## FORMULE DI PASSAGGIO.

$P_0 \to P_{00}$

$x = \frac{x'}{t'}$ $\quad y = \frac{y'}{t'}$

## COND. ORTOGONALITA'

$\bar{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\bar{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0}$

$r_1 \perp r_2$, $\pi_1 \perp \pi_2$ DOPPIA COND.

## COND. PARALLELISMO

$\bar{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\bar{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{v}_1 = \lambda \bar{v}_2}$ $\to$ $\bar{v}_1 = (\lambda l_2, \lambda m_2, \lambda n_2)$

RETTA $\to$ PARAM. DIRETTORI

$r: \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} ax' + by' + ct' = 0 \\ t' = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \dots \Rightarrow P_0(x, y, z, t)$, $\bar{v}_r = (x, y, z)$

## RETTA $r$

$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ PASSA PER $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

## PIANO $\pi$

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$

$\bar{v}_r = (l, m, n)$ / $\bar{v}_\pi = (a, b, c)$

**Angolo fra 2 rette =** $\frac{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} = \cos\alpha$ (SCALARE)

**dist. Punto-PIANO**

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**PUNTO SIMMETRICO**

$M$ = Medio $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

$= x_M, y_M, z_M$

Piano contenente 2 rette $r$ e $s$

- FASCIO DI RETTE con ASSE LA 1° retta $(ax + by + cz + d = 0) = (\pi_1)$
- $(a'x + b'y + c'z + d' = 0) = (\pi_2)$
- $\Gamma = \pi_1 + k \cdot (\pi_2) = 0$
- Scelgo 1 Punto $P_0$ su $s$ (se $P_0 \in r$ SODDISFA, se $P_0 \notin r$ NON SODDISFA) (Risolvo sist. di $s$ e trovo 1 Inc. Do 1 Valore e verifico le condizioni)
- Impongo il passaggio del fascio per $P_0$ e trovo $k$.
- Sost. $k$ nell'eq. del fascio.

**2 rette sghembe $\det \neq 0$**

$r: \begin{cases} z = 0 \\ y + z - 1 = 0, \end{cases}$ e $s: \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$

TUTTO AL I MEMBRO $\det_{4\times4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} |r \\ |s \end{matrix} = \dots$

**Coniche spezzate e punti Base**

Servono almeno 2 coniche spezzate $\Gamma_1, \Gamma_2$

$\Gamma_1 = \det B = 0$ (TABELLA)

$\Gamma_2$ = Prendo il fascio, raccolgo $k$ e i termini Con la $k$ Comune mi diamo $\Gamma_2$.

$\Gamma_2$ = è spezzata? (RACCOGLIM., PROD. NOTEVOLE)

Punti Base $\begin{cases} \Gamma_1 \{ \dots \; B_1(\,,\,) \dots \\ \Gamma_2 \{ \dots \; B_2(\,,\,) \dots \end{cases}$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}, \text{ i}$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$$ Conica

$B = \begin{pmatrix} a_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & a_{22} & y_{23} \\ x_{13} & y_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & x_{12} \\ x_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ $|B|, \rho(B), |A|, TrA = a_{11} + a_{22}$

Iniziamo e calcoliamo il det $B$.
Se risulta $\det B = 0$

- In tal caso la conica si spezza in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B) < 3$:
  a) se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det $A$:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

- Vedo se si spezza se è facil. notevole, se posso raccogliere.
  - Altrimenti faccio la matrice dell'equaz. trovata e RIVEDO LA TABELLA

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

## CONICHE $|B| \neq 0$

### IPERBOLE/ELLISSE

FORMA RIDOTTA 1.

$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$

$\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$

Se parliamo di ELLISSE O IPERBOLE abbiamo

$$I): \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

Determinare $\alpha, \beta, \gamma$.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\alpha\beta\gamma$, $\det A = \alpha\beta$ Da cui

$$\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$$

ed $\alpha, \beta$ si ricavano dal P.C.(A) poichè sono gli autovalori della matrice $A$. Nell'iperbole e nell'ellisse posso scegliere io chi chiamare $\alpha$ e chi chiamare $\beta$ basta solo poi essere coerente a questa scelta.

$P_A(T) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - T & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - T \end{pmatrix} = 0 \dots = 0 < \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$

**CENTRO**

$\begin{pmatrix} a_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & a_{22} & y_{23} \\ x_{13} & y_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**ASSI** se $a_{12} \neq 0$ (term. $xy$)

$m_1 = -\frac{a_{11} - \alpha}{a_{12}}$

ASSE 1: $y - y_c = m_1(x - x_c)$

ASSE 2: $y - y_c = -\frac{1}{m}(x - x_c)$

**ASSI** se $a_{12} = 0$ (term $xy$)

ASSE 1: $x = x_c$

ASSE 2: $y = y_c$

**VERTICI ELLISSE (4)**

$V_1, V_3$ $\begin{cases} \text{ellisse} \\ \text{asse 1} \end{cases}$ / $V_2, V_4$ $\begin{cases} \text{ellisse} \\ \text{asse 2} \end{cases}$

**VERTICI IPERBOLE**

$\begin{cases} \text{ASSE 1} \\ \text{fascio} \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \text{ASSE 2} \\ \text{fascio} \end{cases}$

Uno dei 2 non ha soluzioni.

### PARABOLA

FORMA RIDOTTA 2.

$\beta Y^2 = 2\gamma X$

Se parliamo di PARABOLA la sua forma canonica è

$\beta y^2 = 2\gamma \cdot x$ $\quad \beta = ? \quad \gamma = ?$

Determinare $\beta, \gamma$.

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

$\det B = -\beta\gamma^2$, $\det A = 0$ Da cui

$\beta = TrA, \gamma = \pm\sqrt{-\frac{|B|}{TrA}}$

Abbiamo preso il segno positivo per $\gamma$ poichè per convenzione scegliamo il verso positivo dell'asse X.

**CENTRO PARABOLA** ∄

**ASSE PARABOLA, È UNICO NON SI CALCOLA IN GENERALE**

**ASSE PARABOLA SOLO SE È PARALLELO ALL'ASSE Y**

$y = ax^2 + bx + c$

ASSE $x = x_{(V)}$ vertice

$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

**ASSE PARABOLA SOLO SE È PARALLELO ALL'ASSE X**

$y = ax^2 + bx + c$

ASSE $y = y_{(V)}$ vertice

$V = \left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$

- Dato centro e raggio ($r > 0$), la circonferenza ha equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

Forma n.2 dell'equazione della circonferenza del piano $z = 0$:

$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

con centro $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e raggio $r = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c}$

1) Data una retta nello spazio, determinare i parametri direttori e scriverla come intersezione tra due piani:

a) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{0} = z-2$

b) $\frac{3x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = z$

c) $\frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{0} = z-2$

d) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{4z}{4}$

a) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{0} = z-2$ $\quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$

$r: \begin{cases} y+1=0 \\ \frac{x-2}{2} = z-2 \end{cases} \quad \begin{cases} y+1=0 \\ x-2 = 2z-4 \end{cases} \quad \begin{cases} y+1=0 \quad \pi_1 \\ x-2z+2=0 \quad \pi_2 \end{cases} \quad \pi_1 \cap \pi_2$

$\vec{v}_r = (2,0,1)$ $\quad l\ m\ n$

b) $\frac{3x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = z$ $\quad \vec{v}_r = (2,2,1)$

$r: \begin{cases} \frac{3x-1}{2} = \frac{y-1}{2} \\ \frac{y-1}{2} = z \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-1 = y-1 \\ y-1 = 2z \end{cases} \quad \begin{cases} 3x-y=0 \quad (\pi_1) \\ y-2z-1=0 \quad (\pi_2) \end{cases} \quad \pi_1 \cap \pi_2$

c) $\frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{0} = z-2$ $\quad \vec{v}_r = (0,0,1)$ $\quad$ 1° v 3° $\quad$ 2 is

$\begin{cases} \frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{0} \\ \frac{y+1}{0} = z-2 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=0 \\ y+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=0 \\ y=-1 \end{cases} \quad \left\| \begin{cases} \frac{x-2}{0} = z-2 \\ \frac{x-2}{0} = \frac{y+1}{0} \end{cases} \right. \quad \begin{cases} x=2 \\ 0=0 \end{cases} \quad \left\| \begin{cases} \frac{x-2}{0} = z-2 \\ \frac{y+1}{0} = z-2 \end{cases} \right. \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

d) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{4z}{4}$ $\quad \vec{v}_r = (2,4,4)$

$\begin{cases} \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{4} \\ \frac{y+1}{4} = \frac{4z}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-8 = 2y+2 \\ y+1 = 4z \end{cases} \quad \begin{cases} 4x-2y-8z=0 \to 2x-y-5=0 \quad (\pi_1) \\ y+1-4z=0 \quad (\pi_2) \end{cases} \quad \pi_1 \cap \pi_2$

2) Data una retta e un piano, stabilire se la retta $r$ è contenuta nel piano $\pi$:

a) $r: \begin{cases} 2y - z = -1 \\ x - y = -3 \end{cases}, \pi: x + y - z - 2 = 0$

b) $r: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = -2 \end{cases}, \pi: 2x + y + z - 4 = 0$

P. GENERICO DI $r$ OPP. SISTEMA.

P. GENERICO

$\begin{cases} 2y - z = -1 \\ x - y = -3 \end{cases} \quad \begin{cases} z = 2y + 1 \\ x = y - 3 \end{cases} \quad \forall y$

P. generico sulla retta $(y-3, y, 2y+1) \to (-2, 1, 3)$ $\forall y$

$x \quad y \quad z$

SOST. nel piano $\pi: x + y - z - 2 = 0$

$-2 + 1 - 3 - 2 = 0$

$-1 - 3 - 2 = 0$

$-6 = 0$ ASSURDO $\quad r \notin \pi$

La retta non è contenuta nel piano!

---

b) $r: \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = -2 \end{cases}, \pi: 2x + y + z - 4 = 0$

$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z + y \\ z + y + y + z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dots \\ 2y + 2z = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} y + z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = z + y \\ z = -1 - y \end{cases} \quad \forall y$

P. generico $= (z + y, y, -1 - y) \quad \forall z$

$\hookrightarrow (-1, 1, -2)$

SOST. nel piano

$2(-1) + 1 - 2 - 4 = 0$

$-2 + 1 - 2 - 4 = 0$

$-7 = 0$ ASSURDO $\quad r \notin \pi$

3) Dato un punto fissato $P_0 = (1, 1, -1)$, determinare la retta passante per $P_0$ avente parametri direttori (5,0,5).

RETTA = $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$

$\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+1}{5}$

$r_1 \begin{cases} y-1=0 \\ \frac{x-1}{5} = \frac{z+1}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} y=1 \\ x-1=z+1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=1 \ (\pi_1) \\ x-z-2=0 \ (\pi_2) \end{cases}$ $\pi_1 \cap \pi_2$

---

4) Date le seguente rette e i seguenti piani, trovare i parametri direttori di ciascuno:

a) $r_1 : \begin{cases} x+y &= 2 \\ x+y+z &= 2 \end{cases}; r_2 : \begin{cases} 2x-3z+1 &= 0 \\ x-y+2z-1 &= 0 \end{cases}; r_3 \begin{cases} x &= 0 \\ y &= z-3 \end{cases}$

b) $\pi_1 : 2x+y-3z+1=0; \pi_2 : x-z=0; \pi_3 : x+y+4=0$

$r_1 : \begin{cases} x+y=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

Omogeneo

$\begin{cases} x'+y'=2t' \\ x'+y'+z'=2t' \\ t'=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x'=-y' \\ -y'+y'+z'=0 \\ t'=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x'=-y' \\ z'=0 \\ t'=0 \end{cases}$ $\forall y'$

Vettore generico $= (-y', y', 0, 0)$

P.d.

$\bar{v}_{r_1} = (-1, 1, 0)$

$r_2 : \begin{cases} 2x-3z+1=0 \\ x-y+2z-1=0 \end{cases}$ omog. $\begin{cases} 2x'-3z'+t'=0 \\ x'-y'+2z'+t'=0 \\ t'=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x' - 3z' = 0 \\ x' - y' + 2z' = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x' = \frac{3}{2} z' \\ -\frac{3}{2} z' - y' + 2z' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \dots \\ \frac{1}{2} z' = y' \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2} z' \\ y = \frac{1}{2} z' \end{cases} \quad \forall z$$

$\bar{V}$ generico $= \left( \frac{3}{2} z', \frac{1}{2} z', z' \right)$

$\bar{V}_{r_2} = \left( \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right)$

---

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = z - 3 \end{cases} \xrightarrow{\text{OMOG}} \begin{cases} x' = 0 \\ y' = z' - 3t' \\ t' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x' = 0 \\ y' = z' \\ t' = 0 \end{cases}$$

Vett. generico $= (0, z, z, 0) \quad \forall z$

$\bar{V}_{r_3} = (0, 1, 1)$

---

b) $\pi_1 : 2x + y - 3z + 1 = 0; \pi_2 : x - z = 0; \pi_3 : x + y + 4 = 0$

PIANO. $ax + by + cz + d = 0 \qquad V_\pi = (a, b, c)$

$\bar{V}_{\pi_1} = (2, 1, -3) \qquad \bar{V}_{\pi_2} = (1, 0, -1) \qquad \bar{V}_{\pi_3} = (1, 1, 0)$

---

5) Dato un punto $P_0$e una retta $r$, determinare la retta $s$ passante per $P_0$ e parallela alla retta $r$ e una retta $t$ passante per $P_0$e ortogonale alla retta $s$:

a) dato $P_0 = (2, -2, 0), r : \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 3 \end{cases}$

b) dato $P_0 = (1, 0, -3), r : \begin{cases} 2x + y = -3 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$

$s: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \qquad P_0 = (2, -2, 0)$

sost. $\frac{x - 2}{l} = \frac{y + 2}{m} = \frac{z - 0}{n} \qquad V = (l, m, n)$ ??

s // r quindi $\bar{V}_s = V_r$. TROVO $\bar{V}_r$. OMOGENIZZO.

$r_i \begin{cases} x + y = 2 \\ x - z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2t \\ x - z = 3t \\ t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -x \\ z = x \\ t = 0 \end{cases} \quad \forall x$

Vett. generico $= (x, -x, x, 0)$

$\bar{V}_r = (1,-1,1)$ → diventa $\boxed{\bar{V}_s = (1,-1,1)}$

$\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-0}{1}$ → $x-2 = -y-2 = z$

$$s: \begin{cases} x-2 = -y-2 \\ -y-2 = z \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 0 \ (\pi_1) \\ z+y+2 = 0 \ (\pi_2) \end{cases}$$

$s : \pi \cap \pi_2$

$t \perp s$ passante per $P_0$

$$t = \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$P_0 = (2,-2,0)$

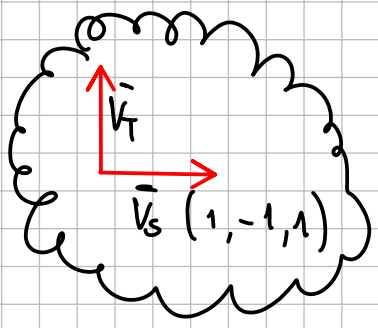
$\bar{V}_s = (1,-1,1)$ $\quad \bar{V}_s \cdot \bar{V}_t = 0$

$\bar{V}_s = (l, m, n)$

$V_t = (l', m', n')$

$(l, m, n) \cdot (l', m', n') = 0$

$(1,-1,1) \cdot (l', m', n') = 0$



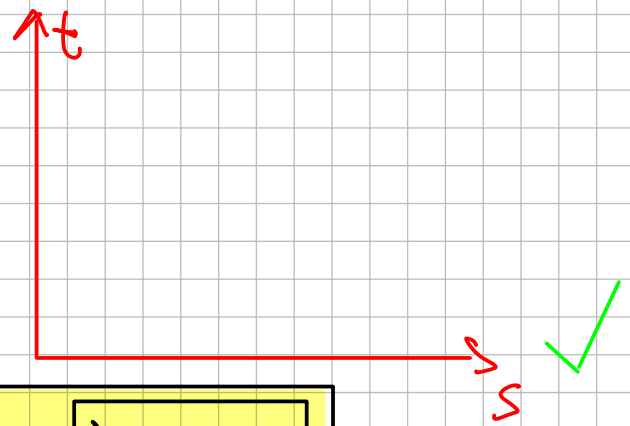

$t = \frac{x-2}{l'} = \frac{y+2}{m'} = \frac{z-0}{n'}$ $\quad \bar{V}_t \perp \bar{V}_s$

$\boxed{l' - m' + n' = 0}$

$l = 1$, $m = -1$, $n = 1$

$1l' - 1m' + 1n' = 0$

$l' = m' - n'$




$$t = \frac{x-2}{m'-n'} = \frac{y+2}{m'} = \frac{z-0}{n'} \quad \forall m', n'$$

Infinite rette ortogonali nello spazio!

Un $\bar{V}_t = (1, 1, 0)$, $\bar{V}_t$ generico $= (m'-n', m', n')$

b) dato $P_0 = (1,0,-3), r: \begin{cases} 2x+y & = -3 \\ 2x+y+z & = 0 \end{cases}$

s: per $P_0$ $/\!/ r$?

$\bar{v}_s = \bar{v}_r$

omogeneizzo

$\begin{cases} 2x+y=0 \\ 2x+y+t=0 \\ t=0 \end{cases} \begin{cases} y=-2x \\ 2x-2x+z=0 \end{cases} \begin{cases} y=-2x \\ z=0 \\ t=0 \end{cases}$

$\bar{v}_r = (x, -2x, 0)$

$\bar{v}_r = (1,-2,0)$

$\bar{v}_s = (1,-2,0)$

$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n} \Rightarrow x-1 = \frac{y-0}{-2} = \frac{z+3}{0}$

s: $\begin{cases} x-1 = \frac{y}{-2} \\ x-1 = \frac{z+3}{0} \end{cases} \begin{cases} -2x+2 = y \\ z=-3 \end{cases} \begin{cases} 2x+y-2=0 & \pi_1 \\ z+3=0 & \text{s: } \pi_2 \end{cases}$

6) Dato un punto $P_0$e un piano $\pi$, determinare il piano $\pi_{\|}$ passante per $P_0$ e parallela al piano $\pi$

a) dato $P_0 = (0,2,0), \pi: x+y=0$



$\bar{v}_n^{(\pi)} = (1,1,0)$ $\quad \bar{v}_{n/\!/} = (1,1,0)$

$\pi_{/\!/} = ax+by+cz+d=0$

$x+y+0+d=0$

$0 \quad 2 \quad ?$

$P_0 = (0,2,0)$

$0+2+0+d=0$

$2+d=0 \quad d=-2$

$x+y-2=0$

$\pi_{/\!/}^{(\pi_1)}$ che passa per $P_0$.

b) dato $P_0 = (1,1,-3)$, $\pi : 2x + 2y + 2z$

$\bar{v}_\pi = (2,2,2) \rightarrow (1,1,1)$

$\bar{v}_{\pi_\parallel} = (1,1,1)$

eq. piano.

$ax+by+cz+d=0$

$x+y+z+d=0$ → impongo il passaggio per $P_0$.

$1+1-3+d=0$

$d = 3-2 = 1$

$\boxed{x+y+z+1=0}$ $\pi_0$

---

7) Data una retta $r$ un punto $P_0$e un piano $\pi$, determinare la retta $t_1$ passante per $P_0$, ortogonale al piano $\pi$ e il piano $\pi_\perp$ passante per $P_0$, ortogonale alla retta $r$

7a) Data una retta $r : \begin{cases} x-y+z & =0 \\ x+y+z-2 & =0 \end{cases}$, $P_0 = (0,0,1)$, $\pi : x+3y-1=0$

7b) Data una retta $r : \begin{cases} y+z & =0 \\ 3x-z-1 & =0 \end{cases}$, $P_0 = (1,-1,1)$, $\pi : x+y-z=0$

$t_1$ per $P_0$ e $\perp \pi$ retta. $\frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$

$\bar{v}_\pi = (1,3,0)$ è $\parallel$ a $\bar{v}_t = (1,3,0)$

$t_1$: $\boxed{\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-1}{0}}$

$\begin{cases} x - \frac{1}{3}y = 0 & (\pi_1) \\ z-1=0 & (\bar{\pi}_2) \end{cases}$

$\pi_\perp$ per $P_0$ $\perp$ $r$ $\bar{v}_{\pi_\perp} = \bar{v}_r$.

$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y-z \\ y-z+y+z=0 \\ t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=y-z \\ 2y=0 \\ t=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-z \\ y=0 \\ t=0 \end{cases}$

Vettore direttivo di $r$ generico $= (-z, 0, z)$ $\forall z$

$\bar{v}_r = (-1,0,1)$

$P_0$ era $(0,0,1)$ e $\pi_1$ è

$\pi_1$ $ax+by+cz+d=0$

$-x+z+d=0 \rightarrow$ Passa per $P_0 \rightarrow -0+1+d=0$

$\Rightarrow d=-1$

Eq. $\pi_1 = -x+z-1=0$

$\Rightarrow \boxed{x-z+1=0}$

7b) Data una retta $r: \begin{cases} y+z=0 \\ 3x-z-1=0 \end{cases}$, $P_0=(1,-1,1)$, $\pi: x+y-z=0$

$t_1$ per $P_0$ e $\perp \pi$ retta. $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$

$\bar{v}_\pi = (1,1,-1) \Leftrightarrow \bar{v}_{t_1} = (1,1,-1)$

$t: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-1}$

$\begin{cases} x-1=y+1 \\ y+1=\frac{z-1}{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} x-y-2=0 \\ -y-1-z+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \boxed{x-y-2=0} \\ \boxed{y+z=0} \end{cases}$ $t_i$

$\pi_1 \perp r$ passa per $P_0$.

$\bar{v}_{\pi_1} = \bar{v}_r$

$\begin{cases} y+z=0 \\ 3x-z-1=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-z \\ z=3x \\ t=0 \end{cases} \quad \forall x$

$P_\infty = (x, -z, 3x, 0)$

$\bar{v}_{\pi_1} = (1, -3, 3)$

$a \quad b \quad c$

PIANO. $ax+by+cz+d=0$

$x-3y+3z+d=0$

$1+3+3+d=0$

$d=-7$

Passa per $P_0(1,-1,1)$

$\boxed{\text{PIANO } \pi_1 = x-3y+3z-7=0}$

8) Date due rette $r_1, r_2$ e un punto $P_0$, determinare la retta $t$ che passa per $P_0$ ed è ortogonale ad entrambe le rette

8a) $r_1: \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-y &= 1 \end{cases}, r_2: \begin{cases} y+z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}, P_0 = (1,0,-3)$

8b) $r_1: \begin{cases} x-z &= 0 \\ x-y &= 1 \end{cases}, r_2: \begin{cases} x+z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}, P_0 = (0,0,3)$

$t$ per $P_0$ $\perp$ $r_1$ e $r_2$ $\quad \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$

$$\frac{x-1}{l} = \frac{y-0}{m} = \frac{z+3}{n}$$

$t \perp r_1 \quad \bar{V}_{r_1} = ?$

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y=1 \\ t=0 \end{cases} \begin{cases} z=x+y \\ y=2x \\ t=0 \end{cases} \begin{cases} z=x+2x \\ y=2x \\ t=0 \end{cases} \begin{cases} z=3x \\ y=2x \\ t=0 \end{cases} \forall x$$

$P_{r_1} = (x, 2x, 3x, 0)$

$\bar{V}_{r_1} = (1,2,3)$

$r_2: \begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \\ t=0 \end{cases} \begin{cases} z=-y \\ x=0 \\ t=0 \end{cases}$

$P_{r_2} = (0, y, -y, 0)$

$\bar{V}_{r_2} = (0,1,-1)$

$$\begin{cases} V_t \perp V_{r_1} \rightarrow \text{PROD SCALARE} = 0 \\ V_t \perp V_{r_2} \rightarrow \text{PROD SCALARE} = 0 \end{cases}$$

$(l,m,n) \cdot (1,2,3) = 0 \rightarrow l+2m+3n=0$

$(l,m,n) \cdot (0,1,-1) = 0 \rightarrow 0l+m-n=0$

$$\begin{cases} l+2m+3n=0 \\ m-n=0 \end{cases} \begin{cases} l+2n+3n=0 \\ m=n \end{cases} \begin{cases} l=-5n \\ m=n \end{cases} \forall n$$

$V_t = (-5n, n, n) \rightarrow (-5, 1, 1)$

$$t: \frac{x-1}{-5} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+3}{1}$$

$$t: \begin{cases} \frac{x-1}{-5} = \frac{y-0}{1} \\ \frac{y-0}{1} = \frac{z+3}{1} \end{cases} \begin{cases} x-1=-5y \\ y-z-3=0 \end{cases} \begin{cases} x+5y-1=0 \quad (\pi_1) \\ y-z-3=0 \quad (\pi_2) \end{cases}$$

Classificare le seguenti coniche:

1) $2x^2 - 4xy - y^2 - 3y - 2 = 0$
2) $x^2 - y^2 - 6xy + 2x - 4y = 0$
3) $x^2 + 2xy + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$
4) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$
5) $2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y - 4 = 0$

1) $2x^2 - 4xy - y^2 - 3y - 2 = 0$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$|B| = 4 - \left[-8 + \frac{9}{2}\right] = 4 + 8 - \frac{9}{2} = \frac{8 + 16 - 9}{2} = \frac{15}{2}$

$|B| \neq 0$

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il $\det A$:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$;
  invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

$|A| = -2 - [4] = -2 - 4 = -6 \qquad |A| < 0$, IPERBOLE

$TrA = 2 - 1 = 1$, non equilatera.

Se parliamo di ELLISSE O IPERBOLE abbiamo

$$I) : \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

Determinare $\alpha, \beta, \gamma$.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\alpha\beta\gamma$, $\det A = \alpha\beta$ Da cui

$$\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$$

ed $\alpha, \beta$ si ricavano dal P.C.(A) poichè sono gli autovalori della matrice $A$. Nell'iperbole e nell'ellisse posso scegliere io chi chiamare $\alpha$ e chi chiamare $\beta$ basta solo poi essere coerente a questa scelta.

$P_A(T) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - T & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - T \end{pmatrix} = 0 \rightarrow = 0 < \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$

FORMA CANONICA

$\alpha X^2 + \beta y^2 = \gamma$

$\gamma = -\frac{|B|}{|A|} = \frac{\frac{15}{2}}{-6} = +\frac{15}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

$\gamma = \frac{5}{4}$

$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \frac{5}{4}$

Cerco $\alpha, \beta$.

$A = \begin{pmatrix} 2 - T & -2 \\ -2 & -1 - T \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 - T & -2 \\ -2 & -1 - T \end{pmatrix}$

$|A_T| = 0 \rightarrow (2 - T)(-1 - T) - 4 = 0 \rightarrow -2 - 2T + T + T^2 - 4 = 0$

$-6 - T + T^2 = 0 \qquad T^2 - T - 6 = 0$

$b^2 - 4ac \rightarrow 1 - 4(-6) = 25$

$T_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2}$ $\begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 & T_1 = \alpha \\ \frac{1-5}{2} = -2 & T_1 = \beta \end{cases}$

$$3X^2 - 2Y^2 = \frac{5}{4}$$

CENTRO

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_C - 2y_C = 0 \\ -2x_C - y_C - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_C = 2y_C \\ -2y_C - y_C - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_C = y_C \\ -3y_C = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x_C = y_C \\ y_C = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$C = (y_C, y_C) \rightarrow C = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

ASSI

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

ASSI se $a_{12} \neq 0$ (term. $xy$)

$m_1 = -\frac{a_{11} - \alpha}{a_{12}}$

ASSE 1: $y - y_C = m_1 (x - x_C)$

SSE 2: $y - y_C = -\frac{1}{m} (x - x_C)$

ASSI se $a_{12} = 0$ (term $xy$)

ASSE 1: $x = x_C$

ASSE 2: $y = y_C$

$a_{12} \neq 0 \qquad m_1 = -\frac{2-3}{-2} = -\frac{-1}{-2} = -\frac{1}{2}$

ASSE 1: $y - y_C = m_1 (x - x_C)$

ASSE 2: $y - y_C = -\frac{1}{m_1} (x - x_C)$

ASSE 1: $y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \Rightarrow$

$y + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x = 0 \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4}$

$\boxed{y + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0}$

ASSE 2: $y + \frac{1}{2} = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$

$y + \frac{1}{2} = 2x + 1 \rightarrow y + \frac{1}{2} - 1 - 2x = 0$

$\boxed{y - 2x - \frac{1}{2} = 0}$

VERTICI IPERBOLE

{ASSE 1 fascio} oppure {ASSE 2 fascio}

Uno dei 2 non ha soluzioni

$$\begin{cases} 2x^2 - 4xy - y^2 - 3y - 2 = 0 \\ y + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2 - 4\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)x - \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right) - 2 = 0 \\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$1^\circ \quad 2x^2 + (2x+3)x - \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{9}{16} + \frac{3}{4}x\right) + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - 2 = 0$$

$$2x^2 + 2x^2 + 3x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{9}{16} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4} - 2 = 0$$

$$\frac{15}{4}x^2 + \frac{15}{4}x - \frac{5}{16_4} = 0$$

$$15x^2 + 15x - \frac{5}{4} = 0 \rightarrow 5x^2 + 5x - \frac{5^1}{20_4}$$

$$5x^2 + 5x - \frac{1}{4} = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{20}}{10}$$

$$25 - 4\left(5 \cdot \frac{1}{4}\right)$$

$$25 - 5 = 20$$

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{20}}{10} = \frac{-5^1}{1_2} + \frac{\sqrt{20}}{10}$$

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{4 \cdot 5}$$

$$x_2 = \frac{-5 - \sqrt{20}}{10} = \frac{-5}{10} - \frac{2\sqrt{5}}{10_5}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{5}}{10_5} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{-5 - 2\sqrt{5}}{10} \; x_2$$

$$x_1 = \frac{-5 + 2\sqrt{5}}{10}$$

2 SISTEMI

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5-2\sqrt{5}}{10} \\ y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-5-2\sqrt{5}}{10}\right) - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{-5-2\sqrt{5}}{20} - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{5}{20_4} - \dfrac{2\sqrt{5}}{20_{10}} - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{5}}{10} - \dfrac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{4}{4} - \dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5-2\sqrt{5}}{10} \\ y = \dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{cases} \quad \text{Vertice}_1$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5+2\sqrt{5}}{10} \\ y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-5+2\sqrt{5}}{10}\right) - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{-5+2\sqrt{5}}{20} - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{5}{20_4} + \dfrac{2\sqrt{5}}{20_{10}} - \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{5}}{10} - \dfrac{3}{4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dots \\ y = -\dfrac{4}{4} + \dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-5-2\sqrt{5}}{10} \\ y = -\dfrac{\sqrt{5}}{10} \end{cases} \quad \text{Vertice}_2$$

$$V_1 = \left(\frac{-5-2\sqrt{5}}{10}, \frac{\sqrt{5}}{10}\right)$$

$$V_2 = \left(\frac{-5-2\sqrt{5}}{10}, -\frac{\sqrt{5}}{10}\right)$$

Studiare i seguenti fasci di coniche:

1) $hx^2 + hy^2 + 4hxy + 6x + 1 = 0, \forall h \in \mathbb{R}$

2) $x^2 + kxy + (1-k)y^2 + ky - 1 = 0, \forall k \in \mathbb{R}$

3) $x^2 + 2(h-1)xy + y^2 + 2hx = 0, \forall h \in \mathbb{R}$

4) $(1+\lambda)x^2 + xy - 2(1+\lambda)x + \lambda = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

5) $(1+h)x^2 + y^2 - hy - 1 - h = 0, \forall h \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (-x-2y, -x, -x+(h+3)z)$ $h \in \mathbb{R}$

$\mathrm{Im} f$. $\ker f$.

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h+3 \end{pmatrix}$$

$|M(f)| = -(2(h+3)) = -(2h+6)$

$-2h-6 \neq 0$ per $f = 3$

$+2h \neq -6$

$h \neq -3$

$\dim \mathrm{Im} f = 3$, $\dim \ker f = n - f = 0$

non è suriettiva e iniettiva, endomorfismo

Eq. cart. $\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$ se $h \neq -3$

Eq. cart. $\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=y=z=0\}$ se $h \neq -3$

$h = -3$

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$f < 2$

$f = 2$ $\det = -2$ $(2 \times 2)$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$ $\dim \ker = 3 - 2 = 1$

Eq. cart. $\mathrm{Im} f$. $\mathrm{Im} f = \{C_1, C_2\}$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$ per mantenere $f = 2$

$\det = 2y - (-2z) = 0$

$2y + 2z = 0$

$\boxed{y} = -z \quad \forall x, z$

$h = -3$

$\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = -z\} \quad \forall x, z.$

Base $\mathrm{Im} f = \{(x, -z, z)\} \to \{(1,0,0), (0,-1,1)\}$

Eq. Ker f. $M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -x = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 - 2y = 0 \\ x = 0 \\ \cancel{x = 0} \end{cases} \quad \begin{cases} -2y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ \forall z \end{cases}$

$\ker f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0\} \ \forall z \quad \text{se } h = -3$

Base $\ker f = \{(0,0,z)\} \to (0,0,1)$

DIAGONALIZZABILE per quale $h$?

$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h+3 \end{pmatrix} =$ Pol. car.

$\begin{pmatrix} -1-T & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h+3-T \end{pmatrix} \to \det = 0$

$\to -[2(h+3-T)]$

$= -[2h + 6 - 2T]$

$= -2h - 6 + 2T = 0$

$= -h - 3 + T = 0 \quad \to T = h + 3$

$T = h+3 \qquad m_{h+3} = 1 \Rightarrow g_{h+3} = 1$ $f$ è semplice

Posso solo controllare per $h = -3$

$$M(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-T & -2 & 0 \\ -1 & -T & 0 \\ -1 & 0 & -T \end{pmatrix}$$

$$T^2(-1-T) - [-2T]$$

$$T^2(-1-T) + 2T = 0$$

$$T[T(-1-T)+2] = 0$$

$T = 0$

$$-T - T^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow T^2 + T - 2 = 0 \qquad 1 - 4(-2) \qquad \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} 2 = 1 \\ -\frac{4}{2} = -2 \end{cases}$$

$$1 + 8 = 9$$

$T = 0, \ T = 1, \ T = -2$ $\qquad m_0 = 1 \ \ g_0 = 1$, $m_1 > 1 \ \ g_1 = 1$, $m_{-2} = 1 \ \ g_{-2} = 1$ $\Big\}$ $f$ è semplice e diagonalizzabile $\forall h$

---

STUDIARE FASCIO DI coniche.

$$x^2 + hy^2 + 2hxy + hx - hy = 0$$

$$|B| = \begin{pmatrix} 1 & h & \frac{1}{2}h \\ h & h & -\frac{1}{2}h \\ \frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}h & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 & h \\ h & h \\ \frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}h \end{matrix}$$

$$h\left(-\frac{1}{2}h\right)\left(\frac{1}{2}h\right)+h\left(\frac{1}{2}h\right)\left(-\frac{1}{2}h\right)-\left[\left(\frac{1}{2}h\right)^2+h\left(\frac{1}{2}h\right)^2\right]=$$

$$h\left(-\frac{1}{2}h\right)\left(\frac{1}{2}h\right)+h\left(\frac{1}{2}h\right)\left(-\frac{1}{2}h\right)-\left(\frac{1}{2}h\right)^2-h\left(\frac{1}{2}h\right)^2$$

$$h\left(-\frac{1}{2}h\right)\left(\frac{1}{2}h\right)+h\left(\frac{1}{2}h\right)\left(-\frac{1}{2}h\right)-\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{4}h^3=$$

$$h\left(-\frac{1}{4}h^2\right)+\left(\frac{1}{2}h^2\right)\left(-\frac{1}{2}h\right)-\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{4}h^3$$

$$-\cancel{\frac{1}{4}h^3}+\cancel{\frac{1}{4}h^3}-\frac{1}{4}h^2-\frac{3}{4}h^3=$$ (PHOTO MATH)

$$h^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}h\right)\neq 0$$

$h^2\neq 0 \rightarrow \boxed{h\neq 0}$

$-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}h\neq 0 \rightarrow -\frac{3}{4}h\neq\frac{1}{4} \Rightarrow -3h\neq 1 = \boxed{h\neq -\frac{1}{3}}$

$$\begin{pmatrix} 1 & h & \frac{1}{2}h \\ h & h & -\frac{1}{2}h \\ \frac{1}{2}h & -\frac{1}{2}h & 0 \end{pmatrix}=B \qquad |A|=\begin{vmatrix} 1 & h \\ h & h \end{vmatrix}$$

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il $\det A$:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$;
  invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

$$h-h^2<0 \qquad h^2-h=0 \qquad h(h-1)=0$$
$$h=0 \quad h=1$$

$$\begin{cases} h<0 & h>1 \\ h\neq 0 & h\neq\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$TrA=0$$

$$1+h=0$$

$$\boxed{h=-1} \text{ ok } \checkmark$$

$$\alpha X^2+\beta Y^2=\gamma$$

$$\gamma=-\frac{|B|}{|A|}=\frac{h^2\left(-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}h\right)}{1+h}=\frac{-\frac{1}{4}h^2-\frac{3}{4}h^3}{1+h}$$

$$=-\frac{1}{4}h^2-\frac{3}{4}h^3\cdot\frac{1}{1+h}=1+h\cdot\left(-\frac{1}{4}h^2-\frac{3}{4}h^3\right)=$$

NON SO

$A=(0,0,1)$ PIANO $\pi_1: 2x-y+3=0$ $\pi_2: x+y-z-3=0$

$A'=?$ simm. di $A$, rispetto a $\pi_1$.

retta $t$ che passa per $A \perp \pi_2$

$\vec{v}_{\pi_1}=(2,-1,3)$

$\vec{v}_{\pi_2}=(1,1,-1)$

DIST. PUNTO-PIANO

$\pi_1\ 2x-y+3=0$ $\quad A=(0,0,1)$

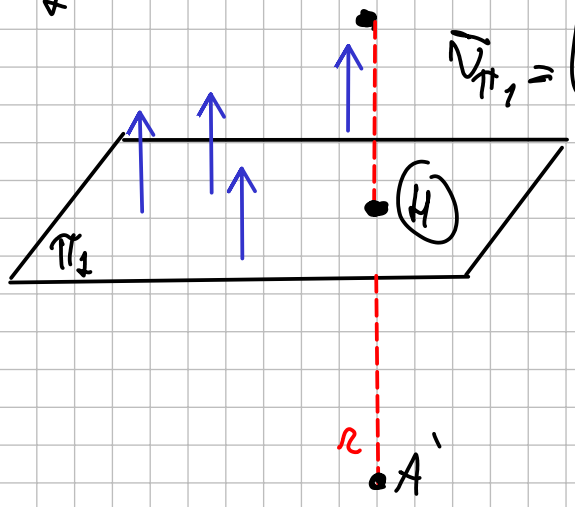
$$\overline{PH}=\frac{|ax_0+by_0+cz_0|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow \overline{P_0H}=\frac{|0+0+3|}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\overline{P_0H}=\frac{3}{\sqrt{14}} \rightarrow \frac{3\sqrt{14}}{14}$$

retta che passa per $A \perp \pi_1$

$A(0,0,1)$

$\vec{v}_{\pi_1}=(2,-1,0)$




$r: \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$

$: \frac{x-0}{l}=\frac{y-0}{m}=\frac{z-1}{n}$

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{0}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x=-y \\ -y=\frac{z-1}{0} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x=-2y \\ z-1=0 \quad z=1 \end{cases}$$

Punto intersezione $r$ e $\pi_1$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+y=0 \\ -3y-z+1=0 \\ 2x-y+3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ -6x-9-z+1=0 \\ y=2x+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x+2x+3=0 \\ -6x-8-z=0 \rightarrow z=-6x-8 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x + 3 = 0 \\ \dots - \\ \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5}{2}x = -3 \quad 5x = -6 \quad x = -\frac{6}{5} \\ z = -6\left(-\frac{6}{5}\right) - 8 \Rightarrow z = \frac{36}{5} - 8 \\ y = 2\left(-\frac{6}{5}\right) + 3 \quad y = \frac{-12}{5} + 3 \end{cases}$$

$$z = \frac{36-40}{5} = \boxed{-\frac{4}{5}} \qquad \frac{-12+15}{5} = \frac{3}{5}$$

$$H = \left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

Punto medio $M = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

$$\frac{A+A'}{2} = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

$A = (x_A, y_A, z_A)$ $A' = (x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$ PUNTO MEDIO $M = \left(-\frac{6}{5}, \frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$

$A = (0, 0, 1)$

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \qquad 2x_M = x_A + x_{A'}$$

$$x_{A'} = 2x_M - x_A \qquad x_{A'} = 2\left(-\frac{6}{5}\right) - 0$$

$$x_{A'} = -\frac{12}{5}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \rightarrow y_{A'} = 2y_M - y_A \qquad y_{A'} = \frac{6}{5}$$

$$z_M = \frac{z_A + z_{A'}}{2} \rightarrow z_{A'} = 2z_M - z_A \qquad z_{A'} = -\frac{8}{5} - 1 = \frac{-8-5}{5} = -\frac{13}{5}$$

$A'$ simmetrico $= \left(-\frac{12}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{13}{5}\right)$