E' dato l'endomorfismo $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f(x,y,z) = (hy, (h+1)x + hy - z, -y - hz)$$

con h parametro reale.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$
2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,3)$.

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix}$$

Imf $\quad \rho = ? \quad \det_{3\times3} = -[(-h^2)(h+1)]$

$\det_{3\times3} = -(-h^3 - h^2) = h^3 + h^2 = h^2(h+1)$

Per $\rho = 3$ $\det \neq 0 \to h^2(h+1) \neq 0$ $\begin{cases} h^2 \neq 0 \Rightarrow \boxed{h \neq 0} \\ h+1 \neq 0 \Rightarrow \boxed{h \neq -1} \end{cases}$

$\dim \mathrm{Im} f = 3 \to \dim \mathrm{Ker} f = n - \rho = 0$

f è ISOMORFISMO

$\left.\begin{array}{l} \hookrightarrow \text{NO EQ. CART. Imf in quanto } \forall x, y, z. \\ \hookrightarrow \text{EQ. CART. Kerf. BANALI: } x = y = z = 0 \end{array}\right\}$ se $h \neq 0, -1$

Tolgo 1 condiz.

$h = 0$ $\quad M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \rho = ?$ $\quad \boxed{\det_{2\times2} = -1}$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$, $\dim \mathrm{Ker} f = 3 - 2 = 1$

$\mathrm{Im} f = \{C_1, C_2\} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

$\det = -x = 0 \rightarrow x = 0$ (eq. cart. Imf se $h=0$)

Ker$f$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0=0 \\ x-z=0 \\ -y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases} \quad \forall z$$

Ker$f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x=z,\ y=0\}$ se $h=0$

Tolgo le 2 cond. $h=-1$

$$M(f) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho(M_f) < 3$$

$\det_{2\times 2} = 1 \qquad \rho = 2$

$\dim \mathrm{Im} f = 2 \quad \dim \mathrm{Ker} f = 3-2 = 1$

Imf $= \{C_2, C_3\} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$ det$=0$ per avere $\rho<3$

$z - x - (-y + x) = 0$

$z - x + y - x = 0 \qquad z - 2x + y = 0 \qquad \cancel{2}x = \frac{z+y}{2}$

Im$f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{z+y}{2}\}$ se $h=-1$

Ker$f$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -y=0 \\ -y-z=0 \\ -y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ 0-z=0 \\ 0+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ z=0 \end{cases} \quad \forall x$$

Ker$f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=z=0\}$ se $h=-1$

2) Calcolare al variare di $h \in \mathbb{R}$, la controimmagine $f^{-1}(1,0,3)$.

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ h+1 & h & -1 \\ 0 & -1 & -h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$h \neq 0$ $h+1 \neq 0 \rightarrow h \neq -1$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ \cancel{(h+1)}x = \frac{z - hy}{(h+1)} \\ -\frac{1}{h} - hz = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1/h \\ x = \frac{z - \cancel{h}\left(\frac{1}{\cancel{h}}\right)}{h+1} \\ \cancel{3h}z = -\frac{1}{3h^2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{h} \\ x = \frac{-\frac{1}{3h^2} - 1}{h+1} \\ z = -\frac{1}{3h^2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dots \\ x = \frac{-1-3h^2}{3h^2} \cdot \frac{1}{h+1} \\ z = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dots \\ x = \frac{-1-3h^2}{3h^3+3h^2} \\ z = -\frac{1}{3h^2} \end{cases}$$

$$f^{-1}(1,0,3) = \left(\frac{-1-3h^2}{3h^3+3h^2}, \frac{1}{h}, \frac{1}{3h^2} \right) \text{ se } h \neq 0,-1$$

Tolgo $h \neq 0$, $h = 0$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ (h+1)x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \rightarrow \{ 0 = 1 \quad \text{sist. Imposs.}$$

se $h = 0$, $f^{-1}(1,0,3) = \emptyset$

Tolgo $h \neq -1$, $h = -1$

$$\begin{cases} hy = 1 \\ \cancel{(h+1)}x + hy - z = 0 \\ -y - hz = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y = 1 \\ -y - z = 0 \\ -y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 \\ \\ -1 = 3 \end{cases} \quad \text{ASSURDO}$$

se $h = -1$, $f^{-1}(1,0,3) = \emptyset$

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date due rette

$$r : \begin{cases} x + y - z + 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}, s : \begin{cases} 3x + 3y - 5z + 5 = 0 \\ x - 3z = 0 \end{cases}$$

determinare il piano π contenente le due rette.

2) Studiare il seguente fascio di coniche

$$kx^2 + 2y^2 + 2(k-2)xy + 2y = 0, \; k \in \mathbb{R}$$

Determinare centro e raggio dell'unica circonferenza del fascio.

Piano che ha 2 rette, r ed s.

FASCIO = $\boxed{\pi_1 + k\pi_2 = 0}$ ASSE = r

$$\underbrace{(x+y-z+1)}_{\pi_1} + k\underbrace{(z-1)}_{\pi_2} = 0$$

Prendo P_0 su s.. $P_0 \in s \wedge P_0 \notin r$

TROVO. P. generico s

$$\begin{cases} 3x+3y-5z+5=0 \\ x-3z=0 \end{cases} \begin{cases} 3(3z)+3y-5z+5=0 \\ x=3z \end{cases} \begin{cases} 9z+3y-5z+5=0 \\ x=3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4z+3y+5=0 \\ x=3z \end{cases} \begin{cases} \cancel{3}y = \frac{-4z+5}{3} \\ x=3z \end{cases}$$

$$P_s \text{ GENERICO} = \left(3z, \frac{-4z+5}{3}, z\right) \; \forall z$$

$$P_0 \text{ scelto} \overset{z=0}{=} \left(0, \frac{5}{3}, 0\right) \quad P_0 \in s$$

$P_0 \notin r$? Verifico $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ z-1=0 \end{cases} \begin{cases} 0+\frac{5}{3}-0+1=0 \\ \boxed{0-1=0} \end{cases}$ ASSURDO $\to \boxed{P_0 \notin r}$. ✓

Pass. del fascio per P_0.

$$(x+y-z+1)+k(z-1)=0 \Rightarrow 0+\frac{5}{3}-0+1+k(-1)=0$$

$$\frac{5}{3}+1-k=0 \to \frac{5+3}{3}=k \to k=\frac{8}{3}$$

$$(x+y-z+1)+k(z-1)=0 \to (x+y-z+1)+\frac{8}{3}z-\frac{8}{3}=0 \quad \text{R.}$$

2) Studiare il seguente fascio di coniche

$$kx^2 + 2y^2 + 2(k-2)xy + 2y = 0,\ k \in \mathbb{R}$$

Determinare centro e raggio dell'unica circonferenza del fascio.

$B = \begin{pmatrix} k & k-2 & 0 \\ k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} k & k-2 \\ k-2 & 2 \end{pmatrix}$

$\det B = -[k] = |B| = -k$

2 CASI $|B| = 0$, $|B| \neq 0$

$k = 0$, conica si spezza in 2 rette,

Iniziamo e calcoliamo il det B.
Se risulta $\det B = 0$

- In tal caso la conica si spezza in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B) < 3$:
  a) se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

$B = \begin{pmatrix} k & k-2 & 0 \\ k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $\neq 0$

$\rho(B) = 2$ rette distinte.

Prendo il fascio e metto $k = 0$ $kx^2 + 2y^2 + 2(k-2)xy + 2y = 0,\ k \in \mathbb{R}$

$\cancel{0x^2} + 2y^2 + 2(0-2)xy + 2y = 0$

$\to 2y^2 - 4xy + 2y = 0$

$y^2 - 2xy + y = 0$

$y(y - 2x + 1) = 0$ — $y = 0$ r_1; $y - 2x + 1 = 0$ r_2 se $k = 0$

2 condizione. $k \neq 0$, $|B| \neq 0$. Allora.

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det A:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

$A = \begin{pmatrix} k & k-2 \\ k-2 & 2 \end{pmatrix} \to \det A = 2k - [(k-2)^2]$

$= 2k - (k^2 + 4 - 4k)$

$= 2k - k^2 - 4 + 4k = -k^2 + 6k - 4$

CASO a). $|A| > 0$, $-k^2 + 6k - 4 > 0$

$\Downarrow$

$\boxed{k^2 - 6k + 4 < 0}$

$k^2 - 6k + 4 = 0 \quad \Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(4) = 36 - 16 = 20$

$k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2}$ — $k_1 = \frac{6+\sqrt{20}}{2}$, $k_2 = \frac{6-\sqrt{20}}{2}$

se $k < \frac{6-\sqrt{20}}{2}$ e $k > \frac{6+\sqrt{20}}{2}$ è ELLISSE

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il $\det A$:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

Cerco la circonferenza.

$$A = \begin{pmatrix} k & k-2 \\ k-2 & 2 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = a_{12} \neq 0 \quad (k \neq 0, \text{ok})$

$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} \\ a_{12} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 2 \\ k - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} k = 2 \\ k = 2 \end{cases} \quad \text{ok}$$

Prendo fascio e metto k per eq. della circ.

$kx^2 + 2y^2 + 2(k-2)xy + 2y = 0$, $k \in \mathbb{R}$

$\cancel{2}x^2 + \cancel{2}y^2 + \cancel{2}y = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + y = 0$ — $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$

- Dato centro e raggio ($r > 0$), la circonferenza ha equazione

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

Forma n.2 dell'equazione della circonferenza del piano $z = 0$:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

con centro $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e raggio $r = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c}$

$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

$r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - c}$

$C = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

$r = \sqrt{0^2 + \frac{1}{4} - 0} = r = \frac{1}{2}$

caso b) $|A| = 0$. K già calcolati.

se $k = \frac{6-\sqrt{20}}{2}$ e $k = \frac{6+\sqrt{20}}{2}$ è PARABOLA

caso c) $|A| < 0$, K già calcolati.

se $\frac{6-\sqrt{20}}{2} < k < \frac{6+\sqrt{20}}{2}$ è IPERBOLE

$TrA = 0$? $k + 2 = 0$? $k = 2$ NO. NON. EQUILATERA