

DEFINIZIONE

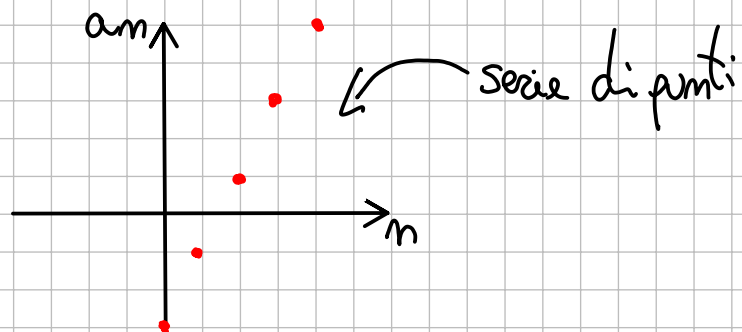
È una "funzione" $a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, cioè una serie di "elementi" che soddisfanno la funzione "a". Si indica " $a_m = 2m - 3$ ", con $m \in \mathbb{N}$

DOMINIO

CODOMINIO

es: $a_m = 2m - 3$

$\begin{matrix} -3 & -1 & 1 & 3 & 5 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \end{matrix}$



Una successione $\{a_m\}$ si dice:

LIMITATA INFERIORMENTE se esiste $m \in \mathbb{R} : a_m \geq m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

LIMITATA SUPERIORMENTE se esiste $M \in \mathbb{R} : a_m \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N}$

LIMITATA se esistono $m \in \mathbb{R}$ e $M \in \mathbb{R} : m \leq a_m \leq M \quad \forall m \in \mathbb{N}$

in sostanza:
 Limitata \sup : ogni a_m è minore di un $M \in \mathbb{R}$
 Limitata \inf : ogni a_m è maggiore di un $m \in \mathbb{R}$
 Limitata: ogni a_m è compreso in un intervallo.

MONOTONA CRESCENTE: se ogni a_m è **MINORE O UGUALE** del successivo:

$$a_m \leq a_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE: se ogni a_m è **MINORE** del successivo:

$$a_m < a_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

MONOTONA DECRESCENTE: se ogni a_m è **MAGGIORE O UGUALE** del successivo:

$$a_m \geq a_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE se ogni a_m è **MAGGIORE** del successivo:

$$a_m > a_{m+1} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Una successione $\{a_n\}$ POSSIENE (o ACQUISTA) una proprietà **DEFINITIVAMENTE** se esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che a_n soddisfa quella proprietà $\forall n \geq N$.

es: $a_n = 2n - 3$ $\begin{matrix} -3 & -1 & 1 & 3 & 5 \\ \underbrace{a_0} & \underbrace{a_1} & \underbrace{a_2} & \underbrace{a_3} & \underbrace{a_4} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \nearrow \text{LIMITATA INFERIORMENTE} \\ \nearrow \text{MONOTONA STRETTAMENTE CRESCENTE} \\ \searrow \text{DEFINITIVAMENTE "POSITIVA" per } n > 1 \end{matrix}$

es: $a_n = \frac{1}{n+1}$ $\begin{matrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ \underbrace{a_0} & \underbrace{a_1} & \underbrace{a_2} & \underbrace{a_3} \end{matrix}$ $\begin{matrix} \nearrow \text{LIMITATA SUPERIORMENTE} \\ \nearrow \text{MONOTONA STRETTAMENTE DECRESCENTE} \\ \searrow \text{DEFINITIVAMENTE MINORE DI } 1/3 \text{ per } n > 2 \end{matrix}$

LIMITI DI SUCCESSIONI

Calcolare il limite di una successione ($\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ oppure $\lim a_n$) equivale a chiedersi che tipo di comportamento assume la successione quando n tende a diventare MOLTO MOLTO GRANDE.

Ci sono 4 CASI

① se fissato un $M \in \mathbb{R}$ (anche ENORME), $a_n > M$ DEFINITIVAMENTE, cioè $\forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > n_0, a_n > M$. Si dice che la successione **DIVERGE A $+\infty$** e si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ oppure $a_n \rightarrow +\infty$

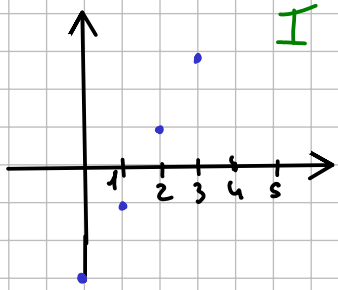
② se fissato un $M \in \mathbb{R}$ (anche piccolissimo), $a_n < M$ DEFINITIVAMENTE, cioè $\forall M \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n > n_0, a_n < M$. Si dice che la successione **DIVERGE A $-\infty$** e si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ oppure $a_n \rightarrow -\infty$

③ se esiste un numero reale " l " che gode della seguente proprietà: Fissato un numero reale $\varepsilon > 0$ (anche MOLTO "piccolo") $|a_n - l| < \varepsilon$ **DEFINITIVAMENTE** e si dice che la successione **CONVERGE** e si scrive $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$ oppure $a_n \rightarrow l$

N.B. Se $l=0$, cioè se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$, la successione si dice **INFINITESIMA**.

④ Se non si verifica NESSUNO DI QUESTI CASI PRECEDENTI allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ NON ESISTE e si dice che la successione è **INDETERMINATA**.

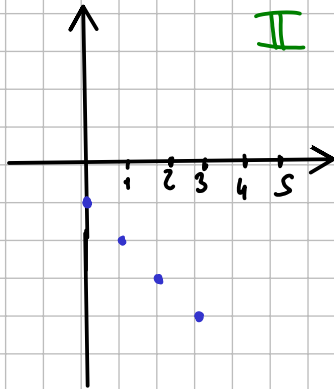
esempi:



I

$$a_n = 2n - 3$$

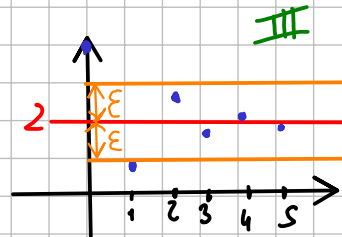
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$



II

$$a_n = -1 - n$$

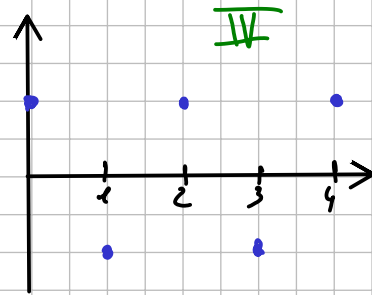
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$$



III

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + 2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 2$$



IV

$$a_n = (-1)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \emptyset$$

I a_n diverge a $+\infty$

II a_n diverge a $-\infty$

III a_n è infinitesima

IV a_n è indeterminata

METODO DI FAZIO

$$a_m = t \rightarrow$$

$$\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_{m+1} = \frac{2a_m^2 + 1}{4a_m} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} f(t) = \frac{2t^2 + 1}{4t}$$

$$\textcircled{2} p(t) = \frac{2t^2 + 1}{4t} - t$$

③ STUDIO del segno di $f(t)$

④ STUDIO del grafico di f

$$1) f(t) = \frac{2t^2 + 1}{4t}$$

$$2) p(t) = f(t) - t$$

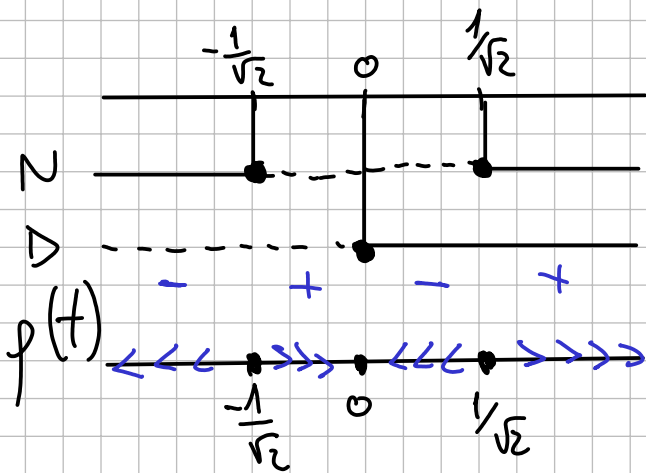
$$p(t) = \frac{2t^2 + 1}{4t} - t$$

3) segno di $p(t)$

$$\frac{2t^2 + 1}{4t} - t \geq 0 \iff \frac{2t^2 + 1 - 4t^2}{4t} \geq 0 \implies \frac{-2t^2 + 1}{4t} \geq 0$$

$$N: -2t^2 + 1 \geq 0 \rightarrow -2t^2 + 1 = 0 \rightarrow 2t^2 = 1 \rightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$D: 4t \geq 0 \rightarrow t \geq 0$$



\gggg crescente
 \llll decrescente

$$I \left[-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$III \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \rightarrow \text{lim ed è finito (=0) limitata inferiormente}$$

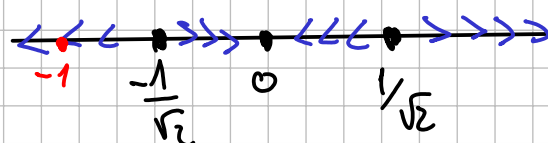
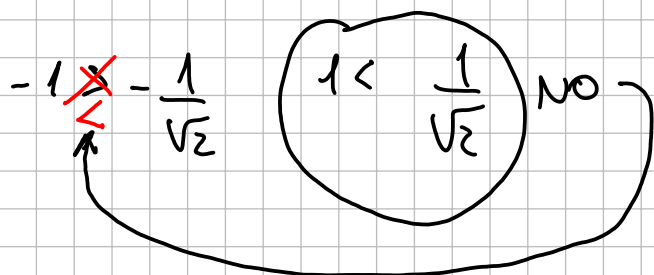
$$II \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right] \rightarrow \text{lim ed è finito (=0) limitata superiormente}$$

$$IV \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty \right]$$

In 0 la successione converge quindi è un candidato limite. Il limite è lì dove i termini "si avvicinano", non il contrario

In quale di questi intervalli sta la successione?

→ DOVE STA a_1 ?



46:08 18/05/21

PROPRIETA': $a_1 \in [-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$

↳ essere compreso nell'intervallo $[-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$

→ INDUZIONE: a_1 ha una proprietà. Se a_n ha la stessa proprietà di a_1 , è vero che anche a_{n+1} la ha?

$$a_n \in [-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \quad \forall n?$$

- Devo dimostrare che $a_n \in [-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \Rightarrow a_{n+1} \in [-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$

- Ma se $\begin{cases} a_n = t \\ a_{n+1} = f(t) \end{cases}$ allora $t \in [-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}] \Rightarrow f(t) \in [-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$

4) Quindi studio il grafico di $f(t)$

$$f(t) = \frac{2t^2 + 1}{4t} \quad a_1 = -1(t)$$

$$\frac{2(-1)^2 + 1}{-4} = \frac{2+1}{-4} = -\frac{3}{4} \in [-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$$

$$-\frac{3}{4} < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad ? \quad (\text{se s\`i, ok})$$

$$\frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad 3 > \frac{4}{\sqrt{2}} \quad , \quad 9 > \frac{16}{2} \quad , \quad (9 > 8 \text{ OK})$$

INDUZIONE VERIFICATA.

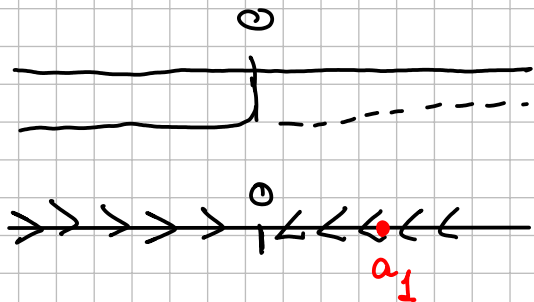
$$\text{Se } -\infty < a_n < -\frac{1}{\sqrt{2}} \implies -\infty < a_{n+1} < -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \forall n$$

$$\text{es: } \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \end{cases}$$

$$f(t) = \frac{1}{2}t$$

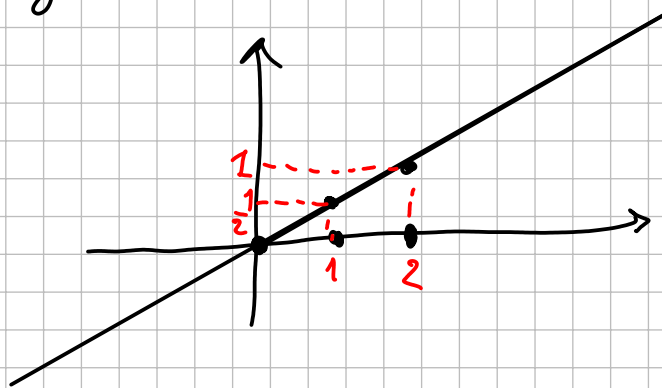
$$p(t) = \frac{1}{2}t - t = \frac{t-2t}{2} = -\frac{1}{2}t$$

$$3) \quad p(t) \geq 0 \quad -\frac{1}{2}t \geq 0$$



$$4) \quad \frac{1}{2}t \rightsquigarrow \text{grafico}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x \\ \downarrow \\ 0 &= 0 \\ 1 &= \frac{1}{2} \\ 2 &= 1 \end{aligned}$$



$$a_n \rightarrow \infty$$

Se $t \in [0, +\infty]$ anche $f(t) \in [0, +\infty]$??

→ s\`i. Basta vedere il grafico di $f(t)$. Quindi la successione tende a $+\infty$

Esercizio 3. Determinare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 2 \end{cases} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

$3^2 - 2 = 7$

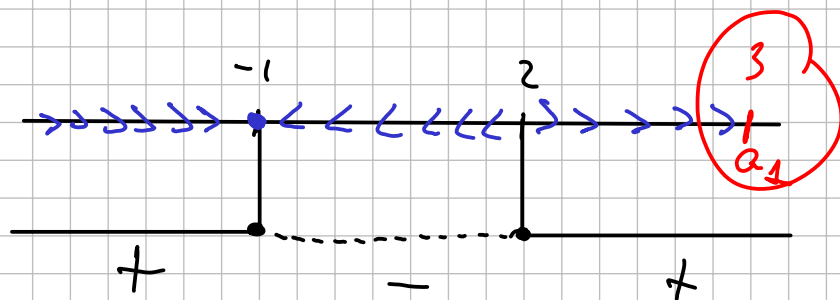
1) $f(t) = t^2 - 2$

2) $f(t) = t^2 - t - 2$

3) $f(t) \geq 0 \leadsto t^2 - t - 2 \geq 0$

$t^2 - t - 2 = 0$

$1^2 - 4(-2) = 9 \quad t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} \quad t \leq -1 \wedge t \geq 2$

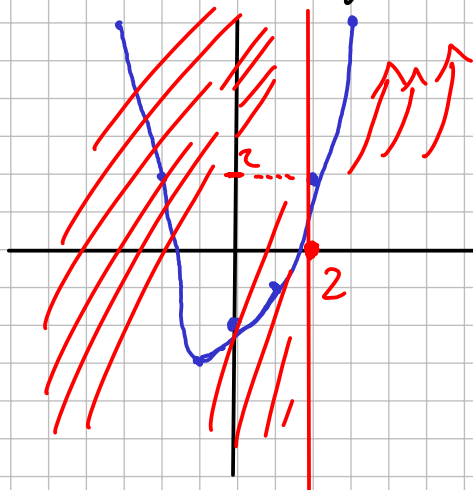


PROP.

- 1) $2 < a_1 < +\infty$ ✓
- 2) $2 < a_n < +\infty$ ✓
- 3) $2 < a_{n+1} < +\infty$??

2) $2 < t < +\infty \Rightarrow 2 < f(t) < +\infty$???

GRAFICO DI $f(t) = t^2 - 2$



$$2 < t < +\infty \Rightarrow 2 < f(t) < +\infty$$

VERIFICATA $\forall n$

$$a_n \rightarrow +\infty$$

Esercizio 3. Determinare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) $f(t) = t^2 - 2t$
 2) $p(t) = t^2 - 2t - t = t^2 - 3t$

3) $t^2 - 3t \geq 0 \Rightarrow t(t-3) \geq 0$

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t-3 \geq 0 \rightarrow t \geq 3 \end{cases}$$

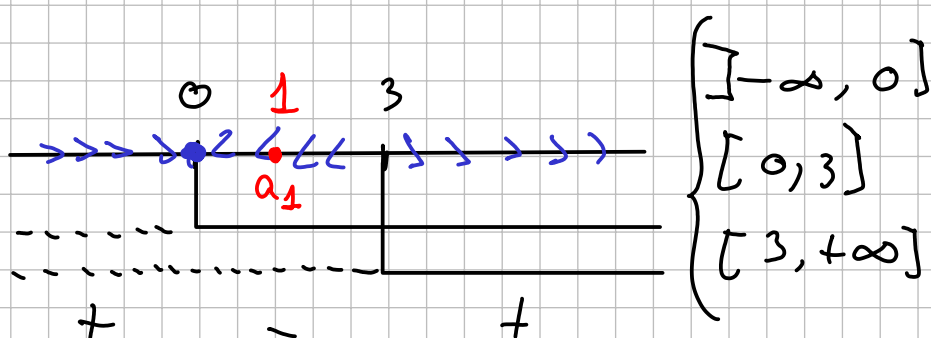
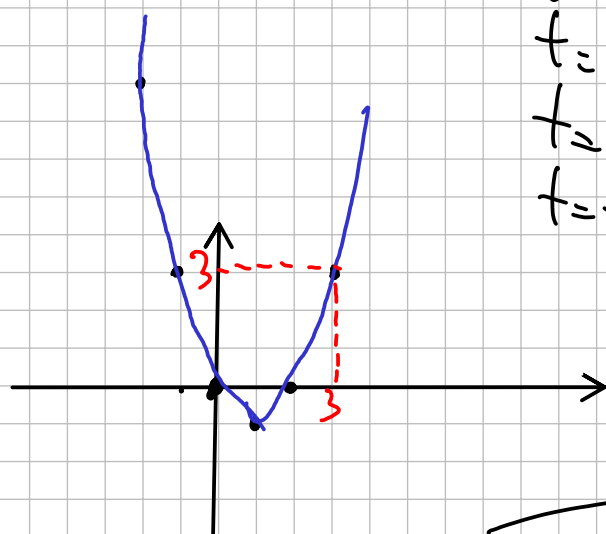


GRAFICO DI $f(t)$. PROP: $0 < a_1 < 3$

$$f(t) = t^2 - 2t$$

$t=0$	$f(t)=0$
$t=1$	$f(t)=-1$
$t=2$	$f(t)=0$
$t=-1$	$f(t)=3$
$t=-2$	$f(t)=8$

$t=3 \quad f(3)=3$



se $0 < t < 3$ allora $0 < f(t) < 3$??

NO

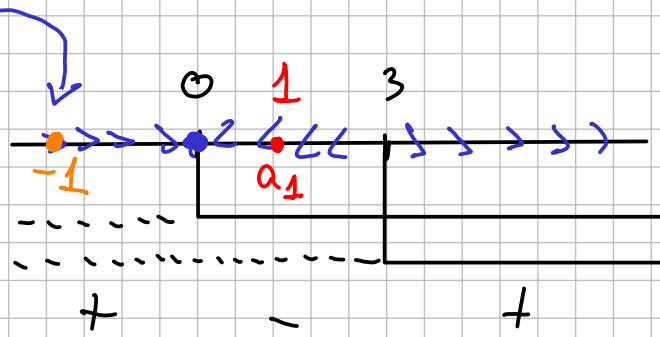
quindi il limite della successione è?

Calcolo a_{n+1} con a_1 cioè $f(t) = t^2 - 2t$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 - 2a_n \end{cases}$$

$$a_{n+1} = -1$$

$a_{n+1} \rightarrow 0$ tends to 0.



$$\begin{cases}]-\infty, 0] \\ [0, 3] \\ [3, +\infty] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n^2 + |a_n| - 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

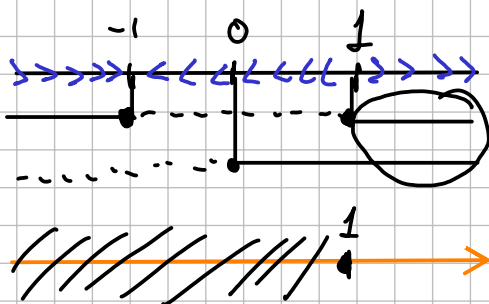
$$1) f(t) = t^2 + |t| - 1$$

$$2) p(t) = t^2 + |t| - 1 - t$$

3) segno di $f(t)$

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ t^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

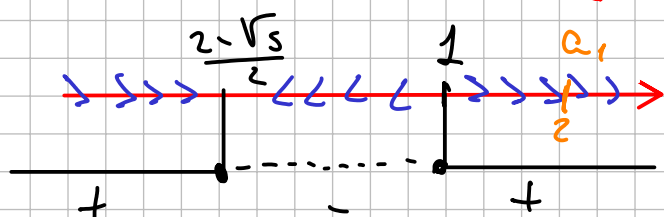
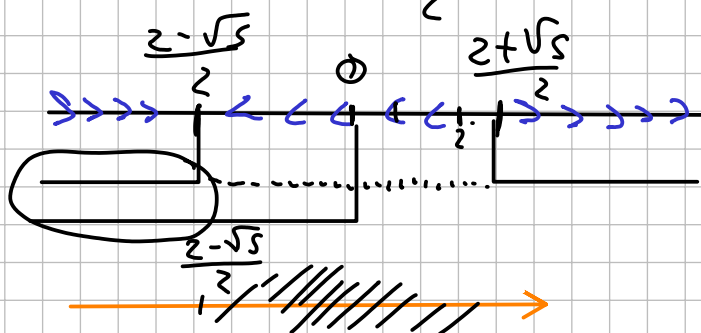
$$t^2 - 1 = 0; t = \pm 1$$



$$\begin{cases} t < 0 \\ t^2 - 2t - 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$t^2 - 2t - 1 = 0; \Delta = 4 - 4(-1) = 5$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{2 + \sqrt{5}}{2} \\ t_2 = \frac{2 - \sqrt{5}}{2} \end{array} \right\} \geq 0$$



SEGNO

PROP. $1 \leq a_1 < +\infty \Rightarrow 1 \leq a_{n+1} < +\infty \dots$

$$f(1) = 1^2 + |1| - 1 = 1$$

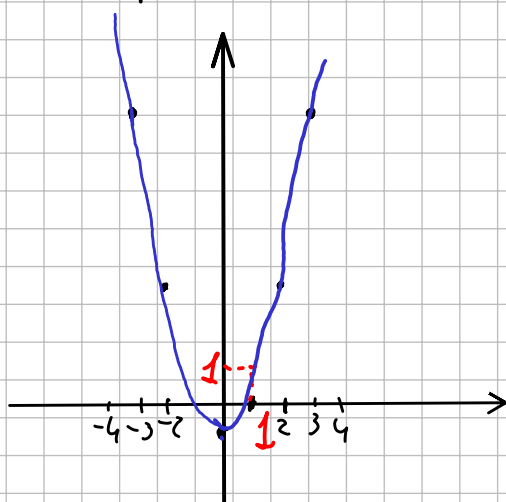
$$4) f(t) \quad a_{n+1} = a_n^2 + |a_n| - 1$$

$$2^2 + 2 - 1 = 5$$

$$3^2 + 3 - 1 = 11$$

$$4^2 + 4 - 1 = 15$$

$$(-2)^2 + |-2| - 1 = 5$$



$$\boxed{\begin{array}{ll} 1 \leq a_1 < +\infty & a_1 \rightarrow +\infty \\ 1 \leq a_{n+1} < +\infty & a_{n+1} \rightarrow +\infty \end{array}}$$

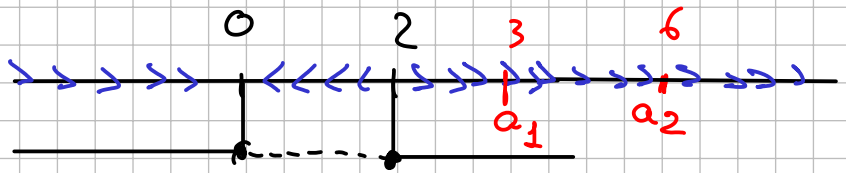
Esercizio 3. Calcolare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n^2 - a_n \end{cases}$$

$$g(t) = t^2 - t \quad f(t) = t^2 - 2t$$

$$f(t) \geq 0 \quad t^2 - 2t \geq 0 ; \quad t(t-2) \geq 0$$

$t=0 \quad t=2$



$$3^2 - 3 = 6$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2 \leq a_n < +\infty, a_n \rightarrow +\infty \\ 2 \leq a_{n+1} < +\infty, a_{n+1} \rightarrow +\infty \end{array}}$$

Esercizio 3. Calcolare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n^2 + 1}{4a_n} \end{cases}$$

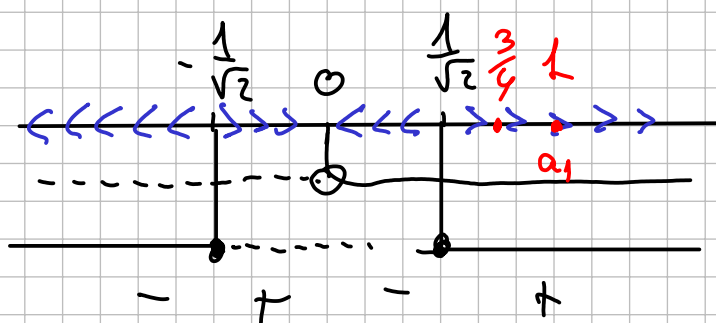
$$f(t) = \frac{2t^2 + 1}{4t}$$

$$f(t) = \frac{2t^2 + 1}{4t} - t$$

$$f(t) \geq 0$$

$$\frac{-2t^2 + 1}{4t} \geq 0$$

$$-2t^2 + 1 \geq 0, \quad 4t \geq 0 \Rightarrow t > 0$$



$$a_{n+1} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} < 1$$

$$\frac{3}{4} > \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{9}{16} > \frac{1}{2}, \quad 18 > 16$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a_{n+1} < +\infty, \quad a_{n+1} \rightarrow +\infty$$

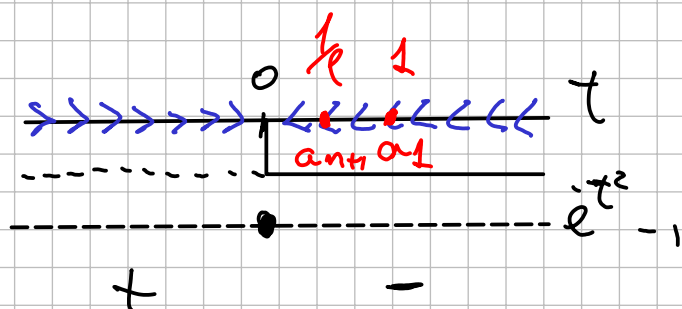
Esercizio 3. Determinare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n e^{-a_n^2} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$$f(t) = t e^{-t^2} \quad \begin{cases} f(t) = t e^{-t^2} - t \\ \hookrightarrow f(t) = t(e^{-t^2} - 1) \end{cases}$$

$$f(t) \geq 0 \quad t(e^{-t^2} - 1) \geq 0$$

$$t=0 \quad ; \quad (e^{-t^2} - 1) \rightarrow \frac{1}{e^2} - 1 \rightarrow \text{sempre negativo e si annulla in } 0$$



$$f(t) \text{ calcolata in } a_1, \text{ cioè } 1. \quad \left| a_{n+1} = a_n e^{-a_n^2} \right|$$

$$1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$0 \leq a_{n+1} < +\infty$$

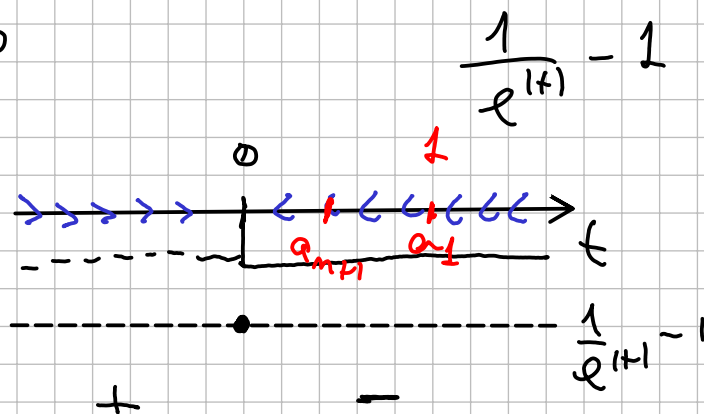
$$a_{n+1} \rightarrow 0$$

Esercizio 3. Determinare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n e^{-|a_n|} \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$f(t) = t e^{-|t|} \quad p(t) = t(e^{-|t|} - 1)$$

$p(t)$ segno



Calcolo a_{n+1} con a_1 .

$$0 < \frac{1}{e^{1+1}} < 1$$

$$0 < a_{n+1} < 1 \quad a_{n+1} \rightarrow 0$$

Esercizio 3. Determinare il limite della successione

$$\begin{cases} a_1 = 1/3 \\ a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2a_n}{3} \end{cases} \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

$$f(t) = \frac{t^2 + 2t}{3}$$

$$p(t) = \frac{t^2 - t}{3}$$

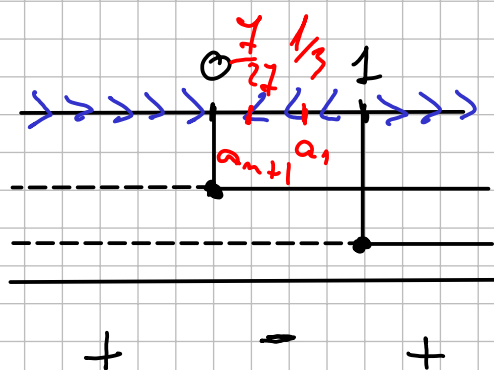
$$p(t) \geq 0$$

$$\frac{t(t-1)}{3} \geq 0$$

$$t \geq 0$$

$$3 \geq 0 \text{ sempre}$$

$$t \geq 1$$



$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{9} + \frac{2}{3}}{3} = \frac{1+6}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{27}$$

$$0 \leq a_{n+1} \leq 1 \quad a_{n+1} \rightarrow 0$$