

Interpolazione di funzioni. Analisi degli errori per interpolazione composita lineare e spline

Sia

$$H = \max_{i=1,n} |x_i - x_{i-1}|$$

Interpolazione lineare composita

Se $f \in C^2([x_0, x_n])$, esiste una costante $c_1 > 0$ indipendente da H t.c. (p_1^c dipende da H):

$$E_c(H) = \|f - p_1^c\|_\infty = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f(x) - p_1^c(x)| \leq c_1 H^2 \|f^{(2)}\|_\infty$$

Se i nodi x_i sono equispaziati, allora $c_1 = 1/8$.

Interpolazione con spline cubiche

Se $f \in C^4([x_0, x_n])$, esiste una costante $c_2 > 0$ indipendente da H t.c. (s_3 dipende da H):

$$E_s(H) = \|f - s_3\|_\infty = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f(x) - s_3(x)| \leq c_2 H^4 \|f^{(4)}\|_\infty$$

Se i nodi x_i sono equispaziati, allora $c_2 = 5/384$.

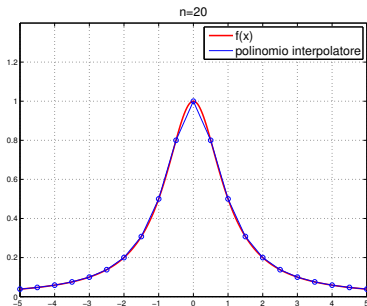
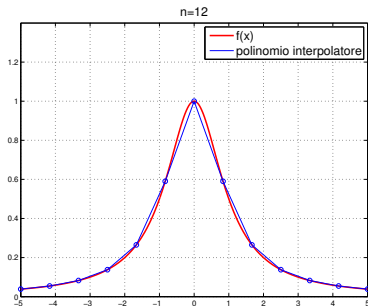
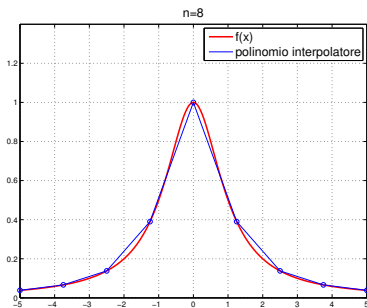
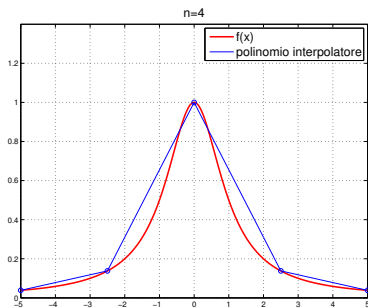
Problema 6:

Data la funzione $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ sull'intervallo $[x_a, x_b] = [-5, 5]$, costruire l'interpolatore lineare composito $p_1^c(x)$ interpolante f in $(n + 1)$ nodi equispaziati, con $n = 10 : 10 : 500$

- 1 Se $n \leq 100$, rappresentare su uno stesso grafico $f(x)$ e $p_1^c(x)$,
- 2 per ogni valore di n , posto $H = (x_b - x_a)/n$, calcolare l'errore $E_1^c(H) := \|f - p_1^c\|_\infty$,
- 3 alla fine del ciclo in n , rappresentare in scala logaritmica tutti gli errori calcolati (H in ascissa e gli errori $E_1^c(H)$ in ordinata),
- 4 verificare che, quando $H \rightarrow 0$, gli errori $E_1^c(H)$ si comportano come dice la stima teorica, ovvero $E_1^c(H) \leq c_1 H^2$.

Nota. Per calcolare gli errori valutare il max su un insieme di 1000 punti equispaziati in $[x_a, x_b]$.

Svolgimento



Come capire se l'errore è del secondo ordine in H .

Dopo aver salvato gli errori nel vettore `e1ch` ed i valori di H nel vettore `H` possiamo valutare il comportamento degli errori in funzione di H come segue:

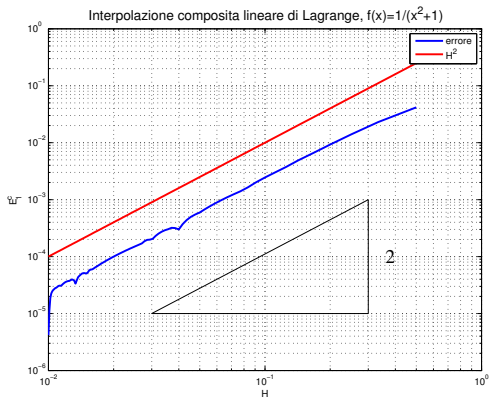
$$c1 = e1ch ./ H.^2;$$

Se il vettore `c1` contiene valori pressoché costanti, allora vuole dire che $E_1^c(H) \simeq c_1 H^2$.

Alternativamente, se dal plot:

```
loglog(H, e1ch, 'b', H, H.^2, 'r')
```

si ottengono due linee con la stessa pendenza, allora vuole dire che $E_1^c(H) \simeq c_1 H^2$.



Problema 7:

Data la funzione $f(x) = 1/(x^2 + 1)$ sull'intervallo $[x_a, x_b] = [-5, 5]$, costruire la spline cubica $s_3(x)$ interpolante f in $(n + 1)$ nodi equispaziati, con $n = 10 : 10 : 500$

- 1 Se $n \leq 100$, rappresentare su uno stesso grafico $f(x)$ e $s_3(x)$,
- 2 per ogni valore di n , posto $H = (x_b - x_a)/n$, calcolare l'errore $E_s(H) := \|f - s_3\|_\infty$,
- 3 alla fine del ciclo in n , rappresentare in scala logaritmica tutti gli errori calcolati (H in ascissa e gli errori $E_s(H)$ in ordinata),
- 4 verificare che, quando $H \rightarrow 0$, gli errori $E_s(H)$ si comportano come dice la stima teorica, ovvero $E_s(H) \leq c_2 H^4$.

Nota. Per calcolare gli errori valutare il max su un insieme di 1000 punti equispaziati in $[x_a, x_b]$.

Lavorando in maniera analoga con le spline, salviamo gli errori nel vettore `esh` e calcoliamo

$$c2 = esh ./ H.^4;$$

Se il vettore `c2` contiene valori pressoché costanti, allora vuole dire che $E_s(H) \simeq c_2 H^4$.

