

# Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 20 tháng 9 năm 2025

# Mục lục

|                                                                    |    |
|--------------------------------------------------------------------|----|
| Lời giới thiệu                                                     | 3  |
| 0 Kiến thức toán học nền tảng                                      | 4  |
| 0.1 Hàm số đại số một biến và các phép biến đổi trên hàm . . . . . | 5  |
| 0.1.1 Số mũ . . . . .                                              | 5  |
| 1 Cơ bản của xử lý số liệu trong vật lý                            | 7  |
| 2 Chuyển động                                                      | 10 |

# Lời giới thiệu

# 0.

## Kiến thức toán học nền tảng

Chương này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lý thuyết của môn vật lý (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lý và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Kể như, trong tài liệu này, khi nhắc về hàm số, không có phần về đơn ánh hay toàn ánh. Những khái niệm này là vô cùng quan trọng nếu tập trung chứng minh chặt chẽ các tính chất liên quan đến hàm số, nhưng không phục vụ nhiều trong ứng dụng thực tiễn. Thay vào đó, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rồi rắc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn, bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán, mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lý thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lý sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lý. Thứ hai, vật lý không dùng nhiều đến lý thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lý không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lý thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lý đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh<sup>1</sup>. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lý, và giống rất nhiều công trình vật lý hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lý. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lý hay kỹ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường. Các lý thuyết bình thường được đặt ở cùng chỗ thì sẽ tách nhau ra, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách “tôn giáo hóa”. Tác giả vẫn đưa một số lý thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lý thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lý thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

---

<sup>1</sup>Albert Einstein (1879 - 1955)

## 0.1 Hàm số đại số một biến và các phép biến đổi trên hàm

### 0.1.1 Số mũ

Một dạng hàm quen thuộc, được giới thiệu trong chương trình học trung học phổ thông, là đa thức. Nhưng trước khi chúng ta nhắc lại về đa thức, chúng ta sẽ nhắc lại về đơn thức. Hàm **đơn thức**<sup>2</sup> là một hàm được viết dưới dạng

$$f(x) = ax^n$$

với  $a$  là một số thực và biến  $x$  được mũ lên một số nguyên không âm  $n$ . Trong tương lai, chúng ta sẽ đề cập về vấn đề hàm số mũ mà thay  $n$  bằng số mũ thực. Tạm thời, chúng ta sẽ có định nghĩa **số mũ** như sau: Với  $x \in \mathbb{R}$  và  $n \in \mathbb{Z}^+$  thì

$$x^n = \prod_{i=1}^n (x) = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ lần}}.$$

Một cách định nghĩa chặt chẽ hơn là sử dụng truy hồi: Với  $x \in \mathbb{R}$  và  $n \in \mathbb{Z}^+$  thì

- $x^1 = x$ , và;
- $x^{n+1} = x \times x^n$  với mọi số nguyên dương  $n$ .

Số mũ có một số tính chất như nhau: Với  $x$  và  $y$  là hai số thực và  $m, n$  là hai số nguyên dương thì

- $x^m x^n = x^{m+n}$ ;
- $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$  ( $x \neq 0$ );
- $x^m y^m = (xy)^m$ ;
- $\frac{x^m}{y^m} = \left(\frac{x}{y}\right)^m$  ( $y \neq 0$ );
- $(x^m)^n = x^{mn}$ .

Chúng ta sẽ mở rộng định nghĩa với số mũ bằng 0. Coi như là các tính chất vẫn đúng, chúng ta có

$$x^0 = x^{n-n} = \frac{x^n}{x^n} = 1.$$

Đề ý rằng chúng ta đã thực hiện phép chia trong quá trình xác định  $x^0$ . Do đó, chúng ta cần đảm bảo rằng  $x \neq 0$ . Nói ngắn gọn, định nghĩa  $x^0 = 1$  với  $x \neq 0$ .

**Bài 1:** Sử dụng định nghĩa truy hồi, chứng minh rằng với mọi số thực  $x$  số nguyên dương  $m$  và  $n$  thì  $x^m \times x^n = x^{m+n}$  và  $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$  nếu  $x \neq 0$ .

**Lời giải bài 1:**

Chúng ta sẽ chứng minh các tính chất  $x^m x^n = x^{m+n}$  bằng cách quy nạp theo  $n$ . Hiển nhiên,  $x^m x^1 = x^m \times x = x^{m+1}$ . Giả sử  $x^m x^n = x^{m+n}$  đúng với số nguyên dương  $n = k$ . Khi đó,

$$\begin{aligned} x^{m+k+1} &= x^{m+k} \times x && \text{(định nghĩa truy hồi)} \\ &= x^m x^k \times x && \text{(quy nạp)} \\ &= x^m x^{k+1} \end{aligned}$$

và qua đó chúng ta có giả thiết đúng với  $k+1$ . Sử dụng nguyên lý quy nạp để có  $x^m x^n = x^{m+n}$  luôn đúng.

Sử dụng tính chất này, với  $x \neq 0$ , có:

$$\begin{aligned} x^{m-n} x^n &= x^{(m-n)+n} = x^m \\ \iff x^{m-n} &= \frac{x^m}{x^n}. \end{aligned}$$

Chúng ta có điều phải chứng minh.

**Bài 2:** Sử dụng định nghĩa truy hồi, chứng minh rằng với mọi số thực  $x$  và  $y$  và số nguyên dương  $m$  thì  $x^m y^m = (xy)^m$ .

**Lời giải bài 2:**

<sup>2</sup>Chúng ta sẽ đề cập đến đơn thức và đa thức nhiều biến khi đến phần hàm nhiều biến.

Một lần nữa, chúng ta lại chứng minh bằng quy nạp theo  $m$ . Điều cần chứng minh hiển nhiên đúng với  $m = 1$ . Giả sử  $x^m y^m = (xy)^m$  đúng với số nguyên dương  $m = k$ . Khi đó,

$$\begin{aligned}x^{k+1} y^{k+1} &= x^k x y^k y && \text{(định nghĩa truy hồi)} \\&= (xy)^k xy && \text{(quy nạp)} \\&= (xy)^{k+1}\end{aligned}$$

và qua đó chúng ta có giả thiết đúng với  $k + 1$ . Sử dụng nguyên lí quy nạp để có  $x^m y^m = (xy)^m$  luôn đúng.

# 1.

## Cơ bản của xử lý số liệu trong vật lí

**Bài 3:** Khoảng cách trung bình từ trái đất đến mặt trời là  $1,5 \cdot 10^8$  km. Giả sử quỹ đạo của trái đất quanh mặt trời là tròn và mặt trời được đặt tại gốc của hệ quy chiếu.

1. Tính tốc độ di chuyển trung bình của trái đất quanh mặt trời dưới dạng dặm trên giờ (1 dặm = 1,6093 km).
2. Ước lượng góc  $\theta$  giữa véc-tơ vị trí của trái đất bây giờ và vị trí sau đó 4 tháng.
3. Tính khoảng cách giữa hai vị trí đó.

**Lời giải bài 3:**

1. Giả sử trái đất quay quanh mặt trời trong 365,25 ngày. Quãng đường mà trái đất đi được trong thời gian này là chu vi của quỹ đạo tròn  $2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^8$  km. Từ đó, chúng ta có thể tính được tốc độ trung bình của trái đất quanh mặt trời là  $\frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}}{365,25 \text{ ngày}}$ . Thực hiện quy đổi để được:

$$\frac{2\pi \cdot 1,5 \cdot 10^8 \text{ km}}{365,25 \text{ ngày}} \cdot \frac{1 \text{ dặm}}{1,6093 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ ngày}}{24 \text{ h}} = \boxed{6,4 \cdot 10^4 \frac{\text{dặm}}{\text{h}}}.$$

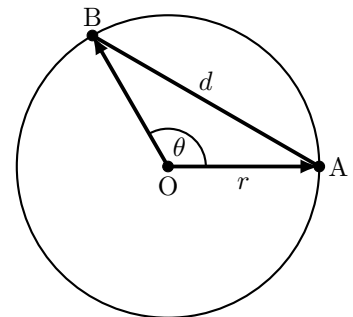
2. Trái đất quay quanh mặt trời trong 12 tháng, tương đương với một góc quay  $360^\circ$  so với gốc là mặt trời. Coi như các tháng có độ dài như nhau. Ta có  $\theta$  chính là góc quay của trái đất trong 4 tháng, tương đương với:

$$\theta = \frac{360^\circ}{12 \text{ tháng}} \cdot 4 \text{ tháng} = \boxed{120^\circ}.$$

3.

Gọi  $A$  là vị trí của trái đất bây giờ,  $B$  là vị trí của trái đất sau 4 tháng theo như hình 1.1. Coi một đơn vị trên tọa độ bằng độ dài bán kính của quỹ đạo tròn, tức là  $r = 1,5 \cdot 10^8$  km. Ta có tọa độ điểm  $A$  là  $(1; 0)$ . Tọa độ điểm  $B$  là  $(\cos(120^\circ); \sin(120^\circ)) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . Từ đó, chúng ta có khoảng cách giữa hai vị trí đó là:

$$d = r \cdot \sqrt{\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \boxed{2,6 \cdot 10^8 \text{ km}}.$$



Hình 1.1: Quỹ đạo trái đất

**Bài 4:** Khối lượng riêng (bằng khối lượng của vật chia cho thể tích của vật đó) của nước là  $1,00 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ .

1. Tính giá trị này theo ki-lô-gam trên mét khối.
2. 1,00 lít nước nặng bao nhiêu ki-lô-gam, bao nhiêu pao (lb)? Biết  $1 \text{ lb} = 0,45 \text{ kg}$  (chính xác).

**Lời giải bài 4:**

1. Thực hiện quy đổi, chúng ta có:

$$\begin{aligned} 1,00 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} &= \left(1,00 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) \cdot \frac{1 \text{ kg}}{1000 \text{ g}} \cdot \left(\frac{100 \text{ cm}}{1 \text{ m}}\right)^3 \\ &= \boxed{1,00 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}. \end{aligned}$$

2. Khối lượng của 1,00 lít nước là

$$\begin{aligned} 1,00 \text{ L} \cdot \left(1,00 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) &= 1,00 \text{ L} \cdot \left(1,00 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{1000 \text{ L}} \\ &= \boxed{1,00 \cdot 10^0 \text{ kg}}. \end{aligned}$$

Theo đơn vị pao (lb), chúng ta có:

$$1,00 \cdot 10^0 \text{ kg} = 1,00 \cdot 10^0 \text{ kg} \cdot \frac{1 \text{ lb}}{0,45 \text{ kg}} = \boxed{2,22 \cdot 10^0 \text{ lb}}.$$

**Bài 5:** Trong hệ thời gian cổ Trung Hoa, từ triều đại Thanh trở về trước (trừ một số năm), một ngày được chia thành 100 khắc. Sau triều đại này (trừ một số năm), một ngày được chia thành 96 khắc. Coi một ngày có 24 giờ và mọi số liệu là chính xác tuyệt đối.

1. Tính số giây (hệ đo lường hiện đại) trong một khắc trong cả hai thời kì.
2. Tính tỉ lệ về độ dài của hai khắc trong hai thời kì.

**Lời giải bài 5:**

1. Số giây trong một ngày là

$$24 \text{ h} \cdot \frac{60 \text{ phút}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{60 \text{ giây}}{1 \text{ phút}} = 86400 \text{ giây}.$$

Từ triều đại Thanh trở về trước, số giây trong một khắc là

$$\frac{86400 \text{ giây}}{100 \text{ khắc}_{\text{trước}}} = \boxed{864 \frac{\text{giây}}{\text{khắc}_{\text{trước}}}}.$$

Sau triều đại Thanh, số giây trong một khắc là

$$\frac{86400 \text{ giây}}{96 \text{ khắc}_{\text{sau}}} = \boxed{900 \frac{\text{giây}}{\text{khắc}_{\text{sau}}}}.$$

2 Tỉ lệ độ dài thời gian một khắc trước và sau là

$$\frac{1 \text{ khắc}_{\text{trước}}}{1 \text{ khắc}_{\text{sau}}} = \frac{1 \text{ khắc}_{\text{trước}}}{1 \text{ khắc}_{\text{sau}}} \cdot \frac{864 \text{ giây}}{1 \text{ khắc}_{\text{trước}}} \cdot \frac{1 \text{ khắc}_{\text{sau}}}{900 \text{ giây}} = \boxed{0,96}.$$

**Bài 6:** Một vòng đĩa tròn như trong hình 1.2 có đường kính 4,50 cm rỗng ở giữa một lỗ đường kính 1,25 cm. Đĩa dày 1,50 mm. Biết rằng đĩa được làm từ chất liệu có khối lượng riêng là  $8600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ . Tính khối lượng vòng đĩa theo gram.

**Lời giải bài 6:**

Đặt  $D = 4,50 \text{ cm} = 4,50 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $d = 1,25 \text{ cm} = 1,25 \times 10^{-2} \text{ m}$ ,  $h = 1,50 \text{ mm} = 1,50 \times 10^{-3} \text{ m}$  và  $\mathcal{D} = 8600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8,6 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{10^3 \text{ g}}{\text{kg}} = 8,6 \times 10^6 \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$ .

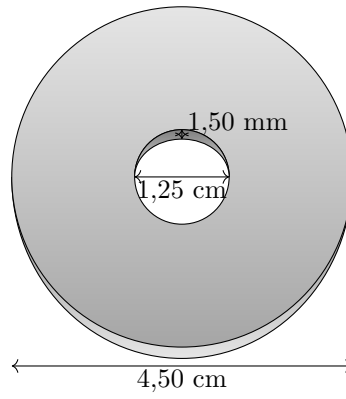
Nhận thấy rằng đĩa có dạng trụ, diện tích mặt đáy là

$$S = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi (D^2 - d^2)}{4}.$$

Thể tích của đĩa là  $V = S \cdot h = \frac{\pi \cdot h \cdot (D^2 - d^2)}{4}$ . Nhân với khối lượng riêng, chúng ta có khối lượng của đĩa là

$$m = \mathcal{D} \cdot V = \frac{\pi \cdot h \cdot \mathcal{D} \cdot (D^2 - d^2)}{4}.$$





Hình 1.2: Vòng đĩa tròn

Thay số trực tiếp với sự để ý đến số chữ số có nghĩa, chúng ta có kết quả  $m = 1,89 \times 10^1 \text{ kg}$ .

**Bài 7:** Khối lượng của một chất lỏng được mô hình hóa bởi phương trình  $m = A \cdot t^{0,8} - B \cdot t$ . Nếu như  $t$  được tính bằng giây và  $m$  được tính bằng ki-lô-gram, thì đơn vị của  $A$  và  $B$  là gì?

**Lời giải bài 7:**

Để có thể cộng trừ các phần tử, chúng cần phải có cùng đơn vị. Do vậy, đơn vị của  $A \cdot t^{0,8}$  và  $B \cdot t$  là kg. Từ quy tắc nhân chia các đơn vị, chúng ta có:

$$\begin{cases} A \cdot s^{0,8} &= \text{kg} \\ B \cdot s &= \text{kg} \end{cases} \iff \begin{cases} A &= \frac{\text{kg}}{s^{0,8}} \\ B &= \frac{\text{kg}}{s} \end{cases}.$$

Vậy đơn vị của  $A$  là  $\frac{\text{kg}}{s^{0,8}}$  và đơn vị của  $B$  là  $\frac{\text{kg}}{s}$ .

# 2.

## Chuyển động

**Bài 8:** Một ô tô đi 40 km trên một đường thẳng với tốc độ không đổi  $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Sau đó, nó đi thêm theo chiều đó 60 km với tốc độ không đổi  $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ . Các giá trị đo được tính đến hai chữ số có nghĩa.

1. Tính vận tốc trung bình trên cả quãng đường.
2. Tính tốc độ trung bình trên cả quãng đường.
3. Nếu xe quay đầu trước khi đi 50 km lúc sau, giữ nguyên các số liệu khác, thì vận tốc trung bình và tốc độ trung bình có thay đổi không. Tại sao?
4. Vẽ đồ thị vị trí  $x$  theo thời gian  $t$  và từ đó chỉ ra cách tính vận tốc trung bình.

**Lời giải bài 8:**

Coi chiều chuyển động ban đầu là chiều dương.

1. Thời gian đi 40 km đầu là

$$40 \text{ km} \div 40 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1,0 \text{ h.}$$

Thời gian đi 50 km sau là

$$60 \text{ km} \div 50 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1,2 \text{ h.}$$

Do hai quãng đường là cùng chiều nên chúng ta có độ dịch chuyển của xe tổng cộng là

$$\Delta x = 40 \text{ km} + 60 \text{ km} = 100 \text{ km}$$

và tổng thời gian đi là

$$\Delta t = 1,0 \text{ h} + 1,2 \text{ h} = 2,2 \text{ h.}$$

Từ đó, chúng ta có vận tốc trung bình là

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \boxed{4,5 \times 10^1 \frac{\text{km}}{\text{h}}}.$$

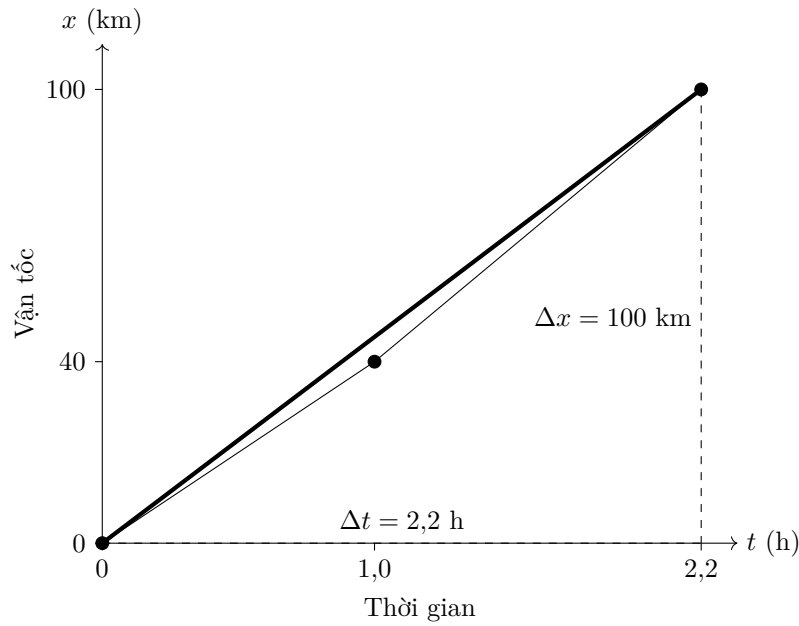
2. Để thấy tổng quãng đường đi là  $d = 100 \text{ km}$ . Tốc độ trung bình là  $\bar{s} = \frac{d}{\Delta t} = \boxed{4,5 \times 10^1 \frac{\text{km}}{\text{h}}}$ .

3. Thời gian không thay đổi. Có độ dịch chuyển thay đổi còn  $\Delta x = 40 \text{ km} - 60 \text{ km} = -20 \text{ km}$  nhưng tổng quãng đường thì không. Do đó, tốc độ trung bình giữ nguyên nhưng vận tốc trung bình thay đổi.

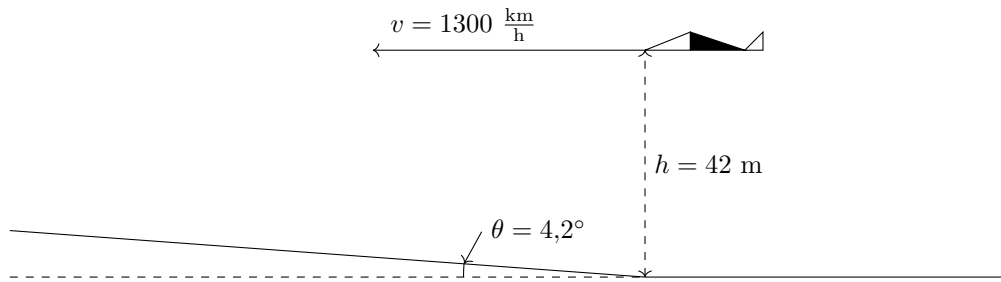
4. Ta có đồ thị ở hình 2.1 bằng việc vẽ mối quan hệ  $x(t)$  xong nối điểm đầu và điểm cuối. Vận tốc trung bình là độ dốc của đường thẳng nối hai điểm này.

**Bài 9:** Một máy bay phản lực đang bay ngang ở độ cao  $h = 42 \text{ mét}$ . Đột nhiên nó bay vào vùng đất dốc lên góc  $\theta = 4,2^\circ$  (xem hình 2.2). Với tốc độ bay là  $v = 1300 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , thời gian tính từ lúc bay vào vùng đất dốc mà người phi công có để điều chỉnh máy bay là bao nhiêu? Tất cả các số liệu được đo đến hai chữ số có nghĩa.

**Lời giải bài 9:**



Hình 2.1: Đồ thị vị trí xe-thời gian chạy



Hình 2.2: Vị trí máy bay trong vùng dốc lên

Khoảng cách từ máy bay đến điểm va chạm với mặt đất là

$$d = \frac{h}{\tan(\theta)}.$$

Từ đó, chúng ta có được thời gian cho phép là

$$t = \frac{d}{v} = \frac{h}{v \tan(\theta)}.$$

Thay số trực tiếp, với để ý đến sự quy đổi  $v = 1300 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1300 \frac{\text{km}}{\text{h}} \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 361 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , chúng ta có

$$t = \boxed{1,6 \times 10^0 \text{ s}}.$$

**Bài 10:** Cho biết vị trí của một vật chuyển động thẳng được xác định bằng  $x(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ . Xác định vị trí, vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm  $t = t_0$ .

**Lời giải bài 10:**

Vị trí của vật tại  $t = t_0$  là

$$x(t_0) = \boxed{a \cdot t_0^2 + b \cdot t_0 + c}.$$

Vận tốc của vật tại  $t = t_0$  là

$$v(t_0) = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \boxed{2a \cdot t_0 + b}.$$

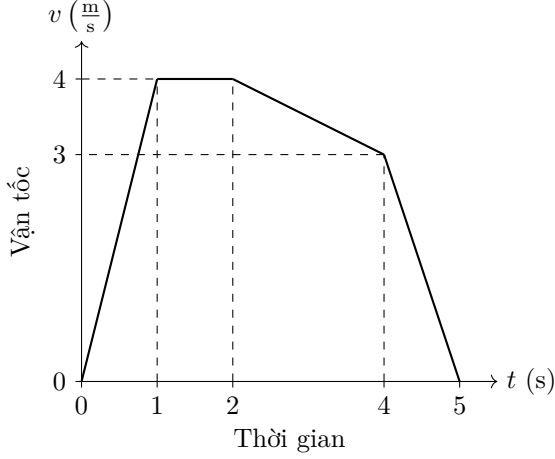
Gia tốc của vật tại  $t = t_0$  là

$$a(t_0) = \left. \frac{dv(t)}{dt} \right|_{t=t_0} = \boxed{2a}.$$

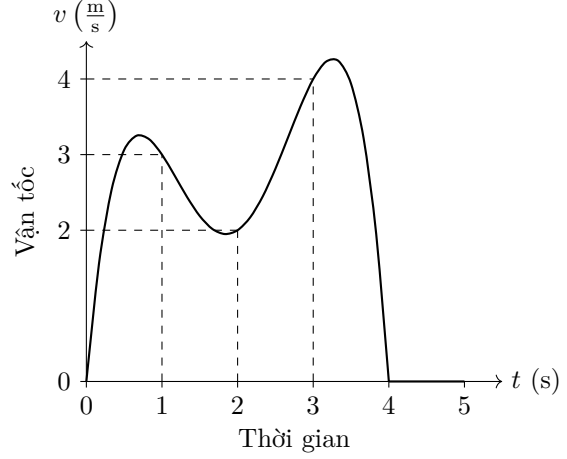
**Bài 11:** Phác họa đồ thị vị trí - thời gian và gia tốc thời gian của một người chạy bộ nếu đồ thị vận tốc - thời gian của người đó được biểu diễn trên đồ thị

1. hình 2.3;
2. hình 2.4.

Các số liệu được coi như chính xác tuyệt đối. Bạn có thể giả sử người đó bắt đầu chạy từ vị trí  $x = 0$ .



Hình 2.3: Phần 1



Hình 2.4: Phần 2

**Lời giải bài 11:**

1. Ta chia quá trình chạy làm 4 phần.

- Phần 1 ( $0 \leq t \leq 1$  s): Vận tốc tăng đều từ 0 đến  $4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Chuyển động là nhanh dần với gia tốc không đổi là  $a(t)|_{t \in [0 \text{ s}; 1 \text{ s}]} = \frac{v(1 \text{ s}) - v(0 \text{ s})}{1 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .

Sau khoảng thời gian  $t$ , độ dịch chuyển là  $x(t)|_{t \in [0 \text{ s}; 1 \text{ s}]} - x(0 \text{ s}) = \frac{a(t)|_{t \in [0 \text{ s}; 1 \text{ s}]} \cdot t^2}{2} + v(t)|_{t \in [0 \text{ s}; 1 \text{ s}]} \cdot t$ . Từ đó chúng ta có  $x(t) = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2$  với  $0 \leq t \leq 1$  s và  $x(1 \text{ s}) = 2 \text{ m}$ .

- Phần 2 ( $1 \leq t \leq 2$  s): Vận tốc không đổi ở  $v(t)|_{t \in [1 \text{ s}; 2 \text{ s}]} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  (chuyển động thẳng đều).

Qua đó, chúng ta có  $x(t)|_{t \in [1 \text{ s}; 2 \text{ s}]} = x(1 \text{ s}) + v(t)|_{t \in [1 \text{ s}; 2 \text{ s}]} \cdot (t - 1 \text{ s}) = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 2 \text{ m}$  và  $x(2 \text{ s}) = 6 \text{ m}$ .

Phần 3 ( $2 \leq t \leq 4$  s) và phần 4 ( $4 \leq t \leq 5$  s) làm tương tự như phần 1. Ta được

$$\begin{cases} a(t)|_{t \in [2 \text{ s}; 4 \text{ s}]} &= -\frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a(t)|_{t \in [4 \text{ s}; 5 \text{ s}]} &= -3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

và qua đó

$$\begin{cases} x(t)|_{t \in [2 \text{ s}; 4 \text{ s}]} &= -\frac{1}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (t - 2 \text{ s})^2 + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t - 2 \text{ s}) + 6 \text{ m} \\ x(t)|_{t \in [4 \text{ s}; 5 \text{ s}]} &= -\frac{3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (t - 4 \text{ s})^2 + 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot (t - 4 \text{ s}) + 13 \text{ m} \end{cases}$$

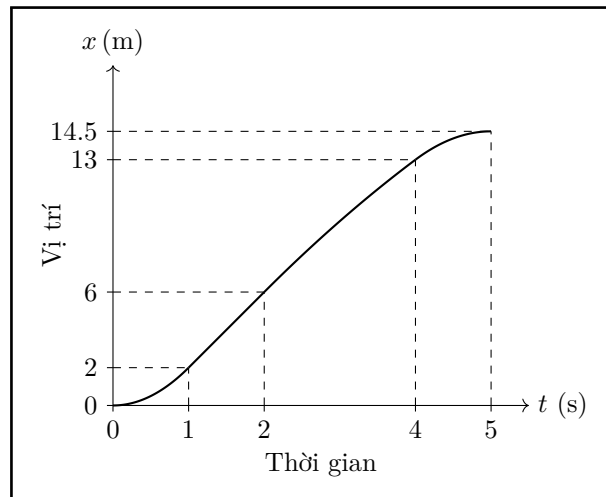
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(t)|_{t \in [2 \text{ s}; 4 \text{ s}]} &= -\frac{1}{4} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 3 \text{ m} \\ x(t)|_{t \in [4 \text{ s}; 5 \text{ s}]} &= -\frac{3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 23 \text{ m} \end{cases}$$

Cuối cùng, chúng ta có thể biểu diễn vị trí của người chạy trên đồ thị như hình 2.5.

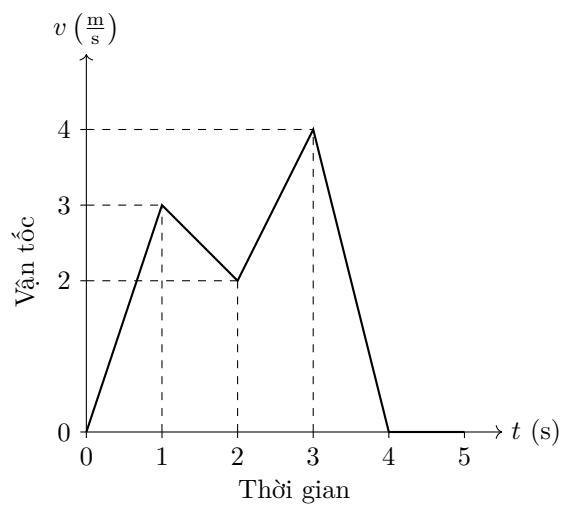
2. Chúng ta có thể phác họa đồ thị vị trí - thời gian bằng việc xấp xỉ đồ thị vận tốc - thời gian dưới dạng đường gấp khúc nối các điểm đã biết thể hiện ở 2.6.

Từ đây, thực hiện tương tự như phần 1 để có phương trình vị trí - thời gian

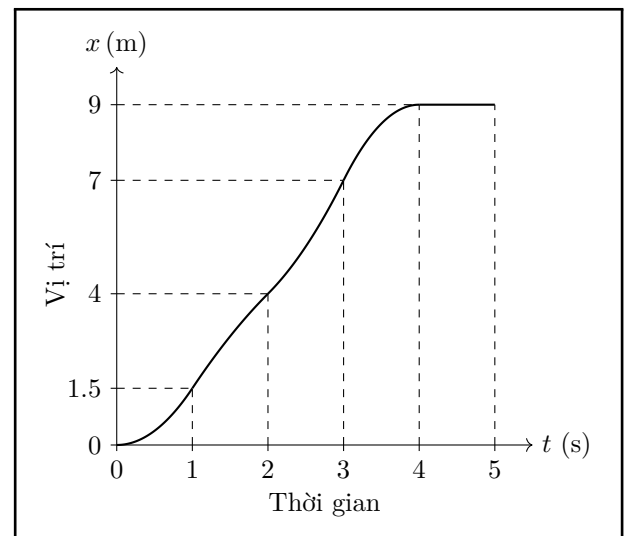
$$x(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 & \text{với } 0 \leq t < 1 \text{ s} \\ -\frac{1}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 2 \text{ m} & \text{với } 1 \leq t < 2 \text{ s} \\ 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 - 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 4 \text{ m} & \text{với } 2 \leq t < 3 \text{ s} \\ -2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 16 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t - 23 \text{ m} & \text{với } 3 \leq t < 4 \text{ s} \\ 9 \text{ m} & \text{với } 4 \leq t \leq 5 \text{ s} \end{cases}$$



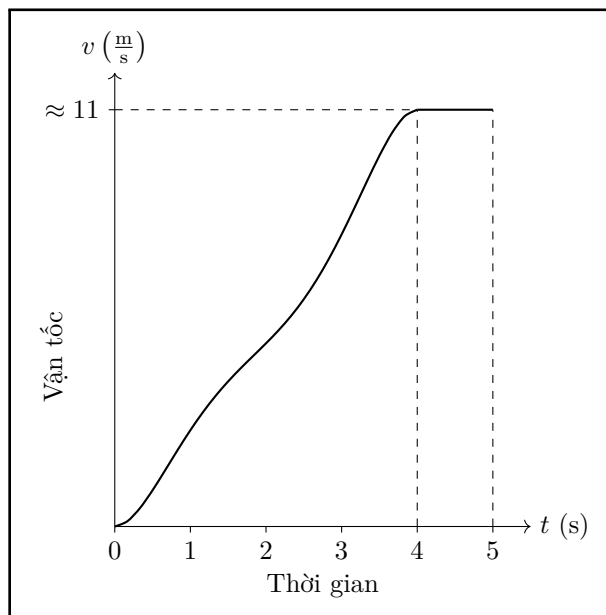
Hình 2.5: Đồ thị vị trí - thời gian cho phần 1



Hình 2.6: Vận tốc - thời gian xấp xỉ của phần 2



Hình 2.7: Vị trí - thời gian (xấp xỉ) cho phần 2



Hình 2.8: Đồ thị vị trí - thời gian cho phần 2

và chúng ta vẽ được đồ thị ở hình 2.7.

Trong thực tiễn, chúng ta hay xấp xỉ những quá trình không tuyến tính qua hữu hạn những điểm đo rồi nội suy tuyến tính (nối các điểm bằng các đoạn thẳng) như đã làm. Còn nhiều phương pháp nội suy nữa còn có thể được tìm thấy trong những tài liệu về phương pháp tính và giải tích số. Thông thường, với càng nhiều điểm thì độ chính xác càng lớn.

Trong trường hợp mà bạn nhận ra phương trình vận tốc - thời gian được cho là

$$v(t) = \begin{cases} \frac{-t \left( 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^5} \cdot t^3 - 31 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} \cdot t^2 + 77 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot t - 68 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{6} & \text{với } 0 \leq t < 4 \\ 0 & \text{với } 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

thì bạn có thể thực hiện nguyên hàm trên hàm này để tính được vị trí vật là

$$x(t) = \begin{cases} \frac{-t^2 \left( 48 \frac{\text{m}}{\text{s}^5} \cdot t^3 - 465 \frac{\text{m}}{\text{s}^4} \cdot t^2 + 1540 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot t - 2040 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)}{360} & \text{với } 0 \leq t < 4 \\ \frac{496}{45} \text{ m} & \text{với } 4 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

và chúng ta có đồ thị như hình 2.8.

**Bài 12:** Hai xe hơi có tốc độ lần lượt là  $v_1 = 50,0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  và  $v_2 = 60,0 \frac{\text{km}}{\text{h}}$  đi ngược chiều với nhau trên một con đường hẹp. Hai xe phát hiện lẫn nhau khi khoảng cách giữa hai xe là  $d = 400 \text{ m}$ . Cả hai xe đồng thời giảm tốc với cùng một gia tốc hãm đều là  $a$ . Tính giá trị tối thiểu của  $a$  nếu biết hai xe không xảy ra va chạm. Số liệu được đo tới 3 chữ số có nghĩa.

**Lời giải bài 12:**

Gọi quãng đường đi được trong khi hãm phanh của hai xe lần lượt là  $d_1$  và  $d_2$ .

Trong quá trình hãm đến vận tốc bằng 0, tổng quãng đường đi của cả hai xe phải không vượt quá khoảng cách  $d$ . Vì vậy, chúng ta có bất đẳng thức

$$d_1 + d_2 \leq d.$$

Trong khi đó, quãng đường xe thứ nhất đã di chuyển là  $d_1 = \frac{0^2 - v_1^2}{2(-a)} = \frac{v_1^2}{2a}$ . Tương tự, chúng ta có quãng đường mà xe thứ hai di chuyển trong khoảng thời gian này là  $d_2 = \frac{v_2^2}{2a}$ . Từ đó, thay vào phương trình ở trên để được

$$\frac{v_1^2}{2a} + \frac{v_2^2}{2a} \leq d \iff a \geq \frac{v_1^2 + v_2^2}{2d}.$$

Thay số trực tiếp, chúng ta có gia tốc hãm tối thiểu phải là  $7,63 \times 10^3 \frac{\text{km}}{\text{h}^2}$ .

**Bài 13:** Để dừng xe ban đầu bạn cần một thời gian phản ứng để bắt đầu phanh, rồi xe mới đi chậm dần nhờ có một gia tốc hãm không đổi. Giả sử quãng đường đi được trong hai pha này là 186 ft nếu vận tốc ban đầu là  $50 \frac{\text{dặm}}{\text{h}}$ . Còn trong một trường hợp khác, quãng đường đi được trong hai pha này là 80 ft nếu vận tốc ban đầu là  $30 \frac{\text{dặm}}{\text{h}}$ . Biết thời gian phản ứng là cố định và 1 dặm = 5280 ft, tính thời gian phản ứng và độ lớn của gia tốc hãm.

**Lời giải bài 13:**

Gọi thời gian phản ứng là  $t_p$ , vận tốc đầu là  $v_0$ , gia tốc hãm là  $a$ .

Trong khoảng thời gian phản ứng, xe đi được  $v_0 t_p$ . Và trong khoảng thời gian hãm, xe đi được  $\frac{0^2 - v_0^2}{2(-a)} = \frac{v_0^2}{2a}$ . Cho nên, tổng quãng đường đi được trong hai pha là

$$\Delta x = v_0 t_p + \frac{v_0^2}{2a} \quad (2.1)$$

Trước khi thay số, thực hiện quy đổi

$$50 \frac{\text{dặm}}{\text{h}} = 50 \frac{\text{dặm}}{\text{h}} \cdot \frac{5280 \text{ ft}}{1 \text{ dặm}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} \approx 73 \frac{\text{ft}}{\text{s}},$$

tương tự,  $30 \frac{\text{dặm}}{\text{h}} = 44 \frac{\text{ft}}{\text{s}}$ . Từ đó, thay số vào phương trình 2.1 để có hệ

$$\begin{cases} 186 \text{ ft} = 73 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \cdot t_p + \frac{(73 \frac{\text{ft}}{\text{s}})^2}{2a} \\ 80 \text{ ft} = 44 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \cdot t_p + \frac{(44 \frac{\text{ft}}{\text{s}})^2}{2a} \end{cases}.$$

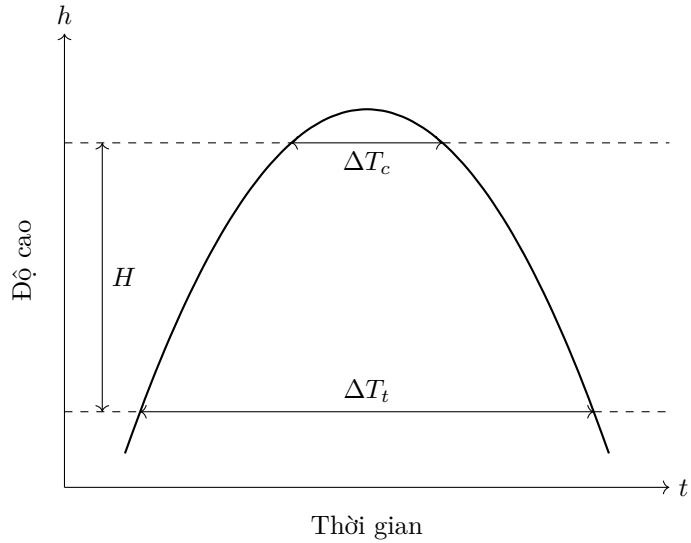
Giải hệ phương trình, chúng ta có thời gian phản ứng là  $t_p = \boxed{0,97 \text{ s}}$  và gia tốc hãm là  $a = \boxed{26 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}}$ .

**Bài 14:** Tại Phòng Thí nghiệm Vật lý Quốc gia ở Anh, người ta thực hiện xác định gia tốc trọng trường  $g$  theo thí nghiệm sau: Ném một quả bóng thủy tinh lên theo chiều thẳng đứng trong ống chân không và cho nó rơi xuống. Gọi  $\Delta T_t$  trên hình 2.9 là thời gian khoảng giữa hai lần quả bóng đi qua một điểm thấp nào đó.  $\Delta T_c$  là khoảng thời gian giữa hai lần quả bóng đi qua một điểm cao hơn và  $H$  là khoảng cách giữa hai điểm. Chứng minh rằng

$$g = \frac{8H}{\Delta T_t^2 - \Delta T_c^2}.$$

**Lời giải bài 14:**

Gọi vận tốc khi bóng bắt đầu bay lên từ vị trí thấp là  $v_0$ . Sau một khoảng thời gian  $\Delta T_t$ , quả bóng quay lại vị trí cũ, do vậy, chúng ta có phương trình  $0 = -\frac{g\Delta T_t^2}{2} + v_0\Delta T_t$ . Thực hiện biến đổi tương đương để có



Hình 2.9: Đồ thị thời gian - độ cao của quả bóng thủy tinh

$$v_0 = \frac{g\Delta T_t}{2}.$$

Nhận thấy rằng đồ thị có tính đối xứng. Sử dụng điều đó, chúng ta tính được khoảng thời gian quả bóng lên một độ cao  $H$  là  $t = \frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}$ . Qua đó, có được phương trình thứ hai là

$$H = -\frac{gt^2}{2} + v_0t = -\frac{g\left(\frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}\right)^2}{2} + v_0\left(\frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}\right).$$

Thế giá trị của  $v_0$  vào phương trình và tiếp tục thực hiện biến đổi, chúng ta có:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{g(\Delta T_t - \Delta T_c)^2}{8} + \frac{g\Delta T_t}{2} \left(\frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}\right) \\ &= -g\left(\frac{\Delta T_t^2}{8} - \frac{\Delta T_t\Delta T_c}{4} + \frac{\Delta T_c^2}{8}\right) + g\left(\frac{\Delta T_t^2}{4} - \frac{\Delta T_t\Delta T_c}{4}\right) \\ &= g \cdot \frac{\Delta T_t^2 - \Delta T_c^2}{8} \\ \Leftrightarrow g &= \frac{8H}{\Delta T_t^2 - \Delta T_c^2}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

**Bài 15:** Một nghệ sĩ tung hứng các quả bóng lên theo phương thẳng đứng. Quả bóng sẽ lên cao hơn bao nhiêu nếu thời gian bóng trong không khí tăng gấp  $n$  lần ( $n \in \mathbb{R}^+$ )?

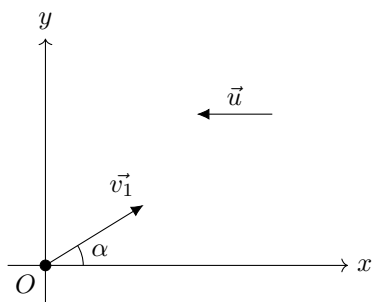
**Lời giải bài 15:**

Có thời gian để quả bóng bay từ tay lên trên vị trí cao nhất bằng một nửa thời gian bóng trong không khí. Nếu thời gian bóng trong không khí tăng gấp  $n$  lần so với thời gian trong không khí gốc, thì cũng chia cho 2, chúng ta cũng sẽ có thời gian bóng bay từ tay lên trên vị trí cao nhất cũng tăng gấp  $n$  lần so với thời gian gốc để bay lên vị trí cao nhất.

Gọi  $t_1$  là thời gian gốc để bóng bay từ tay lên vị trí cao nhất,  $t_2 = nt_1$  là thời gian bay khi đã tăng  $n$  lần. Gọi  $h_1, h_2$  lần lượt là độ cao bóng đi được tương ứng với hai khoảng thời gian  $t_1, t_2$ . Để ý rằng khi lên vị trí cao nhất thì vận tốc bóng là 0; chúng ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} h_1 &= \frac{gt_1^2}{2} \\ h_2 &= \frac{gt_2^2}{2} = \frac{g(nt_1)^2}{2} \end{cases} \Rightarrow h_2 = n^2h_1.$$

Từ đó, quả bóng cao lên hơn được  $\boxed{n^2 - 1}$  lần độ cao gốc.



Hình 2.10: Hình minh họa cho bài 16

**Bài 16:** Như trong hình 2.10, một vật nhỏ có khối lượng  $m$  chỉ di chuyển từ gốc  $O$  trong mặt phẳng  $Oxy$  được cung cấp một vận tốc ban đầu  $\vec{v}_1$  trong vùng không gian có gió thổi với vận tốc  $\vec{u} = -u\vec{e}_x$ .



# Tài liệu tham khảo

- [1] Agarwal, R.P., Perera, K., Pinelas, S. (2011). *History of Complex Numbers*. In: An Introduction to Complex Analysis. Springer, Boston, MA. [https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0195-7\\_50](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0195-7_50)