CdL in Informatica (M-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 25 Gennaio 2021

Durata della prova: 90 minuti.

I

E' dato l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x, y, z) = (hy, (h+1)x + hy - z, -y - hz)$$

con h parametro reale.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1, 0, 3)$.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date due rette

$$r : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}, s : \begin{cases} 3x + 3y - 5z + 5 = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

determinare il piano π contenente le due rette.

2) Studiare il seguente fascio di coniche

$$kx^2 + 2y^2 + 2(k-2)xy + 2y = 0, \ k \in \mathbb{R}$$

Determinare centro e raggio dell'unica circonferenza del fascio.

CdL in Informatica (M-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 22 Febbraio 2021

Durata della prova: 90 minuti.

I

Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$

2) Per $h = -1$, stabilire se la matrice $M(f)$ è diagonalizzabile.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette:

$$r\colon \begin{cases} z = 0 \\ y + z - 1 = 0, \end{cases} \quad \text{e} \quad s\colon \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

stabilire se sono sghembe. Determinare inoltre il piano π contenente la retta r e passante per $A = (1, 0, -1)$.

2) Studiare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione:

$$x^2 + ky^2 - 2kxy + 2x + 2y + 2 = 0.$$

Determinare la forma canonica della conica che si ottiene per $k = 1$.

CdL in Informatica (M-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 1 Aprile 2021

Durata della prova: 90 minuti.

I

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & h & h \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & h & h \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$

2) Dire se $M(f)$ è diagonalizzabile al variare di $h \in \mathbb{R}$. Per $h = 0$ determinare la matrice diagonale e la matrice diagonalizzante.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dati due piani $\pi : x + y - 2z = 0$ e $\alpha : 4x - y - 3z - 2 = 0$ determinare il piano β ortogonale a π e α e passante per $A = (1, 0, 0)$. Inoltre determinare il piano contenente la retta $r : \alpha \cap \beta$ e passante per $O = (0, 0, 0)$

2) È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$.Studiare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione:

$$2kx^2 - y^2 + 2kx + 4y = 0.$$

Studiare l'unica iperbole equilatera del fascio determinando la sua forma canonica,il centro di simmetria e gli assi.

CdL in Informatica (M-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 21 Giugno 2021

Durata della prova: 90 minuti.

I

Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i seguenti vettori: $v_1 = (2,0,0)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (0,-1,0)$ e la base $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{cases} f(2,0,0) = (4,0,0) \\ f(1,0,-1) = (h,0,h) \\ f(0,-1,0) = (0,-h,0) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$

2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,1)$.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1 Dati la retta:

$$r\colon \begin{cases} x - y + 3z + 3 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

e il piano $\pi : x - y - 3 = 0$, mostrare che r e π sono paralleli e dopo avere scelto un punto P_0 sulla retta r determinare il suo simmetrico P_0' rispetto al piano π.

2 È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare, al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione:

$$x^2 + hy^2 + 2(h-1)xy + 2hx - h = 0.$$

Studiare l'unica circonferenza del fascio determinando il centro e il raggio.

CdL in Informatica (M-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 12 Luglio 2021

Durata della prova: 90 minuti.

I

Sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono assegnati i vettori
$u_1 = (1,0,0,0), u_2 = (1,0,1,0), u_3 = (0,1,0,0), u_4 = (0,0,0,1)$
e l'applicazione lineare

$$f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$$

definita dalle relazioni:

$$\begin{cases} f(u_1) & = (1,0,0,0) \\ f(u_2) & = (h,0,2,0) \\ f(u_3) & = (0,h-1,0,h) \\ f(u_4) & = (0,0,0,h) \end{cases}$$

con h parametro reale.

- Studiare l'applicazione lineare f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando le equazioni cartesiane di Imf e $Kerf$.
- Detta $i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione definita da

  $$i(x,y,z) = (x,y,0,z)$$

  studiare l'applicazione lineare

  $$g = f \circ i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$$

  e determinare $g^{-1}(1,0,0,1)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1 Sono date le rette

$$\mathbf{r} : \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}, \quad \mathbf{s} : \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

mostrare che non sono sghembe, e calcolare il coseno dell'angolo individuato dalle due rette.

2 È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare la seguente conica:

$$3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0.$$

determinando una sua forma canonica, centro e assi di simmetria.

CdL in Informatica (M-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 15 Settembre 2021

Durata della prova: 90 minuti.

I

E' assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$f(x,y,z) = (x-y, -x+hz, x+z, -x+hy)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Calcolare la controimmagine $f^{-1}(1,0,0,0)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2) E' assegnato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{cases} g(1,1,0) = (-2,0,-1) \\ g(0,1,1) = (-1,h,0) \\ g(0,1,0) = (0,-1,0) \end{cases} \qquad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, nei casi in cui è possibile, una base di autovettori per g.

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Sono dati il punto $P = (1,0,0)$ e i piani $\pi_1 : x - y + 2 = 0$ e $\pi_2 :\ x - y + z = 0$. Determinare il punto P' simmetrico di P rispetto al piano π_1 e la retta r passante per P e parallela a π_1 e π_2.

2) E' assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:
$$hx^2 + hy^2 + 8xy + 4x - 4y = 0.$$
Determinare un'equazione canonica della parabola del fascio.

CdL in Informatica (M-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- 30 Settembre 2021

Durata della prova: 90 minuti.

I

E' dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x,y,z) = (0, y + hz, hx + hy + z)$$

con h parametro reale.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
2) Studiare la semplicità di f al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, nei casi in cui è possibile, una base di autovettori per f.

II

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Dato un punto $A = (0,1,1)$ e i piani $\alpha : 2x + y - 2z - 2 = 0$ e $\beta : 4x - y - z = 0$ e la retta $r : \alpha \cap \beta$, determinare il piano π contenente r e passante per A e la distanza $d(\alpha, \beta)$.
2) Studiare il seguente fascio di coniche

   $$hx^2 + 2y^2 + 2hxy + 2hx + 4y + h = 0, \; h \in \mathbb{R}$$

   Studiare in modo completo l'unica iperbole equilatera del fascio.

Corso di Laurea in Informatica (A-L e M-Z)

Prova scritta di **Algebra lineare e Geometria**- Appello del 7 Dicembre 2021

Durata della prova: 90 minuti.
È vietato uscire dall'aula prima di aver consegnato il compito.
È vietato consultare libri o appunti.

I

1. È assegnato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che:

$$\begin{aligned} f(1,1,1) &= (-1, 2h-1, -1) \\ f(1,0,1) &= (-2, h, 0) \\ f(0,1,1) &= (0, h-1, -1), \end{aligned}$$

   al variare di $h \in \mathbb{R}$. Studiare la semplicità di f nei casi $h = 0$ e $h = 1$, determinando, ove possibile, una base di autovettori per f.

2. Dato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$g(x,y,z) = (-x+y, hx+hy+z, 2x+hz)$$

   al variare di $h \in \mathbb{R}$, calcolare $g^{-1}(0,1,0)$ al variare di $h \in \mathbb{R}$.

II

1. È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$. Sono dati il piano $\pi\colon x - z + 2 = 0$ e la retta

$$r\colon \begin{cases} x - y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

   Determinare il piano α parallelo alla retta r, ortogonale al piano π e passante per l'origine O.

2. È assegnato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogoale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare il fascio di coniche di equazione:

$$x^2 + (2h+2)xy + y^2 + 2x + 2y = 0,$$

   al variare di $h \in \mathbb{R}$. Determinare la natura della conica del fascio tangente alla retta di equazione $x = -2$.