

Devoir libre 1

Hexagone 2025-2026

à rendre pour le 13/10/2025

Exercice 1: (2 points)

Calculer les dérivées suivantes :

(Détailler vos calculs et votre raisonnement)

a) $f(x) = \frac{2x+x^2}{\ln(x)}$

b) $g(x) = e^{2x+x^3}$

Exercice 2: (2 points)

Calculer les intégrales suivantes :

(Détailler vos calculs et votre raisonnement)

$$a) \int_0^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx, \quad b) \int^x t^n \ln(t) dt$$

Exercice 3: (6 points)

On considère les trois points

$$A = (0, 1), \quad B = (1, 2), \quad C = (4, 2).$$

1. Polynôme interpolateur de Lagrange.

(a) Écrire le polynôme interpolateur de Lagrange associé aux 3 points

2. Forme de Newton et différences divisées.

(a) Construire la forme de Newton du polynôme interpolateur

$$P_N(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1),$$

en exprimant a_0, a_1, a_2 via les différences divisées.

3. Splines cubiques par morceaux avec dérivées nulles.

$S_0(x)$ est la spline cubique entre A et B sachant que sa dérivée est nulle en A et en B

$S_1(x)$ est la spline cubique entre B et C sachant que sa dérivée est nulle en A et en B

Donner les expressions explicites de $S_0(x)$ et $S_1(x)$.

Exercice 4 (4 points) Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

Justifiez votre réponse.

1) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$

2) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 1\}$

3) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = 0\}$

4) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$

Exercice 5: (4 points)

Donner les valeurs propres, vecteurs propres, matrice de passage, puis Diagonaliser :

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 6 & 1 & 4 \\ -12 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$