Corso di Algebra Lineare e Geometria
Coniche

Lucia Marino

Università di Catania

http://www.dmi.unict.it/lmarino

Testi consigliati

Libri **esercizi**:
P. Bonacini, M.G. Cinquegrani, L. Marino, *Algebra Lineare: Esercizi svolti*, Ed. Cavallotto, Catania 2012
P. Bonacini, M.G. Cinquegrani, L. Marino, *Geometria Analitica: Esercizi svolti*, Ed. Cavallotto, Catania 2012

Definizione di conica

Sia dato il piano $O\vec{x}\vec{y}$, studiamo le coniche.
Definizione di conica: Una conica è il luogo dei punti del piano che con le loro coordinate $(x, y, 0)$ soddisfano un'equazione di secondo grado omogenea nelle variabili x, y del tipo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}^{(x^2)} & \frac{2a_{12}}{2}^{(xy/2)} & \frac{2a_{13}}{2}^{(\frac{x}{2})} \\ a_{12} & a_{22}^{(y^2)} & \frac{2a_{23}}{2}^{(\frac{y}{2})} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}^{(t.n.)} \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} a_{11}^{(x^2)} & \frac{2a_{12}}{2}^{(xy/2)} \\ a_{12} & a_{22}^{(y^2)} \end{pmatrix}$$

Invarianti ortogonali

Per studiare una conica si considerino le seguenti entità:
1. Il **determinante di B**, $\det B$;
2. Il **rango di B**, $\rho(B)$;
3. Il **determinante di A**, $\det A$ ottenuto tagliando la terza riga e la terza colonna della matrice B (cioè il complemento algebrico B_{33})
4. La **traccia di A**, $Tr(A) = a_{11} + a_{22}$

Queste quattro grandezze si dicono invarianti ortogonali poichè cambiando sistema di riferimento e quindi cambiando i coefficienti della conica il $\det B, \rho(B), \det A, P.C.(A)$ non variano

Osservazioni:

A. Se l'equazione si scompone come quadrato di trinomio del tipo$(ax + by + c)^2$ allora si dice che la conica si spezza in due rette coincidenti appunto di equazione $r: \; ax + by + c = 0$.

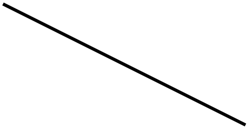


Figura: una conica spezzata in due rette reali e coincidenti

B. Se l'equazione si scompone in due fattori lineari:$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=0$ allora si dice che la conica si spezza in due rette distinte appunto di equazioni rispettivamente $r: \; ax+by+c=0$ e $r': \; a'x+b'y+c'=0$

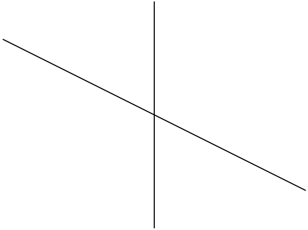


Figura: conica spezzata nell'unione di due rette distinte

C. Se l'equazione si scompone ad esempio nel seguente modo: $ax^2 + by^2 = 0$ allora si dice che la conica si spezza in due rette immaginarie e coniugate appunto di equazioni rispettivamente $r: \; ax + iby = 0$ e $r': \; ax - iby = 0$

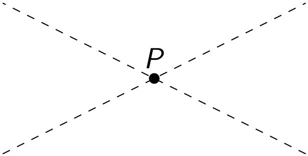


Figura: una conica spezzata in due rette immaginarie e coniugate ha un solo punto reale P

Coniche non spezzate o irriducibili

Se una conica non è riducibile si dice **irriducibile**.

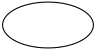


Figura: ellisse

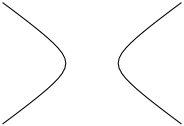


Figura: iperbole

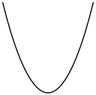


Figura: parabola

Studio di una conica tramite gli invarianti ortogonali

Data la conica del piano z=0 di equazione

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$$

essa si può studiare usando gli invarianti ortogonali.
Calcoliamo $\det B$, $\rho(B)$ $\det A$, TrA.

Classificazione delle coniche riducibili o spezzate

Iniziamo e calcoliamo il $\det B$.
Se risulta $\det B = 0$

- In tal caso la conica si spezza in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B) < 3$:
  a) se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il $\det A$:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$;
  invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$
  allora si tratta di iperbole equilatera

Esercizi

Classificare le seguenti coniche:

1) $2x^2 - 4xy - y^2 - 3y - 2 = 0$
2) $x^2 - y^2 - 6xy + 2x - 4y = 0$
3) $x^2 + 2xy + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$
4) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$
5) $2x^2 + 2y^2 - 3x - 3y - 4 = 0$

Definizione di fascio di coniche

Si dice Fascio di coniche individuato da C_1 ed C_2 la totalità delle coniche del piano z=0

$$\lambda f_1 + \mu f_2 = 0, \forall (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

E' chiaro che le osservazioni fatte a proposito di dividere per un parametro ($\lambda \neq 0$ oppure $\mu \neq 0$) e lavorare con un solo parametro si possono ripetere. Non scordiamoci che quando si opera con un solo parametro si perde una conica del fascio di partenza che è quella per cui $\lambda = 0$ (oppure $\mu = 0$). Da cui

$$f_1 + h \cdot f_2 = 0, \forall h \in \mathbb{R}$$

dove abbiamo indicato con $h = \frac{\mu}{\lambda}, \lambda \neq 0$

Esercizi

Studiare i seguenti fasci di coniche:

1) $hx^2 + hy^2 + 4hxy + 6x + 1 = 0, \forall h \in \mathbb{R}$
2) $x^2 + kxy + (1-k)y^2 + ky - 1 = 0, \forall k \in \mathbb{R}$
3) $x^2 + 2(h-1)xy + y^2 + 2hx = 0, \forall h \in \mathbb{R}$
4) $(1+\lambda)x^2 + xy - 2(1+\lambda)x + \lambda = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
5) $(1+h)x^2 + y^2 - hy - 1 - h = 0, \forall h \in \mathbb{R}$

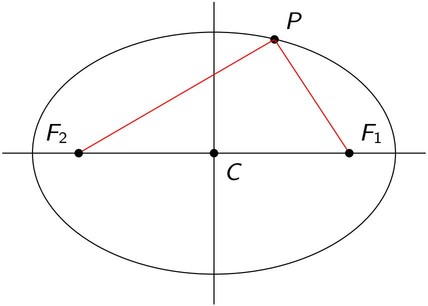
Equazione della conica in forma matriciale

Indicando con $\underline{x}$ il vettore colonna $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ l'equazione di una conica in coordinate cartesiane si può scrivere in **forma compatta**:

$$\underline{x}^T B \underline{x} = 0$$

$$(x, y, 1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Ellisse



Definizione di ellisse

Definizione di ellisse: E' il luogo dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.
Significa che per tutti i punti P della figura avremo che

$$PF_1 + PF_2 = \text{costante}$$

Per sapere quanto vale la costante spostiamo il punto P fino a portarlo sull'asse orizzontale, coincidente con V_1, allora si vede che la somma $PF_1 + PF_2$ è uguale alla distanza fra i due punti dell'ellisse che tagliano l'asse delle $\vec{X}$, cioè $V_1 V_3$. Chiamiamo questa distanza $2a$.

Ellisse

Cominciamo col considerare l'equazione canonica dell'ellisse reale

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

con centro in $O = (0,0)$ e assi di simmetria coincidenti con asse $\vec{X}$, e asse $\vec{Y}$.

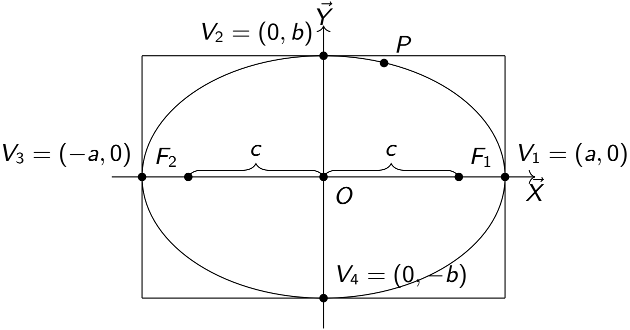
Proprietà:

Ricavando $X^2 = (1 - \frac{Y^2}{b^2}) \cdot a^2 = \frac{b^2 - Y^2}{b^2} a^2$ si ha che i punti reali che la soddisfano sono tali che $b^2 - Y^2 \geq 0 \Rightarrow -b \leq Y \leq b$. In modo analogo $-a \leq X \leq a$. Andiamo a vedere la figura seguente:

$$-b \leq Y \leq b; \quad -a \leq X \leq a$$

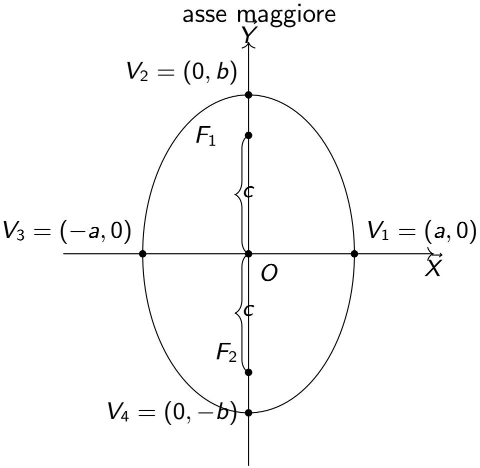
Ipotizziamo che:

$a > b$, allora i fuochi $F_{1,2} = (\pm c, 0)$, dove $c = \sqrt{a^2 - b^2}$,



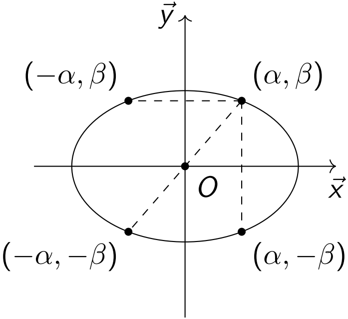
Ellisse, $a < b$

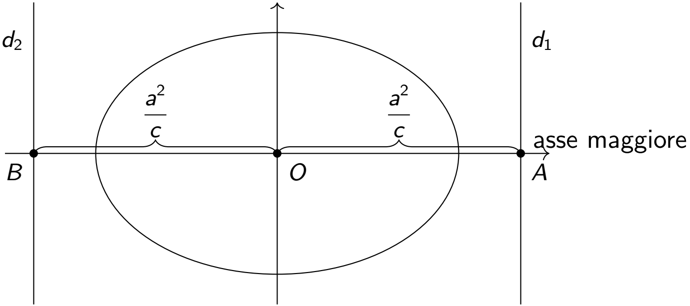
Se invece ipotizziamo che $a < b$, allora avremo
$c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $F_{1,2} = (0, \pm c)$.



Centro e assi di simmetria

Il centro di simmetria è l'origine $O = (0,0)$: perchè se (α, β) soddisfa l'equazione anche $(-\alpha, -\beta)$ soddisfa;
assi di simmetria sono asse $\vec{X}$ e asse $\vec{Y}$.




d_2
d_1
$\frac{a^2}{c}$
$\frac{a^2}{c}$
asse maggiore
B
O
A

Le direttrici dell'ellisse relative ai fuochi ed eccentricità

Le rette

$$X = -\frac{a^2}{c}, X = \frac{a^2}{c}$$

sono dette **direttrici** relative ai fuochi F_1, e a F_2.
Sussiste la seguente proprietà:
Il rapporto delle distanze dei punti propri e reali P dell'ellisse da un fuoco e dalla relativa direttrice è costante. Tale costante si dice l' **eccentricità**, e si indica con e. Risulta che $e = \frac{c}{a}$ nell'ellisse è sempre $e < 1$.

Casi particolari

Caso n.1: Se $a = b$ l'ellisse degenera in una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = a^2$ di centro l'origine O e raggio a.
Caso n.2: Si dice ellisse immaginaria, la seguente equazione:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = -1$$

che si traduce in termini di invarianti con la seguente condizione:
$TrA \cdot \det B > 0$. (Per l'ellisse reale il prodotto $TrA \cdot \det B < 0$ si presente negativo).

Le due equazioni della circonferenza

Definizione di circonferenza: il luogo dei punti P del piano equidistanti da un punto fisso detto centro

L'equazione della circonferenza nel piano $z = 0$, si presenta in due forme.

- Dato centro e raggio ($r > 0$), la circonferenza ha equazione

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

Forma n.2 dell'equazione della circonferenza del piano $z = 0$:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

con centro $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e raggio $r = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c}$

Condizioni per la circonferenza

E' immediato vedere che sviluppando i calcoli nell'equazione della data circonferenza si ottiene una conica in cui

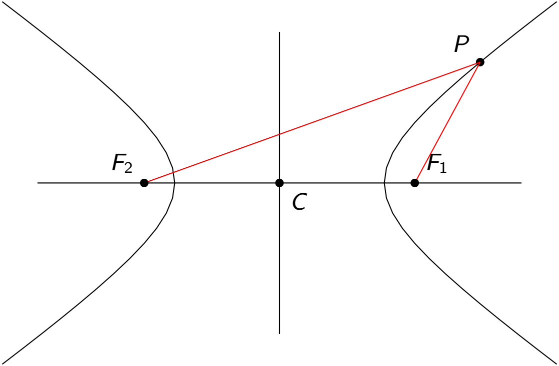
$$\begin{cases} a_{11} = a_{22} \neq 0 \\ a_{12} = 0 \end{cases}$$

Viceversa se una conica è tale che le precedenti condizioni sono verificate, allora la conica è una circonferenza

Varie tipologie

- Determinare la circonferenza passante per i punti $A = (0, 1), B = (2, -1), C = (-1, 3)$
- Determinare la circonferenza tangente alla retta $r: \; 3x - y = 0$ nel punto $P = (1, 3)$ e avente il centro sulla retta $s: \; x - 3y + 2 = 0$ (PS: devo costruire la retta t ortogonale ad r e passante per P per ricavare le coordinate del centro $C = t \cap s$. Per calcolare il raggio uso la distanza CP)
- Determinare la circonferenza passante per due punti $A = (0, 2), B = (0, 8)$ e tangenti all'asse $\vec{x}$ (PS: usare la condizione di tangenza $\Delta = 0$)

Iperbole



Definizione di iperbole

Definizione di iperbole: E' il luogo dei punti del piano per cui è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.
Significa che per tutti i punti P della figura avremo che

$$|PF_1 - PF_2| = \text{costante}$$

Studio dell'iperbole in forma canonica

Cominciamo col considerare l'equazione canonica dell'iperbole reale

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

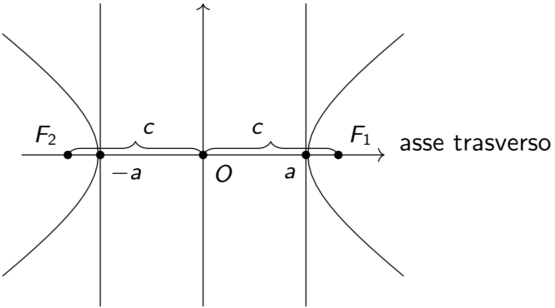
con centro in $O = (0,0)$ e assi di simmetria coincidenti con asse $\vec{X}$, e asse $\vec{Y}$.

Proprietà:

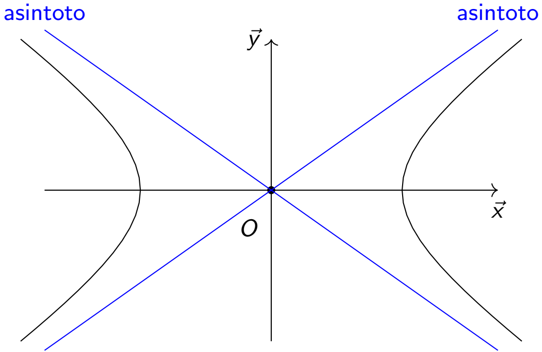
Ricavando $Y^2 = (-1 + \frac{X^2}{a^2}) \cdot b^2 = \frac{-a^2+X^2}{a^2} b^2$ si ha che i punti reali che la soddisfano sono tali che $X \leq -a$ e $X \geq a$.

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

Ipotizziamo che $a > b$, allora $F_{1,2} = (\pm c, 0)$, dove $c = \sqrt{a^2 + b^2}$



Asintoti dell'iperbole



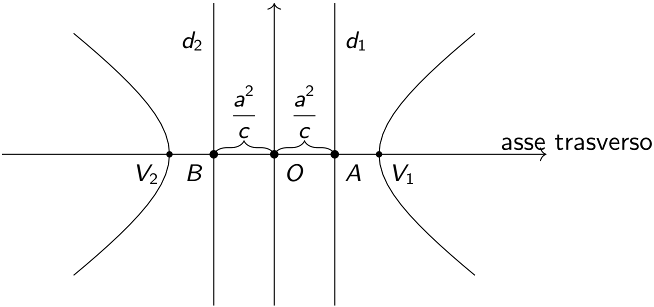
Il centro si simmetria è O, assi di simmetria sono asse $\vec{X}$ e asse $\vec{Y}$.
Definizione di Asintoti: Gli asintoti di un'iperbole sono delle rette che approssimano il comportamento dei rami dell'iperbole all'infinito; in altri termini, man mano che i rami dell'iperbole si sviluppano tendono ad aderire agli asintoti dell'iperbole, senza mai toccarli.
Equazioni degli asintoti relativi alla forma canonica dell'iperbole:

$$Y = \pm \frac{b}{a} X.$$

$F_1 = (-c, 0), F_2 = (c, 0), c = \sqrt{a^2 + b^2}$.
F_1, F_2 sono detti **fuochi**.
$V_1 = (-a, 0)$, $V_2 = (a, 0)$ sono detti **vertici**.
$X = -\frac{a^2}{c}, X = \frac{a^2}{c}$ sono le **direttrici**.
Definiamo **eccentricità**$= \frac{distanzapunto-fuoco}{distanzapunto-relativadirettrice}$.
Risulta che $e = \frac{c}{a}$, e nel caso delliperbole essa è sempre > 1.

Iperbole, $a > b$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$



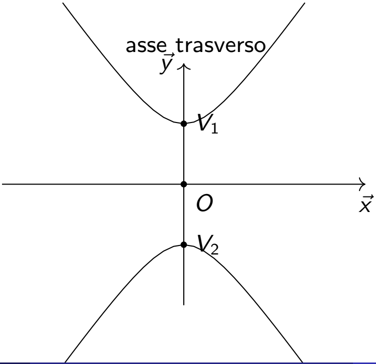
Iperbole, $a < b$

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1$$

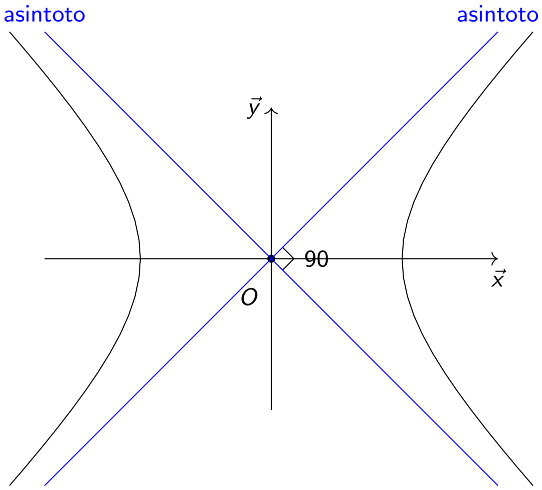
Ipotizziamo che $a < b$, allora $F_{1,2} = (0, \pm c)$, dove $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$|PF_1 - PF_2| = 2b$$

$V_1 = (0, b)$, $V_2 = (0, -b)$



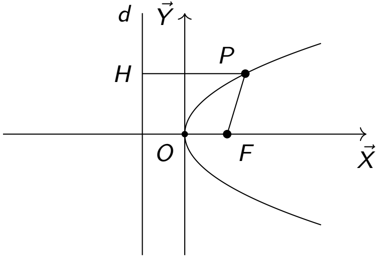
Iperbole equilatera: asintoti ortogonali



Definizione di iperbole equilatera

Una iperbole si dice che è equilatera se ha gli asintoti ortogonali
In particolare le coniche irriducibili tali che $TrA = 0$ sono tutte e sole iperboli equilatere.

Parabola



Definizione di parabola

Definizione di parabola: E' il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta detta direttrice.
Significa che per tutti i punti P della figura avremo che

$$PF = PH$$

Studio della parabola in forma canonica

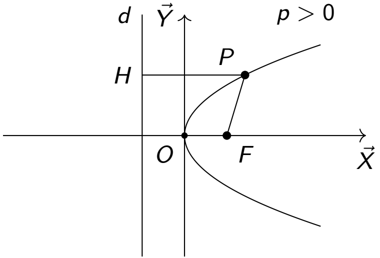
Equazione canonica della parabola

$$Y^2 = 2pX$$

Supponiamo $p > 0$
Proprietà:
La parte reale si ha per $X \geq 0$.
Asse $\vec{X}$ è l'asse di simmetria
Definizione di **vertice di una parabola**: è il punto di intersezione tra la parabola e il suo asse di simmetria

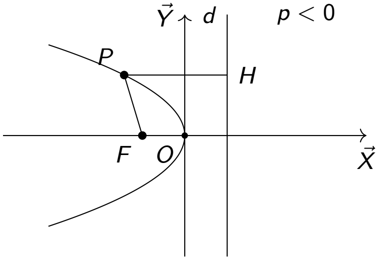
Parabola, $p > 0$

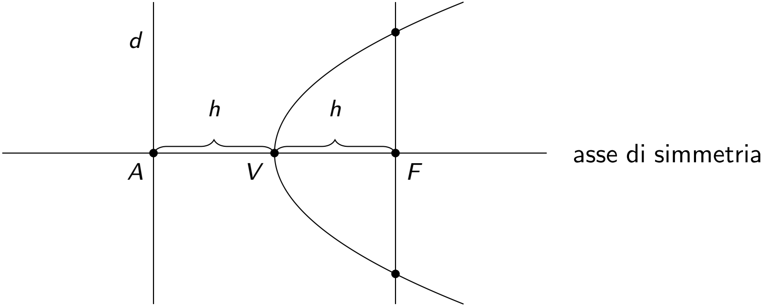
$F = (\frac{p}{2}, 0)$ detto Fuoco
$d: \; X = -\frac{p}{2}$ detta direttrice



Parabola, $p < 0$

$F = (\frac{p}{2}, 0)$ detto Fuoco
$d : \ X = -\frac{p}{2}$ detta direttrice





la direttrice non incontra la parabola

la retta passante per il fuoco e ortogonale all'asse incontra la parabola

eccentricità della parabola$= \frac{distanzapunto-fuoco}{distanzapunto-relativa\ direttrice}$.
Risulta che $e = \frac{c}{a}$
Eccentricità della parabola è sempre $= 1$. (dato che i punti sono equidistanti)

Forme ridotte delle coniche

Teorema:
Data una conica Γ a coefficienti reali di equazione $x^t B x = 0$ è sempre possibile operare una rototraslazione tale che Γ nel nuovo riferimento $O'\vec{X}\vec{Y}$ abbia una delle seguenti due forme:
$I)\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma$, ellisse o iperbole

$II)\beta Y^2 = 2\gamma X$ parabola
Inoltre dette B e A la matrice della conica e la sottomatrice dei termini di secondo grado in x e in y e rispettivamente B' e A' le corrispondenti matrici per la conica in forma ridotta si ha:
(a) B e B' hanno lo stesso determinante e lo stesso rango.
(b) A e A' sono simili e hanno quindi lo stesso polinomio caratteristico, lo stesso determinante e la stessa traccia.

Le forme ridotte

Un'equazione polinomiale di secondo grado rappresenta una conica in **forma canonica** se ha una delle due forme seguenti:

$$I)\ \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma \leftarrow \textit{ellisse o iperbole}$$

$$II)\ \beta y^2 = 2\gamma \cdot x \leftarrow \textit{parabola}$$

Come ricavare la FORMA RIDOTTA dell'ellisse o iperbole

Se parliamo di ELLISSE O IPERBOLE abbiamo

$$I) : \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

Determinare α, β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\alpha\beta\gamma, \det A = \alpha\beta$ Da cui

$$\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$$

ed α, β si ricavano dal P.C.(A) poichè sono gli autovalori della matrice A. Nell'iperbole e nell'ellisse posso scegliere io chi chiamare α e chi chiamare β basta solo poi essere coerente a questa scelta.

Come ricavare la FORMA RIDOTTA della parabola

Se parliamo di PARABOLA la sua forma canonica è

$$\beta y^2 = 2\gamma \cdot x$$

Determinare β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\beta\gamma^2, \det A = 0$ Da cui

$$\beta = TrA, \gamma = +\sqrt{-\frac{|B|}{TrA}}$$

Abbiamo preso il segno positivo per γ poichè per convenzione scegliamo il verso positivo dell'asse X.

Coordinate del Centro di simmetria di una ELLISSE O IPERBOLE

Se abbiamo ellisse o iperbole, le coordinate del **centro** soddisfano il seguente sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_C + a_{12}y_C + a_{13} = 0 \\ a_{21}x_C + a_{22}y_C + a_{23} = 0 \end{cases}$$

In tal caso il **centro** C coincide con il centro di simmetria.

La parabola non ammette centro di simmetria

Le parabole non hanno centro di simmetria , si vede pure dal sistema del centro che il determinante della matrice dei coefficienti è nullo mentre il rango della matrice completa è due quindi il sistema non ammette soluzioni

Equazioni generali degli ASSI di una iperbole ed ellisse

Se $a_{12} \neq 0$ Dati α, β gli autovalori della sottomatrice A, Per trovare le equazioni dei due **assi** iniziamo a calcolare l'autospazio V_α:

$$V_\alpha = \{(x, y) |\ (a_{11} - \alpha)x + a_{12}y = 0\}$$

dove la sua equazione può essere vista come una retta parallela all'asse di simmetria. Da cui abbiamo la formula del suo coefficiente angolare

$$m_\alpha = -\frac{(a_{11} - \alpha)}{a_{12}}$$

Quindi il il primo ASSE ha equazione

$$asse_1 :\ y - y_C = m_\alpha(x - x_C)$$

dove (x_C, y_C) sono le coordinate del centro di simmetria.

In modo analogo calcoliamo V_β : e troviamo l'analoga formula del coefficiente angolare

$$m_\beta = -\frac{(a_{11} - \beta)}{a_{12}}$$

Quindi il il secondo ASSE ha equazione

$$asse_2 : \; y - y_C = m_\beta(x - x_C)$$

Se $a_{12} = 0$ gli assi di simmetria a_1, a_2 sono paralleli agli assi cartesiani che passano per il centro quindi le equazioni sono note:

$$a_1 : \; x = x_C; \quad a_2 : \; y = y_C$$

Consideriamo la conica di equazione:

$$3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0.$$

Le matrici associate sono:
$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = -16 \neq 0$ e $|A| = 8 > 0$.
Quindi la conica è un'ellisse reale o immaginaria.
Dato che $TrA = 6 \Rightarrow |B| \cdot \mathrm{Tr}(A) < 0$ la conica è un'ellisse reale (ma potevamo arrivarci anche dal fatto che la conica passa per l'origine, per cui deve necessariamente essere reale. La sua forma ridotta è del tipo:
$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma \Rightarrow \alpha X^2 + \beta Y^2 - \gamma = 0.$

Le sue matrici associate sono:

$$B' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \text{ e } A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che $|B'| = |B| eche |A'| = |A|$.

Inoltre, è anche evidente che $|B'| = -\alpha\beta\gamma$ e $|A'| = \alpha\beta$. Dunque:

$$\gamma = -\frac{|B|}{|A|} = -\frac{-16}{8} = 2.$$

Invece, α e β sono gli autovalori di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 3-T & 1 \\ 1 & 3-T \end{vmatrix} = (3-T)^2 - 1 = T^2 - 6T + 8 = (T-2)(T-4).$$

Quindi, possiamo prendere $\alpha = 2$ e $\beta = 4$ oppure $\alpha = 4$ e $\beta = 2$.

Se scegliamo $\alpha = 2$ e $\beta = 4$, abbiamo:

$$2X^2 + 4Y^2 = 2 \Rightarrow X^2 + 2Y^2 = 1 \Rightarrow X^2 + \frac{Y^2}{\frac{1}{2}} = 1,$$

cioè è del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 con a^2 = 1 e b^2 = \frac{1}{2}$. Con questa scelta siamo nel caso in cui a¿b.
Se scegliamo $\alpha = 4$ e $\beta = 2$, abbiamo:
$4X^2 + 2Y^2 = 2 \Rightarrow 2X^2 + Y^2 = 1 \Rightarrow \dfrac{X^2}{\dfrac{1}{2}} + Y^2 = 1,$
cioè è del tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 con a^2 = \frac{1}{2} e b^2 =$. Con questa scelta siamo nel caso in cui a¡b.
Scegliamo $\alpha = 2$ e $\beta = 4$. In questo modo una sua FORMA RIDOTTA è $2X^2 + 4Y^2 = 2$ e una sua forma canonica è:
$X^2 + 2Y^2 = 1.$
Quindi, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. L'eccentricità è:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

CENTRO E ASSI DI SIMMETRIA .

Il centro di simmetria si trova risolvendo il sistema associato alle prime due righe di B:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Dunque, il centro di simmetria è il punto $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Gli assi di simmetria si trovano utilizzando gli autovalori di A.

Sia $\alpha = 2$. L'autospazio associato è determinato da:

$$V_2 = \{(x, y) | (a_{11} - \alpha)x + a_{12}y = 0\}$$

L'autospazio ha equazione $(3 - 2)x + y = 0$. Un primo asse di simmetria è la retta parallela a $x + y = 0$ e passante per $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Le rette parallele a $x + y = 0$ hanno coefficiente angolare $m_\alpha = -\frac{3-2}{1}$.

$\rightarrow y - \frac{1}{2} = -x + \frac{1}{2} \rightarrow x + y - 1 = 0$. Quindi, il primo asse di simmetria ha equazione $x + y - 1 = 0$.

Sia $\beta = 4$. L'autospazio associato è determinato da:
$A - 4I = \begin{pmatrix} 3-4 & 1 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
L'autospazio ha equazione $-x + y = 0$. L'altro asse di simmetria è la retta parallela a $x - y = 0$ e passante per $C = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Le rette parallele a $x - y = 0$ hanno coefficiente angolare 1. Imponendo il passaggio per C troviamo:
$\rightarrow y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} \rightarrow x - y = 0$. Quindi, il secondo asse di simmetria ha equazione $x - y = 0$.

VERTICI

I vertici sono i punti d'intersezione dell'ellisse con i due assi di simmetria.

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ 3x^2 + 3(1-x)^2 + 2x(1-x) - 4x - 4(1-x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1 - x \\ 4x^2 - 4x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} \\ y = 1 - x. \end{cases}$$

Troviamo i due vertici $V_1 = (\frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}) e V_2 = (\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$.

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 4x - 4y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ 8x^2 - 8x = 0. \end{cases}$$

Troviamo i due vertici $V_3 = (0, 0)$ e $V_4 = (1, 1)$.

ASSE FOCALE.

L'asse focale è l'asse maggiore. Calcoliamo:

$\overline{V_1 V_2} = 2$

$\overline{V_3 V_4} = \sqrt{2}$.

Dato che $\overline{V_1 V_2} > \overline{V_3 V_4}$, la retta $x + y - 1 = 0$ è l'asse maggiore.

Studio completo dell'iperbole.
Consideriamo la conica di equazione:
$2x^2 + 2y^2 + 8xy - 8x - 4y + 5 = 0.$
Le matrici associate sono:
$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = -36 \neq 0$ e $|A| = -12 < 0$,
per cui la conica è un'iperbole. Dato che $\mathrm{Tr}(A) = 2 + 2 = 4 \neq 0$, l'iperbole non è equilatera.

FORMA CANONICA.

Una forma ridotta dell'iperbole è $\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma \Rightarrow \alpha X^2 + \beta Y^2 - \gamma = 0$.

Le sue matrici associate sono:

$$B' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \text{ e } A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Sappiamo che $|B'| = |B|$ e che $|A'| = |A|$. Inoltre, è anche evidente che $|B'| = -\alpha\beta\gamma$ e $|A'| = \alpha\beta$. Dunque:

$$\gamma = -\frac{|B|}{|A|} = -\frac{-36}{-12} = -3.$$

Invece, α e β sono gli autovalori di A:

$$P_A(T) = \begin{vmatrix} 2-T & 4 \\ 4 & 2-T \end{vmatrix} = (2-T)^2 - 16 = T^2 - 4T - 12 =$$
$$(T-6)(T+2).$$

Quindi, possiamo prendere $\alpha = 6$ e $\beta = -2$ oppure $\alpha = -2$ e $\beta = 6$.

Se scegliamo $\alpha = 6$ e $\beta = -2$, abbiamo:

$$6X^2 - 2Y^2 = -3 \Rightarrow 2X^2 - \frac{2}{3}Y^2 = -1 \Rightarrow \frac{X^2}{\frac{1}{2}} - \frac{Y^2}{\frac{3}{2}} = -1,$$

cioè è del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ con $a^2 = \frac{1}{2}$ e $b^2 = \frac{3}{2}$.

Se scegliamo $\alpha = -2$ e $\beta =6$, abbiamo:

$$-2X^2 + 6Y^2 = -3 \Rightarrow \frac{2}{3}X^2 - 2Y^2 = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{\frac{3}{2}} - \frac{Y^2}{\frac{1}{2}} = 1,$$

cioè è del tipo $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Scegliamo $\alpha = -2$ e $\beta = 6$. In questo modo una sua FORMA RIDOTTA . è $-2X^2 + 6Y^2 = -3$ e una sua forma canonica è:

$$\frac{2}{3}X^2 - 2Y^2 = 1.$$

Quindi, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. L'eccentricità è:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

CENTRO E ASSI DI SIMMETRIA .

Il centro si determina risolvendo il sistema associato alle prime due righe della matrice B:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 4 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y - 4 = 0 \\ 4x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1. \end{cases}$$

Quindi, il centro di simmetria è il punto C=(0,1). Gli assi di simmetria si trovano utilizzando gli autovalori di A.
Sia $\alpha = 6$.

$$V_\alpha = \{(x, y)|(2-6)x + 4y = 0\}$$

vediamo che l'autospazio associato ha equazione $-4x + 4y = 0$. Dunque, un primo asse di simmetria è la retta parallela a quella di equazione $x - y = 0$ e passante per $C = (0, 1)$. Le rette parallele a $x - y = 0$ hanno coefficiente angolare $m_\alpha = 1$ e imponendo il passaggio per C troviamo:

$$y - 1 = 1(x - 0) \to y = x + 1$$

Quindi, un primo asse di simmetria è la retta $x - y + 1 = 0$

Sia $\beta = -2$.

$$V_\beta = \{(x, y)|(2+2)x + 4y = 0\}$$

vediamo che l'autospazio associato ha equazione $x + y = 0$. Dunque, un primo asse di simmetria è la retta parallela a quella di equazione $x + y = 0$ e passante per C=(0,1). Le rette parallele a $x + y = 0$ hanno coefficiente angolare $m_\beta = -1$ e imponendo il passaggio per C troviamo:

$$y - 1 = -1(x - 0) \rightarrow y = -x + 1$$

Quindi, l'altro asse di simmetria è la retta $x + y - 1 = 0$.

VERTICI

Uno dei due assi di simmetria è l'asse trasverso, cioè ha in comune con l'iperbole due punti reali, mentre l'altro la incontra in due punti immaginari e coniugati. Per determinare vertici e asse trasverso occorre fare le intersezioni.

Dato che

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + 8xy - 8x - 4y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ 2x^2 + 2(x+1)^2 + 8x(x+1) - 8x - 4(x+1) + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 12x^2 + 3 = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$$: il sistema non ha soluzioni reali,

possiamo concludere che l'asse trasverso è certamente l'altro asse di simmetria di equazione $x + y - 1 = 0$:

$$\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x^2+2y^2+8xy-8x-4y+5=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=-x+1 \\ 2x^2+2(-x+1)^2+8x(-x+1)-8x-4(-x+1)+5=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4x^2+3=0 \\ y=-x+1. \end{cases}$$

Il sistema ci dà come soluzioni i due punti $V_1=(\frac{\sqrt{3}}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $V_2=(-\frac{\sqrt{3}}{2},1+\frac{\sqrt{3}}{2})$.

FORMA RIDOTTA della parabola

Consideriamo la conica di equazione:
$4x^2 - 4xy + y^2 + 4x + 8y - 4 = 0.$
Le matrici associate sono:
$B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$|B| = -100 \neq 0 \text{ e } |A| = 0.$$

Quindi, la conica è una parabola.

Una FORMA RIDOTTA della conica è del tipo
$\beta Y^2 = 2\gamma X \Rightarrow \beta Y^2 - 2\gamma X = 0$. Le sue matrici associate sono:
$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$,
per cui $|B'| = -\beta\gamma^2 e \, \mathrm{Tr}(A') = \beta$. Sappiamo che

$$\beta = \mathrm{Tr}(A) = 4 + 1 = 5$$

e che

$$\gamma = \pm\sqrt{-\frac{|B|}{\mathrm{Tr}(A)}} = \pm\sqrt{-\frac{-100}{5}}.$$

Da cui se $\gamma = 2\sqrt{5}$ otteniamo l'equazione

$$5Y^2 = 4\sqrt{5}X$$

Mentre scegliendo $\gamma = -2\sqrt{5}$ otteniamo l'equazione $5Y^2 = -4\sqrt{5}X$.