# Chapter 1 Basic Electromagnetic Theory

# 第1章 基本电磁理论

$$\oint\!\!\oint D \bullet dS = q_0$$

$$\oint E \bullet dl = -\iint \frac{\partial B}{\partial t} \bullet dS$$

$$\oint\!\!\oint B \bullet dS = 0$$

$$\oint H \bullet dl = I_0 + \iint \frac{\partial D}{\partial t} \bullet dS$$

主讲人：梁锋

办公室：物理学院4号科研楼C栋444#

邮箱：fengliang@uestc.edu.cn

# 第1章 基本电磁理论-目录

## 1.1.1 物理量形式

标量(scalar)、矢量(vector)、张量(tensor)、并矢(dyadic)

张量举例： $\bar{\bar{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$ ，表征各向异性(anisotropic)材料

并矢 $\bar{\bar{C}} = \vec{A}\vec{B} = \left(\hat{u}_x A_x + \hat{u}_y A_y + \hat{u}_z A_z\right)\left(\hat{u}_x B_x + \hat{u}_y B_y + \hat{u}_z B_z\right)$

$$= \begin{bmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x B_x & A_x B_y & A_x B_z \\ A_y B_x & A_y B_y & A_y B_z \\ A_z B_x & A_z B_y & A_z B_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_x \\ \hat{u}_y \\ \hat{u}_z \end{bmatrix}$$

# 1.1 矢量分析



$$=\vec{C}_x\hat{u}_x+\vec{C}_y\hat{u}_y+\vec{C}_z\hat{u}_z$$

可见并矢的每个分量又是一个矢量，包含的信息更多

单位并矢 $\overline{\overline{I}}=\hat{u}_x\hat{u}_x+\hat{u}_y\hat{u}_y+\hat{u}_z\hat{u}_z$

并矢运算

$$\overline{\overline{C}}\cdot\vec{D}=\left(\vec{C}_x\hat{u}_x+\vec{C}_y\hat{u}_y+\vec{C}_z\hat{u}_z\right)\cdot\left(D_x\hat{u}_x+D_y\hat{u}_y+D_z\hat{u}_z\right)$$

$$=\vec{C}_xD_x+\vec{C}_yD_y+\vec{C}_zD_z$$

$$=(\quad)\hat{u}_x+(\quad)\hat{u}_y+(\quad)\hat{u}_z$$

并矢与矢量的点乘等于一个矢量

$$\overline{\overline{I}}\cdot\vec{D}=\vec{D}$$

并矢应用：并矢**Green**函数

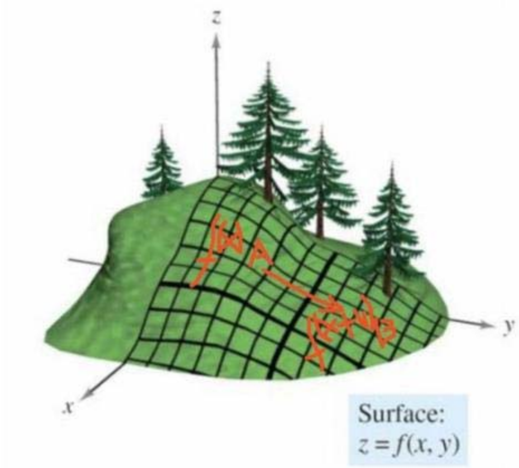
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{j}\omega\mu \iiint_{v} \bar{\bar{G}}(\vec{r},\vec{r}\,') \cdot \vec{J}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}v'$$

其中 $\vec{J}(\vec{r}\,')$ 表示激励源，$v'$ 表示源分布区域

# 1. 1 矢量分析



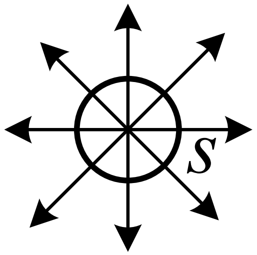
## 1.1.2 梯度、散度、旋度

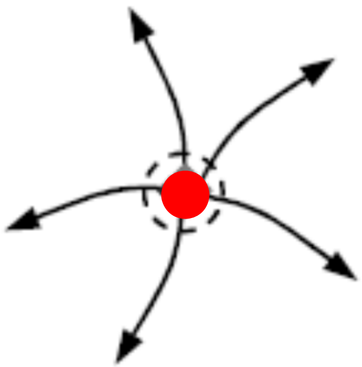



$\nabla\phi$ 梯度表示变化率最大值及变化最快的方向

$$\nabla\cdot\vec{A}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint\vec{A}\cdot d\vec{s}}{\Delta v}$$

散度表示物理量$\vec{A}$ 在某点处$(\Delta v\to 0)$流出闭合球面S的多少（通量）



数学运算 $\nabla\cdot\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$

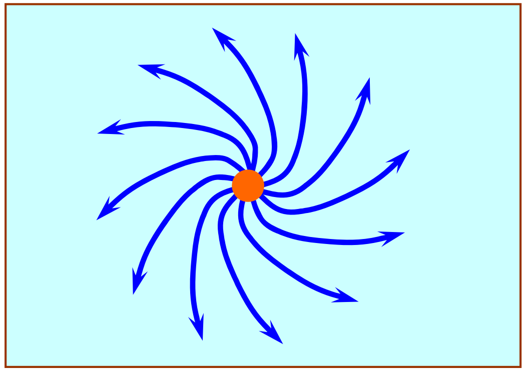
# 1.1 矢量分析

与散度表示流动通量不同，叉乘表示旋转（矢量方向的改变）

$$\hat{u}_x \times \hat{u}_y = \hat{u}_z$$

因此，数学上旋度 $\nabla \times \vec{A}$ 表示既有矢量大小随空间位置的变化（通过偏微分算法 $\nabla$ 体现），又有矢量方向的变化（即旋转，通过叉乘 $\times$ 体现）。

物理上，旋度表示涡旋源。



# 1.1 矢量分析



## 1.1.3 常用矢量运算关系式

$$\nabla\times\left(\nabla\phi\right)=0$$

$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right)=0$$

$$\iiint_v \nabla\cdot\vec{A}dv=\oiint_S \vec{A}\cdot d\vec{s}$$ 散度定理

$$\iint_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{s}=\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l}$$ Stokes定理

**直角坐标、圆柱坐标、球坐标的转换及梯度、散度、旋度形式见教材附录A。**

1.1 矢量分析

1.2 正弦电磁场及其表示

1.3 Maxwell方程、本构关系、边界条件

1.4 Helmholtz方程

1.5 电磁场方程基本求解方法

# 1.2 正弦电磁场及其表示



## 1.2.1 正弦场（时谐场）

正弦电磁场又称时谐电磁场，是指随时间按正弦（或余弦）函数变化的电磁场，或者按指数 $e^{j\omega t}$（或 $e^{-j\omega t}$）变化的电磁场（取其实部）。

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},\ t)=\mathrm{Re}(\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t})$$

花体：瞬时量　　正体：复数量（教材1-7节）

上述定义中的幅值 $\left|\vec{E}(\vec{r})\right|$ 为幅度峰值（**peak value**），若定义为有效值（均方根值），则需乘上$\sqrt{2}$的系数，即教材中的定义。

# 1.2 正弦电磁场及其表示

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\sqrt{2}\mathrm{Re}(\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t})$$

$$\mathcal{E}(r,t)=\sqrt{2}\mathrm{Re}(E(r)e^{j\omega t})=\sqrt{2}\mathrm{Re}(\left|E(r)\right|e^{j\alpha}e^{j\omega t})=\sqrt{2}\left|E(r)\right|\cos(\omega t+\alpha)$$

使用复数量的好处：复数场中，与时间相关的函数已全部包含在$e^{j\omega t}$（或$e^{-j\omega t}$）中，于是对时间的导数和积分可化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\rightarrow j\omega$$

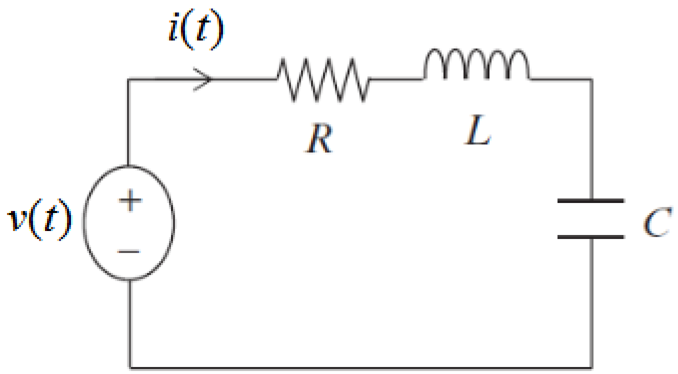
$$\int dt\rightarrow\frac{1}{j\omega}$$

即把对时间的微积分运算转化为代数运算，从而简化计算。

# 1.2 正弦电磁场及其表示



例：




瞬时量表示 $i(t) = I\cos(\omega t + \phi)$

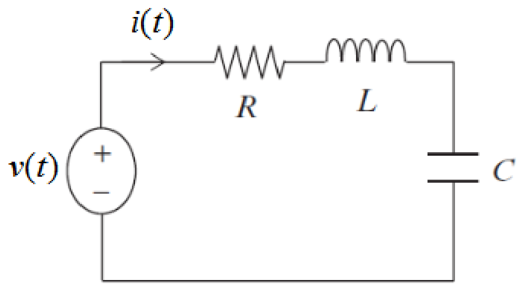
代入电路方程 $Ri(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + \dfrac{1}{c}\int i(t)\,dt = v(t)$ 得

$$I\left[R\cos(\omega t + \phi) - \omega L\sin(\omega t + \phi) + \frac{1}{\omega c}\sin(\omega t + \phi)\right] = V\cos(\omega t)$$

# 1.2 正弦电磁场及其表示



例：




复数量表示

$$i(t)=\sqrt{2}Re\left(I_S e^{j\omega t}\right)$$

$$\frac{di(t)}{dt}=\sqrt{2}Re\left(j\omega I_S e^{j\omega t}\right)$$

$$\int i(t)\,dt=\sqrt{2}Re\left(\frac{I_S}{j\omega}e^{j\omega t}\right)$$

$$v(t)=\sqrt{2}Re\left(V_S e^{j\omega t}\right)$$

代入电路方程得

$$\left[R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega c}\right)\right]I_S=V_S$$

非常简洁，而且已将与时间相关的部分分离出去

# 1.2 正弦电磁场及其表示



小结：花体为瞬时量（与时间和空间均有关），正体为复数量（仅与空间有关），二者的转换关系为

$$\boxed{\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)=\sqrt{2}\mathrm{Re}(\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t})}$$

$$\mathcal{E}(r,t)=\sqrt{2}\mathrm{Re}(E(r)e^{j\omega t})=\sqrt{2}\mathrm{Re}(\left|E(r)\right|e^{j\alpha}e^{j\omega t})=\sqrt{2}\left|E(r)\right|\cos(\omega t+\alpha)$$

思考：为什么要研究正弦电磁场？（正弦电磁场是单频的）

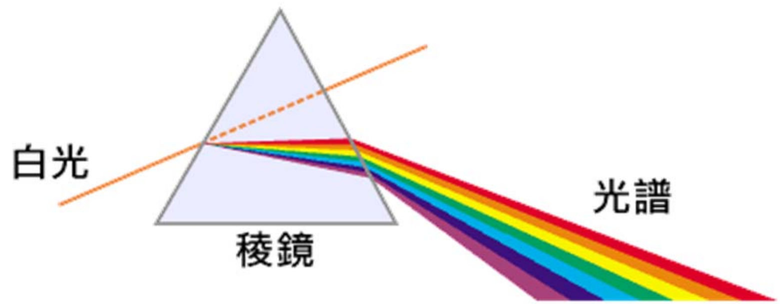
# 傅里叶变换/傅里叶级数

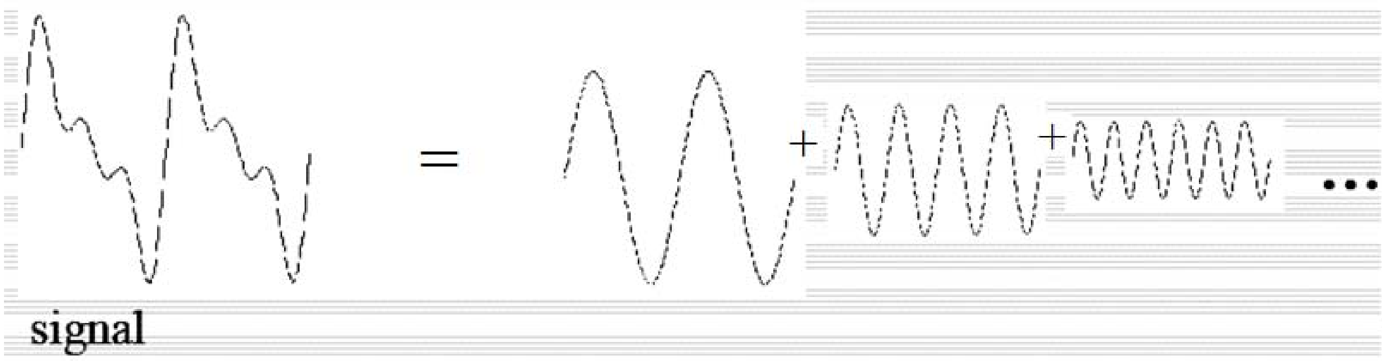


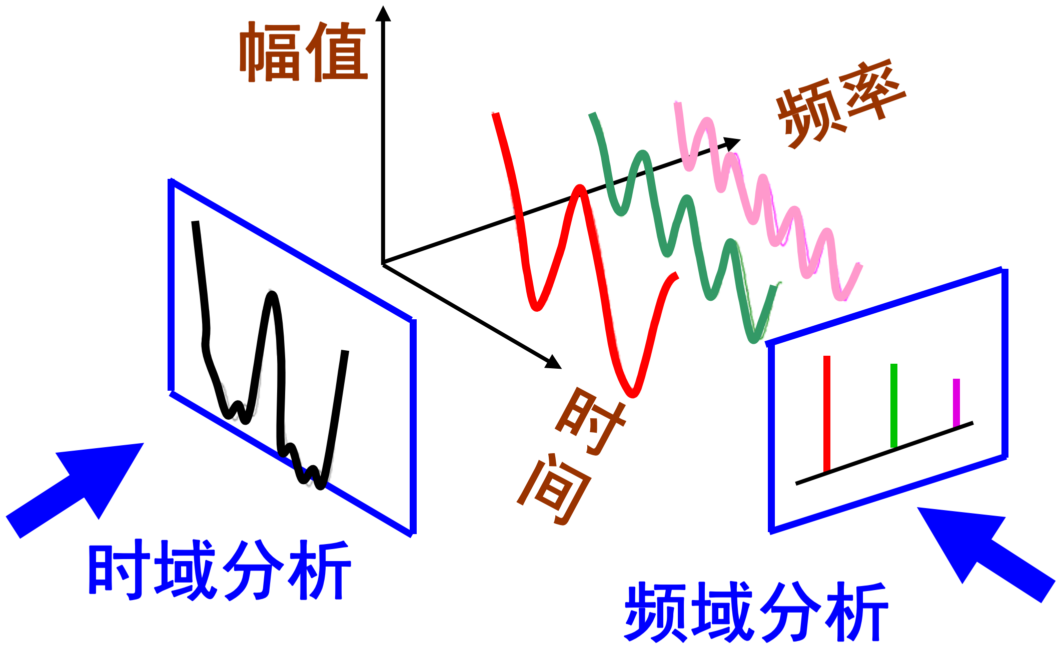
非周期信号的傅里叶变换 $s(t)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)e^{j\omega t}d\omega$

周期信号的傅里叶级数 $s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{jn\omega_0 t},\quad \omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$

傅里叶变换/傅里叶级数表明：任何时域信号**s(t)**都可以分解成若干不同频率成分的正弦信号之和。




signal
=
+
+
...


幅值
频率
时间
时域分析
频域分析

## 1.2.2 时谐场的二次量及复数表示，复功率（教材1-10节）

瞬时量（场）的乘积（点乘，叉乘）或二次方称为二次量。如$p=vi$，$\bar{\mathcal{S}}=\bar{\mathcal{E}}\times\bar{\mathcal{H}}$，$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon\mathcal{E}^2$等都是二次量。

下面以***P***=***VI***为例，推导复功率***P***。利用$\boxed{\mathrm{Re}(a)=\frac{a+a^*}{2}}$得

$$v=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(Ve^{j\omega t})=\frac{\sqrt{2}}{2}(Ve^{j\omega t}+V^*e^{-j\omega t})$$

$$i=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(Ie^{j\omega t})=\frac{\sqrt{2}}{2}(Ie^{j\omega t}+I^*e^{-j\omega t})$$

$$p=vi=\frac{1}{2}(VIe^{j2\omega t}+V^*I^*e^{-j2\omega t}+V^*I+VI^*)\ =\mathrm{Re}(VIe^{j2\omega t}+VI^*)$$

无法写成$p=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(Pe^{j\omega t})$的形式，因此二次量$p$不再是时谐量。

## 1.2.2 时谐场的二次量及复数表示，复功率（教材1-10节）

$p$非正弦（余弦）变化。左右两边对时间积分（一个周期内）

$$\frac{1}{T}\int_0^T pdt = \mathrm{Re}(\frac{1}{T}\int_0^T VI^* dt) = \mathrm{Re}(VI^*)$$

记复功率 $P = VI^*$。一般地，时谐场（量）的二次量在一个周期内的平均值为其对应复数量的实部。瞬时值坡应廷矢量 $\vec{\mathcal{S}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}}$，时间平均值 $\bar{\vec{\mathcal{S}}} = \mathrm{Re}(\vec{E} \times \overline{H^*})$，故复数坡应廷矢量 $\vec{S} = \vec{E} \times \overline{H^*}$。

由于二次量不再是时谐量，不具有时谐量的瞬时量 $\Leftrightarrow$ 复数量变换关系。如 $\vec{\mathcal{S}} = ?\sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\vec{S}e^{j\omega t})$（习题 1-10）。

# 1.2 正弦电磁场及其表示



## 1.2.2 时谐场的二次量及复数表示，复功率（教材1-10节）

复数域坡印廷定理

$$-\nabla\cdot\vec{S}=\sigma|\vec{E}|^2+j\omega(\mu|\vec{H}|^2-\varepsilon|\vec{E}|^2)$$

推导过程见教材P21-23，自己读相应的教材内容。

物理意义：流进的能量=耗能+储能。

# 1.3 麦克斯韦方程、本构关系、边界条件

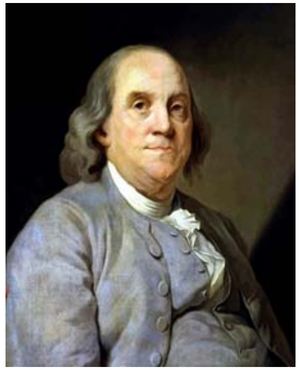
麦克斯韦方程组是描述一切宏观电磁和光学现象及规律的理论基础。理论上，根据麦克斯韦方程组和边界条件，可以求解任何宏观电磁问题。

**"From a long view of the history of mankind - seen from, say, ten thousand years from now - there can be little doubt that the most significant event of the 19th century will be judged as Maxwell's discovery of the laws of electrodynamics."**

**--Richard P. Feynman**

“人类历史从长远看，比如说到一万年以后看回来，**19**世纪最举足轻重的毫无疑问就是麦克斯韦发现了电动力学定律。”——美国著名物理学家理查德•费曼（诺贝尔物理学奖获得者、《费曼物理学讲义》作者）

## 1.3.1 Maxwell方程组建立的历史



19世纪前（1800年以前）电学和磁学是分别研究的（1752~1753年间，富兰克林发明正电和负电概念以及避雷针）。

1785年库伦（Coulomb）定律（真空中点电荷）

$$\vec{F}=\frac{-q_1q_2}{4\pi\varepsilon R^2}\frac{\vec{R}}{R}$$

1820年奥斯特（Oersted）发现电流的磁效应，首次证明电能转化为磁能。

1820毕奥和萨伐尔开展了大量实验，并在数学家拉普拉斯的帮助下，建立了毕奥-萨伐尔定律，即恒定电流激发磁场的规律。

毕奥-萨伐尔定律

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

**1820**年安培（**Ampere**）提出安培环路定律（独立提出，但可由毕奥-萨伐尔定律导出）

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=I\left(\text{或}\ \sum_i I_i\right)$$ 恒定电流能产生磁场（电生磁）

**1821~1831**年法拉第提出电磁感应定律

$$\oint_l \vec{\mathcal{E}}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\iint_S \vec{\mathcal{B}}\cdot d\vec{S}$$ 时变磁场产生电场（磁生电）

**1855~1865**年间麦克斯韦（**Maxwell**）在前人的基础上，并加上自己的假设和改进，总结出了**Maxwell**方程组（瞬时量形式，时域）如下：

**Maxwell方程组：**

$$\oint_l \vec{\mathcal{E}} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{S}$$ 法拉第定律 $$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

$$\oint_l \vec{\mathcal{H}} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{\mathcal{J}} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{\mathcal{D}} \cdot d\vec{S}$$ 安培-麦克斯韦环路定律 $$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

$$\oiint_S \vec{\mathcal{B}} \cdot d\vec{s} = 0$$ 磁通量高斯定理 $$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

$$\oiint_S \vec{\mathcal{D}} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \rho dv$$ 电通量高斯定理 $$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho$$

$$\oiint_S \vec{\mathcal{J}} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V \rho dv$$ 电流连续性方程 $$\nabla \cdot \vec{\mathcal{J}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

## 电磁理论建立的脉络

理想 ⇨ 现实

真空 ⇨ 介质

时不变 ⇨ 时变

# 电磁理论建立的脉络：特殊 → 一般 （理想 → 现实）

（叠加原理） （叠加原理）

源 点电荷 → 任意分布电荷； 电流元 → 任意分布电流

环境 真空 → 任意介质 (引入 $\vec{\boldsymbol{D}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{H}}$)

$$\oint_S \vec{D}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho_f dV$$

$$\oint_C \vec{H}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \vec{J}_c(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$$

时间依赖关系 时不变（静态） → 时变（动态）

# 源与场的关系（电磁场问题的主线）

电子科技大学计算电磁学及其应用团队，CEMLAB

电荷 → 电场

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}(\vec{r}-\vec{r}\,')dV' \quad \text{库仑定律}$$

$\Downarrow$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV \quad \text{高斯定理}$$

$\Downarrow$

介质中 $\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V \rho_f dV}$

时变磁场 → 电场

$$\boxed{\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\int_S \frac{d\vec{B}}{dt}\cdot d\vec{S}}$$

法拉第电磁感应定律

磁荷 → 磁场

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0}$$

电流 → 磁场

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{Id\vec{l}\,'\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \quad \text{毕奥-萨伐尔定律}$$

$\Downarrow$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \quad \text{安培环路定理}$$

$\Downarrow$

介质中 $\oint_C \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S \vec{J}_c\cdot d\vec{S}$

修正

时变电场 → 磁场

$$\boxed{\oint_C \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_S \vec{J}_c+\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}}$$

$$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}=-\frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t}\qquad\nabla\cdot\vec{\mathcal{B}}=0$$

$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}=\vec{\mathcal{J}}+\frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t}\qquad\nabla\cdot\vec{\mathcal{D}}=\rho$$

## 思考：

麦克斯韦如何预言电磁波的存在的？又是如何得出电磁波在真空中传播的速度是光速？

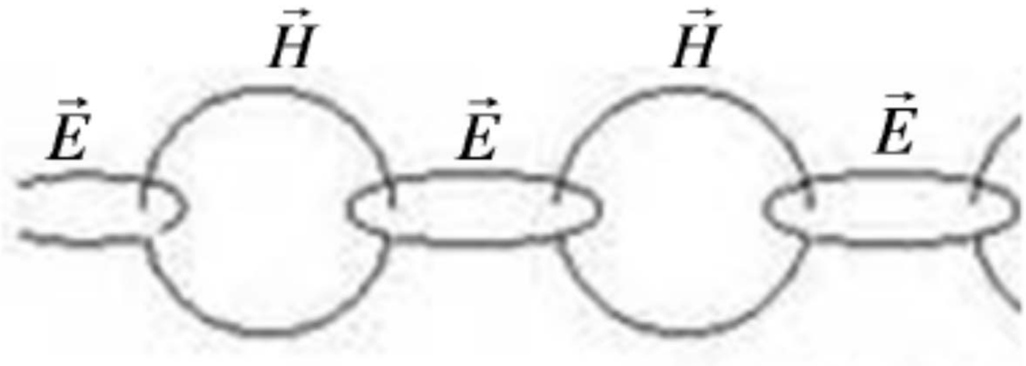
# 1.3 麦克斯韦方程、本构关系、边界条件



## Maxwell方程组的分析

$$\nabla\times\vec{\mathcal{E}}=-\frac{\partial\vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$ 磁场的时间变化引起电场的空间变化

$$\nabla\times\vec{\mathcal{H}}=\vec{\mathcal{J}}+\frac{\partial\vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$ 电场的时间变化引起磁场的空间变化




电磁波在空间中的传播过程

**Maxwell预言了电磁波！**

即使没有导线（无传导电流），电磁场也能在空间电源处向外传播。

无线技术的基础（无线通信，无限输能，无线充电……）

思考问题：电磁波（或辐射现象）如何产生？

时变场 ← 时变电流 ← 电荷变速运动

# 1.3 麦克斯韦方程、本构关系、边界条件





## 1.3.2 本构关系

$$\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m} \approx \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}\ \mathrm{F/m}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}.$$

（1）线性、各向同性（isotropic）介质

（线性是指$\varepsilon$和$\mu$与场强无关）

$$\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon\vec{\mathcal{E}} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{\mathcal{E}} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\ \vec{\mathcal{E}} = \varepsilon_0\vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}}$$

$\chi_e \downarrow$ 极化率 $\qquad \vec{\mathcal{P}} \downarrow$ 极化强度

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu\vec{\mathcal{H}} = \mu_0\mu_r\vec{\mathcal{H}} = \mu_0(1+\chi_m)\ \vec{\mathcal{H}} = \mu_0\vec{\mathcal{H}} + \vec{\mathcal{M}}$$

$\chi_m \downarrow$ 磁化率 $\qquad \vec{\mathcal{M}} \downarrow$ 磁化强度

## 1.3.2 本构关系

（2）导电介质

$$\vec{\mathcal{J}}^{c} = \sigma\vec{\mathcal{E}} \quad （欧姆定律）$$

$\downarrow$ $\downarrow$

传导电流密度 电导率

（3）色散介质

频域 $\vec{D} = \hat{\varepsilon}(\omega)\vec{E}$ 或 $\vec{B} = \hat{\mu}(\omega)\vec{H}$

时域 $\vec{\mathcal{D}} = \varepsilon\vec{\mathcal{E}} + \varepsilon_1\frac{\partial\vec{\mathcal{E}}}{\partial t} + \varepsilon_2\frac{\partial^2\vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} + \varepsilon_3\frac{\partial^3\vec{\mathcal{E}}}{\partial t^3} + \cdots$ 或

$$\vec{\mathcal{B}} = \mu\vec{\mathcal{H}} + \mu_1\frac{\partial\vec{\mathcal{H}}}{\partial t} + \mu_2\frac{\partial^2\vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} + \mu_3\frac{\partial^3\vec{\mathcal{H}}}{\partial t^3} + \cdots$$

反过来 $\vec{\mathcal{E}} = \int_T f_D(\vec{\mathcal{D}})dt$，$\vec{\mathcal{H}} = \int_T f_B(\vec{\mathcal{B}})dt$ 场的响应具有记忆性

## 1.3.2 本构关系

（4）各向异性（anisotropic）介质

$\vec{\mathcal{D}} = \overline{\overline{\varepsilon}}\vec{\mathcal{E}}$ （电各向异性）　（$\overline{\overline{\varepsilon}}$ 为张量）

$\vec{\mathcal{B}} = \overline{\overline{\mu}}\vec{\mathcal{H}}$ （磁各向异性）　（$\overline{\overline{\mu}}$ 为张量）

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

若为互易(reciprocal)材料，则 $\overline{\overline{\varepsilon}}$ 为对称矩阵（张量）

若为晶体(crystals)材料，则

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

如果 $\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$ 称为双轴晶体

如果 $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$ 称为单轴晶体

## 1.3.2 本构关系

（**5**）双各向异性（**bianisotropic**）介质

$$\vec{\mathcal{D}} = \overline{\overline{\varepsilon}}\vec{\mathcal{E}} + \overline{\overline{\xi}}\vec{\mathcal{H}}$$

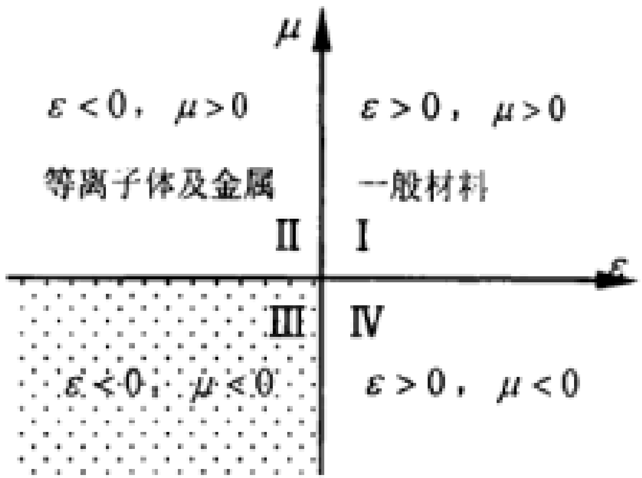
$$\vec{\mathcal{B}} = \overline{\overline{\mu}}\vec{\mathcal{H}} + \overline{\overline{\varsigma}}\vec{\mathcal{E}}$$

磁电耦合特性

自然界较少，但可以通过人工结构实现。参考V. S. Asadchy, A. Diaz-Rubio, and S. A. Tretyakov, "Bianisotropic metasurfaces: physics and applications," *Nanophotonics,* vol. 7, no. 6, pp. 1069-1094, Jun 2018.

## 1.3.2 本构关系

（6）超材料（metamaterial）/人工电磁结构




总结：不管介质是何种特性，都可以用如下统一形式表示本构关系（复数域）

$$\vec{D}=\hat{\varepsilon}\vec{E},\qquad \vec{B}=\hat{\mu}\vec{H}$$

$$\vec{J}^c=\hat{\sigma}\vec{E}$$

## 1.3.2 本构关系

其中的 $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\mu}$, $\hat{\sigma}$ 可以是各种不同的形式，如张量或频率的函数。若是复数，则可表示为

$$\hat{\varepsilon} = \varepsilon' - j\varepsilon'' = \left|\hat{\varepsilon}\right| e^{-j\delta}$$

$\varepsilon'$：电容率，$\varepsilon''$：介质损耗因子，损耗角正切为 $\tan\delta = \dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon'}$

**Maxwell**方程可表示为

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\hat{\mu}\vec{H} = -\hat{z}\vec{H} \qquad \left(\hat{z} = j\omega\hat{\mu}\text{，阻抗率}\right)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}^{c} + j\omega\hat{\varepsilon}\vec{E} = \left(\hat{\sigma} + j\omega\hat{\varepsilon}\right)\vec{E} = \hat{y}\vec{E} \qquad \left(\hat{y} = \hat{\sigma} + j\omega\hat{\varepsilon}\text{，导纳率}\right)$$

## 1.3.2 本构关系

有源**Maxwell**方程则表示为

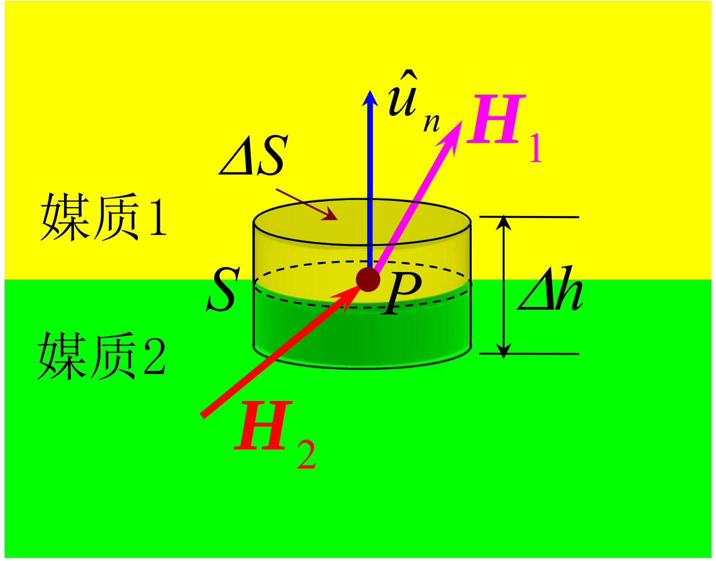
$$\nabla \times \vec{E} = -\hat{z}\vec{H} + \vec{M}^i \qquad \left(\vec{M}^i: \text{外加磁流源}\right)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \hat{y}\vec{E} + \vec{J}^i \qquad \left(\vec{J}^i: \text{外加电流源}\right)$$

# 1.3.3 边界条件








$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \iint_S j\omega\vec{D}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\iint_S j\omega\vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = \iiint_V \rho dv$$

$$\Rightarrow$$

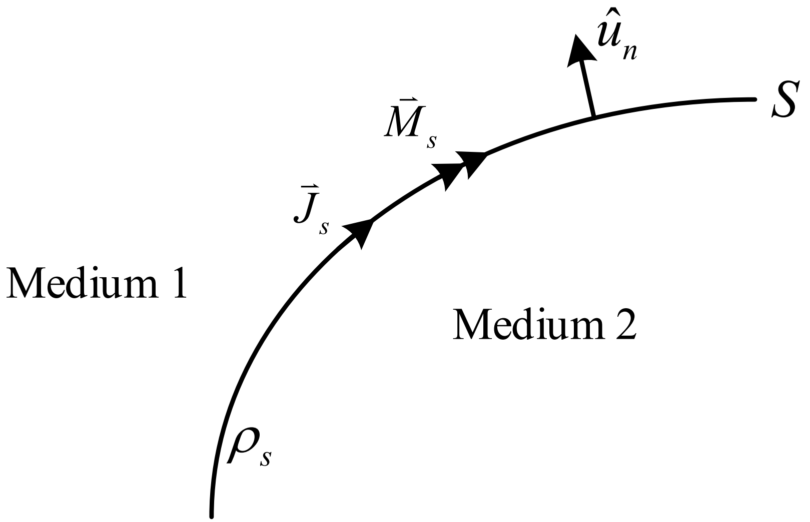
$$\hat{u}_n \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{J}_s$$

$$\hat{u}_n \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = -\vec{M}_s$$

$$\hat{u}_n \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) = 0$$

$$\hat{u}_n \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \rho_s$$

## 1.3.3 边界条件




其中

$\vec{J}_s$ ： 表面电流密度

$\vec{M}_s$ ： 表面磁流密度（通常为**0**）

$\rho_s$ ： 表面电荷密度

$\hat{u}_n$ ： 法向单位矢量

（**1**）一般形式

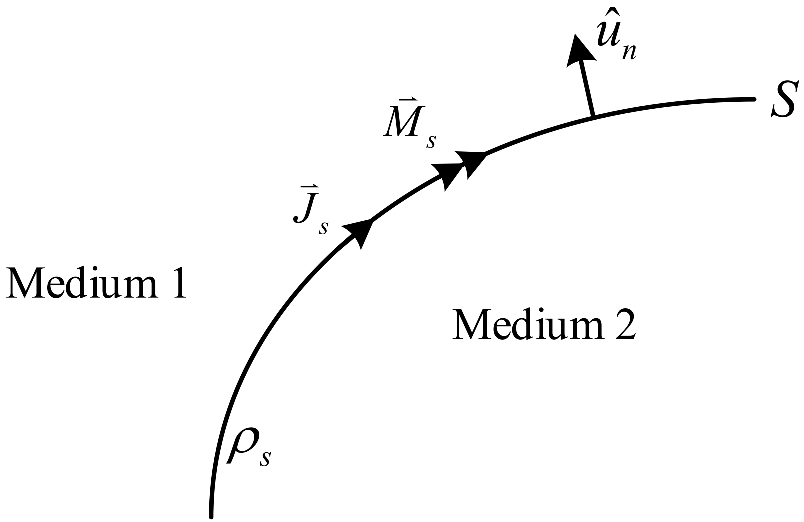
$$\hat{u}_n \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{J}_s$$

$$\hat{u}_n \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = -\vec{M}_s$$

$$\hat{u}_n \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) = 0$$

$$\hat{u}_n \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \rho_s$$

## 1.3.3 边界条件




其中

$\vec{J}_s$ ：表面电流密度

$\vec{M}_s$ ：表面磁流密度（通常为**0**）

$\rho_s$ ：表面电荷密度

$\hat{u}_n$ ：法向单位矢量

（**2**）理想导体（媒质**2**为**PEC**）

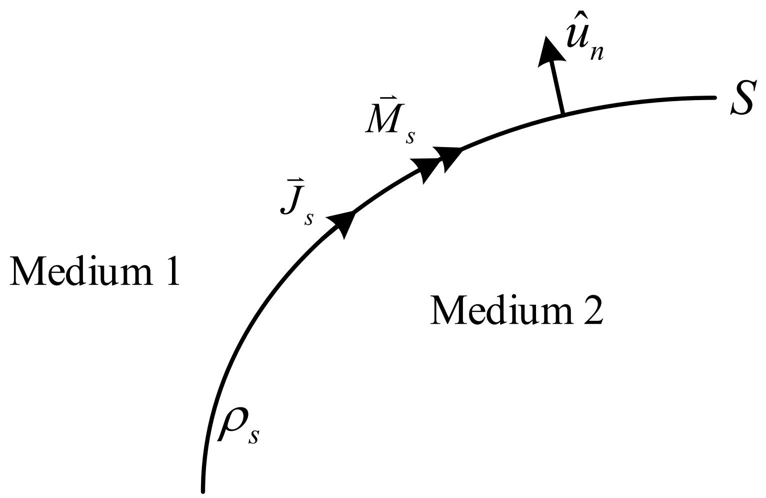
$$\hat{u}_n \times \vec{H}_1 = \vec{J}_s$$

$$\hat{u}_n \times \vec{E}_1 = 0$$

$$\hat{u}_n \cdot \vec{B}_1 = 0$$

$$\hat{u}_n \cdot \vec{D}_1 = \rho_s$$

## 1.3.3 边界条件




其中

$\vec{J}_s$ ：表面电流密度

$\vec{M}_s$ ：表面磁流密度（通常为0）

$\rho_s$ ：表面电荷密度

$\hat{u}_n$ ：法向单位矢量

（3）理想介质（媒质1和媒质2为两种不同的理想介质），则

$$\vec{J}_s = 0,\ \vec{M}_s = 0,\ \rho_s = 0$$

（注意：$\rho_s$ 是指自由电荷密度）

$$\hat{u}_n \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = 0$$

$$\hat{u}_n \times \left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right) = 0$$

$$\hat{u}_n \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) = 0$$

$$\hat{u}_n \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = 0$$

# 1. 4 Helmholtz(亥姆霍兹)方程



Maxwell方程组形式虽然简单，却不能直接求解，若能化为更简单的去耦合形式则可能直接求解。

在线性、各向同性、均匀媒质中（假设$\sigma=0$，外加磁流源$\vec{M}^i=0$），则Maxwell方程组为：

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H} \qquad (1)$$

$$\nabla\times\vec{H}=j\omega\varepsilon\vec{E}+\vec{J}^i \qquad (2)$$

$$\nabla\cdot\vec{E}=\rho/\varepsilon \qquad (3)$$

$$\nabla\cdot\vec{H}=0 \qquad (4)$$

对（1）两边取旋度，并将（2）代入得：

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}-k^2\vec{E}=-j\omega\mu\vec{J}^i \qquad (k^2=\omega^2\mu\varepsilon)$$

# 1.4 Helmholtz(亥姆霍兹)方程



类似地得到

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}-k^2\vec{H}=\nabla\times\vec{J}^i$$

利用 $\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$ （$\nabla^2$ 为拉普拉斯算符）得

$$\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=j\omega\mu\vec{J}^i+\frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho$$

$$\nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=-\nabla\times\vec{J}^i$$

上述两式称为非齐次矢量**Helmhotz**方程。在无源区，简化为

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{H}+k^2\vec{H}=0\end{aligned}}$$

齐次矢量**Helmhotz**方程

# 1.4 Helmholtz(亥姆霍兹)方程



即

$$\nabla^2\vec{E}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{E}=0$$

$$\nabla^2\vec{H}+\omega^2\mu\varepsilon\vec{H}=0$$

利用 $j\omega\to\dfrac{\partial}{\partial t}$，$-\omega^2\to\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ 将上式转换到时域，得

$$\nabla^2\vec{\mathcal{E}}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2}=0 \qquad \text{波动方程}$$

直角坐标系中 $\nabla^2\vec{E}=\hat{u}_x\nabla^2E_x+\hat{u}_y\nabla^2E_y+\hat{u}_z\nabla^2E_z$ 易知矢量**Helmhotz**方程的各个分量满足如下形式的齐次标量**Helmhotz**方程

$$\boxed{\nabla^2\psi+k^2\psi=0}$$

# 1.4 Helmholtz(亥姆霍兹)方程




小结：有源区，求解非齐次矢量**Helmhotz**方程（结合源和边界条件）；无源区，求解齐次矢量**Helmhotz**方程（结合边界条件）。

# 第1章 基本电磁理论-目录

# 1. 5 电磁场方程基本求解方法



任何电磁问题都归结为根据给定源和边界条件，求解Maxwell方程或Helmholtz方程（对线性、均匀、各向同性介质成立）。本节内容主要介绍各种基本的求解方法。

## 1.5.1 辅助位函数方法 （教材第77页2-9节）

引入辅助函数可以简化电磁计算。

均匀介质中电荷和电流源产生的时谐电磁场满足Maxwell方程

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E} + \vec{J}^i$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

# 1.5 电磁场方程基本求解方法



$\nabla \cdot \vec{H} = 0$ 磁场无散　　矢量恒等式 $\nabla \cdot \left(\nabla \times \vec{A}\right) \equiv 0$

可令 $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$ ，$\vec{A}$ 为磁矢势（磁矢位）

（其它教材一般定义 $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ，则后续方程中有系数 $\mu$ 的差异）

代入第1个**Maxwell**方程　$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$ 得

$$\nabla \times \left(\vec{E} + j\omega\mu\vec{A}\right) = 0$$

恒等式 $\nabla \times \left(\nabla\phi\right) \equiv 0$

可令 $\vec{E} + j\omega\mu\vec{A} = -\nabla\phi$ ，$\phi$ 为电标势（电标位）

将 $\vec{A}$ 和 $\phi$ 表示的电磁场代入第2个**Maxwell**方程可得

# 1.5 电磁场方程基本求解方法





$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right)-k^2\vec{A}=\vec{J}^i-j\omega\varepsilon\nabla\phi$$

即 $\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}-k^2\vec{A}=\vec{J}^i-j\omega\varepsilon\nabla\phi$

为了消去 $\phi$ ，定义洛伦兹（**Lorentz**）规范 $\nabla\cdot\vec{A}=-j\omega\varepsilon\phi$

则有

$$\nabla^2\vec{A}+k^2\vec{A}=-\vec{J}^i$$ 矢量**Helmholtz**方程

求解出 $\vec{A}$ 以后，电磁场量可由下式表示

$$\vec{H}=\nabla\times\vec{A}$$

$$\vec{E}=-j\omega\mu\vec{A}+\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)$$

# 1.5 电磁场方程基本求解方法





类似地，对于磁荷和磁流源产生的时谐电磁场

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H} - \vec{M}^i$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = \frac{\rho_m}{\mu}$$

可引入电矢位 $\vec{F}$ 满足 $\vec{E} = -\nabla \times \vec{F}$

最终得到电磁场表达式为

$$\vec{E} = -\nabla \times \vec{F}$$

$$\vec{H} = -j\omega\mu\vec{F} + \frac{1}{j\omega\mu}\nabla\left(\nabla \cdot \vec{F}\right)$$

# 1.5 电磁场方程基本求解方法



根据叠加原理，由电流和磁流共同产生的电磁场可表示为

$$\nabla^2\vec{A}+k^2\vec{A}=-\vec{J}^i$$

$$\nabla^2\vec{F}+k^2\vec{F}=-\vec{M}^i$$

$$\vec{E}=-\nabla\times\vec{F}-j\omega\mu\vec{A}+\frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)$$

$$\vec{H}=\nabla\times\vec{A}-j\omega\mu\vec{F}+\frac{1}{j\omega\mu}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{F}\right)$$

即教材第130页（3-83）式

引入辅助位函数的意义

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\vec{J}^i$$

$$\nabla^2 \vec{F} + k^2 \vec{F} = -\vec{M}^i$$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = j\omega\mu \vec{J}^i - \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla\left(\nabla \cdot \vec{J}^i\right) + \nabla \times \vec{M}^i$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = j\omega\varepsilon \vec{M}^i - \frac{1}{j\omega\mu} \nabla\left(\nabla \cdot \vec{M}^i\right) - \nabla \times \vec{J}^i$$

# 1.5 电磁场方程基本求解方法



上述矢量**Helmholtz**方程仍然不易直接求解，需想办法化为标量**Helmholtz**方程。借鉴纵向场法的思想（先求解纵向分量，再由纵向分量计算横向分量），可先分离出一个分量进行求解。

根据场的模式叠加原理，任何场均可表示为**TE**模和**TM**模的叠加，因此，可令

$$\vec{A} = \hat{u}_s A_s, \quad \vec{F} = \hat{u}_s F_s$$ (*s*为任意坐标分量 $s = x, y, z, r, \phi, \theta, \rho$ )

当$F_s$=0，只有$A_s$时，对应**TM**$_s$模，求解标量**Helmholtz**方程

当$A_s$=0，只有$F_s$时，对应**TE**$_s$模，求解标量**Helmholtz**方程

任何电磁场可表示为$TE_s$模和$TM_s$模场的叠加（求和）。例如直接坐标系下可分解为$TE_z$和$TM_z$模的叠加，$TM_z$和$TE_z$模的场表达式见教材第130页的（3-86）和（3-89）式。

$$\mathbf{A} = \mathbf{u}_z\psi \qquad \mathbf{F} = 0$$

$$E_x = \frac{1}{\hat{y}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z} \qquad H_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$E_y = \frac{1}{\hat{y}}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z} \qquad H_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$E_z = \frac{1}{\hat{y}}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\psi \qquad H_z = 0$$

**$TM_z$模**

$$\mathbf{F} = \mathbf{u}_z\psi \qquad \mathbf{A} = 0$$

$$E_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad H_x = \frac{1}{\hat{z}}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}$$

$$E_y = \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad H_y = \frac{1}{\hat{z}}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z}$$

$$E_z = 0 \qquad H_z = \frac{1}{\hat{z}}\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right)\psi$$

**$TE_z$模**

## 1.5.2 分离变量法（教材4-1节、5-1节、6-1节）

在直角坐标系下，标量Helmholtz方程可写为

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + k^2\psi = 0$$

令 $\psi = X(x)Y(y)Z(z)$ 代入上式整理得

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 = 0$$

等号左边第1项仅是$x$的函数，第2项仅是$y$的函数，第3项仅是$z$的函数，且方程对任意$x, y, z$均应成立，故只能每项均为常数。

即

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k_x^{\ 2}, \qquad \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k_y^{\ 2}, \qquad \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k_z^{\ 2}$$

从而得到三个方向的波动方程

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^{\ 2} X = 0$$

解为 $X = e^{\pm jk_x x}$ 或 $\sin(k_x x)$ 或 $\cos(k_x x)$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^{\ 2} Y = 0$$

$Y$，$Z$的解类似可得

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k_z^{\ 2} Z = 0$$

$k_x^{\ 2} + k_y^{\ 2} + k_z^{\ 2} = k^2$（色散关系）

## 1.5.3 Green函数法

考虑有源的情况，磁矢位某分量的标量Helmholtz方程为

$$\nabla^2 A_s(\vec{r}) + k^2 A_s(\vec{r}) = -J_s^i(\vec{r}\,') \quad \text{其中 } s = x, y, z, r, \phi, \theta, \rho$$

先求 $\delta$ 源的情形，假设 $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ 是 $\nabla^2\psi + k^2\psi = -\delta\left(\vec{r} - \vec{r}\,'\right)$ 的解，即

$$\nabla^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') + k^2 G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

称 $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ 为**标量Green函数**。原实际电流源方程的解为

$$A_s(\vec{r}) = \iiint_v G(\vec{r},\vec{r}\,') J_s^i(\vec{r}\,')\, dv'$$

上述标量形式推广到矢量形式则为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \iiint_v G(\vec{r},\vec{r}\,')\vec{J}^{\,i}(\vec{r}\,')dv'$$

（1）三维均匀无界空间（自由空间）的标量Green函数为

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$$

教材P80（2-118）式，P100（3-5）式

（2）二维标量Helmholtz方程的Green函数为

$$G(\vec{\rho},\vec{\rho}\,') = \frac{1}{4j}H_0^{(2)}\left(k|\vec{\rho}-\vec{\rho}\,'|\right)$$

教材P228（5-95）式

# 1.5 电磁场方程基本求解方法



电子科技大学计算电磁学及其应用团队，CEMLAB

**（3）一维标量Helmholtz方程的Green函数为**

$$G\left(x, x'\right) = \frac{-j}{2k} e^{-jk|x-x'|}$$

**并矢Green函数**

$$\vec{E} = -j\omega\mu\vec{A} + \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) = -j\omega\mu\left(1+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right)\vec{A}$$

$$\vec{A}\left(\vec{r}\right) = \iiint_v G\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right)\vec{J}^i\left(\vec{r}\,'\right)dv'$$

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right) = -j\omega\mu\iiint_v \boxed{\left(1+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right)G\left(\vec{r}, \vec{r}\,'\right)\vec{\vec{I}}}\cdot\vec{J}^i\left(\vec{r}\,'\right)dv'$$

# 1.5 电磁场方程基本求解方法

 电子科技大学计算电磁学及其应用团队，CEMLAB

并矢Green函数 $\vec{\vec{G}}\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)=\left(1+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\cdot\right)G\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)\vec{\vec{I}}$

$$=\left(\vec{\vec{I}}+\frac{1}{k^2}\nabla\nabla\right)G\left(\vec{r},\vec{r}\,'\right)$$

其中 $$\nabla\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\widehat{u}_x\widehat{u}_x+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\widehat{u}_x\widehat{u}_y+\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\widehat{u}_x\widehat{u}_z+$$
$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\widehat{u}_y\widehat{u}_x+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\widehat{u}_y\widehat{u}_y+\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\widehat{u}_y\widehat{u}_z+$$
$$\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\widehat{u}_z\widehat{u}_x+\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\widehat{u}_z\widehat{u}_y+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\widehat{u}_z\widehat{u}_z$$

与 $\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$ 区分

场与源的关系

$$\vec{E}(\vec{r}) = -j\omega\mu \iiint_v \vec{\vec{G}}(\vec{r},\vec{r}\,') \cdot \vec{J}^i(\vec{r}\,') dv'$$

## 1.5.4 镜像法（第3章介绍）

## 1.5.5 本征函数展开法

有源标量**Helmholtz**方程为

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\psi = f$$

其中$f$为激励源，例如若 $\psi$ 为$A_z$，则 $f = -J_z^i$

推广至一般的方程 $L\psi = f$ （$L$是算符），通常已知算符$L$和激励源$f$，需求解函数 $\psi$ ，引入本征方程

$$L\psi = \lambda\psi$$

$\lambda$ 称为本征值（特征值），$\psi$ 称为对应于 $\lambda$ 的本征函数（特征向量）。

# 1.5 电磁场方程基本求解方法



一般地，若边界有限，则所有本征值为离散值；若边界无界，则所有本征值为连续值。对于有限边界

$$L\psi_n = \lambda_n \psi_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

称$\{\lambda_n\}$为本征值谱，$\{\psi_n\}$为本征函数系。

若$\{\psi_n\}$完备，则源 $f$ 和未知函数 $\psi$ 均可以$\{\psi_n\}$为基函数进行展开，即

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n$$

其中 $a_n$，$b_n$ 为展开系数

$$f = \sum_n b_n \psi_n$$

$\psi_n$，$b_n$ 已知，求 $a_n$

# 1.5 电磁场方程基本求解方法





原方程 $L\psi = f$ 化为

$$\sum_n a_n L\psi_n = \sum_n b_n \psi_n \qquad \text{又} \qquad L\psi_n = \lambda_n \psi_n$$

得

$$\sum_n a_n \lambda_n \psi_n = \sum_n b_n \psi_n$$

若 $\left\{\psi_n\right\}$ 满足正交性，即

$$\left\langle \psi_m, \psi_n \right\rangle = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ C, & m = n \end{cases} \qquad (C\text{为非零常数})$$

$\left\langle \psi_m, \psi_n \right\rangle$ 表示 $\psi_m$ 与 $\psi_n$ 的内积，通常是积分形式

# 1.5 电磁场方程基本求解方法

 电子科技大学计算电磁学及其应用团队，CEMLAB

$$\left\langle \psi_m(x), \psi_n(x) \right\rangle = \int_{x_1}^{x_2} \psi_m(x)\psi_n^*(x)\,dx$$ 其中 $^*$ 表示复共轭。

对 $\sum_n a_n\lambda_n\psi_n = \sum_n b_n\psi_n$ 方程两边关于 $\psi_m$ 取内积，可得

$$\left\langle \sum_n a_n\lambda_n\psi_n,\ \psi_m \right\rangle = \left\langle \sum_n b_n\psi_n,\ \psi_m \right\rangle$$

即 $\sum_n a_n\lambda_n \left\langle \psi_n,\ \psi_m \right\rangle = \sum_n b_n \left\langle \psi_n,\ \psi_m \right\rangle$

利用正交性，得

$$a_m\lambda_m C = b_m C$$

即

$$a_m = b_m / \lambda_m$$

# 1.5 电磁场方程基本求解方法



由于$m$是任意的，$m$可替换为$n$，得

$$a_n = b_n / \lambda_n$$

求出所有的 系数 $a_n$ 后，可求出未知函数 $\psi$ 为

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n$$

上述求解过程的关键在于基函数 $\left\{\psi_n\right\}$的选取，$\left\{\psi_n\right\}$ 必须满足正交完备性。

# 1.5 电磁场方程基本求解方法





完备正交基函数举例：

$$\{\sin(nx)\},\quad \{\cos(nx)\},\quad \{e^{jnx}\},\ \{e^{-jnx}\},\ \{J_p(k_n x)\},$$

$$\{P_n(x)\}$$

其中 $J_p(k_n x)$ 为第一类**Bessel**函数，$P_n(x)$ 为第一类**Legendre**函数。以三角函数或指数函数为基函数的展开式就是**Fourier**级数（积分）。

周期信号的傅里叶级数展开 $s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t},\qquad \omega_0=\dfrac{2\pi}{T}$

正交关系

$$\int_0^{2\pi} e^{-jmx}\left(e^{-jnx}\right)^* dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 2\pi, & m = n \end{cases}$$

---

$$\int_0^b J_p(k_m x)\left(J_p(k_n x)\right)^* x dx = 0 \text{ for } m \neq n$$

$$J_p(k_m b) = 0 \quad , \quad J_p(k_n b) = 0$$

---

$$\int_{-1}^1 P_m(x)\left(P_n(x)\right)^* dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

教材上的本征函数展开法应用举例

**pp.144-145：式（4-8）、（4-9），基函数** $h\left(k_x x\right)h\left(k_y y\right)h\left(k_z z\right)$

**p.200：式（5-10）、（5-11）、（5-12）**

**p.231：式（5-101），p. 232：式（5-103）**

**p.266：式（6-10），p. 274：式（6-42），**

**p.289： 6-8节多个式子，p.300：式 (6-119)**

# 第1章 基本电磁理论总结



**Maxwell方程组及其物理含义**

介质特性（新引入导纳率 $\hat{y}=\hat{\sigma}+j\omega\hat{\varepsilon}$ ，阻抗率 $\hat{z}=j\omega\hat{\mu}$ ）

电流、磁流的分类

瞬时量与复数量

时谐量及其二次量

功率与能量

电磁场与电路的联系

电磁场边界条件

亥姆赫兹方程

电磁场方程基本求解方法

Maxwell方程组

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{J}$$

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$$

Maxwell方程组

$$\nabla \times \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{J}$$

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} - \mathcal{M}$$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}^c + \mathcal{J}^i$$

**Conduction electric current plus impressed electric current**

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^i$$

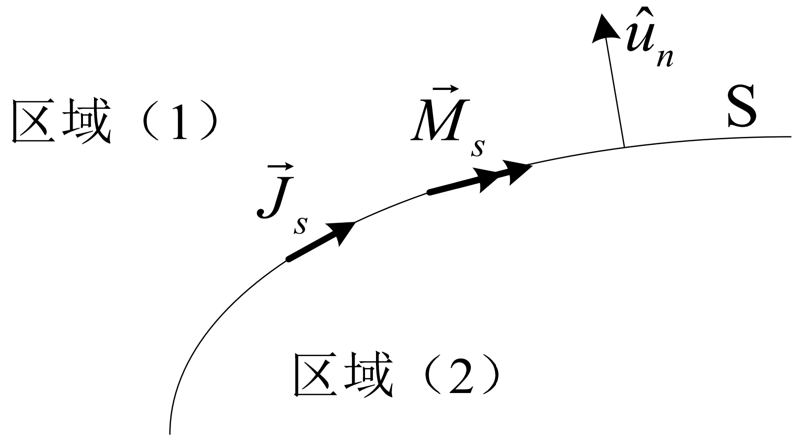
**Impressed equivalent magnetic current**

# 第1章 作业



1. 教材Chapter 1 Problem 1-10题

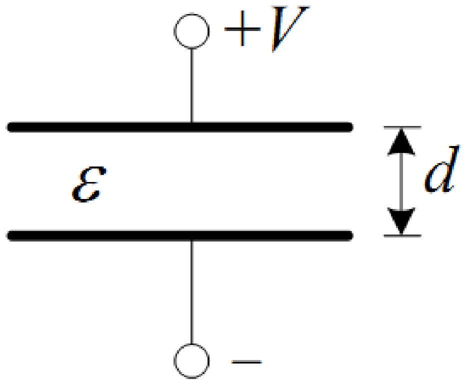
2. 根据下图结构推导电磁场边界条件： $\hat{u}_n \times \left[\vec{H}^{(1)} - \vec{H}^{(2)}\right] = \vec{J}_s$

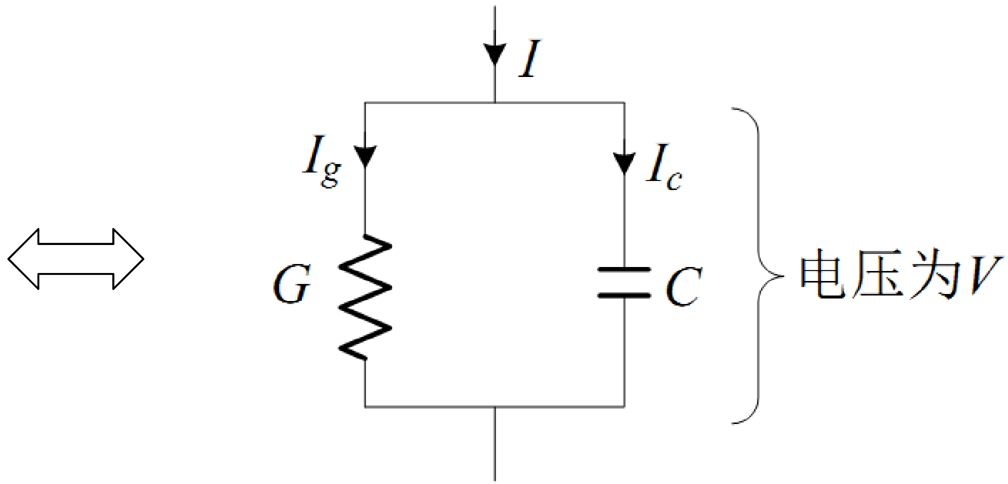



3. 推导复数域Poynting定理：$-\nabla \cdot \vec{S} = \sigma\left|\vec{E}\right|^2 + j\omega\left(\mu\left|\vec{H}\right|^2 - \varepsilon\left|\vec{E}\right|^2\right)$

4. 推导时域Poynting定理：$-\nabla \cdot \vec{\mathcal{S}} = \sigma\left|\vec{\mathcal{E}}\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mu\left|\vec{\mathcal{H}}\right|^2 + \varepsilon\left|\vec{\mathcal{E}}\right|^2\right)$

**5. 根据教材1-13节内容完成该题**




$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon''$$

$$\sigma = 0$$

上述左图是非理想电容器，填充介质为有耗介质，其等效电路见右图所示（$G$为电导）。试证明：$\dfrac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \dfrac{jI_g}{I_c}$