Analisi C for Dummies

bug report: *mario.piccinelli@gmail.com*

28 febbraio 2008

Indice

1 Serie numeriche

La serie é la generalizzazione della somma ad un numero infinito di addendi. A partire da una successione numerica

$$\{a_n\}_{n\in N} \subseteq C \qquad N = \{0, 1, 2, ...\}$$

Si costruisce un'altra successione definita come:

$$\begin{aligned} &S_0 = a_0 \\ &S_1 = a_0 + a_1 \\ &... \\ &S_N = S_{N-1} + a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \end{aligned}$$

$\{S_N\}_{n\in N}$ é detta *serie numerica* di elementi $\{a_n\}_{n\in N}$

- La serie *converge* se esiste $\lim_{n\to\infty} S_N \leq \infty$
- La serie *diverge* se esiste $\lim_{n\to\infty} S_N = \infty$
- La serie *oscilla/é indeterminata* se NON esiste $\lim_{n\to\infty} S_N$

1.1 Th di linearitá

Suppongo di avere $\{a_n\}$, $\{b_n\} \subset$ C, $c \in C$

- se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ convergono, allora $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ converge a $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n)$
- se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge allora $\sum_{n=0}^{\infty} c.a_n$ converge a $c. \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

1.2 Corollario al Th di linearitá

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

1.3 Serie a termini reali non negativi

$a_n \in R \quad a_n \geq 0 \quad \forall n$

$$S_N = S_{N-1} + a_N \Rightarrow S_N - S_{N-1} = a_n \geq 0 \Rightarrow S_N \geq S_{N-1} \quad \forall N$$

Quindi esiste sicuramente il limite, quindi la serie *non puó oscillare.*

1.4 Criterio del confronto

Ci sono due serie: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad a_n\, e\, b_n \in R$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$

Se $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq m$

Allora se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Corollario:

Se $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \geq m$

Allora se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ diverge.

1.5 Criterio del confronto asintotico

Supponiamo $a_n \geq 0 \quad b_n \geq 0 \quad \forall n$

supponiamo $\exists \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \quad \in [0, +\infty]$

- $L \in]0, +\infty[\quad \Rightarrow$ le due serie hanno lo stesso carattere
- $L = 0 \quad \Rightarrow$ se $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge
- $L = +\infty \quad \Rightarrow$ se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge

1.6 Criterio del rapporto

Supponiamo $a_n > 0 \quad \forall n \in N$

supponiamo $\exists \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \quad \in [0, +\infty]$

- se $L < 1$ la serie converge
- se $L > 1$ la serie diverge
- se $L = 1$ caso indeterminato

1.7 Criterio della radice

Supponiamo $a_n > 0 \quad \forall n \in N$

supponiamo $\exists \quad lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L \quad \in [0, +\infty]$

- se $L < 1$ la serie converge
- se $L > 1$ la serie diverge
- se $L = 1$ caso indeterminato

1.8 Nel caso complesso..

Se $\sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid$ converge allora converge anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Se $\sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid$ converge, si dice che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *converge assolutamente.*

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ma $\sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n \mid$ non converge, allora si dice *convergenza semplice.*

La convergenza assoluta implica la convergenza ordinaria.

1.9 Criterio di Leibnitz

Se ho una serie a segni alterni $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad a_n \in R \quad a_n \geq 0$

Se $\{a_n\}$ é monotona non crescente infinitesima

Allora la serie di partenza é convergente.

E inoltre $\mid S - S_n \mid \quad = \quad \mid S - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \mid \quad \leq \quad a_{n+1}$

2 Successioni di funzioni

$\{f_n\}_{n\in N} \quad f_n : I \to C \subseteq R \quad$ I intervallo limitato o illimitato

2.1 Convergenze

Convergenza puntuale:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in I \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mid f_n(x) - f(x) \mid = 0 \quad \forall x \in I$$

Convergenza uniforme:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \mid f_n(x) - f(x) \mid = 0 \quad \forall x \in I$$

2.2 Continuitá

$\{f_n\}_{n\in N}$ successione di funzioni $f_n : I \to C$

f_n continue $\forall n \in N$, $f_N \to f$ *uniformemente* in I (dove $f : I \to C$)

Allora f é *continua* in I

2.3 Integrazione

$f_n : [a,b] \to R$ integrabili $\forall n$

$f_n \to f$ uniformemente in [a,b]

Allora:

- f integrabile in [a,b]
- $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx \quad = \quad \int_a^b f(x)\,dx$

2.4 Derivazione

$f_n : [a,b] \to R$ derivabili $\forall n$

$f_n \to f$ in [a,b] (solo puntualmente)

$f_n' \to g(x)$ uniformemente in [a,b]

Allora:

- f é derivabile
- $f_n \to f$ uniformemente in [a,b]
- $f' = g$

3 Serie di Funzioni

$\{f_n(x)\}_{n \in N} \quad f_n : I \to C$

$$\begin{aligned} S_0(x) &= f_0(x) \\ S_1(x) &= f_0(x) + f_1(x) \\ &\dots \\ S_n(x) &= S_{n-1}(x) + f_n(x) \end{aligned} \qquad \text{somma parziale o ridotta della serie}$$

Fissato un determinato $x \in I$, si ha:

- $\{f_n(x)\}$ successione numerica
- $\{S_n(x)\}$ successione numerica $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$

3.1 Convergenza puntuale

La serie converge, diverge o é indeterminata

se la serie (numerica) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge, diverge o é indeterminata $\forall x \in I$

3.2 Convergenza uniforme

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ é convergente *uniformemente* a $S(x)$ in I

se la successione $\{S_k(x)\}$ converge *uniformemente* a $S(x)$ in I, ovvero:

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{x \in I} \mid S_k(x) - S(x) \mid \quad = \quad \lim_{k \to \infty} \sup_{x \in I} \mid \sum_{n=0}^{k} f_n(x) - \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \mid \quad = \quad 0$$

3.3 Continuitá

Date $f_n : I \to C$ continue in I $\forall n \in N$ (ovvero $f_n \in C^0(I)$)

se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge *uniformemente* in I a $S(x)$

allora $S(x)$ é continua in I (ovvero $S \in C^0(I)$) (condizione sufficiente, non necessaria)

3.4 Integrazione per serie

$f_n : [a, b] \to R$ integrabile $\forall n \in N$

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge *uniformemente* in [a,b] a $S(x)$

Allora:

- S é integrabile in [a,b]
- $\int_a^b S(x)\, dx \quad = \quad \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\, dx \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$

3.5 Derivazione per serie

$f_n : [a, b] \to R$ derivabile $\forall n \in N$

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge *puntualmente* in I a $S(x)$

$\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ converge *uniformemente* in I a $g(x)$

Allora:

- S é derivabile
- $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge *uniformemente* a S in I
- $S'(x) = g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f'n(x)$

3.6 Convergenza Totale

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n : I \to C$ ($I \in C$ intervallo) converge *totalmente* in I se:

$\exists \quad \{a_n\}$, con $a_n \in R$, $a_n \geq 0$ tale che:

- $\mid f_n(x) \mid \leq a_n$, $\forall x \in I$, $\forall n \in N$
- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente

3.7 Teorema di Weierstrass

Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente in I

allora converge uniformemente in I (non sempre vale il viceversa).

4 Serie di Potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad = \quad a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + ...$$

x_0 é il *centro della serie*. É sempre possibile ricondurre il centro della serie a 0 con un cambio di variabili.

4.1 Raggio di Convergenza

Supponiamo che la serie converga in $x_0 \in C$, con $x_0 \neq 0$.

Allora la serie converge *assolutamente* $\forall x \in C$ tali che $\mid x \mid < \mid x_o \mid$

Si definisce *Raggio di Convergenza* della serie:

$$R = \sup\{\mid x \mid \text{ con } x \in C \text{ tale che: } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge}\}$$

In tal caso:

- $\forall r$, tale che $0 < r < R$, la serie *converge uniformemente* nella palla chiusa centrata in 0 con raggio R.
- la somma della serie é una *funzione continua* in $B_R(o)$

Supponiamo che $\exists \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mid a_n \mid} = l$, con $l \in [0, +\infty]$

Allora:

$$R := \begin{cases} \frac{1}{l} & \text{se } l \in]0, +\infty[\\ +\infty & \text{se } l = 0 \\ 0 & \text{se } l = +\infty \end{cases}$$

R é il *raggio di convergenza* della serie.

Vale anche la formula $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$ (se esiste il limite, ovviamente)

Osservazione: se $\exists$ il limite del rapporto $\Rightarrow \exists$ il limite della radice, quindi se non esiste il limite della radice é inutile cercare il limite del rapporto.

4.2 Integrazione per serie di potenze

Dunque, ho $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e so che converge uniformemente in $\overline{B_r(0)}$ con $0 < r < R$.

So anche che $\forall n$ succede che $x \to a_n x^n$ é una funzione continua $\Rightarrow$ integrabile.

Quindi, suppondendo di avere $-r < a < b < r$:

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\int_a^b a_n x^n \, dx \Big) = ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

Prendo un x tale che $| \, x \, | < R$, quindi, se per esempio $x > 0$, prendo $a = 0$, $b = x$ (altrimenti viceversa).

$$\int_0^x \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \, dt \Big) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n \, dt = ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

Quindi integrando una serie di potenze ottengo un'altra serie di potenze.

La serie cosí ottenuta ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza.

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{| \, b_n \, |} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{| \, \frac{a_n}{n+1} \, |} = \frac{\lim_n \sqrt[n]{| \, a_n \, |}}{\lim_n \sqrt[n]{n+1}} = \frac{1}{R}$$

4.3 Derivazione per serie di potenze

Dunque, ho $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, e so che converge uniformemente in $\overline{B_r(0)}$ con $0 < r < R$.

So anche che $\forall n$ succede che $x \to a_n x^n$ é una funzione continua $\Rightarrow$ derivabile.

Se ho la convergenza uniforme di $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ allora:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{é derivabile e} \quad \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

La convergenza uniforme si vede semplicemente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$$

Inoltre, la derivata di una serie ha lo stesso raggio di convergenza della serie di partenza:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt[n]{| \, n a_n \, |} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{| \, a_n \, |} = \frac{1}{R}$$

Ripetendo quanto visto prima, si puó facilmente vedere che una serie di potenze ammette infinite derivate in $| \, x \, | < R$.

4.4 Taylor

Dunque, si é detto che una serie di potenze é derivabile ∞ volte in $| \, x \, | < R$. Finora abbiamo sempre visto come partendo da una successione $\{f_n\}$ si arrivi a convergere a una certa f. Supponiamo ora di voler fare il contrario: a partire da una f vogliamo ricavare la successione che coverga ad essa. Il procedimento é il seguente:

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + ... \\
&\Rightarrow f(x_0) = a_0 \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + ... \\
&\Rightarrow f'(x_0) = a_1 \\
f''(x) &= 2a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + ... \\
&\Rightarrow f''(x_0) = a_2 \\
f'''(x) &= 3\cdot 2a_3(x-x_0) + ... \\
&\Rightarrow f'''(x_0) = 3\cdot 2a_3 \\
...& \\
&\Longrightarrow f^{(n)}(x_0) = n!\cdot a_n
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$f(x) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{Serie di Taylor}$$

O, come afferma il *Teorema di Taylor*

$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n & \qquad\qquad P_m(x) \text{ Polinomio di Taylor} \\
+ \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1} & \qquad\qquad R_m(x) \text{ Resto di Lagrange}
\end{aligned}$$

Con ξ compreso tra x e 0.

$f \in C^{\infty}(I)$ di dice *sviluppabile in serie di potenze* in I se:

- $\forall x_0 \in I \quad \exists r > 0 \quad : \quad]x_0 - r, x_0 + r[\subset I$
- $\exists \quad \{a_n\} \subset R \quad : \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \quad \forall x$ tale che $\mid x - x_0 \mid < r$

Se f é sviluppabile in serie di potenze (attorno a x_0) allora la serie é la serie di Taylor (centrata in x_0)

$f \in C^{\infty}(I)$ di dice *sviluppabile in serie di Taylor* in I se:

- $\forall x_0 \in I \quad \exists r > 0 \quad : \quad]x_0 - r, x_0 + r[\subset I$
- $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x$ tale che $\mid x - x_0 \mid < r$

Per finire, f si dice *analitica* in I se é sviluppabile in serie di potenze.
f analitica $\Rightarrow f \in C^0$ e la serie é la serie di Taylor

$f \in C^0$ é sviluppabile in serie di Taylor se $\exists C, M > 0$ tale che:

$$\mid f^{(n)}(x) \mid \leq C \cdot M^n \quad \forall x \in I, \quad \forall n$$

4.5 Teorema di Weiestrass

$f : [a,b] \to \Re$ continua.

allora $\exists\{P_m(x)\}$ di polinomi *convergente uniformemente* a f in [a,b], ovvero:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} \mid f(x) - P_m(x) \mid = 0$$

Queso ci porta a concludere che: se $f \in C^{\infty}$, allora si puó esprimere come un polinomio di Taylor ad essa convergente uniformemente. Ma se anche la serie é solo C^0, comunque esiste un polinomio che converga ad essa uniformemente. Ma se la serie non é nemmeno continua?

5 Fourier (agitarsi prima dell'uso)

Serie trigonometrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)\Big]$$

Ha periodo $T = 2\pi$ e media nulla.

5.1 Teorema di Dirichlet

Data la serie trigonometrica $\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \sin(kx)\Big]$, se:

- se $\{\alpha_k\}$ e $\{\beta_k\}$ sono serie a termini positivi e
- se $\{\alpha_k\}$ e $\{\beta_k\}$ sono decrescenti e infinitesime

Allora la serie converge puntualmente $\forall x$ eccetto al piú $x = 0$, $x = \pm 2\pi$, $x = \pm 4\pi$, ...

5.2 Serie di Fourier

Si dimostra che il *Polinomio di Fourier*

$$P_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\Big]$$

Con i coefficienti:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\cos(kx)\,dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cdot\sin(kx)\,dx$$

é la migliore approssimazione ai *minimi quadrati* della funzione f(x), quando f(x) é 2π-periodica e integrabile secondo Riemann sul periodo:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} \mid f(x) - P_n(x) \mid^2 \; dx = 0$$

5.3 Uguaglianza di Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mid f(x) \mid^2 \; dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

5.4 Convergenza puntuale

La serie di Fuorier rappresenta la migliore approssimazione ai minimi quadrati, ma non si puó comunque parlare di convergenza.

Peró se f é C^0 a tratti (ovvero se é continua sul periodo eccetto al piú un numero finito di punti di discontinuitá di cui peró esistono finite entrambe le derivate destra e sinistra)

allora per ogni x_0 fissato, la serie di Fourier di f converge in x_0 a $S(x_0)$ e:

$$S(x_0) = \frac{f_{x_0^+} + f_{x_0^-}}{2}$$

se f é continua in x_0 allora $S(x_0) = f(x_0)$

5.5 Teorema di Dirichlet (un altro!?)

$f : \Re \to \Re$ T-periodica

se f é *monotona a tratti* in [0,T], ovvero é decomponibile in un numero finito di sottointervalli sui quali la funzione é monotona

allora la serie di Fuorier converge a

$$S(x_0) = \frac{f_{x_0^+} + f_{x_0^-}}{2}$$

se f é continua in x_0 allora $S(x_0) = f(x_0)$

(Praticamente la monotonia a tratti sopperisce alla presenza di infiniti punti di discontinuitá o limiti infiniti)

5.6 Derivabilitá della serie di Fuorier

$f : \Re \to \Re$ T-periodica, derivabile eccetto al piú in un numero finito di punti in [0,T]

con f' derivabile su [0,T] (secondo Riemann)

Allora la serie di Fourier di f' é ottenibile derivando termine a termine la serie di Fourier di f.

Altro teorema:

$f : [0, T] \to \Re$ continua con $f(0) = f(T)$ (senza salti)

f derivabile con f' di classe C^1 a tratti (continua e derivabile eccetto al piú un numero finito di punti x_i, nei quali esiste comunque $f''_{\pm}(x_i)$)

Allora f' é ottenibile derivando la serie di Fourier di f termine a termine in ogni intervallo chiuso $[a, b] \subset]0, T[$

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n \cdot b_n \cdot \cos(nx) + n \cdot a_n \sin(nx)) \quad \forall x \in [a, b]$$

Se inoltre $f'(0) = f'(T)$ allora la formula sopra vale in [0,T] (anche per gli estremi)

5.7 Convergenza Uniforme

Nelle condizioni sopra elencate, ovvero:

$f : \Re \to \Re$ T-periodica, derivabile eccetto al piú in un numero finito di punti in [0,T]

con f' derivabile su [0,T] (secondo Riemann)

allora la serie di Fourier di f *converge uniformemente* in $\Re$.

6 Integrali Indefiniti

Conosciamo l'integrale di Riemann per $f : [a, b] \to \Re$ limitata.
Vogliamo estendere a questi casi:

- Intervallo illimitato
- Funzione non limitata nell'intervallo

6.1 Definizione: localmente integrabile

$f : [a, b[\to \Re \quad b \in]a, +\infty]$

f é *localmente integrabile* in [a,b[se

$\forall c \in]a, b[$ f é integrabile (secondo Riemann) su [a,c]

6.2 Definizione: integrabile in senso improprio

$f : [a, b[$ é integrabile *in senso improprio* su $[a, b[$ se:

- f é localmente integrabile su [a,b[
- $\exists \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx \quad < +\infty$

6.3 Funzioni ≥ 0

$f : [1, +\infty[\to \Re$, $f(x) \geq 0$, f localmente integrabile.

Allora $\int_1^\infty f(x)\, dx$ non oscilla,

ovvero $\exists \quad \lim_{x\to\infty} f(t)\, dt \quad = \quad \sup_{x \in [1,\infty[} \int_1^\infty f(x)\, dx \quad \leq \quad +\infty$

6.4 Criterio del Confronto

$f, g : [1, +\infty[\to \Re$, localmente integrabili, $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x$

allora se g é integrabile in senso improprio anche f lo é.

6.5 Criterio del Confronto Asintotico

$f, g : [1, +\infty[\to \Re$, localmente integrabili, $f(x) \geq 0 \quad g(x) \geq 0 \quad \forall x$

suppongo che esista:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \quad L \in [0, +\infty]$$

Allora:

- $L \in]0, +\infty[\quad \Rightarrow$ f é integrabile in senso improprio $\Leftrightarrow$ lo é anche g
- $L = 0 \quad \Rightarrow$ se g é integrabile in senso improprio $\Rightarrow$ anche f lo é.
- $L = +\infty \quad \Rightarrow$ se f é integrabile in senso improprio $\Rightarrow$ anche g lo é.

6.6 Criterio di McLaurin

$f : [1, +\infty[\to \Re$, localmente integrabile, *monotona*. Allora:

$$\int_1^\infty f(x)\, dx \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f(x) \quad \text{converge}$$

6.7 In valore assoluto...

$f : [1, +\infty[\to \Re$, localmente integrabile.

Se $\int_1^\infty \mid f(x) \mid \, dx$ converge (ovviamente $\mid f \mid$ integrabile in senso improprio)

allora $\int_1^\infty f(x)$ converge e

$$\mid \int_1^\infty f(x)\, dx \mid \quad \leq \quad \int_1^\infty \mid f(x) \mid \, dx$$

in tal caso si dice che f(x) é *assolutamente integrabile*

7 Trasformata di Laplace

$f : \Re \to \Re$ (ma anche C), $f(x) = 0 \forall x < 0$

$$L[f](s) \quad = \quad \int_{\Re} f(x)e^{-sx}\,dx \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-sx}\,dx$$

7.1 Definizione

Allora la Trasformata di Laplace é *ben definita* $\forall s \in \Re$ con $\Re\{s\} > \alpha$ se:

$$\mid f(x) \mid \leq M \cdot e^{\alpha x} \quad \forall x \quad M, \alpha \in \Re \quad M > 0$$

e inoltre

$$\lim_{\Re\{s\} \to \infty} L[f](s) = 0$$

Altra possibilitá:

suppongo $\exists \quad \lambda \in \Re$ tale che $e^{-\lambda x} f(x)$ sia assolutamente integrabile.

Allora L[f](s) é definita per $\Re\{s\} \geq \lambda$

7.2 Linearitá

$$L[\lambda f + \mu g] \quad = \quad \lambda L[f] + \mu L[g]$$

7.3 Formula del ritardo

$$L[f(x-a)] = e^{-sa} L[f(x)]$$

7.4 Derivazione

Suppongo $f \in C^1$ a tratti, con f' trasformabile secondo Laplace in $\Re\{s\} > \alpha$

allora f é trasformabile secondo Laplace per $\Re\{s\} > \max\{0, \alpha\}$, e vale:

$$L[f'](s) \quad = \quad s \cdot L[f](s) \quad - \quad f(0^+)$$

Corollario:

$$\lim_{\Re\{s\} \to \infty} s \cdot L[f] = f(0)$$

7.5 Integrazione

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad f \in C^0 \quad \Longrightarrow \quad L[F] = \frac{1}{s} F[f]$$

8 Trasformata di Fourier

$f : \Re \to \Re$

$$\hat{f}(\xi) = F[f](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx \qquad \xi \in \Re$$

$\hat{f} : \Re \to C$ é definita *Trasformata di Fourier*

8.1 Definizione

f assolutamente integrabile su $\Re$

allora la trasformata di Fourier $\hat{f}$ é ben definita $\forall \xi \in \Re$ e:

- $\hat{f}$ é una funzione limitata in $\Re$
- $\hat{f}$ é una funzione continua in $\Re$
- $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f} = 0$

8.2 Linearitá

$$F[\lambda f + \mu g] = \lambda F[f] + \mu F[g]$$

8.3 Formula del Ritardo

$$F[f(ax-b)] = \frac{1}{|\, a\,|} \cdot e^{-i\xi\frac{b}{a}} \cdot F[f]\Big(\frac{\xi}{a}\Big)$$

8.4 Inversione della Trasformata

$u : \Re \to \Re$ limitata, C^1 a tratti, con u e $\hat{u}$ assolutamente integrabili

$$F^{-1}[\hat{u}](x) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\Re} \hat{u}(\xi) \cdot e^{i\xi x}\, d\xi \quad = \quad \frac{u(x^+) + u(x^-)}{2}$$

se u é continua in x, allora succede che

$$F^{-1}[\hat{u}](x) \quad = \quad u(x)$$

Nelle condizioni sopracitate, inoltre accade che

$$F^{-1}F[u](x) \quad = \quad u(x)$$

$$\Rightarrow F^{-1} \circ F = \text{identitá}$$

8.5 Corrispondenze tra trasformata e antitrasformata

$$\begin{array}{rcl} F : u & \to & \hat{u} = F[u] \\ F^{-1} : v & \to & \check{v} = F^{-1}[v] \end{array}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} u & \leftrightarrow & \hat{u} \\ x & \leftrightarrow & \xi \\ i & \leftrightarrow & -i \end{array}$$

8.6 Derivazione

u e u' assolutamente integrabili, u' C^1 a tratti

$$F[u'](\xi) = i \cdot \xi \cdot \hat{u}$$

9 Equazioni Differenziali

$$f(t, y, y', y'', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

t é una variabile indipendente
$y = y(t)$ é un variabile dipendente (incognita)
n: ordine dell'equazione

$y = y(t)$ derivabile almeno n volte é *soluzione* se

$$f(t, y(t), y''(t), ..., y^{(n)}(t)) = 0 \qquad \forall t$$

Peró se $y'(t) = g$ allora $y(t) = \int g(s)\, ds + C$. Quindi ho infinite soluzioni e per definirne una devo conoscere le condizioni iniziali.

9.1 Esistenza della soluzione

$$\begin{array}{rccc} f: & A =]a,b[\times]c,d[& \rightarrow & \Re \\ & (t,y) & \rightarrow & f(t,y) \end{array}$$

f continua $\forall(t_0, y_0) \in A$, e inoltre $\exists \frac{\delta f}{\delta y}$ continua in $(t, y) \in A$

allora $\forall(t_0, y_0) \in A \quad \exists\delta > 0$ tale che $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \in]a, b[$

e il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione $y = y(t)$

$$y(t) = [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \quad \rightarrow \quad \Re$$

9.2 Estensione della soluzione

Supponiamo inoltre (oltre alle condizioni di esistenza) che esistano $K_1, K_2 > 0$ tali che:

$$| f(t, y) | \leq K_1 + K_2 | y | \qquad \forall t \in]a, b[, \forall y \in \Re$$

allora la soluzione del problema di Cauchy $\forall(t_0, y_0) \in A$ é definita su tutto [a,b].

10 Equazioni differenziali di ordine n

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y \quad = \quad f(t) \qquad t \in I$$

$a_i(t), f(t) \in C^0(I)$

10.1 Esistenza della soluzione

$a_i, f \in C^0(I) \quad \forall i = 1, 2, ..., n$

allora $\forall(t_0, y_0, ..., y_{n-1}) \in I \times R^n$

$\exists!$ soluzione $y(t)$ definita su I, $y \in C^n(I)$

10.2 Operatore differenziale

$$L(t)y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y$$

$$\begin{array}{rcccc} L(t) & : & y & \rightarrow & L(t)y \\ & & C^n(I) & \rightarrow & C^0(y) \end{array}$$

$L(t)y$: Operatore differenziale di ordine n

$L(t)$ é un operatore lineare
$L(t)(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda \cdot L(t)(y_1) + \mu \cdot L(t)(y_2)$

10.3 Soluzioni

a partire da $L(t)y = t \quad \longrightarrow \quad$ *equazione Non Omogenea (NO)*
associo la $L(t)y = 0 \quad \longrightarrow \quad$ *equazione Omogenea (O)*

se y_1 é soluzione della NO
e y_0 é soluzione della O
allora $y_1 + y_0$ é soluzione della NO.

se y_1 e y_2 sono soluzioni della NO
allora $y_1 - y_2$ é soluzione della O.

L'insieme S delle soluzioni di O é uno spazio vettoriale
La dimensione di E é dunque uguale a n.

10.4 Determinante Wronskiano

Esempio per $n = 3$, con funzioni y_1, y_2, y_3

$$\mathbf{T} = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t) \\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t) \end{vmatrix}$$

Le funzioni $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ sono *linearmente indipendenti* in I $\quad \Leftrightarrow \quad W(t) = 0 \quad \forall t \in I$