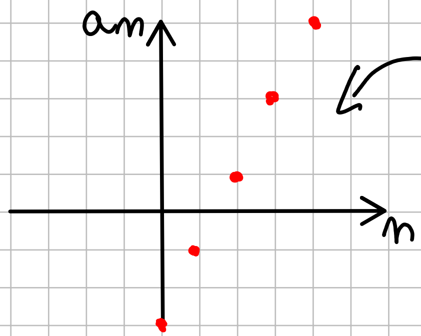
DEFINIZIONE

$$\overset{\text{DOMINIO}}{} \qquad \overset{\text{CODOMINIO}}{}$$

E' una "funzione" $\boxed{a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}}$, cioè una serie di "elementi" che soddisfano la funzione "a". Si indica "$a_n = 2n - 3$", con $n \in \mathbb{N}$

↳ es: $a_n = 2\overset{\text{variabile}}{n} - 3$

$\underbrace{-3}_{a_0}\ \underbrace{-1}_{a_1}\ \underbrace{1}_{a_2}\ \underbrace{3}_{a_3}\ \underbrace{5}_{a_4} \dots\dots \to \infty$



serie di punti

Una successione $\{a_n\}$ si dice:

LIMITATA INFERIORMENTE se esiste $m \in \mathbb{R}$: $a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$

LIMITATA SUPERIORMENTE se esiste $M \in \mathbb{R}$: $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

LIMITATA se esistono $m \in \mathbb{R}$ e $M \in \mathbb{R}$: $m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

in sostanza:
- Limitata $\boxed{\text{sup}}$: ogni a_n è minore di un $M \in \mathbb{R}$
- Limitata $\boxed{\text{inf}}$: ogni a_n è maggiore di un $m \in \mathbb{R}$
- Limitata: ogni a_n è compreso in un intervallo.

MONOTONA CRESCENTE: se ogni a_n è $\boxed{\text{MINORE O UGUALE}}$ del successivo:

$$\boxed{a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE: se ogni a_n è $\boxed{\text{MINORE}}$ del successivo

$$\boxed{a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

MONOTONA DECRESCENTE: se ogni a_n è $\boxed{\text{MAGGIORE O UGUALE}}$ del successivo:

$$\boxed{a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE se ogni a_n è $\boxed{\text{MAGGIORE}}$ del successivo

$$\boxed{a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

Una successione $\{a_n\}$ POSSIEDE (o ACQUISTA) una proprietà **DEFINITIVAMENTE** se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che a_n soddisfa quella proprietà $\forall n \geq N$.

es: $\boxed{a_n = 2n-3}$ $\underbrace{-3}_{a_0}$ $\underbrace{-1}_{a_1}$ $\underbrace{1}_{a_2}$ $\underbrace{3}_{a_3}$ $\underbrace{5}_{a_4}$ ... È
- LIMITATA INFERIORMENTE
- MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE
- DEFINITIVAMENTE "POSITIVA" per $n > 1$

es: $a_n = \frac{1}{n+1}$ $\underbrace{1}_{a_0}$ $\underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1}$ $\underbrace{\frac{1}{3}}_{a_2}$ $\underbrace{\frac{1}{4}}_{a_3}$ È
- LIMITATA SUPERIORMENTE
- MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE
- DEFINITIVAMENTE MINORE DI $\frac{1}{3}$ per $n > 2$

LIMITI DI SUCCESSIONI

Calcolare il limite di una successione ($\lim_{n \to +\infty} a_n$ oppure $\lim a_n$) equivale a chiedersi che tipo di comportamento assume la successione quando n tende a diventare MOLTO MOLTO GRANDE.

Ci sono 4 CASI

1. Se fissato un $M \in \mathbb{R}$ (anche ENORME), $a_n > M$ DEFINITIVAMENTE, cioè $\boxed{\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n > n_0\ a_n > M}$ Si dice che la successione DIVERGE A $+\infty$ e si scrive $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$ oppure $a_n \to +\infty$

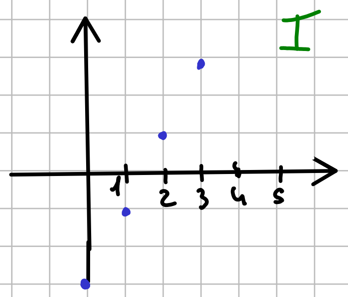
2. Se fissato un $M \in \mathbb{R}$ (anche PICCOLISSIMO), $a_n < M$ DEFINITIVAMENTE, cioè $\boxed{\forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } \forall n > n_0\ a_n < M}$ Si dice che la successione DIVERGE A $-\infty$ e si scrive $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$ oppure $a_n \to -\infty$

3. Se esiste un numero reale "ℓ" che gode della seguente proprietà: Fissato un numero reale $\varepsilon > 0$ (anche MOLTO "PICCOLO") $\boxed{|a_n - \ell| < \varepsilon}$ **DEFINITIVAMENTE** e si dice che la successione CONVERGE e si scrive $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ oppure $a_n \to \ell$

N.B. Se $l=0$, cioè se $\lim_{n\to+\infty}=0$, la successione si dice **INFINITESIMA**.

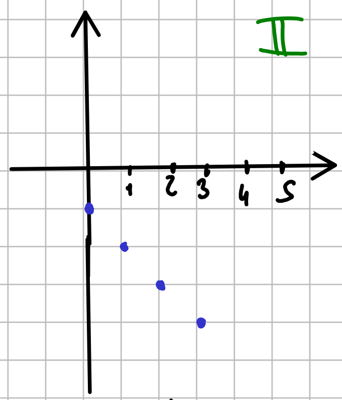
(4) Se non si verifica NESSUNO DI QUESTI CASI PRECEDENTI allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$ NON ESISTE e si dice che la successione è **INDETERMINATA**.

esempi:



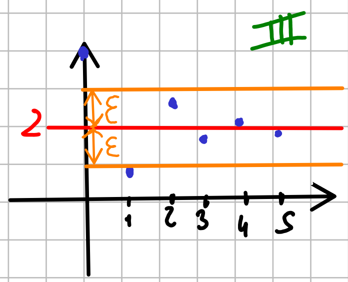
$a_n = 2n-3$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$



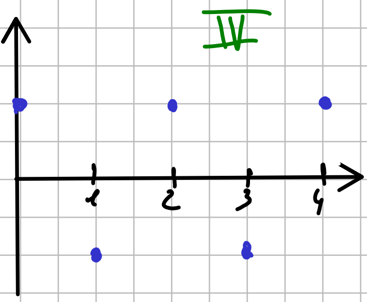
$a_n = -1-n$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$



$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + 2$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 2$



$a_n = (-1)^n$

$\lim_{n\to+\infty} a_n = \emptyset$

I a_n diverge a $+\infty$

II a_n diverge a $-\infty$

III a_n è infinitesima

IV a_n è indeterminata

$a_n = t$ ↷

METODO DI FAZIO

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n^2+1}{4a_n} \end{cases}$$

$$\boxed{① \ f(t) = \frac{2t^2+1}{4t}}$$

$$\boxed{② \ \varphi(t) = \frac{2t^2+1}{4t} - t}$$

$\boxed{③ \text{ STUDIO del segno di } \varphi(t)}$

$\boxed{④ \text{ STUDIO del grafico di } f}$

1) $f(t) = \dfrac{2t^2+1}{4t}$

2) $\varphi(t) = f(t) - t$

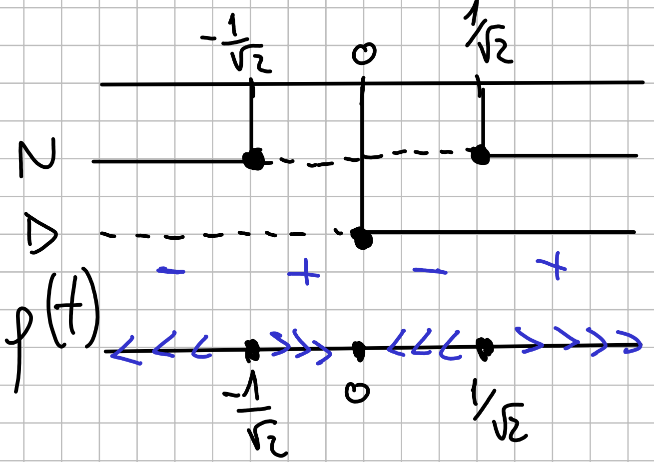
$$\varphi(t) = \frac{2t^2+1}{4t} - t$$

3) Segno di $\varphi(t)$

$$\frac{2t^2+1}{4t} - t \geq 0 \rightsquigarrow \frac{2t^2+1-4t^2}{4t} \geq 0 \longrightarrow \frac{-2t^2+1}{4t} \geq 0$$

$N: -2t^2+1 \geq 0 \longrightarrow -2t^2+1=0 \to 2t^2 = 1 \to \boxed{t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$D: \ 4t \geq 0 \longrightarrow \boxed{t \geq 0}$



$>>>>$ crescente

$<<<<<$ decrescente

I $\left[-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

III $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ $\exists$ lim ed è finito $(=0)$ limitata inferiorm.

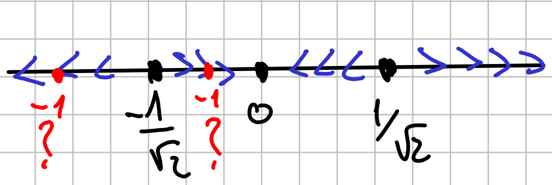
II $\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \to \exists$ lim ed è finito $(=0)$ limitata superiorm.

IV $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right]$

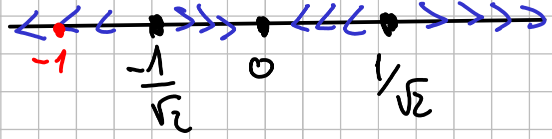
In 0 la successione converge quindi è un candidato limite. Il limite è lì dove i termini "si avvicinano", non il contrario

In quale di questi intervalli sta la successione?

$\rightsquigarrow$ DOVE STA a_1?



$-1 \cancel{>} < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\qquad 1 < \frac{1}{\sqrt{2}}$ NO



46:08 18/05/21

PROPRIETÀ: $a_1 \in [-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$

$\hookrightarrow$ essere compreso nell'intervallo $[-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$

$\rightarrow$ INDUZIONE: a_1 ha una proprietà. Se a_n ha la stessa proprietà di a_1, è vero che anche a_{n+1} la ha?

$a_n \in [-\infty, -1/\sqrt{2}]\ \forall n$?

- Devo dimostrare che $a_n \in [-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \Longrightarrow a_{n+1} \in [-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$
- Ma se $\begin{cases} a_n = t \\ a_{n+1} = f(t) \end{cases}$ allora $t \in [-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \Longrightarrow f(t) \in [-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$

4) Quindi studio il grafico di $f(t)$

$$f(t) = \frac{2t^2+1}{4t} \qquad a_1 = -1\ (t)$$

$$\frac{2(-1)^2+1}{-4} = \frac{2+1}{-4} = -\frac{3}{4} \in [-\infty, -1/\sqrt{2}]$$

$-\frac{3}{4} < -\frac{1}{\sqrt{2}}$? (se sì, ok)

$\frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $3 > \frac{4}{\sqrt{2}}$, $9 > \frac{16}{2}$, $9 > 8$ OK

INDUZIONE VERIFICATA.

Se $-\infty < a_n < -\frac{1}{\sqrt{2}} \implies -\infty < a_{n+1} < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall n$

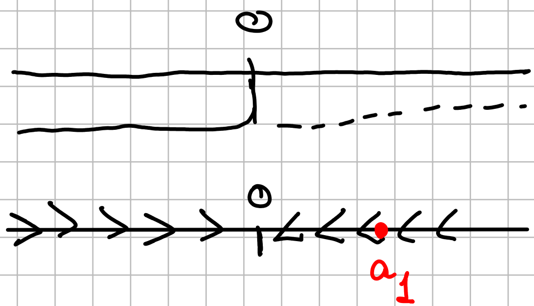
---

es: $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \end{cases}$

$f(t) = \frac{1}{2}t$

$p(t) = \frac{1}{2}t - t = \frac{t-2t}{2} = -\frac{1}{2}t$

3) $p(t) \geq 0 \qquad -\frac{1}{2}t \geq 0$



4) $\frac{1}{2}t \longrightarrow$ grafico

$a_n \to 0$

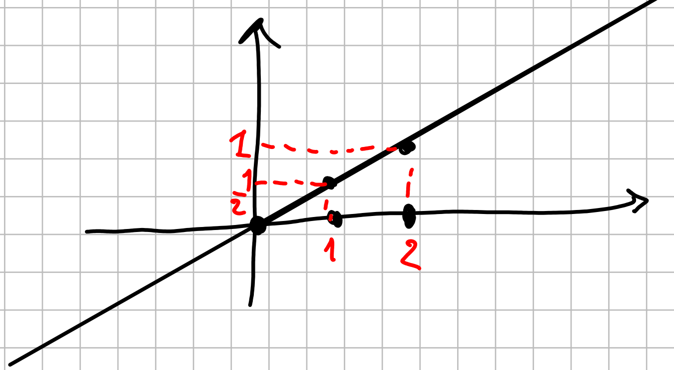
$f(x) = \frac{1}{2}x$

$\downarrow$

$0 = 0$

$1 = \frac{1}{2}$

$2 = 1$



Se $t \in [0, +\infty]$ anche $f(t) \in [0, +\infty]$??

↳ sì. Basta vedere il grafico di $f(t)$. Quindi la successione tende a 0

Esercizio 3. Determinare il limite della successione

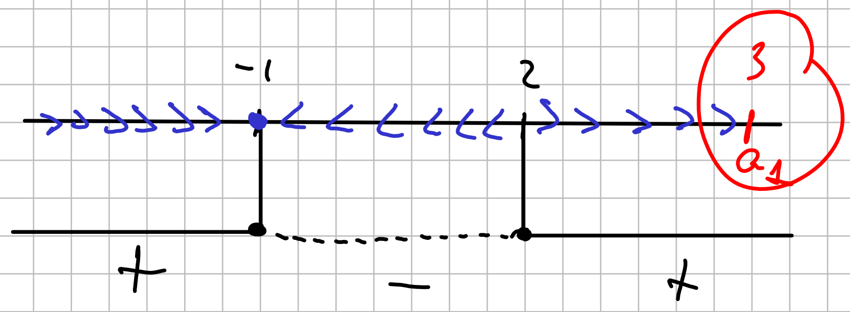
$$\begin{cases} a_1 = 3 & 3^2-2=7 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 2 & \text{per ogni } n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

1) $f(t) = t^2-2$ 2) $f(t) = t^2-t-2$

3) $f(t)\geq 0 \rightsquigarrow \underline{t^2-t-2\geq 0}$

$t^2-t-2=0$

$1^2-4(-2)=9$ $t_{1,2}=\frac{1\pm 3}{2} \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$ $t\leq -1 \wedge t\geq 2$



PROP.

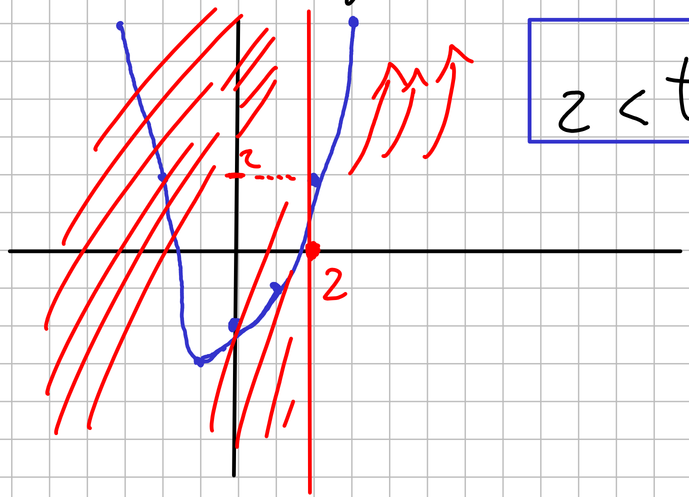
1) $2<a_1<+\infty$ ✓

2) $2<a_n<+\infty$ ✓

3) $2<a_{n+1}<+\infty$??

2) $2<t<+\infty \Rightarrow 2<f(t)<+\infty$???

GRAFICO DI $f(t)=t^2-2$



$$\boxed{2<t<+\infty \Rightarrow 2<f(t)<+\infty}$$

VERIFICATA $\forall n$

$$\boxed{a_n \to +\infty}$$

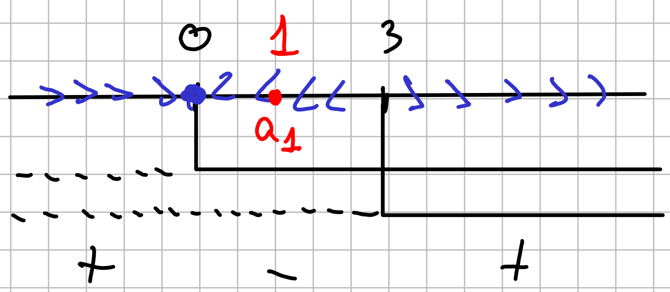
Esercizio 3. Determinare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) $f(t) = t^2 - 2t$

2) $f(t) = t^2 - 2t - t = t^2 - 3t$

3) $t^2 - 3t \geq 0 \Rightarrow t(t-3) \geq 0$ $\begin{cases} t \geq 0 \\ t - 3 \geq 0 \to t \geq 3 \end{cases}$



$$\begin{cases}]-\infty, 0] \\ [0, 3] \\ [3, +\infty[\end{cases}$$

GRAFICO DI $f(t)$. PROP: $\boxed{0 < a_1 < 3}$

$f(t) = t^2 - 2t$

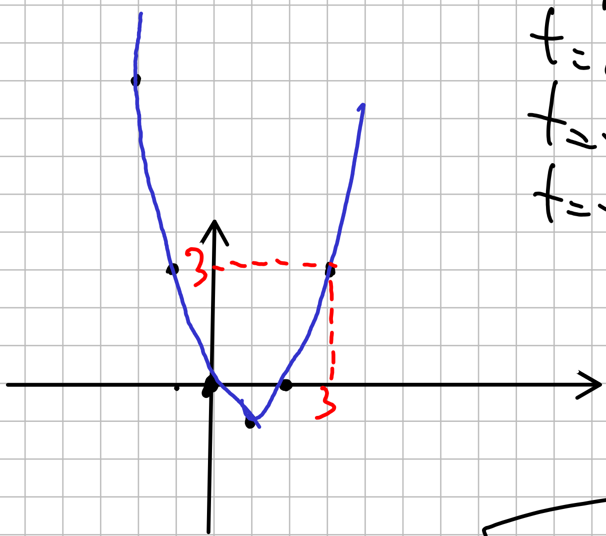
$t = 0 \quad f(t) = 0$

$t = 1 \quad f(t) = -1$

$t = 2 \quad f(t) = 0 \qquad t = 3 \quad f(3) = 3$

$t = -1 \quad f(t) = 3$

$t = -2 \quad f(t) = 8$



Se $0 < t < 3$ allora $0 < f(t) < 3$??

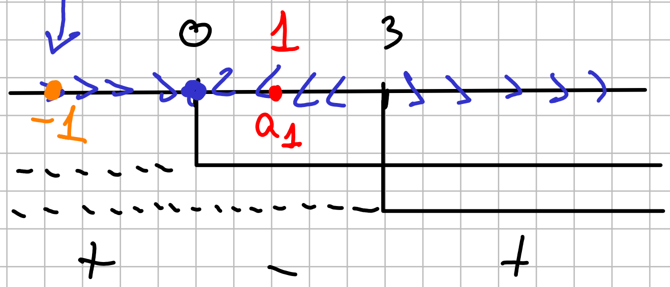
NO

quindi il limite della successione è?

Calcolo a_{n+1} con a_1 cioè $f(t) = t^2 - 2t$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n \end{cases}$$

$a_{n+1} = -1$



$$\begin{cases}]-\infty, 0] \\ [0, 3] \\ [3, +\infty] \end{cases}$$

$a_{n+1} \to 0$ tende a 0.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 + |a_n| - 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

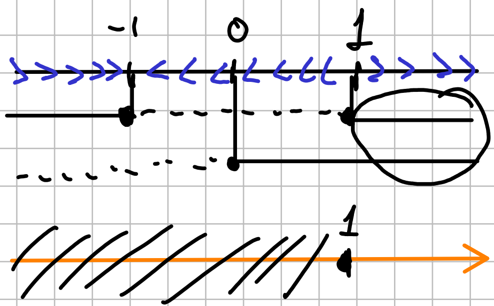
1) $f(t) = t^2 + |t| - 1$

2) $\varphi(t) = t^2 + |t| - 1 - t$

3) segno di $\varphi(t)$

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

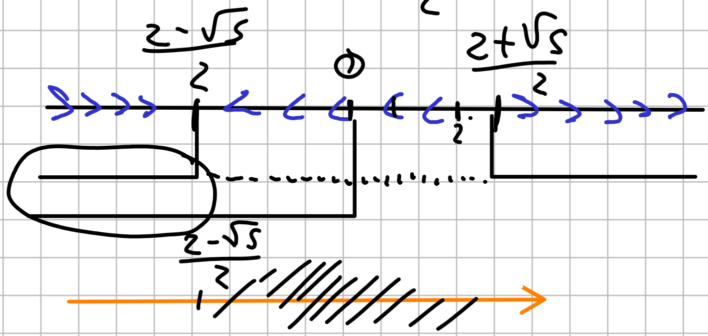
$t^2 - 1 = 0 ; t = \pm 1$

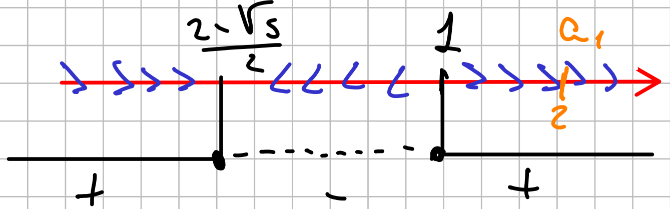


$$\begin{cases} t < 0 \\ t^2 - 2t - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$t^2 - 2t - 1 = 0 ; \Delta = 4 - 4(-1) = 8$

$t_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \quad t_1 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2}, \quad t_2 = \dfrac{2-\sqrt{8}}{2} \Big\} \geq 0$





SEGNO

PROP. $1 \leq a_1 < +\infty \overset{?}{\Longrightarrow} 1 \leq a_{n+1} < +\infty$??

$f(1) = 1^2 + |1| - 1 = 1$

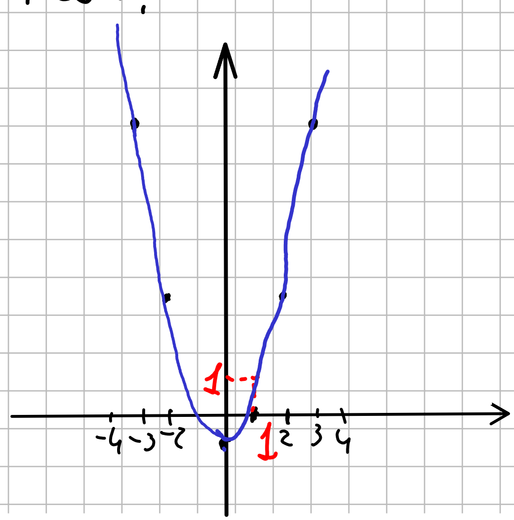
4) $f(t)$ $\quad a_{n+1} = a_n^2 + |a_n| - 1$

$2^2 + 2 - 1 = 5$

$3^2 + 3 - 1 = 11$

$4^2 + 4 - 1 = 19$

$(-2)^2 + |-2| - 1 = 5$



$$\boxed{\begin{array}{ll} 1 \leq a_1 < +\infty & a_1 \to +\infty \\ 1 \leq 1 < +\infty & a_{n+1} \to +\infty \end{array}}$$

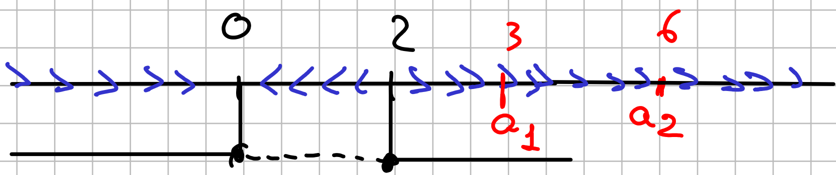
Esercizio 3. Calcolare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n \end{cases}$$

$f(t) = t^2 - t \qquad f(t) = t^2 - 2t$

$f(t) \geq 0 \qquad t^2 - 2t \geq 0 \; ; \; t(t-2) \geq 0$

$t = 0 \qquad t = 2$



$3^2 - 3 = 6$

$$\boxed{\begin{array}{ll} 2 \leq a_n < +\infty \;, & a_n \to +\infty \\ 2 \leq a_{n+1} < +\infty & a_{n+1} \to +\infty \end{array}}$$

Esercizio 3. Calcolare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n^2 + 1}{4a_n} \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{2t^2+1}{4t}$$

$$f(t) = \frac{2t^2+1}{4t} - t$$

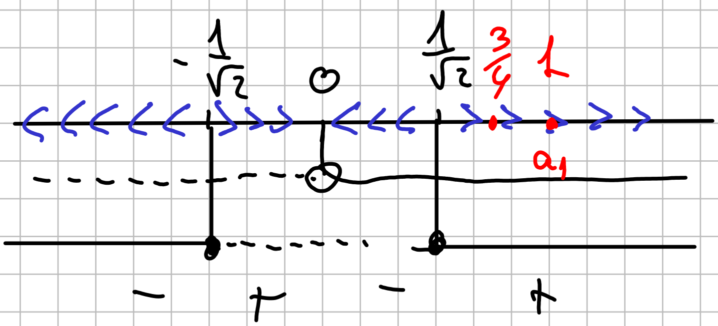
$$\frac{2t^2+1-4t^2}{4t}$$

$$f(t) \geq 0$$

$$\frac{-2t^2+1}{4t} \geq 0$$

$-2t^2+1 \geq 0$, $t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$4t \geq 0 \rightarrow t > 0$



$$a_{n+1} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} < 1$$

$\frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \frac{9}{16} > \frac{1}{2}$, $18 > 16$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a_{n+1} < +\infty$, $a_{n+1} \rightarrow +\infty$

Esercizio 3. Determinare il limite della successione

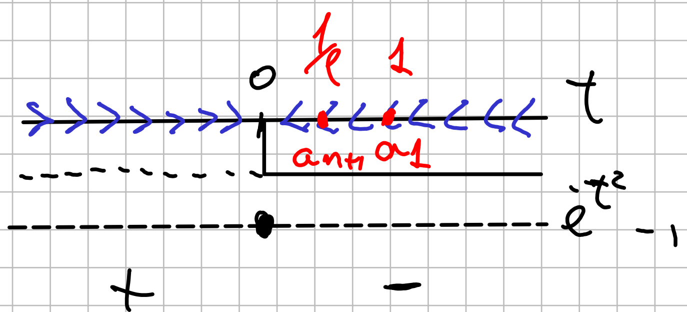
$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n e^{-a_n^2} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$f(t) = te^{-t^2}$ $\quad \ell(t) = te^{-t^2} - t$

$\hookrightarrow \ell(t) = t\left(e^{-t^2} - 1\right)$

$\ell(t) \geq 0 \qquad t\left(e^{-t^2} - 1\right) \geq 0$

$t = 0 \quad ; \left(e^{-t^2} - 1\right) \to \frac{1}{e^{t^2}} - 1 \to$ sempre negativo e si annulla in 0



$f(t)$ calcolo in a_1, cioè $1 \cdot \left| a_{n+1} = a_n e^{-a_n^2} \right.$

$1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$ $\qquad 0 \leq a_{n+1} < +\infty$

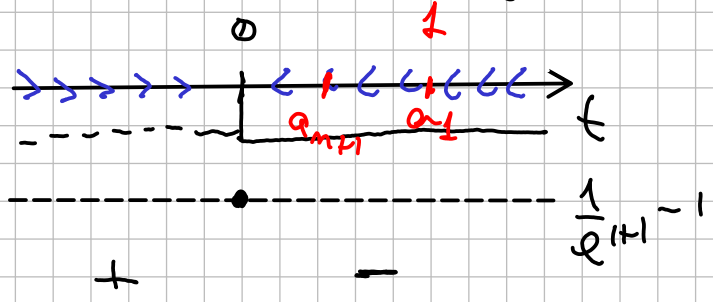
$a_{n+1} \to 0$

Esercizio 3. Determinare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n e^{-|a_n|} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$f(t) = t e^{-|t|}$ $\qquad$ $\varphi(t) = t\left(e^{-|t|} - 1\right)$

$\varphi(t)$ segno $\qquad$ $\frac{1}{e^{|t|}} - 1$



Calcolo a_{n+1} con a_1. $\qquad$ $0 < \frac{1}{e^{|1|}} < 1$

$0 \leq a_{n+1} < 1$ $\qquad$ $a_{n+1} \to 0$

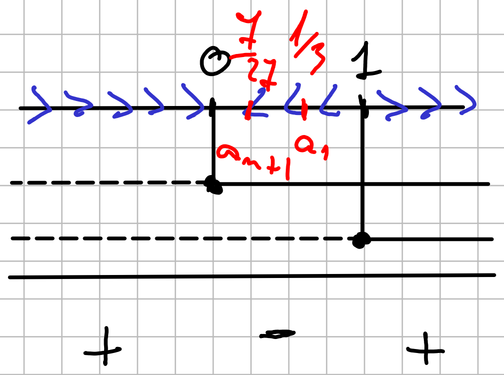
Esercizio 3. Determinare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = 1/3 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 2a_n}{3} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{t^2 + 2t}{3} \qquad \rho(t) = \frac{t^2 - t}{3}$$

$$\rho(t) \geq 0 \qquad \frac{t(t-1)}{3} \geq 0 \qquad \boxed{t \geq 0} \qquad \boxed{3 > 0 \quad \text{sempre}}$$

$$\boxed{t \geq 1}$$



$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{9} + \frac{2}{3}}{3} = \frac{1+6}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{27}$$

$$0 \leq a_{n+1} \leq 1 \qquad a_{n+1} \to 0$$

Esercizio 3. Determinare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = \lambda \\ a_{n+1} = \dfrac{1+a_n}{1+a_n^2} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

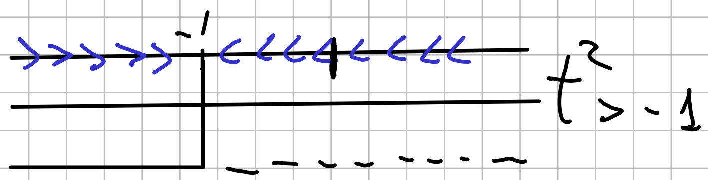
al variare del parametro reale λ.

$$f(t) = \frac{1+t}{1+t^2}$$

$$f(t) = \frac{1+t-t-t^3}{1+t^2} \to \frac{1-t^3}{1+t^2} > 0$$

$$f(t) > 0$$

$$\begin{cases} 1-t^3 > 0 \\ 1+t^2 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} t^{\cancel{3}} < -1 \\ t^2 > -1 \quad \forall t \end{cases}$$



$]-\infty, -1[\qquad]-1, +\infty[$

$a_n \to -1 \qquad a_n \to -1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Se } \lambda \in]-\infty, -1[,\ a_{n+1} \to -1 \\ \text{Se } \lambda \in]-1, +\infty[,\ a_{n+1} \to -1 \end{array}}$$

Esercizio 3. Calcolare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = \lambda \\ a_{n+1} = a_n|a_n| \end{cases}$$

al variare del parametro reale λ.

$f(t) = t|t|$

$f(t) = t|t| - t > 0$

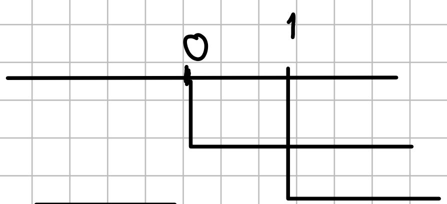
$\hookrightarrow f(t) = t(|t|-1) > 0$

$f(t) > 0$

$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - t > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t \geq 0 \\ t(t-1) > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t \geq 0 \\ t > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t \geq 0 \\ t > 1 \end{cases}$



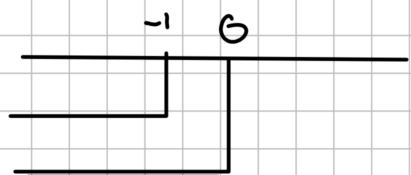
$\boxed{t > 1}$

$\begin{cases} t < 0 \\ -t^2 - t > 0 \end{cases}$

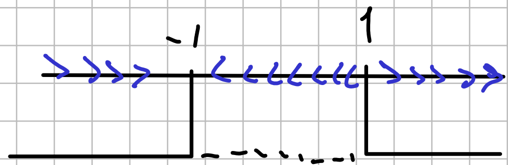
$\begin{cases} t < 0 \\ t^2 + t < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t < 0 \\ t(t+1) < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t < 0 \\ t < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} t < 0 \\ t < -1 \end{cases}$



$\boxed{t < -1}$



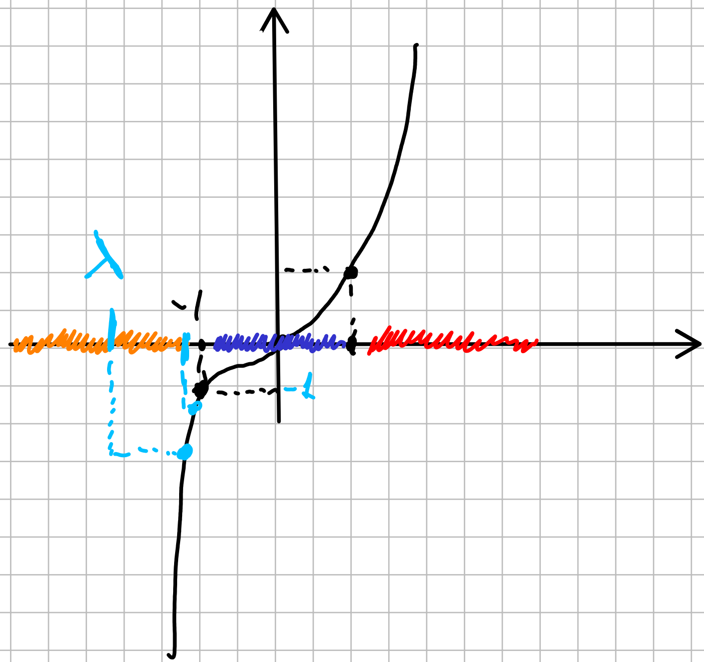
$]-\infty, -1[$ $\quad]-1, 1[$ $\quad]1, +\infty[$

$a_n \to -1$ $\quad a_n \to -1$ $\quad a_n \to +\infty$

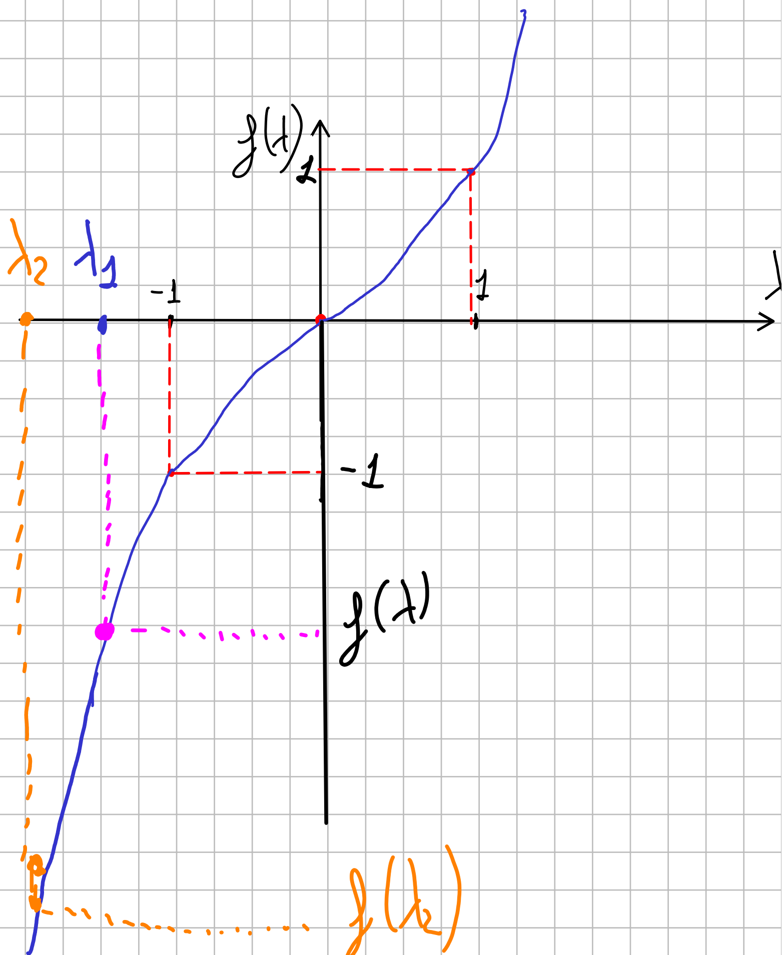
$f(t) = t|t|$

$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 \end{cases}$ $\begin{cases} t < 0 \\ -t^2 \end{cases}$

t	t^2	t	$-t^2$
0	0	-1	-1
1	1	-2	-4
2	4	-3	-9
3	9		



1) $\lambda < -1$
2) $-1 < \lambda < 1$
3) $\lambda > 1$



① $\boxed{\lambda < -1 \Rightarrow f(\lambda) < -1 \quad a_n \to -1}$

$\lambda_2 < -1 \overset{???}{\Longrightarrow} f(\lambda_2) < -1$

$\boxed{a_{n+1} \to -1}$

2) $-1 < \lambda < 1 \Rightarrow -1 < f(\lambda) < 1 \qquad a_n \to -1$

$-1 < \lambda_2 < 1 \overset{???}{\Longrightarrow} -1 < f < 1 \qquad a_n \to -1$

3) $\lambda > 1 \Rightarrow f(\lambda) > 1 \qquad a_n \to +\infty$

$\lambda_2 > 1 \Rightarrow f(\lambda_2) > 1 \qquad a_{n+1} \to +\infty$