TROVA MATRICE ① $f(1,1,1)=(-1,2h-1,-1)$

$\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ (3 → COLONNE, 4 → RIGHE)

$f(1,0,1)=(-2,h,0)$

$f(0,1,1)=(0,h-1,-1)$

$$\begin{cases} f(e_1)+f(e_2)+f(e_3)=(-1,2h-1,-1)\\ f(e_1)+f(e_3)=(-2,h,0)\\ f(e_2)+f(e_3)=(0,h-1,-1)\end{cases}$$

$$M(f)=\begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3)\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

1. INVERTIB. se $|A|\neq 0$

$A^{-1}=A_a^T$

$\frac{A^{-1}}{|A|}=\frac{A_{11}}{|A|}\ \dots$

② $f(x,y,z)=(hy,(h+1)x+hy-z,y-hz)$

$f(e_1)=(0,h+1,0)$

$f(e_2)=(h,h,-1)$

$f(e_3)=(0,-1,-h)$

SEMPLICITÀ

Soluzioni pol. caratt. = AUTOVALORI T

$\det M(f_{-T})=0$ $\quad \begin{vmatrix} -T & & \\ & -T & \\ & & -T\end{vmatrix}=0$ $\quad T=\dots\ m_T\dots$ $\quad T=\dots\ m_T\dots$

↳ SE $m_T=1 \Rightarrow g_T=1$ $\quad (0<g_T\leq m_T)$

↳ SE $m_T>1 \Rightarrow g_T=\dim V_T=\operatorname{Ker} f_{-T}$ ← dim.

↳ SE $m_\lambda=g_\lambda$, f è semplice → DIAGONALIZZABILE.

↳ Se T ha il parametro h si devono fare le condizioni e vedere quando gli autovalori sono diversi fra loro. $1°\neq 2°$, $2°\neq 3°$, $3°\neq 1°$

MATRICE DIAGONALE: AUTOVALORI SULLA DIAGONA[LE]

↳ IN ORDINE (occhio m_λ)

MATRICE DIAGONALIZZANTE: AUTOVETTORI IN COLON[NA]

↳ gli autovettori si trovano calcolando TUTTI gli AUTOSPAZI $V_\lambda=\operatorname{Ker} f_\lambda$

STUDIO Imf / Kerf $\quad \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\dim \operatorname{Im} f=\rho(M(f))$ / $\dim \operatorname{Ker} f=n-\rho$

$\dim \operatorname{Ker} f=0 \rightarrow f$ iniettiva ; $\dim \operatorname{Im} f=\dim \mathbb{R}^n \rightarrow$ suriettiva.

ISOMORFISMO = SURIETTIVA + INIETTIVA, Allora $\exists f^{-1}$

↳ SE $\boxed{\dim \operatorname{Im} f=1}$, $\operatorname{Im} f=\{C_n\}$ → dove $\det\neq 0$

$\operatorname{Im} f=\{(C_1\dots C_n)\}$ dove le colonne dettate dal det.

$$\operatorname{Im} f \rightarrow \begin{array}{c} C_1\rightarrow\\ \vdots\\ C_n\rightarrow\\ x\,y\,z\rightarrow\end{array}\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x & y & z\end{pmatrix} \Rightarrow \det=0 \text{ e trovo eq. } \operatorname{Im} f.$$

$$\operatorname{Ker} f \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet\\ \bullet & \bullet & \bullet\end{pmatrix}}_{M(f)}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix} \rightarrow \text{SISTEMA} \qquad A\cdot\underline{x}=\vec{0}$$

CONTROIMMAGINE

① $M(f)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ → SISTEMA

se impossibile allora $f^{-1}=\emptyset$.

② CONTROIMMAGINE (RIDUCO LA MATR. COM[PLETA])

$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \vdots & \cdot\end{pmatrix}$ → RIPORTA → SISTEMA. → TOLGO condizioni.

APPLICAZIONE COMPOSTA

$M(g\circ f)=M(g)\cdot M(f)$

La matrice "NUOVA" "g" si trova con i primi "2 metodi".

$$\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac \qquad x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\Delta}}{a}$$

PIANO cont. 2 rette

- Fascio di rette con asse $\dots$
- $R:\begin{cases}\pi_1\\ \pi_2\end{cases}$ → $F:\pi_1+k(\pi_2)$
- Punto generico su S, P_0
- P_0 soddisfa S ma no[n] $\dots$
- sost. P_0 nel fascio $= \dots$
- sost. K e trovo pia[no]

R. CAPELLI 1: $\rho(A)=\rho(A,B)$ ⇔ sist. AMMETTE SOLUZIONI.

R. CAPELLI 2: quante inc. libere? $\rho(A)$ opp: $\infty^{\text{incognite}\,n-\rho}$ = sol. e inc. libere $n-\rho$.

CRAMER se $|A|\neq 0$, QUADRATE. $x_1=\frac{|B_1|}{|A|}$, $x_2=\frac{|B_2|}{|A|}$

PIANO 3 punti $ax_0+by_0+cz_0+d=0$

ORTOGONALITA' fra $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$

$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$

$(l_1, m_1, n_1) \cdot (l_2, m_2, n_2) = 0$

- CASO retta $r \perp \vec{V}_{\pi_1}$ e $r \perp \vec{V}_{\pi_2}$

$\begin{cases} r \perp \pi_1 \\ r \perp \pi_2 \end{cases}$ retta ortogonale a 2 PIANI

PARALLELISMO

$\vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2 \Rightarrow \vec{V}_1 = \lambda \vec{V}_2$

$\hookrightarrow \vec{V}_1 = (\lambda l_2, \lambda m_2, \lambda n_2)$

RETTA → PARAM. DIRETTORI (omogeneizzo)

$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ z=0 \end{cases}$ $\begin{cases} ax+by+ct=0 \\ t=0 \end{cases}$ elimino i term. noti $\begin{cases} \\ t=0 \end{cases}$

$\hookrightarrow$ ottengo $P_\infty = (x, y, z, t)$

$\vec{V}_r = (x, y, z)$

PIANO → PARAM. DIRETTORI (da equaz.)

$\pi: ax+by+cz+d=0$

$\hookrightarrow \vec{V}_\pi = (a, b, c)$

RETTA: $\dfrac{x-x_0}{l} = \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{n}$ $\vec{V}_r = (l, m, n)$

PASSA PER $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

ANGOLO FRA 2 RETTE: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{V}_{r_1} \cdot \vec{V}_{r_2}\ \text{(scalare)}}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$

(a, b, c) intesi come $\vec{V}_{r_1} = (a_1, b_1, c_1)$

ANGOLO RETTA-PIANO: α = il complementare (90°) dell'angolo acuto che la retta fa con la retta $\perp$ al piano

DIST. PUNTO-PIANO: $d = \dfrac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$\pi = ax+by+cz+d=0$

PUNTO SIMETRICO: $P_{Medio} = \left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}, \dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$

$\ $ $= x_M, y_M, z_M$

2 RETTE SONO SGHEMBE SE DET ≠ 0

$r\begin{cases} z=0 \\ y+z+1=0 \end{cases}$ $s\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$

TUTTO al I membro e $\begin{array}{c} r \\ \\ s \\ \end{array}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

CONICA: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$

PRENDO i coeff.

$B = \begin{pmatrix} x^2 & xy/2 & x/2 \\ xy/2 & y^2 & y/2 \\ x/2 & y/2 & \text{noto} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} x^2 & xy/2 \\ xy/2 & y^2 \end{pmatrix}$ $\det B$, $\rho(B)$, $\det A$, $\mathrm{Tr}A = a_{11}+a_{22}$

$|B|=0$, conica si spezza in: $\rho(B) < 3$ = 2 rette distinte; $\rho(B) < 2$ = 1 retta coincidenti.

$|B| \neq 0$, conica IRRIDUCIBILE.

$|A| > 0$ ellisse reale se $\mathrm{Tr}A \cdot |A| < 0$; ellisse immaginaria se $\mathrm{Tr}A \cdot |A| > 0$

$\begin{cases} a_{11} = a_{22} \neq 0 \\ 2a_{12} = 0 \end{cases}$ → CIRCONFERENZA

$|A| = 0$, allora PARABOLA. Se $|A| < 0$, IPERBOLE. Se $\mathrm{Tr}A = 0$ è equilat.

IPERBOLE/ELLISSE $\left(e = \dfrac{c}{a} \neq 0\right)$

$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma \ /\ \gamma = -\dfrac{|B|}{|A|}$

α, β = autovalori di A cioè polin. caratter.

CENTRO $M(B) \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ senza la 3° RIGA

ASSI se $a_{12} \neq 0$ (term. xy)

$m_1 = \dfrac{a_{11} - \alpha}{a_{12}}$ $\mathrm{Asse}_1 = y - y_c = m_1(x - x_c)$

$\mathrm{Asse}_2 = y - y_c = -\dfrac{1}{m_1}(x - x_c)$

eccentricità $e = \dfrac{c}{a}$

ASSE SE $a_{12} = 0$ $\boxed{\begin{matrix} x = x_c \\ y = y_c \end{matrix}}$

VERTICI ELLISSE (4)

$V_1, V_3 \begin{cases} \text{ellisse} \\ \text{asse}_1 \end{cases}$ $V_2, V_4 \begin{cases} \text{ellisse} \\ \text{asse}_2 \end{cases}$

VERTICE IPERBOLE

$\begin{cases} \text{ASSE 1} \\ \text{eq. IPERBOLE} \end{cases}$ opp $\begin{cases} \text{ASSE 2} \\ \text{eq. IPERBOLE} \end{cases}$

Uno dei 2 sistemi non ha sol. in $\mathbb{R}$.

PARABOLA

$\beta Y^2 = 2\alpha X \ /\ \beta = \mathrm{Tr}A$

$\gamma = +\sqrt{-\dfrac{\det B}{\mathrm{Tr}A}}$

CENTRO $\nexists$, **ASSE UNICO**.

solo se $\parallel$ all'asse delle $\vec{y}$.

$y = ax^2+bx+c$. ASSE $x = x_V$

VERTICI $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

opp. solo se $\parallel$ all'asse delle $\vec{x}$

$y = y_V \ /\ V = \left(-\dfrac{\Delta}{4a}, -\dfrac{b}{2a}\right)$

CIRCONFERENZA

$1x^2 + 1y^2 + ax + by + c = 0$

CENTRO $C = \left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{b}{2}\right)$

Raggio $R = \sqrt{\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{b}{2}\right)^2 - c}$

CONICHE SPEZZATE E PUNTI BASE

Servono 2 coniche.

Γ_1 la trovo con $\det B = \ldots$ (TABELLA)

$\Gamma_2 = ?$ Prendo il fascio, raccolgo "k" e trovo

$\ldots + K(\Gamma_2) + \ldots = \ldots$ Γ_2 è spezzata? (RACCOGLIM. PROD. NOTEVOLI)

Punti BASE $\begin{cases} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \end{cases}$ $\begin{cases} \ldots \\ \ldots \end{cases}$ $\begin{cases} B_1 = (\ldots) \\ B_2 = (\ldots) \end{cases}$

PROD. NOTEV. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ /// $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3a^2b + 3ab^2$

ANGOLI NOTEVOLI

α	$\operatorname{sen}\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
0	0	1	0
30	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$
45	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$
90	1	0	∞

DIST. FRA 2 PUNTI $P_1 P_2$

$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

DIST. PUNTO RETTA

$r: ax+by+c=0 \quad d = \dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

FORMULE DI PASSAGGIO $P_0 \to P_\infty$

$x = \dfrac{x'}{t} \quad y = \dfrac{y'}{t}$

PIANO CONTENENTE r che passa per $P_0(1,0,1)$

$r = \begin{cases} \pi_1 \\ \pi_2 \end{cases} \to F: \pi_1 + k\pi_2 \Rightarrow$ PASS. PER $P_0 = k$. → trovo eq. del piano cercato. sost. nel fascio

RETTA PASS. PER 2 PUNTI: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$