Curso: Cálculo de probabilidades CM-1H2
distribución normal bivariada

Lista de ejercicios

1. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias normales estándar. Definimos la variable aleatoria Y_1 y Y_2 de la siguiente manera:

$$Y_1 = 2X_1 + X_2, \quad Y_2 = X_2 - X_1.$$

Calcula $\mathbb{E}(Y_1), \mathbb{E}(Y_2), \operatorname{cov}(Y_1, Y_2)$ y el PDF de f_{Y_1,Y_2}.

2. Las variables aleatorias X e Y son descritas por el PDF conjunto de la forma,

$$f_{X,Y}(x,y) = ce^{-8x^2-6xy-18y^2}$$

Encuentra las medias, las varianzas y el coeficiente de correlación de X e Y. Además, encuentra el valor de la constante c.

3. Supongamos que X e Y son variables aleatorias normales independientes con la misma varianza. Demuestra que $X - Y$ y $X + Y$ son independientes.

4. Las coordenadas X e Y de un punto son variables aleatorias normales con media cero, independientes con varianza común σ^2. Dado un punto que está a una distancia de al menos c del origen, encuentra el PDF conjunto condicional de X e Y.

5. (a) Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ las variables aleatorias idénticamente distribuidas, independientes y sea $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Muestra que,

$$\mathbb{E}(X_1|Y) = \frac{Y}{n}.$$

   (b) Sean X y W variables independientes aleatorias normales de media cero, con varianza enteras positivas k y m, respectivamente. Usa el resultado de la parte (a) para encontrar $\mathbb{E}(X|X+W)$.

6. Sean X e Y dos variables aleatorias con función densidad de probabilidad $f(x,y)$. Si $\mathbb{E}(Y|X=x)$ es una función lineal de x, es decir, si $\mathbb{E}(Y|X=x) = a + bx$ para $a, b \in \mathbb{R}$, entonces

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X).$$

7. Sea la función densidad de probabilidad conjunta de X e Y sea normal bivariada. ¿Para qué valores de α la varianza de $\alpha X + Y$ es mínima?.

8. Sea $f(x,y)$ una función densidad de probabilidad normal bivariada conjunta. Determina el punto en el que se obtiene el valor máximo de f.

9. Sea la función densidad de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias X e Y está dada por,

$$f(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < y < x, 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otras partes} \end{cases}$$

Encuentra $\mathbb{E}(X|Y=y), \mathbb{E}(Y|X=x)$ y $\rho(X,Y)$.

10. Sea la función densidad de probabilidad conjunta de las variables aleatorias X e Y bivariada normal. Demuestra que si $\sigma_X = \sigma_Y$, entonces $X + Y$ y $X - Y$ son variables aleatorias independientes.