Consideriamo in $\mathbb{R}^3$ i seguenti vettori: $v_1 = (2,0,0)$, $v_2 = (1,0,-1)$, $v_3 = (0,-1,0)$ e la base $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da:

$$\begin{cases} f(2,0,0) = (4,0,0) \\ f(1,0,-1) = (h,0,h) \\ f(0,-1,0) = (0,-h,0) \end{cases} \quad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$

2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,1)$.

II

21 giugno 2021

$$\begin{cases} 2f(e_1) = (4,0,0) \\ f(e_1) - f(e_3) = (h,0,h) \\ -f(e_2) = (0,-h,0) \end{cases} \quad \begin{cases} f(e_1) = (2,0,0) \\ f(e_3) = (2,0,0) - (h,0,h) \to f(e_3) = (2-h,0,-h) \\ f(e_2) = (0,h,0) \end{cases}$$

$$M(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-h \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix} \quad \det = -2h^2 \neq 0 \quad \boxed{h \neq 0}$$

$\rho = 3$

$\dim Imf = 3$, $\dim Kerf = n - \rho = 3 - 3 = 0$

f è ISOMORFISMO, $\exists f^{-1}$

Eq. CART. Imf. non esiste perchè vale $\forall x, y, z$. Se $h \neq 0$

Eq. CART. Kerf. è quella banale $x = y = z = 0$

Tolgo la condizione, quindi $h = 0$

$$M(f) = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho(M(f)) \text{ allora } \rho < 3$$

$\rho = 1$

quindi $\dim Imf = 1$, $\dim Kerf = n - \rho = 3 - 1 = 2$

$Imf = \{(C_1)\} \to Imf = \{(2,0,0)\}$

$$Kerf \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 2x - 2z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 2z \to x = z \quad \forall y, z \\ \vdots \end{cases}$$

$Kerf = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ SE $h = 0$

Base $Kerf = \{(0,1,0), (1,0,1)\}$

2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,1)$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-h \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{h \neq 0}$

$$\begin{cases} 2x + (2-h)z = 1 \\ hy = 0 \\ -hz = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + (2-h)\left(-\frac{1}{h}\right) = 1 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{h} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - \frac{2}{h} + \cancel{1} - \cancel{1} = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{h} \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = -\frac{2}{h} \to x = -\frac{1}{h} \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{h} \end{cases}$$

$f^{-1}(1,0,1) = \left(-\frac{1}{h}, 0, -\frac{1}{h}\right)$ se $h \neq 0$

Tolgo la condizione, $h = 0$

$$\begin{cases} 2x + 2z = 1 \\ 0 = 0 \\ \boxed{0 = 1} \end{cases}$$

SIST. IMPOSSIBILE.

Per $h = 0$, $f^{-1}(1,0,1) = \emptyset$

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1 Dati la retta:

$$r: \begin{cases} x - y + 3z + 3 = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$$

e il piano $\pi : x - y - 3 = 0$, mostrare che r e π sono paralleli e dopo avere scelto un punto P_0 sulla retta r determinare il suo simmetrico P_0' rispetto al piano π.

2 È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare, al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione:

$$x^2 + hy^2 + 2(h-1)xy + 2hx - h = 0.$$

Studiare l'unica circonferenza del fascio determinando il centro e il raggio.

$$r = \begin{cases} x - y + 3z + \underline{3} = 0 \\ z + \underline{1} = 0 \end{cases} \qquad \pi = x - y - 3 = 0$$

$$\bar{V}_\pi = (1, -1, 0)$$

DIMOSTRO CHE $r // \pi$, allora deve accadere $\bar{V}_r \cdot \bar{V}_\pi = 0$

OMOGENIZZO

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = y \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \qquad P_\infty = (y, y, 0, 0)$$

$$\bar{V}_r = (1, 1, 0)$$

$$\bar{V}_r \cdot \bar{V}_\pi \overset{?}{=} 0$$

$$(1,1,0) \cdot (1,-1,0) \overset{?}{=} 0$$

$$1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 1 - 1 = 0$$

SONO PARALLELI

Prendo un punto sulla retta.

$$\begin{cases} x-y+3z+3=0 \\ z+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y\cancel{-3}\cancel{+3}=0 \\ z=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y \\ z=-1 \end{cases} \quad \forall y$$

punto generico $P(y, y, -1)$

Scelgo $P_0\,(1,1,-1)$ → controllo $\cancel{1}\cancel{-1}\cancel{-3}\cancel{+3}=0$ ✓, $-1+1=$ ✓

Prendo il punto di intersezione H

$$\begin{cases} x-y+3z+3=0 \\ z+1=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{y}\cancel{+3}\cancel{-y}\cancel{-3}+3=0 \\ z=-1 \\ x=y+3 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{Non si intersecano} \\ \text{(ovvio)} \end{cases}$$

DIST. PUNTO - PIANO $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} =$ $\quad P_0(1,1,-1)$

$v_\pi = (1,-1,0)$

$$= \frac{|1-1-3|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$ DISTANZA $P_0 \to \pi$

Il simmetrico si trova alla DISTANZA $P_0 \to \pi$ raddoppiata, quindi $\boxed{3\sqrt{2}}$

Il simmetrico P_0' avrà questa distanza dal piano.

$$d_{P_0'\pi} = \frac{|a x_0' + b y_0' + c z_0' + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \overset{\text{quindi}}{=} \frac{|1x_0' + (-1)y_0' + 0(z_0') - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{x_0'-y_0'-3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x_0'-y_0'-3 = 3$$

$x_0'-y_0' = -6$

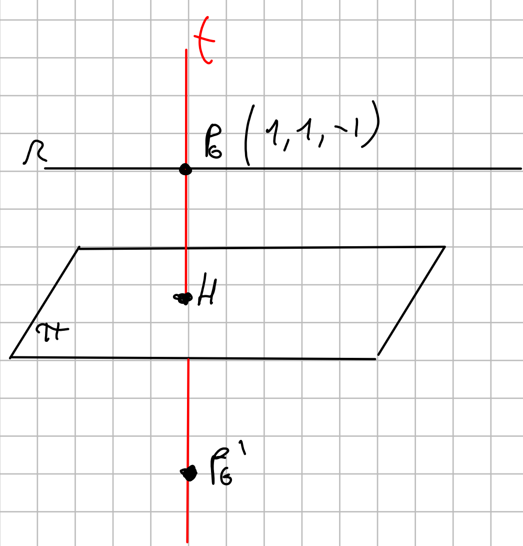
$x_0' = y_0' - 6$

Cerco la retta $t \perp \pi$ e $t \perp r$

$\bar{v}_t = \bar{v}_\pi \Rightarrow \bar{v}_t = (1,-1,0)$

t deve passare per $P_0 = (1,1,-1)$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{0}$$



$$\begin{cases} x-1 = -y+1 \\ -y+1 = \frac{z-0}{0} \end{cases} \quad \begin{cases} x+y-2=0 \\ z=0 \end{cases} \; t$$

La retta t interseca π, in quale punto? lo chiamo H

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ z=0 \\ x-y-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2-y \\ z=0 \\ 2-y-y-3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \\ z=0 \\ -2y-1=0 \quad \cancel{2}y=-\frac{1}{\cancel{2}} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ z=0 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{H=\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{2},0\right)}$$ H è punto medio di $\overline{P_0P_0'}$

$$H=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)$$

$$\boxed{P_0=(1,1,-1)}$$

$$\frac{5}{2}=\frac{1+x}{2} \qquad -\frac{1}{2}=\frac{1+y}{2} \qquad 0=\frac{-1+z_2}{2}$$

$$5=1+x \qquad -1=1+y \qquad 0=-1+z$$

$$x=4 \qquad y=-2 \qquad z=1$$

$$\boxed{P_0'=(4,-2,1)}$$

2 È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare, al variare del parametro reale $h \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione:

$$x^2 + hy^2 + 2(h-1)xy + 2hx - h = 0.$$

Studiare l'unica circonferenza del fascio determinando il centro e il raggio.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & h \\ h-1 & h & 0 \\ h & 0 & -h \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & h-1 \\ h-1 & h \end{pmatrix}$$

$$\det B = -h^2 - [(h-1)^2(-h) + h^3]$$

$$-h^2 - [(h^2+1-2h)(-h) + h^3]$$

$$-h^2 - [-h^3 - h + 2h^2 + h^3]$$

$$-h^2 + \cancel{h^3} + h - 2h^2 - \cancel{h^3}$$

$$-3h^2 + h = 0 \text{ allora } |B| = 0$$

$$-3h^2 + h = 0 \to 3h^2 - h = 0$$

$$\hookrightarrow h(3h-1) = 0 \begin{cases} \boxed{h=0} \\ 3h-1=0 \to \boxed{h = \frac{1}{3}} \end{cases}$$

Con queste condizioni la conica si spezza.

$$x^2 + hy^2 + 2(h-1)xy + 2hx - h = 0.$$

Per $h=0$, sostituisco

$$x^2 + 0 - 2xy = 0 \to x^2 - 2xy = 0$$

$$\hookrightarrow x(x-2y) = 0 \begin{cases} x=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \quad \text{2 rette distinte}$$

Infatti $\rho(B)$ con $h=0$ $=2$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho = 2$$

Se $h = \frac{1}{3}$

$$x^2 + hy^2 + 2(h-1)xy + 2hx - h = 0.$$

$$x^2 + \frac{1}{3}y^2 - \frac{4}{3}xy + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0 \to 3x^2 + y^2 - 4xy + 2x - 1 = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & h-1 & h \\ h-1 & h & 0 \\ h & 0 & -h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

det $=0$ (verifico)

Il det era $3h^2 - h = 0$

quindi $3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = 0$ ok

$\rho = 2$, quindi 2 rette distinte

$3x^2+y^2-4xy+2x-1=0$

CASO $|B|\neq 0$, allora $h\neq 0$ e $h\neq \frac{1}{3}$

Vado ad $A=\begin{pmatrix}1 & h-1\\ h-1 & h\end{pmatrix}$ $\det A = h-(h-1)^2$

CASO $|A|>0$, $h-(h-1)^2>0$, risolvo $h-(h-1)^2>0$

$\hookrightarrow h-(h^2+1-2h)>0$

$h-h^2-1+2h>0$

$\hookrightarrow h^2-h-2h+1<0$

$\hookrightarrow h^2-3h+1<0$

$9-4=5$

$h_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ $\begin{cases} h_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\\ h_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}$ Valori interni

$T_rA\cdot|A|=(h+1)\cdot(h^2-3h+1)$
$=h^3-3h^2+h+h^2-3h+1=$
$=h^3-2h^2-2h+1$

Ho le ellissi per $\frac{3-\sqrt{5}}{2}<K<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Se questo risultato >0 allora ho l'ellisse immaginaria

STUDIO la circonf.

$\begin{cases}a_{11}=a_{22}\neq 0\\ a_{12}=0\end{cases}$ $\begin{cases}h=1\\ h=1\end{cases}$ Per $h=1$ ho la circonferenza.

$x^2+hy^2+2(h-1)xy+2hx-h=0.$ Eq. della circonferenza. $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$x^2+y^2+2x-1=0$

Centro $C=(-2,0)$ raggio $=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}$
$=\sqrt{4+0+1}=\sqrt{5}$

CASO $|A|=0$. posso prendere i vecchi risultati.

$h=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $h=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Per questi 2 valori ho le parabole.

CASO $|A|<0$, allora è il complementare di $|A|>0$, ovvero

$h<\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ e $h>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Per questi valori ho le iperboli.

$T_rA=0$, $T_rA=h+1=0$. Per $h=-1$ ho l'iperbole equilatera