Curso: Cálculo de probabilidades CM-1H2
Variables aleatoria multivariadas

Lista de ejercicios

---

1. Una pequeña universidad tiene 90 profesores hombres y 30 profesores mujeres. Un comité ad hoc de cinco es seleccionado al azar para escribir la visión y la misión de la universidad. Sea X e Y el número de hombres y mujeres en este comité, respectivamente.
   (a) Encuentra la función masa de probabilidad de X e Y.
   (b) Encuentra las funciones masa de probabilidad marginal p_X y p_Y de las variables aleatorias X e Y.
2. Rodamos un dado equilibrado y sea el resultado dado denotado por X. A continuación, lanzar una moneda X veces y sea Y que denote el número de sellos. ¿ Cuál es la función de masa de probabilidad conjunta de X e Y y las funciones de masa de probabilidad marginal de X e Y?.
3. Unos ladrones robaron cuatro animales al azar de una granja que tenía siete ovejas, ocho cabras y cinco burros. Calcula la función de masa de probabilidad conjunta del número de ovejas y cabras robadas.
4. Se lanzan dos dados. La suma de los resultados se denota por X y el valor absoluto de su diferencia por Y. Calcula la función de masa de probabilidad conjunta de X e Y y las funciones de masa de probabilidad marginal de X e Y.
5. Sea la función de masa de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y, definida como:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{70}x(x+y) & \text{si } x = 1,2,3 \;\; y = 3,4 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   Encuentra $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(Y)$.
6. La función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{Si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   (a) Encuentra las funciones de probabilidad marginal de X e Y.
   (b) Calcula $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{E}(Y)$.
   (c) Calcula $\mathbb{P}(X < 1/2), \mathbb{P}(X < 2Y)$ y $\mathbb{P}(X = Y)$.
7. La función de densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda x y^2 & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   (a) Determina el valor de λ.
   (b) Encuentra las funciones de probabilidad marginal de X e Y.
   (c) Calcula $\mathbb{E}(X)$ y $\mathbb{E}(Y)$.

8. Para $\lambda > 0$, sea:

$$F_X(x,y) = \begin{cases} 1 - \lambda e^{-\lambda(x+y)} & \text{si } x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Determina si F es una función de distribución de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias X e Y.

9. Un círculo de radio 1 está inscrito en un cuadrado con lados de longitud 2. Se selecciona un punto al azar del cuadrado. ¿Cuál es la probabilidad de que esté dentro del círculo? Ten en cuenta que al seleccionar un punto al azar del cuadrado, queremos decir que el punto se selecciona de manera que todos los subconjuntos de áreas iguales del cuadrado tienen la misma probabilidad de contener el punto.

10. Sean X e Y variables aleatorias con una función densidad de probabilidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2) & \text{si } 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Encuentra $\mathbb{E}(X^2 + Y^2)$.

11. Las tiendas A y B, que pertenecen al mismo propietario, están ubicadas en dos ciudades diferentes. Si la función densidad de probabilidad del beneficio semanal de cada tienda, en miles de dólares, viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x/4 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

y el beneficio de una tienda es independiente de la otra, ¿cuál es la probabilidad de que la próxima semana una tienda gane al menos \$500 más que la otra tienda?.

12. Sea la función de masa de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y es dado por:

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{7}x^2 y & \text{si } (x,y) = (1,1), (1,2), (2,1) \\ 0 & \text{en otras partes.} \end{cases}$$

¿ Son X e Y independientes?.

13. Sean X e Y, variables aleatorias independientes, teniendo como función de masa de probabilidad:

$$p_X(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad x = 1, 2, 3, \ldots$$

Encuentra $\mathbb{P}(X = 1, Y = 3)$ y $\mathbb{P}(X + Y = 3)$.

14. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente dos niñas entre las primeras siete y exactamente cuatro niñas entre los primeros 15 bebés nacidos en un hospital en una semana determinada?. Supongamos que los eventos en que un niño nacido es una niña o un niño son equiprobable.

15. Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con funciones de distribución F y G, respectivamente. Encuentra las funciones de distribución de $\max(X,Y)$ y $\min(X,Y)$.

16. Sean X e Y dos puntos aleatorios independientes del intervalo $(0,1)$. Calcula la función de distribución de probabilidad y la función de densidad de probabilidad de $\max(X,Y)/\min(X,Y)$.

17. Si la función de masa de probabilidad conjunta de X e Y es dada por:

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{15}(x+y) & \text{si } x = 0,1,2,\ y = 1,2 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Encuentra $p_{X|Y}(x|y)$ y $\mathbb{P}(X = 0|Y = 2)$.

18. Mientras se lanza un dado equilibrado sucesivamente, se nota que los primeros 6 ocurrieron en el tercer lanzamiento. ¿Cuál es el número esperado de tiradas hasta el primer 1?.

19. Primero, se selecciona aleatoriamente un punto Y del intervalo $(0,1)$. Luego, otro punto X se elige al azar del intervalo $(0, Y)$. Encuentra la función de densidad de probabilidad de X.

20. Sea la función densidad de probabilidad condicional de X, dado que $Y = y$, sea:

$$f_{X|Y}(x|2) = \frac{x+y}{1+y}e^{-x}, \quad 0 < x < \infty \quad 0 < y < \infty.$$

Encuentra $\mathbb{P}(X < 1|Y = 2)$.

21. Las duraciones de las baterías fabricadas por una determinada compañia se distribuyen de manera idéntica con las funciones de distribución de probabilidad y densidad de probabilidad F y f, respectivamente. En términos de F, f y s, encuentra el valor esperado de la vida útil de una batería de s horas de antiguedad.

22. La función densidad de probabilidad conjunta de X e Y está dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} ce^{-x} & \text{si } x \geq 0, \quad |y| < x \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   (a) Determina la constante c.
   (b) Encuentra $f_{X|Y}(x|y)$ y $f_{Y|X}(y|x)$.
   (c) Calcula $\mathbb{E}(Y|X = x)$ y $\mathrm{Var}(Y|X = x)$.