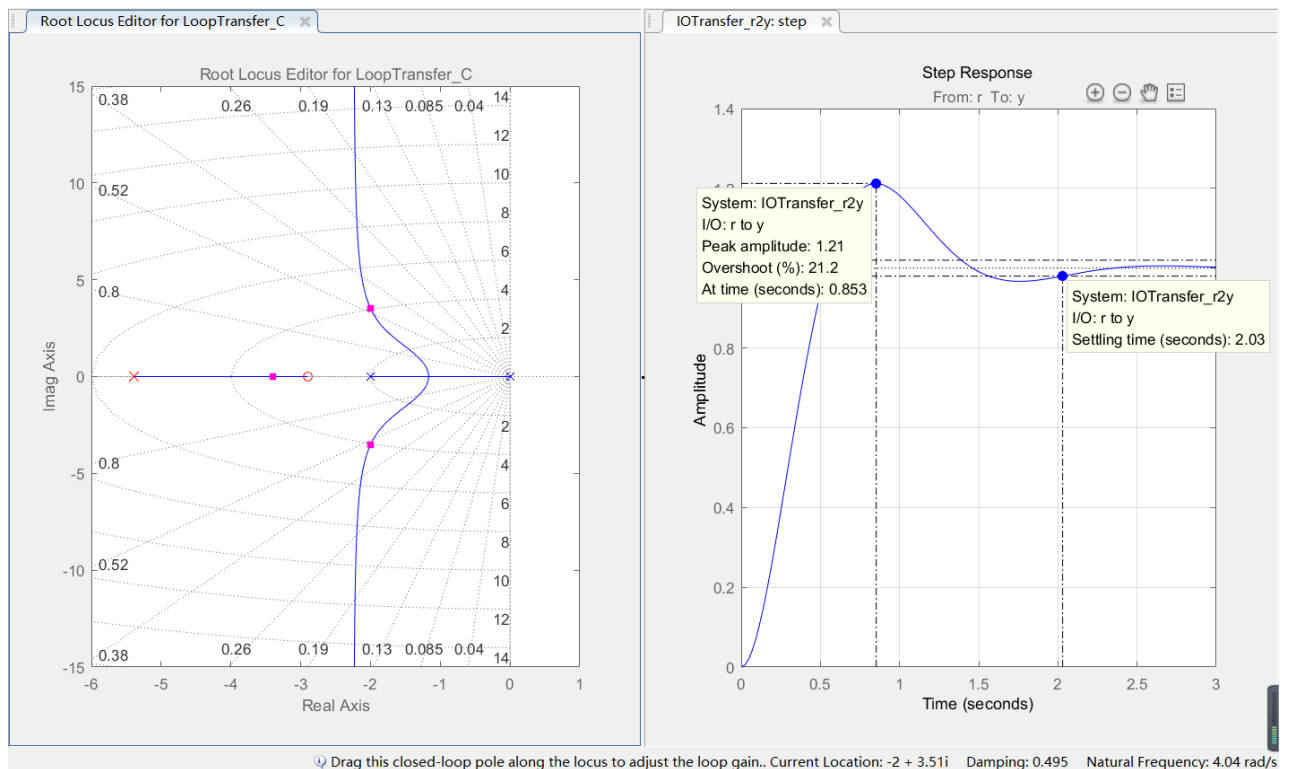


(2) 保持零点  $z_1$  不动，右移极点  $p_1$  至  $-5.4$ ，根轨迹过  $-2 \pm 3.01i$ ；超调量增大，调节时间减小；

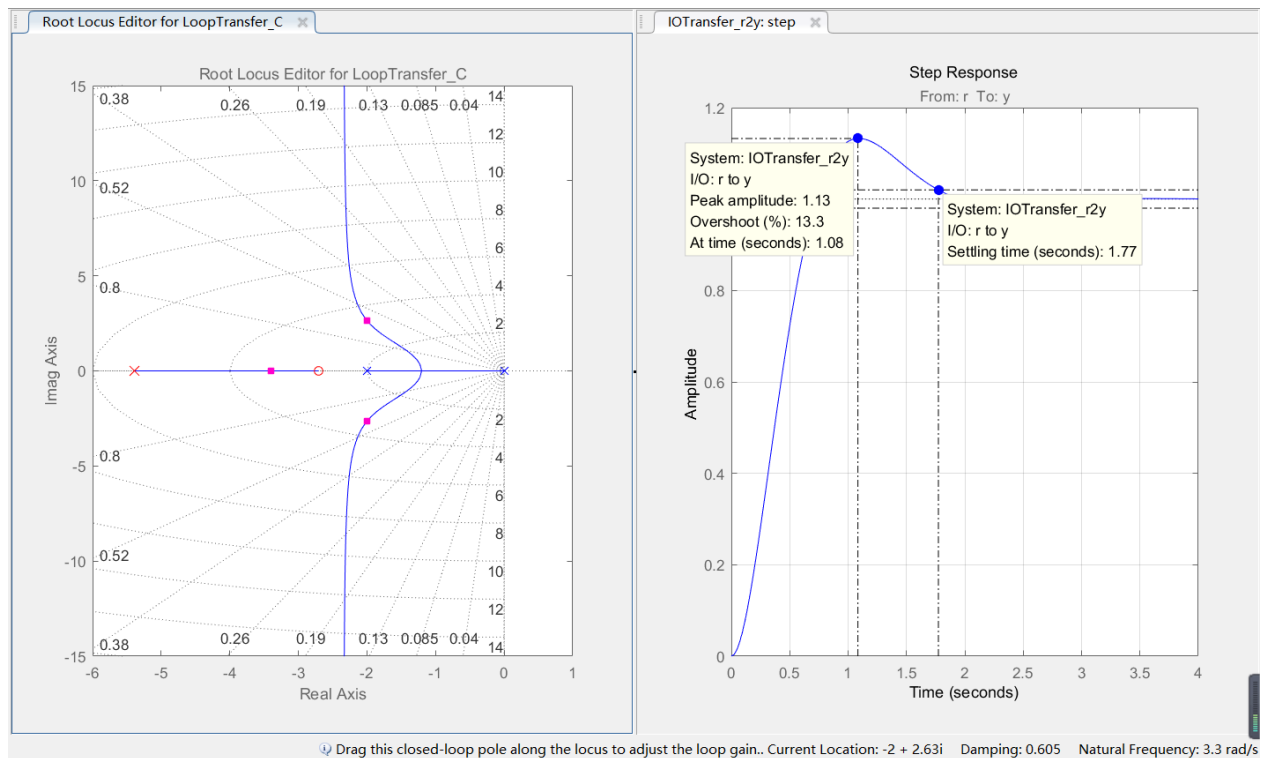




(3) 保持极点  $p_1$  不动，左移零点  $z_1$  至 -2.9，根轨迹过  $-2 \pm 3.51i$ ；峰值时间增大，调节时间增大；



(4) 保持极点  $p_1$  不动，右移零点  $z_1$  至 -2.6，根轨迹过  $-2 \pm 2.63i$ ；超调量减小，调节时间增大；



根据以上分析可知，要想让根轨迹通过  $s_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{3}j$ ，需要同时右移极点  $p_1$ ，左移零点  $z_1$ ，当添加的零极点  $z_1 = -2.9$ ， $p_1 = -5.4$  时，能达到目标；

得出  $T = 0.185$ ， $\alpha = 0.573$ ；

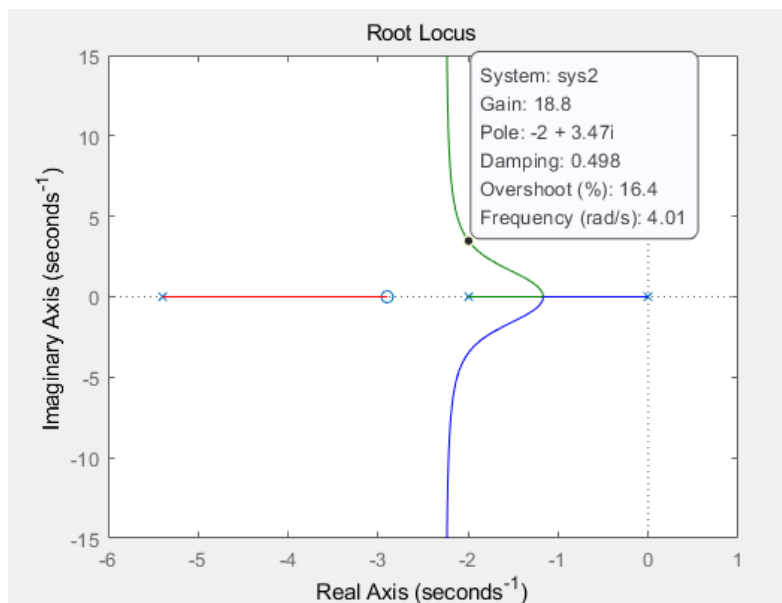
所以超前校正元件函数  $G_c(s) = K_c(s + 2.9)/(s + 5.4)$

5) 最后利用模条件，求取超前校正的增益  $K_c$

$$G_c(s)|_{s=-2+j2\sqrt{3}} = 1$$

$$K_c = 4.68$$

得到校正后根轨迹



6) 分析系统超前校正前后的动态性能:

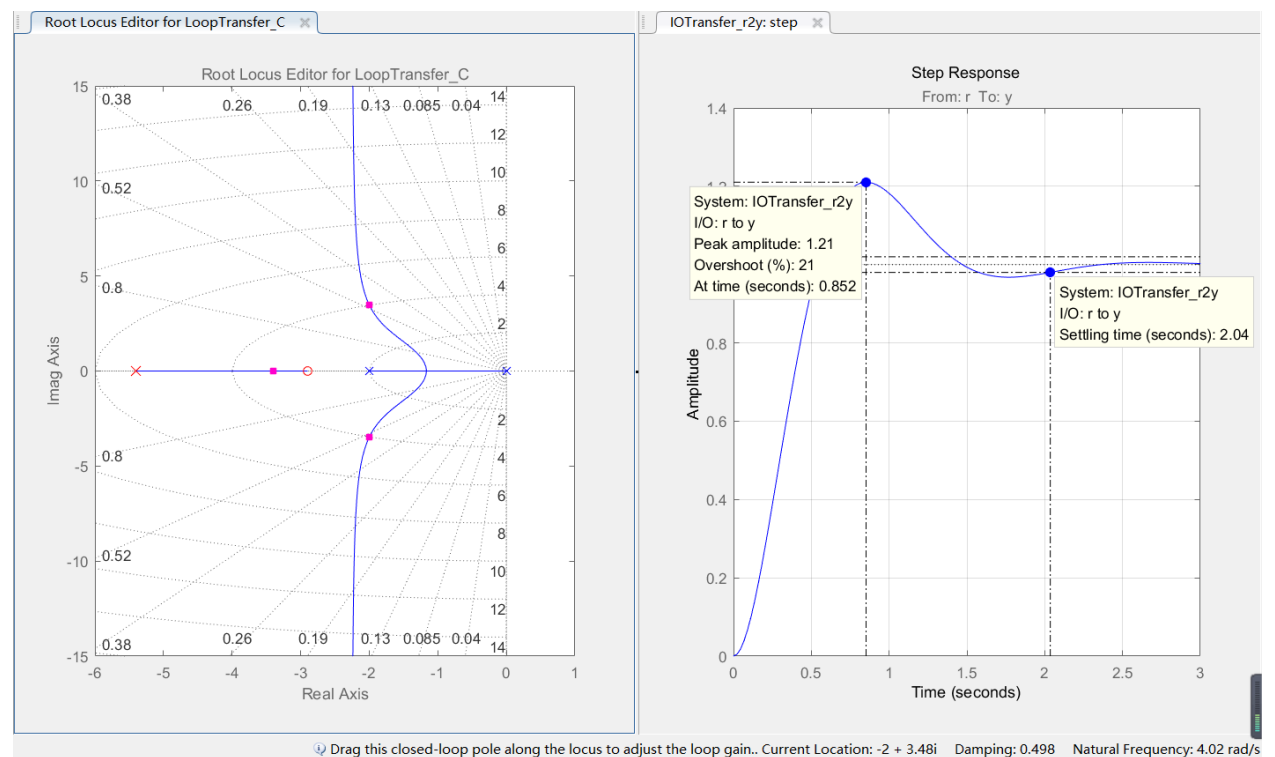
代码:

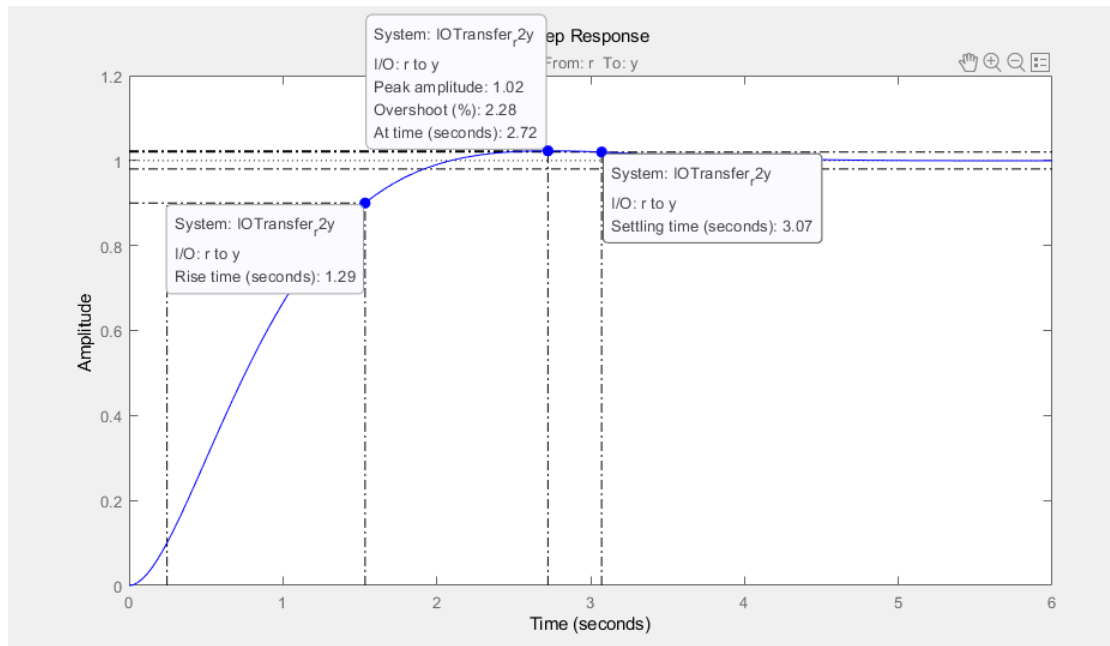
```
num = [4];  
den=[1 2 0];  
sys1=tf(num,den);  
t=0:0.01:100;  
rltool(sys1);
```

%加校正元件后

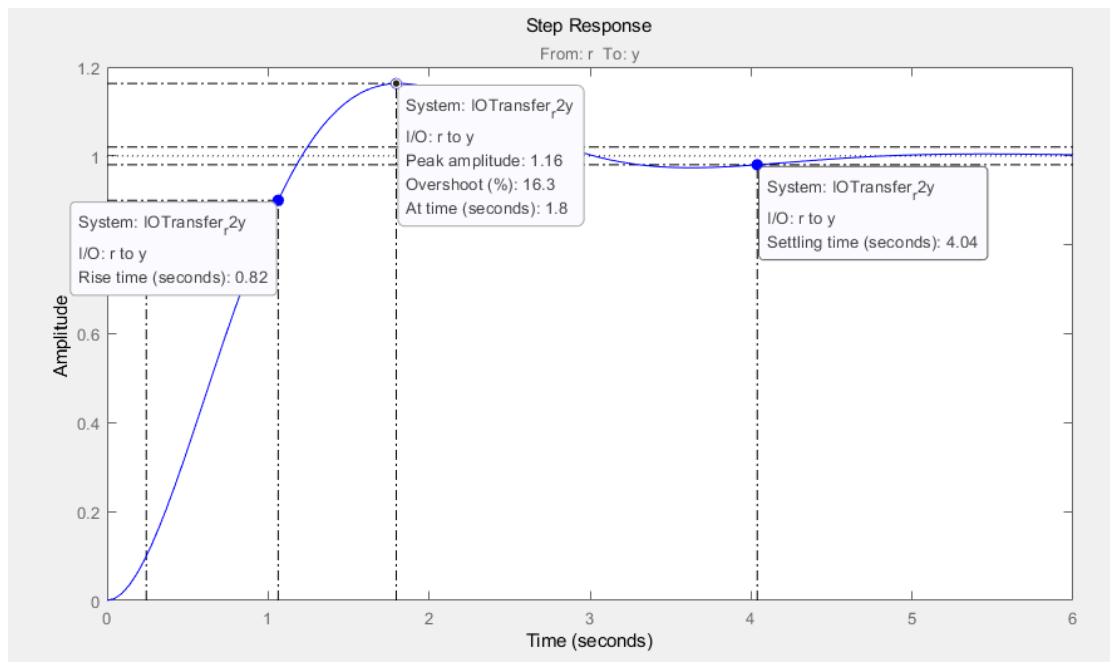
```
num1= [4.68 13.57];  
den1= [1 7.4 10.8 0];  
sys2=tf(num1, den1);  
rltool(sys2);
```

校正后，系统动态性能（如下图）： $M_p=2.28\%$ ， $t_s=3.07s$ ;





对比原系统的动态性能（如下图）， $M_p=16.3\%$ ， $t_s=4.04s$ ;



可得出以下结论:

- i) 开环传递函数增加极点，会使根轨迹整体右偏，系统相对稳定性降低，快速性降低，系统型别增大， $ess$  降低，动态性能变差，且极点越靠近虚轴，影响越剧烈；
- ii) 开环传递函数增加零点，会使根轨迹整体左偏，系统相对稳定性增加，快速性提高，系统型别降低， $ess$  增大，引入微分环节，抗干扰能力变差，且极点越靠近虚轴，影响越剧烈；
- iii) 加入超前校正装置后，系统得调节时间大大减小，一定程度上增加了系统的响应速度；
- iv) 校正后系统的超调量明显减小，阻尼比增大，系统动态性能得到改善；