Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 28 tháng 9 năm 2025

Mục lục

Lời giới thiệu

0.

Kiến thức toán học nền tảng

Chương này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lí và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Kể như, trong tài liệu này, khi nhắc về hàm số, không có phần về đơn ánh hay toàn ánh. Những khái niệm này là vô cùng quan trọng nếu tập trung chứng minh chặt chẽ các tính chất liên quan đến hàm số, nhưng không phục vụ nhiều trong ứng dụng thực tiễn. Thay vào đó, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn, bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán, mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lí thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lí sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lí. Thứ hai, vật lí không dùng nhiều đến lí thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lí không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lí thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lí đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh[1]. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lí, và giống rất nhiều công trình vật lí hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lí. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lí hay kĩ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường. Các lí thuyết bình thường được đặt ở cùng chỗ thì sẽ tách nhau ra, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách "tôn giáo hóa". Tác giả vẫn đưa một số lí thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lí thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lí thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

[1] Albert Einstein (1879 - 1955)

0.1 Thuộc tính của hàm số

Trước phần này, chúng ta mới chỉ xét nghiệm của hàm và hình dạng của hàm số thông qua đồ thị. Nhìn vào đồ thị, chúng ta có thể thấy được hàm số có nhiều thành phần đặc biệt. Ở trong phần này, chúng ta sẽ gọi tên và khảo sát những thành phần đặc biệt đó.

0.1.1 Hàm chẵn và hàm lẻ

Phần tính chất đầu tiên mà chúng ta quan tâm đến là tính đối xứng của hàm số trên đồ thị. Nhắc lại một chút kiến thức hình học, một hình có thể có hai kiểu đối xứng là đối xứng trục và đối xứng điểm. Tạm thời, chúng ta chỉ quan tâm đến những trường hợp đối xứng cụ thể. Với đồ thị của một hàm số, một cách khá tự nhiên, chúng ta sẽ xem xét tính đối xứng trục tung hoặc qua điểm gốc tọa độ.

Đầu tiên là đối xứng qua trục tung. Một hàm số có tính đối xứng như vậy được gọi là **hàm chẵn**. Cụ thể, cho $f(x)$ là một hàm số xác định trên A. $f(x)$ là hàm chẵn nếu $\boldsymbol{x \in A \implies -x \in A}$ và

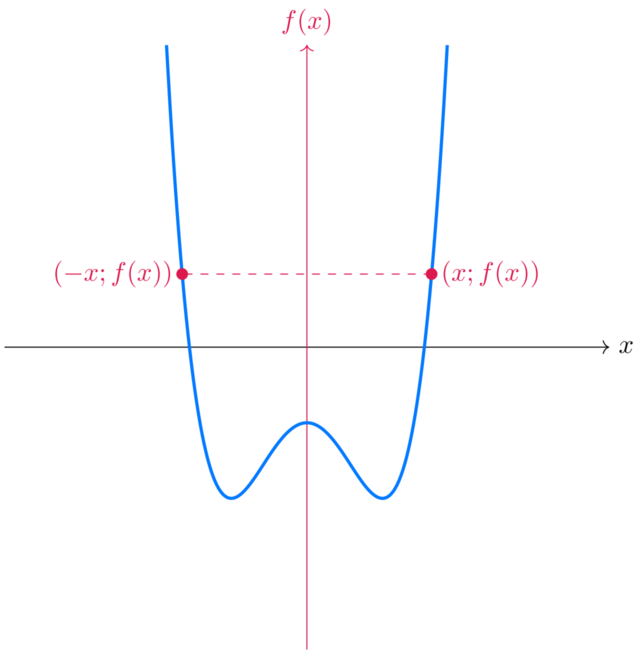
$$\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

với mọi $x \in A$.

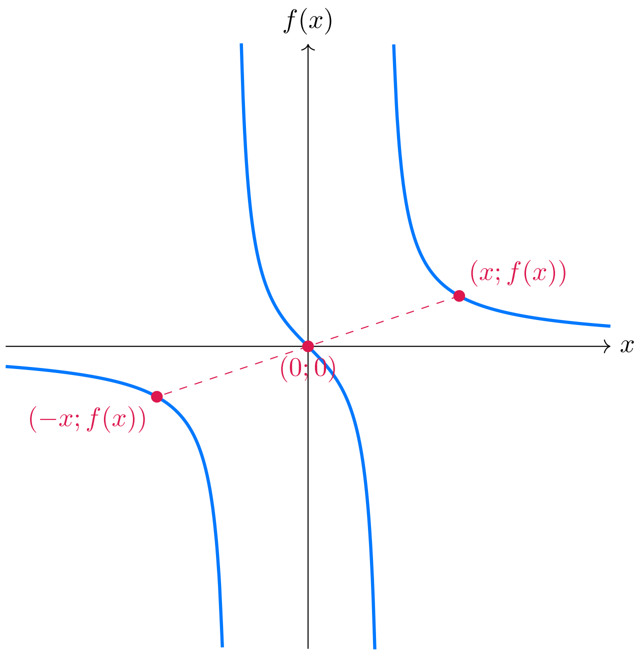
Tương tự, $f(x)$ được gọi là **hàm lẻ** nếu $\boldsymbol{x \in A \implies -x \in A}$ và

$$\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$$

với mọi $x \in A$. Khi này, hàm sẽ đối xứng qua gốc tọa độ.



Hình 0.1: Đồ thị của một hàm chẵn



Hình 0.2: Đồ thị của một hàm lẻ

Bài 1: Xác định xem những hàm sau có phải là hàm chẵn, hàm lẻ hay không. Sau đó, vẽ đồ thị của chúng.

1. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
2. $f(x) = x^5 - x^3 + x$;
3. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$;
4. $f(x) = \frac{x^3 - \frac{1}{x^3}}{x + \frac{1}{x}}$;
5. $f(x) = |x|^2 - \left|x^3\right| + 1$;
6. $f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$.

Lời giải bài 1:

1. Tập xác định của hàm là $\mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, có $-x \in \mathbb{R}$ và

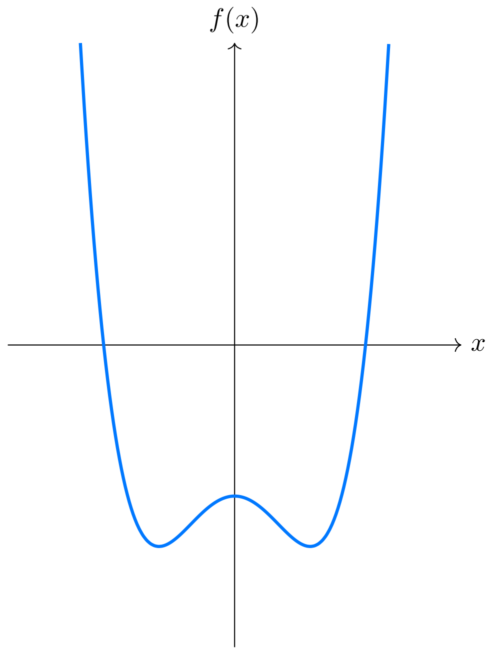
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - 2(-x)^2 - 3 \\ &= x^4 - 2x^2 - 3 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là hàm chẵn.

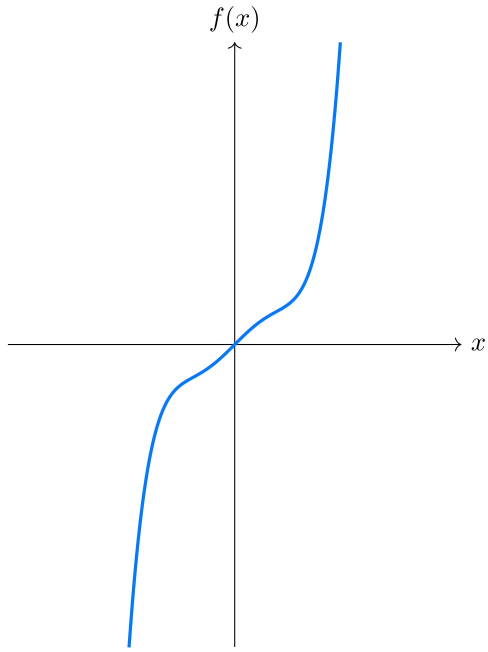
2. Tập xác định của hàm là $\mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, có $-x \in \mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 - (-x)^3 + (-x) \\ &= -x^5 + x^3 - x \\ &= -\left(x^5 - x^3 + x\right) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là hàm lẻ.



Hình 0.3: Đồ thị của $x^4 - 2x^2 - 3$



Hình 0.4: Đồ thị của $x^5 - x^3 + x$

3. Tập xác định của hàm là $\mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, có $-x \in \mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-x}{(-x)^2 + 1} \\ &= \frac{-x}{x^2 + 1} \\ &= -\frac{x}{x^2 + 1} \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là hàm lẻ.

4. Tìm tập xác định, x làm cho $f(x)$ thỏa mãn khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x + \frac{1}{x} \neq 0 \end{cases}.$$

Từ bất phương trình thứ hai, với điều kiện $x \neq 0$:

$$x + \frac{1}{x} \neq 0 \implies x^2 + 1 \neq 0$$

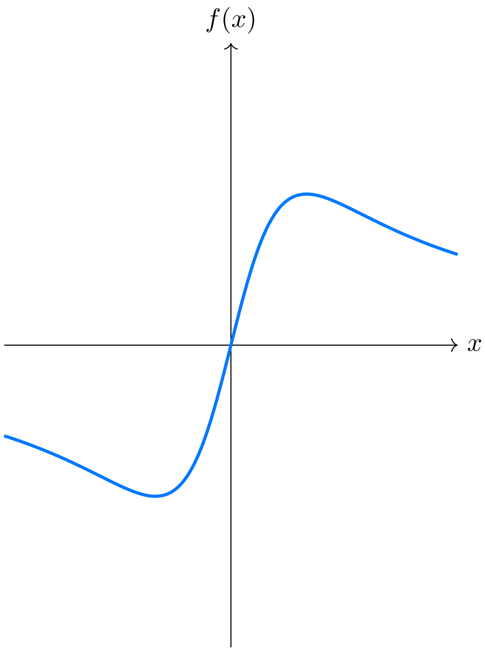
luôm đúng. Cho nên, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Để ý rằng, với x thuộc tập xác định, thì có $x \neq 0 \iff -x \neq 0$. Cho nên $-x$ cũng thuộc tập xác định và

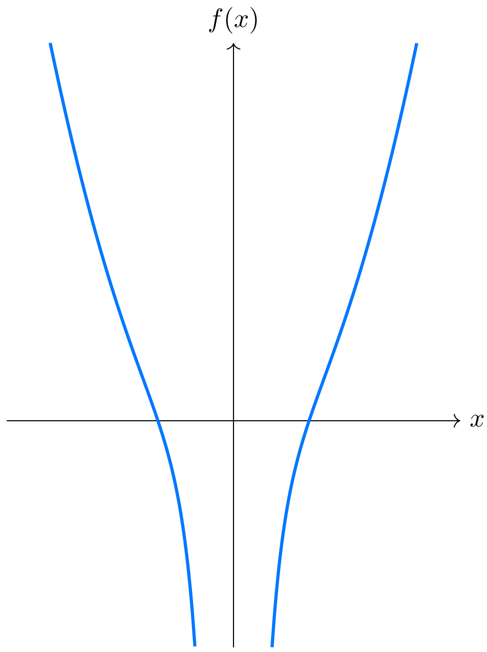
$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^3 - \frac{1}{(-x)^3}}{-x + \frac{1}{-x}} \\ &= \frac{-x^3 - \frac{1}{-x^3}}{-x - \frac{1}{x}} \\ &= \frac{-\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)}{-\left(x + \frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^3 - \frac{1}{x^3}}{x + \frac{1}{x}} = f(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm chẵn.



Hình 0.5: Đồ thị của $\frac{x}{x^2+1}$



Hình 0.6: Đồ thị của $\frac{x^3-\frac{1}{x^3}}{x+\frac{1}{x}}$

5. Tập xác định của hàm là $\mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, có $-x \in \mathbb{R}$ và

$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x|^2 - \left|(-x)^3\right| + 1 \\ &= |x|^2 - \left|-x^3\right| + 1 \\ &= |x|^2 - \left|x^3\right| + 1 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ là hàm chẵn.

6. Tập xác định của hàm là $\mathbb{R}$.

Nếu $x \in \mathbb{Z}$ thì $\begin{cases} \lceil x \rceil = x \\ \lfloor x \rfloor = x \end{cases} \implies \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 0.$

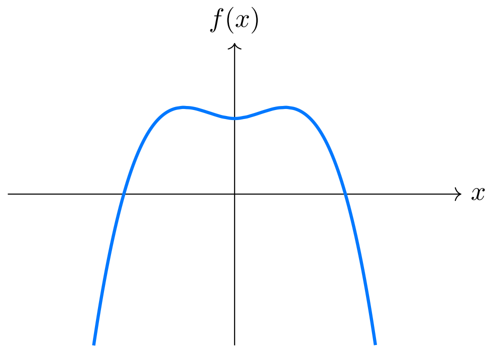
Trong trường hợp còn lại, $x \notin \mathbb{Z}$. Đặt $\lfloor x \rfloor = n$ với n nguyên. Điều này tương đương với $n \leq x < n+1$. Do x không phải là số nguyên nên $n \neq x$, cho nên $n < x < n+1 \implies n < x \leq n+1 \iff \lceil x \rceil = n+1$. Do đó,

$$\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = (n+1) - n = 1.$$

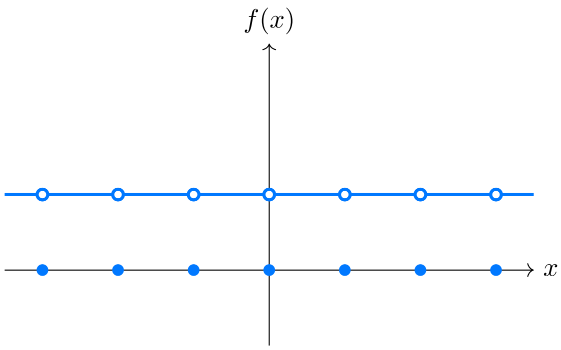
Cho nên, có thể viết lại hàm đã cho bằng

$$f(x) = \lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \in \mathbb{Z} \\ 1 & \text{nếu } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Hiển nhiên rằng $f(x) = f(-x)$ là hàm chẵn.



Hình 0.7: Đồ thị của $|x|^2 - \left|x^3\right| + 1$



Hình 0.8: Đồ thị của $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor$

Bài 2: Tìm một hàm f xác định trên tập số thực sao cho f vừa mang tính chẵn, vừa mang tính lẻ. Chứng minh tại sao hàm đó là hàm duy nhất thỏa mãn điều kiện này.
Lời giải bài 2:
Hàm $f(x) = 0$ với mọi x là hàm duy nhất thỏa mãn điều kiện này. Thật vậy, giả sử f là một hàm có tính chẵn và lẻ thì với mọi x:

$$\begin{aligned} & f(x) = f(-x) = -f(x) \\ \implies & 2f(x) = 0 \\ \implies & f(x) = 0. \end{aligned}$$

Bằng sự quy chiếu đơn giản với định nghĩa, chúng ta có hàm f này thỏa mãn. Vậy, chúng ta có hàm

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \{0\} \\ x &\mapsto 0 \end{aligned}$$

thỏa mãn và đã được chứng minh là duy nhất.
Bài 3: Cho hàm f xác định trên đoạn $[-a; a]$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một bộ hai hàm số $(振; 禮)$ sao cho $振$ là hàm chẵn, $禮$ là hàm lẻ và $f(x) = 振(x) + 禮(x)$ với mọi $x \in [-a; a]$.
Lời giải bài 3:
Giả sử bộ hai hàm số này tồn tại, khi này

$$f(-x) = 振(-x) + 禮(-x) = 振(x) - 禮(x).$$

Do đó, kết hợp với $f(x) = 振(x) + 禮(x)$, thực hiện một số biến đổi đại số để có

$$\begin{cases} 振(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \\ 禮(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}.$$

Vậy, nếu bộ hai hàm số này tồn tại thì chỉ có thể nhận giá trị là

Tài liệu tham khảo

[1] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.