Corso di Algebra Lineare e Geometria
Vettori e spazi vettoriali

Dott.ssa L. Marino

Università di Catania

http://www.dmi.unict.it/lmarino

Testi consigliati

Libri **esercizi**:
P. Bonacini, M.G. Cinquegrani, L. Marino, *Algebra Lineare: Esercizi svolti*, Ed. Cavallotto, Catania 2012
P. Bonacini, M.G. Cinquegrani, L. Marino, *Geometria Analitica: Esercizi svolti*, Ed. Cavallotto, Catania 2012

Grandezze scalari e vettoriali

Sono dette **grandezze scalari**, quelle che, come per esempio la temperatura o il tempo, risultano completamente descritte da un numero, che ne rappresenta il valore.
Sono dette **grandezze vettoriali** quelle che per essere definite necessitano, oltre che di un'intensità, anche di una direzione e di un verso:

- il *modulo* o intensità è identificato dalla lunghezza del segmento di freccia,
- la *direzione* dalla retta sulla quale esso giace,
- il *verso* dalla punta della freccia.
  Sono esempi di grandezze vettoriali la velocità e la forza.

Componenti cartesiane di un vettore nel piano

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy (piano cartesiano) e in esso un vettore applicato $v = \overrightarrow{OP}$ avente come punto di applicazione l'origine del sistema di riferimento.
Si dicono **componenti cartesiane del vettore** $\overrightarrow{OP}$ le coordinate cartesiane del punto P e si indicano con v_x e v_y. Possiamo utilizzarle per indicare $\overrightarrow{v}$ con la seguente notazione

$$v = (v_x, v_y)$$

o in modo del tutto equivalente

$$v = v_x \widehat{i} + v_y \widehat{j}$$

dove $\widehat{i}, \widehat{j}$ sono i versori che rappresentano la direzione degli assi.

Componenti cartesiane di un vettore nello spazio

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali $Oxyz$ (piano cartesiano) e in esso un vettore applicato $v = \overrightarrow{OP}$ avente come punto di applicazione l'origine.

$$v = (v_x, v_y, v_z)$$

Un vettore $\overrightarrow{OP}$ applicato in O è individuato dal suo estremo P il quale ha tre coordinate rispetto a un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $Oxyz$.

Le coordinate di P sono per definizione le **componenti del vettore** $\overrightarrow{OP}$.

In modo del tutto equivalente si può anche scrivere

$$v = v_x \widehat{i} + v_y \widehat{j} + v_z \widehat{k}$$

dove $\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}$ sono i versori che rappresentano la direzione degli assi.

Teorema sulla scomposizione di un vettore

Una delle importanti utilizzazioni dei versori fondamentali è data dal seguente teorema, che permette di ottenere ogni vettore mediante le sue componenti e i versori fondamenti.

Theorem

Sia $O\overrightarrow{x}\overrightarrow{y}\overrightarrow{z}$ *un sistema di coordinate e siano* $\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}$ *i versori fondamentali. Allora qualunque sia il vettore applicato in* O, $\forall v$ *si ha*

$$v = v_x \widehat{i} + v_y \widehat{j} + v_z \widehat{k}$$

dove v_x, v_y, v_z *sono le componenti del vettore* v*. Inoltre questa scrittura è* **unica**, *cioè se* $v = a\widehat{i} + b\widehat{j} + c\widehat{k}$ *allora si ha* $v_x = a, v_y = b, v_z = c$.

Notazioni

Notazioni:

1. Il modulo di un vettore vedremo che si indica $|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$
2. Un vettore di modulo 1 si chiama **versore.**
3. Un vettore di modulo 0 si chiama **vettore nullo**, vettore con direzione e verso indeterminati.

Operazioni con i vettori

Le prime operazioni tra vettori che vengono studiate sono semplici ma da non sottovalutare in quanto fondamentali per definire lo Spazio Vettoriale. Esse sono le seguenti:

- 1) la somma,
- 2) la differenza,
- 3) il prodotto di uno scalare per un vettore,
- 4) il prodotto scalare,
- 5) il prodotto vettoriale,
- 6) il prodotto misto

1)Somma di vettori

La **somma di vettori** è una operazione interna che associa a due vettori un nuovo vettore, detto vettore somma.

$$+ : \; V \times V \to V$$

Metodi grafici per eseguire la somma:

1. la **regola del parallelogramma**
2. **metodo punta-coda**
3. **tramite le componenti**: $v_1 = (v_{1x}, v_{1y}), v_2 = (v_{2x}, v_{2y}) \to$ $v_1 + v_2 = (v_{1x} + v_{2x}, v_{1y} + v_{2y})$ in $\mathbb{R}^2$
   In modo analodo $v_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}), v_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}) \to$ $v_1 + v_2 = (v_{1x} + v_{2x}, v_{1y} + v_{2y}, v_{1z} + v_{2z})$ in $\mathbb{R}^3$

2)Differenza di vettori

La **differenza tra vettori** è una operazione interna che associa a due vettori un nuovo vettore, detto vettore differenza.

$$- : \; V \times V \to V$$

Metodi grafici per eseguire la differenza sono analoghi a quelli della somma. La **differenza** tra due vettori

$$\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2$$

può essere vista come la somma di $\overrightarrow{v}_1$ con l'opposto di $\overrightarrow{v}_2$, cioè

$$\overrightarrow{v}_1 - \overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{v}_1 + (-\overrightarrow{v}_2)$$

1. **tramite le componenti**:$v_1 = (v_{1x}, v_{1y}), v_2 = (v_{2x}, v_{2y}) \to$
   $v_1 - v_2 = (v_{1x} - v_{2x}, v_{1y} - v_{2y})$ in $\mathbb{R}^2$
   In modo analodo $v_1 = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}), v_2 = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z}) \to$
   $v_1 - v_2 = (v_{1x} - v_{2x}, v_{1y} - v_{2y}, v_{1z} - v_{2z})$ in $\mathbb{R}^3$

3)Il prodotto di uno scalare per un vettore

Definiamo il prodotto uno scalare per un vettore detto **prodotto esterno** cioè prodotto di un numero reale per un vettore.

$$\cdot : K \times V \to V$$

Dato v vettore applicato in O, $a \in \mathbb{R}$ il prodotto

$$a\overrightarrow{v}$$

è un vettore applicato in O e ha come

- *modulo* $|a \cdot v| = |a| \cdot |v|$,
- *direzione* la stessa di v
- *verso* di $a \cdot v$ è uguale a quello di v se $a > 0$, è invece opposto se $a < 0$

Mediante le componenti il Prodotto esterno:
$a \cdot v = (av_x, av_y, av_z) = av_x\widehat{i} + av_y\widehat{j} + av_z\widehat{k}$

Dati i vettori v e w si definisce **prodotto scalare** e si indica $v \cdot w$ il numero seguente dato dal prodotto di tre numeri:

$$v \cdot w = |v||w|cos\theta$$

dove θ è l'angolo individuato dai due vettori.

- Proprietà commutativa: $v \cdot w = w \cdot v$
- $v \cdot w = 0 \Longleftrightarrow v \perp w$
- $\widehat{i} \cdot \widehat{i} = \widehat{j} \cdot \widehat{j} = \widehat{k} \cdot \widehat{k} = 1$, $\widehat{i} \cdot \widehat{j} = \widehat{i} \cdot \widehat{k} = \widehat{j} \cdot \widehat{k} = 0$
- Tramite le componenti il prodotto scalare è

$$v \cdot w = (v_x, v_y, v_z) \cdot (w_x, w_y, w_z) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$$

5)Prodotto vettoriale tra due vettori

Dati due vettori v e w si definisce **Prodotto vettoriale** il vettore che si indica con

$$v \wedge w$$

- **modulo** $|v||w|sin\widehat{vw}$, **direzione** ortogonale al piano individuato dai due vettori e **verso** determinato dalla regola della mano destra (pollice v, indice w e medio dà il verso del prodotto vettoriale)
- La proprietà commutativa non vale $v \wedge w = -w \wedge v$
- $v \wedge w = 0 \iff v||w$
- $\widehat{i} \wedge \widehat{i} = \widehat{j} \wedge \widehat{j} = \widehat{k} \wedge \widehat{k} = 0$,
  $\widehat{i} \wedge \widehat{j} = \widehat{k}, \widehat{j} \wedge \widehat{k} = \widehat{i}, \widehat{k} \wedge \widehat{i} = \widehat{j}$
- Mediante le componenti $v \wedge w = det \begin{pmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix} =$
  $(v_y w_z - v_z w_y)\widehat{i} + (v_z w_x - v_x w_z)\widehat{j} + (v_x w_y - v_y w_x)\widehat{k}$

6)Prodotto misto

Definiamo **Prodotto misto**:

$$u \cdot v \wedge w$$

esso rappresenta il volume del parallelepipedo costruito sui tre vettori. Inoltre se

$$u \cdot v \wedge w = 0$$

allora i tre vettori sono complanari. Mediante le componenti il prodotto misto $u \cdot v \wedge w$ si dimostra facilmente che è il determinante della matrice che ha come righe le componenti dei tre vettori.

$$u \cdot v \wedge w = det \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

(V,+) gruppo abeliano

Dato V l'insieme dei vettori, valgono le seguenti proprietà rispetto alla prima operazione,la somma di vettori:

1. Proprietà associativa $(u+v)+w = v+(u+w)$
2. Elemento neutro della somma è il vetotre nullo $u+0 = 0+u = u$
3. Esistenza dell'opposto: per ogni vettore esiste uno e un solo vettore detto l'opposto di v e indicato con $-v$ tale che $v+(-v) = (-v)+v = 0$
4. Proprietà commutativa $u+v = v+u$

L'insieme dei vettori rispetto all'operazione somma è **Gruppo Abeliano**.
Nota bene : un vettore di modulo 1 si chiama **versore**.

Spazio Vettoriale

Dicesi **Spazio Vettoriale**:

$$(V, +, \cdot)$$

su un campo $\mathbb{K}$ oppure $\mathbb{K}$-spazio vettoriale, con le operazioni di somma e prodotto esterno se valgono le seguenti proprietà:

1. $(V, +)$ Gruppo Abeliano, dove $+ : V \times V \to V$
2. Proprietà associativa del prodotto esterno: $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$
3. $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$
4. Proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto esterno
$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v \ \forall a, b \in K, \forall v \in V$$
5. Proprietà distributiva del prodotto esterno rispetto alla somma
$$a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w \ \forall a \in K, \forall v, w \in V$$

$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$: $n-$uple: spazio vettoriale

$\mathbb{R}^2$ coppie di numeri reali è $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con le operazioni di somma $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ e prodotto esterno $a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$

$\mathbb{R}^3$ terne di numeri reali è $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con le operazioni di somma $(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$ e prodotto esterno $a(x_1, x_2, x_3) = (ax_1, ax_2, ax_3)$

$\mathbb{R}^4$ quaterne di numeri reali è $\mathbb{R}$-spazio vettoriale con le operazioni di somma $(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_3 + y_4)$ e prodotto esterno $a(x_1, x_2, x_3, x_4) = (ax_1, ax_2, ax_3, ax_4)$

$(\mathbb{R}^{m,n}, +, \cdot)$ spazio vettoriale

Indichiamo con $\mathbb{R}^{m,n}$ l'insieme delle matrici $m \times n$ sul campo dei numeri reali $\mathbb{R}$.
Se consideriamo l'insieme delle matrici con le due operazioni

$$(\mathbb{R}^{m,n}, +, \cdot)$$

esso è uno **spazio vettoriale** sul campo $\mathbb{R}$.
Le operazioni sono: somma tra matrici e prodotto esterno di un numero per una matrice.

Condizione di ortogonalità e di parallelismo tra due vettori

Sia V un K-spazio vettoriale. I suoi elementi saranno detti vettori e quelli del campo K scalari.
Se v e w sono due vettori non nulli,
Diamo una condizione di ortogonalità tra i due vettori:

$$v \perp w \Longleftrightarrow v \cdot w = (v_x, v_y, v_z) \cdot (w_x, w_y, w_z) = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = 0$$

Diamo di conseguenza una condizione di parallelismo tra i due vettori.

$$v \| w \Longleftrightarrow \ \exists \lambda \in K \setminus \{0\} \mid v = \lambda w$$