ORALE DI ALGEBRA

MATRICE INVERSA, 3 DIMOSTRAZIONI

A invertibile $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$

DIM $\longrightarrow$

Se A invertibile allora $\exists A^{-1}$

$$|A \cdot A^{-1}| = |I| \xrightarrow{\text{Binet}} \underset{\neq 0}{|A|} \cdot \underset{\neq 0}{|A^{-1}|} = 1$$

c.v.d.

$\longleftarrow$ Ip. $\det A \neq 0$ Ts $= A$ invertibile

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}_a^T \qquad A \cdot A^{-1} = I$$

$$\frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \Big(\underbrace{A_{11} \cdot a_{11} + A_{21} \cdot a_{21} \ldots}_{\det A} \quad \underbrace{A_{11} \cdot a_{12} + A_{21} \cdot a_{22} \ldots}_{0} \quad A_{11} \cdot a_{13} + A_{21} a_{23} \ldots$$

LAPLACE 1 Laplace 2.

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow A \text{ è invertibile c.v.d.}$$

DIMOSTRO che Ip: A è invertibile Ts: $|A^{-1}| = \frac{I}{|A|}$

$\exists A^{-1}$ $|A \cdot A^{-1}| = |I|$

$\hookrightarrow$ Binet $\longrightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = |I| \longrightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ c.v.d.

Steinitz: DIM.

$B_1 = \{v_1 \dots v_n\}$ $\qquad$ $B_2 = \{v_1 \dots v_p\}$

$B_1 \begin{cases} \text{Generatori} \\ \text{L.I.} \end{cases}$ $\qquad$ $B_2 \begin{cases} \text{Generatori} \\ \text{L.I.} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} \text{Per steinitz} \quad n \geq p \\ \text{Per steinitz} \quad p \geq n \end{array}\right\}$ $n = p$

$\Downarrow$

$B_1 = B_2$ c.v.d.

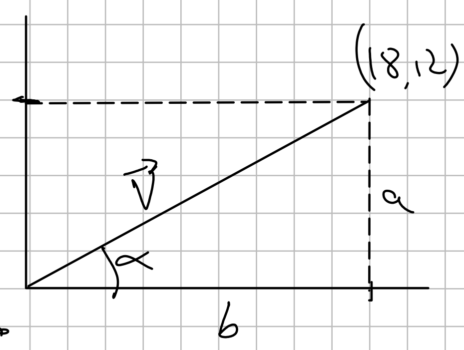
PRODOTTO VETTORIALE E MISTO

Date le componenti cartesiane di un vettore, determinare il modulo del vettore e l'angolo che esso form con l'asse $\vec{x}$

1) $\vec{v} = (18, 12)$
2) $\vec{v} = (2, 0)$
3) $\vec{v} = (0, -3)$
4) $\vec{v} = (1, -1)$

1) $\sqrt{18^2+12^2} = \sqrt{324+144} = \sqrt{468}$ (modulo)

$$\underset{18}{b} \cdot \underset{?}{\cos\alpha} = \underset{\sqrt{468}}{\vec{v}} = \frac{\sqrt{468}}{18} = \dots \quad (\alpha)$$



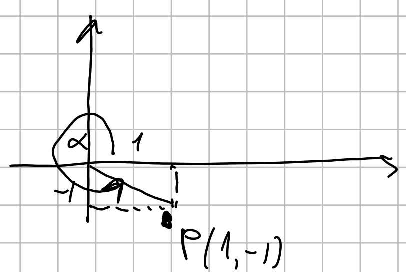
2) $\sqrt{2^2+0^2} = 2 \qquad \cos\alpha = \frac{2}{2} = 1 \to 90°$

3) $(0, -3) = \sqrt{9} = 3 \qquad \alpha = 0°$

4) $(1, -1) = \sqrt{1^2-1^2} = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = -1 \cdot \cos\alpha$

$-\sqrt{2} = \cos\alpha = \arccos(-\sqrt{2})$

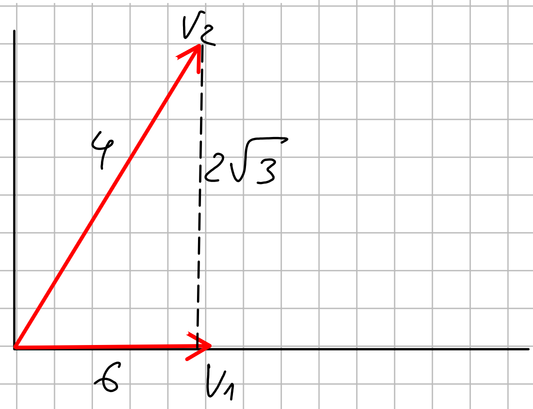


Dati due vettori v_1, v_2 aventi un determinato modulo e che formano fra loro un determinato angolo, determinare il vettore somma $v_1 + v_2$ e il vettore differenza $v_1 - v_2$ mediante le loro componenti

1) $|v_1| = 6, |v_2| = 4, \alpha = 60^o$

2) $|v_1| = 2, |v_2| = 1, \alpha = 30^o$

3) $|v_1| = 3, |v_2| = 1, \alpha = 45^o$



$V_1 = (6, 0)$ $V_2(2, 2\sqrt{3})$

$C_1 = i \cdot \cos(\text{adiacente})$

$C_1 = 4 \cdot \cos 60°$

$C_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} = (2)$

$C_2 = i \, \text{sen}\, \alpha$

$C_2 = 4 \cdot \text{sen}(60)$

$C_2 = \frac{\cancel{4} \cdot \sqrt{3}}{\cancel{2}} = 2\sqrt{3} \quad (V_{2y})$

$\bar{V_1} + \bar{V_2} = (8, 2\sqrt{3})$ $\bar{V_1} - \bar{V_2} = (4, -2\sqrt{3})$

Calcolare il modulo del vettore risultante delle seguenti coppie di vettori

1) $v_1 = (1, -4), v_2 = (0, 2)$

$\bar{V_1} + \bar{V_2} = (1, -2) \xrightarrow{\text{modulo}} \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Calcolare il prodotto scalare delle seguenti coppie di vettori

1) $v_1 = (1, -4), v_2 = (0, 2)$

$\bar{V_1} \cdot \bar{V_2} = 0 - 8 = -8$

Calcolare il prodotto vettoriale delle seguenti coppie di vettori

1) $v_1 = (1, -4), v_2 = (0, 2)$

$V_1 \wedge V_2$

$$\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2K$$

SOTTOSPAZI CRITERI esempi

$V = \mathbb{R}^3 \; \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-y=0, \; x+y+z=0\}$

$T \subseteq V$?
$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y \\ 2y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y \\ z=-2y \end{cases} \qquad \forall y$$

$t_{gen} = (y, y, -2y)$

$t_1 = (y_1, y_1, -2y_1) \qquad t_2 = (y_2, y_2, -2y_2)$

1) $t_1 + t_2 \in T$?

$t_1 + t_2 = (y_1+y_2, \; y_1+y_2, \; -2y_1-2y_2) \in T$?

vedo FORMULA!!

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{y_1}+\cancel{y_2}-\cancel{y_1}-\cancel{y_2} \overset{?}{=} 0 \; ✓ \\ y_1+y_2+y_1+y_2-2y_1-2y_2=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0=0 \\ \cancel{2y_1}+\cancel{2y_2}-\cancel{2y_1}-\cancel{2y_2}=0 \; ✓ \end{cases}$$

2) $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot t_1 \in T$?

$t_1 = (y, y, -2y) \longrightarrow a t_1 = (ay, ay, -2ay) \in T$?

$$\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \begin{cases} ay-ay=0 \; ✓ \\ ay+ay-2ay=0 \; ✓ \end{cases}$$

T è SOTTOSPAZIO DI V

TEOREMA STEINIZ
Tutte le basi hanno lo stesso numero di vettori

$B_1 = \{v_1 \dots v_n\}$ $\quad B_2 = \{v_1 \dots v_p\}$

$B_1 = \begin{cases} \bullet \text{ Generatori} \\ \bullet \text{ L.I.} \end{cases}$ $\quad B_2 = \begin{cases} \bullet \text{ generatori} \\ \bullet \text{ L.I.} \end{cases}$

$\begin{cases} \text{Per steiniz} & n \geq p \\ \bullet \text{ Per steiniz} & n \leq p \end{cases} > \underset{B_1}{n} = \underset{B_2}{p}$

SIST. DET $\longleftrightarrow$ $r(A) = r(A,B)$

IP: sist. ammette soluz. $\quad T_S = r(A) = r(A,B)$

NOTAZIONE:

$V = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n, B)$ $\quad W = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$

Devo dim. che $\underset{\dim W}{r(A)} = \underset{\dim V}{r(A,B)}$

So che $\begin{cases} \bullet \ \dim W \leq \dim V \\ \bullet \ W \subseteq V \end{cases}$

Per ipotesi ho le soluzioni, $S = (\alpha_1 \dots \alpha_n)$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 \dots\dots a_{1n}\alpha_n \\ \vdots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 \dots\dots a_{mn}\alpha_n \end{cases} \quad \Rightarrow \text{semicompatto}$$

$C_1 \quad C_2 \quad \dots$

$\boxed{\text{COMPATTA} \to A \cdot X = B}$

$$C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 \dots C_n\alpha_n = B$$

è c.l.

$$V = \mathcal{L}(\underbrace{C_1 \dots C_n}_{W}, \cancel{B}) \to V = W$$

$\dim V = \dim W$ c.v.d.

$r(A) = r(A,B)$

IP. $r(A) = r(A,B)$ Ts = sist. ammette almeno una sol.

NOTAZIONE.

$$V = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n, B) \qquad W = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$$

Per ipotesi $r(A) = r(A,B) \to \dim V = \dim W$

Quindi B deve essere per forza c.l. delle colonne

$$B = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \dots + C_n\alpha_n$$

$(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ è soluzione (DEF. DI SOLUZIONE)

c.v.d

TEOREMA DI CRAMER

IP: sist. determinato Ts = $\det A \neq 0$

Per R.C. 2 ∞^0 (1 soluz.) $n \times n$

$\infty^{n-\rho} \to n - \rho = 0 \to n = \rho$ (RANGO MAX, $\det A \neq 0$) c.v.d

IP. $\det A \neq 0$ Ts = sist. determinato (soluzione unica ed esiste)

Unicità soluz.

se $\det A \neq 0$ allora $\exists A^{-1}$

In forma compatta ho $A \cdot X = B$

Prendo 2 soluzioni S_1 e S_2

$$A \cdot S_1 = B$$
$$A \cdot S_2 = B$$
$$\cancel{A^{-1}} A \cdot S_1 = \cancel{A^{-1}} A \cdot S_2 \rightarrow \boxed{S_1 = S_2 \text{ Unicità.}}$$

DIMOSTRO l'esistenza della soluzione.

Visto che $\det A \neq 0$ allora lo posso usare nella formula

$X = \frac{1}{\det A} \cdot A_a^T$. Il sistema compatto era $\cancel{A^{-1}} A \cdot X = \cancel{A^{-1}} B$

$$\Downarrow$$
$$X = A^{-1} B$$

$$X = \frac{1}{\det A} \cdot A_a^T \cdot B$$

$$X = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} b_1 + A_{21} \cdot b_2 + A_{31} b_3 \\ A_{12} b_1 + A_{22} b_2 + A_{32} b_3 \\ A_{13} b_1 + A_{23} \cdot b_2 + A_{33} b_3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow \det B_1$ per LaPlace n_1

dove $B_i = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ \vdots & & \\ b_n & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ quindi $x = \begin{pmatrix} \frac{|B_1|}{|A|} \\ \frac{|B_2|}{|A|} \\ \vdots \\ \frac{|B_n|}{|A|} \end{pmatrix}$

$\exists$ soluz. c.v.d.

Imf è sottospazio di W

Presi $w_1, w_2 \in \mathrm{Im} f$, è vero che $w_1 + w_2 \in \mathrm{Im} f$?

Se $\exists\, w_1, w_2$ allora $\exists\, v_1, v_2 \in V \mid f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$.

$w_1 + w_2 \rightarrow f(v_1) + f(v_2) \underset{\uparrow \text{ linearità}}{=} f(v_1 + v_2) \in \mathrm{Im} f$ c.v.d.

Preso $a \in K$ e $w \in \mathrm{Im} f$, è vero che $a \cdot w \in \mathrm{Im} f$?

$\exists\, \underline{v} \in V : f(v) = w$

allora $a \cdot f(v) \in \mathrm{Im} f$? $a \cdot f(v) \overset{\text{linearità}}{=} f(a \cdot v)$ proviene da $a \cdot v$, quindi $\in \mathrm{Im} f$ c.v.d.

Imf. è sottospazio di W.

Kerf è sottospazio di V

$\forall v_1, v_2 \in Kerf, \ v_1+v_2 \in Kerf?$

$f(v_1) = 0_W$
$f(v_2) = 0_W$

SOMMA

$f(v_1)+f(v_2) \underset{\uparrow \text{linearità}}{=} 0_W + 0_W$

$f(v_1+v_2) = 0_W$ proviene dalla somma. $\in Kerf$. ✓

$\forall a \in K$ e $\forall v \in Kerf, \ a \cdot v \in Kerf?$

$f(v) = 0_W$ MOLTIPLICO $a \cdot f(v) \underset{\uparrow \text{linearità}}{=} 0_W \cdot a$

$f(a \cdot v) = 0_W$ proviene dal prodotto.

Kerf è sottospazio.

TEOREMA SUL NUCLEO E INIETTIVITA'
Se f è iniettiva allora Kerf={0}

Ip: f iniettiva Ts: $Kerf = \{0\}$

Iniettiva: $\forall v \in Kerf, \ f(v) = 0$ — possibile solo se $v = 0$
Ma so anche che $f(0) = 0$

Quindi $Kerf = \{0\}$ c.v.d.

Ip. $Kerf\{0\}$ Ip: f iniettiva.

Prendo 2 Imf uguali $f(v_1)$ e $f(v_2)$

$f(v_1) = f(v_2) \longrightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0 \xrightarrow{\text{linearità}} f(v_1 - v_2) = 0$

Quindi $v_1 - v_2 \in Kerf$.

Per Ipotesi $Kerf = \{0\}$ quindi $v_1 - v_2 = 0 \to v_1 = v_2$
e quindi iniettiva. c.v.d.

Vlambda = Kerflambda

$f_\lambda(v) = f(v) - \lambda v$

$I_p = V \to V$, λ autovalore

$T_s = V_\lambda = \ker f_\lambda$

DIMOSTRO $V_\lambda \subseteq \ker f_\lambda$

DATO UN $v \in V_\lambda$ è autovettore, quindi $\underline{v \neq 0}$

$f(v) = \lambda v \longrightarrow \underbrace{f(v) - \lambda v}_{} = \underline{0}$

$\boxed{f_\lambda(v) = \underline{0} \quad \text{quindi} \in \ker f_\lambda \quad \text{c.v.d.}}$

DIMOSTRO $\ker f_\lambda \subseteq V_\lambda$

$f_\lambda = f(v) - \lambda v = \underline{0}$ (app.a $\ker f_\lambda$)

$\hookrightarrow f(v) = \lambda v$ vuol dire che è autovettore, quindi $\in V_\lambda$ c.v.d

$\boxed{V_\lambda = \ker f_\lambda \quad \text{c.v.d}}$

R.C. n.1

sist. det $\Longleftrightarrow \rho(A) = \rho(A,B)$

Ip: Sist. Determinato $\quad$ Ts $\rho(A) = \rho(A,B)$

NOTAZIONI:

$V = \mathcal{L}\{C_1 \dots C_n, B\} \qquad W = \mathcal{L}\{C_1 \dots C_n\}$

So che $\begin{cases} \dim W \leq \dim V \\ W \subseteq V \end{cases} \Rightarrow \boxed{W \leq V}$

Per ipotesi il sist. è determinato quindi $\exists$ Soluz. $S = \{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 \dots a_{1n}\alpha_n = b_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 \dots a_{2n}\alpha_n = b_m \end{cases} \Rightarrow C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \dots + C_n\alpha_n = B$$

$C_1 \quad C_2 \quad \dots \quad C_n \quad B$

B è Comb. lineare dipende dalle colonne

$$V = \mathcal{L}(\underbrace{C_1 \dots C_n}_{W}, \underbrace{\cancel{B}}_{\text{C.L.}}) \to V = W$$

$\dim V = \dim W$

$\rho(A,B) = \rho(A)$

c.v.d

DIM: $\Longleftarrow$ Ip: $\rho(A) = \rho(A,B)$ $\quad$ Ts: $\exists$ almeno una soluz.

NOTAZIONE

$V = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n, B) \qquad W = \mathcal{L}(C_1 \dots C_n)$

Per ipotesi $\rho(A) = \rho(A,B)$ quindi $\dim V = \dim W$

B deve essere c.l. quindi $B = C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \dots + C_n\alpha_n$

ma $(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ è proprio la soluzione (per definizione)

c.v.d.

CRAMER. Sist. Det $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$ e $x_i = \frac{|B_i|}{|A|}$

$\Longrightarrow$

Per R.C.2. avrò ∞^0 soluzioni.

quindi $n - \rho = 0$. Ma se $n = \rho$ il rango è massimo. Allora $\det A \neq 0$

c.v.d.

$\Longleftarrow$ $\det A \neq 0 \rightarrow$ sist. det. (soluz. unica)

Prendo 2 soluz. S_1 e S_2

Sist. compatto è $A \cdot X = B$

quindi $A \cdot S_1 = B$, $A \cdot S_2 = B$ $\rightarrow \cancel{A} \cdot S_1 = \cancel{A} \cdot S_2 \rightarrow S_1 = S_2$ c.v.d.

$A^{-1} A \cdot X = A^{-1} B \rightarrow \boxed{X = A^{-1} B}$ dove $\boxed{A^{-1} = \underbrace{\frac{1}{\det A}}_{\neq 0 \text{ (IPOTESI)}} \cdot A_a^T}$

$$x = \frac{1}{\det A} \cdot \underbrace{A_a^T \cdot B}_{\det B} \rightarrow \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

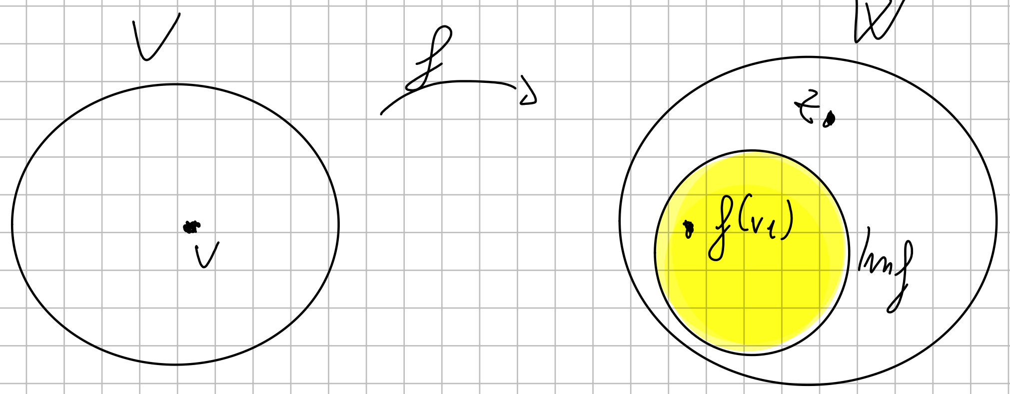
$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 \\ A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + A_{32}b_3 \\ A_{13}b_1 + A_{23}b_2 + A_{33}b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \text{dove } B_i = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

(Laplace)

quindi $x = \begin{pmatrix} \frac{|B_1|}{|A|} \\ \frac{|B_2|}{|A|} \\ \frac{|B_3|}{|A|} \end{pmatrix}$ c.v.d.

$f(v_1) + f(v_2) = f(v_1+v_2)$

$a \cdot f(v_1) = f(av_1)$



V, W K-SPAZI VETT.

$z \notin Imf$

Imf è sotto spazio.

Presi $w_1, w_2 \in Imf$ $\quad w_1 + w_2 \in Imf$?

Se ho w_1 e w_2 allora $\exists\, v_1, v_2 \in V \mid f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$

$f(v_1) + f(v_2) = f(v_1+v_2)$ proviene dalla somma.

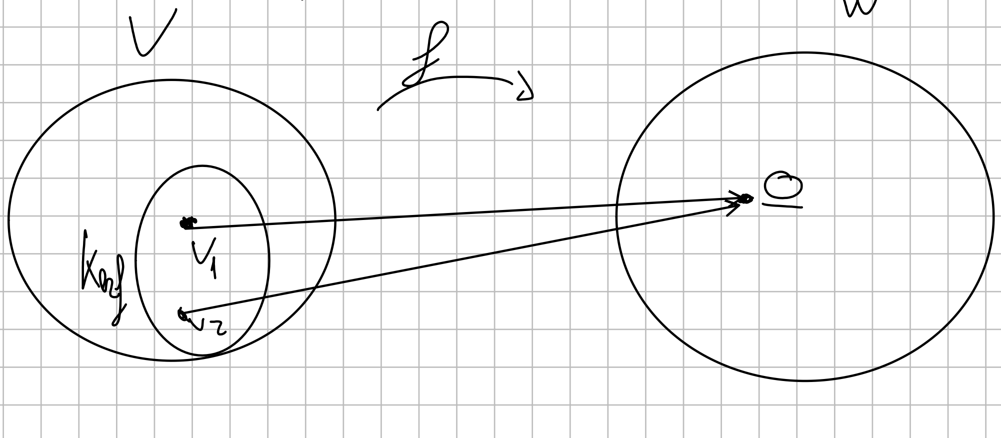
linearità ✓

Preso $\forall a \in K$ e w_1, $a \cdot w \in Imf$?

Se ho w_1 allora $\exists\, v_1 \in V \mid f(v_1) = w_1$

$a \cdot f(v_1) = f(av)$ proviene dal PROD. EST.

Imf SOTTOSPAZIO! ✓



Kerf è SOTTOSPAZIO

Preso $v_1, v_2 \in \ker f$ allora $v_1+v_2 \in \ker f$?

Se $v_1, v_2 \in \ker f$ allora

$f(v_1) = \underline{0}$ e $f(v_2) = \underline{0}$

li sommo membro a membro

$f(v_1) + f(v_2) = \underline{0} + \underline{0}$

$f(v_1+v_2) = \underline{0}$ LA SOMMA va in $\underline{0}$, quindi $\in \ker f$. ✓

Preso $\forall a \in K$ e $v_1 \in \ker f$, $a \cdot v_1 \in \ker f$?

Se $v_1 \in \ker f$ allora $f(v_1) = \underline{0}$

$a \cdot f(v_1) = a \cdot 0$

$\uparrow$ linearità $f(a \cdot v_1) = \underline{0}$ il prod. va in $\underline{0}$, quindi $\in \ker f$. ✓

$\ker f$. è sottospazio.

DIM. Ip: f iniettiva Ts: $\ker f = \{\underline{0}\}$

Se f è iniettiva allora $\forall v \in \ker f$, $f(v) = \underline{0}$

$$\begin{cases} f(v) = \underline{0} \\ f(\underline{0}) = \underline{0} \end{cases}$$ solo se sono uguali, $v = \underline{0}$

$\ker f = \{\underline{0}\}$ Ts: iniettiva

Prendo 2 Img uguali $f(v_1) = f(v_2)$

$f(v_1) - f(v_2) = \underline{0}$

$f(v_1 - v_2) = \underline{0}$ quindi $v_1 - v_2 \in \ker f$.

Ma per ipotesi $\ker f = \{\underline{0}\}$ quindi

$v_1 - v_2 = 0 \rightsquigarrow v_1 = v_2$ quindi iniettivo!

Se ho f:V->V e fisso un autovalore λ $V_\lambda = \ker f_\lambda$

$V_\lambda \subseteq \ker f_\lambda$

Prendo un $\underset{\neq 0}{v} \in V_\lambda$ allora $f(v) = \lambda v$

$\hookrightarrow \underbrace{f(v) - \lambda v}_{f_\lambda(v)} = 0$ $f_\lambda(v) = 0$ quindi $\underline{v} \in \ker f_\lambda$

$\ker f_\lambda \subseteq V_\lambda$ Prendo un $\underline{v} \in \ker f_\lambda$ $f_\lambda(v) = 0$

$f(v) - \lambda v = 0$

$f(v) = \lambda v$ $v \in V_\lambda$ c.v.d