Introduction au calcul matriciel

Soutien maths ISIMA 1è année

10/2013

1 Notion de matrice

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace vectoriel de dimension n et F un espace vectoriel de dimension m.

Définition : Si $B = (e_i)_{i=1..n}$ une base de E, tout vecteur x de E s'écrit comme une combinaison linéaire des (e_i). Par convention, on choisit de disposer ces coefficients en colonne. On appelle cette représentation la matrice de x dans la base B, notée $mat_B\, x$. Cette matrice a donc une colonne et n lignes.

Proposition : L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires $E \to F$ est un espace vectoriel de dimension $n * m$.

On remarque que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, la connaissance de l'image d'une base de E par f suffit pour calculer l'image de n'importe quel vecteur. D'où la définition de la matrice d'une application qui suit.

Définition : Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $B = (e_i)$ une base de E et $B' = (e'_i)$ une base de F, il existe donc une famille de scalaires $(a_{ij})_{i=1..m,j=1..n}$ tels que $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i$. On choisit de représenter f sous forme matricielle avec m lignes et n colonnes comme le tableau des a_{ij}. Autrement dit, on dispose les vecteurs $f(e_j)$ dans des colonnes adjacentes. On note $(a_{ij}) = mat_{B,B'}\, f$.

Note : La représentation matricielle dépend évidemment des bases choisies !

Exercice : Dans les bases canoniques respectives, représenter matriciellement les applications suivantes :
1) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x + y + z$
2) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x - y, y + z)$
3) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$
4) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, x - y, y)$

Définition : L'ensemble des matrices $n * m$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. Muni de l'addition et de la multiplication externe triviaux, c'est un espace vectoriel de dimension $n * m$. Lorsque $n = m$, on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2 Produit matriciel

Définition : Si $A = (a_{ij})$ est une matrice $n * m$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $m * p$, on appelle produit de A et B la matrice $C = (c_{ij})$ à n lignes et p colonnes où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} * b_{kj}$ (où le premier indice représente la ligne, le second la colonne). Ce produit est évidemment non-commutatif dans le cas général. La multiplication des matrices ainsi définie est distributive par rapport à l'addition ($A(B+C) = AB + AC$) et compatible avec la multiplication scalaire ($A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$).

Exercice : Calculer les matrices suivantes...

1)

$$A_1 = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2)

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3)

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4)

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

5)

$$A_5 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n$$

6)

$$A_6 = \begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7)

$$A_7 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

Proposition : Si on a les conditions suivantes :

- E désigne un espace vectoriel de dimension n et de base $B = (e_i)$
- F désigne un espace vectoriel de dimension m et de base $B' = (e'_i)$
- G désigne un espace vectoriel de dimension p et de base $B'' = (e''_i)$
- $f \in \mathcal{L}(E, F)$
- $g \in \mathcal{L}(F, G)$
- $x \in E$

alors :
- $mat_{B'}\ f(x) = mat_{B,B'}\ f * mat_B\ x$
- $mat_{B,B''}\ g \circ f(x) = mat_{B',B''}\ g * mat_{B,B'}\ f$

3 Matrices carrées

Lorsque $E = F$ (ou que, par isomomorphisme, leurs dimensions sont égales), on a alors affaire à des matrices carrées. Quelles propriétés ont les matrices carrées suivantes :
- symétrique
- antisymétrique
- triangulaire supérieure
- triangulaire inférieure
- diagonale

EXERCICE : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

1) Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$
2) En déduire que A est inversible et donner son inverse.