22 febbraio 21

Sia $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alla base canonica è:

$$M(f) = \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix},$$

con $h \in \mathbb{R}$.

1) Studiare Imf e Kerf e determinare le loro equazioni cartesiane al variare di $h \in \mathbb{R}$

2) Per $h = -1$, stabilire se la matrice $M(f)$ è diagonalizzabile.

$\det M(f) = (h+1)^2(h) + (h+1)^2 - [(h+1)^2 + (h+1)^2(h)]$

$\cancel{(h+1)^2(h)} + \cancel{(h+1)^2} - \cancel{(h+1)^2} - \cancel{(h+1)^2(h)} = 0 \quad \forall h$

$\rho(M(f)) < 3$ $\quad \begin{vmatrix} h+1 & 1 \\ 0 & h+1 \end{vmatrix} = (h+1)^2$

$h^2 + 1 + 2h \neq 0$

$(h+1)^2 \neq 0 \rightarrow h \neq -1$

$\dim \mathrm{Im} f = 2 \quad \dim \ker f = 3-2 = 1$

$\mathrm{Im} f = \{C_1, C_2\}$ $\quad \begin{vmatrix} h+1 & 0 & h+1 \\ 1 & h+1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$

$(h+1)^2 z + (h+1)y - [(h+1)y + (h+1)^2 x] = 0$

$(h+1)^2 z + \cancel{(h+1)y} - \cancel{(h+1)y} - (h+1)^2 x = 0$

$\cancel{(h+1)^2} z = \cancel{(h+1)^2} x \quad z = x \quad \forall x, y$

$h \neq -1$

$\mathrm{Im} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x\}$ se $\boxed{h \neq -1}$

$\ker f \rightarrow \begin{pmatrix} h+1 & 1 & h \\ 0 & h+1 & h+1 \\ h+1 & 1 & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (h+1)x + y + hz = 0 \\ (h+1)y + (h+1)z = 0 \\ \cancel{(h+1)x + y + hz = 0} \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{(h+1)}x = \frac{-hz-y}{(h+1)} \\ \cancel{(h+1)}y = -\cancel{(h+1)}z \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{(1-h)z}{(h+1)} \\ y = -z \end{cases} \quad \forall z$$

$$\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{(1-h)z}{(h+1)},\ y = -z\} \text{ se } h = -1$$

$$\boxed{h = -1}$$

$$M(f)\begin{pmatrix} \cancel{h+1} & 1 & \overset{-1}{\cancel{h}} \\ 0 & \cancel{h+1} & \cancel{h+1} \\ \cancel{h+1} & 1 & \underset{-1}{\cancel{h}} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rho < 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \rho < 2 \quad \rho = 1$$

$\dim \operatorname{Im} f = 1 \quad \dim \operatorname{Ker} f = 2$

$$\operatorname{Im} f = \{(C_2\} \to \operatorname{Im} f = \{(1,0,1)\} \text{ se } h = -1$$

Eq. cart !!

$$\operatorname{Ker} f: \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{y - z = 0 \quad \{y = z \quad \forall x, z$$

$$\operatorname{Ker} f: \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\} \text{ se } h = -1$$

2) Per $h = -1$, stabilire se la matrice $M(f)$ è diagonalizzabile.

$$\begin{pmatrix} 0-T & 1 & -1 \\ 0 & 0-T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -T & 1 & -1 \\ 0 & -T & 0 \\ 0 & 1 & -1-T \end{pmatrix} \quad \det = 0$$

$$(-T)^2(-1-T)=0 \quad \begin{cases} -T^2=0 \quad T^2=0 \to T=0 \quad \boxed{m_0=2 \quad g_0=?} \\ -1-T=0 \to T=-1 \quad \boxed{m_{-1}=1 \quad g_{-1}=1} \text{ ok } \checkmark \end{cases}$$

$$g_0=\dim V_0 = \operatorname{Ker} f_0 = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0-0 & 1 & -1 \\ 0 & 0-0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Ker} f$. già fatto. Aveva $\dim \operatorname{Ker} f = 2 = g_0 \overset{?}{=} m_0$

f è SEMPLICE e $M(f)$ è diagonalizzabile per $h=-1$

È assegnato nello spazio un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, u$.

1) Date le rette:

$$r: \begin{cases} z=0 \\ y+z-1=0, \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x-y+z-1=0 \\ x-2y=0 \end{cases}$$

stabilire se sono sghembe. Determinare inoltre il piano π contenente la retta r e passante per $A=(1,0,-1)$.

2) Studiare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione:

$$x^2+ky^2-2kxy+2x+2y+2=0.$$

Determinare la forma canonica della conica che si ottiene per $k=1$.

r, s sghembe?

$\det \neq 0$?

$$\begin{array}{c|cccc} & x & y & z & \text{noto} \\ \hline r & \multicolumn{4}{c}{\multirow{4}{*}{}} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} r \\ r \\ s \\ s \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$$

$\det = a_{13} \cdot A_{13}$

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 -1 +2 -(1)$$

$-1+2-1=0$

$\det = 0 \cdot 1 = 0$

$\det = 0$ RETTE NON SGHEMBE

$\to \pi$ che contiene r che passa per $A=(\underset{x}{1},\underset{y}{0},\underset{z}{-1})$

$F \Rightarrow z + k(y+z-1)=0$

$\uparrow$ fascio

$-1+k(0-1-1)=0$

$-1+0-k-k=0$

$-2k-1=0 \rightarrow \cancel{2}k=-\frac{1}{2}$

$k=-\frac{1}{2}$

Sost. nel fascio

$z+\frac{1}{2}(y+z-1)=0$

$2z+\frac{1}{\cancel{2}}y+\frac{1}{\cancel{2}}z-\frac{1}{\cancel{2}}=0$

$3z+y-1=0 \rightarrow y+3z-1=0$ PIANO π che passa per A.

π contiene r?

P. generico di $r \rightarrow \begin{cases} z=0 \\ y+z-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=0 \\ y+0-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} z=0 \\ y=1 \end{cases} \quad \forall x$

P. generico $=(x,1,0)$

Un punto a caso. $\rightarrow x=1 \rightarrow P_0=(1,1,0)$

P_0. soddisfa π.?

$y-3z-1=0 \rightarrow 1-1=0$ ✓ ok

Studiare, al variare del parametro reale $k \in \mathbb{R}$, le coniche di equazione:

$$x^2+ky^2-2kxy+2x+2y+2=0.$$

Determinare la forma canonica della conica che si ottiene per $k=1$.

$B=\begin{pmatrix} 1 & -k & 1 \\ -k & k & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$

$\hookrightarrow \det B \neq 0$? $\det = \cancel{2k} \cancel{-k} \cancel{-k} -[2k^2+1+k]$

$-2k^2-1-k=0$

$2k^2+k+1=0 \quad 1-4(2)=1-8=-7$ $\nexists k : \det B=0$

CASO 2. $\det B \neq 0$ $\forall k$

Vedo A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$ $\boxed{\det A = k-1}$

3 CASI. $|A| < 0 \rightarrow k-1 < 0 \rightarrow k < 1$

Se $k < 1$, allora $|A| < 0$, ho iperboli

$|A| > 0$, $k > 1$ allora ho ellissi

$|A| = 0$, $k = 1$ allora ho la parabola

Forma canonica parabola, 2° forma

$\boxed{\beta Y^2 = 2\gamma X}$

$\beta = Tr A \rightarrow k+1 = \beta \xrightarrow{k=1} \beta = 2$

$|B|$

$-2k^2 - 1 - k$

$-2 - 1 - 1 = -4$

$\gamma = \pm\sqrt{-\frac{|B|}{Tr A}} = \pm\sqrt{-\frac{-4}{2}} = \sqrt{2}$

$\boxed{2Y^2 = 2\sqrt{2}X}$ FORMA CANONICA PARABOLA.

BONUS

Per $k > 1$ avevo ellissi. Reali o Immaginarie?

$Tr A \cdot \det B = 0$ è immaginaria.

$(k+1) \cdot (-2k^2 - 1 - k) < 0$?

$-2k^3 - k - k^2 - 2k^2 - 1 - k < 0$?

$k > 1$

$-2k^3 - 3k^2 - 2k - 1 < 0$

$2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 < 0 \rightarrow k\left(2k^2 + 3k + 2 + \frac{1}{k}\right) < 0$

$k<0$ (No) (condizione)

$2k^2+3k+2+\frac{1}{k}<0$ (MAI)

Ho ellissi reali.

Per $\boxed{k<1}$ ho iperboli. Equilatere? $\mathrm{Tr} A = 0$?

$k+1=0 \to k=-1$ è equilatera?

Per $k=-1$ l'iperbole è equilatera

$\boxed{k=-1 \text{ e } k<1 \text{ sono condizioni compatibili}}$