

# Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 1 tháng 8 năm 2025

# Mục lục

<b>0</b>	<b>Kiến thức toán học nền tảng</b>	<b>3</b>
0.1	Những hàm cơ bản . . . . .	3
0.2	Số ảo và số phức . . . . .	3
0.2.1	Giới hạn . . . . .	6
0.3	Bài tập . . . . .	6
<b>1</b>	<b>Cơ bản của xử lý số liệu trong vật lí</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Chuyển động</b>	<b>11</b>

# Chương 0

## Kiến thức toán học nền tảng

Phần này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lý thuyết của môn vật lý, giả sử rằng bạn đọc đã có kiến thức đại số và một chút hình học từ ghế nhà trường. Chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Bạn đọc có thể tìm hiểu một cách sơ cấp hay gọi nhớ lại về các khái niệm toán học mà không cần tập trung vào việc chứng minh chặt chẽ các tính chất toán học. Tác giả mong muốn thông qua chương này, bạn đọc có thể có một cảm nhận và từ đó có kỹ năng để áp dụng các khái niệm toán giải quyết các yêu cầu thực tế. Hơn thế nữa, có một niềm cảm hứng để tìm hiểu chuyên sâu các phân môn của toán học.

### 0.1 Những hàm cơ bản

Trong phần này, các hàm số quen thuộc sẽ được nhắc lại. Đây là những hàm hay thấy nhất trong quá trình học phần lớn các môn khoa học tự nhiên.

Đầu tiên, chúng ta có hàm *đa thức*, thông thường được biểu diễn dưới dạng

$$f(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

với  $n$  là một số nguyên không âm,  $a_i$  là các số thực, gọi là các *hệ số*, với mọi  $i$  nguyên nằm trong đoạn  $[0, n]$  và  $a_n \neq 0$ . Khi này,  $n$  được gọi là *bậc* của đa thức. Khi đa thức có bậc bằng 0, hay  $f(x) = P_0(x) = a_0$ , thì được gọi là *đa thức hằng* hay *hàm hằng*<sup>2</sup>. Một trường hợp đặc biệt là khi  $f(x) = 0$ <sup>1</sup>, khi này hàm không có bậc nhưng vẫn được gọi là hàm hằng<sup>2</sup>.

Mỗi số hạng của đa thức có dạng  $x^n$  với  $n$  nguyên.

### 0.2 Số ảo và số phức

Trước khi đến với số thực với số phức, chúng ta bắt đầu tiếp cận với định nghĩa đơn vị ảo. Cụ thể, *đơn vị ảo* được kí hiệu là  $\mathbf{i}$ <sup>3</sup> và thỏa mãn

$$\mathbf{i}^2 = -1 \text{ hay } \mathbf{i} = \sqrt{-1}.$$

Để có số ảo, ta nhân một số thực  $b \neq 0$  với đơn vị ảo để thành  $\mathbf{i}b$ . Một số phức bao gồm thành phần thực và  $\mathbf{i}$  lần phần ảo cộng vào. Viết dưới *dạng chính tắc*, một số phức có dạng là

$$z = a + \mathbf{i}b$$

với  $a, b$  thực. Từ một số phức, chúng ta cũng có thể lấy ngược lại giá trị phần thực và phần ảo của nó lần lượt qua hai hàm  $\Re(z)$  và  $\Im(z)$  (hoặc  $\text{Re}(z)$  và  $\text{Im}(z)$ ). Cụ thể, với  $z = a + \mathbf{i}b$  thì  $\Re(z) = a$  và  $\Im(z) = b$ <sup>4</sup>.

<sup>1</sup>Sẽ có nhiều sách viết " $f(x) \equiv 0$ " thay vì " $f(x) = 0$ " để phân biệt giữa khẳng định hai hàm là như nhau so với một phương trình. Tôi không muốn bạn đọc bị vướng víu với nhiều kí hiệu lạ, cho nên tôi sẽ cố gắng dùng những kí hiệu cũ. Bạn đọc có thể tự suy luận ý nghĩa thông qua ngữ cảnh.

<sup>2</sup>Đa số những nhà toán học không coi  $f(x) = 0$  là đa thức bậc 0 do nhiều tính chất của đa thức bị phá vỡ khi gặp trường hợp này. Do đó,  $f(x) = 0$  chỉ được coi là "hàm hằng" chứ không phải "*đa thức hằng*". Trong cuốn sách này, trở về sau sẽ chỉ có thuật ngữ "hàm hằng" được sử dụng.

<sup>3</sup>Phần lớn các sách sẽ kí hiệu số ảo là chữ  $i$  thông thường. Tôi kí hiệu thành chữ  $\mathbf{i}$  đứng in đậm để bảo toàn chữ  $i$  cho nhiệm vụ khác.

<sup>4</sup>Tại sao không gọi cả  $\mathbf{i}b$  là phần ảo? Khi nói đến phần ảo, chúng ta đã ngầm định nó sẽ thuộc về số hạng mà có thừa số  $\mathbf{i}$ . Viết lại đơn vị ảo trở nên thừa thãi. Hơn nữa, sẽ dễ làm việc hơn khi mà cả  $\Re(z)$  và  $\Im(z)$  đều thực và ta không phải chia  $\Im(z)$  cho  $\mathbf{i}$  liên tục.

Chúng ta sẽ coi như có thể thực hiện các định luật đại số thông thường trên tập số phức. Coi  $\mathbf{i}$  là một biến với  $\mathbf{i}^2 = -1$ . Để cộng (hay trừ) hai số phức  $v = a + \mathbf{i}b$  và  $w = c + \mathbf{i}d$ , ta thực hiện cộng (hay trừ) các thành phần tương đương (phần thực với phần thực, phần ảo với phần ảo). Viết dưới dạng toán học:

$$\begin{cases} v + w = (a + c) + \mathbf{i}(b + d) \\ v - w = (a - c) + \mathbf{i}(b - d) \end{cases}.$$

Nhân hai số phức sẽ yêu cầu sử dụng tính chất phân phối giữa phép nhân với phép cộng, được thực hiện như sau

$$\begin{aligned} v \cdot w &= (a + \mathbf{i}b) \cdot (c + \mathbf{i}d) \\ &= ac + \mathbf{i}ad + \mathbf{i}bc + \mathbf{i}^2bd \\ &= (ac - bd) + \mathbf{i}(ad + bc). \end{aligned}$$

Trước khi chia hai số phức, chúng ta cần phải biết đến khái niệm số phức liên hợp và tính chất đặc biệt của nó. Một số phức  $z = a + \mathbf{i}b$  sẽ có số phức liên hợp là

$$\bar{z} = z^* = a - \mathbf{i}b.$$

Khi này, thực hiện phép nhân số phức  $z$  với liên hợp của nó để có

$$z\bar{z} = (a + \mathbf{i}b)(a - \mathbf{i}b) = a^2 + b^2.$$

Để ý rằng  $a^2 + b^2$  là một số thực do  $a, b$  đã là số thực từ định nghĩa, và cũng cần phải nhớ lại rằng khi nhân cả số bị chia và số chia với một số thì thương không đổi. Cho nên, để chia hai số phức, chúng ta nhân cả tử và mẫu với liên hợp của số chia

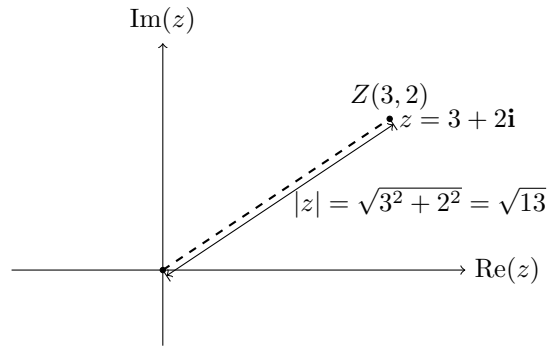
$$\frac{v}{w} = \frac{a + \mathbf{i}b}{c + \mathbf{i}d} = \frac{(a + \mathbf{i}b)(c - \mathbf{i}d)}{(c + \mathbf{i}d)(c - \mathbf{i}d)} = \frac{(ac + bd) + \mathbf{i}(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Từ đó, chúng ta đưa phép chia hai số phức thành phép chia số phức với số thực và có kết quả là

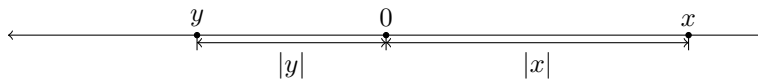
$$\frac{v}{w} = \frac{a + \mathbf{i}b}{c + \mathbf{i}d} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \mathbf{i} \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Ngoài cách biểu diễn đại số, còn có cách biểu diễn hình học trên mặt phẳng tọa độ của số phức qua việc coi trục hoành và trục tung lần lượt biểu diễn phần thực và phần ảo của số phức. Cụ thể, số phức  $z = a + \mathbf{i}b$  được biểu diễn bởi một điểm  $Z(a, b)$  trên hệ tọa độ vuông góc. Khi này,  $Z$  là ảnh (hay đơn giản là *điểm biểu diễn*) của  $z$  và  $(a, b)$  được gọi là *tọa vị* (hay *tọa độ phức*) của  $z$ .

Hình 1 đã biểu diễn số phức  $z = 3 + 2\mathbf{i}$  trên mặt phẳng tọa độ. Từ đây, chúng ta có thể phát hiện ra những đặc tính khác của  $z$  khác tọa vị. Đầu tiên, chúng ta có thể đo khoảng cách từ ảnh  $Z$  đến gốc  $(0; 0)$ , và từ đó, chúng ta sẽ nhận được *mô-đun* (module) của  $z$ , kí hiệu:  $|z|$ . Bạn đọc có thể để ý rằng kí hiệu giống như kí hiệu giá trị tuyệt đối của số thực. Cũng có thể hiểu được tại sao lại vậy nếu như bạn đọc nhớ cách biểu diễn khoảng cách hình học của giá trị tuyệt đối trên trục số thực. Khi chúng ta có một điểm biểu diễn một số thực  $x$  trên một trục thì giá trị tuyệt đối của  $x$  chính là khoảng cách từ  $x$  đến điểm 0.



Hình 1: Biểu diễn  $z = 3 + 2\mathbf{i}$  trên mặt phẳng tọa độ



Hình 2: Giá trị tuyệt đối trên trục thực

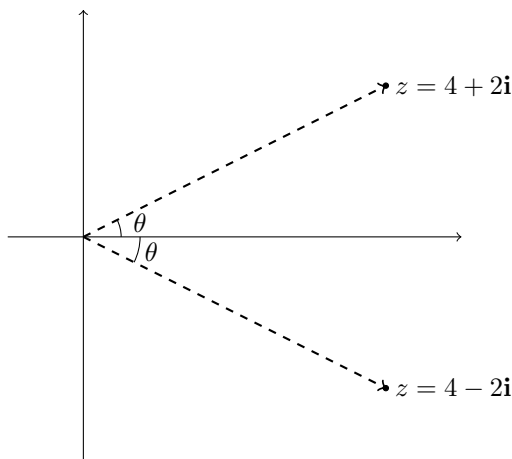
Một cách tương tự,  $|z|$  là khoảng cách từ  $Z$  đến gốc tọa độ. Công thức Pi-ta-go được sử dụng để tính khoảng cách này:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Cũng là vì lí do đó nên trong một số tài liệu,  $|z|$  vẫn được gọi là giá trị tuyệt đối để đảm bảo tính nhất quán.

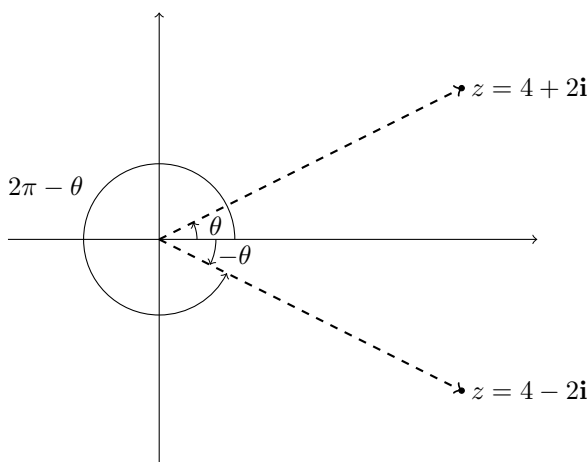
Trên trục số thực, một số cụ thể thì giá trị tuyệt đối của nó chỉ có một giá trị, nhưng nếu đầu ra là một giá trị tuyệt đối thì đầu vào có thể là 2 số khác nhau. Để biết chính xác là số nào thì cần biết thêm dấu của số đó, hay nói một cách khác, hướng của số đó nếu nhìn từ vị trí gốc 0. Một cách tương tự, một số phức  $z$  chỉ ra được một giá trị mô-đun  $|z|$  của nó, nhưng với một  $|z|$  thì có thể có nhiều  $z$  thỏa mãn. Để biết chính xác được giá trị của  $z$  thì chúng ta cần phải biết thêm hướng của  $z$ . Tuy nhiên, việc xác định hướng này không chỉ đơn giản là nằm trái hay phải trên trục một chiều nữa, mà cần phải xác định vị trí trong mặt phẳng hai chiều. Một cách để thực hiện điều này là xác định *góc* (hay *a-gu-men*) của  $z$ .

Để xác định góc, chúng ta cần phải có 2 tia. Một tia có thể được nối từ gốc đến điểm biểu diễn. Một tia còn lại có thể bám theo một trục cố định. Về quy ước, phía dương trục hoành, hay trục thực, được sử dụng làm bờ còn lại. Bạn đọc có thể nghĩ rằng là khi này ta đã có đủ điều kiện để xác định góc. Cũng đúng, đã đủ để từ số phức  $z$  ra được góc của  $z$ . Nhưng từ góc của  $z$  vẫn chưa đủ để ra được  $z$ . Hãy nhìn vào hình 3:



Hình 3:  $4 + 2i$  và  $4 - 2i$  có độ lớn góc bằng nhau.

Để phân biệt hai góc này, người ta sử dụng khái niệm *góc định hướng*. Một cách đơn giản, quay trục hoành ngược chiều kim đồng hồ cho đến khi chạm vào cạnh còn lại. Góc đã quay là độ lớn của góc định hướng. Khi quay thuận chiều kim đồng hồ thì góc đó quy ước là quay góc âm. Từ đó, chúng ta có thể phân biệt góc nhìn như hình 4:



Hình 4:  $4 + 2i$  và  $4 - 2i$  có độ lớn góc bằng nhau.

Người ta kí hiệu góc của số phức là  $\arg(z)$  hoặc  $\text{Arg}(z)$ . Cũng giống như góc không định hướng, khi cộng thêm hay bớt đi  $2\pi$  ra-đi-an (hay 360 độ) thì "hướng nhìn" cũng không thay đổi. Để cho  $\arg(z)$  chỉ trả ra một giá trị duy nhất, quy ước là lấy góc trong nửa đoạn  $(-\pi; \pi]$  (hay  $(-180^\circ; 180^\circ]$ ). Như ví dụ trong hình 4,  $\arg(4 + 2i) = \theta = \arctan\left(\frac{2}{4}\right) \approx 0,464 \text{ rad}$  (hay  $26,565^\circ$ ) và  $\arg(4 - 2i) = -\theta = -\arctan\left(\frac{2}{4}\right) \approx -0,464 \text{ rad}$  (cũng có thể được viết lại là  $-26,565^\circ$ ).

Như đã viết, có khoảng cách và hướng nhìn thì chúng ta sẽ có được vị trí số phức. Cách biểu diễn này được gọi là *dạng lượng giác* của số phức. Đặt  $r = |z|$  và  $\varphi = \arg(z)$ , dạng lượng giác của  $z$  được kí hiệu là

$z = r\angle\varphi = r\underline{\varphi}$ . Quy đổi giữa dạng lượng giác và dạng chính tắc, khi  $z = a + ib = r\underline{\varphi}$  thì

$$\begin{cases} a = \Re(z) = r \cos(\varphi) \\ b = \Im(z) = r \sin(\varphi) \end{cases}$$

và từ đó  $z = r(\cos(\varphi) + i \sin(\varphi))$ . Liên hợp của  $z$  dưới dạng lượng giác là  $\bar{z} = r(\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) = r\underline{-\varphi}$ .

Thật sự, rất khó cho nhiều người không thường xuyên thường thức về toán ngay lập tức tìm ra và cảm nhận được ý nghĩa thực tiễn của số ảo. Chúng ta không thể tưởng tượng được số ảo một cách trực quan như các số mà chúng ta thường thấy ở ngoài cuộc sống như 5 cái bút hay  $\frac{1}{3}$  giờ. Đi kèm với đó, kể cả trên lý thuyết toán của ghế nhà trường, cũng sẽ không xảy ra trường hợp nào để cho một số nhân với chính nó ra một số âm.

Nhắc về số âm, theo quan điểm cá nhân, số âm trong đời xuống vốn đã ít khi được sử dụng. Chẳng mấy ai ưa nói "lãi -500000 đồng" so với "lỗ 500000 đồng". Một cách tương tự, nhìn về phương diện lịch sử, trong phần lớn quá trình phát triển của toán học, các nhà toán học xưa thường có mặc cảm với những số âm. Các phương trình sẽ luôn được viết lại thành nhiều trường hợp để tránh chúng. Ví dụ, nếu phương trình bậc hai được viết dưới dạng hiện đại là  $x^2 + ax + b = 0$  với  $a, b$  là hai số thực (có thể âm), thì trong quá khứ, phương trình này được chia ra làm ba trường hợp

$$x^2 + ax = b;$$

$$x^2 + b = ax;$$

$$x^2 = ax + b$$

với  $a, b$  là hai số thực luôn dương. Và cũng từ sự mặc cảm với số âm, họ cho rằng nghiệm của phương trình cũng phải là một số dương. Tương tự với Các-đa-nô<sup>5</sup>, khi giải phương trình bậc ba, ông cũng đưa về các trường hợp như trên. Cụ thể, chúng ta xem xét một trường hợp của bài toán:

$$x^3 = ax + b.$$

Giải phương trình, chúng ta có được nghiệm

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}.$$

Tuy nhiên, sau khi thay những giá trị cụ thể vào  $a$  và  $b$ , Các-đa-nô đã phát hiện ra một vấn đề. Khi  $a = 15$  và  $b = 4$ , nghiệm trả ra cho phương trình  $x^3 = 15x + 4$  theo công thức vừa trên là

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

mặc dù phương trình có một nghiệm bình thường là  $x = 4$  (với kiến thức toán học hiện đại, chúng ta có thể giải ra hai nghiệm cũng thực khác là  $-2 \pm \sqrt{3}$ ). Nhận ra điều đó, Các-đa-nô đã khẳng định rằng công thức này của ông không áp dụng được trong trường hợp xảy ra căn của một số âm. Tuy nhiên, một học trò của ông, Bom-be-li<sup>6</sup>, lại phủ nhận điều trên. Bom-be-li nhận định rằng tồn tại một kiểu số khác số thực sẽ có giá trị bằng "căn âm". Ông chỉ rõ sự khác biệt giữa kiểu số mới này và kiểu số thực thông thường, và đi kèm theo là phương pháp thực hiện đại số trên kiểu số mới. Áp dụng những nền tảng đó, ông đã tính được căn bậc ba của hai số phức lần lượt là  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$  và  $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$ . Cộng hai số vào, hiển nhiên sẽ có được nghiệm 4 như mong muốn.

Với sự xây dựng ban đầu của Bom-be-li làm gốc, trong những thế kỷ sau, tên gọi và lý thuyết về cách biểu diễn số phức được hình thành.

### 0.2.1 Giới hạn

## 0.3 Bài tập

**Bài 1:** Phác thảo đồ thị của những hàm sau:

<sup>5</sup>Gerolamo Cardano (1501-1576).

<sup>6</sup>Rafael Bombelli (1526-1572).

1.  $f(x) = x + 2;$

3.  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16;$

2.  $f(x) = x^2 + 2x + 1;$

4.  $f(x) = 2$

**Lời giải 1:**

# Chương 1

## Cơ bản của xử lý số liệu trong vật lí

**Bài 2:** Khoảng cách trung bình từ trái đất đến mặt trời là  $1,5 \cdot 10^8$  km. Giả sử quỹ đạo của trái đất quanh mặt trời là tròn và mặt trời được đặt tại gốc của hệ quy chiếu.

1. Tính tốc độ di chuyển trung bình của trái đất quanh mặt trời dưới dạng dặm trên giờ (1 dặm = 1,6093 km).
2. Ước lượng góc  $\theta$  giữa véc-tơ vị trí của trái đất bây giờ và vị trí sau đó 4 tháng.
3. Tính khoảng cách giữa hai vị trí đó.

**Lời giải 2:**

1. Giả sử trái đất quay quanh mặt trời trong 365,25 ngày. Quãng đường mà trái đất đi được trong thời gian này là chu vi của quỹ đạo tròn  $2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^8$  km. Từ đó, ta có thể tính được tốc độ trung bình của trái đất quanh mặt trời là  $\frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}}{365,25 \text{ ngày}}$ . Thực hiện quy đổi để được:

$$\frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}}{365,25 \text{ ngày}} \cdot \frac{1 \text{ dặm}}{1,6093 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ ngày}}{24 \text{ h}} = \boxed{6,4 \cdot 10^4 \frac{\text{dặm}}{\text{h}}}.$$

2. Trái đất quay quanh mặt trời trong 12 tháng, tương đương với một góc quay  $360^\circ$  so với gốc là mặt trời. Coi như các tháng có độ dài như nhau. Ta có  $\theta$  chính là góc quay của trái đất trong 4 tháng, tương đương với:

$$\theta = \frac{360^\circ}{12 \text{ tháng}} \cdot 4 \text{ tháng} = \boxed{120^\circ}.$$

3.

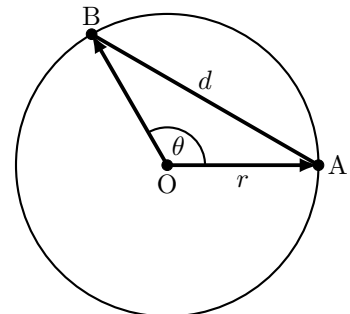
Gọi  $A$  là vị trí của trái đất bây giờ,  $B$  là vị trí của trái đất sau 4 tháng theo như hình 1.1. Coi một đơn vị trên tọa độ bằng độ dài bán kính của quỹ đạo tròn, tức là  $r = 1,5 \cdot 10^8$  km. Ta có tọa độ điểm  $A$  là  $(1; 0)$ . Tọa độ điểm  $B$  là  $(\cos(120^\circ); \sin(120^\circ)) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Từ đó, ta có khoảng cách giữa hai vị trí đó là:

$$d = r \cdot \sqrt{\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \boxed{2,6 \cdot 10^8 \text{ km}}.$$

**Bài 3:** Khối lượng riêng (bằng khối lượng của vật chia cho thể tích của vật đó) của nước là  $1,00 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ .

1. Tính giá trị này theo ki-lô-gam trên mét khối.
2. 1,00 lít nước nặng bao nhiêu ki-lô-gam, bao nhiêu pao (lb)? Biết  $1 \text{ lb} = 0,45 \text{ kg}$  (chính xác).

**Lời giải 3:**



Hình 1.1: Quỹ đạo trái đất



1. Thực hiện quy đổi, ta có:

$$\begin{aligned} 1,00 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} &= \left(1,00 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} \cdot \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}}\right)^3 \\ &= \boxed{1,00 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}. \end{aligned}$$

2. Khối lượng của 1,00 lít nước là

$$\begin{aligned} 1,00 \text{ L} \cdot \left(1,00 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) &= 1,00 \text{ L} \cdot \left(1,00 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ L}} \\ &= \boxed{1,00 \cdot 10^0 \text{ kg}}. \end{aligned}$$

Theo đơn vị pao (lb), ta có:

$$1,00 \cdot 10^0 \text{ kg} = 1,00 \cdot 10^0 \text{ kg} \cdot \frac{1 \text{ lb}}{0,45 \text{ kg}} = \boxed{2,22 \cdot 10^0 \text{ lb}}.$$

**Bài 4:** Trong hệ thời gian cổ Trung Hoa, từ triều đại Thanh trở về trước (trừ một số năm), một ngày được chia thành 100 khắc. Sau triều đại này (trừ một số năm), một ngày được chia thành 96 khắc. Coi một ngày có 24 giờ và mọi số liệu là chính xác tuyệt đối.

1. Tính số giây (hệ đo lường hiện đại) trong một khắc trong cả hai thời kì.
2. Tính tỉ lệ về độ dài của hai khắc trong hai thời kì.

**Lời giải 4:**

1. Số giây trong một ngày là

$$24 \text{ h} \cdot \frac{60 \text{ phút}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{60 \text{ giây}}{1 \text{ phút}} = 86400 \text{ giây}.$$

Từ triều đại Thanh trở về trước, số giây trong một khắc là

$$\frac{86400 \text{ giây}}{100 \text{ khắc}_{\text{trước}}} = \boxed{864 \frac{\text{giây}}{\text{khắc}_{\text{trước}}}.$$

Sau triều đại Thanh, số giây trong một khắc là

$$\frac{86400 \text{ giây}}{96 \text{ khắc}_{\text{sau}}} = \boxed{900 \frac{\text{giây}}{\text{khắc}_{\text{sau}}}.$$

2 Tỉ lệ độ dài thời gian một khắc trước và sau là

$$\frac{1 \text{ khắc}_{\text{trước}}}{1 \text{ khắc}_{\text{sau}}} = \frac{1 \text{ khắc}_{\text{trước}}}{1 \text{ khắc}_{\text{sau}}} \cdot \frac{864 \text{ giây}}{1 \text{ khắc}_{\text{trước}}} \cdot \frac{1 \text{ khắc}_{\text{sau}}}{900 \text{ giây}} = \boxed{0,96}.$$

**Bài 5:** Một vòng đĩa tròn như trong hình 1.2 có đường kính 4,50 cm rỗng ở giữa một lỗ đường kính 1,25 cm. Đĩa dày 1,50 mm. Biết rằng đĩa được làm từ chất liệu có khối lượng riêng là  $8600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Tính khối lượng vòng đĩa theo gram.

**Lời giải 5:**

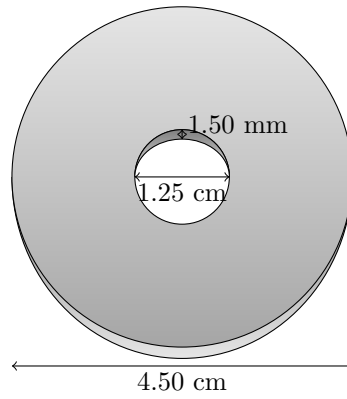
Đặt  $D = 4,50 \text{ cm} = 4,50 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $d = 1,25 \text{ cm} = 1,25 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $h = 1,50 \text{ mm} = 1,50 \times 10^{-3} \text{ m}$  và  $\mathcal{D} = 8600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8,6 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{10^3 \text{ g}}{\text{kg}} = 8,6 \times 10^6 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ .

Nhận thấy rằng đĩa có dạng trụ, diện tích mặt đáy là

$$S = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}.$$

Thể tích của đĩa là  $V = S \cdot h = \frac{\pi \cdot h \cdot (D^2 - d^2)}{4}$ . Nhân với khối lượng riêng, ta có khối lượng của đĩa là

$$m = \mathcal{D} \cdot V = \frac{\pi \cdot h \cdot \mathcal{D} \cdot (D^2 - d^2)}{4}.$$



Hình 1.2: Vòng đĩa tròn

Thay số trực tiếp với sự để ý đến số chữ số có nghĩa, ta có kết quả  $m = 1,89 \times 10^1 \text{ kg}$ .

**Bài 6:** Khối lượng của một chất lỏng được mô hình hóa bởi phương trình  $m = A \cdot t^{0,8} - B \cdot t$ . Nếu như  $t$  được tính bằng giây và  $m$  được tính bằng ki-lô-gram, thì đơn vị của  $A$  và  $B$  là gì?

**Lời giải 6:**

Để có thể cộng trừ các phần tử, chúng cần phải có cùng đơn vị. Do vậy, đơn vị của  $A \cdot t^{0,8}$  và  $B \cdot t$  là kg. Từ quy tắc nhân chia các đơn vị, ta có:

$$\begin{cases} A \cdot s^{0,8} = \text{kg} \\ B \cdot s = \text{kg} \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{\text{kg}}{s^{0,8}} \\ B = \frac{\text{kg}}{s} \end{cases}.$$

Vậy đơn vị của  $A$  là  $\frac{\text{kg}}{s^{0,8}}$  và đơn vị của  $B$  là  $\frac{\text{kg}}{s}$ .

## Chương 2

# Chuyển động

**Bài 7:** Một ô tô đi 40 km trên một đường thẳng với tốc độ không đổi  $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Sau đó, nó đi thêm theo chiều đó 60 km với tốc độ không đổi  $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Các giá trị đo được tính đến hai chữ số có nghĩa.

1. Tính vận tốc trung bình trên cả quãng đường.
2. Tính tốc độ trung bình trên cả quãng đường.
3. Nếu xe quay đầu trước khi đi 50 km lúc sau, giữ nguyên các số liệu khác, thì vận tốc trung bình và tốc độ trung bình có thay đổi không. Tại sao?
4. Vẽ đồ thị vị trí  $x$  theo thời gian  $t$  và từ đó chỉ ra cách tính vận tốc trung bình.

**Lời giải 7:**

Coi chiều chuyển động ban đầu là chiều dương.

1. Thời gian đi 40 km đầu là

$$40 \text{ km} \div 40 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1,0 \text{ h.}$$

Thời gian đi 50 km sau là

$$60 \text{ km} \div 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1,2 \text{ h.}$$

Do hai quãng đường là cùng chiều nên ta có độ dịch chuyển của xe tổng cộng là

$$\Delta x = 40 \text{ km} + 60 \text{ km} = 100 \text{ km}$$

và tổng thời gian đi là

$$\Delta t = 1,0 \text{ h} + 1,2 \text{ h} = 2,2 \text{ h.}$$

Từ đó, ta có vận tốc trung bình là

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \boxed{4,5 \times 10^1 \frac{\text{km}}{\text{h}}}.$$

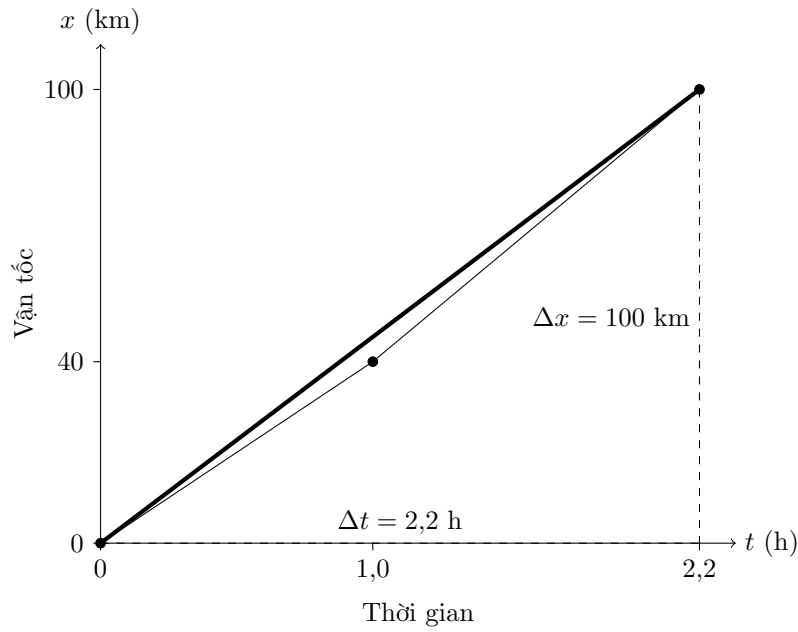
2. Dễ thấy tổng quãng đường đi là  $d = 100 \text{ km}$ . Tốc độ trung bình là  $\bar{s} = \frac{d}{\Delta t} = \boxed{4,5 \times 10^1 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$ .

3. Thời gian không thay đổi. Có độ dịch chuyển thay đổi còn  $\Delta x = 40 \text{ km} - 60 \text{ km} = -20 \text{ km}$  nhưng tổng quãng đường thì không. Do đó, tốc độ trung bình giữ nguyên nhưng vận tốc trung bình thay đổi.

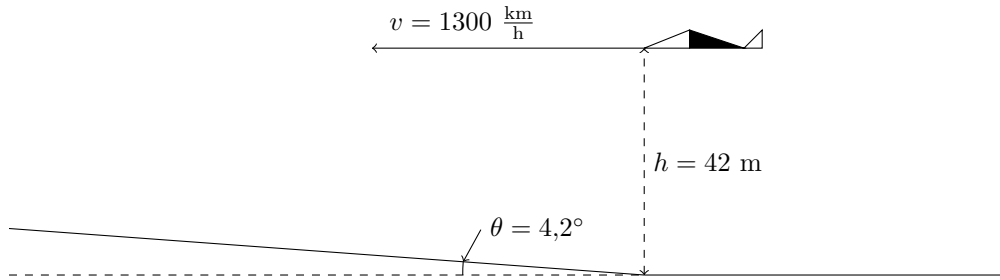
4. Ta có đồ thị ở hình 2.1 bằng việc vẽ mối quan hệ  $x(t)$  xong nối điểm đầu và điểm cuối. Vận tốc trung bình là độ dốc của đường thẳng nối hai điểm này.

**Bài 8:** Một máy bay phản lực đang bay ngang ở độ cao  $h = 42$  mét. Đột nhiên nó bay vào vùng đất dốc lên góc  $\theta = 4,2^\circ$  (xem hình 2.2). Với tốc độ bay là  $v = 1300 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , thời gian tính từ lúc bay vào vùng đất dốc mà người phi công có để điều chỉnh máy bay là bao nhiêu? Tất cả các số liệu được đo đến hai chữ số có nghĩa.

**Lời giải 8:**



Hình 2.1: Đồ thị vị trí xe-thời gian chạy



Hình 2.2: Vị trí máy bay trong vùng dốc lên

Khoảng cách từ máy bay đến điểm va chạm với mặt đất là

$$d = \frac{h}{\tan(\theta)}.$$

Từ đó, ta có được thời gian cho phép là

$$t = \frac{d}{v} = \frac{h}{v \tan(\theta)}.$$

Thay số trực tiếp, với để ý đến sự quy đổi  $v = 1300 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1300 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 361 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , ta có

$$t = \boxed{1,6 \times 10^0 \text{ s}}.$$

**Bài 9:** Cho biết vị trí của một vật chuyển động thẳng được xác định bằng  $x(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ . Xác định vị trí, vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm  $t = t_0$ .

**Lời giải 9:**

Vị trí của vật tại  $t = t_0$  là

$$x(t_0) = \boxed{a \cdot t_0^2 + b \cdot t_0 + c}.$$

Vận tốc của vật tại  $t = t_0$  là

$$v(t_0) = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \boxed{2a \cdot t_0 + b}.$$

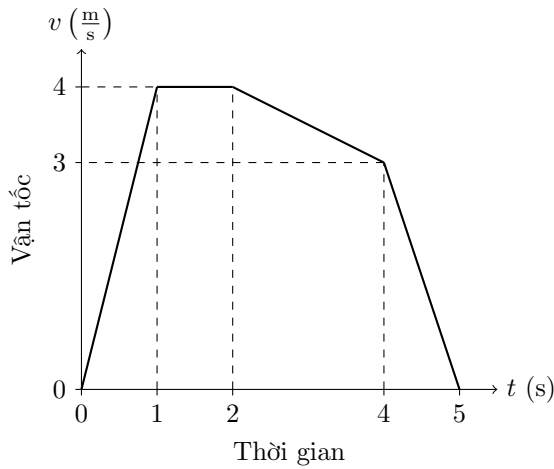
Gia tốc của vật tại  $t = t_0$  là

$$a(t_0) = \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \boxed{2a}.$$

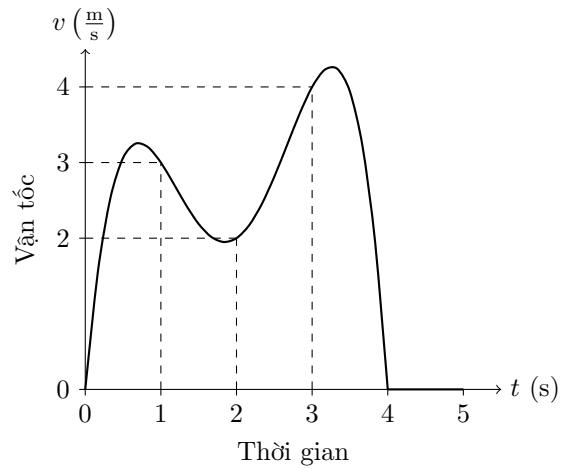
**Bài 10:** Phác họa đồ thị vị trí - thời gian và gia tốc thời gian của một người chạy bộ nếu đồ thị vận tốc - thời gian của người đó được biểu diễn trên đồ thị

1. hình 2.3;
2. hình 2.4.

Các số liệu được coi như chính xác tuyệt đối. Bạn có thể giả sử người đó bắt đầu chạy từ vị trí  $x = 0$ .



Hình 2.3: Phần 1



Hình 2.4: Phần 2

### Lời giải 10:

1. Ta chia quá trình chạy làm 4 phần.

- Phần 1 ( $0 \leq t \leq 1$  s): Vận tốc tăng đều từ 0 đến  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Chuyển động là nhanh dần với gia tốc không đổi là  $a(t)|_{t \in [0 \text{ s}; 1 \text{ s}]} = \frac{v(1 \text{ s}) - v(0 \text{ s})}{1 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Sau khoảng thời gian  $t$ , độ dịch chuyển là  $x(t)|_{t \in [0 \text{ s}; 1 \text{ s}]} - x(0 \text{ s}) = \frac{a(t)|_{t \in [0 \text{ s}; 1 \text{ s}]} \cdot t^2}{2} + v(t)|_{t \in [0 \text{ s}; 1 \text{ s}]} \cdot t$ . Từ đó ta có  $x(t) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$  với  $0 \leq t \leq 1$  s và  $x(1 \text{ s}) = 2 \text{ m}$ .

- Phần 2 ( $1 \leq t \leq 2$  s): Vận tốc không đổi ở  $v(t)|_{t \in [1 \text{ s}; 2 \text{ s}]} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (chuyển động thẳng đều).

Qua đó, ta có  $x(t)|_{t \in [1 \text{ s}; 2 \text{ s}]} = x(1 \text{ s}) + v(t)|_{t \in [1 \text{ s}; 2 \text{ s}]} \cdot (t - 1 \text{ s}) = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 2 \text{ m}$  và  $x(2 \text{ s}) = 6 \text{ m}$ .

Phần 3 ( $2 \leq t \leq 4$  s) và phần 4 ( $4 \leq t \leq 5$  s) làm tương tự như phần 1. Ta được

$$\begin{cases} a(t)|_{t \in [2 \text{ s}; 4 \text{ s}]} &= -\frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a(t)|_{t \in [4 \text{ s}; 5 \text{ s}]} &= -3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

và qua đó

$$\begin{aligned} \begin{cases} x(t)|_{t \in [2 \text{ s}; 4 \text{ s}]} &= -\frac{1}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (t - 2 \text{ s})^2 + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t - 2 \text{ s}) + 6 \text{ m} \\ x(t)|_{t \in [4 \text{ s}; 5 \text{ s}]} &= -\frac{3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (t - 4 \text{ s})^2 + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t - 4 \text{ s}) + 13 \text{ m} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x(t)|_{t \in [2 \text{ s}; 4 \text{ s}]} &= -\frac{1}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 3 \text{ m} \\ x(t)|_{t \in [4 \text{ s}; 5 \text{ s}]} &= -\frac{3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 23 \text{ m} \end{cases} \end{aligned}$$

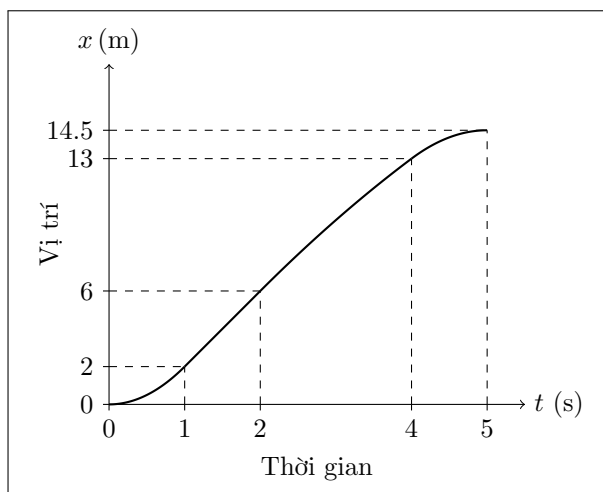
Cuối cùng, chúng ta có thể biểu diễn vị trí của người chạy trên đồ thị như hình 2.5.

2.

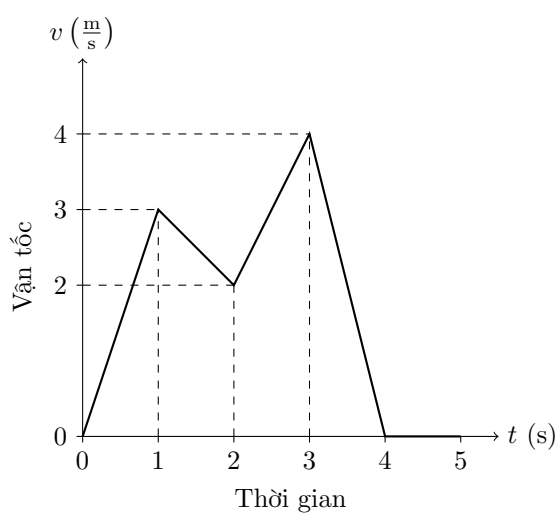
Chúng ta có thể phác họa đồ thị vị trí - thời gian bằng việc xấp xỉ đồ thị vận tốc - thời gian dưới dạng đường gấp khúc nối các điểm đã biết thể hiện ở 2.6.

Từ đây, thực hiện tương tự như phần 1 để có phương trình vị trí - thời gian

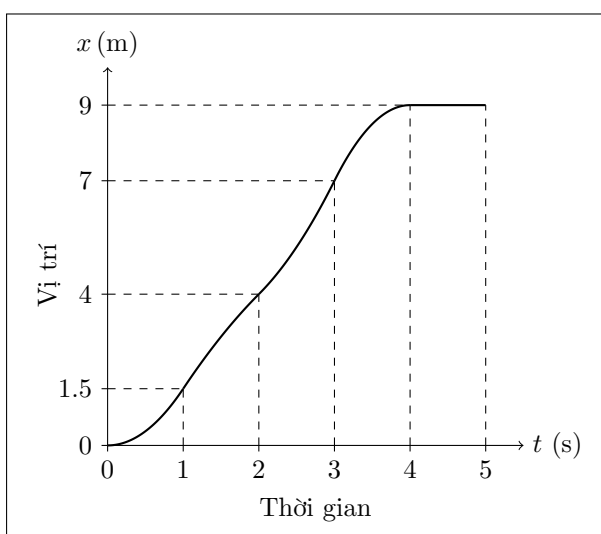
$$x(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 & \text{với } 0 \leq t < 1 \text{ s} \\ -\frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 2 \text{ m} & \text{với } 1 \leq t < 2 \text{ s} \\ 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 4 \text{ m} & \text{với } 2 \leq t < 3 \text{ s} \\ -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 23 \text{ m} & \text{với } 3 \leq t < 4 \text{ s} \\ 9 \text{ m} & \text{với } 4 \leq t \leq 5 \text{ s} \end{cases}$$



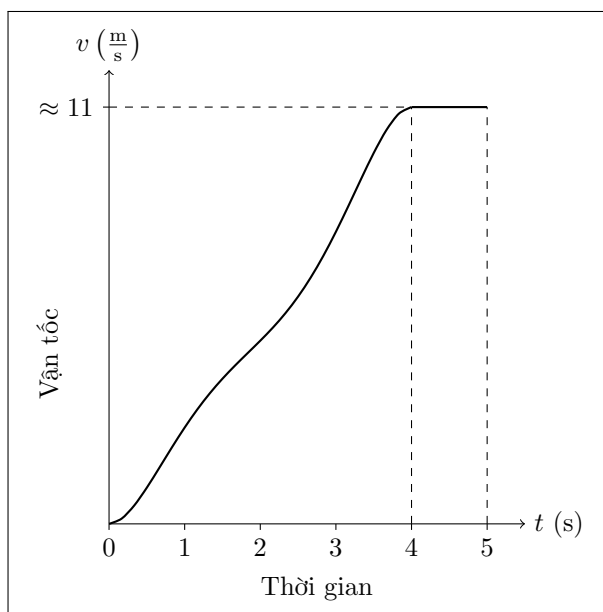
Hình 2.5: Đồ thị vị trí - thời gian cho phần 1



Hình 2.6: Vận tốc - thời gian xấp xỉ của phần 2



Hình 2.7: Vị trí - thời gian (xấp xỉ) cho phần 2



Hình 2.8: Đồ thị vị trí - thời gian cho phần 2

và ta vẽ được đồ thị ở hình 2.7.

Trong thực tiễn, chúng ta hay xấp xỉ những quá trình không tuyến tính qua hữu hạn những điểm đo rồi nội suy tuyến tính (nối các điểm bằng các đoạn thẳng) như đã làm. Còn nhiều phương pháp nội suy nữa còn có thể được tìm thấy trong những tài liệu về phương pháp tính và giải tích số. Thông thường, với càng nhiều điểm thì độ chính xác càng lớn.

Trong trường hợp mà bạn nhận ra phương trình vận tốc - thời gian được cho là

$$v(t) = \begin{cases} \frac{-t \left( 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^5} \cdot t^3 - 31 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} \cdot t^2 + 77 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot t - 68 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{6} & \text{với } 0 \leq t < 4 \\ 0 & \text{với } 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

thì bạn có thể thực hiện nguyên hàm trên hàm này để tính được vị trí vật là

$$x(t) = \begin{cases} \frac{-t^2 \left( 48 \frac{\text{m}}{\text{s}^5} \cdot t^3 - 465 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} \cdot t^2 + 1540 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot t - 2040 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{360} & \text{với } 0 \leq t < 4 \\ \frac{496}{45} \text{ m} & \text{với } 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

và ta có đồ thị như hình 2.8.

**Bài 11:** Hai xe hơi có tốc độ lần lượt là  $v_1 = 50,0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  và  $v_2 = 60,0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  đi ngược chiều với nhau trên một con đường hẹp. Hai xe phát hiện lẫn nhau khi khoảng cách giữa hai xe là  $d = 400 \text{ m}$ . Cả hai xe đồng thời giảm tốc với cùng một gia tốc hãm đều là  $a$ . Tính giá trị tối thiểu của  $a$  nếu biết hai xe không xảy ra va chạm. Số liệu được đo tới 3 chữ số có nghĩa.

**Lời giải 11:**

Gọi quãng đường đi được trong khi hãm phanh của hai xe lần lượt là  $d_1$  và  $d_2$ .

Trong quá trình hãm đến vận tốc bằng 0, tổng quãng đường đi của cả hai xe phải không vượt quá khoảng cách  $d$ . Vì vậy, ta có bất đẳng thức

$$d_1 + d_2 \leq d.$$

Trong khi đó, quãng đường xe thứ nhất đã di chuyển là  $d_1 = \frac{0^2 - v_1^2}{2(-a)} = \frac{v_1^2}{2a}$ . Tương tự, ta có quãng đường mà xe thứ hai di chuyển trong khoảng thời gian này là  $d_2 = \frac{v_2^2}{2a}$ . Từ đó, thay vào phương trình ở trên để được

$$\frac{v_1^2}{2a} + \frac{v_2^2}{2a} \leq d \iff a \geq \frac{v_1^2 + v_2^2}{2d}.$$

Thay số trực tiếp, ta có gia tốc hãm tối thiểu phải là  $\boxed{7,63 \times 10^3 \frac{\text{km}}{\text{h}^2}}$ .

**Bài 12:** Để dừng xe ban đầu bạn cần một thời gian phản ứng để bắt đầu phanh, rồi xe mới đi chậm dần nhờ có một gia tốc hãm không đổi. Giả sử quãng đường đi được trong hai pha này là 186 ft nếu vận tốc ban đầu là  $50 \frac{\text{dặm}}{\text{h}}$ . Còn trong một trường hợp khác, quãng đường đi được trong hai pha này là 80 ft nếu vận tốc ban đầu là  $30 \frac{\text{dặm}}{\text{h}}$ . Biết thời gian phản ứng là cố định và  $1 \text{ dặm} = 5280 \text{ ft}$ , tính thời gian phản ứng và độ lớn của gia tốc hãm.

**Lời giải 12:**

Gọi thời gian phản ứng là  $t_p$ , vận tốc đầu là  $v_0$ , gia tốc hãm là  $a$ .

Trong khoảng thời gian phản ứng, xe đi được  $v_0 t_p$ . Và trong khoảng thời gian hãm, xe đi được  $\frac{0^2 - v_0^2}{2(-a)} = \frac{v_0^2}{2a}$ . Cho nên, tổng quãng đường đi được trong hai pha là

$$\Delta x = v_0 t + \frac{v_0^2}{2a} \quad (2.1)$$

Trước khi thay số ta thực hiện quy đổi

$$50 \frac{\text{dặm}}{\text{h}} = 50 \frac{\text{dặm}}{\text{h}} \cdot \frac{5280 \text{ ft}}{1 \text{ dặm}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \approx 73 \frac{\text{ft}}{\text{s}},$$

tương tự,  $30 \frac{\text{dặm}}{\text{h}} = 44 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ . Từ đó, thay số vào phương trình 2.1 để có hệ

$$\begin{cases} 186 \text{ ft} = 73 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \cdot t_p + \frac{\left(73 \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right)^2}{2a} \\ 80 \text{ ft} = 44 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \cdot t_p + \frac{\left(44 \frac{\text{ft}}{\text{s}}\right)^2}{2a} \end{cases}.$$

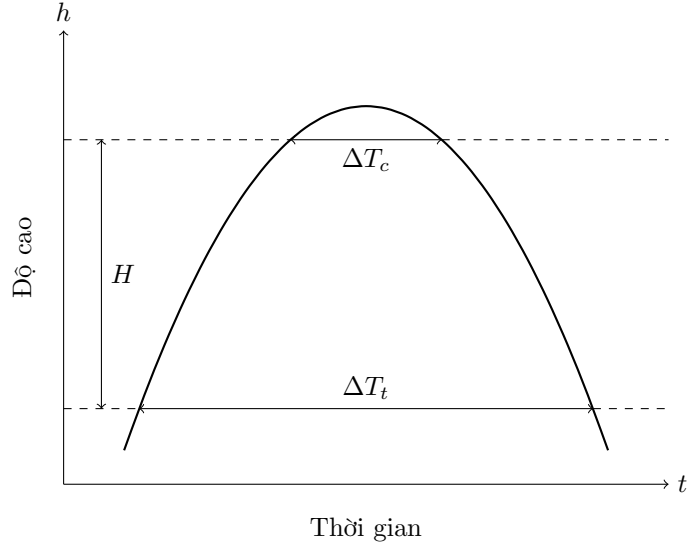
Giải hệ phương trình, ta có thời gian phản ứng là  $t_p = 0,97 \text{ s}$  và gia tốc hãm là  $a = 26 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$ .

**Bài 13:** Tại Phòng Thí nghiệm Vật lí Quốc gia ở Anh, người ta thực hiện xác định gia tốc trọng trường  $g$  theo thí nghiệm sau: Ném một quả bóng thủy tinh lên theo chiều thẳng đứng trong ống chân không và cho nó rơi xuống. Gọi  $\Delta T_t$  trên hình 2.9 là thời gian khoảng giữa hai lần quả bóng đi qua một điểm thấp nào đó.  $\Delta T_c$  là khoảng thời gian giữa hai lần quả bóng đi qua một điểm cao hơn và  $H$  là khoảng cách giữa hai điểm. Chứng minh rằng

$$g = \frac{8H}{\Delta T_t^2 - \Delta T_c^2}.$$

**Lời giải 13:**

Gọi vận tốc khi bóng bắt đầu bay lên từ vị trí thấp là  $v_0$ . Sau một khoảng thời gian  $\Delta T_t$ , quả bóng quay lại vị trí cũ, do vậy, ta có phương trình  $0 = -\frac{g\Delta T_t^2}{2} + v_0\Delta T_t$ . Thực hiện biến đổi tương đương để có



Hình 2.9: Đồ thị thời gian - độ cao của quả bóng thủy tinh

$$v_0 = \frac{g\Delta T_t}{2}.$$

Nhận thấy rằng đồ thị có tính đối xứng. Sử dụng điều đó, ta tính được khoảng thời gian quả bóng lên một độ cao  $H$  là  $t = \frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}$ . Qua đó, ta có phương trình thứ hai là

$$H = -\frac{gt^2}{2} + v_0t = -\frac{g\left(\frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}\right)^2}{2} + v_0\left(\frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}\right).$$

Thế giá trị của  $v_0$  vào phương trình và tiếp tục thực hiện biến đổi, ta có:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{g(\Delta T_t - \Delta T_c)^2}{8} + \frac{g\Delta T_t}{2} \left(\frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}\right) \\ &= -g\left(\frac{\Delta T_t^2}{8} - \frac{\Delta T_t\Delta T_c}{4} + \frac{\Delta T_c^2}{8}\right) + g\left(\frac{\Delta T_t^2}{4} - \frac{\Delta T_t\Delta T_c}{4}\right) \\ &= g \cdot \frac{\Delta T_t^2 - \Delta T_c^2}{8} \\ \Leftrightarrow g &= \frac{8H}{\Delta T_t^2 - \Delta T_c^2}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

**Bài 14:** Một nghệ sĩ tung hứng các quả bóng lên theo phương thẳng đứng. Quả bóng sẽ lên cao hơn bao nhiêu nếu thời gian bóng trong không khí tăng gấp  $n$  lần ( $n \in \mathbb{R}^+$ )?

**Lời giải 14:**

Có thời gian để quả bóng bay từ tay lên trên vị trí cao nhất bằng một nửa thời gian bóng trong không khí. Nếu thời gian bóng trong không khí tăng gấp  $n$  lần so với thời gian trong không khí gốc, thì cùng chia cho 2, ta cũng sẽ có thời gian bóng bay từ tay lên trên vị trí cao nhất cũng tăng gấp  $n$  lần so với thời gian gốc để bay lên vị trí cao nhất.

Gọi  $t_1$  là thời gian gốc để bóng bay từ tay lên vị trí cao nhất,  $t_2 = nt_1$  là thời gian bay khi đã tăng  $n$  lần. Gọi  $h_1, h_2$  lần lượt là độ cao bóng đi được tương ứng với hai khoảng thời gian  $t_1, t_2$ . Để ý rằng khi lên vị trí cao nhất thì vận tốc bóng là 0; ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} h_1 &= \frac{gt_1^2}{2} \\ h_2 &= \frac{gt_2^2}{2} = \frac{g(nt_1)^2}{2} \end{cases} \Rightarrow h_2 = n^2 h_1.$$

Từ đó, ta có quả bóng cao lên hơn được  $n^2 - 1$  lần độ cao gốc.



# Tài liệu tham khảo

- [1] Agarwal, R.P., Perera, K., Pinelas, S. (2011). *History of Complex Numbers*. In: An Introduction to Complex Analysis. Springer, Boston, MA. [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0195-7\\_50](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0195-7_50)