Corso di Algebra Lineare e Geometria
Matrici. Parte 2

Dott.ssa L. Marino

Università di Catania

23 novembre 2021

Determinante di una matrice

Ad ogni matrice quadrata si può associare un certo numero, che si chiama determinante della matrice. (Algebra Lineare: esercizi svolti, pg 8)

- **Ordine** 2:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

- **Ordine** 3: si usa la regola di Sarrus che consiste nel ricopiare accanto alla matrice le prime due colonne e calcolare allora le tre diagonali di *andata* meno le tre diagonali del *ritorno*:

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{pmatrix} =$$

$$a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - (a_2 b_1 c_3 + a_1 b_3 c_2 + a_3 b_2 c_1)$$

- **Ordine** ≥ 4: si usa il Teorema di Laplace

Complemento Algebrico

- Per introdurre il teorema di Laplace abbiamo bisogno della definizione di complemento algebrico.
  Sia A una matrice quadrata, diremo *complemento algebrico* di posto (i, j), e si denoterà con
  $$A_{ij}$$
  il prodotto $(-1)^{i+j}$ per il determinante della matrice che si ottiene eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna di A:
  $$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det \begin{pmatrix} \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \dots & i,j & \dots \\ \dots & \dots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

Teoremi di Laplace n.1, n.2

- Teorema di Laplace n.1: Sia A una matrice $n \times n$, si ha che il $\det A$ si può ottenere moltiplicando gli elementi di una riga (o di una colonna) per i rispettivi complementi algebrici, e sommando i prodotti ottenuti. Quindi fissata la riga i-esima si ha:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

  o la colonna j-esima si ha:

$$\det A = a_{1j}A_{1j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

- Teorema di Laplace n.2: Sia A una matrice $n \times n$. Fissiamo due differenti righe R_i ed R_j (o colonne), con $i \neq j$, si ha che moltiplicando gli elementi della riga i-esima (colonna) per i complementi algebrici della riga j-esima (o colonna) e sommando si ottiene zero.

$$a_{i1}A_{j1} + \ldots + a_{in}A_{jn} = 0$$

$$a_{1i}A_{1j} + \ldots + a_{ni}A_{nj} = 0$$

Proprietà dei determinanti

- Se B è una matrice ottenuta da A scambiando due righe o due colonne si ha $\det B = -\det A$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Se A ha due righe (o colonne) uguali, o una riga (colonna) nulla si ha $\det A = 0$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

- Se un'intera riga di A è somma di due addendi, il determinante di A è uguale alla somma dei determinanti delle due matrici ottenute da A sostituendo la riga in questione con ciascuno dei due addendi

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Proprietà dei determinanti

- Se B è la matrice ottenuta da A moltiplicando una riga o una colonna per a si ha: $\det B = a \cdot \det A$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- Se A è una matrice quadrata $\det A = \det A^T$
- Se A è una matrice quadrata triangolare $\det A = a_{11} \cdot \ldots a_{nn}$

Proprietà dei determinanti

- Se si effettua una trasformazione su una riga del tipo $R_i \to R_i + \lambda R_j$ (idem per le colonne) allora il determinante non cambia.
  Esempio:
  Sia
  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$
  Effettuiamo una trasformazione $R_3 \to R_3 + 3R_1$ cioè ad ogni elemento di R_3 sostituiamo lo stesso elemento sommato al triplo dell'elemento corrispondente nella riga R_1 e otteniamo
  $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$
  Allora $\det A = \det B$

infatti

$$\det B = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 + 3R_1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} + 3 \cdot 0 = \det A$$

Minori di una matrice

Sia A una matrice $m \times n$. Una *sottomatrice* di A è una matrice B ottenuta intersecando p righe e q colonne di A.
Un **minore di ordine** p di A è il determinante di una sottomatrice quadrata di A avente p righe e p colonne.
Osserviamo che i minori di ordine 1 di una matrice sono i suoi coefficienti.
Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. I minori di ordine 2 di A sono
$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$; $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$; $\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 7$.
Non ci sono minori di ordine > 2.
Esempio: Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ha un solo minore di ordine tre (cioè il suo determinante) e 9 minori di ordine 2 (ognuno si ottiene cancellando una riga arbitraria e una colonna arbitraria di A)

Teorema di Binet

- Teorema di Binet: Siano A e B due matrici quadrate dello stesso ordine . Si ha allora

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$$

  Cioè il determinante del prodotto di due matrici quadrate è uguale al prodotto dei determinanti.
- La dimostrazione è omessa

Matrice ridotta per riga

Una matrice si dice **ridotta per riga** se esiste un elemento della prima riga non nullo sotto il quale gli altri elementi sono tutti nulli, se esiste un elemento della seconda riga non nullo sotto il quale gli altri elementi sono tutti nulli, $\cdots$, se esiste un elemento della penultima riga $\neq 0$. L'ultima riga può essere o non essere tutta nulla

Esempi di matrici ridotte per riga:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice ridotta per colonna

In modo analogo si definisce una matrice ridotta per colonna: Una matrice si dice **ridotta per colonne** se esiste un elemento della prima colonna $\neq 0$ accanto il quale gli altri elementi sono tutti nulli, se esiste un elemento della seconda colonna $\neq 0$ accanto il quale gli altri elementi sono tutti nulli, $\cdots$, se esiste un elemento della penultima colonna $\neq 0$

Esempi di matrici ridotte per colonna:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 23 & 1 & 0 \\ 3 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ridurre per riga

Una matrice si riduce per riga considerando un elemento della prima riga, detto **elemento speciale**$\neq 0$ ed effettuando delle trasformazioni, dette elementari, sulle righe in modo da non alterare il determinante e nè il rango in modo che

$$riga\ R_{elem.da\ sost} \to riga\ R_{elem.da\ sost} - \frac{elem.\ da\ sost.}{elem.\ spec.} riga\ R_{elem.spec.}$$

etc.

Esempio di riduzione

Riduciamo per righe la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \mapsto R_3 - 3R_1]{R_2 \mapsto R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -7 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \mapsto R_3 + \frac{1}{2} R_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{2} & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

La matrice ottenuta è una matrice ridotta per righe.

Riduciamo per colonne la seguente matrice B:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{C_2 \mapsto C_2 - C_1 \\ C_3 \mapsto C_3 - C_1 \\ C_4 \mapsto C_4 - 2C_1 \\ C_5 \mapsto C_5 - \frac{1}{2}C_1}} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 4 & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{C_3 \mapsto C_3 - 2C_2 \\ C_4 \mapsto C_4 - 3C_2 \\ C_5 \mapsto C_5 + C_2}} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 & 7 & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{C_4 \mapsto C_4 + \frac{7}{6}C_3 \\ C_5 \mapsto C_5 + \frac{15}{12}C_3}} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riduciamo, adesso, per righe la matrice C:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_4 \mapsto R_4 + 2R_1 \\ R_5 \mapsto R_5 + R_1}]{\substack{R_2 \mapsto R_2 - 2R_1 \\ R_3 \mapsto R_3 + R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 9 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \mapsto R_3 + 2R_2 \\ R_4 \mapsto R_4 + 3R_2 \\ R_5 \mapsto R_5 - \frac{1}{3}R_2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_4 \mapsto R_4 - \frac{9}{4}R_3 \\ R_5 \mapsto R_4 + \frac{1}{3}R_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questa matrice è ridotta per righe.

Riduciamo C per colonne:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[]{\substack{C_2 \mapsto C_2 - C_1 \\ C_3 \mapsto C_3 - 2C_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -7 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 \mapsto C_3 + C_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -9 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definizione di Rango

Sia A una matrice $m \times n$;
Prima definizione di rango: Diremo **rango di A** e scriveremo

$$\rho(A)$$

l'ordine massimo di un minore non nullo estraibile dalla matrice A. (sono nulli tutti i minori di ordine $> r$).
Seconda definizione di rango: Sia $A \in K^{m,n}$, diremo **rango di A** e scriveremo

$$\rho(A)$$

il numero di righe (o colonne) non nulle della sua matrice ridotta
(Vd pg 11-23 Libro Algebra lineare, esercizi svolti)

Proprietà

Sia A una matrice $m \times n$;

- Esiste un minore non nullo di ordine k estraibile $\Leftrightarrow$ k righe sono l.i
- Esiste un minore non nullo di ordine k estraibile $\Leftrightarrow$ k colonne sono l.i.

Teorema sulle matrici invertibili

- Teorema sulle matrici invertibili: Sia A una matrice quadrata $A \in K^{n,n}$. Allora
  a) A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
  b) Se $\det A \neq 0$ la matrice inversa di A è

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(A_a) = \frac{1}{\det A}(A_{ij})^T$$

  dove la matrice A_a è la matrice aggiunta cioè la matrice dei complementi algebrici trasposta $A_a = (A_{ij})^T$
  c) Se A è invertibile si ha $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$
- Dimostrazione della a):
  Supponiamo A invertibile $\Rightarrow \exists A^{-1} : \ A \cdot A^{-1} = I$ e calcolando i loro determinanti (usiamo Binet) si ha
  $\det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$. Ho provato pure c).

- Viceversa supponiamo $\det A \neq 0$: per fare ciè proveremo che la matrice $\frac{1}{\det A}(Aij)^T$ moltiplicata per A dà la matrice identica I,useremo i due teoremi di Laplace.

Ricordiamo che una matrice quadrata quindi è invertibile se e solo se ha determinante diverso da zero (pg 23)
$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, infatti

$$(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = I$$

Esercizi pag 23-26.