Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 18 tháng 8 năm 2025

Mục lục

Lời giới thiệu **3**

0 Kiến thức toán học nền tảng **4**

0.1 Đồ thị . . . 4

0.1.1 Trục số một chiều . . . 4

0.1.2 Mặt phẳng hai chiều và hệ tọa độ vuông góc . . . 6

0.1.3 Không gian ba chiều và hướng tam diện . . . 8

0.2 Hàm số một biến . . . 10

0.2.1 Định nghĩa hàm số và những khái niệm liên quan . . . 10

0.2.2 Những hàm số sơ cấp . . . 17

0.3 Số ảo và số phức . . . 22

0.4 Bài tập tổng hợp . . . 25

1 Cơ bản của xử lí số liệu trong vật lí **26**

2 Chuyển động **29**

Lời giới thiệu

Chương 0

Kiến thức toán học nền tảng

Phần này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có kiến thức đại số và một chút hình học từ ghế nhà trường. Chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Bạn đọc có thể tìm hiểu một cách sơ cấp hay gợi nhớ lại về các khái niệm toán học mà không cần tập trung vào việc chứng minh chặt chẽ các tính chất toán học. Tác giả mong muốn thông qua chương này, bạn đọc có thể có một cảm nhận và từ đó có kĩ năng để áp dụng các khái niệm toán giải quyết các yêu cầu thực tế. Suy cho cùng, mấu chốt của nhiều ngành khoa học, bao gồm cả vật lí, là xây dựng những mô hình toán học biểu diễn môi trường để từ đó đưa ra những dự đoán hay xây dựng những công trình cho tương lai.

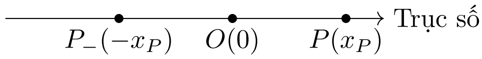
Và vì bạn đọc đang đọc về tài liệu nghiêng về vật lí, Tác giả sẽ không tập trung nhiều vào chặt chẽ toán học. Các định nghĩa và chứng minh cần thiết vẫn sẽ được đưa ra, tuy nhiên không quá chặt chẽ nhưng đủ để ứng dụng, nhằm làm bước đệm cho bạn đọc nếu có mong muốn tìm hiểu sâu hơn về toán.

0.1 Đồ thị

0.1.1 Trục số một chiều

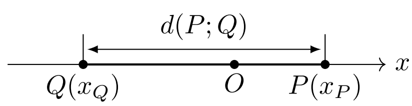
Đồ thị là cầu nối đầu tiên giữa đại số và hình học mà chắc là bạn đọc đã được học. Thông thường, nhắc đến đồ thị, chúng thường được dùng để biểu thị mặt phẳng hai chiều hoặc không gian ba chiều. Nhưng, đồ thị cơ bản nhất chỉ có một chiều, hay tên gọi khác là *trục số*.

Đặt một điểm trên trục làm gốc tọa độ 0, từ đó chúng ta có thể biểu diễn mọi số thực trên trục số này. Nói một cách không chính thống, với một số x_P dương bất kì, đánh dấu cách O một đoạn bằng x_P đơn vị độ dài theo hướng trục, chúng ta có điểm P biểu diễn x_P. Viết tắt cách biểu diễn, được $P(x_P)$. Ngược lại, nếu chúng ta muốn đánh dấu số $x_{P\_} = -x_P$ mang giá trị âm, chúng ta dịch ngược lại chiều trục như trên hình 0.1.



Hình 0.1: Trục số một chiều

Khi có nhiều điểm ở trên đồ thị, chúng ta sẽ mong muốn tính những thông số liên quan tới những điểm đó. Do kiến thức toán hiện tại đang bị giới hạn, chúng ta sẽ chỉ tập trung vào một đặc điểm nhất định, *khoảng cách*. Trên một trục số như hình 0.2, cho hai điểm $P(x_P)$ và $Q(x_Q)$, khoảng cách giữa chúng là



Hình 0.2: Khoảng cách trên trục số

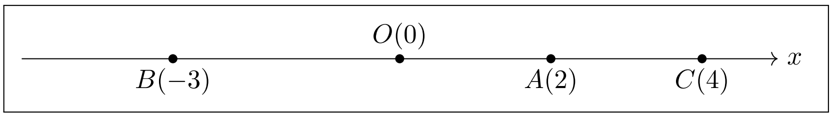
$$d(P;Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2} = |x_P - x_Q|.$$

Bài 1: Biểu diễn nhóm các điểm sau trên trục số. Tính khoảng cách giữa hai điểm phân biệt bất kì trong nhóm đó.

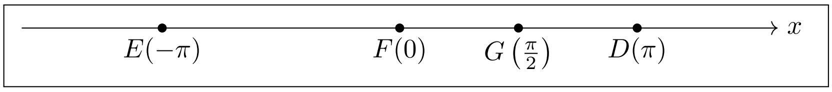
1. $A(2)$, $B(-3)$, và $C(4)$;
2. $D(\pi)$, $E(-\pi)$, $F(0)$, và $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$;
3. $H(0{,}\overline{3})$ và $I(\sqrt{2})$;
4. $J\left(\frac{355}{113}\right)$, $K\left(\frac{9801}{2206\sqrt{2}}\right)$ và $L\left(\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}\right)$;

5. $M(x)$ và $N(2x)$ với $x \in \mathbb{R}$.

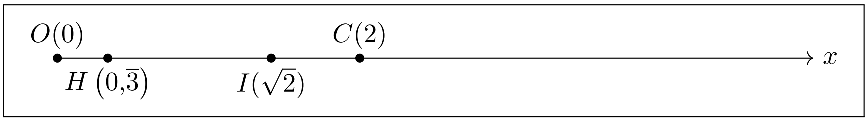
Lời giải cho bài 1:



Hình 0.3: Trục số cho phần 1 của bài 1



Hình 0.4: Trục số cho phần 2 của bài 1



Hình 0.5: Trục số cho phần 3 của bài 1

Ta có đồ thị cho các phần từ 1 đến 4 như các hình 0.3, 0.4, 0.5, và 0.6.

Cần lưu ý rằng, để biểu diễn thuận lợi nhất, các trục số khi biểu diễn số cần được chọn những tỉ lệ khác nhau và tại những vị trí khác nhau.

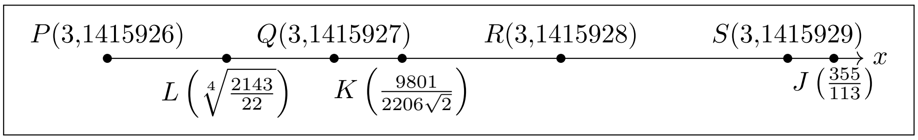
Các khoảng cách giữa hai điểm phân biệt đôi một là

1.
$$\begin{aligned}
d(A;B) = d(B;A) &= |2-(-3)| = \boxed{5};\\
d(B;C) = d(C;B) &= |4-(-3)| = \boxed{7};\\
d(C;A) = d(A;C) &= |4-2| = \boxed{2}.
\end{aligned}$$

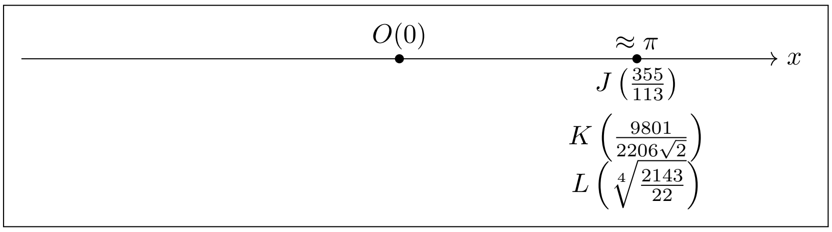
2.
$$\begin{aligned}
d(D;E) = d(E;D) &= |\pi-(-\pi)| = \boxed{2\pi};\\
d(E;F) = d(F;E) &= |(-\pi)-0| = \boxed{\pi};\\
d(F;G) = d(G;F) &= \left|0-\frac{\pi}{2}\right| = \boxed{\frac{\pi}{2}};\\
d(G;D) = d(D;G) &= \left|\frac{\pi}{2}-\pi\right| = \boxed{\frac{\pi}{2}};\\
d(D;F) = d(F;D) &= |\pi-0| = \boxed{\pi};\\
d(E;G) = d(G;E) &= \left|(-\pi)-\frac{\pi}{2}\right| = \boxed{\frac{3\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

3.
$$d(H;I) = d(I;H) = \left|0{,}\overline{3}-\sqrt{2}\right| = \boxed{\frac{1-3\sqrt{2}}{3}}.$$

4.
$$\begin{aligned}
d(J;K) = d(K;J) &= \left|\frac{355}{113}-\frac{9801}{2206\sqrt{2}}\right| = \boxed{\frac{1566260-1107513\sqrt{2}}{498556} \approx 1{,}9034\times 10^{-7}};\\
d(K;L) = d(L;K) &= \left|\frac{9801}{2206\sqrt{2}}-\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}\right| = \boxed{\frac{107811\sqrt{2}-2206\sqrt[4]{22818664}}{48532} \approx 7{,}7431\times 10^{-8}};\\
d(L;J) = d(J;L) &= \left|\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}-\frac{355}{113}\right| = \boxed{\frac{7810-113\sqrt[4]{22818664}}{2486} \approx 2{,}6777\times 10^{-7}}.
\end{aligned}$$



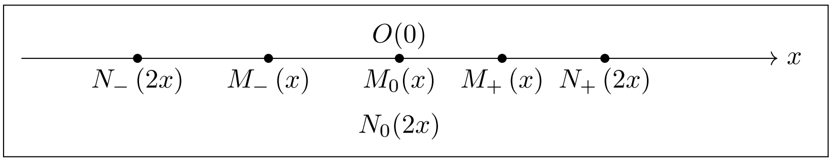
Hình 0.6: Trục số cho phần 4 của bài 1



Hình 0.7: Xấp xỉ vị trí điểm trên trục số cho phần 4 của bài 1

Trong vật lí, việc tính toán chính xác đến như ở phần 4 là không cần thiết và nhiều khi còn không chính xác. Luôn luôn có sai số khi đo đạc, và trong phần lớn trường hợp, khi kết hợp sai số này vào trong tính toán thì các giá trị khoảng cách như trên gần như vô nghĩa. Cho nên, về mặt thực tiễn, chúng ta hoàn toàn có thể thay thế đồ thị của 4 như hình 0.7 và khi tính khoảng cách, chúng ta có thể tính xấp xỉ là

$$d(J,K) = d(K,J) \approx d(K,L) = d(L,K) \approx d(L,J) = d(J,L) \boxed{\approx 0}.$$



Hình 0.8: Ba trường hợp cho vị trí tương đối của M, N, O cho phần 5 của bài 1

Để vẽ được đồ thị cho phần 5, chúng ta sẽ xét vị trí tương đối giữa M, N kèm theo gốc O để quy chiếu như biểu diễn ở hình 0.8. Cụ thể, khi $x > 0$, điểm M và N được biểu diễn thành hai điểm M_+ và N_+. Tương tự, khi $x < 0$, M và N biểu diễn hai điểm M_- và N_-. Một trường hợp đặc biệt là khi $x = 0$, M và N đều có tọa độ là 0, cho nên hai điểm đó và gốc cùng chia sẻ vị trí với nhau.

Khoảng cách giữa hai điểm M và N luôn là

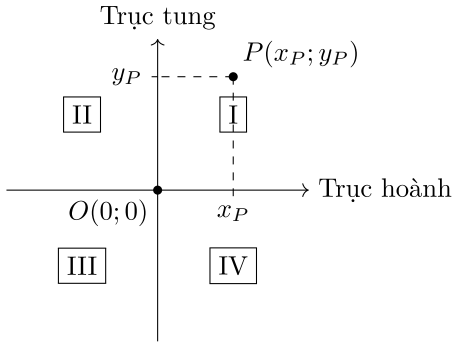
$$d(M;N) = d(N;M) = |x - 2x| = \boxed{|x|}.$$

0.1.2 Mặt phẳng hai chiều và hệ tọa độ vuông góc

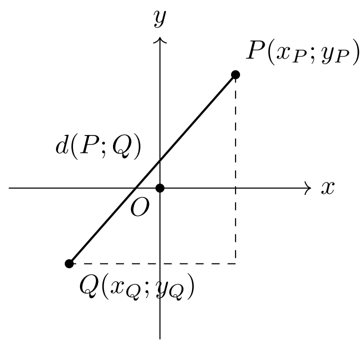
Mở rộng lên mặt phẳng hai chiều, nếu chúng ta đặt hai trục vuông góc với nhau và giao nhau tại gốc $O(0)$ của mỗi trục, khi đó, chúng ta có thể xác định vị trí của điểm trên mặt phẳng chứa hai trục theo biểu diễn đại số bằng cách dóng điểm đó lên trục mà sau này được gọi là *tọa độ*. Đây được gọi là *hệ tọa độ vuông góc* (hay *hệ tọa độ Đề-các*[1]). Như ở hình 0.9, trục nằm ngang được gọi là *trục hoành*, trục dọc được gọi là *trục tung*. Tùy trong từng trường hợp, vị trí và hướng chỉ của các trục có thể thay đổi. Với mỗi điểm, vị trí khi dóng điểm đó vào trục hoành gọi là *hoành độ*, vào trục tung gọi là *tung độ*. Tiếp tục lấy ví dụ từ hình 0.9, điểm P có tọa độ là $(x_P; y_P)$ và được kí hiệu là $P(x_P; y_P)$. Thêm vào đó, hai trục chia mặt phẳng thành bốn góc phần tư, từ góc phần tư thứ I đến góc phần tư thứ IV bao gồm các điểm thỏa mãn tính chất sau:

- Góc phần tư thứ I: $x > 0$, $y > 0$;
- Góc phần tư thứ II: $x < 0$, $y > 0$;
- Góc phần tư thứ III: $x < 0$, $y < 0$;
- Góc phần tư thứ IV: $x > 0$, $y < 0$.

[1] René Descartes (1596-1650)



Hình 0.9: Hệ tọa độ vuông góc



Hình 0.10: Khoảng cách giữa hai điểm

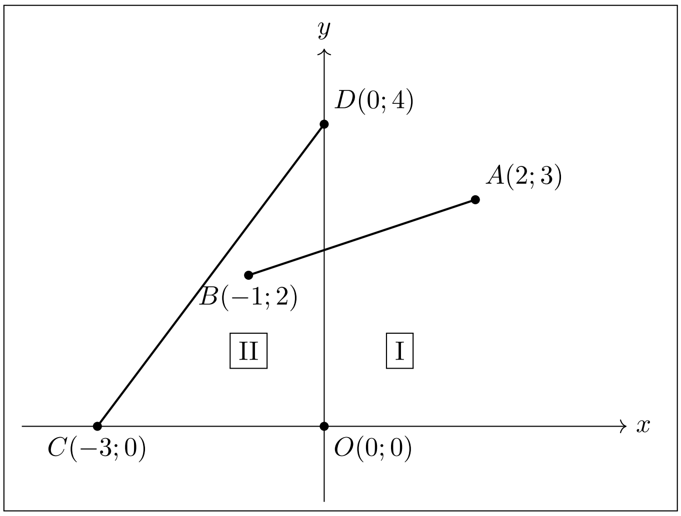
Về mặt hình học, khi tọa độ được vẽ thông thường, góc phần tư thứ I nằm ở vị trí trên cùng bên phải, và các góc phần tư còn lại lần lượt được đánh số theo ngược chiều kim đồng hồ. Khi tọa độ bị thay đổi thì vị trí các góc phần tư cũng thay đổi theo, nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện đại số ở trên. Các điểm trên trục không xác định thuộc bất cứ góc phần tư nào.

Giống như trên trục một chiều, khi có hai điểm trên mặt phẳng thì chúng ta có thể tính khoảng cách giữa chúng. Một cách chi tiết, cho hai điểm $P(x_P; y_P)$ và $Q(x_Q; y_Q)$, theo định lí Pi-ta-go, khoảng cách giữa hai điểm đó là

$$d(P;Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}.$$

Bài 2: Biểu diễn các điểm sau trên hệ tọa độ vuông góc: $A(2;3)$, $B(-1;2)$, $C(-3;0)$, $D(0;4)$, $P(12t;-3t)$, $Q(20t;12t)$ (với $t \in \mathbb{R}$). Xác định góc phần tư hoặc trục tọa độ của mỗi điểm. Sau đó, tính khoảng cách giữa những cặp điểm sau: A và B, C và D, P và Q.

Lời giải cho bài 2:

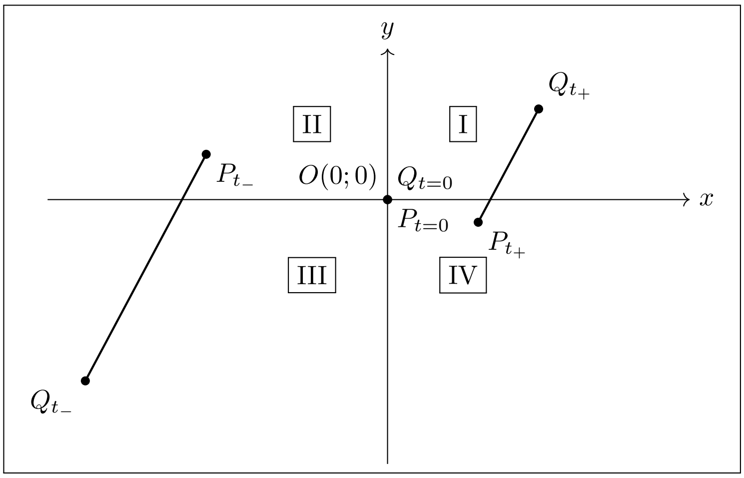


Hình 0.11: Biểu diễn các điểm A, B, C, D trong bài 2

Các góc phần tư hay trục số mà các điểm thuộc về có thể được xác định như hình 0.11. Theo một cách khác, về mặt đại số, có:

- $A(2;3)$: $x > 0$, $y > 0 \implies \boxed{A \text{ thuộc góc phần tư thứ I}}$;
- $B(-1;2)$: $x < 0$, $y > 0 \implies \boxed{B \text{ thuộc góc phần tư thứ II}}$;
- $C(-3;0)$: $x < 0$, $y = 0 \implies \boxed{C \text{ thuộc trục hoành}}$;
- $D(0;4)$: $x = 0$, $y > 0 \implies \boxed{D \text{ thuộc trục tung}}$;

Để xác định được vị trí của hai điểm P và Q, cần phải xét giá trị của t. Nếu t dương, thì P và Q sẽ có tọa độ là $P_{t_+}(12t;-3t)$ và $Q_{t_+}(20t;12t)$ với $x_{P_{t_+}} > 0$, $y_{P_{t_+}} < 0$ và $x_{Q_{t_+}} > 0$, $y_{Q_{t_+}} > 0$. Khi này, chúng ta có thể kết luận rằng P thuộc góc phần tư thứ IV và Q thuộc góc phần tư thứ I. Ngược lại, nếu t âm, thì P và



Hình 0.12: Biểu diễn các điểm P, Q trong bài 2 theo các trường hợp

Q sẽ có tọa độ là $P_{t_-}(12t;-3t)$ và $Q_{t_-}(20t;12t)$ với $x_{P_{t_-}} < 0$, $y_{P_{t_-}} > 0$ và $x_{Q_{t_-}} < 0$, $y_{Q_{t_-}} < 0$. Khi này, P thuộc góc phần tư thứ II và Q thuộc góc phần tư thứ III. Cuối cùng, nếu $t = 0$, thì cả hai điểm đều có tọa độ là $(0;0)$, tức là chúng trùng với gốc tọa độ.

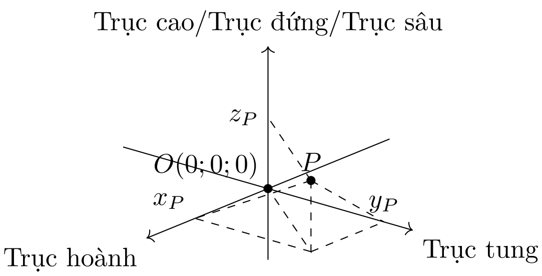
Tóm tắt lại, xét các trường hợp về vị trí tương đối của P và Q như hình 0.12, chúng ta có:

$$\boxed{\begin{cases} t > 0 \implies P \in \text{góc phần tư thứ IV}, Q \in \text{góc phần tư thứ I} \\ t < 0 \implies P \in \text{góc phần tư thứ II}, Q \in \text{góc phần tư thứ III} \\ t = 0 \implies P = \text{gốc tọa độ}, Q = \text{gốc tọa độ} \end{cases}}.$$

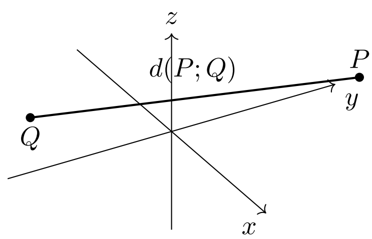
Khoảng cách giữa những cặp điểm được yêu cầu là:

- $d(A;B) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-2)^2} = \boxed{\sqrt{10} \approx 3{,}1623}$;
- $d(C;D) = \sqrt{(-3-0)^2 + (0-4)^2} = \boxed{5}$;
- $d(P;Q) = \sqrt{(12t-20t)^2 + (-3t-12t)^2} = \boxed{13|t|}$.

0.1.3 Không gian ba chiều và hướng tam diện



Hình 0.13: Hệ tọa độ vuông góc ba chiều



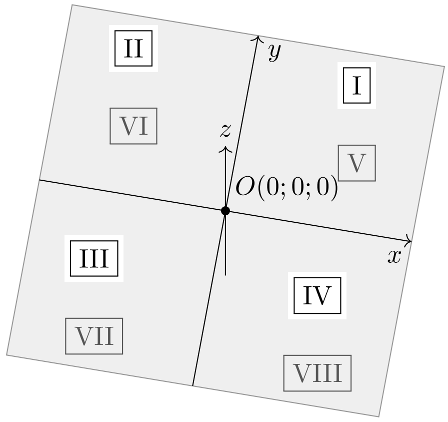
Hình 0.14: Khoảng cách giữa hai điểm trong không gian ba chiều

Đương nhiên sẽ có một vài trường hợp mà biểu diễn hai chiều không thể đủ. Khi này, mở rộng hơn nữa, chúng ta cũng có thể làm những điều trên không gian ba chiều tương tự với khi ở trục số một chiều hay mặt phẳng hai chiều. Khi đó, chúng ta sẽ có một hệ tọa độ ba chiều với ba trục vuông góc với nhau, được gọi là *hệ tọa độ vuông góc ba chiều*. Mỗi điểm trong không gian sẽ có tọa độ là $(x;y;z)$ với x, y, z là các hoành độ, tung độ và cao độ tương ứng. Khoảng cách giữa hai điểm trong không gian ba chiều được tính theo công thức

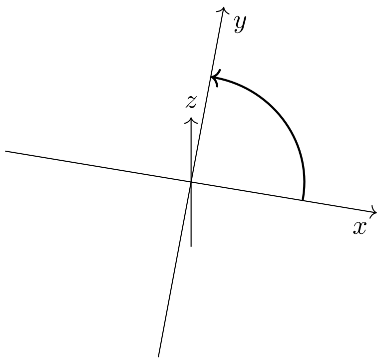
$$d(P;Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

Và cũng tương tự như với mặt phẳng hai chiều, ba trục sẽ chia không gian thành tám phần, gọi là *góc phần tám không gian*. Các phần này được đánh số từ I đến VIII như sau: Nhìn từ phía dương của trục cao, các góc phần tám được đánh dấu ngược chiều kim đồng hồ. Các góc phần tám I, II, III, IV nằm trên mặt phẳng Oxy và được xác định tương tự như các góc phần tư trong mặt phẳng hai chiều. Các góc phần tám V, VI, VII, VIII nằm dưới mặt phẳng Oxy và được xác định tương tự như trên. Các góc phần tám này được biểu diễn trong hình 0.15. Về mặt đại số,

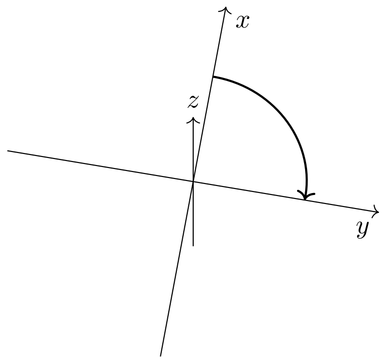
- Góc phần tám I: $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;
- Góc phần tám II: $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$;
- Góc phần tám III: $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$;
- Góc phần tám IV: $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$;
- Góc phần tám V: $x > 0$, $y > 0$, $z < 0$;
- Góc phần tám VI: $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$;
- Góc phần tám VII: $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$;
- Góc phần tám VIII: $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$.



Hình 0.15: Góc phần tám không gian



Hình 0.16: Tam diện thuận



Hình 0.17: Tam diện nghịch

Trên hệ tọa độ không gian, chúng ta cần phải quan tâm thêm xem là ba trục tạo thành *hướng tam diện* nào. Ta nhìn từ phía dương của trục cao, khi này, nếu trục hoành xoay sang trục tung theo hướng ngược chiều kim đồng hồ, thì hướng tam diện được gọi là *hướng tam diện thuận*. Ngược lại, nếu trục hoành xoay sang trục tung theo hướng cùng chiều kim đồng hồ, thì hướng tam diện được gọi là *hướng tam diện nghịch*. Một cách khác là dùng quy tắc bàn tay phải: nắm tay phải vào trục cao, khi này, ngón tay cái chỉ hướng của trục cao. Nếu hướng nắm ngón tay theo hương quay từ trục hoành sang trục tung, thì hướng tam diện là thuận. Ngược lại, nếu hướng nắm ngón tay theo hướng quay từ trục tung sang trục hoành, thì hướng tam diện là nghịch.

Chúng ta đã có phân bổ vị trí của các góc phần tám trong hệ tọa độ tam diện thuận. Lặp lại lập luận với cùng biểu thức đại số, chúng ta có thể phân bổ vị trí của các góc phần tám trong hệ tọa độ tam diện nghịch. Thông thường, hệ tọa độ tam diện thuận được ưa dùng hơn.

Bài 3: Trung điểm của một đoạn thẳng AB là điểm M trong không gian khi và chỉ khi M thỏa mãn $d(A; M) = d(B; M) = \frac{d(A;B)}{2}$. Chứng minh rằng với tọa độ của M là

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

thì M là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Vẽ ví dụ với $A(1; 2; 3)$ và $B(-1; 0; 4)$.

Lời giải cho bài 3:

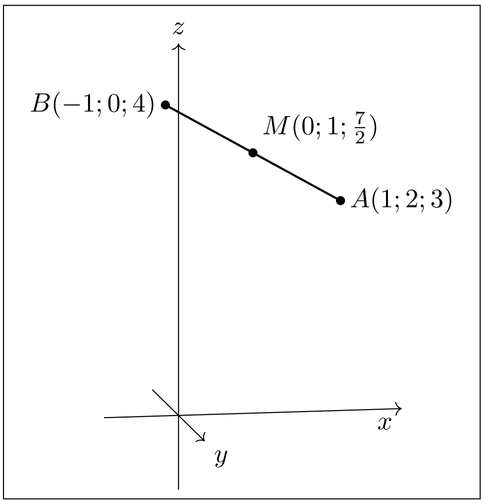
Áp dụng công thức khoảng cách để tính khoảng cách giữa hai điểm A và M, có:

$$\begin{aligned} d(A;M) &= \sqrt{\left(x_A - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y_A - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + \left(z_A - \frac{z_A + z_B}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_A - x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A - y_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_A - z_B}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \frac{d(A;B)}{2}. \end{aligned}$$

Một cách tương tự, chúng ta cũng có $d(B;M) = \frac{d(A;B)}{2}$. Như vậy, M là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm A và B. Qua đó, có được điều phải chứng minh.

Vẽ đồ thị ví dụ với $A(1;2;3)$ và $B(-1;0;4)$, chúng ta được đồ thị ở hình 0.18.

Công thức về vị trí tọa độ trung điểm được cho trong bài là công thức đơn giản và hữu dụng. Bạn đọc nên học thuộc công thức này.



Hình 0.18: Ví dụ trung điểm với $A(1;2;3)$ và $B(-1;0;4)$

0.2 Hàm số một biến

0.2.1 Định nghĩa hàm số và những khái niệm liên quan

Chúng ta gọi f là một *hàm số* (hay *hàm*) đi từ tập X đến tập Y khi và chỉ khi với mọi $x \in X$, gọi là *tập xác định*, thông qua mối liên hệ f có một và chỉ một $y \in Y$ tương ứng với x. Câu vừa rồi có thể được tóm gọn trong một vài kí hiệu:

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto y. \end{aligned}$$

Khi này, chúng ta có thể viết mối liên hệ hàm số này dưới dạng biểu thức giải tích $y = f(x)$, gọi y là hàm của x. Tuy nhiên, cần phải để ý rằng, thông qua định nghĩa này, mặc dù mọi x trong X phải có đầu ra trong Y, không phải mọi y trong Y đều phải có đầu vào trong X. Nói cách khác, tập tất cả các giá trị đầu ra có thể của $y = f(x)$, gọi là *tập giá trị*, là tập con của tập Y.

Khi chúng ta có định nghĩa hàm số thì chúng ta cũng sẽ có những khái niệm liên quan. Khi f là một hàm số, thì bất cứ giá trị a thuộc tập xác định để $f(a) = 0$ đều được gọi là *nghiệm* của f. Mở rộng ra, với f và g là hai hàm số, bất cứ giá trị a thỏa mãn $f(a) = g(a)$ thì a được gọi là nghiệm của *phương trình* $f(x) = g(x)$. Hơn thế nữa, nếu thay dấu $=$ trong câu vừa trước bởi các dấu $<$, $>$, $\leq$[2], $\geq$[3], $\neq$ thì chúng ta có định nghĩa cho nghiệm của *bất phương trình*[4]. Lấy ví dụ, với f và g là hai hàm số, giá trị a để $f(a) \neq g(a)$ thì a được

[2] Còn những kí hiệu khác cho dấu nhỏ hơn hoặc bằng là $\leqq$, $\leqslant$.

[3] Còn những kí hiệu khác cho dấu lơn hơn hoặc bằng là $\geqq$, $\geqslant$.

[4] Ngoài những dấu biểu diễn bất phương trình được kể, còn những dấu như $\nless$ (không nhỏ hơn), $\ngtr$ (không lớn hơn), $\nleq$, $\nleqq$ hay $\nleqslant$ (không nhỏ hơn hoặc bằng), $\ngeq$, $\ngeqq$ hay $\ngeqslant$ (không lớn hơn hoặc bằng), và những dấu bị nguyền rủa $\lessgtr$ (nhỏ hơn hoặc lớn hơn), $\lesseqgtr$ hay $\lesseqqgtr$ (nhỏ hơn, lớn hơn hoặc bằng). Bạn đọc có thể sẽ muốn thêm các dấu $\not\lessgtr$ (không nhỏ hơn hay lớn hơn) và cặp

gọi là nghiệm của bất phương trình $f(x) \neq g(x)$. Kết hợp nhiều phương trình hay bất phương trình, chúng ta có một *hệ*. Ví dụ:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ \alpha(y) \neq \beta(z) \end{cases}.$$

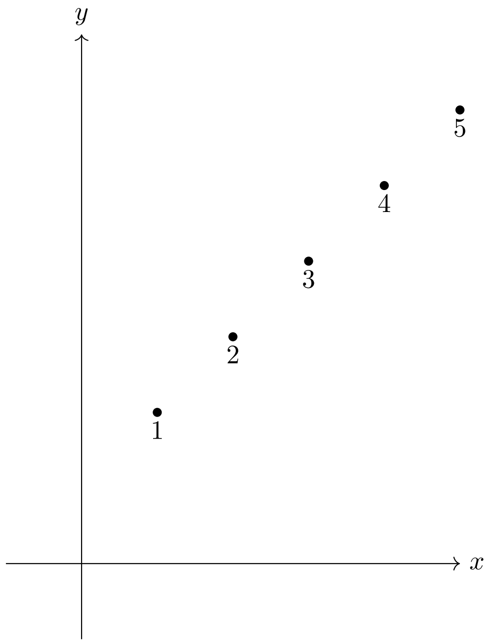
Để thỏa mãn hệ thì mỗi thành phần trong hệ đều phải thỏa mãn. Một khái niệm liên quan mật thiết là *giải* phương trình, bất phương trình, hay hệ (để ngắn gọn, chúng ta sẽ gọi phương trình, bất phương trình và hệ thành một cụm từ chung là "phương bất hệ"). Để làm được việc này, yêu cầu cần tìm tất cả các bộ số để phương bất hệ được cho thỏa mãn.

Nếu chỉ có số với chữ không thì hàm số sẽ trở nên rất nhàm chán, cho nên người ta đã nghĩ ra phương pháp biểu diễn hàm số qua đồ thị. Để biểu diễn một hàm số $y = f(x)$ với x và y là hai số thực, chỉ cần vẽ tất cả các cặp tọa độ $(x; y)$ thỏa mãn hàm f trên đồ thị[5]. Do hàm số biểu thị mối liên hệ giữa hai đại lượng, chúng ta dùng đồ thị hai chiều để biểu diễn mối liên hệ giữa chúng. Chúng ta sẽ lấy ví dụ cho hàm sau được cho trong bảng 0.1 với tập xác định chỉ có 5 số.

x	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	2	3	4	5	6

Bảng 0.1: Ví dụ của $y = f(x)$

Chúng ta nhìn thấy rằng có 5 bộ số (x,y) là $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$, $(4; 5)$, $(5; 6)$ thỏa mãn hàm f (theo đúng định nghĩa của hàm). Do đó, chúng ta có đồ thị như hình 0.19.



Hình 0.19: Đồ thị cho ví dụ của $y = f(x)$ được cho ở bảng 0.1

Một cách tương tự, chúng ta cũng có thể biểu diễn phương bất hệ thông qua việc vẽ đồ thị chứa các nghiệm của phương bất hệ đó. Có bao nhiêu ẩn số trong phương bất hệ, đồ thị sẽ có bấy nhiêu chiều. Các

---

dấu $\nlessgtr$, $\not\lesseqgtr$ (không nhỏ hơn, lớn hơn hay bằng) làm dấu cho bất phương trình. Tuy nhiên, trên tập số thực, $\nlessgtr$ tương đương với dấu $=$, và bất phương trình với $\nlessgtr$, $\not\lesseqgtr$ thì không bao giờ thỏa mãn. Về mặt ứng dụng, ngoài những môn nặng về nền tảng của toán như đại số cao cấp, những dấu kể trên gần như không bao giờ được sử dụng.

[5] "Chỉ cần"? Đương nhiên là không đơn giản như vậy. Với hàm có vô số điểm thì thông thường hàm được biểu diễn bằng cách nối một số hữu hạn điểm trên đồ thị trên một khoảng không gian hữu hạn với hi vọng rằng người đọc có thể tự suy luận được hướng đi của đồ thị bên ngoài khu vực vẽ. Mặc dù vậy, vẫn có trường hợp mà cách vẽ này hoàn toàn bất lực. Ví dụ như hàm Đi-rích-lê:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ nếu } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

với $\mathbb{Q}$ là tập số hữu tỉ. Hàm này liên tục "nhảy múa" từ 0 đến 1 và ngược lại, khiến cho việc vẽ đồ thị trở thành một nhiệm vụ bất khả thi.

Những hàm "dị thường" như vậy từng khiến không ít nhà toán học phải vò đầu bứt tai. Thế nhưng, chính chúng lại đóng vai trò quan trọng trong việc kiểm tra độ chặt chẽ của các định lý. Nhờ có những ví dụ cực đoan như hàm Đi-rích-lê, chúng ta mới có thể xác định rõ ranh giới của lý thuyết, từ đó giúp vật lý yên tâm áp dụng các định lý ấy vào những hàm số thông thường hơn trong thực tế.

ví dụ cụ thể sẽ được thể hiện trong phần bài tập của phần này. Về mặt lợi ích của việc sử dụng đồ thị, biểu diễn hình học các đại lượng đại số là một trong những cách hữu hiệu để mở rộng cảm nhận về đối tượng đang nghiên cứu.

Bài 4: Mỗi phần trong bài tập sau bao gồm mối liên hệ giữa x và y. Trong mỗi phần, y có phải là hàm của x hay không? Trong trường hợp y là hàm số của x, xác định tập xác định và tập giá trị của hàm số đó. Còn trong trường hợp ngược lại, giải thích tại sao y lại không phải là hàm số của x.

1.

x	1	2	3	4	5
y	2	3	4	5	6

;

2.

x	0	-1	1	2	-3
y	0	0	0	0	0

;

3.

x	15	15	16	16	17
y	123	134	578	426	348

;

4.

x	0	-17	3	55	-17
y	4586	1024	4586	4586	1024

;

5. x là số chỉ tháng và y là số ngày trong tháng x.

Lời giải cho bài 4:

1. $\boxed{y \text{ là hàm của } x}$ với tập xác định $X = \boxed{\{1; 2; 3; 4; 5\}}$ và tập giá trị $Y = \boxed{\{2; 3; 4; 5; 6\}}$.
2. $\boxed{y \text{ là hàm của } x}$ với tập xác định $X = \boxed{\{0; -1; 1; 2; -3\}}$ và tập giá trị $Y = \boxed{\{0\}}$.
3. $\boxed{y \text{ không phải là hàm của } x}$ do khi x có giá trị 15 thì y có hai giá trị 123 và 134.
4. $\boxed{y \text{ là hàm của } x}$ với tập xác định $X = \boxed{\{0; -17; 3; 55\}}$ và tập giá trị $Y = \boxed{\{4586; 1024\}}$. Để ý rằng đầu vào $x = -17$ luôn ứng với đầu ra $y = 1024$.
5. $\boxed{y \text{ không là hàm của } x}$ do khi $x = 2$ thì y có hai giá trị 28 và 29. Mặc dù cách viết có thể ám chỉ $y = f(x)$ với f là hàm "số ngày trong tháng", nhưng f không phải là hàm số do "dính" trường hợp ngoại lệ.

Bài 5: Vẽ đồ thị của phương trình $\mathcal{P}$, với các định nghĩa được cho. Hàm có tập xác định là bộ số đầu vào cho ở trong bảng. Để ý số ẩn của phương trình để chọn số chiều của đồ thị cho phù hợp.

1. $\mathcal{P} : x^2 - 1 = 0$ với $x \in \mathbb{R}$;

2.

x	-1	1	-2	2	-3	3
$f(x)$	0	0	4	3	7	0

và $\mathcal{P} : f(x) = 0$;

3.

x	-1	1	-2	2	-3	3
$f(x)$	0	0	4	3	7	0

và $\mathcal{P} : f(x) = x^2 - 1$;

4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	7	11	13
$g(x)$	1	3	5	7	9	11

và $\mathcal{P} : f(x) = g(x)$;

5.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	7	11	13
$g(x)$	1	3	5	7	9	11

và $\mathcal{P} : f(x) = g(y)$;

6.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	7	11	13

và $\mathcal{P} : f(x) = 2b - 1$ với $b \in \mathbb{R}$;

7.

x	-1	1	-2	2	-3	3
$f(x)$	0	0	4	3	7	0

và $\mathcal{P} : f(x) = f(2b - 1)$;

8.

x	-1	1	-2	2	-3	3
$f(x)$	0	0	4	3	7	0

và $\mathcal{P} : f(a) + f(b) = f(c)$;

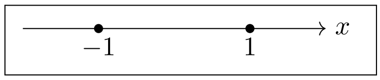
Lời giải cho bài 5:

1. $\mathcal{P}$ là phương trình chỉ có một ẩn x, do đó đồ thị của $\mathcal{P}$ chỉ là đồ thị một chiều trên một trục số biểu diễn cho x.

Giải phương trình:

$$\begin{aligned} & x^2 - 1 = 0 \\ \iff & x^2 = 1 \\ \iff & x \in \{-1; 1\} \end{aligned}$$

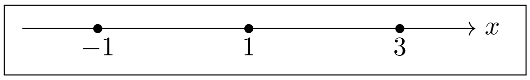
và từ đó, đồ thị của $\mathcal{P}$ có được như hình 0.20.



Hình 0.20: Đồ thị phần 1 bài 5

2. $\mathcal{P}$ là phương trình chỉ có một ẩn x, do đó đồ thị của $\mathcal{P}$ chỉ là đồ thị một chiều trên một trục số biểu diễn cho x.

Có ba giá trị để $f(x)$ bằng 0: $x \in \{-1; 1; -3\}$. Chúng ta có đồ thị của $\mathcal{P}$ ở hình 0.21.



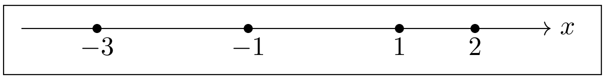
Hình 0.21: Đồ thị phần 2 bài 5

3. Tập xác định của $f(x)$ là $\{-1; 1; -2; 2; -3; 3\}$, do đó, để $\mathcal{P}$ thỏa mãn thì x chỉ có thể nhận các giá trị trong vùng tập xác định.

Kẻ bảng so sánh:

x	-1	1	-2	2	-3	3
$f(x)$	0	0	4	3	7	0
$x^2 - 1$	0	0	3	3	7	7

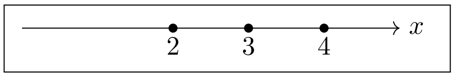
Bảng 0.2: Giá trị của $f(x)$ và $x^2 - 1$ ứng với x



Hình 0.22: Đồ thị phần 3 bài 5

Nhận thấy rằng $\mathcal{P}$ chỉ đúng khi $x \in \{-1; 1; -3; 2\}$ và chúng ta có đồ thị là hình 0.22.

4. Nhìn vào bảng được cho, có $f(x) = g(x)$ khi và chỉ khi $x \in \{2; 3; 4\}$. Do đó, đồ thị của $\mathcal{P}$ có được như hình 0.23.



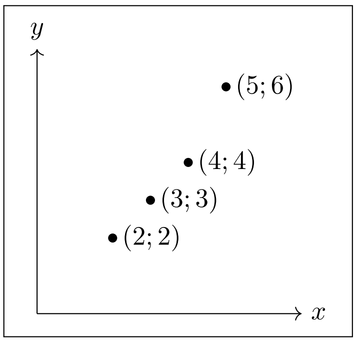
Hình 0.23: Đồ thị phần 4 bài 5

5. $\mathcal{P}$ là phương trình có hai ẩn x và y, do đó đồ thị của $\mathcal{P}$ là một mặt phẳng hai chiều. Coi như trục hoành biểu diễn cho x và trục tung biểu diễn cho y.

Để có thể vẽ được đồ thị của $\mathcal{P}$, hiển nhiên nhìn ra được rằng cần phải có những điểm $(x; y)$ để hai giá trị $f(x)$ và $g(y)$ bằng nhau. Và để làm được điều đó, trước hết, chúng ta sẽ tìm xem giá trị bằng nhau của $f(x)$ với $g(y)$ này bằng bao nhiêu. Gọi chung giá trị bằng nhau này là B_n. Kẻ lại bảng so sánh thành bảng 0.3, với B_n là giá trị đầu ra và x, y là giá trị lần lượt đưa vào hai hàm f và g để có giá trị đầu ra đó. Và từ đó, chúng ta có đồ thị của $\mathcal{P}$ là hình 0.24.

B_n	3	5	7	11
x	2	3	4	5
y	2	3	4	6

Bảng 0.3: Giá trị của x và y ứng với B_n



Hình 0.24: Đồ thị phần 5 bài 5

6. $\mathcal{P}$ là phương trình có hai ẩn x và b, do đó đồ thị của $\mathcal{P}$ là một mặt phẳng hai chiều. Coi như trục hoành biểu diễn cho x và trục tung biểu diễn cho b.

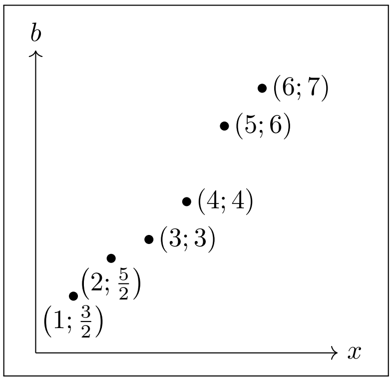
Giải ngược b từ $f(x)$:

$$\begin{aligned} & f(x) = 2b - 1 \\ \iff & b = \frac{f(x) + 1}{2}. \end{aligned}$$

Từ đây, chúng ta có thể thêm giá trị của b vào bảng được cho thành bảng 0.4

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	7	11	13
b	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	4	6	7

Bảng 0.4: Giá trị của b ứng với x



Hình 0.25: Đồ thị phần 6 bài 5

Qua bảng đó, vẽ được đồ thị của $\mathcal{P}$ như hình 0.25.

7. Nhìn vào bảng định nghĩa được cho, $f(x)$ có thể nhận các giá trị là $\{0; 3; 4; 7\}$.

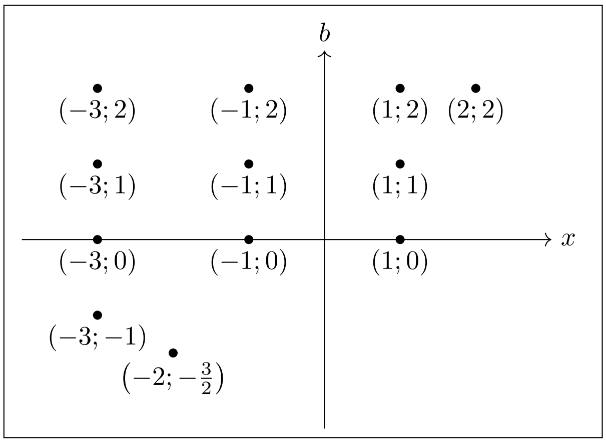
Khi $f(x) \neq 0$, chỉ có một giá trị đầu vào cho f sao cho $f(x)$ đạt được giá trị đầu ra. Ví dụ, chỉ có đầu vào $x = 2$ mới có $f(x) = 3$. Do đó, khi $f(x) \neq 0$, $x = 2b - 1$. Biến đổi đại số cơ bản để có $b = \frac{x+1}{2}$. Lập bảng:

x	-2	2	-3
$b = \frac{x+1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	-1

Bảng 0.5: Giá trị của cặp $(x; b)$ với $f(x) \neq 0$

Khi $f(x) = 0$, x và $2b - 1$ có thể nhận bất cứ giá trị nào trong tập $\{-1; 1; -3\}$. Từ đó, có thể chọn $x \in \{-1; 1; 3\}$ và giải đại số để chọn $b \in \left\{\frac{-1+1}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{3+1}{2}\right\} = \{0; 1; 2\}$. Các cặp $(x; b)$ thỏa mãn là $(x; b) \in \{(-1; 0); (-1; 1); (-1; 2); (1; 0); (1; 1); (1; 2); (-3; 0); (-3; 1); (-3; 2)\}$.

Cuối cùng, kết hợp hai trường hợp, chúng ta có đồ thị cho $\mathcal{P}$:



Hình 0.26: Đồ thị phần 7 bài 5

8. $\mathcal{P}$ là phương trình có ba ẩn a, b và c, do đó đồ thị của $\mathcal{P}$ là một không gian ba chiều với các trục hoành, trục tung và trục cao tương ứng là a, b và c.

Theo $\mathcal{P}$, chúng ta cần phải chọn ba số trong tập giá trị của f để hai trong ba số có tổng bằng số còn lại. Từ bảng, nhận thấy rằng, chỉ có thể có hai tổng $4 + 3 = 7$ và $0 + 0 = 0$.

Chúng ta cần tìm tất cả các bộ ba (a, b, c) thỏa mãn $f(a) + f(b) = f(c)$. Xét hai trường hợp sau:

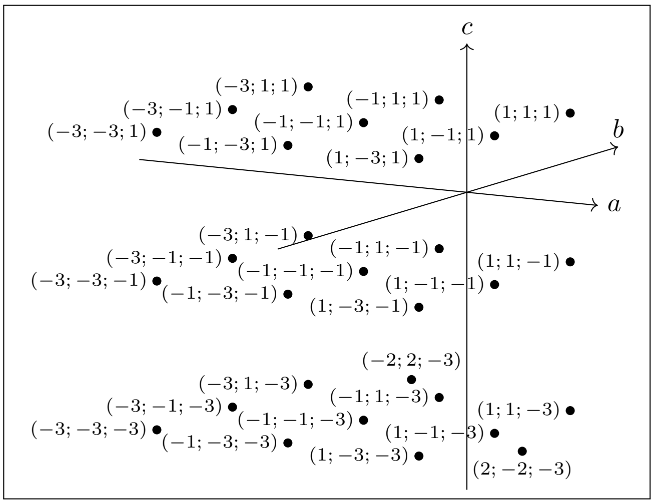
Trường hợp 1: Tổng hai số khác 0. Để $f(a) + f(b) = f(c)$, chỉ có thể xảy ra khi $3 + 4 = 7$. Do đó, $(f(a); f(b); f(c))$ phải là $(3; 4; 7)$ hoặc $(4; 3; 7)$. Tra ngược lại bảng giá trị, chúng ta có hai nghiệm:

- $f(a) = 3, f(b) = 4 \implies a = 2, b = -2 \implies c = -3$ (vì $f(-3) = 7$)

- $f(a) = 4, f(b) = 3 \implies a = -2, b = 2 \implies c = -3$

Trường hợp 2: Tất cả bằng 0. Khi $f(a) = f(b) = f(c) = 0$, từ bảng định nghĩa, $f(x) = 0$ khi $x \in \{-3; -1; 1\}$. Do đó, a, b, c có thể nhận bất kỳ giá trị nào trong tập $\{-3; -1; 1\}$. Có tổng cộng $3^3 = 27$ bộ ba thỏa mãn trong trường hợp này.

Kết hợp hai trường hợp, đồ thị của $\mathcal{P}$ sẽ gồm 29 điểm trong không gian 3 chiều (2 điểm từ trường hợp 1 và 27 điểm từ trường hợp 2), được biểu diễn trong hình 0.27.



Hình 0.27: Đồ thị phần 8 bài 5

Bài 6: Vẽ đồ thị của hệ phương trình $\mathcal{P}$, với các định nghĩa đã cho. Hàm có tập xác định là bộ số đầu vào cho ở trong bảng.

1.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	-1	-1	-2	-3	-3

,

y	0	-2	4	-6	8	-10
$g(y)$	-1	-2	-3	-7	-8	-9

,

z	-1	1	-2	0	-4	4
$h(z)$	2	1	0	-1	-2	-3

và $\mathcal{P} : f(x) = g(x) = h(x)$;

2.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	-1	-1	-2	-3	-3

,

y	0	-2	4	-6	8	-10
$g(y)$	-1	-2	-3	-7	-8	-9

,

z	-1	1	-2	0	-4	4
$h(z)$	2	1	0	-1	-2	-3

và $\mathcal{P} : f(a) = g(b) = h(c)$;

3.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	-1	-1	-2	-3	-3

,

y	0	-2	4	-6	8	-10
$g(y)$	-1	-2	-3	-7	-8	-9

,

z	-1	1	-2	0	-4	4
$h(z)$	2	1	0	-1	-2	-3

và $\mathcal{P} : \begin{cases} f(o) = g(p) \\ f(p+1) = h(q) \end{cases}$.

4.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	-1	-1	-2	-3	-3

,

y	0	-2	4	-6	8	-10
$g(y)$	-1	-2	-3	-7	-8	-9

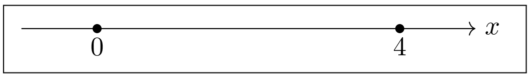
,

z	-1	1	-2	0	-4	4
$h(z)$	2	1	0	-1	-2	-3

và $\mathcal{P} : \begin{cases} f(m) = n \\ g(n) = h(w) \end{cases}$.

Lời giải cho bài 6:

1. Giá trị đầu vào để f, g, h đều có cùng một đầu ra là $x \in \{0; 4\}$. Vậy, chúng ta có đồ thị như hình 0.28.

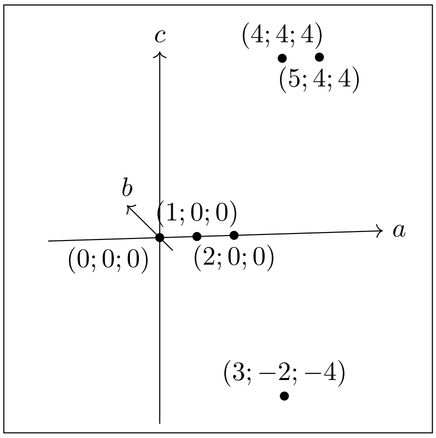


Hình 0.28: Đồ thị phần 1 bài 6

2. Trước hết, cần tìm những giá trị chung trong tập giá trị của f, g, h. Nhận thấy rằng, có $-1, -2$ và -3 là những giá trị chung trong đó.

- Với đầu ra là -1, chúng ta có $f(a) = g(b) = h(c) = -1$. Từ đó, chúng ta có $a \in \{0; 1; 2\}$ và $b = c = 0$.
- Trong trường hợp kết quả của hàm là -2, $f(a) = g(b) = h(c) = -2$. Từ đó, bộ ba $(a; b; c)$ có giá trị là $(3; -2; -4)$.
- Trong trường hợp kết quả của hàm là -3, $f(a) = g(b) = h(c) = -3$. Từ đó, $(a; b; c) \in \{(4; 4; 4) ; (5; 4; 4)\}$.

Kết hợp ba trường hợp, xây dựng không gian tọa độ, chúng ta có hình 0.29.

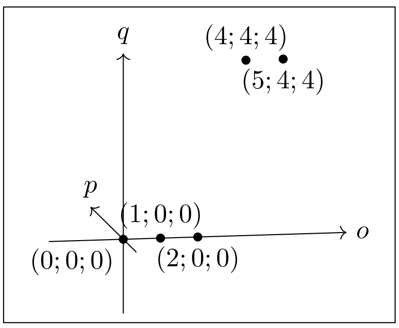


Hình 0.29: Đồ thị phần 2 bài 6

3. Để f và g nhận cùng một giá trị thì giá trị đầu ra đó, theo bảng định nghĩa được cho, kết quả mà hàm trả ra phải là -1, -2 hoặc -3.

- Tại $f(o) = g(p) = -1$, $o \in \{0; 1; 2\}$ và $p = 0$. Từ đó, $f(p + 1) = f(1) = -1$. Khi này, $h(q) = -1 \iff q = 0$.
- Tại $f(o) = g(p) = -2$, sau khi tra bảng, chúng ta thấy được rằng $\begin{cases} o = 3 \\ p = -2 \end{cases}$; suy ra $f(p+1) = f(-1)$, Tuy nhiên, -1 không thuộc tập xác định của f. Vậy, chúng ta sẽ loại trường hợp này.
- Tại $f(o) = g(p) = -3$, $o \in \{4; 5\}$ và $p = 4$. Từ đó, $f(p + 1) = f(5) = -3$. Khi này, $h(q) = -3 \iff q = 4$.

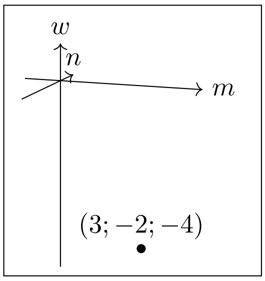
Cuối cùng, vẽ đồ thị để được hình 0.30.



Hình 0.30: Đồ thị phần 3 bài 6

4. Theo đề, chúng ta cần tìm những bộ $(m; n; w)$ thỏa mãn $\mathcal{P}$, trong đó có $g(n) = h(w)$. Cho nên, n phải thuộc tập xác định của g. Nhìn vào bảng, tập xác định đó là $\{0; -2; 4; -6; 8; -10\}$. Tuy nhiên, cũng có $f(m) = n$, cho nên n vừa phải thuộc tập giá trị của f, hay $n \in \{-1; -2; -3\}$. Lấy giao của hai tập đó, chúng ta có $n = -2$. Từ đó, giải $f(m) = -2$ để có $m = 3$. Thêm vào đó, $h(w) = g(-2) = -2 \iff w = -4$.

Bộ số duy nhất thỏa mãn hệ phương trình $\mathcal{P}$ là $(m; n; w) = (3; -2; -4)$. Đồ thị của $\mathcal{P}$ là hình 0.31.



Hình 0.31: Đồ thị phần 4 bài 6

0.2.2 Những hàm số sơ cấp

Trong phần này, các hàm số quen thuộc sẽ được nhắc lại. Đây là những hàm hay thấy nhất trong quá trình học phần lớn các môn khoa học tự nhiên.

Đa thức

Đầu tiên, chúng ta có hàm *đa thức*, thông thường được biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

với n là một số nguyên không âm, a_i là các số thực, gọi là các *hệ số*, với mọi i nguyên nằm trong đoạn $[0, n]$ và $a_n \neq 0$. Khi này, n được gọi là *bậc* của đa thức. Ví dụ:

- $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ là một đa thức bậc 2 với các hệ số $a_2 = 2$, $a_1 = 3$, $a_0 = 1$;
- $g(y) = y^3 - 4y$ là một đa thức bậc 3 với các hệ số $b_3 = 1$, $b_2 = 0$, $b_1 = -4$, $b_0 = 0$;
- $h(z) = 5$ là một đa thức bậc 0 với hệ số $c_0 = 5$;

Tính toán một số giá trị mẫu:

- $p(1) = 7 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 9 = 14$ với $q(t) = 7t^4 - 2t^2 + 9$ là một đa thức bậc 4 với các hệ số $d_4 = 7$, $d_3 = 0$, $d_2 = -2$, $d_1 = 0$, $d_0 = 9$;
- $q(2) = -3 \cdot 2 + 8 = 2$ với $q(r) = -3r + 8$ là một đa thức bậc 1 với các hệ số $e_1 = -3$, $e_0 = 8$.

Khi đa thức có bậc bằng 0, hay $f(x) = P_0(x) = a_0$, thì được gọi là *đa thức hằng* hay *hàm hằng*. Một trường hợp đặc biệt là khi $f(x) = 0$ [6]. Nếu hàm này là đa thức, theo định nghĩa, hàm này có bậc là 0 và hệ số $a_0 = 0$. Tuy nhiên, cũng theo định nghĩa thì hệ số đầu phải khác 0. Vì vậy, hàm không có bậc và không được gọi là đa thức. Nhưng, do hàm nhận giá trị cố định với mọi x nên vẫn được gọi là hàm hằng [7].
Bài 7: Phác thảo đồ thị của những hàm sau:

1. $f(x) = x + 2$;
2. $f(x) = x^2 + 2x + 3$;
3. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$;
4. $f(x) = 2$.

Lời giải cho bài 7:
Khả năng rất cao là bạn đọc có kết nối với mạng; vì vậy, bạn đọc có thể dùng những phần mềm vẽ đồ thị để nhanh chóng có hình vẽ. Tuy nhiên, nếu không có thiết bị điện tử thì bạn đọc vẫn có thể vẽ đồ thị bằng giấy và bút bằng cách lấy nhiều điểm ví dụ cho x và tính toán giá trị $f(x)$ và sau đó nối chúng lại với nhau.

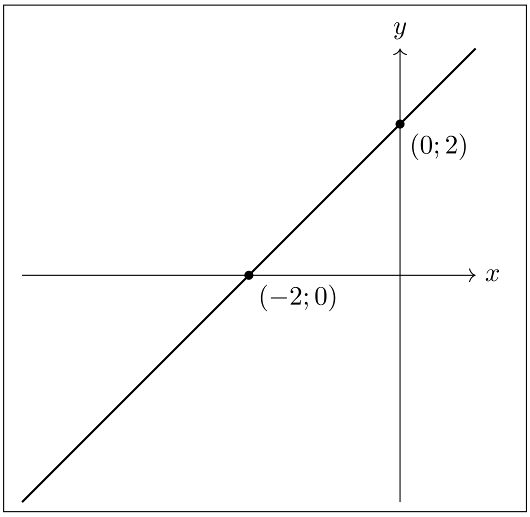
Bạn đọc có thể để ý rằng là không phải lúc nào cũng đặt gốc tọa độ ở vị trí chính giữa. Trong nhiều trường hợp việc đặt chính giữa sẽ làm mất đi đồ thị và làm cho đồ thị lệch ra khỏi khu vực vẽ. Hơn nữa, hai trục sẽ có tỉ lệ khác nhau. Điều quan trọng nhất của những bài vẽ đồ thị trong vật lí không phải là căn ke chính xác vị trí từng điểm, mà là nhận ra được dáng điệu của đồ thị và vị trí tương đối giữa các điểm trên

[6] Sẽ có nhiều tài liệu viết "$f(x) \equiv 0$" thay vì "$f(x) = 0$" để phân biệt giữa khẳng định hai hàm là như nhau so với một phương trình. Tác giả không muốn bạn đọc phải bận tâm với nhiều kí hiệu lạ, cho nên tác giả sẽ cố gắng dùng những kí hiệu cũ. Bạn đọc có thể tự suy luận ý nghĩa thông qua ngữ cảnh.

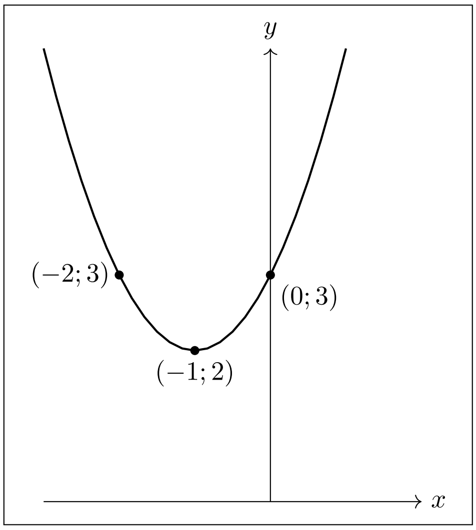
[7] Đa số những nhà toán học không coi $f(x) = 0$ là đa thức bậc 0 do nhiều tính chất của đa thức bị phá vỡ khi gặp trường hợp này. Do đó, $f(x) = 0$ chỉ được coi là "hàm hằng" chứ không phải "*đa thức* hằng". Trong tài liệu này, trở về sau sẽ chỉ có thuật ngữ "hàm hằng" được sử dụng.

đồ thị đó. Qua đó, chúng ta rút ra được những tính chất toán học cần thiết để phục vụ những yêu cầu cụ thể trong bài toán.

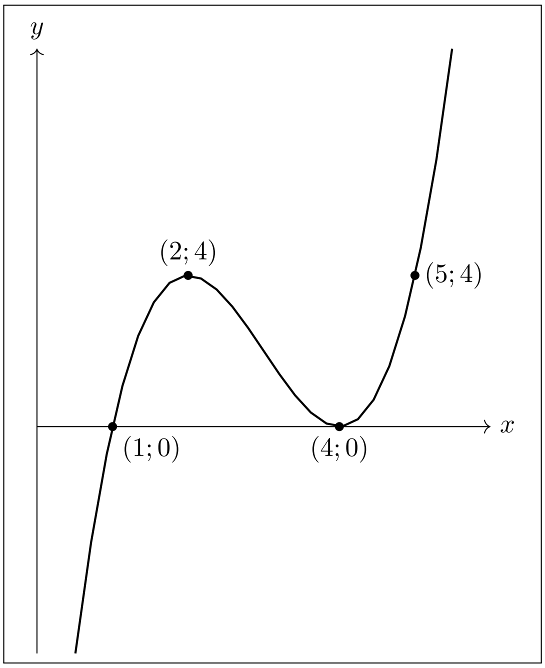
Dưới đây là đồ thị của các hàm đa thức trong bài:



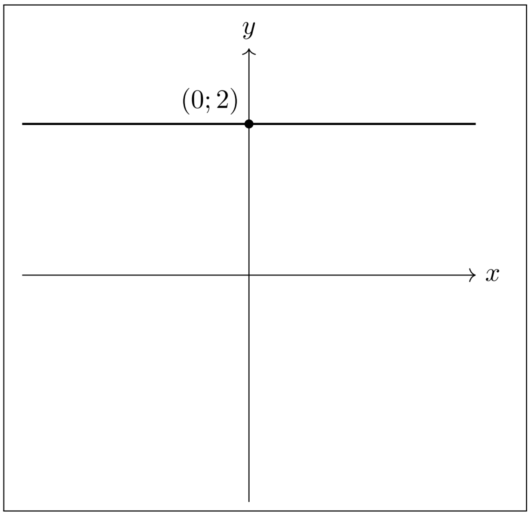
Hình 0.32: Đồ thị của hàm $f(x) = x + 2$



Hình 0.33: Đồ thị của hàm $f(x) = x^2 + 2x + 3$



Hình 0.34: Đồ thị của hàm $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$



Hình 0.35: Đồ thị của hàm $f(x) = 2$

Bài 8: Giải những phương trình sau. Các phương trình đều có ẩn là $x \in \mathbb{R}$.

1. $3x - 7 = 0$;
2. $x - 9 = 5x + 3$;
3. $\frac{1}{v} \cdot x - \frac{1}{v} \cdot x_0 = t$, với v, x_0, t là những tham số thực;
4. $6x^2 - 5x - 21 = 0$;
5. $5x^2 - 50x + 125 = 0$;
6. $x^2 + 2x + 4 = 0$;
7. $x^2 + 2x + 4 = 8$;
8. $5x^2 - 20x + 20 = x^2 - 4$;
9. $\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$, với k, m, v, x_0 là những tham số thực;
10. $x^3 - \frac{11}{6} \cdot x^2 + x - \frac{1}{6} = 0$;
11. $2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 6 + 6x^2$.

Lời giải cho bài 8:

1. Biến đổi tương đương phương trình để có:

$$\begin{aligned} 3x - 7 &= 0 \\ \iff 3x &= 7 \\ \iff x &= \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\boxed{\left\{\frac{7}{3}\right\}}$.

2. Chuyển số hạng có thừa số x về một phía, và số hạng tự do về phía còn lại để được:

$$\begin{aligned} x - 9 &= 5x + 3 \\ \iff (x-9) + (9-5x) &= (5x+3) + (9-5x) \\ \iff -4x &= 12 \\ \iff x &= -3. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\boxed{\{-3\}}$.

3. Để giải phương trình có chứa tham số, chúng ta cần viết lại ẩn x dưới dạng một biểu thức chỉ chứa tham số và hằng số. Cụ thể,

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \cdot x - \frac{1}{v} \cdot x_0 &= t \\ \iff \frac{x}{v} &= t + \frac{x_0}{v} \\ \iff x &= vt + x_0. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\boxed{\{vt + x_0\}}$.

4. Nếu như bạn đọc chưa biết, nếu như một đa thức $f(x)$ nhận $x = a$ là nghiệm thì $f(x)$ có thể được viết thành tích của $(x-a)$ nhân một đa thức $g(x)$ với bậc nhỏ hơn 1 so với $f(x)$. Và nếu $g(x)$ lại có nghiệm $x = b$ thì chúng ta có thể viết $g(x) = (x-b)h(x)$ và qua đó có thể viết lại $f(x) = (x-a)(x-b)h(x)$. Một cách tổng quát nhất, nếu như $f(x)$ là phương trình bậc n có n nghiệm $a_1, a_2, \cdots, a_n$ thì có thể viết lại

$$f(x) = A \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) = A(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

với A là hệ số của số hạng có bậc lớn nhất trong đa thức $f(x)$.

Nhẩm nghiệm (bằng cách bấm máy tính) phương trình thì có $x = -\frac{3}{2}$ và $x = \frac{7}{3}$. Chúng ta kì vọng có thể viết lại phương trình dưới dạng $6\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)\left(x - \frac{7}{3}\right) = 0$. Thực vậy, thực hiện phân tích nhân tử để có:

$$\begin{aligned} & 6x^2 - 5x - 21 = 0 \\ \iff & 6x^2 - 14x + 9x - 21 = 0 \\ \iff & 2x(3x-7) + 3(3x-7) = 0 \\ \iff & (2x+3)(3x-7) = 0 \\ \iff & \left[\begin{array}{l} 2x + 3 = 0 \\ 3x - 7 = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2} \\ x = \dfrac{7}{3} \end{array}\right. . \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\boxed{\left\{-\frac{3}{2}; \frac{7}{3}\right\}}$.

5.

$$\begin{aligned} 5x^2 - 50x + 125 &= 0 \\ \iff 5\left(x^2 - 10x + 25\right) &= 0 \\ \iff 5(x-5)^2 &= 0 \\ \iff x - 5 &= 0 \\ \iff x &= 5. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình có một phần tử duy nhất $\boxed{\{5\}}$.

6. Với những phương trình liên quan tới đa thức bậc hai không thể nhẩm ngay được nghiệm, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp tách bình phương. Với phương trình được cho:

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + 4 = 0 \\ \iff & x^2 + 2x + 1 = -3 \\ \iff & (x+1)^2 = -3. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Một số thực nhân với chính nó sẽ ra một số không âm. Cho nên phương trình 0.1 không thể đúng. Vậy phương trình $\boxed{\text{vô nghiệm}}$ trên tập số thực.

7.

$$\begin{aligned} & x^2 + 2x + 4 = 8 \\ \iff & x^2 + 2x + 1 = 5 \\ \iff & (x+1)^2 = 5 \\ \iff & \left[\begin{aligned} x + 1 &= \sqrt{5} \\ x + 1 &= -\sqrt{5} \end{aligned}\right. \\ \iff & \left[\begin{aligned} x &= \sqrt{5} - 1 \\ x &= -\sqrt{5} - 1 \end{aligned}\right. . \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\boxed{\left\{\sqrt{5} - 1; -\sqrt{5} - 1\right\}}$.

8. Phần này tác giả làm khác so với phần 2. Chuyển đổi toàn bộ phương trình về một vế để đưa về dạng phương trình $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} & 5x^2 - 20x + 20 = x^2 - 4 \\ \iff & 4x^2 - 20x + 24 = 0 \\ \iff & 4\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0 \\ \iff & 4\left(x^2 - 2x - 3x + 6\right) = 0 \\ \iff & 4\left(x(x-2) - 3(x-2)\right) = 0 \\ \iff & 4(x-3)(x-2) = 0 \\ \iff & \left[\begin{aligned} x - 3 &= 0 \\ x - 2 &= 0 \end{aligned}\right. \iff x \in \{3; 2\}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $\boxed{\{3; 2\}}$.

9. Nhân cả hai vế với 2 để khử phân số trong phương trình:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \\ \iff & kx^2 + mv^2 = kx_0^2. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Xong, thực hiện chuyển vế để giữ thừa số chứa x^2 ở một bên, phương trình 0.2 tương đương với

$$\begin{aligned} (0.2) \iff & kx^2 = kx_0^2 - mv^2 \\ \iff & x^2 = x_0^2 - \frac{mv^2}{k} \end{aligned}$$

Hàm lũy thừa

Mỗi số hạng của đa thức có dạng x^n với n nguyên. Tuy nhiên, nếu chúng ta lấy x lũy thừa với một số thực a bất kì, khi đó chúng ta sẽ có *hàm lũy thừa*. Dạng tổng quát của hàm này là

$$f(x) = x^a$$

với a thực. Ngoài ra, khi làm việc trên tập số thực, có một vài điều kiện xác định ngặt nghèo cho đầu vào x đi kèm. Cụ thể:

- Nếu a là số nguyên dương ($a \in \mathbb{Z}^+$) thì tập xác định là toàn bộ $\mathbb{R}$;
- Nếu a là số nguyên không dương (âm hoặc bằng 0, kí hiệu $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}^+$) thì tập xác định là tập thực bỏ số 0 ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$);
- Nếu a không nguyên ($a \notin \mathbb{Z}$) thì tập xác định là toàn bộ số dương $\mathbb{R}^{+}$[8].

Ví dụ:

- $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ là hàm lũy thừa với $a = \frac{1}{3}$, tập xác định là $\mathbb{R}^+$;
- $g(y) = y^4$ là hàm lũy thừa với $a = 4$, tập xác định là $\mathbb{R}$;
- $h(z) = z^{-3}$ là hàm lũy thừa với $a = -3$, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- $p(t) = t^{\pi}$ là hàm lũy thừa với $a = \pi$, tập xác định là $\mathbb{R}^+$;
- $q(u) = u^0 = 1$ là hàm lũy thừa với $a = 0$, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;

Tính toán một số giá trị mẫu:

- $\text{日}(-5) = (-5)^2 = 25$ với $\text{日}(\text{啵}) = \text{啵}^2$ là hàm lũy thừa với $a = 2$;
- $\text{月}(16) = 16^{2,5} = 1024$ với $\text{月}(\text{喽}) = \text{喽}^{2,5}$ là hàm lũy thừa với $a = 2{,}5$;
- $\text{丫}(-7) = (-7)^{-1} = -\frac{1}{7}$ với $\text{丫}(\text{仾}) = \text{仾}^{-1} = \frac{1}{\text{仾}}$ là hàm lũy thừa với $a = -1$.

Hàm lũy thừa có trong nó những hàm quen thuộc mà có thể bạn đọc đã nhận ra, kể như hàm phân thức $x^{-b} = \frac{1}{x^b}$ hay hàm khai căn $x^{\frac{1}{c}} = \sqrt[n]{x}$. Những hàm này có cùng tập xác định với hàm lũy thừa kể trên[9].

Khi tính toán đại số, có một số tính chất quen thuộc mà bạn đọc nên ghi nhớ. Với mọi a, b thực và x thực sao cho mọi tính toán có nghĩa, khi này:

- $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$;
- $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$;
- $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$.

Một kiểu hàm có tên tương tự mà hay gây nhầm lẫn là *hàm mũ*. Hàm này có dạng

$$f(x) = a^x$$

với a là một số thực dương. Ví dụ:

- $f(x) = 2^x$ là hàm mũ với cơ số $a = 2$;
- $g(y) = 10^y$ là hàm mũ với cơ số $a = 10$;
- $h(z) = e^z$ là hàm mũ với cơ số $a = e$ (số Ơ-le).

Tính toán một số giá trị mẫu:

- $f(3) = 2^3 = 8$ với $f(x) = 2^x$;
- $g(-1) = 10^{-1} = 0{,}1$ với $g(y) = 10^y$;
- $h(0) = e^0 = 1$ với $h(z) = e^z$.

Tương tự với hàm lũy thừa, hàm mũ cũng có những đẳng thức quen thuộc. Với a, b, x là ba số thực sao cho mọi tính toán có nghĩa, chúng ta có:

- $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.

Đặc điểm	**Hàm lũy thừa**	**Hàm mũ**
Dạng tổng quát	$f(x) = x^a$	$f(x) = a^x$
Biến số	x ở cơ số	x ở số mũ
Tham số	a là số thực bất kỳ	a là số thực dương khác 1
Tập xác định	Phụ thuộc vào a	$x \in \mathbb{R}$
Ví dụ	$f(x) = x^2$, $f(x) = x^{-1}$	$f(x) = 2^x$, $f(x) = e^x$

Bảng 0.6: So sánh hàm lũy thừa và hàm mũ

Để phân biệt giữa hàm lũy thừa và hàm mũ, mời bạn đọc tham khảo bảng 0.6.

Người ta thường nói ngược lại của hàm lũy thừa là hàm khai căn, tỉ như nếu $f(x) = x^a$ thì (có thể) $x = \sqrt[a]{f(x)}$. Thế đối với hàm mũ $f(x) = a^x$ thì x là gì của $f(x)$? Chúng ta bây giờ cần đến *hàm lô-ga-rít (logarithm)* và bắt đầu phải dùng nhiều chữ khi gọi hàm:

$$f(x) = \log_a(x).$$

Chúng ta có mối liên hệ $f(x) = a^x \implies x = \log_a(f(x))$. Hàm lô-ga-rít cơ số a ($\log_a(x)$) chỉ xác định khi $a > 0$, $a \neq 1$ và $x > 0$. Đặc biệt, khi $a = 10$ thì hàm không cần phải viết cơ số và trở thành $f(x) = \log(x)$. Khi $a = e$, là số Ơ-le vừa được nhắc đến, thì hàm có thể được viết là $f(x) = \ln(x)$. Ví dụ:

- $f(x) = \log_2(x)$ là hàm lô-ga-rít với cơ số $a = 2$;
- $g(y) = \log_{10}(y) = \log(y)$ là hàm lô-ga-rít với cơ số $a = 10$;
- $h(z) = \log_e(z) = \ln(z)$ là hàm lô-ga-rít với cơ số $a = e$.

Tính toán một số giá trị mẫu:

- $f(2) = \log_2(8) = 3$ vì $2^3 = 8$;
- $g(100) = \log(100) = 2$ vì $10^2 = 100$;
- $h(e) = \ln(e) = 1$ vì $e^1 = e$.

0.3 Số ảo và số phức

Trước khi đến với sô thực với số phức, chúng ta bắt đầu tiếp cận với định nghĩa đơn vị ảo. Cụ thể, *đơn vị ảo* được kí hiệu là $\mathbf{i}$ [10] và thỏa mãn

$$\mathbf{i}^2 = -1 \text{ hay } \mathbf{i} = \sqrt{-1}.$$

Để có số ảo, nhân một số thực $b \neq 0$ với đơn vị ảo để thành $\mathbf{i}b$. Một số phức bao gồm thành phần thực và $\mathbf{i}$ lần phẩn ảo cộng vào. Viết dưới *dạng chính tắc*, một số phức có dạng là

$$z = a + \mathbf{i}b$$

với a, b thực. Từ một số phức, chúng ta cũng có thể lấy ngược lại giá trị phần thực và phần ảo của nó lần lượt qua hai hàm $\Re(z)$ và $\Im(z)$ (hoặc $\mathrm{Re}(z)$ và $\mathrm{Im}(z)$). Cụ thể, với $z = a + \mathbf{i}b$ thì $\Re(z) = a$ và $\Im(z) = b$[11].

---

[8] Tại sao điều kiện lại phải nhiều trường hợp vậy? Do chúng ta đang làm việc trên tập số thực. Khi sang miền phức thì đầu vào hàm này sẽ có nhiều sự tự do hơn.

[9] Bạn đọc có thể đặt câu hỏi rằng nếu hàm khai căn cũng chia sẻ cùng tập xác định với hàm lũy thừa thì $\sqrt[3]{-27} = (-27)^{\frac{1}{3}} = -3$ cũng không xác định à? Nhiều tài liệu khác vẫn cho phép khai căn mũ lẻ cho số âm, và nếu bạn đọc muốn thực hiện khai căn như vậy thì tác giả cũng không cấm. Tuy nhiên, khai căn là một phép tính đặc biệt. Khi xét đến trường số phức, *hàm khai căn* không còn là một hàm chỉ trả ra một số mà là một tập số. Để muốn nó vẫn là một hàm theo nghĩa thường thì phải có quy ước, và theo một quy ước phổ biến,

$$\sqrt[3]{-27} = \frac{3}{2} + \mathbf{i}\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

[10] Phần lớn các tài liệu sẽ kí hiệu số ảo là chữ i thông thường. Tác giả kí hiệu thành chữ $\mathbf{i}$ đứng in đậm để bảo toàn chữ i cho nhiệm vụ khác.

[11] Tại sao không gọi cả $\mathbf{i}b$ là phần ảo? Khi nói đến phần ảo, chúng ta đã ngầm định nó sẽ thuộc về số hạng mà có thừa số $\mathbf{i}$. Viết lại đơn vị ảo trở nên thừa thãi. Hơn nữa, sẽ dễ làm việc hơn khi mà cả $\Re(z)$ và $\Im(z)$ đều thực và không phải chia $\Im(z)$ cho $\mathbf{i}$ liên tục.

Chúng ta sẽ coi như có thể thực hiện các định luật đại số thông thường trên tập số phức. Coi $\mathbf{i}$ là một biến với $\mathbf{i}^2 = -1$. Để cộng (hay trừ) hai số phức $v = a + \mathbf{i}b$ và $w = c + \mathbf{i}d$, thực hiện cộng (hay trừ) các thành phần tương đương (phần thực với phần thực, phần ảo với phần ảo). Viết dưới dạng toán học:

$$\begin{cases} v + w = (a + c) + \mathbf{i}(b + d) \\ v - w = (a - c) + \mathbf{i}(b - d) \end{cases}.$$

Nhân hai số phức sẽ yêu cầu sử dụng tính chất phân phối giữa phép nhân với phép cộng, được thực hiện như sau

$$\begin{aligned} v \cdot w &= (a + \mathbf{i}b) \cdot (c + \mathbf{i}d) \\ &= ac + \mathbf{i}ad + \mathbf{i}bc + \mathbf{i}^2 bd \\ &= (ac - bd) + \mathbf{i}(ad + bc). \end{aligned}$$

Trước khi chia hai số phức, chúng ta cần phải biết đến khái niệm số phức liên hợp và tính chất đặc biệt của nó. Một số phức $z = a + \mathbf{i}b$ sẽ có số phức liên hợp là

$$\bar{z} = z^* = a - \mathbf{i}b.$$

Khi này, thực hiện phép nhân số phức z với liên hợp của nó để có

$$z\bar{z} = (a + \mathbf{i}b)(a - \mathbf{i}b) = a^2 + b^2.$$

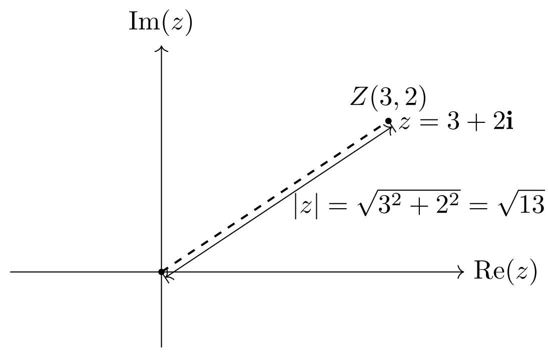
Để ý rằng $a^2 + b^2$ là một số thực do a, b đã là số thực từ định nghĩa, và cũng cần phải nhớ lại rằng khi nhân cả số bị chia và số chia với một số thì thương không đổi. Cho nên, để chia hai số phức, chúng ta nhân cả tử và mẫu với liên hợp của số chia

$$\frac{v}{w} = \frac{a + \mathbf{i}b}{c + \mathbf{i}d} = \frac{(a + \mathbf{i}b)\,(c - \mathbf{i}d)}{(c + \mathbf{i}d)\,(c - \mathbf{i}d)} = \frac{(ac + bd) + \mathbf{i}\,(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Từ đó, chúng ta đưa phép chia hai số phức thành phép chia số phức với số thực và có kết quả là

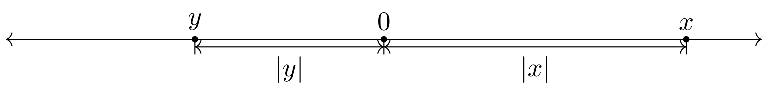
$$\frac{v}{w} = \frac{a + \mathbf{i}b}{c + \mathbf{i}d} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \mathbf{i} \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Ngoài cách biểu diễn đại số, còn có cách biểu diễn hình học trên mặt phẳng tọa độ của số phức qua việc coi trục hoành và trục tung lần lượt biểu diễn phần thực và phần ảo của số phức. Cụ thể, số phức $z = a + \mathbf{i}b$ được biểu diễn bởi một điểm $Z(a,b)$ trên hệ tọa độ vuông góc. Khi này, Z là *ảnh* (hay đơn giản là *điểm biểu diễn*) của z và (a,b) được gọi là *tọa vị* (hay *tọa độ phức*) của z.



Hình 0.36: Biểu diễn $z = 3 + 2\mathbf{i}$ trên mặt phẳng tọa độ

Hình 0.36 đã biểu diễn số phức $z = 3 + 2\mathbf{i}$ trên mặt phẳng tọa độ. Từ đây, chúng ta có thể phát hiện ra những đặc tính khác của z khác tọa vị. Đầu tiên, chúng ta có thể đo khoảng cách từ ảnh Z đến gốc $(0; 0)$, và từ đó, chúng ta sẽ nhận được *mô-đun (module)* của z, kí hiệu: $|z|$. Bạn đọc có thể để ý rằng kí hiệu giống như kí hiệu giá trị tuyệt đối của số thực. Cũng có thể hiểu được tại sao lại vậy nếu như bạn đọc nhớ cách biểu diễn khoảng cách hình học của giá trị tuyệt đối trên trục số thực. Khi chúng ta có một điểm biểu diễn một số thực x trên một trục thì giá trị tuyệt đối của x chính là khoảng cách từ x đến điểm 0.



Hình 0.37: Giá trị tuyệt đối trên trục thực

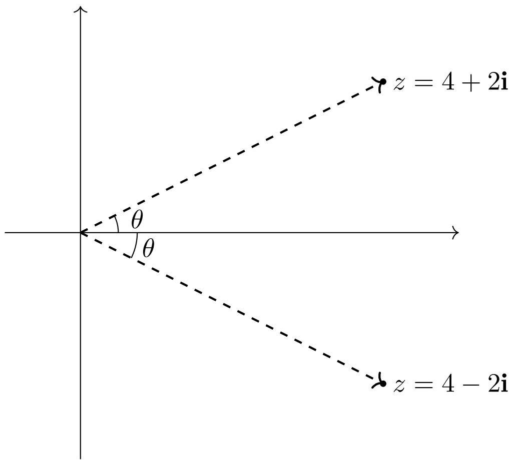
Một cách tương tự, $|z|$ là khoảng cách từ Z đến gốc tọa độ. Công thức Pi-ta-go được sử dụng để tính khoảng cách này:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Cũng là vì lí do đó nên trong một số tài liệu, $|z|$ vẫn được gọi là giá trị tuyệt đối để đảm bảo tính nhất quán.

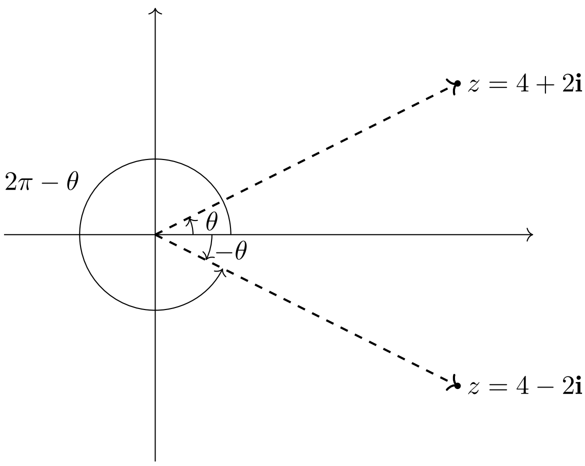
Trên trục số thực, mốt số cụ thể thì giá trị tuyệt đối của nó chỉ có một giá trị, nhưng nếu đầu ra là một giá trị tuyệt đối thì đầu vào có thể là 2 số khác nhau. Để biết chính xác là số nào thì cần biết thêm dấu của số đó, hay nói một cách khác, hướng của số đó nếu nhìn từ vị trí gốc 0. Một cách tương tự, một số phức z chỉ ra được một giá trị mô-đun $|z|$ của nó, nhưng với một $|z|$ thì có thể có nhiều z thỏa mãn. Để biết chính xác được giá trị của z thì chúng ta cần phải biết thêm hướng của z. Tuy nhiên, việc xác định hướng này không chỉ đơn giản là nằm trái hay phải trên trục một chiều nữa, mà cần phải xác định vị trí trong mặt phẳng hai chiều. Một cách để thực hiện điều này là xác định *góc* (hay *a-gu-men*) của z.

Để xác định góc, chúng ta cần phải có 2 tia. Một tia có thể được nối từ gốc đến điểm biểu diễn. Một tia còn lại có thể bám theo một trục cố định. Về quy ước, phía dương trục hoành, hay trục thực, được sử dụng làm bờ còn lại. Bạn đọc có thể nghĩ rằng là khi này chúng ta đã có đủ điều kiện để xác định góc. Cũng đũng, đã đủ để từ số phức z ra được góc của z. Nhưng từ góc của z vẫn chưa đủ để ra được z. Hãy nhìn vào hình 0.38:



Hình 0.38: $4 + 2\mathbf{i}$ và $4 - 2\mathbf{i}$ có độ lớn góc bằng nhau.

Để phân biệt hai góc này, người ta sử dụng khái niệm *góc định hướng*. Một cách đơn giản, quay trục hoành ngược chiều kim đồng hồ cho đến khi chạm vào cạnh còn lại. Góc đã quay là độ lớn của góc định hướng. Khi quay thuận chiều kim đồng hồ thì góc đó quy ước là quay góc âm. Từ đó, chúng ta có thể phân biệt góc nhìn như hình 0.39:



Hình 0.39: $4 + 2\mathbf{i}$ và $4 - 2\mathbf{i}$ có độ lớn góc bằng nhau.

Người ta kí hiệu góc của số phức là $\arg(z)$ hoặc $\operatorname{Arg}(z)$. Cũng giống như góc không định hướng, khi cộng thêm hay bớt đi 2π ra-đi-an (hay 360 độ) thì "hướng nhìn" cũng không thay đổi. Để cho $\arg(z)$ chỉ trả ra một giá trị duy nhất, quy ước là lấy góc trong nửa đoạn $(-\pi; \pi]$ (hay $(-180°; 180°]$). Như ví dụ trong hình 0.39, $\arg(4 + 2\mathbf{i}) = \theta = \arctan\left(\frac{2}{4}\right) \approx 0{,}464$ rad (hay $26{,}565°$) và $\arg(4 - 2\mathbf{i}) = -\theta = -\arctan\left(\frac{2}{4}\right) \approx -0{,}464$ rad (cũng có thể được viết lại là $-26{,}565°$).

Như đã viết, có khoảng cách và hướng nhìn thì chúng ta sẽ có được vị trí số phức. Cách biểu diễn này được gọi là *dạng lượng giác* của số phức. Đặt $r = |z|$ và $\varphi = \arg(z)$, dạng lượng giác của z được kí hiệu là

$z = r\angle\varphi = r\underline{/\varphi}$. Quy đổi giữa dạng lượng giác và dạng chính tắc, khi $z = a + \mathbf{i}b = r\underline{/\varphi}$ thì

$$\begin{cases} a = \Re(z) = r\cos(\varphi) \\ b = \Im(z) = r\sin(\varphi) \end{cases}$$

và từ đó $z = r(\cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi))$. Liên hợp của z dưới dạng lượng giác là $\bar{z} = r(\cos(\varphi) - \mathbf{i}\sin(\varphi)) = r\underline{/-\varphi}$.

Thật sự, rất khó cho nhiều người không thường xuyên thường thức về toán ngay lập tức tìm ra và cảm nhận được ý nghĩa thực tiễn của số ảo. Chúng ta không thể tưởng tượng được số ảo một cách trực quan như các số mà chúng ta thường thấy ở ngoài cuộc sống như 5 cái bút hay $\frac{1}{3}$ giờ. Đi kèm với đó, kể cả trên lí thuyết toán của ghế nhà trường, cũng sẽ không xảy ra trường hợp nào để cho một số nhân với chính nó ra một số âm.

Nhắc về số âm, theo quan điểm cá nhân, số âm trong đời xuống vốn đã ít khi được sử dụng. Chẳng mấy ai ưa nói "lãi -500000 đồng" so với "lỗ 500000 đồng". Một cách tương tự, nhìn về phương diện lịch sử, trong phần lớn quá trình phát triển của toán học, các nhà toán học xưa thường có mặc cảm với những số âm. Các phương trình sẽ luôn được viết lại thành nhiều trường hợp để tránh chúng. Ví dụ, nếu phương trình bậc hai được viết dưới dạng hiện đại là $x^2 + ax + b = 0$ với a,b là hai số thực (có thể âm), thì trong quá khứ, phương trình này được chia ra làm ba trường hợp

$$\begin{aligned} x^2 + ax &= b; \\ x^2 + b &= ax; \\ x^2 &= ax + b \end{aligned}$$

với a,b là hai số thực luôn dương. Và cũng từ sự mặc cảm với số âm, họ cho rằng nghiệm của phương trình cũng phải là một số dương. Tương tự với Các-đa-nô [12], khi giải phương trình bậc ba, ông cũng đưa về các trường hợp như trên. Cụ thể, chúng ta xem xét một trường hợp của bài toán:

$$x^3 = ax + b.$$

Giải phương trình, chúng ta có được nghiệm

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}.$$

Tuy nhiên, sau khi thay những giá trị cụ thể vào a và b, Các-đa-nô đã phát hiện ra một vấn đề. Khi $a = 15$ và $b = 4$, nghiệm trả ra cho phương trình $x^3 = 15x + 4$ theo công thức vừa trên là

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

mặc dù phương trình có một nghiệm bình thường là $x = 4$ (với kiến thức toán học hiện đại, chúng ta có thể giải ra hai nghiệm cũng thực khác là $-2 \pm \sqrt{3}$). Nhận ra điều đó, Các-đa-nô đã khẳng định rằng công thức này của ông không áp dụng được trong trường hợp xảy ra căn của một số âm. Tuy nhiên, một học trò của ông, Bom-be-li [13], lại phủ nhận điều trên. Bom-be-li nhận định rằng tồn tại một kiểu số khác số thực sẽ có giá trị bằng "căn âm". Ông chỉ rõ sự khác biệt giữa kiểu số mới này và kiểu số thực thông thường, và đi kèm theo là phương pháp thực hiện đại số trên kiểu số mới. Áp dụng những nền tảng đó, ông đã tính được căn bậc ba của hai số phức lần lượt là $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ và $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$. Cộng hai số vào, hiển nhiên sẽ có được nghiệm 4 như mong muốn.

Với sự xây dựng ban đầu của Bom-be-li làm gốc, trong những thế kỉ sau, tên gọi và lí thuyết về cách biểu diễn số phức được hình thành.

0.4 Bài tập tổng hợp

[12] Gerolamo Cardano (1501-1576).
[13] Rafael Bombelli (1526-1572).

Chương 1

Cơ bản của xử lí số liệu trong vật lí

Bài 9: Khoảng cách trung bình từ trái đất đến mặt trời là $1{,}5 \cdot 10^8$ km. Giả sử quỹ đạo của trái đất quanh mặt trời là tròn và mặt trời được đặt tại gốc của hệ quy chiếu.

1. Tính tốc độ di chuyển trung bình của trái đất quanh mặt trời dưới dạng dặm trên giờ (1 dặm = 1,6093 km).
2. Ước lượng góc θ giữa véc-tơ vị trí của trái đất bây giờ và vị trí sau đó 4 tháng.
3. Tính khoảng cách giữa hai vị trí đó.

Lời giải cho bài 9:

1. Giả sử trái đất quay quanh mặt trời trong 365,25 ngày. Quãng đường mà trái đất đi được trong thời gian này là chu vi của quỹ đạo tròn $2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^8$ km. Từ đó, chúng ta có thể tính được tốc độ trung bình của trái đất quanh mặt trời là $\frac{2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}}{365{,}25 \text{ ngày}}$. Thực hiện quy đổi để được:

$$\frac{2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}}{365{,}25 \text{ ngày}} \cdot \frac{1 \text{ dặm}}{1{,}6903 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ ngày}}{24 \text{ h}} = \boxed{6{,}4 \cdot 10^4 \ \frac{\text{dặm}}{\text{h}}}.$$

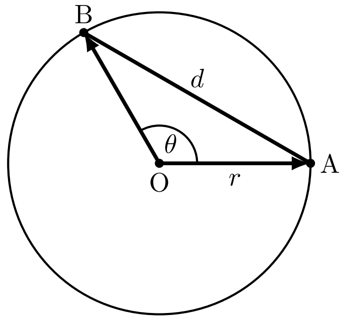
2. Trái đất quay quanh mặt trời trong 12 tháng, tương đương với một góc quay $360°$ so với gốc là mặt trời. Coi như các tháng có độ dài như nhau. Ta có θ chính là góc quay của trái đất trong 4 tháng, tương đương với:

$$\theta = \frac{360°}{12 \text{ tháng}} \cdot 4 \text{ tháng} = \boxed{120°}.$$

3.

Gọi A là vị trí của trái đất bây giờ, B là vị trí của trái đất sau 4 tháng theo như hình 1.1. Coi một đơn vị trên tọa độ bằng độ dài bán kính của quỹ đạo tròn, tức là $r = 1{,}5 \cdot 10^8$ km. Ta có tọa độ điểm A là $(1; 0)$. Tọa độ điểm B là $(\cos(120°); \sin(120°)) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Từ đó, chúng ta có khoảng cách giữa hai vị trí đó là:

$$d = r \cdot \sqrt{\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \boxed{2{,}6 \cdot 10^8 \text{ km}}.$$



Hình 1.1: Quỹ đạo trái đất

Bài 10: Khối lượng riêng (bằng khối lượng của vật chia cho thể tích của vật đó) của nước là $1{,}00 \ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

1. Tính giá trị này theo ki-lô-gam trên mét khối.
2. 1,00 lít nước nặng bao nhiêu ki-lô-gam, bao nhiêu pao (lb)? Biết 1 lb = 0,45 kg (chính xác).

Lời giải cho bài 10:

1. Thực hiện quy đổi, chúng ta có:

$$\begin{aligned}1{,}00\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} &= \left(1{,}00\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)\cdot\frac{1\ \text{kg}}{1000\ \text{g}}\cdot\left(\frac{100\ \text{cm}}{1\ \text{m}}\right)^3\\ &= \boxed{1{,}00\cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}.\end{aligned}$$

2. Khối lượng của 1,00 lít nước là

$$\begin{aligned}1{,}00\ \text{L}\cdot\left(1{,}00\cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) &= 1{,}00\ \text{L}\cdot\left(1{,}00\cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\cdot\frac{1\ \text{m}^3}{1000\ \text{L}}\\ &= \boxed{1{,}00\cdot 10^0\ \text{kg}}.\end{aligned}$$

Theo đơn vị pao (lb), chúng ta có:

$$1{,}00\cdot 10^0\ \text{kg} = 1{,}00\cdot 10^0\ \text{kg}\cdot\frac{1\ \text{lb}}{0{,}45\ \text{kg}} = \boxed{2{,}22\cdot 10^0\ \text{lb}}.$$

Bài 11: Trong hệ thời gian cổ Trung Hoa, từ triều đại Thanh trở về trước (trừ một số năm), một ngày được chia thành 100 khắc. Sau triều đại này (trừ một số năm), một ngày được chia thành 96 khắc. Coi một ngày có 24 giờ và mọi số liệu là chính xác tuyệt đối.

1. Tính số giây (hệ đo lường hiện đại) trong một khắc trong cả hai thời kì.
2. Tính tỉ lệ về độ dài của hai khắc trong hai thời kì.

Lời giải cho bài 11:

1. Số giây trong một ngày là

$$24\ \text{h}\cdot\frac{60\ \text{phút}}{1\ \text{h}}\cdot\frac{60\ \text{giây}}{1\ \text{phút}} = 86400\ \text{giây}.$$

Từ triều đại Thanh trở về trước, số giây trong một khắc là

$$\frac{86400\ \text{giây}}{100\ \text{khắc}_{\text{trước}}} = \boxed{864\frac{\text{giây}}{\text{khắc}_{\text{trước}}}}.$$

Sau triều đại Thanh, số giây trong một khắc là

$$\frac{86400\ \text{giây}}{96\ \text{khắc}_{\text{sau}}} = \boxed{900\frac{\text{giây}}{\text{khắc}_{\text{sau}}}}.$$

2 Tỉ lệ độ dài thời gian một khắc trước và sau là

$$\frac{1\ \text{khắc}_{\text{trước}}}{1\ \text{khắc}_{\text{sau}}} = \frac{1\ \text{khắc}_{\text{trước}}}{1\ \text{khắc}_{\text{sau}}}\cdot\frac{864\ \text{giây}}{1\ \text{khắc}_{\text{trước}}}\cdot\frac{1\ \text{khắc}_{\text{sau}}}{900\ \text{giây}} = \boxed{0{,}96}.$$

Bài 12: Một vòng đĩa tròn như trong hình 1.2 có đường kính 4,50 cm rỗng ở giữa một lỗ đường kính 1,25 cm. Đĩa dày 1,50 mm. Biết rằng đĩa được làm từ chất liệu có khối lượng riêng là 8600 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Tính khôi lượng vòng đĩa theo gram.

Lời giải cho bài 12:

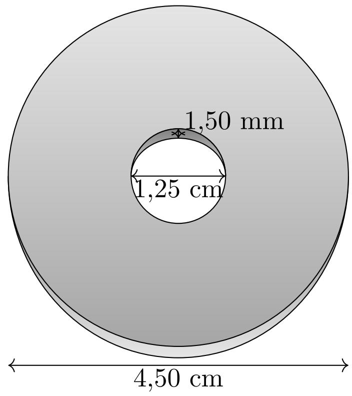
Đặt $D = 4{,}50\ \text{cm} = 4{,}50\times 10^{-2}\ \text{m}$, $d = 1{,}25\ \text{cm} = 1{,}25\times 10^{-2}\ \text{m}$, $h = 1{,}50\ \text{mm} = 1{,}50\times 10^{-3}\ \text{m}$ và $\mathcal{D} = 8600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8{,}6\times 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot\frac{10^3\ \text{g}}{\text{kg}} = 8{,}6\times 10^6\ \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$.

Nhận thấy rằng đĩa có dạng trụ, diện tích mặt đáy là

$$S = \pi\cdot\left(\frac{D}{2}\right)^2 - \pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi\left(D^2-d^2\right)}{4}.$$

Thể tích của đĩa là $V = S\cdot h = \frac{\pi\cdot h\cdot\left(D^2-d^2\right)}{4}$. Nhân với khối lượng riêng, chúng ta có khối lượng của đĩa là

$$m = \mathcal{D}\cdot V = \frac{\pi\cdot h\cdot\mathcal{D}\cdot\left(D^2-d^2\right)}{4}.$$



Hình 1.2: Vòng đĩa tròn

Thay số trực tiếp với sự để ý đến số chữ số có nghĩa, chúng ta có kết quả $m = \boxed{1{,}89 \times 10^1 \text{ kg}}$.

Bài 13: Khối lượng của một chất lỏng được mô hình hóa bởi phương trình $m = A \cdot t^{0,8} - B \cdot t$. Nếu như t được tính bằng giây và m được tính bằng ki-lô-gram, thì đơn vị của A và B là gì?

Lời giải cho bài 13:

Để có thể cộng trừ các phần tử, chúng cần phải có cùng đơn vị. Do vậy, đơn vị của $A \cdot t^{0,8}$ và $B \cdot t$ là kg. Từ quy tắc nhân chia các đơn vị, chúng ta có:

$$\begin{cases} A \cdot \mathrm{s}^{0,8} & = \mathrm{kg} \\ B \cdot \mathrm{s} & = \mathrm{kg} \end{cases} \iff \begin{cases} A & = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^{0,8}} \\ B & = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \end{cases}.$$

Vậy đơn vị của A là $\boxed{\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^{0,8}}}$ và đơn vị của B là $\boxed{\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}}$.

Chương 2

Chuyển động

Bài 14: Một ô tô đi 40 km trên một đường thẳng với tốc độ không đổi 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Sau đó, nó đi thêm theo chiều đó 60 km với tốc độ không đổi 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Các giá trị đo được tính đến hai chữ số có nghĩa.

1. Tính vận tốc trung bình trên cả quãng đường.
2. Tính tốc độ trung bình trên cả quãng đường.
3. Nếu xe quay đầu trước khi đi 50 km lúc sau, giữ nguyên các số liệu khác, thì vận tốc trung bình và tốc độ trung bình có thay đổi không. Tại sao?
4. Vẽ đồ thị vị trí x theo thời gian t và từ đó chỉ ra cách tính vận tốc trung bình.

Lời giải cho bài 14:
Coi chiều chuyển động ban đầu là chiều dương.

1. Thời gian đi 40 km đầu là

$$40\ \text{km} \div 40\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1{,}0\ \text{h}.$$

Thời gian đi 50 km sau là

$$60\ \text{km} \div 50\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1{,}2\ \text{h}.$$

Do hai quãng đường là cùng chiều nên chúng ta có độ dịch chuyển của xe tổng cộng là

$$\Delta x = 40\ \text{km} + 60\ \text{km} = 100\ \text{km}$$

và tổng thời gian đi là

$$\Delta t = 1{,}0\ \text{h} + 1{,}2\ \text{h} = 2{,}2\ \text{h}.$$

Từ đó, chúng ta có vận tốc trung bình là

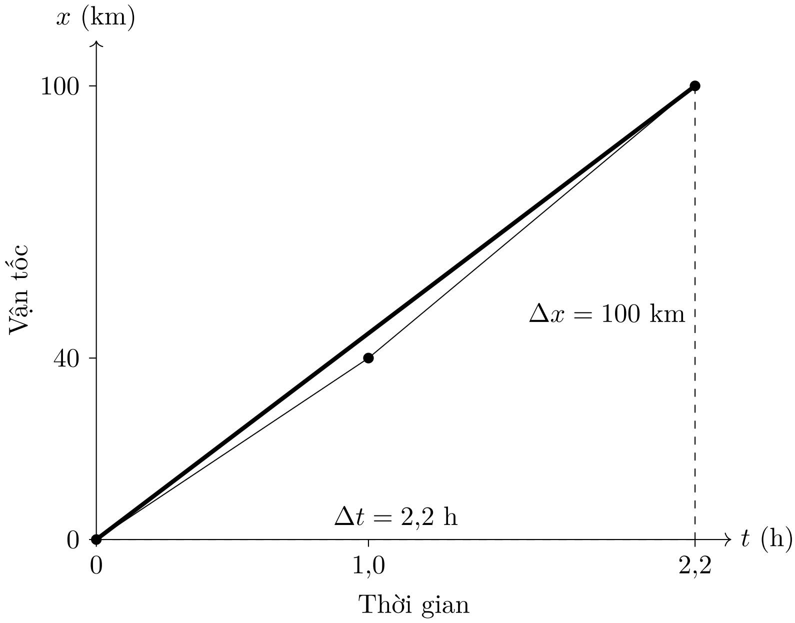
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \boxed{4{,}5 \times 10^1\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}.$$

2. Dễ thấy tổng quãng đường đi là $d = 100$ km. Tốc độ trung bình là $\bar{s} = \frac{d}{\Delta t} = \boxed{4{,}5 \times 10^1\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}$.

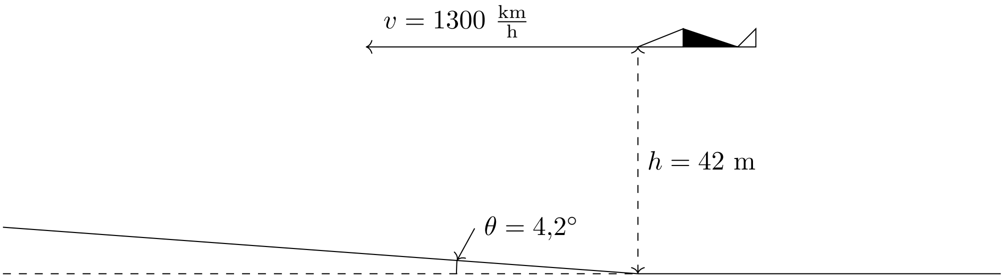
3. Thời gian không thay đổi. Có độ dịch chuyển thay đổi còn $\Delta x = 40\ \text{km} - 60\ \text{km} = -20\ \text{km}$ nhưng tổng quãng đường thì không. Do đó, $\boxed{\text{tốc độ trung bình giữ nguyên}}$ nhưng $\boxed{\text{vận tốc trung bình thay đổi}}$.

4. Ta có đồ thị ở hình 2.1 bằng việc vẽ mối quan hệ $x(t)$ xong nối điểm đầu và điểm cuối. Vận tốc trung bình là độ dốc của đường thẳng nối hai điểm này.

Bài 15: Một máy bay phản lực đang bay ngang ở độ cao $h = 42$ mét. Đột nhiên nó bay vào vùng đất dốc lên góc $\theta = 4{,}2°$ (xem hình 2.2). Với tốc độ bay là $v = 1300\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, thời gian tính từ lúc bay vào vùng đất dốc mà người phi công có để điều chỉnh máy bay là bao nhiêu? Tất cả các số liệu được đo đến hai chữ số có nghĩa.
Lời giải cho bài 15:



Hình 2.1: Đồ thị vị trí xe-thời gian chạy



Hình 2.2: Vị trí máy bay trong vùng dốc lên

Khoảng cách từ máy bay đến điểm va chạm với mặt đất là

$$d = \frac{h}{\tan(\theta)}.$$

Từ đó, chúng ta có được thời gian cho phép là

$$t = \frac{d}{v} = \frac{h}{v\tan(\theta)}.$$

Thay số trực tiếp, với để ý đến sự quy đổi $v = 1300\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1300\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} = 361\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, chúng ta có

$$t = \boxed{1{,}6 \times 10^{0}\ s}.$$

Bài 16: Cho biết vị trí của một vật chuyển động thẳng được xác định bằng $x(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$. Xác định vị trí, vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm $t = t_0$.

Lời giải cho bài 16:

Vị trí của vật tại $t = t_0$ là

$$x(t_0) = \boxed{a \cdot t_0^2 + b \cdot t_0 + c}.$$

Vận tốc của vật tại $t = t_0$ là

$$v(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \boxed{2a \cdot t_0 + b}.$$

Gia tốc của vật tại $t = t_0$ là

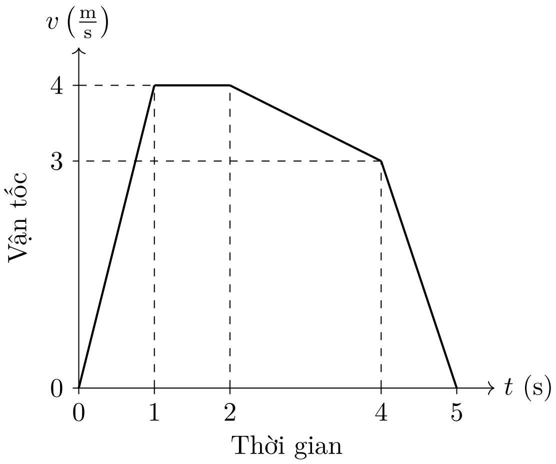
$$a(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \boxed{2a}.$$

Bài 17: Phác họa đồ thị vị trí - thời gian và gia tốc thời gian của một người chạy bộ nếu đồ thị vận tốc - thời gian của người đó được biểu diễn trên đồ thị

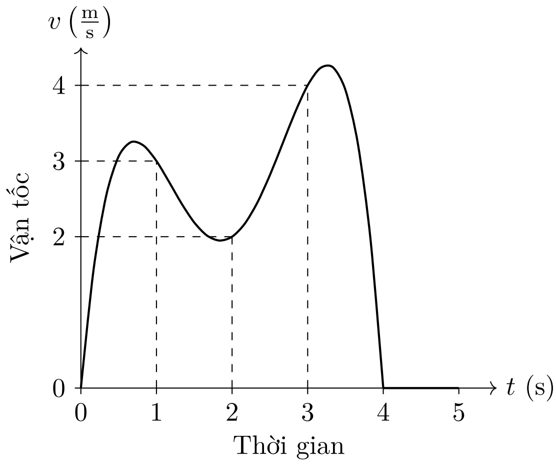
1. hình 2.3;

2. hình 2.4.

Các số liệu được coi như chính xác tuyệt đối. Bạn có thể giả sử người đó bắt đầu chạy từ vị trí $x = 0$.



Hình 2.3: Phần 1



Hình 2.4: Phần 2

Lời giải cho bài 17:
1. Ta chia quá trình chạy làm 4 phần.

- Phần 1 ($0 \text{ s} \leq t \leq 1 \text{ s}$): Vận tốc tăng đều từ 0 đến 4 $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Chuyển động là nhanh dần với gia tốc không đổi là $a(t)|_{t\in[0 \text{ s};1 \text{ s}]} = \frac{v(1 \text{ s})-v(0 \text{ s})}{1 \text{ s}-0 \text{ s}} = 4 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

  Sau khoảng thời gian t, độ dịch chuyển là $x(t)|_{t\in[0 \text{ s};1 \text{ s}]} - x(0 \text{ s}) = \frac{a(t)|_{t\in[0 \text{ s};1 \text{ s}]}\cdot t^2}{2} + v(t)|_{t\in[0 \text{ s};1 \text{ s}]} \cdot t$. Từ đó chúng ta có $x(t) = 2 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2$ với $0 \text{ s} \leq t \leq 1 \text{ s}$ và $x(1 \text{ s}) = 2 \text{ m}$.

- Phần 2 ($1 \text{ s} \leq t \leq 2 \text{ s}$): Vận tốc không đổi ở $v(t)|_{t\in[1 \text{ s};2 \text{ s}]} = 4 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (chuyển động thẳng đều).

  Qua đó, chúng ta có $x(t)|_{t\in[1 \text{ s};2 \text{ s}]} = x(1 \text{ s}) + v(t)|_{t\in[1 \text{ s};2 \text{ s}]} \cdot (t - 1 \text{ s}) = 4 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 2 \text{ m}$ và $x(2 \text{ s}) = 6 \text{ m}$.

Phần 3 ($2 \text{ s} \leq t \leq 4 \text{ s}$) và phần 4 ($4 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ s}$) làm tương tự như phần 1. Ta được

$$\begin{cases} a(t)|_{t\in[2 \text{ s};4 \text{ s}]} & = -\frac{1}{2} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ a(t)|_{t\in[4 \text{ s};5 \text{ s}]} & = -3 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \end{cases}$$

và qua đó

$$\begin{cases} x(t)|_{t\in[2 \text{ s};4 \text{ s}]} & = -\frac{1}{4} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (t - 2 \text{ s})^2 + 4 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (t - 2 \text{ s}) + 6 \text{ m} \\ x(t)|_{t\in[4 \text{ s};5 \text{ s}]} & = -\frac{3}{2} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (t - 4 \text{ s})^2 + 3 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot (t - 4 \text{ s}) + 13 \text{ m} \end{cases}$$

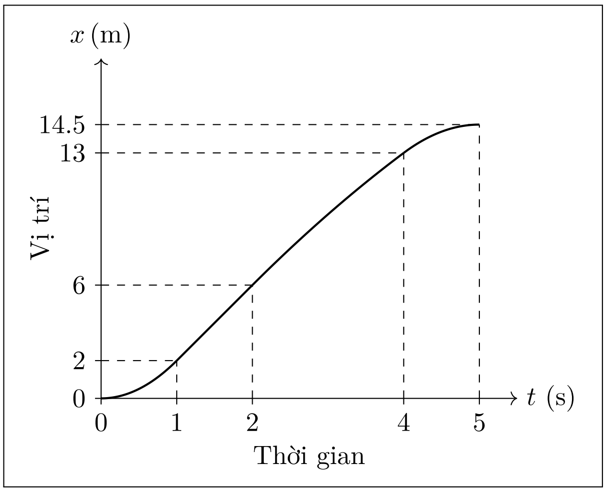
$$\iff \begin{cases} x(t)|_{t\in[2 \text{ s};4 \text{ s}]} & = -\frac{1}{4} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + 5 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 3 \text{ m} \\ x(t)|_{t\in[4 \text{ s};5 \text{ s}]} & = -\frac{3}{2} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + 15 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 23 \text{ m} \end{cases}.$$

Cuối cùng, chúng ta có thể biểu diễn vị trí của người chạy trên đồ thị như hình 2.5.

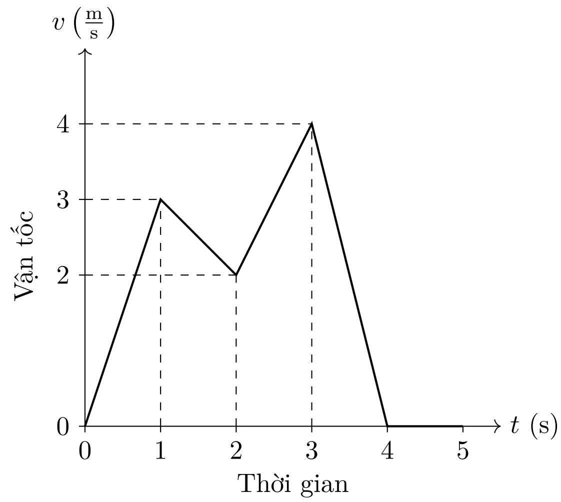
2. Chúng ta có thể phác họa đồ thị vị trí - thời gian bằng việc xấp xỉ đồ thị vận tốc - thời gian dưới dạng đường gấp khúc nối các điểm đã biết thể hiện ở 2.6.

Từ đây, thực hiện tương tự như phần 1 để có phương trình vị trí - thời gian

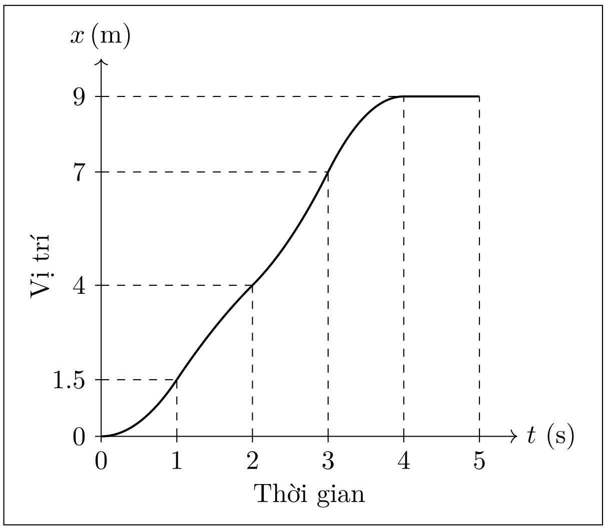
$$x(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 & \text{với } 0 \leq t < 1 \text{ s} \\ -\frac{1}{2} \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + 4 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 2 \text{ m} & \text{với } 1 \text{ s} \leq t < 2 \text{ s} \\ 1 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 - 2 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t + 4 \text{ m} & \text{với } 2 \text{ s} \leq t < 3 \text{ s} \\ -2 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + 16 \ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t - 23 \text{ m} & \text{với } 3 \text{ s} \leq t < 4 \text{ s} \\ 9 \text{ m} & \text{với } 4 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ s} \end{cases}$$



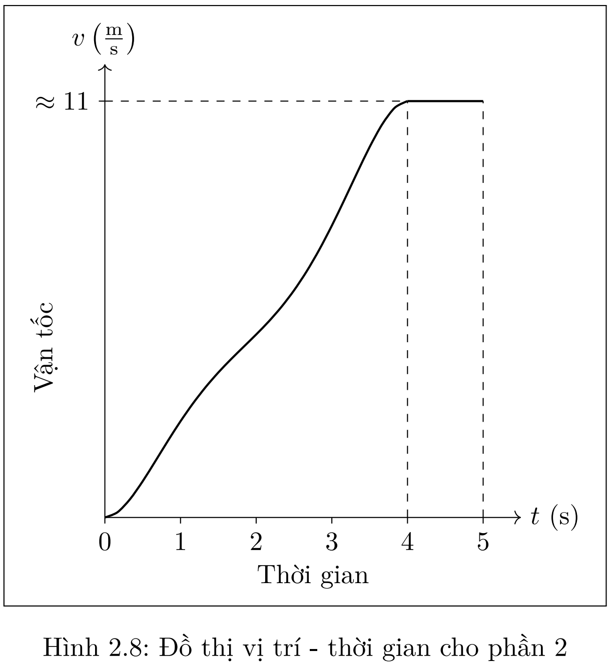
Hình 2.5: Đồ thị vị trí - thời gian cho phần 1



Hình 2.6: Vận tốc - thời gian xấp xỉ của phần 2



Hình 2.7: Vị trí - thời gian (xấp xỉ) cho phần 2



Hình 2.8: Đồ thị vị trí - thời gian cho phần 2

và chúng ta vẽ được đồ thị ở hình 2.7.

Trong thực tiễn, chúng ta hay xấp xỉ những quá trình không tuyến tính qua hữu hạn những điểm đo rồi nội suy tuyến tính (nối các điểm bằng các đoạn thẳng) như đã làm. Còn nhiều phương pháp nội suy nữa còn có thể được tìm thấy trong những tài liệu về phương pháp tính và giải tích số. Thông thường, với càng nhiều điểm thì độ chính xác càng lớn.

Trong trường hợp mà bạn nhận ra phương trình vận tốc - thời gian được cho là

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{-t\left(4\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^5}\cdot t^3 - 31\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^4}\cdot t^2 + 77\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^3}\cdot t - 68\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{6} & \text{với } 0 \le t < 4 \\ 0 & \text{với } 4 \le t \le 5 \end{cases}$$

thì bạn có thể thực hiện nguyên hàm trên hàm này để tính được vị trí vật là

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{-t^2\left(48\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^5}\cdot t^3 - 465\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^4}\cdot t^2 + 1540\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^3}\cdot t - 2040\ \dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)}{360} & \text{với } 0 \le t < 4 \\ \dfrac{496}{45}\ \text{m} & \text{với } 4 \le t \le 5 \end{cases}$$

và chúng ta có đồ thị như hình 2.8.

Bài 18: Hai xe hơi có tốc độ lần lượt là $v_1 = 50{,}0\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ và $v_2 = 60{,}0\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ đi ngược chiều với nhau trên một con đường hẹp. Hai xe phát hiện lẫn nhau khi khoảng cách giữa hai xe là $d = 400$ m. Cả hai xe đồng thời giảm tốc với cùng một gia tốc hãm đều là a. Tính giá trị tối thiểu của a nếu biết hai xe không xảy ra va chạm. Số liệu được đo tới 3 chữ số có nghĩa.

Lời giải cho bài 18:

Gọi quãng đường đi được trong khi hãm phanh của hai xe lần lượt là d_1 và d_2.

Trong quá trình hãm đến vận tốc bằng 0, tổng quãng đường đi của cả hai xe phải không vượt quá khoảng cách d. Vì vậy, chúng ta có bất đẳng thức

$$d_1 + d_2 \le d.$$

Trong khi đó, quãng đường xe thứ nhất đã di chuyển là $d_1 = \frac{0^2 - v_1^2}{2(-a)} = \frac{v_1^2}{2a}$. Tương tự, chúng ta có quãng đường mà xe thứ hai di chuyển trong khoảng thời gian này là $d_2 = \frac{v_2^2}{2a}$. Từ đó, thay vào phương trình ở trên để được

$$\frac{v_1^2}{2a} + \frac{v_2^2}{2a} \le d \iff a \ge \frac{v_1^2 + v_2^2}{2d}.$$

Thay số trực tiếp, chúng ta có gia tốc hãm tối thiểu phải là $\boxed{7{,}63 \times 10^3\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}^2}}$.

Bài 19: Để dừng xe ban đầu bạn cần một thời gian phản ứng để bắt đầu phanh, rồi xe mới đi chậm dần nhờ có một gia tốc hãm không đổi. Giả sử quãng được đi được trong hai pha này là 186 ft nếu vận tốc ban đầu là 50 $\frac{\text{dặm}}{\text{h}}$. Còn trong một trường hợp khác, quãng được đi được trong hai pha này là 80 ft nếu vận tốc ban đầu là 30 $\frac{\text{dặm}}{\text{h}}$. Biết thời gian phản ứng là cố định và 1 dặm = 5280 ft, tính thời gian phản ứng và độ lớn của gia tốc hãm.

Lời giải cho bài 19:

Gọi thời gian phản ứng là t_p, vận tốc đầu là v_0, gia tốc hãm là a.

Trong khoảng thời gian phản ứng, xe đi được $v_0 t_p$. Và trong khoảng thời gian hãm, xe đi được $\frac{0^2 - v_0^2}{2(-a)} = \frac{v_0^2}{2a}$. Cho nên, tổng quãng đượt đi được trong hai pha là

$$\Delta x = v_0 t + \frac{v_0^2}{2a} \tag{2.1}$$

Trước khi thay số, thực hiện quy đổi

$$50\ \frac{\text{dặm}}{\text{h}} = 50\ \frac{\text{dặm}}{\text{h}} \cdot \frac{5280\ \text{ft}}{1\ \text{dặm}} \cdot \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} \approx 73\ \frac{\text{ft}}{\text{s}},$$

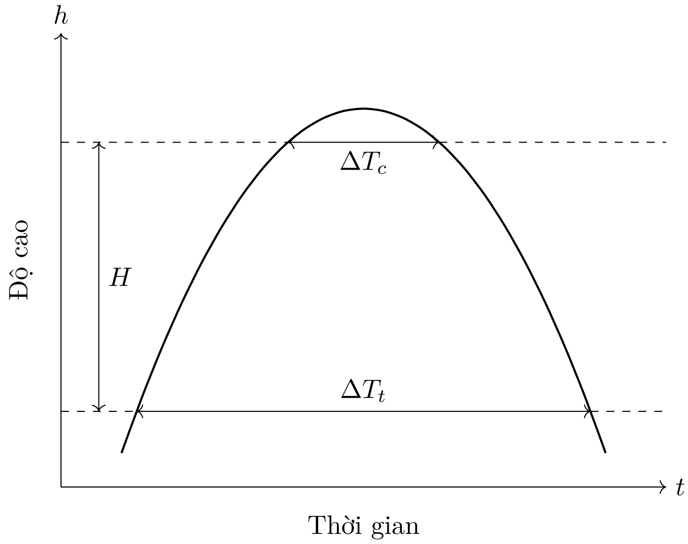
tương tự, 30 $\frac{\text{dặm}}{\text{h}} = 44\ \frac{\text{ft}}{\text{s}}$. Từ đó, thay số vào phương trình 2.1 để có hệ

$$\begin{cases} 186\ \text{ft} = 73\ \frac{\text{ft}}{\text{s}} \cdot t_p + \frac{\left(73\ \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right)^2}{2a} \\ 80\ \text{ft} = 44\ \frac{\text{ft}}{\text{s}} \cdot t_p + \frac{\left(44\ \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right)^2}{2a} \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình, chúng ta có thời gian phản ứng là $t_p = \boxed{0{,}97\ \text{s}}$ và gia tốc hãm là $a = \boxed{26\ \dfrac{\text{ft}}{\text{s}^2}}$.

Bài 20: Tại Phòng Thí nghiệm Vật lí Quốc gia ở Anh, người ta thực hiện xác định gia tốc trọng trường g theo thí nghiệm sau: Ném một quả bóng thủy tinh lên theo chiều thẳng đứng trong ống chân không và cho nó rơi xuống. Gọi ΔT_t trên hình 2.9 là thời gian khoảng giữa hai lần quả bóng đi qua một điểm thấp nào đó. ΔT_c là khoảng thời gian giữa hai lần quả bóng đi qua một điểm cao hơn và H là khoảng cách giữa hai điểm. Chứng minh rằng

$$g = \frac{8H}{\Delta T_t^2 - \Delta T_c^2}.$$



Hình 2.9: Đồ thị thời gian - độ cao của quả bóng thủy tinh

Lời giải cho bài 20:

Gọi vận tốc khi bóng bắt đầu bay lên từ vị trị thấp là v_0. Sau một khoảng thời gian ΔT_t, quả bóng quay lại vị trí cũ, do vậy, chúng ta có phương trình $0 = -\frac{g\Delta T_t^2}{2} + v_0 \Delta T_t$. Thực hiện biến đổi tương đương để có

$$v_0 = \frac{g\Delta T_t}{2}.$$

Nhận thấy rằng đồ thị có tính đối xứng. Sử dụng điều đó, chúng ta tính được khoảng thời gian quả bóng lên một độ cao H là $t = \frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}$. Qua đó, có được phương trình thứ hai là

$$H = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t = -\frac{g\left(\frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}\right)^2}{2} + v_0 \left(\frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}\right).$$

Thế giá trị của v_0 vào phương trình và tiếp tục thực hiện biến đổi, chúng ta có:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{g\left(\Delta T_t - \Delta T_c\right)^2}{8} + \frac{g\Delta T_t}{2}\left(\frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}\right) \\ &= -g\left(\frac{\Delta T_t^2}{8} - \frac{\Delta T_t \Delta T_c}{4} + \frac{\Delta T_c^2}{8}\right) + g\left(\frac{\Delta T_t^2}{4} - \frac{\Delta T_t \Delta T_c}{4}\right) \\ &= g \cdot \frac{\Delta T_t^2 - \Delta T_c^2}{8} \\ \iff g &= \frac{8H}{\Delta T_t^2 - \Delta T_c^2}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 21: Một nghệ sĩ tung hứng các quả bóng lên theo phương thẳng đứng. Quả bóng sẽ lên cao hơn bao nhiêu nếu thời gian bóng trong không khí tăng gấp n lần ($n \in \mathbb{R}^+$)?

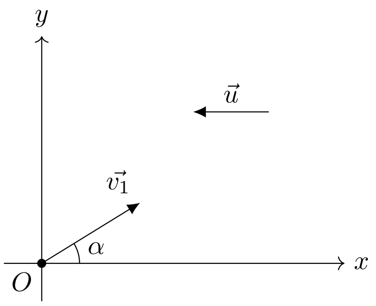
Lời giải cho bài 21:

Có thời gian để quả bóng bay từ tay lên trên vị trí cao nhất bằng một nửa thời gian bóng trong không khí. Nếu thời gian bóng trong không khí tăng gấp n lần so với thời gian trong không khí gốc, thì cùng chia cho 2, chúng ta cũng sẽ có thời gian bóng bay từ tay lên trên vị trí cao nhất cũng tăng gấp n lần so với thời gian gốc để bay lên vị trí cao nhất.

Gọi t_1 là thời gian gốc để bóng bay từ tay lên vị trí cao nhất, $t_2 = nt_1$ là thời gian bay khi đã tăng n lần. Gọi h_1, h_2 lần lượt là độ cao bóng đi được tương ứng với hai khoảng thời gian t_1, t_2. Để ý rằng khi lên vị trí cao nhất thì vận tốc bóng là 0; chúng ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} h_1 &= \frac{gt_1^2}{2} \\ h_2 &= \frac{gt_2^2}{2} = \frac{g(nt_1)^2}{2} \end{cases} \implies h_2 = n^2 h_1.$$

Từ đó, quả bóng cao lên hơn được $\boxed{n^2 - 1 \text{ lần độ cao gốc}}$.



Hình 2.10: Hình minh họa cho bài 22

Bài 22: Như trong hình 2.10, một vật nhỏ có khối lượng m chỉ di chuyển từ gốc O trong mặt phẳng Oxy được cung cấp một vận tốc ban đầu $\overrightarrow{v_1}$ trong vùng không gian có gió thổi với vận tốc $\vec{u} = -u\overrightarrow{e_x}$.

Tài liệu tham khảo

[1] Agarwal, R.P., Perera, K., Pinelas, S. (2011). *History of Complex Numbers*. In: An Introduction to Complex Analysis. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0195-7_50