**<u>מבחן באוטומטים וחישוביות – מועד א׳ סמסטר חורף תשע״ט</u>**

- יש לענות על כל השאלות.
- הנימוק חובה! תשובה ללא נימוק לא תזכה בניקוד.

**בהצלחה!**

1. (30 נק׳) נתונה השפה: $L = \{awa | w$ תת מילה של $aba\}$.

א. כתבו ביטוי רגולרי עבור $L$.

$$a(a+b)^*aba(a+b)^*a$$

ב. מצאו את מחלקות השקילות של $\sim_L$ .

ישנן 7 מחלקות שקילות. להלן ביטויים רגולריים עבורם (תשובות שכללו נציגים בלבד גם התקבלו):

$$\epsilon, ab^*, ab^*a, ab^*ab, ab^*aba(a+b)^*b, ab^*aba(a+b)^*a, b(a+b)^*$$

ג. האם השפה $L_1 = \{ww | w \in L\}$ רגולרית? אם כן, כתבו לה ביטוי רגולרי. אם לא, הוכיחו בעזרת משפט נרוד.

השפה אינה רגולרית (הערה - זהו אינו השרשור $L \cdot L$). נוכיח ע״י הצגת אינסוף מילים שכל אחת מהן במחלקה שונה של $\sim_{L_1}$: לכל $i \neq j$ כך ש- $i, j > 1$:

$$(a^i baa, a^j baa) \notin \sim_{L_1}$$

נציג מילה מפרידה: $a^i baa$. מתקיים: $a^i baaa^i baa \in L_1$, ונראה $a^j baaa^i baa \notin L_1$.

נניח בשלילה ש - $a^j baaa^i baa = w'w', w' \in L$. מכיוון שהמילה מסתיימת ב- $baa$, חייב להיות ש - $w'$ מסתיימת ב- $baa$. אם כך, העותק הראשון של $w'$ חייב להסתיים אחרי מופע ה-$baa$ הראשון. אבל מכיוון ש- $i \neq j$, מקבלים שחציית $a^j baaa^i baa$ בצורה כזאת לא מחלקת אותה לשני חלקים שווי אורך - סתירה.

לכן, יש אינסוף מחלקות שקילות של $\sim_{L_1}$, ולפי משפט נירוד השפה אינה רגולרית.

2. (20 נק׳) הוכיחו: אם $L$ רגולרית אז $L \in R$ (יש להוכיח ע״י הצגת מ״ט מתאימה).

אם $L$ רגולרית אז יש אס״ד שמקבל אותה $A = \langle \Sigma, Q, q_0, F, \delta \rangle$. נציג מ״ט $M$ שמכריעה את $L$:

$$M = \langle \Sigma, \Sigma \cup \{\_\}, Q \cup \{q_{acc}, q_{rej}\}, q_0, q_{acc}, q_{rej}, \delta' \rangle$$

אינטואיטיבית, $M$ סורקת את הקלט משמאל לימין, תוך מעברים בין המצבים בהתאם ל-$\delta$. בהתאם למצב מ-$Q$ שהיא נמצאת בו בסוף הקלט, מקבלת או דוחה. פונקציית המעברים היא:

לכל $\sigma \in \Sigma, q \in Q$: $\delta'(q, \sigma) = (\delta(q, \sigma), \sigma, R)$

לכל $q \in F$: $\delta'(q, \_) = (q_{acc}, \_, S)$

לכל $q \in Q \setminus F$: $\delta'(q, \_) = (q_{rej}, \_, S)$.

קל להראות שכל ריצה של $M$ על קלט $w$ מסמלצת ריצה של $A$ על $w$. פורמלית: נסמן $w = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$.

אז הריצה של $A$ על $w$:

$$(q_0, \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n) \vdash (\delta(q_0, \sigma_1), \sigma_2 \dots \sigma_n) \vdash^* (\delta(q_i, \sigma_{i+1}), \sigma_{i+2} \dots \sigma_n) \vdash^* (q, \epsilon)$$

מתאימה לריצה של $M$ על $w$:

$$(\epsilon, q_0, \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n) \vdash (\sigma_1, \delta(q_0, \sigma_1), \sigma_2 \dots \sigma_n) \vdash^* (\sigma_1 \dots \sigma_{i+1}, \delta(q_i, \sigma_{i+1}), \sigma_{i+2} \dots \sigma_n) \vdash^* (w, q, \epsilon)$$

ולפי הגדרת $\delta'$, הריצה ב-$A$ מקבלת אמ״ם הריצה ב-$M$ מקבלת. לכן $L(A) = L(M)$.

מכיוון שהקלט סופי, $M$ תמיד עוצרת. לכן, $L \in R$.

3. (30 נק׳) נתונה שפה חסרת הקשר $L$ מעל א״ב $\Sigma$, ויהי $A = \langle \Sigma, \Gamma, Q, q_0, \delta, z_0 \rangle$ אוטומט מחסנית עבור $L$.
הוכיחו שהשפות הבאות הן חסרות הקשר, ע״י תיאור אוטומט מחסנית מתאים:

א. $\widetilde{LL} = \{w_1 w_1 w_2 w_2 w_3 w_3 \dots w_n w_n | w_1 w_2 \dots w_n \in L\}$.

אינטואיטיבית: נבנה א״מ שבו כל מעבר ב-A שקורא $\sigma$ נפצל לשני מעברים רצופים שקוראים $\sigma$, כאשר המעבר הראשון רק קורא $\sigma$ למצב ביניים, והשני מבצע את השינוי במחסנית. לשם כך, נוסיף מצבי ביניים: אחרי קריאת $\sigma$ מ-$q$, נעבור (מבלי לשנות את המחסנית) למצב $q_\sigma$ שמרשה רק לקרוא $\sigma$, ועובר למצב הבא (ומשנה את המחסנית) בהתאם ל-$\delta$.

לכן, כל ריצה של $A$ מתאימה לריצה של $A'$ על מילה שבה כל אות משוכפלת, ולהפך.

מכאן: $L(A') = \widetilde{LL}$.

פורמלית: נבנה אוטומט מחסנית $A' = \langle \Sigma, \Gamma, Q \cup (Q \times \Sigma), q_0, \delta', z_0 \rangle$, כאשר פונקציית המעברים $\delta'$ מוגדרת כך:

לכל $q \in Q, \sigma \in \Sigma, B \in \Gamma$ כך ש: $(q', \alpha) \in \delta(q, \sigma, B)$, נוסיף ל-$\delta'$ את זוג המעברים:

$$(q_\sigma, B) \in \delta'(q, \sigma, B)$$

וכן

$$(q', \alpha) \in \delta'(q_\sigma, \sigma)$$

את מעברי ה-$\epsilon$ נותיר כשהיו: לכל $q \in Q$, $B \in \Gamma$ כך ש-$(q', \alpha) \in \delta(q, \epsilon, B)$, נוסיף את המעבר:

$$(q', \alpha) \in \delta'(q, \epsilon, B)$$

ב. $\tilde{L} = \{w_1w_2w_3 \dots w_n | w_1w_1w_2w_2 \dots w_nw_n \in L\}$.

נניח ש-$z_0$ לא מוצא עד למעבר המקבל (אפשר תמיד לבנות א"מ מחסנית שקול ל-A שנוהג כך).

בדומה ל-א', נוסיף מצבים ש"מחכים" לאות $\sigma$ נוספת אחרי קריאת $\sigma$ ראשונה. בניגוד ל-א', במקום לקרוא את ה-$\sigma$ הנוספת, נקרא $\epsilon$ במקומה, על מנת להוריד את הכפילות. כך, לכל מילה $w_1w_1w_2w_2 \dots w_nw_n$ שנקראה ב-$A$, נקרא את המילה $w_1w_2 \dots w_n$ ב-$A'$. המצבים ה"מחכים" יאפשר ריצה רק על מילים מהצורה $w_1w_1w_2w_2 \dots w_nw_n$.

פורמלית, נגדיר א"מ $A' = \langle \Sigma, \Gamma, Q \cup (Q \times \Sigma), q_0, \delta', z_0 \rangle$, כאשר $\delta'$ מוגדרת באופן הבא:

לכל $q \in Q, \sigma \in \Sigma, B \in \Gamma \setminus \{z_0\}$ כך ש: $(q', \alpha) \in \delta(q, \sigma, B)$, נוסיף ל-$\delta'$ את המעבר:

$$(q'_\sigma, \alpha) \in \delta'(q, \sigma, B)$$

(עוברים לעותק של $q'$ ש"זוכר" שצריך להוריד את ה-$\sigma$ הבאה שתגיע.)

ממצבים מהצורה $q_\sigma$, נרשה לקרוא רק $\epsilon$ – בין אם היה מעבר $\epsilon$ במקור, ובין אם זה $\epsilon$ שמחליף את $\sigma$:

לכל $q \in Q, B \in \Gamma$ כך ש: $(q', \alpha) \in \delta(q, \epsilon, B)$, נוסיף ל-$\delta'$, לכל $\sigma \in \Sigma$, את המעברים:

$$(q_\sigma, \alpha) \in \delta(q_\sigma, \epsilon, B) \ (\forall B \neq z_0)$$

$$(q', \alpha) \in \delta(q, \epsilon, B):$$

(מעברי $\epsilon$ מקוריים נשארים גם בין מצבים מקוריים וגם בין מצבים שמחכים לאות ספציפית. בנוסף, לא מרשים לרוקן את המחסנית לפני שהאות השנייה הגיעה).

לבסוף, לכל $q \in Q, B \in \Gamma, \sigma \in \Sigma$ כך ש - : $(q', \alpha) \in \delta(q, \sigma, B)$, נוסיף ל-$\delta'$ את המעברים:

$$(q', \alpha) \in \delta(q_\sigma, \epsilon, B)$$

(עוברים למצב שהיינו עוברים אליו במקור, אבל מחליפים את ה-$\sigma$ ב-$\epsilon$).

4. (20 נק׳) קבעו האם השפה הבאה היא ב-$R$, ב-$RE$, ב-$co-RE$ (או אף אחת מהן). הוכיחו את קביעתכם.

$$L = \{<M><w> \mid w^R \in L(M)\}$$

נראה $L \in RE \setminus R$

נראה שייכות ל-RE ע״י הצגת מ״ט $M_L$ המקבלת את $L$. בהנתן קלט $<M><w>$, המכונה $M_L$ פועלת כך:

1. אם $<M><w>$ קידוד לא חוקי – דוחה.
2. מחשבת את $w^R$
3. מסמלצת ריצה של $M$ על $w^R$ (בדיוק כמו $M_U$).

נכונות: בודקים האם M מקבלת את $w^R$, בדיוק לפי ההגדרה של $L$.

נראה $L \notin R$ ע״י רדוקציה מ-$L_{acc}$. נציג רדוקציה $f$ מתאימה:

אם הקלט לא חוקי: $f(<M><w>) = <M><w>$

אחרת: $f(<M><w>) = <M><w^R>$

מתקיים: $<M><w> \in L_{acc}$ אז $M$ מקבלת את $w$, אז $M$ מקבלת את ${w^R}^R$,

ולכן $<M><w^R> \in L$.

$<M><w> \notin L_{acc}$ אז או: $M$ לא מקבלת את $w$, אז $M$ לא מקבלת את ${w^R}^R$,

ולכן $<M><w^R> \notin L$, או הקלט לא חוקי, ואז גם אינו חוקי עבור $L$, ולכן $<M><w> \notin L$.

כמו כן, $f$ חשיבה: את $<M>$ מעתיקה כפי שהוא מהקלט, ומחשבת את $<w^R>$ מ-$<w>$ ע״י היפוך קידודי האותיות.