FORMULE DI PASSAGGIO.

$P_0 \to P_\infty$

$\boxed{x = \frac{x'}{t'}}$ $\boxed{y = \frac{y'}{t'}}$

COND. ORTOGONALITA'

$\bar{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\bar{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ $>$ $\boxed{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = 0}$

COND. PARALLELISMO

$\bar{v}_1 = (l_1, m_1, n_1)$, $\bar{v}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ $>$ $\boxed{\bar{v}_1 = \lambda \bar{v}_2} \to \bar{v}_1 = (\lambda l_2, \lambda m_2, \lambda n_2)$

RETTA $\to$ PARAM. DIRETTORI

$r: \begin{cases} ax+by+c=0 \\ t'=0 \end{cases} \quad \begin{cases} ax'+by'+ct'=0 \\ t'=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \dots \\ \dots \end{cases} \Rightarrow P_\infty(x, y, z, t)$, $t = 0$

$\bar{v}_r = (x, y, z)$

$1 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2 + ax + by + c = 0$ $\boxed{1 \cdot x^2 + y^2 +}$

con centro $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e raggio $r = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c}$

Per studiare una conica si considerino le seguenti entità:
1. Il **determinante di B**, $\det B$;
2. Il **rango di B**, $\rho(B)$;
3. Il **determinante di A**, $\det A$ ottenuto tagliando la terza riga e la terza colonna della matrice B (cioè il complemento algebrico B_{33})
4. La **traccia di A**, $Tr(A) = a_{11} + a_{22}$

Queste quattro grandezze si dicono invarianti ortogonali poichè cambiando sistema di riferimento e quindi cambiando i coefficienti della conica il $\det B, \rho(B), \det A, P.C.(A)$ non variano

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - ac}}{a}, \text{i}$$

- Dato centro e raggio ($r > 0$), la circonferenza ha equazione

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$$

Forma n.2 dell'equazione della circonferenza del piano $z = 0$:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

con centro $C = (-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ e raggio $r = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c}$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0$$ Conica

$B = \begin{pmatrix} a_{11} & xy/2 & x/2 \\ xy/2 & a_{22} & y/2 \\ x/2 & y/2 & a_{33} \end{pmatrix}$ $A = \begin{pmatrix} a_{11} & xy/2 \\ xy/2 & a_{22} \end{pmatrix}$

$|B|$, $\rho(B)$, $|A|$, $TrA = a_{11} + a_{22}$

Iniziamo e calcoliamo il det B.
Se risulta $\det B = 0$

- In tal caso la conica si spezza in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B) < 3$:
  a) se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det A:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

- Vedo se si spezza se è prod. notevole, se posso raccogliere.

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

Altrimenti faccio la matrice dell'equaz. trovata e RIVEDO LA TABELLA

CONICHE $|B| \neq 0$

IPERBOLE/ELLISSE

FORMA RIDOTTA 1.

$$\boxed{\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma}$$

$$\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$$

Se parliamo di ELLISSE O IPERBOLE abbiamo

$$I): \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$$

Determinare α, β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\alpha\beta\gamma, \det A = \alpha\beta$ Da cui

$$\gamma = -\frac{\det B}{\det A}$$

ed α, β si ricavano dal P.C.(A) poichè sono gli autovalori della matrice A. Nell'iperbole e nell'ellisse posso scegliere io chi chiamare α e chi chiamare β basta solo poi essere coerente a questa scelta.

$P_A(T) = \det\begin{pmatrix} a_{11} - T & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - T \end{pmatrix} = 0 \to = 0 <^{\alpha}_{\beta}$

CENTRO

$$\begin{pmatrix} a_{11} & xy/2 & x/2 \\ xy/2 & a_{22} & y/2 \\ \cancel{x/2} & \cancel{y/2} & \cancel{a_{33}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ASSI se $a_{12} \neq 0$ (term. xy)

$m_1 = \frac{a_{11} - \alpha}{a_{12}}$

ASSE 1: $y - y_c = m_1(x - x_c)$

ASSE 2: $y - y_c = -\frac{1}{m}(x - x_c)$

ASSI se $a_{12} = 0$ (term xy)

ASSE 1: $x = x_c$

ASSE 2: $y = y_c$

VERTICI ELLISSE (4)

$V_1, V_3 \begin{cases} \text{ellisse} \\ \text{asse 1} \end{cases}$ / $V_2, V_4 \begin{cases} \text{ellisse} \\ \text{asse 2} \end{cases}$

VERTICI IPERBOLE

$\begin{cases} \text{ASSE 1} \\ \text{fascio} \end{cases}$ oppure $\begin{cases} \text{ASSE 2} \\ \text{fascio} \end{cases}$

Uno dei 2 non ha soluzioni.

PARABOLA

FORMA RIDOTTA 2.

$$\boxed{\beta Y^2 = 2\gamma X}$$

Se parliamo di PARABOLA la sua forma canonica è

$$\beta y^2 = 2\gamma \cdot x$$

$\beta = ?$ $\gamma = ?$

Determinare β, γ.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\gamma \\ 0 & \beta & 0 \\ -\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$\det B = -\beta\gamma^2, \det A = 0$ Da cui

$$\boxed{\beta = TrA, \gamma = +\sqrt{-\frac{|B|}{TrA}}}$$

Abbiamo preso il segno positivo per γ poichè per convenzione scegliamo il verso positivo dell'asse X.

CENTRO PARABOLA $\nexists$

ASSE PARABOLA, è UNICO
NON SI CALCOLA IN GENERALE

ASSE PARABOLA SOLO SE E' PARALLELO ALL'ASSE Y

$y = ax^2 + bx + c$

ASSE $x = x_V$ (vertice)

$V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$

ASSE PARABOLA SOLO SE E' PARALLELO ALL'ASSE X

$y = ax^2 + bx + c$

ASSE $y = y_V$ (vertice)

$V = (-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a})$

2) Studiare il seguente fascio di coniche

$$kx^2 + 2y^2 + 2(k-2)xy + 2y = 0,\ k \in \mathbb{R}$$

Determinare centro e raggio dell'unica circonferenza del fascio.

Iniziamo e calcoliamo il det B.
Se risulta det $B = 0$

- In tal caso la conica si spezza in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B) < 3$:
  a) se $\rho(B) = 2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B) = 1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

Invece se risulta det $B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det A:
  a) se det $A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se det $A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se det $A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

MATRICE CONICA

$$B = \begin{pmatrix} k & k-2 & 0 \\ k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A = \begin{pmatrix} k & k-2 \\ k-2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|B| = -[k] = \det B = -k$$

$\boxed{\text{Se } k=0}$, $\det B = 0$

Metto 0 al posto di k

$$B = \begin{pmatrix} k & k-2 & 0 \\ k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \rho(B) < 3$$

$\rho(B) = 2$ perche $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ (det B)

$\shortparallel$

la conica si spezza in 2 rette. Quali? sost. $k=0$ nel fascio

2) Studiare il seguente fascio di coniche

$$kx^2 + 2y^2 + 2(k-2)xy + 2y = 0,\ k \in \mathbb{R}$$

Determinare centro e raggio dell'unica circonferenza del fascio.

$$\cancel{0x^2} + 2y^2 + 2\underbrace{(0-2)}_{=-2}xy + 2y = 0$$

$$\cancel{2}y^2 - \cancel{4}_{2}xy + \cancel{2}y = 0 \rightarrow y^2 - 2xy + y = 0$$

$$y(y - 2x + 1) = 0$$

$\boxed{y=0}$ r_1

$\boxed{y - 2x + 1 = 0}$ r_2

$\boxed{\text{Se } k=0}$

• Tolgo la condizione, $k \neq 0$
Allora $\det B \neq 0$. II caso della tabelle

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il $\det A$:
a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$;
invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$
allora si tratta di iperbole equilatera

conica irriducibile

$|B| = -k$

$$\det A = \begin{vmatrix} k & k-2 \\ k-2 & 2 \end{vmatrix} = 2k - (k-2)^2$$

3 CASI DI $|A|$: $A > 0$, $A = 0$, $A < 0$

CASO $|A| > 0$, ELLISSE, quando?

$2k - (k-2)^2 > 0$ cioè

$2k - (k^2 + 4 - 4k) > 0$

$\hookrightarrow 2k - k^2 - 4 + 4k > 0$

$\boxed{-k^2 + 6k - 4} > 0 \Rightarrow \boxed{k^2 - 6k + 4 < 0}$

$\Delta = b^2 - 4ac$ oppure

$\frac{\Delta}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{(\frac{b}{2})^2 - ac}}{a},$$

$3 \pm \sqrt{9-4} = \begin{cases} 3+\sqrt{5} \\ 3-\sqrt{5} \end{cases}$

valori interni

$3 - \sqrt{5} < k < 3 + \sqrt{5}$

Reale: $TrA \cdot \underset{-k}{|B|} < 0$

Immaginaria: $TrA \cdot |B| > 0$

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il $\det A$:
a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$;
invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$
allora si tratta di iperbole equilatera

$$\boxed{TrA = a_{11} + a_{22} = k + 2}$$

$(k+2)(-k)<0$

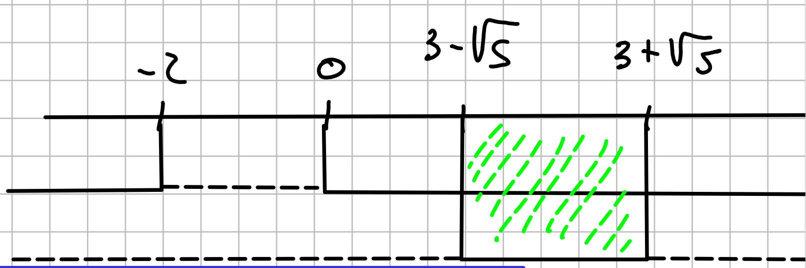
$-k^2-2k<0$

$k^2+2k>0 \rightarrow k(k+2)=0 \begin{cases} k=0 \\ k=-2 \end{cases}$ } ELLISSE $\mathbb{R}$

Valori esterni

$k<-2 \wedge k>0$

$$\begin{cases} k<-2 \wedge k>0 \\ 3-\sqrt{5}<k<3+\sqrt{5} \end{cases}$$



$\boxed{\text{conica è ellisse Reale con } 3-\sqrt{5}<k<3+\sqrt{5}}$

• quando è immaginaria? $\underset{(k+2)}{\underset{\parallel}{TrA}} \cdot \underset{(-k)}{\underset{\parallel}{|B|}} >0$

$(k+2)(-k)>0$

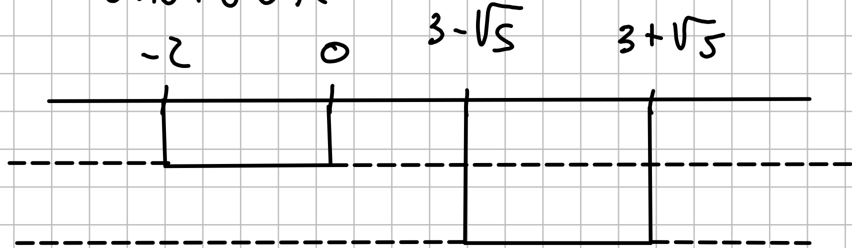
$-k^2-2k>0 \rightarrow \boxed{k^2+2k<0} \rightarrow k^2+2k=0$

$k(k+2)=0 \begin{cases} k=0 \\ k=-2 \end{cases}$ valori interni

$\boxed{-2<k<0}$

sistema con la vecchia condizione

$$\begin{cases} -2<k<0 \\ 3-\sqrt{5}<k<3+\sqrt{5} \end{cases}$$



Ellisse immaginaria non c'è

Caso $|A|=0$, vedo quando è parabola

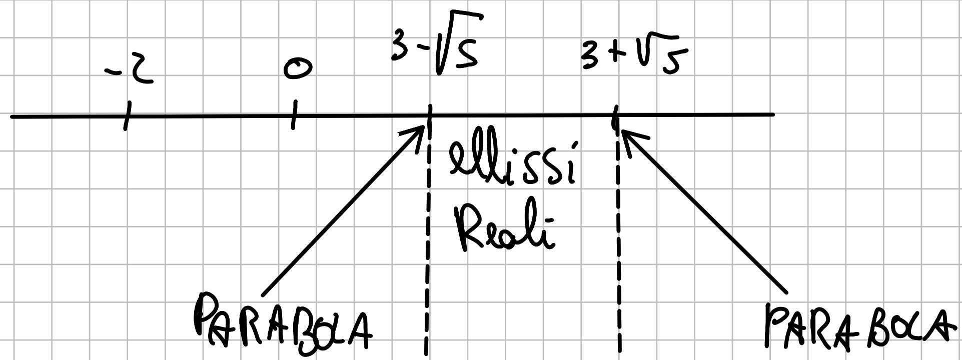
$$\det A = \begin{vmatrix} k & k-2 \\ k-2 & 2 \end{vmatrix} = 2k-(k-2)^2$$

$$|A| = \boxed{-k^2+6k-4} \qquad -k^2+6k-4=0$$

$$k^2-6k+4=0 \qquad \frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$$

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{(\frac{b}{2})^2-ac}}{a},$$

$$\frac{\Delta}{4}=9-4=5 \qquad k_{1,2}=3\pm\sqrt{5} \begin{cases} 3+\sqrt{5} & k_1 \\ 3-\sqrt{5} & k_2 \end{cases} \Big\} \text{PARABOLA}$$



Cerco la circonferenza del fascio (UNICA)

Quando ho circonferenza?

$$B=\begin{pmatrix} k & k-2 & 0 \\ k-2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det A:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11}=a_{22}\neq 0$, $a_{12}=0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A)=0$ allora si tratta di iperbole equilatera

Se $\det B \neq 0$ e $a_{11}=a_{22}$ e $a_{12}=0$

$$\begin{cases} a_{11}=a_{22} \\ a_{12}=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k=2 \\ k-2=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k=2 \\ k=2 \end{cases}$$

PRENDO IL FASCIO e $k=2$

2) Studiare il seguente fascio di coniche

$$kx^2+2y^2+2(k-2)xy+2y=0,\ k\in\mathbb{R}$$

Determinare centro e raggio dell'unica circonferenza del fascio.

$$2x^2+2y^2+2\cancel{(2-2)xy}+2y=0 \qquad \boxed{k=2 \text{ circonferenza}}$$

$$\cancel{2}x^2+\cancel{2}y^2+\cancel{2}y=0 \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+y=0}$$

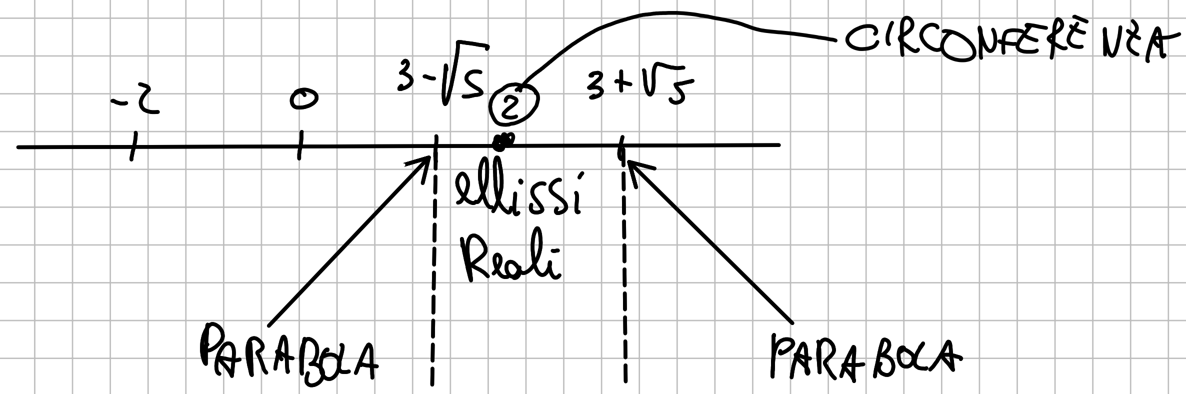
Centro e raggio circonferenza

$1x^2+1y^2+ax+by+c=0$ $\quad 1x^2+y^2+$

con centro $C=(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$ e raggio $r=\sqrt{(-\frac{a}{2})^2+(-\frac{b}{2})^2-c}$

$$C=\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right) \quad \text{raggio}=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}$$

$$\boxed{C=\left(0,-\frac{1}{2}\right) \qquad r=\sqrt{0+\left(\frac{1}{2}\right)^2-0}=r=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}}$$



- Iperbole quando?

$|A|<0$

$\Downarrow$

$$|A|=\boxed{-k^2+6k-4}<0$$

Invece se risulta $\det B \neq 0$

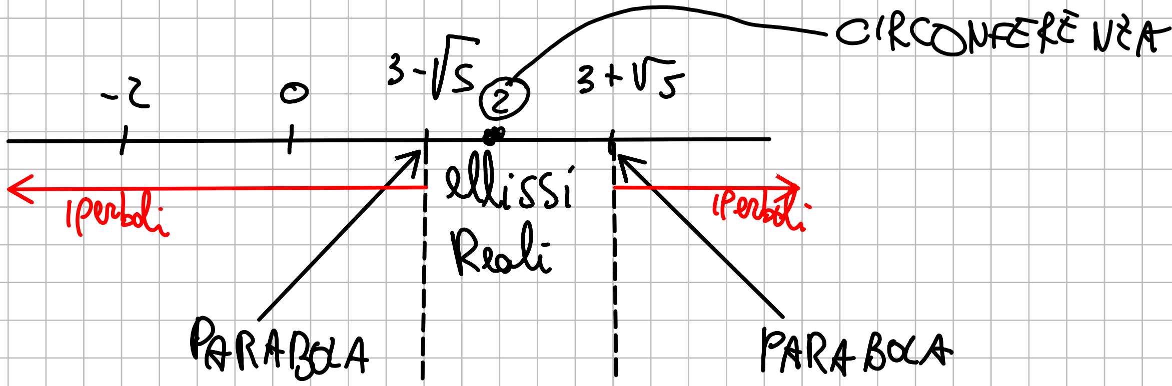
- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il $\det A$:
  a) se $\det A>0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA\cdot\det B<0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA\cdot\det B>0$.
  Infine se $a_{11}=a_{22}\neq 0$, $a_{12}=0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A=0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A<0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A)=0$ allora si tratta di iperbole equilatera

$$k^2-6k+4>0 \rightarrow k^2-6k+4=0 \quad \text{già risolta}$$

$$k_{1,2}=3\pm\sqrt{5} \quad \begin{cases} 3+\sqrt{5} & k_1 \\ 3-\sqrt{5} & k_2 \end{cases}$$

Valori esterni

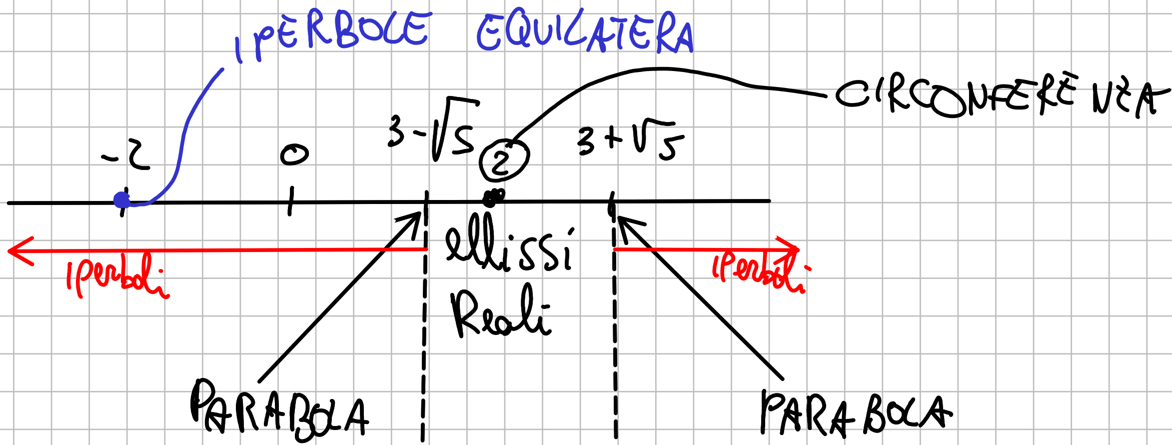
$$k<3-\sqrt{5} \quad e \quad k>3+\sqrt{5}$$



Iperbole equilatera quando? $Tr A = 0$, $Tr A = k+2 = 0$

Per $k+2=0$ è iperbole equilatera

$$\boxed{k=-2}$$



Δ

GEOMETRIA 22/02/21

II

E' assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1 Sono date le rette

$$\mathbf{r}: \begin{cases} x-y+1=0 \\ 2y-z=0 \end{cases}, \quad \mathbf{s}: \begin{cases} y=0 \\ x+2y+z=-1 \end{cases}$$

mostrare che non sono sghembe, e calcolare il coseno dell'angolo individuato dalle due rette.

2 È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, u$. Studiare la seguente conica:

$$3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0.$$

determinando una sua forma canonica, centro e assi di simmetria.

Punto 2.

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il $\det A$:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

$$3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\det B = -20}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -4$$

$$\rho(B) = 3$$

$\det A < 0$ IPERBOLE $\quad TrA = a_{11} + a_{22} = 3$

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 = \gamma \qquad \gamma = -\frac{|B|}{|A|} = -\frac{-20}{-4} = -5$$

α, β sono gli autovalori T ottenuti dal Polin. caratt. di A.

Pol. car. di $A \rightarrow$ $\begin{pmatrix} 3-T & -2 \\ -2 & -T \end{pmatrix} = \det = 0$

$$(3-T)(-T) - 4 = 0$$

$$-3T + T^2 - 4 = 0 \qquad T^2 - 3T - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow 9 - 4(-4) = 9 + 16 = 25$$

$$T_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm 5}{2} \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \dashrightarrow \alpha \\ -\frac{2}{2} = -1 \dashrightarrow \beta \end{cases}$$

$$\boxed{4X^2 - 1Y^2 = -5} \quad \text{FORMA CANONICA}$$

CENTRO

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 0 & 0 \\ \cancel{4} & \cancel{0} & \cancel{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_c - 2y_c + 4 = 0 \\ -2x_c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2y_c = -4 \\ x_c = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y_c = 2 \\ x_c = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Centro} = (0,2)}$$

ASSI $\quad 3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0$

ASSI se $a_{12} \neq 0$ (term. xy)

$m_1 = -\frac{a_{11} - \alpha}{a_{12}}$

ASSE 1: $y - y_c = m_1 (x - x_c)$

ASSE 2: $y - y_c = -\frac{1}{m} (x - x_c)$

$a_{12} \neq 0$

$$m_1 = -\frac{3-4}{-4} = -\left(\frac{1}{4}\right)$$

$m_1 = \frac{1}{4}$

ASSE 1 $\rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}(x - 0)$

$$y - 2 = \frac{1}{4}x \qquad \boxed{y - \frac{1}{4}x - 2 = 0}$$

$-\frac{1}{m} \rightarrow -4$

ASSE 2 $\rightarrow y - 2 = -4(x - 0)$

$$y - 2 = -4x$$

$$\boxed{y + 4x - 2 = 0}$$

Vertici iperbole PROVA 1 con ASSE 2

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + 8x + 5 = 0 \\ y + 4x - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3\frac{(2-y)^2}{4} - \cancel{4}\left(\frac{2-y}{\cancel{4}}\right)y + \frac{\cancel{8}^{2}}{}\left(\frac{2-y}{\cancel{4}}\right) + 5 = 0 \\ 4x = 2 - y \quad x = \frac{2-y}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{12 + 3y^2 - 12y}{16} - (2-y)y + (2-y) + 5 = 0 \\ x = \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{12 + 3y^2 - 12y}{16} - 2y + y^2 + 2 - y + 5 = 0 \\ x = \dots \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{12 + 3y^2 - 12y}{16} - 3y + y^2 + 7 = 0 \\ x = \dots \end{cases}$$

1

$$\begin{cases} \dfrac{12+3y^2-12y^2-48y+16y^2+112}{\cancel{16}}=0 \\ x=\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y^2-48y+124=0 \\ x=\dots \end{cases}$$

NON CREDO PROPRIO

PROVO a TROVARE vertici con ASSE 1

$\begin{cases} \text{iperbole} \\ \text{ASSE 2} \end{cases}$ $\begin{cases} 3x^2-4xy+8x+5=0 \\ y-\frac{1}{4}x-2=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dots \\ -\frac{1}{\cancel{4}}x=4(2-y) \end{cases} \quad \begin{cases} \\ -x=8-4y \end{cases} \quad \begin{cases} 3(4y-8)^2-4(4y-8)y+8(4y-8)+5=0 \\ x=4y-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(16y^2+64-64y)-16y+32y+32y-64+5=0 \\ x=4y-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 48y^2+192-192y-16y+32y+32y-64+5=0 \\ x=\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 48y^2-144y+133=0 \\ x=4y-8 \end{cases}$$

Beh ...

8) Date due rette r_1, r_2 e un punto P_0, determinare la retta t che passa per P_0 ed è ortogonale ad entrambe le rette

8a) $r_1 : \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ 2x-y &= 1 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} y+z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases}, P_0 = (1,0,-3)$

8b) $r_1 : \begin{cases} x-z &= 0 \\ x-y &= 1 \end{cases}, r_2 : \begin{cases} x+z &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}, P_0 = (0,0,3)$

8a) Cerco i vettori direttivi di r_1 e r_2. Come? omogenizzando

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x-y=\cancel{1 \cdot t} \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+2x-z=0 \\ y=2x \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=3x \\ y=2x \quad \forall x \\ t=0 \end{cases}$$

$$P_\infty = \left(\frac{x}{x}, \frac{2x}{x}, \frac{3x}{x}, 0\right) \longrightarrow (1,2,3,0)$$

$$V_{r_1} = (1,2,3)$$

PARAM. DIRETTORI DI R_2. OMOGENIZZO

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=-y \\ x=0 \\ t=0 \end{cases} \quad \forall y \quad P_\infty = (0,y,-y,0)$$

$$V_{r_2} = (0,1,-1)$$

La retta da cercare, $V_t = (l,m,n)$ è:

$$\underbrace{V_t \perp V_{r_1} \qquad V_t \perp V_{r_2}}$$

$$\begin{aligned} (l,m,n)\cdot(1,2,3) &= 0 \\ (l,m,n)\cdot(0,1,-1) &= 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \begin{cases} l+2m+3n=0 \\ m-n=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} l+2n+3n=0 \\ m=n \end{cases} \quad \begin{cases} l+5n=0 \\ m=n \end{cases} \quad \begin{cases} l=-5n \\ m=n \end{cases} \quad \forall n$$

$$V_t = (-5n, n, n)$$

$V_t = (-5,1,1)$ vettore direttivo della retta t.

Eq. retta nello spazio passante per $P_0=(1,0,-3)$

$$\frac{x-\overset{1}{x_0}}{\underset{-5}{l}}=\frac{y-\overset{0}{y_0}}{\underset{1}{m}}=\frac{z-\overset{-3}{z_0}}{\underset{1}{n}}$$

$$\begin{cases}\frac{x-1}{-5}=\frac{y-0}{1}\\ \frac{y-0}{1}=\frac{z+3}{1}\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{x-1}{-5}=y\\ y=z+3\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{x-1}{\cancel{-5}}=-5y\\ y-z-3=0\end{cases}\quad \begin{cases}x-1+5y=0\\ y-z-3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+5y-1=0 & \pi_1\\ y-z-3=0 & \pi_2\end{cases}\qquad t=\pi_1\cap\pi_2$$

retta = Intersezione fra 2 piani.

$$kx^2+2y^2+2(k-2)xy+2y=0,\ k\in\mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix}k & (k-2) & 0\\ (k-2) & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=B \qquad A=\begin{vmatrix}k & k-2\\ k-2 & 2\end{vmatrix}$$

$$\operatorname{Tr}A=k+2$$

$$\det B = k \qquad k=0$$

Iniziamo e calcoliamo il det B.
Se risulta det $B=0$

- In tal caso la conica si spezza in due rette. A questo punto calcoliamo il rango $\rho(B)<3$:
  a) se $\rho(B)=2$ allora la conica si spezza in due rette distinte
  b) se $\rho(B)=1$ allora la conica si spezza in due rette coincidenti.

$$\begin{pmatrix}0 & -2 & 0\\ -2 & \boxed{\begin{matrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{matrix}}\\ 0 & & \end{pmatrix}\ \rho<3$$

$$\det B = -1\neq 0 \quad \rho(B)=2$$

2 rette distinte

$$\cancel{kx^2} + 2y^2 + 2(k-2)xy + 2y = 0,\ k \in \mathbb{R}$$

$k=0$ $\qquad \frac{\overset{\shortparallel}{0}}{-2}$

$\cancel{2}y^2 - \cancel{4}_2 xy + \cancel{2}y = 0$

$y^2 - 2xy + y = 0$ Sono 2 coniche spezzate Γ_1 e Γ

$y(y-2x+1)=0$

$\boxed{y=0}$ r_1

$\boxed{y-2x+1=0 \quad r_2}$

Per $k \neq 0$ è conica irriducibile

$\det A = 2k - (k-2)^2 \qquad (k-2)(k-2) = k^2 - 2k - 2k + 4$

$k^2 - 4k + 4$

$A = \begin{vmatrix} k & k-2 \\ k-2 & 2 \end{vmatrix} \qquad 2k - [k^2 + 4 - 4k]$

$2k - k^2 + 4k - 4$

$-k^2 + 6k - 4$

Invece se risulta $\det B \neq 0$

- In tal caso la conica si dice irriducibile e andremo a calcolare il det A:
  a) se $\det A > 0$ allora la conica è: Ellisse reale se $TrA \cdot \det B < 0$; invece Ellisse immaginaria se $TrA \cdot \det B > 0$.
  Infine se $a_{11} = a_{22} \neq 0$, $a_{12} = 0$ avremo Circonferenza;
  b) se $\det A = 0$ allora la conica è Parabola;
  c) se $\det A < 0$ allora la conica è Iperbole. Se inoltre la $Tr(A) = 0$ allora si tratta di iperbole equilatera

$b^2 - 4ac = 36 - 4(4)$

$36 - 16 = 20$

$k_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{20}}{2}$

$\frac{-6+\sqrt{20}}{2} \to -3 + \frac{\sqrt{20}}{2} \quad (k_1)$

$\frac{-6-\sqrt{20}}{2} \to -3 - \frac{\sqrt{20}}{2} \quad (k_2)$

$\boxed{<0 \text{ sempre}}$