中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题及其参考解答

张祖锦编著

2021 年 3 月 23 日

目录

1　第01届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (每小题 5 分, 共 20 分).

(1) 计算

$$\iint\limits_{D} \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\qquad},$$

其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数，且满足

$$f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-2,$$

则 $f(x)=$ ____.

(3) 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是 ____.

(4) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)} = \mathrm{e}^{y}\ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f' \neq 1$, 则

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \underline{\qquad}.$$

2. (5 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x}+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数.

3. (15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

4. (15 分) 已知平面区域

$$D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\},$$

L 为 D 的正向边界, 试证:

(1) $\displaystyle\oint_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx=\oint_L xe^{-\sin y}\,dy-ye^{\sin x}\,dx$;

(2) $\displaystyle\oint_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$.

5. (10 分) 已知

$$
\begin{aligned}
y_1 &= x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x}, \\
y_2 &= x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}, \\
y_3 &= x\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}
$$

是某二阶常系数非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程.

6. (10 分) 设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点, 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时, $y\geqslant 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c, 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

7. **(15 分)** 已知

$$u_n'(x) = u_n(x) + x^{n-1}\mathrm{e}^x \ (n = 1, 2, \cdots),$$

且 $u_n(1) = \dfrac{\mathrm{e}}{n}$, 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 之和.

8. (10 分) 求 $x \to 1^-$ 时, 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

2　第02届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. (本题共 5 小题, 每小题各 5 分, 共 25 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 设 $x_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$, 其中 $|a|<1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

(2) 求 $\lim\limits_{x \to \infty} \mathrm{e}^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$.

(3) 设 $s>0$, 求 $I_n=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-sx}x^n\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$.

(4) 设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $g(x,y)=f\left(\frac{1}{r}\right)$, 求 $g''_{xx}+g''_{yy}$.

(5) 求直线 $l_1:\begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线

$$l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$$

的距离.

2. (本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数, 并且

$$f''(x)>0,\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0, 使得 $f(x_0)<0$. 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根.

3. (本题共 15 分) 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $(t>-1)$ 所确定. 且

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4(1+t)},$$

其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数, 曲线 $y=\psi(t)$ 与

$$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{3}{2\mathrm{e}}$$

在 $t=1$ 处相切. 求函数 ψ.

4. (本题共 15 分) 设 $a_n > 0, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, 证明:

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha \leqslant 1$, 且 $S_n \to 0\ (n \to \infty)$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

5. (本题共 15 分) 设 l 是过原点、方向为 (α,β,γ) (其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) 的直线, 均匀椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$$

(其中 $0<c<b<a$, 密度为 1) 绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量;

(2) 求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值.

6. (本题共 15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上, 曲线积分

$$\oint_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(y)}{x^4+y^2}$$

的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明:

$$\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0;$$

(2) 求函数 $\varphi(x)$;

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求

$$\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}.$$

3　第03届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. (本大题共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2\left[1-\ln(1+x)\right]}{x}$.

(2) 设 $a_n=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cos\frac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

(3) 求

$$\iint\limits_{D} \operatorname{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
https://mianbaoduo.com/o/gjsx
微信公众号: 跟锦数学
微信: zhangzujin361

(4) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和.

2. (本题共 16 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列, a, λ 为有限数, 求证:

(1) 如果 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

(2) 如果存在正整数 p, 使得 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = \lambda$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$

3. (本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数, 且

$$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0.$$

求证: 在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0, 使得 $f'''(x_0)=3$.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
https://mianbaoduo.com/o/gjsx
微信公众号: 跟锦数学
微信: zhangzujin361

4. (本题 15 分) 在平面上, 有一条从点 $(a, 0)$ 向右的射线, 其线密度为 ρ. 在点 $(0, h)$ (其中 $h>0$) 有一质量为 m 的质点. 求射线对该质点的引力.

5. (本题共 15 分) 设 $z = z(x,y)$ 是由方程

$$F\left(z+\frac{1}{x}, z-\frac{1}{y}\right)=0$$

确定的隐函数, 其中 F 具有连续的二阶偏导数, 且 $F_u(u,v) = F_v(u,v) \neq 0$. 求证: $x^2 z'_x + y^2 z'_y = 0$ 和

$$x^3 z''_{xx} + xy(x+y) z''_{xy} + y^3 z''_{yy} = 0.$$

6. (本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, a, b, c 为常数, Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 记第一型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S.$$

求证: $I=2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)\mathrm{d}u.$

4　第04届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. (本题共 5 小题, 每小题各 6 分, 共 30 分) 解答下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$;

(2) 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$;

(3) 已知函数 $z = u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$, 且 $u''_{xy} = 0$, 确定常数 a 和 b, 使得函数 $z = z(x,y)$ 满足方程 $z''_{xy} - z'_x - z'_y + z = 0$;

(4) 设函数 $u=u(x)$ 连续可微, $u(2)=1$, 且

$$\int_L (x+2y)u\,\mathrm{d}x+(x+u^3)u\,\mathrm{d}y$$

在右半平面上与路径无关, 求 $u(x)$;

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\,\mathrm{d}t$.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

2. (本题 10 分) 计算 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$.

3. (本题 10 分) 求方程 $x^2 \sin \frac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似解, 精确到 0.001.

4. (本题 12 分) 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$, 其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.

5. (本题 12 分) 求最小实数 C, 使得对满足 $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 1$ 的连续函数 $f(x)$, 都有 $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x \leqslant C$.

6. (本题 12 分) 设 $f(x)$ 为连续函数, $t>0$. 区域 Ω 是由抛物面 $z=x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ 所围起来的上半部分. 定义三重积分

$$F(t)=\iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v.$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$.

7. (本题 14 分) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数, 那么

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

5 第05届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. (共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分) 解答下列各题.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$.

(2) 证明广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的.

(3) 设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定.求 $y(x)$ 的极值.

(4) 过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\ (x\geqslant 0)$ 上的点 A 作切线, 使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$, 求点 A 的坐标.

2. (12 分) 计算定积分

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin x\cdot\arctan e^{x}}{1+\cos^{2}x}\,dx.$$

3. **(12 分)** 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

4. (10 分) 设 $|f(x)| \leqslant \pi, f'(x) \geqslant m > 0 \ (a \leqslant x \leqslant b)$. 证明:

$$\left|\int_a^b \sin f(x) \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{m}.$$

5. (14 分) 设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是一个光滑封闭曲面, 方向朝外. 给定第二型曲面积分

$$\boldsymbol{I}=\iint_{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{x}^3-\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}+(2\boldsymbol{y}^3-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{z}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}+(3\boldsymbol{z}^3-\boldsymbol{z})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}.$$

试确定曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$, 使得积分 $\boldsymbol{I}$ 的值最小, 并求该最小值.

6. (14 分) 设 $I_a(r)=\int_C \frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$, 其中 a 为常数, 曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$, 取正向. 求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$.

7. **(14 分)** 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 弱收敛, 求其和.

6 第06届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (共有 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分).

(1) 已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解, 则该方程是 ____.

(2) 设有曲面 $S: z=x^2+2y^2$ 和平面 $L: 2x+2y+z=0$, 则与平面 L 平行的 S 的切平面方程是 ____.

(3) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 所确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ____.

(4) 设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$, 则 $\lim_{n\to\infty}x_n=$ ____.

(5) 已知 $\lim\limits_{x \to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{3}$, 则 $\lim\limits_{x \to 0}\frac{f(x)}{x^{2}}=$ ______.

2. (本题满分 12 分) 设 n 为正整数, 计算

$$I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x.$$

3. (本题满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且存在正常数 A,B 使得 $|f(x)|\leqslant A, |f''(x)|\leqslant B$. 证明: 对任意 $x\in[0,1]$, 有

$$|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}.$$

4. (本题满分 14 分)

(1) 设一球缺高为 h, 所在球半径为 R. 证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$, 球冠的面积为 $2\pi Rh$.

(2) 设球体

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 \leqslant 12$$

被平面 $P: x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω. 记球缺上的球冠为 Σ, 方向指向球外, 求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
https://mianbaoduo.com/o/gjsx
微信公众号: 跟锦数学
微信: zhangzujin361

5. (本题满分 15 分) 设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续, 严格单增, 且存在 $x_n \in [a,b]$ 使得

$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n \, \mathrm{d}x,$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

6. (本题满分 15 分) 设

$$A_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right)$.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
https://mianbaoduo.com/o/gjsx
微信公众号: 跟锦数学
微信: zhangzujin361

7　第07届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分).

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\dfrac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$ ____.

(2) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$$

所决定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数, 且 $xF_u+yF_v\neq 0$. 则

$$xz'_x+yz'_y=\underline{\qquad}.$$

(本小题结果要求不显含 F 及其偏导数)

(3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为 ____.

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}3, & x\in[-5,0),\\ 0, & x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 收敛的值是 ____.

(5) 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为

$$u(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t,$$

则 $u(x)$ 的初等函数表达式是 ____.

2. (本题满分 12 分) 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面, 求其方程.

3. (本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导, 且存在常数 α,β, 使得对于 $\forall\ x\in(a,b)$, 有

$$f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x),$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

4. (本题满分 14 分) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域, 及其和函数.

5. (本题满分 16 分) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

试证:

(1) $\exists\, x_0 \in [0,1]$ 使 $|f(x_0)| > 4$;

(2) $\exists\, x_1 \in [0,1]$ 使 $|f(x_1)| = 4$.

6. (本题满分 16 分) 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数, 且

$$f_{xx}''^2+2f_{xy}''^2+f_{yy}''^2\leqslant M.$$

若 $f(0,0)=0, f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 证明:

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant \frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

8　第08届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (满分 30 分, 每小题 6 分).

(1) 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导, 且 $f(a)\neq 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n = \underline{\qquad}.$$

(2) 若 $f(1)=0$, $f'(1)$ 存在, 则极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\sin x}=\underline{\qquad}.$$

(3) 设 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(1)=2$. 记 $z=f(\mathrm{e}^x y^2)$, 若 $z'_x=z$, 求 $f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式.

(4) 设 $f(x)=\mathrm{e}^{x}\sin 2x$, 则 $f^{(4)}(0)=$ ____.

(5) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行与平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程为 ____.

2. (满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0$, 且当 $x\in(0,1), 0<f'(x)<1$. 试证: 当 $a\in(0,1)$,

$$\left[\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2 > \int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. (满分 14 分) 某物体所在的空间区域为

$$\Omega: x^2 + y^2 + 2z^2 \leqslant x + y + 2z,$$

密度函数为 $x^2 + y^2 + z^2$, 求质量

$$M = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

4. (满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = -\frac{1}{2}.$$

5. (满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且

$$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0.$$

证明在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2, 使得

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}.$$

6. **(满分 14 分)** 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导, 且

$$f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right).$$

用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数.

9 第09届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题共 42 分, 共 6 小题, 每小题 7 分).

(1) 已知可导函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)\cos x + 2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = x + 1,$$

则 $f(x) =$ ____.

(2) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$ ____.

(3) 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且

$$u=x-cy, v=x+cy,$$

其中 c 为非零常数, 则

$$w''_{xx}-\frac{1}{c^2}w''_{yy}=\_\_\_\_.$$

(4) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且

$$f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6,$$

则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4} =$ ____.

(5) 不定积分 $I = \int \frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\,dx =$ ____.

(6) 记曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 围成的空间区域为 V, 则三重积分

$$\iiint\limits_V z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \underline{\qquad}.$$

2. (本题 14 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数, 对任意角度 α, 定义一元函数

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha),$$

若对任何 α 都有 $\dfrac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\dfrac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$, 证明: $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值.

3. (本题 14 分) 设 Γ 为曲线

$$x^2+y^2+z^2=1, x+z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分

$$I=\int_{\Gamma} y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z.$$

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
https://mianbaoduo.com/o/gjsx
微信公众号: 跟锦数学
微信: zhangzujin361

4. (本题 15 分) 设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续, 若对任意实数 t, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 1.$$

证明: $\forall\ a,b,a<b$, 有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a+2}{2}.$$

5. (本题 15 分) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

10 第10届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题满分 24 分, 共 4 小题, 每小题 6 分).

(1) 设 $\alpha \in (0,1)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}]=$ ____.

(2) 若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ \mathrm{e}^{y}+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定, 则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为 ____.

(3) $\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x =$ ____.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$ ____.

2. (本题满分 8 分) 设函数 $f(t)$ 在 $t \neq 0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1) = 0$, 求函数 $f(x^2 - y^2)$, 使得曲线

$$\int_L [y(2 - f(x^2 - y^2))]\, \mathrm{d}x + x f(x^2 - y^2)\, \mathrm{d}y$$

与路径无关, 其中 L 为任一不与直线 $y = \pm x$ 相交的分段光滑曲线.

3. (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$. 证明:

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{4}{3}.$$

4. (本题满分 12 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 V 是由

$$x^2+y^2+(z-2)^2 \geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 9, z \geqslant 0$$

所围成的空心立体.

5. (本题满分 14 分) 设 $f(x, y)$ 在区域 D 内可微, 且

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leqslant M,$$

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 证明:

$$|f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)| \leqslant M|AB|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度.

6. (本题满分 14 分) 证明: 对于连续函数 $f(x)>0$, 有

$$\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. (本题满分 14 分) 已知 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 是正项级数, 且

$$b_{k+1}-b_k \geqslant \delta > 0,\ k=1,2,\cdots,$$

δ 为一正常数. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$$

收敛.

11　第11届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分).

(1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1-\cos x}\right) - \sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)} = \underline{\qquad}.$$

(2) 设隐函数 $y = y(x)$ 由方程 $y^2(x-y) = x^2$ 所确定, 则

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2} = \underline{\qquad}.$$

(3) 定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \_\_\_\_.$$

(4) 已知

$$\mathrm{d}u(x,y)=\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{3x2-2xy+3y^2},$$

则 $u(x,y)=$ ____.

(5) 设 $a, b, c, \mu > 0$, 曲面 $xyz = \mu$ 与曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

相切, 则 $\mu =$ ____.

2. (本题满分 14 分) 计算三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega} \frac{xyz}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 是由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$ 围成的区域在第一卦限的部分.

3. (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 且存在常数 $A>0$, 使得

$$|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$$

在 $[0,+\infty)$ 上成立, 试证明在 $(0,+\infty)$ 上有 $f(x)\equiv 0$.

4. (本题满分 14 分) 计算积分

$$\boldsymbol{I}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

5. (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数, 满足

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n.$$

证明: $c_n>0$, $(n\geqslant 0)$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在, 且等于 $f(x)$ 的最小根.

6. (本题 14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数, 满足

$$3[3+f^2(x)]f'(x)=2[1+f^2(x)]^2\mathrm{e}^{-x^2},$$

且 $f(0)\leqslant 1$. 证明: 存在常数 $M>0$, 使得 $x\in[0,+\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)|\leqslant M$.

12　第12届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分, 共 5 小题).

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1} =$ ____.

(2) 设函数 $f(x)=(x+1)^n e^{-x^2}$, 则 $f^{(n)}(-1)=$ ____.

(3) 设 $y = f(x)$ 是由方程

$$\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$$

确定的隐函数, 且满足 $f(1) = 1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 ____.

(4) 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, 则

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin(x+y)}{x(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\qquad}.$$

(5) 设 $f(x), g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义, 对任意 $x \in U$, $f(x) \neq g(x)$, 且

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = a > 0,$$

则

$$\lim_{x \to 0} \frac{[f(x)]^{g(x)} - [g(x)]^{g(x)}}{f(x) - g(x)} = \underline{\qquad}.$$

2. (本题满分 10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, 且

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}, n \geqslant 1.$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n$.

3. (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $x_0 \in (0,1)$, 使得 $f(x_0)=2-3x_0$;

(2) 存在 $\xi, \eta \in (0,1)$, 且 $\xi \neq \eta$, 使得

$$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4.$$

4. (本题满分 12 分) 已知

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + 2y\varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

其中 f, φ 均为二次可微函数.

(1) 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;

(2) 当 $f = \varphi$, 且

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{x=a} = -by^2$$

时, 求 $f(y)$.

5. (本题满分 12 分) 计算

$$I=\oint_{\Gamma}|\sqrt{3}y-x|\,\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z,$$

曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\x^2+y^2=2z\end{cases}$，从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

6. (本题满分 12 分) 证明

$$f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_{0}^{m}\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x$$

等于 n 的所有因子 (包括 1 和 n 本身) 之和, 其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数, 并计算 $f(2021)$.

7. (本题满分 14 分) 设

$$u_n=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+t^4)^n}\ (n \geqslant 1).$$

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$;

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛;

(3) 证明当 $p \geqslant 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.

13　第12届中国大学生数学竞赛数学B类预赛试题

1. (15 分) 已知椭球面

$$\Sigma_0 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a > b$$

的外切柱面 Σ_ε ($\varepsilon = 1$ 或 -1 平行于已知直线

$$l_\varepsilon : \frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{z-3}{c}.$$

试求与 Σ 交于一个圆周的平面的法方向. 注: 本题中的外切柱面指的的每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面.

2. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$, 证明:

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \leqslant \frac{4}{3}.$$

3. (15 分) 设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 A 的特征多项式.又设 $g(x)$ 为 m 次复系数多项式, $m \geqslant 1$. 证明: $g(A)$ 可逆当且仅当 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
https://mianbaoduo.com/o/gjsx
微信公众号: 跟锦数学
微信: zhangzujin361

4. (20 分) 设 $\boldsymbol{\sigma}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 的一个线性变换, $\mathscr{E}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价:

(1) $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{k}\mathscr{E}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{C}$;

(2) 存在 $\boldsymbol{\sigma}$ 的 $\boldsymbol{n}+1$ 个特征向量: $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_{n+1}$, 这 $\boldsymbol{n}+1$ 个向量中任何 $\boldsymbol{n}$ 个向量均线性无关.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

5. (15 分) 计算广义积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x,$$

这里 (x) 表示 x 的小数部分 (例如: 当 n 为正整数且 $x \in [n, n+1)$ 时, $(x) = x - n$).

6. (20 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 满足对任意 $x \in [0,1]$,

$$\int_{x^2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{x^2 - x^4}{2}.$$

证明: $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{10}$.

14　第01届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (每小题 5 分, 共 20 分).

(1) 计算

$$\iint_D \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \underline{\qquad},$$

其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域. 张祖锦解.设

$$\left.\begin{array}{l} x+y=u \\ \dfrac{y}{x}=v \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{u}{1+v} \\ y=\dfrac{uv}{1+v} \end{array}\right.,$$

则

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{x+y}{x^2} = \frac{(1+v)^2}{u}.$$

故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^{+\infty} \frac{u\ln(1+v)}{\sqrt{1-u}}\cdot\frac{u}{(1+v)^2}\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\,\mathrm{d}u \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\,\mathrm{d}v \\ &\equiv I_1\cdot I_2. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} I_1 &\xlongequal{u=\sin^2\theta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4\theta}{\cos\theta}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\cdot 4!!}{5!!} = \frac{16}{15}, \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_0^{+\infty} \ln(1+v)\,\mathrm{d}\frac{1}{1+v} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v}\cdot\frac{1}{1+v}\,\mathrm{d}v = 1, \end{aligned}$$

我们知原式 $=\dfrac{16}{15}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 设 $f(x)$ 是连续函数, 且满足

$$f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-2,$$

则 $f(x)=$ ____. 张祖锦解.

$$f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-2.$$

两端关于 x 从 0 到 2 积分得

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=8-\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x-4\Rightarrow\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3}.$$

代入原方程得 $f(x)=3x^2-\frac{10}{3}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是 ____. 张祖锦解.据题意, 曲面在 (x,y,z) 处的法向量为

$$n=\{x,2y,-1\}\,//\,\{2,2,-1\}.$$

故

$$\frac{x}{2}=\frac{2y}{2}=\frac{1}{1}\Rightarrow x=2,y=1,z=\frac{x^2}{2}+y^2-2=1.$$

故所求为

$$0=2(x-2)+2(y-1)-(z-1)=2x+2y-z-5.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定, 其中 f 具有二阶导数, 且 $f'\neq 1$, 则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\text{\_\_\_\_}.$$

张祖锦解.$x=e^{y-f(y)}\ln 29$. 两端对 x 求导有

$$\begin{aligned}1&=e^{y-f(y)}[1-f'(y)]y'\ln 29=x[1-f'(y)]y'\\ \Rightarrow&\frac{1}{x}=[1-f'(y)]y'.\end{aligned}$$

两端对 x 再次求导得

$$-\frac{1}{x^2}=-f''(y)y'^2+[1-f'(y)]y''.$$

故

$$y''=\frac{\frac{1}{x^2}-f''(y)y'^2}{1-f'(y)}=\frac{1-f''(y)[xy']^2}{x^2[1-f'(y)]}$$
$$=-\frac{1-f''(y)\frac{1}{[1-f'(y)]^2}}{x^2[1-f'(y)]}=-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (5 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$, 其中 n 是给定的正整数. 张祖锦解.

$$\text{原式}=\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)\right]$$
$$\xlongequal{L'Hospital}\exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}}{1}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}}\cdot\frac{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}+\cdots+n\mathrm{e}^{nx}}{n}\right]$$
$$=\exp\left[\mathrm{e}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right]=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}\mathrm{e}}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, $g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$, A 为常数, 求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性. 张祖锦解.由

$$g(x)\begin{cases}\xlongequal{xt=s}\frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

知

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}\left[xf(x)-\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s\right], & x\neq 0,\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}, & x=0.\end{cases}$$

故

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s\right]$$
$$=A-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0).$$

这表明 g' 在 $x=0$ 处连续. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (15 分) 已知平面区域

$$D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\},$$

L 为 D 的正向边界, 试证:

(1) $\displaystyle\oint_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx=\oint_L xe^{-\sin y}\,dy-ye^{\sin x}\,dx$;

(2) $\displaystyle\oint_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$.

张祖锦解.

(1) 由

$$\begin{aligned}
\oint_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx&\xlongequal{Green}\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,dx\,dy,\\
\oint_L xe^{-\sin y}\,dy-ye^{\sin x}\,dx&\xlongequal{Green}\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})\,dx\,dy\\
&\xlongequal[x\to-x]{y\to-y}\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,dx\,dy
\end{aligned}$$

即知

$$\oint_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx=\oint_L xe^{-\sin y}\,dy-ye^{\sin x}\,dx.$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\oint_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx\\
\xlongequal{Green}&\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,dx\,dy=\pi\int_0^\pi e^{\sin y}\,dy+\pi\int_0^\pi e^{-\sin x}\,dx\\
=&\pi\int_0^\pi(e^{\sin t}+e^{-\sin t})\,dt=2\pi\int_0^\pi\sum_{k=0}^\infty\frac{\sin^{2k}t}{(2k)!}\,dt\\
\geqslant&2\pi\int_0^\pi\left(1+\frac{\sin^2 t}{2}\right)\,dt=2\pi\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5}{2}\pi^2.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (10 分) 已知

$$
\begin{aligned}
y_1 &= xe^x + e^{2x}, \\
y_2 &= xe^x + e^{-x}, \\
y_3 &= xe^x + e^{2x} - e^{-x}
\end{aligned}
$$

是某二阶常系数非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程. 张祖锦解.由题设知 e^{-x}, e^{2x} 是相应二阶常系数齐次微分方程的两个线性无关的解, 而 xe^x 是该二阶常系数非齐次微分方程的特解. 由

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2) = \lambda^2 - \lambda - 2$$

知可设方程式为

$$y'' - y' - 2y = f(x).$$

将特解 $y = xe^x$ 代入得

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (xe^x)'' - (xe^x)' - 2xe^x \\
&= (x+2)e^x - (x+1)e^x - 2xe^x = (1-2x)e^x.
\end{aligned}
$$

故所求为 $y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (10 分) 设抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点, 当 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 时, $y \geqslant 0$, 又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$. 试确定 a, b, c, 使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小. 张祖锦解.

(1) 由抛物线 $y = ax^2 + bx + 2\ln c$ 过原点知 $c = 1$.

(2) 由该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$ 知

$$\frac{1}{3}\int_0^1 (ax^2 + bx)\,dx = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} \Rightarrow b = \frac{2}{3}(1-a).$$

(3) 由该抛物线与 x 轴及直线 $x = 1$ 所围图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 \pi(ax^2 + bx)^2\,dx = \pi\left(\frac{a^2}{5} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{3}\right) \\
&= \pi\left[\frac{a^2}{5} + \frac{a(1-a)}{3} + \frac{4}{27}(1-a)^2\right].
\end{aligned}
$$

由

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a} &= \pi\left[\frac{2a}{5}+\frac{1}{3}-\frac{2a}{3}-\frac{8}{27}(1-a)\right] \\
&= \frac{\pi}{135}(4a+5)\begin{cases} <0, & a<-\dfrac{5}{4} \\ >0, & a>-\dfrac{5}{4} \end{cases}
\end{aligned}
$$

知当

$$a=-\frac{5}{4}\Rightarrow b=-\frac{2}{3}(1-a)=\frac{3}{2}$$

时, V 最小, 为 $\dfrac{\pi}{8}$. 此时,

$$y=-\frac{5}{4}x^2+\frac{3}{2}x=-\frac{1}{4}x(5x-6)\geqslant 0, 0\leqslant x\leqslant 1.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

7. (15 分) 已知

$$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x\ \ (n=1,2,\cdots),$$

且 $u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$, 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 之和. 张祖锦解.由

$$y'=y\Rightarrow(\mathrm{e}^{-x}y)'=0\Rightarrow y=C\mathrm{e}^x$$

及常数变易法知可设

$$u_n(x)=C_n(x)\mathrm{e}^x.$$

代入原方程得

$$C_n'(x)\mathrm{e}^x=x^{n-1}\mathrm{e}^x\Rightarrow C_n(x)=\frac{x^n}{n}+C.$$

故

$$u_n(x)=C\mathrm{e}^x+\frac{x^n}{n}\mathrm{e}^x.$$

又 $u_n(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{n}$, 我们知

$$
\begin{aligned}
u_n(x) &= \frac{x^n}{n}\mathrm{e}^x, \\
\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) &= \mathrm{e}^x\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{e}^x\int_0^x\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^x\ln(1-x), -1\leqslant x<1.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: **zhangzujin361**, 微信公众号: 跟锦数学).

8. (10 分) 求 $x \to 1^-$ 时, 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量. 张祖锦解.当 $0 < x < 1$ 时,

$$\begin{aligned} n \leqslant t \leqslant n+1 &\Rightarrow n^2 \leqslant t^2 \leqslant (n+1)^2 \\ &\Rightarrow x^{(n+1)^2} \leqslant x^{t^2} \leqslant x^{n^2}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} & x^{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} x^{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant x^{n^2} \ (n \geqslant 0) \\ \Rightarrow & \int_0^{\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} x^{(n+1)^2} \leqslant 1 + \int_0^{\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2 \ln\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}} \ (x \to 1^-) \end{aligned}$$

即知

$$\begin{aligned} & \frac{\int_0^{\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}} \leqslant \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}} \leqslant \frac{1+\int_0^{\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}} \\ \Rightarrow & \lim_{x \to 1^-} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}} = 1. \end{aligned}$$

故当 $x \to 1^-$ 时, 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ 等价的无穷大量为 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$. 张祖锦 (微信: **zhangzujin361**, 微信公众号: 跟锦数学).

15 第02届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. (本题共 5 小题, 每小题各 5 分, 共 25 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 设 $x_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$, 其中 $|a| < 1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 张祖锦解.

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a} = \frac{1}{1-a}.$$

张祖锦 (微信: **zhangzujin361**, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$. 张祖锦解.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\mathrm{e}^{-1}\right]^x=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right\}\\
&=\exp\left\{\lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left[\frac{\ln(1+t)}{t}-1\right]\right\}=\exp\left\{\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}\right\}\\
&\xlongequal{\text{L'Hospital}}\exp\left[\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}\right]=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 设 $s>0$, 求 $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}x^n\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$. 张祖锦解.

$$
\begin{aligned}
I_n&=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}x^n\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-sx}=\frac{n}{s}\int_0^{+\infty}x^{n-1}\mathrm{e}^{-sx}\,\mathrm{d}x=\frac{n}{s}I_{n-1}\\
&=\frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}I_{n-2}=\cdots=\frac{n!}{s^n}I_0=\frac{n!}{s^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数, $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $g(x,y)=f\left(\dfrac{1}{r}\right)$, 求 $g''_{xx}+g''_{yy}$. 张祖锦解.由

$$
r'_x=\frac{x}{r},r'_y=\frac{y}{r}
$$

知

$$
\begin{aligned}
g'_x&=f'\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right),\\
g''_{xx}&=-\frac{1}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right)-xf'\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{-3}{r^4}\cdot\frac{x}{r}-\frac{x}{r^3}f''\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{-1}{r^2}\cdot\frac{x}{r}\\
&=\frac{3x^2-r^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{x^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right).
\end{aligned}
$$

同理,

$$
g''_{yy}=\frac{3y^2-r^2}{r^5}f'\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{y^2}{r^6}f''\left(\frac{1}{r}\right).
$$

故

$$
g''_{xx}+g''_{yy}=\frac{1}{r^3}f'\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r^4}f''\left(\frac{1}{r}\right).
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 求直线 $l_1:\begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线

$$l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$$

的距离. 张祖锦解.直线 l_1 的对称式方程为

$$l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}.$$

而 l_1,l_2 的方向向量分别为

$$t_1=\{1,1,0\},t_2=\{4,-2,-1\};$$

l_1,l_2 上分别有点

$$P_1(0,0,0),P_2(2,1,3).$$

而

$$a=\overrightarrow{P_1P_2}=\{2,1,3\}.$$

因此, l_1,l_2 的距离为

$$d=\left|\frac{a\cdot(t_1\times t_2)}{|t_1\times t_2|}\right|=\sqrt{\frac{19}{2}}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数, 并且

$$f''(x)>0,\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0, 使得 $f(x_0)<0$. 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根. 张祖锦解.

(1)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0\\
&\Rightarrow\exists\ X>x_0,\ \text{s.t.}\ \forall\ x\geqslant X,f'(x)>\frac{\alpha}{2}>0\ (\text{保号性})\\
&\Rightarrow\forall\ x\geqslant X,f(x)-f(X)=f'(\xi_x)(x-X)\geqslant\frac{\alpha}{2}(x-X)\\
&\Rightarrow\text{当 } x\geqslant X_0\equiv\max\left\{X-\frac{2}{\alpha}f(X),X\right\}\text{ 时, } f(x)\geqslant 0.
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \beta < 0\\
\Rightarrow &\exists\ Y > -x_0,\ \text{s.t.}\ \forall\ y \leqslant -Y, f'(y) < \frac{\beta}{2} < 0\ (\text{保号性})\\
\Rightarrow &\forall\ y \leqslant -Y, f(y) - f(-Y) = f'(\eta_y)(y+Y) \geqslant \frac{\beta}{2}(y+Y)\\
\Rightarrow &\text{当}\ y \leqslant Y_0 \equiv \min\left\{-Y - \frac{2}{\beta}f(Y), -Y\right\}\text{时},\ f(y) \leqslant 0\,.
\end{aligned}$$

(3) 据连续函数介值定理,

$$\exists\ \xi \in [Y_0, x_0], \eta \in (x_0, X_0),\ \text{s.t.}\ f(\xi) = f(\eta) = 0.$$

(4) 往用反证法证明 f 只有 ξ, η 这个两个零点. 事实上,

$$\begin{aligned}
&f\ \text{还有零点}\ \zeta\\
\Rightarrow &f(\xi) = f(\eta) = f(\zeta) = 0\\
\Rightarrow &f'\ \text{有两个零点}\quad(\text{Rolle})\\
\Rightarrow &f''\ \text{有一个零点, 与}\ f'' > 0\ \text{矛盾, 故有结论}\quad(\text{Rolle})\,.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题共 15 分) 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 2t + t^2 \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $(t > -1)$ 所确定. 且

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{3}{4(1+t)},$$

其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数, 曲线 $y = \psi(t)$ 与

$$y = \int_1^{t^2} \mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u + \frac{3}{2\mathrm{e}}$$

在 $t = 1$ 处相切. 求函数 ψ. 张祖锦解.

(1) 由

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\psi'(t)}{2+2t},$$

$$\frac{3}{4(1+t)} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\mathrm{d}x} = \frac{\left[\frac{\psi'(t)}{2+2t}\right]'}{x'(t)} = \frac{\psi''(t)(2+2t) - 2\psi'(t)}{(2+2t)^3}$$

知

$$
\begin{aligned}
&(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)=3(1+t)^2\\
\Rightarrow&\psi''(t)-\frac{\psi'(t)}{1+t}=3(1+t)\\
\Rightarrow&u'(t)-\frac{u(t)}{1+t}=3(1+t)\ \ (u=\psi').
\end{aligned}
$$

(2) 先求解齐次方程

$$
\begin{aligned}
u'(t)-\frac{u(t)}{1+t}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}u(t)}{u(t)}=\frac{\mathrm{d}t}{1+t}&\\
\Rightarrow u(t)=C(1+t).&
\end{aligned}
$$

由常数变易法知可设 $\psi'=u=C(t)(1+t)$. 代入第 1 步得

$$
C'(t)(1+t)=3(1+t)\Rightarrow C(t)=3t+C.
$$

故

$$
\begin{aligned}
\psi'&=u=(3t+C)(1+C)=3t^2+(C+3)t+C,\\
\psi&=t^3+\frac{C+3}{2}t^2+Ct+D.
\end{aligned}
$$

(3) 又由曲线 $y=\psi(t)$ 与

$$
y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u+\frac{3}{2\mathrm{e}}
$$

在 $t=1$ 处相切知

$$
\psi(1)=\frac{3}{2\mathrm{e}},\psi'(1)=\left.\left(\int_0^{t^2}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u\right)'\right|_{t=1}=\left.\left(\mathrm{e}^{-t^4}\cdot 2t\right)\right|_{t=1}=\frac{2}{\mathrm{e}}.
$$

代入第 2 步得

$$
\begin{aligned}
&C=\frac{1}{\mathrm{e}}-3,D=2\\
\Rightarrow&\psi(t)=t^3+\frac{1}{2\mathrm{e}}t^2+\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-3\right)t+2.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题共 15 分) 设 $a_n>0,S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 证明:

(1) 当 $\alpha > 1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha \leqslant 1$, 且 $S_n \to 0\ (n \to \infty)$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

张祖锦解.

(1) 当 $\alpha > 1$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{S_n^{\alpha}}(S_n - S_{n-1}) \\ &< \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\xi_n^{\alpha}}(S_n - S_{n-1})\ \ (S_{n-1} < \xi_n < S_n) \\ &\xlongequal{\text{Lagrange}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1-\alpha}(S_n^{1-\alpha} - S_{n-1}^{1-\alpha}) \leqslant \frac{1}{\alpha - 1} S_1^{1-\alpha} < +\infty.\end{aligned}$$

(2) 当 $\alpha = 1, \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ 时, 对 $\forall\ n$, 由

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} \geqslant \frac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k &= \frac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} \\ &= 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}} \to 1\ \ (p \to +\infty)\end{aligned}$$

知当 p 充分大时,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{a_k}{S_k} > \frac{1}{2}.$$

据 Cauchy 收敛准则即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ 发散.

(3) 当 $\alpha \leqslant 1, \lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ 知

$$n \gg 1 \Rightarrow S_n \geqslant 1 \Rightarrow \frac{a_n}{S_n^{\alpha}} \geqslant \frac{a_n}{S_n}.$$

据第 2 步及比较判别法即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题共 15 分) 设 l 是过原点、方向为 (α, β, γ) (其中 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$) 的直线, 均匀椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

(其中 $0 < c < b < a$, 密度为 1) 绕 l 旋转.

(1) 求其转动惯量;

(2) 求其转动惯量关于方向 (α, β, γ) 的最大值和最小值.

张祖锦解.

(1) 设旋转轴 l 的方向向量为

$$l = \{\alpha, \beta, \gamma\},$$

而椭圆上点 $P(x, y, z)$ 的向径为

$$r = \{x, y, z\},$$

则 P 到 l 的距离的平方为

$$\begin{aligned}
d^2 &= |r|^2 - |r \cdot l|^2 \\
&= x^2 + y^2 + z^2 + (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \\
&= (1 - \alpha^2)x^2 + (1 - \beta^2)y^2 + (z - \gamma^2)z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx.
\end{aligned}$$

故转动惯量为

$$\begin{aligned}
J_l &= \iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1} d^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \\
&\xlongequal{\text{对称性}} \iiint\limits_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1} \left[(1 - \alpha^2)x^2 + (1 - \beta^2)y^2 + (z - \gamma^2)z^2\right] \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z \\
&\xlongequal[z=cw]{x=au, y=bv} abc \iiint\limits_{u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1} \left[(1 - \alpha^2)a^2u^2 + (1 - \beta^2)b^2v^2 + (1 - \gamma^2)c^2w^2\right] \mathrm{d}u \\
&\xlongequal{\text{对称性}} \frac{abc}{3}\left[(1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \beta^2)b^2 + (1 - \gamma^2)c^2\right] \\
&\quad \cdot \iiint\limits_{u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1} (u^2 + v^2 + w^2) \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}w \\
&= \frac{abc}{3}\left[(1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \beta^2)b^2 + (1 - \gamma^2)c^2\right] \int_0^1 r^2 \cdot 4\pi r^2 \,\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi abc}{15}\left[(1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \beta^2)b^2 + (1 - \gamma^2)c^2\right].
\end{aligned}$$

(2) 设

$$L(\alpha, \beta, \gamma, \lambda) = (1 - \alpha^2)a^2 + (1 - \beta^2)b^2 + (1 - \gamma^2)c^2 + \lambda(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1),$$

则由

$$
\begin{aligned}
L_\alpha &= 2\alpha(\lambda - a^2) = 0,\\
L_\beta &= 2\beta(\lambda - b^2) = 0,\\
L_\gamma &= 2\gamma(\lambda - c^2) = 0,\\
L_\lambda &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0
\end{aligned}
$$

知 (α, β, γ 不同时为 0) L 的极值点可能为

$$Q_1(\pm 1, 0, 0, a^2), Q_2(0, \pm 1, 0, b^2), Q_3(0, 0, \pm 1, c^2).$$

比较即知

$$J_{\max} = \frac{4\pi abc}{15}(a^2 + b^2), J_{\min} = \frac{4\pi abc}{15}(b^2 + c^2).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题共 15 分) 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上, 曲线积分

$$\oint_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(y)}{x^4 + y^2}$$

的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2 + y^2 = 1$. 证明:

$$\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4 + y^2} = 0;$$

(2) 求函数 $\varphi(x)$;

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求

$$\oint_L \frac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4 + y^2}.$$

张祖锦解.设

$$P = \frac{2xy}{x^4 + y^2}, Q = \frac{\varphi(x)}{x^4 + y^2}.$$

(1) 设

$$L_1=L\cap\{x\leqslant 2\}\,,L_2=L\cap\{x\geqslant 2\}\,,$$

定向随 L. 并在 L_1 的左边作简单曲线 L_0, 使得其起点与 L_1 相同, 中点亦与 L_1 相同, 并与 L_1 一起包围原点. 则由题意,

$$-\int_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\int_{L_0}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0,$$
$$\int_{L_2}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\int_{L_0}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0.$$

相减即得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\int_{L_2}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0.$$

(2) 类似第 1 步的证明, 我们知对任一不包围原点的简单闭曲线 C,

$$\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0.$$

而由 Green 公式,

$$\begin{aligned}
Q'_x=P'_y&\Rightarrow\frac{(x^4+y^2)\varphi'(x)-4x^3\varphi(x)}{(x^4+y^2)^2}=\frac{2x(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2}\\
&\Rightarrow\begin{cases}\varphi'(x)y^2=-2xy^2\\ x^4\varphi'(x)-4x^3\varphi(x)=2x^5\end{cases}\\
&\Rightarrow\varphi'(x)=-2x\Rightarrow\varphi(x)=-x^2+C.
\end{aligned}$$

(3) 由第 2 步及 Green 公式,

$$\begin{aligned}
\oint_C P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y&\xlongequal{0<\varepsilon\ll 1}\oint_{x^4+y^2=\varepsilon^2}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{x^4+y^2=\varepsilon^2}2xy\,\mathrm{d}x+(-x^2+C)\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{x^4+y^2\leqslant\varepsilon^2}(-4x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\xlongequal{\text{对称性}}0.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

16　第03届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. (本大题共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-\mathrm{e}^2\left[1-\ln(1+x)\right]}{x}$. 张祖锦解.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2[1-\ln(1+x)]}{x}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}^2}{x}+\mathrm{e}^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}\\
&\xlongequal[\text{L'Hospital}]{\text{Lagrange}}\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\xi_x}\left[\frac{2}{x}\ln(1+x)-2\right]}{x}+\mathrm{e}^2\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}\\
&=2\mathrm{e}^2\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\mathrm{e}^2=2\mathrm{e}^2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}+\mathrm{e}^2=0.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdots\cos\dfrac{\theta}{2^n}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. 张祖锦解.若 $\theta=0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$. 若 $\theta\neq0$, 则

$$
\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\theta}{\frac{\sin\frac{\theta}{2^n}}{\frac{\theta}{2^n}}\cdot\theta}=\frac{\sin\theta}{\theta}.
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 求

$$
\iint\limits_D\operatorname{sgn}(xy-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,
$$

其中 $D=\{(x,y);0\leqslant x\leqslant2,0\leqslant y\leqslant2\}$. 张祖锦解.设

$$
\begin{aligned}
D_1&=\left\{(x,y);0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant y\leqslant2\right\},\\
D_2&=\left\{(x,y);\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{x}\right\},\\
D_3&=\left\{(x,y);\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant2,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant2\right\}.
\end{aligned}
$$

则

$$\iint\limits_{D_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

$$\iint\limits_{D_2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \mathrm{d}x \int_0^{\frac{1}{x}} \mathrm{d}y = 2\ln 2,$$

$$\iint\limits_{D_3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{\frac{1}{x}}^{2} \mathrm{d}y = 3 - 2\ln 2.$$

故

$$\text{原式} = \iint\limits_{D_3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2 - 4\ln 2.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的和函数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和. 张祖锦

解.易知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$ 的收敛域为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. 对 $\forall\ x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)t^{2n-2}\Big|_{t=\frac{x}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1}\right)'\Bigg|_{t=\frac{x}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{t}{1-t^2}\right)'\Bigg|_{t=\frac{x}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\frac{1+t^2}{(1-t^2)^2}\Bigg|_{t=\frac{x}{\sqrt{2}}} = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}.$$

进而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}\Bigg|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2+\frac{1}{2}}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{10}{9}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题共 16 分) 设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列, a, λ 为有限数, 求证:

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a.$$

(2) 如果存在正整数 p, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = \lambda$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$

张祖锦解.

(1) 由 Stolz 公式即知结论成立.

(2) 对 $0 \leqslant i \leqslant p-1$, 考虑 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{kp+i}\}_{k=1}^{\infty}$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{kp+i}}{kp+i} \xlongequal{\text{Stolz}} \lim_{k\to\infty}\frac{a_{(k+1)p+i}-a_{kp+i}}{p}=\frac{\lambda}{p}.$$

故对 $\forall\ \varepsilon>0, 0 \leqslant i \leqslant p-1$,

$$\exists\ N_i,\ \text{s.t.}\ \forall\ k \geqslant N_i, \left|\frac{a_{kp+i}}{kp+i}-\frac{\lambda}{p}\right|<\varepsilon.$$

取 $N=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant p}\{pN_i+i\}$, 则

$$\forall\ n \geqslant N, \left|\frac{a_n}{n}-\frac{\lambda}{p}\right|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{p}=\frac{\lambda}{p}$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数, 且

$$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0.$$

求证: 在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0, 使得 $f'''(x_0)=3$. 张祖锦解.由 Taylor 公式, $\exists\ -1<\eta<0<\xi<1,\ \text{s.t.}$

$$1=f(1)=f(0)+f'(0)(1-0)+\frac{f''(0)}{2}(1-0)^2+\frac{f'''(\xi)}{6}(1-0)^2,$$

$$0=f(-1)=f(0)+f'(0)(-1-0)+\frac{f''(0)}{2}(-1-0)^2+\frac{f'''(\eta)}{6}(-1-0)^2.$$

相减得

$$3=\frac{f'''(\xi)+f'''(\eta)}{2}.$$

据连续函数介值定理及

$$\min\{f'''(\xi), f'''(\eta)\} \leqslant \frac{f'''(\xi)+f'''(\eta)}{2} \leqslant \max\{f'''(\xi), f'''(\eta)\}$$

知

$$\exists\ \eta \leqslant x_0 \leqslant \xi,\ \text{s.t.}\ f'''(x_0)=\frac{f'''(\xi)+f'''(\eta)}{2}=3.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题 15 分) 在平面上, 有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线, 其线密度为 ρ. 在点 $(0,h)$ (其中 $h>0$) 有一质量为 m 的质点. 求射线对该质点的引力. 张祖锦解.在 $x\geqslant a$ 处, 微元 $\mathrm{d}x$ 的质量为 $\rho\,\mathrm{d}x$, 其到质点的距离为 $\sqrt{h^2+x^2}$, 而该微元对质点的引力大小为

$$\mathrm{d}F=\frac{Gm\rho\,\mathrm{d}x}{h^2+x^2},$$

方向是从质点指向 x. 将 $\mathrm{d}F$ 分解成水平和垂直两部分:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}F_x&=\frac{Gm\rho\,\mathrm{d}x}{h^2+x^2}\cdot\frac{x}{\sqrt{h^2+x^2}},\\ \mathrm{d}F_y&=\frac{Gm\rho\,\mathrm{d}x}{h^2+x^2}\cdot\frac{-h}{\sqrt{h^2+x^2}}.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}F_x&=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}F_x=Gm\rho\int_a^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\xlongequal{x^2=t}\frac{Gm\rho}{2}\int_{a^2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(h^2+t)^{\frac{3}{2}}}\\ &=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}},\\ F_y&=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}F_y=-Gm\rho h\int_a^{+\infty}\frac{1}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{x=h\tan\theta}-Gm\rho h\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{h^3\sec^3\theta}\cdot h\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &=-\frac{Gm\rho}{h}\left(1-\sin\arctan\frac{a}{h}\right).\end{aligned}$$

引力为

$$\left\{\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}},\frac{Gm\rho}{h}\left(\sin\arctan\frac{a}{h}-1\right)\right\}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题共 15 分) 设 $z=z(x,y)$ 是由方程

$$F\left(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y}\right)=0$$

确定的隐函数, 其中 F 具有连续的二阶偏导数, 且 $F_u(u,v)=F_v(u,v)\neq 0$. 求证: $x^2z'_x+y^2z'_y=0$ 和

$$x^3z''_{xx}+xy(x+y)z''_{xy}+y^3z''_{yy}=0.$$

张祖锦解.

(1) $F\left(x+\frac{1}{x}, z-\frac{1}{y}\right)=0$ 两边分别对 x, y 求偏导得

$$
\begin{aligned}
F_u'\left(z_x'-\frac{1}{x^2}\right)+F_v'z_x'=0,\\
F_u'z_y'+F_v'\left(z_y'+\frac{1}{y^2}\right)=0.
\end{aligned}
$$

故

$$
\begin{aligned}
&z_x'=\frac{F_u'}{x^2(F_u'+F_v')}, z_y'=\frac{-F_v'}{y^2(F_u'+F_v')},\\
&x^2z_x+y^2z_y=0.
\end{aligned}
$$

(2) 由第 1 步,

$$
x^2z_x'+y^2z_y'=0.
$$

关于 x, y 分别求偏导有

$$
\begin{aligned}
x^2z_{xx}''+2xz_x'+y^2z_{xy}''=0,\\
x^2z_{xy}''+2yz_y'+y^2z_{yy}''=0.
\end{aligned}
$$

第 1 式 $\cdot x$ 加上第 2 式 $\cdot y$, 并由第 1 步即知

$$
x^3z_{xx}''+xy(x+y)z_{xy}''+y^3z_{yy}''=0.
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题共 15 分) 设函数 $f(x)$ 连续, a, b, c 为常数, Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 记第一型曲面积分

$$
I=\iint_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S.
$$

求证: $I=2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)\,\mathrm{d}u$. 张祖锦解.

(1) 当 $a=b=c=0$ 时, 由 Σ 的面积为 4π 知结论自明.

(2) 当 a, b, c 不全为 0 时, 设

$$
\xi=\frac{\{a, b, c\}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}},
$$

将其扩充为 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基 ξ,η,ζ, 并设

$$P=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix},$$

则

$$\begin{aligned}
I&=\iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{u^2+v^2+w^2=1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\,\mathrm{d}S\\
&=2\iint\limits_{u^2+v^2\leqslant 1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\
&\left(w=\pm\sqrt{1-u^2-v^2}\Rightarrow\sqrt{1+w_u'^2+w_v'^2}=\frac{1}{w}\right)\\
&=2\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\,\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\,\mathrm{d}v\\
&\xlongequal{v=\sqrt{1-u^2}\sin\theta} 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

17 第04届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. (本题共 5 小题, 每小题各 6 分, 共 30 分) 解答下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$; 张祖锦解.

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\ln k\right]\xlongequal{\text{Stolz}}\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-1}\right]\\
&\xlongequal{\text{Stolz}}\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{2}\right]=\mathrm{e}^0=1.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\ 5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2, 使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$; 张祖锦解.直线 L 过点

$$A(3,-2,2),B(-8,5,-3).$$

而若 π_1 过 $C(4,-3,1)$, 则 π_1 的法向量为

$$n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=4\{-3,-4,1\}.$$

故 π_1 的方程为

$$0=-3(x-4)-4(y+3)+z+1=-3x-4y+z-1,$$

也即 $3x+4y-z+1=0$. 又由 $\pi_1\perp\pi_2$ 知 $\pi_2\parallel n$, π_2 的法向量为

$$\frac{n}{4}\times\overrightarrow{AB}=13\{1,-2,-5\}.$$

π_2 的方程就此求出

$$0=(x-3)-2(y+2)-5(z-2)=x-2y-5z+3.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 已知函数 $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$, 且 $u''_{xy}=0$, 确定常数 a 和 b, 使得函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $z''_{xy}-z'_x-z'_y+z=0$; 张祖锦解.由

$$\begin{aligned}
z'_x&=u'_x\mathrm{e}^{ax+by}+u\mathrm{e}^{ax+by}a=\mathrm{e}^{ax+by}(u'_x+au),\\
z'_y&=\mathrm{e}^{ax+by}(u'_y+bu),\\
z''_{xy}&=\mathrm{e}^{ax+by}b(u'_x+au)+\mathrm{e}^{ax+by}(u''_{xy}+au'_y)=\mathrm{e}^{ax+by}(bu'_x+abu+au'_y)
\end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned}
0&=z'_{xy}-z'_x-z'_y+z\\
&=\mathrm{e}^{ax+by}\left[bu'_x+abu+au'_y-(u'_x+au)-(u'_y+bu)+u\right]\\
&=\mathrm{e}^{ax+by}\left[(b-1)u'_x+(a-1)u'_y+(ab-a-b+1)u\right].
\end{aligned}$$

故 $a=b=1$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 设函数 $u=u(x)$ 连续可微, $u(2)=1$, 且

$$\int_L(x+2y)u\,\mathrm{d}x+(x+u^3)u\,\mathrm{d}y$$

在右半平面上与路径无关, 求 $u(x)$; 张祖锦解.由

$$\int_L(x+2y)u\,\mathrm{d}x+(x+u^3)u\,\mathrm{d}y$$

在右半平面上与路径无关知

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x+u^3)u]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[(x+2y)u]\\
\Leftrightarrow&(x+4u^3)u'=u\Leftrightarrow(x+4u^3)\,\mathrm{d}u=u\,\mathrm{d}x\\
\Leftrightarrow&4u^3\,\mathrm{d}u=u\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}u=u^2\,\mathrm{d}\frac{x}{u}\Leftrightarrow 4u\,\mathrm{d}u=\mathrm{d}\frac{x}{u}\Leftrightarrow\mathrm{d}\left(\frac{x}{u}-2u^2\right)=0\\
\Leftrightarrow&\frac{x}{u}-2u^2=C.
\end{aligned}
$$

又由 $u(2)=1$ 知

$$
C=0\Rightarrow\frac{x}{u}=2u^2\Leftrightarrow u=\sqrt[3]{\frac{x}{2}}.
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\,\mathrm{d}t$. 张祖锦解.当 $x>1$ 时,

$$
\begin{aligned}
\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\,\mathrm{d}t\right|&\leqslant\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}=2\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})\\
&=2\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0\ \ (x\to+\infty).
\end{aligned}
$$

故原式 $=0$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题 10 分) 计算 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$. 张祖锦解.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{分部积分}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-2k\pi}}{5}(1+\mathrm{e}^{2\pi})=\frac{1+\mathrm{e}^{2\pi}}{5(\mathrm{e}^{2\pi}-1)}.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题 10 分) 求方程 $x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$ 的近似解, 精确到 0.001. 张祖锦解.由

Taylor 公式,

$$
\begin{aligned}
&\sin t = t - \frac{\sin(\theta t)}{2}t^2 \ (0<\theta<1)\\
\Rightarrow &\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\sin\frac{\theta}{x}}{2x^2}\\
\Rightarrow &x^2\sin\frac{1}{x} = x - \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{x}\\
\Rightarrow &x = 501 - \frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{x}\ \text{（代入原方程）}\\
\Rightarrow &\begin{cases} |x-501| = \left|\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{x}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow x > 500.5\\ |x-501| < \frac{1}{2x} < \frac{1}{2\cdot 500} = 0.001 \end{cases}\\
\Rightarrow &x = 501\ \text{为满足题设要求的解}.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题 12 分) 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导, 且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$, 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$, 其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距. 张祖锦解.曲线 $y=f(x)$ 在 $p(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$
Y - f(x) = f'(x)(X-x).
$$

令 $Y=0$ 得 $X = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. 故

$$
\begin{aligned}
u &= x - \frac{f(x)}{f'(x)},\\
\lim_{x\to 0} u &= \lim_{x\to 0}\left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right] \xlongequal{\text{L'Hospital}} 0 - \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f''(x)} = 0-0=0.
\end{aligned}
$$

进而

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)u^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3\left[f(0)+f'(0)u+\frac{f''(\theta u)}{2}u^2\right]}{u^3\left[f(0)+f'(0)u+\frac{f''(\tau x)}{2}x^2\right]}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x}{u} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\frac{f(x)}{xf'(x)}} \xlongequal{\text{L'Hospital}} \lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f'(x)+xf''(x)}}\\
&= \frac{1}{1-\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\frac{f''(x)}{\frac{f'(x)-f'(0)}{x}}}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题 12 分) 求最小实数 C, 使得对满足 $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 1$ 的连续函数 $f(x)$, 都有 $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x \leqslant C$. 张祖锦解.

(1)

$$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x \xlongequal{\sqrt{x}=t} \int_0^1 f(t)2t\,\mathrm{d}t \leqslant 2\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = 2.$$

(2) 取 $f_n(x) = (n+1)x^n$, 则

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = 1,\\
&\int_0^1 f_n\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 tf_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\frac{n+1}{n+2} \to 2\ \ (n \to \infty)\,.
\end{aligned}$$

故最小的实数 $C = 2$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题 12 分) 设 $f(x)$ 为连续函数, $t > 0$. 区域 Ω 是由抛物面 $z = x^2 + y^2$ 和球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 所围起来的上半部分. 定义三重积分

$$F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}v.$$

求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$. 张祖锦解.抛物面 $z = x^2 + y^2$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 的交线所在平面为

$$z = g(t) \equiv \frac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}.$$

故

$$\begin{aligned}
F(t) &= \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}v\\
&= \int_0^{g(t)} \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2 \leqslant z} f(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\quad + \int_{g(t)}^{t} \mathrm{d}z \iint_{x^2+y^2 \leqslant t^2 - z^2} f(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{g(t)} \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{z}} f(r^2 + z^2)2\pi r\,\mathrm{d}r + \int_{g(t)}^{t} \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{t^2-z^2}} f(r^2 + z^2)2\pi r\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

故

$$F'(t)=\int_0^{\sqrt{g(t)}} f\left(r^2+g^2(t)\right)2\pi r\,\mathrm{d}r\cdot g'(t)$$

$$+\int_{g(t)}^{t} f(t^2)2\pi\sqrt{t^2-z^2}\frac{t}{\sqrt{t^2-z^2}}\,\mathrm{d}z-\int_0^{\sqrt{t^2-g^2(t)}} f(r^2+z^2)2\pi r\,\mathrm{d}r\cdot g'(t)$$

注意到 $g^2(t)+g(t)=t^2$, 上述第 1,3 个积分抵消, 我们最终得到

$$F'(t)=f(t^2)2\pi[t-g(t)]=\pi t f(t^2)\left[2t+1-\sqrt{1+4t^2}\right].$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

7. (本题 14 分) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 为正项级数, 那么

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

张祖锦解.

(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=A>0$, 则

$$\exists\ N,\ \text{s.t.}\ \forall\ n\geqslant N, \frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\frac{A}{2}.$$

故当 $n\geqslant N$ 时,

$$\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>Aa_{n+1},$$

$$A\sum_{k=N}^{n}a_{k+1}<\sum_{k=N}^{n}\left(\frac{a_k}{b_k}-\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}\right)=\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}<\frac{a_N}{b_N}.$$

这表明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和上界, 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)=B<0$, 则

$$\exists\ N,\ \text{s.t.}\ \forall\ n\geqslant N, \frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}<\frac{A}{2}<0.$$

故当 $n \geqslant N$ 时,

$$\begin{aligned}
&\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}<\frac{A}{2}a_{n+1}<0\\
\Rightarrow&\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\frac{a_n}{b_n}>\cdots>\frac{a_N}{b_N}\\
\Rightarrow&a_{n+1}>\frac{a_N}{b_N}b_{n+1}.
\end{aligned}$$

据比较判别法即知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

18 第05届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. (共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分) 解答下列各题.

(1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\sin\pi\sqrt{1+4n^2}\right)^n$. 张祖锦解.

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left[1+\sin\pi\left(\sqrt{1+4n^2}-2n\right)\right]^n\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]^n\\
&=\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right)\right]\\
&\xlongequal[t\to0]{\ln(1+t)\sim t}\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]\\
&\xlongequal[t\to0]{\sin t\sim t}\exp\left[\lim_{n\to\infty}n\frac{\pi}{\sqrt{1+4n^2}+2n}\right]=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 证明广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的. 张祖锦解.由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 收敛. 又由

$$\int_0^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{2x}\mathrm{d}x=+\infty$$

知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定.求 $y(x)$ 的极值. 张祖锦解.设

$$F=x^3+3x^2y-2y^3-2,$$

则

$$F'_x + F'_y y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

故 y 的驻点 x 满足

$$y' = 0 \Leftrightarrow F'_x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = -1, \\ \text{或} x = -2y \Rightarrow x = -2, y = 1. \end{cases}$$

进一步, 在驻点处,

$$\begin{aligned} &F''_{xx} + 2F''_{xy}y' + F''_{yy}y'^2 + F'_y y'' = 0 \\ \Rightarrow &y'' = -\frac{F''_{xx}}{F'_y} = -\frac{2(x+y)}{x^2 - 2y^2} = \begin{cases} -1, & x = 0, y = -1, \\ 1, & x = -2, y = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

故 y 在 $x = 0$ 处取得极大值 -1, 在 $x = -2$ 处取得极小值 1. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 过曲线 $y = \sqrt[3]{x}\ (x \geqslant 0)$ 上的点 A 作切线, 使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\frac{3}{4}$, 求点 A 的坐标. 张祖锦解.设切点为 $A(t, \sqrt[3]{t})(t > 0)$, 则切线方程为

$$y - \sqrt[3]{t} = \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x - t).$$

令 $y = 0$ 知切线与 x 轴的交点为 $B(-2t, 0)$. 设 $C(t, 0)$, 则由题意,

$$\frac{3}{4} = S_{\triangle ABC} - S_{\text{曲边梯形}\,AOC} = \frac{1}{2} \cdot 3t \cdot \sqrt[3]{t} - \int_0^t \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}.$$

故 $t = 1, A(1, 1)$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (12 分) 计算定积分

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan \mathrm{e}^x}{1 + \cos^2 x} \mathrm{d}x.$$

张祖锦解.

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{-\pi}^{0} \frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi} \frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{-x=t} \int_0^{\pi} \frac{t\sin t\cdot\arctan \mathrm{e}^{-t}}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi} \frac{x\sin x\cdot\arctan \mathrm{e}^x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^{\pi} \left(\arctan \mathrm{e}^x+\arctan \mathrm{e}^{-x}\right)\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x \xlongequal{\pi-x=t} \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x+\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x\right]\ (\text{上两式的算术平均})\\
&= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{8}.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (12 分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$. 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛. 张祖锦解.

(1) 由 $f''(0)$ 存在知 f 在原点的某邻域内可导, 而连续.

(2)

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot x=0.$$

(3)

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0.$$

(4) 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}$$

知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{|f''(0)|}{2}.$$

而由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛.

4. (10 分) 设 $|f(x)|\leqslant \pi, f'(x)\geqslant m>0\ (a\leqslant x\leqslant b)$. 证明:

$$\left|\int_a^b \sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant \frac{2}{m}.$$

张祖锦解.

(1) 若 f 没有零点, 则 $\forall\ x\in[a,b], -\pi\leqslant f(x)<0$ 或 $\forall\ x\in[a,b], 0<f(x)\leqslant \pi$, 而 $\sin f(x)$ 不变号. 设 $f(x)=t$, 则

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}t=&f'(x)\,\mathrm{d}x=f'(f^{-1}(t))\,\mathrm{d}x,\\
\left|\int_a^b \sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|=&\left|\int_{f(a)}^{f(b)}\frac{\sin t}{f'(f^{-1}(t))}\,\mathrm{d}t\right|\\
=&\frac{1}{f'(f^{-1}(\xi))}\left|\int_{f(a)}^{f(b)}\sin t\,\mathrm{d}t\right|\ (\text{积分第一中值定理})\\
=&\frac{|\cos f(a)-\cos f(b)|}{f'(f^{-1}(\xi))}\leqslant\frac{2}{m}.
\end{aligned}$$

(2) 若 f 有零点, 则由 $f'>0$ 知 f 严格递增, f 仅有一个零点 x_0, 且 $\forall\ a\leqslant x<x_0, f(x)<0; \forall\ x_0<x\leqslant b, f(x)>0$.

(i) 若 $-\int_a^{x_0}\sin f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0}^b\sin f(x)\,\mathrm{d}x$, 则由第 1 步,

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|&=-\int_a^{x_0}\sin f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant-\int_a^{x_0}\sin f(x)\,\mathrm{d}x=\left|\int_a^{x_0}\sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}.
\end{aligned}$$

(ii) 若 $-\int_a^{x_0}f(x)\,\mathrm{d}x<\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 则也由第 1 步,

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|&=\int_a^{x_0}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x=\left|\int_{x_0}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{m}.
\end{aligned}$$

5. (14 分) 设 Σ 是一个光滑封闭曲面, 方向朝外. 给定第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3-x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(2y^3-y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(3z^3-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

试确定曲面 Σ, 使得积分 I 的值最小, 并求该最小值. 张祖锦解.设 Σ 围成的区域为 V, 则由 Gauss 公式,

$$I=\iiint_{V}(3x^2+6y^2+9z^2-3)\,\mathrm{d}v=3\iiint_{V}(x^2+2y^2+3z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

为使 I 达到最小, 就要求 V 是使得 $x^2+2y^2+3z^2-1\leqslant 0$ 的最大空间区域, 也即

$$V=\left\{(x,y,z);x^2+2y^2+3z^2\leqslant 1\right\}.$$

所以 V 是一个椭球, Σ 为 V 的表面时, 积分 I 最小. 此时,

$$\begin{aligned}I&\xlongequal[\sqrt{3}z=w]{x=u,\sqrt{2}y=v}3\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}(u^2+v^2+w^2-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\&=\frac{3}{\sqrt{6}}\left[\int_0^1 r^2\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r-\frac{4\pi}{3}\right]=-\frac{4\sqrt{6}\pi}{15}.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (14 分) 设 $I_a(r)=\int_C\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a}$, 其中 a 为常数, 曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$, 取正向. 求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty}I_a(r)$. 张祖锦解.设

$$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,$$

则

$$C:\rho^2+\rho^2\sin\theta\cos\theta=r^2\Leftrightarrow\rho(\theta)=\frac{r}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin 2\theta}}\in\left[\sqrt{\frac{2}{3}}r,\sqrt{2}r\right].$$

故

$$I_a(r)=\int_0^{2\pi}\frac{-\rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta}{\rho^{2a}(\theta)},$$

$$-I_a(r)=\int_0^{2\pi}\rho^{2-2a}(\theta)\,\mathrm{d}\theta\begin{cases}\in\left[\left(\sqrt{2}r\right)^{2-2a},\left(\sqrt{\frac{2}{3}}r\right)^{2-2a}\right], & a>1\\ =2\pi, & a=1\\ \left[\left(\sqrt{\frac{2}{3}}r\right)^{2-2a},\left(\sqrt{2}r\right)^{2-2a}\right], & a<1\end{cases},$$

$$\lim_{r\to+\infty}[-I_a(r)]=\begin{cases}0, & a>1\\ 2\pi, & a=1\\ +\infty, & a<1\end{cases},$$

$$\lim_{r\to+\infty}I_a(r)=\begin{cases}0, & a>1\\ -2\pi, & a=1\\ -\infty, & a<1\end{cases}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

7. (14 分) 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 弱收敛, 求其和. 张祖锦解.设

$$a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k},$$

则

$$0<a_k=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}<1+\sum_{i=2}^{k}\int_{i-1}^{i}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=1+\int_1^k\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=1+\ln k$$

$$\Rightarrow\lim_{k\to+\infty}\frac{a_k}{k+2}=0.$$

而原级数的前 n 项和

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k+1}-\frac{a_k}{k+2}\right)\\ &\xlongequal{k+1=j}\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k+1}-\sum_{j=2}^{n+1}\frac{a_{j-1}}{j+1}=\frac{a_1}{2}-\frac{a_n}{n+2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{a_k-a_{k-1}}{k+1}\\ &=\frac{1}{2}-\frac{a_n}{n+2}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{2}-\frac{a_n}{n+2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\\ &=1-\frac{1}{n+1}-\frac{a_n}{n+1}.\end{aligned}$$

令 $n \to \infty$ 即知原级数 $= 1$, 而收敛. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

19 第06届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (共有 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分).

(1) 已知 $y_1 = \mathrm{e}^x$ 和 $y_2 = x\mathrm{e}^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解, 则该方程是 ____. 张祖锦解.

$$\begin{aligned} \text{题设 } &\Rightarrow \lambda = 1 \text{ 是特征方程的二重根} \\ &\Rightarrow \text{特征方程为 } (\lambda - 1)^2 \\ &\Rightarrow \text{常微分方程为 } y''(x) - 2y'(x) + y(x) = 0. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 设有曲面 $S: z = x^2 + 2y^2$ 和平面 $L: 2x + 2y + z = 0$, 则与平面 L 平行的 S 的切平面方程是 ____. 张祖锦解.

$$\text{切点 } P(x_0, y_0, z_0) \in S \Rightarrow \begin{cases} z_0 = x_0^2 + 2y_0^2 \\ \text{法向量为 } \{2x_0, 4y_0, -1\} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \{2x_0, 4y_0, -1\} \,//\, \{2, 2, 1\} \ (\text{切平面与平面 } L \text{ 平行}) \\ &\Rightarrow x_0 = -1, y_0 = -\frac{1}{2}, z_0 = \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow \text{切平面方程为} \, 0 = 2(x+1) + 2\left(y + \frac{1}{2}\right) + \left(z - \frac{3}{2}\right) = 2x + 2y + z + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x = \int_1^{y-x} \sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right) \mathrm{d}t$ 所确定, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} =$ ____. 张祖锦解.易知 $y(0) = 1$. 进而

$$\begin{aligned} x = \int_1^{y-x} \sin^2 \frac{t}{4} \mathrm{d}t &\Rightarrow 1 = \sin^2 \frac{\pi(y-x)}{4} \cdot (y' - 1) \ (\text{两边关于 } x \text{ 求导}) \\ &\Rightarrow 1 = \frac{1}{2}[y'(0) - 1] \ ((x, y) = (0, 1) \text{ 代入}) \\ &\Rightarrow y'(0) = 3. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$ ____. 张祖锦解.

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-1}{(k+1)!}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{(n+1)!}\right]=1.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 已知 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$, 则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ ____. 张祖锦解.

$$\mathrm{e}^3=\lim_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}\right\}$$
$$\Rightarrow 3=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}$$

$$\Rightarrow\ln\left\{\lim_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]\right\}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}\cdot x=3\cdot0=0$$
$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]=1\Rightarrow\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0\cdot0=0\\ f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0\end{cases}.$$

进一步, 由上式第 2 行知

$$3=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x+\frac{f(x)}{x}}{x}\ \ (\ln(1+s)\sim s,s\to0)$$
$$=1+\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=1+\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}\ \ (\text{L'Hospital 法则})$$
$$=1+\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=1+\frac{1}{2}f''(0).$$

故 $f''(0)=4$. 最终,

$$\text{原式}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}=2.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题满分 12 分) 设 n 为正整数, 计算

$$I=\int_{\mathrm{e}^{-2n\pi}}^{1}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right|\mathrm{d}x.$$

张祖锦解.

$$\begin{aligned}I&\xlongequal[x'(t)=-\mathrm{e}^{-t}\Leftrightarrow t'(x)=-\mathrm{e}^{t}]{\ln\frac{1}{x}=t\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-t}}\int_{2n\pi}^{0}\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos t\cdot(-\mathrm{e}^{t})\right|\cdot(-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2n\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=2n\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t=4n.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数, 且存在正常数 A,B 使得 $|f(x)|\leqslant A,|f''(x)|\leqslant B$. 证明: 对任意 $x\in[0,1]$, 有

$$|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}.$$

张祖锦解.对 $\forall\ x\in[0,1]$, 由 Taylor 公式,

$$\left\{\begin{array}{l}f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\dfrac{f''(\xi_x)}{2}(0-x)^2\\ f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\dfrac{f''(\eta_x)}{2}(1-x)^2\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow f(1)-f(0)=f'(x)+\frac{f''(\eta_x)}{2}(1-x)^2-\frac{f''(\xi_x)}{2}(0-x)^2$$

$$\Rightarrow|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{B}{2}[(1-x)^2+x^2]=2A+B\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]\leqslant 2A+\frac{B}{2}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题满分 14 分)

(1) 设一球缺高为 h, 所在球半径为 R. 证明该球缺的体积为 $\dfrac{\pi}{3}(3R-h)h^2$, 球冠的面积为 $2\pi Rh$.

(2) 设球体

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$$

被平面 $P:x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω. 记球缺上的球冠为 Σ, 方向指向球外, 求第二型曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

张祖锦解.

(1) 设球缺所在球体表面方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

球缺中心线为 z 轴, 则

$$\begin{aligned}
V&=\int_{R-h}^{R}\pi(R^2-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2,\\
S&=\int_{R-h}^{R}2\pi\sqrt{R^2-z^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-z^2}}\,\mathrm{d}z\\
&\qquad\left(x=\sqrt{R^2-z^2}\Rightarrow\sqrt{1+x_z'^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-z^2}}\right)\\
&=2\pi Rh.
\end{aligned}$$

(2) 设 S 为球球 Ω 的底面圆盘, 方向指向球缺外, 则由 Gauss 公式,

$$I+\iint_S\cdots=\iiint_\Omega 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=3|\Omega|.$$

由于 $S\subset P$, P 的正向单位外法向量为 $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$, 而

$$\iint_S\cdots=-\frac{1}{\sqrt{3}}\iint_S(x+y+z)\,\mathrm{d}S=-\frac{6}{\sqrt{3}}|S|=-2\sqrt{3}|S|.$$

由于球体半径 $R=2\sqrt{3}$, 球缺高

$$h=R-\text{ 原点到 }P\text{ 的距离 }=2\sqrt{3}-\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
|\Omega|&=\frac{\pi}{3}(3\cdot 2\sqrt{3}-\sqrt{3})\cdot 3=5\sqrt{3}\pi,\\
|S|&=\pi\left[R^2-(R-h)^2\right]=9\pi,\\
I&=3|\Omega|+2\sqrt{3}|S|=33\sqrt{3}\pi.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题满分 15 分) 设 f 在 $[a,b]$ 上非负连续, 严格单增, 且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得

$$[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)]^n\,\mathrm{d}x,$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. 张祖锦解.

(1) 我们下面将证明

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n \,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}} = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

而 (用反证法及 f 的严格单调性)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(b) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = b.$$

(2) 令

$$M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

一方面,

$$\left\{\int_a^b [f(x)]^n \,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}} \leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

另一方面, 设 $f(\xi) = M$, 则由保号性,

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ [c,d] \ni \xi,\ \text{s.t. } x \in [c,d] \Rightarrow f(x) > f(\xi) - \varepsilon.$$

于是

$$\left\{\int_a^b [f(x)]^n \,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}} \geqslant \left\{\int_c^d [f(x)]^n \,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}} \geqslant [f(\xi)-\varepsilon](d-c)^{\frac{1}{n}}.$$

综上,

$$(d-c)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left\{\int_a^b [f(x)]^n \,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}} \leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$,

$$M(d-c)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left\{\int_a^b [f(x)]^n \,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}} \leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

令 $n \to \infty$, 即有

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n \,\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}} = M = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题满分 15 分) 设

$$A_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)$. 张祖锦解.设 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}A_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}.$$

写出

$$\begin{aligned}
n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)&\xlongequal{x_k=\frac{k}{n}}n\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}[f(x)-f(x_k)]\,\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{\text{Lagrange}}n\sum_{k=1}^n\int_{x_{k-1}}^{x_k}f'(\xi_k)(x-x_k)\,\mathrm{d}x\\
&\in\left[n\sum_{k=1}^n M_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x,\,n\sum_{k=1}^n m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x\right]\\
&\quad\left(m_k=\min_{[x_{k-1},x_k]}f',\,M_k=\max_{[x_{k-1},x_k]}f'\right)\\
&=\left[-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n M_k\frac{1}{n},\,\sum_{k=1}^n m_k\frac{1}{n}\right].
\end{aligned}$$

据 Riemann 积分的 Darboux 定义,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n M_k\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n m_k\frac{1}{n}=\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.$$

而由夹逼原理知原式 $=\frac{1}{4}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

20 第07届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分).

(1) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right)=$ ____. 张祖锦解.由

$$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin\frac{k\pi}{n}<n\sum_{k=1}^n\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n^2+k}<\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sin\frac{k\pi}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

及夹逼原理知原式 $=\frac{2}{\pi}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程

$$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$$

所决定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数, 且 $xF_u+yF_v\neq 0$. 则

$$xz'_x+yz'_y=\_\_\_\_.$$

(本小题结果要求不显含 F 及其偏导数) 张祖锦解.$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$ 两边关于 x 求偏导得

$$F'_u\left(1+\frac{z'_x}{y}\right)+F'_v\left(-\frac{z}{x^2}+\frac{z'_x}{x}\right)=0\Rightarrow xz'_x=-\frac{y(x^2F'_u-zF'_v)}{xF'_u+yF'_v}.$$

同理,

$$yz'_y=-\frac{x(y^2F'_v-zF'_u)}{yF'_v+xF'_u}.$$

加起来即得 $xz'_x+yz'_y=z-xy$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围区域的体积为 ____. 张祖锦解.曲面在 M 处的法向量为

$$\{2x,2y,-1\}|_M=\{2,-2,-1\},$$

而 M 处的切平面方程为

$$0=2(x-1)-2(y+1)-(z-3)=2x-2y-z-1,$$

即 $z=2x-2y-1$. 将其与 $z=x^2+y^2$ 联立得所围区域在 xOy 平面的投影为

$$D:(x-1)^2+(y+1)^2\leqslant 1.$$

故所求体积为

$$
\begin{aligned}
V&=\iint\limits_D\left[(2x-2y-1)-(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\iint\limits_D\left[1-(x-1)^2-(y+1)^2\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\xlongequal[y=-1+r\sin\theta]{x=1+r\cos\theta}\int_0^1(1-r^2)\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 函数 $f(x)=\begin{cases}3, & x\in[-5,0),\\ 0, & x\in[0,5)\end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 收敛的值是 ____. 张祖锦解.由 Fourier 收敛定理知应填

$$
\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}.
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为

$$
u(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t,
$$

则 $u(x)$ 的初等函数表达式是 ____. 张祖锦解.由

$$
u(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt^2}\,\mathrm{d}t\xlongequal{\sqrt{x}t=s}\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-s^2}\,\mathrm{d}s
$$

知

$$
u^2(x)=\frac{1}{x}\iint\limits_{(0,+\infty)^2}\mathrm{e}^{-(s^2+t^2)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\cdot\frac{2\pi r}{4}\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4x}.
$$

故 $u(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题满分 12 分) 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面, 求其方程. 张祖锦解.

(1) $O(0,0,0)$ 为 M 的顶点, $A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$ 在 M 上. 由 A,B,C 三点决定的平面 $x+y+z=1$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的交线 L 是 M 的准线.

(2) 设 $P(x,y,z)$ 为 M 上的点, (u,v,w) 是 M 的母线 OP 与 L 的交点, 则 OP 的方程为

$$\frac{x}{u}=\frac{y}{v}=\frac{z}{w}=\frac{1}{t}.$$

也即 $u=xt, v=yt, w=zt$. 代入准线方程得

$$(x+y+z)t=1, (x^2+y^2+z^2)t^2=1.$$

消去 t 即得圆锥面 M 的方程 $xy+yz+zx=0$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题满分 12 分) 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导, 且存在常数 α,β, 使得对于 $\forall\ x\in(a,b)$, 有

$$f'(x)=\alpha f(x)+\beta f''(x),$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导. 张祖锦解.

(1) 若 $\beta=0$, 则

$$f'(x)=\alpha f(x)\Rightarrow f''(x)=\alpha f'(x)=\alpha f(x)\Rightarrow\cdots\Rightarrow f^{(n)}(x)=\alpha^n f(x)$$

$\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

(2) 若 $\beta\neq0$, 则

$$f''(x)=\frac{f'(x)-\alpha f(x)}{\beta}=Af'(x)+Bf(x)\ \left(A=\frac{1}{\beta},B=-\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

$\Rightarrow f'''(x)=Af''(x)+Bf'(x)$ (右端可导, 而左端亦可导)

$\Rightarrow\cdots\Rightarrow f^{(n)}(x)=Af^{(n-1)}(x)+Bf^{(n-2)}(x)\ (\forall\ n\geqslant2)$

$\Rightarrow f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题满分 14 分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域, 及其和函数. 张祖锦解.设 $a_n=\dfrac{n^3+2}{(n+1)!}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+2}{n^3+2}\cdot\frac{1}{n+2}=0.$$

故原幂级数的收敛半径 $R=+\infty$, 收敛域为 $\mathbb{R}$. 对 $\forall\ x\neq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n&=\left.\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)n(n-1)+(n+1)+1}{(n+1)!}t^n\right]\right|_{t=x-1}\\
&=\left.\left[t^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}+\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\right]\right|_{t=x-1}\\
&=\left.\left[t^2\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^t+\frac{1}{t}(\mathrm{e}^t-1)\right]\right|_{t=x-1}\\
&=(x^2-2x+2)\mathrm{e}^{x-1}+\frac{1}{x-1}(\mathrm{e}^{x-1}-1).
\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\begin{cases}(x^2-2x+2)\mathrm{e}^{x-1}+\dfrac{1}{x-1}(\mathrm{e}^{x-1}-1), & x\neq 1,\\ 2, & x=1.\end{cases}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题满分 16 分) 设函数 f 在 $[0,1]$ 上连续, 且

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0,\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

试证:

(1) $\exists\ x_0\in[0,1]$ 使 $|f(x_0)|>4$;

(2) $\exists\ x_1\in[0,1]$ 使 $|f(x_1)|=4$.

张祖锦解.

(1) 用反证法. 若

$$\forall\ x\in[0,1],|f(x)|\leqslant 4,$$

则

$$\begin{aligned}
1-\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)f(x)\,\mathrm{d}x&\leqslant\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant 4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x=8\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)\,\mathrm{d}x=1.
\end{aligned}$$

因此,

$$\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot|f(x)|\,\mathrm{d}x=4\int_0^1\left|x-\frac{1}{2}\right|\mathrm{d}x$$
$$\Rightarrow\int_0^1[4-|f(x)|]\left|x-\frac{1}{2}\right|\,\mathrm{d}x=0$$
$$\Rightarrow[4-|f(x)|]\left|x-\frac{1}{2}\right|\equiv 0$$
$$\Rightarrow|f(x)|=4,\text{ 与题设 }\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0\text{ 矛盾, 故有结论.}$$

(2) 先用反证法证明

$$\exists\ x_2\in[0,1],\ \text{s.t. }|f(x_2)|<4.$$

若 $\forall\ x\in[0,1],|f(x)|\geqslant 4$, 则由连续函数介值定理及反证法知

$$\forall\ x\in[0,1],f(x)\leqslant -4\text{ 或 }\forall\ x\in[0,1],f(x)\geqslant 4.$$

这均与题设 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 矛盾.

(3) 由第 1,2 步及连续函数介值定理即知

$$\exists\ x_1\in[0,1],\ \text{s.t. }|f(x_1)|=4.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题满分 16 分) 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的二阶偏导数, 且

$$f_{xx}''^2+2f_{xy}''^2+f_{yy}''^2\leqslant M.$$

若 $f(0,0)=0,f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 证明:

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\pi\sqrt{M}}{4}.$$

张祖锦解.由 Taylor 公式及 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}
|f(x,y)| &= \left|\frac{1}{2}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(\theta x,\theta y)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|x^2 f''_{xx}(\theta x,\theta y)+2xyf''_{xy}(\theta x,\theta y)+y^2 f''_{yy}(\theta x,\theta y)\right| \\
&= \frac{1}{2}\left|x^2 f''_{xx}(\theta x,\theta y)+\sqrt{2}xy\cdot\sqrt{2}f''_{xy}(\theta x,\theta y)+y^2 f''_{yy}(\theta x,\theta y)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{(x^2)^2+(\sqrt{2}xy)^2+(y^2)^2}\cdot\sqrt{f''^2_{xx}(\theta x,\theta y)+2f''^2_{xy}(\theta x,\theta y)+f''^2_{yy}(\theta x,\theta
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{M}.$$

故

$$\left|\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{\sqrt{M}}{2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{M}}{2}\int_0^1 r^2\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi\sqrt{\ }}{4}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

21 第08届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (满分 30 分, 每小题 6 分).

(1) 若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导, 且 $f(a)\neq 0$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right]^n = \underline{\qquad}.$$

张祖锦解.不妨设 $f(a)>0$, 否则用 $-f$ 代替 f 后考虑. 于是

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \exp\left\{\lim_{n\to\infty} n\left[\ln f\left(a+\frac{1}{n}\right)-\ln f(a)\right]\right\} \\
&= \exp\left[\lim_{x\to 0}\frac{\ln f(a+x)-\ln f(a)}{x}\right] \\
&= \exp\left[(\ln f(x))'\big|_{x=a}\right] = \exp\left[\frac{f'(a)}{f(a)}\right].
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 若 $f(1)=0$, $f'(1)$ 存在, 则极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(\mathrm{e}^{x^2}-1)\sin x} = \underline{\qquad}.$$

张祖锦解.

$$I=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(\sin^2 x+\cos x)-f(1)}{\sin^2 x+\cos x-1}\cdot\frac{\sin^2 x+\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{\tan 3x}{\sin x}\right]$$
$$=f'(1)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot 1\cdot 3=\frac{3}{2}f'(1).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 设 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(1)=2$. 记 $z=f(e^x y^2)$, 若 $z'_x=z$, 求 $f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式. 张祖锦解.

$$f(e^x y^2)=z=z'_x=f'(e^x y^2)\cdot e^x y^2\Rightarrow f(t)=f'(t)t$$
$$\Rightarrow\frac{dt}{t}=\frac{df(t)}{f(t)}\Rightarrow f(t)=Ct\Rightarrow f(t)=2t\ (f(1)=2)$$
$$\Rightarrow f(x)=2x\ \ (\forall\ x>0).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 设 $f(x)=e^x\sin 2x$, 则 $f^{(4)}(0)=$ ____. 张祖锦解.由 Maclaurin 展式,

$$f(x)=e^x\sin 2x=\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right]\left[2x-\frac{1}{3!}(2x)^3+o(x^4)\right].$$

故 f 的 Maclaurin 展式中 x^4 的系数为

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!}=1\cdot\left(-\frac{1}{3!}\right)2^3+\frac{1}{3!}\cdot 2$$
$$\Rightarrow f^{(4)}(0)=-4\cdot 2^3+4\cdot 2=-4\cdot 6=-24.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 曲面 $z=\frac{x^2}{2}+y^2$ 平行与平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程为 ____. 张祖锦解.设切点为 $\{x_0,y_0,z_0\}$, 则

$$\text{法向量 }\{x_0,2y_0,-1\}\parallel\{2,2,-1\}\Rightarrow x_0=2,y_0=1\Rightarrow z_0=3.$$

故切平面方程为

$$0=2(x-2)+2(y-1)-(z-3)=2x+2y-z-3.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, $f(0)=0$, 且当 $x\in(0,1), 0<f'(x)<1$. 试证: 当 $a\in(0,1)$,

$$\left[\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2>\int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x.$$

张祖锦解.有 $f(0)=0, f'>0$ 知 $f>0$. 于是当 $a\in(0,1)$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{\left[\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2}{\int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x}&\xlongequal{\text{Cauchy}}\frac{2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\cdot f(a)}{f^3(a)}=\frac{2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x}{f^2(a)}\\&\xlongequal{\text{Cauchy}}\frac{2f(a)}{2f(a)f'(a)}=\frac{1}{f'(a)}>1.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (满分 14 分) 某物体所在的空间区域为

$$\Omega: x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z,$$

密度函数为 $x^2+y^2+z^2$, 求质量

$$M=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

张祖锦解.

$$\begin{aligned}M&=\iiint\limits_{\left(x-\frac12\right)^2+\left(y-\frac12\right)^2+2\left(z-\frac12\right)^2\leqslant 1}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&\xlongequal[\sqrt{2}\left[z-\frac12\right]]{x-\frac12=u,y-\frac12=v}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left[\left(\frac12+u\right)^2+\left(\frac12+v\right)^2+\left(\frac12+\frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\&\xlongequal{\text{对称性}}\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left(\frac14+u^2+\frac14+v^2+\frac14+\frac{w^2}{2}\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\&\xlongequal{\text{对称性}}\frac{1}{\sqrt{2}}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1}\left(\frac34+\frac{1+1+\frac12}{3}(u^2+v^2+w^2)\right)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac34\cdot\frac{4\pi}{3}+\frac56\int_0^1 r^2\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r\right)=\frac{5\sqrt{2}\pi}{6}.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数, $f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

张祖锦解.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\\
\xlongequal{x_k=\frac{k}{n}}&\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f(x)-f(x_k)\right]\,\mathrm{d}x\\
=&\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{f(x)-f(x_k)}{x-x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x\\
\xlongequal[x_{k-1}<\xi_k<x_k]{\text{中值}}&\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n}\frac{f(\xi_k)-f(x_k)}{\xi_k-x_k}\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-x_k)\,\mathrm{d}x\\
\xlongequal[\xi_k<\eta_k<x_k]{\text{Lagrange}}&\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)\left[-\frac{1}{2}(x_k-x_{k-1})^2\right]\\
=&-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f'(\eta_k)(x_k-x_{k-1})=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (满分 14 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且

$$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0.$$

证明在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1, x_2, 使得

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}.$$

张祖锦解.设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则 $F(0)=0, F(1)=I$. 据连续函数介值定理,

$$\exists\ \xi\in(0,1),\ \text{s.t. } F(\xi)=\frac{I}{2}.$$

再由积分中值定理,

$$\begin{aligned}
&\exists\ 0<x_1<\xi,\ \text{s.t. } \frac{I}{2}=F(\xi)=\int_0^{\xi} f(t)\,\mathrm{d}t=f(x_1)\xi,\\
&\exists\ \xi<x_2<1,\ \text{s.t. } \frac{I}{2}=F(1)-F(\xi)=\int_{\xi}^1 f(t)\,\mathrm{d}t=f(x_2)(1-\xi).
\end{aligned}$$

进而

$$\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2\xi}{I}+\frac{2(1-\xi)}{I}=\frac{2}{I}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导, 且

$$f(x)=f(x+2)=f\left(x+\sqrt{3}\right).$$

用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数. 张祖锦解.

(1) 由 $f(x)=f(x+2)$ 知 f 是 2-周期函数. 又由 f 可导知可设

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x),$$

其中

$$a_n=\int_{-1}^{1}f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x, b_n=\int_{-1}^{1}f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x.$$

(2) 由 $f(x)=f(x+\sqrt{3})$ 知

$$\begin{aligned}
a_n&=\int_{-1}^{1}f(x+\sqrt{3})\cos n\pi x\,\mathrm{d}x \xlongequal{x+\sqrt{3}=t}\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi(t-\sqrt{3})\,\mathrm{d}t\\
&=\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\left[\cos n\pi t\cos\sqrt{3}n\pi+\sin n\pi t\sin\sqrt{3}n\pi\right]\,\mathrm{d}t\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}}f(t)\sin n\pi t\,\mathrm{d}t\\
&=\cos\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\cos n\pi t\,\mathrm{d}t+\sin\sqrt{3}n\pi\int_{-1}^{1}f(t)\sin n\pi t\,\mathrm{d}t\\
&=a_n\cos\sqrt{3}n\pi+b_n\sin\sqrt{3}n\pi.
\end{aligned}$$

同理,

$$b_n=a_n\cos\sqrt{3}n\pi-a_n\sin\sqrt{3}n\pi.$$

联立即可求得 $a_n=b_n=0\ (n\geqslant 1)$. 故 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}$ 是常数.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

22　第09届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (本题共 42 分, 共 6 小题, 每小题 7 分).

(1) 已知可导函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)\cos x+2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t=x+1,$$

则 $f(x)=$ ____. 张祖锦解.设 $y=f(x)$, 则 $y(0)=f(0)=1$, 且关于 x 求导有

$$y'\cos+y\sin x=1\Rightarrow y'+y\tan x=\sec x.$$

先求齐次方程的解:

$$y'=-y\tan x\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{y}-\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=y=C\cos x.$$

由常数变易法知可设 $y'=y\tan x=\sec x$ 的通解为 $y=C(x)\cos x$. 代入原方程得

$$\begin{aligned}C'(x)\cos x=\sec x\Rightarrow C(x)&=\tan x+C\\ \Rightarrow C(x)&=\sin x+C\cos x\\ \Rightarrow f(x)&=y=\sin x+\cos x\ \ (y(0)=1)\,.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$ ____. 张祖锦解.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\sin^2\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\\&=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=1.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 设 $w=f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, 且

$$u=x-cy,v=x+cy,$$

其中 c 为非零常数, 则

$$w''_{xx}-\frac{1}{c^2}w''_{yy}=\underline{\qquad}.$$

张祖锦解.由

$$\begin{aligned}w_x&=f_1+f_2,w_y=-cf_1+cf_2,\\ w_{xx}&=f_{11}+2f_{12}+f_{22},w_{yy}=c^2f_{11}-2c^2f_{12}+c^2f_{22}\end{aligned}$$

知

$$w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}=4f_{12}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数, 且

$$f(0)=f'(0)=0,f''(0)=6,$$

则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\sin^2x)}{x^4}=$____. 张祖锦解.

$$\begin{aligned}\text{原式}&\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim_{x\to0}\frac{f'(\sin^2x)2\sin x\cos x}{4x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(\sin^2x)}{x^2}\\ &\xlongequal{\text{L'Hospital}}\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f''(\sin^2x)2\sin x\cos x}{2x}=3.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 不定积分 $I=\int\frac{\mathrm{e}^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\,\mathrm{d}x=$____. 张祖锦解.

$$\begin{aligned}I&\xlongequal{\sin x=t}\int\frac{\mathrm{e}^{-t}2t}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t=2\int\frac{(t-1)+1}{(t-1)^2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\\ &=-2\left[\int\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}+\int\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}\frac{1}{t-1}\right]\\ &=-2\int\mathrm{d}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t-1}=-\frac{2\mathrm{e}^{-t}}{t-1}+C=\frac{2\mathrm{e}^{-\sin x}}{1-\sin x}+C.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(6) 记曲面 $z^2=x^2+y^2$ 和 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 围成的空间区域为 V, 则三重积分

$$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\underline{\qquad}.$$

张祖锦解.

$$\text{原式}=\int_0^{\sqrt{2}}z\cdot\pi z^2\,\mathrm{d}z+\int_{\sqrt{2}}^2z\cdot\pi(4-z^2)\,\mathrm{d}z=2\pi.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题 14 分) 设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数, 对任意角度 α, 定义一元函数

$$g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha),$$

若对任何 α 都有 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$, 证明: $f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值. 张祖锦解.由

$$0=\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=f_x(0,0)\cos\alpha+f_y(0,0)\sin\alpha,\forall\ \alpha$$

知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. 又由

$$\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}=(\cos\alpha,\sin\alpha)\begin{pmatrix}f_{xx}(0,0)&f_{xy}(0,0)\\f_{yx}(0,0)&f_{yy}(0,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\\sin\alpha\end{pmatrix}>0,\quad\alpha$$

知 $\begin{pmatrix}f_{xx}(0,0)&f_{xy}(0,0)\\f_{yx}(0,0)&f_{yy}(0,0)\end{pmatrix}$ 正定, 而 f 在 $(0,0)$ 处取得 (严格) 极小值. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题 14 分) 设 Γ 为曲线

$$x^2+y^2+z^2=1,x+z=1,x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0$$

上从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段. 求曲线积分

$$I=\int_\Gamma y\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}y+x\,\mathrm{d}z.$$

张祖锦解.Γ 有参数表示

$$x=x,y=\sqrt{2x-2x^2},z=1-x,x:1\to 0.$$

故

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^0 \left[\sqrt{2x-2x^2}+(1-x)\left(\sqrt{2x-2x^2}\right)'+x(-1)\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[-\sqrt{2}\sqrt{x-x^2}-\frac{(1-x)(1-2x)}{\sqrt{2}\sqrt{x-x^2}}+x\right]\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{x-\frac12=t} \int_{-\frac12}^{\frac12}\left[-\sqrt{2}\sqrt{\frac14-t^2}-\frac{\left(\frac12-t\right)(-2t)}{\sqrt{2}\sqrt{\frac14-t^2}}+\frac12+t\right]\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\text{对称性}} -2\sqrt{2}\int_0^{\frac12}\sqrt{\frac14-t^2}\,\mathrm{d}t-2\sqrt{2}\int_0^{\frac12}\frac{t^2}{\sqrt{\frac14-t^2}}\mathrm{d}t+\frac12 \\
&\xlongequal{t=\frac12\sin\theta} -2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac12\cos\theta\cdot\frac12\cos\theta\,\mathrm{d}\theta-2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac14\sin^2\theta}{\frac12\cos\theta}\cdot\frac12\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= -2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac14\,\mathrm{d}\theta+\frac12=\frac12-\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题 15 分) 设函数 $f(x)>0$ 且在实轴上连续, 若对任意实数 t, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 1.$$

证明: $\forall\ a,b,a<b$, 有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a+2}{2}.$$

张祖锦解.由

$$\forall\ t,1\geqslant\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x$$

关于 t 在 $[a,b]$ 上积分得

$$\begin{aligned}
b-a &\geqslant \int_a^b \mathrm{d}t \int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{e}^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \left[\int_a^x \mathrm{e}^{-(x-t)}\,\mathrm{d}t + \int_x^b \mathrm{e}^{-(t-x)}\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \int_a^b f(x)\left[(1-\mathrm{e}^{a-x}) - (\mathrm{e}^{x-b}-1)\right]\mathrm{d}x \\
&= 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{a-x}\,\mathrm{d}x - \int_a^b \mathrm{e}^{x-b} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{-|a-x|}\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{e}^{-|b-x|}\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-|a-x|}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-|b-x|}\,\mathrm{d}x \\
&\geqslant 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - 2.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题 15 分) 设 $\{a_n\}$ 为一个数列, p 为固定的正整数, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

张祖锦解.对 $0\leqslant i\leqslant p-1$, 考虑 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{kp+i}\}_{k=1}^\infty$, 有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{kp+i}}{kp+i} \xlongequal{\text{Stolz}} \lim_{k\to\infty}\frac{a_{(k+1)p+i}-a_{kp+i}}{p}=\frac{\lambda}{p}.$$

故对 $\forall\ \varepsilon>0, 0\leqslant i\leqslant p-1$,

$$\exists\ N_i,\ \text{s.t.}\ \forall\ k\geqslant N_i, \left|\frac{a_{kp+i}}{kp+i}-\frac{\lambda}{p}\right|<\varepsilon.$$

取 $N=\max\limits_{0\leqslant i\leqslant p}\{pN_i+i\}$, 则

$$\forall\ n\geqslant N, \left|\frac{a_n}{n}-\frac{\lambda}{p}\right|<\varepsilon.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{p}=\dfrac{\lambda}{p}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

23　第10届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (本题满分 24 分, 共 4 小题, 每小题 6 分).

(1) 设 $\alpha\in(0,1)$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=$ ____. 张祖锦解.

$$0<(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha-1\right]<n^\alpha\cdot\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right]=\frac{1}{n^{1-\alpha}}$$

$\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=0.$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 若曲线 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=t+\cos t\\ \mathrm{e}^y+ty+\sin t=1\end{cases}$ 确定, 则此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程为 ____. 张祖锦解.当 $t=0$ 时, $x=1$, $y=0$. 对 $x=t+\cos t$ 两边关于 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\sin t\Rightarrow\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=1.$$

对 $\mathrm{e}^y+ty+\sin t=1$ 两边关于 t 求导得

$$\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\cos t=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=-1.$$

因此,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=-1,$$

切线方程为 $y-0=-(x-1)$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) $\displaystyle\int\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=$ ____. 张祖锦解.

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=\int\frac{\ln(\tan t+\sec t)}{\sec t}\mathrm{d}t\quad(x=\tan t)\\
&=\int\ln(\tan t+\sec t)\,\mathrm{d}\sin t\\
&=\sin t\ln(\tan t+\sec t)-\int\sin t\cdot\frac{1}{\tan t+\sec t}(\sec^2t+\tan t\sec t)\,\mathrm{d}t\\
&=\sin t\ln(\tan t+\sec t)-\int\frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t\\
&=\sin t\ln(\tan t+\sec t)+\ln|\cos t|+C\\
&=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}=$ ____. 张祖锦解.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}+\lim_{x\to 0}1\cdot\left[\frac{1-\cos\sqrt{\cos 2x}}{x^2}+\sqrt{\cos 2x}\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}\right]\\
&=\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cos^{-\frac{1}{2}}2x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}\\
&=\frac{1}{2}+1+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}3x\cdot(-\sin 3x)\cdot 3}{2x}=\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}=3.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题满分 8 分) 设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1)=0$, 求函数 $f(x^2-y^2)$, 使得曲线

$$
\int_L[y(2-f(x^2-y^2))]\,\mathrm{d}x+xf(x^2-y^2)\,\mathrm{d}y
$$

与路径无关, 其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑曲线. 张祖锦解.设 $P=2y-yf(x^2-y^2)$, $Q=xf(x^2-y^2)$, 则由题意,

$$
\begin{aligned}
&f(x^2-y^2)+x\cdot f'(x^2-y^2)2x=Q_x\\
&\quad=P_y=2-f(x^2-y^2)-y\cdot f'(x^2-y^2)(-2y)\\
&\Rightarrow(x^2-y^2)f'(x^2-y^2)+f(x^2-y^2)=1\\
&\Rightarrow tf'(t)+f(t)=1\ \left(t=x^2-y^2\right)\\
&\Rightarrow[tf(t)]'=1\Rightarrow tf(t)=t+C\\
&\Rightarrow f(t)=1-\frac{1}{t}\ (C=-1,f(1)=0)\\
&\Rightarrow f(x^2-y^2)=1-\frac{1}{x^2-y^2}.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, 且 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$. 证明:

$$
1\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{3}.
$$

张祖锦解.由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x&=\int_0^1[\sqrt{f(x)}]^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\left[\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\right]^2\,\mathrm{d}x\\&\geqslant\left[\int_0^1\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right]^2=1.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}1\leqslant f(x)\leqslant 3&\Rightarrow[f(x)-1][f(x)-3]\leqslant 0\Rightarrow[f(x)-1]\left[1-\frac{3}{f(x)}\right]\leqslant 0\\&\Rightarrow f(x)-4+\frac{3}{f(x)}\leqslant 0\\&\Rightarrow\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{3}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant 4\ (\text{积分})\\&\Rightarrow\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{3}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\left[\frac{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1\frac{3}{f(x)}\,\mathrm{d}x}{2}\right]^2=\left(\frac{4}{2}\right)^2=\\&\Rightarrow\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题满分 12 分) 计算三重积分 $\iiint\limits_V(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$, 其中 V 是由

$$x^2+y^2+(z-2)^2\geqslant 4,x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 9,z\geqslant 0$$

所围成的空心立体. 张祖锦解.

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V(x^2+y^2)\,\mathrm{d}V&=\int_0^4\mathrm{d}z\iint\limits_{4-(z-2)^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 9-(z-1)^2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^4\mathrm{d}z\int_{\sqrt{4-(z-2)^2}}^{\sqrt{9-(z-1)^2}}r^2\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r\\&=\int_0^4\frac{\pi}{2}\left\{\left[9-(z-1)^2\right]^2-\left[4-(z-2)^2\right]^2\right\}\,\mathrm{d}z\\&=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^3(9-t^2)^2\,\mathrm{d}t-\frac{\pi}{2}\int_{-2}^2(4-t^2)^2\,\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^3(9-t^2)^2\,\mathrm{d}t-\pi\int_0^2(4-t^2)^2\,\mathrm{d}t\\&=\frac{512}{5}\pi-\frac{256}{15}\pi=\frac{256}{3}\pi.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题满分 14 分) 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微, 且

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\leqslant M,$$

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 证明:

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|,$$

其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度. 张祖锦解.设 $\phi(t)=f(x_2+t(x_1-x_2),y_2+t(y_1-y_2))$, $t\in[0,1]$, 则

$$\begin{aligned}
&|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=|\phi(1)-\phi(0)|\\
=&|\phi'(\theta)|\ \text{(Lagrange 中值定理)}\\
=&|f_x'(x_2+\theta(x_1-x_2),y_2+\theta(y_1-y_2))(x_1-x_2)\\
&+f_y'(x_2+\theta(x_1-x_2),y_2+\theta(y_1-y_2))(y_1-y_2)|\\
\leqslant&\sqrt{f_x'^2(x_2+\theta(x_1-x_2),y_2+\theta(y_1-y_2))+f_y'^2(x_2+\theta(x_1-x_2),y_2+\theta(y_1-y_2))}\\
&\cdot\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\
\leqslant&M|AB|
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题满分 14 分) 证明: 对于连续函数 $f(x)>0$, 有

$$\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

张祖锦解.由 $(\ln t)''=-\dfrac{1}{t^2}<0$ 知 $\ln t$ 是凹函数, 而

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\geqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln f\left(\frac{k}{n}\right)\\
\Rightarrow&\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x\ \ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

7. (本题满分 14 分) 已知 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ 是正项级数, 且

$$b_{k+1}-b_k\geqslant\delta>0,\ \ k=1,2,\cdots,$$

δ 为一正常数. 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$$

收敛. 张祖锦解.设 $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k} a_ib_i$, 则 $S_k-S_{k-1}=a_kb_k$, $S_0=0$, $a_k=\dfrac{S_k-S_{k-1}}{b_k}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} a_k &= \sum_{k=1}^{N} \frac{S_k-S_{k-1}}{b_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{S_k}{b_k} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{S_k}{b_{k+1}} \\
&= \frac{S_k}{b_k} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{b_{k+1}-b_k}{b_kb_{k+1}} S_k \\
&\geqslant \delta \sum_{k=1}^{N-1} \frac{S_k}{b_kb_{k+1}} \\
&\geqslant \delta \frac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k} \ \text{(均值不等式)}.
\end{aligned}$$

据比较判别法即知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

24 第11届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分).

(1)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)} = \underline{\qquad}.$$

张祖锦解.注意到

$$\begin{aligned}
\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right) &\sim 4\sqrt[3]{1-\cos x} \\
&\sim 4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}} \ (x\to 0),
\end{aligned}$$

我们有

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\mathrm{e}^{\sin x}-1+\sqrt[3]{1-\cos x})}{4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}}-\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}}\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1+\sqrt[3]{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}}-0\ \ (\ln(1+t)\sim t,t\to0)\\
&=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}-1}{4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}}+\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}}\\
&=0+\frac{1}{4}\ \left(\begin{cases}\mathrm{e}^t-1\sim t,t\to0\\ 1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2},\quad x\to0\end{cases}\right)\\
&=\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定, 则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\underline{\qquad}.$$

张祖锦解.设 $y=tx$, 则

$$(tx)^2(x-tx)=x^2\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{t^2(1-t)},\\ y=\dfrac{1}{t(1-t)}.\end{cases}$$

而

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}&=\int\frac{x'(t)}{y^2(t)}\,\mathrm{d}t\\
&=\int\left(3-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t\\
&=3t-2\ln|t|+C\\
&=3\frac{y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x(1+\sin x)}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x = \underline{\qquad}.$$

张祖锦解.

$$\begin{aligned}
原式 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x + \left[\left.\frac{\sin x}{1+\cos x}\mathrm{e}^x\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x}{1+\cos x}\,\mathrm{d}x\right] \text{ (分部积分)} \\
&= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 已知

$$\mathrm{d}u(x,y) = \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{3x2 - 2xy + 3y^2},$$

则 $u(x,y) = \underline{\qquad}$. 张祖锦解.由

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}u &= \frac{\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} + 3} \\
&= \frac{\mathrm{d}\frac{x}{y}}{3\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}} \\
&= \frac{1}{\frac{8}{3}} \cdot \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{d}\left[\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\right)\right]}{\left[\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\right)\right]^2 + 1} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{d}\left\{\arctan\left[\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\right)\right]\right\}
\end{aligned}$$

知

$$u = \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\left[\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y}-\frac{1}{3}\right)\right] + C.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 设 $a,b,c,\mu>0$, 曲面 $xyz=\mu$ 与曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

相切, 则 $\mu =$ ____. 张祖锦解.设切点为 (x,y,z), 则

$$xyz=\mu,\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

且

$$\begin{aligned}
&\{yz,xz,xy\}\parallel\left\{\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\right\}\\
\Rightarrow&\exists\ \lambda\in\mathbb{R},\ \text{s.t. } yz=\lambda\frac{x}{a^2},xz=\lambda\frac{y}{b^2},xy=\frac{z}{c^2}\\
\Rightarrow&x^2y^2z^2=\lambda^3\frac{xyz}{a^2b^2c^2}\ \ (\text{相乘})\\
\Rightarrow&\mu=xyz=\frac{\lambda^3}{a^2b^2c^2}\\
\Rightarrow&\lambda x^2=a^2xyz=a^2\mu,\lambda y^2=a^2\mu,\lambda z^2=a^2\mu\ \ (\text{本式第二行})\\
\Rightarrow&\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{\mu}{\lambda}\\
\Rightarrow&3\frac{\mu}{\lambda}=1\ \ (\text{代入椭圆方程})\\
\Rightarrow&\mu=\frac{abc}{3\sqrt{3}}\ \ (\text{联合本式第四行}).
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题满分 14 分) 计算三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 是由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$ 围成的区域在第一卦限的部分. 张祖锦解.设

$$x=r\sin\phi\cos\theta,\quad y=r\sin\phi\sin\theta,\quad z=r\cos\phi,$$

则

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2+z^2)^2=2xy&\Leftrightarrow r^4=2r^2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta\\
&\Leftrightarrow r^2=\sin^2\phi\sin2\theta\geqslant0.
\end{aligned}$$

由于 Ω 在第一卦限, 而

$$0\leqslant\phi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\phi\sqrt{\sin 2\theta}} \frac{r^3\sin^2\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta}{r^2\sin^2\phi}\cdot r^2\sin\phi\,\mathrm{d}r\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\cos\phi\sin\theta\cos\theta\cdot\frac{\sin^4\phi\sin^2 2\theta}{4}\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\phi\cos\phi\,\mathrm{d}\phi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\theta\,\mathrm{d}\theta \xlongequal{2\theta=t} \frac{1}{48}\int_0^{\pi}\sin^3 t\frac{\mathrm{d}t}{2}\\
&= \frac{1}{96}\int_0^{\pi}\sin t(1-\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{96}\left(-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}\right)\bigg|_0^{\pi}\\
&= \frac{1}{96}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{72}.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微, $f(0)=0$, 且存在常数 $A>0$, 使得

$$|f'(x)| \leqslant A|f(x)|$$

在 $[0,+\infty)$ 上成立, 试证明在 $(0,+\infty)$ 上有 $f(x)\equiv 0$. 张祖锦解.

(1) 设 $|f|$ 在 $\left[0,\frac{1}{2A}\right]$ 上的最大值在 x_0 处取得, 则

$$|f(x_0)| = |f(x_0)-f(0)| = |f'(\xi)x| \leqslant A|f(\xi)|\frac{1}{2A} \leqslant \frac{1}{2}|f(x_0)|.$$

这表明 $f(x_0)=0$. 故 $f(x)\equiv 0, x\in\left[0,\frac{1}{2A}\right]$.

(2) 设 $|f|$ 在 $\left[\frac{1}{2A},\frac{1}{A}\right]$ 上的最大值在 x_1 处取得, 则

$$
\begin{aligned}
|f(x_1)| &= \left|f(x_1)-f\left(\frac{1}{2A}\right)\right| = \left|f'(\eta)\left(x_1-\frac{1}{2A}\right)\right|\\
&\leqslant A|f(\eta)|\cdot\frac{1}{2A} \leqslant \frac{1}{2}|f(x_1)|.
\end{aligned}
$$

这表明 $f(x_1)=0$. 故 $f(x)\equiv 0, x\in\left[\frac{1}{2A},\frac{1}{A}\right]$.

(3) 如此一直做下去, 我们得到

$$f(x)\equiv 0, x\in\left[\frac{n}{2A},\frac{n+1}{2A}\right](\forall\ n\in\mathbb{N}).$$

故 $f\equiv 0$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题满分 14 分) 计算积分

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

张祖锦解.单位圆周 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$ 有参数表示

$$x=\sin\theta\cos\phi,\quad y=\sin\theta\sin\phi,\quad z=\cos\theta,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi.$$

则

$$\begin{aligned}
I&=\iint_{\Sigma}\mathrm{e}^{x-y}\,\mathrm{d}S\\
&=\iint_{\Sigma}\mathrm{e}^{\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}S\ \left(\text{正交变换: }u=\frac{x-y}{\sqrt{2}},v=\frac{x+y}{\sqrt{2}},w=z\right)\\
&=\iint_{\Sigma:u\geqslant 0}\mathrm{e}^{\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}S+\iint_{\Sigma:u\leqslant 0}\mathrm{e}^{\sqrt{2}u}\,\mathrm{d}S\\
&=\iint_{v^2+w^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{\sqrt{2(1-v^2-w^2)}}\frac{1}{\sqrt{1-v^2-w^2}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&\quad+\iint_{v^2+w^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{-\sqrt{2(1-v^2-w^2)}}\frac{1}{\sqrt{1-v^2-w^2}}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w\\
&\quad\left(u=\pm\sqrt{1-v^2-w^2},\sqrt{1+u_v'^2+u_w'^2}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2-w^2}}\right)\\
&=\int_0^1\mathrm{e}^{\sqrt{2(1-r^2)}}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r+\int_0^1\mathrm{e}^{-\sqrt{2(1-r^2)}}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\cdot 2\pi r\,\mathrm{d}r\\
&\xlongequal{r^2=s}\pi\int_0^1\left[\mathrm{e}^{2(1-s)}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2(1-s)}}\right]\frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s}}\xlongequal{\sqrt{1-s}=t}2\pi\int_0^1\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}t}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}t}\right)\,\mathrm{d}t\\
&=2\pi\cdot\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\pi\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}}-\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题满分 14 分) 设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数, 满足

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n.$$

证明: $c_n>0$, $(n\geqslant 0)$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在, 且等于 $f(x)$ 的最小根. 张祖锦

解.设

$$f(x)=A(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k},$$

其中 $0<a_1<\cdots<a_k$, $r_i\geqslant 1$, 则

$$\begin{aligned}f'(x)=&Ar_1(x-a_1)^{r_1-1}\cdots(x-a_k)^{r_k}\\&+Ar_k(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k-1}.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\frac{f'(x)}{f(x)}&=\sum_{i=1}^k\frac{r_i}{x-a_i}=-\sum_{i=1}^k\frac{r_i}{a_i}\frac{1}{1-\frac{x}{a_i}}\\&=-\sum_{i=1}^k\frac{r_i}{a_i}\sum_{n=0}^\infty\left(\frac{x}{a_i}\right)^n=-\sum_{n=0}^\infty\left(\sum_{i=1}^k\frac{r_i}{a_i^{n+1}}\right)x^n.\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}c_n&=\sum_{i=1}^k\frac{r_i}{a_i^{n+1}}>0,\\\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{c_{n+1}}\ \text{(会证么？哈哈! 看看文末的视频链接)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{r_1}{a_1^{n+1}}+\cdots+\frac{r_k}{a_k^{n+1}}}{\frac{r_1}{a_1^{n+2}}+\cdots+\frac{r_k}{a_k^{n+2}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{r_1a_1+\cdots+r_k\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+1}a_1}{r_1+\cdots+r_k\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^{n+2}}\ \text{(分子分母同时除以 }a_1^{n+2}\text{)}\\&=\frac{r_1a_1+0+\cdots+0}{r_1+0+\cdots+0}=a_1.\end{aligned}$$

视频链接. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题 14 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数, 满足

$$3[3+f^2(x)]f'(x)=2[1+f^2(x)]^2\mathrm{e}^{-x^2},$$

且 $f(0)\leqslant 1$. 证明: 存在常数 $M>0$, 使得 $x\in[0,+\infty)$ 时, 恒有 $|f(x)|\leqslant M$.
张祖锦解.

(1) 由 $f'(x)>0$ 知 f 严格递增, 而 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ (有限或 $+\infty$) 存在. 往在 (2) 中证明 $L<+\infty$, 而

$$\exists\ M=\max\{|f(0)|,|L|,1\}>0,\ \text{s.t.}\ \forall\ x\in[0,+\infty),|f(x)|\leqslant M.$$

(2) 用反证法证明 $L<+\infty$. 若

$$L=+\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty,$$

则

$$\begin{aligned}
\frac{3+f^2(x)}{[1+f^2(x)]^2}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}&=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-x^2}\\
\Rightarrow \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x&=\frac{3+y^2}{(1+y^2)^2}\,\mathrm{d}y\ \ (y=f(x))\\
&=\frac{3+\tan^2\theta}{\sec^4\theta}\cdot\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta\ \ (y=\tan\theta)\\
&=(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&=(2\cos^2\theta+1)\,\mathrm{d}\theta\\
&=(2+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&=\mathrm{d}\left(2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\\
&=\mathrm{d}\left(2\arctan y+\frac{y}{1+y^2}\right).
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^\infty \mathrm{d}\left[2\arctan y+\frac{y}{1+y^2}\right]\\
\Rightarrow&\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\pi-\left(2\arctan y+\frac{y}{1+y^2}\right)\Big|_0\\
\Rightarrow&2\arctan f(0)+\frac{f(0)}{1+f^2(0)}=\pi-\frac{\sqrt{\pi}}{3}.
\end{aligned}$$

设

$$g(t)=2\arctan t+\frac{t}{1+t^2},$$

则

$$\begin{aligned}
&g'(t)=\frac{3+t^2}{(1+t^2)^2}>0\\
\Rightarrow&\pi-\frac{\sqrt{\pi}}{3}=g(f(0))<g(1)=\frac{\pi+1}{2}\\
\Rightarrow&\text{与 } \pi-\frac{\sqrt{\pi}}{3}>\pi-\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{2\pi-\sqrt{\pi}}{2}>\frac{1+\pi}{2}\text{ 矛盾, 故有结论}.
\end{aligned}$$

25　第12届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分, 共 5 小题).

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$ ____. 张祖锦解.

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{-x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\mathrm{e}^{-x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{-x^3}\cdot 2=-\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 设函数 $f(x)=(x+1)^n\mathrm{e}^{-x^2}$, 则 $f^{(n)}(-1)=$ ____. 张祖锦解.

$$\begin{aligned}f^{(n)}(-1)&=\left.\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left((x+1)^n\right)^{(k)}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)^{(n-k)}\right|_{x=-1}\\&=\left.n!\mathrm{e}^{-x^2}\right|_{x=-1}=\frac{n!}{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 设 $y=f(x)$ 是由方程

$$\arctan\frac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$$

确定的隐函数, 且满足 $f(1)=1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 ____. 张祖锦解.

$$\arctan\frac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$$

两边关于 x 求导有 (注意 $\ln\sqrt{t}=\dfrac{1}{2}\ln t$)

$$\frac{\frac{y-xy'}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}.$$

将 $x=y=1$ 代入得 $y'(1)=0$. 而曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y=1$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 已知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 则

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\_\_\_\_.$$

张祖锦解.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\xlongequal[x+y=v]{x=u} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \int_u^{\infty} \frac{\sin v}{v}\,\mathrm{d}v \\
&= \int_0^{\infty} -F'(u)F(u)\,\mathrm{d}u \quad \left(F(u) = \int_u^{\infty} \frac{\sin v}{v}\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{2} - \int_0^u \frac{\sin v}{v}\,\mathrm{d}v\right) \\
&= -\frac{1}{2}F^2(u)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}F^2(0) = \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 设 $f(x), g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义, 对任意 $x \in U$, $f(x) \neq g(x)$, 且

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = a > 0,$$

则

$$\lim_{x\to 0} \frac{[f(x)]^{g(x)} - [g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)} = \underline{\qquad}.$$

张祖锦解.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &\xlongequal[\xi_x \text{ 介于 } f(x), g(x) \text{ 之间}]{\text{Lagrange: } F(t) = t^{g(x)}} \lim_{x\to 0} g(x)\xi_x^{g(x)-1} \\
&= a \cdot a^{a-1} = a^a.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题满分 10 分) 设数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1$, 且

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}, n \geqslant 1.$$

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n$. 张祖锦解.

$$\begin{aligned}
&a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(a_n+1)}{a_n} \\
\Rightarrow &\frac{1}{(n+1)!a_{n+1}} = \frac{a_n+1}{n!a_n} = \frac{1}{n!a_n} + \frac{1}{n!} \\
\Rightarrow &\frac{1}{n!a_n} = \frac{1}{1!a_1} + \sum_{k=1}^{n-1}\left[\frac{1}{(k+1)!a_{k+1}} - \frac{1}{k!a_k}\right] = 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k!} \to \mathrm{e} \ (n\to\infty) \\
\Rightarrow &\lim_{n\to\infty} n!a_n = \frac{1}{\mathrm{e}}.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题满分 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导, 且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明:

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=2-3x_0$;

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, 且 $\xi\neq\eta$, 使得

$$[1+f'(\xi)]\,[1+f'(\eta)]=4.$$

张祖锦解.

(1)

$$\begin{aligned}
&F(x)\equiv f(x)-(2-3x)\\
\Rightarrow &F(0)=-2<0<2=F(1)\\
\Rightarrow &\exists\ x_0\in(0,1),\ \text{s.t. } F(x_0)=0\ (\text{连续函数介值定理}).
\end{aligned}$$

(2) 由 Lagrange 中值定理,

$$\begin{aligned}
&\exists\ \xi\in(0,x_0),\ \text{s.t. } f'(\xi)=\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=\frac{2-3x_0}{x_0},\\
&\exists\ \eta\in(x_0,1),\ \text{s.t. } f'(\eta)=\frac{f(1)-f(x_0)}{1-x_0}=\frac{3x_0-1}{1-x_0}.
\end{aligned}$$

故 $[1+f'(\xi)]\,[1+f'(\eta)]=4$.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题满分 12 分) 已知

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\frac{x}{y}\right),$$

其中 f,φ 均为二次可微函数.

(1) 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(2) 当 $f=\varphi$, 且

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$$

时, 求 $f(y)$.

张祖锦解.

(1)

$$
\begin{aligned}
z_x &= f\left(\frac{y}{x}\right)+xf'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{-y}{x^2}+2y\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)\frac{1}{y}\\
&= f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+2\varphi'\left(\frac{x}{y}\right),\\
z_{xy} &= f'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}-\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}+2\varphi''\left(\frac{x}{y}\right)\frac{-x}{y^2}\\
&= -\frac{y}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{2x}{y^2}\varphi''\left(\frac{x}{y}\right).
\end{aligned}
$$

(2) 当 $f=\varphi$, 且

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$$

时,

$$
\begin{aligned}
&-\frac{y}{a^2}f''\left(\frac{y}{a}\right)-\frac{2a}{y^2}f''\left(\frac{a}{y}\right)=-by^2\\
\Rightarrow &-\frac{u}{a}f''(u)-\frac{2}{au^2}f''\left(\frac{1}{u}\right)=-ba^2u^2\ \left(\frac{y}{a}=u\right)\\
\Rightarrow &u^3f''(u)+2f''\left(\frac{1}{u}\right)=a^3bu^4\\
\Rightarrow &\frac{1}{u^3}f''\left(\frac{1}{u}\right)+2f''(u)=\frac{a^3b}{u^4}\ \left(u\to\frac{1}{u}\right)\\
\Rightarrow &f''(u)=\frac{a^3b}{3}\left(\frac{2}{u^4}-u\right)\ (\text{联合上述两式})\\
\Rightarrow &f(u)=\frac{a^3b}{3}\left(\frac{1}{3u^2}-\frac{u^3}{6}\right)+au+b\ (a,b\ \text{为任意常数}).
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题满分 12 分) 计算

$$I=\oint_{\Gamma}|\sqrt{3}y-x|\,\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z,$$

曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\ x^2+y^2=2z\end{cases}$, 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向. 张祖

锦解.由

$$
\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8\\ x^2+y^2=2z\end{cases}
\Leftrightarrow\begin{cases} z^2+2z=8\\ x^2+y^2=2z\end{cases}
\Leftrightarrow\begin{cases} z=2\\ x^2+y^2=4\end{cases}
$$

知

$$
\begin{aligned}
I&\xlongequal[y=2\sin\theta]{x=2\cos\theta}\int_0^{2\pi}\left|\sqrt{3}\cdot 2\sin\theta-2\cos\theta\right|(-2\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&=-8\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right|\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&=-8\int_0^{2\pi}\left|\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right|\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\\
&\xlongequal{\theta+\frac{\pi}{3}=\tau}-8\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}|\cos\tau|\sin\left(\tau-\frac{\pi}{3}\right)\,\mathrm{d}\tau\\
&=-4\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}|\cos\tau|\left(\sin\tau-\sqrt{3}\cos\tau\right)\,\mathrm{d}\tau\\
&\xlongequal{\text{周期}}-4\int_{-\pi}^{\pi}|\cos\tau|\left(\sin\tau-\sqrt{3}\cos\tau\right)\mathrm{d}\tau\\
&\xlongequal{\text{对称性}}8\sqrt{3}\int_0^{\pi}|\cos\tau|\cos\tau\,\mathrm{d}\tau\\
&\xlongequal{\tau-\frac{\pi}{2}=s}8\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin s|\cdot(-\sin s)\,\mathrm{d}s\xlongequal{\text{对称性}}0.
\end{aligned}
$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题满分 12 分) 证明

$$
f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x
$$

等于 n 的所有因子 (包括 1 和 n 本身) 之和, 其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数, 并计算 $f(2021)$. 张祖锦解.

(1)

$$
\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi nk}{m}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2\pi nk}{m}.
$$

(2) 当 $m \mid n$ 时,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2\pi nk}{m} = \sum_{k=1}^{m} 1 = m.$$

(3) 当 $m \nmid n$ 时, 由

$$\begin{aligned}
2\sin\frac{t}{2}\sum_{k=1}^{m}\cos kt &= \sum_{k=1}^{m}\left[\sin\frac{2k+1}{2}t - \sin\frac{2k-1}{2}t\right] \\
&= \sin\frac{2m+1}{2}t - \sin\frac{t}{2} \\
&= 2\cos\frac{m+1}{2}t\sin\frac{mt}{2}
\end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m}\cos\frac{2\pi nk}{m} &= \frac{\cos\left(\frac{m+1}{2}\frac{2\pi n}{m}\right)\sin\left(\frac{m}{2}\frac{2\pi n}{m}\right)}{\sin\frac{2\pi n}{m}} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{m+1}{2}\frac{2\pi n}{m}\right)\sin(n\pi)}{\sin\frac{2\pi n}{m}} = 0.
\end{aligned}$$

(4) 综上即知

$$f(n) = \sum_{m=1}^{n}\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\,\mathrm{d}x = \sum_{m\mid n} m.$$

再由 $2021 = 43 \cdot 47$, 我们得到

$$f(2021) = 1 + 43 + 47 + 2021 = 2112.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

7. (本题满分 14 分) 设

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+t^4)^n} \ (n \geqslant 1).$$

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$;

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛;

(3) 证明当 $p \geqslant 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.

张祖锦解.

(1)

$$
\begin{aligned}
u_n=\int_0^\delta+\int_\delta^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}&\leqslant\delta+\frac{1-\delta}{(1+\delta^4)^n}\\
\Rightarrow\varlimsup_{n\to\infty}u_n&\leqslant\delta\ \ (n\to\infty)\\
\Rightarrow\varlimsup_{n\to\infty}u_n&\leqslant 0\ \ \left(\delta\to 0^+\right)\\
\Rightarrow\lim_{n\to\infty}u_n&=0.
\end{aligned}
$$

(2) 由 $u_n\searrow 0$ 及 Leibniz 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^\infty(-1)^nu_n$ 收敛. 又由

$$
\begin{aligned}
&u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\geqslant\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n}=\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\ \ (n\geqslant 2)\\
\Rightarrow&\sum_{n=1}^\infty u_n\geqslant\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{n-1}-\sum_{n=2}^\infty\frac{1}{(n-1)2^{n-1}}=+\infty
\end{aligned}
$$

知 $\sum\limits_{n=1}^\infty(-1)^nu_n$ 条件收敛.

(3) 由

$$
p\geqslant 1\Rightarrow\frac{u_n}{n^p}\leqslant\frac{u_n}{n}
$$

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

知仅需验证 $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{u_n}{n}$ 收敛即知 $\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{u_n}{n^p}$ 收敛. 由

$$
\begin{aligned}
u_n&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=\left.\frac{t}{(1+t^4)^n}\right|_0^1-\int_0^1\frac{-n\cdot 4t^3}{(1+t^4)^{n+1}}\cdot t\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2^n}+4n\int_0^1\frac{1+t^4-1}{(1+t^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2^n}+4n(u_n-u_{n+1})
\end{aligned}
$$

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

知

$$
\sum_{n=1}^\infty\frac{u_n}{n}=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n2^n}+4\sum_{n=1}^\infty(u_n-u_{n+1})=\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n2^n}+4u_1.
$$

微信公众号: 跟锦数学

算出

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n2^n}&=\left.\sum_{n=1}^\infty\frac{x^n}{n}\right|_{x=\frac12}=\left.\sum_{n=1}^\infty\int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t\right|_{x=\frac12}\\
&=\int_0^{\frac12}\frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t=\ln 2.
\end{aligned}
$$

微信: zhangzujin361

再设

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t, J=\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t,$$

则

$$\begin{aligned}
I+J&=\int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{\frac{1}{t^2}+1}{\frac{1}{t^2}+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2}=\int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}s}{s^2+2}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2}\,\mathrm{d}\frac{s}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2},\\
J-I&=\int_0^1 \frac{t^2-1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{1-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+t^2}\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2}=\int_{+\infty}^2 \frac{\mathrm{d}s}{s^2-2}\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_2^\infty\left(\frac{1}{s-\sqrt{2}}-\frac{1}{s+\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}s=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\left[(I+J)-(J-I)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right)\\
&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\pi+\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\pi+\ln(3+\sqrt{2})\right]\ (\text{分母有理化})\\
&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\pi+2\ln(1+\sqrt{2})\right],
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{u_n}{n}=\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\pi+2\ln(1+\sqrt{2})\right].$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

26　第12届中国大学生数学竞赛数学B类预赛试题参考解答

1. (15 分) 已知椭球面

$$\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, a>b$$

的外切柱面 Σ_ε ($\varepsilon=1$ 或 -1 平行于已知直线

$$l_\varepsilon:\frac{x-2}{0}=\frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-3}{c}.$$

试求与 Σ 交于一个圆周的平面的法方向. 注：本题中的外切柱面指的的每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面. 张祖锦解.设外切柱面的直母线 l 与椭球面 Σ 相切于 $M_1(x_1,y_1,z_1)$. 则

$$l\parallel l_1\Rightarrow l:\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-z_1}{c}=t,$$

$$M_1\in\Sigma_0\Rightarrow\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}=1.$$

进而

$$\begin{aligned}
&l\text{ 与 }\Sigma\text{ 相切于 }M_1\\
\Rightarrow&\left\{\begin{array}{l}x=x_1,y=y_1+\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}t,z=z_1+ct\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\end{array}\right.\quad\text{只有零解}\\
\Rightarrow&\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{(y_1+\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}t)^2}{b^2}+\frac{(z_1+ct)^2}{c^2}=1\text{只有零解}\\
\Rightarrow&\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}+1\right)t^2+2\left(\frac{\varepsilon y\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}+\frac{z_1}{c}\right)t=0\text{只有零解}\\
\Rightarrow&\frac{\varepsilon y_1\sqrt{a^2-b^2}}{b^2}+\frac{z_1}{c}=0\\
\Rightarrow&y_1=\frac{b^2}{ca^2}(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z),z_1=-\varepsilon\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z)\\
&\left(\text{联合 }\frac{y-y_1}{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{z-z_1}{c},\text{求解关于 }y_1,z_1\text{ 的线性方程组}\right).
\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
1&=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\\
&=\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{c^2a^4}(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z)^2\\
&\quad+\frac{a^2-b^2}{a^4c^2}(cy-\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}z)^2.\qquad(*)
\end{aligned}$$

这就是外切柱面方程. 令 $z=0$, (*) 化简为 $x^2+y^2=a^2$. 所以柱面 Σ_ε 与 xOy 平面相交于圆周 $x^2+y^2=a^2,z=0$. 由于与二次柱面 Σ_ε 的交线为圆周的所有平面都平行, 所以与 Σ 交于一个圆周的平面的法方向为 $\{0,0,1\}$. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (15 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$, 证明:

$$1 \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \leqslant \frac{4}{3}.$$

张祖锦解.由 Cauchy-Schwarz 不等式知

$$\begin{aligned}1 &= \left[\int_0^1 \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{\frac{1}{f(x)}}\,\mathrm{d}x\right]^2 \\ &\leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}.\end{aligned}$$

而另外一个不等号可见 数学考研竞赛00039. 实际上, 取 $m = 1, M = 3$, 则对 $\dfrac{[f(x)-m][f(x)-M]}{f(x)} \leqslant 0$ 关于 x 积分有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - (m+M) + mM\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x &\leqslant (m+M)t - mMt^2 \quad \left(\text{取 } t = \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \\ &\leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.\end{aligned}$$

另外, 第10届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题03也考过呢. 我把所有 cmc 的试题都做了, 其实哪, 数学有时考非数的, 非数有时考数学的. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (15 分) 设 A 为 n 阶复方阵, $p(x)$ 为 A 的特征多项式.又设 $g(x)$ 为 m 次复系数多项式, $m \geqslant 1$. 证明: $g(A)$ 可逆当且仅当 $p(x)$ 与 $g(x)$ 互素. 张祖锦解.设 A 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, 则 $g(A)$ 的特征值为 $g(\lambda_1), \cdots, g(\lambda_n)$, 进而

$$\begin{aligned}g(A)\text{ 可逆 } &\Leftrightarrow |g(A)| = \prod_{i=1}^n g(\lambda_i) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow g(\lambda_i) \neq 0, \forall\ i \\ &\Leftrightarrow g(x) \text{ 与 } p(x) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i) \text{ 没有公共根} \\ &\Leftrightarrow (g,p) = 1.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (20 分) 设 σ 为 n 维复向量空间 $\mathbb{C}^n$ 的一个线性变换, $\mathscr{E}$ 表示恒等变换. 证明以下两条等价:

(1) $\sigma=k\mathscr{E}, k\in\mathbb{C}$;

(2) 存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量: $v_1,\cdots,v_{n+1}$, 这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

张祖锦解.

(1) $\Rightarrow$: 存在 σ 的 $n+1$ 个特征向量:

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,v_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},v_{n+1}=\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

这 $n+1$ 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

(2) 设 λ_i 为对应于 v_i 的特征值, 则

$$\sigma(v_i)=\lambda_i v_i, i=1,2,\cdots,n.$$

记 $s=\lambda_1+\cdots+\lambda_{n+1}$, 则

$$\begin{aligned}
&v_1,\cdots,v_{i-1},v_{i+1},\cdots,v_n\text{ 线性无关}\\
\Rightarrow&v_1,\cdots,v_{i-1},v_{i+1},\cdots,v_n\text{ 是 }\mathbb{C}^n\text{ 的一组基}\\
\Rightarrow&\sigma(v_1,\cdots,v_{i-1},v_{i+1},\cdots,v_n)\\
&\quad=(v_1,\cdots,v_{i-1},v_{i+1},\cdots,v_n)\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},\cdots,\lambda_n)\\
\Rightarrow&\operatorname{tr}\sigma=s-\lambda_i,\forall\ i\\
\Rightarrow&\lambda_1=\cdots=\lambda_n=\lambda_{n+1}\ \ (\equiv k)\\
\Rightarrow&\sigma=k\mathscr{E}.
\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (15 分) 计算广义积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}\mathrm{d}x,$$

这里 (x) 表示 x 的小数部分 (例如: 当 n 为正整数且 $x\in[n,n+1)$ 时, $(x)=x-n$). 张祖锦解.对 $m\in\mathbb{Z}_+$, 有

$$\begin{aligned}
\int_1^{m+1}\frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x&=\sum_{k=1}^m\frac{x-k}{x^3}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^m\left\{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{k}{2}\left(\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k^2}\right)\right\}\\
&=1-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\frac{2k+1}{k(k+1)^2}=1-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\frac{2(k+1)-1}{k(k+1)^2}\\
&=1-\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^m 2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\sum_{k=1}^m\frac{1}{k(k+1)^2}\right]\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\frac{1}{k(k+1)^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\frac{(k+1)-k}{k(k+1)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\frac{1}{(k+1)^2}\\
&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^m\frac{1}{(k+1)^2}.
\end{aligned}$$

令 $m\to\infty$, 并由数学考研竞赛00199知

$$\int_1^{+\infty}\frac{(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}-1\right)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=1-\frac{\pi^2}{12}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (20 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 满足对任意 $x\in[0,1]$,

$$\int_{x^2}^x f(t)\,\mathrm{d}t\geqslant\frac{x^2-x^4}{2}.$$

证明: $\displaystyle\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{10}$. 张祖锦解.由

$$\begin{aligned}
\frac{1}{15}=\int_0^1\frac{x^2-x^4}{2}\,\mathrm{d}x&\leqslant\int_0^1\left[\int_{x^2}^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\int_t^{\sqrt{t}}f(t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_0^1(\sqrt{t}-t)f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

知

$$\begin{aligned}
0&\leqslant\int_0^1\left[f(t)-(\sqrt{t}-t)\right]^2\,\mathrm{d}t\\
&=\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^1\left(\sqrt{t}-t\right)f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1(\sqrt{t}-t)^2\,\mathrm{d}t\\
&\leqslant\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t-\frac{2}{15}+\frac{1}{30}=\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{10}.
\end{aligned}$$