Curso: Cálculo de probabilidades CM-1H2
Soluciones del seminario 1

Soluciones a los ejercicios

Solución 1 La declaración 'Ciertamente, no es cierto que ni Juan ni María tienen la culpa' corresponde al evento $(J^c \cap M^c)^c$. La declaración 'Juan o María tienen la culpa, o ambos' corresponde a evento $J \cup M$. La equivalencia se sigue de la ley de DeMorgan.

Solución 2 En cuatro años tenemos $365 \times 3 + 366 = 1461$ dias. Así los meses de 31 días tienen una probabilidad $4 \times 31/1461 = 124/1461$ y los meses de 30 días tienen una probabilidad $120/1461$ para ocurrir. Además, $\{Feb\}$ tiene una probabilidad de $113/1461$.

Solución 3 Verificar que $\mathbb{P}$ es una función probabilidad Ω cuenta verificar que $0 \leq \mathbb{P}(\{a_i, a_j\}) \leq 0$ para todo i y para todo j y señalando que:

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i,j=1}^{6} \mathbb{P}(\{a_i, a_j\}) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{P}(\{a_i, a_i\}) = \sum_{i=1}^{6} p_i = 1.$$

Los dos experimentos están totalmente acoplados: uno tiene resultado a_i si y sólo si el otro tiene un resultado a_i.

Solución 4 Esto ocurre si y sólo si el experimento falla el lunes,... el sábado, y es un éxito el domingo. Esto tiene probabilidad $p(1-p)^6$ que suceda.

Solución 5 Desde la propiedad de la regla de unión en la probabilidad, obtenemos $\mathbb{P}(D_1 \cup D_2) \leq \mathbb{P}(D_1) + \mathbb{P}(D_2) \leq 2 \cdot 10^{-6}$. Desde que $D_1 \cap D_2$ está contenido en ambos D_1 y D_2, obtenemos $\mathbb{P}(D_1 \cap D_2) \leq \min\{\mathbb{P}(D_1), \mathbb{P}(D_2)\} \leq 2 \cdot 10^{-6}$. La igualdad se puede cumplir en los dos casos: para la unión, tomamos D_1 y D_2 disjuntos, para la intersección, tomamos D_1 y D_2 iguales entre sí.

Sólucion 6 Desde que $E \cap F \cap G = \emptyset$, los tres conjuntos $E \cap F, F \cap G$ y $E \cap G$ son disjuntos. Desde cada uno de ellos tiene probabilidad $1/3$, ellos tienen una probabilidad de 1 juntos. Desde esos dos hechos, tenemos $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(E \cap F) + \mathbb{P}(E \cap G) = 2/3$

Solución 7 Por definición.

Solución 8 Aquí se pregunta por la probabilidad de que la partícula permanezca más de 3 segundos, dado que no permanece más de 4 segundos, por lo que se queda 4 o menos segundos. Desde la definición:

$$\mathbb{P}(R_3|R_4^c) = \frac{\mathbb{P}(R_3 \cap R_4^c)}{\mathbb{P}(R_4^c)}$$

Los eventos $R_3 \cap R_4^c$ describe: más de 3, pero no mayor que 4 segundos. Además R_3 es la unión disjunta de los eventos $R_3 \cap R_4^c$ y $R_3 \cap R_4 = R_4$, así $\mathbb{P}(R_3 \cap R_4^c) = \mathbb{P}(R_3) - \mathbb{P}(R_4) = e^{-3} - e^{-4}$. Usando la regla del complemento: $\mathbb{P}(R_4^c) = 1 - \mathbb{P}(R_4) = 1 - e^{-4}$. Uniendo todo esto, tenemos:

$$\mathbb{P}(R_3|R_4^c) = \frac{e^{-3} - e^{-4}}{1 - e^{-4}} = \frac{0.0315}{0.9817} = 0.0321$$

Solución 9 Tomemos un calendario con 12 meses en lugar de uno con 365 días. Sea C_n el evento donde n personas arbitrarias tienen diferentes meses de nacimiento. Entonces:

$$\mathbb{P}(C_3) = (1 - \frac{2}{12}) \cdot (1 - \frac{1}{12}) = \frac{55}{72} = 0.7639.$$

En general:

$$\mathbb{P}(C_n) = (1 - \frac{n-1}{12}) \cdots (1 - \frac{2}{12}) \cdot (1 - \frac{2}{12}),$$

Solución 10 Jessica se equivoca. Considera los siguientes 50 vuelos. Para $1 \leq i \leq 50$, sea A_i, el evento en que i ésima misión se completará sin contratiempos. Entonces $\bigcap_{i=1}^{50} A_i$, es el evento en que todas las próximas 50 misiones se completarán con éxito. Probemos que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{50} A_i\right) > 0$. Esto prueba que Jessica está equivocada. Se debe notar que la probabilidad de la ocurrencia simultánea de cualquier número de A_i^c es distinto de cero.

Además, consideremos un conjunto de E consistiendo de $n(n \leq 50)$ de los A_i^c. Es razonable suponer que la probabilidad de la ocurrencia simultánea de los eventos en E es estrictamente menor que la probabilidad de la ocurrencia simultánea de los sucesos de cualquier subconjunto de E. Usando estos hechos, del principio de inclusión-exclusión, tenemos:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{50} A_i^c\right) \leq \sum_{i=1}^{50} \mathbb{P}(A_i^c) = \sum_{i=1}^{50} \frac{1}{50} = 1.$$

Así por la ley de Morgan,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{50} A_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{50} A_i^c\right) > 1 - 1 > 0.$$

Solución 11 Si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 0$. Entonces $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$. Desde que $A \cap B \cap C \subseteq A \cap B$. Eso implica que:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C).$$

Suponiendo la última igualdad, implica que:

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap C) + [\mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)] = 0. \tag{1}$$

Desde que $\mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C) \geq 0$, tenemos la suma de tres cantidades distintas de cero igual a 0, así cada una de ellas es igual a cero. Esto es:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \quad \mathbb{P}(B \cap C) = 0, \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C). \tag{2}$$

Reescribiendo (1) como :

$$\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + [\mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)] = 0.$$

el mismo argumento implica que,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \quad \mathbb{P}(A \cap C) = 0, \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B \cap C). \tag{3}$$

Comparando (2) y (3), tenemos:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = 0.$$

Solución 12 Haciendo los cálculos, encontramos:

$$\mathbb{P}(T \cap B) = 0.99 \cdot 0.02 = 0.0198$$
$$\mathbb{P}(T \cap B^c) = 0.05 \cdot 0.98 = 0.0490$$

Así $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T \cap B) + \mathbb{P}(T \cap B^c) = 0.0198 + 0.0490 = 0.0688$.

Solución 13 Nos piden $\mathbb{P}(B|T)$, de la definición de probabilidad condicional y de las ecuaciones del problema anterior

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \cap B) &= \mathbb{P}(T|B) \cdot \mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(T \cap B^c) &= \mathbb{P}(T|B^c) \cdot \mathbb{P}(B^c) \\ \mathbb{P}(T) &= P(T|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(T|B^c) \cdot \mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

tenemos

$$\mathbb{P}(B|T) = \frac{\mathbb{P}(T \cap B)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{\mathbb{P}(T|B) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(T|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(T|B^c) \cdot \mathbb{P}(B^c)}$$

Así con $\mathbb{P}(B) = 0.02$ encontramos:

$$\mathbb{P}(B|T) = \frac{0.70 \cdot 0.02}{0.70 \cdot 0.02 + 0.10 \cdot (1 - 0.02)} = 0.125$$

Si calculamos $\mathbb{P}(B|T^c) = 0.0068$. Esas probabilidades reflejan que ese test no es buen test. Un test perfecto debe resultar con $\mathbb{P}(B|T) = 1$ y $\mathbb{P}(B|T^c) = 0$.

Solución 14 Tenemos de los cálculos anteriores que $\mathbb{P}(T \cap B) = 0.0198$ y $\mathbb{P}(T) = 0.0688$, así:

$$\mathbb{P}(B|T) = \frac{\mathbb{P}(T \cap B)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{0.0198}{0.0688} = 0.2878.$$

Además, $\mathbb{P}(T^c) = 1 - 0.0688 = 0.9312$ y $\mathbb{P}(T^c|B) = 1 - \mathbb{P}(T|B) = 0.01$. Así, $\mathbb{P}(T \cap T^c) = 0.01 \cdot 0.02 = 0.0002$ y

$$\mathbb{P}(B|T^c) = \frac{0.0002}{0.9312} = 0.00021.$$

Solución 15 En la primera parte, el evento A tiene 3 salidas, el evento B tiene 11 salidas y $A \cap B = \{(1,3),(3,1)\}$. Así encontramos que $\mathbb{P}(B) = 11/36$ y $\mathbb{P}(A \cap B) = 2/36$, tal que:

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{2/36}{11/36} = 2/11.$$

Para la segunda parte, debido a que $\mathbb{P}(A) = 3/36 = 1/12$ y esto no es igual a $2/11 = \mathbb{P}(A|B)$ el evento A y B son dependientes.

Solución 16 Ejercicio

Solución 17 Ejercicio

Solución 18 Ejercicio

Solución 19 Hay 13 espadas en la baraja y cada una de ellas tiene la probabilidad de $1/52$ de ser escogidas. Así $\mathbb{P}(S_1) = 13/52 = 1/4$. Dado que la primera carta es una espada hay $13 - 1 = 12$ espadas en la baraja con $52 - 1 = 51$ cartas restantes. Así $\mathbb{P}(S_2|S_1) = 12/51$. Si la primera carta no es una espada hay 13 espadas en la baraja de 51 y así $\mathbb{P}(S_2|S_1^c) = 13/51$.

Veamos el cálculo de $P(S_2)$, para ello usamos la probabilidad total (basado en $\Omega = S_1 \cap S_1^c$)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_2) &= \mathbb{P}(S_2 \cap S_1) + \mathbb{P}(S_2 \cap S_1^c) = \mathbb{P}(S_2|S_1)P(S_1) + \mathbb{P}(S_2|S_1^c)\mathbb{P}(S_1^c) \\ &= \frac{12}{51} \cdot \frac{1}{4} + \frac{13}{51} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12 + 39}{51 \cdot 4} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Solución 20 Definamos los siguiente eventos: B es el evento 'el punto B se alcanza en el segundo paso', C es el evento 'el camino hacia C se elige en el primer paso' y del mismo modo se define D y E. Nótese que los eventos C, D, y E son mutuamente excluyentes y que uno de ellos debe ocurrir. Por otra parte, sólo podemos llegar a B si primero vamos por C o D. Para estos cálculos se utiliza la ley de la probabilidad total, condicionando el resultado de la primera etapa:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B\cap C)+\mathbb{P}(B\cap D)+\mathbb{P}(B\cap E)\\ &= \mathbb{P}(B|C)P(C)+\mathbb{P}(B|D)P(D)+\mathbb{P}(B|E)\mathbb{P}(E)\\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{7}{36}\end{aligned}$$

Solución 21 El mejor enfoque para un problema como este es escribir la probabilidad condicional y luego ver si de alguna manera podemos combinar esto con $\mathbb{P}(A)=1/3$ para resolver el problema. Notamos que $\mathbb{P}(B\cap A^c)=\mathbb{P}(B|A^c)\mathbb{P}(A^c)$ y que $\mathbb{P}(A\cup B)=\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B\cap A^c)$. Así

$$\mathbb{P}(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot(1-\frac{1}{3})=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

En el ítem, que sigue, de la probabilidad condicional, encontramos que $\mathbb{P}(A^c\cap B^c)=\mathbb{P}(A^c|B^c)\mathbb{P}(B^c)=\frac{1}{2}(1-P(B))$. De las leyes de DeMorgan, se sabe que $\mathbb{P}(A^c\cap B^c)=\mathbb{P}((A\cup B)^c)=1-\mathbb{P}(A\cup B)=1/3$. Combinando esto produce una ecuación para $\mathbb{P}(B):\frac{1}{2}(1-\mathbb{P}(B))=1/3$, desde el cuál, encontramos que $\mathbb{P}(B)=1/3$.

Solución 22 Nos piden $P(W)$. Usamos el teorema de la probabilidad total, descomponiendo $\Omega=F\cup F^c$. También $\mathbb{P}(W|F)=0.99$.

$$\mathbb{P}(W)=\mathbb{P}(W\cap F)+\mathbb{P}(W\cap F^c)=\mathbb{P}(W|F)\mathbb{P}(F)+\mathbb{P}(W|F^c)\mathbb{P}(F^c)=0.99\cdot 0.1+0.02\cdot 0.9=0.099+0.018=0.117.$$

En lo que sigue, necesitamos determinar $\Pr(F|W)$ y esto puede ser calculado usando la regla de Bayes. De los cálculos anteriores, conseguimos:

$$\mathbb{P}(F|W)=\frac{\mathbb{P}(F\cap W)}{\mathbb{P}(W)}=\frac{0.099}{0.117}=0.846.$$