## מבחן באוטומטים וחישוביות – מועד ב' סמסטר ב' תשפ"א

- במבחן ישנן 4 שאלות ויש לענות על כולן.
- יש להקפיד על כתב יד ברור ומסודר.

**בהצלחה!**

1. (30 נקי') תהי $L_1 = \{ucv \mid u, v \in \{a,b\}^*, (\#_a(u) + \#_b(v)) = 1(mod 3)\}$ שפה מעל $\{a,b,c\}$

   א. (15 נקי') כתבו ביטוי רגולרי עבור $L_1$.

נסמן: $r_1 = (b^*ab^*ab^*ab^*)^*$, $r_2 = (a^*ba^*ba^*ba^*)^*$, והפתרון הוא:

$$r_1ca^*br_2 + r_1ba^*cr_2 + r_1(b^*ab^*ab^*)cr_2(a^*ba^*ba^*)$$

(הרעיון הוא לעבור על כל 3 האפשרויות של שאריות שסכומן 1 מודולו 3: 0,1 , 1,0 , 2,2 .

   ב. (15 נקי') הוכיחו, בעזרת משפט נירוד, שהשפה הבאה מעל $\{a,b,c\}$ אינה רגולרית:

$$L_2 = \{ ucv \mid u, v \in \{a,b\}^*, \#_a(u) - \#_b(v) = 3 \}$$

נציג קבוצה אינסופית של מילים שבין כל שתיים מהן יש מילה מפרידה עבור היחס $\sim_{L_2}$:

$$S = \{a^nc \mid n > 3\}$$

עבור $a^ic, a^jc \in S$ שונות זו מזו, מילה מפרידה היא $b^{i-3}$, מכיוון ש-$a^icb^{i-3} \in L_2$ ואילו $a^jcb^{i-3} \notin L_2$ (יש להסביר בקצרה מדוע). לכן ל-$\sim_{L_2}$ יש אינסוף מחלקות שקילות, ולפי משפט נירוד היא אינה רגולרית.

2. (20 נקי') נתון אוטומט מחסנית $A = \langle \Sigma, Q, q_0, \delta, \Gamma, z_0 \rangle$.

<u>הראו ע"י בנייה</u>: קיים אוטומט מחסנית $B$ כך ש- $L(B) = L(A) \cap (\Sigma\Sigma)^*$.

כלומר, השפה של $B$ היא קבוצת כל המילים ב-$L(A)$ שארכן זוגי.

<u>פרטו במדויק</u> את כל רכיבי $B$, ונמקו בקצרה את רעיון הבנייה ונכונותו.

הרעיון: ניצור לכל מצב שני עותקים, שזוכרים האם קראנו מספר זוגי או אי-זוגי של אותיות עד כה. ע"י תחתית כפולה שנוסיף בתחילת הריצה, נדאג לכך שאפשר לרוקן את המחסנית רק מהמצבים הזוגיים.
השימוש במחסנית יהיה בדיוק כמו ב-$A$ (למעט הוספת/הסרת תחתית כפולה).

פורמלית: $B = \langle \Sigma, Q \times \{0,1\} \cup \{q_0\}, q_0, \delta', \Gamma \cup \{z_0'\}, z_0 \rangle$, כאשר $\delta'$ מוגדרת באופן הבא:

$\delta'(q_0,\epsilon,z_0)=\{((q_0,0),z_0'z_0)\}$ (הוספת תחתית כפולה)

לכל $q\in Q$: $\delta'\big((q,0),\epsilon,z_0'\big)=\{(q,0),\epsilon\}$ (אפשרות ריקון מחסנית ממצבים זוגיים בחשיפת התחתית הכפולה)

לכל $q\in Q,\sigma\in\Sigma,\gamma\in\Gamma$: מעבר בין מצבים זוגיים לאי-זוגיים ולהפך בעת קריאת אות:

$$\delta'\big((q,0),\sigma,\gamma\big)=\{((p,1),\alpha)\mid (p,\alpha)\in\delta(q,\sigma,\gamma)\}$$

$$\delta'\big((q,1),\sigma,\gamma\big)=\{((p,0),\alpha)\mid (p,\alpha)\in\delta(q,\sigma,\gamma)\}$$

השארות באותו סוג מצב במקרה של מעבר-אפסילון:

$$\delta'\big((q,0),\epsilon,\gamma\big)=\{((p,0),\alpha)\mid (p,\alpha)\in\delta(q,\epsilon,\gamma)\}$$

$$\delta'\big((q,1),\epsilon,\gamma\big)=\{((p,1),\alpha)\mid (p,\alpha)\in\delta(q,\epsilon,\gamma)\}$$

טעויות נפוצות: בניית אוטומט מחסנית שמקבל את כל המילים הזוגיות בלי תלות לשייכות ל-L(A), שינוי תוכן המחסנית באופן שלא מאפשר למעברים של A לפעול כפי שאמורים היו לפעול ללא השינוי (ולכן פגיעה בשפה), התייחסות למצבים מקבלים/לא מקבלים למרות שאין כאלה, הנחה שהמחסנית מתרוקנת רק ע"י שליפה של $z_0$, ושאין שימוש נוסף ב-$z_0$ במהלך הריצה.

3. (20 נק') קבעו והוכיחו האם השפה הבאה שייכת למחלקות $R, RE, co-RE$:

$$L=\{<M>\mid M \text{ מקבלת את כל המילים הקצרות מ} - 100\}$$

השפה נמצאת ב-$R$ \ RE.

שייכות ל-RE: נבנה מ"ט שבהנתן $<M>$, מייצרת את כל המילים שיש בהן פחות מ-100 אותיות האחת אחרי השניה, ועל כל אחת בנפרד מריצה את M. יש קבוצה סופית של מילים כאלה. אם M מקבלת את כולן, המכונה שבנינו מקבלת. (יש להסביר בקצרה מדוע היא אכן מ"ט שמקבלת את L)

אי-שייכות ל-$R$: נגדיר תכונה $\mathrm{P}=\{L\mid L\in RE, \mathrm{L}_{100}\subseteq L\}$, כאשר $\mathrm{L}_{100}$ היא שפת כל המילים שיש בהן פחות מ-100 אותיות. יש להראות: $L_P\neq\emptyset, RE$ וכן $L_P=L$. לפי משפט רייס, $L\notin R$.

4. (30 נק') הוכיחו/הפריכו:

א. (10 נק') יהי $G=\langle\Sigma,V,P,S\rangle$ דקדוק חסר-הקשר.
אם $L(G)$ לא ריקה אז יש כלל ב-G מהצורה $A\to\alpha$, כאשר $\alpha$ היא מעל $\Sigma$ בלבד.

נכון: נניח בשלילה שאין כלל כזה. אז בכל כלל $A \rightarrow \alpha$ יש משתנה ב-$\alpha$. לכן, לכל $w$ כך ש-$S \Rightarrow^* w$, מתקיים שיש משתנה ב-w (רצוי להוכיח זאת קצרות באינדוקציה). לכן, אין מילה שנגזרת בדקדוק, והוא ריק – סתירה.

ב. (10 נק׳) אם $L \in co-RE$ ו-$L' \in R$ אז $L' \subseteq L$.

נפריך ע״י דוגמה נגדית: $L = \emptyset$, $L' = \{a\}$. מתקיים: $L \in R => L \in co-RE$. כמו כן $L'$ סופית ולכן $L' \in R$, ואילו $L'$ אינה מוכלת ב-$L$.

ג. (10 נק׳) יהיו $L_1, L_2$ שתי שפות סופיות מעל $\Sigma$. אז קיימת רדוקציה מ-$L_1$ ל-$L_2$.

דוגמה נגדית: $L_1 = \{a\}, L_2 = \emptyset$. נניח בשלילה שקיימת רדוקציה $f$ ביניהן. אז $f(a) = w$, ומכיוון ש-$a \in L_1$ נדרוש $f(a) = w \in L_2$, אך מכיוון ש-$L_2$ ריקה, זה לא יתכן.