מבחן באוטומטים וחישוביות – מועד א׳ סמסטר אביב תשע״ח

- יש לענות על כל השאלות.
- פרט לשאלה 3, הנימוק חובה! תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד.

בהצלחה!

1. (36 נק׳) פתרו את הסעיפים הבאים, ונמקו את צעדיכם (אין צורך להוכיח פורמלית את ב׳,ג׳).

א. הוכיחו שהשפה הבאה אינה רגולרית:
$L_1 = \{w \mid |w|$ אי-זוגי והאות האמצעית ב-w היא $a\}$, מעל $\Sigma = \{a, b\}$

נוכיח באמצעות למת הניפוח (אפשר גם בעזרת משפט נרוד). נניח בשלילה כי L_1 רגולרית, ויהי N הקבוע המובטח ע״י למת הניפוח.

נתבונן במילה $x = b^N a b^N$. היא ארוכה מ-N, ולכן ניתנת לפירוק לפי תנאי הלמה, כלומר: ל-$x = uvw$ כך ש- $|uv| \leq N$, $|v| \geq 1$ וכך שלכל $i \geq 0$ מתקיים ש – $uv^i w \in L_1$.

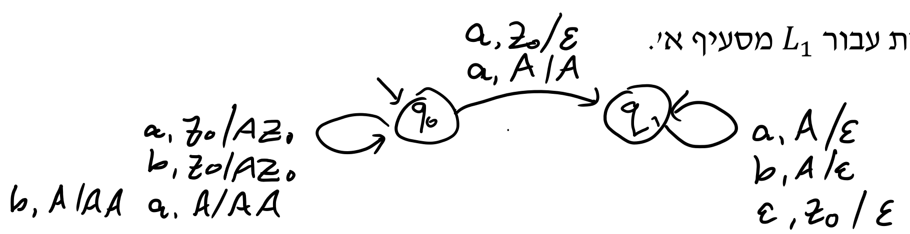
מכיוון ש-$|uv| \leq N$, כל הפירוקים האפשריים של x הם מהצורה $u = b^s, v = b^t, w = b^{N-s-t} a b^N$.
עבור כל פירוק כזה, אם נבחר $i = 0$ נקבל מילה מהצורה $b^s b^{N-s-t} a b^N = b^{N-t} a b^N$, שבה, מכיוון ש- $t > 0$, מתקיים ש – a אינה נמצאת באמצעה, ולכן אינה בL_1, סתירה ללמת הניפוח.

מכאן ש - L_1 אינה רגולרית.

ב. כתבו דקדוק חסר הקשר ששפתו היא L_1 מסעיף א׳.

$$S \to AaA \mid a$$
$$A \to a \mid b$$

ג. בנו אוטומט מחסנית עבור L_1 מסעיף א׳.



(ואפשר כמובן גם לפי התרגום שלמדנו מהדקדוק ב-ב׳)

2. (32 נק') לכל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם הן ב-R, ב-RE, ב-$co-RE$ (או אף אחת מהן).
הוכיחו את קביעתכם.

א. $L_1 = \{<M_1><M_2><w> | w \in L(M_1) \ \wedge \ w \in L(M_2)\}$

השפה ב-RE ואינה ב-R (ולכן גם אינה ב-co − RE)

כדי להראות שב-RE: נגדיר מ״ט M שמקבלת את L_1. בהנתן $<M_1><M_2><w>$, המכונה M מסמלצת ריצה של M_1 על w. אם קיבלה, מסמלצת ריצה של M_2 על w. אם קיבלה, M מקבלת. M מקבלת אמ״ם $w \in L(M_1) \ \wedge \ w \in L(M_2)$.

כדי להראות שאינה ב-R נראה רדוקציה f מ-L_{acc}.

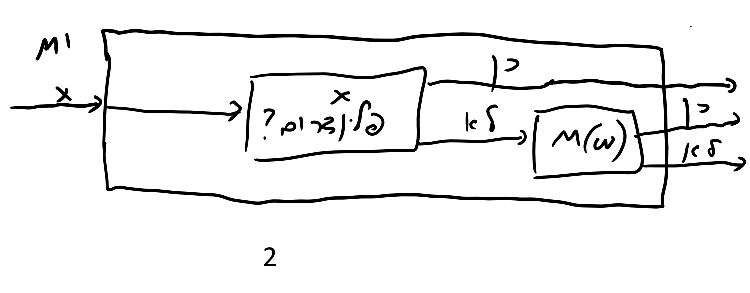
צריך להתקיים $f(<M><w>) = <M_1><M_2><w'>$ כך ש- M מקבלת את w אמ״ם גם M_1 וגם M_2 מקבלות את w'. לכן, נגדיר

$f(<M><w>) = <M><M><w>$. ברור שהדרישה מתקיימת. הרדוקציה חשיבה כי כל שצריך לעשות הוא להעתיק את הקידוד של M.

ב. $L_2 = \{<M> | \text{מקבלת פאלינדרומים בלבד} <M>\}$

השפה ב- co − RE ואינה ב-RE (ולכן אינה ב-R).
שייכות ל-co − RE: מילה שייכת ל- $\overline{L_2}$ אמ״ם אינה קידוד חוקי של מ״ט, או היא קידוד חוקי של מ״ט שמקבלת מילה כלשהי שאינה פלינדרום.
אם כך, נציג M_2 שמקבלת את $\overline{L_2}$: בהנתן קלט $<M>$, אם $<M>$ אינו קידוד חוקי של מ״ט, M_2 מקבלת.
אחרת, מריצה הרצה מבוקרת של M על כל הקלטים. אם M מקבלת קלט שאינו פלינדרום (למדנו שזיהוי פלינדרומים אפשרי, לכן M_2 יכולה לבדוק את סוג הקלט), אז M_2 מקבלת. אחרת, ממשיכה בהרצה המבוקרת.
M_2 מקבלת אמ״ם $<M>$ אינו קידוד חוקי של מ״ט או קיימת מילה שאינה פלינדרום שאותה $<M>$ מקבלת, ולכן מקבלת בדיוק את $\overline{L_2}$.

נראה $L_2 \notin RE$ ע״י רדוקציה f מ- $\overline{L_{acc}}$. צריך: $f(<M,w>) = <M'>$ כך ש- $w \notin L(M)$ אמ״ם $L(M') \subseteq L_{pal}$.
בהנתן $<M>$, נגדיר את $<M'>$ כך:



ראינו שאפשר לבדוק בעזרת מ״ט האם מילה היא פלינדרום. אם M לא מקבלת את w אז אף מילה שאינה פלינדרום לא תתקבל ע״י M' ולכן במקרה זה $< M' > \in L_2$. אם M מקבלת את w אז M' מקבלת את כל המילים, כולל מילים שאינן פלינדרום, ולכן במקרה זה $< M' > \notin L_2$.

3. (32 נק׳) לכל אחת מהטענות הבאה, סמנו ב-X את המשבצות מתחת **לטענות הנכונות בלבד**:
בכל הסעיפים: L_1, L_2, L הן שפות, $\overline{L}$ היא השפה המשלימה של L.

א. אם L רגולרית אז $\overline{L}$ חופשית הקשר.
☒

ב. אם באס״ד מצומצם עבור L יש n מצבים, אז בכל אסל״ד עבור L יש לפחות n מצבים.
☐

ג. אם L חופשית הקשר, אז L^R חופשית הקשר (תזכורת: $L^R = \{w^R | w \in L\}$)
☒

ד. תהי L_1 שפה רגולרית, ותהי L_2 השפה המתקבלת מ-L_1 ע״י מחיקת האות האחרונה מכל מילה ב-L_1. אז L_2 רגולרית.
☒

ה. תהי $R \subseteq P$ כך ש - $\emptyset \notin P$. אז $L_p \notin R$.
☐

ו. אם $L \notin RE$ אז $\overline{L} \notin \mathrm{co}-RE$.
☒

ז. אם $L_1 \cup L_2 \in RE$ אז $L_1, L_2 \in RE$.
☐

ח. לכל שפה L מתקיים ש - $L \leq L$.
☒