Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 4 tháng 9 năm 2025

Mục lục

Lời giới thiệu

Kiểm thử đơn vị

-1.1 Chữ Nôm

Kiểm thử chữ Nôm nghiêng và đậm: *世*, *墫*, ***世***, ***墫***.

Chương 0

Kiến thức toán học nền tảng

Chương này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lí và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Kể như, trong tài liệu này, khi nhắc về hàm số, không có phần về đơn ánh hay toàn ánh. Những khái niệm này là vô cùng quan trọng nếu tập trung chứng minh chặt chẽ các tính chất liên quan đến hàm số, nhưng không phục vụ nhiều trong ứng dụng thực tiễn. Thay vào đó, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn, bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán, mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lí thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lí sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lí. Thứ hai, vật lí không dùng nhiều đến lí thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lí không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lí thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lí đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh[1]. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lí, và giống rất nhiều công trình vật lí hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lí. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lí hay kĩ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường. Các lí thuyết bình thường được đặt ở cùng chỗ thì sẽ tách nhau ra, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách "tôn giáo hóa". Tác giả vẫn đưa một số lí thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lí thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lí thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

0.1 Đồ thị

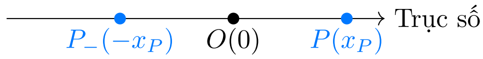
0.1.1 Trục số một chiều

Đồ thị là cầu nối đầu tiên giữa đại số và hình học mà chắc là bạn đọc đã được học. Thông thường, nhắc

[1] Albert Einstein (1879 - 1955)

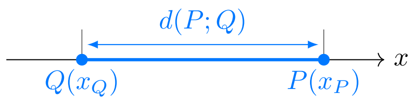
đến đồ thị, chúng thường được dùng để biểu thị mặt phẳng hai chiều hoặc không gian ba chiều. Nhưng, đồ thị cơ bản nhất chỉ có một chiều, hay tên gọi khác là **trục số**.

Đặt một điểm O trên trục làm gốc tọa độ biểu diễn cho số 0, từ đó chúng ta có thể biểu diễn mọi số thực trên trục số này. Nói một cách không chính thống, với một số x_P dương bất kì, đánh dấu cách O một đoạn bằng x_P đơn vị độ dài theo hướng trục, chúng ta có điểm P biểu diễn x_P. Viết tắt cách biểu diễn, được $\boldsymbol{P(x_P)}$. Ngược lại, nếu chúng ta muốn đánh dấu số $x_{P_-} = -x_P$ mang giá trị âm, chúng ta dịch ngược lại chiều trục như trên hình 0.1.



Hình 0.1: Trục số một chiều

Khi có nhiều điểm ở trên đồ thị, chúng ta sẽ mong muốn tính những thông số liên quan tới những điểm đó. Do kiến thức toán hiện tại đang bị giới hạn, chúng ta sẽ chỉ tập trung vào một đặc điểm nhất định, **khoảng cách**. Trên một trục số như hình 0.2, cho hai điểm $P(x_P)$ và $Q(x_Q)$, khoảng cách giữa chúng là



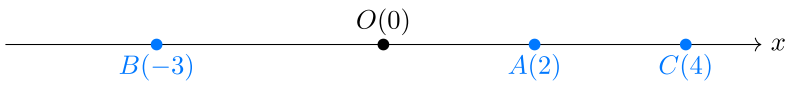
Hình 0.2: Khoảng cách trên trục số

$$\boldsymbol{d(P;Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2} = |x_P - x_Q|}.$$

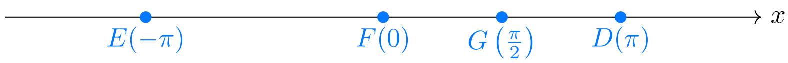
Bài 1: Biểu diễn nhóm các điểm sau trên trục số. Tính khoảng cách giữa hai điểm phân biệt bất kì trong nhóm đó.

1. $A(2)$, $B(-3)$, và $C(4)$;
2. $D(\pi)$, $E(-\pi)$, $F(0)$, và $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$;
3. $H(0{,}\overline{3})$ và $I(\sqrt{2})$;
4. $J\left(\frac{355}{113}\right)$, $K\left(\frac{9801}{2206\sqrt{2}}\right)$ và $L\left(\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}\right)$;
5. $M(x)$ và $N(2x)$ với $x \in \mathbb{R}$.

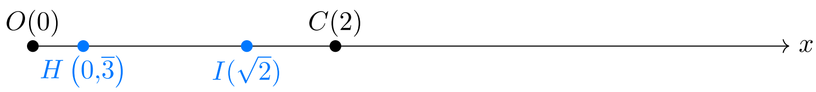
Lời giải bài 1:



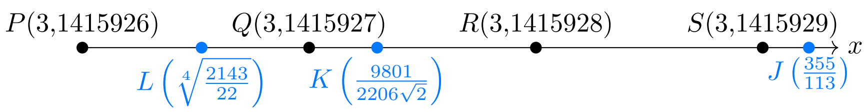
Hình 0.3: Trục số cho phần 1 của bài 1



Hình 0.4: Trục số cho phần 2 của bài 1



Hình 0.5: Trục số cho phần 3 của bài 1



Hình 0.6: Trục số cho phần 4 của bài 1

Ta có đồ thị cho các phần từ 1 đến 4 như các hình 0.3, 0.4, 0.5, và 0.6.

Cần lưu ý rằng, để biểu diễn thuận lợi nhất, các trục số khi biểu diễn số cần được chọn những tỉ lệ khác nhau và tại những vị trí khác nhau.

Các khoảng cách giữa hai điểm phân biệt đôi một là

1.

$$\begin{aligned} d(A;B) &= d(B;A) = |2-(-3)| = 5;\\ d(B;C) &= d(C;B) = |4-(-3)| = 7;\\ d(C;A) &= d(A;C) = |4-2| = 2. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} d(D;E) &= d(E;D) = |\pi-(-\pi)| = 2\pi;\\ d(E;F) &= d(F;E) = |(-\pi)-0| = \pi;\\ d(F;G) &= d(G;F) = \left|0-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{2};\\ d(G;D) &= d(D;G) = \left|\frac{\pi}{2}-\pi\right| = \frac{\pi}{2};\\ d(D;F) &= d(F;D) = |\pi-0| = \pi;\\ d(E;G) &= d(G;E) = \left|(-\pi)-\frac{\pi}{2}\right| = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

3.

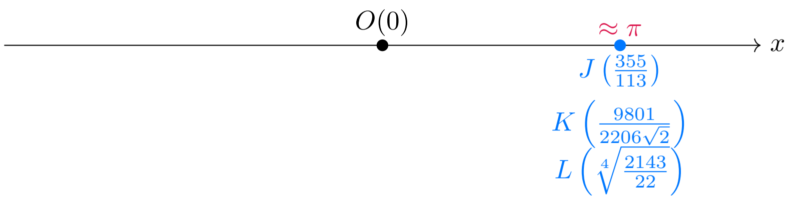
$$d(H;I) = d(I;H) = \left|0{,}\overline{3}-\sqrt{2}\right| = \frac{1-3\sqrt{2}}{3};$$

4.

$$\begin{aligned} d(J;K) = d(K;J) &= \left|\frac{355}{113}-\frac{9801}{2206\sqrt{2}}\right| = \frac{1566260-1107513\sqrt{2}}{498556} \approx 1{,}9034\times10^{-7};\\ d(K;L) = d(L;K) &= \left|\frac{9801}{2206\sqrt{2}}-\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}\right| = \frac{107811\sqrt{2}-2206\sqrt[4]{22818664}}{48532} \approx 7{,}7431\times10^{-8};\\ d(L;J) = d(J;L) &= \left|\sqrt[4]{\frac{2143}{22}}-\frac{355}{113}\right| = \frac{7810-113\sqrt[4]{22818664}}{2486} \approx 2{,}6777\times10^{-7}; \end{aligned}$$

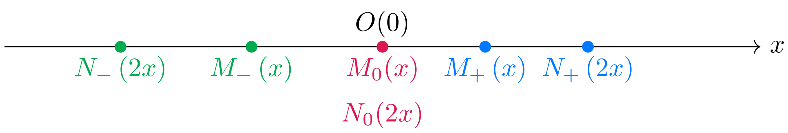
Trong vật lí, việc tính toán chính xác đến như ở phần 4 là không cần thiết và nhiều khi còn không chính xác. Luôn luôn có sai số khi đo đạc, và trong phần lớn trường hợp, khi kết hợp sai số này vào trong tính toán thì các giá trị khoảng cách như trên gần như vô nghĩa. Cho nên, về mặt thực tiễn, chúng ta hoàn toàn có thể thay thế đồ thị của 4 như hình 0.7 và khi tính khoảng cách, chúng ta có thể tính xấp xỉ là

$$d(J,K) = d(K,J) \approx d(K,L) = d(L,K) \approx d(L,J) = d(J,L) \approx 0.$$



Hình 0.7: Xấp xỉ vị trí điểm trên trục số cho phần 4 của bài 1

Để vẽ được đồ thị cho phần 5, chúng ta sẽ xét vị trí tương đối giữa M, N kèm theo gốc O để quy chiếu như biểu diễn ở hình 0.8. Cụ thể, khi $x > 0$, điểm M và N được biểu diễn thành hai điểm M_+ và N_+. Tương tự, khi $x < 0$, M và N biểu diễn hai điểm M_- và N_-. Một trường hợp đặc biệt là khi $x = 0$, M và N đều có tọa độ là 0, cho nên hai điểm đó và gốc cùng chia sẻ vị trí với nhau.

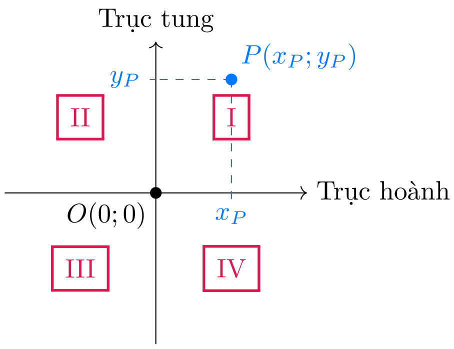


Hình 0.8: Ba trường hợp cho vị trí tương đối của M, N, O cho phần 5 của bài 1

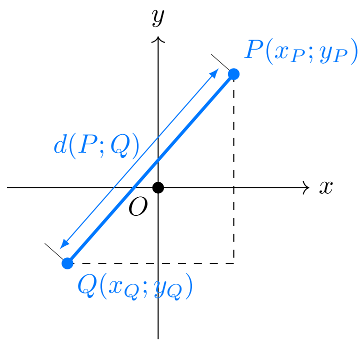
Khoảng cách giữa hai điểm M và N luôn là

$$d(M;N) = d(N;M) = |x-2x| = |x|.$$

0.1.2 Mặt phẳng hai chiều và hệ tọa độ vuông góc



Hình 0.9: Hệ tọa độ vuông góc



Hình 0.10: Khoảng cách giữa hai điểm

Mở rộng lên mặt phẳng hai chiều, nếu chúng ta đặt hai trục vuông góc với nhau và giao nhau tại gốc $O(0)$ của mỗi trục, khi đó, chúng ta có thể xác định vị trí của điểm trên mặt phẳng chứa hai trục theo biểu diễn đại số bằng cách dóng điểm đó lên trục mà sau này được gọi là **tọa độ**. Đây được gọi là **hệ tọa độ vuông góc** (hay **hệ tọa độ Đề-các**[2]). Như ở hình 0.9, trục nằm ngang được gọi là **trục hoành**, trục dọc được gọi là **trục tung**. Tùy trong từng trường hợp, vị trí và hướng chỉ của các trục có thể thay đổi. Với mỗi điểm, vị trí khi dóng điểm đó vào trục hoành gọi là **hoành độ**, vào trục tung gọi là **tung độ**. Tiếp tục lấy ví dụ từ hình 0.9, điểm P có tọa độ là $(x_P; y_P)$ và được kí hiệu là $\boldsymbol{P(x_P; y_P)}$. Thêm vào đó, hai trục chia mặt phẳng thành bốn **góc phần tư**, từ góc phần tư thứ **I** đến góc phần tư thứ **IV** bao gồm các điểm thỏa mãn tính chất sau:

- Góc phần tư thứ **I**: $\boldsymbol{x > 0}$ và $\boldsymbol{y > 0}$;
- Góc phần tư thứ **II**: $\boldsymbol{x < 0}$ và $\boldsymbol{y > 0}$;
- Góc phần tư thứ **III**: $\boldsymbol{x < 0}$ và $\boldsymbol{y < 0}$;
- Góc phần tư thứ **IV**: $\boldsymbol{x > 0}$ và $\boldsymbol{y < 0}$.

Về mặt hình học, khi tọa độ được vẽ thông thường, góc phần tư thứ I nằm ở vị trí trên cùng bên phải, và các góc phần tư còn lại lần lượt được đánh số theo ngược chiều kim đồng hồ. Khi tọa độ bị thay đổi thì vị trí các góc phần tư cũng thay đổi theo, nhưng vẫn thỏa mãn điều kiện đại số ở trên. **Các điểm trên trục không xác định thuộc bất cứ góc phần tư nào.**

Giống như trên trục một chiều, khi có hai điểm trên mặt phẳng thì chúng ta có thể tính khoảng cách giữa chúng. Một cách chi tiết, cho hai điểm $P(x_P; y_P)$ và $Q(x_Q; y_Q)$, theo định lí Pi-ta-go, khoảng cách giữa hai điểm đó là

$$\boldsymbol{d(P; Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}}.$$

Bài 2: Biểu diễn các điểm sau trên hệ tọa độ vuông góc: $A(2; 3)$, $B(-1; 2)$, $C(-3; 0)$, $D(0; 4)$, $P(12t; -3t)$, $Q(20t; 12t)$ (với $t \in \mathbb{R}$). Xác định góc phần tư hoặc trục tọa độ của mỗi điểm. Sau đó, tính khoảng cách giữa những cặp điểm sau: A và B, C và D, P và Q.

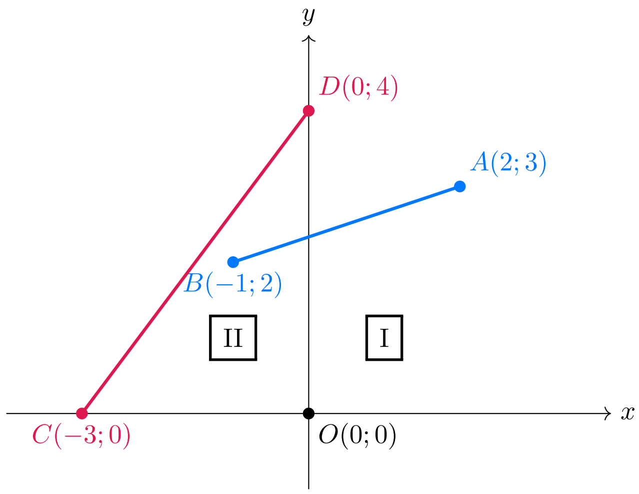
Lời giải bài 2:

Các góc phần tư hay trục số mà các điểm thuộc về có thể được xác định như hình 0.11. Theo một cách khác, về mặt đại số, có:

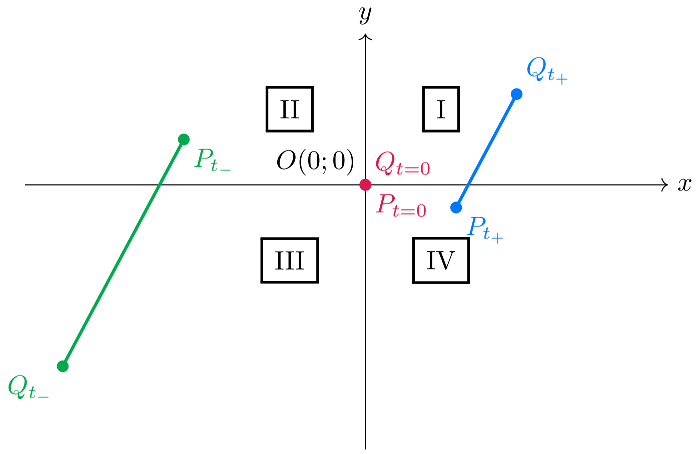
- $A(2; 3)$: $x > 0$, $y > 0 \implies A$ thuộc góc phần tư thứ I;
- $B(-1; 2)$: $x < 0$, $y > 0 \implies B$ thuộc góc phần tư thứ II;
- $C(-3; 0)$: $x < 0$, $y = 0 \implies C$ thuộc trục hoành;
- $D(0; 4)$: $x = 0$, $y > 0 \implies D$ thuộc trục tung;

Để xác định được vị trí của hai điểm P và Q, cần phải xét giá trị của t. Nếu t dương, thì P và Q sẽ có tọa độ là $P_{t_+}(12t; -3t)$ và $Q_{t_+}(20t; 12t)$ với $x_{P_{t_+}} > 0$, $y_{P_{t_+}} < 0$ và $x_{Q_{t_+}} > 0$, $y_{Q_{t_+}} > 0$. Khi này, chúng ta có thể kết luận rằng P thuộc góc phần tư thứ IV và Q thuộc góc phần tư thứ I. Ngược lại, nếu t âm, thì P và Q sẽ có tọa độ là $P_{t_-}(12t; -3t)$ và $Q_{t_-}(20t; 12t)$ với $x_{P_{t_-}} < 0$, $y_{P_{t_-}} > 0$ và $x_{Q_{t_-}} < 0$, $y_{Q_{t_-}} < 0$. Khi này, P

[2] René Descartes (1596-1650)



Hình 0.11: Biểu diễn các điểm A, B, C, D trong bài 2



Hình 0.12: Biểu diễn các điểm P, Q trong bài 2
theo các trường hợp

thuộc góc phần tư thứ II và Q thuộc góc phần tư thứ III. Cuối cùng, nếu $t = 0$, thì cả hai điểm đều có tọa độ là $(0; 0)$, tức là chúng trùng với gốc tọa độ.

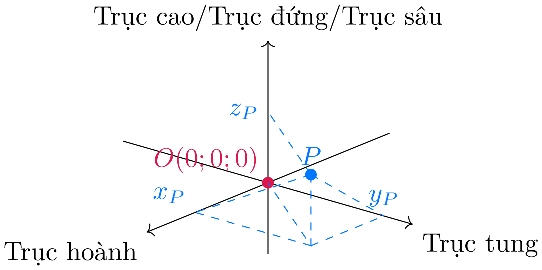
Tóm tắt lại, xét các trường hợp về vị trí tương đối của P và Q như hình 0.12, chúng ta có:

$$\begin{cases} t > 0 \implies P \in \text{góc phần tư thứ IV}, Q \in \text{góc phần tư thứ I} \\ t < 0 \implies P \in \text{góc phần tư thứ II}, Q \in \text{góc phần tư thứ III} \\ t = 0 \implies P = \text{gốc tọa độ}, Q = \text{gốc tọa độ} \end{cases}.$$

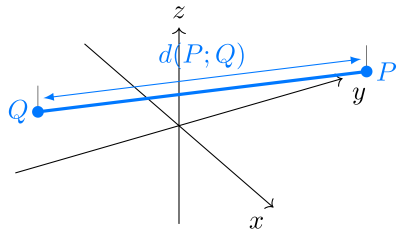
Khoảng cách giữa những cặp điểm được yêu cầu là:

- $d(A; B) = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{10} \approx 3{,}1623$;
- $d(C; D) = \sqrt{(-3 - 0)^2 + (0 - 4)^2} = 5$;
- $d(P; Q) = \sqrt{(12t - 20t)^2 + (-3t - 12t)^2} = 13|t|$.

0.1.3 Không gian ba chiều và hướng tam diện



Hình 0.13: Hệ tọa độ vuông góc ba chiều



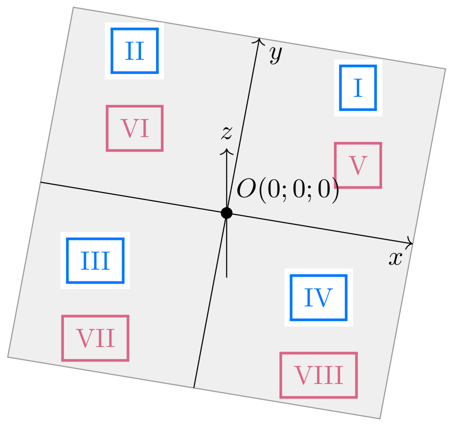
Hình 0.14: Khoảng cách giữa hai điểm trong không gian ba chiều

Đương nhiên sẽ có một vài trường hợp mà biểu diễn hai chiều không thể đủ. Khi này, mở rộng hơn nữa, chúng ta cũng có thể làm những điều trên không gian ba chiều tương tự với khi ở trục số một chiều hay mặt phẳng hai chiều. Khi đó, chúng ta sẽ có một hệ tọa độ ba chiều với ba trục vuông góc với nhau, được gọi là **hệ tọa độ vuông góc ba chiều**. Mỗi điểm trong không gian sẽ có tọa độ là $(x;y;z)$ với x, y, z là các hoành độ, tung độ và cao độ tương ứng. Khoảng cách giữa hai điểm trong không gian ba chiều được tính theo công thức

$$d(P;Q) = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

Và cũng tương tự như với mặt phẳng hai chiều, ba trục sẽ chia không gian thành tám phần, gọi là **góc phần tám không gian**. Các phần này được đánh số từ I đến VIII như sau: Nhìn từ phía dương của trục cao, các góc phần tám được đánh dấu ngược chiều kim đồng hồ như trong mặt phẳng hai chiều. Các góc phần tám I, II, III, IV nằm trên mặt phẳng Oxy và góc phần tám V, VI, VII, VIII nằm dưới mặt phẳng Oxy. Các góc phần tám này được biểu diễn trong hình 0.15. Về mặt đại số,

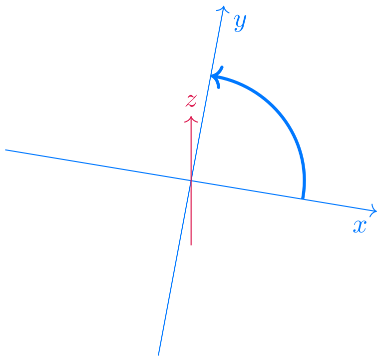
- Góc phần tám **I**: $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;
- Góc phần tám **II**: $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$;
- Góc phần tám **III**: $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$;
- Góc phần tám **IV**: $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$;
- Góc phần tám **V**: $x > 0$, $y > 0$, $z < 0$;
- Góc phần tám **VI**: $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$;
- Góc phần tám **VII**: $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$;
- Góc phần tám **VIII**: $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$.



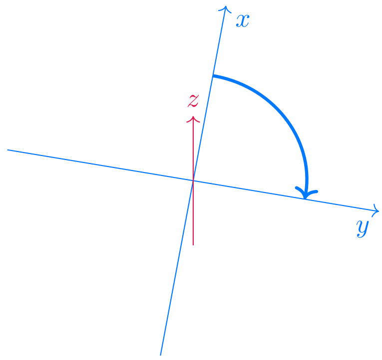
Hình 0.15: Góc phần tám không gian

Trên hệ tọa độ không gian, chúng ta cần phải quan tâm thêm xem là ba trục tạo thành **hướng tam diện** nào. Nhìn từ phía dương của trục cao, khi này, nếu trục hoành xoay sang trục tung theo hướng ngược chiều kim đồng hồ, thì hướng tam diện được gọi là **hướng tam diện thuận**. Ngược lại, nếu trục hoành xoay sang trục tung theo hướng cùng chiều kim đồng hồ, thì hướng tam diện được gọi là **hướng tam diện nghịch**. Một cách khác là dùng quy tắc bàn tay phải: nắm tay phải vào trục cao, khi này, ngón tay cái chỉ hướng của trục cao. Nếu hướng nắm ngón tay theo hương quay từ trục hoành sang trục tung, thì hướng tam diện là thuận. Ngược lại, nếu hướng nắm ngón tay theo hướng quay từ trục tung sang trục hoành, thì hướng tam diện là nghịch.

Chúng ta đã có phân bổ vị trí của các góc phần tám trong hệ tọa độ tam diện thuận. Lặp lại lập luận với cùng biểu thức đại số, chúng ta có thể phân bổ vị trí của các góc phần tám trong hệ tọa độ tam diện nghịch. Thông thường, hệ tọa độ tam diện thuận được ưa dùng hơn.



Hình 0.16: Tam diện thuận



Hình 0.17: Tam diện nghịch

Bài 3: Trung điểm của một đoạn thẳng AB là điểm M trong không gian khi và chỉ khi M thỏa mãn $d(A;M) = d(B;M) = \frac{d(A;B)}{2}$. Chứng minh rằng với tọa độ của M là

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

thì M là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm $A(x_A; y_A; z_A)$ và $B(x_B; y_B; z_B)$. Vẽ ví dụ với $A(1; 2; 3)$ và $B(-1; 0; 4)$.

Lời giải bài 3:

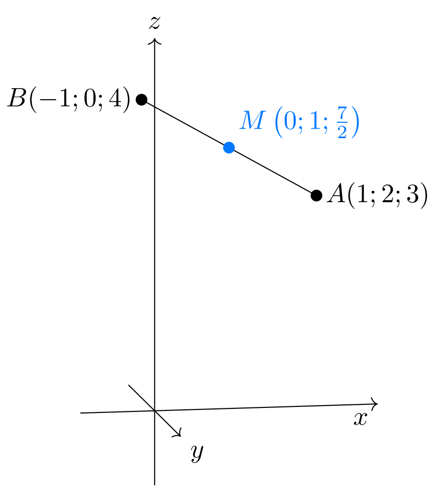
Áp dụng công thức khoảng cách để tính khoảng cách giữa hai điểm A và M, có:

$$\begin{aligned} d(A;M) &= \sqrt{\left(x_A - \frac{x_A + x_B}{2}\right)^2 + \left(y_A - \frac{y_A + y_B}{2}\right)^2 + \left(z_A - \frac{z_A + z_B}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{x_A - x_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_A - y_B}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_A - z_B}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \frac{d(A;B)}{2}. \end{aligned}$$

Một cách tương tự, chúng ta cũng có $d(B;M) = \frac{d(A;B)}{2}$. Như vậy, M là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm A và B. Qua đó, có được điều phải chứng minh.

Vẽ đồ thị ví dụ với $A(1; 2; 3)$ và $B(-1; 0; 4)$, chúng ta được đồ thị ở hình 0.18.

Công thức về vị trí tọa độ trung điểm được cho trong bài là công thức đơn giản và hữu dụng. Bạn đọc nên học thuộc công thức này.



Hình 0.18: Ví dụ với trung điểm M của $A(1; 2; 3)$ và $B(-1; 0; 4)$

0.2 Hàm số đại số một biến và các phép biến đổi trên hàm

0.2.1 Định nghĩa hàm số, phương trình, bất phương trình và hệ

Chúng ta gọi f là một **hàm số** (hay **hàm**) đi từ tập X đến tập Y khi và chỉ khi với mọi $x \in X$, gọi là **tập xác định**, thông qua mối liên hệ f có một và chỉ một $y \in Y$ tương ứng với x. Câu vừa rồi có thể được tóm gọn trong một vài kí hiệu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f : X \to Y} \\ \boldsymbol{x \mapsto y} \end{aligned}.$$

Khi này, chúng ta có thể viết hàm số này dưới dạng biểu thức giải tích $\boldsymbol{y = f(x)}$, gọi y là hàm của x. Ngoài ra, cần phải để ý rằng, thông qua định nghĩa này, mặc dù mọi x trong X phải có đầu ra trong Y, không phải mọi y trong Y đều phải có đầu vào trong X. Nói cách khác, tập tất cả các giá trị đầu ra có thể của $y = f(x)$, gọi là **tập giá trị**, là tập con của tập Y. Nếu x nằm ngoài tập giá trị x thì $f(x)$ là **không xác định** và không nhận bất cứ giá trị nào.

Khi chúng ta có định nghĩa hàm số thì chúng ta cũng sẽ có những khái niệm liên quan. Khi f là một hàm số, thì bất cứ giá trị a thuộc tập xác định để $f(a) = 0$ đều được gọi là **nghiệm** của f. Mở rộng ra, với f và g là hai hàm số, bất cứ giá trị a thỏa mãn $f(a) = g(a)$ thì a được gọi là nghiệm của **phương trình** $f(x) = g(x)$. Hơn thế nữa, nếu thay dấu $=$ trong câu vừa trước bởi các dấu $<$, $>$, $\leq$[3], $\geq$[4], $\neq$ thì chúng ta có định nghĩa cho nghiệm của **bất phương trình**[5]. Lấy ví dụ, với f và g là hai hàm số, giá trị a để $f(a) \neq g(a)$ thì a được gọi là nghiệm của bất phương trình $f(x) \neq g(x)$. Kết hợp nhiều phương trình hay bất phương trình, chúng ta có một **hệ**. Ví dụ:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ \alpha(y) \neq \beta(z) \end{cases}.$$

Để thỏa mãn hệ thì mỗi thành phần trong hệ đều phải thỏa mãn. Một khái niệm liên quan mật thiết là **giải phương trình, bất phương trình, hay hệ** (để ngắn gọn, chúng ta sẽ gọi phương trình, bất phương trình và hệ thành một cụm từ chung là "phương bất hệ"). Để làm được việc này, yêu cầu cần tìm tất cả các bộ số đẻ phương bất hệ được cho thỏa mãn. Trong trường hợp phương trình luôn đúng với mọi giá trị trong tập xác định, thì phương trình này được gọi là **đẳng thức**. Một cách tương đương, nếu như bất phương trình đúng với tất cả các giá trị có thể của đầu vào thì được gọi là **bất đẳng thức**.

Nếu chỉ có số với chữ không thì hàm số sẽ trở nên rất nhàm chán, cho nên người ta đã nghĩ ra phương pháp biểu diễn hàm số qua đồ thị. Để biểu diễn một hàm số $y = f(x)$ với x và y là hai số thực, cần vẽ tất cả các cặp tọa độ $(x; y)$ thỏa mãn hàm f trên đồ thị. Trong trường hợp hàm có vô số điểm, chúng ta lấy một số giá trị để định hướng hình dạng của đồ thị và rồi sau đó nối các điểm lại[6]. Do hàm số biểu thị mối liên hệ giữa hai đại lượng, chúng ta dùng đồ thị hai chiều để biểu diễn mối liên hệ giữa chúng. Chúng ta sẽ lấy ví dụ cho hàm sau được cho trong bảng 0.1 với tập xác định chỉ có 5 số.

x	1	2	3	4	5
$y = f(x)$	1	2	5	2	3

Bảng 0.1: Ví dụ của $y = f(x)$

Chúng ta nhìn thấy rằng có 5 bộ số $(x; y)$ là $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$, $(4; 5)$, $(5; 6)$ thỏa mãn hàm f (theo đúng định nghĩa của hàm). Do đó, chúng ta có đồ thị như hình 0.19.

---

[3] Còn những kí hiệu khác cho dấu nhỏ hơn hoặc bằng là $\leqq$, $\leqslant$.

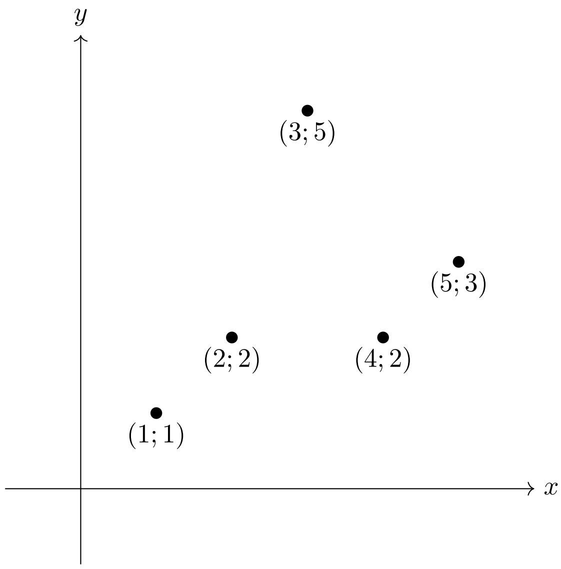
[4] Còn những kí hiệu khác cho dấu lơn hơn hoặc bằng là $\geqq$, $\geqslant$.

[5] Ngoài những dấu biểu diễn bất phương trình được kể, còn những dấu như $\nless$ (không nhỏ hơn), $\ngtr$ (không lớn hơn), $\nleq$, $\nleqq$ hay $\nleqslant$ (không nhỏ hơn hoặc bằng), $\ngeq$, $\ngeqq$ hay $\ngeqslant$ (không lớn hơn hoặc bằng), và những dấu bị nguyền rủa $\lessgtr$ (nhỏ hơn hoặc lớn hơn), $\lesseqgtr$ hay $\lesseqqgtr$ (nhỏ hơn, lớn hơn hoặc bằng). Bạn đọc có thể sẽ muốn thêm các dấu $\not\lessgtr$ (không nhỏ hơn hay lớn hơn) và cặp dấu $\not\lesseqgtr$, $\not\lesseqqgtr$ (không nhỏ hơn, lớn hơn hay bằng) làm dấu cho bất phương trình. Tuy nhiên, trên tập số thực, $\not\lesseqqgtr$ tương đương với dấu $=$, và bất phương trình với $\not\lesseqgtr$, $\not\lesseqqgtr$ thì không bao giờ thỏa mãn. Về mặt ứng dụng, ngoài những môn nặng về nền tảng của toán như đại số cao cấp, những dấu kể trên gần như không bao giờ được sử dụng.

[6] Mặc dù vậy, vẫn có trường hợp mà cách vẽ này hoàn toàn bất lực. Ví dụ như hàm Đi-rích-lê:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ nếu } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

với $\mathbb{Q}$ là tập số hữu tỉ. Hàm này liên tục nhảy bật từ 0 đến 1 và ngược lại, khiến cho việc vẽ đồ thị trở nên bất khả thi.

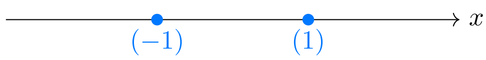


Hình 0.19: Đồ thị cho ví dụ của $y = f(x)$ được cho ở bảng 0.1

Một cách tương tự, chúng ta cũng có thể biểu diễn phương bất hệ thông qua việc vẽ đồ thị chứa các nghiệm của phương bất hệ đó. Có bao nhiêu ẩn số trong phương bất hệ, đồ thị sẽ có bấy nhiêu chiều. Giả sử như bạn đọc cần biểu diễn phương trình $x^2 - 1 = 0$ với x xác định trên tập số thực. Để biểu diễn được phương trình này, trước hết cần phải thực hiện giải nó. Tác giả kì vọng bạn đọc có thể thực hiện được những biến đổi sau:

$$\begin{aligned} & x^2 - 1 = 0 \\ \iff & x^2 = 1 \\ \iff & x \in \{-1; 1\}. \end{aligned}$$

Do phương trình chỉ có một ẩn nên chúng ta sẽ chọn trục số một chiều biểu diễn x để thể hiện nghiệm của phương trình này, như hình 0.20.



Hình 0.20: Biểu diễn nghiệm của $x^2 - 1 = 0$

Về mặt lợi ích của việc sử dụng đồ thị, biểu diễn hình học các đại lượng đại số là một trong những cách hữu hiệu để mở rộng cảm nhận về đối tượng đang nghiên cứu.

Bài 4: Mỗi phần trong bài tập sau bao gồm mối liên hệ giữa x và y. Trong mỗi phần, y có phải là hàm của x hay không? Trong trường hợp y là hàm số của x, xác định tập xác định và tập giá trị của hàm số đó. Còn trong trường hợp ngược lại, giải thích tại sao y lại không phải là hàm số của x.

1.

x	1	2	3	4	5
y	2	3	4	5	6

;

2.

x	0	-1	1	2	-3
y	0	0	0	0	0

;

3.

x	15	15	16	16	17
y	123	134	578	426	348

;

4.

x	0	-17	3	55	-17
y	4586	1024	4586	4586	1024

;

5. x là số chỉ tháng và y là số ngày trong tháng x.

Lời giải bài 4:

1. y là hàm của x với tập xác định $X = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ và tập giá trị $Y = \{2; 3; 4; 5; 6\}$.

2. y là hàm của x với tập xác định $X = \{0; -1; 1; 2; -3\}$ và tập giá trị $Y = \{0\}$.

3. y không phải là hàm của x do khi x có giá trị 15 thì y có hai giá trị 123 và 134.

4. y là hàm của x với tập xác định $X = \{0; -17; 3; 55\}$ và tập giá trị $Y = \{4586; 1024\}$. Lưu ý rằng bảng có cột bị lặp.

5. y không là hàm của x do khi $x = 2$ thì y có hai giá trị 28 và 29. Mặc dù cách viết có thể ám chỉ $y = f(x)$ với f là hàm số đại diện cho số ngày trong tháng, nhưng f không phải là hàm số do điều ngoại lệ.

Bài 5: Vẽ đồ thị của phương trình $\mathcal{P}$, với các định nghĩa được cho. Hàm có tập xác định là bộ số đầu vào cho ở trong bảng. Để ý số ẩn của phương trình để chọn số chiều của đồ thị cho phù hợp.

1.

x	-1	1	-2	2	-3	3
$f(x)$	0	0	4	3	7	0

và $\mathcal{P} : f(x) = 0$;

2.

x	-1	1	-2	2	-3	3
$f(x)$	0	0	4	3	7	0

và $\mathcal{P} : f(x) = x^2 - 1$;

3.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	7	11	13
$g(x)$	1	3	5	7	9	11

và $\mathcal{P} : f(x) = g(x)$;

4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	7	11	13
$g(x)$	1	3	5	7	9	11

và $\mathcal{P} : f(x) = g(y)$;

5.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	7	11	13

và $\mathcal{P} : f(x) = 2b - 1$ với $b \in \mathbb{R}$;

6.

x	-1	1	-2	2	-3	3
$f(x)$	0	0	4	3	7	0

và $\mathcal{P} : f(x) = f(2b - 1)$;

7.

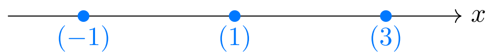
x	-1	1	-2	2	-3	3
$f(x)$	0	0	4	3	7	0

và $\mathcal{P} : f(a) + f(b) = f(c)$;

Lời giải bài 5:

1. $\mathcal{P}$ là phương trình chỉ có một ẩn x, do đó đồ thị của $\mathcal{P}$ chỉ là đồ thị một chiều trên một trục số biểu diễn cho x.

Có ba giá trị để $f(x)$ bằng 0: $x \in \{-1; 1; -3\}$. Chúng ta có đồ thị của $\mathcal{P}$ ở hình 0.21.



Hình 0.21: Đồ thị phần 1 bài 5

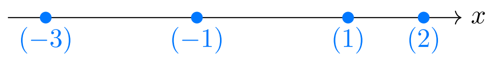
2. Tập xác định của $f(x)$ là $\{-1; 1; -2; 2; -3; 3\}$, do đó, để $\mathcal{P}$ thỏa mãn thì x chỉ có thể nhận các giá trị trong vùng tập xác định.

Kẻ bảng so sánh:

x	-1	1	-2	2	-3	3
$f(x)$	0	0	4	3	7	0
$x^2 - 1$	0	0	3	3	7	7

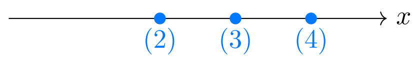
Bảng 0.2: Giá trị của $f(x)$ và $x^2 - 1$ ứng với x

Nhận thấy rằng $\mathcal{P}$ chỉ đúng khi $x \in \{-1; 1; -3; 2\}$ và chúng ta có đồ thị là hình 0.22.



Hình 0.22: Đồ thị phần 2 bài 5

3. Nhìn vào bảng được cho, có $f(x) = g(x)$ khi và chỉ khi $x \in \{2; 3; 4\}$. Do đó, đồ thị của $\mathcal{P}$ có được như hình 0.23.



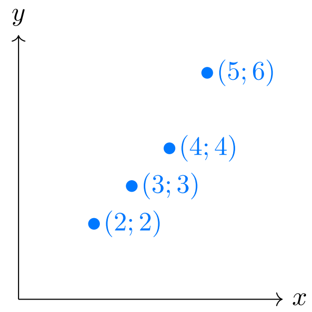
Hình 0.23: Đồ thị phần 3 bài 5

4. $\mathcal{P}$ là phương trình có hai ẩn x và y, do đó đồ thị của $\mathcal{P}$ là một mặt phẳng hai chiều. Coi như trục hoành biểu diễn cho x và trục tung biểu diễn cho y.

Để có thể vẽ được đồ thị của $\mathcal{P}$, hiển nhiên nhìn ra được rằng cần phải có những điểm $(x; y)$ để hai giá trị $f(x)$ và $g(y)$ bằng nhau. Và để làm được điều đó, trước hết, chúng ta sẽ tìm xem giá trị bằng nhau của $f(x)$ với $g(y)$ này bằng bao nhiêu. Gọi chung giá trị bằng nhau này là B_n. Kẻ lại bảng so sánh thành bảng 0.3, với B_n là giá trị đầu ra và x, y là giá trị lần lượt đưa vào hai hàm f và g để có giá trị đầu ra đó. Và từ đó, chúng ta có đồ thị của $\mathcal{P}$ là hình 0.24.

B_n	3	5	7	11
x	2	3	4	5
y	2	3	4	6

Bảng 0.3: Giá trị của x và y ứng với B_n



Hình 0.24: Đồ thị phần 4 bài 5

5. $\mathcal{P}$ là phương trình có hai ẩn x và b, do đó đồ thị của $\mathcal{P}$ là một mặt phẳng hai chiều. Coi như trục hoành biểu diễn cho x và trục tung biểu diễn cho b.

Tính giá trị của b từ $f(x)$:

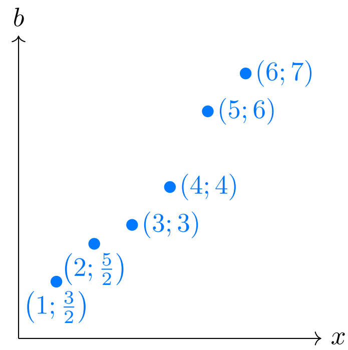
$$f(x) = 2b - 1$$
$$\iff b = \frac{f(x)+1}{2}.$$

Từ đây, chúng ta có thể thêm giá trị của b vào bảng được cho thành bảng 0.4.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	5	7	11	13
b	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	4	6	7

Bảng 0.4: Giá trị của b ứng với x

Qua bảng đó, vẽ được đồ thị của $\mathcal{P}$ như hình 0.25.



Hình 0.25: Đồ thị phần 5 bài 5

6. Nhìn vào bảng định nghĩa được cho, $f(x)$ có thể nhận các giá trị là $\{0; 3; 4; 7\}$.

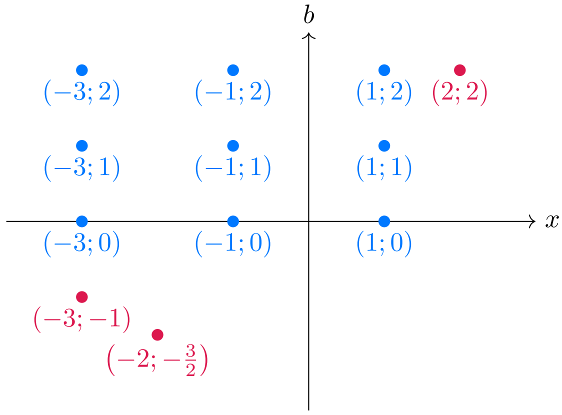
Trường hợp 1: Khi $f(x) \neq 0$, chỉ có một giá trị đầu vào cho f sao cho $f(x)$ đạt được giá trị đầu ra. Ví dụ, chỉ có đầu vào $x = 2$ mới có $f(x) = 3$. Do đó, khi $f(x) \neq 0$, $x = 2b - 1$. Biến đổi đại số cơ bản để có $b = \frac{x+1}{2}$. Lập bảng 0.5 để thấy được mối quan hệ giữa x và b.

x	-2	2	-3
$b = \frac{x+1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	-1

Bảng 0.5: Giá trị của cặp $(x; b)$ với $f(x) \neq 0$

Trường hợp 2: Khi $f(x) = 0$, x và $2b - 1$ có thể nhận bất cứ giá trị nào trong tập $\{-1; 1; -3\}$. Từ đó, có thể chọn $x \in \{-1; 1; 3\}$ và giải đại số để chọn $b \in \left\{\frac{-1+1}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{3+1}{2}\right\} = \{0; 1; 2\}$. Các cặp $(x; b)$ thỏa mãn là $(x; b) \in \{(-1; 0); (-1; 1); (-1; 2); (1; 0); (1; 1); (1; 2); (-3; 0); (-3; 1); (-3; 2)\}$.

Cuối cùng, kết hợp hai trường hợp, chúng ta có đồ thị cho $\mathcal{P}$:



Hình 0.26: Đồ thị phần 6 bài 5

7. $\mathcal{P}$ là phương trình có ba ẩn a, b và c, do đó đồ thị của $\mathcal{P}$ là một không gian ba chiều với các trục hoành, trục tung và trục cao tương ứng là a, b và c.

Theo $\mathcal{P}$, chúng ta cần phải chọn ba số trong tập giá trị của f để hai trong ba số có tổng bằng số còn lại. Từ bảng, nhận thấy rằng, chỉ có thể có hai tổng $4+3=7$ và $0+0=0$.

Chúng ta cần tìm tất cả các bộ ba (a, b, c) thỏa mãn $f(a)+f(b)=f(c)$. Xét hai trường hợp sau:

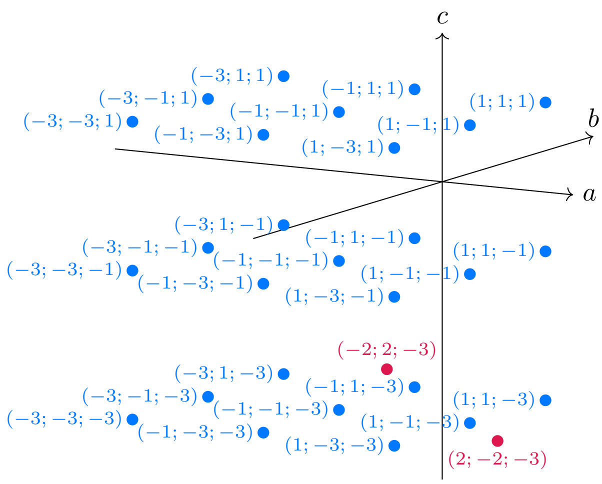
Trường hợp 1: Tổng hai số khác 0. Để $f(a)+f(b)=f(c)$, chỉ có thể xảy ra khi $3+4=7$. Do đó, $(f(a); f(b); f(c))$ phải là $(3; 4; 7)$ hoặc $(4; 3; 7)$. Tra ngược lại bảng giá trị, chúng ta có hai nghiệm:

- $f(a)=3, f(b)=4 \implies a=2, b=-2$. Và
- $f(a)=4, f(b)=3 \implies a=-2, b=2$.

Chỉ có $f(-3)=7$ nên $c=-3$.

Trường hợp 2: Tất cả bằng 0. Khi $f(a)=f(b)=f(c)=0$, từ bảng định nghĩa, $f(x)=0$ khi $x \in \{-3; -1; 1\}$. Do đó, a, b, c có thể nhận bất kỳ giá trị nào trong tập $\{-3; -1; 1\}$. Có tổng cộng $3^3=27$ bộ ba thỏa mãn trong trường hợp này.

Kết hợp hai trường hợp, đồ thị của $\mathcal{P}$ sẽ gồm 29 điểm trong không gian 3 chiều (2 điểm từ trường hợp 1 và 27 điểm từ trường hợp 2), được biểu diễn trong hình 0.27.



Hình 0.27: Đồ thị phần 7 bài 5

Bài 6: Vẽ đồ thị của bất phương trình $\mathcal{P}$, với các định nghĩa đã cho. Hàm có tập xác định là bộ số đầu vào cho ở trong bảng.

1.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	-3	-4	-2	-1	-3

và $\mathcal{P}: f(x) \neq -3$;

2.

x	-10	-8	-2	2	8	10
$\alpha(x)$	4	8	0	1	6	8

và $\mathcal{P}: \alpha(x) < 0$;

3.

x	0	6	2	-7	-6	3
$\beta(x)$	4	7	10	3	10	9

và $\mathcal{P} : \beta(x) > x$;

4.

x	-10	-8	-2	2	8	10
$\alpha(x)$	4	8	0	1	6	8

,

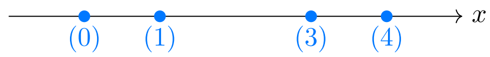
x	0	6	2	-7	-6	3
$\beta(x)$	4	7	10	3	10	9

, và $\mathcal{P} : \alpha(x) \geq 2\beta(y)$.

Lời giải bài 6:

1. Phần này tương đối đơn giản. Kiểm tra trên bảng, chúng ta thấy $f(x) = -3$ khi $x \in \{2; 5\}$. Thêm vào đó, tập xác định của f là $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Do đó, $f(x) \neq -3$ khi $x \in \{0; 1; 3; 4\}$.

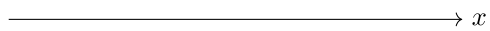
Đồ thị của $\mathcal{P}$ là hình 0.28 ở bên.



Hình 0.28: Đồ thị phần 1 bài 6

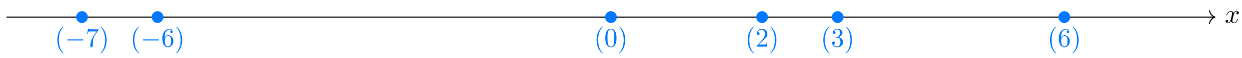
2. Tra bảng trực tiếp, các giá trị $\alpha(x)$ không bao giờ nhỏ hơn 0. Chúng ta không xét giá trị x ngoài bảng do không thuộc tập xác định của hàm α. Do đó, $\alpha(x) < 0$ là bất phương trình vô nghiệm.

Và qua đó, vẽ được đồ thị của $\mathcal{P}$ là trục không đánh dấu như hình 0.29.



Hình 0.29: Đồ thị phần 2 bài 6

3. Xét trên tập xác định của β, chúng ta có $\beta(x) > x$ với mọi x nằm trên bảng được cho. Một cách đơn giản, chúng ta có đồ thị là hình 0.30.



Hình 0.30: Đồ thị phần 3 bài 6

4. Chúng ta có thể kiểm tra trực tiếp 36 cặp $(x; y)$ và sau đó vẽ đồ thị. Sau đây, tác giả sẽ chỉ những góc nhìn để có thể giảm số trường hợp cần kiểm tra.

Để ý rằng, giá trị lớn nhất có thể của $\alpha(x)$ là 8. Mặt khác, để $\mathcal{P}$ thỏa mãn thì

$$\begin{aligned} & \alpha(x) \geq 2\beta(y) \\ \iff & \beta(y) \leq \frac{\alpha(x)}{2}. \end{aligned}$$

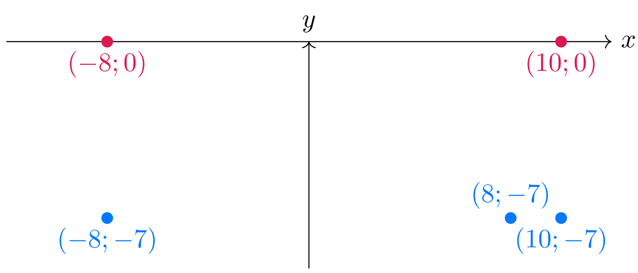
Qua đó, giá trị lớn nhất có thể của $\beta(y)$ là 4. Theo bảng định nghĩa, $\beta(y)$ chỉ có thể nhận hai giá trị là 3 hoặc 4.

Trường hợp 1: $\beta(y) = 3 \iff y = -7$. Khi này, để $\alpha(x) \geq 2\beta(x)$ hay $\alpha(x) \geq 6$ thì $\alpha(x)$ có thể nhận giá trị 8 hoặc 6. Do đó,

$$\begin{aligned} \alpha(x) = 6 &\implies x = 8; \\ \alpha(x) = 8 &\implies x \in \{-8; 10\}. \end{aligned}$$

Trường hợp 2: $\beta(y) = 4 \iff y = 0$. Khi này, để $\alpha(x) \geq 8$ thì $\alpha(x)$ chỉ có thể nhận bằng 8. Do đó, $x \in \{-8; 10\}$.

Từ đây, chúng ta có đồ thị 0.31.



Hình 0.31: Đồ thị phần 4 bài 6

Bài 7: Vẽ đồ thị của hệ phương trình $\mathcal{P}$, với các định nghĩa đã cho. Hàm có tập xác định là bộ số đầu vào cho ở trong bảng.

1.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	-1	-1	-2	-3	-3

,

y	0	-2	4	-6	8	-10
$g(y)$	-1	-2	-3	-7	-8	-9

,

z	-1	1	-2	0	-4	4
$h(z)$	2	1	0	-1	-2	-3

và $\mathcal{P} : f(x) = g(x) = h(x)$;

2.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	-1	-1	-2	-3	-3

,

y	0	-2	4	-6	8	-10
$g(y)$	-1	-2	-3	-7	-8	-9

,

z	-1	1	-2	0	-4	4
$h(z)$	2	1	0	-1	-2	-3

và $\mathcal{P} : f(a) = g(b) = h(c)$;

3.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	-1	-1	-2	-3	-3

,

y	0	-2	4	-6	8	-10
$g(y)$	-1	-2	-3	-7	-8	-9

,

z	-1	1	-2	0	-4	4
$h(z)$	2	1	0	-1	-2	-3

và $\mathcal{P} : \begin{cases} f(o) = g(p) \\ f(p+1) = h(q) \end{cases}$.

4.

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-1	-1	-1	-2	-3	-3

,

y	0	-2	4	-6	8	-10
$g(y)$	-1	-2	-3	-7	-8	-9

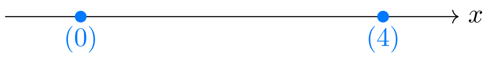
,

z	-1	1	-2	0	-4	4
$h(z)$	2	1	0	-1	-2	-3

và $\mathcal{P} : \begin{cases} f(m) = n \\ g(n) = h(w) \end{cases}$.

Lời giải bài 7:

1. Giá trị đầu vào để f, g, h đều có cùng một đầu ra là $x \in \{0; 4\}$. Vậy, chúng ta có đồ thị như hình 0.32.

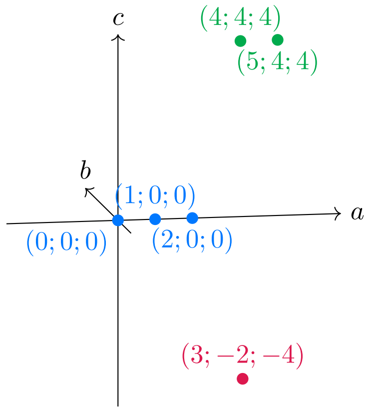


Hình 0.32: Đồ thị phần 1 bài 7

2. Trước hết, cần tìm những giá trị chung trong tập giá trị của f, g, h. Nhận thấy rằng, có $-1, -2$ và -3 là những giá trị chung trong đó.

- Với đầu ra là -1, chúng ta có $f(a) = g(b) = h(c) = -1$. Từ đó, chúng ta có $a \in \{0; 1; 2\}$ và $b = c = 0$.
- Trong trường hợp kết quả của hàm là -2, $f(a) = g(b) = h(c) = -2$. Từ đó, bộ ba $(a; b; c)$ có giá trị là $(3; -2; -4)$.
- Trong trường hợp kết quả của hàm là -3, $f(a) = g(b) = h(c) = -3$. Từ đó, $(a; b; c) \in \{(4; 4; 4); (5; 4; 4)\}$.

Kết hợp ba trường hợp, xây dựng không gian tọa độ, chúng ta có hình 0.33.

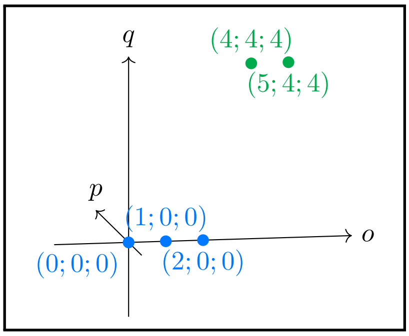


Hình 0.33: Đồ thị phần 2 bài 7

3. Để f và g nhận cùng một giá trị thì giá trị đầu ra đó, theo bảng định nghĩa được cho, kết quả mà hàm trả ra phải là -1, -2 hoặc -3.

- Tại $f(o) = g(p) = -1$, $o \in \{0; 1; 2\}$ và $p = 0$. Từ đó, $f(p+1) = f(1) = -1$. Khi này, $h(q) = -1 \iff q = 0$.
- Tại $f(o) = g(p) = -2$, sau khi tra bảng, chúng ta thấy được rằng $\begin{cases} o = 3 \\ p = -2 \end{cases}$; suy ra $f(p+1) = f(-1)$, Tuy nhiên, -1 không thuộc tập xác định của f. Vậy, chúng ta sẽ loại trường hợp này.
- Tại $f(o) = g(p) = -3$, $o \in \{4; 5\}$ và $p = 4$. Từ đó, $f(p+1) = f(5) = -3$. Khi này, $h(q) = -3 \iff q = 4$.

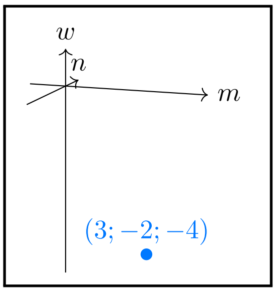
Cuối cùng, vẽ đồ thị để được hình 0.34.



Hình 0.34: Đồ thị phần 3 bài 7

4. Theo đề, chúng ta cần tìm những bộ $(m; n; w)$ thỏa mãn $\mathcal{P}$, trong đó có $g(n) = h(w)$. Cho nên, n phải thuộc tập xác định của g. Nhìn vào bảng, tập xác định đó là $\{0; -2; 4; -6; 8; -10\}$. Tuy nhiên, cũng có $f(m) = n$, cho nên n vừa phải thuộc tập giá trị của f, hay $n \in \{-1; -2; -3\}$. Lấy giao của hai tập đó, chúng ta có $n = -2$. Từ đó, giải $f(m) = -2$ để có $m = 3$. Thêm vào đó, $h(w) = g(-2) = -2 \iff w = -4$.

Bộ số duy nhất thỏa mãn hệ phương trình $\mathcal{P}$ là $(m; n; w) = (3; -2; -4)$. Đồ thị của $\mathcal{P}$ là hình 0.35.



Hình 0.35: Đồ thị phần 4 bài 7

0.2.2 Kí hiệu tổng và tích của nhiều số

Cho hàm số $f(x)$. Khi cho x là số nguyên chạy từ a đến b (thông thường $a \leq b$), chúng ta có tổng của các giá trị $f(x)$ được viết rút gọn là

$$\boldsymbol{\sum_{x=a}^{b} (f(x)) = f(a) + f(a+1) + \cdots + f(b)}.$$

Ví dụ, nếu cho $f(x) = 3x - 7$, thì

$$\begin{aligned}\sum_{x=-1}^{3} (f(x)) &= f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ &= (3(-1) - 7) + (3(0) - 7) + (3(1) - 7) + (3(2) - 7) + (3(3) - 7) \\ &= -20.\end{aligned}$$

Đối với tích của các giá trị $f(x)$, chúng ta có

$$\boldsymbol{\prod_{x=a}^{b} (f(x)) = f(a) \times f(a+1) \times \cdots \times f(b)}.$$

Ví dụ, cùng với $f(x) = 3x - 7$, chúng ta có

$$\begin{aligned}\prod_{x=-1}^{3} (f(x)) &= f(-1) \times f(0) \times f(1) \times f(2) \times f(3) \\ &= (3(-1) - 7) \times (3(0) - 7) \times (3(1) - 7) \times (3(2) - 7) \times (3(3) - 7) \\ &= 560.\end{aligned}$$

Mở rộng kí hiệu, nếu chúng ta có cần tính tổng hay tích vào hàm phụ thuộc vào các giá trị x thỏa mãn điều kiện P nào đó, thì chúng ta có thể viết

$$\sum_{\boldsymbol{P}} (\boldsymbol{f(x)}) \text{ và } \prod_{\boldsymbol{P}} (\boldsymbol{f(x)}).$$

P có thể được viết theo nhiều kiểu khác nhau, miễn hiểu là được. Ví dụ, thay vì tính tổng và tích của $f(x)$ khi x thay đổi từ -1 đến 3, chúng ta có thể tính tổng và tích của $f(x)$ với x là các số nguyên tố lớn hơn 10 và nhỏ hơn 20. Khi đó,

$$\begin{aligned}&\sum_{x \text{ là số nguyên tố lớn hơn 10 và nhỏ hơn 20}} (f(x)) \\ =&f(11) + f(13) + f(17) + f(19) \\ =&152, \text{ và}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\prod_{x \text{ là số nguyên tố lớn hơn 10 và nhỏ hơn 20}} (f(x)) \\ =&f(11) \times f(13) \times f(17) \times f(19) \\ =&1830400.\end{aligned}$$

0.2.3 Hàm đa thức

Một dạng hàm quen thuộc, được giới thiệu trong chương trình học trung học phổ thông, là đa thức. Nhưng trước khi chúng ta nhắc lại về đa thức, chúng ta sẽ nhắc lại về đơn thức. Hàm **đơn thức**[7] là một hàm được viết dưới dạng

$$\boldsymbol{f(x) = ax^n}$$

với a là một số thực và biến x được mũ lên một số nguyên không âm n. Trong tương lai, chúng ta sẽ đề cập về vấn đề hàm số mũ mà thay n bằng số mũ thực. Tạm thời, chúng ta sẽ có định nghĩa **số mũ** như sau:

$$\boldsymbol{x^n = \prod_{i=1}^{n} (x) = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ lần}}}.$$

Trong trường hợp $n = 0$ thì $x^n = \boldsymbol{x^0 = 1}$.

Hàm **đa thức** thông thường được biểu diễn dưới dạng tổng của các đơn thức

$$\boldsymbol{f(x) = P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i x^i\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

với n là một số nguyên không âm, a_i là các số thực, gọi là các **hệ số**, với mọi i nguyên nằm trong đoạn $[0, n]$ và $a_n \neq 0$. Khi này, n được gọi là **bậc** của đa thức. Mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$ đều thuộc tập xác định của hàm đa thức $f(x)$. Ví dụ:

- $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ là một đa thức bậc 2 với các hệ số $a_2 = 2$, $a_1 = 3$, $a_0 = 1$;
- $g(y) = y^3 - 4y$ là một đa thức bậc 3 với các hệ số $b_3 = 1$, $b_2 = 0$, $b_1 = -4$, $b_0 = 0$;
- $h(z) = 5$ là một đa thức bậc 0 với hệ số $c_0 = 5$;

Tính toán một số giá trị mẫu:

- $p(1) = 7 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 9 = 14$ với $q(t) = 7t^4 - 2t^2 + 9$ là một đa thức bậc 4 với các hệ số $d_4 = 7$, $d_3 = 0$, $d_2 = -2$, $d_1 = 0$, $d_0 = 9$;
- $q(2) = -3 \cdot 2 + 8 = 2$ với $q(r) = -3r + 8$ là một đa thức bậc 1 với các hệ số $e_1 = -3$, $e_0 = 8$.

[7]Chúng ta sẽ đề cập đến đơn thức và đa thức nhiều biến khi đến phần hàm nhiều biến.

Khi đa thức có bậc bằng 0, hay $f = P_0 = a_0$, thì được gọi là **đa thức hằng** hay **hàm hằng**. Một trường hợp đặc biệt là khi $f = 0$ (hay $f(x) = 0$ với mọi x). Nếu hàm này là đa thức, theo định nghĩa, hàm này chỉ có duy nhất hệ số đầu $a_0 = 0$. Tuy nhiên, cũng theo định nghĩa thì hệ số đầu phải khác 0. Vì vậy, hàm không có bậc và không được gọi là đa thức. Nhưng, do hàm nhận giá trị cố định với mọi x nên vẫn được gọi là hàm hằng [8].

Bài 8: Phác thảo đồ thị của những hàm sau:

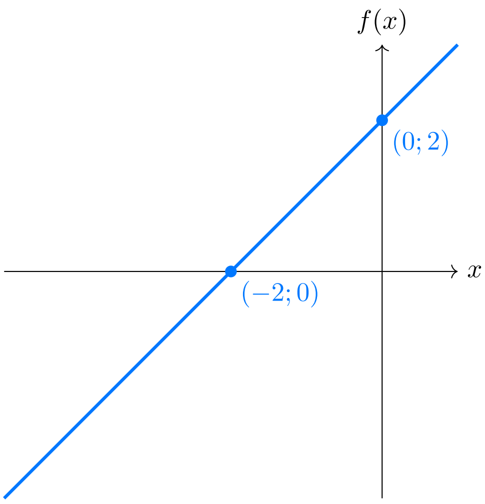
1. $f(x) = x + 2$;
2. $f(x) = x^2 + 2x + 3$;
3. $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$;
4. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$;
5. $f(x) = 2$;
6. $f(x) = 36x^4 + 28x^3 - 3x^2 - 6x - 1$;
7. $f(x) = -x^6 + x^2 - 4x - 2$;
8. $f(x) = -x^7 + x$.

Lời giải bài 8:

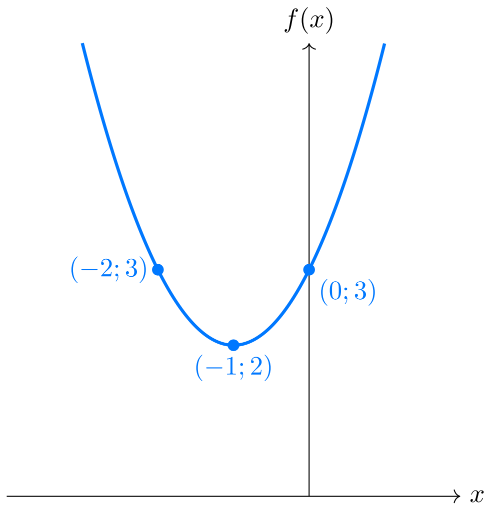
Bạn đọc có thể dùng những phần mềm vẽ đồ thị để nhanh chóng có hình vẽ. Tuy nhiên, nếu không có thiết bị điện tử thì bạn đọc vẫn có thể vẽ đồ thị bằng giấy và bút bằng cách lấy nhiều điểm ví dụ cho x và tính toán giá trị $f(x)$ và sau đó nối chúng lại với nhau.

Bạn đọc có thể để ý rằng là không phải lúc nào cũng đặt gốc tọa độ ở vị trí chính giữa và tỉ lệ xích trên hai trục không phải là giống nhau. Trong nhiều trường hợp, việc ép đặt gốc ở giữa và giữ tỉ lệ giống nhau trên các trục sẽ làm cho đồ thị lệch ra khỏi khu vực vẽ. Điều quan trọng nhất của những bài vẽ đồ thị trong vật lí không chỉ là căn ke chính xác vị trí từng điểm, mà còn là nhận ra được dáng điệu của đồ thị và vị trí tương đối giữa các điểm trên đồ thị đó. Qua đó, chúng ta rút ra được những tính chất toán học cần thiết để phục vụ những yêu cầu cụ thể trong bài tập ứng dụng.

Dưới đây là đồ thị của các hàm đa thức trong bài:

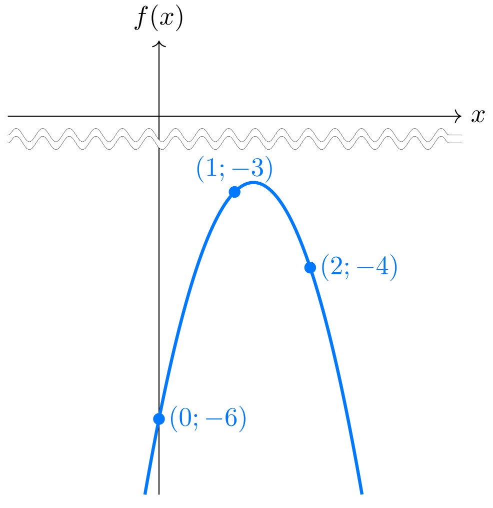


Hình 0.36: Đồ thị của hàm $f(x) = x + 2$

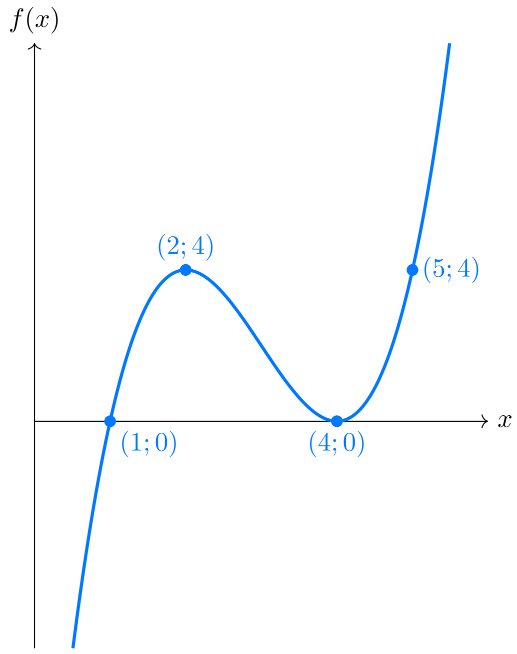


Hình 0.37: Đồ thị của hàm $f(x) = x^2 + 2x + 3$

[8]Đa số những nhà toán học không coi $f = 0$ là đa thức bậc 0 do nhiều tính chất của đa thức bị phá vỡ khi gặp trường hợp này. Tuy nhiên, nhiều người vẫn coi $f = 0$ là đa thức không có bậc. Trong tài liệu này, tác giả không coi 0 là đa thức, nhưng vẫn coi là hàm hằng.

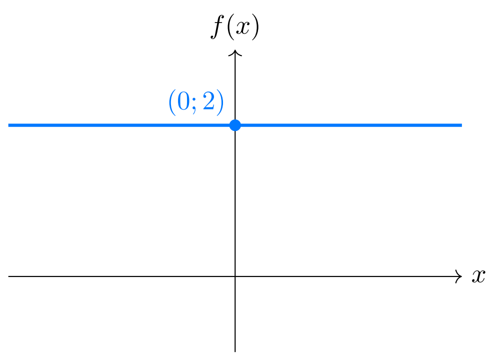


Hình 0.38: Đồ thị của hàm $f(x) = -2x^2 + 5x - 6$

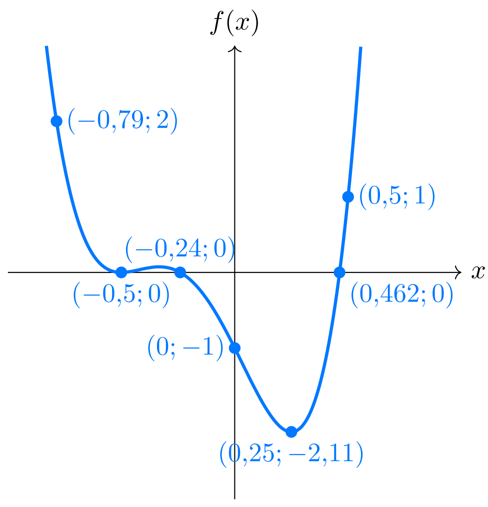


Hình 0.39: Đồ thị của hàm $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 16$

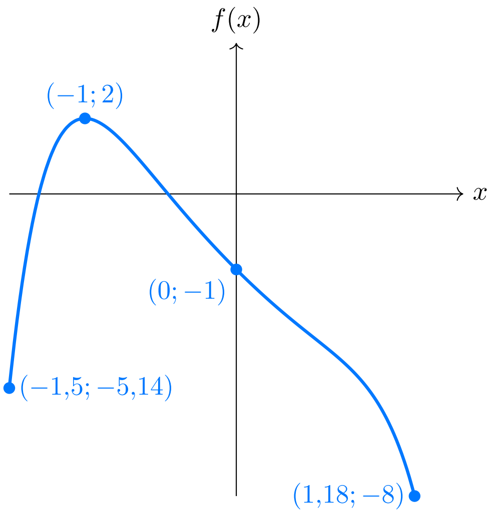
Ở hình 0.38, đồ thị có đoạn díc dắc. Ý nghĩa của cách vẽ này là để cắt bỏ phần đồ thị không cần thiết.



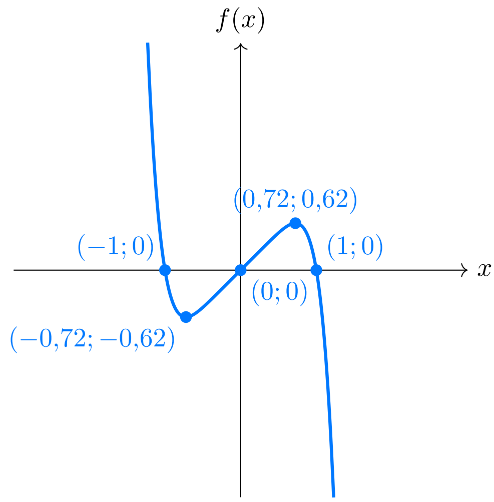
Hình 0.40: Đồ thị của hàm $f(x) = 2$



Hình 0.41: Đồ thị của hàm $f(x) = 36x^4 + 28x^3 - 3x^2 - 6x - 1$



Hình 0.42: Đồ thị của hàm $f(x) = -x^6 + x^2 - 4x - 2$



Hình 0.43: Đồ thị của hàm $f(x) = -x^7 + x$

Bài 9: Giải những phương trình sau. Các phương trình đều có ẩn là $x \in \mathbb{R}$.

1. $3x - 7 = 0$;
2. $x - 9 = 5x + 3$;
3. $\frac{1}{v} \cdot x - \frac{1}{v} \cdot x_0 = t$, với v, x_0, t là những tham số thực;
4. $6x^2 - 5x - 21 = 0$;
5. $5x^2 - 50x + 125 = 0$;
6. $x^2 + 2x + 4 = 0$;
7. $x^2 + 2x + 4 = 8$;
8. $5x^2 - 20x + 20 = x^2 - 4$;
9. $\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2$, với k, m, v, x_0 là những tham số thực;
10. $x^3 - \frac{11}{6} \cdot x^2 + x - \frac{1}{6} = 0$;
11. $2x^3 - 2x^2 + 2x - 2 = 6 + 6x^2$;
12. $x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x = 0$;
13. $-x^4 - 3x^2 = -5$;
14. $x^4 + 1 = 3x^3 + x^2 + 3x$.

Lời giải bài 9:

1. Biến đổi tương đương phương trình để có:

$$\begin{aligned} & 3x - 7 = 0 \\ \iff & 3x = 7 \\ \iff & x = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{7}{3}\right\}$.

2. Chuyển số hạng có thừa số x về một phía, và số hạng tự do về phía còn lại để được:

$$\begin{aligned} & x - 9 = 5x + 3 \\ \iff & (x - 9) + (9 - 5x) = (5x + 3) + (9 - 5x) \\ \iff & -4x = 12 \\ \iff & x = -3. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{-3\}$.

3. Để giải phương trình có chứa tham số, chúng ta cần viết lại ẩn x dưới dạng một biểu thức chỉ chứa tham số và hằng số. Cụ thể,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \cdot x - \frac{1}{v} \cdot x_0 = t \\ \iff & \frac{x}{v} = t + \frac{x_0}{v} \\ \iff & x = vt + x_0. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $\{vt + x_0\}$.

4. Nếu như bạn đọc chưa biết, nếu như một đa thức $f(x)$ nhận $x = a$ là nghiệm thì $f(x)$ có thể được viết thành tích của $(x - a)$ nhân một đa thức $g(x)$ với bậc nhỏ hơn 1 so với $f(x)$. Và nếu $g(x)$ lại có nghiệm $x = b$ thì chúng ta có thể viết $g(x) = (x - b)h(x)$ và qua đó có thể viết lại $f(x) = (x - a)(x - b)h(x)$. Một cách tổng quát nhất, nếu như $f(x)$ là phương trình bậc n có n nghiệm $a_1, a_2, \cdots, a_n$ thì có thể viết lại

$$f(x) = A\prod_{i=1}^{n}(x - a_i) = A(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

với A là hệ số của số hạng có bậc lớn nhất trong đa thức $f(x)$.

Nhẩm nghiệm (bằng cách bấm máy tính) phương trình thì có $x = -\frac{3}{2}$ và $x = \frac{7}{3}$. Chúng ta kì vọng có thể viết lại phương trình dưới dạng $6\left(x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)\left(x - \frac{7}{3}\right) = 0$. Thực vậy, thực hiện phân tích nhân tử để có:

$$\begin{aligned}
& 6x^2 - 5x - 21 = 0 \\
\iff & 6x^2 - 14x + 9x - 21 = 0 \\
\iff & 2x(3x - 7) + 3(3x - 7) = 0 \\
\iff & (2x + 3)(3x - 7) = 0 \\
\iff & \left[\begin{aligned} & 2x + 3 = 0 \\ & 3x - 7 = 0 \end{aligned}\right. \iff \left[\begin{aligned} & x = -\frac{3}{2} \\ & x = \frac{7}{3} \end{aligned}\right. .
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\left\{-\dfrac{3}{2}; \dfrac{7}{3}\right\}$.

5.

$$\begin{aligned}
5x^2 - 50x + 125 &= 0 \\
\iff 5\left(x^2 - 10x + 25\right) &= 0 \\
\iff 5(x - 5)^2 &= 0 \\
\iff x - 5 &= 0 \\
\iff x &= 5.
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình có một phần tử duy nhất $\{5\}$.

6. Với những phương trình liên quan tới đa thức bậc hai không thể nhẩm ngay được nghiệm, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp tách bình phương. Với phương trình được cho:

$$\begin{aligned}
x^2 + 2x + 4 &= 0 \\
\iff x^2 + 2x + 1 &= -3 \\
\iff (x + 1)^2 &= -3.
\end{aligned} \tag{0.1}$$

Một số thực nhân với chính nó sẽ ra một số không âm. Cho nên phương trình 0.1 không thể đúng. Vậy phương trình vô nghiệm trên tập số thực.

7.

$$\begin{aligned}
& x^2 + 2x + 4 = 8 \\
\iff & x^2 + 2x + 1 = 5 \\
\iff & (x + 1)^2 = 5 \\
\iff & \left[\begin{aligned} & x + 1 = \sqrt{5} \\ & x + 1 = -\sqrt{5} \end{aligned}\right. \\
\iff & \left[\begin{aligned} & x = \sqrt{5} - 1 \\ & x = -\sqrt{5} - 1 \end{aligned}\right. .
\end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\sqrt{5} - 1; -\sqrt{5} - 1\right\}$.

8. Phần này tác giả làm khác so với phần 2. Chuyển đổi toàn bộ phương trình về một vế để đưa về dạng

phương trình $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned}
&5x^2 - 20x + 20 = x^2 - 4 \\
\iff &4x^2 - 20x + 24 = 0 \\
\iff &4\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0 \\
\iff &4\left(x^2 - 2x - 3x + 6\right) = 0 \\
\iff &4\left(x(x-2) - 3(x-2)\right) = 0 \\
\iff &4(x-3)(x-2) = 0 \\
\iff &\left[\begin{aligned} x - 3 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{aligned}\right. \iff x \in \{3; 2\}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $\{3; 2\}$.

9. Nhân cả hai vế với 2 để khử phân số trong phương trình:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \\
\iff &kx^2 + mv^2 = kx_0^2. \qquad (0.2)
\end{aligned}$$

Xong, thực hiện chuyển vế để giữ thừa số chứa x^2 ở một bên, phương trình 0.2 tương đương với

$$\begin{aligned}
(0.2) \iff &kx^2 = kx_0^2 - mv^2 \\
\iff &x^2 = x_0^2 - \frac{mv^2}{k}.
\end{aligned}$$

Với trường hợp $x_0^2 - \frac{mv^2}{k} < 0$ thì phương trình vô nghiệm do x^2 không thể âm. Trong trường hợp còn lại, lấy căn bậc hai hai vế để có

$$x \in \left\{\sqrt{x_0^2 - \frac{mv^2}{k}}; -\sqrt{x_0^2 - \frac{mv^2}{k}}\right\}.$$

Tại giá trị đặc biệt mà khi $x_0^2 = \frac{mv^2}{k}$ thì tập nghiệm suy biến thành $\{0\}$.

Vậy, phương trình có nghiệm là

$$\begin{cases} \left\{\sqrt{x_0^2 - \frac{mv^2}{k}}; -\sqrt{x_0^2 - \frac{mv^2}{k}}\right\} & \text{nếu } x_0^2 - \frac{mv^2}{k} \geq 0 \\ \emptyset & \text{nếu } x_0^2 - \frac{mv^2}{k} < 0 \end{cases}.$$

10. Phân tích thừa số với để ý rằng 1, $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$ là nghiệm:

$$\begin{aligned}
&x^3 - \frac{11}{6} \cdot x^2 + x - \frac{1}{6} = 0 \\
\iff &x^3 - x^2 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} = 0 \\
\iff &x^2(x-1) - \frac{5}{6}x(x-1) + \frac{1}{6}(x-1) = 0 \\
\iff &(x-1)\left(x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6}\right) = 0 \\
\iff &(x-1)\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right) = 0 \\
\iff &(x-1)\left(x\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) = 0 \\
\iff &(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0
\end{aligned}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x-\dfrac{1}{2}=0 \\ x-\dfrac{1}{3}=0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right. .$$

Cuối cùng, như chúng ta đã dự đoán, phương trình có nghiệm là $\left\{1;\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right\}$.

11. Có một cách là chuyển phương trình về một vế rồi nhẩm nghiệm. Dưới đây, tác giả sẽ trình bày một góc nhìn khác để giải bài toán này.

$$\begin{aligned} 2x^3-2x^2+2x-2&=6+6x^2 \\ \iff \left(2x^3+2x\right)-\left(2x^2+2\right)&=6x^2+6 \\ \iff 2x\left(x^2+1\right)-2\left(x^2+1\right)&=6\left(x^2+1\right) \\ \iff (2x-2)\left(x^2+1\right)&=6\left(x^2+1\right). \end{aligned} \tag{0.3}$$

Để ý rằng, do $x^2 \geq 0$ nên $x^2+1 \geq 1 > 0$. Chúng ta đã chỉ ra rằng $x^2+1 \neq 0$, và qua đó, chúng ta có thể an toàn chia hai vế của 0.3 cho x^2+1 để có:

$$\begin{aligned} 2x-2&=6 \\ \iff x&=4. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có nghiệm là $\{4\}$.

12. Dễ dàng thấy được có thể phân tích thừa số của đa thức được cho như sau:

$$\begin{aligned} x^4+2x^3-x^2-2x&=0 \\ \iff x(x^3+2x^2-x-2)&=0 \\ \iff x(x+2)(x^2-1)&=0 \\ \iff x(x+2)(x-1)(x+1)&=0. \end{aligned}$$

Chia làm 4 trường hợp: $\left[\begin{array}{r} x=0 \\ x+2=0 \\ x-1=0 \\ x+1=0 \end{array}\right.$ và giải từng trường hợp một để có $x \in \{0;-2;1;-1\}$.

Vậy phương trình có bộ nghiệm là $\{0;-2;1;-1\}$.

13. Đặt 付 $= x^2$ để đưa từ đa thức bậc bốn về đa thức bậc hai như sau:

$$\begin{aligned} -x^4-3x^2&=-5 \\ \iff -\text{付}^2-3\text{付}&=-5 \\ \iff \text{付}^2+3\text{付}-5&=0. \end{aligned}$$

Giải phương trình bậc hai này bằng công thức nghiệm, chúng ta có:

$$\left[\begin{array}{l} \text{付}=\dfrac{-3+\sqrt{3^2-4\cdot(-5)}}{2}=\dfrac{-3+\sqrt{29}}{2} \\ \text{付}=\dfrac{-3-\sqrt{3^2-4\cdot(-5)}}{2}=\dfrac{-3-\sqrt{29}}{2} \end{array}\right. .$$

Tuy nhiên, do 付 $= x^2 \geq 0$ nên 付 chỉ có thể nhận giá trị $\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$, và qua đó $x^2=\frac{-3+\sqrt{29}}{2}$. Vậy phương trình có nghiệm là $x \in \left\{\sqrt{\frac{-3+\sqrt{29}}{2}};-\sqrt{\frac{-3+\sqrt{29}}{2}}\right\}$.

14. Bài tập này dành cho những bạn chuyên toán thuần hơn là về ứng dụng. Nhận thấy rằng $x=0$ không là nghiệm của phương trình. Chia cả hai vế của phương trình cho $x^2 \neq 0$ để có

$$x^2+\frac{1}{x^2}=3x+1+\frac{3}{x}. \tag{0.4}$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$, bình phương hai vế để có $y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ hay $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Thay vào 0.4, chúng ta có:

$$\begin{aligned} y^2 - 2 &= 3y + 1 \\ \iff y^2 - 3y - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Giải phương trình này bằng công thức nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3 + \sqrt{3^2 - 4\cdot(-3)}}{2} = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2} \\ y = \dfrac{3 - \sqrt{3^2 - 4\cdot(-3)}}{2} = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2} \end{array}\right. . \tag{0.5}$$

Giải phương trình $x + \frac{1}{x} = y$. Nếu chúng ta nhân cả tử và mẫu với x, chúng ta sẽ có phương trình với đa thức bậc hai theo ẩn x:

$$x^2 - yx + 1 = 0.$$

Cũng dùng công thức nghiệm để giải phương trình này để được:

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2} \\ x = \dfrac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \end{array}\right. .$$

Do $x \in \mathbb{R}$ nên giá trị trong dấu khai căn $y^2 - 4$ phải không nhỏ hơn 0. Kiểm tra hai giá trị y tìm được từ 0.5, chúng ta thấy $y = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$ thỏa mãn điều kiện này. Thay thế trực tiếp để tìm được tập nghiệm của phương trình. Cuối cùng, chúng ta có được $x \in \left\{\dfrac{3+\sqrt{21}+\sqrt{14+6\sqrt{21}}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{21}-\sqrt{14+6\sqrt{21}}}{2}\right\}$.

Bài 10: Giải các bất phương trình sau. Các bất phương trình đều có ẩn là $x \in \mathbb{R}$.

1. $4x + 7 < 0$;
2. $-8x - 16 > 0$;
3. $x - 2 \geq -2x + 5$;
4. $x^2 + 6x + 10 \leq 0$;
5. $x^2 - 11x + 30 > 0$;
6. $-3x^2 + 15x - 12 > -2x^2 + 10x - 12$;
7. $-x^4 + 18x^2 - 77 \geq 0$;
8. $x^7 \geq x$.

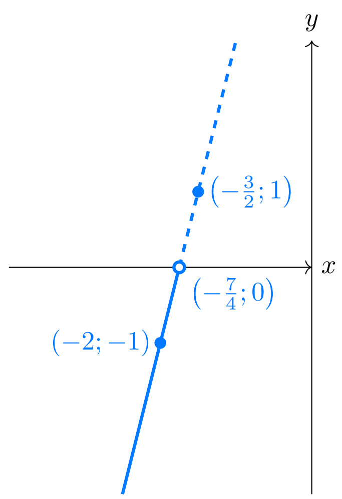
Lời giải bài 10:

1.

$$\begin{aligned} 4x + 7 &< 0 \\ \iff 4x &< -7 \\ \iff x &< -\frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty; -\dfrac{7}{4}\right)$.

Để kiểm chứng lại kết quả, chúng ta sẽ sử dụng đồ thị của hàm số $f(x) = 4x + 7$ và kiểm tra xem những điểm nào trên đồ thị có giá trị nhỏ hơn 0 như hình 0.44. Chúng ta không nhận giá trị tại nút nên tại điểm giao với trục hoành, chúng ta vẽ đường tròn rỗng thay vì hình tròn.

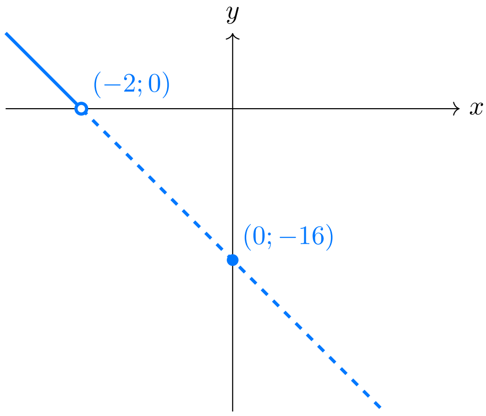


Hình 0.44: Đồ thị biểu diễn $4x+7$ và khoảng nhỏ hơn 0

2.

$$\begin{aligned} & -8x - 16 > 0 \\ \iff & -8x > 16 \\ \iff & x < -2. \quad \text{(Chia cho số âm thì đổi dấu bất phương trình.)} \end{aligned}$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -2)$.

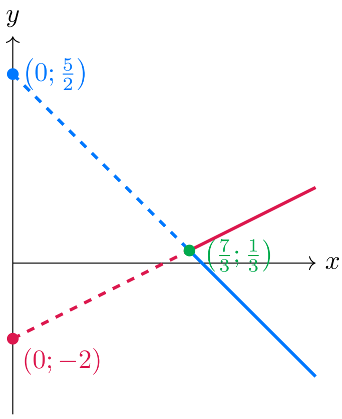


Hình 0.45: Đồ thị biểu diễn $-8x - 16$ và khoảng lớn hơn 0

3.

$$\begin{aligned} & x - 2 \geq -2x + 5 \\ \iff & x + 2x \geq 5 + 2 \\ \iff & 3x \geq 7 \\ \iff & x \geq \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $\left[\frac{7}{3}; \infty\right)$.



Hình 0.46: Đồ thị của $x - 2 \geq -2x + 5$

4. Để ý rằng $x^2+6x+10 = \left(x^2 + 6x + 9\right)+1 = (x+3)^2+1 \implies x^2+6x+10 \geq 1$. Do đó, $x^2+6x+10 \leq 0$ không có nghiệm.

5.

$$\begin{aligned} & x^2 - 11x + 30 > 0 \\ \iff & (x - 5)(x - 6) > 0. \quad \text{(Phân tích đa thức thành nhân tử.)} \end{aligned} \tag{0.6}$$

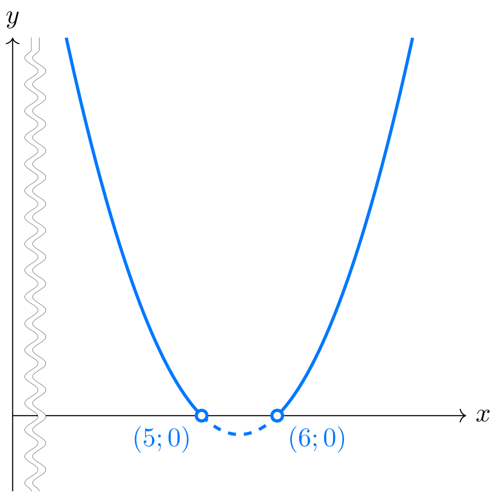
Do 0.6, nên nghiệm của $(x-5)(x-6) = 0$ hay $x \in \{5; 6\}$ không là nghiệm của 0.6.

Với $5 < x < 6$, $\begin{cases} x - 5 > 0 \\ x - 6 < 0 \end{cases}$ cho nên $(x-5)(x-6) < 0$. Trường hợp này không thỏa mãn 0.6.

Với $x < 5$, $\begin{cases} x - 5 < 0 \\ x - 6 < 0 \end{cases}$ cho nên $(x - 5)(x - 6) > 0$ (Tích hai số âm là một số dương.) thỏa mãn (0.6).

Với $x > 6$, $\begin{cases} x - 5 > 0 \\ x - 6 > 0 \end{cases} \implies (x - 5)(x - 6) > 0$ thỏa mãn (0.6).

Vậy tập nghiệm của bất phương trình này là $(-\infty; 5) \cup (6; \infty)$.



Hình 0.47: Đồ thị của $x^2 - 11x + 30 > 0$

Khi bạn đọc đã quen xét trường hợp thì có thể viết ngắn gọn lại dưới dạng bảng xét dấu như bảng 0.6.

x	$-\infty$		5		6		∞
$x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-6$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-5)(x-6)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bảng 0.6: Bảng xét dấu cho $(x-5)(x-6)$

6.

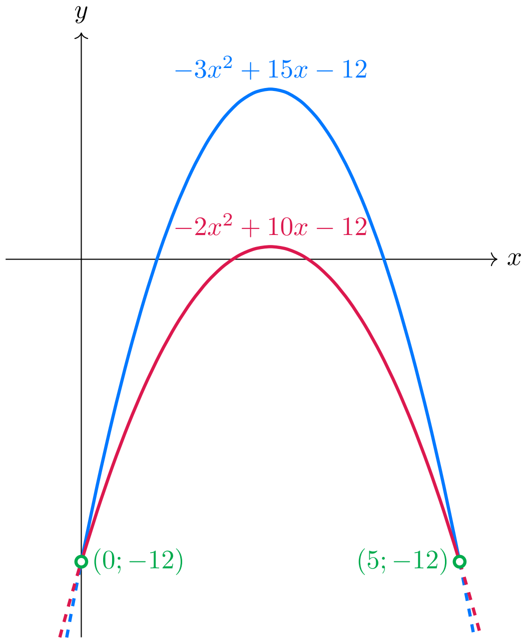
$$
\begin{aligned}
& -3x^2+15x-12 > -2x^2+10x-12 \\
\iff & -3x^2+2x^2+15x-10x > -12+12 \\
\iff & -x^2+5x > 0 \\
\iff & x\left(-x+5\right) > 0 \\
\iff & x\left(x-5\right) < 0. \qquad (0.7)
\end{aligned}
$$

Kẻ bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		5		∞
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hình 0.48: Bảng xét dấu cho $x(x-5)$

Vậy nghiệm của 0.7 là $x \in (0;5)$.



Hình 0.49: Đồ thị của $-3x^2+15x-12 > -2x^2+10x-12$

7. Có thể coi đa thức bậc 4 này là một đa thức bậc 2 với ẩn là x^2. Thực hiện phân tích nhân tử để có

$$
\begin{aligned}
& -x^4+18x^2-77 \geq 0 \\
\iff & x^4-18x^2+77 \leq 0 \qquad \text{(Nhân -1 ở cả hai vế.)} \\
\iff & \left(x^2-7\right)\left(x^2-11\right) \leq 0 \\
\iff & \left(x-\sqrt{7}\right)\left(x+\sqrt{7}\right)\left(x-\sqrt{11}\right)\left(x+\sqrt{11}\right) \leq 0.
\end{aligned}
$$

Kẻ bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\sqrt{11}$		$-\sqrt{7}$		$\sqrt{7}$		$\sqrt{11}$		$+\infty$
$x-\sqrt{7}$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+\sqrt{7}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-\sqrt{11}$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\sqrt{11}$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
x^4-18x^2+77		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hình 0.50: Bảng xét dấu cho x^4-18x^2+77

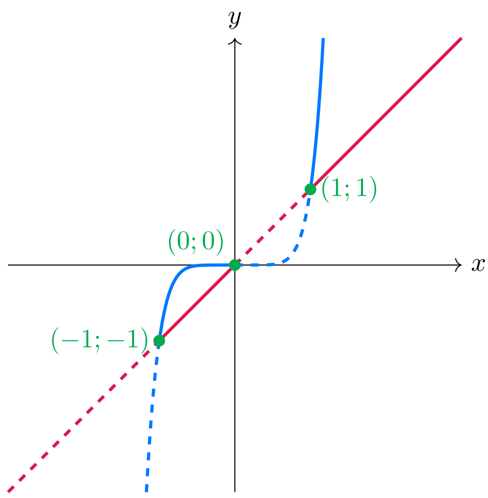
Từ bảng, chúng ta có tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-\sqrt{11};-\sqrt{7}\right] \cup \left[\sqrt{7};\sqrt{11}\right]$.

8.

$$\begin{aligned} & x^7 \geq x \\ \iff & x^7 - x \geq 0 \\ \iff & x(x^6 - 1) \geq 0 \\ \iff & x(x^3 - 1)(x^3 + 1) \geq 0 \\ \iff & x(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2+x+1) \geq 0. \quad (0.8) \end{aligned}$$

Cần phải để ý rằng $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ và $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ đều là hai số dương. Chia cả hai vế của 0.8 cho hai số dương, chúng ta có:

$$(0.8) \iff x(x-1)(x+1) \geq 0. \quad (0.9)$$



Hình 0.51: Đồ thị của $x^7 \geq x$

Kẻ bảng xét dấu cho 0.9:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x(x-1)(x+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$.

Bài 11: Xác định tập giá trị của những hàm sau:

1. $f(x) = 0$;
2. $f(x) = 10x - 20$;
3. $f(x) = x^2 + 2x + 3$;
4. $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$.

Lời giải bài 11:

1. Theo định nghĩa, do hàm chỉ trả về kết quả là 0 nên tập giá trị của f là $\{0\}$.

2. Nhận thấy mọi giá trị $y \in \mathbb{R}$ đều có thể là kết quả của f do:

$$f\left(\frac{y}{10} + 2\right) = 10\left(\frac{y}{10} + 2\right) - 20 = y.$$

Vậy tập giá trị của f là $\mathbb{R}$.

3. Theo đồ thị 0.37, chúng ta thấy được f nhận mọi giá trị trong khoảng $[2; \infty)$. Về mặt đại số, biến đổi f để có:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2.$$

Điều này khẳng định là nếu $y = f(x)$ thì $y \geq 2$. Tuy nhiên, nó chưa khẳng định là $y \geq 2$ là đủ để có x thỏa mãn $y = f(x)$. Để làm được điều này, chúng ta phải viết phương trình $y = f(x)$ và tìm một x là nghiệm của phương trình đó. Với $y \geq 2$, chúng ta đặt $x = -1 + \sqrt{y-2}$ và thực hiện tính $f(x)$:

$$\begin{aligned} f\left(-1 + \sqrt{y-2}\right) &= \left(-1 + \sqrt{y-2}\right)^2 + 2\left(-1 + \sqrt{y-2}\right) + 3 \\ &= \left(1 - 2\sqrt{y-2} + y - 2\right) + \left(-2 + 2\sqrt{y-2}\right) + 3 \\ &= y. \end{aligned}$$

Qua đó, chúng ta kết luận với $y \geq 2$ thì tồn tại x để $y = f(x)$.

Vậy tập giá trị của f là $[2; \infty)$.

4. Bình phương của một số thì luôn không âm. Cho nên $x^2 \geq 0$ và $x^4 = x^2 \times x^2$ là tích của hai số không âm thì là một số không âm. Do đó $x^4 + 2x^2 + 3 \geq 3$.

Ngược lại, mọi số thực y từ 3 trở lên đều có thể có một giá trị x sao cho $x^4 + 2x^2 + 3 = y$. Do $y \geq 3$ nên

$$\begin{aligned} & y - 2 \geq 1 \\ \iff & \sqrt{y-2} \geq 1 \\ \iff & \sqrt{y-2} - 1 \geq 0. \end{aligned}$$

Qua đó, chúng ta có thể lấy khai căn và đặt $x = \sqrt{\sqrt{y-2}-1}$. Khi này, thực hiện tương tự như đã làm ở phần 3 để có $f(x) = y$. Vậy tập giá trị của f là $[3; \infty)$.

0.2.4 Phép tính đại số trên hàm

Giống như khi chúng ta làm những phép cộng, trừ, nhân, chia với số, chúng ta cũng có thể thực hiện các phép tính đại số đó lên hàm số thực. Với kí hiệu tương tự, nếu có hai hàm f và g thì định nghĩa các **hàm tổng $\boldsymbol{f+g}$, hàm hiệu $\boldsymbol{f-g}$, hàm tích $\boldsymbol{f\cdot g}$**[9], **hàm thương $\boldsymbol{\frac{f}{g}}$** như sau:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{(f+g)(x)} &= \boldsymbol{f(x)+g(x)};\\
\boldsymbol{(f-g)(x)} &= \boldsymbol{f(x)-g(x)};\\
\boldsymbol{(f\cdot g)(x)} &= \boldsymbol{f(x)\cdot g(x)};\\
\boldsymbol{\left(\frac{f}{g}\right)(x)} &= \boldsymbol{\frac{f(x)}{g(x)}} \textbf{ với } \boldsymbol{g(x)\neq 0}.
\end{aligned}$$

Khi này, tập xác định của hàm mới sẽ là tập hợp các giá trị x thuộc tập xác định của cả f và g. Trong trường hợp $\frac{f}{g}$, cần loại bỏ các giá trị x khiến cho $g(x) = 0$.

Bài 12: Xác định tập xác định và tập giá trị của hàm $卌$ nếu biết

1. $f(x) = 4-7x$, $g(x) = 2x-5$ và $卌(x) = (f+g)(x)$ với mọi x thực;
2. | x | -2 | 0 | 1 | 2 |
   |---|---|---|---|---|
   | $f(x)$ | 9 | 1 | -5 | -4 |
   | $h(x)$ | 7 | 7 | 0 | 3 |

   và $卌(x) = (f-h)(x)$. f và h chỉ nhận các giá trị ở trong bảng.
3. $f(x) = 4-7x$, $g(x) = 2x-5$ và $卌(x) = (f\cdot g)(x)$ với mọi x thực;
4. | x | -2 | 0 | 1 | 2 |
   |---|---|---|---|---|
   | $f(x)$ | 9 | 1 | -5 | -4 |
   | $h(x)$ | 7 | 7 | 0 | 3 |

   và $卌(x) = \left(\frac{f}{h}\right)(x)$. f và h chỉ nhận các giá trị ở trong bảng.

Lời giải bài 12:

1.
$$卌(x) = (f+g)(x) = f(x)+g(x) = (4-7x)+(2x-5) = -5x-1.$$

Do $f(x)$ và $g(x)$ đều có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên tập xác định của $卌(x)$ cũng là $\mathbb{R}$. Để ý rằng, mọi $y \in \mathbb{R}$ đều có thể là giá trị của $卌(x)$ do

$$卌\left(\frac{y+1}{-5}\right) = -5\left(\frac{y+1}{-5}\right) - 1 = y+1-1 = y.$$

Qua đó, tập giá trị của $卌(x)$ là $\mathbb{R}$.

2. Kẻ bảng kết hợp với hàm $卌$, chúng ta có:

x	-2	0	1	2
$f(x)$	9	1	-5	-4
$h(x)$	7	7	0	3
$卌(x) = (f-h)(x) = f(x)-h(x)$	2	-6	-5	-7

Bảng 0.7: Bảng kết hợp với hàm $卌 = (f-h)(x)$ của phần 2

Để ý rằng do $f(x)$ và $g(x)$ đều chỉ nhận đầu vào là $\{-2; 0; 1; 2\}$ nên tập xác định của $卌(x)$ cũng là $\{-2; 0; 1; 2\}$. Ngoài ra, theo bảng 0.7, tập giá trị của $卌(x)$ là $\{-6; -5; -7; 2\}$.

3.
$$卌(x) = (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = (4-7x)\cdot(2x-5) = -14x^2+37x-20.$$

Do $f(x)$ và $g(x)$ đều có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên tập xác định của $卌(x)$ cũng là $\mathbb{R}$.

[9]Hạn chế viết hàm tích dưới dạng "fg" do có khả năng nhầm lẫn với hàm có tên là "fg". Trong tương lai, hàm có thể có nhiều kí tự trong tên như hàm cos hay hàm tan.

Mặt khác, chúng ta có:

$$\begin{aligned}
\text{世}(x) &= -14x^2 + 37x - 20 \\
&= -14\left(x^2 - \frac{37}{14}x\right) - 20 \\
&= -14\left(x^2 - \frac{37}{14}x + \left(\frac{37}{28}\right)^2 - \left(\frac{37}{28}\right)^2\right) - 20 \\
&= -14\left(x - \frac{37}{28}\right)^2 + \frac{249}{56}.
\end{aligned}$$

Suy ra, $\text{世}(x) \geq \frac{249}{56}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ngược lại, với mọi $y \geq \frac{249}{56}$, tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho $\text{世}(x) = y$ với ví dụ là $x = \dfrac{\sqrt{249 - 56y} + 37}{28}$. Vậy, tập giá trị của $\text{世}(x)$ là $\left[\frac{249}{56}; +\infty\right)$.

4. Kẻ bảng kết hợp với hàm 世, chúng ta có:

x	-2	0	1	2
$f(x)$	9	1	-5	-4
$h(x)$	7	7	0	3
$\text{世}(x) = \left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{1}{7}$	Không xác định	$-\frac{4}{3}$

Bảng 0.8: Bảng kết hợp với hàm $\text{世} = \left(\frac{f}{h}\right)(x)$ của phần 4

Khi xác định tập giá trị của $\text{世}(x)$ cần phải để ý điều kiện $h(x) \neq 0$. Qua bảng 0.8, ta thấy $h(x) = 0$ khi $x = 1$. Vậy, tập xác định của $\text{世}(x)$ là $\{-2; 0; 2\}$. Theo bảng, chúng ta cũng có tập giá trị của $\text{世}(x)$ được xác định là $\left\{\frac{9}{7}; \frac{1}{7}; -\frac{4}{3}\right\}$.

0.2.5 Hàm phân thức

Hàm cộng, hàm trừ và hàm nhân của hai hàm đa thức là những hàm đa thức. Tuy nhiên, hàm thương lại không như vậy. Do khi chia hai đa thức có những tính chất đặc biệt, nên chúng ta xây dựng một khái niệm mới là hàm **phân thức**. Một hàm f được gọi là phân thức nếu $\boldsymbol{f = 0}$, hoặc:

$$\boldsymbol{f = \left(\frac{p}{q}\right)}$$

với p và q là hai đa thức. Trong trường hợp $f \neq 0$, tập xác định của f là tập hợp các giá trị x sao cho $q(x) \neq 0$.

Khái niệm về phân thức dẫn chúng ta một cách tự nhiên đến khái niệm về một dạng phân thức đặc biệt mang tên **số mũ âm**. Khi mũ một số với số âm, chúng ta có thể viết lại là

$$\boldsymbol{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$$

với $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $n \in \mathbb{Z}^+$.

Bài 13: Cho biết tập xác định, tập giá trị và phác thảo đồ thị của những hàm sau:

1. $f(x) = \dfrac{2}{x}$;
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 4}$;
3. $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x - 3}$;
4. $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{x - 1}$;
5. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 + 4x - 5}$;
6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.
7. $f(x) = \dfrac{x + 1}{2x^2 + 5x - 3}$;
8. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 2}{x^2 + 2x + 1}$;
9. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 2}{x - 2}$;

Lời giải bài 13:

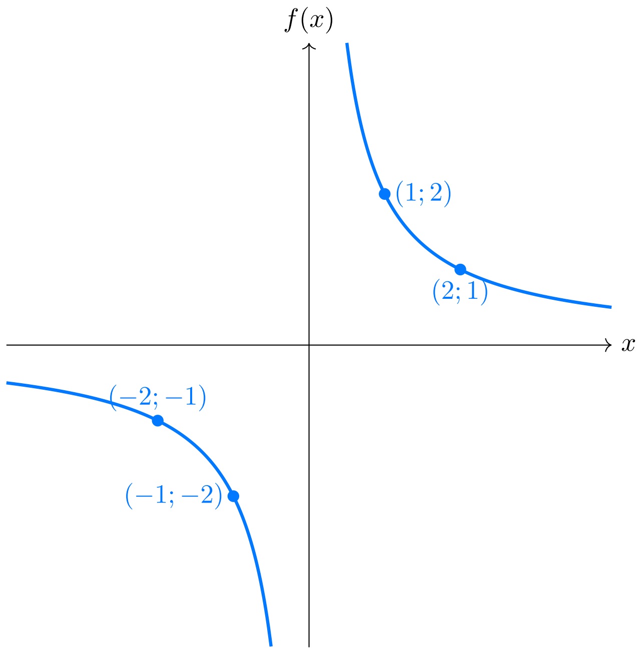
1. Theo định nghĩa hàm phân thức, tập xác định của hàm $f(x) = \frac{2}{x}$ là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Kết quả của $f(x)$ phải khác 0 do nếu như vậy thì $f(x) = \frac{2}{x} = 0 \implies 2 = 0 \times x = 0$, vô lí.

Tuy nhiên, mọi số y khác 0 đều có thể là giá trị của $f(x)$ do

$$f\left(\frac{2}{y}\right) = \frac{2}{\frac{2}{y}} = y.$$

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



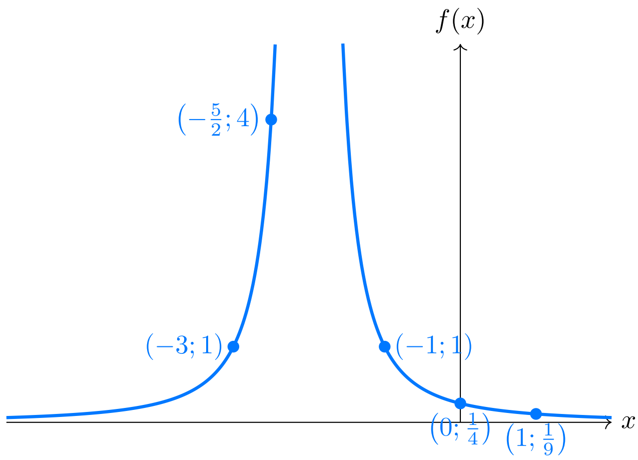
Hình 0.52: Đồ thị của hàm $f(x) = \frac{2}{x}$

2. Để phân thức có nghĩa thì mẫu số của phân thức phải khác 0. Viết và bất phương trình này:

$$\begin{aligned} & x^2 + 4x + 4 \neq 0 \\ \iff & (x+2)^2 \neq 0 \\ \iff & x + 2 \neq 0 \\ \iff & x \neq -2 \end{aligned}$$

Vậy tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Có mẫu số $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$, mà mẫu số phải khác 0 nên có $x^2 + 4x + 4 > 0$. Chia hai số dương luôn được số dương, cho nên $f(x)$ chỉ nhận giá trị dương.



Hình 0.53: Đồ thị của hàm $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+4}$

Ngược lại, mọi giá trị dương y đều có thể biểu diễn thông qua $f(x)$ do

$$\begin{aligned} f\left(-2 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) &= \frac{1}{\left(-2 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 + 4\left(-2 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) + 4} \\ &= \frac{1}{\left(\left(-2 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) + 2\right)^2} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y. \end{aligned}$$

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R}^+$.

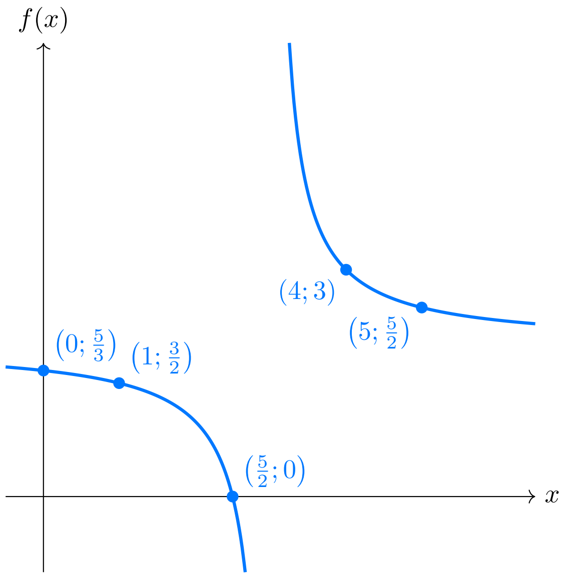
3. Để x thuộc tập xác định của hàm $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$ thì $x-3 \neq 0 \implies x \neq 3$. Vậy tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Giả sử có y sao cho $y = f(x)$. Khi này, chúng ta có

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x-5}{x-3} \\ \implies y(x-3) &= 2x-5 \\ \iff yx - 3y &= 2x-5 \\ \iff yx - 2x &= 3y-5 \\ \iff x(y-2) &= 3y-5. \end{aligned}$$

Nếu $y = 2$ thì chúng ta sẽ có $x(y-2) = 3y-5 \implies x(2-2) = 3\times 2 - 5 \implies 0 = 1$, vô lí.

Nếu $y \neq 2$ thì $x = \frac{3y-5}{y-2}$. Thay ngược lại giá trị x này:



Hình 0.54: Đồ thị của $f(x) = \frac{2x-5}{x-3}$

$$f\left(\frac{3y-5}{y-2}\right) = \frac{2\left(\frac{3y-5}{y-2}\right)-5}{\left(\frac{3y-5}{y-2}\right)-3} = \frac{\frac{6y-10-5y+10}{y-2}}{\frac{3y-5-3y+6}{y-2}} = \frac{\frac{y}{y-2}}{\frac{1}{y-2}} = y.$$

Qua lập luận vừa rồi, chúng ta có kết luận rằng tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

4. Giải tập xác định:

$$x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1.$$

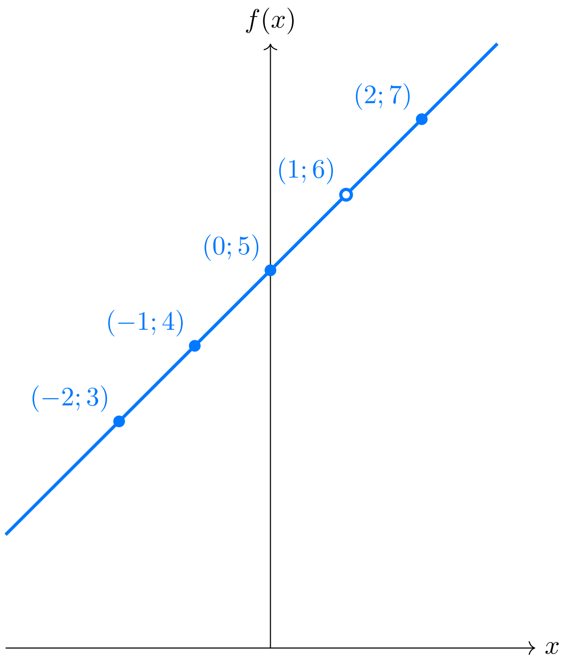
Qua đó, tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Đặt $y = f(x)$, với giả thiết $x \neq 1$ thì

$$y = \frac{x^2+4x-5}{x-1} = \frac{(x+5)(x-1)}{x-1} = x+5.$$

Nhận thấy rằng $y \neq 6$, do nếu ngược lại thì sẽ cần phải có $x = 1$, không thỏa mãn tập xác định của $f(x)$. Với mọi giá trị khác của y đều có thể là đầu ra, do hiển nhiên rằng $f(y-5) = y$ như biến đổi ở trên.

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{6\}$.

Tương tự khi giải bất phương trình, khi biểu diễn đồ thị có đứt đoạn, người ta thường vẽ đường tròn rỗng tại điểm bị đứt như đồ thị hình 0.55.



Hình 0.55: Đồ thị của $f(x) = \frac{x^2+4x-5}{x-1}$

5. Giải tập xác định, $f(x)$ xác định khi và chỉ khi

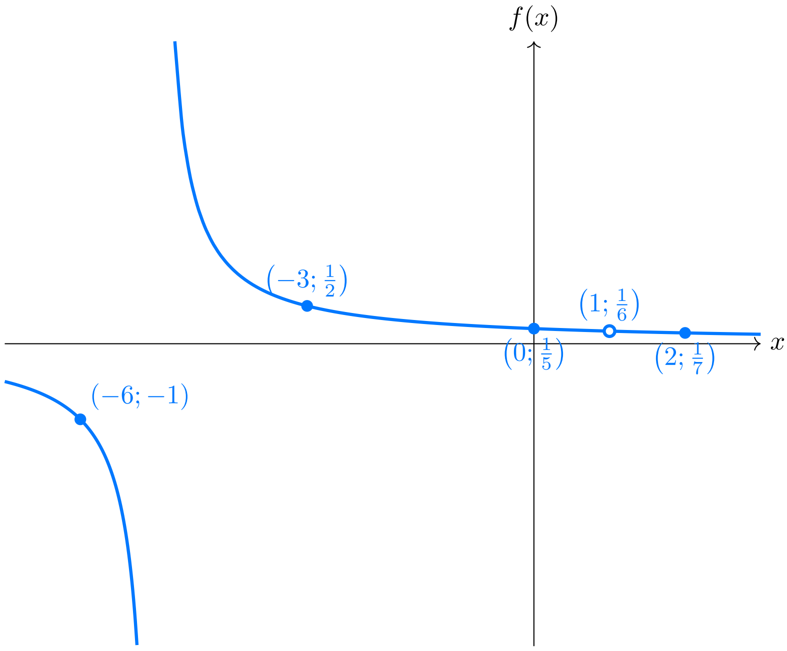
$$\begin{aligned} & x^2+4x-5 \neq 0 \\ \iff & (x+5)(x-1) \neq 0 \\ \iff & x \notin \{-5; 1\}. \end{aligned}$$

Tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{-5; 1\}$.

Đặt $y = f(x) = \frac{x-1}{x^2+4x-5} = \frac{x-1}{(x+5)(x-1)} = \frac{1}{x+5}$. Qua đó, y không thể bằng 0. Khi $y \neq 0$, biến đổi cho chúng ta được $x = \frac{1}{y} - 5$. Do điều kiện tập xác định lên x nên $y \neq \frac{1}{6}$.

Kiểm chứng đại số cơ bản cho chúng ta được nếu $y \notin \left\{0; \frac{1}{6}\right\}$ thì có thể đặt $x = \frac{1}{y} - 5$ để có $f(x) = y$.

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{6}\right\}$.



Hình 0.56: Đồ thị của $\frac{x-1}{x^2+4x-5}$

6. Để ý rằng $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ với mọi giá trị thực của x. Cho nên $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$ là hai số dương chia cho nhau luôn có nghĩa. Cho nên, tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R}$.

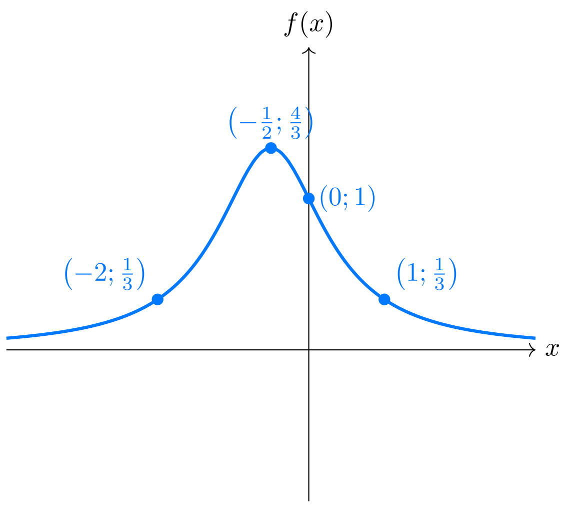
Cũng từ $x^2+x+1 \geq \frac{3}{4}$ mà chúng ta có $\frac{1}{x^2+x+1} \leq \frac{4}{3}$ (Cùng chia cả hai vế cho số dương $\frac{3(x^2+x+1)}{4}$).

Ngoài ra, do là phép chia hai số dương nên $\frac{1}{x^2+x+1} > 0$. Do đó, $0 < f(x) \leq \frac{4}{3}$.

Ngược lại, mọi $y \in \left(0; \frac{4}{3}\right]$ đều có thể biểu diễn thông qua $f(x)$, do

$$\begin{aligned}
f\left(\sqrt{\frac{4-3y}{4y}} - \frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{\left(\left(\sqrt{\frac{4-3y}{4y}} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{4-3y}{4y}}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{\frac{4-3y}{4y} + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{\frac{4-3y+3y}{4y}} \\
&= \frac{1}{\frac{4}{4y}} \\
&= y.
\end{aligned}$$

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\left(0; \frac{4}{3}\right]$.



Hình 0.57: Đồ thị của $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

7. Để $f(x)$ có nghĩa thì mẫu số phải khác 0. Có:

$$2x^2+5x-3\neq 0$$
$$\iff (2x-1)(x+3)\neq 0 \quad \text{(Phân tích đa thức thành nhân tử.)}$$
$$\iff x\notin\left\{\frac{1}{2};-3\right\}.$$

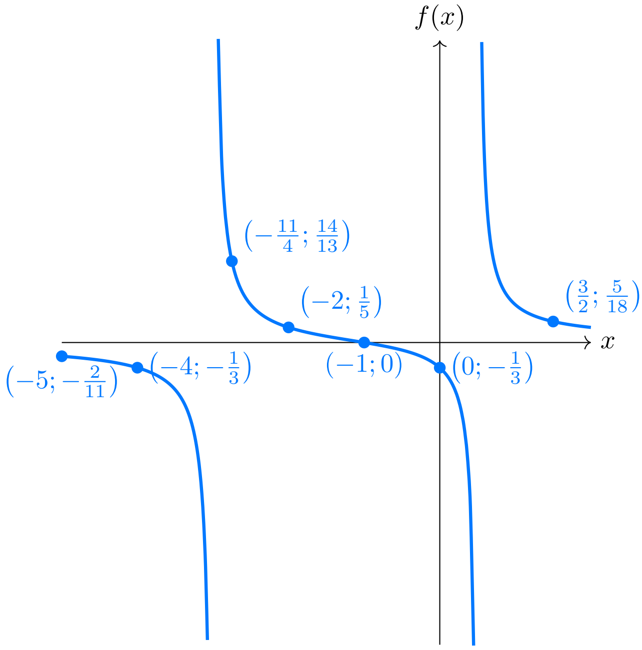
Qua đó, tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2};-3\right\}$.

Bây giờ, chúng ta cần tìm những giá trị y sao cho tồn tại x để $y=f(x)$. Với $y=0$ thì có $f(-1)=0$ từ đồ thị 0.58. Với $y\neq 0$, đặt

$$x=\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-5y+1}{4y}.$$

x luôn nhận giá trị thực do mẫu số khác 0 ($4y\neq 0$) và phần tử bên trong dấu khai căn $49y^2-2y+1=48y^2+y^2-2y+1=48y^2+(y-1)^2$ luôn không âm. Thay giá trị x này vào tử số của $f(x)$:

$$x+1=\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-5y+1}{4y}+1$$
$$=\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-y+1}{4y}.$$



Hình 0.58: Đồ thị của $f(x)=\frac{x+1}{2x^2+5x-3}$

Thay giá trị của y vào mẫu:

$$\begin{aligned}
2x^2+5x-3&=(x+3)(2x-1)\\
&=\left(\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-5y+1}{4y}+3\right)\left(2\cdot\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-5y+1}{4y}-1\right)\\
&=\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}+7y+1}{4y}\cdot\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-7y+1}{2y}\\
&=\frac{\left(\sqrt{49y^2-2y+1}+1\right)^2-(7y)^2}{8y^2}\\
&=\frac{49y^2-2y+1+2\sqrt{49y^2-2y+1}+1-49y^2}{8y^2}\\
&=\frac{2\sqrt{49y^2-2y+1}-2y+2}{8y^2}\\
&=\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-y+1}{4y^2}.
\end{aligned}$$

Mẫu số này khác 0 do nếu bằng 0 thì chúng ta sẽ có

$$\begin{aligned}
&\sqrt{49y^2-2y+1}-y+1=0\\
\iff&\sqrt{49y^2-2y+1}=y-1\\
\implies&49y^2-2y+1=(y-1)^2\\
\iff&49y^2-2y+1=y^2-2y+1\\
\iff&48y^2=0\\
\iff&y=0
\end{aligned}$$

mâu thuẫn với giả thiết $y\neq 0$. Lấy tử số chia cho mẫu số và khử bỏ thừa số chúng để có

$$f\left(\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-5y+1}{4y}\right)=\frac{\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-y+1}{4y}}{\frac{\sqrt{49y^2-2y+1}-y+1}{4y^2}}=y.$$

Chúng ta đã thể hiện rằng mọi số y đều có thể biểu diễn thông qua $f(x)$. Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\mathbb{R}$.
8. Giải tập xác định:

$$\begin{aligned} x^2+2x+1 &\neq 0 \\ \iff (x+1)^2 &\neq 0 \\ \iff x &\neq -1. \end{aligned}$$

Qua đó, chúng ta có tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
Giải tập giá trị sẽ khó hơn. Gọi $y \in \mathbb{R}$ và giả sử $y = f(x)$. Khi này,

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^2-3x-2}{x^2+2x+1} \\ \implies y(x^2+2x+1) &= x^2-3x-2 \\ \iff yx^2+2yx+y &= x^2-3x-2 \\ \iff (y-1)x^2+(2y+3)x+(y+2) &= 0. \end{aligned} \tag{0.10}$$

Nếu $y=1$ thì từ (0.10), $5x+3=0 \iff x=-\frac{3}{5}$. Vậy 1 có thể là kết quả của $f(x)$.

Trong trường hợp còn lại, coi (0.10) là phương trình bậc hai với x là nghiệm. Để tồn tại nghiệm thì $\Delta \geq 0$, với Δ là

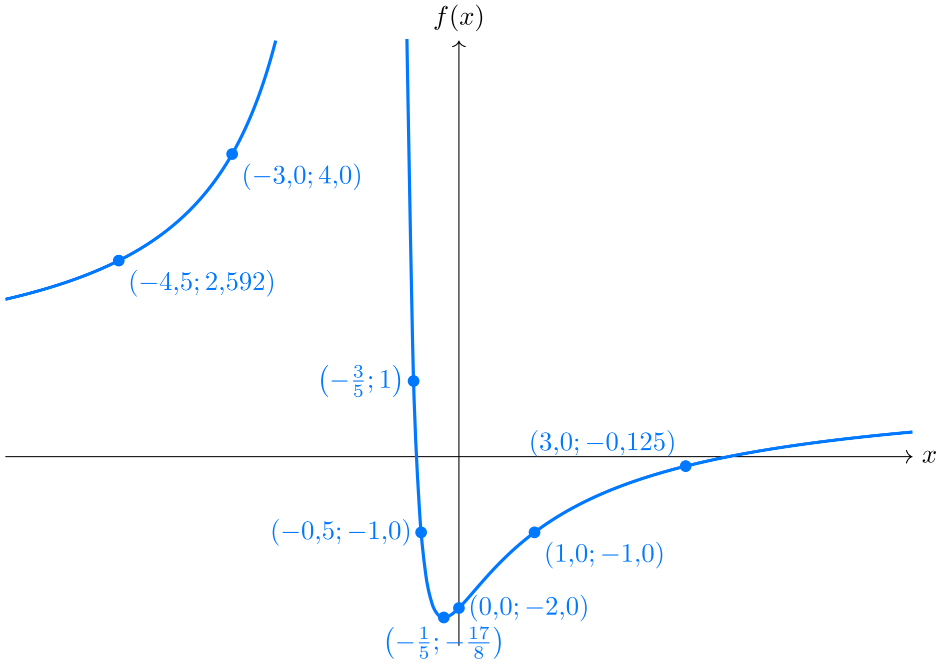
$$\begin{aligned} &= (2y+3)^2 - 4(y-1)(y+2) \\ &= 4y^2+12y+9-4(y^2+y-2) \\ &= 4y^2+12y+9-4y^2-4y+8 \\ &= 8y+17. \end{aligned}$$

Từ đó, để $\Delta \geq 0$ thì $8y+17 \geq 0 \iff y \geq -\frac{17}{8}$.

Kiểm tra ngược tập giá trị, chúng ta đã biết 1 thuộc tập giá trị này. Với mọi giá trị $y \geq -\frac{17}{8}$ khác 1, đặt $x = \frac{2y+3-\sqrt{8y+17}}{2(1-y)}$, khi này

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-3x-2}{x^2+2x+1} = \frac{x^2-3x-2}{x^2+2x+1} - y + y = \frac{x^2-3x-2-yx^2-2yx-y}{(x+1)^2} + y \\ &= \frac{(1-y)x^2-(2y+3)x-(2+y)}{(x+1)^2} + y = \frac{x^2-\left(\frac{2y+3}{1-y}\right)x - \frac{y+2}{1-y}}{(x+1)^2} + y \\ &= \frac{x^2 - 2\cdot x\cdot\left(\frac{2y+3}{2(1-y)}\right) + \left(\frac{2y+3}{2(1-y)}\right)^2 - \left(\frac{2y+3}{2(1-y)}\right)^2 - \frac{y+2}{1-y}}{(x+1)^2} + y \\ &= \frac{\left(x-\frac{2y+3}{2(1-y)}\right)^2 - \frac{8y+17}{4(1-y)^2}}{(x+1)^2} + y \\ &= \frac{\left(\frac{2y+3-\sqrt{8y+17}}{2(1-y)} - \frac{2y+3}{2(1-y)}\right)^2 - \frac{8y+17}{4(1-y)^2}}{(x+1)^2} + y \\ &= \frac{\left(\frac{-\sqrt{8y+17}}{2(1-y)}\right)^2 - \frac{8y+17}{4(1-y)^2}}{(x+1)^2} + y = \frac{\frac{8y+17}{4(1-y)^2} - \frac{8y+17}{4(1-y)^2}}{(x+1)^2} + y = y. \end{aligned}$$

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\left[-\frac{17}{8}; +\infty\right)$. Đồ thị của $f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x^2+2x+1}$ được thể hiện trong 0.59.



Hình 0.59: Đồ thị của $f(x) = \frac{x^2-3x-2}{x^2+2x+1}$

9.
Xét tập xác định của $f(x)$, cần phải có $x - 2 \neq 0 \iff x \neq 2$. Vậy tập xác định của $f(x)$ là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
Đặt $y = f(x)$, chúng ta có:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x^2+2}{x-2} \\ \iff y(x-2) &= 2x^2+2 \\ \iff yx - 2y &= 2x^2+2 \\ \iff 2x^2 - yx + 2y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Coi kết quả của biến đổi là phương trình bậc hai ẩn x. Để tồn tại x thì cần phải có

$$\begin{aligned} (-y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2y+2) &\geq 0 \\ \iff y^2 - 16y - 16 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kẻ bảng xét dấu của $g(y) = y^2 - 16y - 16$:

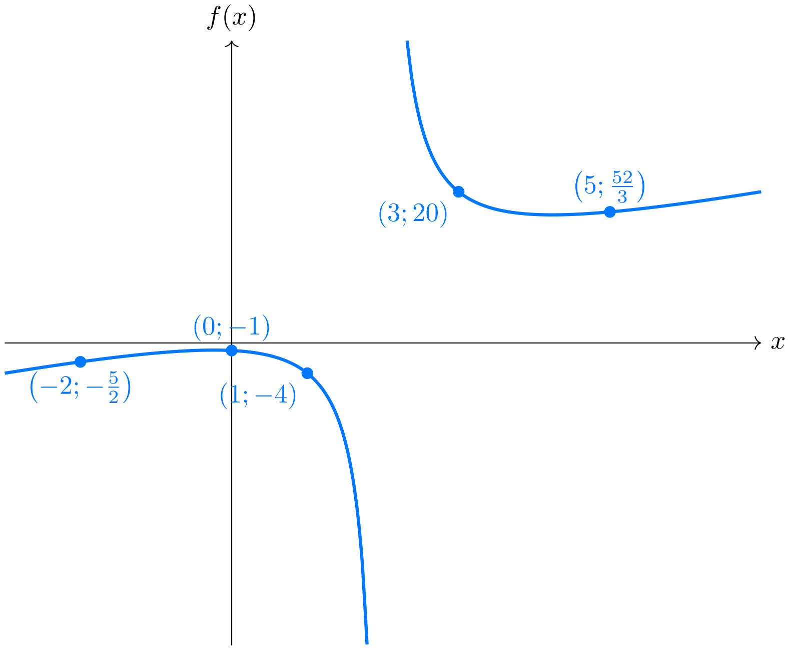
y	$-\infty$		$8-4\sqrt{5}$		$8+4\sqrt{5}$		$+\infty$
$y^2-16y-16$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bảng 0.9: Bảng xét dấu của $g(y) = y^2 - 16y - 16$

Qua bảng, chúng ta có điều kiện của y là $y \in \left(-\infty; 8-4\sqrt{5}\right] \cup \left[8+4\sqrt{5}; +\infty\right)$. Chúng ta cũng có thể kiểm chứng bằng biến đổi đại số rằng với y thuộc tập hợp này thì có $f\left(\frac{\sqrt{y^2-16y-16}+y}{4}\right) = y$.

Vậy tập giá trị của $f(x)$ là $\left(-\infty; 8-4\sqrt{5}\right] \cup \left[8+4\sqrt{5}; +\infty\right)$.

Do tính chất của đồ thị, trục tung của đồ thị trong lời giải của tác giả đã bị co lại 10 lần, thể hiện ở hình 0.60.



Hình 0.60: Đồ thị của $f(x) = \frac{2x^2+2}{x-2}$

Bài 14: Giải các phương trình sau với ẩn $x \in \mathbb{R}$.

1. $\dfrac{2x^2 - 5x + 2}{3x} = 0$;
2. $\dfrac{4x + 2}{x^2 + x - 2} = 1$;
3. $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \dfrac{1}{x-1}$;
4. $\dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{8}{x^2-4}$;
5. $A = \dfrac{h}{6x}\left(\dfrac{b_0}{x} + 4b_1 + b_2\right)$ với A, b_0, b_1, b_2, h là những tham số thực dương;
6. $\dfrac{3x}{x+2} - \dfrac{x}{x-2} = \dfrac{8}{4-x^2}$;
7. $\dfrac{24}{x+2} + \dfrac{24}{x^2 - 5x + 6} = x^2$.

Lời giải bài 14:

1. Không phải mọi giá trị của x sẽ làm cho biểu thức được cho ở mỗi vế có nghĩa. Để $\frac{2x^2-5x+2}{3x}$ có nghĩa thì $3x \neq 0 \iff x \neq 0$. Khi này:

$$\begin{aligned} &\frac{2x^2 - 5x + 2}{3x} = 0 \\ \implies\ & 2x^2 - 5x + 2 = 0 \\ \iff\ & (2x-1)(x-2) = 0 \end{aligned}$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} 2x - 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ x = 2 \end{array}\right. .$$

Kiểm tra trực tiếp, chúng ta thấy nghiệm thỏa mãn phương trình gốc. Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$.

2. Coi vế trái của phương trình được cho là một phân thức, chúng ta tìm tập xác định của nó:

$$\begin{aligned} & x^2 + x - 2 \neq 0 \\ \iff\ & (x+2)(x-1) \neq 0 \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2 \neq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq -2 \\ x \neq 1 \end{cases} .$$

Thực hiện biến đổi phương trình:

$$\begin{aligned}
&\frac{4x+2}{x^2+x-2} = 1\\
\implies & 4x+2 = x^2+x-2\\
\iff & 0 = x^2-3x-4\\
\iff & 0 = (x+1)(x-4)\\
\iff & x \in \{-1;4\}.
\end{aligned}$$

Cả hai giá trị đều là nghiệm của phương trình bằng kiểm tra trực tiếp. Vậy phương trình có nghiệm là $\{-1;4\}$.

3. Để cả vế trái và vế phải của phương trình xác định giá trị thì

$$\begin{cases} x^3+3x^2-x-3 \neq 0\\ x-1 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-1)(x+1)(x-3) \neq 0\\ x-1 \neq 0 \end{cases} \iff x \notin \{-1;1;3\}.$$

Biến đổi phương trình:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2+4x+3}{x^3+3x^2-x-3} = \frac{1}{x-1}\\
\iff & \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{1}{x-1}\\
\iff & \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}.
\end{aligned} \tag{0.11}$$

Phương trình (0.11) luôn đúng với x làm cho cả hai vế của phương trình xác định. Do đó, tập nghiệm của phương trình là $\mathbb{R} \setminus \{-1;1;3\}$.

4. Phương trình có tập xác định[10] là $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{3x}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}\\
\iff & \frac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{8}{(x-2)(x+2)}\\
\implies & \left(3x^2-6x\right) - \left(x^2+2x\right) = 8\\
\iff & 2x^2-8x-8 = 0\\
\iff & x \in \left\{2\left(1+\sqrt{2}\right); 2(1-\sqrt{2})\right\}.
\end{aligned}$$

Kiểm tra lại, chúng ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{3\cdot 2(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})+2} - \frac{2(1+\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})-2}\\
=&\frac{6+6\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}} - \frac{2+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\\
=&\frac{\left(6+6\sqrt{2}\right)2\sqrt{2} - \left(2+2\sqrt{2}\right)\left(4+2\sqrt{2}\right)}{\left(4+2\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{2}\right)}\\
=&\frac{12\sqrt{2}+24-\left(16+12\sqrt{2}\right)}{\left(2\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2-4}\\
=&\frac{8}{\left(2\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2-4}.
\end{aligned}$$

Tương tự khi kiểm tra $x = 2\left(1-\sqrt{2}\right)$. Vậy phương trình có nghiệm là $\left\{2\left(1+\sqrt{2}\right); 2\left(1-\sqrt{2}\right)\right\}$.

5. Phương trình xác định khi $x \neq 0$. Trên điều kiện này,

[10] Tập xác định chỉ có với hàm số. Ở đây, ý chúng ta muốn là những giá trị để cho cả hai vế có thể tính được.

$$\begin{aligned} A &= \frac{h}{6x}\left(\frac{b_0}{x} + 4b_1 + b_2\right) \\ &= \frac{hb_0}{6x^2} + \frac{h\left(4b_1 + b_2\right)}{6x} \\ \iff 6x^2 A &= hb_0 + h\left(4b_1 + b_2\right)x \\ \iff 6A\cdot x^2 - h\left(4b_1+b_2\right)x - hb_0 = 0. \end{aligned} \tag{0.12}$$

Nhận thấy rằng nếu (0.12) có nghiệm thì nghiệm này phải khác 0. Trái lại, nếu 0 là nghiệm thì sẽ phải có $hb_0 = 0$. Nhưng từ giả thiết b_0 và h đều dương, $hb_0 > 0$. Chúng ta cần phải có nhận định này để không cần phải kiểm tra lại điều kiện tập xác định khi giải ra nghiệm.

Xét biệt thức $\Delta = h^2(4b_1 + b_2)^2 + 24A \cdot hb_0$ của phương trình (0.12). Có các tham số đều là các giá trị dương nên Δ cũng là một giá trị dương. Cho nên, từ (0.12), chúng ta giải ra hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{h(4b_1+b_2)+\sqrt{\Delta}}{12A} \\ x = \frac{h(4b_1+b_2)-\sqrt{\Delta}}{12A} \end{array}\right. .$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{h(4b_1+b_2)+\sqrt{\Delta}}{12A}; \frac{h(4b_1+b_2)-\sqrt{\Delta}}{12A}\right\}$.

6. Phương trình có tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$. Trong tập xác định này,

$$\begin{aligned} &\frac{3x}{x+2} - \frac{x}{x-2} = \frac{8}{4-x^2} \\ \iff &\frac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{x(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{8}{(x-2)(x+2)} = 0 \\ \iff &\frac{3x^2 - 6x - x^2 - 2x + 8}{(x+2)(x-2)} = 0 \\ \iff &\frac{2x^2 - 8x + 8}{(x+2)(x-2)} = 0 \\ \iff &2x^2 - 8x + 8 = 0 \\ \iff &x^2 - 4x + 4 = 0 \\ \iff &(x-2)^2 = 0 \\ \iff &x = 2. \end{aligned}$$

Tuy nhiên, tập xác định yêu cầu không nhận giá trị x này, cho nên phương trình này suy ra một điều mâu thuẫn. Vậy phương trình vô nghiệm.

7. Giải tập xác định của phương trình:

$$\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x^2 - 5x + 6 \neq 0 \end{cases} \iff x \notin \{-2;2;3\}.$$

Giải phương trình:

$$\begin{aligned} &\frac{24}{x+2} + \frac{24}{x^2-5x+6} = x^2 \\ \iff &\frac{24}{x+2} + \frac{24}{(x-2)(x-3)} - x^2 = 0 \\ \implies &24(x-2)(x-3) + 24(x+2) - x^2(x-2)(x-3)(x+2) = 0 \quad \text{Nhân cả hai vế với } (x+2)(x-2)(x-3). \\ \iff &\left(24x^2 - 120x + 144\right) + (24x+48) - \left(x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 12x^2\right) = 0 \\ \iff &-x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 96x + 144 = 0 \\ \iff &(4-x)\left(x^4 + x^3 - 12x + 48\right) = 0 \end{aligned} \tag{0.13}$$

Nhìn thấy ngay được, phương trình (0.13) có nghiệm $x = 4$. Xét trường hợp còn lại, đặt $f(x) = x^4 + x^3 - 12x + 48 = x(x-2)\left(x^2+3x+6\right) + 48$. Chúng ta sẽ chứng minh $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Chia làm hai trường hợp:

Trường hợp 1 ($0 \leq x \leq 2$): Chúng ta sẽ chặn giá trị của những thành phần sau:

- $x(x-2)$:

$$\begin{aligned} x(x-2) &= x^2 - 2x \\ &= (x-1)^2 - 1 \\ \Longrightarrow \quad x(x-2) &\geq -1. \end{aligned} \tag{0.14}$$

- $x^2 + 3x + 6$:

$$\begin{aligned} x^2 + 3x + 6 &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} \\ \Longrightarrow \quad x^2 + 3x + 6 &\geq \frac{15}{4} > 0. \end{aligned}$$

Ngoài ra, theo giả thiết $0 \leq x \leq 2$,

$$\begin{cases} x^2 \leq 4 \\ 3x \leq 6 \end{cases} \quad \Longrightarrow \; x^2 + 3x + 6 \leq 16 \; \Longleftrightarrow \; -\left(x^2 + 3x + 6\right) \geq -16. \tag{0.15}$$

Kết hợp giữa (0.14) và (0.15) chúng ta có:

$$\begin{aligned} & x(x-2) \geq -1 && \text{(Từ bất phương trình (0.14).)} \\ \Longleftrightarrow \quad & x(x-2)\left(x^2+3x+6\right) \geq -\left(x^2+3x+6\right) && \text{(Nhân cả hai vế với một số dương.)} \\ \Longleftrightarrow \quad & x(x-2)\left(x^2+3x+6\right) \geq -16 && \text{(Từ bất phương trình ở (0.15).)} \\ \Longleftrightarrow \quad & x(x-2)\left(x^2+3x+6\right) + 48 \geq 32 \\ \Longrightarrow \quad & x^4 + x^3 - 12x + 48 > 0. \end{aligned}$$

Qua đó, chúng ta có được $f(x) = 0$ không có nghiệm trong đoạn $[0; 2]$.

Trường hợp 2 ($x < 0$ hoặc $x > 2$): Dễ dàng nhận thấy x và $x - 2$ cùng dấu cho nên $x(x-2) > 0$. Ngoài ra, đã có $x^2 + 3x + 6 > 0$ cho nên $x(x-2)\left(x^2+3x+6\right) > 0$. Suy ra, $f(x) > 0$ với mọi $x \in)0; 2($.

Kết hợp cả hai trường hợp, chúng ta có $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ như cần phải chứng minh.

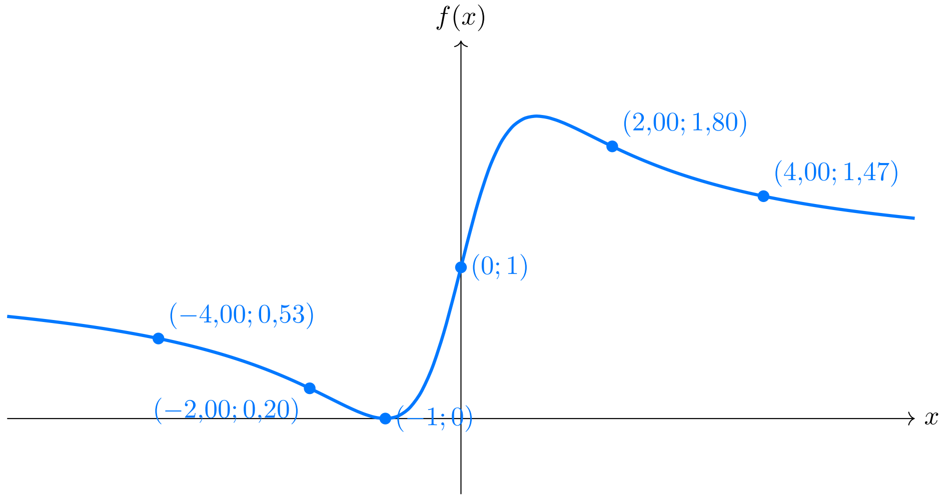
Do đó, (0.13) $\iff x = 4$. Kiểm tra trực tiếp chúng ta thấy nghiệm này thỏa mãn. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 4$.

Bài 15: Phác thảo đồ thị của những hàm sau:

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} + 1$;
2. $f(x) = \dfrac{x^4+1}{3x^2} - x$;
3. $f(x) = \dfrac{15x^3 + x^2 - 22x - 8}{3x^2 + 3x + 8}$;
4. $f(x) = \dfrac{x}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$;
5. $f(x) = \dfrac{x+2}{x} \cdot \dfrac{x+3}{x+1}$;
6. $f(x) = \dfrac{\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^4+4}}{\frac{2x^2+2}{3x^2+6x+6}}$.

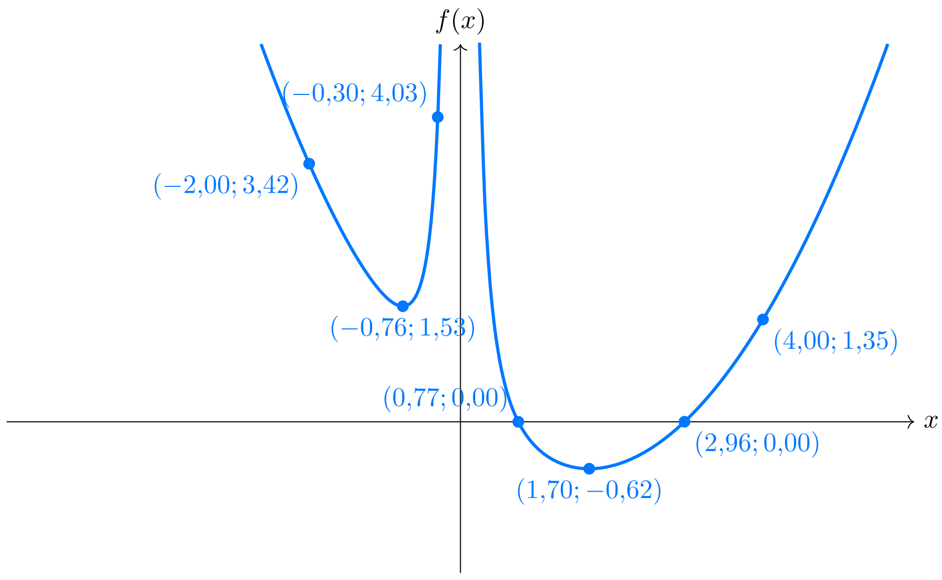
Lời giải bài 15:

1.



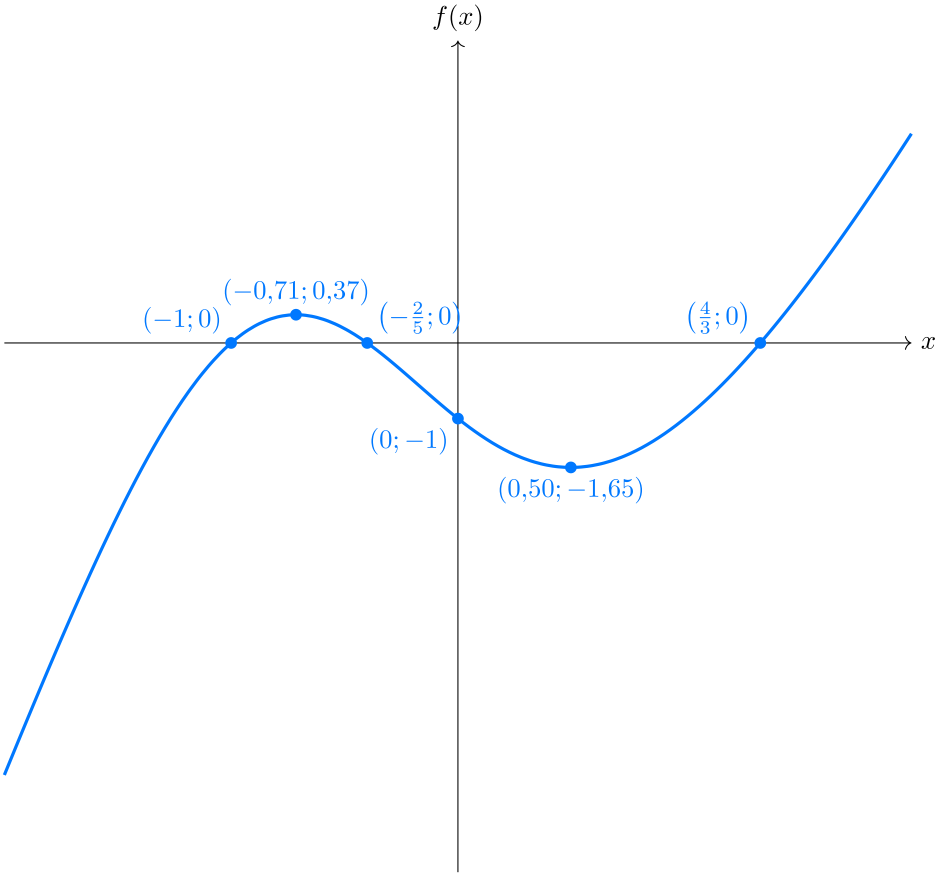
Hình 0.61: Đồ thị của $f(x) = \frac{2x}{x^2+1} + 1$

2.



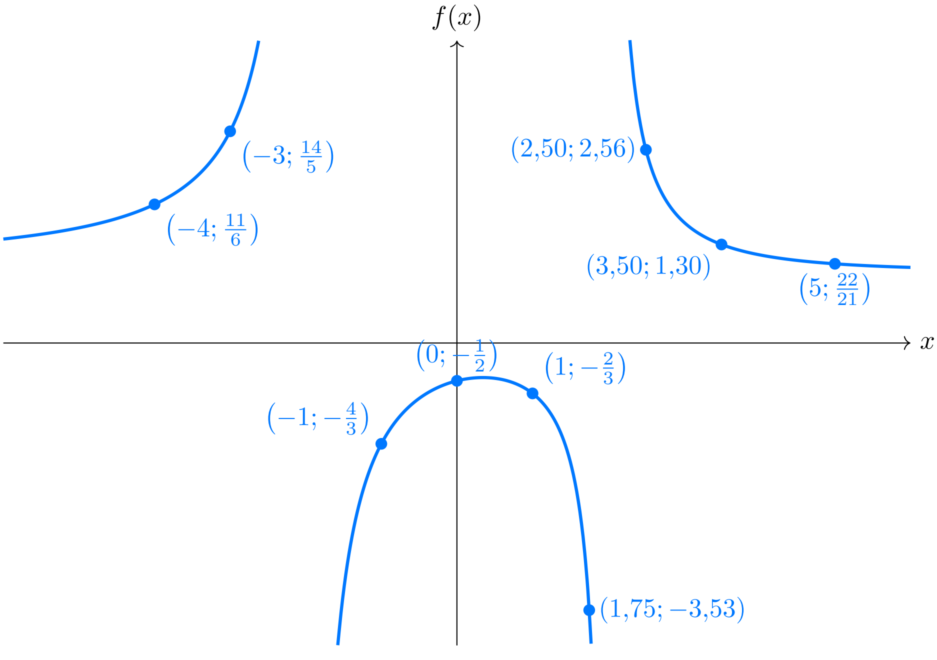
Hình 0.62: Đồ thị của $f(x) = \frac{x^4+1}{3x^2} - x$

3.



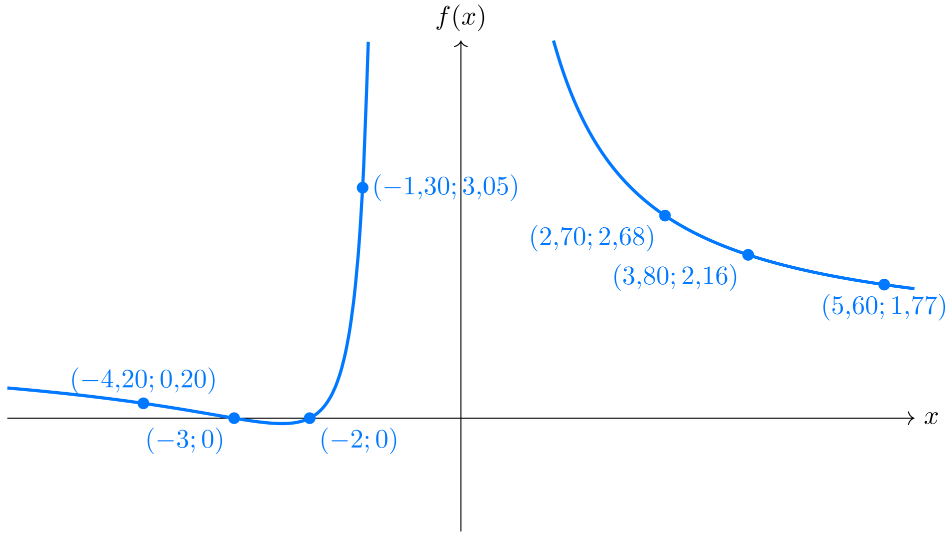
Hình 0.63: Đồ thị của $f(x) = \frac{15x^3+x^2-22x-8}{3x^2+3x+8}$

4.



Hình 0.64: Đồ thị của $f(x) = \frac{x}{x+2} + \frac{1}{x-2}$

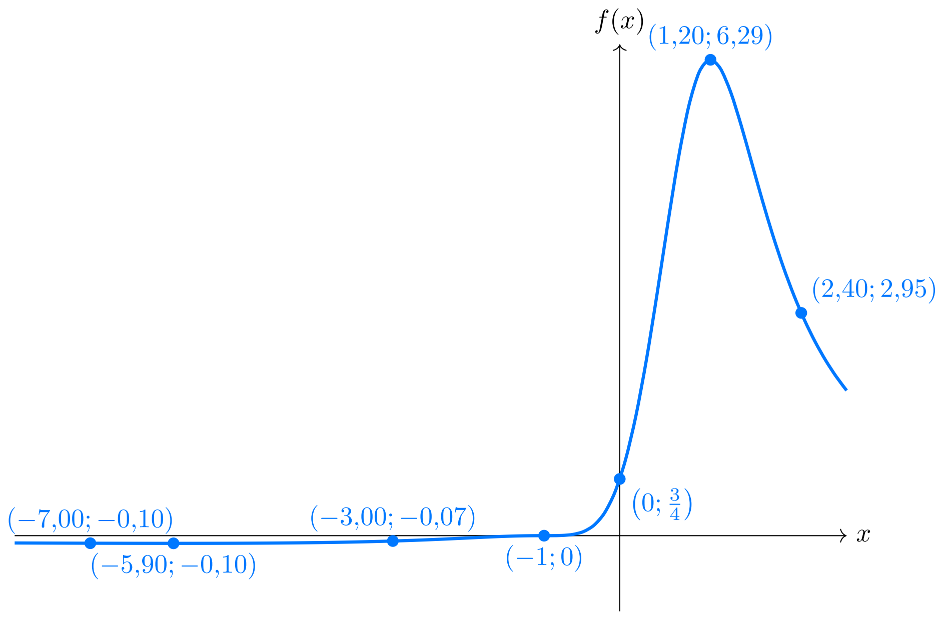
5.



Hình 0.65: Đồ thị của $f(x) = \frac{x+2}{x} \cdot \frac{x+3}{x+1}$

6. Thực hiện một số biến đổi đơn giản:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^4+4}}{\frac{2x^2+2}{3x^2+6x+6}} = \frac{\frac{(x+1)^3}{(x^4+4x^2+4)-4x^2}}{\frac{2(x^2+1)}{3(x^2+2x+2)}} \\
&= \frac{(x+1)^3}{\left(x^2+2\right)^2-(2x)^2} \cdot \frac{3\left(x^2+2x+2\right)}{2\left(x^2+1\right)} \\
&= \frac{(x+1)^3}{\left(x^2-2x+2\right)\left(x^2+2x+2\right)} \cdot \frac{3\left(x^2+2x+2\right)}{2\left(x^2+1\right)} \\
&= \frac{3(x+1)^3}{2\left(x^2+1\right)\left(x^2-2x+2\right)}.
\end{aligned}$$



Hình 0.66: Đồ thị của $f(x) = \frac{\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^4+4}}{\frac{2x^2+2}{3x^2+6x+6}}$

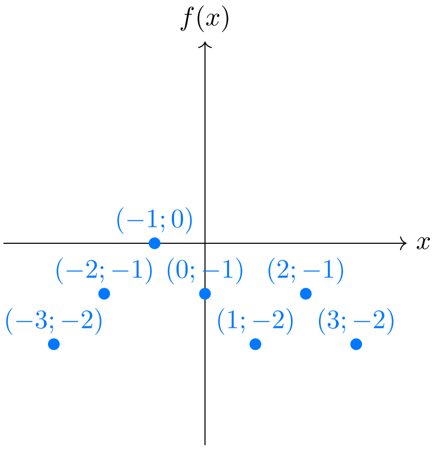
0.2.6 Phép hợp hai hàm số

Khi áp dụng hàm f lên kết quả của một hàm g khác, chúng ta có **phép hợp** hai hàm số f và g và kí hiệu hàm hợp này như sau:

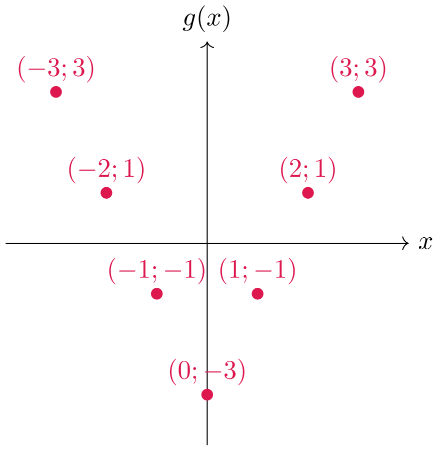
$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})).$$

Để ý rằng mặc dù f được viết trước g, g được thực hiện trước f.

Bài 16: Cho các hàm f và g được định nghĩa thông qua đồ thị như sau:



Hình 0.67: Đồ thị của f



Hình 0.68: Đồ thị của g

Xác định tập xác định, tập giá trị của các hàm hợp $f \circ g$ và $g \circ f$. Sau đó, vẽ đồ thị của hai hàm này.

Lời giải bài 16:

Tập xác định của f và g đều là $\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$. Ngoài ra, tập giá trị của f là $\{-2;-1;0\}$ và tập giá trị của g là $\{-3;-1;1;3\}$.

Có $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ với mọi x làm cho $f \circ g$ có nghĩa. Để ngắn gọn, chúng ta thực hiện kẻ bảng:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$g(x)$	3	1	-1	-3	-1	1	3
$f(g(x))$	-2	0	-2	-2	-2	0	-2

Bảng 0.10: Bảng giá trị của $f \circ g$

Vậy tập xác định và tập giá trị của $f \circ g$ lần lượt là $\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ và $\{-2;0\}$.

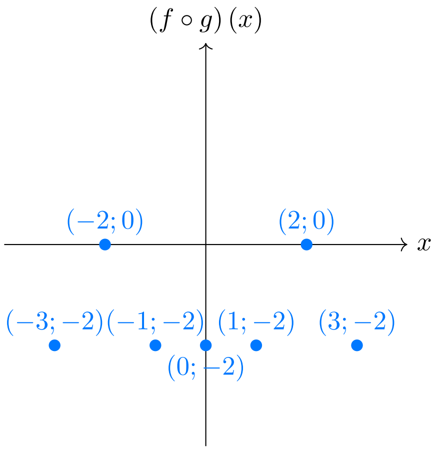
Tương tự, chúng ta có $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Kẻ bảng giá trị:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-2	-1	0	-1	-2	-1	-2
$g(f(x))$	1	-1	-3	-1	1	-1	1

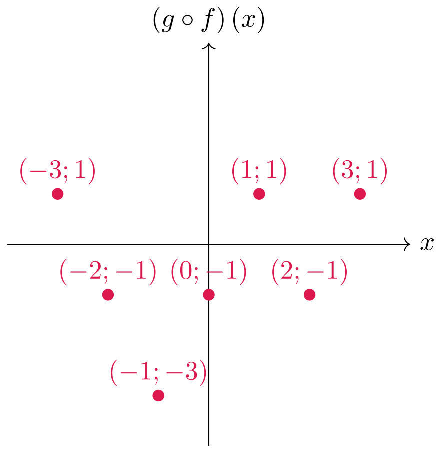
Bảng 0.11: Bảng giá trị của $g \circ f$

Từ bảng, chúng ta có $g \circ f$ có tập xác định là $\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$ và tập giá trị là $\{-3;-1;1\}$.

Cuối cùng, chúng ta có đồ thị của hai hàm:



Hình 0.69: Đồ thị của $f \circ g$



Hình 0.70: Đồ thị của $g \circ f$

Bài 17: Có tồn tại hàm 墫 sao cho với mọi f: 墫 $\circ f = f \circ$ 墫 $= f$?

Lời giải bài 17:

Có, đặt 墫$(x) = x$ với mọi x. Khi này, hiển nhiên rằng, với mọi x thuộc tập xác định của f:

$$(\text{墫} \circ f)(x) = \text{墫}(f(x)) = f(x) \text{ và}$$

$$(f \circ \text{墫})(x) = f(\text{墫}(x)) = f(x).$$

Tên gọi của 墫 là **hàm đồng nhất**.

0.2.7 Nhị thức Niu-tơn

Nhìn về phía trước, phần này được đưa vào nhằm phục vụ cho chứng minh các tính chất của đạo hàm của đa thức sẽ được đề cập sau này. Ngoài ra, công thức nhị thức Niu-tơn cũng có thể được dùng để xấp xỉ hàm số mũ. Việc xấp xỉ này là việc thường thấy khi làm các tính toán về vật lí và kĩ thuật nói chung.

Trước khi nhắc đến nhị thức Niu-tơn[11], chúng ta sẽ nhắc lại về khái niệm giai thừa và tổ hợp. Ở thời kì của Niu-tơn, các khác niệm liên quan đến những bài toán tổ hợp chưa được phát minh, cho nên nếu bạn đọc tìm hiểu tài liệu gốc thì sẽ thấy cách biểu diễn nhị thức Niu-tơn rất khác so với cách biểu diễn hiện đại.

Giai thừa của một số nguyên dương n được định nghĩa là

$$\boldsymbol{n! = \prod_{i=1}^{n} = n \times (n-1) \times \cdots \times 1}.$$

Định nghĩa này mở rộng lên tập số tự nhiên bằng cách đặt $\mathbf{0! = 1}$.

Cho hai số tự nhiên k và n với $k \leq n$. **Tổ hợp chập k của n** là số cách chọn k phần tử khác nhau từ một tập hợp có n phần tử. Công thức được cho bởi

$$\boldsymbol{C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{n-i+1}{i}\right) = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)}{k \times (k-1) \times \cdots \times 1}}.$$

Định nghĩa này cũng có thể được mở rộng. Với $\boldsymbol{k > n, C_n^k = 0}$. Về mặt tưởng tượng, không có cách nào để có thể lấy k vật từ một túi có ít hơn k vật được, vậy việc mở rộng này là hợp lí.

Quay trở lại về vấn đề chính, đặt f là **nhị thức** (đa thức khi rút gọn được viết dưới dạng tổng của hai đơn thức) $f(x) = x + y$ với y là tham số, và g được định nghĩa là $g(x) = x^n$ với $n \in \mathbb{N}$, thực hiện $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (x+y)^n$. Đây là **nhị thức Niu-tơn**. Nhị thức Niu-tơn có thể viết lại dưới dạng đa thức như sau:

$$\boldsymbol{(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n}\left(C_n^i y^{n-i} x^i\right) = \sum_{i=0}^{n}\left(C_n^i y^i x^{n-i}\right)}.$$

Về mặt cảm nhận tổ hợp, chúng ta coi như việc khai triển $(x+y)^n$ là chọn những phần tử x và y từ n thừa số $x+y$, nhân chúng lại tạo thành một thừa số mới và cộng tất cả những giá trị lại với nhau. Mỗi thừa số như vậy sẽ có i thừa số x và $n-i$ thừa số y và có giá trị là $x^i y^{n-i}$. Do đó, số cách chọn thừa số mà có

[11] Phát hiện lần đầu bởi Isaac Newton (1643 - 1727).

dạng $x^i y^{n-i}$ là C_n^i. Cho i, hay số thừa số con x trong thừa số $x^i y^{n-i}$, chạy từ 0 đến n và cộng các thừa số lại, chúng ta có đẳng thức cần chứng minh.

Một cách khác để chứng minh là sử dụng quy nạp. Xét trường hợp nền $n = 0$, chúng ta có $(x+y)^0 = 1$. Mặt khác,

$$\sum_{i=0}^{0} \left(C_0^i x^i y^{0-i}\right) = C_0^0 x^0 y^0 = C_0^0 = \frac{0!}{0! \times (0-0)!} = 1.$$

Do đó, đẳng thức đúng với $n = 0$. Giả sử đẳng thức đúng với $n = k$, khi đó

$$(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k} \left(C_k^i x^i y^{k-i}\right).$$

Theo tính chất của mũ với số mũ tự nhiên,

$$\begin{aligned}
(x+y)^{k+1} =& (x+y)^k (x+y) \\
=& \sum_{i=0}^{k} \left(C_k^i x^i y^{k-i}\right)(x+y) \\
=& \sum_{i=0}^{k} \left(C_k^i x^i y^{k-i}\right) x + \sum_{i=0}^{k} \left(C_k^i x^i y^{k-i}\right) y \\
=& \sum_{i=0}^{k} \left(C_k^i x^{i+1} y^{k-i}\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(C_k^i x^i y^{k-i+1}\right) \\
=& \sum_{i=1}^{k+1} \left(C_k^{i-1} x^i y^{k-(i-1)}\right) + \sum_{i=0}^{k} \left(C_k^i x^i y^{(k+1)-i}\right) \qquad \text{(Thay đổi chỉ số } i \text{ tăng thêm 1.)} \\
=& \left(C_k^{(k+1)-1} x^{k+1} y^{k-((k+1)-1)}\right) + \sum_{i=1}^{k} \left(C_k^{i-1} x^i y^{k-(i-1)}\right) + \\
& \left(C_k^0 x^0 y^{(k+1)-0}\right) + \sum_{i=1}^{k} \left(C_k^i x^i y^{(k+1)-i}\right).
\end{aligned}$$

Xét các thành phần, để ý rằng $C_n^n = \frac{n!}{n! \times (n-n)!} = 1$ với mọi n, cho nên

$$\left(C_k^{(k+1)-1} x^{k+1} y^{k-((k+1)-1)}\right) = C_k^k x^{k+1} y^0 = C_{k+1}^{k+1} x^{k+1} y^{(k+1)-(k+1)}.$$

Một cách tương tự, $C_n^0 = \frac{n!}{0! \times (n-0)!} = 1$ với mọi n. Do đó,

$$C_k^0 x^0 y^{(k+1)-0} = C_{k+1}^0 x^0 y^{(k+1)-0}.$$

Cuối cùng, xét tổng của hai tổng lớn, thấy chúng có cùng chỉ số i cho nên

$$\sum_{i=1}^{k} \left(C_k^{i-1} x^i y^{(k-(i-1))}\right) + \sum_{i=1}^{k} \left(C_k^i x^i y^{(k+1)-i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \left(\left(C_k^{i-1} + C_k^i\right) x^i y^{(k+1)-i}\right). \tag{0.16}$$

Hơn thế nữa, chúng ta có

$$\begin{aligned}
C_k^{i-1} + C_k^i &= \frac{k!}{(i-1)!\,(k-(i-1))!} + \frac{k!}{i!\,(k-i)!} \\
&= \frac{ik!}{i(i-1)!\,((k+1)-i)!} + \frac{k!\,((k+1)-i)}{i!\,(k-i)!\,((k+1)-i)} \\
&= \frac{ik! + k!\,((k+1)-i)}{i!\,((k+1)-i)!} \\
&= \frac{k!\,(i+(k+1)-i)}{i!\,((k+1)-i)!} \\
&= \frac{k!(k+1)}{i!\,((k+1)-i)!}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(k+1)!}{i!\,((k+1)-i)!} = C_{k+1}^{i}.$$

Thay kết quả này vào (0.16), chúng ta được

$$\sum_{i=1}^{k}\left(C_k^{i-1}x^i y^{(k-(i-1))}\right) + \sum_{i=1}^{k}\left(C_k^{i}x^i y^{(k+1)-i}\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(C_{k+1}^{i}x^i y^{(k+1)-i}\right).$$

Lấy tổng của các thành phần,

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} &= C_{k+1}^{k+1}x^{k+1}y^{(k+1)-(k+1)} + C_{k+1}^{0}x^0y^{(k+1)-0} + \sum_{i=1}^{k}\left(C_{k+1}^{i}x^iy^{(k+1)-i}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{k+1}\left(C_{k+1}^{i}x^iy^{(k+1)-i}\right).\end{aligned}$$

Theo quy nạp toán học, đẳng thức đã được chứng minh.

Tuy rằng chúng ta đã giả sử y là tham số, nhưng đẳng thức liên quan đến nhị thức Niu-tơn này vẫn đúng khi y là một hàm bất kì do trong chứng minh chúng ta không sử dụng tính chất số của y.

Bài 18: Cho m là một số nguyên dương, và $n; k_1; k_2; \cdots; k_m$ là các số tự nhiên thỏa mãn $\sum_{i=1}^{m} k_i \le n$. Đặt

$$\binom{n}{k_1; k_2; \cdots; k_m} = \frac{n!}{\prod_i^m (k_i!)\cdots(n-\sum_i^m (k_i))!} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!\cdot(n-k_1-k_2-\cdots-k_m)!}.$$

Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i=1}^{m}(x_i)\right)^n = \sum_{\begin{cases}\sum_i^m (k_i) = n\\ k_1;k_2;\cdots;k_m\in\mathbb{N}\end{cases}} \left(\binom{n}{k_1;k_2;\cdots;k_m}\prod_{i=1}^{m}\left(x_i^{k_i}\right)\right)$$

hay

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n = \sum_{\begin{cases}k_1+k_2+\cdots+k_m = n\\ k_1;k_2;\cdots;k_m\in\mathbb{N}\end{cases}} \left(\binom{n}{k_1;k_2;\cdots;k_m}k_1k_2\cdots k_m\right).$$

Lời giải bài 18:

Trước khi đi vào chứng minh, cần để ý rằng nếu $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$ thì

$$\begin{aligned}\binom{n}{k_1;k_2;\cdots;k_m} &= \frac{n!}{\prod_i^m (k_i!)\cdots(n-\sum_i^m (k_i))!}\\ &= \frac{n!}{\prod_i^m (k_i!)\cdots(n-n)!} = \frac{n!}{\prod_i^m (k_i!)}.\end{aligned}$$

Chúng ta chứng minh bằng việc sử dụng quy nạp trên m. Xét trường hợp nền $m=1$, chúng ta có $\sum_i^m (k_i) = x_1^n$. Để tổng của một số k_1 bằng đúng n thì $k_1 = n$. Cho nên, thay thế m vào để có

$$\begin{aligned}&\sum_{\begin{cases}\sum_i^m (k_i) = n\\ k_1;k_2;\cdots;k_m\in\mathbb{N}\end{cases}} \left(\binom{n}{k_1;k_2;\cdots;k_m}\prod_{i=1}^{m}\left(x_i^{k_i}\right)\right)\\ =&\binom{n}{k_1}\prod_{i=1}^{1}\left(x_i^{k_i}\right) = \binom{n}{n}x_1^n = x_1^n\end{aligned}$$

và chúng ta đã chứng minh đẳng thức được cho với $m=1$.

Với bước quy nạp, giả sử đẳng thức đúng với $m=a$. Khi này,

$$\left(\sum_{i}^{a+1}(x_i)\right)^n = \left(\sum_{i}^{a-1}(x_i) + (x_a + x_{a+1})\right)^n. \quad \text{(Tách hai số hạng cuối.)} \tag{0.17}$$

Đặt $\begin{cases} X = x_a + x_{a+1} \\ K = k_a + k_{a+1} \end{cases}$. Khi đó, theo giả thiết quy nạp,

$$\left(\sum_{i}^{a+1}(x_i)\right)^n = \sum_{\begin{cases}\sum_i^{a-1}(k_i) + K = n \\ k_1; k_2; \cdots; k_{a-1}; K \in \mathbb{N}\end{cases}} \left(\binom{n}{k_1; k_2; \cdots; k_{a-1}; K} \prod_{i=1}^{a-1}\left(x_i^{k_i}\right) X^K\right).$$

Theo nhị thức Niu-tơn, chúng ta đã có:

$$X^K = (x_a + x_{a+1})^K = \sum_{i=0}^{K}\left(\binom{K}{i} x_a^i x_{a+1}^{K-i}\right).$$

Nhìn theo một khía cạnh khác, nếu cho i chạy từ 0 đến K thì bộ số $(i; K-i)$ sẽ quét tất cả các trường hợp $(k_a; k_{a+1})$ với $k_a + k_{a+1} = K$. Do đó,

$$X^K = (x_a + x_{a+1})^K = \sum_{\begin{cases}k_a + k_{a+1} = K \\ k_a; k_{a+1} \in \mathbb{N}\end{cases}} \left(\binom{K}{k_a; k_{a+1}} x_a^{k_a} x_{a+1}^{k_{a+1}}\right).$$

Từ (0.17), chúng ta có

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k_1; k_2; \cdots; k_{a-1}; K}\binom{K}{k_a; k_{a+1}} &= \frac{n!}{\prod_1^{a-1}(k_i!)\, K!} \frac{K!}{k_a! k_{a+1}!} \\
&= \frac{n!}{\prod_1^{a-1}(k_i!)\, k_a! k_{a+1}!} \\
&= \frac{n!}{\prod_1^{a+1}(k_i!)} \\
&= \binom{n}{k_1; k_2; \cdots; k_{a-1}; k_a; k_{a+1}}.
\end{aligned}$$

Từ đó, kết hợp những gì chúng ta đã có để có

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i}^{a+1}(x_i)\right)^n \\
&= \sum_{\begin{cases}\sum_i^{a-1}(k_i) + K = n \\ k_1; \cdots; k_{a-1}; K \in \mathbb{N}\end{cases}} \left(\binom{n}{k_1; \cdots; k_{a-1}; K} \prod_{i=1}^{a-1}\left(x_i^{k_i}\right) \sum_{\begin{cases}k_a + k_{a+1} = K \\ k_a; k_{a+1} \in \mathbb{N}\end{cases}} \left(\binom{K}{k_a; k_{a+1}} x_a^{k_a} x_{a+1}^{k_{a+1}}\right)\right) \\
&= \sum_{\begin{cases}\sum_i^{a+1}(k_i) = n \\ k_1; \cdots; k_{a+1} \in \mathbb{N}\end{cases}} \left(\binom{n}{k_1; \cdots; k_{a-1}; K}\binom{K}{k_a; k_{a+1}} \prod_{i=1}^{a-1}\left(x_i^{k_i}\right) x_a^{k_a} x_{a+1}^{k_{a+1}}\right) \\
&= \sum_{\begin{cases}\sum_i^{a+1}(k_i) = n \\ k_1; k_2; \cdots; k_{a+1} \in \mathbb{N}\end{cases}} \left(\binom{n}{k_1; k_2; \cdots; k_{a+1}} \prod_{i=1}^{a+1}\left(x_i^{k_i}\right)\right).
\end{aligned}$$

Bước quy nạp đã hoàn tất, cùng với đó là điều phải chứng minh. Bài tập này cũng có thể chứng minh bằng phương pháp tổ hợp giống như nhị thức Niu-tơn. Nhìn chung, đây là một bài tập có mạch tương đối thẳng. Điều khó nhất của bài tập này là việc đọc hiểu các kí hiệu toán và thực hiện biến đổi đại số trên một số lượng số không xác định.

0.3 Hàm lượng giác

"Lượng" là đo lường, "giác" là góc. Như vậy, "hàm lượng giác" là hàm số đo lường góc. Trong phần này, hàm lượng giác sẽ được tiếp cận dưới góc nhìn từ đường tròn đơn vị, thay vì sử dụng tam giác vuông.

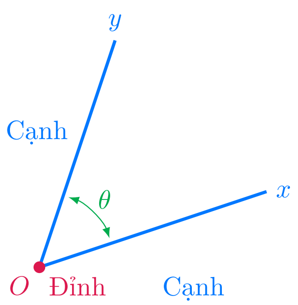
0.3.1 Góc định hướng

Góc không định hướng (gọi tắt là **góc**) là hình gồm hai tia có chung gốc. Gốc chung của hai tia là **đỉnh** của góc. Hai tia chắn góc được gọi là **cạnh** của góc. Về mặt kí hiệu, nếu góc có hai cạnh là Ox, Oy và chúng có chung đỉnh là O, thì góc được kí hiệu là $\boldsymbol{\angle xOy}$, $\boldsymbol{\angle yOx}$, $\boldsymbol{\widehat{xOy}}$ hoặc $\boldsymbol{\widehat{yOx}}$.

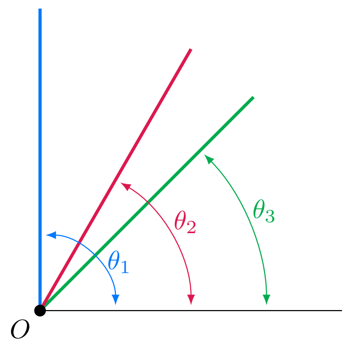
Số đo góc về mặt trực quan là độ mở của góc. Để đo số đo góc, chúng ta sử dụng đơn vị **độ** hoặc **ra-đi-an**. Gọi **đường tròn đơn vị** là đường tròn có bán kính bằng 1 đơn vị độ dài. Vẽ đường tròn đơn vị với tâm nằm ở đỉnh của góc, khi đó, số đo góc được đo bằng độ dài của cung chắn góc. Chúng ta sẽ không chứng minh tại sao mọi đường tròn lại có chu vi bằng 2π lần bán kính, nhưng sẽ sử dụng điều đó để có chu vi của đường tròn đơn vị bằng 2π đơn vị độ dài. Định nghĩa hai đơn vị đo như sau:

- **Độ**: Chia đường tròn làm 360 phần bằng nhau, mỗi phần sẽ có độ dài là $\frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$. Một cung chắn góc trên đường tròn đơn vị có đường tròn bằng này định nghĩa cho góc 1 độ hay $\mathbf{1^\circ}$.
- **Ra-đi-an**: Một cung chắn góc trên đường tròn đơn vị có độ dài bằng 1 định nghĩa cho góc 1 ra-đi-an hay **1 rad**.

Chúng ta tính số đo của các góc khác theo tỉ lệ với những góc đơn vị này. Như trong hình 0.72, góc $\theta_1 = \frac{\pi}{2}\text{ rad} = 90^\circ$, góc $\theta_2 = \frac{\pi}{3}\text{ rad} = 60^\circ$ và góc $\theta_3 = \frac{\pi}{4}\text{ rad} = 45^\circ$.



Hình 0.71: Biểu diễn $\angle xOy$ có số đo bằng θ



Hình 0.72: Biểu diễn các góc quen thuộc

Nếu số đo lẻ góc theo đơn vị độ thì ngoài việc sử dụng số thập phân, chúng ta còn có thể sử dụng đơn vị **phút** và **giây**. Một độ được chia làm 60 phần bằng nhau, mỗi phần gọi là một phút kí hiệu là $\boldsymbol{'}$. Một phút lại được chia làm 60 phần bằng nhau, mỗi phần gọi là một giây kí hiệu là $\boldsymbol{''}$. Ví dụ, góc có số đo là $36{,}61^\circ = 36^\circ 36{,}6' = 36^\circ 36' 36''$.

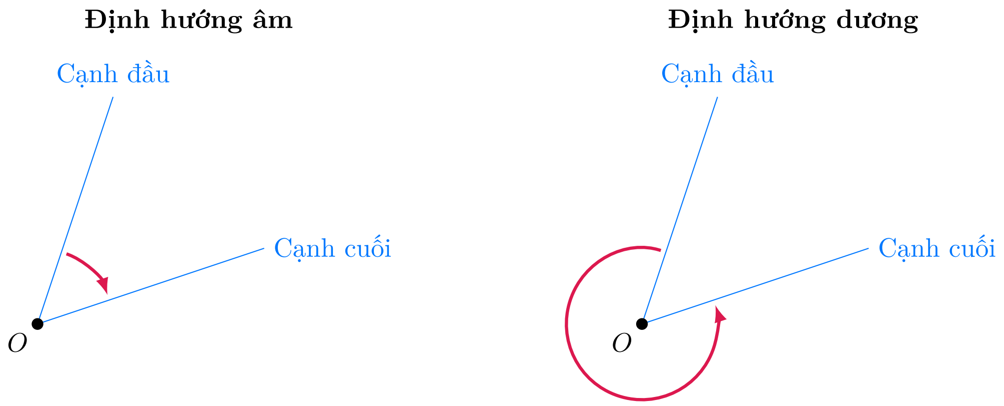
Trên máy tính khoa học hiện hành còn một đơn vị nữa là **gra-đi-an** được định nghĩa bằng việc chia đường tròn thành 400 phần bằng nhau thay vì 360 giống như độ. Khi này, chúng ta có quy đổi

$$\mathbf{1\ grad = 1\ gon = 1\ ^g = \frac{\boldsymbol{\pi}}{200}\ rad}.$$

Đơn vị này thông dụng hơn trong địa lí thay vì vật lí.

Góc định hướng là mở rộng của góc không định hướng. Hai cạnh được chia ra làm cạnh đầu và cạnh cuối. Số đo của góc định hướng được tạo nên bằng cách xác định góc quay xung quanh đỉnh cần thiết để cho cạnh đầu trùng vào cạnh cuối. Trên mặt phẳng hai chiều, số đo này có thể là âm hoặc dương, tùy thuộc vào chiều quay:

- Nếu quay ngược chiều kim đồng hồ thì số đo được xác định dương;
- Nếu quay cùng chiều kim đồng hồ thì số đo được xác định âm.



Hình 0.73: Góc định hướng

Néu $\angle xOy$ có Ox là cạnh đầu và Oy là cạnh cuối, thì góc định hướng này được kí hiệu là $\measuredangle xOy$.

0.3.2 Định nghĩa hàm lượng giác

Để định nghĩa được hàm lượng giác của một góc, cần phải vẽ góc đó trong hệ trục tọa độ vuông góc như sau: Vẽ cạnh đầu của góc trùng với trục hoành, gốc tọa độ là đỉnh của góc, cạnh cuối của góc nằm trong mặt phẳng tọa độ. Khi đó, giao điểm của cạnh cuối với đường tròn đơn vị là điểm có tọa độ $(\cos(\theta), \sin(\theta))$, trong đó θ là số đo của góc.

0.4 Số ảo và số phức

Trước khi đến với số phức, chúng ta bắt đầu tiếp cận với định nghĩa đơn vị ảo. Cụ thể, *đơn vị ảo* được kí hiệu là $\mathbf{i}$ [12] và thỏa mãn

$$\mathbf{i}^2 = -1 \text{ hay } \mathbf{i} = \sqrt{-1}.$$

Để có số ảo, nhân một số thực $b \neq 0$ với đơn vị ảo để thành $\mathbf{i}b$. Một số phức bao gồm thành phần thực và $\mathbf{i}$ lần phần ảo cộng vào. Viết dưới *dạng chính tắc*, một số phức có dạng là

$$z = a + \mathbf{i}b$$

với a, b thực. Từ một số phức, chúng ta cũng có thể lấy ngược lại giá trị phần thực và phần ảo của nó lần lượt qua hai hàm $\Re(z)$ và $\Im(z)$ (hoặc $\operatorname{Re}(z)$ và $\operatorname{Im}(z)$). Cụ thể, với $z = a + \mathbf{i}b$ thì $\Re(z) = a$ và $\Im(z) = b$[13].

Chúng ta sẽ coi như có thể thực hiện các định luật đại số thông thường trên tập số phức. Coi $\mathbf{i}$ là một biến với $\mathbf{i}^2 = -1$. Để cộng (hay trừ) hai số phức $v = a + \mathbf{i}b$ và $w = c + \mathbf{i}d$, thực hiện cộng (hay trừ) các thành phần tương đương (phần thực với phần thực, phần ảo với phần ảo). Viết dưới dạng toán học:

$$\begin{cases} v + w = (a + c) + \mathbf{i}(b + d) \\ v - w = (a - c) + \mathbf{i}(b - d) \end{cases}.$$

Nhân hai số phức sẽ yêu cầu sử dụng tính chất phân phối giữa phép nhân với phép cộng, được thực hiện như sau

$$\begin{aligned} v \cdot w &= (a + \mathbf{i}b) \cdot (c + \mathbf{i}d) \\ &= ac + \mathbf{i}ad + \mathbf{i}bc + \mathbf{i}^2 bd \\ &= (ac - bd) + \mathbf{i}(ad + bc). \end{aligned}$$

Trước khi chia hai số phức, chúng ta cần phải biết đến khái niệm số phức liên hợp và tính chất đặc biệt của nó. Một số phức $z = a + \mathbf{i}b$ sẽ có số phức liên hợp là

$$\bar{z} = z^* = a - \mathbf{i}b.$$

[12] Phần lớn các tài liệu sẽ kí hiệu số ảo là chữ i thông thường. Tác giả kí hiệu thành chữ $\mathbf{i}$ đứng in đậm để bảo toàn chữ i cho nhiệm vụ khác.

[13] Tại sao không gọi cả $\mathbf{i}b$ là phần ảo? Khi nói đến phần ảo, chúng ta đã ngầm định nó sẽ thuộc về số hạng mà có thừa số $\mathbf{i}$. Viết lại đơn vị ảo trở nên thừa thãi. Hơn nữa, sẽ dễ làm việc hơn khi mà cả $\Re(z)$ và $\Im(z)$ đều thực và không phải chia $\Im(z)$ cho $\mathbf{i}$ liên tục.

Khi này, thực hiện phép nhân số phức z với liên hợp của nó để có

$$z\bar{z} = (a + \mathbf{i}b)(a - \mathbf{i}b) = a^2 + b^2.$$

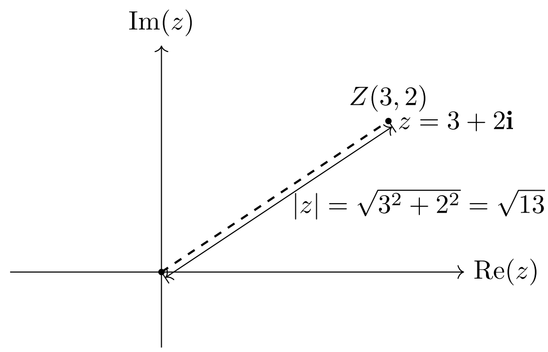
Để ý rằng $a^2 + b^2$ là một số thực do a, b đã là số thực từ định nghĩa, và cũng cần phải nhớ lại rằng khi nhân cả số bị chia và số chia với một số thì thương không đổi. Cho nên, để chia hai số phức, chúng ta nhân cả tử và mẫu với liên hợp của số chia

$$\frac{v}{w} = \frac{a + \mathbf{i}b}{c + \mathbf{i}d} = \frac{(a + \mathbf{i}b)(c - \mathbf{i}d)}{(c + \mathbf{i}d)(c - \mathbf{i}d)} = \frac{(ac + bd) + \mathbf{i}(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Từ đó, chúng ta đưa phép chia hai số phức thành phép chia số phức với số thực và có kết quả là

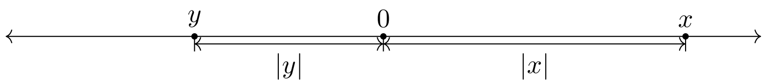
$$\frac{v}{w} = \frac{a + \mathbf{i}b}{c + \mathbf{i}d} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \mathbf{i} \cdot \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Ngoài cách biểu diễn đại số, còn có cách biểu diễn hình học trên mặt phẳng tọa độ của số phức qua việc coi trục hoành và trục tung lần lượt biểu diễn phần thực và phần ảo của số phức. Cụ thể, số phức $z = a + \mathbf{i}b$ được biểu diễn bởi một điểm $Z(a,b)$ trên hệ tọa độ vuông góc. Khi này, Z là *ảnh* (hay đơn giản là *điểm biểu diễn*) của z và (a,b) được gọi là *tọa vị* (hay *tọa độ phức*) của z.



Hình 0.74: Biểu diễn $z = 3 + 2\mathbf{i}$ trên mặt phẳng tọa độ

Hình 0.74 đã biểu diễn số phức $z = 3 + 2\mathbf{i}$ trên mặt phẳng tọa độ. Từ đây, chúng ta có thể phát hiện ra những đặc tính khác của z khác tọa vị. Đầu tiên, chúng ta có thể đo khoảng cách từ ảnh Z đến gốc $(0; 0)$, và từ đó, chúng ta sẽ nhận được *mô-đun (module)* của z, kí hiệu: $|z|$. Bạn đọc có thể để ý rằng kí hiệu giống như kí hiệu giá trị tuyệt đối của số thực. Cũng có thể hiểu được tại sao lại vậy nếu như bạn đọc nhớ cách biểu diễn khoảng cách hình học của giá trị tuyệt đối trên trục số thực. Khi chúng ta có một điểm biểu diễn một số thực x trên một trục thì giá trị tuyệt đối của x chính là khoảng cách từ x đến điểm 0.



Hình 0.75: Giá trị tuyệt đối trên trục thực

Một cách tương tự, $|z|$ là khoảng cách từ Z đến gốc tọa độ. Công thức Pi-ta-go được sử dụng để tính khoảng cách này:

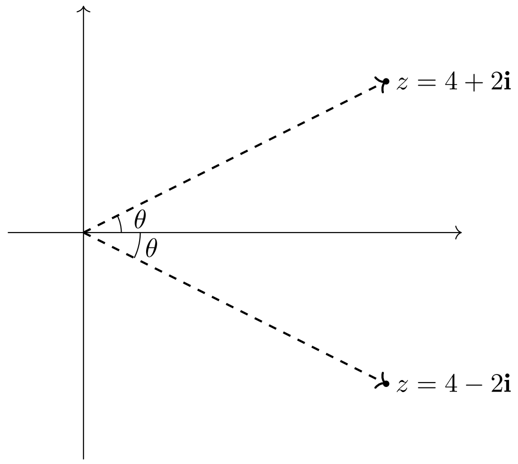
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Cũng là vì lí do đó nên trong một số tài liệu, $|z|$ vẫn được gọi là giá trị tuyệt đối để đảm bảo tính nhất quán.

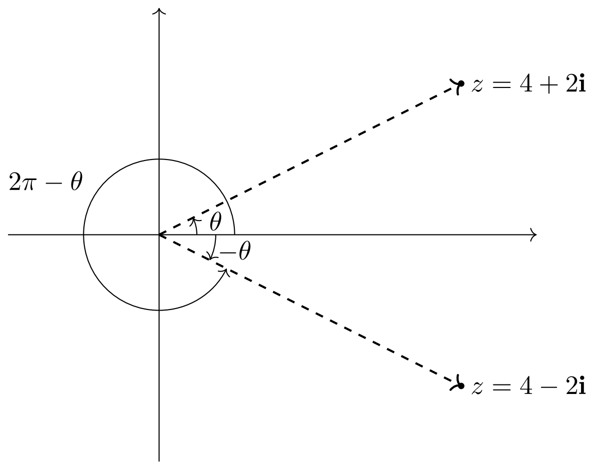
Trên trục số thực, mốt số cụ thể thì giá trị tuyệt đối của nó chỉ có một giá trị, nhưng nếu đầu ra là một giá trị tuyệt đối thì đầu vào có thể là 2 số khác nhau. Để biết chính xác là số nào thì cần biết thêm dấu của số đó, hay nói một cách khác, hướng của số đó nếu nhìn từ vị trí gốc 0. Một cách tương tự, một số phức z chỉ ra được một giá trị mô-đun $|z|$ của nó, nhưng với một $|z|$ thì có thể có nhiều z thỏa mãn. Để biết chính xác được giá trị của z thì chúng ta cần phải biết thêm hướng của z. Tuy nhiên, việc xác định hướng này không chỉ đơn giản là nằm trái hay phải trên trục một chiều nữa, mà cần phải xác định vị trí trong mặt phẳng hai chiều. Một cách để thực hiện điều này là xác định *góc* (hay *a-gu-men*) của z.

Để xác định góc, chúng ta cần phải có 2 tia. Một tia có thể được nối từ gốc đến điểm biểu diễn. Một tia còn lại có thể bám theo một trục cố định. Về quy ước, phía dương trục hoành, hay trục thực, được sử dụng làm bờ còn lại. Bạn đọc có thể nghĩ rằng là khi này chúng ta đã có đủ điều kiện để xác định góc. Cũng đũng, đã đủ để từ số phức z ra được góc của z. Nhưng từ góc của z vẫn chưa đủ để ra được z. Hãy nhìn vào hình 0.76:

Để phân biệt hai góc này, người ta sử dụng khái niệm *góc định hướng*. Một cách đơn giản, quay trục hoành ngược chiều kim đồng hồ cho đến khi chạm vào cạnh còn lại. Góc đã quay là độ lớn của góc định hướng. Khi quay thuận chiều kim đồng hồ thì góc đó quy ước là quay góc âm. Từ đó, chúng ta có thể phân biệt góc nhìn như hình 0.77:



Hình 0.76: $4 + 2\mathbf{i}$ và $4 - 2\mathbf{i}$ có độ lớn góc bằng nhau.



Hình 0.77: $4 + 2\mathbf{i}$ và $4 - 2\mathbf{i}$ có độ lớn góc bằng nhau.

Người ta kí hiệu góc của số phức là $\arg(z)$ hoặc $\operatorname{Arg}(z)$. Cũng giống như góc không định hướng, khi cộng thêm hay bớt đi 2π ra-đi-an (hay 360 độ) thì "hướng nhìn" cũng không thay đổi. Để cho $\arg(z)$ chỉ trả ra một giá trị duy nhất, quy ước là lấy góc trong nửa đoạn $(-\pi;\pi]$ (hay $(-180°;180°]$). Như ví dụ trong hình 0.77, $\arg(4+2\mathbf{i}) = \theta = \arctan\left(\frac{2}{4}\right) \approx 0{,}464$ rad (hay $26{,}565°$) và $\arg(4-2\mathbf{i}) = -\theta = -\arctan\left(\frac{2}{4}\right) \approx -0{,}464$ rad (cũng có thể được viết lại là $-26{,}565°$).

Như đã viết, có khoảng cách và hướng nhìn thì chúng ta sẽ có được vị trí số phức. Cách biểu diễn này được gọi là *dạng lượng giác* của số phức. Đặt $r = |z|$ và $\varphi = \arg(z)$, dạng lượng giác của z được kí hiệu là $z = r\angle\varphi = r\underline{/\varphi}$. Quy đổi giữa dạng lượng giác và dạng chính tắc, khi $z = a + \mathbf{i}b = r\underline{/\varphi}$ thì

$$\begin{cases} a = \Re(z) = r\cos(\varphi) \\ b = \Im(z) = r\sin(\varphi) \end{cases}$$

và từ đó $z = r(\cos(\varphi) + \mathbf{i}\sin(\varphi))$. Liên hợp của z dưới dạng lượng giác là $\bar{z} = r(\cos(\varphi) - \mathbf{i}\sin(\varphi)) = r\underline{/-\varphi}$.

Thật sự, rất khó cho nhiều người không thường xuyên thường thức về toán ngay lập tức tìm ra và cảm nhận được ý nghĩa thực tiễn của số ảo. Chúng ta không thể tưởng tượng được số ảo một cách trực quan như các số mà chúng ta thường thấy ở ngoài cuộc sống như 5 cái bút hay $\frac{1}{3}$ giờ. Đi kèm với đó, kể cả trên lí thuyết toán của ghế nhà trường, cũng sẽ không xảy ra trường hợp nào để cho một số nhân với chính nó ra một số âm.

Nhắc về số âm, theo quan điểm cá nhân, số âm trong đời xuống vốn đã ít khi được sử dụng. Chẳng mấy ai ưa nói "lãi -500000 đồng" so với "lỗ 500000 đồng". Một cách tương tự, nhìn về phương diện lịch sử, trong phần lớn quá trình phát triển của toán học, các nhà toán học xưa thường có mặc cảm với những số âm. Các phương trình sẽ luôn được viết lại thành nhiều trường hợp để tránh chúng. Ví dụ, nếu phương trình bậc hai được viết dưới dạng hiện đại là $x^2 + ax + b = 0$ với a,b là hai số thực (có thể âm), thì trong quá khứ, phương trình này được chia ra làm ba trường hợp

$$x^2 + ax = b;$$
$$x^2 + b = ax;$$
$$x^2 = ax + b$$

với a,b là hai số thực luôn dương. Và cũng từ sự mặc cảm với số âm, họ cho rằng nghiệm của phương trình cũng phải là một số dương. Tương tự với Các-đa-nô [14], khi giải phương trình bậc ba, ông cũng đưa về các trường hợp như trên. Cụ thể, chúng ta xem xét một trường hợp của bài toán:

$$x^3 = ax + b.$$

Giải phương trình, chúng ta có được nghiệm

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}.$$

Tuy nhiên, sau khi thay những giá trị cụ thể vào a và b, Các-đa-nô đã phát hiện ra một vấn đề. Khi $a = 15$ và $b = 4$, nghiệm trả ra cho phương trình $x^3 = 15x + 4$ theo công thức vừa trên là

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

mặc dù phương trình có một nghiệm bình thường là $x = 4$ (với kiến thức toán học hiện đại, chúng ta có thể giải ra hai nghiệm cũng thực khác là $-2 \pm \sqrt{3}$). Nhận ra điều đó, Các-đa-nô đã khẳng định rằng công thức này của ông không áp dụng được trong trường hợp xảy ra căn của một số âm. Tuy nhiên, một học trò của ông, Bom-be-li [15], lại phủ nhận điều trên. Bom-be-li nhận định rằng tồn tại một kiểu số khác số thực sẽ có giá trị bằng "căn âm". Ông chỉ rõ sự khác biệt giữa kiểu số mới này và kiểu số thực thông thường, và đi kèm theo là phương pháp thực hiện đại số trên kiểu số mới. Áp dụng những nền tảng đó, ông đã tính được căn bậc ba của hai số phức lần lượt là $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ và $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$. Cộng hai số vào, hiển nhiên sẽ có được nghiệm 4 như mong muốn.

Với sự xây dựng ban đầu của Bom-be-li làm gốc, trong những thế kỉ sau, tên gọi và lí thuyết về cách biểu diễn số phức được hình thành.

[14] Gerolamo Cardano (1501-1576).
[15] Rafael Bombelli (1526-1572).

Chương 1

Cơ bản của xử lí số liệu trong vật lí

Bài 19: Khoảng cách trung bình từ trái đất đến mặt trời là $1{,}5 \cdot 10^8$ km. Giả sử quỹ đạo của trái đất quanh mặt trời là tròn và mặt trời được đặt tại gốc của hệ quy chiếu.

1. Tính tốc độ di chuyển trung bình của trái đất quanh mặt trời dưới dạng dặm trên giờ (1 dặm = 1,6093 km).

2. Ước lượng góc θ giữa véc-tơ vị trí của trái đất bây giờ và vị trí sau đó 4 tháng.

3. Tính khoảng cách giữa hai vị trí đó.

Lời giải bài 19:

1. Giả sử trái đất quay quanh mặt trời trong 365,25 ngày. Quãng đường mà trái đất đi được trong thời gian này là chu vi của quỹ đạo tròn $2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^8$ km. Từ đó, chúng ta có thể tính được tốc độ trung bình của trái đất quanh mặt trời là $\frac{2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}}{365{,}25 \text{ ngày}}$. Thực hiện quy đổi để được:

$$\frac{2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^8 \text{ km}}{365{,}25 \text{ ngày}} \cdot \frac{1 \text{ dặm}}{1{,}6903 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ ngày}}{24 \text{ h}} = \boxed{6{,}4 \cdot 10^4 \frac{\text{dặm}}{\text{h}}}.$$

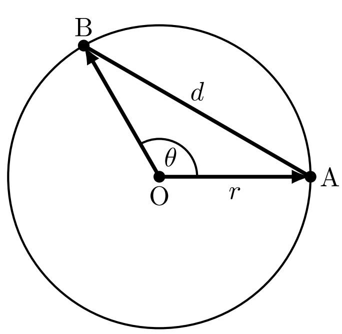
2. Trái đất quay quanh mặt trời trong 12 tháng, tương đương với một góc quay 360° so với gốc là mặt trời. Coi như các tháng có độ dài như nhau. Ta có θ chính là góc quay của trái đất trong 4 tháng, tương đương với:

$$\theta = \frac{360°}{12 \text{ tháng}} \cdot 4 \text{ tháng} = \boxed{120°}.$$

3.

Gọi A là vị trí của trái đất bây giờ, B là vị trí của trái đất sau 4 tháng theo như hình 1.1. Coi một đơn vị trên tọa độ bằng độ dài bán kính của quỹ đạo tròn, tức là $r = 1{,}5 \cdot 10^8$ km. Ta có tọa độ điểm A là $(1; 0)$. Tọa độ điểm B là $(\cos(120°); \sin(120°)) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Từ đó, chúng ta có khoảng cách giữa hai vị trí đó là:

$$d = r \cdot \sqrt{\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \boxed{2{,}6 \cdot 10^8 \text{ km}}.$$



Hình 1.1: Quỹ đạo trái đất

Bài 20: Khối lượng riêng (bằng khối lượng của vật chia cho thể tích của vật đó) của nước là $1{,}00 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

1. Tính giá trị này theo ki-lô-gam trên mét khối.

2. 1,00 lít nước nặng bao nhiêu ki-lô-gam, bao nhiêu pao (lb)? Biết 1 lb = 0,45 kg (chính xác).

Lời giải bài 20:

1. Thực hiện quy đổi, chúng ta có:

$$1{,}00\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \left(1{,}00\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right) \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \text{g}} \cdot \left(\frac{100\ \text{cm}}{1\ \text{m}}\right)^3 = \boxed{1{,}00 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}.$$

2. Khối lượng của 1,00 lít nước là

$$1{,}00\ \text{L} \cdot \left(1{,}00 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) = 1{,}00\ \text{L} \cdot \left(1{,}00 \cdot 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \cdot \frac{1\ \text{m}^3}{1000\ \text{L}} = \boxed{1{,}00 \cdot 10^0\ \text{kg}}.$$

   Theo đơn vị pao (lb), chúng ta có:

$$1{,}00 \cdot 10^0\ \text{kg} = 1{,}00 \cdot 10^0\ \text{kg} \cdot \frac{1\ \text{lb}}{0{,}45\ \text{kg}} = \boxed{2{,}22 \cdot 10^0\ \text{lb}}.$$

Bài 21: Trong hệ thời gian cổ Trung Hoa, từ triều đại Thanh trở về trước (trừ một số năm), một ngày được chia thành 100 khắc. Sau triều đại này (trừ một số năm), một ngày được chia thành 96 khắc. Coi một ngày có 24 giờ và mọi số liệu là chính xác tuyệt đối.

1. Tính số giây (hệ đo lường hiện đại) trong một khắc trong cả hai thời kì.
2. Tính tỉ lệ về độ dài của hai khắc trong hai thời kì.

Lời giải bài 21:

1. Số giây trong một ngày là

$$24\ \text{h} \cdot \frac{60\ \text{phút}}{1\ \text{h}} \cdot \frac{60\ \text{giây}}{1\ \text{phút}} = 86400\ \text{giây}.$$

Từ triều đại Thanh trở về trước, số giây trong một khắc là

$$\frac{86400\ \text{giây}}{100\ \text{khắc}_{\text{trước}}} = \boxed{864 \frac{\text{giây}}{\text{khắc}_{\text{trước}}}}.$$

Sau triều đại Thanh, số giây trong một khắc là

$$\frac{86400\ \text{giây}}{96\ \text{khắc}_{\text{sau}}} = \boxed{900 \frac{\text{giây}}{\text{khắc}_{\text{sau}}}}.$$

2 Tỉ lệ độ dài thời gian một khắc trước và sau là

$$\frac{1\ \text{khắc}_{\text{trước}}}{1\ \text{khắc}_{\text{sau}}} = \frac{1\ \text{khắc}_{\text{trước}}}{1\ \text{khắc}_{\text{sau}}} \cdot \frac{864\ \text{giây}}{1\ \text{khắc}_{\text{trước}}} \cdot \frac{1\ \text{khắc}_{\text{sau}}}{900\ \text{giây}} = \boxed{0{,}96}.$$

Bài 22: Một vòng đĩa tròn như trong hình 1.2 có đường kính 4,50 cm rỗng ở giữa một lỗ đường kính 1,25 cm. Đĩa dày 1,50 mm. Biết rằng đĩa được làm từ chất liệu có khối lượng riêng là 8600 $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Tính khôi lượng vòng đĩa theo gram.

Lời giải bài 22:

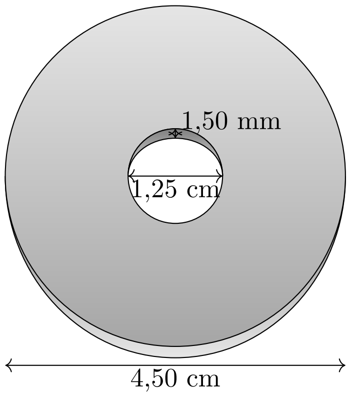
Đặt $D = 4{,}50$ cm $= 4{,}50 \times 10^{-2}$ m, $d = 1{,}25$ cm $= 1{,}25 \times 10^{-2}$ m, $h = 1{,}50$ mm $= 1{,}50 \times 10^{-3}$ m và $\mathcal{D} = 8600\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 8{,}6 \times 10^3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{10^3\ \text{g}}{\text{kg}} = 8{,}6 \times 10^6\ \frac{\text{g}}{\text{m}^3}$.

Nhận thấy rằng đĩa có dạng trụ, diện tích mặt đáy là

$$S = \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi\left(D^2 - d^2\right)}{4}.$$

Thể tích của đĩa là $V = S \cdot h = \frac{\pi \cdot h \cdot \left(D^2 - d^2\right)}{4}$. Nhân với khối lượng riêng, chúng ta có khối lượng của đĩa là

$$m = \mathcal{D} \cdot V = \frac{\pi \cdot h \cdot \mathcal{D} \cdot \left(D^2 - d^2\right)}{4}.$$



Hình 1.2: Vòng đĩa tròn

Thay số trực tiếp với sự để ý đến số chữ số có nghĩa, chúng ta có kết quả $m = \boxed{1{,}89 \times 10^1 \text{ kg}}$.

Bài 23: Khối lượng của một chất lỏng được mô hình hóa bởi phương trình $m = A \cdot t^{0,8} - B \cdot t$. Nếu như t được tính bằng giây và m được tính bằng ki-lô-gram, thì đơn vị của A và B là gì?

Lời giải bài 23:

Để có thể cộng trừ các phần tử, chúng cần phải có cùng đơn vị. Do vậy, đơn vị của $A \cdot t^{0,8}$ và $B \cdot t$ là kg. Từ quy tắc nhân chia các đơn vị, chúng ta có:

$$\begin{cases} A \cdot \mathrm{s}^{0,8} & = \mathrm{kg} \\ B \cdot \mathrm{s} & = \mathrm{kg} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} A & = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^{0,8}} \\ B & = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}} \end{cases}.$$

Vậy đơn vị của A là $\boxed{\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^{0,8}}}$ và đơn vị của B là $\boxed{\dfrac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}}$.

Chương 2

Chuyển động

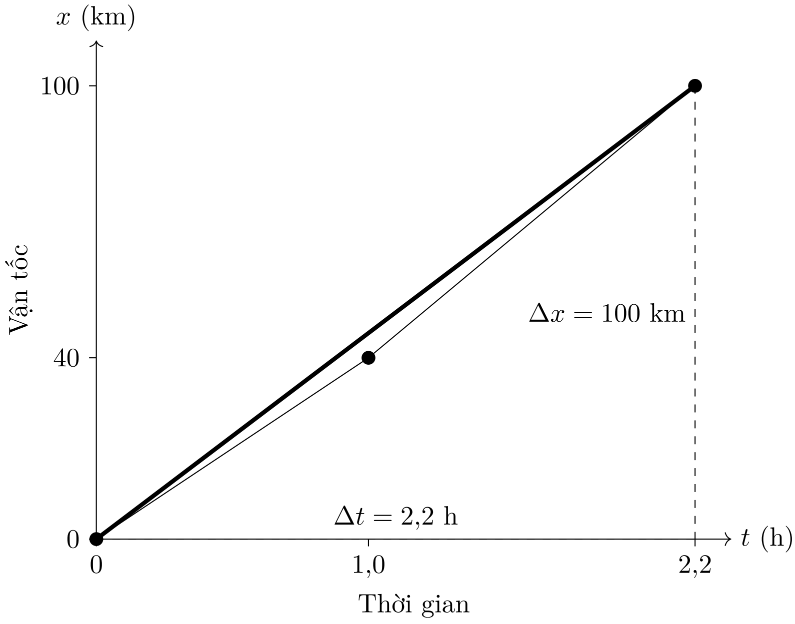
Bài 24: Một ô tô đi 40 km trên một đường thẳng với tốc độ không đổi 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Sau đó, nó đi thêm theo chiều đó 60 km với tốc độ không đổi 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Các giá trị đo được tính đến hai chữ số có nghĩa.

1. Tính vận tốc trung bình trên cả quãng đường.
2. Tính tốc độ trung bình trên cả quãng đường.
3. Nếu xe quay đầu trước khi đi 50 km lúc sau, giữ nguyên các số liệu khác, thì vận tốc trung bình và tốc độ trung bình có thay đổi không. Tại sao?
4. Vẽ đồ thị vị trí x theo thời gian t và từ đó chỉ ra cách tính vận tốc trung bình.

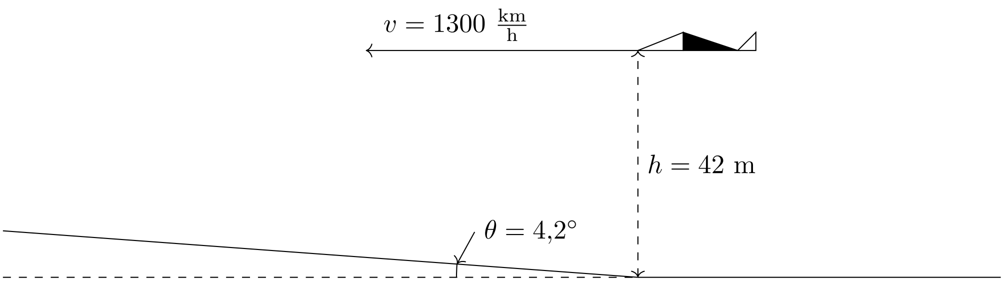
Lời giải bài 24:
Coi chiều chuyển động ban đầu là chiều dương.

1. Thời gian đi 40 km đầu là
$$40\ \text{km} \div 40\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1{,}0\ \text{h}.$$
Thời gian đi 50 km sau là
$$60\ \text{km} \div 50\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1{,}2\ \text{h}.$$
Do hai quãng đường là cùng chiều nên chúng ta có độ dịch chuyển của xe tổng cộng là
$$\Delta x = 40\ \text{km} + 60\ \text{km} = 100\ \text{km}$$
và tổng thời gian đi là
$$\Delta t = 1{,}0\ \text{h} + 1{,}2\ \text{h} = 2{,}2\ \text{h}.$$
Từ đó, chúng ta có vận tốc trung bình là
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \boxed{4{,}5 \times 10^1\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}.$$
2. Dễ thấy tổng quãng đường đi là $d = 100$ km. Tốc độ trung bình là $\bar{s} = \frac{d}{\Delta t} = \boxed{4{,}5 \times 10^1\ \frac{\text{km}}{\text{h}}}$.
3. Thời gian không thay đổi. Có độ dịch chuyển thay đổi còn $\Delta x = 40\ \text{km} - 60\ \text{km} = -20$ km nhưng tổng quãng đường thì không. Do đó, $\boxed{\text{tốc độ trung bình giữ nguyên}}$ nhưng $\boxed{\text{vận tốc trung bình thay đổi}}$.
4. Ta có đồ thị ở hình 2.1 bằng việc vẽ mối quan hệ $x(t)$ xong nối điểm đầu và điểm cuối. Vận tốc trung bình là độ dốc của đường thẳng nối hai điểm này.

Bài 25: Một máy bay phản lực đang bay ngang ở độ cao $h = 42$ mét. Đột nhiên nó bay vào vùng đất dốc lên góc $\theta = 4{,}2°$ (xem hình 2.2). Với tốc độ bay là $v = 1300\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$, thời gian tính từ lúc bay vào vùng đất dốc mà người phi công có để điều chỉnh máy bay là bao nhiêu? Tất cả các số liệu được đo đến hai chữ số có nghĩa.
Lời giải bài 25:



Hình 2.1: Đồ thị vị trí xe-thời gian chạy



Hình 2.2: Vị trí máy bay trong vùng dốc lên

Khoảng cách từ máy bay đến điểm va chạm với mặt đất là

$$d = \frac{h}{\tan(\theta)}.$$

Từ đó, chúng ta có được thời gian cho phép là

$$t = \frac{d}{v} = \frac{h}{v\tan(\theta)}.$$

Thay số trực tiếp, với để ý đến sự quy đổi $v = 1300\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 1300\ \frac{\text{km}}{\text{h}}\frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}}\frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} = 361\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, chúng ta có

$$t = \boxed{1{,}6 \times 10^0\ s}.$$

Bài 26: Cho biết vị trí của một vật chuyển động thẳng được xác định bằng $x(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$. Xác định vị trí, vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm $t = t_0$.

Lời giải bài 26:

Vị trí của vật tại $t = t_0$ là

$$x(t_0) = \boxed{a \cdot t_0^2 + b \cdot t_0 + c}.$$

Vận tốc của vật tại $t = t_0$ là

$$v(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \boxed{2a \cdot t_0 + b}.$$

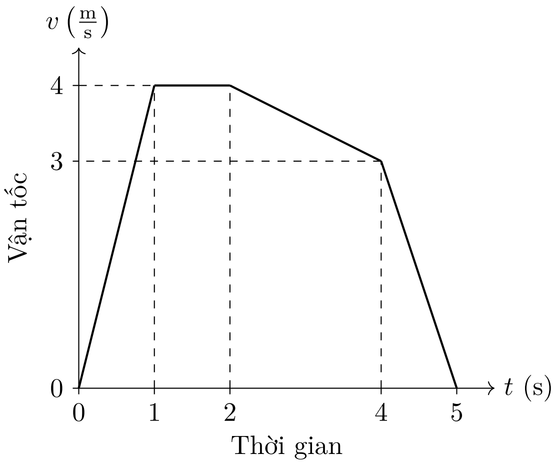
Gia tốc của vật tại $t = t_0$ là

$$a(t_0) = \left.\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \boxed{2a}.$$

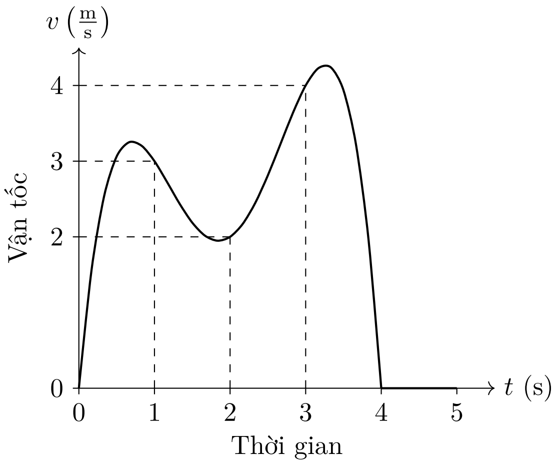
Bài 27: Phác họa đồ thị vị trí - thời gian và gia tốc thời gian của một người chạy bộ nếu đồ thị vận tốc - thời gian của người đó được biểu diễn trên đồ thị

1. hình 2.3;
2. hình 2.4.

Các số liệu được coi như chính xác tuyệt đối. Bạn có thể giả sử người đó bắt đầu chạy từ vị trí $x = 0$.



Hình 2.3: Phần 1



Hình 2.4: Phần 2

Lời giải bài 27:

1. Ta chia quá trình chạy làm 4 phần.

- Phần 1 ($0\ \text{s} \le t \le 1\ \text{s}$): Vận tốc tăng đều từ 0 đến $4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Chuyển động là nhanh dần với gia tốc không đổi là $a(t)|_{t\in[0\ \text{s};1\ \text{s}]} = \frac{v(1\ \text{s})-v(0\ \text{s})}{1\ \text{s}-0\ \text{s}} = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

  Sau khoảng thời gian t, độ dịch chuyển là $x(t)|_{t\in[0\ \text{s};1\ \text{s}]} - x(0\ \text{s}) = \frac{a(t)|_{t\in[0\ \text{s};1\ \text{s}]}\cdot t^2}{2} + v(t)|_{t\in[0\ \text{s};1\ \text{s}]}\cdot t$. Từ đó chúng ta có $x(t) = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t^2$ với $0\ \text{s} \le t \le 1\ \text{s}$ và $x(1\ \text{s}) = 2\ \text{m}$.

- Phần 2 ($1\ \text{s} \le t \le 2\ \text{s}$): Vận tốc không đổi ở $v(t)|_{t\in[1\ \text{s};2\ \text{s}]} = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (chuyển động thẳng đều).

  Qua đó, chúng ta có $x(t)|_{t\in[1\ \text{s};2\ \text{s}]} = x(1\ \text{s}) + v(t)|_{t\in[1\ \text{s};2\ \text{s}]}\cdot(t-1\ \text{s}) = 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot t - 2\ \text{m}$ và $x(2\ \text{s}) = 6\ \text{m}$.

Phần 3 ($2\ \text{s} \le t \le 4\ \text{s}$) và phần 4 ($4\ \text{s} \le t \le 5\ \text{s}$) làm tương tự như phần 1. Ta được

$$\begin{cases} a(t)|_{t\in[2\ \text{s};4\ \text{s}]} & = -\frac{1}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ a(t)|_{t\in[4\ \text{s};5\ \text{s}]} & = -3\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \end{cases}$$

và qua đó

$$\begin{cases} x(t)|_{t\in[2\ \text{s};4\ \text{s}]} & = -\frac{1}{4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(t-2\ \text{s})^2 + 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot(t-2\ \text{s}) + 6\ \text{m} \\ x(t)|_{t\in[4\ \text{s};5\ \text{s}]} & = -\frac{3}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot(t-4\ \text{s})^2 + 3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot(t-4\ \text{s}) + 13\ \text{m} \end{cases}$$

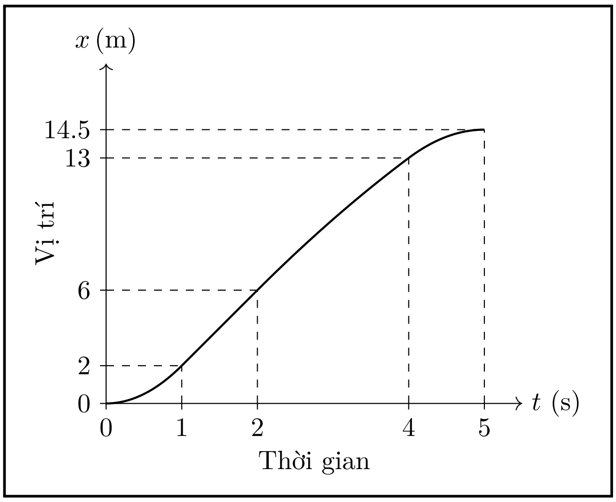
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x(t)|_{t\in[2\ \text{s};4\ \text{s}]} & = -\frac{1}{4}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t^2 + 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot t - 3\ \text{m} \\ x(t)|_{t\in[4\ \text{s};5\ \text{s}]} & = -\frac{3}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t^2 + 15\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot t - 23\ \text{m} \end{cases}.$$

Cuối cùng, chúng ta có thể biểu diễn vị trí của người chạy trên đồ thị như hình 2.5.

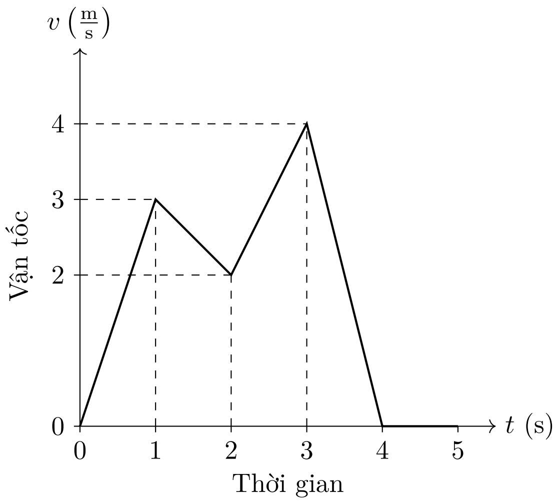
2. Chúng ta có thể phác họa đồ thị vị trí - thời gian bằng việc xấp xỉ đồ thị vận tốc - thời gian dưới dạng đường gấp khúc nối các điểm đã biết thể hiện ở 2.6.

Từ đây, thực hiện tương tự như phần 1 để có phương trình vị trí - thời gian

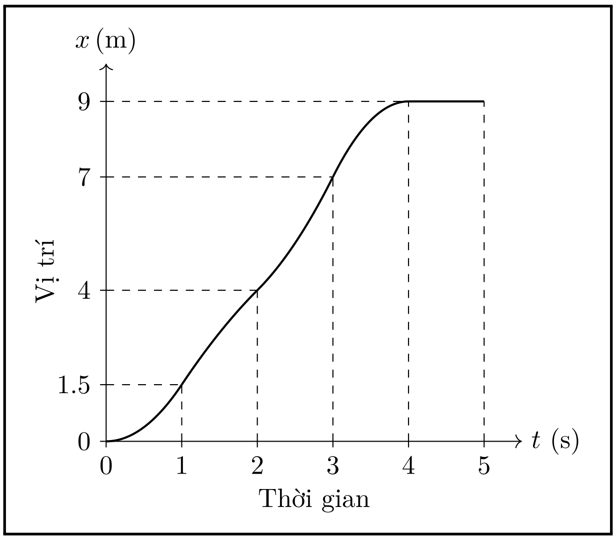
$$x(t) = \begin{cases} \frac{3}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t^2 & \text{với } 0 \le t < 1\ \text{s} \\ -\frac{1}{2}\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t^2 + 4\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot t - 2\ \text{m} & \text{với } 1\ \text{s} \le t < 2\ \text{s} \\ 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t^2 - 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot t + 4\ \text{m} & \text{với } 2\ \text{s} \le t < 3\ \text{s} \\ -2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot t^2 + 16\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\cdot t - 23\ \text{m} & \text{với } 3\ \text{s} \le t < 4\ \text{s} \\ 9\ \text{m} & \text{với } 4\ \text{s} \le t \le 5\ \text{s} \end{cases}$$



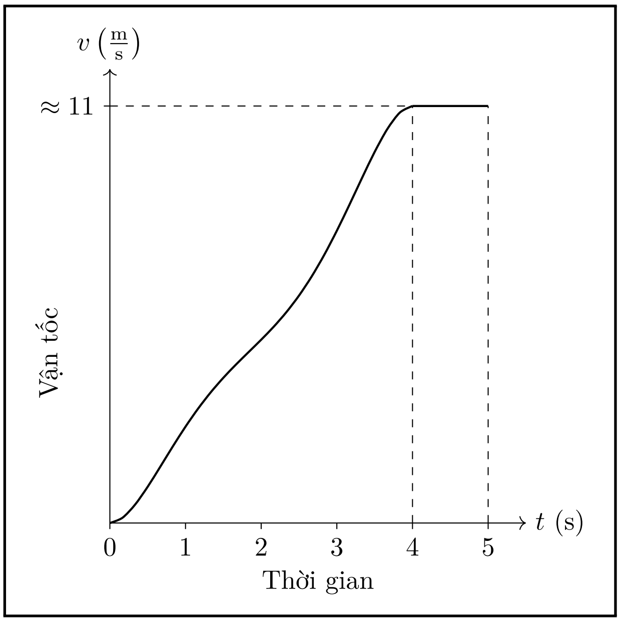
Hình 2.5: Đồ thị vị trí - thời gian cho phần 1



Hình 2.6: Vận tốc - thời gian xấp xỉ của phần 2



Hình 2.7: Vị trí - thời gian (xấp xỉ) cho phần 2



Hình 2.8: Đồ thị vị trí - thời gian cho phần 2

và chúng ta vẽ được đồ thị ở hình 2.7.

Trong thực tiễn, chúng ta hay xấp xỉ những quá trình không tuyến tính qua hữu hạn những điểm đo rồi nội suy tuyến tính (nối các điểm bằng các đoạn thẳng) như đã làm. Còn nhiều phương pháp nội suy nữa còn có thể được tìm thấy trong những tài liệu về phương pháp tính và giải tích số. Thông thường, với càng nhiều điểm thì độ chính xác càng lớn.

Trong trường hợp mà bạn nhận ra phương trình vận tốc - thời gian được cho là

$$v(t) = \begin{cases} \dfrac{-t\left(4\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^5}\cdot t^3 - 31\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4}\cdot t^2 + 77\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\cdot t - 68\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{6} & \text{với } 0 \le t < 4 \\ 0 & \text{với } 4 \le t \le 5 \end{cases}$$

thì bạn có thể thực hiện nguyên hàm trên hàm này để tính được vị trí vật là

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{-t^2\left(48\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^5}\cdot t^3 - 465\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^4}\cdot t^2 + 1540\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3}\cdot t - 2040\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)}{360} & \text{với } 0 \le t < 4 \\ \dfrac{496}{45}\ \mathrm{m} & \text{với } 4 \le t \le 5 \end{cases}$$

và chúng ta có đồ thị như hình 2.8.

Bài 28: Hai xe hơi có tốc độ lần lượt là $v_1 = 50{,}0\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ và $v_2 = 60{,}0\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ đi ngược chiều với nhau trên một con đường hẹp. Hai xe phát hiện lẫn nhau khi khoảng cách giữa hai xe là $d = 400$ m. Cả hai xe đồng thời giảm tốc với cùng một gia tốc hãm đều là a. Tính giá trị tối thiểu của a nếu biết hai xe không xảy ra va chạm. Số liệu được đo tới 3 chữ số có nghĩa.

Lời giải bài 28:

Gọi quãng đường đi được trong khi hãm phanh của hai xe lần lượt là d_1 và d_2.

Trong quá trình hãm đến vận tốc bằng 0, tổng quãng đường đi của cả hai xe phải không vượt quá khoảng cách d. Vì vậy, chúng ta có bất đẳng thức

$$d_1 + d_2 \le d.$$

Trong khi đó, quãng đường xe thứ nhất đã di chuyển là $d_1 = \frac{0^2 - v_1^2}{2(-a)} = \frac{v_1^2}{2a}$. Tương tự, chúng ta có quãng đường mà xe thứ hai di chuyển trong khoảng thời gian này là $d_2 = \frac{v_2^2}{2a}$. Từ đó, thay vào phương trình ở trên để được

$$\frac{v_1^2}{2a} + \frac{v_2^2}{2a} \le d \iff a \ge \frac{v_1^2 + v_2^2}{2d}.$$

Thay số trực tiếp, chúng ta có gia tốc hãm tối thiểu phải là $\boxed{7{,}63 \times 10^3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2}}$.

Bài 29: Để dừng xe ban đầu bạn cần một thời gian phản ứng để bắt đầu phanh, rồi xe mới đi chậm dần nhờ có một gia tốc hãm không đổi. Giả sử quãng được đi được trong hai pha này là 186 ft nếu vận tốc ban đầu là 50 $\frac{\text{dặm}}{\mathrm{h}}$. Còn trong một trường hợp khác, quãng được đi được trong hai pha này là 80 ft nếu vận tốc ban đầu là 30 $\frac{\text{dặm}}{\mathrm{h}}$. Biết thời gian phản ứng là cố định và 1 dặm = 5280 ft, tính thời gian phản ứng và độ lớn của gia tốc hãm.

Lời giải bài 29:

Gọi thời gian phản ứng là t_p, vận tốc đầu là v_0, gia tốc hãm là a.

Trong khoảng thời gian phản ứng, xe đi được $v_0 t_p$. Và trong khoảng thời gian hãm, xe đi được $\frac{0^2 - v_0^2}{2(-a)} = \frac{v_0^2}{2a}$. Cho nên, tổng quãng đượt đi được trong hai pha là

$$\Delta x = v_0 t + \frac{v_0^2}{2a} \tag{2.1}$$

Trước khi thay số, thực hiện quy đổi

$$50\ \frac{\text{dặm}}{\mathrm{h}} = 50\ \frac{\text{dặm}}{\mathrm{h}} \cdot \frac{5280\ \mathrm{ft}}{1\ \text{dặm}} \cdot \frac{1\ \mathrm{h}}{3600\ \mathrm{s}} \approx 73\ \frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}},$$

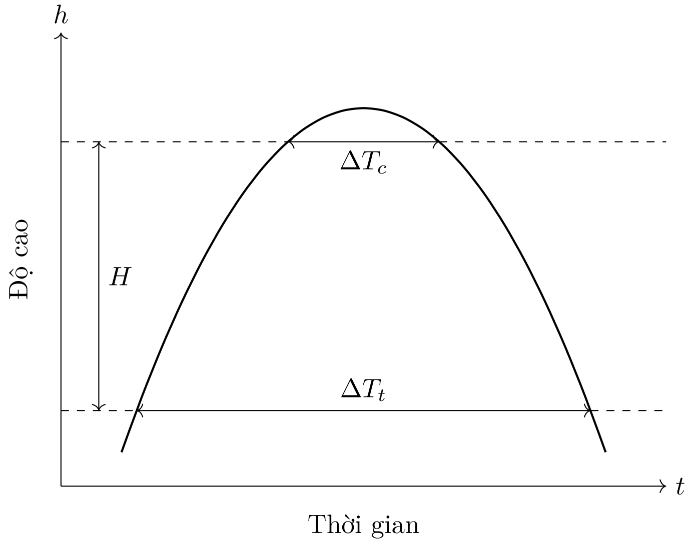
tương tự, 30 $\frac{\text{dặm}}{\mathrm{h}} = 44\ \frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}}$. Từ đó, thay số vào phương trình 2.1 để có hệ

$$\begin{cases} 186\ \mathrm{ft} = 73\ \frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}} \cdot t_p + \frac{\left(73\ \frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2a} \\ 80\ \mathrm{ft} = 44\ \frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}} \cdot t_p + \frac{\left(44\ \frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}}\right)^2}{2a} \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình, chúng ta có thời gian phản ứng là $t_p = \boxed{0{,}97\text{ s}}$ và gia tốc hãm là $a = \boxed{26\ \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}}$.

Bài 30: Tại Phòng Thí nghiệm Vật lí Quốc gia ở Anh, người ta thực hiện xác định gia tốc trọng trường g theo thí nghiệm sau: Ném một quả bóng thủy tinh lên theo chiều thẳng đứng trong ống chân không và cho nó rơi xuống. Gọi ΔT_t trên hình 2.9 là thời gian khoảng giữa hai lần quả bóng đi qua một điểm thấp nào đó. ΔT_c là khoảng thời gian giữa hai lần quả bóng đi qua một điểm cao hơn và H là khoảng cách giữa hai điểm. Chứng minh rằng

$$g = \frac{8H}{\Delta T_t^2 - \Delta T_c^2}.$$



Hình 2.9: Đồ thị thời gian - độ cao của quả bóng thủy tinh

Lời giải bài 30:

Gọi vận tốc khi bóng bắt đầu bay lên từ vị trị thấp là v_0. Sau một khoảng thời gian ΔT_t, quả bóng quay lại vị trí cũ, do vậy, chúng ta có phương trình $0 = -\frac{g\Delta T_t^2}{2} + v_0 \Delta T_t$. Thực hiện biến đổi tương đương để có

$$v_0 = \frac{g\Delta T_t}{2}.$$

Nhận thấy rằng đồ thị có tính đối xứng. Sử dụng điều đó, chúng ta tính được khoảng thời gian quả bóng lên một độ cao H là $t = \frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}$. Qua đó, có được phương trình thứ hai là

$$H = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t = -\frac{g\left(\frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}\right)^2}{2} + v_0\left(\frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}\right).$$

Thế giá trị của v_0 vào phương trình và tiếp tục thực hiện biến đổi, chúng ta có:

$$\begin{aligned} H &= -\frac{g\left(\Delta T_t - \Delta T_c\right)^2}{8} + \frac{g\Delta T_t}{2}\left(\frac{\Delta T_t - \Delta T_c}{2}\right) \\ &= -g\left(\frac{\Delta T_t^2}{8} - \frac{\Delta T_t \Delta T_c}{4} + \frac{\Delta T_c^2}{8}\right) + g\left(\frac{\Delta T_t^2}{4} - \frac{\Delta T_t \Delta T_c}{4}\right) \\ &= g \cdot \frac{\Delta T_t^2 - \Delta T_c^2}{8} \\ \iff g &= \frac{8H}{\Delta T_t^2 - \Delta T_c^2}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 31: Một nghệ sĩ tung hứng các quả bóng lên theo phương thẳng đứng. Quả bóng sẽ lên cao hơn bao nhiêu nếu thời gian bóng trong không khí tăng gấp n lần ($n \in \mathbb{R}^+$)?

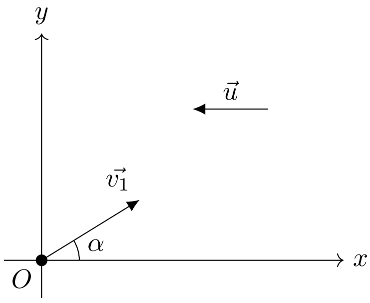
Lời giải bài 31:

Có thời gian để quả bóng bay từ tay lên trên vị trí cao nhất bằng một nửa thời gian bóng trong không khí. Nếu thời gian bóng trong không khí tăng gấp n lần so với thời gian trong không khí gốc, thì cùng chia cho 2, chúng ta cũng sẽ có thời gian bóng bay từ tay lên trên vị trí cao nhất cũng tăng gấp n lần so với thời gian gốc để bay lên vị trí cao nhất.

Gọi t_1 là thời gian gốc để bóng bay từ tay lên vị trí cao nhất, $t_2 = nt_1$ là thời gian bay khi đã tăng n lần. Gọi h_1, h_2 lần lượt là độ cao bóng đi được tương ứng với hai khoảng thời gian t_1, t_2. Để ý rằng khi lên vị trí cao nhất thì vận tốc bóng là 0; chúng ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} h_1 &= \frac{gt_1^2}{2} \\ h_2 &= \frac{gt_2^2}{2} = \frac{g(nt_1)^2}{2} \end{cases} \implies h_2 = n^2 h_1.$$

Từ đó, quả bóng cao lên hơn được $\boxed{n^2 - 1 \text{ lần độ cao gốc}}$.



Hình 2.10: Hình minh họa cho bài 32

Bài 32: Như trong hình 2.10, một vật nhỏ có khối lượng m chỉ di chuyển từ gốc O trong mặt phẳng Oxy được cung cấp một vận tốc ban đầu $\overrightarrow{v_1}$ trong vùng không gian có gió thổi với vận tốc $\vec{u} = -u\overrightarrow{e_x}$.

Tài liệu tham khảo

[1] Agarwal, R.P., Perera, K., Pinelas, S. (2011). *History of Complex Numbers*. In: An Introduction to Complex Analysis. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0195-7_50