

# Elaborazione Numerica dei Segnali A

Proudly provided by PicciMario  
<http://piccimario.wordpress.com>

27 gennaio 2009

This work is licensed under the Creative Commons Attribution-Noncommercial-Share Alike 2.5 Italy License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/it/>.

## Indice

<b>1</b>	<b>Classificazione dei segnali</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Segnale numerico</b>	<b>4</b>
2.1	Rappresentazione dei segnali numerici . . . . .	4
2.2	Supporto/durata di un segnale numerico . . . . .	4
2.3	Dinamica di un segnale numerico . . . . .	4
2.4	Energia/Potenza di un segnale . . . . .	5
2.5	Sequenza periodica . . . . .	5
2.6	Classificazione temporale . . . . .	5
2.7	Simmetrie . . . . .	5
2.8	Operazioni elementari . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Sequenze elementari</b>	<b>8</b>
3.1	Segnale impulso unitario . . . . .	8
3.2	Segnale gradino discreto . . . . .	8
3.3	Segnale rettangolo . . . . .	9
3.4	Sequenza esponenziale reale e causale . . . . .	9
3.5	Sequenza sinusoidale di periodo N . . . . .	10
3.6	Sequenza esponenziale complessa . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Generazione di sequenze deterministiche</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Processi Casuali</b>	<b>12</b>
<b>6</b>	<b>Generazione di sequenze pseudo casuali</b>	<b>14</b>
6.1	Generazione di sequenze pseudo casuali con pdf uniforme . . . . .	14
6.1.1	Prima tecnica: radice primitiva di un numero primo . . . . .	14
6.1.2	Seconda tecnica (ricorsiva) . . . . .	14
6.1.3	Terza tecnica: algoritmo di Blum Blum Shab . . . . .	15
6.2	Generazione di sequenze pseudo casuali con altre distribuzioni . . . . .	15
6.3	Relazione che lega le pdf delle ampiezze . . . . .	15
6.4	Generazione di sequenze pseudo casuali pseudo gaussiane . . . . .	16
<b>7</b>	<b>Convoluzione di segnali</b>	<b>17</b>
7.1	Convoluzione lineare . . . . .	17
7.2	Proprietà . . . . .	17
7.3	Supporto del risultato di convoluzione . . . . .	18
7.4	Convoluzione di sequenze complesse . . . . .	18
7.5	Convoluzione normalizzata . . . . .	18
7.6	Convoluzione circolare . . . . .	18
7.7	Complessità del calcolo diretto della convoluzione . . . . .	19

<b>8</b>	<b>CrossCorrelazione di sequenze</b>	<b>19</b>
8.1	Differenze tra convoluzione e crosscorrelazione . . . . .	20
8.2	Crosscorrelazione normalizzata . . . . .	20
8.3	Crosscorrelazione circolare . . . . .	20
8.4	Crosscorrelazione di sequenze complesse . . . . .	20
8.5	Autocorrelazione . . . . .	20
8.6	Crosscorrelazione e distanza . . . . .	20
8.7	Hermitianità . . . . .	21
8.8	Disuguaglianza di Schwartz . . . . .	21
<b>9</b>	<b>Elaborazione di sequenze numeriche</b>	<b>21</b>
9.1	Classificazione dei sistemi . . . . .	21
9.1.1	Linearità del sistema . . . . .	21
9.1.2	Causalità del sistema . . . . .	21
9.1.3	Memoria del sistema . . . . .	22
9.1.4	Invarianza alla traslazione . . . . .	22
9.1.5	Stabilità del sistema . . . . .	22
9.2	Sistemi Lineari Tempo-invarianti (LTI) . . . . .	22
9.2.1	Causalità dei sistemi LTI . . . . .	23
9.2.2	Stabilità dei sistemi LTI . . . . .	23
9.2.3	Esempi . . . . .	23
9.2.4	Cascata di sistemi LTI . . . . .	24
9.2.5	Parallelo di sistemi LTI . . . . .	24
9.2.6	Inverso di un sistema LTI . . . . .	25
9.3	Equazioni alle differenze . . . . .	25
9.4	Soluzioni di equazioni lineari alle differenze . . . . .	26
9.4.1	Esempio: una specie di accumulatore . . . . .	27
9.5	LTI in frequenza . . . . .	27
<b>10</b>	<b>DTFT Discrete Time Fourier Transform</b>	<b>29</b>
10.1	Esistenza della DTFT . . . . .	30
10.2	Convergenza della DTFT . . . . .	30
10.3	Proprietà della DTFT . . . . .	31
10.4	Formula di inversione: . . . . .	32
10.5	DTFT della crosscorrelazione lineare di sequenze . . . . .	33
10.6	Coppie sequenze - DTFT . . . . .	33
<b>11</b>	<b>Campionamento e ricostruzione</b>	<b>33</b>
11.1	Campionamento ideale . . . . .	33
11.2	Ricostruzione del segnale . . . . .	35
11.3	Campionamento reale . . . . .	37
11.4	Interpolatore lineare . . . . .	37
<b>12</b>	<b>Conversione digitale-digitale</b>	<b>39</b>
12.1	Decimazione numerica di fattore H . . . . .	40
12.2	Interpolazione numerica di fattore L . . . . .	41
12.3	Interpolazione - decimazione in cascata . . . . .	42
<b>13</b>	<b>Trasformata Z</b>	<b>43</b>
13.1	Condizioni di esistenza . . . . .	43
13.1.1	Criterio di Cauchy . . . . .	43
13.2	Trasformata inversa della Z . . . . .	44
13.3	Proprietà della trasformata Z . . . . .	47
13.3.1	Linearità . . . . .	47
13.3.2	Traslazione . . . . .	47
13.3.3	Cambio scala in Z . . . . .	47
13.3.4	Derivazione in Z . . . . .	47
13.3.5	Coniugazione . . . . .	48
13.3.6	Ribaltamento (sequenza) . . . . .	48

13.3.7	Convoluzione lineare di sequenze . . . . .	48
13.3.8	Moltiplicazione di sequenze . . . . .	48
13.4	Filtri FIR . . . . .	49
13.5	Filtri IIR . . . . .	49
13.6	Caratterizzazione di sistemi LTI . . . . .	50
13.7	Filtri passa tutto . . . . .	51
13.7.1	Relazione tra modulo e fase . . . . .	51
13.7.2	Sistemi passa tutto . . . . .	52
13.8	Ritardo di Gruppo . . . . .	52
13.9	Sistemi a fase minima . . . . .	52
13.10	Compensazione di un sistema . . . . .	53
13.11	FIR a fase lineare . . . . .	53
13.12	Caso degli zeri in $\pm 1$ . . . . .	54
<b>14</b>	<b>Discrete Fourier Transform DFT</b> . . . . .	<b>54</b>
14.1	DFT inversa . . . . .	55
14.2	Formule per le serie a durata finita . . . . .	55
14.3	Proprietà di $W_N$ . . . . .	56
14.4	Complessità calcolo DFT . . . . .	57
14.5	DFT e trasformata Z . . . . .	57
14.6	DFT e DTFT . . . . .	57
14.7	Proprietà DFT . . . . .	57
14.7.1	Interpolazione numerica della DFT . . . . .	57
14.7.2	Calcolo della DFT di un segnale periodico su 2 periodi . . . . .	58
14.8	Convoluzione indiretta . . . . .	58
14.8.1	Segnali a durata limitata . . . . .	58
14.8.2	Segnali dello stesso periodo N . . . . .	59
14.8.3	Segnali di periodi diversi $N_x, N_y$ . . . . .	59
14.9	Convoluzione lineare di sequenze lunghe . . . . .	60
14.9.1	Overlap-add . . . . .	60
14.9.2	Overlap-save . . . . .	61
<b>15</b>	<b>Analisi Spettrale</b> . . . . .	<b>62</b>
15.1	Finestra Rettangolare . . . . .	63
15.2	Finestra Triangolare . . . . .	63
<b>A</b>	<b>Esempi</b> . . . . .	<b>64</b>
A.1	Parte pari e parte dispari (per sequenze causali) . . . . .	64
A.2	Calcolo di energie e potenze di segnali . . . . .	64
A.3	Convoluzione lineare . . . . .	65
A.4	Convoluzione circolare . . . . .	66
A.4.1	Esempio . . . . .	66
A.5	Generazione di sequenze casuali . . . . .	67
A.5.1	Sequenze con PDF arbitraria . . . . .	67
<b>B</b>	<b>Matlab</b> . . . . .	<b>69</b>
B.1	Segnali e Operazioni Elementari . . . . .	69
B.1.1	Funzioni per generare segnali elementari . . . . .	69
B.1.2	Operazioni elementari . . . . .	70

Segnale: supporto fisico dell'informazione

⇓ modellizzazione matematica

Funzioni

monodimensionali (1 variabile indipendente)

bidimensionali (2 variabili indipendenti).

## 1 Classificazione dei segnali

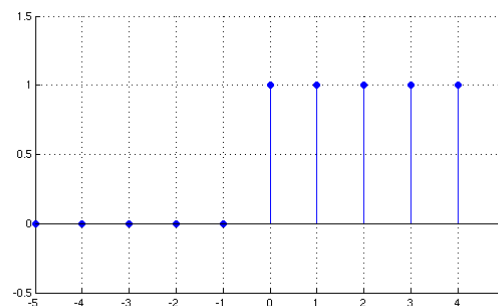
- $x(t)$  segnale analogico
- $x(kT)$  segnale a tempo discreto (campionato)
- $x_q(t)$  segnale quantizzato
- $x[n]$  segnale numerico (a tempo discreto, quantizzato)

## 2 Segnale numerico

$$\vec{x} \in \mathbb{R} \text{ (o } \mathbb{C}) \quad : \quad \vec{x} = \{x[n], -\infty \leq n \leq +\infty, n \in \mathbb{Z}\}$$

### 2.1 Rappresentazione dei segnali numerici

- Rappresentazione grafica



- Rappresentazione sequenziale

$$x[n] = \{1, 2, 1, 1, 2, 3, 4\}$$

↑ rappresenta la posizione dell'elemento di indice 0.

- Rappresentazione tabulare
- Rappresentazione funzionale

$$x[n] = a^n \sin(2\pi f_0 n)$$

### 2.2 Supporto/durata di un segnale numerico

Il supporto é il piú piccolo insieme di indici  $n$  al di fuori dei quali il segnale assume il valore  $x[n] = 0$  in modo costante.

La durata é il numero di indici del supporto.

### 2.3 Dinamica di un segnale numerico

$$D = \max_n \{x[n]\} - \min_n \{x[n]\}$$

NB: in valori intermedi agli indici (sempre interi) il valore di  $x$  é NON DEFINITO, non 0.

## 2.4 Energia/Potenza di un segnale

- Energia di un segnale a tempo discreto

$$W_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

se  $W_x < \infty \Rightarrow$  segnale di energia (segnale a energia finita)

- Potenza media di un segnale a tempo discreto

$$P_x = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

se  $P_x < \infty$  e  $P_x \neq 0 \Rightarrow$  segnale di potenza (segnale a potenza media finita non nulla)

## 2.5 Sequenza periodica

Una sequenza  $x[n]$  si dice periodica se  $\exists N$  tale che:

$$x[n] = x[n+N] \quad \forall n \in Z$$

$M = \min\{N_i\}$  si dice periodo fondamentale del segnale a tempo discreto.

I segnali periodici a tempo discreto di periodo fondamentale  $M$  sono a potenza media finita non nulla.

Potenza media di un segnale periodico a tempo discreto  $x[n]$  con periodo  $M$ :

$$P_x = \frac{1}{M} \sum_{n_0}^{n_0+M-1} |x[n]|^2$$

## 2.6 Classificazione temporale

- sequenze causali  $x[n] = 0 \quad \forall n < 0$
- sequenze anticausali  $x[n] = 0 \quad \forall n \geq 0$
- sequenza non causali  $\exists \quad n_1 \geq 0 \quad n_2 < 0 \quad : \quad x[n_1] \neq 0 \quad x[n_2] \neq 0$
- sequenza right-sided: supporto limitato solo a sinistra.
- sequenza left-sided: supporto limitato solo a destra.
- sequenza limitata ( $W_x$  sempre  $< \infty$ )
- sequenza illimitata.

## 2.7 Simmetrie

- segnale pari:  $x[n] = x[-n]$
- segnale dispari:  $x[n] = -x[-n]$
- sequenza a simmetria pari rispetto a  $n_0$ 
  - $n_0 \in Z$  (simmetria pari rispetto al campione  $n_0$ )

$$x[n_0 + n] = x[n_0 - n]$$

- $n_0 \notin Z$ , ma  $2n_0 \in Z$  (simmetria pari rispetto al mezzo campione  $n_0$ )

$$x\left[n_0 + n + \frac{1}{2}\right] = x\left[n_0 - n - \frac{1}{2}\right]$$

- sequenza a simmetria dispari rispetto a  $n_0$  ( $x[n_0] = 0!!!$ )

–  $n_0 \in Z$  (simmetria dispari rispetto al campione  $n_0$ )

$$x[n_0 + n] = -x[n_0 - n]$$

–  $n_0 \notin Z$ , ma  $2n_0 \in Z$  (simmetria dispari rispetto al mezzo campione  $n_0$ )

$$x\left[n_0 + n + \frac{1}{2}\right] = -x\left[n_0 - n - \frac{1}{2}\right]$$

- sequenza a simmetria coniugata pari:  $x[n] = x^*[-n]$  (parte reale pari, immaginaria dispari)
- sequenza a simmetria coniugata dispari:  $x[n] = -x^*[-n]$  (parte reale dispari, immaginaria pari)

## 2.8 Operazioni elementari

- Somma di sequenze

$$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

- Prodotto di sequenze

$$y[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$$

NB: somme e prodotti di segnali periodici producono sempre un segnale periodico, con periodo pari al MCM dei periodi dei segnali di partenza. Questo perché i periodi sono per forza in rapporto razionale tra di loro.

- Divisione di sequenze

$$y[n] = x_1[n]/x_2[n] \quad , \quad x_2[n] \neq 0 \quad \forall n$$

- Moltiplicazione per una costante

$$y[n] = c \cdot x[n]$$

- Traslazione

$$y[n] = x[n - n_0]$$

–  $n_0 > 0$  traslazione verso destra

–  $n_0 < 0$  traslazione verso sinistra

- Ribaltamento rispetto a  $n = 0$

$$y[n] = x[-n]$$

- Decimazione numerica di un fattore M (compressione)

$$y[n] = x[M \cdot n]$$

Vengono eliminati  $M - 1$  campioni ogni  $M$ , a partire da  $n = 0$ .

- Interpolazione numerica (espansione)

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n/L] \quad \text{se } n = kL, k \in Z \\ &= 0 \quad \text{altrimenti} \end{aligned}$$

Vengono inseriti  $L - 1$  campioni di valore nullo tra ciascun campione, a partire da  $n = 0$ .

- Scomposizione in parte pari e dispari

$$x[n] = x_{sp}[n] + x_{sd}[n]$$

$$\begin{aligned} x_{sp}[n_0 + n] &= \frac{x[n_0 + n] + x[n_0 - n]}{2} \\ x_{sd}[n_0 + n] &= \frac{x[n_0 + n] - x[n_0 - n]}{2} \end{aligned}$$

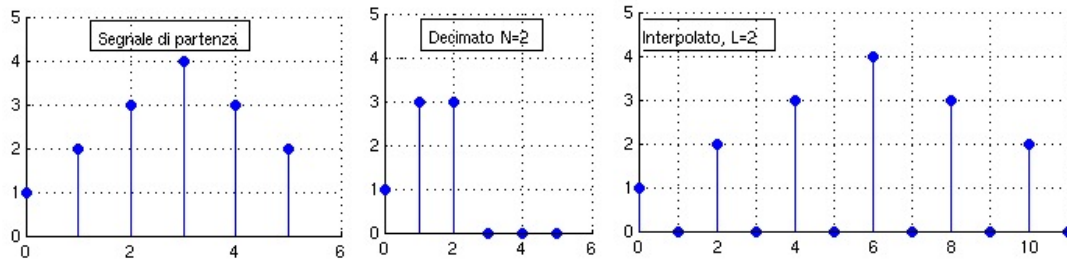


Figura 1: decimazione e interpolazione, ordine 2

Quindi, per sequenze causali si ha che:

$$\begin{aligned}
 x_p[n] &= \frac{1}{2}x[n] && \text{per } n > 0 \\
 &= x[0] && \text{per } n = 0 \\
 x_d[n] &= \frac{1}{2}x[n] && \text{per } n > 0 \\
 &= 0 && \text{per } n = 0
 \end{aligned}$$

- Scomposizione di sequenze complesse in parte coniugata pari e coniugata dispari:

$$x_{cp} = \frac{x[n] + x^*[-n]}{2} \quad x_{cd} = \frac{x[n] - x^*[-n]}{2}$$

### 3 Sequenze elementari

#### 3.1 Segnale impulso unitario

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$\delta[n]$  é una sequenza causale. É molto diverso da  $\delta(t)$ , in quanto ha area 1, non  $\infty$ .

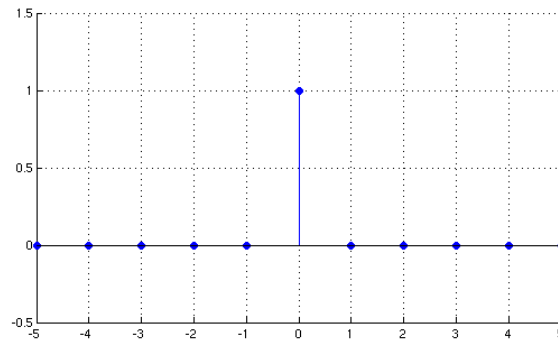


Figura 2: Impulso unitario

Puó essere usato per formare qualunque altro segnale:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m] \cdot \delta[n - m] \quad \forall x[n]$$

#### 3.2 Segnale gradino discreto

$$\varepsilon[n] = \begin{cases} 1 & \text{se } n \geq 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$\varepsilon[n]$  é diverso dal gradino continuo, poiché in  $n = 0$  vale 1, non 0.5.

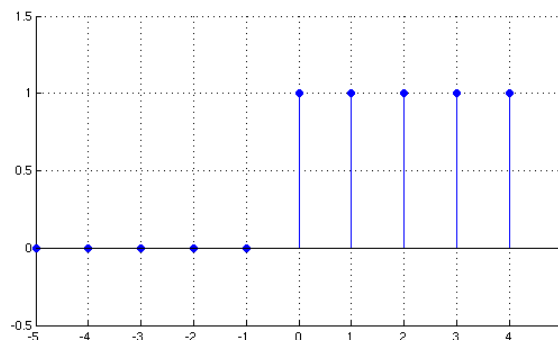


Figura 3: Gradino discreto

$$\varepsilon[n] = \sum_{m=0}^{\infty} \delta[n - m]$$
$$\delta[n] = \varepsilon[n] - \varepsilon[n - 1]$$



$$\begin{aligned}
P_\varepsilon &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |\varepsilon[n]|^2 \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N 1^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

### 3.3 Segnale rettangolo

$$\begin{aligned}
\text{rect}_N[n] &= 1 \quad n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \\
&= 0 \quad \text{altrimenti}
\end{aligned}$$

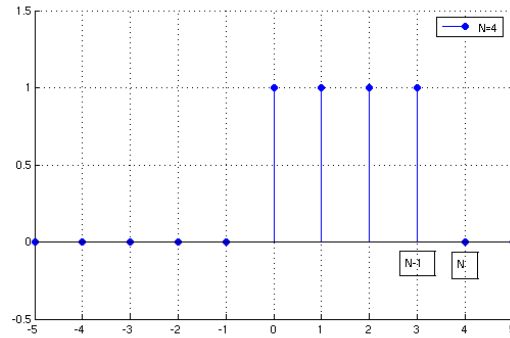


Figura 4: Rettangolo discreto

$$\begin{aligned}
\text{rect}_N[n] &= \varepsilon[n] - \varepsilon[n-N] \\
W_x &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\text{rect}_N[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} 1^2 = N
\end{aligned}$$

### 3.4 Sequenza esponenziale reale e causale

$$x[n] = a^n \cdot \varepsilon[n]$$

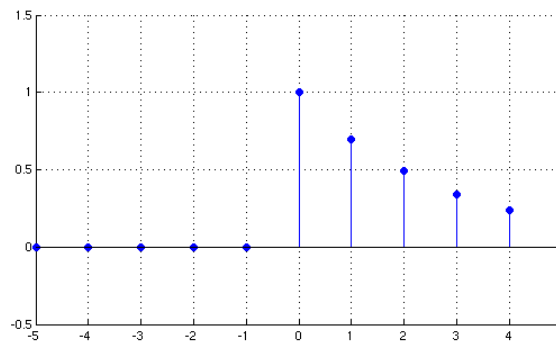


Figura 5: Esponenziale  $0 < a < 1$

$$W_{a^n \varepsilon[n]} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a^2)^n = \frac{1}{1-a^2}$$

### 3.5 Sequenza sinusoidale di periodo N

$$x[n] = A \cdot \sin\left(2\pi \frac{n - n_0}{N}\right)$$

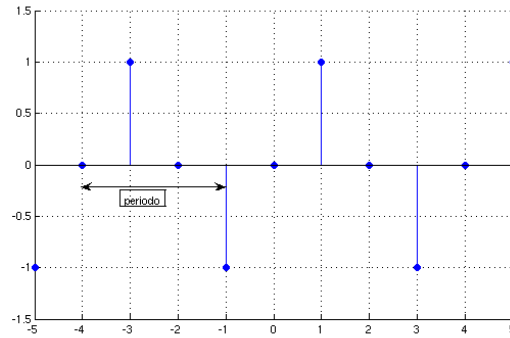


Figura 6: senoide, N=4

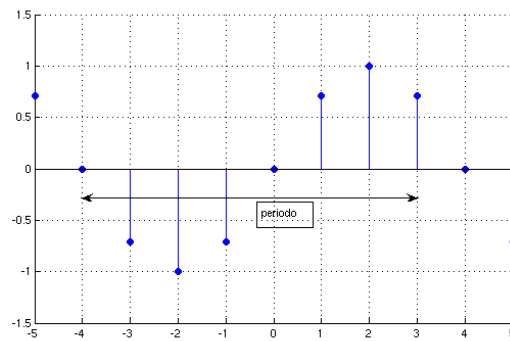


Figura 7: senoide, N=8

Se  $N$  non è intero, il periodo è il più piccolo intero multiplo di  $N$ . Ad esempio, una senoide  $x[n] = \sin\left(2\pi \frac{3}{4}n\right)$ , quindi con frequenza  $f_0 = \frac{3}{4}$  ( $N = \frac{4}{3}$ ) in realtà ha un periodo di 4 (il più piccolo multiplo intero di  $\frac{4}{3}$ ), come se avesse una frequenza  $\frac{1}{4}$ . Questo è legato alla periodicità della DTFT.

### 3.6 Sequenza esponenziale complessa

$$\begin{aligned} x[n] &= A \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot f_0 \cdot n) \\ &= A \cdot \cos(2\pi \cdot f_0 \cdot n) + j \cdot A \cdot \sin(2\pi \cdot f_0 \cdot n) \end{aligned}$$

## 4 Generazione di sequenze deterministiche

- Campionamento di segnali analogici:

$$\begin{array}{ll} \text{segnale analogico } x(t) & \\ \Downarrow \text{campionamento} & \\ \text{segnale campionato } x(kT) & \\ \Downarrow \text{quantizzazione} & \\ \Downarrow \text{indicizzazione} & \\ \text{Segnale numerico } x[n] & \end{array}$$

- Espressione analitica

$$x[n] = A \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{n - n_0}{N}\right)$$

- Equazione alle differenze:

Sono equazioni ricorsive corredate da condizioni iniziali. Es:

$$\begin{aligned} x[n] &= a \cdot x[n-1] \\ x[0] &= 1 \\ &\Downarrow \\ x[0] &= 1 \\ x[1] &= a \\ x[2] &= a^2 \\ &\vdots \\ x[n] &= a^n \cdot \varepsilon[n] \end{aligned}$$

**Esempio: generazione di sinusoidi a tempo discreto**

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

ponendo  $\alpha = n\beta$

$$\begin{aligned} \sin((n+1)\beta) &= \sin(n\beta) \cos \beta + \sin \beta \cos(n\beta) \\ \cos((n+1)\beta) &= \cos(n\beta) \cos \beta - \sin(n\beta) \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= \sin(n\beta) \\ y[n] &= \cos(n\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x[n+1] &= x[n] \cos \beta + y[n] \sin \beta \\ y[n+1] &= y[n] \cos \beta - x[n] \sin \beta \end{aligned}$$

Condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} x[0] &= 0 \\ y[0] &= 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  Si ricava  $\sin(n\beta)$  e  $\cos(n\beta)$

## 5 Processi Casuali

Una sequenza casuale è una realizzazione di un processo stocastico a tempo discreto.

Un processo stocastico è una famiglia di sequenze in uno spazio di campioni  $\Omega$ .

$$\begin{aligned} X[n, s] \quad X : z \times \Omega &\rightarrow R \\ (n, s) &\rightarrow X[n, s] \end{aligned}$$

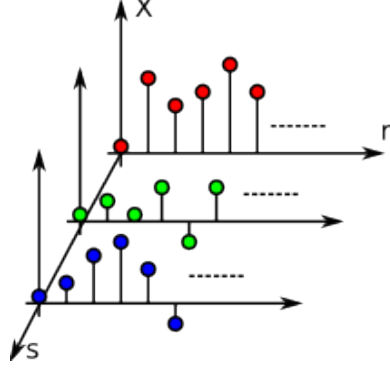


Figura 8: Processo stocastico

Se adesso fisso un tempo  $n$ , al variare di  $s$  osservo una serie di valori casuali, ovvero una variabile casuale  $X[n_0]$ , caratterizzata da una funzione di distribuzione  $F_{x_0}(\alpha)$  e da una pdf (*probability density function*)  $f_{x_0}(\alpha)$ .

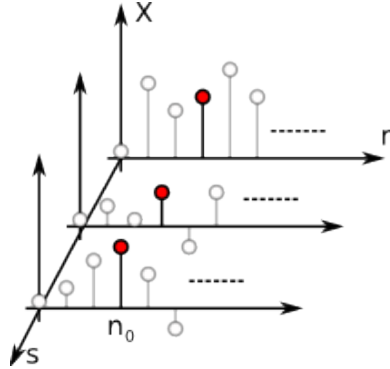


Figura 9: Variabile Casuale

$F_{X_0}(\alpha)$  rappresenta la probabilità (da 0 a 1) che la variabile casuale  $X_0$  assuma un valore minore o uguale ad  $\alpha$ .

$$F_{X_0}(\alpha) = p(X[n_0, s] \leq \alpha)$$

$f_{X_0}(\alpha)$  è la derivata rispetto ad  $\alpha$  della funzione di probabilità.

$$f_{X_0}(\alpha) = \frac{dF_{X_0}}{d\alpha}$$

Dallo schema 10 si capisce come la probabilità che una variabile casuale assuma un certo intervallo di valori è proprio data dall'integrale della sua  $f_{X_0}(\alpha)$  sull'intervallo stesso:

$$p(\alpha \leq X_0 \leq \alpha + d\alpha) = f_{X_0}(\alpha) \cdot d\alpha$$

Non basta però conoscere la pdf di una distribuzione in tutti i possibili valori di  $n_0$  per definirla completamente, poichè potrebbe esistere anche una dipendenza tra i valori assunti dalla distribuzione in istanti diversi. È necessario andare a studiare la funzione di distribuzione congiunta,

$$F_{X_0, X_1, \dots, X_{K-1}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{K-1}, n_0, \dots, n_{K-1}) =$$

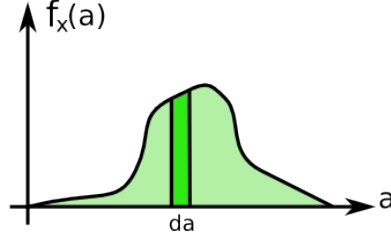


Figura 10: Probabilità che la variabile assuma un valore interno a  $da$

$$= p\left(X_0 \leq \alpha_0, \dots, X_{K-1} \leq \alpha_{K-1}\right)$$

o equivalentemente la pdf congiunta.

$$\begin{aligned} f_{X_0, X_1, \dots, X_{K-1}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{K-1}, n_0, \dots, n_{K-1}) &= \\ &= \frac{d^K F_{X_0, \dots, X_{K-1}}(\alpha_0, \dots, \alpha_{K-1}, n_0, \dots, n_{K-1})}{d\alpha_0, \dots, d\alpha_{K-1}} \end{aligned}$$

**Ipotesi di ergodicità:** supponendo che una distribuzione sia ergodica, è possibile affermare che l'insieme dei valori di una realizzazione si comporta come una variabile casuale  $X$  con la stessa pdf rispetto a una qualsiasi delle variabili casuali che possono essere estratte dalla distribuzione stessa fissando un determinato istante  $n$ .

**L'istogramma** è un'approssimante di  $f_X(x)$  ottenuto da una serie finita di realizzazioni del processo casuale. Per realizzare un istogramma, si parte dalla dinamica di  $x$  (supponiamo compresa tra A e B) e la si divide in un numero C di canali. Poi si comincia a estrarre realizzazioni del processo casuale e le si inserisce nel canale corrispondente sull'istogramma. Con un numero di realizzazioni  $\rightarrow \infty$ , l'istogramma andrà ad approssimare la funzione densità.

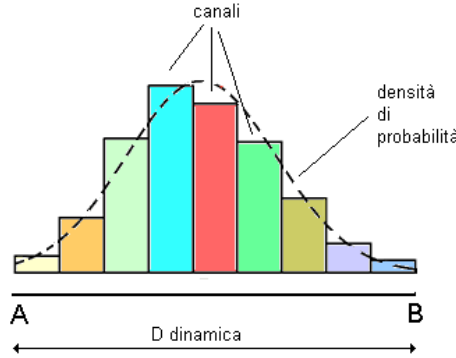


Figura 11: istogramma

Quindi, supponendo:

- N campioni
- C canali ( $l = 0 \dots C - 1$ )
- $\Delta = \frac{B-A}{C}$

La funzione istogramma varrà (l-esimo canale):

$$I_{x,N,C}[l] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta \left[ \text{int} \left( \frac{X[n] - (l-1)\Delta - B}{\Delta} \right) \right]$$

per N grande  $\gg$  C grande si ha che:

$$I_{x,N,C}[l] \cong p(\min(x) + (l-1)\Delta < X \leq \min(x) + l\Delta) \cong f_X \left( \min(x) + (l-1)\Delta + \frac{\Delta}{2} \right) \cdot \Delta$$

(per  $\Delta$  molto piccolo)

## 6 Generazione di sequenze pseudo casuali

### 6.1 Generazione di sequenze pseudo casuali con pdf uniforme

- sequenze periodiche di periodo  $N$  ( $N$  molto grande!).
- limitatamente a un periodo, hanno un andamento che appare casuale.

#### 6.1.1 Prima tecnica: radice primitiva di un numero primo

$$X[n+1] = (A \cdot X[n]) \bmod P \quad A, P \in N^* \quad (\text{naturali escluso lo } 0)$$

- $P$  é un numero primo (grande)
- $A$  é una radice primitiva di  $P$ , cioè  
 $\forall n \in N^* \quad n < P \quad \exists j \in N^* \quad : \quad n = A^j \bmod P$

Genera una sequenza periodica di periodo  $P$ ; ogni numero compreso in  $\{1, \dots, P-1\}$  compare una sola volta all'interno del periodo. In sintesi:

$$X[n] \in \{1, \dots, P\}$$

$$\nexists (i, j) \text{ tale che } X[i] = X[j] \quad i, j \in \{0, \dots, P-2\}$$

abbiamo bisogno di una condizione iniziale

$$X[0] \in \{1, \dots, P-1\}$$

Per ottenere, normalizzando rispetto a  $P$ :

$$Y[n] = \frac{X[n]}{P} \text{ sequenza numerica uniformemente distribuita su } \left[\frac{1}{P}, 1 + \frac{1}{P}\right] \cong [0, 1]$$

Esempio:

- $P = 2^{35} - 31$
- $A = 5^5$
- $X[0] = 12345$

#### 6.1.2 Seconda tecnica (ricorsiva)

$$X[n+1] = (X[n] + X[n-n_0]) \bmod 1$$

- $n_0 \in N^*$  dev'essere grande (ordine di  $P$ )
- necessità di  $n_0 + 1$  condizioni iniziali su  $[0, 1]$

Genera una sequenza periodica di periodo  $n_0$  di valori distribuiti in modo uniforme su  $[0, 1]$ .

Esempio:

$$\begin{aligned} n_0 &= 2 \\ X[0] &= 0.32 \\ X[-1] &= 0.19 \\ X[-2] &= 0.47 \\ &\Downarrow \\ X[1] &= (X[0] + X[-2]) \bmod 1 = (0.32 + 0.47) \bmod 1 = 0.79 \\ X[2] &= (X[1] + X[-1]) \bmod 1 = (0.79 + 0.19) \bmod 1 = 0.98 \\ &\vdots \end{aligned}$$

### 6.1.3 Terza tecnica: algoritmo di Blum Blum Shab

$$X[n+1] = X^2[n] \bmod M$$

$M$  è il prodotto di due numeri primi  $P$  e  $Q$  grandi, congruenti a  $3 \bmod 4$  e tali che  $MCD(\Phi(P-1), \Phi(Q-1))$  sia il più piccolo possibile.  $\Phi$  è la funzione di Eulero, ovvero il numero di numeri primi inferiori all'argomento dato.

Realizza una sequenza casuale distribuita uniformemente su  $[1, M-1]$ , che normalizzata per  $M$  diventa una distribuzione uniforme su  $[0, 1]$ .

## 6.2 Generazione di sequenze pseudo casuali con altre distribuzioni

Se abbiamo  $x[n]$  che assume valori casuali con pdf uniforme su  $[0, 1]$

$$\begin{aligned} f_X(\alpha) &= 1 \quad \text{su } [0, 1] \\ &= 0 \quad \text{altrove} \end{aligned}$$

come si fa a generare una sequenza  $Y[n]$  con  $f_Y(\beta)$  desiderata?



- Step 1:  $F_Y(\beta) = \int_{-\infty}^{\beta} f_Y(\beta') d\beta'$
- Step 2: affermo che  $g(\cdot) = F_Y^{-1}(\cdot)$

Dimostrazione:

suppongo  $g(\cdot)$  invertibile, con inversa  $g^{-1}(\cdot)$  (che NON é  $1/g!!!$ )

$$\begin{aligned} F_Y(\beta) &= p\{Y \leq \beta\} = \\ &= p\{g(X) \leq \beta\} = \\ &= p\{X \leq g^{-1}(\beta)\} = \\ &= F_X(g^{-1}(\beta)) = \\ &= g^{-1}(\beta) \text{ poiché } X \text{ ha pdf uniforme.} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(\cdot) = F_Y^{-1}(\cdot)$$

## 6.3 Relazione che lega le pdf delle ampiezze



$$f_Y(\beta) = \frac{f_X(\alpha)}{|g'(\alpha)|_{\alpha=g^{-1}(\beta)}} = \sum_{\alpha=g^{-1}(\beta)} \frac{f_X(\alpha)}{|g'(\alpha)|}$$

(somma per tutti i possibili valori di  $\alpha$ , potrebbe essercene anche uno solo)

**Esempio** : sia  $X[n]$  sequenza casuale con pdf uniforme su  $[0, 1]$ . Affermo che

$$Y[n] = \sqrt{2\sigma^2 \ln \frac{1}{X[n]}}$$

Poi calcolo  $g^{-1}(\cdot)$ :

$$\begin{aligned} Y^2[n] &= 2\sigma^2 \ln \frac{1}{X[n]} \\ \ln \frac{1}{X[n]} &= \frac{Y^2[n]}{2\sigma^2} \\ X[n] &= \exp\left(-\frac{Y^2[n]}{2\sigma^2}\right) \\ &\Downarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(\beta) &= \frac{\beta}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2\sigma^2}\right) && \text{per } \beta > 0 \\ &= 0 && \text{altrimenti} \end{aligned}$$

(che é una distribuzione di Raleigh)

Altro esempio: sempre partendo da  $X[n]$  con pdf uniforme su  $[0, 1]$  voglio ottenere:

$$\begin{aligned} f_Y(\beta) &= \frac{\beta}{2} && 0 \leq \beta \leq 2 \\ &= 0 && \text{altrimenti} \end{aligned}$$

calcolo:

$$\begin{aligned} F_X(\beta) &= \int_{-\infty}^{\beta} f_Y(\beta') d\beta' = \\ &= \int_0^{\beta} \frac{\beta'}{2} d\beta' = \frac{\beta^2}{4} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} F_Y(\beta) &= 0 && \beta < 0 \\ &= \frac{\beta^2}{4} && 0 \leq \beta \leq 2 \\ &= 1 && \beta > 2 \end{aligned}$$

Di conseguenza, sapendo che  $g(\cdot) = F_Y^{-1}(\cdot)$ ,

$$X = \frac{Y^2}{4} \Rightarrow Y = 2\sqrt{\cdot}$$

Quindi

$$g(\cdot) = 2\sqrt{\cdot}$$

## 6.4 Generazione di sequenze pseudo casuali pseudo gaussiane

Si genera una sequenza  $X[n]$  uniforme su  $[0, 1]$ , e si calcola:

$$Y[n] = \sqrt{2\sigma^2 \ln \frac{1}{X[n]}} \quad (\text{pdf di Raleigh})$$

Si generano le due sequenze  $Z[n]$  e  $W[n]$

$$\begin{aligned} Z[n] &= Y[n] \cdot \cos(2\pi X[n+1]) \\ W[n] &= Y[n] \cdot \sin(2\pi X[n+1]) \end{aligned}$$

che risultano essere gaussiane marginalmente e in modo congiunto, a media nulla e varianza  $\sigma^2$ . La densità di probabilità congiunta vale:

$$f_{ZW}(z, w) = \sum_i \frac{f_{XY}(x_i, y_i)}{|J(x_i, y_i)|}$$



dove  $(x_i, y_i)$  sono soluzioni di

$$\begin{aligned} Z &= g(x, y) \\ W &= h(x, y) \end{aligned}$$

Altro metodo: posso generare una sequenza  $X[n]$  con pdf gaussiana sfruttando il teorema del limite centrale, il quale afferma che prendendo  $n$  variabili casuali (indipendenti) con pdf qualsiasi e costruendone la variabile casuale somma, per  $n \rightarrow \infty$  la somma stessa tende ad assumere un andamento gaussiano.

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + \dots + X_n \\ \eta &= \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n \\ \sigma^2 &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X = G\left(\frac{x - \eta}{\sigma}\right) \text{ (gaussiana con media } \eta \text{ e varianza } \sigma)$$

## 7 Convoluzione di segnali

### 7.1 Convoluzione lineare

Per segnali a energia finita.

$$Z[n] = X[n] * Y[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X[m] \cdot Y[n - m]$$

Passi per l'esecuzione:

- cambio gli indici  $n \rightarrow m$
- prendo  $X[m]$  e lo tengo fisso
- prendo  $Y[m]$  e lo ribalto, ottenendo  $Y[-m]$
- traslo  $Y[-m]$  di  $n$  punti ( $n > 0$  implica spostamento verso destra)
- svolgo il prodotto delle due sequenze
- faccio la somma dei campioni della sequenza ottenuta. Questo é il valore di  $Z[n]$

### 7.2 Proprietá

- Commutativa:

$$X[n] * Y[n] = Y[n] * X[n]$$

Dimostrazione:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]Y[n-m] \stackrel{n-m=m'}{=} \sum_{m'=+\infty}^{-\infty} Y[m']X[n-m'] = Y[n] * X[n]$$

- Distributiva rispetto alla somma:

$$X[n] * (Y[n] + Z[n]) = X[n] * Y[n] + X[n] * Z[n]$$

Dimostrazione:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m](Y[n-m] + Z[n-m]) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]Y[n-m] + \sum_{m=-\infty}^{\infty} X[m]Z[n-m]$$

- Associativa:

$$X[n] * Y[n] * Z[n] = (X[n] * Y[n]) * Z[n]$$

- Altre:

- se  $X[n]$  é causale ma  $Y[n]$  no:

$$X[n] * Y[n] = \sum_{m=0}^{\infty} X[m]Y[n-m] = \sum_{m=-\infty}^0 Y[m]X[n-m]$$

- se entrambi sono causali:

$$X[n] * Y[n] = \sum_{m=0}^n X[m]Y[n-m] = \sum_{m=0}^n Y[m]X[n-m]$$

- se  $X[n]$  é a durata limitata, con supporto  $S = \{n_0, \dots, n_0 + N - 1\}$

$$X[n] * Y[n] = \sum_{m=n_0}^{n_0+N-1} X[m]Y[n-m]$$

### 7.3 Supporto del risultato di convoluzione

Se  $X[n]$  ha supporto  $\{n_{0X}, n_{0X} + 1, \dots, n_{0X} + N_X - 1\}$

e  $Y[n]$  ha supporto  $\{n_{0Y}, n_{0Y} + 1, \dots, n_{0Y} + N_Y - 1\}$

allora  $Z[n] = X[n] * Y[n]$  ha supporto al più

$$\{n_{0X} + n_{0Y}, \dots, n_{0X} + N_X - 1 + n_{0Y} + N_Y - 1\}$$

Quindi durata =  $N_X + N_Y - 1$

### 7.4 Convoluzione di sequenze complesse

$$X[n] = X_R[n] + j \cdot X_I[n]$$

$$Y[n] = Y_R[n] + j \cdot Y_I[n]$$

$$X[n] * Y[n] = (X_R[n] + jX_I[n]) \cdot (Y_R[n] + jY_I[n]) =$$

$$= X_R[n] * Y_R[n] - X_I[n] * Y_I[n] + j(X_I[n] * Y_R[n] + X_R[n] * Y_I[n])$$

### 7.5 Convoluzione normalizzata

$X[n]$ ,  $Y[n]$  sequenze a potenza media finita non nulla.

$$X[n] \bar{*} Y[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{m=-N}^N X[n]Y[n-m]$$

### 7.6 Convoluzione circolare

$X[n]$ ,  $Y[n]$  periodiche di periodo  $M_X$  e  $M_Y$

$$X[n] \otimes_M Y[n] = \frac{1}{M} \sum_{m=n_0}^{n_0+M-1} X[m]Y[n-m] \quad \forall n_0 \in \mathbb{Z}$$

con  $M = m.c.m.(M_X, M_Y)$

Interpretazione grafica:

- disegnare il cerchio
- dividere in M punti ( $M = m.c.m.(M_X, M_Y)$ )
- disegnare  $X[m]$

- disegnare  $Y[m]$
- ribaltare  $Y[m]$  attorno a un campione qualsiasi
- spostare  $Y[m]$  di un numero di scatti pari a  $n$
- eseguire il prodotto
- sommare i campioni
- eventualmente normalizzare a  $\frac{1}{N}$
- si è ottenuto il valore di  $(X \bar{\otimes} Y)[n]$

## 7.7 Complessità del calcolo diretto della convoluzione

Supponiamo di avere  $X[n]$  e  $Y[n]$ , di durata rispettivamente  $N_X$  e  $N_Y$ , con  $N_Y < N_X$ .

- Convoluzione lineare

$$\begin{aligned}
 \text{Num. prodotti } P &= 1 + 2 + \dots + (N_Y - 1) && \text{ingresso segnale} \\
 &+ (N_Y - 1) + (N_Y - 1) + \dots && N_X - N_Y + 1 \text{ volte} \\
 &+ (N_Y - 1) + \dots + 2 + 1 && \text{uscita segnale} \\
 \\ 
 &= N_Y(N_X - N_Y + 1) + N_Y(N_Y - 1) \\
 &= N_X \cdot N_Y
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Num. somme } S &= 0 + 1 + 2 + \dots + (N_Y - 2) && \text{ingresso segnale} \\
 &+ N_Y + N_Y + \dots && (N_X - N_Y - 1) \text{ volte} \\
 &+ (N_Y - 2) + \dots + 2 + 1 + 0 && \text{uscita segnale} \\
 \\ 
 &= (N_Y - 1)(N_Y - N_X - 1) + (N_Y - 1)(N_Y - 2) \\
 &= (N_X - 1)(N_Y - 1)
 \end{aligned}$$

- Convoluzione circolare

$$\begin{aligned}
 P &= M^2 \\
 S &= M(M - 1)
 \end{aligned}$$

M: numero traslazioni, M-1: addizioni per periodo

## 8 CrossCorrelazione di sequenze

Date le sequenze  $X[n]$  e  $Y[n]$ , la crosscorrelazione è un indice di somiglianza tra  $X[n]$  e  $Y_m[n]$ , dove con  $Y_m[n]$  si indica la versione di  $Y[n]$  traslata di  $m$  campioni.

$$\varphi_{XY}[m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} X^*[n] \cdot Y[m+n]$$

che è il prodotto scalare tra segnali  $\langle X, Y_m^* \rangle$

Operativamente, la crosscorrelazione si svolge come la convoluzione, solo che non c'è alcun ribaltamento di  $Y[n]$ . Inoltre:

$$\varphi_{XY}[m] = X^*[-m] * Y[m]$$

La crosscorrelazione NON è commutativa, NON è associativa e NON è causale per sequenze causali.

## 8.1 Differenze tra convoluzione e crosscorrelazione

Convoluzione lineare	Crosscorrelazione
$X[n], Y[n]$ causali $\Rightarrow Z[n]$ causale	$X[n], Y[n]$ causali $\Rightarrow Z[n]$ NON causale
$X[n]$ durata $N_X$ , $Y[n]$ durata $N_Y$ , $Z[n]$ durata $N_X + N_Y - 1$	uguale
$P = N_X \cdot N_Y$	uguale
Supporto $\{n_{0X} + n_{0Y}, \dots, n_{0X} + N_X - 1 + n_{0Y} + N_Y - 1\}$	Supporto $\{n_{0Y} - n_{0X} - N_X - 1, \dots, n_{0Y} + N_Y - 1 - n_{0X}\}$

## 8.2 Crosscorrelazione normalizzata

$X[n], Y[n]$  a potenza media finita non nulla.

$$\bar{\varphi}_{XY}[m] = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N X^*[n]Y[n+m] = X^*[-m] \bar{*} Y[m]$$

$$P = N_X + N_Y$$

## 8.3 Crosscorrelazione circolare

$X[n], Y[n]$  periodiche di periodo  $M_X, M_Y$

$$\overset{o}{\varphi}_{XY}[m] = \frac{1}{M} \sum_{m=n_0}^{n_0+M-1} X^*[n]Y[n+m] = X^*[m] \otimes_M Y[m]$$

con  $M = m.c.m.(M_X, M_Y)$

$$P = M^2$$

## 8.4 Crosscorrelazione di sequenze complesse

$$X[n] = X_R[n] + j \cdot X_I[n]$$

$$Y[n] = Y_R[n] + j \cdot Y_I[n]$$

$$\begin{aligned} \varphi_{XY}[m] &= (X_R + jX_I)^*[-m] * (Y_R + jY_I)[m] \\ &= \varphi_{X_R Y_R}[m] - \varphi_{X_I Y_I}[m] + j(\varphi_{X_R Y_I}[m] + \varphi_{X_I Y_R}[m]) \end{aligned}$$

## 8.5 Autocorrelazione

Se  $Y[n] = X[n]$  si parla di autocorrelazione:

$$\varphi_X[m] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X^*[n]Y[n+m]$$

in particolare:

$$\varphi_X[0] = \|X\|^2 = W_X$$

## 8.6 Crosscorrelazione e distanza

$$d^2(X, Y) = \|X - Y\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |X[n] - Y[n]|^2$$

$$d^2(X, Y_m) = \|X\|^2 + \|Y\|^2 - 2\Re\{\varphi_{XY}[m]\}$$

NB: distanza massima  $\Rightarrow$  correlazione minima

## 8.7 Hermitianità

$$\varphi_{XY}[m] = \varphi_{YX}^*[-m]$$

(deriva dall'hermitianità del prodotto scalare)

Per quanto riguarda l'autocorrelazione:

$$\varphi_X[m] = \varphi_X[-m]$$

inoltre, se  $X[m]$  è reale,  $\varphi_X[m] = \varphi_X[-m]$  e l'autocorrelazione è pari.

## 8.8 Disuguaglianza di Schwartz

$$|\varphi_{XY}[m]| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

Se  $X[m] = Y[m]$ :

$$|\varphi_{XY}[m]| \leq \|X\|^2 = P_X \text{ oppure } W_X$$

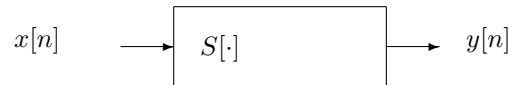
Inoltre:

$$\begin{aligned} |\varphi_{XY}[0]|^2 &\leq \varphi_X[0] \cdot \varphi_Y[0] \\ &\quad \downarrow \downarrow \\ \|X\|^2 \|Y\|^2 \end{aligned}$$

NB: per segnali di energia il massimo di  $\varphi_X[m]$  è in 0, dove vale  $\varphi_X[0] = \|X\|^2 = W_X$

NB2: per segnali periodici di periodo  $M_X$ ,  $\varphi_X$  è periodica con massimi in  $k \cdot M_X$  dove vale  $\|X\|^2 = P_X$

## 9 Elaborazione di sequenze numeriche



$S[\cdot]$  è detto *Sistema a tempo discreto*:  $y[n] = S[x[n]]$

### 9.1 Classificazione dei sistemi

#### 9.1.1 Linearità del sistema

$S[\cdot]$  è detto lineare se e solo se:

1.  $\forall x_1[n], x_2[n]$  sequenze:

$$S[x_1[n] + x_2[n]] = S[x_1[n]] + S[x_2[n]] \quad \text{Principio di sovrapposizione}$$

2.  $\forall \alpha \in C$

$$S[\alpha \cdot x_1[n]] = \alpha \cdot S[x_1[n]] \quad \text{Condizione di Omogeneità}$$

$\Rightarrow \forall \alpha_1, \alpha_2 \in C, x_1[n], x_2[n]$  sequenze qualsiasi, si ha che:

$$S[\alpha_1 \cdot x_1[n] + \alpha_2 \cdot x_2[n]] = \alpha_1 \cdot S[x_1[n]] + \alpha_2 \cdot S[x_2[n]]$$

#### 9.1.2 Causalità del sistema

$S[\cdot]$  è causale se  $y[n]$  dipende solamente dei valori dell'ingresso  $x[n]$  in istanti precedenti o al più il presente ( $\forall x[n]$ ).

$S[\cdot]$  è anticausale se  $y[n]$  dipende solamente da valori dell'ingresso nel futuro (anche il presente è escluso).

In tutti gli altri casi il sistema è non causale.

### 9.1.3 Memoria del sistema

$S[\cdot]$  é detto senza memoria se  $y[n]$  dipende dell'ingresso solo nell'istante  $n$ .

$S[\cdot]$  é detto con memoria se  $y[n]$  dipende dell'ingresso in istanti anche diversi dall'istante corrente.

Nota: con memoria  $\Rightarrow$  o anticausale, o causale, o non causale  
senza memoria  $\Rightarrow$  causale

### 9.1.4 Invarianza alla traslazione

$S[\cdot]$  é invariante alla traslazione se  $\forall x[n]$  sequenza in ingresso,  $n_0 \in Z$

$$y[n] \triangleq S[x[n]]$$

allora:

$$S[x[n - n_0]] = y[n - n_0]$$

### 9.1.5 Stabilità del sistema

$S[\cdot]$  é stabile se  $\forall$  sequenza  $x[n]$  tale che

$$|x[n]| < \infty \quad \forall n$$

allora

$$|S[x[n]]| < \infty$$

## 9.2 Sistemi Lineari Tempo-invarianti (LTI)

Sono i sistemi lineari e invarianti alla traslazione.

$$x[n] = x[n] * \delta[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot \delta[n - m]$$

per linearità  $\Downarrow$

$$S[x[n]] = S\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot \delta[n - m]\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot S[\delta[n - m]]$$

per tempo-invarianza  $\Downarrow$

$$\text{se } h[n] \triangleq S[\delta[n]] \quad \Rightarrow \quad S[\delta[n - m]] = h[n - m]$$

$$\text{quindi } S[x[n]] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot h[n - m] = x[n] * h[n]$$

Si ha una quindi:



dove  $h[n] = S[\delta[n]]$

Ci sono 2 situazioni possibili:

1. FIR (finite impulse response):

$h[n]$  ha durata finita  $N_h$ :  $h[n] = 0$  se  $n \notin \{n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + N_h - 1\}$

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{m=n_0}^{n_0+N_h-1} x[n-m] \cdot h[m] \\ &= x[n-n_0]h[n_0] + x[n-n_0+1]h[n_0+1] + \dots + x[n-n_0+N_h-1]h[n_0+N_h-1] \end{aligned}$$

$n_0 \geq 0 \Rightarrow$  causale  
 $n_0 < 0$  e  $n_0 + N_h - 1 \geq 0 \Rightarrow$  non causale  
 $n_0 + N_h - 1 < 0 \Rightarrow$  anticausale

## 2. IIR (infinite impulse response):

$h[n]$  ha durata infinita

- se  $h[n]$  right-sided:

$$y[n] = \sum_{m=n_0}^{\infty} x[n-m]h[m] = \sum_{m=-\infty}^{n_0} x[m]h[n-m]$$

causale se  $n_0 \geq 0$ , altrimenti non causale

- se  $h[n]$  left-sided:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n_0} x[n-m]h[m] = \sum_{m=n_0}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

anticausale se  $n < 0$ , altrimenti non causale

- se  $h[n]$  two-sided:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[n-m]h[m]$$

non causale

### 9.2.1 Causalità dei sistemi LTI

Un sistema LTI é causale se e solo se  $h[n]$  é una sequenza causale ( $h[n] = 0 \quad \forall \quad n < 0$ ). Infatti:

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] = \sum_{m=0}^{\infty} h[m]x[n-m]$$

### 9.2.2 Stabilità dei sistemi LTI

Un sistema LTI é stabile se e solo se  $h[n]$  é assolutamente sommabile:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} |h[m]| < \infty$$

É una condizione sufficiente, in quanto si può dimostrare che se  $|x[n]| < \infty \quad \forall n$  allora  $y[n]$ , che é pari alla sommatoria di convoluzione tra  $x[n]$  e  $h[n]$ , é  $< \infty \quad \forall n$  (se é rispettata la condizione del teorema sopra). Inoltre é anche una condizione necessaria, in quanto se non é rispettata l'ipotesi é sempre possibile trovare un  $x[n]$  che, pur non divergendo, faccia divergere  $y[n]$ .

### 9.2.3 Esempi

#### 1. Ritardatore puro

$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n - n_0] \\
 h[n] &= \delta[n - n_0]
 \end{aligned}$$

Se  $n_0 \geq 0$  il sistema è causale, se  $n_0 < 0$  il sistema è anticausale (anticipatore).

Il suo inverso è il sistema:  $h_I[n] = \delta[n + n_0]$ .

É un sistema FIR (quindi stabile).

#### 2. Mediatore su $N$ campioni

$$\begin{aligned}
 y_M[n] &= \frac{1}{N} \sum_{m=n_1}^{n_1+N-1} x[n-m] \\
 h_M[n] &= \frac{1}{N} \text{rect}_N[n - n_1]
 \end{aligned}$$

É un sistema FIR (quindi stabile), causale (se  $n_1 \geq 0$ ).

### 3. Accumulatore

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^n x[m] = \sum_{m=n}^{\infty} x[n-m]$$

$$h[n] = \varepsilon[n]$$

É un sistema IIR causale instabile.

### 4. Differenziatore numerico

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

É un sistema FIR, stabile, causale.

### 5. $h[n] = a^n \cdot \varepsilon[n]$ con $|a| < 1$

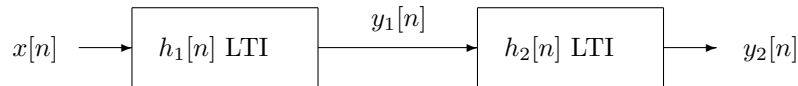
sistema LTI IIR right-sided causale stabile

stabile poiché  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a^n = \text{serie geometrica} = \frac{1}{1-a}$

Un sistema FIR non causale o anticausale può essere sempre reso causale con la messa in cascata di un opportuno ritardo.

## 9.2.4 Cascata di sistemi LTI

(per sistemi a tempo discreto)



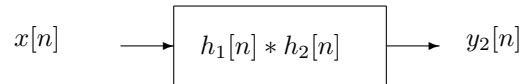
$$y_1[n] = x[n] * h_1[n]$$

$$y_2[n] = y_1[n] * h_2[n] = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] =$$

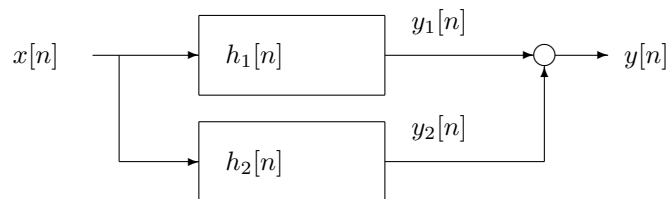
$$\Downarrow \text{ per associativit  } a$$

$$= (h_1[n] * h_2[n]) * x[n]$$

Il che   equivalente a dire:



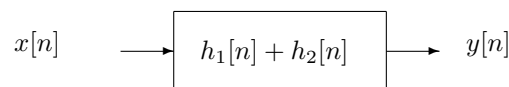
## 9.2.5 Parallelo di sistemi LTI



$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = (x[n] * h_1[n]) + (x[n] * h_2[n]) =$$

$$= x[n] * (h_1[n] + h_2[n])$$

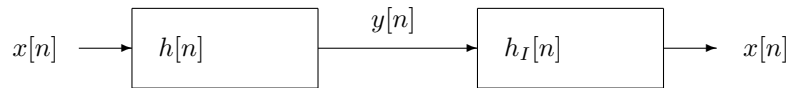
Il che   equivalente a dire:





### 9.2.6 Inverso di un sistema LTI

Un sistema LTI con risposta all'impulso  $h[n]$  ammette un sistema LTI inverso con risposta all'impulso  $h_I[n]$  se é possibile trovare un  $h_I[n]$  tale che  $h[n] * h_I[n] = \delta[n]$



$$\begin{aligned} (h[n] * h_I[n]) * x[n] &= x[n] \\ \Leftrightarrow h[n] * h_I[n] &= \delta[n] \end{aligned}$$

**Esempio** Accumulatore

$$h[n] = \varepsilon[n]$$

il suo inverso é il derivatore

$$h_I[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

Dimostrazione:

$$h[n] * h_I[n] = \varepsilon[n] * (\delta[n] - \delta[n-1]) = \varepsilon[n] - \varepsilon[n-1] = \delta[n]$$

### 9.3 Equazioni alle differenze

Equazioni ricorsive tra ingresso e uscita nel tempo.

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l \cdot x[n-l]$$

Alcuni sistemi LTI possono essere descritti equivalentemente (alla convoluzione) mediante equazioni alle differenze con condizioni iniziali al riposo.

1. é sempre vero per i FIR

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{l=0}^M h[l] \cdot x[n-l] \\ &= \sum_{l=0}^M \frac{b_l}{a_0} \cdot x[n-l] \end{aligned}$$

(in questo esempio non é stata introdotta la ricorsione rispetto all'uscita negli istanti precedenti)

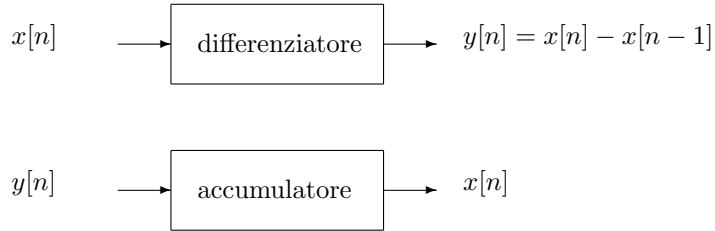
Nota: un'espressione equivalente puó essere ottenuta utilizzando valori dell'uscita in istanti precedenti:

*Esempio:* mediatore su N campioni (causale)

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x[n-m] && \text{senza ricorsione rispetto alle uscite} \\ &= \frac{N \cdot y[n-1] + x[n] - x[n-N]}{N} && \text{con ricorsione} \end{aligned}$$

2. é vero per alcuni IIR

*Esempio:*



$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[n] * \varepsilon[n] \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] && \text{senza ricorsione} \\
 &= y[n-1] + x[n] && \text{con ricorsione}
 \end{aligned}$$

## 9.4 Soluzioni di equazioni lineari alle differenze

Equazione alle differenze:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y[n-k] = \sum_{l=0}^M b_l \cdot x[n-l]$$

nel caso causale:

$$\begin{aligned}
 y[n] &= \sum_{k=1}^N \left( -\frac{a_k}{a_0} \right) y[n-k] + \sum_{l=0}^M \left( \frac{b_l}{a_0} \right) x[n-l] \\
 &= \sum_{k=1}^N a'_k \cdot y[n-k] + \sum_{l=0}^M b'_l \cdot x[n-l] && a'_k = -\frac{a_k}{a_0} \quad b'_l = \frac{b_l}{a_0}
 \end{aligned}$$

1. Risoluzioni in modo ricorsivo con N condizioni iniziali per  $y[-1], y[-2], \dots, y[-N]$  per il calcolo di  $n = 0, 1, \dots, \infty$
2. Risoluzione in modo analitico

$$y[n] = y_p[n] + y_o[n]$$

- $y_p[n]$ : soluzione omogenea, ovvero la soluzione dell'equazione senza ingressi

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y[n-k] = 0$$

sapendo che, in generale:

$$y_o[n] = \sum_{m=0}^N \alpha_m z_m^n$$

unendo le due equazioni precedenti si trova un polinomio di grado N con incognite  $z_m$ , la cui soluzione dá proprio i valori di  $z_m$ .

- $y_o[n]$ : soluzione particolare, ovvero una particolare soluzione con eccitazione.

Nota: una soluzione alle differenze non determina necessariamente un sistema LTI. Lo é solo se le condizioni iniziali dell'uscita sono a riposo:

$$y[-1] = y[-2] = \dots = y[-N] = 0$$

### 9.4.1 Esempio: una specie di accumulatore

Equazione lineare alle differenze:

$$\begin{aligned}y[n] &= a \cdot y[n-1] + x[n] \\x[n] &= k \cdot \delta[n] \quad y[-1] = C \\y[0] &= aC + k \\y[1] &= a(aC + k) = a^2C + ak \\y[2] &= a(a^2C + ak) = a^3C + a^2k \\&\vdots \\y[n] &= a^{n+1}C + a^n k \quad n \geq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y[n-1] &= \frac{1}{a}y[n] - \frac{1}{a}x[n] \\y[n-2] &= a^{-1}(y[-1] - x[-1]) = a^{-1}C \\&\vdots \\y[n] &= a^{n+1}C \quad n \leq -1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}x_1[n] &= k\delta[n] \\y_1[n] &= a^{n+1}C + a^n \epsilon[n] \quad \forall n\end{aligned}$$

Se impongo  $x_o[n] = 0 \cdot x_1[n]$

$$y[n] = a^{n+1}C \neq 0 \cdot y_1[n]$$

Non vale l'omogeneità, quindi NON é un sistema lineare.

## 9.5 LTI in frequenza

Suppongo di mettere in ingresso a un sistema LTI un'eccitazione puramente immaginaria:

$$x[n] = \exp(j2\pi f_0 n)$$

poiché sappiamo che

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m] \cdot x[n-m]$$

allora:

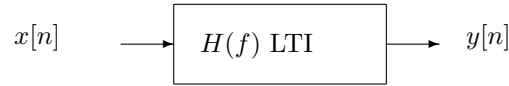
$$\begin{aligned}y[n] &= \sum_{m=0}^{\infty} h[m] \cdot \underbrace{\exp(j2\pi f_0(n-m))}_{\substack{\exp(j2\pi f_0 n) \cdot \exp(-j2\pi f_0 m) \\ x[n]}} = \\&= x[n] \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} h[m] \cdot \exp(-j2\pi f_0 m)}_{\triangleq H(f_0)}\end{aligned}$$

$H(f_0)$  é la *risposta in frequenza dei sistema*. Un segnale immaginario puro é autofunzione di un sistema LTI (ovvero, se lo metto in ingresso a un sistema LTI, avroó in uscita l'ingresso stesso moltiplicato per una costante, che in questo caso dipende da  $f_0$ ).

$$H(f) = \underbrace{|H(f)|}_{\text{risposta in ampiezza}} \cdot \underbrace{\exp(j \cdot \arg(H(f)))}_{\text{risposta di fase}}$$

Quindi, succede che:

$$x[n] = A \cdot \cos(2\pi f_0 n + \varphi)$$



$$y[n] = A |H(f_0)| \cdot \cos(2\pi f_0 n + \varphi + \arg(H(f_0)))$$

Si ha un comportamento da filtro: i sistemi LTI sono in grado di filtrare/amplificare frequenze, ma ad esempio non ne possono introdurre di nuove.

Esempio: ritardatore puro

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot \exp(-j2\pi f n) = \exp(-j2\pi f n_0)$$

$$|H(f)| = 1$$

$$\arg(H(f)) = -2\pi f n_0 \cdot \text{mod}(2\pi)$$

Inoltre, si verifica anche che:

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot \exp(-j2\pi f n)$$

$$H(f+1) = \sum_n h[n] \cdot \underbrace{\exp(-j2\pi(f+1)n)}_{\substack{\exp(-j2\pi f n) \cdot \underbrace{\exp(-j2\pi n)}_{=1}}} = H(f)$$

di conseguenza, la risposta in frequenza di un sistema *numerico* é periodica di periodo 1.

Quindi i filtri (LTI) numerici vengono catalogati in base alle caratteristiche di  $H(s)$  nell'intervallo di riferimento  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

Esempio: passa basso ideale

$$|H(f)| = \text{rect}\left(\frac{f}{2f_t}\right) \quad \text{con } f_t < \frac{1}{2}$$

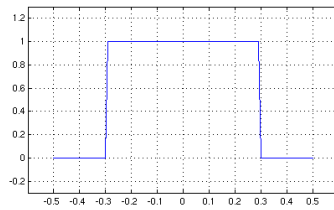


Figura 12:  $|H(f)|$  di un filtro passabasso con  $f_t = 0.3$

Esempio: passa alto ideale

$$|H(f)| = 1 - \text{rect}\left(\frac{f}{2f_t}\right) \quad \text{con } f_t < \frac{1}{2}$$

Esempio: mediatore

$$h[n] = \text{rect}_N\left[n + \frac{N}{2}\right]$$

supponendo  $N$  pari:

$$\begin{aligned}
 H(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] \cdot \exp(-j2\pi f n) = \\
 &= \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} \exp(-j2\pi f n) = \\
 &= \exp\left(-j2\pi f\left(-\frac{N}{2}\right)\right) + \exp\left(-j2\pi f\left(-\frac{N}{2}+1\right)\right) + \cdots + \exp\left(-j2\pi f\left(\frac{N}{2}-1\right)\right) = \\
 &= \exp(j\pi f N) \left[1 + \exp(-j2\pi f) + \cdots + \exp(-j2\pi f(N-1))\right] = \text{serie geometrica} \\
 &= \exp(j\pi f N) \cdot \frac{1 - [\exp(-j2\pi f)]^{N-1+1}}{1 - \exp(-j2\pi f)} = \\
 &= \frac{\exp(j\pi f N) - \exp(-j\pi f N)}{2j} \cdot \frac{2j}{\exp(j\pi f) - \exp(-j\pi f)} \cdot \frac{1}{\exp(-j\pi f)} = \\
 H(f) &= \frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)} \cdot \exp(j\pi f)
 \end{aligned}$$

$|H(f)|$  si annulla in ogni multiplo di  $\frac{1}{N}$

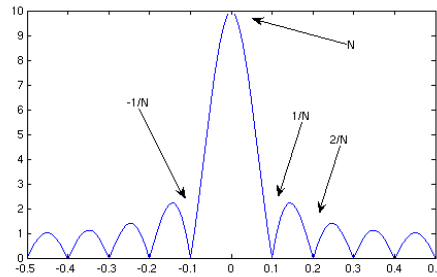


Figura 13:  $|H(f)|$  di un mediatore con  $N = 10$

$$\arg(H(f)) = \pi f + \pi \cdot \text{sgn}\left(\frac{\sin(\pi f N)}{\sin(\pi f)}\right)$$

## 10 DTFT Discrete Time Fourier Transform

$$x[n] \longleftrightarrow X(f) = \sum_{n=-N}^N x[n] \cdot \exp(-j2\pi f n)$$

$X(f)$  é una funzione *continua*  $\in \mathbb{R}$

La convoluzione lineare nel dominio dei tempi diventa un prodotto nel dominio delle frequenze. Ad esempio, nello studio di sistemi LTI:

$$\begin{aligned}
 x[n] &\longrightarrow y[n] = x[n] * h[n] \\
 X(f) &\longrightarrow Y(f) = X(f) \cdot H(f) \\
 &\downarrow \\
 Y(f) &\longrightarrow |X(f)| \cdot |H(f)| \cdot \exp(\arg X(f) + \arg H(f)) \\
 &\downarrow \\
 |Y(f)| &= |X(f)| \cdot |H(f)| && \text{risposta in ampiezza} \\
 &\downarrow \\
 \arg(Y(f)) &= \arg X(f) + \arg H(f) && \text{risposta di fase}
 \end{aligned}$$

## 10.1 Esistenza della DTFT

Condizione *sufficiente* per l'esistenza é l'assoluta sommabilità di  $x[n]$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

Poiché:

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \exp(-j2\pi f n) \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot |\exp(-j2\pi f n)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|$$

In tal caso  $X(f)$  esiste al senso della funzione.

Puó anche succedere che  $x[n]$  sia a energia finita ma non assolutamente sommabile.

$$W_x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |x[n]|^2 < \infty \quad \text{ma } \alpha \rightarrow \infty$$

Per esempio:

$$\begin{aligned} x[n] &= A \cdot \text{sinc}(2f_t n) \\ \updownarrow \\ X(f) &= \frac{A}{2f} \text{rect}\left(\frac{f}{2f_T}\right) \quad |f| < \frac{1}{2}, 0 < f_T < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Altro caso:  $x[n]$  a potenza media finita non nulla (quindi energia infinita). In tal caso  $X(f)$  può esistere ma in generale solo al senso delle distribuzioni.

Per esempio:

$$\begin{aligned} x[n] &= \cos(2\pi f_0 n) \\ \updownarrow \\ X(f) &= \frac{1}{2} [\delta_1(f + f_0) + \delta_2(f - f_0)] \end{aligned}$$

## 10.2 Convergenza della DTFT

Se definisco una DTFT svolta solo su una parte del segnale nei tempi ( $2M+1$  campioni):

$$\begin{aligned} X_M(f) &= \sum_{m=-M}^M x[m] \cdot \exp(-j2\pi f m) \\ &= \text{DTFT}(x[m] \cdot \text{rect}_{2M+1}[m + M]) \end{aligned}$$

In tal caso la DTFT converge in generale (per  $X(f)$  funzioni) solamente in *media quadratica*.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_u^{u+1} |X(f) - X_M(f)|^2 df = 0$$

Di conseguenza si presentano i *fenomeni di gibbs* quando si finestrano (con  $M < \infty$ ) sequenze che hanno discontinuità di prima specie in  $X(f)$ .

Esempio:

$$\begin{aligned} x[n] &= 2f_t \cdot \text{sinc}(2f_t n) \\ X_M(f) &= \text{DTFT}(2f_t \cdot \text{sinc}(2f_t n) \cdot \text{rect}_{2M+1}[n + M]) \\ &= \text{DTFT}(2f_t \cdot \text{sinc}(2f_t n)) \otimes_1 \text{DTFT}(\text{rect}_{2M+1}[n + M]) \\ &= \text{rect}\left(\frac{f}{2f_t}\right) \otimes_1 \frac{\sin(\pi f(2M+1))}{\sin(\pi f)} \\ &= \int_{-f_t}^{f_t} \frac{\sin(\pi f(2M+1))}{\sin(\pi f)} df \end{aligned}$$

La convergenza non uniforme porta (nel caso di discontinuità, come nel finestramento con un rect) a delle oscillazioni, per quanto grande sia  $M$ .

### 10.3 Proprietà della DTFT

1. Periodica di periodo 1

2. Linearità

$$\forall x_1[n], x_2[n], \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$$

$$\alpha_1 \cdot x_1[n] + \alpha_2 \cdot x_2[n] \longleftrightarrow \alpha_1 \cdot X_1(f) + \alpha_2 \cdot X_2(f)$$

3. Hermitianità

$$x^*[n] \longleftrightarrow X^*(f)$$

Quindi un segnale reale nei tempi ha trasformata con parte reale pari e parte immaginaria dispari.

4. Traslazione/modulazione

$$x[n] \longleftrightarrow X(f)$$

$$x[n - n_0] \longleftrightarrow X(f) \cdot \exp(-j2\pi f n_0) \quad \text{Traslazione nei tempi}$$

$$x[n] \cdot \exp(j2\pi f_0 n) \longleftrightarrow X(f - f_0) \quad \text{Modulazione nei tempi}$$

5. Moltiplicazione/convoluzione

- Moltiplicazione

$$x_1[n] \cdot x_2[n] \longleftrightarrow X_1(f) \otimes_1 X_2(f) \quad \text{Moltiplicazione}$$

$$\int_u^{u+1} X_1(f') \cdot X_2(f - f') df'$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} x[n] &= \text{DTFT}^{-1}(X_1(f) \otimes_1 X_2(f)) = \\ &= \int_u^{u+1} \left[ \int_v^{v+1} X_1(f') \cdot X_2(f - f') df' \right] \cdot \exp(j2\pi f n) df = \\ &= \int_{f'=v}^{v+1} X_1(f') \cdot \underbrace{\left[ \int_{f=u}^{u+1} X_2(f - f') \cdot \exp(j2\pi f n) df \right]}_{x_2[n] \cdot \exp(-j2\pi f' n)} df' = \\ &= x_2[n] \cdot \int_{f'=v}^{v+1} X_1(f') \cdot \exp(-j2\pi f' n) df' \\ &= x_1[n] \cdot x_2[n] \end{aligned}$$

- Convoluzione lineare

$$x_1[n] * x_2[n] \longleftrightarrow X_1(f) \cdot X_2(f) \quad \text{Convoluzione lineare}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1[m] x_2[n - m] \right) \cdot \exp(-j2\pi f n) \right) &= \\ \sum_m x_1[m] \underbrace{\left( \sum_n x_2[n - m] \cdot \exp(-j2\pi f n) \right)}_{X_2(f) \cdot \exp(-j2\pi f m)} &= \\ X_2(f) \cdot \underbrace{\sum_m x_1[m] \cdot \exp(-j2\pi f m)}_{X_1(f)} &= \\ X_2(f) \cdot X_1(f) & \end{aligned}$$

6. •  $x[n]$  é pari  $\Rightarrow X(f)$  é pari

$x[n]$  é reale pari  $\Rightarrow X(f)$  é reale pari

$x[n]$  é coniugato pari  $\Rightarrow X(f)$  é coniugato pari

$$x[n] = x^*[-n]$$

•  $x[n]$  é dispari  $\Rightarrow X(f)$  é dispari

$x[n]$  é reale dispari  $\Rightarrow X(f)$  é puramente immaginaria e dispari

$x[n]$  é coniugato dispari  $\Rightarrow X(f)$  é coniugato dispari

$$x[n] = -x^*[-n]$$

7. Teorema di Parseval:

$$W_x = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x[m]|^2 = \int_u^{u+1} |X(f)|^2 df$$

$$\begin{aligned} \langle x, y^* \rangle &= \int_u^{u+1} X(f) \cdot Y^*(f) df \\ &\triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot y^*[m] \end{aligned}$$

IMPORTANTE:  $X(f)$  NON é a energia finita! Lo é solo su un periodo per sequenze a energia finita.

8. Ribaltamento

$$\begin{aligned} x[n] &\leftrightarrow X(f) \\ x[-n] &\leftrightarrow X(-f) \end{aligned}$$

9.

$$n \cdot x[n] \iff \frac{j}{2\pi} \cdot \frac{dX(f)}{df}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \cdot \exp(-j2\pi fn) \\ \frac{dX}{df} &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \cdot [-j2\pi n \cdot \exp(-j2\pi fn)] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} -j2\pi n \cdot x[n] \cdot \exp(-j2\pi fn) \end{aligned}$$

$$-j2\pi n \cdot x[n] \iff \frac{dX(f)}{df}$$

$$n \cdot x[n] \iff \frac{1}{-j2\pi} \cdot \frac{dX(f)}{df} = \frac{j}{2\pi} \cdot \frac{dX(f)}{df}$$

## 10.4 Formula di inversione:

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_n x[n] \cdot \exp(-j2\pi fn) \\ \updownarrow \\ x[n] &= \int_u^{u+1} X(f) \cdot \exp(j2\pi fn) df \quad \forall u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



La formula si dimostra a partire dalla Trasformata di Fourier di  $X(f)$  (periodo 1)

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot \exp\left(j2\pi \frac{k}{1} f\right)$$

$$x_k = \frac{1}{1} \int_u^{u+1} X(f) \cdot \exp\left(-j2\pi \frac{K}{1} f\right)$$

## 10.5 DTFT della crosscorrelazione lineare di sequenze

$$\varphi_{xy}[n] \triangleq \sum_{m \in \mathbb{Z}} x^*[m] \cdot y[n-m]$$

$$\varphi_{xy}[n] = x^*[-n] * y[n] \iff X^*(f) \cdot Y(f)$$

## 10.6 Coppie sequenze - DTFT

$$\begin{aligned} \delta[n] &\longleftrightarrow 1 \\ x[n] = 1 \quad \forall n &\longleftrightarrow \delta_1(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(f-k) \\ a^n \cdot \varepsilon[n] &\longleftrightarrow \frac{1}{1 - a \cdot \exp(-j2\pi f)} \quad |a| < 1 \\ \varepsilon[n] &\longleftrightarrow \frac{1}{1 - \exp(-j2\pi f)} + \frac{1}{2} \delta_1(f) \\ (n+1)a^n \cdot \varepsilon[n] &\longleftrightarrow \frac{1}{[1 - a \cdot \exp(-j2\pi f)]^2} \\ \text{rect}_N(n) &\longleftrightarrow \frac{\sin(\pi f n)}{\sin(\pi f)} \quad \text{N dispari} \\ &\longleftrightarrow \frac{\sin(\pi f n)}{\sin(\pi f)} \cdot \exp(-j\pi f) \quad \text{N pari} \\ 2f_t \cdot \text{sinc}(f_t \cdot n) \quad 0 < f_t < \frac{1}{2} &\longleftrightarrow \text{rect} \frac{f}{2f_t} \quad \text{ripetizione periodo 1} \\ &\text{filtro passabasso ideale} \end{aligned}$$

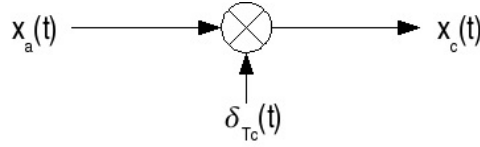
Dimostrazione:

$$\begin{aligned} S(f) &= \text{rect} \frac{f}{2f_t} \quad |f| < \frac{1}{2} \\ s[n] &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \text{rect} \frac{f}{2f_t} \cdot \exp(j2\pi f n) df \\ &= \int_{-f_t}^{f_t} \exp(j2\pi f n) df \\ &= \frac{1}{j2\pi f n} \cdot \exp(j2\pi f n) \Big|_{-f_t}^{f_t} \\ &= \frac{1}{\pi n} \sin 2\pi f_t n = 2 \cdot f_t \cdot \text{sinc}(2f_t n) \end{aligned}$$

# 11 Campionamento e ricostruzione

## 11.1 Campionamento ideale

Si normalizza l'asse delle frequenze rendendo periodica di periodo 1 la trasformata.



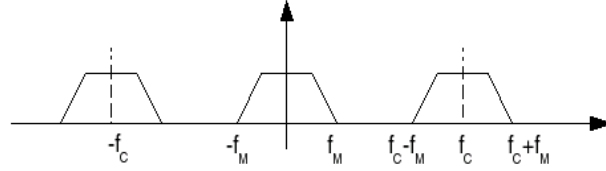
$T_c$ : periodo di campionamento

$$x_c(t) = x_a(t) \cdot \delta_{T_c}(t) = x_a(t) \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT_c) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_a(kT_c) \cdot \delta(t - kT_c)$$

$$\delta_{T_c}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{T_c} \delta_{\frac{1}{T_c}}(f)$$

$$\begin{aligned} F\{x_c(t)\} &= F\{x_a(t) \cdot \delta_{T_c}(t)\} \\ &= X_a(f) * \frac{1}{T_c} \delta_{\frac{1}{T_c}}(f) \\ &= \frac{1}{T_c} \sum_{k \in \mathbb{Z}} X_a\left(f - \frac{k}{T_c}\right) \end{aligned}$$

Campionamento nei tempi significa periodicizzazione dello spettro di frequenza.



Aliasing: sovrapposizione delle ripetizioni spettrali quando  $f_c - f_M > f_c$ , si elimina imponendo  $f_c > 2f_M$

Dunque, sappiamo che:

$$X_c(f) = \frac{1}{T_c} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_a(f - nf_c)$$

sappiamo anche che:

$$\begin{aligned} x_c(t) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_a(nT_c) \cdot \delta(t - nT_c) \\ &\updownarrow \\ X_c(f) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_a(nT_c) \cdot \exp(-j2\pi f_n T_c) \end{aligned}$$

Supponendo  $x[n]$  versione campionata di  $x_a(t)$  con periodo  $T_c$ :

$$x[n] = x_a(t) |_{t=nT_c} = x_a(nT_c)$$

Sapendo che:

$$x[n] \leftrightarrow X(f) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \cdot \exp(-j2\pi fn)$$

Scopriamo le due equazioni (equivalenti):

$$\begin{aligned} X_c(f) &= X(f \cdot T_c) \\ X(f) &= X_c(f \cdot f_c) \end{aligned}$$

Interpretazione: la DTFT é la versione riscalata della trasformata di Fourier del segnale campionato di un fattore  $f_c$ .

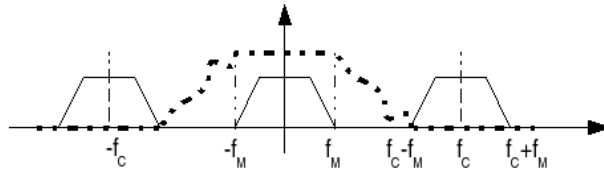
$$\begin{aligned} X(fT_c) &= \frac{1}{T_c} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_a\left(f - \frac{n}{T_c}\right) \\ X(f) &= \frac{1}{T_c} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_a\left(\frac{f - n}{T_c}\right) \end{aligned}$$

## 11.2 Ricostruzione del segnale

Supponiamo assenza di aliasing. Un ricostruttore deve avere la seguente funzione di trasferimento:

$$\begin{aligned} |G_r(f)| &= T_c & f \in [-f_M, f_M] \\ &= 0 & kf_c - f_M < f < kf_c + f_M \quad k \in \mathbb{Z}^* \\ &= \text{qualsiasi} & \text{altrove} \end{aligned}$$

$\arg(G_r(f))$  nullo o a fase lineare ( $-j2\pi f t_0$ ) (introduce al più un ritardo)



Caso particolare:

$$\begin{aligned} |G_r(f)| &= T_c \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{f_c}\right) \\ g_r(t) &= \text{sinc}(f_c(t - t_0)) \\ x_a(t) &= g_r(t) * x_c(t) = \sum_k x_c(kT_c) \cdot \text{sinc}(f_c t - k) \end{aligned} \quad t_0 = 0$$

Esempio: segnale audio  $x_a(t)$  con  $f_M = 20\text{KHz}$  e  $f_c = 44.1\text{KHz}$ .

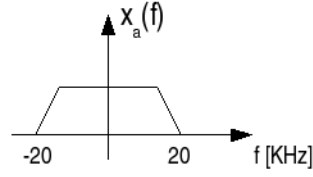


Figura 14: Spettro del segnale di partenza

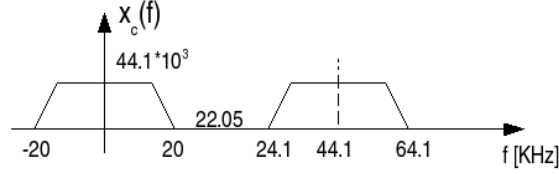


Figura 15: Spettro del segnale di partenza campionato

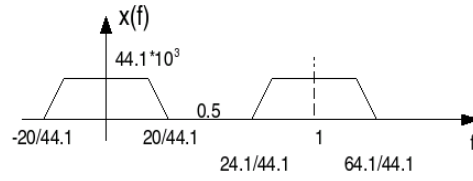


Figura 16: DTFT del segnale di partenza campionato

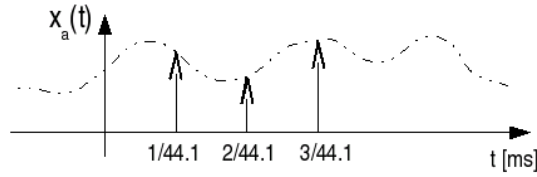


Figura 17: Segnale campionato

Rispettando le regole viste prima per avere un ricostruttore ideale, sono possibili infiniti algoritmi. Ad esempio:

$$G_{r1} = T_c \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{f_c}\right)$$

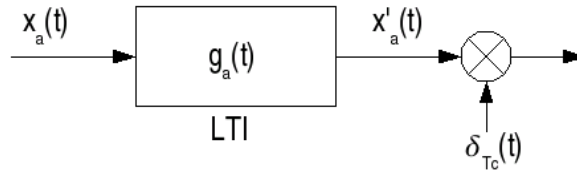
$$g_{r1} = \text{sinc}(f_c t)$$

$$G_{r2} = T_c \cdot \text{rect}\left(\frac{f}{2f_M}\right)$$

$$g_{r2} = \underbrace{2f_M T_c}_{0.9} \cdot \text{sinc}(\underbrace{2f_M t}_{40000})$$

Entrambi questi ricostruttori sono in grado di ricostruire perfettamente il segnale di partenza.

### 11.3 Campionamento reale



$g_a(t)$  é un filtro integratore (sample&hold), serve integrare il segnale analogico in un piccolo intorno dell'istante di campionamento. Tipicamente:

$$g_a(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\Delta}\right)$$

$$x'_a(t) = x_a(t) * g_a(t)$$

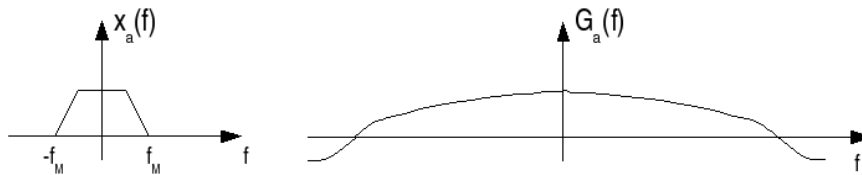
$$= \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{-\frac{\Delta}{2}} x_a(t) dt$$

$$x_{c_{reale}}(t) \longleftrightarrow X_{c_{reale}}(f) = \frac{1}{T_c} \delta_{T_c}(f) * [X_a(f) \cdot G_a(f)]$$

$$= \frac{1}{T_c} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_a\left(f - \frac{n}{T_c}\right) \cdot G_a\left(f - \frac{n}{T_c}\right)$$

Esempio:  $G_a(f) = \text{sinc}(\Delta f)$

$X'_a(f) = X_a(f) \cdot G_a(f)$  risulta leggermente deformato.



$$X_{c_{reale}}(f) = \frac{1}{T_c} \sum X_a\left(f - \frac{K}{T_c}\right) \cdot T_c \cdot \text{sinc}(fT_c) \cdot \underbrace{\exp(-j2\pi fT/2)}_{\text{uscita ritardata di 1/2 campione}}$$

Non c'è alcun cambiamento per quanto riguarda l'aliasing ( $f_c$  deve rimanere  $> 2f_M$ ), ma la ricostruzione deve tenere conto della deformazione.

$$|G_r(f)| = \frac{T_c}{|G_a(f)|} \quad f \in [-f_M, f_M]$$

$$= 0 \quad kf_c - f_M < f < kf_c + f_M \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

$$= \text{qualsiasi} \quad \text{altrove}$$

### 11.4 Interpolatore lineare

Equivale a due sample&hold in cascata. L'uscita é dunque ritardata di 1 campione.

*disegno*

$$h(t) = \text{tri}\left(\frac{t-T}{T}\right)$$

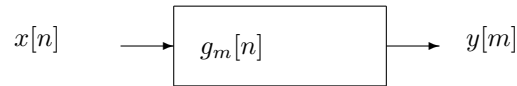
$$\begin{aligned}
x_c(t) &= x_a(t) \cdot \delta_T(t) * h(t) \\
&\quad \updownarrow \\
X_c(f) &= \sum_k X_a\left(f - \frac{k}{T}\right) \cdot T \cdot \text{sinc}^2(fT) \cdot \exp(-j2\pi fT)
\end{aligned}$$

Lo spettro é molto simile, e il filtro ricostruttore é:

$$H_r(f) = \frac{1}{\text{sinc}^2(fT)} \cdot \text{rect} \frac{f}{f_c}$$

## 12 Conversione digitale-digitale

Si può vedere come un sistema lineare tempovariante.

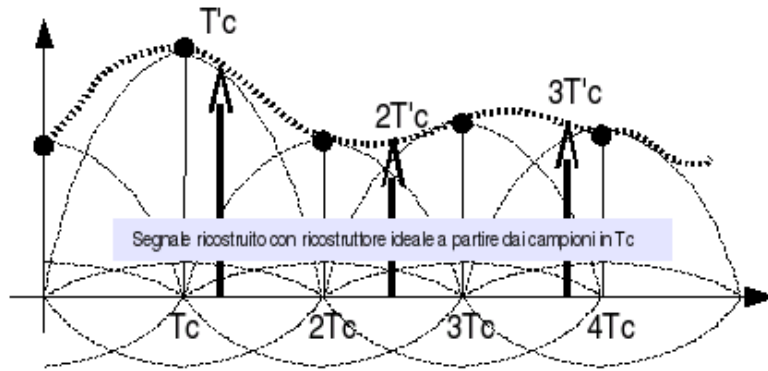


Esempio: cambio del periodo di campionamento da  $T_c$  a  $T'_c$

$$\frac{T'_c}{T_c} = \frac{M}{L}$$

$$x_a(t) = \sum_n x[n] \cdot \text{sinc}(f_c t - n) \quad \text{con filtro di ricostruzione ideale}$$

$$\begin{aligned} y[m] &= x_a(t) \big|_{t=mT'_c} = \\ &= \sum_n x[n] \cdot \text{sinc}\left(m \frac{T'_c}{T_c} - n\right) = \\ &= \sum_n x[n] \cdot \text{sinc}\left(m \frac{M}{L} - n\right) \end{aligned} \quad \text{operazione puramente numerica}$$



Con un generico filtro di ricostruzione con risposta all'impulso  $\tilde{g}(t)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_a(t) &= \sum_n x[n] \cdot \tilde{g}(t - n) \\ \tilde{y}[m] &= \sum_n x[n] \cdot \tilde{g}(mT'_c - n) \end{aligned} \quad \text{una specie di convoluzione}$$

Lo stesso procedimento può essere svolto interpolando e poi decimando il segnale di partenza:



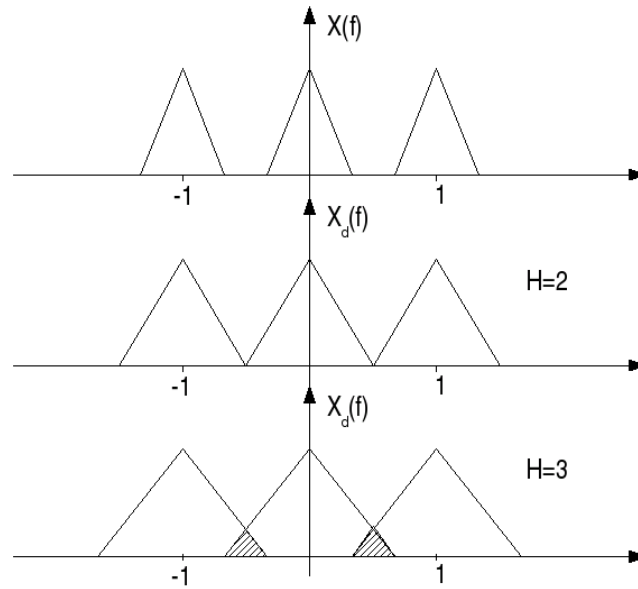
## 12.1 Decimazione numerica di fattore H

$$\begin{aligned}
 x_d[n] &= x[n \cdot H] \\
 x[n] &\xleftrightarrow{DTFT} X(f) = \frac{1}{T_c} \sum_n x_a\left(\frac{f-n}{T_c}\right) \\
 &\downarrow \\
 x_d[n] &\xleftrightarrow{DTFT} X_d(f) = \frac{1}{H \cdot T_c} \sum_n x_a\left(\frac{f-n}{H \cdot T_c}\right)
 \end{aligned}$$

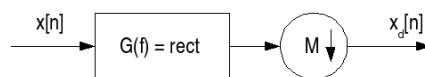
(ripetizione di  $X_a(f)$  ogni  $f_c$  + cambio scala di un fattore  $f_c$ ).  
Svolgendo un paio di passaggi matematici si ha che:

$$\begin{aligned}
 n &= i + kM \\
 X_d(f) &= \frac{1}{HT_c} \sum_k \sum_{i=0}^{M-1} x_a\left(\frac{f - (1 + kM)}{HT_c}\right) = \\
 &= \frac{1}{H} \sum_{i=0}^{M-1} \underbrace{\left(\frac{1}{T_c} \sum_k x_a\left(\frac{f-i}{T_c} - k\right)\right)}_{X\left(\frac{f-i}{M}\right)} = \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} X\left(\frac{f-i}{M}\right)
 \end{aligned}$$

(allargamento di  $X(f)$  attorno a ciascuna posizione intera  $\Rightarrow$  possibile aliasing)



(l'aliasing può essere evitato prefiltrando il segnale da decimare con un filtro con larghezza di banda  $\frac{1}{2M}$ )



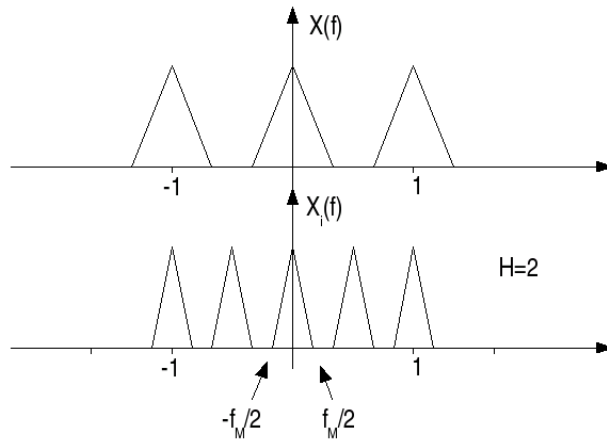


## 12.2 Interpolazione numerica di fattore L

$$\begin{aligned} x_i[n] &= x[M/L] \quad n = kL \quad k \in Z \\ &= 0 \quad \text{altrove} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_i(f) &= \sum_n x_i[n] \cdot \exp(-j2\pi f n) \\ &= \sum_{n=kL} x[n/L] \cdot \exp(-j2\pi f n) \\ &= \sum_k x[k] \cdot \exp(-j2\pi f k L) \\ &= X(fL) \end{aligned}$$

Si verifica una compressione dell'asse delle frequenze di un fattore L (attorno a 0).

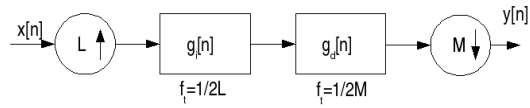


Si creano delle repliche di  $X_a(f)$  ogni  $1/L$ . Queste repliche costituiscono un disturbo e devono essere eliminate, ad esempio con un filtro passabasso con frequenza di taglio  $1/2L$ .



Il guadagno L serve a correggere la perdita di energia dovuta alla compressione dell'asse delle frequenze.

### 12.3 Interpolazione - decimazione in cascata

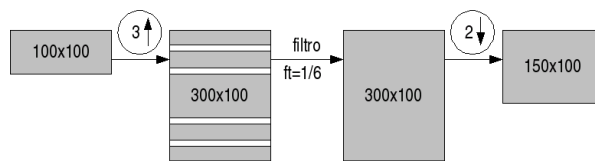


Che é equivalente a dire

:



Esempio: zoom di una immagine digitale di un fattore  $2/3$  in altezza:



## 13 Trasformata Z

La trasformata Z serve a gestire la convergenza della DTFT e a rappresentare i sistemi LTI descritti da equazioni alle differenze.

*Definizione:* trasformata Z bilatera a variabile complessa  $z$ .

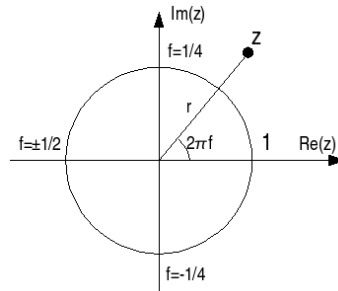
$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \quad z \in C$$

$$\downarrow z = r \cdot \exp(j2\pi f)$$

$$X(z) = \sum_n (x[n] \cdot r^{-n}) \cdot \exp(-j2\pi f n)$$

La trasformata Z é periodica in  $f$  di periodo 1.

Inoltre da sopra si nota che quando  $|r| = 1$  la trasformata Z corrisponde alla DTFT.



### 13.1 Condizioni di esistenza

La trasformata Z converge in insiemi denominati ROC (region of convergence), ovvero l'insieme degli  $z \in C$  tale che  $|X(z)|$  converge.

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| \cdot |z|^{-n} < \infty$$

Le ROC vengono determinate mediante il Criterio di Cauchy.

#### 13.1.1 Criterio di Cauchy

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty \quad \text{se} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n|^{\frac{1}{n}} < 1$$

La ROC assumerá forma:

$$ROC : \{z \in C : 0 \leq R_{X-} < r < R_{X+} \leq \infty\}$$

Infatti,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] \cdot z^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} |x[n] \cdot z^{-n}| + \sum_{n=0}^{\infty} |x[-n] \cdot z^n|$$

E quindi, studiando la convergenza secondo Cauchy:

$$ROC : \{z \in C : 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |x[n]|^{\frac{1}{n}} < |z| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} |x[n]|^{\frac{1}{n}}} \leq \infty\}$$

All'interno della ROC  $X(z)$  é una funzione analitica derivabile infinite volte e la derivata é continua.

NB: la DTFT esisterá se il cerchio unitario ( $|z| = 1$ ) é compreso nella ROC e tutte le sue derivate sono continue. Nota bene:

$$x[n] = \exp(j2\pi f_0 n) \xleftrightarrow{DTFT} \delta_1(f - f_0)$$

$|z| = 1$  non è nella ROC, tuttavia la DTFT esiste al senso delle distribuzioni. In questi casi arriva a toccare la circonferenza di raggio unitario al limite.

*Caso particolare:* quoziente di polinomi

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad \text{polinomi in } z \text{ e } C$$

soluzioni  $P(z) = 0$  sono dette *zeri*  $z_i$   
soluzioni  $Q(z) = 0$  sono dette *poli*  $p_i$

- La ROC non contiene mai poli.
- Se  $h[n]$  è a durata finita (sistemi FIR) la ROC è tutto il piano tranne al più 0 e  $\infty$
- Se  $h[n]$  è right-sided (illimitata) allora

$$ROC = \{z \in C : \max_i |p_i| < |z| \leq \infty\}$$

- $\leq$  : causale
- $<$  : non causale

- Se  $h[n]$  è left-sided allora

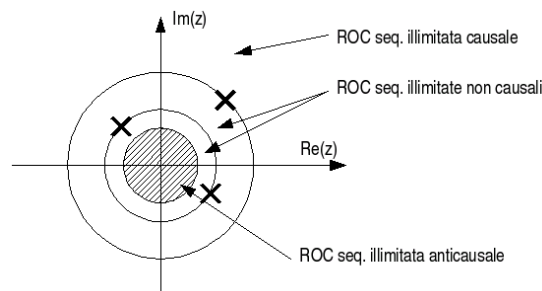
$$ROC = \{z \in C : 0 \leq |z| < \min_i |p_i|\}$$

- Se  $h[n]$  è bilaterale la ROC è l'intersezione:

$$ROC = \{z \in C : |p_i| < |z| < |p_{i+1}|\}$$

dove  $|p_{i+1}| > |p_i|$

Con  $N$  poli si avranno  $N + 1$  ROC possibili.



## 13.2 Trasformata inversa della Z

### 1. Integrale di Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{l-1} dz &= 1 \quad \text{se } l = 0 \quad l \in Z \\ &= 0 \quad \text{altrimenti} \end{aligned}$$

$\Gamma$ : contorno chiuso che racchiude  $z = 0$ .

Si desidera calcolare lungo un contorno  $\Gamma \in ROC$  che racchiude  $z = 0$  l'integrale:

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) \cdot z^{l-1} dz = \\
 &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} \left( \sum_n x[n] \cdot z^{-n} \right) \cdot z^{l-1} dz = \\
 &= \sum_n x[n] \cdot \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^{-n+l-1} dz = \\
 &= \sum_n x[n] \cdot [0 \text{ se } n \neq l, 1 \text{ se } n = l] = \\
 &= x[l] \\
 &\downarrow \\
 x[n] &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} X(z) \cdot z^{n-1} dz \\
 &= \sum \text{residui}(X(z) \cdot z^{n-1}) \quad \text{in } \Gamma
 \end{aligned}$$

- residuo di un polo di ordine 1 in  $z = a$  di  $x(a) \cdot z^{n-1}$

$$\text{Res}_a^1 = \lim_{z \rightarrow a} (z - a) \cdot X(z) \cdot z^{n-1}$$

- residuo di un polo di ordine  $q$  in  $z = a$  di  $x(a) \cdot z^{n-1}$

$$\text{Res}_a^q = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(q-1)!} \cdot \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \left( x(a) \cdot z^{n-1} \cdot (z - a)^q \right)$$

Esempio:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1 \\
 X(z) \cdot z^{n-1} &= \frac{z^n}{z - 1}
 \end{aligned}$$

- $n \geq 0$  : polo in  $z = 1$
- $n < 0$  : polo in  $z = 1$  + polo di ordine  $|n|$  in  $z = 0$

$$\text{Res}_1^1 = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^n}{z - 1} (z - 1) = 1$$

$$\text{Res}_0^1 = \lim_{z \rightarrow 0} z \cdot \frac{z^{-1}}{z - 1} = -1$$

$$\text{Res}_0^{|n|} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(|n| - 1)!} \cdot \frac{d^{|n|-1}}{dz^{|n|-1}} \left[ \frac{z^{-n} z^n}{z - 1} \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(|n| - 1)!} (-1)^{|n|-1} \cdot \frac{(|n| - 1)!}{(z - 1)^{|n|}} = -1$$

$$x[n] = \sum \text{residui}(\text{polo } z=1) = 1 \quad n \geq 0$$

$$x[n] = \sum \text{residui}(\text{poli } z=1, -n) = 1 - 1 = 0 \quad n < 0$$

2. Metodo per ispezione

$$X(z) = \frac{1}{1 - a^{-1}z} \quad \longleftrightarrow \quad x[n] = a^n \cdot \varepsilon[n] \quad |z| > |a|$$

$$X(z) = \sum_i X_i(z)$$

$$X_i(z) \longrightarrow x_i[n]$$

$$x[n] = \sum_i x_i[n]$$

### 3. Sviluppo in serie di frazioni parziali

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{c \cdot \prod_{i=1}^M (z - z_i)}{\prod_{i=1}^N (z - p_i)} = \\ &= c \cdot z^{M-N} \cdot \frac{\prod_{i=1}^M (1 - z_i \cdot z^{-1})}{\prod_{i=1}^N (1 - p_i \cdot z^{-i})} \end{aligned}$$

- se  $N > M$  e i poli hanno molteplicità singolare:

$$X(z) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - p_i \cdot z^{-i}}$$

$$A_i = (1 - p_i \cdot z^{-1}) \cdot X(z)|_{z=p_i}$$

- se  $M > N$  e i poli hanno molteplicità singolare:

$$X(z) = \sum_{i=1}^{M-N} B_i \cdot z^{-i} + \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{1 - p_i \cdot z^{-i}}$$

Ove  $B_i$  é la divisione polinomiale tra  $P(z)$  e  $Q(z)$  arrestata con grado resto  $< N$ .

- un polo  $p_0$  con molteplicità 2,  $M \geq N$

$$X(z) = \sum_{i=1}^{M-N} B_i \cdot z^{-i} + \sum_{i=1}^{N-q} \frac{A_i}{a - p_i \cdot z^{-1}} + \sum_{i=1}^q \frac{C_i}{1 - p_0 \cdot z^{-i}}$$

$$C_i = \frac{1}{(q-1)! \cdot (-p_0)^{q-1}} \cdot \left( \frac{dq^{-i}}{d\omega^{q-1}} \cdot \left( (1 - p_0 \omega)^q \cdot X(\omega^{-1}) \right) \right) \quad \omega = p_0^{-1}$$

### 4. Espressione in serie di potenze

$$\begin{aligned} X(z) &= z^2 - \frac{1}{2}z + -1 + \frac{1}{2}z^{-i} \\ &\downarrow \\ x[n] &= \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] + \dots \end{aligned}$$

### 5. Divisione polinomiale

$$X(z) = \frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}} \quad |z| > |a|$$

(conosco  $x[n] = a^n \cdot \varepsilon[n]$ )

- soluzione causale:  
ordino in serie *crescente* gli  $z^{-1}$   
si effettua la divisione tra polinomi e si ottiene

$$\begin{aligned} &\sum_0^\infty 1 \cdot a^n \cdot z^{-n} \\ &\updownarrow \\ x[n] &= a^n \varepsilon[n] \end{aligned}$$

- soluzione anticausale:  
ordino in serie *crescente* gli  $z$

$$X(z) = \frac{z}{z - a}$$

### 13.3 Proprietà della trasformata Z

#### 13.3.1 Linearità

$\forall x_1[n], x_2[n], \alpha_1, \alpha_2 \in C$

$$x_1[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad ROC_1$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad ROC_2$$

se  $ROC_1 \cap ROC_2 \neq \emptyset$

$$\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] \xleftrightarrow{Z} \alpha_1 X_1(z) + \alpha_2 X_2(z)$$

$$ROC_1 \cap ROC_2 \subset ROC$$

#### 13.3.2 Traslazione

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{Z} X(z) \cdot z^{-n_0}$$

Dimostrazione:

$$\sum_n x[\underbrace{n - n_0}_{=m}] \cdot z^{-n} = \sum_m x[m] \cdot \underbrace{z^{-(m+n_0)}}_{z^{-m} \cdot z^{-n_0}} = z^{-n_0} \cdot \sum_m x[m] \cdot z^{-m} = X(z) \cdot z^{-n_0}$$

#### 13.3.3 Cambio scala in Z

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

$$ROC = \{z \in C : R_{x-} < |z| < R_{x+}\}$$

$$a^n \cdot x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{w}{a}\right) \quad \text{con } w = az$$

$$ROC = \{w \in C : R_{x-} - |a| < |z| < R_{x+} + |a|\}$$

- $0 < |a| < 1$  : avvicinamento di poli e zeri a  $z = 0$
- $|a| > 1$  : allontanamento di poli e zeri da  $z = 0$
- $|a| = 1$  : rotazione di  $\arg(a)$  di poli e zeri

#### 13.3.4 Derivazione in Z

$$n \cdot x[n] \xleftrightarrow{Z} -z \cdot \frac{dX}{dz}$$

La ROC rimane invariata a meno forse di  $z = 0$  e  $z = \infty$ .

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} X(z) &= \frac{d}{dz} \sum_n x[n] \cdot z^{-n} \\ &= \sum_n x[n] \cdot \frac{d}{dz} (z^{-n}) \\ &= \sum_n x[n] \cdot (-n \cdot z^{-n+1}) \\ -\frac{d}{dz} X(z) &= \sum_n n \cdot x[n] \cdot z^{-1} \cdot z^{-n} \end{aligned}$$

Esempio:

$$X(z) = \ln(1 + az^{-1}) \quad |z| > |a|$$

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dz} &= \frac{-az^{-2}}{1+az^{-1}} \\ -z \cdot \frac{dX}{dz} &= \frac{az^{-1}}{1+az^{-1}} \xleftrightarrow{Z} \underbrace{a(-a)^{n+1} \cdot \varepsilon[n-1]}_{=nx[n]} \\ Z^{-1}\{X(z)\} &= \frac{a(-a)^{n-1} \cdot \varepsilon[n-1]}{n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{a^n}{n} \cdot \varepsilon[n-1]\end{aligned}$$

### 13.3.5 Coniugazione

$$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(Z^*)$$

### 13.3.6 Ribaltamento (sequenza)

$$\begin{aligned}x[n] &\xleftrightarrow{Z} X(z) \quad ROC = \{z \in C : R_{x-} < |z| < R_{x+}\} \\ x[-n] &\xleftrightarrow{Z} X(z^{-1}) \quad ROC = \{z \in C : R_{x+} < |z| < R_{x-}\}\end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\sum_n x[-n] \cdot z^{-n} \quad m = -n \quad \sum_m x[m](z^{-1})^{-m} = X(z^{-1})$$

### 13.3.7 Convoluzione lineare di sequenze

$$\begin{aligned}x_1[n] &\xleftrightarrow{Z} X_1(z) \quad ROC_1 \\ x_2[n] &\xleftrightarrow{Z} X_2(z) \quad ROC_2\end{aligned}$$

se  $ROC_1 \cap ROC_2 \neq \emptyset$  allora:

$$\begin{aligned}x_1[n] * x_2[n] &\xleftrightarrow{Z} X_1(z) \cdot X_2(z) \\ ROC_1 \cap ROC_2 &\subset ROC\end{aligned}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}x_1[n] * x_2[n] &= \sum_n (x_1[n] * x_2[n]) \cdot z^{-n} \\ &= \sum_n \left( \sum_m x_1[m] x_2[n-m] \right) \cdot z^{-n} \\ &= \sum_m x_1[m] \cdot \underbrace{\sum_n x_2[n-m] \cdot z^{-n}}_{X_2(z) \cdot z^{-m}} \\ &= X_2(z) \cdot \underbrace{\sum_m x_1[m] \cdot z^{-m}}_{X_1(z)}\end{aligned}$$

### 13.3.8 Moltiplicazione di sequenze

$$\begin{aligned}x_1[n] \cdot x_2[n] &\xleftrightarrow{Z} \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_1} X_1(w) \cdot X_2\left(\frac{z}{w}\right) \cdot w^{-1} dw \\ &= \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma_2} X_1\left(\frac{z}{w}\right) \cdot X_2(w) \cdot w^{-1} dw\end{aligned}$$

$\Gamma_1$ : curva che racchiude  $w = 0$  e  $e \in \{ROC_1\{w\} \cap ROC_2 z/w\}$

$\Gamma_2$ : curva che racchiude  $w = 0$  e  $e \in \{ROC_1\{z/w\} \cap ROC_2 w\}$



### 13.4 Filtri FIR

$$\begin{aligned} h[n] &= 0 \quad n \notin \{n_0, n_0 + 1, \dots, N\} \quad N < \infty \\ H[z] &= h[n_0] \cdot z^{-n_0} + h[n_0 + 1] \cdot z^{-n_0 - 1} + \dots \end{aligned} \quad \text{Polinomio in } z$$

Sistemi FIR: poli solo nell'origine (multipli),  $N - 1$  zeri.

- Se  $h[n] \in R$ , numeratore della  $H[z]$  é un polinomio a coefficienti reali.
- Cioé gli zeri di  $H[z]$  sono necessariamente reali o complessi coniugati.
- Un polinomio di grado dispari ha sempre almeno uno zero reale.

$ROC = C/\{0\}$  solo se  $h[n]$  é causale. Se  $h[n]$  é anticausale  $ROC = C/\{\infty\}$ .

Un sistema LTI é stabile se e solo se  $\sum_n |h[n]| < \infty$ , e tutti i filtri FIR soddisfano questa condizione.

### 13.5 Filtri IIR

$$y[n] = \sum_{m \in Z} x[m] \cdot y[n - m]$$

- Sistemi ARMA: rappresentabili con equazioni alle differenze.
- Sistemi non ARMA: non rappresentabili. Es: filtro passabasso ideale.

Nel caso di sistemi ARMA:

$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot y[n - k] = \sum_{l=0}^M b_l \cdot x[n - l]$$

Se  $h[n]$  é causale:

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{a_0} \cdot y[n - k] + \sum_{l=0}^M \frac{b_l}{a_0} \cdot x[n - l]$$

Calcolando la trasformata dei due membri:

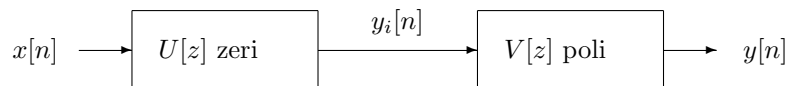
$$\sum_{k=0}^N a_k \cdot Y[z] \cdot z^{-k} = \sum_{l=0}^M b_l \cdot X[z] \cdot z^{-l}$$

$$H[z] = \frac{Y[z]}{X[z]} = \frac{\sum_{l=0}^M b_l \cdot z^{-l}}{\sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-k}}$$

Di conseguenza un sistema ARMA può essere scritto così:

$$H[z] = U[z] \cdot V[z] = \sum_{l=0}^N b_l \cdot z^{-l} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^M a_k \cdot z^{-k}}$$

- $U[z]$ : caratteristico di un sistema FIR (MA: moving average) (*zeri*)
- $V[z]$ : parte auto regressiva AR (*poli*)



La parte AR non converge in prossimità dei poli.

Ci sono  $N$  poli complessi (reali o complessi coniugati).

$N'$  poli con modulo diverso implica  $N' + 1$  regioni ROC. Ci sono  $N' + 1$   $h_s[n]$  diverse con la stessa  $H[z]$ , tra le quali:

- 1 causale (esterna)  $|z| > \text{mod}(p_i)$
- 1 anticausale (centro)  $|z| < \text{mod}(p_i)$
- tutte le altre non causali.

Stabilità garantita se  $H(z)$  converge in  $z = \exp(j2\pi f)$ , nessun polo in  $|z| = 1$ .

Nel caso ARMA:

$$H(f) = H(z) \quad z = \exp(j2\pi f)$$

$$\begin{aligned} |H(f)| &= |H_0| \cdot \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k \cdot z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k \cdot z^{-1})} \\ &= |H_0| \cdot \frac{\prod_{k=1}^M |1 - c_k \cdot z^{-1}|}{\prod_{k=1}^N |1 - d_k \cdot z^{-1}|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \arg(H(f)) &= \arg(H)|_{z=\exp(j2\pi f)} \\ &= \arg(H_0) + \sum_{k=1}^M \arg(1 - c_k \cdot z^{-1}) - \sum_{k=1}^N \arg(1 - d_k \cdot z^{-1}) \end{aligned}$$

### 13.6 Caratterizzazione di sistemi LTI

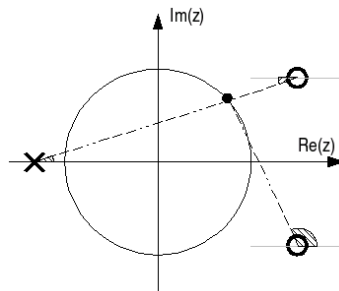


$$Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

$$H(f) = H(z)|_{z=\exp(j2\pi f)} \quad \text{se il sistema é stabile}$$

$$|H(f)| = \frac{\prod ||\text{vettori corrispondenti agli zeri}||}{\prod ||\text{vettori corrispondenti ai poli}||} \cdot |H_0|$$

$\arg H(f)$  = differenza tra la somma degli angoli formati dai vettori degli zeri, e la somma degli angoli dei vettori dei poli



Note:

- uno zero su  $\Gamma_1$  (cerchio unitario)  $\Rightarrow H(f) = 0$  per  $f$  corrispondente alla posizione dello zero.
- uno zero molto vicino a  $\Gamma_1$  (rispetto agli altri poli e zeri) implica attenuazione massima di  $|H(f)|$  per  $f$  tale che il punto sul cerchio sia a distanza minima dallo zero.
- un polo molto vicino a  $\Gamma_1$  (rispetto agli altri poli e zeri) implica amplificazione massima di  $|H(f)|$  per  $f$  tale che il punto sul cerchio sia a distanza minima dal polo.

Risposta all'impulso nota  $H(z)$ :

- deve essere nota o desumibile la  $ROC_H$

- invertire  $H(z)$  con quella  $ROC_H$

Risposta al gradino unitario nota  $H(z)$ :

- deve essere nota o desumibile la  $ROC_H$
- calcolare  $H(z) \cdot \frac{z}{z-1}$  e invertire il tutto sulla  $ROC_Y$

## 13.7 Filtri passa tutto

### 13.7.1 Relazione tra modulo e fase

$$\begin{aligned}
 |G(f)|^2 &= G(f) \cdot G^*(f) \\
 &\quad \uparrow DFT \\
 g[n] * g^*[n] \\
 &\quad \uparrow Z \\
 G(z) \cdot G\left(\left(\frac{1}{z}\right)^*\right)
 \end{aligned}$$

$$|G(f)|^2 = G(z) \cdot G^*(z^{-1*})|_{z=\exp(j2\pi f)}$$

Quindi, sistemi che ammettono la stessa  $C(z) = G(z) \cdot G^*(z^{-1*})$  ammettono la stessa risposta in ampiezza. Nel caso ARMA:

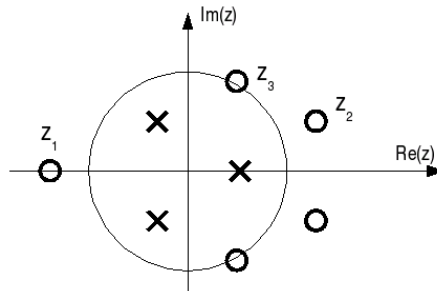
$$G(z) = G_0 \cdot \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}$$

$$\begin{aligned}
 \downarrow \quad (a+b)^* &= a^* + b^* \\
 \downarrow \quad (ab)^* &= a^* b^*
 \end{aligned}$$

$$C(z) = |G_0|^2 \cdot \frac{\prod_{k=1}^M (1 - c_k z^{-1})(a - c_k^* z)}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})(a - d_k^* z)}$$

$C(z)$  ammette coppie coniugate e reciproche dei poli/zeri rispetto ai poli/zeri di  $G(z)$ .

Esempio: Per sistemi causali e stabili, i poli di  $C(z)$  interni al cerchio unitario sono anche poli di  $G(z)$ .

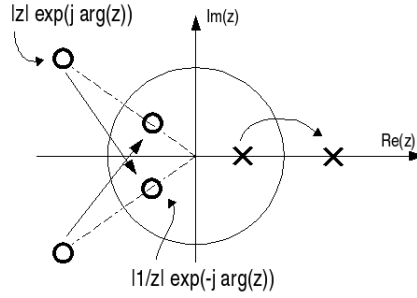


Nell'esempio seguente, tutti i sistemi hanno risposta in modulo uguale, cambia solo la risposta in fase.

$$G_1(z) = \frac{(z - z_1^{-1})(z - z_2)(z - z_2^*)(z - z_3^*)(z - z_3)}{\text{poli}}$$

$$G_2(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2^{-1})(z - (z_2^*)^{-1})(z - z_3)(z - z_3^*)}{\text{poli}}$$

$$G_3(z) = \frac{(z - z_1^{-1})(z - z_2^{-1})(z - (z_2^{-1})^*)(z - z_3)(z - z_3^*)}{\text{poli}}$$



### 13.7.2 Sistemi passa tutto

Sistema che in cascata a un altro non cambia la risposta in modulo complessiva.  
Se

$$G(z) = G'(z) \cdot \frac{z^{-1} - a^*}{1 - a \cdot z^{-1}}$$

sistema con zero in  $z = a^{*-1}$  e polo in  $z = a$ , allora

$$C(z) = C'(z) \Rightarrow |G(f)| = |G'(f)|$$

$$\alpha = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - a z^{-1}} \Big|_{|z|=1} = \frac{\exp(-j2\pi f) - a^*}{1 - a \cdot \exp(-j2\pi f)} = \exp(-j2\pi f) \cdot \frac{1 - a^* \cdot \exp(j2\pi f)}{1 - a \cdot \exp(-j2\pi f)}$$

$$|\alpha| = \frac{|b^*|}{|b|} = 1$$

Per sistemi con risposta all'impulso reale:

$$G_{pt} = \prod_{k=1}^{M_r} \frac{z^{-1} - d_k}{1 - d_k z^{-1}} \cdot \prod_{k=1}^{M_c} \frac{(-z^{-1} - c_k^*)(z^{-1} - c_k)}{(1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1})}$$

- il sistema passa-tutto ammette  $M_r + 2M_c$  poli e zeri
- per sistemi causali e stabili,  $|d_k|, |c_k| < 1$
- guadagno 0dB ( $|G_{pt}(f)| = 1$ )

### 13.8 Ritardo di Gruppo

- nell'ipotesi di sistemi PT causali stabili  
 $r < 1 \Rightarrow \tau_g > 0$
- filtro di ordine n:  
 $\tau_{g_{pt}} = \text{somma di } N \text{ termini positivi} \Rightarrow \text{sempre positivo}$   
la fase é sempre negativa

### 13.9 Sistemi a fase minima

Sistema a fase minima: sistema con zeri contenuti nel cerchio di raggio unitario.  
Qualsiasi sistema può essere espresso come serie di un sistema a fase minima e un sistema passa-tutto.

$$G(z) = G_{min}(z) \cdot G_{pt}(z)$$

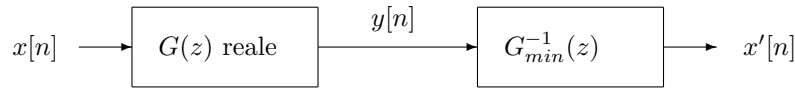
Dato  $G_{min}(z)$ , il suo inverso (con risposta all'impulso  $g_I[n]$  dove  $g_I[n] * g[n] = \delta[n]$ ) é:

$$G_I(z) = G_{min}^{-1}(z)$$

ovvero i poli si scambiano con gli zeri. Di conseguenza,  $G_I(z)$  rimane *causale e stabile*.

### 13.10 Compensazione di un sistema

Poiché un sistema può essere sempre visto come un sistema a fase minima in serie a un sistema passa tutto, e poiché la caratteristica fondamentale dei sistemi a fase minima è che possono sempre essere invertiti, si vede che per compensare gli effetti in modulo di un sistema reale è sufficiente mettergli in serie l'inverso del sistema a fase minima.



$$G(z) = G_{pt}(z) \cdot G_{min}(z)$$

$$\Rightarrow |X'(f)| = |X(f)|$$

$$\arg(X'(f)) \neq \arg(X(f))$$

### 13.11 FIR a fase lineare

$$\arg(H(f)) = \beta \cdot 2\pi f \alpha$$

- Tipo 1:  
 $h[n]$  è a simmetria pari:  $h[M-n] = h[n]$   
 $M$  (ultimo campione non nullo della sequenza) è pari.
- Tipo 2:  
 $h[n]$  è a simmetria pari  
 $M$  dispari.
- Tipo 3:  
 $h[n]$  è a simmetria dispari, campione in  $M/2$  nullo.  
 $M$  pari.
- Tipo 4:  
 $h[n]$  è a simmetria dispari, campione in  $M/2$  nullo.  
 $M$  dispari.

$$\begin{aligned}
 h[n] &= \pm h[M-n] \\
 &\updownarrow Z \\
 H(z) &= \pm Z\{h[M-n]\} \\
 &= \pm \sum_{n \in Z} h[M-n] \cdot z^{-n} \\
 &= \pm \sum_{n=0}^M h[\underbrace{M-n}_m] \cdot z^{-n} \\
 &= \pm \sum_{m=0}^M h[m] \cdot z^{-(M-m)} \\
 &= \pm z^{-M} \sum_{m=0}^M h[m] \cdot (z^{-1})^{-m} \\
 H(z) &= \pm z^{-M} \cdot H(z^{-1})
 \end{aligned}$$

Sapendo che se  $h[n] \in R$ , allora gli zeri di  $H(z)$  devono essere reali o complessi coniugati. Di conseguenza, per quanto visto dall'equazione precedente, in un filtro a fase lineare se esiste  $z_i$  zero di  $H(z)$  deve esistere anche  $z_i^{-1}$ . La formula generale è:

$$H(z) = \prod_{i=1}^{M_r} (z - z_i)(z - z_i^{-1}) \cdot \prod_{j=1}^{M_1} (z - z'_j) \cdot \prod_{k=1}^{M_c} (z - z''_k)(z - z''_k^*)$$

$$\cdot \prod_{k=1}^M (z - z''_n)(z - z''^*_n)(z - z''^{-1}_n)(z - (z''_n)^{-1*}) \cdot \prod_{l=1}^{M_{c1}} (z - z'''_l)(z - z'''^*_l)$$

Con:

$$z_i \in R \quad , \quad z'_\gamma \in \Gamma_1 \cap R \quad , \quad z''_n \in C \setminus R \quad , \quad z'''_l \in \Gamma_1 \cap \{C \setminus R\}$$

### 13.12 Caso degli zeri in $\pm 1$

- Tipo 1:  $h[n]$  pari,  $M$  pari  
 $(z=1) H(1) = H(1)$  quindi  $z=1$  *puó* essere uno zero  
 $(z=-1) H(-1) = H(-1)$  quindi  $z=-1$  *puó* essere uno zero
- Tipo 2:  $h[n]$  pari,  $M$  dispari.  
 $(z=1) H(1) = H(1)$  quindi  $z=1$  *puó* essere uno zero  
 $(z=-1) H(-1) = (-1)^{2k-1} H(-1)$  quindi  $z=-1$  *deve* essere uno zero
- Tipo 3:  $h[n]$  dispari,  $M$  pari.  
 $(z=1) H(1) = H(-1)$  quindi  $z=1$  *deve* essere uno zero  
 $(z=-1) H(-1) = (-1)^{2k} H(-1) = -H(-1)$  quindi  $z=-1$  *deve* essere uno zero
- Tipo 4:  $h[n]$  dispari,  $M$  dispari.  
 $(z=1) H(1) = H(-1)$  quindi  $z=1$  *deve* essere uno zero  
 $(z=-1) H(-1) = (-1)^{2k+1} H(-1) = H(-1)$  quindi  $z=-1$  *puó* essere uno zero

## 14 Discrete Fourier Transform DFT

$$x_a(t) \longleftrightarrow X_a(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \cdot \exp(-j2\pi ft) dt$$

$$x[n] \longleftrightarrow X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \exp(-j2\pi fn)$$

E se noi campioniamo nel dominio delle frequenze? Innanzitutto avremo una ripetizione nei tempi.

Definisco:

$$\begin{aligned} X[k] &= X(f)|_{f=\frac{k}{N}} && \text{(su intervalli di lunghezza 1 avrò } N \text{ campioni)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \exp\left(-j2\pi \frac{kn}{N}\right) && \text{(periodica di periodo } N) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} x[n] \cdot W_N^{-nk} \end{aligned}$$

definendo  $W_N$  come prima radice  $N$ -esima di 1 nei complessi (escluso 1)

$$W_N \triangleq \exp\left(j\frac{2\pi}{N}\right)$$

$k$  é considerato nell'intervallo:

- $0, 1, \dots, N-1$
- $-int(N/2), \dots, int(N/2)$  se  $N$  dispari, oppure  
 $-N/2, \dots, N/2$  se  $N$  pari

## 14.1 DFT inversa

Partiamo dall'inversa della DTFT:

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) \cdot \exp(j2\pi fn) df \quad \forall n$$

e poi approssimiamo l'integrale come una somma di rettangolini di larghezza  $1/N$ :

$$\begin{aligned} x_p[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot \underbrace{\exp\left(-j2\pi \frac{kn}{N}\right)}_{W_N^{kn}} \cdot \frac{1}{N} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left( \sum_{l \in Z} x[l] \cdot W_N^{-lk} \right) \cdot W_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{l \in Z} x[l] \cdot \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-l)k} \\ &= \sum_{l \in Z} x[l] \cdot \left( \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_N^{(n-l)k}}_{=1 \text{ se } n-l=mN, 0 \text{ altrimenti}} \right) \\ &= \sum_{m \in Z} x[n + mN] \end{aligned}$$

Come si vede, il campionamento ha portato alla creazione di repliche di  $x[n]$  con passo  $N$ .

Il passaggio sopra si spiega come:

$$\sum_{k=0}^{N-1} (W_N^m)^k = \frac{1 - (W_N^m)^N}{1 - W_N^m} \quad \text{serie geometrica}$$

che vale zero in tutti i casi tranne quando  $m = kN$

Esiste dunque la possibilità di aliasing temporale, che si può evitare:

- Quando  $x[n]$  é a durata finita  $M$ , scegliendo  $N \geq M$
- Quando  $x[n]$  é periodico di periodo  $M$ , scegliendo  $N = M$

## 14.2 Formule per le serie a durata finita

$$\begin{aligned} \text{DFT}_N(x[n]) &\triangleq X[k] = \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n] \cdot W_N^{-nk} & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ \text{DFT}^{-1}(X[k]) &\triangleq x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \cdot W_N^{nk} & n = n_0, \dots, n_0 + N-1 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & \dots & \dots & W_N^{-(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \dots & W_N^{-(N-1)^2} \end{pmatrix}}_{\text{matrice } W} \cdot \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}$$

La DFT può essere vista come una semplice operazione matriciale.

### 14.3 Proprietá di $W_N$

$$W_N \triangleq \exp\left(\frac{j2\pi}{N}\right)$$

1. Espandibilità

$$W_N^{k+l} = W_N^k \cdot W_N^l$$

2. Periodicità di N

$$W_N^{k+lN} = W_N^k \quad W_N^k = W_N^{(k \bmod N)}$$

3.

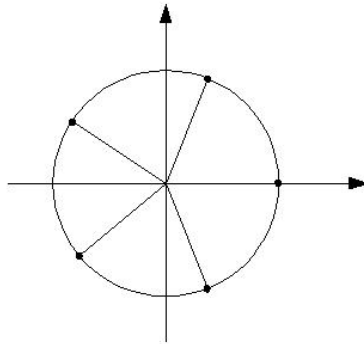
$$W_N^{lN} = 1 \quad W_N^{N/2} = W_N^{N/2+lN} = -1 \quad W_N^{N/2+l} = -W_N^l \quad W_N^2 = W_{N/2}$$

4. Ortonormalità

$$\frac{1}{N} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = 1 \quad k = ln$$

$$= 0 \quad \text{altrimenti}$$

Esempio: N=5



$$\sum_{k=0}^4 \left[ \exp\left(j2\pi \frac{k}{5}\right) \right]^0 = 5$$

$$\sum_{k=0}^4 \left[ \exp\left(j2\pi \frac{k}{5}\right) \right]^1 = 0$$

$$\sum_{k=0}^4 \left[ \exp\left(j2\pi \frac{k}{5}\right) \right]^{2-3-4} = 0$$

i vettori si scambiano tra di loro

$$\sum_{k=0}^4 \left[ \exp\left(j2\pi \frac{k}{5}\right) \right]^5 = 5$$

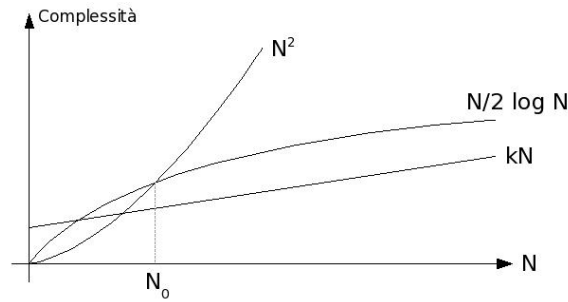
i vettori si spostano tutti in 1

Conseguenza delle proprietà viste é che la matrice  $W(N \times N)$  é composta solo da N elementi diversi.



## 14.4 Complessità calcolo DFT

A prima vista il calcolo della DFT richiede ( $N^2$  moltiplicazioni +  $N(N-1)$  addizioni complesse), mentre in realtà con algoritmi veloci che sfruttano la struttura della matrice  $W$  la complessità varia da  $O(N)$  a  $O(\frac{N}{2} \log_2 N)$  operazioni complesse.



## 14.5 DFT e trasformata Z

$$X(z) = \frac{z^{-N} - 1}{N} \cdot \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x[k] \cdot \frac{1}{W_N^k \cdot z^{-1} - 1}$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot z^{-n} & ROC\{z : |z| > 0\} \text{ per seq. causali di durata } N \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x[k] \cdot W_N^{nk} \right] \cdot z^{-n} \\ &= \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x[k] \cdot \sum_{n=0}^{N-1} (W_N^k \cdot z^{-1})^n \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x[k] \cdot \frac{\overbrace{W_N^{kN} \cdot z^{-N} - 1}^1}{W_N^K \cdot z^{-1} - 1} & CVD \end{aligned}$$

## 14.6 DFT e DTFT

$$X(f) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}-1} x[k] \cdot \frac{\sin(\pi f N)}{\sin\left(\pi\left(f - \frac{K}{N}\right)\right)} \cdot \exp\left(j\pi\left(f\left(1 - N\right)\frac{K}{N}\right)\right)$$

Manca lezione lunedì 13-03-2006

## 14.7 Proprietà DFT

### 14.7.1 Interpolazione numerica della DFT

$$\begin{aligned} x'[n] &= x[n] & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ &= 0 & n = N, \dots, 2N+1 \\ X'(f) &= X(f) \end{aligned}$$

$$X'[h] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_{2N}^{-hn} \quad (= \text{DFT}_{2N}(x[n]))$$

$$= X[l] \quad k = 2l$$

$$X(f)|_{f=\frac{k}{2N}} \quad k = 2l + 1$$

Aggiungendo N zeri si é interpolato esattamente i valori di  $X(f)$  in  $k = \frac{2l+1}{2N}$

#### 14.7.2 Calcolo della DFT di un segnale periodico su 2 periodi

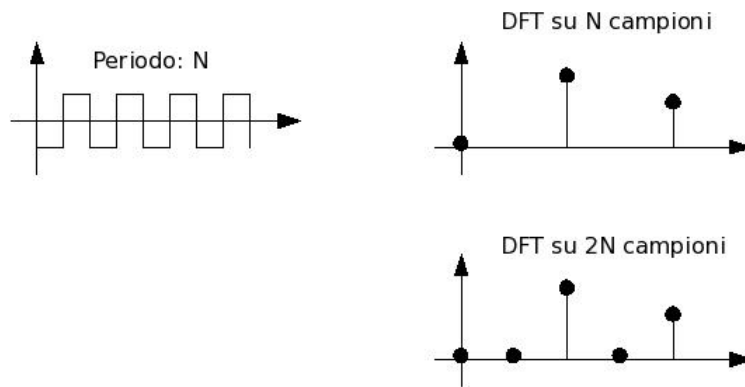
$$\begin{aligned} X[h] &= \sum_{n=0}^{2N-1} x[n] \cdot W_{2N}^{-nh} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_{2N}^{-nh} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n] \cdot W_{2N}^{-nh} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_{2N}^{-nh} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n-N] \cdot W_{2N}^{-(n-N)h} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \underbrace{\left( W_{2N}^{-nh} + W_{2N}^{-(n-N)h} \right)}_{=2W_{2N} \text{ se } h=2l, 0 \text{ altrimenti}} \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot y\left(\frac{h}{N}\right) \quad \text{per } h \text{ pari}$$

$$= 0 \quad \text{per } h \text{ dispari}$$

Con  $y[n] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot W_N^{-nh}$

Esempio:



Quindi i valori su un periodo del segnale di partenza sono piú che sufficienti per calcolare la DFT (sempre che il segnale sia perfettamente periodico, ovviamente).

## 14.8 Convoluzione indiretta

### 14.8.1 Segnali a durata limitata

$x[n]$  segnale di durata  $N_x$  (primo campione non nullo in 0)

$y[n]$  segnale di durata  $N_y$  (primo campione non nullo in 0)

$$\begin{aligned}
x'[n] &= x[n] & n &= 0, \dots, N_x - 1 \\
&= 0 & n &= N_x, \dots, \underbrace{N_x + N_y - 1}_{=N-1} \\
y'[n] &= y[n] & n &= 0, \dots, N_y - 1 \\
&= 0 & n &= N_y, \dots, N_x + N_y - 1
\end{aligned}$$

Calcolo le DTF, ottengo  $X'[k]$  e  $Y'[k]$

$$Z[k] = X[k] \cdot Y[k] \xrightarrow{\text{DFT}_N^{-1}} z[n] = x[n] * y[n]$$

#### 14.8.2 Segnali dello stesso periodo $N$

$$\begin{aligned}
x_p[n] &\xrightarrow{\text{DFT}} X_p[k] \\
y_p[n] &\xrightarrow{\text{DFT}} Y_p[k] \\
Z_p[k] &= \frac{1}{N} \cdot X_p[k] \cdot Y_p[k] \longrightarrow z_p[n] = x_p[n] \otimes y_p[n]
\end{aligned}$$

#### 14.8.3 Segnali di periodi diversi $N_x, N_y$

$$z_p[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=n_0}^{n_0+N-1} x_p[n] \cdot y_p[n-m] \quad \text{con } N = \text{MCM}(N_x, N_y)$$

Esempio:

Supponiamo  $N_x = 12$  e  $N_y = 10$ , quindi il loro  $\text{MCM} = 60$ .

Quindi facciamo la DFT di  $x$  e  $y$  su 60 campioni, ovvero rispettivamente 5 e 6 periodi. Si aggiungono quindi 4 campioni nulli tra ciascun campione di  $X[k]$  e 5 campioni nulli tra i campioni di  $Y[k]$ .

Come si vede, c'è battimento tra valori di  $X[k]$  e  $Y[k]$  solo per un campione, ovvero  $X[30] \cdot Y[30]$  (più in generale, per valori di  $k$  pari a  $N/\text{mcd}(N_x, N_y)$  e multipli).

$z_p[n]$  ha periodo pari a  $\text{mcd}(N_x, N_y)$  e vi sono  $\text{mcm}(N_x, N_y)/\text{mcd}(N_x, N_y)$  periodi osservati generati se  $X[k]$  e  $Y[k]$  sono calcolati su  $N = \text{mcm}(N_x, N_y)$ .

## 14.9 Convoluzione lineare di sequenze lunghe

Nel caso di sequenze in ingresso molto lunghe (tipo 1000 o più campioni) e filtri con risposta all'impulso anch'essa lunga (anche qui, tipo 1000 campioni), risulta computazionalmente pressoché impossibile realizzare la convoluzione indiretta come visto in precedenza, poiché sarebbe necessario trasformare due sequenze molto lunghe, moltiplicarle e estrarne l'antitrasformata.

Esistono dei metodi per dividere questo procedimento in passi di complessità accettabile.

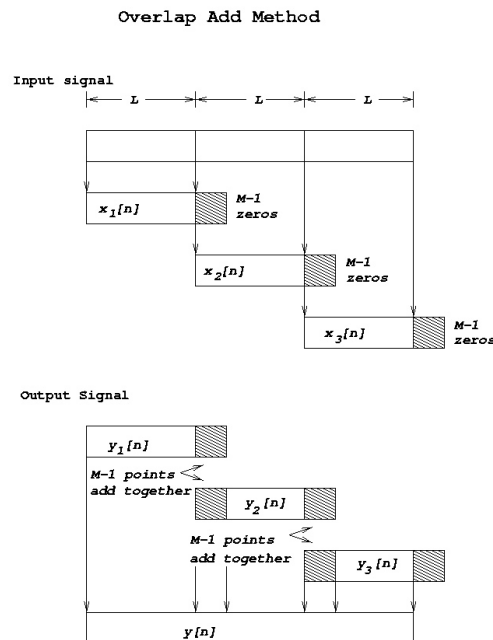
### 14.9.1 Overlap-add

Divido  $x[n]$  in  $K$  sequenze contigue di lunghezza  $M$ .

$$x[n] = \sum_{k=0}^K x_k[n] \quad x_k[n] = x[n + kM] \quad n = 0, 1, \dots, M-1$$

$$= 0 \quad \text{altrove}$$

$$y[n] = \left( \sum_{k=0}^M x_k[n] \right) * h[n] = \sum_{k=0}^M \left( \underbrace{x_k[n] * y[n]}_{\text{(in maniera indiretta)}} \right)$$



$y[n]$  si ottiene mantenendo i valori delle  $y_k[n]$  esclusi gli  $N_h - 1$  valori di ciascuna sezione filtrata che vanno sommati agli  $N_h - 1$  valori iniziali delle sezioni filtrate successive.

Esempio:

$N_h = 1000$ ,  $M = 1000$ ,  $\Rightarrow y_k[n] = x_k[n] * h[n]$  sequenze lunghe 1999 campioni (portati alla prima potenza di 2 disponibile, ovvero 2048).

Per ogni sezione, la complessità di calcolo é:

$$O\left(\frac{2048}{2} \cdot \log_2 2048\right) \approx 11264 \text{ operazioni}$$

Mentre con il metodo diretto avremmo avuto, per ciascuna operazione:

$$1000^2 = 10^6 \text{ operazioni}$$

### 14.9.2 Overlap-save

Scompongo  $x[n]$  in K sezioni di durata M sovrapposte di  $N_h - 1$  campioni, designate  $x'_k[n]$  (ovviamente diverse dalle  $x_k[n]$  del caso precedente!). Supponendo:

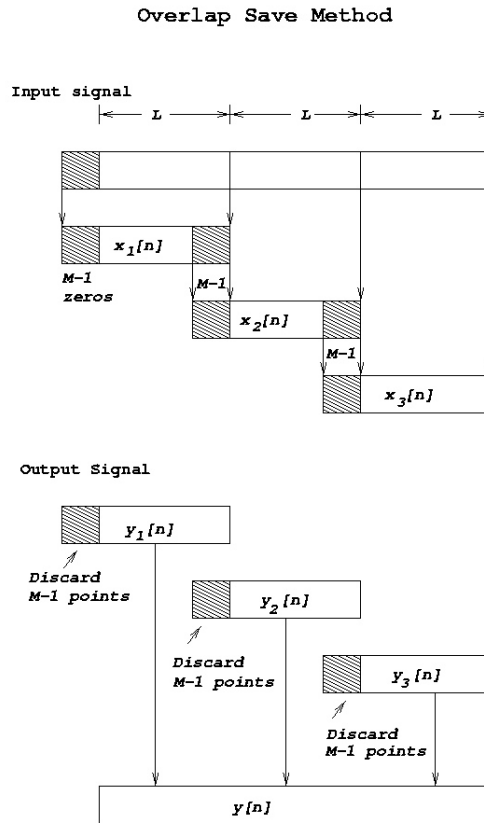
$$\begin{aligned} h'[n] &= h[n] & n &= 0, 1, \dots, N_h - 1 \\ &= 0 & n &= N_h, \dots, M - 1 \end{aligned}$$

Abbiamo che:

$$\begin{aligned} x'_l[n] &\xrightarrow{\text{DFT}_M} X'_l[k] \\ h'[n] &\xrightarrow{\text{DFT}_M} H'[k] \end{aligned}$$

$$Y'_l[k] = X'_l[k] \cdot H'[k] \xrightarrow{\text{DFT}_M^{-1}} y'_l[n]$$

Gli  $N_h - 1$  primi campioni di  $y'_l[n]$  sono affetti da aliasing temporale a causa della convoluzione circolare vista dalla DFT. Vanno dunque scartati, mentre gli altri possono essere direttamente *mantenuti* in quanto corretti.



## 15 Analisi Spettrale

Stima con DFT di  $X(f)$  per  $x[n]$  non periodica lunga.

Ipotesi su  $W_N[n]$ :

- lunga  $N + 1$
- simmetria pari
- centrata in 0
- $W_N[0] = 1 = \int_u^{u+1} W_N(f) df$

$$x_N[n] = x[n] \cdot W_N[n] \quad (\text{finestra di misura di } x[n])$$

$\downarrow$  DTFT

$$X_N(f) = \int_u^{u+1} X(g) \cdot W_N(f \cdot g) dg = W_N(f) \otimes_1 X(f)$$

$$W_N(f) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} W_N[n] \cdot \exp(-j2\pi fn)$$

## 15.1 Finestra Rettangolare

$$W_N[n] \longrightarrow r_N[n] = \text{rect}_N[n + N'] \quad N' = \text{int}\left(\frac{N}{2}\right)$$

$$R_N(f) = \frac{\sin(\pi f n)}{\sin(\pi f)}$$

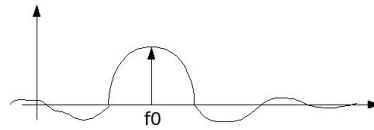
$$|R_N(f)| \text{ massimo} \approx \frac{2K + 1}{2N}$$

$$\alpha_N = \left| \frac{R_N(0)}{R_N(3/2N)} \right| \approx 4,5 \quad (N < 100)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha_N = \frac{3\pi}{2} \approx 4,712$$

Che succede?

Supponendo in ingresso una sinusoidale (in frequenza, un impulso in  $f_0$ ), ho, moltiplicando per la finestra (quindi convolvendo in frequenza con  $R_N(f)$ ) ottengo:



Si notano due cose:

1. qualunque sia il valore di  $N$ , comunque il valore di  $\alpha_N$  non cambia, e questo porta ad avere nello spettro finestrato dei picchi al di fuori della frequenza  $f_0$ .
2.  $N$  influenza invece la frequenza delle oscillazioni, quindi la risoluzione frequenziale. Infatti, con  $N$  elevato il sinc corrispondente esaurisce in suo lobo principale molto in fretta, non andando a influenzare quindi i sinc corrispondenti ad eventuali altre frequenze presenti.

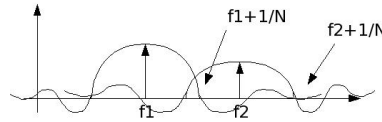


Figura 18:  $N$  piccolo

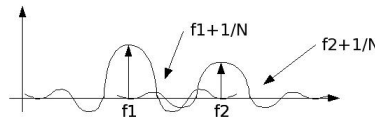


Figura 19:  $N$  grande

$\Delta_R$ : lunghezza del lobo principale =  $\frac{2}{N}$   
determina la capacità di risoluzione frequenziale dell'analisi mediante finestrimento.

Si converte  $\alpha$  (rapporto tra il max del lobo principale e il max del secondo lobo di  $W_N(f)$  in modulo) in  $\lambda$ , che ne é una misura in dB.

$$\lambda_R^{(N)} = -20 \cdot \log_{10} \left| \frac{R_N(0)}{R_N(f_0)} \right| = -13 \text{ dB} \quad f_0 \text{ posizione del max del secondo lobo}$$

## 15.2 Finestra Triangolare

## A Esempi

### A.1 Parte pari e parte dispari (per sequenze causali)

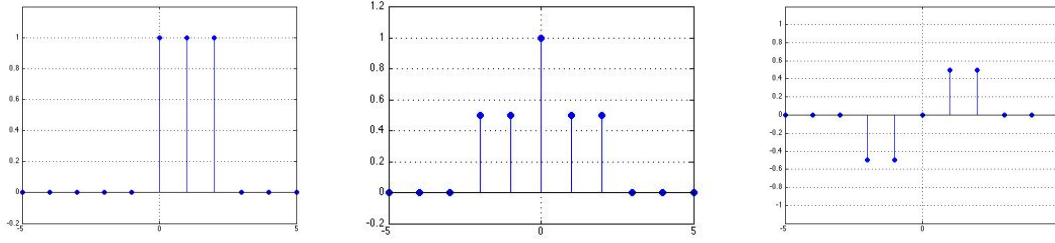


Figura 20: Segnale di partenza, parte pari, parte dispari

$$\begin{aligned}
 x_p[n] &= \frac{1}{2}x[n] && \text{per } n > 0 \\
 &= x[0] && \text{per } n = 0 \\
 x_d[n] &= \frac{1}{2}x[n] && \text{per } n > 0 \\
 &= 0 && \text{per } n = 0
 \end{aligned}$$

### A.2 Calcolo di energie e potenze di segnali

#### Esempio 1

$$x[n] = 2\text{rect}_2[n] + \text{rect}_2[n-2] + i(\delta[n] - \delta[n-3])$$

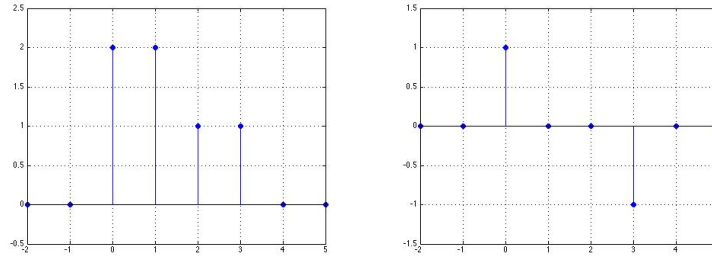


Figura 21: Parte reale e parte immaginaria del segnale

$$W_x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = |2 + i|^2 + 2^2 + 1^2 + |1 - i|^2 = 12$$

#### Esempio 2

$$x[n] = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \delta[n-k]$$

$$\begin{aligned}
 P_x &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N 2^2 \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} 4(N+1) = 2
 \end{aligned}$$



### A.3 Convoluzione lineare

#### Esempio 1

$$x_1[n] = a^n \cdot \varepsilon[n]$$

$$x_2[n] = \text{rect}_N[n]$$

$$\begin{aligned} x_1[n] * x_2[n] &= \sum_{m=0}^n x_1[n] \cdot \text{rect}_N[n-m] \\ &= \sum_{m=0}^n a^m = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} \end{aligned} \quad \text{per } 0 \leq n \leq N$$

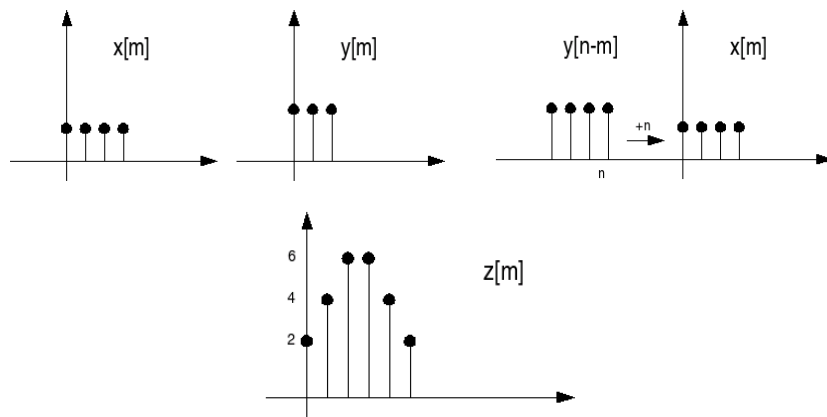
$$\begin{aligned} x_1[n] * x_2[n] &= \sum_{m=n-N+1}^n a^m \cdot 1 = \\ &\downarrow m' = m - (n - N + 1) \\ &= \sum_{m'=0}^{N-1} a^{m' + (n - N + 1)} \\ &= a^{n-N+1} \cdot \sum_{m'=0}^{N-1} a^{m'} = a^{n-N+1} \frac{1-a^N}{1-a} \end{aligned} \quad \text{per } n \geq N$$

#### Esempio grafico 1

$$z[n] = x[n] * y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \cdot y[n-m]$$

$$x[n] = \text{rect}_4[n]$$

$$y[n] = 2\text{rect}_3[n]$$

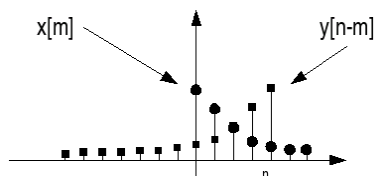


#### Esempio grafico 2

$$x[n] = \alpha^n \cdot \varepsilon[n]$$

$$y[n] = \beta^n \cdot \varepsilon[n]$$

$$\text{con } |\alpha|, |\beta| < 1$$



Si può risolvere solo per via analitica:

$$\begin{aligned}
 x[n] * y[n] &= \sum_{m=0}^n x[m]y[n-m] \\
 &= \sum_{m=0}^n \alpha^m \cdot \beta^{n-m} \\
 &= \beta^n \sum_{m=0}^n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^m && \text{serie geometrica} \\
 &= \beta^n \cdot \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\alpha}{\beta}}
 \end{aligned}$$

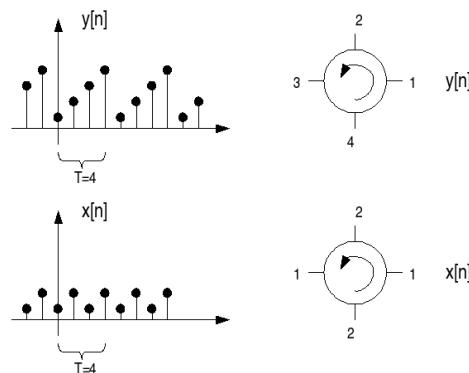
## A.4 Convoluzione circolare

### A.4.1 Esempio

Prendiamo  $x[n]$  periodico di periodo  $M_x$  e  $y[n]$  periodico di periodo  $M_y$ .

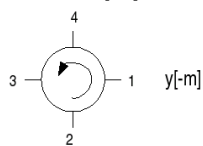
$$x[n] \otimes_M y[n] = \sum_{m=n_0}^{n_0+M-1} x[m]y[n-m]$$

con  $n_0$  qualsiasi e  $M = mcm(M_x, M_y)$ . Ad esempio:

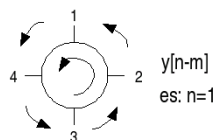


Per svolgere la convoluzione circolare devo eseguire i seguenti passi:

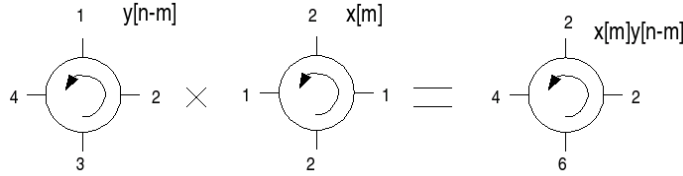
- cambio gli indici ( $n \rightarrow m$ )
- ribalto  $y[m]$  rispetto a un punto qualsiasi



- traslo  $y[m]$  di  $n$



- lo moltiplico per  $x[m]$



- sommo gli elementi e ottengo il valore di  $z[n]$  con l' $n$  scelto.

$$z[1] = 2 + 4 + 6 + 2 = 14$$

- ripeto per tutti gli  $n$ .

## A.5 Generazione di sequenze casuali

### A.5.1 Sequenze con PDF arbitraria

A partire da una sequenza  $X$  (variabile casuale) con distribuzione uniforme su  $[0, 1]$  è possibile ricavare una sequenza  $Y$  con distribuzione scelta. In questo esempio vogliamo ottenere:

$$f_Y(y) = \frac{1}{A} \text{tri}\left(\frac{y}{A}\right)$$

Soluzione: per prima cosa bisogna scrivere la formula della distribuzione  $f_Y(y)$ :

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= -\frac{1}{A^2}y + \frac{1}{A} & y \geq 0 \\ &= \frac{1}{A^2}y + \frac{1}{A} & y < 0 \end{aligned}$$

Poi si integra per trovare  $F_Y(y)$ :

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= 0 & y < -A \\ &= \int_{-A}^y \left( \frac{1}{A} + \frac{z}{A^2} \right) dz = \\ &= \left( \frac{y}{\sqrt{2}A} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 & -A < y < 0 \\ &= \int_{-A}^0 \left( \frac{1}{A} + \frac{z}{A^2} \right) dz + \int_0^y \left( -\frac{z}{A^2} + \frac{1}{A} \right) dz = \\ &= 1 - \left( \frac{y}{\sqrt{2}A} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 & 0 < y < A \\ &= 1 & y > A \end{aligned}$$

E poi si calcola  $F^{-1}1_Y(y)$ :

- Dove  $-A \leq y < 0$  (quindi  $0 \leq x < \frac{1}{2}$ ):

$$\begin{aligned} x &= \left( \frac{y}{\sqrt{2}A} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ \sqrt{x} &= \frac{y}{\sqrt{2}A} + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y &= \sqrt{2x}A - A \end{aligned}$$

- Dove  $0 < y < A$  (quindi  $\frac{1}{2} \leq x < 1$ ):

$$y = -\sqrt{2(1-x)}A + A$$

A questo punto è sufficiente moltiplicare ciascun elemento della sequenza uniforme per  $F_Y^{-1}(y)$  per ottenere una sequenza con distribuzione triangolare.

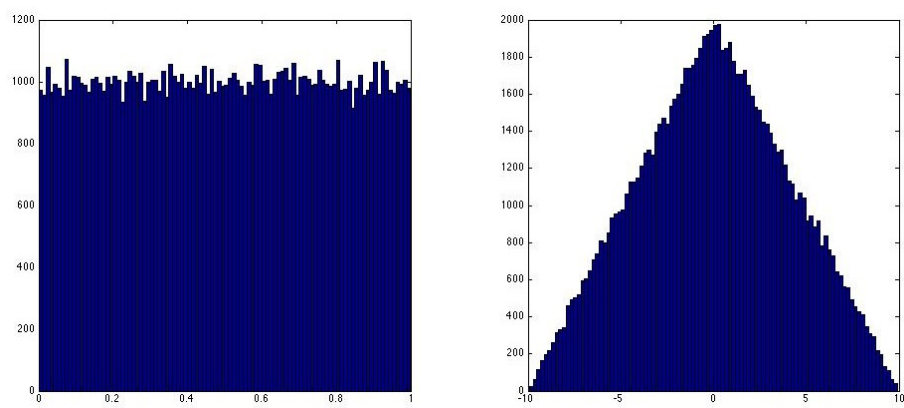


Figura 22: Istogrammi di  $X$  e  $Y$

## B Matlab

### B.1 Segnali e Operazioni Elementari

#### B.1.1 Funzioni per generare segnali elementari

**Rettangolo** `function x = rect(tempo, numcampioni)`

`%TEMPO base dei tempi`

```
x = zeros(1, length(tempo));
for i=1:length(tempo)
    if (tempo(i) >= 0 && tempo(i) < numcampioni)
        x(i) = 1;
    else
        x(i) = 0;
    end
end
```

- Delta di Dirac

```
function x = delta(tempo)
%TEMPO base dei tempi
x = zeros(1, length(tempo));
for i=1:length(tempo)
    if (tempo(i) == 0)
        x(i) = 1;
    else
        x(i) = 0;
    end
end
```

- Gradino

```
function x = epsilon(tempo)
%TEMPO base dei tempi
x = zeros(1, length(tempo));
for i=1:length(tempo)
    if (tempo(i) >= 0)
        x(i) = 1;
    else
        x(i) = 0;
    end
end
```

- Rettangolo

```
function x = rect(tempo, numcampioni)
%TEMPO base dei tempi
%NUMCAMPIONI numero di campioni che compongono il rettangolo
x = zeros(1, length(tempo));
for i=1:length(tempo)
    if (tempo(i) >= 0 && tempo(i) < numcampioni)
        x(i) = 1;
    else
        x(i) = 0;
    end
end
```

### B.1.2 Operazioni elementari

- Traslazione di un segnale

```
function x = trasla(segnale, quantita)
%TEMPO base dei tempi
%QUANTITA fattore di traslazione
x = zeros(1, length(segnale));
for i=1:length(segnale)
    if (i-quantita <= length(segnale) && i-quantita > 0)
        x(i) = segnale(i-quantita);
    else
        x(i) = 0;
    end
end
```

- Ribaltamento di un segnale rispetto all'origine dell'asse dei tempi

```
function x = ribalta(tempo,segnale)
%TEMPO asse dei tempi
%SEGNALE il segnale da ribaltare
x = zeros(1, length(segnale));
for i=1:length(segnale)
    if (find(tempo == -tempo(i)))
        x(i) = segnale(find(tempo == -tempo(i)));
    end
end
```

- Decimazione di un segnale

```
function x = decima(tempo, segnale, fattore)
%TEMPO base dei tempi
%SEGNALE il segnale da decimare
%FATTORE fattore di decimazione
x=zeros(1,length(tempo))
for (i=1:length(segnale))
    if (mod(tempo(i),fattore) == 0)
        x(find(tempo == (tempo(i)./fattore))) = segnale(i);
    end
end
```

- Interpolazione di un segnale

```
function x = interpola(tempo, segnale, fattore)
%TEMPO base dei tempi
%SEGNALE il segnale da interpolare
%FATTORE fattore di interpolazione
x=zeros(1,length(tempo))
for (i=1:length(segnale))
    if (find(tempo==tempo(i)*fattore) > 0)
        x(find(tempo==tempo(i)*fattore)) = segnale(i);
    end
end
```