Ôn tập Vật Lí

Bùi Nhật Minh

Ngày 25 tháng 9 năm 2025

Mục lục

Lời giới thiệu

0.

Kiến thức toán học nền tảng

Chương này bao gồm các kiến thức toán học cần thiết để xây dựng lí thuyết của môn vật lí (hoặc ít nhất để đọc tài liệu này), giả sử rằng bạn đọc đã có một chút kiến thức đại số và hình học trung học phổ thông từ ghế nhà trường. Một điều cần lưu ý là chương này sẽ bao hàm những phần không nằm trong chương trình trung học phổ thông và có thể cả chương trình đại học. Mặc dù rằng là tác giả đã bao hàm rất nhiều toán trong chương, nhưng tác giả không có ý định viết để thay thế toàn bộ giáo trình toán. Các cuốn giải tích, đại số tuyến tính, hình học phẳng, hình học không gian, xác suất, và các cuốn giáo trình toán khác đều có vị trí đứng của chúng. Điều mà tác giả mong muốn tài liệu này có được chính là sự tổng hợp của kiến thức toán sao cho phù hợp với các ngành vật lí và sự bù đắp cho những lỗ hổng mà tác giả còn thấy ở tài liệu toán hiện hành ở Việt Nam. Kể như, trong tài liệu này, khi nhắc về hàm số, không có phần về đơn ánh hay toàn ánh. Những khái niệm này là vô cùng quan trọng nếu tập trung chứng minh chặt chẽ các tính chất liên quan đến hàm số, nhưng không phục vụ nhiều trong ứng dụng thực tiễn. Thay vào đó, tài liệu được đưa thêm những dạng bài tập, như các dạng bài liên quan đến hàm số rời rạc được cho dưới dạng bảng, mà bạn đọc ít khả năng nhìn thấy ở trong những tài liệu khác. Không phải dạng bài tập mới là để bạn đọc trở nên hứng thú hơn, bởi dĩ tác giả khi soạn đáp án còn thấy chán, mà điều quan trọng là tìm ra nguyên nhân từ cái chán đó, và tìm cách chấm dứt triệt để cái chán bằng việc kết nối các bài toán lại với nhau, và rút ra một quy luật tổng quát giữa chúng. Suy cho cùng, sau khi bạn đọc làm nhiều bài tập, tác giả kì vọng, hơn cả việc bạn đọc tính toán nhanh và thành thạo (đương nhiên điều này cũng rất tốt), chính là việc hiểu rõ bản chất của các mảng lí thuyết và từ đó ứng dụng vào các trường hợp khác nhau.

Thông thường, các tài liệu vật lí sẽ lược qua hay tối giản phần toán, với ba ngầm định. Thứ nhất, sẽ có tài liệu toán ứng dụng đi kèm với tài liệu vật lí. Thứ hai, vật lí không dùng nhiều đến lí thuyết toán chuyên sâu hay chứng minh chặt chẽ. Và thứ ba, vật lí không nên dùng đến các tính toán phức tạp mà nên tập trung nhiều vào phần thông hiểu lí thuyết và ứng dụng đời sống. Tuy nhiên, tác giả lại không định hướng tài liệu đi theo những quan điểm này. Các mô hình vật lí đều có toán học phụ trợ đằng sau và chứng minh toán học mới là thứ xây dựng mô hình để dự đoán tương lai. Lấy ví dụ, thuyết tương đối rộng của Anh-xtanh[1]. Đây là thuyết có thể nói được kiểm chứng thực nghiệm nhiều lần nhất trong vật lí, và giống rất nhiều công trình vật lí hiện đại khác, được xây dựng từ bút, giấy, và nhiều công cụ toán và một chút góc nhìn sáng tạo của vật lí. Quay trở về hiện tại, theo tác giả, nếu như nhà vật lí hay kĩ sư mà không làm được toán cao cấp, thì có lẽ họ nên chuyển nghề. Cho nên, trong tài liệu này, tác giả không chỉ đưa nhiều toán, mà còn đưa ra toán theo con đường khác với con đường thông thường. Các lí thuyết bình thường được đặt ở cùng chỗ thì sẽ tách nhau ra, không phải là cố tình phức tạp hóa, mà là để thể hiện tính mạch lạc của toán, nhấn mạnh rằng toán có thể tư duy được chứ không chỉ là thuộc lòng một cách "tôn giáo hóa". Tác giả vẫn đưa một số lí thuyết dựa trên ngôn ngữ đời thường, nhưng nếu có thể, tác giả sẽ đưa định nghĩa hay chứng minh theo toán học thuần túy, dựa trên những lí thuyết đã có trước đó.

Có thể những kiến thức này đã cũ và bạn đọc chỉ muốn làm nóng lại kiến thức ở những phần cần thiết, thì bạn đọc có thể bỏ qua một vài phần của chương này. Nhưng nếu bạn đọc thấy những kiến thức này còn mới, còn nhiều lỗ hổng, thì bạn đọc nên đọc kĩ lưỡng. Hi vọng từ lí thuyết và bài tập, bạn đọc có thể hiểu được góc nhìn của tác giả về toán, và tự xây dựng cho mình một ma trận kiến thức riêng để phục vụ sau này.

[1] Albert Einstein (1879 - 1955)

0.1 Hàm số đại số một biến và các phép biến đổi trên hàm

0.1.1 Hàm số xác định từng phần

Không phải lúc nào hàm số trong đời sống có thể biểu diễn dưới dạng một biểu thức. Khi này, chúng ta sẽ chia nhỏ đồ thị của hàm số thành các phần nhỏ, và biểu diễn từng phần thông qua biểu thức. Đó cũng là lí do cho tên gọi **hàm số xác định từng phần**.

Một ví dụ là hàm giá trị tuyệt đối. Khả năng cao bạn đọc đã biết rằng giá trị tuyệt đối của một số x[2] được xác định như sau,

$$|\boldsymbol{x}| = \begin{cases} \boldsymbol{x} \text{ nếu } \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{x} \text{ nếu } \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0} \end{cases}.$$

Đây là hàm có tính thông dụng cao, và nếu thông dụng thì người ta sẽ tìm ra những tính chất quan trọng để sử dụng. Tác giả sẽ liệt kê ra một vài tính chất như sau: Với mọi số thực x và y,

- $|xy| = |x||y|$;
- $|x| + |y| \geq |x + y| \geq |x| - |y|$.

Từ đây, chúng ta có một số mối quan hệ. Ví dụ:

$$|-x| = |(-1)x| = |-1||x| = |x|.$$

Hai hàm từng phần khác cũng quan trọng nhưng ít khi được đề cập đến là **hàm sàn** (hay **hàm phần nguyên**, **hàm làm tròn xuống**) và **hàm trần** (hay **hàm làm tròn lên**). Hàm sàn tác dụng lên x sẽ làm tròn xuống x đến số nguyên lớn nhất không vượt quá x với kí hiệu là $\lfloor \boldsymbol{x} \rfloor$. Tương tự, hàm trần của x làm tròn lên x đến số nguyên nhỏ nhất không vượt quá x với kí hiệu là $\lceil \boldsymbol{x} \rceil$.

Ví dụ:

- $\lfloor 2{,}5 \rfloor = 2$;
- $\lfloor -2{,}5 \rfloor = -3$;
- $\lfloor 2 \rfloor = 2$;
- $\lceil 2{,}5 \rceil = 3$;
- $\lceil -2{,}5 \rceil = -2$;
- $\lceil 2 \rceil = 2$.

Và rõ ràng rằng không phải mọi giá trị trong tự nhiên và xã hội đều biểu diễn tốt nhất dưới dạng số thập phân. Chúng ta không mấy khi cắt nửa quả táo để bán cho nhau, hay không có bãi đỗ xe nào nhận đỗ 0,2 cái xe (hoặc ít nhất tác giả chưa thấy bãi nào như vậy).

Tương tự như hàm giá trị tuyệt đối, hàm sàn và hàm trần cũng có một số tính chất. Trong đó, phải kể đến tính chất hay được dùng nhất (theo góc nhìn chủ quan của tác giả) mà phục vụ việc xác định giá trị của hàm trần, hay hàm sàn là: Nếu n là số nguyên và x là số thực thì

$$\begin{cases} n \leq x < n+1 \iff \lfloor x \rfloor = n \\ n-1 < x \leq n \iff \lceil x \rceil = n \end{cases}.$$

Đầu tiên, chúng ta sẽ chứng minh $n \leq x < n+1 \iff \lfloor x \rfloor = n$. Chứng minh chiều xuôi, giả sử $n \leq x < n+1$. Gọi M_m là tập hợp các số nguyên không vượt quá x. Rõ ràng rằng M_m khác rỗng, do có n làm phần tử. Ngoài ra, mọi số nguyên $a > n$ không làm phần tử của M_m vì $a > n \iff a \geq n+1 \implies a > x$. Kết hợp lại, mọi phần tử b trong M_m phải thỏa mãn $b \leq n$. Do đó, n là số nguyên lớn nhất không vượt quá x, hay $\lfloor x \rfloor = n$.

Để chứng minh chiều ngược lại, giả sử $\lfloor x \rfloor = n$. Từ định nghĩa, $n \leq x$. Ngoài ra, nếu $n+1 \leq x$, có $n+1 > n$, cho nên $n+1$ sẽ vi phạm vai trò của n, tạo nên mâu thuẫn. Do đó, $x < n+1$. Kết hợp hai chiều, chúng ta có chứng minh đầu tiên.

Để giải những vấn đề với hàm xác định giá trị từng phần, tương tự như cái tên, chúng ta chủ yếu chia bài toán theo các trường hợp phù hợp với từng phần của hàm đầu vào.

Bài 1: Giải các phương trình và bất phương trình sau trên ẩn x thực:

[2] Nếu không biết thì bạn đọc đọc qua phần đồ thị vẫn hiểu chứ?

1. $|x+4| = 9$;
2. $|x-3| = -9$;
3. $|7-2x| < 9$;
4. $|3+6x| \geq 9$;
5. $2x+3+|3x+4| > 0$;
6. $|x+4| = |7x-12|$;
7. $|6x+9| > |6x-3|$;
8. $|2x+2| + |x+1| = 9$;
9. $|3x+3| + |3x-4| \leq 7$;
10. $\left|2(x-1)^2 - 4\right| = 2$;
11. $\left|2x^2-2x-2\right| = \left|3x^2-4x-2\right|$;
12. $\left|x^3-3x^2+x\right| \leq |x|$.

Lời giải bài 1:

1. Xét hai trường hợp:

Trường hợp một — $x+4 \geq 0$. Khi này, phá dấu giá trị tuyệt đối để có $|x+4| = x+4$. Cho nên phương trình ban đầu sẽ tương đương với:

$$x+4 = 9 \iff x = 5.$$

Trường hợp hai — $x+4 < 0$. Khi này,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |x+4| = 9 \\ x+4 < 0 \end{cases} \\ \iff & -(x+4) = 9 \qquad \text{(Phá dấu giá trị tuyệt đối: } |x+4| = -(x+4).\text{)} \\ \iff & x+4 = -9 \iff x = -13. \end{aligned}$$

Kết hợp hai trường hợp, có được $x \in \{5; -13\}$. Thử lại trực tiếp thấy thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{5; -13\}$.

2. Đặt $f(x) = |x|$.

Nếu $x \geq 0$ thì $f(x) = |x| = x$ và hiển nhiên $f(x) \geq 0$. Nếu $x < 0$ thì $f(x) = |x| = -x$. Có $x < 0 \iff -x > 0 \iff f(x) > 0$.

Kết hợp lại, chúng ta có $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Suy ra được rằng $f(x-3) \geq 0$. Tuy nhiên, phương trình được cho có thể được viết lại là $f(x-3) = -9$. Do đó, phương trình vô nghiệm.

Sai lầm thường gặp ở dạng bài này là có suy luận như sau:

$$|x-3| = -9 \iff \left[\begin{array}{l} x-3 = -9 \\ x-3 = 9 \end{array}\right. .$$

3. Một lần nữa, xét hai trường hợp:

Trường hợp một — $7-2x \geq 0$. Thực hiện biến đổi:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} |7-2x| < 9 \\ 7-2x \geq 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} 7-2x < 9 \\ 7-2x \geq 0 \end{cases} \\ \iff & 0 \leq 7-2x < 9 \\ \iff & -7 \leq -2x < 2 \\ \iff & \frac{7}{2} \geq x > -1. \end{aligned}$$

Trường hợp hai — $7-2x < 0$:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} |7-2x|<9 \\ 7-2x<0 \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} -(7-2x)<9 \\ 7-2x<0 \end{cases} \\ \iff &-9<7-2x<0 \\ \iff &-16<-2x<-7 \\ \iff &8>x>\frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Kết hợp hai trường hợp, có được $x \in (-1; 8)$. Có biến đổi là tương đương trong tập xác định cho nên phương trình có nghiệm $x \in (-1; 8)$.

4. Trường hợp một — $3 + 6x \geq 0$:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} |3+6x| \geq 9 \\ 3+6x \geq 0 \end{cases} \\ \iff &3+6x \geq 9 \\ \iff &x \geq 1. \end{aligned}$$

Trường hợp hai — $3 + 6x < 0$:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} |3+6x| \geq 9 \\ 3+6x < 0 \end{cases} \\ \iff &-(3+6x) \geq 9 \\ \iff &3+6x \leq -9 \\ \iff &x \leq -2. \end{aligned}$$

Do trong mỗi trường hợp, mọi biến đổi là tương đương, nên chúng ta có tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty; -2] \cup [1; \infty)$.

5. Trường hợp một — $3x + 4 \geq 0$. Khi này,

$$\begin{cases} 2x+3+|3x+4| = 2x+3+(3x+4) \\ 3x+4 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+3+|3x+4| = 5x+7 \\ x \geq -\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\implies 2x+3+|3x+4| \geq 5\left(-\frac{4}{3}\right)+7 \iff 2x+3+|3x+4| \geq \frac{1}{3} > 0.$$

Trường hợp hai — $3x + 4 < 0$:

$$\begin{cases} 2x+3+|3x+4| = 2x+3-(3x+4) \\ 3x+4 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x+3+|3x+4| = -x-1 \\ x < -\frac{4}{3} \end{cases}$$

Từ đó, có:

$$-x > \frac{4}{3} \iff -x-1 > \frac{1}{3} \implies 2x+3+|3x+4| > 0.$$

Từ hai trường hợp, chúng ta có $2x + 3 + |3x + 4| > 0$ với mọi giá trị thực của x. Do đó, tập nghiệm của phương trình là $\mathbb{R}$.

6. Tóm tắt các trường hợp thông qua bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-4		$\frac{12}{7}$		∞
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$7x-12$		$-$		$-$	0	$+$	

Bảng 0.1: Bảng xét dấu cho $x + 4$ và $7x - 12$

Trường hợp một — $x < -4$. Khi này, phương trình ban đầu trở thành

$$\begin{aligned} &|x+4| = |7x-12| \\ \iff &-(x+4) = -(7x-12) \\ \iff &x = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Chúng ta không nhận nghiệm này trong trường hợp này do trái với giả thiết $x < -4$.
Trường hợp hai — $-4 \leq x < \frac{12}{7}$. Khi này,

$$\begin{aligned} &|x+4| = |7x-12| \\ \iff &x+4 = -(7x-12) \\ \iff &x = 1. \end{aligned}$$

Trường hợp ba — $x \geq \frac{12}{7}$. Từ đây,

$$\begin{aligned} &|x+4| = |7x-12| \\ \iff &x+4 = 7x-12 \\ \iff &x = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Kết hợp các trường hợp và kiểm tra lại các nghiệm, chúng ta có nghiệm của phương trình là $x \in \left\{1; \frac{8}{3}\right\}$.
7. Kẻ bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$		∞
$6x+9$		$-$	0	$+$		$+$	
$6x-3$		$-$		$-$	0	$+$	

Bảng 0.2: Bảng xét dấu cho $6x+9$ và $6x-3$

Trường hợp một — $x < -\frac{3}{2}$. Khi này, bất phương trình ban đầu trở thành

$$\begin{aligned} &|6x+9| > |6x-3| \\ \iff &-(6x+9) > -(6x-3) \\ \iff &-9 > 3. \end{aligned}$$

Bất phương trình sai với mọi x. Đối với trường hợp này, tập nghiệm là $\emptyset$.
Trường hợp hai — $-\frac{3}{2} \leq x < \frac{1}{2}$. Khi này,

$$\begin{aligned} &|6x+9| > |6x-3| \\ \iff &6x+9 > -(6x-3) \\ \iff &x > -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Trường hợp ba — $x \geq \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &|6x+9| > |6x-3| \\ \iff &6x+9 > 6x-3 \\ \iff &9 > -3 \end{aligned}$$

luôn đúng. Kết hợp với điều kiện, chúng ta có tập nghiệm $\left[\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Hợp tập nghiệm của cả ba trường hợp, do mọi biến đổi trong mỗi trường hợp là tương đương cho nên bất phương trình có tập nghiệm là $\left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$.

8. Biến đổi cơ bản để có

$$\begin{aligned} & |2x+2| + |x+1| = 9 \\ \iff & |2(x+1)| + |x+1| = 9. \end{aligned} \tag{0.1}$$

Với $x \geq -1$ thì $x+1 \geq 0 \iff \begin{cases} |2(x+1)| = 2(x+1) \\ |x+1| = x+1 \end{cases}$. Cho nên

$$\begin{aligned} (0.1) &\iff 2(x+1) + (x+1) = 9 \\ &\iff x = 2. \end{aligned}$$

Với $x < -1$ thì $x+1 < 0 \iff \begin{cases} |2(x+1)| = -(2(x+1)) \\ |x+1| = -(x+1) \end{cases}$. Cho nên

$$\begin{aligned} (0.1) &\iff -(2(x+1)) - (x+1) = 9 \\ &\iff x = -4. \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm là $\{2; -4\}$.
9. Kẻ bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$\frac{4}{3}$		∞
$3x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-4$		$-$		$-$	0	$+$	

Bảng 0.3: Bảng xét dấu cho $3x+3$ và $3x-4$

Trường hợp một — $x < -1$. Từ đó,

$$\begin{aligned} & |3x+3| + |3x-4| \leq 7 \\ \iff & -(3x+3) - (3x-4) \leq 7 \\ \iff & -6x + 1 \leq 7 \\ \iff & x \geq -1. \end{aligned}$$

Điều này trái với điều kiện $x < -1$ của trường hợp này.
Trường hợp hai — $-1 \leq x < \frac{4}{3}$. Với điều kiện này,

$$\begin{aligned} & |3x+3| + |3x-4| \leq 7 \\ \iff & 3x+3 - (3x-4) \leq 7 \\ \iff & 7 \leq 7. \end{aligned}$$

Bất phương trình này là luôn đúng.
Trường hợp ba — $x \geq \frac{4}{3}$. Khi này,

$$\begin{aligned} & |3x+3| + |3x-4| \leq 7 \\ \iff & 3x+3+3x-4 \leq 7 \\ \iff & x \leq \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện, có được $x = \frac{4}{3}$.
Qua ba trường hợp, tập nghiệm của bất phương trình là $\left[-1; \frac{4}{3}\right]$.
10.

$$\begin{aligned} & \left|2(x-1)^2 - 4\right| = 2 \\ \iff & \left|2x^2 - 2x - 2\right| = 2. \end{aligned} \tag{0.2}$$

Xét hai trường hợp. Trường hợp một — $2x^2 - 2x - 2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} (0.2) \iff 2x^2 - 2x - 2 &= 2 \\ 2x^2 - 2x - 4 &= 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0. \end{aligned}$$

Giải phương trình này để có $x \in \{-1; 2\}$, đều thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 2x - 2 \geq 0$.

Trường hợp hai — $2x^2 - 2x - 2 < 0$:

$$\begin{aligned}(0.2) \iff & -\left(2x^2 - 2x - 2\right) = 2 \\ \iff & -2x^2 + 2x + 2 = 2 \\ \iff & -2x^2 + 2x = 0.\end{aligned}$$

Phương trình này có nghiệm $x = 0$ hoặc $x = 1$, đều thỏa mãn điều kiện $2x^2 - 2x - 2 < 0$.

Qua hai trường hợp, tập nghiệm của phương trình là $\{-1; 0; 1; 2\}$.

11. Vì cả hai đa thức bậc hai $2x^2 - 2x - 2$ và $3x^2 - 4x - 2$ đều không có nghiệm đẹp, nên tác giả sẽ không vẽ bảng xét dấu cho bài này mà chia làm bốn trường hợp. Để rút gọn, tác giả sẽ gộp lại như sau:

Trường hợp một — $\begin{cases} 2x^2 - 2x - 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 4x - 2 \geq 0 \end{cases}$ và trường hợp hai — $\begin{cases} 2x^2 - 2x - 2 < 0 \\ 3x^2 - 4x - 2 < 0 \end{cases}$. Cả hai trường hợp này sau khi phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối đều cho:

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 2x - 2 = 3x^2 - 4x - 2 \\ \iff & 0 = x^2 - 2x \\ \iff & x \in \{0; 2\}.\end{aligned}$$

Trường hợp ba — $\begin{cases} 2x^2 - 2x - 2 \geq 0 \\ 3x^2 - 4x - 2 < 0 \end{cases}$ và trường hợp bốn — $\begin{cases} 2x^2 - 2x - 2 < 0 \\ 3x^2 - 4x - 2 \geq 0 \end{cases}$. Cả hai trường hợp đều suy ra

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 2x - 2 = -\left(3x^2 - 4x - 2\right) \\ \iff & 5x^2 - 6x - 4 = 0 \\ \iff & x \in \left\{\frac{3 + \sqrt{29}}{5}; \frac{3 - \sqrt{29}}{5}\right\}.\end{aligned}$$

Kết hợp các tập nghiệm và kiểm tra trực tiếp, chúng ta có tập nghiệm của phương trình là

$$\left\{0; 2; \frac{3 + \sqrt{29}}{5}; \frac{3 - \sqrt{29}}{5}\right\}.$$

12. Xét trường hợp một — $x < 0$, có $x^3 - 3x^2 + x = x\left(x^2 - 3x + 1\right)$. Vì $x < 0$ nên $-3x > 0 \implies x^2 - 3x + 1 > 0 \implies x^3 - 3x^2 + x < 0$. Do đó,

$$\begin{cases} |x^3 - 3x^2 + x| = -\left(x^3 - 3x^2 + x\right) \\ |x| = -x \end{cases}.$$

Qua đó, bất phương trình ban đầu trở thành:

$$\begin{aligned} & \left|x^3 - 3x^2 + x\right| \leq |x| \\ \iff & -\left(x^3 - 3x^2 + x\right) \leq -x \\ \iff & -x^3 + 3x^2 \leq 0 \\ \iff & x^2(3 - x) \leq 0 \\ \iff & 3 - x \leq 0 \qquad \left(x^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}\right) \\ \iff & x \geq 3.\end{aligned}$$

Kết quả này mâu thuẫn với điều kiện $x < 0$ nên không có nghiệm trong trường hợp này.

Xét $x \geq 0$, chúng ta chia làm hai trường hợp nhỏ. Cụ thể, trường hợp hai — $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 - 3x^2 + x \geq 0 \end{cases}$. Khi này

$$\begin{aligned}
& |x^3-3x^2+x| \le |x| \\
\iff\ & x^3-3x^2+x \le x \\
\iff\ & x^3-3x^2 \le 0 \\
\iff\ & x^2(x-3) \le 0 \\
\iff\ & x-3 \le 0 \qquad (x^2 \ge 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}) \\
\iff\ & x \le 3.
\end{aligned}$$

Cần phải kết hợp với điều kiện để xác định nghiệm thỏa mãn. Có

$$\begin{aligned}
& x^3-3x^2+x \ge 0 \\
\iff\ & x(x^2-3x+1) \ge 0 \\
\iff\ & x^2-3x+1 \ge 0 \qquad (x \ge 0 \text{ theo điều kiện}).
\end{aligned}$$

Kẻ bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$		∞
x^2-3x+1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bảng 0.4: Bảng xét dấu của x^2-3x+1

Qua đó, nghiệm của bất phương trình trong trường hợp này là $\left[0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right]$.

Trường hợp ba — $\begin{cases} x \ge 0 \\ x^3-3x^2+x < 0 \end{cases} \iff x^2-3x+1 < 0$. Từ bảng xét dấu 0.4, x phải nằm trong đoạn $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. Ngoài ra, từ bất phương trình:

$$\begin{aligned}
& |x^3-3x^2+x| \le |x| \\
\iff\ & -\left(x^3-3x^2+x\right) \le x \\
\iff\ & -x^3+3x^2-2x \le 0 \\
\iff\ & -x(x-1)(x-2) \le 0 \\
\iff\ & (x-1)(x-2) \ge 0 \qquad (x < 0 \text{ theo điều kiện}).
\end{aligned}$$

Kẻ bảng xét dấu cho $(x-1)(x-2)$:

x	$-\infty$		1		2		∞
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bảng 0.5: Bảng xét dấu của $(x-1)(x-2)$

Qua đó, nghiệm của bất phương trình trong trường hợp này là $\left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; 1\right] \cup \left[2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Qua ba trường hợp, chúng ta có tập nghiệm của bất phương trình: $[0;1] \cup [2;3]$.

Bài 2: Phác thảo đồ thị của những hàm sau:

1. $f(x) = \begin{cases} x+1 \text{ nếu } x \le 1 \\ 2 \text{ nếu } x > 1 \end{cases}$;

2. $f(x) = \begin{cases} x^3+4 \text{ nếu } x < 0 \\ -x^2+1 \text{ nếu } x \ge 0 \end{cases}$;

3. $f(x) = \begin{cases} -\frac{4}{x^2} \text{ nếu } -2 > x \ge -3 \\ -\frac{5}{x^2+1} \quad \text{nếu } x \ge -2 \text{ thực để } \\ \qquad \frac{5}{x^2+1} \text{ là số nguyên} \end{cases}$;

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} \text{ nếu } -3 \leq x < 0 \\ (x+1)^2 - 3x \text{ nếu } 0 \leq x < 2 \\ \frac{2x-1}{x-1} \text{ nếu } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$;

5. $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 \text{ nếu } x \leq 0 \\ -2x + 2 \text{ nếu } 0 < x < 1 \\ 2 + x - x^2 \text{ nếu } x \geq 1 \end{cases}$;

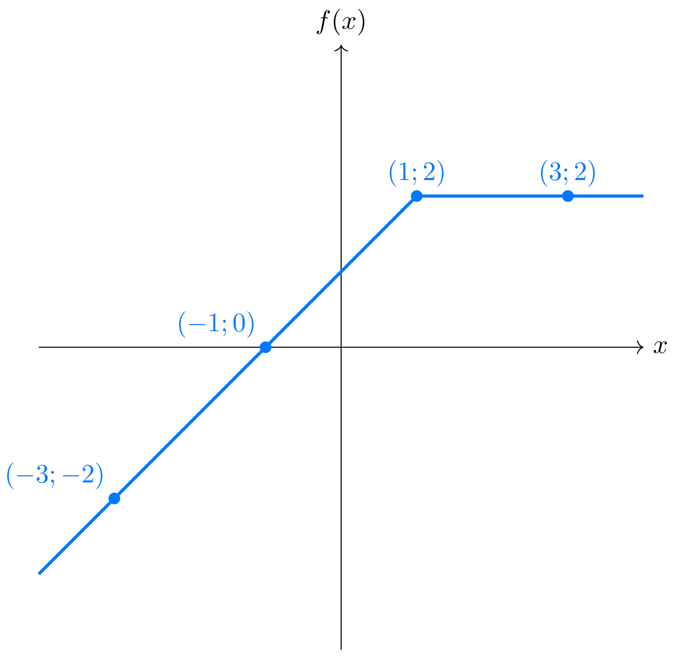
6. $f(x) = |x|$;

7. $f(x) = \left|2x^2 - 4x\right|$;

8. $f(x) = \left|x^3 - 3x^2 + x\right| - |x|$;

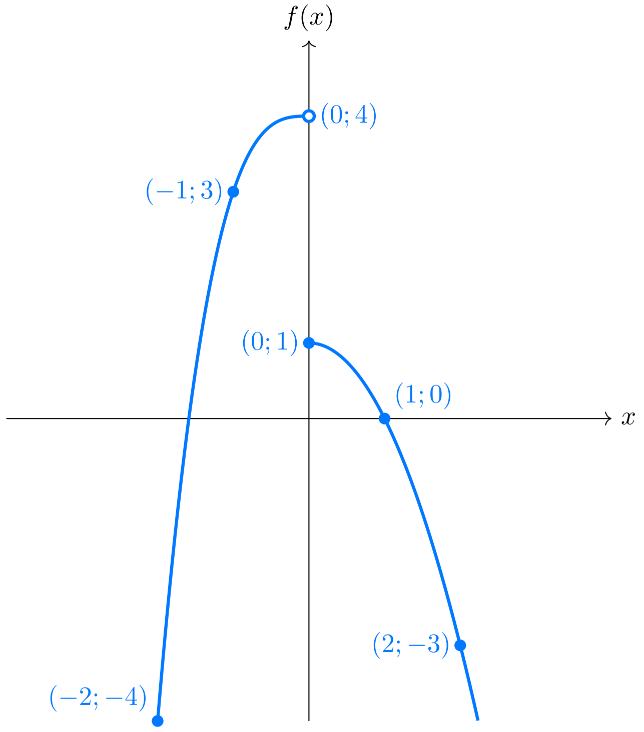
Lời giải bài 2:

1.



Hình 0.1: Đồ thị của $\begin{cases} x + 1 \text{ nếu } x \leq 1 \\ 2 \text{ nếu } x > 1 \end{cases}$

2.



Hình 0.2: Đồ thị của $\begin{cases} x^3+4 \text{ nếu } x<0 \\ -x^2+1 \text{ nếu } x \geq 0 \end{cases}$

Để ý rằng $f(x)$ đứt đoạn tại giá trị $x=0$. Cụ thể, $f(x)$ không nhận giá trị x^3+4 khi $x=0$. Tuy nhiên, không thể vẽ điểm ngay liền trước nó (không có số âm lớn nhất), nên người ta hay dùng đường tròn rỗng để biểu thị điểm đứt đoạn này.

3. Trước hết, cần xác định các giá trị của $x \geq -2$ để $\frac{5}{x^2+1}$ là số nguyên. Do với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

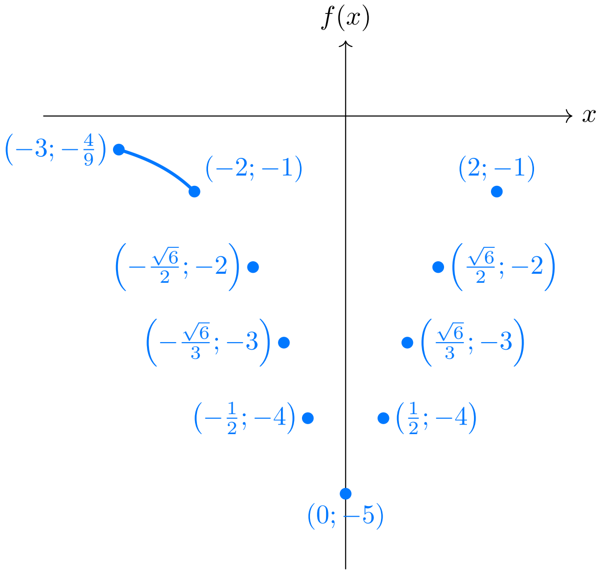
$$x^2 \geq 0 \iff x^2+1 \geq 1 > 0 \iff 5 \geq \frac{5}{x^2+1} > 0.$$

Mà cần phải để $\frac{5}{x^2+1} \in \mathbb{N}$ cho nên $\frac{5}{x^2+1} \in \{1;2;3;4;5\}$. Với để ý đến điều kiện $x \geq -2$, kẻ bảng để xác định các giá trị có thể của x:

$\frac{5}{x^2+1}$	1	2	3	4	5
x^2+1	5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	1
x^2	4	$\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	1
x	$\{-2;2\}$	$\left\{-\sqrt{\frac{3}{2}};\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$	$\left\{-\sqrt{\frac{2}{3}};\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}$	$\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$	0

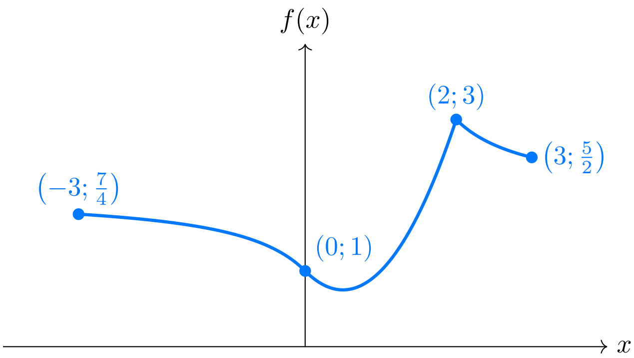
Bảng 0.6: Bảng giá trị của $\frac{5}{x^2+1}$ với x

Từ đây, có được đồ thị của $f(x)$:



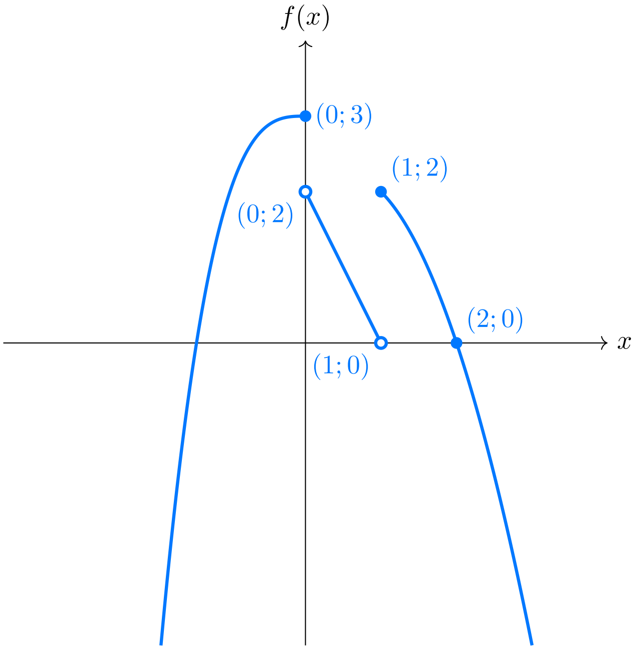
Hình 0.3: Đồ thị của $\begin{cases} -\frac{4}{x^2} \text{ nếu } -2 > x \geq -3 \\ -\frac{5}{x^2+1} \quad \text{nếu } x \geq -2 \text{ thực để} \\ \qquad\qquad \frac{5}{x^2+1} \text{ là số nguyên} \end{cases}$

4.



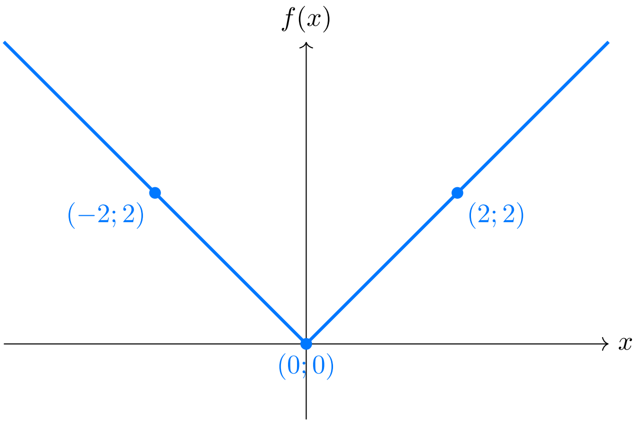
Hình 0.4: Đồ thị của $\begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} \text{ nếu } -3 \leq x < 0 \\ (x+1)^2 - 3x \text{ nếu } 0 \leq x < 2 \\ \frac{2x-1}{x-1} \text{ nếu } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

5.



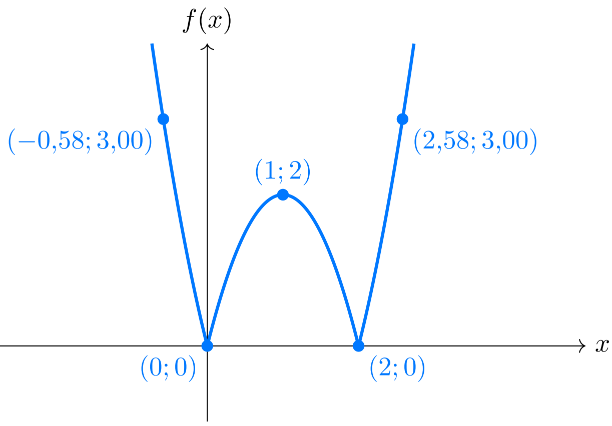
Hình 0.5: Đồ thị của $\begin{cases} x^3+3 \text{ nếu } x \le 0 \\ -2x+2 \text{ nếu } 0 < x < 1 \\ 2+x-x^2 \text{ nếu } x \ge 1 \end{cases}$

6.



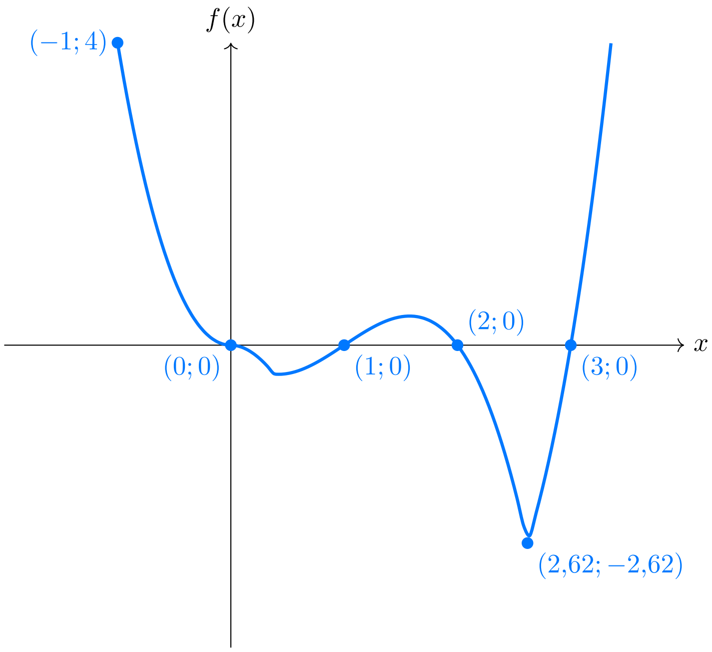
Hình 0.6: Đồ thị của $|x|$

7.



Hình 0.7: Đồ thị của $\left|2x^2-4x\right|$

8.



Bài 3: Cho a và b là hai số thực. Chứng minh rằng $|a||b| = |ab|$.
Lời giải bài 3:
Để chứng minh $|a||b| = |ab|$ ngắn gọn, chúng ta thực hiện kẻ bảng:

Điều kiện	$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a \geq 0 \\ b < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$	$\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$
$\lvert a\rvert$, $\lvert b\rvert$	$\begin{cases} \lvert a\rvert = a \\ \lvert b\rvert = b \end{cases}$	$\begin{cases} \lvert a\rvert = a \\ \lvert b\rvert = -b \end{cases}$	$\begin{cases} \lvert a\rvert = -a \\ \lvert b\rvert = b \end{cases}$	$\begin{cases} \lvert a\rvert = -a \\ \lvert b\rvert = -b \end{cases}$
$\lvert a\rvert\lvert b\rvert$	ab	$(-a)b = -ab$	$a(-b) = -ab$	$(-a)(-b) = ab$
Dấu của ab	≥ 0	< 0	< 0	≥ 0
$\lvert ab\rvert$	ab	$-ab$	$-ab$	ab

Bảng 0.7: Bảng so sánh $|a||b|$ và $|ab|$

Qua bảng, chúng ta luôn có $|a||b| = |ab|$. Chúng ta có điều phải chứng minh.
Bài 4: Cho sô thực a. Chứng minh rằng

1. $|a| \geq a$;
2. $|a|^2 = a^2$.

Lời giải bài 4:
1. Khi $a \geq 0$ thì $|a| = a$. Trong trường hợp còn lại, nếu $a < 0$, chúng ta có $-a > 0$. Do đó $|a| > a$. Vậy $|a| \geq a$ với mọi a thực.
2.

$$\begin{aligned} |a|^2 &= |a| \cdot |a| = |a \cdot a| = \left|a^2\right| \\ &= a^2 \qquad (a^2 \text{ thì luôn không âm}). \end{aligned}$$

Chúng ta qua đó có điều phải chứng minh.
Bài 5: Chứng minh rằng với a và b là hai số thực thì $|a| + |b| \geq |a + b|$.
Lời giải bài 5:
Chúng ta có những đẳng thức và bất đẳng thức sau:

$$\begin{cases} |a|^2 = a^2 \\ |b|^2 = b^2 \\ |a||b| = |ab| \geq ab \end{cases}.$$

Qua đó,

$$\begin{aligned} &|a|^2+2|a||b|+|b|^2 \geq a^2+2ab+b^2 \\ \iff &(|a|+|b|)^2 \geq (a+b)^2 \\ \iff &(|a|+|b|)^2-|a+b|^2 \geq 0 \\ \iff &(|a|+|b|-|a+b|)(|a|+|b|+|a+b|) \geq 0. \end{aligned} \tag{0.3}$$

Do $|a|$, $|b|$, $|a+b|$ đều không âm nên $|a|+|b|+|a+b| \geq 0$. Cho nên:

$$\begin{aligned} (0.3) \iff &|a|+|b|-|a+b| \geq 0 \\ \iff &|a|+|b| \geq |a+b|. \end{aligned}$$

Đây là điều phải chứng minh.

Bài 6: Giải các phương trình sau trên ẩn x thực:

1. $\lfloor x \rfloor = 4$;
2. $\left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil = -2$;
3. $2\lfloor -2x-3 \rfloor - 1 = 1$;
4. $3\lceil x \rceil^2 - 4\lceil x \rceil - 4 = 0$;
5. $\lfloor x+2 \rfloor^3 - \lfloor x \rfloor = 2$;
6. $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor = 7$.

Lời giải bài 6:

1. Giả sử $x \geq 5$. Khi đó, số nguyên lớn nhất không vượt quá x sẽ phải đạt giá trị tối thiểu là 5, và suy ra $\lfloor x \rfloor \geq 5$.

Giả sử $x < 4$. Nếu như vậy, số nguyên lớn nhất không vượt quá x cũng không thể từ 4 trở lên. Do vậy, $\lfloor x \rfloor < 5$.

Ngoài ra, dễ thấy rằng nếu $4 \leq x < 5$ thì $\lfloor x \rfloor = 4$ theo định nghĩa. Vậy tập nghiệm của phương trình là $[4;5)$.

Tổng quát hóa, chúng ta sẽ có $\lfloor x \rfloor = a \iff a \leq x < a+1$ với $a \in \mathbb{N}$.

2. Với một lập luận tương tự như phần trước, chúng ta có

$$\begin{aligned} &\left\lceil \frac{x}{4} \right\rceil = -2 \\ \iff &-3 < \frac{x}{4} \leq -2 \\ \iff &-12 < x \leq -8. \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình là $(-12;-8]$.

3.

$$\begin{aligned} &2\lfloor -2x-3 \rfloor - 1 = 1 \\ \iff &\lfloor -2x-3 \rfloor = 1 \\ \iff &1 \leq -2x-3 < 2 \\ \iff &-2 \geq x > -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Tập nghiệm của phương trình là $\left(-\frac{5}{2};-2\right]$.

4.

$$\begin{aligned} &3\lceil x \rceil^2 - 4\lceil x \rceil - 4 = 0 \\ \iff &(3\lceil x \rceil + 2)(\lceil x \rceil - 2) = 0 \\ \iff &\left[\begin{array}{l} \lceil x \rceil = -\frac{2}{3} \\ \lceil x \rceil = 2 \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Do kết quả của hàm trần luôn là số nguyên nên chỉ có một trường hợp

$$\lceil x \rceil = 2 \iff 1 < x \leq 2.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $(1;2]$.

5.
Đặt $y = \lfloor x \rfloor$ với $y \in \mathbb{N}$. Theo định nghĩa, y là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Theo một cách nói khác, y là số nguyên duy nhất thỏa mãn $y \le x < y + 1$. Cộng 2 vào tất cả các vế, chúng ta có $y + 2 \le x + 2 < y + 3$. Nhận thấy rằng, $z = y + 2$ là số nguyên duy nhất thỏa mãn $z \le x + 2 < z + 1$, hay z là số nguyên lớn nhất không quá $x + 2$. Do vậy,

$$\lfloor x + 2 \rfloor = y + 2 = \lfloor x \rfloor + 2. \tag{0.4}$$

Sử dụng điều kiện này để biến đổi phương trình:

$$\begin{aligned}
& \lfloor x + 2 \rfloor^3 - \lfloor x \rfloor = 2 \\
\iff & (\lfloor x \rfloor + 2)^3 - (\lfloor x \rfloor + 2) = 0 \\
\iff & (\lfloor x \rfloor + 2)\left((\lfloor x \rfloor + 2)^2 - 1\right) = 0 \\
\iff & (\lfloor x \rfloor + 2)(\lfloor x \rfloor + 1)(\lfloor x \rfloor + 3) = 0 \\
\iff & \left[\begin{array}{l} \lfloor x \rfloor = -1 \\ \lfloor x \rfloor = -2 \\ \lfloor x \rfloor = -3 \end{array}\right. \\
\iff & \left[\begin{array}{l} -1 \le x < 0 \\ -2 \le x < -1 \\ -3 \le x < -2 \end{array}\right. \\
\iff & -3 \le x < 0.
\end{aligned}$$

Qua đó, chúng ta có nghiệm $x \in [-3; 0)$.
6. Nếu $x \ge 15$,

$$\begin{cases} \frac{x}{3} \ge 5 \\ \frac{x}{5} \ge 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \ge 5 \\ \lfloor \frac{x}{5} \rfloor \ge 3 \end{cases} \implies \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor \ge 8.$$

Nếu $x < 15$, một cách tương tự, chúng ta cũng có

$$\begin{cases} \frac{x}{3} < 5 \\ \frac{x}{5} < 3 \end{cases} \implies \begin{cases} \lfloor \frac{x}{3} \rfloor < 5 \\ \lfloor \frac{x}{5} \rfloor < 3 \end{cases}.$$

Do $\lfloor \frac{x}{3} \rfloor$ và $\lfloor \frac{x}{5} \rfloor$ đều là số nguyên cho nên

$$\begin{cases} \lfloor \frac{x}{3} \rfloor \le 4 \\ \lfloor \frac{x}{5} \rfloor \le 2 \end{cases} \implies \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{5} \right\rfloor \le 6.$$

Qua hai trường hợp, chúng ta thấy không có x để $\lfloor \frac{x}{3} \rfloor + \lfloor \frac{x}{5} \rfloor = 7$. Vậy phương trình vô nghiệm.

0.2 Thuộc tính của hàm số

Trước phần này, chúng ta mới chỉ xét nghiệm của hàm và hình dạng của hàm số thông qua đồ thị. Nhìn vào đồ thị, chúng ta có thể thấy được hàm số có nhiều thành phần đặc biệt. Ở trong phần này, chúng ta sẽ gọi tên và khảo sát những thành phần đặc biệt đó.

Tài liệu tham khảo

[1] Ravi P Agarwal, Kanishka Perera, and Sandra Pinelas. *An introduction to complex analysis*. Springer Science & Business Media, 2011.