

## FUNZIONI CONTINUE

se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$



Esempio:  $f(x) = x+1$  (CONTINUA)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$f(1) = 2$$

## FUNZIONI DISCONTINUE

se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$



Esempio:  $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \neq 1 \\ 3 & \text{se } x = 1 \end{cases}$  (DISCONTINUA)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$f(1) = 3$$

LIMITI DI FUNZIONI RAZIONALI PER  $x \rightarrow x_0$  (4 CASI)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

① se provo a sostituire  $x_0$  alla funzione non si annulla né il numeratore né il denominatore (OK, FUNZIONE CONTINUA)

Es:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{3}{1} = 3 \checkmark$

② se provo a sostituire  $x_0$  alla funzione si annulla SOLO il numeratore (OK, FUNZIONE CONTINUA)

Es:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{x+2} = \frac{0}{3} = 0 \checkmark$

③ se provo a sostituire  $x_0$  alla funzione si annulla SOLO il denominatore

Es 1:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{2-x} = \left[ \frac{3}{0} \right] = \text{NON ESISTE}$

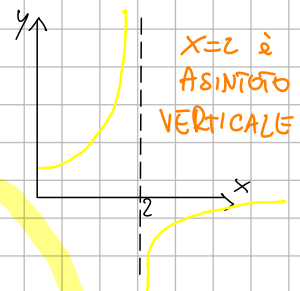
CALCOLO LIMITE DESTRO E SINISTRO

LIMITE DESTRO

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{2-x} = \left[ \frac{+3}{0^-} \right] = +\infty$$

LIMITE SINISTRO

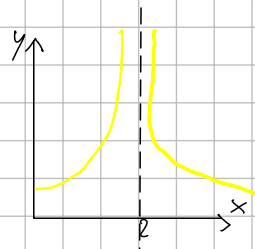
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{2-x} = \left[ \frac{+3}{0^+} \right] = +\infty$$



Es 2:  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(2-x)^2} = \left[ \frac{3}{0} \right] = +\infty$

LIMITE DESTRO  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{(2-x)^2} = \left[ \frac{+3}{0^+} \right] = +\infty$

LIMITE SINISTRO  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{(2-x)^2} = \left[ \frac{+3}{0^+} \right] = +\infty$



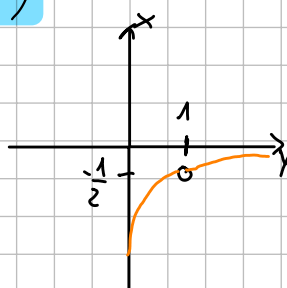
④ Se provo a sostituire  $x_0$  alla funzione si annulla il numeratore e il denominatore

$x_0 = 1$

Es:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \left[ \frac{0}{0} \right] \Rightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$

SCOMPONGO

FORMA  
INDETERMINATA



LIMITI CON ESPONENZIALI E LOGARITMI CON  $x \rightarrow +\infty$

Polinomiali:

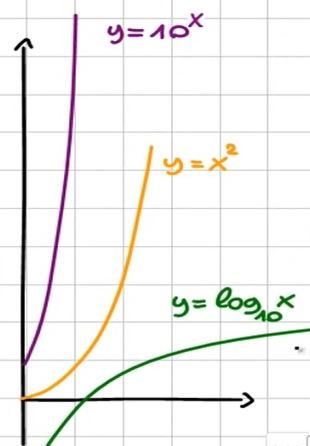
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - 5x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( 1 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = +\infty$

Razionali:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x - 3}{2x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left( 1 - \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x^3} \right)}{2x^2 \left( 1 - \frac{5}{2x^2} \right)} = +\infty$

SCALA DI CONFRONTO

$\log_a x \ll x^b \ll c^x \quad \forall a > 1, b > 0, c > 1$



$$\text{Es 1: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 - 6^x = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 6^x \left( \frac{x^6}{6^x} - 1 \right) = -\infty$$

$$\text{Es 2: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - x^2}{3x - \ln x} = \left[ \frac{\infty - \infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x \left( 1 - \frac{x^2}{e^x} \right)}{3x \left( 1 - \frac{\ln x}{3x} \right)} = +\infty$$

$$\text{Es 3: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{\log_2 x - 2x} = \left[ \frac{\infty}{\infty - \infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \left( 1 + \frac{3}{x^2} \right)}{2x \left( \frac{\log_2 x}{2x} - 1 \right)} = \frac{\cancel{1} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}}}{2 \cancel{x} \left( \frac{\log_2 x}{2x} - 1 \right)} = -\frac{1}{2}$$

PASSAGGI:

- 1) RACCOGLIERE IL TERMINE DI GRADO MAX AL NUMERATORE E AL DENOMINATORE
- 2) SEMPLIFICARE
- 3) GUARDARE A COSA TENDONO I SUPERSTITI

## LIMITI DI FUNZIONI COMPOSITE

Es:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \cos \left( \frac{3}{e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^2-1}{2x^2-x}} = \lim_{y \rightarrow \frac{1}{2}} e^y = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

LA FUNZIONE ESPONENZIALE E' CONTINUA IN  $y = \frac{1}{2}$

- CHIAMO  $y = \frac{x^2-1}{2x^2-x}$  -  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x} = \frac{x^2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right)}{2x^2 \left( 1 - \frac{1}{2x} \right)} = \frac{1}{2}$

ES 3:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(7^x + \ln x)}{5x^2 + 1} = 0$$

quantità limitate fra  $[-1, 1]$   
 quantità finita  
 $\rightarrow \left[ \frac{M}{\infty} \right]$  con  $M \in \mathbb{R}$

PASSAGGI

- 1) VEDO A COSA TENDE LA FUNZIONE PIU' INTERNA
- 2) VEDO A COSA TENDE COMPLESSIVAMENTE LA FUNZIONE

# LIMITI NOTEVOLI

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{1}{2}$$

DALLA RELAZIONE

FONDAMENTALE

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \text{CHIAMO } y = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \ln e = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = 1$$

## ALTRI LIMITI NOTEVOLI (PIÙ RARI)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$$

# ASINTOTO VERTICALE

Se si verifica almeno una di queste condizioni:

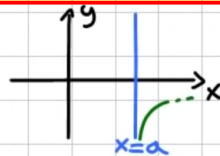
$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} g(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$$



con "a" che è un numero dove ci sono problemi di definizione, ed è dettato dal dominio.

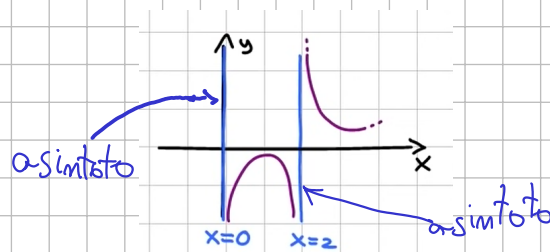
Es:  $y = \ln x + \frac{1}{x-2}$

Dominio =  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \wedge x > 0\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln x + \frac{1}{x-2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \ln x + \frac{1}{x-2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left( \ln x + \frac{1}{x-2} \right) = +\infty$$



## ASINTOTO OBLIQUO

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x - 2 - \frac{3}{x} - x \right] = -2$$

sono numeri

LA RETTA DI EQUAZIONE  $y = x - 2$

È L'ASINTOTO OBLIQUO DI  $g(x)$  PER  $x \rightarrow +\infty$

# EQUIVALENZE ASINTOTICHE

Due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$  si dicono **ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI** PER  $x \rightarrow x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  e si scrive  $f(x) \sim g(x)$  per  $x \rightarrow x_0$ .

DAI LIMITI NOTEVOLI SI RICAVALA

$$\sin x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\tan x \sim x$$

$$e^x - 1 \sim x$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$$

$$\Downarrow \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \sin x \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} x$$

$$\Downarrow \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \tan x \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} x$$

Il limite di  $f(x)$  è uguale al limite di  $g(x)$ , quindi posso riscrivere la funzione in forma semplificata

## PROPRIETÀ:

1) SE  $g_1(x) \sim g_2(x)$  E  $g_2(x) \sim g_3(x)$  PER  $x \rightarrow x_0$  ALLORA  $g_1(x) \cdot g_2(x) \sim g_2(x) \cdot g_3(x)$  PER  $x \rightarrow x_0$   
ED IN PARTICOLARE, SE I LIMITI PER  $x \rightarrow x_0$  DEI 2 PRODOTTI ESISTONO, SONO UGUALI

2) SE  $g_1(x) \sim g_2(x)$  E  $g_2(x) \sim g_3(x)$  PER  $x \rightarrow x_0$  ALLORA  $\frac{g_1(x)}{g_2(x)} \sim \frac{g_2(x)}{g_3(x)}$  PER  $x \rightarrow x_0$  ED IN PARTICOLARE, SE I LIMITI DEI 2 RAPPORTI ESISTONO, SONO UGUALI

3) SE  $g(x) \sim g_2(x)$  PER  $x \rightarrow x_0$  ALLORA  $[g(x)]^\alpha \sim [g_2(x)]^\alpha$  PER  $x \rightarrow x_0$