§3 欧氏空间和酉空间

1. 欧氏空间

定义 1　在线性空间$V_n(R)$上，$\forall \alpha,\beta,\gamma \in V$，

若映射(α,β)满足

(1)(正定性) $(\alpha,\alpha)\geq 0$；$(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$，

(2)(齐次性) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$

(3)(交换律):$(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$

(4)(分配律): $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$

则映射(α,β) 是 $V_n(R)$ 上的内积,定义了内积的V为n维欧几里得空间，简称欧氏空间.

◀ ▶ 返回

《补充：酉空间》

定义1' 在线性空间$V_n(C)$上，$\forall \alpha,\beta,\gamma \in V$，

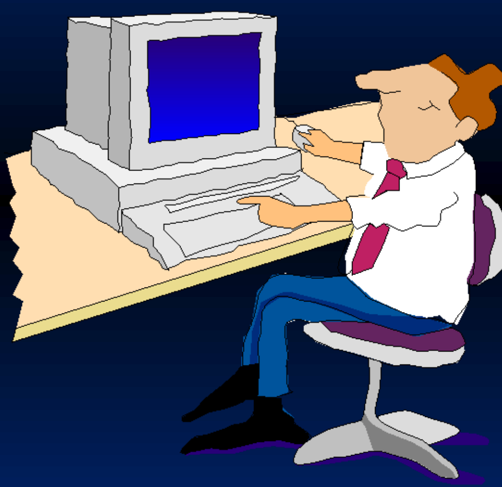
若映射(α,β)满足

(1)(正定性) $(\alpha,\alpha)\geq 0$；$(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$，

(2)(齐次性) $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$

(3)(交换律):$(\alpha,\beta)=\overline{(\beta,\alpha)}$

(4)(分配律): $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$



则映射(α,β) 是 $V_n(C)$ 上的内积,定义了内积的V为n维酉空间.

返回

例1: $\forall \alpha=(a_1,\cdots,a_n)^T, \beta=(b_1,\cdots,b_n)^T \in R^n$,若规定

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

则上式定义了一个内积, R^n是内积空间.

例2: $C[a,b]$表示在$[a,b]$所有实连续函数的全体, 其构成R上的线性空间, $\forall f(x),g(x)\in[a,b]$规定

$$(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

证明: $C[a,b]$是欧氏空间.

$\forall \quad f(x),g(x), \quad \int_a^b f(x)g(x)dx$ 是唯一确定实数

◀ ▶ 返回

(1) $\left(f,g\right)=\int_a^b f(x)g(x)dx=\int_a^b g(x)f(x)dx=\left(g,f\right)$

(2) $\left(kf,g\right)=\int_a^b kf(x)g(x)dx=k\int_a^b f(x)g(x)dx=k\left(f,g\right)$

(3) $\left(f+g,h\right)=\int_a^b\left(f(x)+g(x)\right)h(x)dx$

$=\int_a^b f(x)h(x)dx+\int_a^b g(x)h(x)dx=\left(f,h\right)+(g,h)$

(4) $\left(f,f\right)=\int_a^b f(x)f(x)dx=\int_a^b f^2(x)dx\geq 0$

且 $\int_a^b f^2(x)dx=0\Leftrightarrow f(x)=0$

例3： $V=R^{n\times n}, V(R)$，若规定内积如下

$$(\bullet,\bullet): A,B\in V, \qquad (A,B)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=tr(A^T B)$$

$$\forall A=(a_{ij})_{n\times n}, \qquad B=(b_{ij})_{n\times n}$$

$$tr(B^T A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=tr(A^T B)\Rightarrow (A,B)=(B,A)$$

$$(kA,B)=tr[(kA)^T B]=tr(kA^T B)=ktr(A^T B)=k(A,B)$$

$$(A+B,C)=tr[(A+B)^T C]=tr[(A^T+B^T)C]=tr(A^T C+B^T C)$$

$$=tr(A^T C)+tr(B^T C)=(A,C)+(B,C)$$

$$(A,A)=tr(A^T A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}a_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\geq 0,$$

$$(A,A)=0\Leftrightarrow a_{ij}=0\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)\Leftrightarrow A=0$$

返回

例4： $V=R, V(R)$， 若规定内积如下

$$\forall \alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n),(\bullet,\bullet):\quad (\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n} i a_i b_i$$

$$(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n} i a_i b_i=\sum_{i=1}^{n} i b_i a_i=(\beta,\alpha)$$

$$\forall k,\qquad (k\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n} i k a_i b_i=k\sum_{i=1}^{n} i a_i b_i=k(\alpha,\beta)$$

$$\gamma=(c_1,c_2,\cdots,c_n)^T\in R^n$$

$$(\alpha+\beta,\gamma)=\sum_{i=1}^{n} i(a_i+b_i)c_i=\sum_{i=1}^{n} i a_i c_i+\sum_{i=1}^{n} i b_i c_i=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$$

$$(\alpha,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} i a_i a_i=\sum_{i=1}^{n} i a_i^2\ge 0,\qquad (\alpha,\alpha)=0\Leftrightarrow \alpha=0$$

例 设$\alpha,\beta\in R^n, A\in R^{n\times n}$,则$(\alpha,\beta)=\alpha^T A\beta$是$R^n$上的内积吗?

返回

例1: $\forall \alpha=(a_1,\cdots,a_n)^T, \beta=(b_1,\cdots,b_n)^T \in C^n$,若规定

$$(\alpha,\beta)=\alpha^H\beta=\sum_{i=1}^{n}\overline{a_i}b_i$$

则上式定义了一个内积,C^n是酉空间.

◀ ▶ 返回

2. 欧氏(酉)空间的度量

定义2: 设V是酉(欧氏)空间,$\forall \alpha \in V$,α的长度定义为:

$$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$$

定理　设V是n维酉(欧氏)空间, 则向量长度具有以下的性质:

$$(1)\ \|\alpha\| \geq 0, \|\alpha\| = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$(2)\ \|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$$

$$(3)\ \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|$$

$$(4)\ |(\alpha,\beta)| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|,$$

等号成立的充要条件是α,β线性相关

证明(1)：任取实数k,考虑内积

$$(\alpha+k\beta,\alpha+k\beta)=(\alpha,\alpha)+2k(\alpha,\beta)+k^2(\beta,\beta)\geq 0$$

利用一元二次方程根的判别式,有$4(\alpha,\beta)^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)\leq 0$

所以有$(\alpha,\beta)^2\leq(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$

当$\alpha=k\beta(k\in R$,非零),显然定理中等号成立;反之,如果等号成立,则α,β必线性相关.因为若α,β线性无关,则$\forall k\in R$,非零,都有$\alpha+k\beta\neq 0$.从而$(\alpha+k\beta,\alpha+k\beta)>0$

所以等号不成立,矛盾.

返回

定义 3 $d(x,y)=\|x-y\|$ $\Longleftrightarrow$ 向量 x和y的距离

定义 4

设α,β是欧氏空间V的两个非零向量, 它们之间的夹角定义为

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}$$

两向量正交的定义

定义 5 $(x,\ y)=0$ $\Longleftrightarrow$ 向量 x和y正交, 记为 $x\perp y$

例: 设$\alpha=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in R^{2n},\beta=(1,-1,1,-1,\cdots,-1)^{\mathrm{T}}\in R^{2n}$

勾股定理: $x\perp y \Longrightarrow \|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$

3. 内积的应用

(1) 格拉姆(Gram)矩阵

设V为一个内积空间, $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\in$ V,

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=\big((\alpha_i,\alpha_j)\big)_{k\times k}=(a_{ij})_{k\times k}$$

$$=\begin{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_k)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_k)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\alpha_k,\alpha_1) & (\alpha_k,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_k,\alpha_k)\end{bmatrix},（其中 a_{ij}=(\alpha_i,\alpha_j)）$$

称为格拉姆(Gram)矩阵

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=\det A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$$

称为格拉姆(Gram)行列式

（2）格拉姆(Gram)行列式的性质

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$线性相关$\Leftrightarrow A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$奇异（不可逆）

$\Leftrightarrow G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=0$

证明

$$\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i=0\Rightarrow\sum_{i=1}^n x_i(\alpha_l,\alpha_i)=(\alpha_l,\sum_{i=1}^n x_i\alpha_i)=(\alpha_l,0)=0(\ l=1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_k)\\(\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_k)\\\vdots & \vdots & & \vdots\\(\alpha_k,\alpha_1) & (\alpha_k,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_k,\alpha_k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$<1>\ x=0\Leftrightarrow A$可逆$\Leftrightarrow\det A\neq 0(\Leftrightarrow G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)\neq 0)$

$<2>\ x\neq 0\Leftrightarrow A$不可逆$\Leftrightarrow\det A=0(\Leftrightarrow G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)=0)$

（3）基的格拉姆矩阵（度量矩阵）

$<1>V_n(R)-n$维欧式空间，且$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为$V_n(R)$的基，即$V_n(R)=span\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n\}$,则$A=(a_{ij})_{n\times n}$(其中$a_{ij}=$（$\varepsilon_i,\varepsilon_j$)）称为度量矩阵.

$<2>\forall\alpha,\beta\in V_n(R)$，有$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i,\beta=\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j\quad\Rightarrow$

$$(\alpha,\beta)=(\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\sum_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_ja_{ij}$$

(其中$a_{ij}=(\varepsilon_i,\varepsilon_j)$)，构造矩阵和列向量：

$$A=\begin{bmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & (\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ (\varepsilon_2,\alpha_1) & (\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (\varepsilon_n,\varepsilon_1) & (\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & (\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{bmatrix},x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,$$

$$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T\Rightarrow(\alpha,\beta)=x^TAy$$

返回

$<3>$ $$A=A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n),B=B(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n'),$$

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C\Rightarrow B=C^TAC$$

$$\alpha=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x,\qquad \beta=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)y;$$

$$\alpha==(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')x',\qquad \beta==(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')y';$$

$$(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)C$$

$$\Rightarrow(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)x=\alpha=(\varepsilon_1',\varepsilon_2',\cdots,\varepsilon_n')x'=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)Cx'$$

$$\Rightarrow(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)(Cx'-x)=0\Rightarrow Cx'-x=0\Rightarrow\begin{cases}Cx'=x\\Cy'=y\end{cases}$$

$$\Rightarrow x'^TBy'=(\alpha,\beta)=x^TAy=(Cx')^TACy'=x'^TC^TACy'$$

$$\Rightarrow B=C^TAC$$

返回

总结1:

设矩阵$A=(a_{ij})$为欧氏空间V的一组基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$的度量矩阵,则

(1) $A^T=A$;

(2)$\forall\alpha,\beta\in V,\alpha,\beta$在基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标分别为

$x=(x_1,\cdots,x_n)^T,y=(y_1,\cdots,y_n)^T$,则

$(\alpha,\beta)=x^TAy$

(3) $\forall 0\neq\alpha\in V,\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)x$,必有$x^TAx>0$

总结2:

设矩阵$A=(a_{ij})$为酉空间V的一组基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$的度量矩阵,则

(1) $A^H=A$;

(2)$\forall\alpha,\beta\in V$,α,β在基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$下的坐标分别为

$x=(x_1,\cdots,x_n)^T$, $y=(y_1,\cdots,y_n)^T$,则

$(\alpha,\beta)=x^H Ay$

(3) $\forall 0\neq\alpha\in V,\alpha=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)x$,必有$x^H Ax>0$

返回

补充：**初等矩阵**

一、初等矩阵的一般形式

定义 1　设$u,v\in C^n,\sigma\in C$,则称

$$E(u,v,\sigma)=E-\sigma uv^H$$ 为初等矩阵.

1. 初等矩阵的特征向量$(u,v\neq 0,\sigma\neq 0)$.

（1）$u\in v^{\perp}$,设$u_1,\cdots,u_{n-1}$是$v^{\perp}$的一组基,它们也是$E(u,v,\sigma)$的$n-1$个线性无关的特征向量.

（2）$u\notin v^{\perp}$,设$u_1,\cdots,u_{n-1}$是$v^{\perp}$的一组基,则$u,u_1,\cdots,u_{n-1}$是$E(u,v,\sigma)$的n个线性无关的特征向量.

2. 初等矩阵的特征值

$$\lambda(E(u,v,\sigma))=\{1,1,\cdots,1,1-\sigma v^H u\}$$

3. $\det(E(u,v,\sigma))=1-\sigma v^H u$

4. $E(u,v,\sigma)^{-1}=E(u,v,\dfrac{\sigma}{\sigma v^H u-1}),(1-\sigma v^H u\neq 0)$

5. 非零向量$a,b\in C^n$, 存在u,v,σ,使得

$$E(u,v,\sigma)a=b,(\sigma u=\frac{a-b}{v^H a}).$$

返回

3. 初等变换矩阵

$$E_{ij} = E - (e_i - e_j)(e_i - e_j)^T = E(e_i - e_j, e_i - e_j, 1)$$

$$E_{ij}(k) = E + k e_j e_i^T = E(e_j, e_i, -k)$$

$$E_i(k) = E - (1-k) e_i e_i^T = E(e_i, e_i, 1-k)$$

4. 初等酉阵（*Householder*变换）

$$H(u)=E(u,u;2)=E-2uu^H,(u^Hu=1)$$

(1) $H(u)^H=H(u)=H(u)^{-1}$

(2) $H(u)(a+ru)=a-ru,\forall a\in u^{\perp},r\in C$(镜象变换)

◀ ▶ 返回