矩阵理论

〈1〉. 方程组求解　$Ax=b,$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, a_{ii}\neq 0, i=1,2,\cdots,n, A \text{ 非奇异}$$

$$\Rightarrow x=A^{-1}b$$

$$A\Rightarrow D=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$L=-\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}, U=-\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Ax=b \Rightarrow A=M-N(\det M\neq 0)\Rightarrow Mx-Nx=b$$

$$\Rightarrow Mx=Nx+b \Rightarrow x=M^{-1}Nx+M^{-1}b$$

$$\Rightarrow x^{(k+1)}=M^{-1}Nx^{(k)}+M^{-1}b=\tilde{M}x^{(k)}+\tilde{b}$$

$$A=D-L-U,$$

(1)$M=D, N=L+U \Leftrightarrow$ **Jacobi iterative method**

(2)$M=D-L, N=U \Leftrightarrow$ **Gauss-Seidel iterative method**

(3)$M=\frac{1}{\omega}(D-\omega L), N=\frac{1}{\omega}[(1-\omega)D+\omega U]$

$\Leftrightarrow$ **Successive Overrelaxation Iterative mathods**

返回

<2>、码理论中的矩阵方法

1) (0, 1)矩阵：矩阵的元素都是0 或 1，而且0与1之间的运算满足:

$$0\oplus 0=0,\ 0\oplus 1=1,\ 1\oplus 0=1,\ 1\oplus 1=0;$$

$$0\otimes 0=0,\ 0\otimes 1=0,\ 1\otimes 0=0,\ 1\otimes 1=1.$$

2) 格雷码：是一种改变量最小的码.

在二进数码内，往往两个相邻的数字间，其改变量不是最小.比如由3变到4，二进数码是由011变到100，其改变量是3位.

十进数	二进码	格雷码	格雷码十进数
0	000	000	0
1	001	001	1
2	010	011	3
3	011	010	2
4	100	110	6
5	101	111	7
6	110	101	5
7	111	100	4

返回

3) 二进码转换为格雷码

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

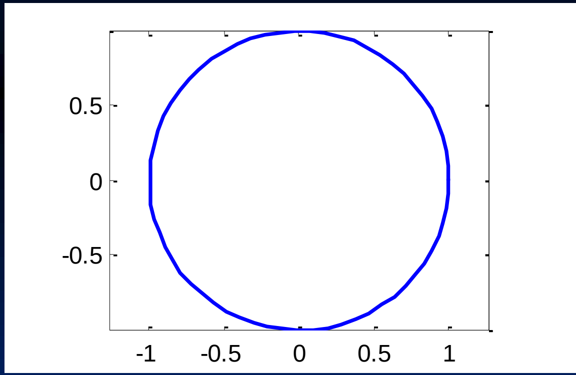
0到2^p-1的转换矩阵：

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

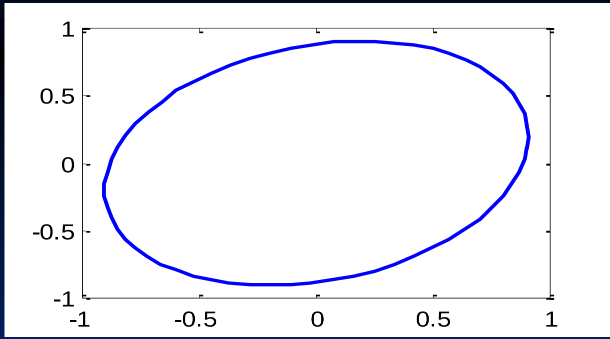
〈3〉设有n对数（x_i, f_i）（$i=1,2,\cdots,n$），$x_i \neq x_j (i \neq j)$，求一个次数小于n的多项式$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$，使得$p(x_i)=f_i$

〈4〉$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T \in R^n, x^T x=1$，求$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^T A x$的极大值.

〈5〉初等几何问题.



$$\xrightarrow{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, A^T=A\in R^{2\times 2}}$$



$$x^2+y^2=1 \xrightarrow[a=\lambda_1(A)\geq\lambda_2(A)=b]{\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, A^T=A\in R^{2\times 2}} \frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}=1$$

第一章

线性代数基础

§1. 线 性 空 间

1、什么是线性空间？

设V是一非空集合，P是一个数域 在V中定义加法 $v=\alpha+\beta$；在V与P之间定义数量乘法：$\delta=k\alpha$. 如果加法与数量乘法满足

1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

3) $\exists\ 0\in V,\forall\alpha\in V,$有$\alpha+0=\alpha$

4) $\forall\alpha\in V,\exists\ \beta\in V, s.t\ \ \alpha+\beta=0$

5) $1\alpha=\alpha$

6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$

7) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

8) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+l\beta$

则V称为数域P上的线性空间.

2 判断下列集合是否构成线性空间.

1) 空间中不平行于一已知向量ξ的全体向量所构成的集合,

2) 数域P上次数等于定数$n(n \geq 1)$的多项式全体所构成的集合,是否构成复数域上的线性空间?

返回

3). 正实数的全体，记作R^+,在其中定义加法及数乘运算为：

$\langle 1\rangle$ $+$： $a+b$ $\bullet$： λa $(a,b\in R^+,\lambda\in R)$;

$\langle 2\rangle$ $a\oplus b=ab$ $\lambda\otimes a=a^{\lambda}$ $(a,b\in R^+,\lambda\in R)$

则R^+对上述$\langle 1\rangle$或$\langle 2\rangle$定义的加法及数乘运算是否构成线性空间。

证明：$\forall a$、$b\in R^+\Rightarrow a\oplus b=ab\in R^+$

$\forall a\in R^+$，$\forall\lambda\in R\Rightarrow\lambda\otimes a=a^{\lambda}\in R^+$

$\therefore$ 对定义的加法与数乘运算封闭。

返回

下面来证明上述两种运算满足八条运算规律：

(1) $a \oplus b = ab = ba = b \oplus a$

(2) $(a \oplus b) \oplus c = (ab) \oplus c = abc = a(bc)$

$$= a \oplus (bc) = a \oplus (a \oplus b)$$

(3) R^+中存在零元素 1，对于任意$a \in R^+$有 $a \oplus 1 = a1 = a$

(4) $\forall a \in R^+$有$a^{-1} \in R^+ \ni\ a \oplus a^{-1} = aa^{-1} = 1$

返回

(5) $1 \otimes a = a^1 = a$

(6) $\forall \lambda$、$\mu \in R$，$a \in R^+$,

$$\lambda \otimes (\mu \otimes a) = (\mu \otimes a)^\lambda = (a^\mu)^\lambda = a^{\lambda\mu}$$

$$= (\lambda\mu) \otimes a$$

(7) $\lambda \otimes (a \oplus b) = (a \oplus b)^\lambda = (ab)^\lambda = (a)^\lambda (b)^\lambda$

$$= (a)^\lambda \oplus (b)^\lambda = (\lambda \otimes a) \oplus (\lambda \otimes b)$$

(8) $(\lambda + \mu) \otimes a = a^{\lambda+\mu} = a^\lambda a^\mu$

$$= a^\lambda \oplus a^\mu = (\lambda \otimes a) \oplus (\mu \otimes a)$$

返回

3.线性空间的基和维数

定义：在V中有n个线性无关的向量$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$，而$V$中任意$n+1$个向量都线性相关，则称$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组基，$n$就是线性空间的维数.

返回

4. 求下列线性空间的维数与一组基

1) 数域P上全体n阶方阵构成的空间$P^{n\times n}$，

2) $P^{n\times n}$中全体对称矩阵构成数域P上的空间.

解： 1) $P^{n\times n}$基为 E_{ij} $\quad i,j=1,2,\cdots,n$

$$\dim(P^{n\times n})=n^2$$

2) 令$F_{ij}=\begin{cases}E_{ij}+E_{ji} \\ E_{ii}\end{cases} \quad 1\le i\le j\le n$

维数为$\dfrac{n(n+1)}{2}$.

返回

定义：如果数域P上的线性空间V的一非空子集W对于V的两种运算也构成线性空间，则称W是V的线性子空间.

5 设$A \in P^{n\times n}$，证明：全体与A可交换的矩阵组成的一个子空间，记为$C(A)$.

证 $AE = EA \Rightarrow E \in C(A)$.

$\forall A_1, A_2 \in C(A) \Rightarrow A_1A = AA_1, A_2A = AA_2$

1) $(A_1 + A_2)A = A_1A + A_2A = AA_1 + AA_2$

$$= A(A_1 + A_2)$$

返回

2) $(kA_1)A = k(A_1 A) = k(AA_1) = A(kA_1)$

$\Rightarrow$ $C(A)$是$P^{n\times n}$的子空间.

6\. 设V_1、V_2是线性空间V的两个非平凡子空间，则 V中存在向量α，使$\alpha \notin V_1$、$\alpha \notin V_2$同时成立.

证： $\because$ V_1是非平凡子空间

$\therefore$ 存在向量$\alpha \notin V_1$

$\therefore$ 如果$\alpha \notin V_2$，则结论成立

如果：$\alpha \in V_2$，$\because$ V_2是非平凡子空间

返回

$\because$ 存在向量 $\beta \notin V_2$

$\because$ 如果 $\beta \notin V_1$，则结论成立

$\because$ 如果 $\beta \in V_1$，就有

$$\alpha \notin V_1, \beta \in V_1; \alpha \in V_2, \beta \notin V_2$$

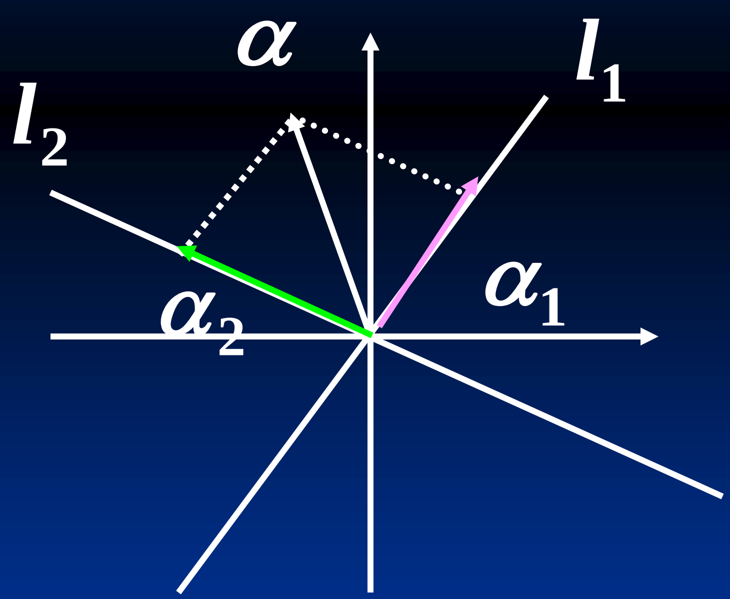
$\therefore \gamma = \alpha + \beta \notin V_1, \gamma = \alpha + \beta \notin V_2$

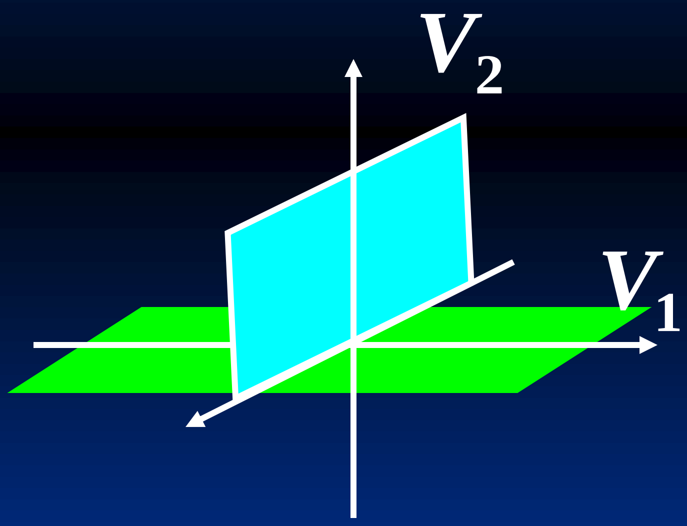
◁ ▷ 返回

2　空间分解与维数定理

定义1　设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则 V_1 与 V_2 的和为

$$V_1+V_2=\{\alpha_1+\alpha_2 \mid \forall \alpha_1\in V_1, \forall \alpha_2\in V_2\}$$





返回

定义1′ 设 V_1, V_2 是线性空间 V 的子空间, 则 V_1 与 V_2 的交为

$$V_1 \cap V_2 = \{\alpha \mid \alpha \in V_1 \text{且} \alpha \in V_2\}$$

定理1：设 V_1 和 V_2 是线性空间V的子空间，则

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)$$

证明 设 V_1, V_2 的维数分别是 s, t, $V_1 \cap V_2$ 的维数是 m. 取 $V_1 \cap V_2$ 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m .$$

如果 $m = 0$，这个基是空集，下面的讨论中 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 不出现，但讨论同样能进行.

它可以扩充成 V_1 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{s-m},$$

也可以扩充成 V_2 的一组基

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-m} .$$

返回

我们来证明，向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-m}$$

是 $V_1 + V_2$ 的一组基. 这样， $V_1 + V_2$ 的维数就等于 $s + t - m$, 因而维数公式成立.

因为

$$V_1 = L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{s-m}),$$

$$V_2 = L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-m}).$$

所以

$$V_1+V_2 = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-m}).$$

现在来证明向量组

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-m}$$

是线性无关的. 假设有等式

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m$$

$$+ p_1\beta_1 + p_2\beta_2 + \ldots + p_{s-m}\beta_{s-m}$$

$$+ q_1\gamma_1 + q_2\gamma_2 + \ldots + q_{t-m}\gamma_{t-m} = 0 .$$

令

$$\alpha = k_1\alpha_1 + \ldots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \ldots + p_{s-m}\beta_{s-m}$$

$$= -q_1\gamma_1 - q_2\gamma_2 - \ldots - q_{t-m}\gamma_{t-m} .$$

返回

由 $\alpha = k_1\alpha_1 + \dots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \dots + p_{s-m}\beta_{s-m}$

可知，$\alpha \in V_1$；由 $\alpha = -q_1\gamma_1 - q_2\gamma_2 - \dots - q_{t-m}\gamma_{t-m}$

可知，$\alpha \in V_2$. 于是 $\alpha \in V_1 \cap V_2$，即 α 可以被

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示. 令 $\alpha = l_1\alpha_1 + \dots + l_m\alpha_m$，

则

$$l_1\alpha_1 + \dots + l_m\alpha_m + q_1\gamma_1 + \dots + q_{t-m}\gamma_{t-m} = 0 .$$

由于 $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{t-m}$ 线性无关，所以

$$l_1 = \dots = l_m = q_1 = \dots = q_{t-m} = 0,$$

因而 $\alpha = 0$. 从而有

$$k_1\alpha_1 + \ldots + k_m\alpha_m + p_1\beta_1 + \ldots + p_{s-m}\beta_{s-m} = 0 .$$

由于 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{s-m}$ 线性无关，又得

$$k_1 = \ldots = k_m = p_1 = \ldots = p_{s-m} = 0 .$$

这就证明了

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_{s-m}, \gamma_1, \ldots, \gamma_{t-m}$$

线性无关， 因而它是 $V_1 + V_2$ 的一组基，故维数公式成立.

证毕

定义2 设V_1和V_2是线性空间V的子空间,若对 $\forall\ \alpha \in V_1+V_2$,

有 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2\ (\alpha_1\in V_1,\alpha_2\in V_2)$

且是唯一的，这个和 V_1+V_2 就称为直和,记为 $V_1\oplus V_2$

定理 2：设 V_1，V_2是线性空间V的子空间,则下列命题等价

（1） V_1+V_2 是直和；

（2） 零向量表示法唯一；

（3） $V_1\cap V_2=\{0\}$.

例 1：设α,β 线性无关,则$L(\alpha)+L(\beta)$是直和,

而$L(\alpha，\alpha+\beta)+L(\beta)$不是直和.

返回

定义3：设$V_1,V_2,\cdots,V_s$是线性空间V的子空间，如果和

$V_1+V_2+\cdots+V_s$ 中的每个向量 α 的分解式

$$\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s,\ \alpha_i\in V_i(i=1,2,\cdots,s)$$

是唯一的，这个和 $V_1+V_2+\cdots+V_s$ 就称为直和，记为

$$V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$$

定理 3：设$V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间V的子空间，则下列命题相互等价：

（1） $W=V_1+V_2+\cdots+V_s$是直和；

（2） 零向量表示法唯一；

（3） $V_i\cap(\sum\limits_{j\neq i}V_j)=\{0\}$.

（4） $\dim(W)=\sum\dim(V_i)$.

返回