第二章

向量与 矩 阵的范数

1 向量的范数

定义1 设映射$\|\cdot\|: C^n \to R$满足:

(1) 正定性 $\|x\| \ge 0$,当且仅当$x=0$时,$\|x\|=0$;

(2) 齐次性 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \lambda \in C, x \in C^n$;

(3) 三角不等式 $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in C^n$.

则称映射$\|\cdot\|$为C^n上向量x的范数.

向量范数的性质:

(1) $\|0\| = 0$;

(2) $x \ne 0$时, $\left\| \frac{1}{\|x\|} x \right\| = 1$;

返回

(3) 对任意$x \in C^n$，有$\| -x \| = \| x \|$;

(4) 对任意$x, y \in C^n$，有$| \| x \| - \| y \| | \le \| x - y \|$.

证 $\| x \| = \| (x-y) + y \| \le \| x - y \| + \| y \|$ $\longrightarrow$

$\| x \| - \| y \| \le \| x - y \|$ (1) $\longrightarrow$ $\| x - y \| = \| y - x \|$

$\ge \| y \| - \| x \|$ $\longrightarrow$ $\| x \| - \| y \| \ge - \| x - y \|$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow$ $| \| x \| - \| y \| | \le \| x - y \|$

例 1 设$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in C^n$，则

$$(1)\ \| x \|_1 = \sum_{i=1}^{n} | x_i |$$

$\Leftarrow$ 1−范数

返回

$$(2)\ \|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2}$$ ⇦ $2-$范数

$$(3)\ \|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$ ⇦ 无穷范数

证 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,\ \ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$

$$|x^H y|^2=|\bar{x}_1y_1+\bar{x}_2y_2+\cdots+\bar{x}_ny_n|^2$$

$$\le(|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2)\cdot$$

$$(|y_1|^2+|y_2|^2+\cdots+|y_n|^2)$$

$$=\|x\|_2^2\|y\|_2^2$$

$$\|x+y\|_2^2=(x+y)^H(x+y)$$

返回

$$= x^H x + x^H y + y^H x + y^H y$$

$$\leq |x^H x| + |x^H y| + |y^H x| + |y^H y|$$

$$\leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2$$

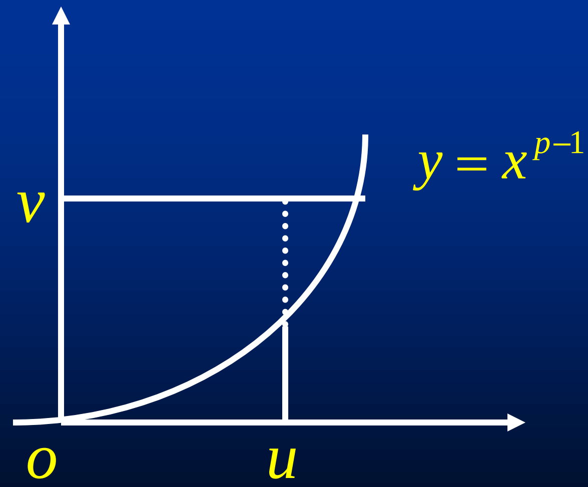
$$= (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 \longrightarrow$$

$$\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$$

引理1　若u和v是非负实数，p和q是正实数，且

满足条件$p, q > 1$和$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则恒有不等式

$$uv \leq \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q$$



证 $$uv \le \int_0^u u^{p-1}du + \int_0^v v^{1/(p-1)}dv = \frac{1}{p}u^p + \int_0^v v^{q/p}dv$$

$$= \frac{1}{p}u^p + (\frac{q}{p}+1)^{-1}v^{(q/p)+1} = \frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q$$

定义 $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} \quad 1 \le p < \infty$ ⇦ $p-$范数

◀ ▶ 返回

定理 1 (Hölder不等式) 若$p,q>1$，且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则对$C^n$任意向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T,y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$都有

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|y_i|\le\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}$$

证 $u=\frac{|x_i|}{\|x\|_p},v=\frac{|y_i|}{\|y\|_q} \longrightarrow \frac{|x_i||y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q}$

$$\le\frac{1}{p}\frac{|x_i|^p}{\|x\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|y_i|^q}{\|y\|_q^q}\quad 1\le i\le n \Rightarrow$$

返回

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i||y_i|}{\|x\|_p\|y\|_q} \le \frac{1}{p\|x\|_p^p}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p + \frac{1}{q\|y\|_q^q}\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i|\cdot|y_i| \le \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{1/q}$$

例 2　　设$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in C^n$，则

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p} \quad 1 \le p < \infty$$

是C^n上的向量范数，称为Hölder范数.

证

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p$$

$$=\sum_{i=1}^{n}|x_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1}+\sum_{i=1}^{n}|y_i|(|x_i|+|y_i|)^{p-1}$$

$$\le(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}]^{1/q}$$

$$+(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p)^{1/p}[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}]^{1/q}$$

$$=[(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}+(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p)^{1/p}]$$

$$\cdot[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{(p-1)q}]^{1/q}$$

$$\xrightarrow{(p-1)q=p}$$

$$[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p]^{1/p}\le[(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p)^{1/p}+(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p)^{1/p}]$$

$$\xrightarrow{[\sum_{i=1}^{n}(|x_i+y_i|)^p]^{1/p}\le[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p]^{1/p}}$$

$$\|x+y\|_p\le\|x\|_p+\|y\|_p$$

返回

定理 2 设$\|\cdot\|$是C^m上的范数，$A\in C_n^{m\times n}$，则$\|A\cdot\|$是C^n上的范数.

证 (1) $x\neq 0 \Rightarrow Ax\neq 0 \Rightarrow \|Ax\|>0$

(2) $\|A(\lambda x)\|=\|\lambda Ax\|=|\lambda|\,\|Ax\|$

(3) $\|A(x+y)\|=\|Ax+Ay\|\le\|Ax\|+\|Ay\|$

引理 2 设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为线性空间$V_n(P)$的一组标准正交基，$x=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\tilde{x}$, $\tilde{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T$ $\in P^n$，则$V_n(P)$上的向量范数$\|x\|$在闭球

返回

$$S=\{x \mid (\tilde{x},\tilde{x})^{\frac{1}{2}} \le 1\}$$

上有界.

证 $x=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\tilde{x}\in S$ ⇒

$$(\tilde{x},\tilde{x})=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\le 1 \Rightarrow |x_i|\le 1\,(i=1,2,\cdots,n)$$

$$\because \|x\|=\|\sum_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i\|\le\sum_{i=1}^{n}\|x_i\varepsilon_i\|\le\sum_{i=1}^{n}|x_i|\,\|\varepsilon_i\|$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\|\varepsilon_i\|=M$$

◀ ▶ 返回

引理 3 设$\|x\|$是$V_n(P)$上的向量范数，则$\|x\|$是关于$\|x\|_2$的连续函数

证 $\Delta\tilde{x}=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)\in P^n$，且

$$\Delta x=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\Delta\tilde{x}\in V_n(P) \quad \Rightarrow$$

$$\big|\|x+\Delta x\|-\|x\|\big|\le\|\Delta x\|\le\|\Delta x\|_2\left\|\frac{\Delta x}{\|\Delta x\|_2}\right\|$$

$$\therefore \lim_{\Delta x\to\theta}\big|\|x+\Delta x\|-\|x\|\big|=0$$

定义 2 设在$V_n(P)$上定义了$\|x\|_a, \|x\|_b$两种向量范数，若存在常数$C_1>0, C_2>0$，使得

$$C_1\|x\|_a \le \|x\|_b \le C_2\|x\|_a \quad \forall x \in V_n(P)$$

则称$\|x\|_a$与$\|x\|_b$等价.

定理 3 $V_n(P)$上的任意两个向量范数均等价.

证 $\|x\|_a, \|x\|_b$为任两向量范数 ⟹

$\|x\|_a, \|x\|_b$都是$\|x\|_2$的连续函数 ⟹

$$\varphi(x)=\frac{\|x\|_a}{\|x\|_b}$$ 关于 $\|x\|_2$ 的连续函数 ➡

$$\varphi(x)=\frac{\|x\|_a}{\|x\|_b}\le k_1 \Rightarrow \|x\|_a\le k_1\|x\|_b$$

同理可证 $\|x\|_b\le k_2\|x\|_a$

因此，$V_n(P)$上的任意两个向量范数均等价.

定义 3 设$x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T\in C^n$，如果

$$\lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}=a_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

则称向量序列$x^{(k)}$收敛于$a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

◀ ▶ 返回

定义 4 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \| x^{(k)} - a \| = 0$

定理 4 设$\|\cdot\|$是C^n上的任一向量范数，则

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a \Longleftrightarrow \lim_{k\to\infty} \| x^{(k)} - a \| = 0$$

证 $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = a \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = a_i \quad (1 \le i \le n)$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} | x_i^{(k)} - a_i | = 0 \quad (1 \le i \le n) \Longleftrightarrow$

$\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{1\le i\le n} \{ | x_i^{(k)} - a_i | \} = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \| x^{(k)} - a \|_\infty = 0$

$$m\|x^{(k)}-a\|_\infty \le \|x^{(k)}-a\| \le M\|x^{(k)}-a\|_\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\|x^{(k)}-a\| = \lim_{k\to\infty}\|x^{(k)}-a\|_\infty = 0$$

例 6　设$a=(1,1,\cdots,1)^T \in R_n$,且

$$x^{(k)}=(1+\frac{1}{2^k},1+\frac{1}{3^k},\cdots,1+\frac{1}{(n+1)^k})$$

则

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = a$$

证 $$\lim_{k\to\infty}\|x^{(k)}-a\|_\infty=\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\{|x_i^{(k)}-a_i|\}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\max_{1\le i\le n}\{\frac{1}{(i+1)^k}\}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{2^k}=0$$

返回