1 Distribuciones discretas

Algunas de la más importantes variables aleatorias discretas, se listan a continuación:

1.1 Distribución de masa puntual

X tiene una distribución de masa puntual en a, $X \sim \delta_a$, si $\mathbb{P}(X = a) = 1$, en el caso que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 & x \geq a. \end{cases}$$

La función de masa de probabilidad es $p_X(x) = 1$ para $x = a$ y 0 en otros casos.

1.2 Distribución uniforme discreta

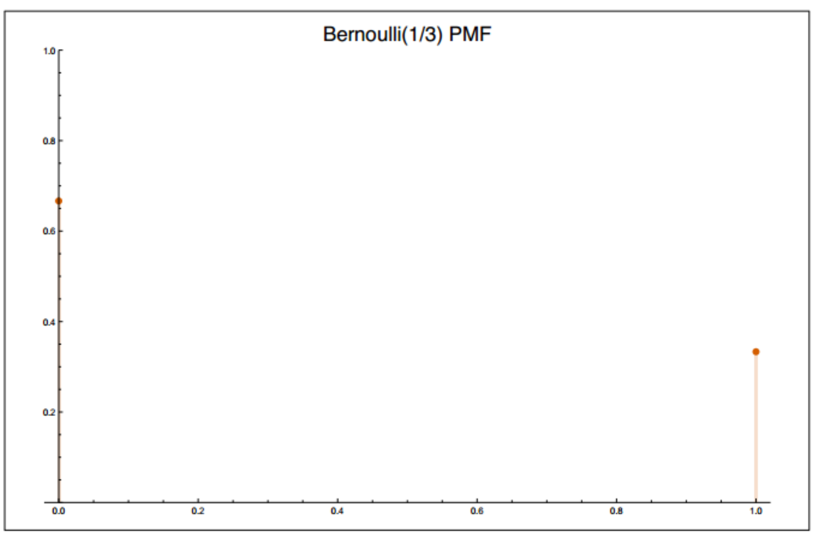
Sea $k > 1$ un número entero. Supongamos que X tiene `PMF` dado por

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/k & \text{para } 1, \ldots, k \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Decimos que X tiene una distribución uniforme sobre $\{1, \ldots, k\}$.

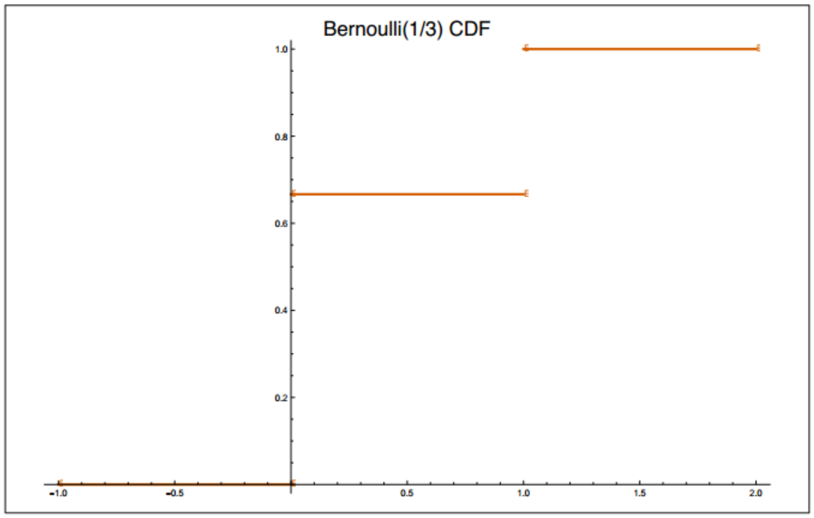
1.3 Distribución de Bernoulli

Sea X que representa una lanzamiento de una moneda. Entonces $\mathbb{P}(X = 1) = p$ y $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ para algún $p \in [0, 1]$, entonces decimos que X tiene una distribución de Bernoulli, escrita como $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. La función probabilidad es $p_X(x) = p^x(1-p)^{1-x}$ para $x \in \{0, 1\}$.



La distribución de `Bernoulli(p)` tiene una media:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=0,1} x p(X = x) = 0(1-p) + 1p = p.$$



Además:

$$\mathbb{E}(X)^2 = \sum_{x=0,1} x^2 p(X = x) = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$$

y así la varianza:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

La varianza es maximizada para el valor de $p = 1/2$ y cada momento es el mismo $\mathbb{E}(X^\alpha) = 0^\alpha(1-p) + 1^\alpha p = p$.

1.4 Distribución binomial

Supongamos que tenemos una moneda, que cae cara con una probabilidad p para algún $0 \leq p \leq 1$. Lanzamos la moneda n veces y sea X el número de caras. Asumimos que estos lanzamientos son independientes. El PMF de X, $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ para esta distribución es:

$$p_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^x & \text{para } x = 0, \ldots, n \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

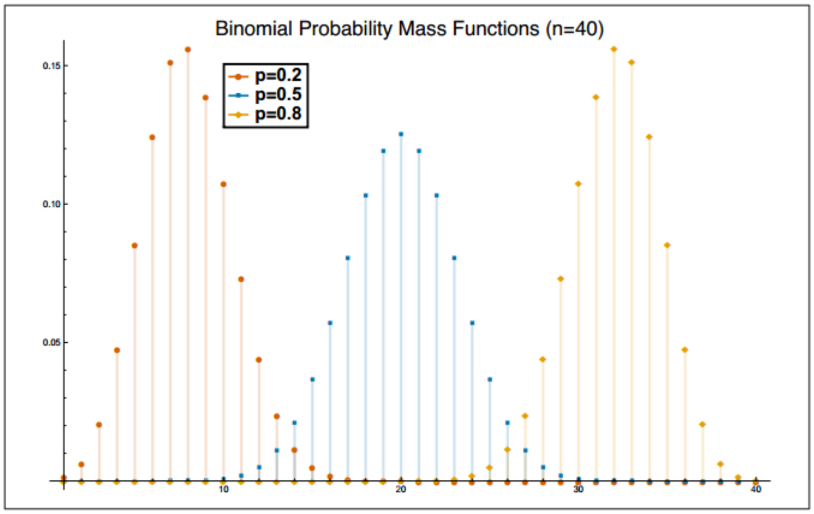
Esta es la suma de n variables aleatorias independientes de Bernoulli. Se denota como $X \sim \mathrm{Binomial}(n, p)$.

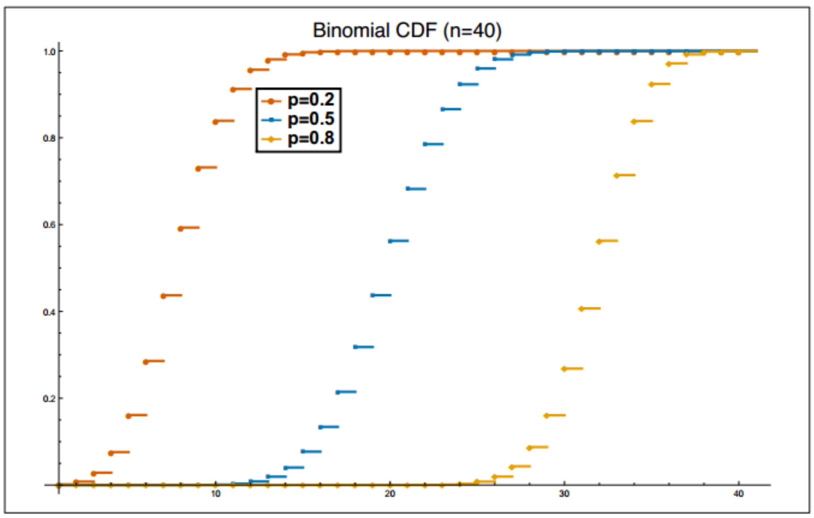
Desde que la esperanza es un operador lineal, la esperanza de una distribución Binomial, es la suma de las esperanzas de las distribuciones de Bernoulli involucradas, así si X es una distribución `Binomial(n,p)`:

$$\mathbb{E}(X) = np,$$

y desde que la varianza de la suma de variables independientes es la suma de varianza,

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$





1.5 Distribución binomial negativa

Replicar un experimento de `Bernoulli(p)` de forma independiente hasta que ocurre el r-ésimo éxito ($r \geq 1$) Sea X el número de pruebas en el cual se produce el r-ésimo éxito. Entonces se dice que X tiene una distribución `binomial negativa(r,p)`.

Existe otra definición de distribución binomial negativa, a saber, la distribución del número de fallos antes del r-ésimo éxito. (Esta es la definición empleada por R, en los cálculos).

La relación entre las dos definiciones es bastante simple. Si X es binomial negativo en el sentido usual y F es binomial negativo en el sentido de R, entonces:

$$F = X - r$$

¿ Cuál es la probabilidad de que el r-ésimo éxito ocurre en la prueba t, para $t \geq r$?. Para que esto suceda, debe haber $t - r$ fracasos y $r - 1$ éxitos, en las primeras $t - 1$ pruebas, con un éxito en la prueba t.

Por independencia, esto sucede con la probabilidad binomial para $r - 1$ éxitos en las primeras $t - 1$ pruebas, por la probabilidad p de éxito en la pruena t:

$$\mathbb{P}(X = t) = \binom{t-1}{r-1} p^r (1-p)^{t-r} \quad (t \geq r).$$

de esta manera la probabilidad es cero, cuando $t < r$. El caso especial $r = 1$ es llamada `distribución geométrica`. Es decir, X tiene una distribución geométrica con parámetro $p \in (0,1)$, denotada como

$X \sim$ Geometrica(p), si

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \;\; k \geq 1.$$

Tenemos a partir de este resultado que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k = \frac{p}{1-(1-p)} = 1.$$

X es el número de lanzamientos necesarios hasta que la primera cara salga, cuando una moneda es lanzada. La media de una distribución geométrica, tiene el valor de:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{t=1}^{\infty} tp(1-p)^{t-1} = \frac{1}{p}.$$

Además que se tiene:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \frac{1-p}{p}.$$

La distribución `binomial negativa(r,p)` es la suma de r de variables aleatorias geométricas independientes `Geometrica(p)`. Como la esperanza es un operador lineal positivo, se concluye que la media de `binomial negativa(r,p)` es r veces la media que `Geometrica(p)` y la varianza de una suma independiente es la suma de varianza, así:

Si $X \sim$ `binomial negativa(r,p)`, entonces:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p} \;\text{ y }\; \text{Var}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

1.6 Distribución multinomial

En un sentido, la distribución multinominal generaliza la distribución binomial a experimentos aleatorios independientes con más de dos resultados. Es la distribución de un vector que cuenta cuántas veces se produce cada resultado. Se denota como $X \sim \text{Multinomial}(n, \mathbf{p})$.

Un vector aleatorio multinomial es un m -vector $\mathbf{X}$ de resultados en una secuencia de n repeticiones independientes de un experimento aleatorio con m resultados distintos.

Si el experimento tiene m resultados posibles y el i-ésimo resultado tiene probabilidad p_i, entonces la función de masa de probabilidad `Multinomial(n, p)` viene dada por:

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} = (k_1, \ldots, k_m)) = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}.$$

donde $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$.

Si contamos el resultado k como `éxito`, entonces es obvio que cada X_k es simplemente una variable aleatoria binomial (n, pk). Pero los componentes no son independientes, ya que suman a n.

1.7 Distribución de Rademacher

La distribución `Rademacher(p)` es una variación de la distribución de Bernoulli, 1 todavía indica éxito, pero el fracaso se codifica como -1. Si Y es una variable aleatoria `Bernoulli(p)`, entonces $X = 2Y - 1$ es una variable aleatoria `Rademacher(p)`. La función de masa de probabilidad es:

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1-p & x = -1 \end{cases}$$

Una variable aleatoria X `Rademacher(p)` tiene una media:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=-1,1} xp(X = x) = -1(1-p) + 1p = 2p - 1.$$

Además $X^2 = 1$, así:

$$\mathbb{E}(X^2) = 1,$$

por tanto la varianza es:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = 1 - (2p-1)^2 = 4p(1-p).$$

Una secuencia de sucesivas sumas de variables aleatoria independientes de `Rademacher(p)` es llamado **camino aleatorio**. Esto es, si X_i son idénticamente distribuidas a variables aleatorias `Rademacher(1/2)`, la secuencia $S_1, S_2, \ldots$ es un camino aleatorio, donde:

$$S_n = X_1 + \cdots X_n.$$

Desde que el operador esperanza es un operador lineal:

$$\mathbb{E}(S_n) = 0, \ \text{ para todo } \ n,$$

y desde que la varianza de la suma de variables aleatorias independientes es la suma de varianzas:

$$\mathrm{Var}(S_n) = n, \ \text{ para todo } \ n.$$

1.8 Distribución de Poisson

Una variable aleatoria de Poisson N modela el recuento de éxitos cuando la probabilidad de éxitos es pequeña y el número de pruebas independientes es grande, de modo que la tasa de éxito promedio μ. Se denota esta variable aleatoria como $X \sim \mathrm{Poisson}(\mu)$ si:

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\mu}\frac{\mu^k}{k!} \ \ k = 0, 1, \ldots.$$

Así :

$$\mathbb{E}(N) = \mu \ \text{ y } \ \mathrm{Var}(N) = \mu.$$

La distribución de Poisson es usado a menudo como un modelo para eventos, como decaimiento radiactivo y accidentes de tráfico.

Ladislaus von Bortkiewicz se refirió a la distribución de Poisson como `La Ley de los números pequeños`. Se puede pensar esto, como un límite peculiar de las distribuciones binomiales. Consideremos una secuencia de variables `binomiales(n, p)`, donde la probabilidad p de éxito va a cero, pero el número n de pruebascrece de tal manera que $np = \mu$ permanece fijo. Entonces tenemos la siguiente proposición:

Proposición 1.1 Para cada k:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Binomial}(n, \mu/k)(k) = \mathrm{Poisson}(\mu)(k).$$