E' assegnata l'applicazione lineare $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tale che:

$$f(x,y,z) = (x-y, -x+hz, x+z, -x+hy)$$

al variare di $h \in \mathbb{R}$.

1) Calcolare la controimmagine $f^{-1}(1,0,0,0)$, al variare di $h \in \mathbb{R}$.

2) E' assegnato l'endomorfismo $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito dalle assegnazioni:

$$\begin{cases} g(1,1,0) = (-2,0,-1) \\ g(0,1,1) = (-1,h,0) \\ g(0,1,0) = (0,-1,0) \end{cases} \quad \text{con } h \text{ parametro reale}$$

Studiare la semplicità di g al variare di $h \in \mathbb{R}$, determinando, nei casi in cui è possibile, una base di autovettori per g.

$$f(e_1) = (1,-1,1,-1)$$
$$f(e_2) = (-1,0,0,h)$$
$$f(e_3) = (0,1,1,0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & h & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x-y=0 \\ -x+z=0 \\ x+z=0 \\ -x+hy=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=y \\ -y+z=0 \rightarrow z=y \\ y+y=0 \rightarrow y=0 \\ -y=0 \end{cases} \quad x=y=z=0$$

$$M(g)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & h & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} B \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$