Analisi D for Dummies

bug report: *mario.piccinelli@gmail.com*

24 dicembre 2010

Indice

1 Funzioni di una variabile complessa **4**
1.1 Definizioni . . . 4
1.1.1 Distanza . . . 4
1.1.2 Palla aperta . . . 4
1.1.3 Palla chiusa . . . 4
1.1.4 Circonferenza . . . 4
1.1.5 Punto interno . . . 5
1.1.6 Insieme aperto . . . 5
1.1.7 Punto di accumulazione . . . 6
1.2 Limite . . . 6
1.3 Continuitá . . . 7
1.4 Derivabilitá . . . 7
1.5 Differenziabilitá . . . 8
1.6 Teorema di Cauchy-Riemann . . . 8
1.6.1 Dimostrazione . . . 9
1.7 Curve e Cammini in C . . . 10
1.7.1 C^1 a tratti . . . 10
1.7.2 Curva . . . 10
1.7.3 Curve equivalenti . . . 10
1.7.4 Relazione di Equivalenza . . . 10
1.7.5 Classi di equivalenza . . . 10
1.7.6 Curva Orientata . . . 11
1.7.7 Somma di cammini . . . 11
1.7.8 Cammino inverso . . . 11
1.8 Integrale di una funzione di variabile complessa . . . 11
1.8.1 Lunghezza di C . . . 12
1.8.2 Funzione Olomorfa . . . 13
1.8.3 Teorema di Cauchy (1 versione) . . . 13
1.8.4 Circuiti omotopi . . . 14
1.8.5 Teorema di Cauchy (2 versione) . . . 14
1.8.6 Teorema di Morera . . . 14
1.9 Sviluppi in serie . . . 15
1.9.1 Funzione analitica . . . 15
1.9.2 Serie di Taylor . . . 15
1.9.3 Serie assolutamente convergente . . . 15
1.9.4 Teorema . . . 16
1.9.5 Formule di Cauchy . . . 16
1.9.6 Teorema . . . 16
1.10 Singolaritá isolate . . . 17
1.10.1 Teorema . . . 17
1.10.2 Classificazione . . . 18

1.10.3 Teorema . . . 19
1.10.4 Classificazione (ai limiti) . . . 19
1.10.5 Teorema . . . 19
1.10.6 Classificazione (alla serie di Laurent) . . . 19
1.11 Residui . . . 20
1.11.1 Calcolo residui . . . 21
1.11.2 Teorema (prodotto alla Cauchy) . . . 22
1.11.3 Teorema dei residui . . . 22
1.12 Funzioni Polidrome . . . 26
1.12.1 Logaritmo . . . 26
1.12.2 Radice . . . 26
1.13 Integrali di Lebesgue . . . 27
1.13.1 Misura . . . 27
1.13.2 Proposizione Quasi Vera (?!?) . . . 28
1.13.3 Successione di Cauchy . . . 28
1.13.4 Convergenza . . . 28
1.13.5 Teorema . . . 29
1.13.6 Funzione Caratteristica . . . 29
1.13.7 Funzione a Scala . . . 29
1.13.8 Integrale di funzione a scala . . . 29
1.13.9 Integrabilitá secondo Lebesgue . . . 29
1.13.10 Integrale secondo Lebesgue . . . 30
1.13.11 Insieme misurabile . . . 30
1.13.12 Insieme di misura finita . . . 30
1.13.13 Integrabilitá secondo Lebesgue su insieme finito . . . 30
1.13.14 Confronto con l'integrale secondo Riemann . . . 30
1.13.15 Teorema di Lebesgue della convergenza dominata . . . 31
1.13.16 Esempio: confronto con la teoria classica (di Riemann) . . . 31

2 Spazi vettoriali normati 32
2.1 Norma . . . 32
2.1.1 Verifica norma . . . 33
2.1.2 Uguaglianza . . . 33
2.2 Spazio normato . . . 33
2.2.1 Lemma . . . 34
2.3 Successioni . . . 34
2.3.1 Lemma . . . 35
2.3.2 Proposizione . . . 35
2.3.3 Corollario . . . 35
2.4 Serie in V . . . 35
2.4.1 Convergenza . . . 35
2.4.2 Dimensione . . . 36
2.4.3 Teorema . . . 36
2.4.4 Proposizione . . . 36
2.5 Spazio completo . . . 36
2.5.1 Successione di Cauchy . . . 36
2.5.2 Teorema . . . 36
2.5.3 Teorema . . . 36
2.5.4 Spazio di Banach . . . 37
2.6 Prodotto Scalare . . . 37
2.6.1 Disuguaglianza di Cauchy - Schwartz . . . 37
2.6.2 Spazio di Hilbert . . . 37
2.6.3 Teorema . . . 38
2.6.4 Lemma . . . 38
2.6.5 Corollario . . . 38
2.7 Definizioni . . . 38
2.7.1 Spazio denso . . . 38
2.7.2 Lemma . . . 39

2.7.3 Supporto . . . 39
2.7.4 Insieme compatto . . . 39
2.7.5 Corollario . . . 39

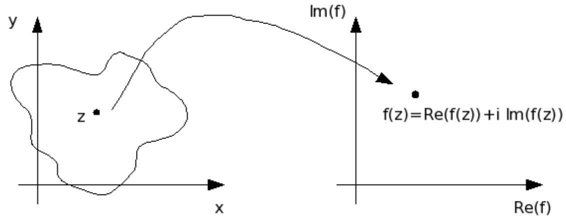
3 Distribuzioni **39**
3.1 Spazio delle funzioni test D . . . 39
3.2 Teorema . . . 39
3.3 Funzioni localmente sommabili L^1_{loc} . . . 39
3.4 Convergenza in L^1_{loc} . . . 40
3.5 Funzionale lineare . . . 40
3.6 Convergenza in D . . . 41
3.7 Distribuzione: definizione . . . 41
3.8 Spazio delle distribuzioni D' . . . 42
3.9 Teorema di caratterizzazione . . . 42
3.10 Convergenza in D' . . . 43
3.11 Teorema di completezza . . . 43
3.12 Teorema della divergenza di Gauss . . . 44
3.13 Derivate di distribuzioni . . . 45
3.13.1 Osservazione: . . . 45
3.14 Derivate multiple . . . 46
3.15 Teorema di Schwartz . . . 46
3.15.1 Dimostrazione . . . 46
3.16 Teorema . . . 46
3.16.1 Dimostrazione . . . 46

4 Trasformata di Fourier **46**
4.1 Proprietá . . . 46
4.1.1 Dimostrazioni . . . 47
4.2 Corollario . . . 47
4.2.1 Dimostrazione . . . 47
4.3 Teorema inversione . . . 47
4.3.1 Inversione nel caso $n = 2$ . . . 47

1 Funzioni di una variabile complessa

$$f: \quad \Omega \to C \qquad\qquad \Omega \subset C$$
$$z \in \Omega \to f(z) \in C$$

$z \in C \Rightarrow z = x + iy \quad x, y \in R$
$x = \Re(z) \quad y = \Im(z)$



Modulo di z: $\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$

1.1 Definizioni

1.1.1 Distanza

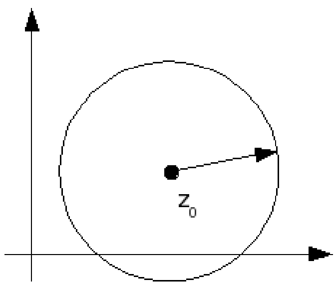
Distanza tra z_1 e z_2:

$$dist(z_1, z_2) = \mid z_1 - z_2 \mid = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{\mid x_1 - x_2 \mid^2 + \mid y_1 - y_2 \mid^2}$$

1.1.2 Palla aperta

Palla aperta di centro z_0 e raggio R:

$$B_R(z_0) = \{z \in C \quad : \quad \mid z - z_0 \mid < R\}$$



1.1.3 Palla chiusa

Palla chiusa di centro z_0 e raggio R:

$$\overline{B_R(z_0)} = \{z \in C \quad : \quad \mid z - z_0 \mid < R\}$$

1.1.4 Circonferenza

Circonferenza di centro z_0 e raggio R:

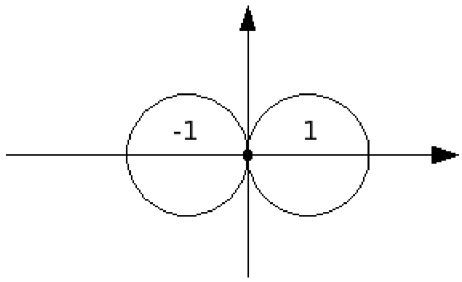
$$C_R(z_0) = \overline{B_R(z_0)} - B_R(z_0) \quad = \quad \{z \in C \quad : \quad \mid z - z_0 \mid = R\}$$

1.1.5 Punto interno

Definizione: $z_0 \in \Omega \subset C$ é un <u>punto interno</u> di Ω se:

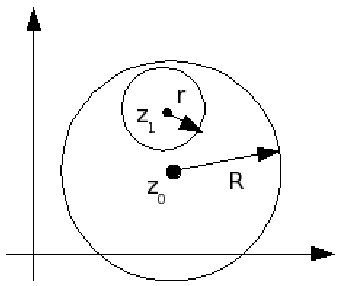
$$\exists R > 0 \quad : \quad B_R(z_0) \subset C$$

Esempio $\quad \Omega = B_1(1) \cup B_1(-1) \cup \{0\}$



$z_0 = 0$ NON é un punto interno di Ω (non esiste una palla centrata in z_0 che sia interna a Ω)
$z_0' = 1 + i\frac{1}{2}$ é un punto interno

Esempio $\quad \Omega = B_R(z_0)$



Si vede che *qualunque* punto z_1 della palla aperta é un punto interno, poiché:

$$B_R(z_1) \subset B_R(z_0) \quad \text{per ogni } r < R- \mid z_0 - z_1 \mid$$

1.1.6 Insieme aperto

$\Omega \subset C$ é un <u>insieme aperto</u> se ogni suo punto é un punto interno.

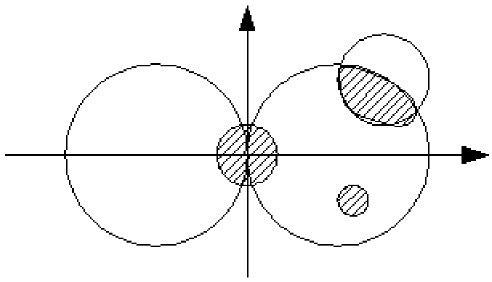
1.1.7 Punto di accumulazione

Dato $\Omega \subset C$ un punto $z_0 \in C$ é un punto di accumulazione per Ω se

$$\forall R > 0 \quad B_R(z_0) \text{ contiene punti di } \Omega$$

eventualmente diversi da z_0.

Esempio: $\Omega_2 = B_1(1) \cup B_1(-1)$



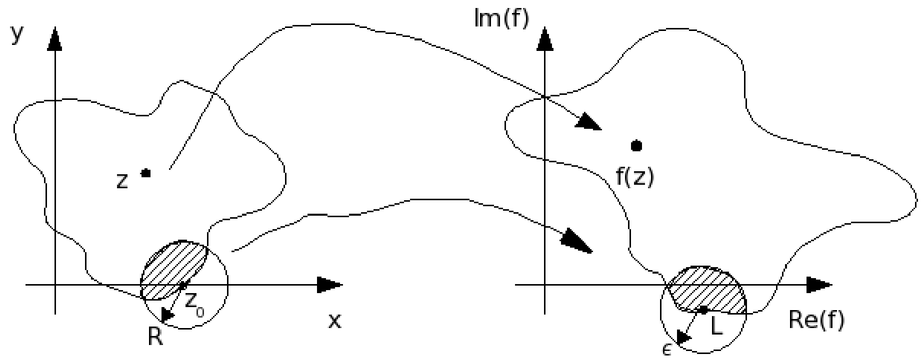
I punti indicati sono tutti punti di accumulazione.

NB: z_0 punto interno di Ω implica z_0 punto di accumulazione
Questo implica che un insieme aperto é formato solo da punti interni.

inoltre se Ω ha un punto di accumulazione, allora Ω ha infiniti punti.

1.2 Limite

$f : \Omega \in C \to C \quad z_0 \in C$ punto di accumulazione per Ω



f ha un limite finito per z tendente a z_0

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \quad \in C$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0 \quad : \quad | f(z) - L | < \varepsilon \quad \forall z \in \Omega \cap B_R(z_0) \quad z \neq z_0$$

1.3 Continuitá

$f : \Omega \to C \quad \Omega \subset C$ aperto $\quad z_0 \in \Omega$

f é <u>continua</u> in z_0 se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0 \quad : \quad | f(z) - f(z_0) | < \varepsilon \quad \forall z \in \Omega \hat{B}_R(z_0)$$

1.4 Derivabilitá

$f : \Omega \to C \quad \Omega \subset C$ aperto $\quad z_0 \in \Omega$

f é <u>derivabile</u> in z_0 se $\exists$ finito

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Esempio $\quad f(z) = z^2 \quad f : C \to C \quad$ derivabile in tutto C

Scrivendo $z = z_0 + h$ (con $h \in C$) ho

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{f} = \lim_{h \to 0} \frac{(z_0 + h)^2 - z_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{z_0^2 + 2z_0 h + h^2 - z_0^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2z_0 + h) = 2z_0$$

Esempio $\quad f(z) = \Re(z) \quad f : C \to C$

$z = x + iy \quad \to \quad f(z) = x$

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Re(z_0 + h) - \Re(z_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Re(h)}{h}$$

- h puramente reale $\lim_{h \to 0} \frac{\Re(h)}{h} = 1$
- h puramente immaginaria $\lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$

Poiché il limite non é definito (ho due risultati diversi) la funzione non é derivabile $\forall z_0$

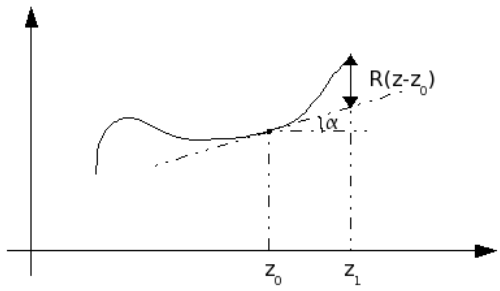
1.5 Differenziabilitá

f é <u>differenziabile</u> in z_0 se:

$$\exists \lambda \in C \quad : \quad f(z) = f(z_0) + \lambda \cdot (z - z_0) + R(z - z_0)$$

dove il resto $R(z - z_0)$ soddisfa la seguente:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{R(z - z_0)}{z - z_0} = 0$$



Se f é differenziabile in z_0, allora $\lambda = \frac{f'}{z_0}$

f differenziabile implica f derivabile

Si puó riscrivere cosí la definizione:

$$\exists \lambda \in C \quad : \quad f(z_0 + h) = f(z_0) + \lambda \cdot h + R(h)$$

Quindi

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0 \quad = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0) - \lambda \cdot h}{h} = \lim_{h \to 0} \Big(\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - \lambda \Big) = 0$$

($R(h)$ é detto <u>o piccolo</u> di h, ovvero $o(h)$ per $h \to 0$)

Il che implica che:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lambda$$

1.6 Teorema di Cauchy-Riemann

Scrivendo $z = x + iy$, si puó scrivere:

$$\begin{aligned} f(z) &= \underbrace{\Re(f(z))}_{u} + i \underbrace{\Im(f(z))}_{v} \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

In tal modo, la funzione f risulta divisa in due funzioni separate:

$$\begin{aligned} f &: C \to C \\ u &: R^2 \to R \\ v &: R^2 \to R \end{aligned}$$

Quindi, supponendo $f : C \to C$ con $\Omega \subset C$ aperto

f é derivabile in z se e solo se u e v sono differenzibili (come campi scalari) in (x, y), e valgono le equazioni:

$$\frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y} \qquad \frac{\delta u}{\delta y} = -\frac{\delta v}{\delta x}$$

equazioni di Cauchy-Riemann

Esempio

$$f(z) = \Re(z) = x \quad [z = x + iy]$$
$$u(x,y) = x$$
$$v(x,y) = 0$$
$$\frac{\delta u}{\delta x} = 1 \neq \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \quad \Rightarrow \quad f \text{ non derivabile}$$

Esempio

$$f(z) = \mid z \mid^2 \quad = \quad \mid x + iy \mid^2 \quad = \quad x^2 + y^2$$
$$u(x,y) = x^2 + y^2$$
$$v(x,y) = 0$$
$$\frac{\delta u}{\delta x} = 2x = \frac{\delta v}{\delta y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$
$$\frac{\delta u}{\delta y} = 2y = \frac{\delta v}{\delta x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 0$$
$$\Rightarrow \text{la funzione é derivabile solo nell'origine } (0,0)$$

Esempio

$$f(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{oppure} \quad e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cdot (\cos x + i \sin y)$$
$$u(x,y) = e^x \cos y$$
$$v(x,y) = e^x \sin y$$
$$\frac{\delta u}{\delta x} = e^x \cos y = \frac{\delta v}{\delta y}$$
$$\frac{\delta u}{\delta y} = -e^x \sin x = -\frac{\delta v}{\delta x}$$
$$\Rightarrow f(z) = e^z \text{ é derivabile in tutto } C$$

1.6.1 Dimostrazione

ipotesi: f derivabile in $z \Leftrightarrow$ differenziabile in z

$$\Rightarrow f(z+h) = f(z) + f'(z) \cdot h + o(h) \quad \text{per } h \to 0 \quad \left(\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0\right)$$
$$\boxed{u_0 = u(x,y) \quad v_0 = (x,y)}$$
$$\boxed{u = u(x+h_1, y+h_2) \quad v = v(x+h_1, y+h_2)}$$
$$\boxed{h = (h_1, h_2) \quad o(h) = o(h) + i \cdot o(h) \quad \text{per le proprietá di o piccolo}}$$
$$f(z+h) = u + iv = u_0 + iv_0 + (\alpha + i\beta)(h_1 + h_2) + o(h) + io(h)$$

$$\Rightarrow \quad u = u_0 + \alpha h_1 - \beta h_2 + o(h) \quad \Rightarrow \quad \text{u differenziabile in } (x,y)$$
$$\text{e inoltre si vede che } \frac{\delta u}{\delta x} = \alpha \quad \frac{\delta u}{\delta y} = -\beta$$
$$\Rightarrow \quad v + v_0 + \beta h_1 + \alpha h_2 + o(h) \quad \Rightarrow \quad \text{v differenziabile in } (x,y)$$
$$\text{e inoltre } \frac{\delta v}{\delta x} = \beta \quad \frac{\delta v}{\delta y} = \alpha$$

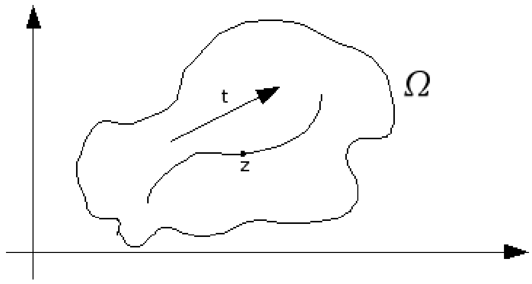
Quindi é dimostrato che:

$$\alpha = \frac{\delta u}{\delta x} = \frac{\delta v}{\delta y}$$
$$\beta = \frac{\delta v}{\delta x} = -\frac{\delta u}{\delta y}$$

1.7 Curve e Cammini in C

Al variare di t, il punto z si sposta lungo un percorso $R \in [a,b]$

$$t \to r(r) = \Re(r(t)) + \Im(r(t))$$



1.7.1 C^1 a tratti

$r : [a,b] \to C$ é $\mathbf{C^1}$ **a tratti** se:

- r é continua su $[a,b]$
- $\exists$ un numero finito di punti $t_1, t_2, \ldots, t_n \in]a,b[$ tali che $t_0 = a$ e $t_n = b$ e $r(t)$ é C^1 in $[t_i, t_{i+1}] \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$

1.7.2 Curva

Se $r : [a,b] \to C$ é C^1 a tratti, allora individua una **curva** in C.

1.7.3 Curve equivalenti

$r_1 : [a_1, b_1] \to C$
$r_2 : [a_2, b_2] \to C$

$\exists \varphi : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1] \quad$ biiettiva, strettamente crescente, C^1 a tratti
tale che $r_2(t) = r_1((\varphi(t))) \quad \forall t \in [a,b]$

allora r_1 e r_2 sono **curve equivalenti**.

Esempio:

$$v_2(t) = \cos(t) + i\sin(t) \qquad t \in [0,\pi]$$
$$v_1(\tau) = \cos(\tau) + i\sin(\tau) \qquad \tau \in [0,2\pi]$$
$$\varphi(t) = \frac{1}{2}t : [0,2\pi] \to [0,\pi]$$

1.7.4 Relazione di Equivalenza

$$r_1 \sim r_2 \quad \Rightarrow \quad r_2 \sim r_1 \qquad \text{simmetria}$$
$$r_1 \sim r_1 \qquad \text{riflessione}$$
$$r_1 \sim r_2 \quad e \quad r_2 \sim r_3 \quad \Rightarrow \quad r_1 \text{ e } r_3 \text{ sono equivalenti}$$

1.7.5 Classi di equivalenza

Insieme di tutte le curve equivalenti.

1.7.6 Curva Orientata

La **curva orientata** é una classe di equivalenza di funzioni C^1 a tratti equivalenti tra loro.
L'orientamento é il senso di percorrenza uguale per ogni curva della stessa classe.
Ognuna delle funzioni della classe di equivalenza é detta **rappresentazione parametrica della curva**.

$$r : [a, b] \to C$$

- $r(a)$ e $r(b)$ sono detti *estremi* della curva C.
- $r([a, b])$ é detto *sostegno* della curva C.
- $r(a) = r(b)$ indica un *cammino chiuso* o *circuito*.

1.7.7 Somma di cammini

$$\begin{array}{rr} r : [a, b] \to C & C \\ r : [a, c] \to C & C_1 \\ r : [c, b] \to C & C_2 \end{array}$$

con $a < c < b$, allora:

$$C = C_1 + C_2$$

1.7.8 Cammino inverso

Dato un cammino C con $r : [a, b] \to C$ il **cammino inverso** ha lo stesso sostegno percorso in senso opposto.
Cammino inverso: -C

1.8 Integrale di una funzione di variabile complessa

Data una curva C orientata in C, $r : [a, b] \to C$, C^1 a tratti, suppongo che il mio sostegno sia il dominio di una funzione

$$f : sost(C) \to C \quad \text{continua}$$

$$\int_C f(z)\, dz \quad := \quad \int_a^b f(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$

$$z \in sost(C) \quad z = r(t)$$

Dato che il prodotto $f(r(t)) \cdot r'(t)$ risulta continuo a tratti posso esprimere l'integrale come somma di integrali di funzioni continue in ogni intervallo.

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \underbrace{f(r(t)) \cdot r'(t)}_{C_0}\, dt$$

Proprietá:

- Linearitá:

$$\int_C (\lambda \cdot f + \mu g)\, dz = \lambda \cdot \int_C f\, dz + \mu \int_C g\, dz$$

- Additivitá:

$$\int_{C_1+C_2} f(z)\, dz = \int_{C_1} \cdots + \int_{C_2} \cdots$$

- $$\int_{-C} = -\int_C$$

1.8.1 Lunghezza di C

$$l(C) = \int_a^b \mid r'(t) \mid \, dt$$

Fare molta attenzione se la curva presenta parte reale e parte immaginaria!

Esempio:

$$r(t) = u(t) + ig(t)$$

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

Ora vado a fare una maggiorazione dell'integrale:

$$\mid \int_C f(z)\,dz \mid \leq \int_a^b \mid f(r(t)) \cdot r'(t) \mid \, dt \leq \int_a^b \max \mid f(z) \mid \cdot \mid r'(t) \mid \, dt = \max_{z \in sost(C)} f(z) \cdot l(C)$$

Esempio $f(z) = z^n \quad n \in Z$

- $n \geq 0 \quad f : C \to C \quad \Omega = C$
- $n < 0 \quad f : C - \{0\} \to C \quad \Omega = C - \{0\}$

Supponiamo di voler calcolare:

$$\int_{C_R(0)} f(z)\,dz$$

con

$$C_R(0) : z = R \cdot e^{it} = R(\cos t + i \sin t) = r(t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Si procede in questo modo:

$$\begin{aligned}
\int_{C_R(0)} f(z)\,dz &= \int_{C_R(0)} z^n\,dz \\
&= \int_0^{2\pi} (R \cdot e^{it})^n \cdot R \cdot i \cdot e^{it}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} R^{n+1} \cdot i \cdot e^{(n+1)\cdot i \cdot t}\,dt \\
&= R^{n+1} \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} e^{(n+1)\cdot i\cdot t}\,dt = \\
n+1 \neq 0 \qquad &= R^{n+1} \cdot i \cdot \frac{e^{(n+1)\cdot i \cdot t}}{(n+1)\cdot i} \Big|_0^{2\pi} = \frac{R^{n+1}}{n+1}\Big(\underbrace{e^{2\pi i(n+1)}}_{1} - 1\Big) = 0 \\
n+1 = 0 \qquad &= R^0 \cdot i \cdot \int_0^{2\pi} e^0\,dt = 2\pi \cdot i
\end{aligned}$$

Si verifica la maggiorazione:

$$\begin{aligned}
\mid \int_{C_R(0)} z^n\,dz \mid &\leq \max_{z \in C_R(0)} \mid z^n \mid \cdot l(C_R(0)) = \\
&= R^n \cdot 2\pi \cdot R = 2\pi R^{n+1}
\end{aligned}$$

Esempio

$$\int_{C_R(z_0)} (z - z_0)^n\,dz$$

sapendo che $z = r(t) = z_0 + Re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$= \int_0^{2\pi} (Re^{it}) \cdot R \cdot i \cdot e^{it}\,dt$$

z_0 scompare, e il risultato é esattamente come prima.

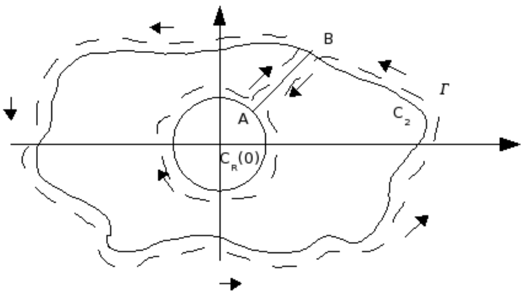
1.8.2 Funzione Olomorfa

$f : \Omega \subset C \to C \quad \Omega$ aperto
f é detta **olomorfa** (in Ω) se é derivabile in ogni punto di Ω.

1.8.3 Teorema di Cauchy (1 versione)

f olomorfa in Ω;
C circuito in Ω ($sost(C) \subset \Omega$) con *interno tutto contenuto* in Ω;
Allora:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$



Esempio

$$\int_{C_R(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z} =?$$

Creo un circuito $\Gamma = C_2 + [B,A] - C_R(0) + [A,b]$ cammino chiuso, C^1 a tratti, che non contiene 0 all'interno. (tratteggiato nel disegno)

$$\begin{aligned}\int_\Gamma \frac{dz}{z} &= \int_{C_2} + \int_{[B,A]} + \int_{-C_R(0)} + \int_{[A,B]} = \\ &= \int_{C_2} + \int_{[B,A]} - \int_{C_R(0)} - \int_{[B,A]} = 0 \qquad \text{per il teorema}\end{aligned}$$

Quindi:

$$\int_{C_2} = \int_{C_R(0)} = 2\pi i$$

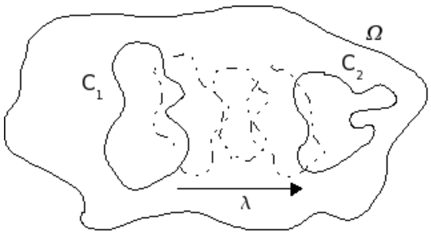
1.8.4 Circuiti omotopi

C_1 e C_2 due circuiti di Ω ($sost(C_1) \subset \Omega$) sono **Ω-omotopi** se esiste una funzione

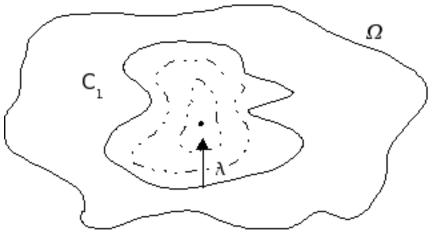
$$F : [0,1]x[a,b] \to \Omega$$

continua (nelle due variabili) tale che:

- $\forall \lambda \in [0,1]$, $H(\lambda, \cdot)$ é una parametrizzazione di un circuito in Ω.
- $\lambda = 0 \Rightarrow H(0, \cdot)$ é una parametrizzazione di C_1.
- $\lambda = 1 \Rightarrow H(0, \cdot)$ é una parametrizzazione di C_2.



In particolare, se ho un circuito Ω-omotopo ad un punto si dice Ω-omotopo a 0.



1.8.5 Teorema di Cauchy (2 versione)

$f : \Omega \to C$, Ω aperto, f olomorfa; C_1 e C_2 circuiti Ω-omotopi. Allora:

$$\int_{C_1} f(z)\,dz \quad = \quad \int_{C_2} f(z)\,dz$$

In particolare, se C é Ω-omotopa a zero,

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

1.8.6 Teorema di Morera

$f : \Omega \to C$ continua
$\forall C$ circuito in Ω succede che se:

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Allora f é olomorfa. (Condizione sufficiente, non necessaria).

Esempio:
$f(z) = \frac{1}{z}$ olomorfa in $C - \{0\}$

$$\int_{C_R(0)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$$

1.9 Sviluppi in serie

1.9.1 Funzione analitica

$f : \Omega \to C$, $\Omega \subset C$ aperto
f é **analitica** in Ω se é sviluppabile in serie di potenze di Ω, cioé se:

$\forall z_0 \in \Omega \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad B_\delta(z_0) \subset \Omega \quad$ e $\quad \exists \{c_n\}_{n \in N} \subset C \quad$ tale che:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \qquad c_n(z - z_0)^n}_{\text{serie di pot. con raggio di conv.} R \geq \delta} \qquad \forall z \in B_\delta(z_0)$$

Si nota che:

- la serie di potenze é derivabile termine a termine
- la serie delle derivate é una serie con lo stesso raggio di convergenza
- f é derivabile infinite volte in B_δ, quindi anche in Ω, quindi $f \in C^\infty$

1.9.2 Serie di Taylor

$f : \Omega \to C$, Ω aperto $\subset C$, f analitica in C
$\forall z_0 \in \Omega \quad \exists \delta > 0$ tale che

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z - z_0)^n \quad \forall z \in B_\delta(z_0) \subset \Omega$$

serie con raggio di convergenza $R \geq \delta$, derivabile termine a termine, dalle derivate con lo stesso R

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot C_n(z - z_0)^{n-1} \quad \text{in } B_\delta(z_0) \\
f''(z) &= \dots \\
f'''(z) &= \dots \\
&\vdots \\
f(z_0) &= C_0 \\
f'(z_0) &= 1 \cdot C_1 \\
f''(z_0) &= 2 \cdot 1 \cdot C_2 \\
&\vdots \\
f^{(n)}(z_0) &= n! \cdot C_n
\end{aligned}$$

$$C_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad \text{Coefficiente di Taylor}$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad \text{Serie di Taylor}$$

f analitica in $\Omega \Rightarrow f$ sviluppabile in serie di Taylor in Ω, ovvero:
$\forall z_0 \in \Omega \quad \exists \delta > 0 \quad : \quad B_\delta(z_0) \subset \Omega$

$$f(z) = \sum \text{Taylor}$$

1.9.3 Serie assolutamente convergente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid C_n \mid \cdot \mid z - z_0 \mid^n \qquad \text{é convergente}$$

1.9.4 Teorema

Serie assolutamente convergente in $B_\delta(z_0)$, $\mid z - z_0 \mid < \delta$
$\Rightarrow$
Serie uniformemente convergente in $\overline{B_r(z_0)}$, $0 < r < \delta$, $\mid z - z_0 \mid \leq r$

immagine

1.9.5 Formule di Cauchy

$$\begin{aligned}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz &= \int_{C_r(z_0)} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n}{(z-z_0)^{k+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{C_r(z_0)} c_n (z-z_0)^{n-k+1}\,dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{C_r(z_0)} (z-z_0)^{n-k+1}\,dz\end{aligned}$$

Tutti gli integrali sono nulli a meno che l'argomento non sia pari a -1, in questo caso varrá $2\pi i$

$$= \sum_{n-k-1\neq 1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_{C_r(z_0)} (z-z_0)^{n-k-1} + c_k \int (z-z_0)^{-1}\,dz = 2\pi i \cdot c_k$$

Da cui saltano fuori le formule:

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\,dz \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\end{aligned}$$

Ora ricavo le derivate (**formule di Cauchy**):

$$\begin{aligned}f^n(z_0) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \\ f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz\end{aligned}$$

Conosco la funzione al contorno del cerchio e posso trovarmi la funzione al centro:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-w}\,dz \qquad \forall w \in B_r(z_0)$$

Parto dalla funzione al contorno per trovare qualsiasi punto w all'interno della palla:

$$f'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z-w)^2}\,dz$$

1.9.6 Teorema

$f : \Omega \to C$, Ω aperto $\subset C$. Allora f é olomorfa in $\Omega \Leftrightarrow f$ é analitica.

Inoltre:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n\,dz \qquad \forall B_\delta(z_0) \subset \Omega$$

Nel caso reale: f analitica $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ sviluppabile in serie di potenze $\overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f \in C^\infty \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f$ derivabile.

Nel caso complesso: f derivabile $\Leftrightarrow f$ analitica $(\Leftrightarrow f \in C^\infty)$

1.10 Singolaritá isolate

$\Omega \subset C$ aperto, $z_0 \in \Omega$

$f : \Omega \backslash \{z_0\} \to C$ olomorfa, f *non* definita in z_0 (é un punto interno, quindi esiste una palla centrata in z_0 nella quale f é definita).

Allora z_0 é una **singolaritá isolata** per f.

Esempio

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$f : C\backslash\{0\} \to C$, quindi $z_0 = 0$ singolaritá isolata

Esempio

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

$f : C\backslash(\bigcup_{k\in z}\{k\pi\}) \to C$, quindi $z = k\pi$ singolaritá isolate

1.10.1 Teorema

Dunque, ricordiamo che in assenza di singolaritá abbiamo che, con f olomorfa in $B_\delta(z_0) \subset C$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n \qquad \forall z \in B_\delta(z_0)$$

Se invece siamo in presenza di singolaritá, quindi

$\Omega \subset C$ aperto, $z_0 \in \Omega$ singolaritá isolata, $f : \Omega\backslash\{0\} \to C$ olomorfa, e supponiamo di avere $B_R(z_0) \subset \Omega$,

Allora esiste $\{c_n\}_{n\in Z}$ tale che $\forall z \in B_R(z_0)$, con $z \neq z_0$

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n}_{\text{parte regolare}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}}_{\text{parte singolare}} \qquad \text{Serie di Laurent}$$

Inoltre,

- $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ ha raggio di convergenza $\geq R$
- $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} w^n$ ha raggio di convergenza $+\infty$

Quindi:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n \qquad 0 <\mid z - z_0 \mid< R$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz \qquad 0 < r < R \quad \forall n \in Z$$

Esempio

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

con $f : C\backslash\{0\} \to C$, quindi $z_0 = 0$ singolaritá isolata.

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = z^{-1}$

- $c_n = 0 \; \forall n \neq -1$
- $c_{-1} = 1$

Esempio

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

definita per $z \neq 0$, $z \neq -1$

Attorno a 0:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

- $c_n = 1 \ \forall n \geq 0$
- $c_{-1} = 1$
- $c_n = 0 \ \forall n < -1$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n$ ha raggio 1

$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^n = w$ ha raggio ∞

Esempio

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \qquad z \neq 0$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{z})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$$

- 1 (parte regolare): raggio ∞
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}$ (parte singolare): raggio ∞

1.10.2 Classificazione

- z_0 é una **singolaritá eliminabile** se

  $\exists f^* : \Omega \to C$ olomorfa tale che $f(z) = f^*(z) \quad \forall z \neq z_0$

  ovvero $\exists f^*(z_0) = \lim_{z \to z_0} f^*(z) = \lim_{z \to z_0} f(z)$

  $f^*(z)$, continua in z_0, é detta *prolungamento olomorfo* di f

- z_0 é un **polo** se

  $\exists \lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ (che corrisponde a dire $\lim_{z \to z_0} \mid f(z) \mid = +\infty$)

- z_0 é una **singolaritá essenziale** in tutti gli altri casi.

Esempio

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} \qquad z \neq 0$$

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} := f^*(z)$$

Quindi $z_0 = 0$ é una singolaritá eliminabile.

Esempio

$$f(z) = \frac{1}{z^m} \qquad m \geq 1 \quad z_0 = 0$$

$$\lim_{z \to 0} \mid \frac{1}{z^m} \mid = \lim_{|z| \to 0} \frac{1}{\mid z \mid^m} = \infty$$

Quindi $z_0 = 0$ é un polo.

Esempio

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} \qquad z_0 = 0$$

Proviamo a studiare il limite sull'asse reale: $z = x \in R$

- $\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ (quindi non é un polo)

- $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = \infty$ (diversa da prima, quindi non é una singolaritá eliminabile)

Quindi z_0 é una singolaritá essenziale.

1.10.3 Teorema

$f : \Omega\backslash\{z_0\} \to C$, z_0 singolaritá isolata.

se $\exists\delta > 0 \quad : \quad f$ é limitata in $B_\delta(z_0) \subset C$

Allora z_0 é una singolaritá eliminabile.

(ovvero se $\exists\delta > 0$, $M > 0 \quad : \quad | f(z) | \leq M \quad \forall z \in B_\delta(z_0)$)

Da qui deriva che, se $\exists$ finito $\lim_{z\to z_0}$, allora f é limitata in $B_\delta(z_0)$ con δ opportuno.

z_0 singolaritá eliminabile $\Leftrightarrow \exists \lim_{z\to z_0} f(z) = f^*(z_0)$

1.10.4 Classificazione (ai limiti)

- z_0 **singolaritá eliminabile** se
$$\exists \text{ finito } \lim_{z\to z_0} f(z)$$
- z_0 **polo** se
$$\exists \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$
- z_0 **singolaritá essenziale** se
$$\nexists \lim_{z\to z_0} f(z)$$

1.10.5 Teorema

z_0 polo per f. Allora $\exists$ un unico $n_0 \in N \geq 1$ tale che:

$$\exists \text{ finito } \lim_{z\to z_0} (z - z_0)^{n_0} f(z) \neq 0$$

ovvero

$$f(z) \approx \frac{1}{(z - z_0)^{n_0}}$$

n_0 é detto **ordine del polo**.

1.10.6 Classificazione (alla serie di Laurent)

- z_0 é **singolaritá eliminabile** se e solo se la sua serie di Laurent ha solo parte regolare.
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \qquad c_n = 0 \forall n \leq 1$$
- z_0 é un **polo** se e solo se la parte singolare della sua serie di Laurent ha solo un numero finito di termini.
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{n_0} c_{-n}(z - z_0)^{-n} \qquad c_{-n_0} \neq 0$$
n_0 ordine del polo.
- z_0 é **singolaritá essenziale** se e solo se la parte singolare della sua serie di Laurent ha un numero infinito di termini.

Esempio

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

(ha solo parte regolare, quindi é una singolaritá eliminabile)

$$f(z) = \frac{1}{z^m} \qquad \lim_{z \to z_0} z^m \frac{1}{z^m} \neq 0$$

(quindi $z_0 = 0$ é un polo di ordine m).

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} z^{-m}$$

(la parte singolare ha ∞ termini, quindi é una singolaritá essenziale)

1.11 Residui

Dunque, sappiamo che:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad 0 <\mid z - z_0 \mid< R$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz \qquad 0 < r < R$$

A partire da qui, definiamo **residuo** di f in z_0

$$C^{-1} = res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} f(z) \, dz$$

Esempio z_0 singolaritá eliminabile.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad c_n = 0 \forall n \leq 1$$

quindi $res(f, z_0) = 0$

Esempio

$$f(z) = \frac{1}{z} \qquad c_n = 0 \forall n \neq 1 \quad c_{-1} = 1$$

quindi $res(\frac{1}{z}, 0) = 1$

Esempio

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\sin z}{z^3} && \forall z \neq 0 \quad z_0 = 0 \\ &= \frac{1}{z^3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \\ &= \frac{1}{z^3} \{ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \} = \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \dots \end{aligned}$$

$c_{-1} = 0$ quindi $res(f, 0) = 0$

1.11.1 Calcolo residui

Supponiamo di avere un polo di ordine ≤ 3

$$f(z) = c_{-3}(z-z_0)^{-3} + c_{-2}(z-z_0)^{-2} + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + \dots$$

Se l'ordine del polo é 3, allora $c_{-3} \neq 0$
Creiamo la funzione:

$$g(z) = (z-z_0)^3 f(z) = c_{-3} + c_{-2}(z-z_0) + c_{-1}(z-z_0)^2 + \dots$$

Funzione analitica, quindi somma di serie di potenze, quindi la serie di Taylor di g centrata in z_0 é:

$$= g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \underbrace{\frac{g''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2}_{\text{residuo}} + \dots$$

Quindi:

$$c_{-1} = \frac{g''(z_0)}{2!} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\Big((z-z_0)^3 f(z)\Big)\,|_{z=z_0}$$

Poiché $f(z_0)$ non é definita

$$= \frac{1}{2!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^2}{dz^2}\Big((z-z_0)^3 f(z)\Big)$$

Quindi, se ho un polo di ordine $\leq n$:

$$res(f, z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\Big((z-z_0)^n f(z)\Big)$$

Esempio

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3} \qquad z = 0 \text{ polo di 2 ordine}$$

$$res(f, 0) = 1 \cdot \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(z-z_0)^2 f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(z^2\frac{\sin z}{z^3}) = \lim_{z\to 0}\frac{z\cos z - \sin z}{z^2}$$

- $\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = 1 - \frac{z^2}{2!} + o(z^3)$
- $\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = z + o(z^2)$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{z(1-\frac{z^2}{2!}+o(z^3)) - (z+o(z^2))}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{o(z^2)}{z^2} = 0$$

Esempio

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}$$

- $z_0 = 0$ singolaritá essenziale
- $z_1 = 1$ polo di ordine 1

$$res(f, 1) = \frac{1}{0!}\lim_{z\to 1}\frac{d^0}{dz^0}\Big((z-1)^1\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}\Big) = \lim_{z\to 1}(-e^{\frac{1}{z}}) = -e$$

É stato facile, poiché sapevo l'ordine del polo. Se non l'avessi conosciuto a priori i conti sarebbero stati molto piú complessi.

$$res(f = 0) = ?$$

(non posso usare la formula semplificata per i poli, devo trovare lo sviluppo di Laurent)

$$
\begin{aligned}
f(z) &= e^{\frac{1}{z}}\frac{1}{1-z} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}z^k = \\
&=\Big(1+\frac{z^{-1}}{1!}+\frac{z^{-1}}{2!}+\dots\Big)\cdot\Big(1+z+z^2+z^3+\dots\Big) = \\
&=\Big(1+z+z^2+z^3+\dots\Big)+\frac{z^{-1}}{1!}\cdot\Big(1+z+z^2+\dots\Big)+\frac{z^{-2}}{2!}\cdot\Big(1+z+z^2+\dots\Big) = \\
&= 1+1+1+\dots+\frac{z^{-1}}{1!}+\frac{z^{-1}}{1!}+\frac{z^{-1}}{1!}+\dots = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{-n}}{n!}z^k \qquad \text{prod. alla Cauchy}
\end{aligned}
$$

Poiché la prima serie converge $\forall z \neq 0$ e la seconda per $\mid z \mid< 1$,

$$f(z) = \sum_{n,k=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^{-n+k}$$

$$res(f,0) = c_{-1} = \sum_{\substack{n,k=0\\ -n+k=-1}}^{\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!} = e-1 \qquad \Big(e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\Big)$$

1.11.2 Teorema (prodotto alla Cauchy)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n w^n$ entrambe assolutamente convergenti. Allora:

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n\Big)\cdot\Big(\sum_{k=0}^{\infty}b_k w^k\Big) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_n b_k z^n w^k$$

1.11.3 Teorema dei residui

$\Omega \subseteq C$ aperto, C circuito Ω-omotopo a 0

$z_1, z_2, \dots, z_n$ interni a C, $f : \Omega\backslash\{z_1,\dots,z_n\} \to C$ olomorfa

Allora:

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\Big(res(f,z_1)+\dots+res(f,z_n)\Big)$$

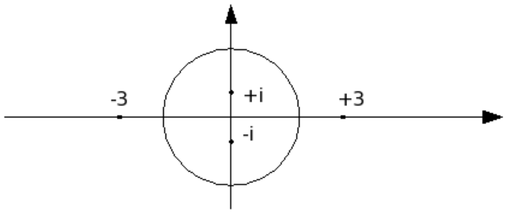
Infatti, nel caso di unica singolaritá abbiamo:

$$res(f,z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(z_0)} f(z)\,dz$$

Esempio

$$\int_{C_2(0)} \frac{1}{z^4 - 8z^2 - 9}\, dz = I$$

$z^4 - 8z^2 - 9 = (z^2 - 9)(z^2 + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{z = \pm 3, z = \pm i}_{\text{4 poli del 1 ordine}}$



Si nota che i punti interni alla circonferenza sono solo $\pm i$, quindi:

$$I = 2\pi i \left[res(f, 1) + res(f, -i)\right]$$

Si calcolano i residui:

$$\begin{aligned} res(f, i) &= \lim_{z \to i} \frac{1}{0!} \frac{d^0}{dz^0} \Big[(z-1) f(z)\Big] = \\ &= \lim_{z \to 1} \frac{(z-i)}{(z-i)(z+1)(z-3)(z+3)} = \\ &= \frac{1}{2i(i+3)(i-3)} \\ res(f, -1) &= \lim_{z \to -i} \frac{1}{0!} \frac{d^0}{dz^0} \Big[(z+i) f(z)\Big] = \\ &= \frac{1}{-2i(-i+3)(-i3)} \end{aligned}$$

Da cui:

$$res(f, i) + res(f, -i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I = 0$$

Esempio

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2}\, dx$$

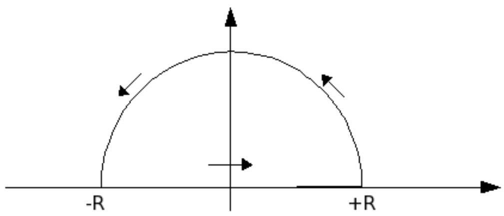
Il metodo sempilce per calcolare l'integrale é:

$$I = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{1 + x^2} = \lim_{R \to \infty} \arctan x \mid_{-R}^{R} = \lim_{R \to \infty} 2 \arctan R = 2\frac{\pi}{2} = \pi$$

Oppure si puó fare con il metodo visto prima. Parametrizziamo la funzione $f(z)$:

$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$, $f : C \backslash \{\pm i\} \to C$ olomorfa

E poi costruiamo il seguente circuito chiuso:



$$C = C_R^+ + [-R, R]$$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_R^+(0)} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \cdot res(f,i)$$
$$= 2\pi i \cdot \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = 2\pi i \lim_{z\to i} \frac{z-i}{(z+i)(z-i)} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$

A questo punto, dobbiamo calcolare il valore dell'integrale:

$$\int_{C_R^+(0)} \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

Che, parametrizzando la curva, diventa:

- $z = r(t) = Re^{it}$, con $t \in [0,\pi]$
- $dz = r'(t) = Re^{it} i\,dt$

$$\int_0^{\pi} \frac{Rie^{it}}{1+R^2e^{2it}}\,dt$$

che in modulo puó essere maggiorato da:

$$\le \int_0^{\pi} \frac{R}{R^2-1}\,dt = \frac{R\pi}{R^2-1}\,dt \to 0 \quad \text{per } R \to \infty$$

Quindi, essendo nullo quest'ultimo integrale, risulta che:

$$0 + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \pi$$

Esempio

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, x$$

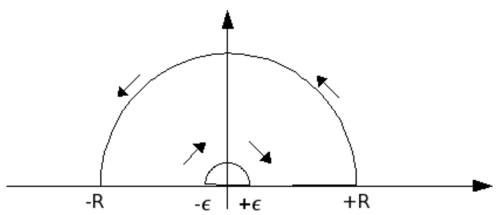
Definisco $f(z)$:

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$, con $x \in R$, $f : C\backslash\{0\} \to C$ olomorfa

in modo tale che l'integrale risulta:

$$= \lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0^+}} \int_{\varepsilon<|x|\le R} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Construisco un percorso:



$$C = C_R^+(0) + [-R,-\varepsilon] - C_\varepsilon^+(0) + [\varepsilon, R]$$

Poiché non ci sono singolaritá in C,

$$\int_C f(z)\,dz = 0 = \int_{C_R^+(0)} + \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon^+(0)} + \int_{\varepsilon}^{R}$$

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+(0)} - \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon^+(0)} + \underbrace{\lim_{\substack{R\to+\infty \\ \varepsilon\to 0}} \left[\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R} \right]}_{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx} = 0$$

Calcoliamo il valore dei singoli integrali:

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to\infty}\int_{C_R^+(0)}\frac{e^{iz}}{z} &= \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}}Rie^{it}\,dt = \\
&= \int_0^\pi ie^{iRe^{it}}\,dt \qquad\qquad \text{che in modulo puó essere maggiorato da} \\
&\leq \int_0^\pi \mid e^{iRe^{it}} \mid\,dt \\
&= \int_0^\pi \mid e^{iR(\cos t+i\sin t)} \mid\,dt \\
&= \int_0^\pi \mid \underbrace{e^{iR\cos t}}_{\text{modulo 1}} \cdot e^{-R\sin t} \mid\,dt \\
&= \int_0^\pi e^{-R\sin t}\,dt \to 0
\end{aligned}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon^+(0)}\frac{e^{iz}}{z}\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\pi ie^{i\varepsilon e^{it}}\,dt = \int_0^\pi i\,dt = \pi i$$

Quindi;

$$0-\pi i+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}\,dx = 0$$

$$\frac{e^{ix}}{x}\,dx = \pi i = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos x+i\sin x}{x}\,dx = \underbrace{\int\frac{\cos x}{x}}_{J} + i\underbrace{\int\frac{\sin x}{z}}_{I} = \pi i$$

$$J+iI = \pi i \quad\Rightarrow\quad J=0 \quad I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,x=\pi$$

1.12 Funzioni Polidrome

1.12.1 Logaritmo

Logaritmo: $z \to w$ funzione inversa di $z = e^w$: $w \to z$ (esponenziale).

Dato $z \neq 0$, $z = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, definiamo:

$$w = \log \rho + i(\theta + 2\pi k)$$

per ogni $k \in z$. A questo punto, verifichiamo inserendo il w appena definito nell'esponenziale:

$$e^w = e^{\log \rho + i(\theta + 2\pi k)} = e^{\log \rho} \cdot e^{i(\theta+2\pi k)} = \rho e^{i\theta} \underbrace{e^{i2\pi k}}_{1} = \rho e^{i\theta} = z$$

per ogni $k \in z$. Quindi, abbiamo verificato che:

$$e^w = z \quad \forall k$$

ovvero per infiniti valori di w, in cui la fase varia di $k2\pi$. Abbiamo realizzato una funzione a piú valori, ovvero **multivoca**. Definiamo:

$$arg(z) = \Big\{ \theta \in R \quad : \quad z = \mid z \mid e^{i\theta} \Big\}$$

$$\log(z) = \Big\{ \log \mid z \mid + i\theta, \quad \theta \in arg(z) \Big\}$$

La funzione é detta **funzione con ∞ branche**, ciascuna delle quali impedisce un giro completo attorno all'origine. Ad esempio, sono equivalenti:

$$\begin{aligned}
f_1(z) &= \log \mid z \mid + i\theta & \theta &\in]0, 2\pi[\\
f_2(z) &= \log \mid z \mid + i\theta & \theta &\in \Big] -\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \Big[\\
f_3(z) &= \log \mid z \mid + i\theta & \theta &\in \Big] -\pi, \pi \Big[
\end{aligned}$$

$z = 0$ é detto **punto di diramazione**.

1.12.2 Radice

La radice é funzione inversa della potenza $w \to z = w^n$, quindi $w \sim \sqrt[n]{z}$

Scrivendo $z = \rho e^{i\theta}$, immaginiamo un w_k:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

Verifichiamo inserendo w_k nella potenza:

$$w_k^n = \Big(\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \Big)^n = \rho \cdot e^{i(\theta+2\pi i)} = \rho \cdot e^{i\theta} \quad \forall k \in Z$$

Quindi definiamo la radice di z come:

$$\sqrt[n]{z} = \Big\{ \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\frac{\theta}{n}} \quad \theta \in arg(z) \Big\}$$

Come prima, abbiamo una suddivisione in infinite branche per poter avere una funzione univoca (olomorfa). $z_0 = 0$ é ancora detto **punto di diramazione**.

Esempio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$$

Definiamo:

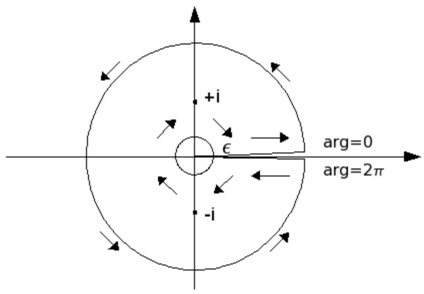
$$f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2+1}$$

Con:

- $z = 0$ punto di diramazione della radice
- $z = \pm i$ poli di ordine 1

Scelgo la branca che esclude il semiasse positivo:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\mid z \mid} e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad \theta \in]0, 2\pi[$$



$$C = C_R(0) + [R, \varepsilon] - C_\varepsilon(0) + [\varepsilon, R]$$

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i [res(f, i) + res(f, -1)]$$

Quindi posso ridurre l'integrale al calcolo dei residui dei due poli:

$$\begin{aligned} res(f, i) &= \lim_{z \to i} (z-i) f(z) = \\ &= \lim_{z \to i} (z-i) \frac{\sqrt{z}}{(z+i)(z-i)} = \frac{\sqrt{i}}{2i} = \frac{\sqrt{1} \cdot e^{i\frac{\pi}{2 \cdot 2}}}{2i} = \qquad \left(\sqrt{z} = \sqrt{\mid z \mid} \cdot e^{i\frac{\theta}{2}}\right) \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2i} = \frac{\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}}{2i} = \frac{\sqrt{2}}{4i} + \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$res(f, -i) = \cdots = \frac{\sqrt{2}}{4i} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Quindi:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} = 2\pi i \Big(\frac{\sqrt{2}}{4i} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4i} - \frac{\sqrt{2}}{4} \Big) = \pi\sqrt{2}$$

1.13 Integrali di Lebesgue

Metodo piú potente dei precedenti per il calcolo di integrali e funzioni non integrabili normalmente.

1.13.1 Misura

- A partire da I intervallo limitato in R, definiamo **misura** di $I = m(I) = mis(I) = \mid I \mid = b - a$
  Esempi:
  - $I = [a, b[$ (estremo mancante)
  - $I = \{a\}$ punto, quindi $\mid I \mid = 0$

- R **rettangolo** in R^n
  - $R = I_1 \times I_2 \times I_3 \times \cdots \times I_n$
  - $mis(R) = \mid I_1 \mid \cdot \mid I_2 \mid \cdot \cdots \cdot \mid I_n \mid = \prod_{k=1}^{n} \mid I_k \mid$
- P **plurirettangolo**
  - $P = \bigcup_{k=1}^{m} R_k$
  - $mis(P) = \sum_{k=1}^{m} mis(R_k)$ (se gli R_k non hanno interni in comune)

Inoltre, $A \subset R^n$ ha **misura nulla** ($mis(A) = 0$) se:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \{R_k\}_{k \geq 1}$ tale che:

- $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$
- $\sum_{k=1}^{\infty} m(R_k) < \varepsilon$

Esempio $\;n = 2$, $R = [a, b] \times \{c\}$

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mid R_\varepsilon \mid = (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

1.13.2 Proposizione Quasi Vera (?!?)

Una proposizione $P(x)$ é vera per quasi ogni x ($q.o.x$) se:

$$mis\Big(\Big\{x \quad : \quad P(x) \text{ é falsa}\Big\}\Big) = 0$$

Esempi:

- u, v due funzioni.
  $u = v$ per q.o.x se $m(\{u : u(x) \neq v(x)\}) = 0$
- $u(x) = 1$ se $x \in Q$, 0 se $x \in R \backslash Q$
  $\{x \in R : u(x) \neq 0\} = \{x \in R : u(x) = 1\} = Q$
  $mis(Q) = 0 \longrightarrow u(x) = 0$ q.o.x

1.13.3 Successione di Cauchy

$\{a_n\}_{n \in N} \subset R$ é una **successione di Cauchy** se:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad : \quad \forall n, m \geq n_0 \quad \mid a_n - a_m \mid < \varepsilon$

1.13.4 Convergenza

$\{a_n\}_{n \in N}$ é **convergente** a L se:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_i \in N \quad : \quad \forall n \geq n_i \quad \mid a_n - L \mid < \varepsilon \quad e \quad \lim_{n \to \infty} a_n = L$

Inoltre, accade che se $\{a_n\}$ é una successione convergente, allora é una successione di Cauchy.

Dimostrazione:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_1 \quad : \quad \forall n \geq n_1 \quad \mid a_n - L \mid < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall n, m \geq n \quad \mid a_n - a_m \mid = \mid a_n - L - (a_m - L) \mid \leq \mid a_n - L \mid + \mid a_m - L \mid < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

1.13.5 Teorema

$\{a_n\}_{n\in N} \subset R$ successione di Cauchy é una successione convergente.

$$\text{convergente} \overset{\text{(in R)}}{\Longleftrightarrow} \text{Cauchy}$$

Esempio $\sqrt{2} \in R\backslash Q$ numero irrazionale
$\{x_k\} \in Q$, $x \to \sqrt{2}$ per $k \to \infty$
$\{x_k\}$ é convergente in $R \Rightarrow$ Cauchy in $R \Rightarrow$ Cauchy in Q, ma non é convergente in Q poiché converge a un numero irrazionale!

1.13.6 Funzione Caratteristica

$A \in R^n$ é **funzione caratteristica** dell'insieme A:

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= 1 \quad x = A \\ &= 0 \quad x \neq A \end{aligned}$$

Esempio

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 \quad x \in Q \\ &= 0 \quad x \notin Q \end{aligned} \qquad\qquad u = \chi Q$$

1.13.7 Funzione a Scala

$u : R^n \to C$ é una **funzione a scala**

$$u(x) = \sum_{k=1}^{m} C_k \cdot \chi_{R_k}(x)$$

con R_k rettangoli, $C_k \in C$

IMMAGINE

1.13.8 Integrale di funzione a scala

$$\int_{R^n} u = \int_{R^n} u(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} C_k \cdot m(R_k)$$

1.13.9 Integrabilitá secondo Lebesgue

$u : R \to C$ é integrabile secondo Lebesgue (o sommabile) se:

1. u é misurabile, ovvero esiste una successione $\{u_k\}_{k\in N}$ di funzioni a scala tale che:

$$u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x) \quad q.o.x$$

2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in N$ tale che $\forall k, k' \geq k_0$ si ha che

$$\int_{R^n} \mid u_k(x) - u_{k'}(x) \mid \; dx < \varepsilon$$

Osservazione La successione numerica $\{\int_{R^n} u_k(x)\,dx\}$ é una successione di Cauchy.

$$\Big| \int_{R^n} u_k(x)\,dx - \int_{R^n} u_{k'}(x) \Big| = \Big| \int_{R^n} [u_k(x) - u_{k'}(x)]\,dx \Big| \leq$$

$$\leq \int_{R^n} |u_k(x) - u_{k'}(x)|\,dx < \varepsilon \quad \forall k, k' \geq k_0$$

Quindi la successione $\{\int_{R^n} u_k(x)\,dx\}$ é convergente in C.

1.13.10 Integrale secondo Lebesgue

L'integrale secondo Lebesgue di u é:

$$\int_{R^n} u\,dx = \int_{R^n} u(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_{R^n} u_k(x)\,dx$$

Proposizione u misurabile é integrabile se esiste una funzione φ integrabile tale che

$$|u(x)| \leq \varphi(x) \quad q.o.x$$

Quindi u é integrabile se e solo se $|u|$ é integrabile. Si dimostra semplicemente sapendo che:

- u integrabile $\Rightarrow$ $|u|$ integrabile. (dalla definizione)
- $|u|$ integrabile; basta scegliere $\varphi = |u|$ e applicare la proposizione.

1.13.11 Insieme misurabile

Un insieme A é misurabile se χ_A é una funzione misurabile

ovvero se esiste una successione di funzioni a scala $\{u_k\}$ tale che $u_k \to \chi_A(x)$ q.o.x

1.13.12 Insieme di misura finita

Se χ_A é integrabile, si dice che A é un **insieme di misura finita**.

$$|A| = m(A) = mis(A) = \int_{R^n} \chi_A(x)\,dx$$

Se χ_A non é integrabile, si dice che A ha **misura infinita**.

IMMAGINE

Esempio $mis(R^n) = \infty$

1.13.13 Integrabilitá secondo Lebesgue su insieme finito

$u : A \to C$, A misurabile $\subset R$

u é integrabile su A (secondo Lebesgue) se

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

se $\tilde{u}$ é integrabile su R^n. (sono tornato alla definizione di integrale su tutto R^n).

1.13.14 Confronto con l'integrale secondo Riemann

Data $u : R^n \to C$ limitata, u nulla fuori da un insieme limitato, integrabile secondo Riemann.

Allora u é integrabile secondo Lebesgue e vale:

$$\int_L u = \int_R u$$

Se u é integrabile secondo Lebesgue, allora $|u|$ é integrabile secondo Lebesgue.

Dunque l'integrale improprio secondo Riemann esiste solo se questo é assolutamente convergente.

Possono esistere funzioni con integrale improprio ma non l'integrale secondo Lebesgue.

Esempio Esiste l'integrale improprio

$$\int_R \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi$$

ma non l'integrale secondo Lebesgue:

$$\int_R \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$$

1.13.15 Teorema di Lebesgue della convergenza dominata

- $u_k : A \to C$, A misurabile, u_k funzioni integrabili.
- $u_k \to u$ q.o.$x \in A$
- $\exists \varphi \geq 0$ integrabile su A tale che $|u_k(x)| \leq \varphi(x)$ q.o.x, $\forall k$

Allora:

1. u é integrabile.
2. $\int_A u_k(x)\, dx \to \int_A u(x)\, dx$

1.13.16 Esempio: confronto con la teoria classica (di Riemann)

La teoria classica prevede che:

- $f_n : [a,b] \to R$ integrabili
- $f_n \to f$ **uniformemente** in $[a,b]$

in tal caso:

1. f integrabile
2. $\int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx$

Quindi, ad esempio, per risolvere l'integrale:

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^\pi e^{-k\sin x}\, dx$$

Si studia $u_k(x) = e^{-k\sin x}$ che é continua in $[0,\pi]$. Peró:

$$u(x) = \lim_{k\to\infty} e^{-k\sin x} = \begin{cases} 1 & x = 0, \pi \\ 0 & x \in]0,\pi[\end{cases}$$

Quindi non c'é convergenza uniforme, e la teoria classica non é dunque applicabile.

Invece, con Lebesgue, noto che $|u_k(x)| \leq 1 \quad \forall x, \forall k$. Scelgo dunque $\varphi(x) = 1$, integrabile su $[0,\pi]$.

$$\int_0^\pi e^{-k\sin x}\, dx = \int_0^\pi u(x)\, dx$$

$$u(x) = 0 \quad q.o.x \quad \Rightarrow \quad \int_0^\pi u(x)\, dx = 0$$

Ovvero, con Lebesgue le discontinuitá che costituiscono insiemi di misura nulla (come i due estremi dell'esempio) non influiscono sul risultato.

Corollario

$$\int_A |u_k(x) - u(x)|\, dx \to 0 \quad \text{per } k \to \infty$$

Si dimostra a partire dal fatto che u integrabile $\Rightarrow$ $|u|$ integrabile:

$$|u_k(x) - u(x)| \to 0 \quad q.o.x$$

$$|u_k(x) - u(x)| \leq |u_k(x)| + |u(x)| \leq \varphi(x) + |u(x)| \quad \forall k, q.o.x$$

$$\int_A |u_k(x) - u(x)|\, dx \to 0$$

2 Spazi vettoriali normati

V é **spazio vettoriale** su C (o R) se

$\forall u, v \in V \quad \forall \lambda, \mu \in C \quad$ vale che $\quad \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in V$

2.1 Norma

$|| \cdot || : V \to R$ é una **norma** se:

1. $||u|| \geq 0 \; \forall u$, $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
2. $||\lambda \cdot u|| = |\lambda| \cdot ||u||$, $\forall \lambda \in C$, $\forall u \in V$
3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$, $\forall u, v \in V$ (disuguaglianza triangolare)

Esempio

$$V = C^n \quad u = (u_1, \ldots, u_n), u_k \in C$$

1. norma euclidea:
$$||u||_2 = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2} = \sqrt{u_1 u_1^* + \cdots + u_n u_n^*}$$
Ad esempio, per $n = 2$:
$$B_1(0) = \{u \in C \quad : \quad ||u||_2 < 1\} = \{u \in C \quad : \quad x^2 + y^2 < 1\}$$
IMMAGINE

2. $$||u||_1 = |u_1| + \cdots + |u_n|$$
per $n = 2$:
$$B_1(0) = \{i \in C \quad : \quad ||u||_1 < 1\} = \{u \in C \quad : \quad |u_1| + |u_2| < 1\}$$
IMMAGINE

3. $$||u||_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |u_k|$$
per $n = 2$:
$$B_1(0) = \{i \in C \quad : \quad ||u||_\infty < 1\} = \{u \in C \quad : \quad \max(|u_1|, |u_2|) < 1\}$$
IMMAGINE

4. $$||u||_p = \big(|u_1|^p + \cdots + |u_n|^p\big)^{\frac{1}{p}}$$
(con $1 \leq p < \infty$)

Esempio (funzioni)

$$V = C^0([a, b]; C) \quad \text{(é uno spazio vettoriale)}$$

$$\Big(u \in V \quad se \quad u : [a, b] \to C \text{ é continua}\Big)$$

$$||u||_2 = \Big(\int_a^b |u(x)|^2 \, dx\Big)^{\frac{1}{2}}$$
$$||u||_1 = \int_a^b |u(x)| \, dx$$
$$||u||_\infty = \max_{x \in [a,b]} u(x)$$
$$||u||_p = \Big(\int_a^b |u(x)|^p \, dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

2.1.1 Verifica norma

u integrabile secondo Lebesgue su A misurabile.

$u : A \to C \quad A \subseteq R^n$

$||u|| \stackrel{?}{=} \int_A |u(x)|\, dx$ é norma?

Verifichiamo le proprietá:

3. $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$
$$\int_A |u(x) + v(x)|\, dx \leq \int_A \Big(|u(x)| + |v(x)|\Big)\, dx = \int_A |u(x)|\, dx + \int_A |v(x)|\, dx = ||u|| + ||v||$$
2. $||\lambda u|| = |\lambda| \cdot ||u||$
$$\int_A |\lambda u(x)|\, dx = \int_A |\lambda| \cdot |u(x)|\, dx = |\lambda| \int_A |u(x)|\, dx = |\lambda| \cdot ||u(x)||$$
1.
   - $||u|| \geq 0 \quad \forall u$
   $$\int_A |u(x)|\, dx \geq 0$$
   - $||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
   $$u(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A 0\, dx = 0$$
   $$\int_A |u(x)|\, dx = 0 \quad \Rightarrow \quad |u(x)| = 0 \quad q.o.x$$
   E questo é un problema, poiché non ci basta la convergenza $q.o.x$, noi avevamo richiesto che il vettore a norma nulla fosse sempre il vettore nullo. Soluzione: ridefiniamo il concetto di uguaglianza tra funzioni.

2.1.2 Uguaglianza

$$u = v \quad \Longleftrightarrow \quad u(x) = v(x) \quad q.o.x$$

2.2 Spazio normato

$1 \leq p \leq +\infty$, $A \subseteq R^n$ insieme misurabile.

$$\begin{aligned} L^p(A) =& \Big\{u : A \to C \text{ misurabile} \quad : \quad x \to |u(x)|^p \text{ é integrabile}\Big\} \\ =& \Big\{u : A \to C \text{ misurabile} \quad : \quad \int_A |u(x)|^p \text{ é finito}\Big\} \end{aligned}$$

$L^p(A)$ é uno spazio normato

$$||u||_{L^p(A)} = \Big(\int_A |u(x)|^p\, dx\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Esempio

$$L^1(A) = \{u \text{ integrabile su } A\}$$
$$||u||_{L^1(A)} = \int_A |u(x)|\, dx$$
$$L^2(A) = \{u \text{ con } |u|^2 \in L^1(A)\}$$
$$||u||_{L^2(A)} = \Big(\int_A |u(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} L^\infty(A) &= \{u : A \to C \text{ misurabile e essenzialmente limitata } \} = \\ &= \{u : A \to C \text{ misurabile e tale che } \exists M > 0 \quad : \quad |u(x)| \leq M \quad q.o.x \in A\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ||u||_{L^\infty(A)} &= ess.sup._{x \in A}|u(x)| = \\ &= \min\{M \geq 0 \quad : \quad |u(x)| \leq M \quad q.o.x \in A\} \end{aligned}$$

2.2.1 Lemma

$L^p(A)$, $1 \leq p \leq +\infty$ é uno spazio normato.

Esempio $A = [1, +\infty[$, $u(x) = \frac{1}{x}$
u continua $\Rightarrow$ misurabile

$$\int_1^{+\infty} |u(x)|^p \, dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c x^{-p} \, dx = \lim_{c \to +\infty} \frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \Big|_1^c = \lim_{c \to +\infty} \frac{c^{1-p} - 1}{1-p} \overset{p \neq 1}{=} \frac{1}{p-1} > 0$$

$$\Rightarrow u \in L^p(1, +\infty) \quad \forall p > 1$$

per $p = 1$:

$$\lim_{c \to +\infty} \log x \Big|_1^c = \lim_{c \to +\infty} \log c = +\infty \quad \Rightarrow \quad u \notin L^1(1, +\infty)$$

per $p = +\infty$

$$|u(x)| = \Big|\frac{1}{x}\Big| \leq 1 \quad \forall x \in [1, +\infty[\quad \Rightarrow \quad u \in L^\infty(1, +\infty)$$

norma:

$$||u||_{L^p(1,\infty)} = \frac{1}{(p-1)^{\frac{1}{p}}}$$

Esempio $u(x) = \frac{1}{\sqrt{1}}$, $x \in]0, 1]$

$$\int_0^1 |u(x)|^p \, dx = \int_0^1 \Big(\frac{1}{\sqrt{p}}\Big)^p dx = \lim_{c \to 0} \int_c^1 x^{-\frac{p}{2}} \, dx = \lim_{c \to 0} \underbrace{\frac{1}{-\frac{p}{2} + 1}}_{p \neq 2} x^{\frac{p}{2}+1} \Big|_c^1 = \lim_{c \to 0} \frac{2}{2-p} \Big[1 - c^{\frac{2-1}{2}}\Big] =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{2-p} && 2 - p < 0 \quad p < 2 \\ &= +\infty && p > 2 \end{aligned}$$

per $p = 2$:

$$\lim_{c \to 0} \int_c^1 x^{-1} \, dx = \lim_{c \to 0} \log x \Big|_c^1 = \lim_{c \to 0} (-\log c) = +\infty \quad \Rightarrow \quad u \in L^p(0, 1) \quad \forall p : 1 \leq p < 2$$

$$||u||_{L^p(0,1)} = \Big(\frac{2}{2-p}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

per $p = \infty$:

$$\sup_{0 < x \leq 1} |u(x)| = +\infty \quad \Rightarrow \quad u \notin L^\infty(0, 1)$$

2.3 Successioni

V spazio normato in C (o R). $\{v_n\}_{n \in N}$ é **convergente** a v in V se

$$\lim_{n \to \infty} ||v_n - v||_V = 0$$

Esempio $\{v_n\}_{n \in N} \subseteq L^p(A)$

$v_n \to v$ in $L^p(A)$ per $n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \Big(|v_n(x) - v(x)|^p \, dx\Big) = 0$

Esempio $\{v_n\}_{n \in N} \subset L^\infty(A)$, $c \in L^\infty(A)$

$v_n \to v$ in $L^\infty(A)$ per $n \to \infty$, ovvero $||v_n - v||_{L^\infty} \to 0$ per $n \to \infty \Leftrightarrow$

$ess.sup._{x \in A} |v_n(x) - v(x)| \to 0 \quad$ per $n \to \infty$

2.3.1 Lemma

$C^0[a,b] \subset L^\infty(a,b)$, $u \in C^0[a,b]$, $u : [a,b] \to R$ continua

Secondo Weierstrass, u ha max e min $\Rightarrow$ u é limitata $\Rightarrow u \in L^\infty(a,b)$

$\{v_n\}_{n\in N} \subset C^0[a,b] \subseteq L^\infty(a,b)$, $v \in L^\infty(a,b)$

$v_n \to v$ in $L^\infty(a,b)$

$\underbrace{\sup_{x\in[a,b]} |v_n(x) - v(x)|}_{\text{conv. unif. in [a,b]}} \to 0$ per $n \to \infty$

$\Rightarrow$ v é continua su [a,b], $v \in C^0[a,b]$

2.3.2 Proposizione

$v_n \to v$ in $V \quad \Rightarrow \quad ||v_n|| \to ||v||$ (in R)

Si dimostra:

$$\begin{array}{c} ||v_n - v|| \to 0 \\ \geq \quad\quad \Downarrow \\ \Big| ||v_n|| - ||v|| \Big| \to 0 \end{array}$$

2.3.3 Corollario

se $v_n \to v$ in V per $n \to \infty$, allora $\{v_n\}_{n\in N}$ é limitata in V

Dimostrazione: $||v_n|| \to ||v||$ per $n \to \infty \quad \Rightarrow \quad \{||v_n||\}_{n\in N} \subset R$ é limitata

$\Rightarrow \quad \exists M > 0 \quad : \quad ||v_n|| \leq M \quad \forall n \quad \Leftrightarrow \quad \{v_n\}_{n\in N}$ é limitata in V

2.4 Serie in V

Si definisce **somma parziale** (o ridotta) della serie $\{v_n\}_{n\in N} \subset V$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

la successione $\{S_n\}_{n\in N}$ delle somme parziali é detta **serie** di elemento v_k

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k$$

2.4.1 Convergenza

la serie é detta **convergente** in V a S se:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \text{in } V$$

$$\lim_{n\to\infty} ||S_n - S||_V = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \Big|\Big| \sum_{k=0}^{\infty} v_k - S \Big|\Big| = 0$$

S é detto **somma della serie**.

2.4.2 Dimensione

Lo spazio vettoriale ha **dimensione n** se in esso esistono n elementi linearmente indipendenti, e ogni sistema di $n+1$ elementi é linearmente dipendente.

V ha **dimensione infinita** se $\forall n$ esistono n elementi linearmente indipendenti.

Esempi:

$dim(R^n) = n$
$dim(C^n) = n$
$dim(R^\infty) = \infty \qquad v = (v_1, v_2, \dots, v_n, \dots) = \{v_n\}$ successione

$V = C^0[0, 2\pi]$ ha dimensione ∞
$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$ infinite funzioni in V linearmente indipendenti

2.4.3 Teorema

A misurabile $\subseteq R^n$ con $1 \leq p \leq \infty$. Allora $L^p(A)$ ha dimensione ∞

2.4.4 Proposizione

Se $\{v_n\} \subset V$ é convergente allora é di Cauchy.

Si dimostra nel seguente modo:

$$v_n \to v \quad \Rightarrow \quad ||v_n - v_{n'}|| = ||v_n - v + (v - v_{n'})|| \leq \underbrace{||v_n - v||}_{\to 0} - \underbrace{||v - v_{n'}||}_{\to 0} \quad \Rightarrow \quad \to 0$$

2.5 Spazio completo

Lo spazio normato V é detto **completo** se in esso ogni successione di Cauchy é convergente.

2.5.1 Successione di Cauchy

$\{v_n\}_{n \in N} \subset V$ spazio normato é una successione di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N \quad : \quad \forall n, n \geq n_0 \quad ||v_n, v_{n'}||_V < \varepsilon$$

$$\Big(\lim_{n, n' \to \infty} ||v_n - v_{n'}|| = 0 \Big)$$

2.5.2 Teorema

Ogni spazio normato V (su C o R) di dimensione finita é completo.

Esempi

- R^n é completo
- $V = C^0[a, b]$, $||u||_{C^0} = \sup_{x \in [a,b]} |u(x)| = \max_{x \in [a,b]} |u(x)|$
  V ha dimensione infinita, per é completo.
- $V = C^0[a, b]$, $||u||_2 = \Big(\int_a^b |u(x)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$
  V non é completo, poiché
  $\exists \{v_n\}$ di Cauchy tale che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad : \quad \forall n, n' \geq 0$ avviene che
  $\Big(\int_a^b |v_n(x) - v_{n'}(x) \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$ e $\{v_n\}$ non é convergente ad alcuna funzione $v \in C^0[a, b]$

2.5.3 Teorema

$1 \leq p \leq \infty$. $L^p(A)$ é uno spazio normato completo rispetto alla norma $|| \cdot ||_{L^p}$

2.5.4 Spazio di Banach

Uno spazio normato completo é detto **Spazio di Banach**.

Esempio $\{v_n\} \subset L^p(A)$ di Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \quad : \quad \forall n, n' \geq n_0 \quad ||v_n - v_{n'}|| < \varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$\exists v \in L^p(A) \quad : \quad v = \lim_{n \to \infty} v_n \text{ in } L^p(A) \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \int_A |v_n(x) - v_{n'}(x)|^p \, dx = 0$$

2.6 Prodotto Scalare

Si definisce **prodotto scalare** in V spazio vettoriale complesso (su C) l'operazione:

$$(\cdot, \cdot) : V \times V \to C$$

che gode delle seguenti proprietá:

1. $(x, x) \in R \quad (x, x) \geq 0 \, \forall x \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in V$
2. $(x, y) = \overline{(y, x)} \quad \forall x, \forall y$
3. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y) \quad \forall \lambda \in C, \forall x, y \in V$
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in V$

Inoltre si definisce la norma su V come:

$$||v|| = \sqrt{(x, x)}$$

Esempio $V = C^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$(x, y) = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n} = \sum_{k=1}^{n} x_n \overline{y_n}$$

Esempio $V = C^0[a, b]$

$$(u, v)_{C^0} = \int_a^b u(x) \overline{v(x)} \, dx$$

2.6.1 Disuguaglianza di Cauchy - Schwartz

$$|(u, v)| \leq ||u|| \cdot ||v|| \quad \forall u, v \in V$$

In L^2:

$$\Big| \int_A u(x) \overline{v(x)} \, dx \Big| \leq \Big(\int_A |u(x)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_A |v(x)|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}$$

2.6.2 Spazio di Hilbert

V spazio euclideo e completo rispetto alla norma $||u|| = \sqrt{(x, x)}$ é detto **Spazio di Hilbert**.

Sapendo che uno spazio normato completo é anche uno spazio di Banach, si deduce che:

$$\text{Hilbert} \quad \Rightarrow \quad \text{Banach}$$

2.6.3 Teorema

$A \subseteq R^n$ misurabile. Allora $L^2(A)$ é uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare

$$(u,v)_{L^2(A)} = \int_A u(x)\overline{v(x)}\,dx \quad \forall u,v \in L^2(A)$$

Possiamo comunque verificare che la suddetta operazione sia effettivamente un prodotto scalare:

$$\Big|\int_A u(x)\overline{v(x)}\,dx\Big| \leq \int_A |u(x)\overline{v(x)}|\,dx = \int_A |u(x)|\cdot|v(x)|\,dx$$

sapendo che $2ab \leq a^2+b^2$, ovvero $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$

$$\leq \frac{1}{2}\int_A |u(x)|^2 + |v(x)|^2)\,dx = \frac{1}{2}\Big(||u||_{L^2}^2 + ||v||_{L^2}^2\Big) < +\infty$$

inoltre:

$$(u,u)_{L^2} = \int_A u(x)\overline{v(x)}\,dx = \int_A |u(x)|^2\,dx = ||u||_{L^2}^2 \quad \Rightarrow \quad ||u||_{L^2} = \sqrt{(u,u)_{L^2}}$$

2.6.4 Lemma

$A \subseteq R^n$ misurabile con $mis(A) < \infty$

$$L^\infty(A) \subset L^2(A) \subset L^1(A)$$

Inoltre:

1. $||u||_{L^2} \leq ||u||_{L^\infty}(mis(A))^{\frac{1}{2}}$
2. $||u||_{L^1} \leq ||u||_{L^2}(mis(A))^{\frac{1}{2}}$

Dimostrazione

1. $L^\infty \subset L^2 \quad \Leftrightarrow \quad u \in L^\infty(A) \Rightarrow u \in L^2(A)$

$$\int_A |u(x)|^2\,dx \leq \int_A \Big(\sup_{x' \in A}|u(x')|\Big)^2\,dx =$$

$$\int_A ||u||_{L^\infty}^2\,dx = ||u||_{L^\infty}^2 \int_A 1\,dx = ||u||_{L^\infty}^2 \cdot mis(A) < +\infty$$

2. $L^2 \subset L^1 \quad \Leftrightarrow \quad u \in L^2(A) \Rightarrow u \in L^1(A)$
   applicando Schwartz con $v = 1$:

$$\int_A |u(x)|\cdot 1\,dx \leq \Big(\int_A |u(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int_A 1^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} = ||u||_{L^2}\cdot\Big(mis(A)\Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

2.6.5 Corollario

$\{v_k\}_{k\in N} \subset L^\infty(A)$, $v \in L^\infty(A)$

Se $v_k \to v$ in $L^\infty(A)$ per $k \to \infty$, **allora** $v_k \to v$ in $L^2(A)$

Dimostrazione $\{v_k\} \subset L^\infty(A) \subset L^2(A)$, $v \in L^\infty(A) \subset L^2(A)$

$$\underbrace{||v_k - v||_{L^2}}_{\to 0} \leq \underbrace{||v_k - v||_{L^\infty}}_{\to 0} \cdot mis(A)$$

2.7 Definizioni

2.7.1 Spazio denso

V spazio normato, $A \subseteq V$. A é **denso in V** se:

$$\forall v \in V \quad \exists \{v_k\} \subset A \quad : \quad v_k \to v \quad \text{in } V$$

2.7.2 Lemma

$C^1[a,b]$ é denso in $C^0[a,b]$ rispetto alla norma $||u||_{C^0} = \max_{x\in[a,b]} |u(x)|$.

Oppure:

$\forall u : [a,b] \to R$ continua, $\exists\{u_k\} \subset C^1[a,b] \quad u_k : [a,b] \to R$ con u_k continua
tale che $u_k \to u$ uniformemente in $[a,b]$

2.7.3 Supporto

$\Omega \subset R^n$, $u : \Omega \to C$. Si definisce **supporto di u** l'insieme:

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega \backslash u(x) = 0\}}$$

ovvero l'insieme dei punti dove $u(x) \neq 0$ piú i punti limite di successioni di punti dove $u \neq 0$

2.7.4 Insieme compatto

$K \subseteq R^n$ é un **compatto** se é chiuso e limitato, ovvero:

1. K chiuso $\Leftrightarrow R^n \backslash K$ é aperto, ovvero se $\forall\{x_k\} \subset K$ convergente a x si ha $x = \lim_k x_n \in K$
2. K limitato $\Leftrightarrow \exists M > 0 \quad : \quad \forall x \in K \quad |x| \leq M$ (ovvero $k \subset \overline{B_M(0)}$)

2.7.5 Corollario

u ha supporto compatto $\Leftrightarrow \exists M > 0 \quad : \quad u(x) = 0 \quad \forall |x| > M$

3 Distribuzioni

3.1 Spazio delle funzioni test $\mathfrak{D}$

$C_0^\infty(\Omega)$ oppure $\mathfrak{D}(\Omega)$ é lo spazio vettoriale delle funzioni C^∞ (derivabili infinite volte) a supporto compatto.

3.2 Teorema

$1 \leq p < +\infty$. Allora $C_0^\infty(\Omega)$ é denso in $L^p(\Omega)$

ovvero:

$$\forall u \in L^p(\Omega) \quad : \quad \int_A |u(x)|^p \, dx < \infty$$

$$\exists\{u_k\} \quad u_k \in C_0^\infty(\Omega) \quad \Big(u \in C^\infty \quad u(x) = 0 \forall x \geq M_K\Big)$$

$$u_k \to u \text{ in } L^p(\Omega)$$

ovvero:

$$\int_R |u(x) - u_k(x)|^p \, dx \to 0 \quad \text{per } k \to \infty$$

3.3 Funzioni localmente sommabili L^1_{loc}

Esempio $\Omega =]0, +\infty[$, $u(x) = \frac{1}{x} \quad x \in R$

$u \notin L^\infty(\Omega)$ (diverge in 0)

$\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \int_\Omega |u(x)| \, dx = \infty \quad \Rightarrow \quad u \notin L^1(\Omega)$

$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx = \int_0^1 \frac{dx}{x} + \int_1^\infty \frac{dx}{x}$, diverge per $1 < p < \infty \quad \Rightarrow \quad u \notin L^p(\Omega) \forall p$

u é **localmente sommabile** su Ω se $\forall K \subset \Omega$ compatto si ha che $u \in L^1(K)$, ovvero:

$$\int_K |u(x)|\,dx < \infty \quad \Rightarrow \quad u \in L^1_{loc}(\Omega)$$

Inoltre si dimostra che

$$u \in L^1(\Omega) \quad \Rightarrow \quad u \in L^1_{loc}(\Omega)$$

L^1_{loc} **non** é uno spazio normato

Esempio di prima $\;u(x) = \frac{1}{x}$, $x \in]0, \infty[= \Omega$

$u \notin L^1(\Omega)$, per $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, poiché:

$$\begin{aligned} \int_K |u(x)|\,dx &= \int_K \frac{dx}{x} \\ &\downarrow \\ &\downarrow \quad K \subset]0,\infty[\quad K \subset [a,b] \quad 0 < a < b < \infty \\ &\downarrow \\ &\leq \int_a^b \frac{dx}{x} = \log\frac{b}{a} < \infty \end{aligned}$$

3.4 Convergenza in L^1_{loc}

$\{u_k\} \subset L^1_{loc}(\Omega)$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

u_k converge a u in $L^1_{loc}(\Omega)$ per $k \to \infty$ se

$$\int_K |u_k(x) - u(x)|\,dx \to 0 \quad \forall K \in \Omega \text{ compatto}$$

Esempio $\;u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$, quindi $u_k \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$, poiché

$$\int_K |u_k - u|\,dx \leq \int_\Omega |u_k - u|\,dx = ||u_k - u||_{L^1} \to 0$$

3.5 Funzionale lineare

V spazio vettoriale, $L : V \to C$

L applicazione lineare: $L(\lambda u + \mu v) = \lambda L(u) + \mu L(v) \quad \forall \lambda, \mu \in C, \forall u, v \in V$

allora L é un **funzionale lineare** (a valori complessi o reali).

Esempio $\;u : \Omega \to C$ funzione fissata, $v : \Omega \to C$ variabile, $v \in V$ spazio vettoriale

$$\begin{aligned} L :& V \to C \\ & v \to \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \end{aligned}$$

Dimostriamo che é un funzionale lineare:

1. $u \in L^1(\Omega)$, $v \in L^\infty(\Omega) = V$

$$\Big|\int_\Omega u(x)v(x)\,dx\Big| < \int_\Omega |uv|\,dx \leq ||v||_{L^\infty} \cdot ||u||_{L^1} < \infty$$

2. $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $v \in L^\infty(\Omega)$ a supporto compatto, $supp(V) = K_1$

$$\Big|\int_\Omega u(x)v(x)\,dx\Big| \leq \int_\Omega |uv|\,dx = \int_{K_1} |uv|\,dx \leq ||u||_{L^1(K_1)} \cdot ||v||_{L^\infty(K_1)}$$

3.6 Convergenza in $\mathfrak{D}$

$\{v_k\} \subset \mathfrak{D}(\Omega)$, $v \in \mathfrak{D}(\Omega)$

La successione $\{v_k\}$ converge a v in $\mathfrak{D}(\Omega)$ per $k \to \infty$ se:

1. $\exists K \subset \Omega$ compatto tale che $supp(v_k) \subset K \ \forall k \in N$
2. $D^{(\alpha)} v_k(x) \to D^{(\alpha)} v(x)$ uniformemente in $\Omega \quad \forall \alpha$

Con:

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_n \in N$

$$\begin{aligned} D_n^\alpha &= \frac{\delta^{\alpha_1}\delta^{\alpha_2}\ldots\delta^{\alpha_n} \cdot u}{\delta x_1^{\alpha_1}\delta x_2^{\alpha_2}\ldots\delta x_n^{\alpha_n}} \\ &\Downarrow \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = |\alpha| \quad \text{numero derivate} \\ &= \frac{\delta^{|\alpha|} u}{\delta x_1^{\alpha_1}\delta x_2^{\alpha_2}\ldots\delta x_n^{\alpha_n}} \end{aligned}$$

3.7 Distribuzione: definizione

Un funzionale lineare $L : \mathfrak{D}(\Omega) \to C$ é una **distribuzione** se: $\forall \{v_k\} \subset \mathfrak{D}(\Omega)$, con $v_k \to v$ in $\mathfrak{D}(\Omega)$, si ha:

$$L(v_k) \to L(v) \quad \text{per } k \to \infty$$

Le distribuzioni generalizzano le funzioni.

Esempio $\quad u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

$$\begin{aligned} L : &\mathfrak{D}(\Omega) \to C \\ &v(x) \to \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \end{aligned}$$

Per essere una distribuzione, deve verificare che:

$$L(v_k) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad L(v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$$

Ovvero devo mostrare la convergenza:

$$L(v_k) - L(v) = L(v_k - v) = \int_\Omega u(x)[v_k(x) - v(x)]\,dx$$

Che risulta convergente se (per le regole viste prima sulla convergenza in $\mathfrak{D}$):

2. $\alpha = 0$
   $v_k \to v$ uniformemente in Ω
   $\sup_{x \in R} |v_k(x) - v(x)| \to 0$ per $k \to \infty$
   $\Rightarrow v_k(x) \to v(x) \quad \forall x$

1. $\forall x_0 \notin K$
   $v_k(x_0) = 0 \quad \forall k$
   $v(x_0) = \lim_k v_k(x_0) = 0$
   $\Rightarrow supp(v) \in K$

Da cui risulta quindi, tornando alla convergenza di prima:

$$\begin{aligned} \Big|\int_\Omega u(x)[v_k(x) - v(x)]\,dx\Big| \le \int_\Omega |u(x)| \cdot |v_k(x) - v(x)|\,dx \le \\ \le \sup_{x \in K} |v_k(x') - v(x')| \cdot ||u||_{L^1(K)} \to 0 \end{aligned}$$

Quindi la proprietá é rispettata e $u(x)$ é una distribuzione.

3.8 Spazio delle distribuzioni $\mathfrak{D}'$

Lo spazio delle distribuzioni é indicato come $\mathfrak{D}'(\Omega)$

Dall'esempio precedente abbiamo che, se L é una distribuzione,

$$L(v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx =< u, v >$$

e inoltre $u \in L'_{loc}(\Omega)$. Posso praticamente identificare u con L, quindi u é una distribuzione.

$u \in \mathfrak{D}'(\Omega) \quad \Rightarrow \quad L'_{loc}(\Omega) \subset D'(\Omega)$

Esempio $\quad 1 \leq p \leq \infty$

$L^p(\Omega) \subset L'_{loc}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad L^p(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$

Esempio: Delta di Dirac δ

$$\begin{aligned} \delta :&\mathfrak{D}(\Omega) \to C \\ v &\to v(0) \end{aligned}$$

1. δ é un funzionale lineare: $\lambda v + \mu w \to (\lambda v + \mu w)(0) = \lambda v(0) + \mu w(0)$
2. $v_k \to v$ in $\mathfrak{D}'(\Omega) \quad \Rightarrow \quad v_k \to v$ uniformemente in $\Omega \quad \Rightarrow$
   $\Rightarrow v_k \to v$ puntualmente $\forall x \in \Omega \quad \Rightarrow \quad v_k(0) \to v(0)$, ovvero $\delta(v_k) \to \delta(v)$

Quindi é una distribuzione.

Esempio $\quad u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ distribuzione.

$$\begin{aligned} u :&\mathfrak{D}(\Omega) \to C \\ v &\to u(v) =< u, v >= \int_\Omega uv = \int_\Omega u(x)v(v)\,dx \end{aligned}$$

3.9 Teorema di caratterizzazione

$L : \mathfrak{D}(\Omega) \to C$ funzionale lineare é una distribuzione ($L \in \mathfrak{D}'(\Omega)$) se e solo se $\forall K \in \Omega$ compatto $\exists M_k > 0$, $m_k \in N$ tale che:

$$\forall v \in \Omega \quad \text{con } supp(v) \subset K \quad \text{si ha} \quad |L(v)| \leq M_k \max_{|\alpha|<m_k} \max_{v \in K} |D^\alpha v(x)|$$

Se si puó scegliere m_k indipendentemente da K, il minimo $m = m_k$ é **l'ordine della funzione**.

Esempio $\quad u \in L^1_{loc}(\Omega)$; $u(v) =< u, v >= \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \quad \forall v \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

$\forall K$ compatto, $supp(v) \subset K$

$$| < u, v > | = \left| \int_\Omega u(x)v(x)\,dx \right| \leq \int_\Omega |u(x)v(x)|\,dx \leq \max_{x' \in K} |v(x')| \int_K |u(x)|\,dx = \max_{x' \in K} |v(x')| \cdot \underbrace{||u||_{L'(K)}}_{M_k}$$

$|\alpha| = 0 \Rightarrow m'_k \to 0$

Esempio $\quad \delta : \mathfrak{D}(\Omega) \to C$ funzionale lineare. $\delta(v) =< \delta, v >= v(0)$.

$$| < \delta, v > | = |v(0)| \leq \max_{x \in \Omega} \underbrace{|v(x)|}_{m_x=0} \cdot \underbrace{1}_{M_k}$$

Quindi ordine 0.

3.10 Convergenza in $\mathfrak{D}'$

$u_k \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$, $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$. u_k converge a u in $\mathfrak{D}'(\Omega)$ (ovvero al senso delle distribuzioni) se:

$< u_k, v > \to < u, v >$ per $k \to \infty$, $\forall v \in \mathfrak{D}(\Omega)$, con v funzione di test

Esempio $\{u_k\} \subset L^1_{loc}(\Omega)$; $u_k \to u$ in $L^1_{loc}(\Omega)$. Allora $u_k \to u$ in $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

Per verificare quanto detto, devo dimostrare che: $< u_k, v > \to < u, v > \quad \forall v \in \mathfrak{D}(\Omega)$, ovvero:

$$\int_\Omega u_k(x)v(x)\,dx \quad \overset{?}{\to} \quad \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$$

$$\begin{aligned}\Big|\int_\Omega u_k(x)v(x)\,dx - \int_\Omega u(x)v(x)\,dx\Big| &= \Big|\int_\Omega [u_k(x) - u(x)]v(x)\,dx\Big| \leq \\ &\leq \int_K |u_k(x) - u(x)| \cdot |v(x)|\,dx \qquad\qquad K = supp(v) \\ &\leq \max_{x' \in \Omega} |v(x')| \cdot \int_K |u_k(x)v(x)|\,dx = \\ &= \max_{x \in \Omega} |v(x')| \cdot ||u_k - u||_{L^1(K)} \to 0\end{aligned}$$

3.11 Teorema di completezza

$\{u_k\} \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$.

Se $\forall v \in \mathfrak{D}(\Omega) \quad \exists$ finito (in C) $\lim_{k\to\infty} < u_k, v >$

Allora $\exists u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, $u = \lim_{k\to\infty} u_k$ in $\mathfrak{D}'(\Omega)$

$$< u, v > = \lim_{k\to\infty} < u_k, v > \quad \forall v \in \mathfrak{D}(\Omega)$$

Esempio $u \in L^1(R^n)$, $\int_{R^n} u(x)\,dx = 1$.

$u_k(x) = k^n \cdot u(kx) \quad k \in N$.

$u_k(x) = k^n u(kx) \quad \Rightarrow \quad u_k(x) = 0 \Leftrightarrow |k_x| > 1 \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{k}$

Per verificare di essere $\subset L^1(R^n)$:

$$\int_{R^n} |u_k(x)|\,dx = \int_{R^n} |k^n u(kx)|\,dx =$$

Poiché $y = kx \Rightarrow x = \frac{1}{k}y \quad dx = dx_1, \ldots, dx_n = \frac{1}{k}dy_1, \frac{1}{k}dy_2, \ldots, \frac{1}{k}dy_n = \frac{1}{k^n}dy$

$$= \int_{R^n} \cancel{k}^n |u(y)| \frac{1}{\cancel{k}^n}\,dy = ||u||_{L^1(R^n)} < \infty$$

Quindi $u_k \in L^1(R^n) \Rightarrow \{u_k\} \subset L^1(R^n) \subset \mathfrak{D}'(R^n)$ (ovvero puó essere visto come successione).

Applico il teorema di completezza:

$$\forall v \in \mathfrak{D}'(R^n) \qquad < u_k, v > = \int_{R^n} u_k(x)v(x)\,dx = \int_{R^n} k^n u(kx)v(x)\,dx =$$

(sapendo che $y = kx$)

$$= \int_{R^n} k^n u(y) v\Big(\frac{y}{k}\Big) \frac{1}{k^n}\,dy = \int_{R^n} u(y) v\Big(\frac{y}{k}\Big)\,dy =$$

Applico il teorema di Lebesgue:

1. Convergenza puntuale:
   $\forall y \quad u(y)v\left(\frac{y}{k}\right) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(y)v(0)$

2. Devo trovare una maggiorazione integrabile e indipendente da k:
   $\left|u(x)v\left(\frac{y}{k}\right)\right| \leq |u(y)| \max_{x\in R^n} |v(x)| = |u(y) \cdot \underbrace{||v||_{L^\infty(R^n)}}_{\text{costante}} \quad \in L^1(R_n)\forall k$

Quindi si puó applicare il teorema:

$$< u_k, v >= \int_{R^n} u(x)v\left(\frac{y}{k}\right)\,dy \quad \to \quad \int_{R^n} u(y)v(0)\,dy = v(0)\underbrace{\int_{R^n} u(y)}_{1}\,dy = v(0)$$

Ho visto che:

$$\forall v \in \mathfrak{D}(R^n) \quad \exists \text{ finito } \lim_K < u_k, v >= v(0)$$

Quindi, per il teorema di completezza:

$$\exists\delta \in \mathfrak{D}'(R^n) \quad \text{distribuzione} \quad u_k \to \delta \text{ in } \mathfrak{D}'(R^n)$$

che agisce su una funzione di test v come:

$$< \delta, v >= \lim_k < u_k, v >= v(0) \quad \text{Delta di Dirac}$$

3.12 Teorema della divergenza di Gauss

$\vec{v} : \Omega \subseteq R^n \to R^n$. Si definisce divergenza del vettore $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$:

$$div\ \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\delta v_1}{\delta x_1} + \frac{\delta v_2}{\delta x_2} + \cdots + \frac{\delta v_n}{\delta x_n}$$

Il teorema afferma che:

$$\int_\Omega div\ \vec{v}(\vec{x})\,dx = \oint_{d\Omega} \vec{v}(\vec{x}) \cdot \nu(\vec{x})\,d\sigma_x$$

Dove $d\Omega$ é il contorno dell'insieme Ω, e $\nu(\vec{x})$ il vettore tangente al contorno di Ω in $\vec{x}$.

Facendo un pó di calcoli:

$\vec{v} : \Omega \to R^n \qquad u : \Omega \to R$

$div(u\vec{v}) = u\ div\ \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla u$

$\int_\Omega div(u\vec{v})\,dx = \int_\Omega [u\ div\ \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla u]\,dx = \oint_{d\Omega} u\vec{v} \cdot \nu\,d\sigma_x$

$\Rightarrow \quad \int_\Omega u\ div\ \vec{v}\,dx = \oint_{d\Omega} u\vec{v} \cdot \nu\,d\sigma_x - \int_\Omega \vec{v} \cdot \nabla u\,dx$

Svolgendo i conti per il caso semplice $\vec{v} = (0, \ldots, 0, v, 0, \ldots, 0)$ (un valore solo all'i-mo posto):

$div\ \vec{v} = \sum_{k=1}^n \frac{\delta v_k}{\delta x_k} = \frac{\delta v}{\delta x_i}$

$\vec{v} \cdot \nu = v \cdot \nu_i$

$\vec{v} \cdot \nabla u = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\delta u}{\delta x_k} = v \frac{\delta u}{\delta x_i}$

Risulta:

$$\int_\Omega u \frac{\delta v}{\delta x_i}\,dx = \oint_{d\Omega} uv\nu_i\,d\sigma_x - \int_\Omega v \frac{\delta u}{\delta x_i}$$

che guarda caso é la formula dell'integrazione per parti, e vale $\forall u, v \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.

Nel caso delle distribuzioni:

$u \in C^1(\Omega)$, $v \in \mathfrak{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u \frac{\delta v}{\delta x_i}\,dx = -\int_\Omega v \frac{\delta u}{\delta x_i}\,dx$$

3.13 Derivate di distribuzioni

$u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$. Voglio trovare una nuova distribuzione $\frac{\delta u}{\delta x_i}$ tale che, sfruttando Gauss:

$$\left\langle \frac{\delta u}{\delta x_i}, v \right\rangle = -\left\langle u, \frac{\delta v}{\delta x_i} \right\rangle \quad v \in \mathfrak{D}(\Omega) \text{ funzione di test}$$

Definisco il funzionale L:

$$L : \mathfrak{D}(\Omega) \to C$$
$$v \to -\left\langle u, \frac{\delta v}{\delta x_i} \right\rangle$$

$v \in \mathfrak{D}(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta v}{\delta x_i} \in \mathfrak{D}(\Omega)$

Inoltre L é un funzionale lineare su $D(\Omega)$, e $L \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ (distribuzione)

Definisco L derivata parziale i-ma di u:

$$L = \frac{\delta u}{\delta x_i} \qquad L(v) = -\left\langle u, \frac{\delta v}{\delta x_i} \right\rangle$$

3.13.1 Osservazione:

una funzione in $\mathfrak{D}'$ é derivabile infinite volte, sempre in $\mathfrak{D}'$:

$u \in \mathfrak{D}'(\Omega) \quad \Rightarrow \quad \exists$ sempre $\frac{\delta u}{\delta x_i} \in \mathfrak{D}'(\Omega)$

$\Rightarrow \quad \exists \frac{\delta}{\delta x_i}\left(\frac{\delta u}{\delta x_i}\right) \in \mathfrak{D}'(\Omega)$

$\Rightarrow \quad \forall \alpha \in N^n \quad \exists D^\alpha u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$

Questo si estende al caso di $u \in L^1_{loc}$, poiché $L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega)$

Esempio $\delta' \in \mathfrak{D}'(R)$, $v \in \mathfrak{D}(R)$. Allora:

$$< \delta', v >= - < \delta, v' >= -v'(0)$$
$$| < \delta', v > | = |v'(0)| \leq \max_{x \in R} |v'(x)|$$

Quindi δ' distribuzione di ordine 1.

Esempio $H(x) = \quad 1$ se $x > 0 \quad / \quad 0$ se $x < 0$.

$H \in L^\infty(R) \subset \mathfrak{D}'(R)$

$H'(x) = 0 \quad \forall x \neq 0$, peró $\nexists H'(0)$

Se la guardiamo invece come distribuzione:

$$< H', v >= - < H, v' >= -\int_R H(x)v'(x) = -\int_0^\infty v'(x)\,dx =$$
$$= -[\underbrace{v(\infty)}_{0} - v(0)] = v(0) =< \delta, v >$$

Come volevasi dimostrare, $H' = \delta \in \mathfrak{D}'(R)$

3.14 Derivate multiple

$$< D^\alpha u, v >=\Big\langle \frac{\delta^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}u}{\delta x_1^{\alpha_1}\delta x_2^{\alpha_2}\dots\delta x_n^{\alpha_n}}, v\Big\rangle = (-1)^{\alpha_1}\Big\langle \frac{\delta^{\alpha_2+\dots+\alpha_n}u}{\delta x_2^{\alpha_2}\dots\delta x_n^{\alpha_n}}, \frac{\delta^{\alpha_1}v}{\delta x_1}\Big\rangle =$$
$$= (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} < u, D^\alpha(v) > \quad = \quad (-1)^{|\alpha|} < u, D^\alpha v >$$

3.15 Teorema di Schwartz

$v \in C^2(\Omega)$. Allora:

$$\frac{\delta^2 v}{\delta x_i \delta x_j} = \frac{\delta^2 v}{\delta x_j \delta x_i} \qquad \forall i, j$$

Se $u \in \mathfrak{D}'(\Omega)$:

$$\frac{\delta^2 u}{\delta x_i \delta x_j} = \frac{\delta^2 u}{\delta x_j \delta x_i} \qquad \forall i, j = 1, \dots, n$$

3.15.1 Dimostrazione

$$\Big\langle \frac{\delta^2 u}{\delta x_i \delta x_j}, v\Big\rangle = -\Big\langle \frac{\delta u}{\delta x_j}, \frac{\delta v}{\delta x_i}\Big\rangle =\Big\langle u, \frac{\delta}{\delta x_j}\Big(\frac{\delta v}{\delta x_i}\Big)\Big\rangle$$

$v \in C^\infty$, quindi posso scambiare le derivate:

$$\Big\langle u, \frac{\delta^2 v}{\delta x_j \delta x_i}\Big\rangle =\Big\langle u, \frac{\delta^2 v}{\delta x_i \delta x_j}\Big\rangle =\Big\langle \frac{\delta^2 v}{\delta x_j \delta x_i}, v\Big\rangle \quad \forall v$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta^2 u}{\delta x_i \delta x_j} = \frac{\delta^2 v}{\delta x_j \delta x_i} \quad \text{uguaglianza in } \mathfrak{D}'(\Omega)$$

3.16 Teorema

$\{u_k\} \in \mathfrak{D}'(\Omega)$, $u_k \to u$ in $\mathfrak{D}'(\Omega)$. Allora:

$\forall \alpha \quad D^\alpha u_k \to D^\alpha u \quad$ in $\mathfrak{D}'(\Omega)$

3.16.1 Dimostrazione

$< D^\alpha u_k, v >= (-1)^{|\alpha|} < u_k, \underbrace{D^\alpha v}_{\in \mathfrak{D}(\Omega)} >$

$\Rightarrow \quad (-1)^{|\alpha|} < u, D^\alpha v >= \underbrace{(-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\alpha|}}_{1} < D^\alpha u, v >=< D^\alpha u, v >$

4 Trasformata di Fourier

$u : R^n_x \to C$, $\hat{u} : R^n_\xi \to C$

$$\hat{u}\{\xi\} = \mathfrak{F}[u](\xi) = \int_{R^n} u(x) e^{-i\xi x}\, dx$$

con $x = (x_1, x_2, \dots) \in R^n$ e $\xi = (\xi_1, \xi_2 \dots) \in R^n$. ($\xi \cdot x = \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n$).

4.1 Proprietá

$u \in L^1(R^n)$. Allora $\hat{u}$ é ben definita $\forall \xi$ e:

1. $\hat{u}(\xi) \in L^\infty$, $||\hat{u}||_{L^\infty} \leq ||u||_{L^\infty}$
2. $\hat{u} \in C^0(R^n)$
3. $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{u}(\xi) = 0$

4.1.1 Dimostrazioni

$|\hat{u}(\xi)| = \left| \int_{R^n} u(x)e^{-i\xi x}\,dx \right| \leq \int_{R^n} |u(x)| \cdot \underbrace{|e^{-i\xi x}|}_{=1} = \int_{R^n} |u(x)|\,dx = ||u||_{L^1(R^n)} < \infty$

Quindi $\hat{u}$ é ben definita $\forall \xi$. Inoltre:

1. $|\hat{u}(\xi)| \leq ||u||_{L^1(R^n)} \forall \xi \in R^n$, quindi $\sup_{\xi \in R^n} |\hat{u}(\xi)| = ||\hat{u}||_{L^\infty(R^n)} \leq ||u||_{L^\infty(R^n)}$
2. $\xi_0 \in R^n$. Dimostro che $\lim_{\xi \to \xi_0} \hat{u}(\xi) = \hat{u}(\xi_0)$

   $\Leftrightarrow \quad \{\xi_k\} \subset R^n$, $\xi_k \to \xi_0$ per $k \to \infty$, devo dimostrare che: $\lim_{k\to\infty} \hat{u}(\xi_k) = \hat{u}(\xi_0)$

   $\Leftrightarrow \quad \hat{u}(\xi_k) = \int_{R^n} u(x)e^{-i\xi_k x}\,dx$ quindi $\hat{u}(\xi_0) = \int_{R^n} u(x)e^{-i\xi_0 x}\,dx$

   Per poter applicare Lebesgue:

   - $u(x)e^{-i\xi_k x} \xrightarrow{\xi_k \to \xi_0} u(x)e^{-i\xi_0 x}$
   - $|u(x)e^{-i\xi_k x}| = |u(x)| \in L^1(R^n) \quad \forall k$

   Quindi, secondo Lebesgue:

$$\underbrace{\int_{R_n} u(x)e^{-i\xi_k x}\,dx}_{\hat{u}(\xi_k)} \quad \to \quad \underbrace{\int_{R_n} u(x)e^{-i\xi_0 x}\,dx}_{\hat{u}(\xi_0)}$$

4.2 Corollario

$\{u_k\} \subset L^1(R^n)$, $u_k \to u$ in $L^1(R^n)$.

Allora: $\hat{u}_k \to \hat{u}$ in $L^\infty(R^n)$

4.2.1 Dimostrazione

$||u_k - u||_{L^\infty(R^n)} = ||(u_k - u)\hat{}\,||_{L^\infty(R^n)} \leq ||u_k - u||_{L^1(R^n)} \to 0$

4.3 Teorema inversione

$u \in L^1(R^n)$ continua su R^n con $\hat{u} \in L^1(R^n)$. Allora:

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{R^n} \hat{u}(\xi)e^{+i\xi x}\,d\xi \qquad \forall x \in R^n$$

Rispetto alla formula diretta si applicano queste sostituzioni: $x \leftrightarrow \xi$, $u \leftrightarrow \hat{u}$, $i \leftrightarrow -i$.

4.3.1 Inversione nel caso $n = 2$

$u \in L^1(R)$ continua a tratti su ogni intervallo di R limitato, $\hat{u} \in L^1(R)$ (possono dunque anche esserci salti).

$$u(x) = \frac{u(x^+) + u(x^-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_R \hat{u}(\xi)e^{+1\xi x}\,d\xi$$