### 中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题及其参考解答

#### 张祖锦编著

https://mianbaoduo.com/o/gjsx 2021 年 3 月 23 日

# 微信公众 學: 跟锦数学

1	第01届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题	2
2	第02届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题	14
3	第03届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题	24
4	第04届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题	33
5	第05届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题 / O / zhangzujin	44
6	第06届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题	54
7	第07届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题	64
8	第08届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题	74
9	第09届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题	84
10	第10届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题	94
11	第11届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题	104
<b>12</b>	第12届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题	114
13	第12届中国大学生数学竞赛数学B类预赛试题	125

14	第01届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答	131
15	第02届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答mgzujin	137
16	第03届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答	146
<b>17</b>	第04届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答 https://mianbaoduo.com/o/gjsx	151
18	第05届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答	157
19	第06届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答	163
20	第07届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答	168
21	第08届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答	174
22	第09届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答 Zhangzujin361	179
23	第10届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答	184
	第11届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答	188
<b>25</b>	第12届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答	196
26	第12届中国大学生数学竞赛数学B类预赛试题参考解答	203

### 1 第01届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (每小题 5 分, 共 20 分).

### (1) 计算

https://n
$$\iint_{D} \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}} dx dy = \underline{\text{ngz}}$$
ijin

其中区域 D 由直线 x+y=1 与两坐标轴所围三角形区域.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

### (2) 设 f(x) 是连续函数,且满足

https://mia
$$f(x)$$
=3 $x^2$ + $\int_0^2 f(x) dx$ =12. $z$ ujin
则  $f(x) =$ \_\_\_\_.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

## 微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(3) 曲面  $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$  平行平面 2x + 2y - z = 0 的切平面方程是 \_\_\_\_. https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(4) 设函数 y=y(x) 由方程  $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y\ln 29$  确定,其中 f 具有二阶导数,且  $f'\neq 1$ ,则  $\mathrm{https://mianbaoduc.com/o/zhangzujin}$   $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2}=\underline{\qquad}.$ 

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

2. (5 分) 求极限  $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \dots + e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$ , 其中 n 是给定的正整数. https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### 4. (15 分) 已知平面区域

https:/ $D = \{(x,y); 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$ .ujin

#### L 为 D 的正向边界, 试证:

$$(1) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx;$$

$$(2) \oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geqslant \frac{5}{2} \pi^2.$$

## 微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

### 5. (10 分) 已知

https://mian
$$y_1 \equiv x e^x + e^{2x}$$
,/o/zhangzujin $y_2 = x e^x + e^{-x}$ , $y_3 = x e^x + e^{2x} - e^{-x}$ 

是某二阶常系数非齐次微分方程的三个解,试求此微分方程. https://mianbaoduo.com/o/gjsx

### 微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

6.  $(10\ eta)$  设抛物线  $y=ax^2+bx+2\ln c$  过原点,当  $0\leqslant x\leqslant 1$  时, $y\geqslant 0$ ,又已知该抛物线与 x 轴及直线 x=1 所围图形的面积为  $\frac{1}{3}$ . 试确定 a,b,c,使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 x0 最小.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

### 7. (15 分) 已知

上
$$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x\ (n=1,2,\cdots)$$
,且 $u_n(1)=rac{\mathrm{e}}{n}$ ,求函数项级数 $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ 之和.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

## 微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

8. (10 分) 求  $x \to 1^-$  时,与  $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$  等价的无穷大量.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

### 2 第02届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. (本题共 5 小题, 每小题各 5 分, 共 25 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 设 
$$x_n = (1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$$
, 其中  $|a| < 1$ , 求  $\lim_{n \to \infty} x_n$ .

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(2) 求  $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x^2}$ .

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(3) 设 
$$s > 0$$
, 求  $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx$   $(n = 1, 2, \cdots)$ .

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(4) 设函数 f(t) 有二阶连续导数,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $g(x,y) = f\left(\frac{1}{r}\right)$ , 求  $g''_{xx} + g''_{yy}$ . https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(5) 求直线  $l_1: \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \\ \text{https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin} \end{cases}$   $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 

的距离.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

2. (本题共 15 分) 设函数 f(x) 在  $(-\infty, +\infty)$  上具有二阶导数, 并且

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
$$f''(x) > 0$$
,  $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \alpha > 0$ ,  $\lim_{x \to -\infty} f'(x) = \beta < 0$ ,

且存在一点  $x_0$ ,使得  $f(x_0)<0$ . 证明: 方程 f(x)=0 在  $(-\infty,+\infty)$  恰有两个实根.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

3. (本题共 15 分) 设函数 y=f(x) 由参数方程  $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \\ zhangzujin \\ \mathbf{d}^2 y \qquad 3 \end{cases}$ 

$$rac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = rac{3}{4(1+t)},$$

其中  $\psi(t)$  具有二阶导数,曲线  $y=\psi(t)$  与

https://mianb<sub>t</sub>todio.con<sub>3</sub>/o/gjsx  
$$y = \int_{1}^{t_0} e^{u^2} du + \frac{3}{2e}$$

在 t=1 处相切. 求函数  $\psi$ .

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

 $4. \ ($ 本题共  $15 \ eta)$  设  $a_n > 0, S_n = \sum_{k=1}^n a_k,$  证明:

- https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin (1) 当  $\alpha > 1$  时,级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$  收敛;
- (2) 当  $\alpha \leq 1$ , 且  $S_n \to 0$   $(n \to \infty)$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$  发散. https://mianbaoduo.com/0/gjsx

5. (本题共 15 分) 设 l 是过原点、方向为  $(\alpha,\beta,\gamma)$  (其中  $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ ) 的直线,均匀椭圆

https://mianbaadua.com/o/zhangzujin
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

(其中 0 < c < b < a, 密度为 1) 绕 l 旋转.

- (1) 求其转动惯量; tps://mianbaoduo.com/o/gjsx
- (2) 求其转动惯量关于方向  $(\alpha,\beta,\gamma)$  的最大值和最小值.

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

6. (本题共 15 分) 设函数  $\varphi(x)$  具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上, 曲线积分

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
$$\oint_C rac{2xy\,\mathrm{d}x + arphi(y)}{x^4 + y^2}$$

的值为常数.

(1) 设 L 为正向闭曲线  $(x-2)^2+y^2=1$ . 证明:

$$\oint\limits_L rac{2xy\,\mathrm{d}x + arphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4 + y^2} = 0;$$

- (2) 求函数  $\varphi(x)$ ; 微信公众号: 跟锦数学
- (3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求

$$\oint_{L} \frac{2xy \, dx + \varphi(x) \, dy}{x^4 + y^2}.$$
The standard properties of t

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

### 3 第03届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. (本大题共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

$$(1) \, \lim_{x o 0} rac{(1+x)^{rac{2}{x}} - \mathrm{e}^2 \left[1 - \ln(1+x)
ight]}{x}.$$

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(3) 求

https://mianb
$$\iint_{D}$$
sgn $(xy_{T1})dxdy_{1}$ ngzujin

其中  $D = \{(x, y); 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}.$ 

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(4) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$  的和函数,并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}}$  的和. https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

- 2. (本题共 16 分) 设  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  为数列,  $a, \lambda$  为有限数, 求证:
  - (1) 如果  $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ,则 $\lim_{n\to\infty} a_n$  , $\lim_{n$

$$\lim_{n o\infty}rac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

(2) 如果存在正整数 p, 使得  $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$ , 则 https://mianbaoduo.com/o/gjsx  $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$ .

$$\lim_{n o\infty}rac{a_n}{n}=rac{\lambda}{p}.$$

3. (本题共 15 分) 设函数 f(x) 在闭区间 [-1,1] 上具有连续的三阶导数, 且

https://mianbaody.com/f(1) = 1/f'(0) = 0.gzujin

求证: 在开区间 (-1,1) 内至少存在一点  $x_0$ , 使得  $f'''(x_0)=3$ .

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

4. (本题 15 分) 在平面上,有一条从点 (a,0) 向右的射线,其线密度为  $\rho$ . 在点 (0,h) (其中 h>0) 有一质量为 m 的质点. 求射线对该质点的引力.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

5. (本题共 15 分) 设 z = z(x,y) 是由方程

https://miar
$$F(zdu_{x}^{1},zou_{y}^{1})$$
> $\neq 20$ nangzujin

确定的隐函数,其中 F 具有连续的二阶偏导数,且  $F_u(u,v)=F_v(u,v)\neq 0$ . 求证:  $x^2z_x'+y^2z_y'=0$  和

http
$$x^3z''_{xx} + xy(x+y)z''_{xy} + y^3z''_{yy} = 0.$$

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

6. (本题共 15 分) 设函数 f(x) 连续, a,b,c 为常数,  $\Sigma$  是单位球面  $x^2+y^2+z^2=1$ . 记第一型曲面积分

https://mianba.duo.com/o/zhangzujin
$$I = \iint_{\Sigma} f(ax + by + cz) dS.$$

菜证: 
$$I = 2\pi \int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}u\right) du$$
.

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

### 4 第04届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. (本题共 5 小题, 每小题各 6 分, 共 30 分) 解答下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 求极限  $\lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}};$ 

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(2) 求通过直线  $L:egin{cases} 2x+y-3z+2=0\ 5x+5y-4z+3=0\$ 使其中一个平面过点 (4,-3,1); 的两个相互垂直的平面  $\pi_1$  和  $\pi_2,$ 

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(3) 已知函数  $z=u(x,y)\mathrm{e}^{ax+by}$ ,且  $u''_{xy}=0$ ,确定常数 a 和 b,使得函数 z=z(x,y) 满足方程  $z''_{xy}-z'_x-z'_y+z=0$ ; https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

### (4) 设函数 u=u(x) 连续可微, u(2)=1, 且

https:// $\min \int_L (x+2y)u \, dx + (x+u^3)u \, dy$ \_ujin 在右半平面上与路径无关,求 u(x);

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(5) 求极限 
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}} \, \mathrm{d}t.$$

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

2. (本题 10 分) 计算  $\int_{0}^{+\infty} e^{2x} |\sin x| dx$ .

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

3. (本题 10 分) 求方程  $x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$  的近似解,精确到 0.001.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

4. (本题 12 分) 设函数 y=f(x) 二阶可导,且 f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0,求  $\lim_{x\to 0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}$ ,其中 u 是曲线 y=f(x) 上点 P(x,f(x)) 处的切线在 x 轴上的截距.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

5. (本题 12 分) 求最小实数 C, 使得对满足  $\int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x = 1$  的连续函数 f(x), 都 有  $\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)^t \, \mathrm{d}x \leqslant C$ . mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

6. (本题 12 分) 设 f(x) 为连续函数, t > 0. 区域  $\Omega$  是由抛物面  $z = x^2 + y^2$  和球面  $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$  所围起来的上半部分. 定义三重积分

面 
$$x^2+y^2+z^2=t^2$$
 所围起来的上半部分. 定义三重积分 $f(t)=\iint_{\Omega}f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v.$ 

求 F(t) 的导数 F'(t).

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

7. (本题 14 分) 设  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  为正项级数,那么 https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin (1) 若  $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n} - \frac{1}{b_{n+1}}\right) > 0$ ,则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

# 5 第05届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. (共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分) 解答下列各题. hang Zujin

(1) 求极限 
$$\lim_{n o \infty} \left(1 + \sin \pi \sqrt{1 + 4n^2}\right)^n$$
.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(2) 证明广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  不是绝对收敛的.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(3) 设函数 y = y(x) 由  $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$  所确定.求 y(x) 的极值.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(4) 过曲线  $y=\sqrt[3]{x}$   $(x\geqslant 0)$  上的点 A 作切线, 使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为  $\frac{3}{4}$ , 求点 A 的坐标. https://mahbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### 2. (12 分) 计算定积分

https://m
$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^x}{1 + \cos^2 x} dx$$
.gzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

3. (12 分) 设 f(x) 在 x=0 处存在二阶导数 f''(0),且  $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}=0$ . 证明:级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$  收敛.  $\frac{1}{n}$ 

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

4. (10 分) 设  $|f(x)| \leqslant \pi, f'(x) \geqslant m > 0 \ (a \leqslant x \leqslant b)$ . 证明:

https://mian
$$\left|\int_a^b \sin f(x) dx\right| \leqslant \frac{2}{m}$$
.hangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### 5. $(14 \ \%)$ 设 $\Sigma$ 是一个光滑封闭曲面,方向朝外. 给定第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 - x) \, dy \, dz + (2y^3 - y) \, dz \, dx + (3z^3 - z) \, dx \, dy.$$

试确定曲面  $\Sigma$ , 使得积分 I 的值最小, 并求该最小值.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

6. (14 分) 设  $I_a(r)=\int_C \dfrac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^a},$  其中 a 为常数,曲线 C 为椭圆  $x^2+xy+y^2=r^2,$  取正向. |求极限  $\lim_{r\to +\infty} I_a(r)$ 。 oduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

7. (14 分) 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$  的敛散性,弱收敛,求其和. https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

# 6 第06届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

- 1. 填空题 (共有 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分). Zhangzujin
  - (1) 已知  $y_1 = e^x$  和  $y_2 = xe^x$  是齐次二阶常系数线性微分方程的解,则该方程是

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(2) 设有曲面  $S:z=x^2+2y^2$  和平面 L:2x+2y+z=0,则与平面 L 平行的 S 的切平面方程是 .

加平画方程定 https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(3) 设函数 y = y(x) 由方程  $x = \int_{1}^{y-x} \sin^{2}\left(\frac{\pi t}{4}\right) dt$  所确定,求  $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} =$  \_\_\_\_\_\_\_ https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

$$(4)$$
 设  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$ ,则  $\lim_{n \to \infty} x_n =$ \_\_\_\_. https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

# 微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(5) 已知 
$$\lim_{x\to 0} \left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^3$$
,则  $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} =$ \_\_\_\_.
https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

# 2. (本题满分 12 分) 设 <math>n 为正整数, 计算

https://n
$$I = \int_{e^{-2n\pi}}^{1} \left| \frac{d}{dx} \cos \left( \ln \frac{1}{x} \right) \right| dx$$
.gzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

3. (本题满分 14 分) 设函数 f(x) 在 [0,1] 上有二阶导数,且存在正常数 A,B 使得  $|f(x)| \leqslant A, |f''(x)| \leqslant B.$  证明:对任意  $x \in [0,1]$ ,有 https://mianbaoduo.com/B/zhangzujin  $|f'(x)| \leqslant 2A + \frac{B}{2}$ .

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### 4. (本题满分 14 分)

- (1) 设一球缺高为 h, 所在球半径为 R. 证明该球缺的体积为  $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$ , 球冠的面积为  $2\pi Rh$ .
- (2) 设球体

https:
$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \le 12$$

被平面 P: x+y+z=6 所截的小球缺为  $\Omega$ . 记球缺上的球冠为  $\Sigma$ , 方向指向球外, 求第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + y \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}x + z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

5. (本题满分 15 分) 设 f 在 [a,b] 上非负连续, 严格单增, 且存在  $x_n \in [a,b]$  使得

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
$$[f(x_n)]^n = \frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n dx,$$

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

# 6. (本题满分 15 分) 设

https:
$$\stackrel{A}{n}$$
元 $\overline{n}$ 元 $\overline{n}$ 1 $\overline{n}$ 2 $\overline{n}$ 

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

# 微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

# 7 第07届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分). hangzujin

$$(1)$$
 极限  $\lim_{n o\infty} n\left(rac{\sinrac{\pi}{n}}{n^2+1}+rac{\sinrac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\cdots+rac{\sin\pi}{n^2+n}
ight)=$ \_\_\_\_\_.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### (2) 设函数 z=z(x,y) 由方程

https://mianb
$$F(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})z=0$$
ngzujin

所决定, 其中 F(u,v) 具有连续偏导数, 且  $xF_u+yF_v\neq 0$ . 则

https://mianbaoduy.com/o/gjsx (本小题结果要求不显含 F 及其偏导数)

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(3) 曲面  $z=x^2+y^2+1$  在点 M(1,-1,3) 的切平面与曲面  $z=x^2+y^2$  所围区域的体积为 . https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(5) 设区间  $(0,+\infty)$  上的函数 u(x) 定义为

https://mianba
$$u(x)$$
i $=$   $\int_{0}^{+\infty} e^{-xt^2}/dt$ , angzujin

则 u(x) 的初等函数表达式是 .

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

# 2. (本题满分 12 分) 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面, 求其方程.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

3. (本题满分 12 分) 设 f(x) 在 (a,b) 内二次可导,且存在常数  $\alpha,\beta$ ,使得对于  $\forall~x\in(a,b)$ ,有

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin $f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x),$ 

则 f(x) 在 (a,b) 内无穷次可导.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

4. (本题满分 14 分) 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+2}{(n+1)!} (x-1)^n$  的收敛域,及其和函数. https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

5. (本题满分 16 分) 设函数 f 在 [0,1] 上连续, 且

https://
$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$
,  $\int_0^1 x f(x) dx = 1$ ; zujin

试证:

- (1)  $\exists \ x_0 \in [0,1]$  使  $|f(x_0)| > 4;$
- (2)  $\exists x_1 \in [0,1]$ 使  $|f(x_1)| = 4$ .nbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

6. (本题满分 16 分) 设 f(x,y) 在  $x^2 + y^2 \le 1$  上有连续的二阶偏导数, 且

https://mian
$$f_{xx}^{\prime\prime2}+2f_{xy}^{\prime\prime2}+f_{yy}^{\prime\prime2}$$
《 $M$ hangzujin 若  $f(0,0)=0,f_x(0,0)=f_y(0,0)=0,$  证明:

https:
$$\left|\iint_{x^2+y^2\leq 1} f(x,y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{\pi\sqrt{M}}{4}$$
;sx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

## 8 第08届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (满分 30 分, 每小题 6 分). uo.com/o/zhangzujin

(1) 若 f(x) 在点 x=a 可导,且  $f(a)\neq 0$ ,则

$$\operatorname{https:}/\operatorname{nn}_{\rightarrow \infty}^{\text{lim}} \left[ \frac{f\left(a + \frac{1}{n}\right)}{a f(a)} \right]^{n} = \frac{1}{\left(a + \frac{1}{n}\right)}$$

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(2) 若 f(1) = 0, f'(1) 存在, 则极限

$$\operatorname{https:}//\lim_{x o 0} rac{f(\sin^2 x + \cos x) an 3x}{(\mathrm{e}^{x^2} - 1) \sin x} = \underline{\mathrm{gzu}}$$
jin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(3) 设 f(x) 有连续导数,且 f(1)=2. 记  $z=f(\mathbf{e}^xy^2)$ ,若  $z_x'=z$ ,求 f(x) 在 x>0 的表达式. https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

$$(4)$$
 设  $f(x) = e^x \sin 2x$ , 则  $f^{(4)}(0) =$ \_\_\_\_\_.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(5) 曲面  $z = \frac{x^2}{2} + y^2$  平行与平面 2x + 2y - z = 0 的切平面方程为 \_\_\_\_. https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

2. (满分 14 分) 设 f(x) 在 [0,1] 上可导, f(0)=0, 且当  $x\in (0,1), 0< f'(x)<1$ . 试证: 当  $a\in (0,1),$ 

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
$$\left[\int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x\right]^2 > \int_0^a f^3(x) \, \mathrm{d}x.$$

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### 3. (满分 14 分) 某物体所在的空间区域为

https:// $_1\Omega$ : $x^2$ + $y^2$ + $2z^2$  $\leqslant x$ +y+2zgzujin 密度函数为  $x^2+y^2+z^2$ ,求质量

$$M = \iiint (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$
https://manbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

4. (满分 14 分) 设函数 f(x) 在闭区间 [0,1] 上具有连续导数, f(0)=0,f(1)=1. 证明:

https://mjanbaoduo.com/o/zhangzujin 
$$\lim_{n\to\infty} n \left[ \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = -\frac{1}{2}.$$

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

5. (满分 14 分) 设函数 f(x) 在区间 [0,1] 上连续, 且

https://mianl
$$I = \int_0^1 f(x) dx \neq 0$$
zhangzujin

证明在 (0,1) 内存在不同的两点  $x_1,x_2$ , 使得

$$\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} = \frac{2}{I}.$$
https://mianbaodio.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

6. (满分 14 分) 设 f(x) 在  $(-\infty, +\infty)$  可导, 且

https://f(x) = f(x+2) =  $f\left(x+\sqrt{3}\right)$  gzujin 用 Fourier 级数理论证明 f(x) 为常数.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### 9 第09届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

- 1. 填空题 (本题共 42 分, 共 6 小题, 每小题 7 分). Zhang Zujin
  - (1) 已知可导函数 f(x) 满足

$$f(x)\cos x + 2\int_0^x f(t)\sin t \,\mathrm{d}t = x+1,$$
 https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(2) 极限 
$$\lim_{n o\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}
ight)=$$
\_\_\_\_\_.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

## (3) 设 w = f(u, v) 具有二阶连续偏导数,且

https://mianlu = x + cy + x + cy + x

$$w''_{xx} - \frac{1}{c^2}w''_{yy} = \underline{\qquad}$$
.  
https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### (4) 设 f(x) 具有二阶连续导数,且

https://miaf(0)=f'(0)=0,f''(0)=6gzujin

则 
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \underline{\hspace{1cm}}.$$

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

# 微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(5) 不定积分 
$$I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx = ____.$$
https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

2. (本题 14 分) 设二元函数 f(x,y) 在平面上有连续的二阶偏导数, 对任意角度  $\alpha$ , 定义一元函数

 $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{t} dt = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{t} \frac{1$ 

若对任何  $\alpha$  都有  $\frac{\mathrm{d}g_{\alpha}(0)}{\mathrm{d}t}=0$  且  $\frac{\mathrm{d}^2g_{\alpha}(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$ ,证明: f(0,0) 是 f(x,y) 的极小值.  $\mathrm{https:}//\mathrm{mianbaoduo.com/o/gjsx}$ 

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### 3. (本题 14 分) 设 Γ 为曲线

上从点 A(1,0,0) 到点 B(0,0,1) 的一段. 求曲线积分

$$I = \int_{\Gamma} y \, dx + z \, dy + x \, dz.$$
https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

4. (本题 15 分) 设函数 f(x) > 0 且在实轴上连续, 若对任意实数 t, 有

https://mianbagedie
$$f(x)dx \leq 1$$
.hangzujin

证明:  $\forall a, b, a < b,$  有

$$\text{https:}//\text{sanbaoduo.c2m/o/gjsx}$$

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

5. (本题 15 分) 设  $\{a_n\}$  为一个数列, p 为固定的正整数, 若  $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$ . 证明:

https://mianbaoduo.com
$$\lambda$$
o/zhangzujin 
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### 10 第10届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题满分 24 分, 共 4 小题, 每小题 6 分). hangzujin

$$(1)$$
 设 $\alpha \in (0,1)$ ,则 $\lim_{n o \infty} [(n+1)^{lpha} - n^{lpha}] =$ \_\_\_\_\_.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(2) 若曲线 y=y(x) 由  $\left\{egin{array}{ll} x=t+\cos t & ext{qic.} \\ e^y+ty+\sin t=1 & ext{disc.} \end{array}
ight.$  体的切线方程为  $\left[egin{array}{ll} x=t+\cos t & ext{qic.} \\ -x=t+\cos t & ext{qic.} \end{array}
ight]$  从为 $\left[egin{array}{ll} x=t+\cos t & ext{qic.} \\ -x=t+\cos t & ext{qic.} \end{array}
ight]$  从为 $\left[egin{array}{ll} x=t+\cos t & ext{qic.} \\ -x=t+\cos t & ext{qic.} \end{array}
ight]$  从为 $\left[egin{array}{ll} x=t+\cos t & ext{qic.} \\ -x=t+\cos t & ext{qic.} \end{array}
ight]$  从为 $\left[egin{array}{ll} x=t+\cos t & ext{qic.} \\ -x=t+\cos t & ext{qic.} \end{array}
ight]$  从为 $\left[egin{array}{ll} x=t+\cos t & ext{qic.} \\ -x=t+\cos t & ext{qic.} \end{array}
ight]$  从为 $\left[egin{array}{ll} x=t+\cos t & ext{qic.} \\ -x=t+\cos t & ext{qic.} \end{array}
ight]$  从为 $\left[egin{array}{ll} x=t+\cos t & ext{qic.} \\ -x=t+\cos t & ext{qic.} \end{array}
ight]$  从为 $\left[egin{array}{ll} x=t+\cos t & ext{qic.} \\ -x=t+\cos t & ext{qic.} \end{array}
ight]$  从为 $\left[egin{array}{ll} x=t+\cos t & ext{qic.} \\ -x=t+\cos t & ext{qic.} \end{array}
ight]$  从为 $\left[egin{array}{ll} x=t+\cos t & ext{qic.} \\ -x=t+\cos t & ext{qic.} \end{array}
ight]$ 

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(4) 
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \underline{\qquad}.$$
 https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

# 微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

2. (本题满分 8 分) 设函数 f(t) 在  $t\neq 0$  时一阶连续可导,且 f(1)=0,求函数  $f(x^2-y^2)$ ,使得曲线

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
$$\int_{L} [y(2-f(x^2-y^2))] \,\mathrm{d}x + xf(x^2-y^2) \,\mathrm{d}y$$

与路径无关, 其中 L 为任一不与直线  $y = \pm x$  相交的分段光滑曲线.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

3. (本题满分 14 分) 设 f(x) 在区间 [0,1] 上连续, 且  $1 \leq f(x) \leq 3$ . 证明:

https://niefigf(x)dx:
$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{4}{3}$$
zujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

# 4. (本题满分 12 分) 计算三重积分 $\iiint_V (x^2+y^2) \, \mathrm{d}V$ , 其中 V 是由 $\mathrm{https:}//\mathrm{mianbaoduo.com/o/zhangzujin}$ $x^2+y^2+(z-2)^2\geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 9, z\geqslant 0$ 所围成的空心立体.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

# 微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

5. (本题满分 14 分) 设 f(x,y) 在区域 D 内可微, 且

https://mi
$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}$$
d $\mu \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$ / $\ll M$ , hangzujin

 $A(x_1,y_1),\,B(x_2,y_2)$  是 D 内两点, 线段 AB 包含在 D 内. 证明:

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|, \ ext{https:}/ ext{mianbaoduo.com/o/gjsx}$$

其中 |AB| 表示线段 AB 的长度.

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

6. (本题满分 14 分) 证明: 对于连续函数 f(x) > 0, 有

https://lni
$$\int_0^1 f(x) dx \ge \int_0^1 \ln f(x) dx$$
.ngzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### 7. (本题满分 14 分) 已知 $\{a_k\}$ , $\{b_k\}$ 是正项级数, 且

https:// $b_{k+1}$ an $b_k \geqslant \delta \geqslant 0$ , ka $\mp/1,2$ hangzujin

 $\delta$  为一正常数. 证明: 若级数  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n}$  收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}rac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$$
 six

收敛.

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

## 11 第11届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分) hangzujin (1)

$$\lim_{x o 0} rac{\ln \left( \mathrm{e}^{\sin x} + \sqrt[3]{1 - \cos x} 
ight) - \sin x}{\operatorname{arctan} \left( 4\sqrt[3]{1 - \cos x} 
ight)} = \underline{\hspace{1cm}}.$$

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(2) 设隐函数 y = y(x) 由方程  $y^2(x - y) = x^2$  所确定, 则

https://mianbaod $\int \frac{dx}{y^2} = \frac{dx}{y^2}$ 

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### (3) 定积分

https://mias
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x} dx = \underline{\text{han-gzujin}}$$

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(4) 已知

https:
$$\Big/\Big/$$
mi $\,\mathrm{d} u(x,y)=rac{y\,\mathrm{d} x-x\,\mathrm{d} y}{3x2-2xy+3y^2}$ ,  
则  $\,u(x,y)=$ \_\_\_\_\_.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(5) 设  $a,b,c,\mu>0$ , 曲面  $xyz=\mu$  与曲面

https://mianbac
$$\frac{x_1^2}{a^2}$$
地 $\frac{y^2}{b^2}$ 中 $\frac{z^2}{c^2}$ 中和ngzujin相切,则  $\mu=$ \_\_\_\_.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

### 2. (本题满分 14 分) 计算三重积分

https://mian
$$\iint_{\Omega} \frac{xyz}{x^2+y^2} dx dy dz$$
,hangzujin

其中  $\Omega$  是由曲面  $(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$  围成的区域在第一卦限的部分.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

3. (本题满分 14 分) 设 f(x) 在  $[0,+\infty)$  上可微, f(0)=0, 且存在常数 A>0, 使得

https://mianbaf'(x)| $\leq A|f(x)|$ /zhangzujin

在  $[0,+\infty)$  上成立, 试证明在  $(0,+\infty)$  上有  $f(x) \equiv 0$ .

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

### 4. (本题满分 14 分) 计算积分

https:/
$$I/=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\sin\theta(\cos\phi-\sin\phi)} \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$$
.jin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

### 5. (本题满分 14 分) 设 f(x) 是仅有正实根的多项式函数, 满足

https://mianb
$$f(x)$$
 uo.c $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ .zhangzujin

证明:  $c_n>0, \ (n\geqslant 0),$  极限  $\lim_{n o\infty} rac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$  存在,且等于 f(x) 的最小根.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

# 微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

6. (本题 14 分) 设函数 f(x) 在  $[0,+\infty)$  上具有连续导数,满足

https: $\sqrt{3[3+f^2(x)]f'(x)} = 2[1+f^2(x)]^2 e^{-x^2}$ , jin

且  $f(0) \leq 1$ . 证明:存在常数 M > 0,使得  $x \in [0, +\infty)$  时,恒有  $|f(x)| \leq M$ .

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

# 12 第12届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题

1. 填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分, 共 5 小题) Thang Zujin

(1) 极限 
$$\lim_{x o 0}rac{(x-\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$$
\_\_\_\_\_.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(2) 设函数 
$$f(x) = (x+1)^n e^{-x^2}$$
, 则  $f^{(n)}(-1) =$ \_\_\_\_.

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(3) 设 y = f(x) 是由方程

$$\operatorname{https:}//\operatorname{arctan} rac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + rac{1}{2} \ln 2 + rac{\pi}{4} \ln 2$$

确定的隐函数,且满足 f(1)=1,则曲线 y=f(x) 在点 (1,1) 处的切线方程为 .

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(4) 已知 
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$
, 则 https://sin/ $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x \sin(x+y)}{x(x+y)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \underline{\qquad}$ .

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

# 微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

(5) 设 f(x), g(x) 在 x = 0 的某一邻域 U 内有定义, 对任意  $x \in U, f(x) \neq g(x),$ 

且

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin  $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = a > 0,$ 

则

$$\text{https:} \lim_{x \to 0} \frac{[f(x)]^{g(x)} - [g(x)]^{g(x)}}{f(x) - g(x)} = /\underline{gjs}.$$

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

2. (本题满分 10 分) 设数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1=1,$  且

$$\mathrm{https:}//\mathrm{n}a_{n+1}$$
声 $\overline{a_n}$   $\overline{(n+1)(a_n+1)}, n \geqslant 1$ .gzujin 求极限  $\lim_{n \to \infty} n! a_n$ .

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

3. (本题满分 10 分) 设 f(x) 在 [0,1] 上连续, f(x) 在 (0,1) 内可导, 且 f(0)=0, f(1)=1. 证明:

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin (1) 存在  $x_0 \in (0,1)$ , 使得  $f(x_0) = 2 - 3x_0$ ;

(2) 存在  $\xi, \eta \in (0,1)$ , 且  $\xi \neq \eta$ , 使得

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

# 4. (本题满分 12 分) 已知

https://mi
$$z = xf(\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} + 2y\varphi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$$
ngzujin

其中  $f, \varphi$  均为二次可微函数.

(1) 求  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ;
(2) 当  $f = \varphi$ , 且 ttps://mianbaoduo.com/o/gjsx

$$\left. rac{\partial^2 z}{\partial oldsymbol{x} \partial oldsymbol{y}} 
ight|_{oldsymbol{x} = oldsymbol{a}} = -oldsymbol{b} oldsymbol{y}^2$$

时, 求 f(y). 微信公众号: 跟锦数学

# 5. (本题满分 12 分) 计算

https://mi
$$I_{\Gamma}$$
  $= \int_{\Gamma} \sqrt{3} y - x dx / \sqrt{5} z dz$ ,ngzujin

曲线 
$$\Gamma: \left\{ egin{array}{ll} x^2+y^2+z^2=8 \\ x^2+y^2=2z \end{array} 
ight.$$
,从  $z$  轴正向往坐标原点看去取逆时针方向。 https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### 6. (本题满分 12 分) 证明

$$\text{https:} \big/ \big/ f(n) = \sum_{m=1}^n \int_0^m \cos \frac{2\pi n[x+1]}{m} \mathrm{d}x \text{zujin}$$

等于 n 的所有因子 (包括 1 和 n 本身) 之和, 其中 [x+1] 表示不超过 x+1 的最大整数, 并计算 f(2021).

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

# 7. (本题满分 14 分) 设

https://mi
$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+t^4)^n} (n \ge 1)$$
angzujin

- (1) 证明数列  $\{u_n\}$  收敛, 并求极限  $\lim_{n\to\infty} u_n$ ;
- (2) 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$  条件收敛; mianbaoduo.com/o/gjsx
- (3) 证明当  $p\geqslant 1$  时级数  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}rac{u_n}{n^p}$  收敛,并求级数  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}rac{u_n}{n}$  的和.

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

#### 第12届中国大学生数学竞赛数学B类预赛试题 13

1. (15 分) 已知椭球面/mianbaoduo.com/o/zhangzujin

$$arSigma_0: rac{x^2}{a^2} + rac{y^2}{b^2} + rac{z^2}{c^2} = 1, a > b$$

的外切柱面 
$$\Sigma_{arepsilon}$$
  $(arepsilon=1$  或  $-1$  平行于已知直线 https://mianbaoduo.com/ $\frac{z-3}{c}$  jsx  $l_{arepsilon}: rac{x-2}{0} = rac{y-1}{arepsilon\sqrt{a^2-b^2}} = rac{z-3}{c}.$ 

试求与  $\Sigma$  交于一个圆周的平面的法方向. 注: 本题中的外切柱面指的的每一条直 

2. (15 分) 设 f(x) 在 [0,1] 上连续, 且  $1 \leqslant f(x) \leqslant 3$ , 证明:

https://missl
$$f(x)$$
d $x$  $\int_0^1 \frac{dx}{f(x)} dx$  $\frac{4}{3}$ .gzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

3. (15 分) 设 A 为 n 阶复方阵, p(x) 为 A 的特征多项式.又设 g(x) 为 m 次复系 数多项式,  $m \ge 1$ . 证明: g(A) 可逆当且仅当 p(x) 与 g(x) 互素.

4.  $(20\ eta)$  设  $\sigma$  为 n 维复向量空间  $\mathbb{C}^n$  的一个线性变换,  $\mathscr{E}$  表示恒等变换. 证明以 下两条等价:

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin (1)  $\sigma = k\mathscr{E}, k \in \mathbb{C};$ 

- (2) 存在  $\sigma$  的 n+1 个特征向量:  $v_1,\cdots,v_{n+1},$  这 n+1 个向量中任何 n 个向 量均线性无关.

#### 5. (15 分) 计算广义积分

https://mianbao
$$\int_{1}^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx$$
/o/zhangzujin

这里 (x) 表示 x 的小数部分 (例如: 当 n 为正整数且  $x \in [n, n+1)$  时, (x) = x - n).

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

6. (20 分) 设函数 f(x) 在 [0,1] 上连续, 满足对任意  $x \in [0,1]$ ,

https://mian
$$\int_{x^2}^x f(t) dt \geqslant \frac{x^2 - x^4}{2}$$
hangzujin

证明: 
$$\int_0^1 f^2(x) \,\mathrm{d}x \geqslant rac{1}{10}.$$

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

### 14 第01届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (每小题 5分, 共 20分). duo.com/o/zhangzujin

(1) 计算

$$\iint_{D} \frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\min_{D} \frac{\sqrt{1-x-y}}{\sqrt{1-x-y}}} dx dy = \underline{\qquad},$$

其中区域 D 由直线 x+y=1 与两坐标轴所围三角形区域. 张祖锦解.设

$$\left\{egin{array}{c} x+y=u \ y=v \ \end{array}
ight\}\Leftrightarrow \left\{egin{array}{c} x=\dfrac{u}{1+v} \ y=\dfrac{uv}{1+v} \end{array}
ight.,$$

则

$$\left| rac{\partial (oldsymbol{u},oldsymbol{v})}{\partial (oldsymbol{x},oldsymbol{y})} 
ight| = \left| egin{matrix} 1 & 1 \ - oldsymbol{y} & 1 \ - oldsymbol{x}^2 & oldsymbol{x} \end{matrix} 
ight| = \left| oldsymbol{x} + oldsymbol{y} \ oldsymbol{x}^2 \end{matrix} 
ight| = \left| oldsymbol{x} (1+oldsymbol{v})^2 \ oldsymbol{u} 
ight|.$$

故

原式 = 
$$\int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^{+\infty} \frac{u \ln(1+v)}{\sqrt{1-u}} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} \mathrm{d}v$$

$$= \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} \, \mathrm{d}u \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2} \, \mathrm{d}v$$

$$\equiv I_1 \cdot I_2.$$

注意到

$$I_1 = \frac{u = \sin^2 \theta}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 \theta}{\cos \theta} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \theta \, d\theta = \frac{2 \cdot 4!!}{5!!} = \frac{16}{15},$$

及

$$I_2 = -\int_0^{+\infty} \ln(1+v) \, \mathrm{d}rac{1}{1+v} \ = \int_0^{+\infty} rac{1}{1+v} \cdot rac{1}{1+v} \, \mathrm{d}v = 1,$$

我们知原式 =  $\frac{16}{15}$ . 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 设 f(x) 是连续函数,且满足

https://mi
$$f(x) = 3x^2 - \int_0^2 f(x) dx = 2$$
zujin

则 f(x) = . 张祖锦解.

$$f(x)=3x^2-\int_0^2f(x)\,\mathrm{d}x-2.$$
mianbaoduo.com $\left< o$ gis两端关于 $x$ 从 $0$ 到 $2$ 积分得

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 8 - \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x - 4 \Rightarrow \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = rac{4}{3}.$$

代入原方程得  $f(x)=3x^2-rac{10}{3}$ . 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 曲面  $z = \frac{x^2}{2} + y^2 - 2$  平行平面 2x + 2y - z = 0 的切平面方程是 \_\_\_\_. 张 祖锦解.据题意,曲面在 (x,y,z) 处的法向量

$$n \equiv \{x, 2y, -1\} // \{2, 2, -1\}$$
.

故

$$rac{x}{2} = rac{2y}{2} = rac{1}{1} \Rightarrow x = 2, y = 1, z = rac{x^2}{2} + y^2 - 2 = 1.$$

故所求为ttps://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

$$0 = 2(x-2) + 2(y-1) - (z-1) = 2x + 2y - z - 5.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 设函数 y = y(x) 由方程  $xe^{f(y)} = e^y \ln 29$  确定, 其中 f 具有二阶导数, 且  $f' \neq 1$ , 则

$$rac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} =$$
\_\_\_\_\_.

张祖锦解. $x=\mathrm{e}^{y-f(y)}\ln 29$ . 两端对 x 求导有

$$egin{aligned} 1 &= \mathrm{e}^{y-f(y)}[1-f'(y)]y' \ln 29 = x[1-f'(y)]y' \ \Rightarrow &rac{1}{x} = [1-f'(y)]y'. \end{aligned}$$

$$-rac{1}{x^2} = -f''(y)y'^2 + [1-f'(y)]y''.$$

$$egin{aligned} & + \frac{1}{x^2} - f''(y)y'^2 & + \frac{1}{x^2} - f''(y)[xy']^2 \ & + \frac{1}{x^2} - f'(y) & + \frac{1}{x^2} - f''(y)[xy']^2 \ & + \frac{1}{x^2} - f''(y) & + \frac{1}{x^2} - f''(y) \end{bmatrix} = - \frac{1}{x^2} - \frac{1}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

https://mianbaoduo\_com/o/gjsx 2. (5 分) 求极限  $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x + e^{2x} + \cdots + e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ , 其中 n 是给定的正整数. 张祖锦解.

原式 = 
$$\exp\left[\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}}{x} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \dots + \mathrm{e}^{nx}}{n}\right)\right]$$

$$\frac{L'Hospital}{=} \exp\left[\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}}{1} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{2x} + \dots + \mathrm{e}^{nx}}{n}} \cdot \frac{\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{2x} + \dots + n\mathrm{e}^{nx}}{n}\right]$$

$$= \exp\left[\mathrm{e} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right] = \mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}\mathrm{e}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (15 分) 设函数 f(x) 连续,  $g(x) = \int_0^1 f(xt) \, dt$ , 且  $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = A$ , A 为常数, 求 g'(x) 并讨论 g'(x) 在 x = 0 处的连续性. 张祖锦解.由

$$egin{aligned} & ext{https:} / ext{mianbaod 10} & ext{com/o/zhangzujin} \ & ext{g}(x) \left\{ egin{aligned} & ext{x} = s \ ext{d} \end{array} 
ight. \int_{0}^{x} f(s) \, \mathrm{d}s, & ext{x} 
eq 0, \ 0, & ext{x} = 0 \end{aligned} 
ight.$$

知

$$g'(x) = egin{cases} \frac{1}{x^2} \Big[ xf(x) - \int_0^x f(s) \, \mathrm{d}s \Big], & x 
eq 0, \ \lim_{x o 0} rac{1}{x^2} \int_0^x f(s) \, \mathrm{d}s = \lim_{x o 0} rac{f(x)}{2x} = rac{A}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

故

$$egin{align} \lim_{x o 0} g'(x) &= \lim_{x o 0} \left[rac{f(x)}{x} - rac{1}{x^2}\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s
ight] \ &= A - \lim_{x o 0} rac{f(x)}{2x} = A - rac{A}{2} = rac{A}{2} = g'(0). \end{align}$$

这表明 g' 在 x=0 处连续. % (x) = 0 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

#### 4. (15 分) 已知平面区域

https: 
$$D = \{(x,y); 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$$
, ujin

L 为 D 的正向边界, 试证:

$$(1) \oint x \mathrm{e}^{\sin y} \, \mathrm{d}y - y \mathrm{e}^{-\sin x} \, \mathrm{d}x = \oint x \mathrm{e}^{-\sin y} \, \mathrm{d}y - y \mathrm{e}^{\sin x} \, \mathrm{d}x; \ \mathrm{https://miarbanduo.com/o/gjsx} \ (2) \oint_L x \mathrm{e}^{\sin y} \, \mathrm{d}y - y \mathrm{e}^{-\sin x} \, \mathrm{d}x \geqslant \frac{5}{2} \pi^2.$$

张祖锦解.

(1) 由 微信公众号: 跟锦数学

$$egin{aligned} & \oint_L x \mathrm{e}^{\sin y} \, \mathrm{d}y - y \mathrm{e}^{-\sin x} \, \mathrm{d}x \stackrel{Green}{=} & \iint_D (\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \ & \oint_L x \mathrm{e}^{-\sin y} \, \mathrm{d}y - y \mathrm{e}^{\sin x} \, \mathrm{d}x \stackrel{Green}{=} & \iint_D (\mathrm{e}^{-\sin y} + \mathrm{e}^{\sin x}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \ & \stackrel{y o -y}{=} & \iint_D (\mathrm{e}^{\sin y} + \mathrm{e}^{-\sin x}) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \end{aligned}$$

即知

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
$$\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx.$$

 $\oint_{L} x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx$   $\frac{Green}{=} \iint_{D} (e^{\sin y} + e^{-\sin x}) dx dy = \pi \int_{0}^{\pi} e^{\sin y} dy + \pi \int_{0}^{\pi} e^{-\sin x} dx$   $= \pi \int_{0}^{\pi} (e^{\sin t} + e^{-\sin t}) dt = 2\pi \int_{0}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin^{2k} t}{(2k)!} dt$   $\geqslant 2\pi \int_{0}^{\pi} \left(1 + \frac{\sin^{2} t}{2}\right) dt = 2\pi \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2}\pi^{2}.$ 

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学). 4 11136

#### 5. (10 分) 已知

https://mian
$$y_1 = xe^x + e^{2x}$$
/o/zhangzujin $y_2 = xe^x + e^{-x}$ , $y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 

是某二阶常系数非齐次微分方程的三个解, 试求此微分方程. 张祖锦解.由题设知  $e^{-x}$ ,  $e^{2x}$  是相应二阶常系数齐次微分方程的两个线性无关的解, 而  $xe^x$  是该二阶常系数非齐次微分方程的特解. 由

$$(\lambda+1)(\lambda-2)=\lambda^2-\lambda-2$$

知可设方程式为 微信公众号: 跟锦数学

$$y'' - y' - 2y = f(x).$$

将特解  $y = xe^x$  代入得

$$egin{aligned} f(x) &= (x \mathrm{e}^x)'' - (x \mathrm{e}^x)' - 2x \mathrm{e}^x \end{bmatrix} \ &= (x+2) \mathrm{e}^x - (x+1) \mathrm{e}^x - 2x \mathrm{e}^x = (1-2x) \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

故所求为  $y'' - y' - 2y = (1 - 2x)e^x$ . 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

- 6.  $(10\ f)$  设抛物线  $y=ax^2+bx+2\ln c$  过原点,当  $0\leqslant x\leqslant 1$  时, $y\geqslant 0$ ,又已知该抛物线与 x 轴及直线 x=1 所围图形的面积为  $\frac{1}{3}$ . 试确定 a,b,c,使此图形统 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 x 最小. 张祖锦解.
  - (1) 由抛物线  $y=ax^2+bx+2\ln c$  过原点知 c=1.
  - (2) 由该抛物线与 x 轴及直线 x=1 所围图形的面积为  $\frac{1}{3}$  知

$$rac{1}{3}\int_0^1 (ax^2+bx)\,\mathrm{d}x = rac{a}{3}+rac{b}{2} \Rightarrow b = rac{2}{3}(1-a).$$

(3) 由该抛物线与 x 轴及直线 x=1 所围图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积

$$egin{aligned} V &= \int_0^1 \pi (ax^2 + bx)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \left(rac{a^2}{5} + rac{ab}{2} + rac{b^2}{3}
ight) \ &= \pi \left[rac{a^2}{5} + rac{a(1-a)}{3} + rac{4}{27}(1-a)^2
ight]. \end{aligned}$$

由

$$rac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a} = \pi \left[ rac{2a}{5} + rac{1}{3} - rac{2a}{3} - rac{8}{27} (1-a) 
ight] = rac{\pi}{135} (4a+5) \left\{ egin{array}{c} < 0, \; a < -rac{5}{4} \ > 0, \; a > -rac{5}{4} \end{array} 
ight.$$

知当

https://mianbaoduo.com/o/gjsx
$$a = -\frac{5}{4} \Rightarrow b = -\frac{2}{3}(1-a) = \frac{3}{2}$$

时, V 最小, 为  $\frac{\pi}{Q}$ . 此时,

$$y=-rac{5}{4}x^2+rac{3}{2}x=-rac{1}{4}x(5x-6)\geqslant 0, 0\leqslant x\leqslant 1.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

#### 7. (15 分) 已知

$$u'_n(x) = u_n(x) + x^{n-1}e^x (n = 1, 2, \dots),$$

且  $u_n(1)=rac{\mathrm{e}}{n},$  求函数项级数  $\sum^{\infty}u_n(x)$  之和. 张祖锦解.由

$$https://y'=y\Rightarrow (e^{-x}y)'=0\Rightarrow y=Ce^x$$
及常数变易法知可设

$$u_n(x) = C_n(x)e^x$$

代入原方程得

$$C_n'(x)\mathrm{e}^x=x^{n-1}\mathrm{e}^x\Rightarrow C_n(x)=rac{x^n}{n}+C.$$

故

$$u_n(x) = C\mathrm{e}^x + rac{x^n}{n}\mathrm{e}^x.$$

又 
$$u_n(1) = \frac{e}{n}$$
, 我们知言公众号: 跟锦数学

$$egin{aligned} u_n(x) &= rac{x^n}{n} \mathrm{e}^x, \ \sum_{n=1}^\infty u_n(x) &= \mathrm{e}^x \sum_{n=1}^\infty \int_0^x t^{n-1} \, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^x \int_0^x \sum_{n=1}^\infty t^{n-1} \, \mathrm{d}t \ &= \mathrm{e}^x \int_0^x rac{1}{1-t} \, \mathrm{d}t = -\mathrm{e}^x \ln(1-x), -1 \leqslant x < 1. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

8.  $(10\ eta)$  求  $x o 1^-$  时,与  $\sum\limits_{n=0}^\infty x^{n^2}$  等价的无穷大量,张祖锦解.当 0 < x < 1 时,

$$n\leqslant t\leqslant n+1\Rightarrow n^2\leqslant t^2\leqslant (n+1)^2$$
  $\Rightarrow x^{(n+1)^2}\leqslant x^{t^2}\leqslant x^{n^2}.$  https://mianbaoduo.com/o/gjsx

于是

$$egin{aligned} x^{(n+1)^2} &\leqslant \int_n^{n+1} x^{t^2} \,\mathrm{d}t \leqslant x^{n^2} \,\,(n \geqslant 0) \ \Rightarrow &\int_0^\infty x^{t^2} \,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^\infty x^{n^2} = 1 + \sum_{n=0}^\infty x^{(n+1)^2} \leqslant 1 + \int_0^\infty x^{t^2} \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

由

$$\int_0^\infty x^{t^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2 \ln \frac{1}{x}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-s^2} \, \mathrm{d}s$$

$$\frac{1}{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}} \quad (x \to 1^-)$$

即知

$$\begin{array}{l} \text{https:} \Big/ \frac{\int_{0}^{\infty} x^{t^{2}} \, \mathrm{d}t}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}} \leqslant \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^{2}}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}} \leqslant \frac{1 + \int_{0}^{\infty} x^{t^{2}} \, \mathrm{d}t}{\sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}}} \\ \Rightarrow \lim_{x \to 1^{-}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^{2}}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{1-x}}} = 1. \end{array}$$

故当  $x\to 1^-$  时,与  $\sum_{n=0}^\infty x^{n^2}$  等价的无穷大量为  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}$  张祖锦 (微信: zhangzu-jin361, 微信公众号: 跟锦数学).

#### 15 第02届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. (本题共 5 小题, 每小题各 5 分, 共 25 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

(1) 设  $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$ ,其中 |a|<1,求  $\lim_{n\to\infty}x_n$ . 张祖锦解.

原式 = 
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}$$
.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

$$(2)$$
 求  $\lim_{x o\infty}\mathrm{e}^{-x}\left(1+rac{1}{x}
ight)^{x^2}$ . 张祖锦解.

原式 = 
$$\lim_{x \to \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x e^{-1} \right]^x = \exp \left\{ \lim_{x \to \infty} x \left[ x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - 1 \right] \right\}$$

$$= \exp \left\{ \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[ \frac{\ln(1+t)}{t} - 1 \right] \right\} = \exp \left\{ \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} \right\}$$

$$= \frac{\text{L'Hospital}}{\text{Exp}} \exp \left[ \lim_{t \to 0} \frac{\frac{1}{1+t} - 1}{2t} \right] = e^{-\frac{1}{2}} \text{SSX}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 设 
$$s>0$$
, 求  $I_n=\int_0^{+\infty}{\rm e}^{-sx}x^n\,{\rm d}x\;(n=1,2,\cdots)$ . 张祖锦解.

$$egin{aligned} I_n &= -rac{1}{s} \int_0^{+\infty} x^n \, \mathrm{d} \mathrm{e}^{-sx} = rac{n}{s} \int_0^{+\infty} x^{n-1} \mathrm{e}^{-sx} \, \mathrm{d} x = rac{n}{s} I_{n-1} \ &= rac{n}{s} \cdot rac{n-1}{s} I_{n-2} = \cdots = rac{n!}{s^n} I_0 = rac{n!}{s^{n+1}}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 设函数 f(t) 有二阶连续导数, $r=\sqrt{x^2+y^2},\,g(x,y)=f\left(rac{1}{r}
ight)$ ,求  $g_{xx}''+g_{yy}''$ . 张祖锦解.由

https://mianbao
$$q_x' = \frac{x}{r}, r_y' = \frac{y}{r}$$
zhangzujin

知

$$egin{aligned} g_x' &= f'\left(rac{1}{r}
ight) \cdot \left(-rac{1}{r^2}
ight) \cdot rac{x}{r} = -rac{x}{r^3}f'\left(rac{1}{r}
ight), \ g_{xx}'' &= -rac{1}{r^3}f'\left(rac{1}{r}
ight) - xf'\left(rac{1}{r}
ight) \cdot rac{-3}{r^4} \cdot rac{x}{r} - rac{x}{r^3}f''\left(rac{1}{r}
ight) \cdot rac{-1}{r^2} \cdot rac{x}{r} \ &= rac{3x^2 - r^2}{r^5}f'\left(rac{1}{r}
ight) + rac{x^2}{r^6}f''\left(rac{1}{r}
ight). \end{aligned}$$

同理,

$$g_{yy}^{\prime\prime}=rac{3y^2-r^2}{r^5}f^{\prime}\left(rac{1}{r}
ight)+rac{y^2}{r^6}f^{\prime\prime}\left(rac{1}{r}
ight).$$

故

$$g_{xx}''+\overline{g}_{yy}''=rac{1}{r^3}f'\left(rac{1}{r}
ight)+rac{1}{r^4}f''\left(rac{1}{r}
ight).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 求直线  $l_1: \begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \\ \text{mianbaoduo.com/o/zhangzujin} \end{cases}$   $l_2: \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-1}$ 

$$l_2:rac{x-2}{4}=rac{y-1}{-2}=rac{z-3}{-1}$$

的距离. 张祖锦解.直线  $l_1$  的对称式方程为

https://mian
$$l_1$$
ao $\frac{x}{1}$ l $=$ o $\frac{y}{1}$ c $=$ i $\frac{z}{0}$ /o/gjsx

而  $l_1, l_2$  的方向向量分别为

$$t_{1}=\left\{ 1,1,0
ight\} ,t_{2}=\left\{ 4,-2,-1
ight\} ;$$

 $l_1, l_2$  上分别有点  $f_1$  人  $f_2$  一号  $f_3$  程  $f_4$  学

$$P_1(0,0,0), P_2(2,1,3).$$

而

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \{2,1,3\}.$$

因此,  $l_1$ ,  $l_2$  的距离为

$$d = \left| rac{a \cdot (t_1 imes t_2)}{|t_1 imes t_2|} 
ight| = \sqrt{rac{19}{2}}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题共 15 分) 设函数 f(x) 在  $(-\infty, +\infty)$  上具有二阶导数, 并且

$$f''(x)>0, \lim_{x o +\infty}f'(x)=lpha>0, \lim_{x o -\infty}f'(x)=eta<0,$$

且存在一点  $x_0$ , 使得  $f(x_0) < 0$ . 证明: 方程 f(x) = 0 在  $(-\infty, +\infty)$  恰有两个实 根. 张祖锦解.

(1) $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \alpha > 0$  $\Rightarrow$   $\exists \; X>x_0, \; \mathrm{s.t.} \; orall \; x\geqslant X, f'(x)>rac{lpha}{2}>0 \; (保号性)$  $\Rightarrow \forall \hspace{0.1cm} \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{X}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{f}'(\boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}) \geqslant \frac{\alpha}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X})$  $\Rightarrow$  当  $x\geqslant X_0\equiv \max\left\{X-rac{2}{\alpha}f(X),X
ight\}$  时,  $f(x)\geqslant 0$  .

(3) 据连续函数介值定理,

$$\exists \ \xi \in [Y_0,x_0], \eta \in (x_0,X_0), \ ext{s.t.} \ f(\xi) = f(\eta) = 0.$$

(4) 往用反证法证明 f 只有  $\xi, \eta$  这个两个零点. 事实上,

$$f$$
 还有零点  $\zeta$  
$$\Rightarrow f(\xi) = f(\eta) = f(\zeta) = 0$$
 
$$\Rightarrow f' \text{ 有两个零点 (Rolle)}$$
 
$$\Rightarrow f'' \text{ 有一个零点, 与 } f'' > 0 \text{ 矛盾, 故有结论 (Rolle)}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

https://mianbaoduo.com/ $\left\{ egin{array}{ll} x=2t+t^2 & \\ u=\psi(t) & \end{array} 
ight.$ 3. (本题共 15 分) 设函数 y=f(x) 由参数方程  $\left\{ egin{array}{ll} x=2t+t^2 & \\ u=\psi(t) & \end{array} 
ight.$ 且

其中  $\psi(t)$  具有二阶导数,曲线  $y=\psi(t)$  与

$$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u+rac{3}{2\mathrm{e}}$$

在 t=1 处相切. 求函数  $\psi$ . 张祖锦解.

(1) 由

$$rac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = rac{y'(t)}{x'(t)} = rac{\psi'(t)}{2+2t}, \ rac{\mathrm{d}^2 y}{4(1+t)} = rac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d} x^2} = rac{\mathrm{d} rac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}}{\mathrm{d} x} = rac{\left[rac{\psi'(t)}{2+2t}
ight]'}{x'(t)} = rac{\psi''(t)(2+2t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^3}$$

$$egin{align} & https://mianbaoodispersion &$$

(2) 先求解齐次方程PS://mianbaoduo.com/o/gjsx

$$egin{aligned} u'(t) - rac{u(t)}{1+t} &= 0 \Rightarrow rac{\mathrm{d} u(t)}{u(t)} = rac{\mathrm{d} t}{1+t} \ &\Rightarrow u(t) = C(1+t). \end{aligned}$$

 $\Rightarrow oldsymbol{u}(t) = oldsymbol{C}(1+t).$ 由常数变易法知可设  $oldsymbol{\psi}' = oldsymbol{u} = oldsymbol{C}(t)(1+t).$  代入第 1 步得

$$C'(t)(1+t)=3(1+t)\Rightarrow C(t)=3t+C.$$

故

$$\psi' = u = (3t+C)(1+C) = 3t^2 + (C+3)t + C, \ \psi = t^3 + \frac{C+3}{2}t^2 + Ct + D.$$

(3) 又由曲线  $\psi_1$  =  $\psi(t)$  与anbaoduo.com/o/zhangzujin

$$y=\int_1^{t^2}\mathrm{e}^{u^2}\,\mathrm{d}u+rac{3}{2\mathrm{e}}$$

在 t=1 处相切知

$$\psi(1) = \frac{3}{2\mathrm{e}}, \psi'(1) = \left(\int_0^{t^2} \mathrm{e}^{-u^2} \, \mathrm{d}u\right) \Big|_{t=1} = \left(\mathrm{e}^{-t^4} \cdot 2t\right) \Big|_{t=1} = \frac{2}{\mathrm{e}}.$$

代入第 2 步得

$$\Rightarrow \psi(t) = t^3 + \frac{1}{2e}t^2 + \left(\frac{1}{e} - 3\right)t + 2.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题共 15 分) 设 
$$a_n > 0, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$
, 证明:

$$(1)$$
 当  $lpha>1$  时,级数  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}rac{a_{n}}{S_{n}^{lpha}}$  收敛;

https://mianbaoduo.com/
$$\infty$$
/zhangzujin (2) 当  $\alpha \le 1$ , 且  $S_n \to 0$   $(n \to \infty)$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$  发散.

张祖锦解.

(1) 当  $\alpha > 1$  时<sub>https://mianbaoduo.com/o/gjsx</sub>

$$\sum_{n=2}^{\infty} rac{a_n}{S_n^{lpha}} = \sum_{n=2}^{\infty} rac{1}{S_n^{lpha}} (S_n - S_{n-1}) \ < \sum_{n=2}^{\infty} rac{1}{\xi_n^{lpha}} (S_n - S_{n-1}) \ (S_{n-1} < \xi_n < S_n) \ = \sum_{n=2}^{\infty} rac{1}{1-lpha} (S_n^{1-lpha} - S_{n-1}^{1-lpha}) \leqslant rac{1}{lpha - 1} S_1^{1-lpha} < +\infty.$$

(2) 当  $\alpha=1,\lim_{n\to\infty}S_n=+\infty$  时, 对  $\forall$  n, 由

$$egin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} rac{a_k}{S_k} &\geqslant rac{1}{S_{n+p}} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k &= rac{S_{n+p} - S_n}{S_{n+p}} \ &= 1 - rac{S_n}{S_{n+p}} 
ightarrow 1 \ \ (p 
ightarrow + \infty) \end{aligned}$$

知当
$$p$$
充分大时, $mianbaoduo.com/o/zhangzujin  $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} rac{a_k}{S_k} > rac{1}{2}.$$ 

据 Cauchy 收敛准则即知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$  发散.

(3) 当  $\alpha \leqslant 1$ ,  $\lim_{n \to \infty} S_n = +\infty$  知

$$n\gg 1\Rightarrow S_n\geqslant 1\Rightarrow rac{a_n}{S_n^lpha}\geqslant rac{a_n}{S_n}.$$

据第 2 步及比较判别法即知  $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_n}{S^{\alpha}}$  发散.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题共 15 分) 设 l 是过原点、方向为  $(\alpha,\beta,\gamma)$  (其中  $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ ) 的直 线,均匀椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant 1$$

(其中 0 < c < b < a, 密度为 1) 绕 l 旋转.

- (1) 求其转动惯量; //mianbaoduo.com/o/zhangzujin
- (2) 求其转动惯量关于方向  $(\alpha, \beta, \gamma)$  的最大值和最小值.

张祖锦解.

(1) 设旋转轴 l 的方向向量为 mianbaoduo.com/o/gjsx

$$l = \{\alpha, \beta, \gamma\},$$

而椭圆上点 P(x,y,z) 的向径为

微信公众号 (x,y,z), 数学

则 P 到 l 的距离的平方为

$$egin{aligned} d^2 &= |r|^2 - |r \cdot l|^2 \ &= x^2 + y^2 + z^2 + (lpha x + eta y + \gamma z)^2 \ &= (1 - lpha^2) x^2 + (1 - eta^2) y^2 + (z - \gamma^2) z^2 - 2lpha eta xy - 2eta \gamma yz - 2\gamma lpha zx. \end{aligned}$$

故转动惯量为

(2) 设 微信: zhangzujin361

 $=rac{4\pi abc}{15}igl[(1-lpha^2)a^2+(1-eta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2igr]$  .

$$L(lpha,eta,\gamma,oldsymbol{\lambda})=(1-lpha^2)a^2+(1-eta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2+oldsymbol{\lambda}(lpha^2+eta^2+\gamma^2-1),$$

 $=rac{abc}{3}igl[(1-lpha^2)a^2+(1-eta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2igr]\int_0^1r^2\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ 

则由

$$L_lpha=2lpha(\lambda-a^2)=0, \ L_eta=2eta(\lambda-b^2)=0, \ L_eta=2eta(\lambda-b^2)=0, \ L_\lambda=2\gamma(\lambda-c^2)=0, \ L_\lambda=lpha^2+eta^2+\gamma^2-1=0$$

知  $(\alpha, \beta, \gamma$  不同时为 0) L 的极值点可能为

$$Q_1(\pm 1,0,0,a^2), Q_2(0,\pm 1,0,b^2), Q_3(0,0,\pm 1,c^2).$$

比较即知

$$J_{ ext{max}} = rac{4\pi abc}{15}(a^2+b^2), J_{ ext{min}} = rac{4\pi abc}{15}(b^2+c^2).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题共 15 分) 设函数  $\varphi(x)$  具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲 线 C 上, 曲线积分

$$\oint\limits_C \frac{2xy\,\mathrm{d}x + \varphi(y)}{x^4 + y^2}$$

的值为常数.https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

(1) 设 L 为正向闭曲线  $(x-2)^2+y^2=1$ . 证明:

$$\oint_{\mathbf{L}} \frac{2xy \, dx + \varphi(x) \, dy}{\operatorname{anba}^4 + y^2 \cdot \operatorname{com} / o/\operatorname{gjsx}} = 0;$$

- (2) 求函数  $\varphi(x)$ ;
- (3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求

$$\int_{L} \frac{2xy\,\mathrm{d}x + arphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4 + y^2}.$$

张祖锦解.设

$$P=rac{2xy}{x^4+y^2}, Q=rac{arphi(x)}{x^4+y^2}.$$

$$\operatorname{https:}//L_{1}\equiv L\cap\{x\leqslant 2\}\,, L_{2}\equiv L\cap\{x\geqslant 2\}\,,$$

定向随 L. 并在  $L_1$  的左边作简单曲线  $L_0$ , 使得其起点与  $L_1$  相同, 中点亦与  $L_1$  相同, 并与  $L_1$  一起包围原点. 则由题意,

$$egin{align} egin{align} eg$$

相减即得

$$\int\limits_{L}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int\limits_{L_{1}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+\int\limits_{L_{2}}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=0.$$

(2) 类似第 1 步的证明,我们知对任一不包围原点的简单闭曲线 C,

微信 
$$\int_C P dx + Q dy = 0.$$

而由 Green 公式,

$$egin{aligned} Q_x' = P_y' & \Rightarrow rac{(x^4+y^2)arphi'(x)-4x^3arphi(x)}{(x^4+y^2)^2} = rac{2x(x^4-y^2)}{(x^4+y^2)^2} \ & \Rightarrow egin{aligned} & \left(\frac{\varphi'(x)y^2 = -2xy^2}{x^4arphi'(x)-4x^3arphi(x) = 2x^5} \end{aligned} \ & \Rightarrow arphi'(x) = -2x \Rightarrow arphi(x) = -x^2 + C. \end{aligned}$$

(3) 由第 2 步及 Green 公式,

$$\oint_C P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y \stackrel{0 < \varepsilon \ll 1}{=\!=\!=} \oint_{x^4 + y^2 = \varepsilon^2} P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y$$

$$\stackrel{1}{=\!=\!=} \int_{x^4 + y^2 = \varepsilon^2} 2xy \, \mathrm{d}x + (-x^2 + C) \, \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{x^4 + y^2 \leqslant \varepsilon^2} (-4x) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \stackrel{\overline{\longrightarrow}}{=\!=\!=} 0.$$
张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

# 16 第03届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. (本大题共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分) 计算下列各题 (要求写出重要步骤).

$$(1) \lim_{x o 0} rac{(1+x)^{rac{2}{x}} - \mathrm{e}^2 \left[1 - \ln(1+x)
ight]}{x}$$
. 张祖锦解.

原式 = 
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)} - e^{2}[1 - \ln(1+x)]}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)} - e^{2}}{x} + e^{2}\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$= \frac{\text{Lagrange}}{\text{L'Hospital}} \lim_{x \to 0} \frac{e^{\xi_{x}} \left[\frac{2}{x}\ln(1+x) - 2\right]}{x} + e^{2}\lim_{x \to 0} \frac{1}{1+x}$$

$$= 2e^{2}\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^{2}} + e^{2} = 2e^{2}\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} + e^{2} = 0.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 设  $a_n=\cosrac{ heta}{2}\cosrac{ heta}{2^2}\cosrac{ heta}{2^n}$ ,求  $\lim_{n o\infty}a_n$ . 张祖锦解.若 heta=0,则  $\lim_{n o\infty}a_n=1$ . 若 heta
eq 0,则

原式 
$$=\lim_{n o\infty}rac{\sin heta}{2^n\sinrac{ heta}{2^n}}=\lim_{n o\infty}rac{\sin heta}{rac{ heta}{2^n}rac{ heta}{rac{ heta}{2^n}}\cdot heta}=rac{\sin heta}{ heta}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 求

$$\iint_{\mathcal{D}} \operatorname{sgn}(xy-1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$
https://mi $_{\mathcal{D}}$ nbaoduo.com/o/gjsx

其中  $D = \{(x, y); 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$ . 张祖锦解.设

$$D_1=\left\{(x,y);0\leqslant x\leqslantrac{1}{2},0\leqslant y\leqslant2
ight\}, \ D_2=\left\{(x,y);rac{1}{2}\leqslant x\leqslant2,0\leqslant y\leqslantrac{1}{x}
ight\}, \ D_3=\left\{(x,y);rac{1}{2}\leqslant x\leqslant2,rac{1}{x}\leqslant y\leqslant2
ight\}.$$

微信: zhangzujin361

$$\operatorname{https:}//\operatorname{n}\!\!\int_{D_1} \operatorname{d}\!x \operatorname{d}\!y = 1, \ \operatorname{com}/\operatorname{o}/\operatorname{zhangzujin} \ \int_{D_2} \operatorname{d}\!x \operatorname{d}\!y = \int_{rac{1}{2}}^2 \operatorname{d}\!x \int_0^{rac{1}{x}} \operatorname{d}\!y = 2\ln 2, \ \operatorname{https:} \iint_{D_2} \operatorname{d}\!x \operatorname{d}\!y = \int_{rac{1}{2}}^2 \int_{rac{1}{x}}^2 \operatorname{d}\!y = 3 + 2\ln 2.$$

故

原式 = 
$$\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2-4\ln 2.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} rac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$  的和函数,并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} rac{2n-1}{2^{2n-1}}$  的和.张祖锦解.易知  $\sum_{n=1}^{\infty} rac{2n-1}{2^n} x^{2n-2}$  的收敛域为  $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ .对  $orall x \in (-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ,

$$\begin{split} &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) t^{2n-2} \Bigg|_{t=\frac{x}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} t^{2n-1}\right)' \Bigg|_{t=\frac{x}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{t}{1-t^2}\right)' \Bigg|_{t=\frac{x}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \frac{1+t^2}{(1-t^2)^2} \Bigg|_{t=\frac{x}{\sqrt{2}}} = \frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}. \end{split}$$

进而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} x^{2n-2} \bigg|_{x=\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2+\frac{1}{2}}{\left(2-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{10}{9}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

- 2. (本题共 16 分) 设  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  为数列,  $a, \lambda$  为有限数, 求证:
  - (1) 如果  $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ ,则

$$\lim_{n o\infty}rac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a.$$

(2) 如果存在正整数 p,使得  $\lim_{n \to \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda$ ,则

$$\lim_{n o\infty}rac{a_n}{n}=rac{\lambda}{p}.$$

张祖锦解.

- (1) 由 Stolz 公式即知结论成立。oduo.com/o/zhangzujin
- (2) 对  $0\leqslant i\leqslant p-1,$  考虑  $\{a_n\}$  的子列  $\{a_{kp+i}\}_{k=1}^{\infty},$  有

$$\lim_{k o\infty}rac{a_{kp+i}}{kp+i}\stackrel{ ext{Stolz}}{=\!=\!=\!=}\lim_{k o\infty}rac{a_{(k+1)p+i}-a_{kp+i}}{p}=rac{\lambda}{p}.$$

故对  $\forall \ \varepsilon > 0, 0 \leqslant i \leqslant p$  和 1 baoduo.com/o/gjsx

$$\exists \,\, N_i, \,\, ext{s.t.} \,\, orall \,\, k \geqslant N_i, \left| rac{a_{kp+i}}{kp+i} - rac{\pmb{\lambda}}{p} 
ight| < arepsilon.$$

取  $N = \max_{0 \leqslant i \leqslant p} \{pN_i + i\}$ ,则

$$| h \rangle | h$$

这就证明了  $\lim_{n o \infty} rac{a_n}{p} = rac{\lambda}{p}.$ 

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题共 15 分) 设函数 f(x) 在闭区间 [-1,1] 上具有连续的三阶导数,且

$$f(-1) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0.$$

求证: 在开区间(-1,1) 内至少存在一点 $x_0$ ,使得 $f''(x_0)=3$ . 张祖锦解.由 Taylor 公式, $\exists -1 < \eta < 0 < \xi < 1$ ,s.t.

$$egin{aligned} 1 &= f(1) = f(0) + f'(0)(1-0) + rac{f''(0)}{2}(1-0)^2 + rac{f'''(\xi)}{6}(1-0)^2, \ 0 &= f(-1) = f(0) + f'(0)(-1-0) + rac{f''(0)}{2}(-1-0)^2 + rac{f'''(\eta)}{6}(-1-0)^2. \end{aligned}$$

相减得

$$3 = rac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2}$$
.

$$\min\left\{f'''(\boldsymbol{\xi}),f'''(\boldsymbol{\eta})\right\}\leqslant\frac{f'''(\boldsymbol{\xi})+f'''(\boldsymbol{\eta})}{2}\leqslant\max\left\{f'''(\boldsymbol{\xi}),f'''(\boldsymbol{\eta})\right\}$$

知

$$\exists \,\, \eta \leqslant x_0 \leqslant \xi, \,\, ext{s.t.} \, f'''(x_0) = rac{f'''(\xi) + f'''(\eta)}{2} = 3.$$

4. (本题 15 分) 在平面上,有一条从点 (a,0) 向右的射线,其线密度为  $\rho$ . 在点 (0,h) (其中 h>0) 有一质量为 m 的质点. 求射线对该质点的引力. 张祖锦解.在  $x \geqslant a$  处,微元 dx 的质量为  $\rho dx$ ,其到质点的距离为  $\sqrt{h^2+x^2}$ ,而该微元对质点的引力大小为

$$\mathrm{d}F=rac{Gm
ho\,\mathrm{d}x}{h^2+x^2},$$

方向是从质点指向 x. 将 dF 分解成水平和垂直两部分:

$$\mathrm{d}F_x = rac{Gm
ho\,\mathrm{d}x}{h^2+x^2}\cdotrac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}, \ \mathrm{d}F_y = rac{Gm
ho\,\mathrm{d}x}{h^2+x^2}\cdotrac{-h}{\sqrt{h^2+x^2}}.$$

故

引力为

$$\left\{rac{Gm
ho}{\sqrt{h^2+a^2}},rac{Gm
ho}{h}\left(\sinrctanrac{a}{h}-1
ight)
ight\}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题共 15 分) 设 z = z(x,y) 是由方程

确定的隐函数,其中 F 具有连续的二阶偏导数,且  $F_u(u,v)=F_v(u,v)\neq 0$ . 求证:  $x^2z_x'+y^2z_y'=0$  和

$$x^3 z_{xx}'' + xy(x+y) z_{xy}'' + y^3 z_{yy}'' = 0.$$

张祖锦解.

$$(1)$$
  $F\left(x+rac{1}{x},z-rac{1}{y}
ight)=0$  两边分别对  $x,y$  求偏导得

$$f'_u \left(z'_x - rac{1}{x^2}
ight) + f'_v z'_x = 0, \ F'_u z'_y + F'_v \left(z'_y + rac{1}{y^2}
ight) = 0.$$

故 https://mianbaoduo.com/o/g

$$z_x' = rac{F_u'}{x^2(F_u' + F_v')}, z_y' = rac{-F_v'}{y^2(F_u' + F_v')}, \ x^2z_x + y^2z_y = 0.$$

(2) 由第 1 步,

$$x^2z'_x + y^2z'_y = 0.$$

关于 x, y 分别求偏导有

$$x^2z_{xx}^{''}+2xz_x^{\prime}+y^2z_{xy}^{''}=0, \ x^2z_{xy}^{''}+2yz_y^{\prime}+y^2z_{yy}^{''}=0.$$

第 1 式  $\cdot x$  加上第 2 式  $\cdot y$ , 并由第 1 步即知

$$\frac{\text{https:}//\text{mianbaoduo.com}/\text{o}/\text{zhangzujin}}{x^3z_{xx}''+xy(x+y)z_{xy}''+y^3z_{yy}''=0}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题共 15 分) 设函数 f(x) 连续, a,b,c 为常数,  $\Sigma$  是单位球面  $x^2+y^2+z^2=1$ . 记第一型曲面积分

$$I = \iint\limits_{\Sigma} f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S.$$

求证:  $I=2\pi\int_{-1}^1f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u
ight)\,\mathrm{d}u$ . 张祖锦解.

- (1) 当 a=b=c=0 时,由  $\Sigma$  的面积为  $4\pi$  知结论自明.
- (2) 当 a, b, c 不全为 0 时, 设

$$\xi = \frac{\sum_{a=0}^{b} \sum_{a=0}^{b} \sum_{b=0}^{b} \sum_{a=0}^{b} \sum_{b=0}^{b} \sum_{a=0}^{b} \sum_{b=0}^{b} \sum_{a=0}^{b} \sum_{b=0}^{b} \sum_{a=0}^{b} \sum_{a=0}^{b} \sum_{b=0}^{b} \sum_{a=0}^{b} \sum_{a=0}^{b} \sum_{b=0}^{b} \sum_{a=0}^{b} \sum_{a=0}^{b$$

将其扩充为  $\mathbb{R}^3$  的一组标准正交基  $\xi, \eta, \zeta$ , 并设

$$https://mianb \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

则

$$I = \iint\limits_{\Sigma} f(ax + by + cz) \, \mathrm{d}S = \iint\limits_{u^2 + v^2 + w^2 = 1} f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}u) \, \mathrm{d}S$$
 $= 2 \iint\limits_{u^2 + v^2 \leqslant 1} f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}u) \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ 
 $\left(w = \pm \sqrt{1 - u^2 - v^2} \Rightarrow \sqrt{1 + w_u'^2 + w_v'^2} = \frac{1}{w}\right)$ 
 $= 2 \int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}u) \, \mathrm{d}u \int_{-\sqrt{1 - u^2}}^{\sqrt{1 - u^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 - v^2}} \, \mathrm{d}v$ 
 $\frac{v = \sqrt{1 - u^2} \sin \theta}{1 - u^2} \, 2\pi \int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}u) \, \mathrm{d}u.$ 

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

# 17 第04届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

- 1. (本题共 5 小题, 每小题各 6 分, 共 30 分) 解答下列各题 (要求写出重要步骤).
  - (1) 求极限  $\lim_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$ ; 张祖锦解.

原式 = 
$$\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\ln k\right]$$
  $=$   $\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-1}\right]$   $=$   $\exp\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\ln \frac{n+1}{n}}{2}\right]$  =  $e^0=1$ .

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 求通过直线  $L: \left\{ egin{array}{ll} 2x+y-3z+2=0 \\ 5x+5y-4z+3=0 \end{array} 
ight.$  的两个相互垂直的平面  $\pi_1$  和  $\pi_2$ ,使其中一个平面过点 (4,-3,1); 张祖锦解.直线 L 过点

$$A(3,-2,2), B(-8,5,-3).$$

而若  $\pi_1$  过 C(4, -3, 1), 则  $\pi_1$  的法向量为

https://m
$$n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=4\{-3,-4,1\}$$
zujin

故  $\pi_1$  的方程为

$$0 = -3(x-4) - 4(y+3) + z + 1 = -3x - 4y + z - 1,$$

也即 3x + 4y - z + 1 = 0. 又由  $\pi_1 \perp \pi_2$  知  $\pi_2 \parallel n, \pi_2$  的法向量为

$$rac{n}{4} imes\overrightarrow{AB}=13\left\{ 1,-2,-5
ight\} .$$

π₂ 的方程就此求出 公众号: 跟锦数学

$$0 = (x-3) - 2(y+2) - 5(z-2) = x - 2y - 5z + 3.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 已知函数  $z=u(x,y)e^{ax+by}$ ,且  $u''_{xy}=0$ ,确定常数 a 和 b,使得函数 z=z(x,y) 满足方程  $z''_{xy}-z'_x-z'_y+z=0$ ;张祖锦解.由

$$egin{aligned} &z_x'=u_x'\mathrm{e}^{ax+by}+u\mathrm{e}^{ax+by}a=\mathrm{e}^{ax+by}(u_x'+au),\ &z_y'=\mathrm{e}^{ax+by}(u_y'+bu),\mathrm{backloom}/\mathrm{o}/\mathrm{zhangzujin}\ &z_{xy}''=\mathrm{e}^{ax+by}b(u_x'+au)+\mathrm{e}^{ax+by}(u_{xy}''+au_y')=\mathrm{e}^{ax+by}(bu_x'+abu+au_y') \end{aligned}$$

$$egin{aligned} 0 &= m{z}_{xy}' - m{z}_{x}' - m{z}_{y}' + m{z}_{0} &= m{com} / m{com} /$$

故 a=b=1. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 设函数 u=u(x) 连续可微, u(2)=1, 且

$$\int_L (x+2y)u\,\mathrm{d}x + (x+u^3)u\,\mathrm{d}y$$

在右半平面上与路径无关, 求 u(x); 张祖锦解.由

$$\int_L (x+2y)u\,\mathrm{d}x + (x+u^3)u\,\mathrm{d}y$$

在右半平面上与路径无关知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x+u^3)u] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}[(x+2y)u] \, \text{m/o/zhangzujin}$$

$$\Leftrightarrow (x+4u^3)u' = u \Leftrightarrow (x+4u^3) \, \text{d}u = u \, \text{d}x$$

$$\Leftrightarrow 4u^3 \, \text{d}u = u \, \text{d}x - x \, \text{d}u = u^2 \, \text{d}\frac{x}{u} \Leftrightarrow 4u \, \text{d}u = \text{d}\frac{x}{u} \Leftrightarrow \text{d}\left(\frac{x}{u} - 2u^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{u} - 2u^2 = C.S. / \text{mianbaoduo.com/o/gjsx}$$

又由 u(2)=1 知

$$C=0\Rightarrow rac{x}{u}=2u^2\Leftrightarrow u=\sqrt[3]{rac{x}{2}}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学)。

(5) 求极限 
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{x} \int_x^{x+1} \frac{\sin t}{\sqrt{t + \cos t}} \, \mathrm{d}t$$
. 张祖锦解.当  $x > 1$  时,

$$egin{aligned} \left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}rac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\,\mathrm{d}t
ight|&\leqslant\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}rac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}&=2\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})\ &=2rac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}
ightarrow0\ (x
ightarrow+\infty)\,. \end{aligned}$$

故原式 = 0. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题 10 分) 计算  $\int_0^{+\infty} {\rm e}^{2x} |\sin x| \, {\rm d}x$ . 张祖锦解.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题 10 分) 求方程  $x^2 \sin \frac{1}{x} = 2x - 501$  的近似解, 精确到 0.001. 张祖锦解.由

微信: zhangzujin361

Taylor 公式,

https: 
$$\sin t = t - \frac{\sin(\theta t)}{2}t^2 \ (0 < \theta < 1)$$
 ngzujin  $\Rightarrow \sin \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{\sin \frac{\theta}{x}}{2x^2}$   $\Rightarrow x^2 \sin \frac{1}{x} = x - \frac{1}{2}\sin \frac{\theta}{x}$  (代入原方程)  $\Rightarrow x = 501 - \frac{1}{2}\sin \frac{\theta}{x} \ (代入原方程)$   $\Rightarrow \begin{cases} |x - 501| = \left|\frac{1}{2}\sin \frac{\theta}{x}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow x > 500.5 \\ |x - 501| < \frac{1}{2x} < \frac{1}{2 \cdot 500} = 0.001 \end{cases}$   $\Rightarrow x = 501$  为满足颢设要求的解。

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题 12 分) 设函数 y=f(x) 二阶可导,且 f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0,求  $\lim_{x\to 0}\frac{x^3f(u)}{f(x)\sin^3u}$ ,其中 u 是曲线 y=f(x) 上点 P(x,f(x)) 处的切线在 x 轴上的截距.张祖锦解.曲线 y=f(x) 在 p(x,f(x)) 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x).$$
https://ng.baoduo.com/o/zhangzujin
令  $Y=0$  得  $X=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$  故
 $u=x-\frac{f(x)}{f'(x)},$ 
 $\lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}\left[x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right]$  上'Hospital  $0-\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f''(x)}=0-0=0.$ 

进而

$$\begin{split} \lim_{x \to 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) \sin^3 u} &= \lim_{x \to 0} \frac{x^3 f(u)}{f(x) u^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x^3 \left[ f(0) + f'(0) u + \frac{f''(\theta u)}{2} u^2 \right]}{u^3 \left[ f(0) + f'(0) u + \frac{f''(\tau x)}{2} x^2 \right]} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{x}{u} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 - \frac{f(x)}{x f'(x)}} = \frac{\text{L'Hospital}}{1 - \lim_{x \to 0} \frac{1}{f'(x) + x f''(x)}} \\ &= \frac{1}{1 - \lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \frac{f''(x)}{f'(x) - f'(0)}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2. \end{split}$$

5. (本题 12 分) 求最小实数 C, 使得对满足  $\int_0^1 |f(x)| dx = 1$  的连续函数 f(x), 都 有  $\int_0^1 f(\sqrt{x}) dx \leqslant C$ . 张祖锦解. duo. com/o/zhangzujin (1)

$$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}
ight) \,\mathrm{d}x ext{ } extstyle = extstyle \int_0^1 f(t) 2t \,\mathrm{d}t \leqslant 2 \int_0^1 |f(t)| \,\mathrm{d}t = 2.$$

(2) 取  $f_n(x) = (n+1)x^n$ , 则

$$\int_0^1 |f_n(x)| \,\mathrm{d}x = 1, \ \int_0^1 f_n\left(\sqrt{x}
ight) \,\mathrm{d}x = 2 \int_0^1 t f_n(t) \,\mathrm{d}t = 2 rac{n+1}{n+2} 
ightarrow 2 \ \ (n
ightarrow \infty) \,.$$

故最小的实数 C=2.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题 12 分) 设 f(x) 为连续函数, t>0. 区域  $\Omega$  是由抛物面  $z=x^2+y^2$  和球面  $x^2+y^2+z^2=t^2$  所围起来的上半部分. 定义三重积分

$$F(t) = \iiint f(x^2 + y^2 + z^2) dv.$$
https://mianba@duo.com/o/zhangzujin

求 F(t) 的导数 F'(t). 张祖锦解.抛物面  $z=x^2+y^2$  与球面  $x^2+y^2+z^2=t^2$ 的交线所在平面为

https://
$$z = g(t) \equiv \frac{\sqrt{1 + 4t^2} - 1}{\text{duo.}_2 \text{m/o}}$$
/gjsx

故

$$egin{align*} F(t) &= \iiint\limits_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d} v \ &= \int_0^{g(t)} \, \mathrm{d} z \iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant z} f(x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d} x \, \mathrm{d} y \ &+ \int_{g(t)}^t \, \mathrm{d} z \iint\limits_{x^2 + y^2 \leqslant t^2 - z^2} f(x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d} x \, \mathrm{d} y \ &= \int_0^{g(t)} \, \mathrm{d} z \int_0^{\sqrt{z}} f(r^2 + z^2) 2 \pi r \, \mathrm{d} r + \int_{g(t)}^t \, \mathrm{d} z \int_0^{\sqrt{t^2 - z^2}} f(r^2 + z^2) 2 \pi r \, \mathrm{d} r. \end{split}$$

故

注意到  $g^2(t)+g(t)=t^2$ , 上述第 1,3 个积分抵消, 我们最终得到 1,3 个积分抵消, 我们最终得到 1,3 个积分抵消, 我们最终得到

$$F'(t) = f(t^2) 2\pi [t-g(t)] = \pi t f(t^2) \left[ 2t + 1 - \sqrt{1+4t^2} 
ight].$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

7. (本题 14 分) 设  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$  和  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$  为正项级数,那么

$$(1)$$
 若  $\lim_{n o\infty}\left(rac{a_n}{a_{n+1}b_n}-rac{1}{b_{n+1}}
ight)>0,$  则  $\sum_{n=1}^\infty a_n$  收敛;

张祖锦解.

(1) 设 
$$\lim_{n o\infty}\left(rac{a_n}{a_{n+1}b_n}/nrac{1}{b_{n+1}}
ight)$$
  $=$   $A>0$  则  $/$   $0$  zhangzujin

$$\exists \,\, N, \,\, ext{s.t.} \,\, orall \,\, n \geqslant N, rac{a_n}{a_{n+1}b_n} - rac{1}{b_{n+1}} > rac{A}{2}.$$

故当  $n \geqslant N$  时,

https://mia
$$\frac{a_n}{b_n}$$
- $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ > $\frac{a_n}{b_{n+1}}$ 

$$A\sum_{k=N}^n a_{k+1} < \sum_{k=N}^n \left(rac{a_k}{b_k} - rac{a_{k+1}}{b_{k+1}}
ight) = rac{a_N}{b_N} - rac{a_{n+1}}{b_{n+1}} < rac{a_N}{b_N}.$$

这表明  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  的部分和上界,而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛.

$$(2)$$
 设  $\lim_{n o\infty}\left(rac{a_n}{a_{n+1}b_n}-rac{1}{b_{n+1}}
ight)=B<0,$  则  $\exists \;N,\;\mathrm{s.t.}\; orall\; n\geqslant N, rac{a_n}{a_{n+1}b_n}-rac{1}{b_{n+1}}<rac{A}{2}<0.$ 

故当  $n \ge N$  时,

$$egin{aligned} \operatorname{https:}//\operatorname{mianb} & rac{a_n}{b_n} - rac{a_{n+1}}{b_{n+1}} < rac{A}{2} a_{n+1} < 0 \ & \Rightarrow rac{a_{n+1}}{b_{n+1}} > rac{a_n}{b_n} > \cdots > rac{a_N}{b_N} \ & \Rightarrow a_{n+1} > rac{a_N}{b_N} b_{n+1}. \end{aligned}$$

据比较判别法即知  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

# 18 第05届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

- 1. (共 4 小题, 每小题 6 分, 共 24 分) 解答下列各题.
  - (1) 求极限  $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \sin \pi \sqrt{1 + 4n^2}\right)^n$ . 张祖锦解.

原式 = 
$$\lim_{n \to \infty} \left[ 1 + \sin \pi \left( \sqrt{1 + 4n^2} - 2n \right) \right]^n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left[ 1 + \sin \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n} \right]^n$$

$$= \exp \left[ \lim_{n \to \infty} n \ln \left( 1 + \sin \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n} \right) \right]$$

$$= \frac{\ln(1+t) \times t}{t \to 0} \exp \left[ \lim_{n \to \infty} n \sin \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n} \right]$$

$$= \frac{\sin t \times t}{t \to 0} \exp \left[ \lim_{n \to \infty} n \frac{\pi}{\sqrt{1 + 4n^2} + 2n} \right] = e^{\frac{\pi}{4}}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 证明广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$  不是绝对收敛的. 张祖锦解.由 Dirichlet 判别 法知  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$  收敛. 又由

$$\int_0^{+\infty} rac{|\sin x|}{x} \, \mathrm{d}x \geqslant \int_0^{+\infty} rac{\sin^2 x}{x} \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} rac{1-\cos 2x}{2x} \, \mathrm{d}x = +\infty$$

知  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$  条件收敛. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 设函数 y = y(x) 由  $x^3 + 3x^2y - 2y^3 = 2$  所确定.求 y(x) 的极值. 张祖锦解.设

$$F = x^3 + 3x^2y - 2y^3 - 2,$$

https://mia
$$F_x'$$
ato $F_y'y'$ = $0 \Rightarrow y' \neq z$ h $\frac{F_x'}{F_y'}$ ezujin

故 y 的驻点 x 满足

$$y'=0\Leftrightarrow F'_x=0\Leftrightarrow \begin{cases} x=0\Rightarrow y=-1, \ \mathbb{Z}x=0$$
 以来 $x=2$ 

进一步, 在驻点处,

$$egin{aligned} F_{xx}'' + 2F_{xy}''y' + F_{yy}''y'^2 + F_y'y'' &= 0 \ \Rightarrow y'' &= egin{aligned} F_{xx}'' &= egin{aligned} rac{2(x+y)}{x^2-2y^2} &= egin{aligned} -1, & x=0, y=-1, \ 1, & x=-2, y=1. \end{aligned}$$

故 y 在 x=0 处取得极大值 -1, 在 x=-2 处取得极小值 1. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 过曲线  $y = \sqrt[3]{x}$   $(x \ge 0)$  上的点 A 作切线, 使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为  $\frac{3}{4}$ , 求点 A 的坐标. 张祖锦解.设切点为  $A(t,\sqrt[3]{t})(t>0)$ ,则切线方程为

https://mianbaoduo.c
$$\frac{3}{3}\sqrt[3]{t^2}$$
( $x - t$ ).

令 y=0 知切线与 x 轴的交点为 B(-2t,0). 设 C(t,0), 则由题意,

$$rac{3}{4} = S_{\triangle ABC} - S$$
曲边梯形 $_{AOC} = rac{1}{2} \cdot 3t \cdot \sqrt[3]{t} - \int_0^t \sqrt[3]{x} \, \mathrm{d}x = rac{3}{4} t^{rac{4}{3}}.$ 

故 t=1,A(1,1). 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (12 分) 计算定积分

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} rac{x \sin x \cdot \arctan \mathrm{e}^x}{1 + \cos^2 x} \mathrm{d}x.$$

微信: zhangzujin361

张祖锦解.

原式 = 
$$\int_{-\pi}^{0} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^{x}}{1 + \cos^{2} x} dx + \int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^{x}}{1 + \cos^{2} x} dx$$

$$= \frac{-x = t}{1 + \cos^{2} x} \int_{0}^{\pi} \frac{t \sin t \cdot \arctan e^{-t}}{1 + \cos^{2} t} dt + \int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x \cdot \arctan e^{x}}{1 + \cos^{2} x} dx$$

$$= \int_{0}^{\pi} \left(\arctan e^{x} + \arctan e^{-x}\right) \frac{x \sin x}{1 + \cos^{2} x} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^{2} x} dx = \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^{2} t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^{2} x} dx + \frac{\pi}{2} \int_{0}^{\pi} \frac{(\pi - x) \sin x}{1 + \cos^{2} x} dx\right] \text{ (上两式的算术平均)}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2} \int_{0}^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^{2} x} dx = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2} \arctan(\cos x) \Big|_{0}^{\pi} = \frac{\pi^{3}}{8}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

- 3. (12 分) 设 f(x) 在 x = 0 处存在二阶导数 f''(0),且  $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ . 证明: 级数  $\sum_{x \to 0}^{\infty} \left| \frac{1}{x} \right|$  收敛 라비钨缸 Zhangzujin 361  $\sum_{n=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|$  收敛. 张祖锦解.
  - (1) 由 f''(0) 存在知 f 在原点的某邻域内可导, 而连续.

(2) 
$$\frac{\text{https:}//\text{mianbaoduo.com}/\text{o/zhangzujin}}{f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0. }$$

(3)

https://mianbaod
$$f(x) - f(0)$$
/gisx $x = 0$ .

(4) 由

$$\lim_{n o\infty}rac{f\left(rac{1}{n}
ight)}{rac{1}{n^2}}=\lim_{x o0}rac{f(x)}{x^2}=\lim_{x o0}rac{f'(x)}{2x}=rac{f''(0)}{2}$$

知

$$\lim_{n o\infty}rac{\left|f\left(rac{1}{n}
ight)
ight|}{rac{1}{n^2}}=rac{\left|f''(0)
ight|}{2}.$$

 $\lim_{n\to\infty}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{|f''(0)|}{2}.$  而由比较判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$  收敛.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.~(10~分) 设  $|f(x)|\leqslant \pi,f'(x)\geqslant m>0~(a\leqslant x\leqslant b).$  证明:

$$\left|\int_a^b \sin f(x) \,\mathrm{d}x 
ight| \leqslant rac{2}{m}.$$

张祖锦解.

https://mianbaoduo.com/o/gjsx (1) 若 f 没有零点,则  $\forall$   $x \in [a,b], -\pi \leqslant f(x) < 0$  或  $\forall$   $x \in [a,b], 0 < f(x) \leqslant \pi$ ,而  $\sin f(x)$  不变号. 设 f(x) = t,则

$$\begin{aligned} \operatorname{d}t &= f'(x) \operatorname{d}x = f'(f^{-1}(t)) \operatorname{d}x, \\ \left| \int_{a}^{b} \sin f(x) \operatorname{d}x \right| &= \left| \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{\sin t}{f'(f^{-1}(t))} \operatorname{d}t \right| \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(\xi))} \left| \int_{f(a)}^{f(b)} \sin t \operatorname{d}t \right| \quad (积分第一中值定理) \\ &= \frac{|\cos f(a) - \cos f(b)|}{f'(f^{-1}(\xi))} \leqslant \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

(2) 若 f 有零点,则由 f'>0 知 f 严格递增,f 仅有一个零点  $x_0$ ,且  $\forall$   $a\leqslant x< x_0, f(x)<0; orall x_0< x\leqslant b, f(x)>0.$ 

$$f(x)$$
 (i) 若  $-\int_a^{x_0} \sin f(x) \, \mathrm{d}x \geqslant \int_{x_0}^b \sin f(x) \, \mathrm{d}x$ ,则由第  $1$  步,

$$\left|\int_a^b \sin f(x) \,\mathrm{d}x
ight| = -\int_a^{x_0} \sin f(x) \,\mathrm{d}x - \int_{x_0}^b f(x) \,\mathrm{d}x \ + \mathrm{ttps:} \left/\left|\min_{x \in A} \int_a^{x_0} \sin f(x) \,\mathrm{d}x
ight| = \left|\int_a^{x_0} \sin f(x) \,\mathrm{d}x
ight| \leqslant rac{2}{m}.$$

(ii) 若 
$$-\int_a^{x_0} f(x) \, \mathrm{d}x < \int_{x_0}^b f(x) \, \mathrm{d}x$$
,则也由第  $1$  步, 
$$\left| \int_a^b \sin f(x) \, \mathrm{d}x \right| = \int_a^{x_0} f(x) \, \mathrm{d}x + \int_{x_0}^b f(x) \, \mathrm{d}x$$
  $\leqslant \int_{x_0}^b f(x) \, \mathrm{d}x = \left| \int_{x_0}^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \frac{2}{m}.$ 

5. (14 分) 设  $\Sigma$  是一个光滑封闭曲面, 方向朝外. 给定第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x^3 - x) \, dy \, dz + (2y^3 - y) \, dz \, dx + (3z^3 - z) \, dx \, dy.$$

试确定曲面  $\Sigma$ , 使得积分 I 的值最小, 并求该最小值. 张祖锦解.设  $\Sigma$  围成的区域 为 V,则由 Gauss 公式,/mianbaoduo.com/o/gjsx

$$I = \iiint\limits_V (3x^2 + 6y^2 + 9z^2 - 3) \,\mathrm{d}v = 3 \iiint\limits_V (x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z.$$

为使 I 达到最小,就要求 V 是使得  $x^2+2y^2+3z^2-1\leqslant 0$  的最大空间区域,也即

$$V = \left\{ (x,y,z); x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leqslant 1 
ight\}$$
 .

所以 V 是一个椭球,  $\Sigma$  为 V 的表面时, 积分 I 最小. 此时,

$$I = \frac{x=u,\sqrt{2}y=v}{\sqrt{3}z=w}$$
 3  $\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} (u^2+v^2+w^2-1)\cdot rac{1}{\sqrt{6}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$   $= rac{3}{\sqrt{6}}\left[\int_0^1 r^2\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r - rac{4\pi}{3}
ight] = -rac{4\sqrt{6}\pi}{15}.$  是: zhangzujin361. 微信公众号: 跟锦数学).

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学)

6. (14 分) 设  $I_a(r)=\int_C rac{y\,\mathrm{d} x-x\,\mathrm{d} y}{(x^2+y^2)^a},$  其中 a 为常数,曲线 C 为椭圆  $x^2+xy+y^2=$  $r^2$ ,取正向. 求极限  $\lim_{r \to +\infty} I_a(r)$ . 张祖锦解.设 https://mianbaoduo.com/o/gjsx

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta,$$

则

$$C:
ho^2+
ho^2\sin heta\cos heta=r^2\Leftrightarrow 
ho( heta)=rac{r}{\sqrt{1+rac{1}{2}\sin2 heta}}\in\left[\sqrt{rac{2}{3}r},\sqrt{2}r
ight].$$

$$I_a(r) = \int_0^{2\pi} \frac{-\rho^2(\theta) d\theta}{m\rho^{2a}(\theta)} duo.com/o/zhangzujin$$

$$-I_a(r) = \int_{0}^{2\pi} 
ho^{2-2a}( heta) \,\mathrm{d} heta egin{cases} \in \left[\left(\sqrt{2}r
ight)^{2-2a}, \left(\sqrt{rac{2}{3}}r
ight)^{2-2a}
ight], & a>1 \ = 2\pi, & a=1 \ \left[\left(\sqrt{rac{2}{3}}r
ight)^{2-2a}, \left(\sqrt{2}r
ight)^{2-2a}
ight], & a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{r o +\infty}\left[-I_a(r)
ight] = egin{cases} 0, & a>1 \ 2\pi, & a=1 \ +\infty, & a<1 \end{cases}$$

$$\lim_{r o +\infty}I_a(r)=\left\{egin{array}{ll} 0, & a>1\ -2\pi, & a=1\ -\infty, & a<1 \end{array}
ight.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

7. (14 分) 判断级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$  的敛散性,弱收敛,求其和. 张祖锦解.设

https://mianbaoduo1com/o/zhangzujin
$$a_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$$

则

$$egin{aligned} 0 < a_k &= \sum\limits_{i=1}^k rac{1}{i} < 1 + \sum\limits_{i=2}^k \int_{i-1}^i rac{1}{x} \, \mathrm{d}x = 1 + \int_1^k rac{1}{x} \, \mathrm{d}x = 1 + \ln k \ \Rightarrow \lim\limits_{k o + \infty} rac{a_k}{k+2} = 0. \end{aligned}$$

而原级数的前 n 项和

$$S_n = \sum_{k=1}^n rac{a_k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(rac{a_k}{k+1} - rac{a_k}{k+2}
ight) = rac{\sum_{k=1}^n rac{a_k}{k+1} - \sum_{j=2}^n rac{a_{j-1}}{j+1}}{i} = rac{a_1}{2} - rac{a_n}{n+2} + \sum_{k=2}^n rac{a_k - a_{k-1}}{k+1} = rac{1}{2} - rac{a_n}{n+2} + \sum_{k=2}^n rac{a_k - a_{k-1}}{k+1} = rac{1}{2} - rac{a_n}{n+2} + rac{1}{2} - rac{1}{n+1} = 1 - rac{1}{n+1} - rac{a_n}{n+1}.$$

令  $n \to \infty$  即知原级数 = 1, 而收敛. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

- 19 第06届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答
- 1. 填空题 (共有 5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分).
  - (1) 已知  $y_1 = e^x$  和  $y_2 = xe^x$  是齐次二阶常系数线性微分方程的解,则该方程是. 张祖锦解.  $y_2 = xe^x$  是齐次二阶常系数线性微分方程的解,则该方程是. . 张祖锦解.  $y_2 = xe^x$  是齐次二阶常系数线性微分方程的解,则该方程是

题设 
$$\Rightarrow$$
  $\lambda=1$  是特征方程的二重根  $\Rightarrow$  特征方程为  $(\lambda-1)^2$   $\Rightarrow$  常微分方程为  $y''(x)-2y'(x)+y(x)=0$ .

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 设有曲面  $S: z = x^2 + 2y^2$  和平面 L: 2x + 2y + z = 0, 则与平面 L 平行的 S 的切平面方程是 . 张祖锦解.

$$\Rightarrow x_0 = 1, y_0 \neq \frac{1}{2}, z_0 = \frac{3}{2}$$
duo.com/o/zhangzujin

$$\Rightarrow$$
 切平面方程为  $0=2(x+1)+2\left(y+rac{1}{2}
ight)+\left(z-rac{3}{2}
ight)=2x+2y+z+rac{3}{2}.$ 

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 设函数 y=y(x) 由方程  $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$  所确定,求  $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$  . 张祖锦解.易知 y(0)=1. 进而

$$x=\int_1^{y-x} \sin^2 rac{t}{4} \,\mathrm{d}t \Rightarrow 1=\sin^2 rac{\pi(y-x)}{4} \cdot (y'-1) \; ($$
两边关于  $x$  求导 $)$   $\Rightarrow 1=rac{1}{2} \left[y'(0)-1
ight] \; ((x,y)=(0,1) \; 代入)$   $\Rightarrow y'(0)=3.$ 

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

微信: zhangzujin361

$$(4) \ \ \mathop{\mathfrak{V}}\limits_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}, \ \mathop{\mathfrak{I}}\limits_{n\to\infty} \lim_{n\to\infty} x_n = \underline{\qquad}. \ \ \mathop{\mathfrak{K}}\limits_{k=1} \mathop{\mathfrak{K}}\limits_{k=1} \mathop{\mathfrak{K}}\limits_{k=1} \mathop{\mathfrak{K}}\limits_{k=1} .$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{(n+1)!}\right] = 1.$$

Miles (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 已知 
$$\lim_{x \to 0} \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}^3$$
,则  $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} =$ \_\_\_\_. 张祖锦解.

$$e^{3} = \lim_{x \to 0} \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = \exp \left\{ \lim_{x \to 0} \frac{\ln \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]}{x} \right\}$$

$$\Rightarrow 3 = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]}{x}$$

$$\Rightarrow \ln \left\{ \lim_{x \to 0} \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right] \right\} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right]}{x} \cdot x = 3 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \left[ 1 + x + \frac{f(x)}{x} \right] = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \cdot x = 0 \cdot 0 = 0 \\ f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \end{cases}$$

进一步,由上式第2行知

$$3 = \lim_{x o 0} rac{\ln \left[1 + x + rac{f(x)}{x}
ight]}{x} = \lim_{x o 0} rac{x + rac{f(x)}{x}}{x} \; (\ln(1+s) \sim s, s o 0)$$
 $= 1 + \lim_{x o 0} rac{f(x)}{x^2} = 1 + \lim_{x o 0} rac{f'(x)}{2x} \; ( ext{L'Hospital 法则})$ 
 $= 1 + \lim_{x o 0} rac{f'(x) - f'(0)}{x} = 1 + rac{1}{2}f''(0).$ 

故 f''(0) = 4. 最终,

原式 = 
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{f''(0)}{2} = 2$$
.

2. (本题满分 12 分) 设 n 为正整数, 计算

https://n
$$I = \int_{e^{-2n\pi}}^{1} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos \left( \ln \frac{1}{x} \right) \right| \mathrm{d}x$$
.gzujin

张祖锦解.

$$I = rac{\ln rac{1}{x} = t \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-t}}{x'(t) = -\mathrm{e}^{-t} \Leftrightarrow t'(x) = -\mathrm{e}^{t}} \int_{2n\pi}^{0} \left| rac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \cos t \cdot (-\mathrm{e}^{t}) \right| \cdot (-\mathrm{e}^{-t}) \, \mathrm{d}t \ = \int_{0}^{2n\pi} \left| \sin t \right| \, \mathrm{d}t = 2n \int_{0}^{\pi} \sin t \, \mathrm{d}t = 4n.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题满分 14 分) 设函数 f(x) 在 [0,1] 上有二阶导数,且存在正常数 A,B 使得  $|f(x)| \leq A, |f''(x)| \leq B.$  证明:对任意  $x \in [0,1]$ ,有

$$|f'(x)|\leqslant 2A+rac{B}{2}.$$

张祖锦解.对  $\forall x \in [0,1]$ , 由 Taylor 公式,

$$egin{aligned} & \left\{ egin{aligned} f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + rac{f''(oldsymbol{\xi}_x)}{2}(0-x)^2 \ & \left\{ f(1) = f(x) + f'(x)(1-x) + rac{f''(oldsymbol{\eta}_x)}{2}(1-x)^2 \ \end{aligned} 
ight. \ & \Rightarrow f(1) - f(0) = f'(x) + rac{f''(oldsymbol{\eta}_x)}{2}(1-x)^2 - rac{f''(oldsymbol{\xi}_x)}{2}(0-x)^2 \ & \Rightarrow |f'(x)| \leqslant 2A + rac{B}{2}[(1-x)^2 + x^2] = 2A + B \left[ \left( x - rac{1}{2} 
ight)^2 + rac{1}{4} 
ight] \leqslant 2A + rac{B}{2}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

- 4. (本题满分 14 分)ttps://mianbaoduo.com/o/gjsx
  - (1) 设一球缺高为 h, 所在球半径为 R. 证明该球缺的体积为  $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$ , 球冠的面积为  $2\pi Rh$ .
  - (2) 设球体 微信公众号: 跟锦娄

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leqslant 12$$

被平面 P: x+y+z=6 所截的小球缺为  $\Omega$ . 记球缺上的球冠为  $\Sigma$ , 方向指向球外, 求第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy.$$

张祖锦解.

(1) 设球缺所在球体表面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

球缺中心线为 z 轴, 则

$$egin{aligned} V &= \int_{R-h}^{R} \pi(R^2 - z^2) \, \mathrm{d}z = rac{\pi}{3} (3R - h) h^2, \ S &= \int_{R-h}^{R} 2\pi \sqrt{R^2 - z^2} \cdot rac{R}{\sqrt{R^2 - z^2}} \, \mathrm{d}z \ \left( x &= \sqrt{R^2 - z^2} \Rightarrow \sqrt{1 + x_z'^2} = rac{R}{\sqrt{R^2 - z^2}} 
ight) \ &= 2\pi R h. \end{aligned}$$

(2) 设 S 为球球  $\Omega$  的底面圆盘, 方向指向球缺外, 则由 Gauss 公式,

$$I + \iint \cdots = \iiint 3 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = 3 |\Omega|.$$
 $S = \sum_{i=1}^{n} 2 \ln 2 \ln 361$ 

由于  $S\subset P,\,P$  的正向单位外法向量为  $-rac{1}{\sqrt{3}}\left\{ 1,1,1
ight\} ,$  而

$$\iint_S \cdots = -rac{1}{\sqrt{3}} \iint_S (x+y+z) \,\mathrm{d}S = -rac{6}{\sqrt{3}} |S| = -2\sqrt{3} |S|.$$

由于球体半径  $R=2\sqrt{3}$ , 球缺高

$$h=R-$$
 原点到  $P$  的距离  $=2\sqrt{3}-rac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3},$ 

我们得到

$$|\Omega|=rac{\pi}{3}(3\cdot2\sqrt{3}-\sqrt{3})\cdot3=5\sqrt{3}\pi, \ |S|=\pi\left[R^2-(R-h)^2
ight]=9\pi, \ I=3|\Omega|+2\sqrt{3}|S|=33\sqrt{3}\pi.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题满分 15 分) 设 f 在 [a,b] 上非负连续, 严格单增, 且存在  $x_n \in [a,b]$  使得

$$[f(x_n)]^n = rac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^n \,\mathrm{d}x,$$

求  $\lim_{n\to\infty} x_n$ . 张祖锦解.

#### (1) 我们下面将证明

$$\text{https:} \big/ \big/ \underset{n \to \infty}{\text{lim}} \left\{ \int_a^b [f(x)]^n \, \mathrm{d}x \right\}^{\frac{1}{n}} = \big/ \underset{x \in [a,b]}{\text{max}} f(x). \text{lim}$$

而 (用反证法及 f 的严格单调性)

$$\lim_{n o \infty} f(x_n) = f(b) \Rightarrow \lim_{n o \infty} x_n = b.$$

(2) 令

$$M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

一方面,

$$\left\{\int_a^b [f(x)]^n\,\mathrm{d}x
ight\}^{rac{1}{n}}\leqslant M(b-a)^{rac{1}{n}}.$$

另一方面,设  $f(\xi) = M$ ,则由保号性,

$$\forall \ \varepsilon > 0, \ \exists \ [c,d] \ni \xi, \ \text{s.t.} \ x \in [c,d] \Rightarrow f(x) > f(\xi) - \varepsilon.$$

于是

$$\left\{\int_a^b [f(x)]^n\,\mathrm{d}x
ight\}^{rac{1}{n}}\geqslant \left\{\int_c^d [f(x)]^n\,\mathrm{d}x
ight\}^{rac{1}{n}}\geqslant [f(\xi)-arepsilon](d-c)^{rac{1}{n}}.$$

综上,

$$(d-c)^{rac{1}{n}}\leqslant \left\{\int_a^b [f(x)]^n\,\mathrm{d}x
ight\}^{rac{1}{n}}\leqslant M(b-a)^{rac{1}{n}}.$$

 $\Rightarrow \varepsilon \rightarrow 0^+$ 

$$M(d-c)^{rac{1}{n}}\leqslant \left\{\int_a^b [f(x)]^n\,\mathrm{d}x
ight\}^{rac{1}{n}}\leqslant M(b-a)^{rac{1}{n}}.$$
令  $n o\infty$ ,即有

$$\lim_{n o\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n\,\mathrm{d}x
ight\}^{rac{1}{n}}=M=\max_{x\in[a,b]}f(x).$$

6. (本题满分 15 分) 设

$$A_n$$
 声  $\frac{n}{n^2+1}$  十  $\frac{n}{n^2+2^2}$  十  $\frac{n}{n^2+n^2}$  ,如 求  $\lim_{n o\infty} n\left(rac{\pi}{4}-A_n
ight)$ . 张祖锦解.设  $f(x)=rac{1}{1+x^2}$ ,则  $\lim_{n o\infty}A_n=\lim_{n o\infty}rac{1}{n}\sum_{k=1}^nrac{1}{1+\left(rac{k}{k}
ight)^2}=\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x=rac{\pi}{4}.$ 

写出

$$n\left(rac{\pi}{4}-A_{n}
ight) = rac{\sum\limits_{k=1}^{k}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k}}\left[f(x)-f(x_{k})
ight]\mathrm{d}x}{\sum\limits_{k=1}^{k}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k}}f'(\xi_{k})(x-x_{k})\,\mathrm{d}x} \ \in \left[n\sum\limits_{k=1}^{n}M_{k}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k}}(x-x_{k})\,\mathrm{d}x,n\sum\limits_{k=1}^{n}m_{k}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_{k}}(x-x_{k})\,\mathrm{d}x
ight] \ \left(m_{k}=\min\limits_{[x_{k-1},x_{k}]}f',M_{k}=\max\limits_{[x_{k-1},x_{k}]}f'
ight) \ = \left[-rac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}M_{k}rac{1}{n},\sum\limits_{k=1}^{n}m_{k}rac{1}{n}
ight].$$

据 Riemann 积分的 Darboux 定义,

$$\lim_{n o\infty}\sum_{k=1}^n M_krac{1}{n}=\lim_{n o\infty}\sum_{k=1}^n m_krac{1}{n}=\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=-rac{1}{2}.$$

而由夹逼原理知原式 =  $\frac{1}{4}$ . 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

### 20 第07届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分).

$$(1)$$
 极限  $\lim_{n o\infty} n\left(rac{\sinrac{\pi}{n}}{n^2+1}+rac{\sinrac{2}{n}\pi}{n^2+2}+\cdots+rac{\sin\pi}{n^2+n}
ight)=$ \_\_\_\_. 张祖锦解.由

$$rac{n}{n+1}\cdotrac{1}{n}\sum_{k=1}^n rac{k\pi}{n} < n\sum_{k=1}^n rac{\sinrac{k\pi}{n}}{n^2+k} < rac{1}{n}\sum_{k=1}^n \sinrac{k\pi}{n},$$

$$\mathrm{https:}//{\lim_{n o \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n}} = \int_0^1 \sin \pi x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}, \mathrm{in}$$

及夹逼原理知原式 =  $\frac{2}{\pi}$ . 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 设函数 z = z(x,y) 由方程

https://mianbaoduo.com/o/gjsx
$$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$$

所决定, 其中 F(u,v) 具有连续偏导数, 且  $xF_u+yF_v\neq 0$ . 则

(本小题结果要求不显含 F 及其偏导数) 张祖锦解. $F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$  两边关于 x 求偏导得

$$F_u'\left(1+rac{z_x'}{y}
ight)+F_v'\left(-rac{z_z}{x^2}+rac{z_x'}{x}
ight)=0\Rightarrow xz_x'=-rac{y(x^2F_u'-zF_v')}{xF_u'+yF_v'}.$$

同理,

https://mianl
$$yz'_v$$
  $=$   $-\frac{x(y^2F'_v-zF'_u)}{(yF'_v+xF'_u)}$ ingzujin

加起来即得  $xz_x'+yz_y'=z-xy$ . 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 曲面  $z=x^2+y^2+1$  在点 M(1,-1,3) 的切平面与曲面  $z=x^2+y^2$  所围区域的体积为 . 张祖锦解.曲面在 M 处的法向量为

$$\{2x,2y,-1\}\left|_{M}=\{2,-2,-1\}
ight.,$$

$$0 = 2(x-1) - 2(y+1) - (z-3) = 2x - 2y - z - 1,$$

即 z=2x-2y-1. 将其与  $z=x^2+y^2$  联立得所围区域在 xOy 平面的投影为

$$D: (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 1.$$

故所求体积为

$$egin{align} V &= \iint\limits_{D} \left[ (2x-2y-1) - (x^2+y^2) 
ight] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \ &= \iint\limits_{D} \left[ 1 - (x-1)^2 - (y+1)^2 
ight] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \ &= \lim\limits_{y=-1+r\sin heta} \int_0^1 (1-r^2) \cdot 2\pi r \, \mathrm{d}r = rac{\pi}{2}. \end{split}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

 $f(x) = egin{cases} 3, & x \in [-5,0), \ 0, & x \in [0,5) \end{cases}$  在 (-5,5] 的傅里叶级数在 x=0 收敛的值是 \_\_\_\_. 张祖锦解.由 Fourier 收敛定理知应填

$$\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 设区间  $(0,+\infty)$  上的函数 u(x) 定义为

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2} \, \mathrm{d}t,$$

$$u(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{x}t^{-s}}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s^2} \, \mathrm{d}s$$

知

$$u^2(x)=rac{1}{x}\int\int\limits_{(0,+\infty)^2}\mathrm{e}^{-(s^2+t^2)}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t=rac{1}{x}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\cdotrac{2\pi r}{4}\,\mathrm{d}r=rac{\pi}{4x}.$$

故  $u(x)=rac{1}{2}\sqrt{rac{\pi}{x}}$ . 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

- 2. (本题满分 12 分) 设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面, 求其方程. 张祖锦解.
  - (1) O(0,0,0) 为 M 的顶点,A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1) 在 M 上. 由 A,B,C 三点决定的平面 x+y+z=1 与球面  $x^2+y^2+z^2=1$  的交线 L 是 M 的准线.

(2) 设 P(x,y,z) 为 M 上的点, (u,v,w) 是 M 的母线 OP 与 L 的交点, 则 OP 的方程为

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin
$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w} = \frac{1}{t}.$$

也即 u=xt, v=yt, w=zt. 代入准线方程得

$$(x+y+z)t = 1, (x^2+y^2+z^2)t^2 = 1.$$

消去 t 即得圆锥面 M 的方程 xy + yz + zx = 0.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题满分 12 分) 设 f(x) 在 (a,b) 内二次可导,且存在常数  $\alpha,\beta$ ,使得对于  $\forall~x\in(a,b)$ ,有

$$f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x),$$

则 f(x) 在 (a,b) 内无穷次可导. 张祖锦解.

(1) 若  $\beta=0$ , 则

$$f'(x) = \alpha f(x) \Rightarrow f''(x) = \alpha f'(x) = \alpha f(x) \Rightarrow \cdots \Rightarrow f^{(n)}(x) = \alpha^n f(x)$$
  $\Rightarrow f(x)$  在  $(a,b)$  内无穷次可导 $(a,b)$  内无穷次可导

(2) 若  $\beta \neq 0$ , 则

$$f''(x)=rac{f'(x)-lpha f(x)}{eta}=Af'(x)+Bf(x)\;\left(A=rac{1}{eta},B=-rac{lpha}{eta}
ight) \ \Rightarrow f'''(x)=Af''(x)+Bf'(x)\;(右端可导,而左端亦可导) \ \Rightarrow \cdots \Rightarrow f^{(n)}(x)=Af^{(n-1)}(x)+Bf^{(n-2)}(x)\;(orall\;n\geqslant 2) \ \Rightarrow f(x)\; 在\;(a,b)\;$$
内无穷次可导。

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学). 二年早 本

4. (本题满分 14 分) 求幂级数  $\sum\limits_{n=0}^{\infty}rac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$  的收敛域,及其和函数.张祖锦解.设  $a_n=rac{n^3+2}{(n+1)!}$ ,则

$$\lim_{n o\infty}rac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n o\infty}rac{(n+1)^3+2}{n^3+2}\cdotrac{1}{n+2}=0.$$

故原幂级数的收敛半径  $R = +\infty$ , 收敛域为  $\mathbb{R}$ . 对  $\forall x \neq 1$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 2}{(n+1)!} (x-1)^n = \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)n(n-1) + (n+1) + 1}{(n+1)!} t^n \right]_{t=x-1}$$

$$= \left[ t^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} + \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \right]_{t=x-1}$$

$$= \left[ t^2 e^t + e^t + \frac{1}{t} (e^t - 1) \right]_{t=x-1}$$

$$= (x^2 - 2x + 2) e^{x-1} + \frac{1}{x-1} (e^{x-1} - 1).$$

故

微信公众号: 跟锦数学

$$\sum_{n=0}^{\infty}rac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n=\left\{egin{array}{ll} (x^2-2x+2)\mathrm{e}^{x-1}+rac{1}{x-1}(\mathrm{e}^{x-1}-1), & x
eq 1,\ 2, & x=1. \end{array}
ight.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题满分 16 分) 设函数 f 在 [0,1] 上连续, 且

$$\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = 0, \int_0^1 x f(x) \, \mathrm{d}x = 1.$$
https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

试证:

- (1)  $\exists x_0 \in [0,1]$  使  $|f(x_0)| > 4$ ;
- (2)  $\exists x_1 \in [0,1]$  使  $|f(x_1)| = 4$ .

张祖锦解.

(1) 用反证法. 若

$$\begin{array}{c} \forall \ x \in [0,1], |f(x)| \leqslant 4, \\ \hline \\ \end{array}$$

则

$$egin{aligned} 1 - \int_0^1 \left(x - rac{1}{2}
ight) f(x) \,\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^1 \left|x - rac{1}{2}
ight| \cdot |f(x)| \,\mathrm{d}x \ &\leqslant 4 \int_0^1 \left|x - rac{1}{2}
ight| \,\mathrm{d}x = 8 \int_0^rac{1}{2} \left(rac{1}{2} - x
ight) \,\mathrm{d}x = 4 \int_0^rac{1}{2} (1 - 2x) \,\mathrm{d}x = 1. \end{aligned}$$

因此,

http
$$\int_0^1 \left| x - i \frac{1}{2} \right| \cdot |f(x)| \, \mathrm{d}x = 4 \int_0^1 \left| x - i \frac{1}{2} \right| \, \mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left[ 4 - |f(x)| \right] \left| x - \frac{1}{2} \right| \, \mathrm{d}x = 0$$

$$\Rightarrow \left[ 4 - |f(x)| \right] \left| x - \frac{1}{2} \right| \equiv 0$$
https://mlanb2/journelle.com/o/gjsx
$$\Rightarrow |f(x)| = 4, \, 5$$

#### (2) 先用反证法证明

$$\exists \; x_2 \in [0,1], \; ext{s.t.} \; |f(x_2)| < 4.$$

若  $\forall x \in [0,1], |f(x)| \geqslant 4$ , 则由连续函数介值定理及反证法知

$$orall \; x \in [0,1], f(x) \leqslant -4$$
 或  $orall \; x \in [0,1], f(x) \geqslant 4.$ 

这均与题设 
$$\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x = 0$$
 矛盾.

(3) 由第 1,2 步及连续函数介值定理即知

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin 
$$\exists x_1 \in [0,1], \text{ s.t. } |f(x_1)| = 4.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题满分 16 分) 设 f(x,y) 在  $x^2+y^2\leqslant 1$  上有连续的二阶偏导数, 且

$$f_{xx}''^2+2f_{xy}''^2+f_{yy}''^2\leqslant M.$$
若  $f(0,0)=0,f_x(0,0)=f_y(0,0)=0,$  证明:

$$\left| \int \int \int f(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y 
ight| \leqslant rac{\pi \sqrt{M}}{4}.$$

微信: zhangzujin361

张祖锦解.由 Taylor 公式及 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$|f(x,y)| = egin{aligned} & \left| rac{1}{2} \left( x rac{\partial}{\partial x} + y rac{\partial}{\partial y} 
ight)^2 f( heta x, heta y) 
ight| m / o / ext{zhangzujin} \ & = rac{1}{2} \left| x^2 f_{xx}''( heta x, heta y) + 2 x y f_{xy}''( heta x, heta y) + y^2 f_{yy}''( heta x, heta y) 
ight| \ & = rac{1}{2} \left| x^2 f_{xx}''( heta x, heta y) + \sqrt{2} x y \cdot \sqrt{2} f_{xy}''( heta x, heta y) + y^2 f_{yy}''( heta x, heta y) 
ight| \ & \leq rac{1}{2} \sqrt{(x^2)^2 + (\sqrt{2} x y)^2 + (y^2)^2} \cdot \sqrt{f_{xx}''^2( heta x, heta y) + 2 f_{xy}''^2( heta x, heta y) + f_{yy}''^2( heta x, heta y)} \ & \leq rac{1}{2} (x^2 + y^2) \sqrt{M}. \end{aligned}$$

故

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

### 21 第08届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

- 1. 填空题 (满分 30 分, 每小题 6 分).
  - (1) 若 f(x) 在点 x = a 可导,且  $f(a) \neq 0$ ,则 / zhangzujin

$$\lim_{n o\infty}\left\lceilrac{f\left(a+rac{1}{n}
ight)}{f(a)}
ight
ceil^n=$$
 \_\_\_\_\_.

张祖锦解.不妨设 f(a) > 0,否则用 -f 代替 f 后考虑. 于是

原式 = 
$$\exp\left\{\lim_{n \to \infty} n \left[\ln f\left(a + \frac{1}{n}\right) - \ln f(a)\right]\right\}$$

$$= \exp\left[\lim_{x \to 0} \frac{\ln f(a + x) - \ln f(a)}{x}\right]$$

$$= \exp\left[\left(\ln f(x)\right)'|_{x=a}\right] = \exp\left[\frac{f'(a)}{f(a)}\right].$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

f(1) = 0, f'(1) 存在,则极限

$$\lim_{x o 0} rac{f(\sin^2 x + \cos x) an 3x}{(\mathrm{e}^{x^2} - 1) \sin x} = \underline{\hspace{1cm}}.$$

张祖锦解.

$$I = \lim_{x o 0} \left[ rac{f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} rac{x^2}{x^2} + rac{\tan 3x}{\sin x} 
ight] \ = f'(1) \cdot \left(1 - rac{1}{2}
ight) \cdot 1 \cdot 3 = rac{3}{2} f'(1).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 设 f(x) 有连续导数,且 f(1)=2. 记  $z=f(\mathrm{e}^xy^2)$ ,若  $z_x'=z$ ,求 f(x) 在 x>0 的表达式. 张祖锦解.

$$egin{aligned} f(\mathrm{e}^x y^2) &= z = z_x' = f'(\mathrm{e}^x y^2) \cdot \mathrm{e}^x y^2 \Rightarrow f(t) = f'(t)t \ &\Rightarrow rac{\mathrm{d}t}{t} = rac{\mathrm{d}f(t)}{f(t)} \Rightarrow f(t) = Ct \Rightarrow f(t) = 2t \ (f(1) = 2) \ &\Rightarrow f(x) = 2x \ (orall \ x > 0) \ . \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(4) 设  $f(x) = e^x \sin 2x$ , 则  $f^{(4)}(0) = 1$ . 张祖锦解.由 Maclaurin 展式,

$$f(x) = \mathrm{e}^x \sin 2x = \left[1 + x + rac{x^2}{2!} + rac{x^3}{3!} + o(x^3)
ight] \left[2x - rac{1}{3!}(2x)^3 + o(x^4)
ight].$$

故 f 的 Maclaurin 展式中  $x^4$  的系数为  $\sqrt{2}$  mangzujin

$$rac{f^{(4)}(0)}{4!}=1\cdot\left(-rac{1}{3!}
ight)2^3+rac{1}{3!}\cdot 2$$
  $\Rightarrow f^{(4)}(0)=-4\cdot 2^3+4\cdot 2=-4\cdot 6=-24.$  张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 曲面  $z=rac{x^2}{3}+y^2$  平行与平面 2x+2y-z=0 的切平面方程为 \_\_\_\_. 张祖 锦解.设切点为  $\{x_0,y_0,z_0\}$ , 则

法向量 
$$\{x_0,2y_0,-1\}$$
 ||  $\{2,2,-1\}$   $\Rightarrow$   $x_0=2,y_0=1$   $\Rightarrow$   $z_0=3$ .

故切平面方程为

$$\mathbf{0} = \mathbf{2}(x-2) + \mathbf{2}(y-1) - (z-3) = 2x + 2y - z - 3.$$

2. (满分 14 分) 设 f(x) 在 [0,1] 上可导, f(0)=0, 且当  $x\in (0,1), 0< f'(x)<1$ . 试证: 当  $a \in (0,1)$ ,

$$\frac{\int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x}{\left[\int_0^a f(x) \, \mathrm{d}x\right]^2} > \int_0^a f^3(x) \, \mathrm{d}x.$$

张祖锦解.有 f(0) = 0, f' > 0 知 f > 0. 于是当  $a \in (0,1)$  时,

$$rac{\left[\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x
ight]^2}{\int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x} = rac{\mathrm{Cauchy}}{\mathrm{Cauchy}} = rac{2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\cdot f(a)}{f^3(a)} = rac{2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x}{f^2(a)} = rac{\mathrm{Cauchy}}{f^2(a)} = rac{2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x}{f^2(a)} = rac{\mathrm{Cauchy}}{f^2(a)} > 1.$$
张祖锦(微信:zhangzujin361,微信公众号:跟锦数学).

3. (满分 14 分) 某物体所在的空间区域为

$$\Omega: x^2+y^2+2z^2\leqslant x+y+2z,$$

不 x + y + y 密度函数为  $x^2 + y^2 + z^2$ , 求质量

$$M = \iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

张祖锦解. https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

$$\begin{split} M &= \iiint\limits_{(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + 2(z-\frac{1}{2})^2 \leqslant 1} (x^2 + y^2 + z^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= \frac{x - \frac{1}{2} = u, y - \frac{1}{2} = v}{\sqrt{2} \left[z - \frac{1}{2}\right]} \iiint\limits_{u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1} \left[ \left(\frac{1}{2} + u\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + v\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{w}{\sqrt{2}}\right)^2 \right] \frac{1}{\sqrt{2}} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \\ &= \frac{\pi + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \iiint\limits_{u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1} \left(\frac{1}{4} + u^2 + \frac{1}{4} + v^2 + \frac{1}{4} + \frac{w^2}{2}\right) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \\ &= \frac{\pi + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \iiint\limits_{u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1} \left(\frac{3}{4} + \frac{1 + 1 + \frac{1}{2}}{3}(u^2 + v^2 + w^2)\right) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{4\pi}{3} + \frac{5}{6} \int_0^1 r^2 \cdot 4\pi r^2 \, \mathrm{d}r\right) = \frac{5\sqrt{2}\pi}{6}. \end{split}$$

4. (满分 14 分) 设函数 f(x) 在闭区间 [0,1] 上具有连续导数, f(0)=0,f(1)=1. 证明:

$$\lim_{n\to\infty} n \left[ \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right] = -\frac{1}{2}.$$

张祖锦解.

$$egin{align*} \lim_{n o \infty} n \left[ \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x - rac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(rac{k}{n}
ight) 
ight] & = \lim_{n o \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left[ f(x) - f(x_k) 
ight] \, \mathrm{d}x \ & = \lim_{n o \infty} n \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} (x - x_k) \, \mathrm{d}x \ & = \lim_{n o \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{f(\xi_k) - f(x_k)}{\xi_k - x_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k) \, \mathrm{d}x \ & = \lim_{k o 1} n \sum_{k=1}^n \frac{f'(\eta_k)}{\xi_k - x_k} \left[ -rac{1}{2} (x_k - x_{k-1})^2 
ight] \ & = -rac{1}{2} \lim_{n o \infty} \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) (x_k - x_{k-1}) = -rac{1}{2} \int_0^1 f'(x) \, \mathrm{d}x = -rac{1}{2}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (满分 14 分) 设函数 f(x) 在区间 [0,1] 上连续,且

$$I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x
eq 0.$$

证明在 (0,1) 内存在不同的两点  $x_1,x_2$ , 使得

https://mianbaoduo.com/o/gjsx
$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)} + \frac{f(x_2)}{f(x_2)} = \frac{I}{I}.$$

张祖锦解.设  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ , 则 F(0) = 0, F(1) = I. 据连续函数介值定理,

微信公众号。跟锦数学 
$$\exists \xi \in (0,1), \text{ s.t. } F(\xi) = \frac{1}{2}.$$

再由积分中值定理,

$$\exists \,\, 0 < x_1 < \xi, \,\, ext{ s.t. } rac{I}{2} = F(\xi) = \int_0^\xi f(t) \, \mathrm{d}t = f(x_1) \xi, \ \exists \,\, \xi < x_2 < 1, \,\, ext{ s.t. } rac{I}{2} = F(1) - F(\xi) = \int_{\xi}^1 f(t) \, \mathrm{d}t = f(x_2) (1 - \xi).$$

进而

https:/
$$\frac{1}{f(x_1)}$$
 ib  $\frac{1}{f(x_2)}$  ib  $\frac{2\xi}{I}$  ib  $\frac{2(1-\xi)}{I}$  ib  $\frac{2}{I}$  iujin

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (满分 14 分) 设 f(x) 在  $(-\infty, +\infty)$  可导, 且

https:
$$f(x) = f(x+2) = f(x+\sqrt{3})$$
 isx

用 Fourier 级数理论证明 f(x) 为常数. 张祖锦解.

(1) 由 f(x) = f(x+2) 知 f 是 2-周期函数. 又由 f 可导知可设置 人 f 是 2-周期函数. 又由 f 可导知可设置 人 f 是 2-周期函数. 又由 f 可导知可设置 f 是 2-周期函数. 因为 f 是 2-周期函数.

$$f(x)=rac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x),$$

其中

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x \,\mathrm{d}x, b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x \,\mathrm{d}x.$$

(2) 由  $f(x) = f(x + \sqrt{3})$  知

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x + \sqrt{3}) \cos n\pi x \, dx \xrightarrow{x + \sqrt{3} = t} \int_{-1 + \sqrt{3}}^{1 + \sqrt{3}} f(t) \cos n\pi (t - \sqrt{3}) \, dt$$

$$= \int_{-1 + \sqrt{3}}^{1 + \sqrt{3}} f(t) \left[ \cos n\pi t \cos \sqrt{3}n\pi + \sin n\pi t \sin \sqrt{3}n\pi \right] \, dt$$

$$= \cos \sqrt{3}n\pi \int_{-1 + \sqrt{3}}^{1 + \sqrt{3}} f(t) \cos n\pi t \, dt + \sin \sqrt{3}n\pi \int_{-1 + \sqrt{3}}^{1 + \sqrt{3}} f(t) \sin n\pi t \, dt$$

$$= \cos \sqrt{3}n\pi \int_{-1}^1 f(t) \cos n\pi t \, dt + \sin \sqrt{3}n\pi \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t \, dt$$

$$= a_n \cos \sqrt{3}n\pi + b_n \sin \sqrt{3}n\pi.$$

同理,

 $b = a \cos \sqrt{2m\pi} \quad a \sin \sqrt{2m\pi}$ 

$$b_n = a_n \cos \sqrt{3} n \pi - a_n \sin \sqrt{3} n \pi.$$

联立即可求得  $a_n=b_n=0$   $(n\geqslant 1)$ . 故  $f(x)=rac{a_0}{2}$  是常数.

#### 第09届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答 22

- 1. 填空题 (本题共 42 分, 共 6 小题, 每小题 7 分). Zhang Zujin
  - (1) 已知可导函数 f(x) 满足

$$f(x)\cos x + 2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = x+1$$

 $f(x)\cos x + 2\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = x+1,$  https://mianbaoluo.com/o/gjsx 则 f(x) =\_\_\_\_. 张祖锦解.设 y = f(x),则 y(0) = f(0) = 1,且关于 x 求 导有

$$y'\cos +y\sin x=1\Rightarrow y'+y\tan x=\sec x.$$
  
先求齐次方程的解:

$$y' = -y an x \Rightarrow rac{\mathrm{d}y}{y} - rac{\sin x}{\cos x} \, \mathrm{d}x = y = C \cos x.$$

由常数变易法知可设  $y'=y\tan x=\sec x$  的通解为  $y=C(x)\cos x$ . 代入 医主程 原方程得

$$C'(x)\cos x = \sec x \Rightarrow C(x) = \tan x + C$$
  $\Rightarrow C(x) = \sin x + C\cos x$  https://mianb $\Rightarrow f(x) = y = \sin x + \cos x \ |y(0) = 1|$  .

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 极限  $\lim_{n o\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=$ \_\_\_\_. 张祖锦解.

原式 = 
$$\lim_{n \to \infty} \sin^2 \pi \left( \sqrt{n^2 + n} - n \right) = \lim_{n \to \infty} \sin^2 \frac{n\pi}{\sqrt{n^2 + n} + n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sin^2 \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + 1}} = 1.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 设 w = f(u, v) 具有二阶连续偏导数, 且

$$u = x - cy, v = x + cy,$$

其中 
$$c$$
 为非零常数,则  $c$  zhangzujin $361$   $w_{xx}'' - \frac{1}{c^2}w_{yy}'' = ____.$ 

张祖锦解.由

知

$$w_{xx}-rac{1}{c^2}w_{yy}=4f_{12}.$$
https://mianbao $c^2$ uo.com/o/gjsx

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学)

(4) 设 f(x) 具有二阶连续导数,且

$$f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 6,$$
则  $\lim_{x \to 0} \frac{f(\sin^2 x)}{x^4} = \underline{\phantom{a}}$  . 张祖锦解.

原式  $\frac{\text{L'Hospital}}{x^{4}} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(\sin^2 x) 2 \sin x \cos x}{4x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{f'(\sin^2 x)}{x^2}$ 
 $\frac{\text{L'Hospital}}{x^{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{f''(\sin^2 x) 2 \sin x \cos x}{2x} = 3.$ 

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 不定积分 
$$I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx =$$
\_\_\_\_\_\_. 张祖锦解.

$$I = \int \frac{e^{-\sin x} \sin 2x}{(1 - \sin x)^2} dx = \int \frac{(t - 1) + 1}{(t - 1)^2} e^{-t} dt$$

$$= -2 \left[ \int \frac{1}{t - 1} de^{-t} + \int e^{-t} d\frac{1}{t - 1} \right]$$

$$ht = 2 \int \int d\frac{e^{-t}}{t - 1} = \frac{2e^{-t}}{t - 1} + C = \frac{2e^{-\sin x}}{1 - \sin x} + C.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

张祖锦解.

原式 = 
$$\int_0^{\sqrt{2}} z \cdot \pi z^2 dz + \int_{\sqrt{2}}^2 z \cdot \pi (4-z^2) dz = 2\pi.$$

2. (本题 14 分) 设二元函数 f(x,y) 在平面上有连续的二阶偏导数, 对任意角度  $\alpha$ , 定义一元函数

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

$$g_{lpha}(t) = f(t\coslpha, t\sinlpha),$$

若对任何  $\alpha$  都有  $\dfrac{\mathrm{d}g_{\alpha}(0)}{\mathrm{d}t}=0$  且  $\dfrac{\mathrm{d}^2g_{\alpha}(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$ ,证明: f(0,0) 是 f(x,y) 的极小值. 张祖锦解.由 https://mianbaoduo.com/o/gjsx

$$0 = rac{\mathrm{d} g_lpha(0)}{\mathrm{d} t} = f_x(0,0)\coslpha + f_y(0,0)\sinlpha, orall \; lpha$$

知  $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ . 又由

$$rac{\mathrm{d}^2 g_lpha(0)}{\mathrm{d}t^2} = (\coslpha,\sinlpha) \left(egin{array}{c} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \ f_{yy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{array}
ight) \left(egin{array}{c} \coslpha \ \sinlpha \end{array}
ight) > 0, \quad lpha$$

知  $\begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}$  正定,而 f 在 (0,0) 处取得 (严格) 极小值. % (0,0) = (0,0) 信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学)

3. (本题 14 分) 设  $\Gamma$  为曲线

$$x^2+y^2+z^2=1, x+z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$$

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin 上从点 A(1,0,0) 到点 B(0,0,1) 的一段。求曲线积分

$$I = \int_{arGamma} y \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}y + x \, \mathrm{d}z.$$

张祖锦解.F 有参数表示 / mianbaoduo.com / o/gjsx

$$x = x, y = \sqrt{2x - 2x^2}, z = 1 - x, x : 1 \to 0.$$

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

故

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题 15 分) 设函数 f(x)>0 且在实轴上连续, 若对任意实数 t, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x) \, \mathrm{d}x \leqslant 1.$$

证明: ∀ a,b,a ≤ b, 有mianbacduc.com/o/zhangzujin

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leqslant rac{b-a+2}{2}.$$

张祖锦解.由

$$\begin{array}{l} \text{https://mianbaoduo.com/o/gjsx} \\ \forall \ t, 1 \geqslant \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x) \, \mathrm{d}x \geqslant \int_{a}^{b} \mathrm{e}^{-|t-x|} f(x) \, \mathrm{d}x \end{array}$$

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

关于 t 在 [a,b] 上积分得

$$egin{aligned} b-a&\geqslant\int_a^b\mathrm{d}t\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^bf(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t\ &=\int_a^bf(x)\,\mathrm{d}x\left[\int_a^x\mathrm{e}^{-(x-t)}\,\mathrm{d}t+\int_x^b\mathrm{e}^{-(t-x)}\,\mathrm{d}t
ight]\ &=\int_a^bf(x)\left[(1-\mathrm{e}^{a-x})-(\mathrm{e}^{x-b}-1)
ight]\,\mathrm{d}x\ &=2\int_a^bf(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^bf(x)\mathrm{e}^{a-x}\,\mathrm{d}x-\int_a^b\mathrm{e}^{x-b}f(x)\,\mathrm{d}x\ &=2\int_a^bf(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^bf(x)\mathrm{e}^{-|a-x|}\,\mathrm{d}x-\int_a^bf(x)\mathrm{e}^{-|b-x|}\,\mathrm{d}x\ &\geqslant2\int_a^bf(x)\,\mathrm{d}x-\int_\mathbb{R}^bf(x)\mathrm{e}^{-|b-x|}\,\mathrm{d}x\ &\geqslant2\int_a^bf(x)\,\mathrm{d}x-2.\end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题 15 分) 设  $\{a_n\}$  为一个数列, p 为固定的正整数, 若  $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$ . 证明:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \to \infty}} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$
https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

张祖锦解.对  $0\leqslant i\leqslant p-1$ ,考虑  $\{a_n\}$  的子列  $\{a_{kp+i}\}_{k=1}^{\infty}$ ,有

$$\lim_{k o\infty}rac{a_{kp+i}}{kp+i}\stackrel{ ext{Stolz}}{=\!=\!=\!=}\lim_{k o\infty}rac{a_{(k+1)p+i}-a_{kp+i}}{p}=rac{\lambda}{p}.$$

故对  $\forall \epsilon > 0, 0 \leqslant i \leqslant p / 1$ , ianbaoduo.com / o/gjsx

$$\exists \,\, N_i, \,\, ext{s.t.} \,\, orall \,\, k \geqslant N_i, \left| rac{a_{kp+i}}{kp+i} - rac{\lambda}{p} 
ight| < arepsilon.$$

$$orall \; n \geqslant N, \left|rac{a_n}{n} - rac{\lambda}{p}
ight| < arepsilon.$$

这就证明了  $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{p}=\frac{\lambda}{p}$ . 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).  $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{p}=\frac{\lambda}{p}$ . 张祖锦 (微信: zhangzujin361

# 23 第10届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (本题满分 24 分, 共 4 小题, 每小题 6 分). hang Zujin

(1) 设 
$$\alpha \in (0,1)$$
, 则  $\lim_{n \to \infty} [(n+1)^{\alpha} - n^{\alpha}] =$ \_\_\_\_. 张祖锦解.

$$0<(n+1)^{lpha}-n^{lpha}=n^{lpha}\left[\left(1+rac{1}{n}
ight)^{lpha}-1
ight]< n^{lpha}\cdot\left[\left(1+rac{1}{n}
ight)-1
ight]=rac{1}{n^{1-lpha}} \ \Rightarrow \lim_{n o\infty}[(n+1)^{lpha}-n^{lpha}]=0.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 若曲线 y=y(x) 由  $\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^y+ty+\sin t=1 \end{cases}$  确定,则此曲线在 t=0 对应点处的切线方程为 \_\_\_\_\_. 张祖锦解.当 t=0 时, $x=1,\,y=0$ . 对  $x=t+\cos t$  两边关于 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - \sin t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}|_{t=0} = 1.$$

对  $e^y + ty + \sin t = 1$  两边关于 t 求导得

$$\mathrm{e}^y rac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} t} + y + t rac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} t} + \cos t = 0 \Rightarrow rac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} t}|_{t=0} = -1.$$

因此,

https://miady aod udy/dt /o/zhangzujin 
$$\frac{dy}{dx}|_{t=0} = \frac{dy}{dx} \frac{dt}{dt}|_{t=0} = -1$$
,

切线方程为 y-0=-(x-1). 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 
$$\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x_0^2)^{\frac{3}{2}}} dx =$$
 . 张祖锦解. (1+x\_0^2)  $\frac{3}{2}$  tps://mianbaoduo.com/o/gjsx

原式 = 
$$\int \frac{\ln(\tan t + \sec t)}{\sec t} dt \quad (x = \tan t)$$

$$= \int \ln(\tan t + \sec t) d\sin t$$

$$= \sin t \ln(\tan t + \sec t) - \int \sin t \cdot \frac{1}{\tan t + \sec t} (\sec^2 t + \tan t \sec t) dt$$

$$= \sin t \ln(\tan t + \sec t) - \int \frac{\sin t}{\cos t} dt$$

$$= \sin t \ln(\tan t + \sec t) + \ln|\cos t| + C$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

$$(4) \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} = \underline{\qquad}. \quad \text{张祖锦解.}$$

$$原式 = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} + \lim_{x\to 0} \cos x \frac{1-\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} + \lim_{x\to 0} 1 \cdot \left[ \frac{1-\cos \sqrt{\cos 2x}}{x^2} + \sqrt{\cos 2x} \frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\cos^{-\frac{1}{2}}2x}{2x} (+\sin 2x) + 2 + \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + 1 + \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}\cos^{-\frac{2}{3}}3x \cdot (-\sin 3x) \cdot 3}{2x} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} = 3.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题满分 8 分) 设函数 f(t) 在  $t\neq 0$  时一阶连续可导,且 f(1)=0,求函数  $f(x^2-y^2)$ ,使得曲线

$$\int_L [y(2-f(x^2-y^2))] dx + xf(x^2-y^2) dy$$

与路径无关, 其中 L 为任一不与直线  $y=\pm x$  相交的分段光滑曲线. 张祖锦解.设  $P=2y-yf(x^2-y^2),\ Q=xf(x^2-y^2),\$ 则由题意,

$$egin{aligned} f(x^2-y^2) + x \cdot f'(x^2-y^2) 2x &= Q_x \ + t + y &= 2 - f(x^2-y^2) - y \cdot f'(x^2-y^2) (-2y) \ &\Rightarrow (x^2-y^2) f'(x^2-y^2) + f(x^2-y^2) &= 1 \ &\Rightarrow t f'(t) + f(t) &= 1 \quad ig(t = x^2 - y^2ig) \ &\Rightarrow ig[t f(t)ig]' &= 1 \Rightarrow t f(t) &= t + C \ &\Rightarrow f(t) &= 1 - rac{1}{t} \quad (C = -1, f(1) = 0) \ &\Rightarrow f(x^2-y^2) &= 1 - rac{1}{x^2-y^2}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题满分 14 分) 设 f(x) 在区间 [0,1] 上连续, 且  $1 \leq f(x) \leq 3$ . 证明:

$$1\leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot \int_0^1 rac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant rac{4}{3}.$$

张祖锦解.由 Cauchy-Schwarz 不等式,

$$\int_0^1 \left| f(x) \, \mathrm{d}x 
ight| \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[ \sqrt{f(x)} 
ight]^2 \, \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \left[ \frac{1}{\sqrt{f(x)}} 
ight]^2 \, \mathrm{d}x \ \geqslant \left[ \int_0^1 \sqrt{f(x)} \cdot \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \, \mathrm{d}x 
ight]^2 = 1.$$

另一方面,

$$egin{aligned} 1\leqslant f(x)\leqslant 3&\Rightarrow [f(x)-1][f(x)-3]\leqslant 0\Rightarrow [f(x)-1]\left[1-rac{3}{f(x)}
ight]\leqslant 0\ &\Rightarrow f(x)-4+rac{3}{f(x)}\leqslant 0\ &\Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1rac{3}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant 4\ ( aueta) \end{aligned} \ = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1rac{3}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant \left[rac{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^1rac{3}{f(x)}\,\mathrm{d}x}{2}
ight]^2=\left(rac{4}{2}
ight)^2=\ \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^1rac{3}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant \left[rac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x\leqslant rac{4}{3}
ight]^3.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题满分 12 分) 计算三重积分  $\iiint (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$ , 其中 V 是由  $https://mianba<math>\mathcal{C}_V$ uo.com/o/zhangzujin

$$(x^2+y^2+(z-2)^2\geqslant 4, x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 9, z\geqslant 0$$

所围成的空心立体. 张祖锦解.

$$\begin{split} \iiint\limits_{V} (x^2+y^2) \,\mathrm{d}V &= \int_0^4 \mathrm{d}z \qquad \iint\limits_{4-(z-2)^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 9-(z-1)^2} (x^2+y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^4 \mathrm{d}z \int_{\sqrt{4-(z-2)^2}}^{\sqrt{9-(z-1)^2}} r^2 \cdot 2\pi r \,\mathrm{d}r \\ &= \int_0^4 \frac{\pi}{2} \left\{ \left[ 9-(z-1)^2 \right]^2 - \left[ 4-(z-2)^2 \right]^2 \right\} \,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^3 (9-t^2)^2 \,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{2} \int_{-2}^2 (4-t^2)^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^3 (9-t^2)^2 \,\mathrm{d}t - \pi \int_0^2 (4-t^2)^2 \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{512}{5} \pi - \frac{256}{15} \pi = \frac{256}{3} \pi. \end{split}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (本题满分 14 分) 设 f(x,y) 在区域 D 内可微,且 hangzujin

$$\sqrt{\left(rac{\partial oldsymbol{f}}{\partial oldsymbol{x}}
ight)^2+\left(rac{\partial oldsymbol{f}}{\partial oldsymbol{y}}
ight)^2}\leqslant M,$$

 $A(x_1,y_1),\,B(x_2,y_2)$  是 D 内两点,线段 AB 包含在 D 内. 证明:  $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|,$ 

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\leqslant M|AB|,$$

其中 |AB| 表示线段 AB 的长度. 张祖锦解.设  $\phi(t)=f(x_2+t(x_1-x_2),y_1+t(x_1-x_2),y_2+t(x_1$  $t(y_1-y_2)),\ t\in [0,1],\ {
m IV}$ 

$$|y_1-y_2)
angle, \, t\in [0,1]$$
,则 $|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|=|\phi(1)-\phi(0)|$ 

 $= |\phi'(\theta)|$  (Lagrange 中值定理)

$$=|f_x'(x_2+ heta(x_1-x_2),y_2+ heta(y_1-y_2))(x_1-x_2)$$

$$+ \ f_y'(x_2 + heta(x_1 - x_2), y_2 \pm heta(y_1 - y_2))(y_1 - y_2)|$$

$$\leqslant \sqrt{f_x'^2(x_2 + heta(x_1 - x_2), y_2 + heta(y_1 - y_2)) + f_y'^2(x_2 + heta(x_1 - x_2), y_2 + heta(y_1 - y_2))} \ \cdot \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\leqslant M|AB|$$

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (本题满分 14 分) 证明: 对于连续函数 f(x) > 0, 有

$$\lim_{n \to \infty} \int_{0}^{1} f(x) \, \mathrm{d}x \geqslant \int_{0}^{1} \ln f(x) \, \mathrm{d}x.$$

张祖锦解.由  $(\ln t)'' = -\frac{1}{t^2} < 0$  知  $\ln t$  是凹函数,而

$$egin{aligned} & \ln\left(rac{1}{n}\sum_{k=1}^nf\left(rac{k}{n}
ight)
ight)\geqslantrac{1}{n}\sum_{k=1}^n\ln f\left(rac{k}{n}
ight)\ \Rightarrow \ln\int_0^1f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\ln f(x)\,\mathrm{d}x\ (n o\infty)\,. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

7. (本题满分 14 分) 已知  $\{a_k\}$ ,  $\{b_k\}$  是正项级数, 且

$$b_{k+1}-b_k\geqslant\delta>0,\,\,k=1,2,\cdots,$$

 $\delta$  为一正常数. 证明: 若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} rac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$$

收敛. 张祖锦解.设 $S_k = \sum_{i=1}^k a_i b_i$ ,则 $S_k - S_{k-1} = a_k b_k$ , $S_0 = 0$ , $a_k = \frac{S_k - S_{k-1}}{b_k}$ ,

据比较判别法即知结论成立. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

# 24 第11届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (本题满分 30 分, 共 5 小题, 每小题 6 分). https://mianbaoduo.com/o/gjsx

(1)

$$\lim_{x o 0}rac{\ln\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}
ight)-\sin x}{rctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}
ight)}=$$
 \_\_\_\_\_.

张祖锦解.注意到信公众号. 跟锦数学

$$\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}
ight)\sim 4\sqrt[3]{1-\cos x}$$
  $\sim 4\sqrt[3]{rac{x^2}{2}} \ (x o 0)\,,$  in the standard st

原式 = 
$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(e^{\sin x} + \sqrt[3]{1 - \cos x}) - \sin x}{4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + e^{\sin x} - 1 + \sqrt[3]{1 - \cos x})}{4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}} - \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1 + \sqrt[3]{1 - \cos x}}{4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}} - 0 \left(\ln(1 + t) \sim t, t \to 0\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}} + \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{4\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}}$$

$$= 0 + \frac{1}{4} \left\{ e^{t - 1} \sim t, t \to 0 \right\}$$

$$= \frac{1}{4}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 设隐函数 y = y(x) 由方程  $y^2(x - y) = x^2$  所确定, 则

 $\frac{\mathrm{d}x}{y^2} = \frac{1}{y^2}$ , 张祖锦解.设 y = tx,则

$$(tx)^2(x-tx)=x^2\Rightarrow \left\{egin{array}{l} x=rac{1}{t^2(1-t)},\ 1 \ y=rac{1}{t(1-t)}. \end{array}
ight.$$

而

$$\int rac{\mathrm{d}x}{y^2} = \int rac{x'(t)}{y^2(t)} \, \mathrm{d}t$$
 $= \int \left(3 - rac{2}{t}
ight) \, \mathrm{d}t$ 
 $= 3t - 2\ln|t| + C$ 
 $= 3rac{y}{x} - 2\ln\left|rac{y}{x}
ight| + C.$ 

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学)。

#### (3) 定积分

https://mia
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x(1+\sin x)}{1+\cos x} dx = \underline{\text{han-gzujin}}$$

张祖锦解.

原式 = 
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \cos x} \, \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} \, \mathrm{d}e^x$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \cos x} \, \mathrm{d}x + \left[ \frac{\sin x}{1 + \cos x} \mathrm{e}^x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^x}{1 + \cos x} \, \mathrm{d}x \right] \ (分部积分)$$

$$= \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

#### (4) 已知

$$\mathrm{d} u(x,y) = rac{y\,\mathrm{d} x - x\,\mathrm{d} y}{3x2 - 2xy + 3y^2},$$

则 u(x,y) =\_\_\_. 张祖锦解.由angzujin361

$$\mathrm{d}u = \frac{\frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{y^2}}{3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\frac{x}{y} + 3}$$

$$\mathrm{https:}//\mathrm{mianbaod} \frac{\mathrm{d}\frac{x}{y}}{y}\,\mathrm{com}/\mathrm{o}/\mathrm{zhangzujin}$$

$$3\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{\frac{8}{3}} \cdot \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{d}\left[\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3}\right)\right]}{\left[\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3}\right)\right]^2 + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\,\mathrm{d}\left\{\arctan\left[\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\frac{x}{y} - \frac{1}{3}\right)\right]\right\}$$

知

$$u=rac{\sqrt{2}}{4}rctan\left[rac{3}{2\sqrt{2}}\left(rac{x}{y}-rac{1}{3}
ight)
ight]+C.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 设  $a,b,c,\mu>0$ , 曲面  $xyz=\mu$  与曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

相切,则  $\mu=$  . 张祖锦解.设切点为 (x,y,z),则

https://mi
$$xyz=\mu$$
,uo $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ,zujin

且

$$\{yz, xz, xy\} \parallel \left\{ \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right\}$$

$$\Rightarrow \exists \ \lambda \in \mathbb{R}, \text{ s.t. } yz = \lambda \frac{x}{a^2}, xz = \lambda \frac{y}{b^2}, xy = \frac{z}{c^2}$$

$$\Rightarrow x^2y^2z^2 = \lambda^3 \frac{xyz}{a^2b^2c^2} \text{ (相乘)}$$

$$\Rightarrow \mu = xyz = \frac{\lambda^3}{a^2b^2c^2}$$

$$\Rightarrow \lambda x^2 = a^2xyz = a^2\mu, \lambda y^2 = a^2\mu, \lambda z^2 = a^2\mu \text{ (本式第二行)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{\mu}{\lambda}$$

$$\Rightarrow 3\frac{\mu}{\lambda} = 1 \text{ (代入椭圆方程)}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{abc}{3\sqrt{3}} \text{ (联合本式第四行)}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

# 2. (本题满分 14分)。计算三重积分。duo.com/o/zhangzujin

$$\iiint\limits_{\Omega}rac{xyz}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中  $\Omega$  是由曲面  $(x^2+y^2+z^2)^2=2xy$  围成的区域在第一卦限的部分. 张祖锦解.设

$$x = r \sin \phi \cos \theta$$
,  $y = r \sin \phi \sin \theta$ ,  $z = r \cos \phi$ ,

则

$$(x^2+y^2+z^2)^2=2xy\Leftrightarrow r^4=2r^2\sin^2\phi\cos\theta\sin\theta \ \Leftrightarrow r^2=\sin^2\phi\sin2\theta\geqslant 0.$$

由于  $\Omega$  在第一卦限, 而

$$0\leqslant \phi\leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0\leqslant \theta\leqslant \frac{\pi}{2}.$$

于是

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (本题满分 14 分) 设 f(x) 在  $[0,+\infty)$  上可微, f(0)=0, 且存在常数 A>0, 使 得 微信: zhangzujin361

$$|m{f}'(m{x})| \leqslant m{A}|m{f}(m{x})|$$

在  $[0, +\infty)$  上成立, 试证明在  $(0, +\infty)$  上有  $f(x) \equiv 0$ . 张祖锦解.

(1) 设 |f| 在  $\left[0, \frac{1}{2A}\right]$  上的最大值在  $x_0$  处取得,则 mianbaoduo.com/o/zhangzujin

$$|f(x_0)| = |f(x_0) - f(0)| = |f'(\xi)x| \leqslant A|f(\xi)|rac{1}{2A} \leqslant rac{1}{2}|f(x_0)|.$$

这表明 
$$f(x_0)=0$$
. 故  $f(x)\equiv 0, x\in \left[0,rac{1}{2A}
ight]$ .

(2) 设 |f| 在  $\left|\frac{1}{2A},\frac{1}{A}\right|$  上的最大值在  $x_1$  处取得,则  $\left|\frac{1}{2A},\frac{1}{A}\right|$ 

$$|f(x_1)| = \left|f(x_1) - f\left(rac{1}{2A}
ight)
ight| = \left|f'(\eta)\left(x_1 - rac{1}{2A}
ight)
ight| \ \leqslant A|f(\eta)| \cdot rac{1}{2A} \leqslant rac{1}{2}|f(x_1)|.$$

这表明 
$$f(x_1)=0$$
. 故  $f(x)\equiv 0, x\in \left[rac{1}{2A},rac{1}{A}
ight].$ 

(3) 如此一直做下去, 我们得到

$$f(x)\equiv 0, x\in \left[rac{n}{2A}, rac{n+1}{2A}
ight] (orall\ n\in \mathbb{N})$$
 .

故 
$$f\equiv 0$$
.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

# 4. (本题满分 14分) 计算积分 handaoduo.com/o/zhangzujin

$$I = \int_0^{2\pi} \,\mathrm{d}\phi \int_0^\pi \mathrm{e}^{\sin heta(\cos\phi-\sin\phi)}\sin heta\,\mathrm{d} heta.$$

张祖锦解.单位圆周  $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$  有参数表示

 $x = \sin \theta \cos \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi.$ 

则

$$\begin{split} I &= \iint_{\Sigma} \mathrm{e}^{x-y} \, \mathrm{d}S \\ &= \iint_{\Sigma} \mathrm{e}^{\sqrt{2}u} \, \mathrm{d}S \, \left( \text{ 正交变换: } u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, v = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, w = z \right) \\ &= \iint_{\Sigma: u \geqslant 0} \mathrm{e}^{\sqrt{2}u} \, \mathrm{d}S + \iint_{\Sigma: u \leqslant 0} \mathrm{e}^{\sqrt{2}u} \, \mathrm{d}S \\ &= \iint_{v^2 + w^2 \leqslant 1} \mathrm{e}^{\sqrt{2}(1-v^2-w^2)} \frac{1}{\sqrt{1-v^2-w^2}} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \\ &+ \iint_{v^2 + w^2 \leqslant 1} \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(1-v^2-w^2)} \frac{1}{\sqrt{1-v^2-w^2}} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}w \\ &\left( u = \pm \sqrt{1-v^2-w^2}, \sqrt{1+u'_v^2+u'_w^2} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2-w^2}} \right) \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{2}(1-r^2)} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \cdot 2\pi r \, \mathrm{d}r + \int_0^1 \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(1-r^2)} \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \cdot 2\pi r \, \mathrm{d}r \\ &= \frac{r^2 - s}{2\pi} \pi \int_0^1 \left[ \mathrm{e}^{2(1-s)} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}(1-s)} \right] \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s}} \frac{\sqrt{1-s-t}}{2\pi} \frac{2\pi}{0} \left( \mathrm{e}^{\sqrt{2}t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}t} \right) \, \mathrm{d}t \\ &= 2\pi \cdot \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi \left( \mathrm{e}^{\sqrt{2}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \right). \end{split}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

## 5. (本题满分 14 分) 设 f(x) 是仅有正实根的多项式函数, 满足

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$
The proof of th

证明:  $c_n>0,\ (n\geqslant 0),\$  极限  $\lim_{n o\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$  存在,且等于 f(x) 的最小根. 张祖锦

$$\operatorname{https:}//f(x) = A(x-a_1)^{r_1} \cdots (x-a_k)^{r_k}$$
zujin

其中  $0 < a_1 < \cdots < a_k, r_i \geqslant 1$ , 则

$$f'(x)=Ar_1(x-a_1)^{r_1-1}\cdots(x-a_k)^{r_k} \ +Ar_k(x-a_1)^{r_1}\cdots(x-a_k)^{r_k-1}.$$
https://mianbaoduo.com/o/gjsx

而

$$egin{aligned} rac{f'(x)}{f(x)} &= \sum_{i=1}^k rac{r_i}{x-a_i} = -\sum_{i=1}^k rac{r_i}{a_i} rac{1}{1-rac{x}{a_i}} \ &= -\sum_{i=1}^k rac{r_i}{a_i} \sum_{n=0}^\infty \left(rac{x}{a_i}
ight)^n = -\sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{i=1}^k rac{r_i}{a_i^{n+1}}
ight) x^n. \end{aligned}$$

故

$$c_n = \sum_{i=1}^k rac{r_i}{a_i^{n+1}} > 0,$$
  $\lim_{n o \infty} rac{1}{\sqrt[n]{c_n}} = \lim_{n o \infty} rac{c_n}{c_{n+1}} \; (会证么?哈哈! 看看文末的视频链接)$   $= \lim_{n o \infty} rac{rac{r_1}{a_1^{n+1}} + \dots + rac{r_k}{a_n^{n+1}}}{rac{r_1}{a_1^{n+2}} + \dots + rac{r_k}{a_n^{n+2}}}$   $+ \frac{r_1a_1 + \dots + r_k\left(rac{a_1}{a_k}
ight)^{n+1}a_1}{r_1 + \dots + r_k\left(rac{a_1}{a_k}
ight)^{n+2}} \; (分子分母同时除以 \ a_1^{n+2})$   $= rac{r_1a_1 + 0 + \dots + 0}{r_1 + 0 + \dots + 0} = a_1.$  (链接.张祖锦(微信:zhangzujin361,微信公众号:跟锦数学).

视频链接. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众

6. (本题 14 分) 设函数 f(x) 在  $[0,+\infty)$  上具有连续导数,满足

$$-3[3+f^2(x)]f'(x)=2[1+f^2(x)]^2{
m e}^{-x^2},$$

且  $f(0) \leq 1$ . 证明:存在常数 M > 0,使得  $x \in [0, +\infty)$  时,恒有  $|f(x)| \leq M$ . 张祖锦解.

(1) 由 f'(x) > 0 知 f 严格递增,而  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$  (有限或  $+\infty$ ) 存在. 往在 (2) 中证明  $L < +\infty$ ,而  $\Xi$  : zhangzujin361

$$\exists \,\, M = \max\left\{|f(0)|, |L|, 1\right\} > 0, \,\, ext{s.t.} \,\, orall \,\, x \in [0, +\infty), |f(x)| \leqslant M.$$

### (2) 用反证法证明 $L < +\infty$ . 若

https://miaLbatou $\Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x)$ zhangzujin

则

$$\frac{3+f^2(x)}{[1+f^2(x)]^2} \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{3} \mathrm{e}^{-x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{3+y^2}{(1+y^2)^2} \mathrm{d}y \ (y=f(x))$$

$$= \frac{3+\tan^2\theta}{\sec^4\theta} \cdot \sec^2\theta \, \mathrm{d}\theta \ (y=\tan\theta)$$

$$= (3\cos^2\theta + \sin^2\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

$$= (2+\cos 2\theta) \, \mathrm{d}\theta$$

$$= d\left(2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$= d\left(2\arctan y + \frac{y}{1+y^2}\right).$$

故

$$egin{aligned} & \frac{2}{3} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \mathrm{d} \left[ 2 \arctan y + rac{y}{1+y^2} 
ight] \ & \Rightarrow rac{2}{3} \cdot rac{\sqrt{\pi}}{2} = \pi - \left( 2 \arctan y + rac{y}{1+y^2} 
ight) igg|_0 \ & \Rightarrow 2 \arctan f(0) + rac{f(0)}{1+f^2(0)} = \pi - rac{\sqrt{\pi}}{3}. \ & \text{https:} \ / \ & \text{minulation of the proof of th$$

设

$$g(t) = 2 \arctan t + rac{t}{1+t^2},$$

则

$$g'(t) = \frac{3}{(1+t^2)^2} > 0$$

$$\Rightarrow \pi - \frac{\sqrt{\pi}}{3} = g(f(0)) < g(1) = \frac{\pi+1}{2}$$

$$\Rightarrow \exists \pi - \frac{\sqrt{\pi}}{3} \Rightarrow \pi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \exists \pi = \frac{2\pi - \sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \exists \pi = \frac{1+\pi}{2}$$
 矛盾,故有结论.

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

# 25 第12届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题参考解答

1. 填空题 (本题满分 30 分, 每小题 6 分, 共 5 小题) Thangzujin

$$(1) 极限 \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)\mathrm{e}^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1} = \underline{\qquad}. \quad 张祖锦解.$$
 
$$\boxed{ 原式 = \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{1-x^3} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\sqrt{1-x^2}+1\right)\mathrm{e}^{-x^2} } = \lim_{x\to 0} \frac{x-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{-x^3} \cdot 2 = -\frac{1}{3}. }$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(2) 设函数  $f(x) = (x+1)^n e^{-x^2}$ , 则  $f^{(n)}(-1) = -x^2$ . 张祖锦解.

$$egin{aligned} f^{(n)}(-1) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left( (x+1)^n 
ight)^{(k)} \left( \mathrm{e}^{-x^2} 
ight)^{(n-k)} \Bigg|_{x=-1} \ &= n! \mathrm{e}^{-x^2} \Big|_{x=-1} = rac{n!}{\mathrm{e}} . \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(3) 设 y = f(x) 是由方程

https://arctan
$$\frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$$

确定的隐函数,且满足 f(1)=1,则曲线 y=f(x) 在点 (1,1) 处的切线方程为 . 张祖锦解.

$$\arctan \frac{x}{y} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$$

两边关于 x 求导有 (注意  $\ln \sqrt{t} = \frac{1}{2} \ln t$ )

$$rac{rac{y-xy'}{y^2}}{1+\left(rac{x}{y}
ight)^2}=rac{1}{2}\cdotrac{2x}{x^2+y^2}.$$

将 x=y=1 代入得 y'(1)=0. 而曲线 y=f(x) 在点 (1,1) 处的切线方程为 y=1. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

$$(4)$$
 已知  $\int_0^{+\infty} rac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = rac{\pi}{2}$ ,则  $\int_0^{+\infty} rac{\sin x \sin(x+y)}{x(x+y)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y =$ \_\_\_\_\_.

张祖锦解.

原式 
$$\frac{x=u}{x+y=v}$$
  $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du \int_u^\infty \frac{\sin v}{v} dv / \sqrt{2hang} x dv$ 

$$= \int_0^\infty -F'(u)F(u) du \left(F(u) = \int_u^\infty \frac{\sin v}{v} dv = \frac{\pi}{2} - \int_0^u \frac{\sin v}{v} dv\right)$$

$$= -\frac{1}{2}F^2(u)\Big|_0^\infty = \frac{1}{2}F^2(0) = \frac{\pi^2}{8}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

(5) 设 f(x), g(x) 在 x=0 的某一邻域 U 内有定义, 对任意  $x\in U, f(x)\neq g(x),$ 且

$$\lim_{x o 0}f(x)=\lim_{x o 0}g(x)=a>0,$$

则

$$\lim_{x o 0}rac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$$
\_\_\_\_\_.

张祖锦解.

原式 
$$\cfrac{ \text{Lagrange: } F(t) = t^{g(x)} }{\xi_x$$
 介于  $f(x), g(x)$  之间  $\lim_{x o 0} g(x) \xi_x^{g(x)-1}$ 

https://r $\pi$ ianaaodua.com/o/zhangzujin

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (本题满分 10 分) 设数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1=1,$  且

https:
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}, n \geqslant 1$$
.jsx

求极限  $\lim_{n\to\infty} n!a_n$ . 张祖锦解.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)} \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(a_n+1)}{a_n} \\ &\Rightarrow \frac{1}{(n+1)!a_{n+1}} = \frac{a_n+1}{n!a_n} = \frac{1}{n!a_n} + \frac{1}{n!} \\ &\Rightarrow \frac{1}{n!a_n} = \frac{1}{1!a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} \left[ \frac{1}{(k+1)!a_{k+1}} - \frac{1}{k!a_k} \right] = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!} \to \mathbf{e} \ \ (n \to \infty) \\ &\Rightarrow \lim_{n \to \infty} n!a_n = \frac{1}{\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

- 3. (本题满分 10 分) 设 f(x) 在 [0,1] 上连续, f(x) 在 (0,1) 内可导, 且 f(0)=0, f(1)=1. 证明:
  - https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin (1) 存在  $x_0 \in (0,1)$ , 使得  $f(x_0) = 2 3x_0$ ;
  - (2) 存在  $\xi, \eta \in (0,1)$ , 且  $\xi \neq \eta$ , 使得

张祖锦解.

(1)

$$F(x)\equiv f(x)-(2-3x)$$
  $\Rightarrow F(0)=-2<0<2=F(1)$   $\Rightarrow \exists \ x_0\in (0,1), \ \mathrm{s.t.} \ F(x_0)=0 \ (连续函数介值定理) .$ 

(2) 由 Lagrange 中值定理,

$$\exists \; oldsymbol{\xi} \in (0,x_0), \; ext{s.t.} \; f'(oldsymbol{\xi}) = rac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = rac{2 - 3x_0}{x_0}, \ \exists \; oldsymbol{\eta} \in (x_0,1), \; ext{s.t.} \; f'(oldsymbol{\eta}) = rac{f(1) - f(x_0)}{1 - x_0} = rac{3x_0 - 1}{1 - x_0}.$$

故  $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]$ =4.duo.com/o/zhangzujin

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4. (本题满分 12 分) 已知

https://mianb
$$\left(\frac{y}{x}\right)$$
luo.co $\left(\frac{x}{y}\right)$ /gjsx

其中  $f, \varphi$  均为二次可微函数.

- (2) 当 f=arphi, 且

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{x=a} = -by^2$$

时, 求 f(y). 微信: zhangzujin361

张祖锦解.

(1)

$$egin{aligned} oldsymbol{z}_x &= f igg( rac{y}{x} igg) + x f' igg( rac{y}{x} igg) rac{-y}{x^2} + 2 y arphi' igg( rac{x}{y} igg) rac{1}{y} \ &= f igg( rac{y}{x} igg) - rac{y}{x} f' igg( rac{y}{x} igg) + 2 arphi' igg( rac{x}{y} igg) \,, \ &z_{xy} &= f' igg( rac{y}{x} igg) rac{1}{x} - rac{1}{x} f' igg( rac{y}{x} igg) - rac{y}{x} f'' igg( rac{y}{x} igg) rac{1}{x} + 2 arphi'' igg( rac{x}{y} igg) rac{-x}{y^2} \ &= -rac{y}{x^2} f'' igg( rac{y}{x} igg) - rac{2x}{y^2} arphi'' igg( rac{x}{y} igg) \,. \end{aligned}$$

# (2) 当 f=arphi, 且

(故信公
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Big|_{x=a}$$
 年 $by^2$  学

时,

$$-\frac{y}{a^2}f''\left(\frac{y}{a}\right) - \frac{2a}{y^2}f''\left(\frac{a}{y}\right) = -by^2$$

$$\Rightarrow -\frac{u}{a}f''(u) - \frac{2}{au^2}f''\left(\frac{1}{u}\right) = -ba^2u^2 \left(\frac{y}{a} = u\right)$$

$$\Rightarrow u^3f''(u) + 2f''\left(\frac{1}{u}\right) = a^3bu^4$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u^3}f''\left(\frac{1}{u}\right) + 2f''(u) = \frac{a^3b}{u^4}\left(u \to \frac{1}{u}\right)$$

$$\Rightarrow f''(u) = \frac{a^3b}{3}\left(\frac{2}{u^4} - u\right) \quad (联合上述两式)$$

$$\Rightarrow f(u) = \frac{a^3b}{3}\left(\frac{1}{3u^2} - \frac{u^3}{6}\right) + au + b \quad (a, b)$$

$$\Rightarrow \text{为任意常数} \right).$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

# 5. (本题满分 12 分) 计算

$$I=\oint\limits_{\Gamma}[\sqrt{3y-x}]\,\mathrm{d}x-5z\,\mathrm{d}z,$$

曲线  $\Gamma: \left\{ egin{array}{ll} x^2+y^2+z^2=8 \\ x^2+y^2=2z \end{array} 
ight.$ ,从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向. 张祖

锦解.由

https://miafb:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 8 \\ d_{210} c_{20} = 2z \end{cases}$$
  $\Rightarrow \begin{cases} z^2 + 2z = 8 \\ x^2 + y^2 = 2z \end{cases}$  https://miafb: $\frac{1}{2}$   $= \frac{2}{2}$   $= \frac{2}{2}$   $= \frac{2}{2}$ 

知

$$I = \frac{x=2\cos\theta}{y=2\sin\theta} \int_0^{2\pi} \left| \sqrt{3} \cdot 2\sin\theta - 2\cos\theta \right| (-2\sin\theta) \, d\theta$$

$$= -8 \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta \right| \sin\theta \, d\theta$$

$$= -8 \int_0^{2\pi} \left| \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right| \sin\theta \, d\theta$$

$$= -8 \int_0^{2\pi} \left| \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \right| \sin\theta \, d\theta$$

$$= -4 \int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi + \frac{\pi}{3}} \left| \cos\tau \right| \left(\sin\tau - \sqrt{3}\cos\tau\right) \, d\tau$$

$$= -4 \int_{-\pi}^{\pi} \left| \cos\tau \right| \left(\sin\tau - \sqrt{3}\cos\tau\right) \, d\tau$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^{\pi} \left| \cos\tau \right| \left(\sin\tau - \sqrt{3}\cos\tau\right) \, d\tau$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^{\pi} \left| \cos\tau \right| \left(\sin\tau - \sqrt{3}\cos\tau\right) \, d\tau$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^{\pi} \left| \cos\tau \right| \left(\sin\tau - \sqrt{3}\cos\tau\right) \, d\tau$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^{\pi} \left| \cos\tau \right| \cos\tau \, d\tau$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^{\pi} \left| \sins \right| \cdot (-\sin s) \, ds$$

$$= \frac{\pi}{3} \int_0^{\pi} \left| \sins \right| \cdot (-\sin s) \, ds$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

## 6. (本题满分 12 分) 证明

$$f(n) = \sum_{m=1}^n \int_0^m \cos rac{2\pi n[x+1]}{m} \, \mathrm{d}x$$

等于 n 的所有因子 (包括 1 和 n 本身) 之和, 其中 [x+1] 表示不超过 x+1 的最大整数, 并计算 f(2021). 张祖锦解.

(2) 当  $m \mid n$  时,

https://mian
$$\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2\pi nk}{m} = \sum_{k=1}^{m} 1 = m$$
gzujin

(3) 当  $m \nmid n$  时,由

$$egin{aligned} 2\sinrac{t}{2}\sum_{k=1}^{m}\cos kt &= \sum_{k=1}^{m}\left[\sinrac{2k+1}{c_02}t-\sinrac{2k-1}{2}t
ight] \ &= \sinrac{2m+1}{2}t-\sinrac{t}{2} \ &= 2\cosrac{m+1}{2}t\sinrac{mt}{2} \end{aligned}$$

知

$$\sum_{k=1}^m \cos \frac{2\pi nk}{m} = \frac{\cos \left(\frac{m+1}{2}\frac{2\pi n}{m}\right) \sin \left(\frac{m}{2}\frac{2\pi n}{m}\right)}{\sin \frac{2\pi n}{m}}$$

$$= \frac{\cos \left(\frac{m+1}{2}\frac{2\pi n}{m}\right) \sin (n\pi)}{\sin \frac{2\pi n}{m}} = 0.$$

(4) 综上即知

$$f(n) = \sum_{m=1}^n \int_0^m \cos rac{2\pi n[x+1]}{m} \, \mathrm{d}x = \sum_{m|n} m.$$

再由 2021 = 43 · 47, 我们得到

$$f(2021) = 1 + 43 + 47 + 2021 = 2112.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学). COM / O / g J S X

# 7. (本题满分 14 分) 设

$$u_n = \int_0^1 rac{\mathrm{d} u}{(1+t^4)^n} \ \left(n\geqslant 1
ight).$$

- (1) 证明数列  $\{u_n\}$  收敛, 并求极限  $\lim_{n \to \infty} u_n$ ;
- (2) 证明级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$  条件收敛;
- (3) 证明当  $p\geqslant 1$  时级数  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$  收敛,并求级数  $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$  的和. 张祖锦解.

(1)

$$\begin{array}{c} \operatorname{https:} \big/ \big/ u_n = \int_0^\delta + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n} \leqslant \! \delta \, | + \frac{1-\delta}{(1+\delta^4)^n} \\ \Rightarrow \overline{\lim}_{n \to \infty} u_n \leqslant \delta \ (n \to \infty) \\ \Rightarrow \overline{\lim}_{n \to \infty} u_n \leqslant 0 \ (\delta \to 0^+) \\ \operatorname{https:} \lim_{n \to \infty} u_n = 0. \text{adduo.com} \big/ o \big/ \text{gjsx} \end{array}$$

(2) 由  $u_n \setminus 0$  及 Leibniz 判别法知  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$  收敛. 又由

$$egin{aligned} u_n &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n} \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n} = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \ \ (n \geqslant 2) \ \Rightarrow \sum_{n=1}^\infty u_n \geqslant \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} = +\infty \end{aligned}$$

知  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$  条件收敛. Zhangzujin361

(3)由

$$p\geqslant 1\Rightarrow rac{u_n}{n^p}\leqslant rac{u_n}{n}$$
 https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin 知仅需验证  $\sum_{n=1}^\inftyrac{u_n}{n}$  收敛即知  $\sum_{n=1}^\inftyrac{u_n}{n^p}$  收敛. 由

$$egin{aligned} u_n &= \int_0^1 rac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n} = rac{t}{(1+t^4)^n}igg|_0^1 - \int_0^1 rac{-n\cdot 4t^3}{(1+t^4)^{n+1}}\cdot t\,\mathrm{d}t \ &= rac{1}{2^n} + 4n\int_0^1 rac{1+t^4-1}{(1+t^4)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = rac{1}{2^n} + 4n(u_n-u_{n+1}) \end{aligned}$$

知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}+4\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}+4u_1.$$

算出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \bigg|_{x=\frac{1}{2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1} dt \bigg|_{x=\frac{1}{2}}$$
$$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-t} dt = \ln 2.$$

https://n
$$I$$
a $\overline{a}$ n $\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}$ d $t$ , $J$ n $\overline{=}$  $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}$ d $t$ , $j$ in

则

$$\begin{split} I+J &= \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\frac{1}{t^2}+1}{\frac{1}{t^2}+t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} = \int_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}s}{s^2+2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{1}{1+\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2} \, \mathrm{d}\frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ J-I &= \int_0^1 \frac{t^2+1}{1+t^4} \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2}+t^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{t}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-2} = \int_{+\infty}^2 \frac{\mathrm{d}s}{s^2-2} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int_2^\infty \left(\frac{1}{s-\sqrt{2}} - \frac{1}{s+\sqrt{2}}\right) \, \mathrm{d}s = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \left(-\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}. \end{split}$$

故

$$egin{aligned} I &= rac{1}{2} \left[ (I+J) - (J-I) 
ight] = rac{1}{2} \left( rac{\pi}{2\sqrt{2}} - rac{1}{2\sqrt{2}} \ln rac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} 
ight) \ &= rac{1}{4\sqrt{2}} \left( \pi + \ln rac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} 
ight) = rac{1}{4\sqrt{2}} \left[ \pi + \ln(3+\sqrt{2}) 
ight] \; ($$
 (分母有理化)  $&= rac{1}{4\sqrt{2}} \left[ \pi + 2 \ln(1+\sqrt{2}) 
ight], \end{aligned}$ 

$$\sum_{n=1}^{\infty}rac{u_n}{n}=\ln 2+rac{\sqrt{2}}{2}\Big[\pi+2\ln(1+\sqrt{2})\Big]$$
 .

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

#### 26 第12届中国大学生数学竞赛数学B类预赛试题参考解答

1. (15 分) 已知椭球面

$$\Sigma_0: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a > b$$

的外切柱面  $\Sigma_{arepsilon}$  (arepsilon=1 或 -1 平行于已知直线

https://
$$l_{\epsilon}$$
i $\frac{x-2}{n_0}$ a $\overline{d}_1$  $\frac{y-1}{\varepsilon\sqrt{a^2 + b^2}}$  $\overline{d}_2$ z $\frac{z-3}{z h_c}$ gzujin

试求与  $\Sigma$  交于一个圆周的平面的法方向. 注:本题中的外切柱面指的的每一条直母线均与已知椭球面相切的柱面. 张祖锦解.设外切柱面的直母线 l 与椭球面  $\Sigma$  相切于  $M_1(x_1,y_1,z_1)$ . 则

$$egin{align} https://mix & x_1 & x_2 & y_2 & y_1/c \ l & l & l : rac{x_1}{0} = rac{y_2}{arepsilon \sqrt{a^2 - b^2}} = rac{z_1 z_2}{c} = t, \ M_1 \in arDelta_0 \Rightarrow rac{x_1^2}{a^2} + rac{y_1^2}{b^2} + rac{z_1^2}{c^2} = 1. \end{split}$$

进而

1与 Σ 相切于 M<sub>1</sub> 公众号: 跟锦数学

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_1, y = y_1 + \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2}t, z = z_1 + ct \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$
 只有零解 
$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{(y_1 + \varepsilon \sqrt{a^2 + b^2}t)^2}{b^2} + \frac{(z_1 + ct)^2}{c^2} = 1$$
 只有零解 
$$\Rightarrow \left(\frac{a^2 - b^2}{b^2} + 1\right)t^2 + 2\left(\frac{\varepsilon y\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} + \frac{z_1}{c}\right)t = 0$$
 只有零解 
$$\Rightarrow \frac{\varepsilon y_1\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2} + \frac{z_1}{c} = 0 \text{ and } \text{ and } \text{ commonly } \text{ / zhangzujin}$$
 
$$\Rightarrow y_1 = \frac{b^2}{ca^2}(cy - \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2}z), z_1 = -\varepsilon \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a^2}(cy - \varepsilon \sqrt{a^2 - b^2}z)$$
 (联合 
$$\frac{y - y_1}{\varepsilon \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{z - z_1}{c}, \text{ 求解关于 } y_1, z_1 \text{ 的线性方程组} \right).$$

因此,

$$egin{align} 1 &= rac{x_1^2}{a^2} + rac{y_1^2}{b^2} + rac{z_1^2}{c^2} \ &= rac{x^2}{a^2} + rac{b^2}{c^2 a^4} (cy - arepsilon \sqrt{a^2 - b^2} z)^2 \ &+ rac{a^2 - b^2}{a^4 c^2} (cy - arepsilon \sqrt{a^2 - b^2} z)^2. \end{align}$$

这就是外切柱面方程. 令 z = 0, (\*) 化简为  $x^2 + y^2 = a^2$ . 所以柱面  $\Sigma_{\varepsilon}$  与 xOy 平面相交于圆周  $x^2 + y^2 = a^2$ , z = 0. 由于与二次柱面  $z_{\varepsilon}$  的交线为圆周的所有平面都平行, 所以与  $z_{\varepsilon}$  交于一个圆周的平面的法方向为  $\{0,0,1\}$ . 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

2. (15 分) 设 f(x) 在 [0,1] 上连续, 且  $1 \leq f(x) \leq 3$ , 证明:

https://mi
$$\leqslant \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leqslant \frac{4}{3}$$
.gzujin

张祖锦解.由 Cauchy-Schwarz 不等式知

https:
$$/1 = \left[ \int_0^1 \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{\frac{1}{f(x)}} \, dx \right]^2$$

$$\leq \int_0^1 f(x) \, dx \cdot \int_0^1 \frac{dx}{f(x)}.$$

而另外一个不等号可见 数学考研竞赛00039. 实际上,取 m=1, M=3,则对  $\frac{[f(x)-m][f(x)-M]}{f(x)} \leqslant 0$  关于 x 积分有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - (m+M) + mM \int_0^1 rac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant 0,$$

$$\int_{0}^{1} f(x) dx \cdot \int_{0}^{1} \frac{1}{f(x)} dx \leq (m+M)t - mMt^{2} \quad \left( \mathbf{x} \ t = \int_{0}^{1} \frac{1}{f(x)} dx \right)$$

$$\leq \frac{(m+M)^{2}}{4mM}.$$

另外, 第10届中国大学生数学竞赛非数学类预赛试题03也考过呢. 我把所有 cmc 的试题都做了, 其实哪, 数学有时考非数的, 非数有时考数学的. 张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

3. (15 分) 设 A 为 n 阶复方阵, p(x) 为 A 的特征多项式.又设 g(x) 为 m 次复系数多项式,  $m \geqslant 1$ . 证明: g(A) 可逆当且仅当 p(x) 与 g(x) 互素. 张祖锦解.设 A 的特征值为  $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ , 则 g(A) 的特征值为  $g(\lambda_1), \cdots, g(\lambda_n)$ , 进而

$$g(A)$$
 可逆  $\Leftrightarrow |g(A)| = \prod_{i=1}^n g(\lambda_i) 
eq 0$   $\Leftrightarrow g(\lambda_i) 
eq 0, orall i$   $\Leftrightarrow g(x) 
eq p(x) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$  没有公共根  $\Leftrightarrow (g,p) 
eq 1.$ 

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

4.  $(20\ eta)$  设  $\sigma$  为 n 维复向量空间  $\mathbb{C}^n$  的一个线性变换,  $\mathscr{E}$  表示恒等变换. 证明以

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin (1)  $\sigma = k\mathcal{E}, k \in \mathbb{C};$ 

- (2) 存在  $\sigma$  的 n+1 个特征向量:  $v_1,\cdots,v_{n+1},$  这 n+1 个向量中任何 n 个向 量均线性无关.

张祖锦解.

(1) ⇒: 存在  $\sigma$  的 n+1 个特征向量:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, v_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

这 n+1 个向量中任何 n 个向量均线性无关.

(2) 设  $\lambda_i$  为对应于  $v_i$  的特征值, 则

$$\sigma(v_i) = \lambda_i v_i, i = 1, 2, \cdots, n.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

5. (15 分) 计算广义积分

微信: 
$$\int_{1}^{+\infty} \frac{(x)}{x^3} dx, n361$$

这里 (x) 表示 x 的小数部分 (例如: 当 n 为正整数且  $x \in [n, n+1)$  时, (x) = x - n). 张祖锦解.对  $m \in \mathbb{Z}_+$ , 有

$$\begin{split} \int_{1}^{m+1} \frac{(x)}{x^{3}} \, \mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{m} \frac{x-k}{x^{3}} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{m} \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{k}{2} \left( \frac{1}{(k+1)^{2}} - \frac{1}{k^{2}} \right) \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{2k+1}{k(k+1)^{2}} = 1 - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{2(k+1)-1}{k(k+1)^{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{m+1} - \frac{1}{2} \left[ \sum_{k=1}^{m} 2 \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)^{2}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k(k+1)^{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{(k+1)-k}{k(k+1)^{2}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{m} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k+1)^{2}}. \end{split}$$

令  $m \to \infty$ ,并由数学考研竞赛00199知

$$\int_1^{+\infty} rac{(x)}{x^3} \, \mathrm{d}x = rac{1}{2} - rac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} rac{1}{k^2} - 1 
ight) = 1 - rac{1}{2} \cdot rac{\pi^2}{6} = 1 - rac{\pi^2}{12}.$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

6. (20 分) 设函数 f(x) 在 [0,1] 上连续, 满足对任意  $x \in [0,1], \mathbb{L}$ 

$$\int_{x^2}^x f(t) \,\mathrm{d}t \geqslant rac{x^2-x^4}{2}.$$

证明:  $\int_0^1 f^2(x) dx \geqslant \frac{1}{10}$  、张祖锦解、由duo.com/o/gjsx

$$\frac{1}{15} = \int_0^1 \frac{x^2 - x^4}{2} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \left[ \int_{x^2}^x f(t) \, \mathrm{d}t \right] \, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \int_t^{\sqrt{t}} f(t) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \int_0^1 (\sqrt{t} - t) f(t) \, \mathrm{d}t$$

知

$$egin{aligned} 0 &\leqslant \int_0^1 \left[ f(t) - (\sqrt{t} - t) 
ight]^2 \, \mathrm{d}t \ &= \int_0^1 f^2(t) \, \mathrm{d}t + 2 \int_0^1 \left( \sqrt{t} - t 
ight) f(t) \, \mathrm{d}t + \int_0^1 (\sqrt{t} - t)^2 \, \mathrm{d}t \ &\leqslant \int_0^1 f^2(t) \, \mathrm{d}t - rac{2}{15} + rac{1}{30} = \int_0^1 f^2(t) \, \mathrm{d}t - rac{1}{10}. \end{aligned}$$

张祖锦 (微信: zhangzujin361, 微信公众号: 跟锦数学).

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361

https://mianbaoduo.com/o/zhangzujin

https://mianbaoduo.com/o/gjsx

微信公众号: 跟锦数学

微信: zhangzujin361