Inversa

A invertibile $\iff$ $\det A \neq 0$

$\exists A^{-1}$, $|A \cdot A^{-1}| = |I|$

$\downarrow$

Binet

$$\boxed{\underset{\neq 0}{|A|}} \cdot \underset{\neq 0}{|A^{-1}|} = 1$$

$\hookrightarrow$ c.v.d.

$\det A \neq 0 \longrightarrow$ A è invertibile

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{ij}^{T}$ dove $A \cdot A^{-1} = I$

$$\frac{1}{\det A} \cdot A_{ij}^{T} \cdot A = I$$

$$\frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \overset{\det A}{\underset{\text{per Laplace}}{A_{11} \cdot a_{11} + A_{21} \cdot a_{21}}} & \overset{0}{A_{11} \cdot a_{12} + A_{21} \cdot a_{22}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A è invertibile c.v.d

Rouchè-Capelli n.1

Sist. DET. $\Longleftrightarrow \rho(A) = \rho(A,B)$

$\Longrightarrow$

NOTAZIONE

$V = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n, B) \qquad W = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$

In generale $\left\{ \begin{array}{l} \dim W \leq \dim V \\ W \subseteq V \end{array} \right\} \rho(A) \leq \rho(A,B)$

PER IPOTESI Sist. DET. quindi $\exists$ n-upla $S = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \dots + a_{mn}\alpha_n = b_m \end{cases}$$

$C_1 \qquad C_2 \qquad C_n \qquad B$

Scrivo in forma SEMICOMPATTA

$C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \dots + C_n\alpha_n = B$ allora B è C.L. delle $C_1 \dots C_n$.

Quindi V era $V = (\underbrace{C_1 \dots C_n}_{W}, \underbrace{\cancel{B}}_{C.L.})$

$V = W$

$\Downarrow$

$\rho(A,B) = \rho(A)$ c.v.d.

$\Longleftarrow \rho(A) = \rho(A,B) \Longrightarrow$ Sist. DET.

NOTAZ. $V = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n, B) \qquad W = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$

Per ipotesi $\rho(A) = \rho(A,B)$ quindi $\dim V = \dim W$ ma c'è B di diverso

B deve essere C.L. delle colonne.

$B = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \dots + C_n\alpha_n$ con $S = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$

Per definizione che è soluzione

c.v.d.

Teorema che usa Steiniz

Tutte le basi hanno lo stesso num. di vettori

Prendo 2 Basi, B_1 e B_2

$B_1 \begin{cases} \text{Generatori} \\ \text{L.I.} \end{cases}$ $B_2 \begin{cases} \text{Generatori} \\ \text{L.I.} \end{cases}$ dove $B_1 = \{v_1 \dots v_n\}$, $B_2 = \{v_1 \dots v_p\}$

1) Per Steiniz $n \geq p$
2) " " $p \geq n$

solo $n = p$, $B_1 = n$, $B_2 = p$ c.v.d.

Cramer

SIST. DET $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$ e $x_i = \dfrac{|B_i|}{|A|}$

$\Longrightarrow$ Per R.C. n_2 ho 1 soluz., cioè $\infty^{n-\rho} = \infty^0$

$n - \rho = 0 \to n = \rho$ (RANGO MAX, $\det A \neq 0$) c.v.d.

$\Longleftarrow$ $\det A \neq 0 \to$ sist. determinato (SOL. UNICA)

Unicità soluz. Ne prendo 2, S_1 e S_2

sist. lineare $= A \cdot \underset{S_1 \quad S_2}{X} = B \to \begin{cases} A \cdot S_1 = B \\ A \cdot S_2 = B \end{cases}$

$A \cdot S_1 = A \cdot S_2$ per ipotesi $\det A \neq 0$, quindi $\exists A^{-1}$

$\cancel{A^{-1} \cdot A} \cdot S_1 = \cancel{A^{-1} \cdot A} \cdot S_2$ $S_1 = S_2$ c.v.d.

Da $A \cdot X = B \to \cancel{A^{-1} \cdot A} \cdot \boxed{X = A^{-1} B}$

dove $A^{-1} = \frac{1}{\underset{\neq 0}{\det A}} \cdot A_{ij}^{T} \cdot B$

$$x = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \boxed{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} b_2} \\ A_{12} \cdot b_1 + A_{22} \cdot b_2 \end{pmatrix} = \det B_i \quad \text{dove } B_i = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{|B_1|}{|A|} \\ \frac{|B_2|}{|A|} \end{pmatrix} \qquad x_i = \frac{|B_i|}{|A|} \qquad \text{c.v.d.}$$

Teorema sul nucleo e iniettività

f iniettiva $\iff \operatorname{Ker} f \{\underline{0}\}$

$\Rightarrow$ Considero $\underline{v} \in \operatorname{Ker} f$ e DIMOSTRO che $v = \underline{0}$

$\exists v \in \operatorname{Ker} f \mid \begin{cases} \bullet f(v) = 0 \\ \text{ma } \bullet f(\underline{0}) = 0 \end{cases}$ solo se $\underline{v} = 0$ c.v.d.

$\operatorname{Ker} f \{\underline{0}\} \rightarrow f$ iniettiva

$\exists v \in \operatorname{Ker} f : f(v) = \underline{0}$

Prendo 2 $\operatorname{Im} f$ uguali. $f(v_1) = \underline{0}$ $\quad f(v_2) = \underline{0}$

$$f(v_1) = f(v_2) \rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0 \xrightarrow[\text{linearità}]{} f(v_1 - v_2) = 0$$

Per ipotesi $\operatorname{Ker} f \{\underline{0}\}$ quindi $v_1 - v_2 = \underline{0}$ cioè $v_1 = v_2$, iniettiva c.v.d.

TEO: Se $f : V \to V$ e λ è autovalore allora $V_\lambda = Ker f_\lambda$ (DIM)

$V_\lambda = Ker f_\lambda$ dove $f_\lambda = f(v) - \lambda$

$V_\lambda \subseteq Ker f$

$\forall v \in V_\lambda \quad f(v) = \lambda v \to \underbrace{f(v) - \lambda v}_{f_\lambda} = 0 \to f_\lambda(v) = 0$

$\to v \in Ker f_\lambda$ c.v.d

$Ker f_\lambda \subseteq V_\lambda$

$\forall v \in Ker f_\lambda \to f_\lambda(v) = 0 \quad f(v) - \lambda v = 0$

$\Downarrow$

$f(v) = \lambda v$ cioè $v \in V_\lambda$ c.v.d.

Immagine (DIM che è sottospazio

$\forall w \in Im f \quad w_1 + w_2 \in Im f$.

$w_1, w_2 \in Im f \to \exists v_{1,2} \in V \mid f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$

$w_1 + w_2 = f(v_1) + f(v_2) \in Im f$?

linearità $f(v_1 + v_2) \in Im f$

// proviene dalla somma ✓

$\forall w \in Im f, \forall a \in K, \quad a \cdot w \in Im f$!

$w \in Im f = \exists v \in V \mid f(v) = w$

$a \cdot w = a \cdot f(v) \xrightarrow{LIN.} f(a \cdot v) \in Im f$ proviene da V

Nucleo (DIM che è sottospazio

$\forall v \in \ker f \quad v_1 + v_2 \in \ker f.$

$v_1, v_2 \in \ker f = f(v_1) = 0$ e $f(v_2) = 0$

sommo membro a membro

$f(v_1) + f(v_2) = 0 + 0 \rightarrow f(v_1 + v_2) = 0$ la somma finisce in 0.

c.v.d.

$\forall v \in \ker f, \forall a \in K \quad a \cdot v \in \ker f$

$v \in \ker f \rightarrow f(v) = \underline{0}$

$a \cdot v = a \cdot f(v) = a \cdot 0 \xrightarrow{\text{LIN.}} f(av) = 0$ il PROD. finisce in $\underline{0}$.

c.v.d.