FUNZIONI CONTINUE

↳ se $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)} = \boxed{f(x_0)}$

↓

Esempio: $f(x) = x+1$ (CONTINUA)

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

$f(1) = 2$

$2 = 2$

FUNZIONI DISCONTINUE

↳ se $\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x)} \neq \boxed{f(x_0)}$

↓

Esempio: $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ (DISCONTINUA)

$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

$f(1) = 3$

$2 \neq 3$

LIMITI DI FUNZIONI RAZIONALI PER $x \to x_0$ (4 CASI)

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

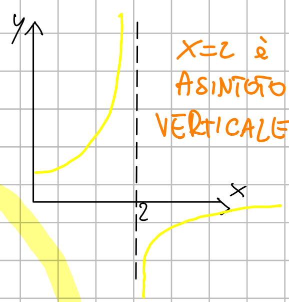
1. Se provo a sostituire x_0 alla funzione non si annulla né il numeratore né il denominatore (OK, FUNZIONE CONTINUA)

ES: $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{1} = 3$ ✓

2. Se provo a sostituire x_0 alla funzione si annulla SOLO il numeratore. (OK, FUNZIONE CONTINUA)

ES: $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{0}{3} = 0$ ✓

3. Se provo a sostituire x_0 alla funzione si annulla SOLO il denominatore



x=2 è ASINTOTO VERTICALE

ES 1: $\lim_{x \to 2} \frac{x+1}{2-x} = \left[\frac{3}{0}\right] =$ NON ESISTE

CALCOLO LIMITE DESTRO E SINISTRO

LIMITE DESTRO $\lim_{x \to 2^+} \frac{x+1}{2-x} = \left[\frac{+3}{0^-}\right] = -\infty$

LIMITE SINISTRO $\lim_{x \to 2^-} \frac{x+1}{2-x} = \left[\frac{+3}{0^+}\right] = +\infty$

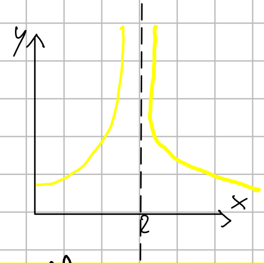
$-\infty \neq +\infty$

Es 2: $\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{(2-x)^2} = \left[\frac{3}{0}\right] = +\infty$

LIMITE DESTRO $\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{(2-x)^2} = \left[\frac{+3}{0^+}\right] = +\infty$

LIMITE SINISTRO $\lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{(2-x)^2} = \left[\frac{+3}{0^+}\right] = +\infty$

$=$ (SONO UGUALI)

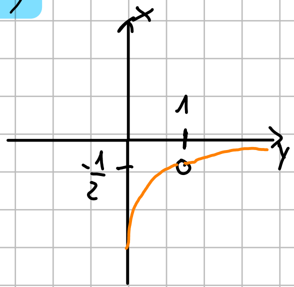


④ Se provo a sostituire x_0 alla funzione si annulla il numeratore e il denominatore

Es: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} = \frac{x-2}{x+1} \overset{x_0=1}{=} \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$

FORMA INDETERMINATA

SCOMPONGO



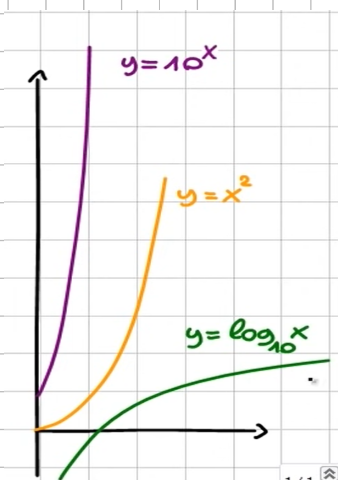
LIMITI CON ESPONENZIALI E LOGARITMI CON $x\to+\infty$

Polinomiali:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3-5x^2+1 = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^3}_{+\infty}\left(1-\underbrace{\frac{5}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{0}\right) = +\infty$$

Razionali:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-4x-3}{2x^2-5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\underbrace{x^{\cancel{3}}}_{+\infty}\left(1-\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{0}-\underbrace{\frac{3}{x^3}}_{0}\right)}{2\cancel{x^2}\left(1-\underbrace{\frac{5}{2x^2}}_{0}\right)} = +\infty$$



SCALA DI CONFRONTO

$$\log_a x \ll x^b \ll c^x \quad \forall a>1,\ b>0,\ c>1$$

ES 1: $\lim_{x\to+\infty} x^6-6^x = [\infty-\infty] = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{6^x}_{\to+\infty}\Big(\underbrace{\frac{x^6}{6^x}}_{\to 0}-1\Big) = -\infty$

ES 2: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-x^2}{3x-\ln x} = \left[\frac{\infty-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{+\infty}\Big(1-\overbrace{\frac{x^2}{e^x}}^{0}\Big)}{3x\Big(1-\underbrace{\frac{\ln x}{3x}}_{\to 0}\Big)} = +\infty$

ES 3: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{\log_2 x-2x} = \left[\frac{\infty}{\infty-\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}}{2x\left(\frac{\log_2 x}{2x}-1\right)} = \frac{\cancel{|x|}\sqrt{\left(1+\overbrace{\frac{3}{x^2}}^{0}\right)}}{\cancel{2x}\left(\underbrace{\frac{\log_2 x}{2x}}_{0}-1\right)} = -\frac{1}{2}$

PASSAGGI:

1) RACCOGLIERE IL TERMINE DI GRADO MAX AL NUMERATORE E AL DENOMINATORE
2) SEMPLIFICARE
3) GUARDARE A COSA TENDONO I SUPERSTITI

LIMITI DI FUNZIONI COMPOSTE

ES:

$\lim_{x\to\infty} \cos\Big(\underbrace{\frac{3}{e^x}}_{\to 0}\Big) = \lim_{x\to\infty} \cos(0) = 1$

$\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x^2-1}{2x^2-x}} = \lim_{y\to\frac{1}{2}} e^y = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

LA FUNZIONE ESPONENZIALE E' CONTINUA IN $y=\frac{1}{2}$

- CHIAMO $y=\frac{x^2-1}{2x^2-x}$ - $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x} = \frac{\cancel{x^2}\left(1-\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{0}\right)}{2\cancel{x^2}\left(1-\underbrace{\frac{1}{2x}}_{0}\right)} = \frac{1}{2}$

ES 3:

quantità limitata fra [1,-1]

quantità finita

$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(7^x+\ln x)}{\underbrace{5x^2+1}_{\to\infty}} = 0 \to \left[\frac{m}{\infty}\right]$ con $m\in\mathbb{R}$

PASSAGGI

1) VEDO A COSA TENDE LA FUNZIONE PIÙ INTERNA
2) VEDO A COSA TENDE COMPLESSIVAMENTE LA FUNZIONE

LIMITI NOTEVOLI

1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\frac{1}{2}$$

DALLA RELAZIONE FONDAMENTALE $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\boxed{1-\cos^2 x}}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin^2 x}{x^2}}_{1}\cdot\frac{1}{\underbrace{1+\cos x}_{2}}=\frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$$

$$=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

CHIAMO $y=\frac{1}{x}$

$$=\lim_{y\to\infty}\ln\underbrace{\left(1+\frac{1}{y}\right)^y}_{e}=\ln e=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1$$

ALTRI LIMITI NOTEVOLI (PIU' RARI)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$$

EQUIVALENZE ASINTOTICHE

Due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ si dicono **ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI PER $x \to x_0$** se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ e si scrive $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$.

DAI LIMITI NOTEVOLI SI RICAVA

$\sin x \sim x$ $\quad 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ $\quad \operatorname{tg} x \sim x$ $\quad e^x - 1 \sim x$ $\quad \ln(1+x) \sim x$ $\quad (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \sin x = \lim_{x \to x_0} x \qquad \lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} x = \lim_{x \to x_0} x$$

Il limite di $f(x)$ è uguale al limite di $g(x)$, quindi posso riscrivere la funzione in forma semplificata

PROPRIETÀ:

1) SE $f_1(x) \sim g_1(x)$ E $f_2(x) \sim g_2(x)$ PER $x \to x_0$ ALLORA $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$ PER $x \to x_0$ ED IN PARTICOLARE, SE I LIMITI PER $x \to x_0$ DEI 2 PRODOTTI ESISTONO, SONO UGUALI

2) SE $f_1(x) \sim g_1(x)$ E $f_2(x) \sim g_2(x)$ PER $x \to x_0$ ALLORA $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \sim \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$ PER $x \to x_0$ ED IN PARTICOLARE, SE I LIMITI DEI 2 RAPPORTI ESISTONO, SONO UGUALI

3) SE $f(x) \sim g(x)$ PER $x \to x_0$ ALLORA $[f(x)]^\alpha \sim [g(x)]^\alpha$ PER $x \to x_0$