Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2018 - II

Práctica dirigida de Cálculo de Probabilidades
CM- 1H2

Probabilidad condicional, eventos independientes

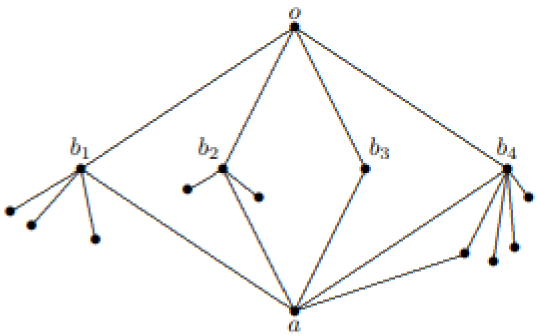
1. Para cualquier colección finita de eventos $A_1, \cdots, A_n$, prueba que
$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)P(A_2|A_1)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$
siempre que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) > 0$.

2. Consideremos las familias que tienen dos niños y supongamos que varones y mujeres son igualmente probables. Si escogemos al azar una familia y en ella hay un hijo varón, ¿cuál es la probabilidad de que el otro hijo sea también varón?. Luego, considera de nuevo las familias que tienen dos hijos. Si escogemos un niño al azar entre estas familias y resulta ser varón, ¿cuál es la probabilidad de que el otro niño en la familia también sea varón?.

3. Prueba que si $\mathbb{P}(A) = a$ y $\mathbb{P}(B) = b$ entonces $\mathbb{P}(A|B) \geq (a + b - 1)/b$.

4. En una bolsa se colocan n tarjetas con nombres escritos en ellas y se extraen dos, sucesivamente y sin reposición. Si $m < n$ de los nombres son de mujer, calcula la probabilidad de que el segundo nombre extraído sea de mujer.

5. Un caminante sale del punto o y escoge uno de los caminos ob_1, ob_2, ob_3, ob_4 al azar. En cada uno de los cruces siguientes de nuevo escoge al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el caminante llegue al punto a?.



6. Cada vez que el repartidor de una pizzeria regresa a buscar los pedidos para repartir, se encuentra que pueden haber entre 1 y 5 encargos esperando, y cada una de estas posibilidades tiene la misma probabilidad. Si, en promedio, la mitad de los clientes le da propina, calcule la probabilidad de que obtenga al menos dos propinas en un viaje.

7. Se selecciona aleatoriamente un número del conjunto $\{1, 2, \ldots, 10{,}000\}$ y se observa que es impar. ¿Cuál es la probabilidad de que sea divisible por 3 y que no sea divisible por 3 y 5?.

8. En una escuela internacional, 60 estudiantes, de los cuales 15 son coreanos, 20 son franceses, 8 son griegos y el resto son chinos, se dividen al azar en cuatro clases de 15 estudiantes cada una. Si hay un total de ocho estudiantes franceses y seis coreanos en las clases A y B. ¿Cuál es la probabilidad de que la clase C tenga 4 de los 12 restantes estudiantes franceses y 3 de los restantes 9 estudiantes coreanos?.

9. En una comunidad de M hombres y w mujeres, m hombres y w mujeres fuman ($m \leq M, w \leq W$). Si una persona es seleccionada al azar y A y B son los eventos que indican que una persona es hombre y fuma, respectivamente.¿ Bajo que condiciones A y B son independientes?.

10. Prueba que si A, B y C son independientes, entonces A y $B \cap B$ son independientes. Muestra que $A - B$ y C son independientes.

Ley de probabilidad total, teorema de Bayes

1. Tres enfermedades distintas y excluyentes A, B y C producen el mismo conjunto de síntomas H. Un estudio clínico muestra que las probabilidades de contraer las enfermedades son 0,01; 0,005 y 0,02 respectivamente. Además, la probabilidad de que el paciente desarrolle los síntomas H para cada enfermedad son 0,90; 0,95 y 0,75, respectivamente. Si una persona enferma tiene los síntomas H, ¿cuál es la probabilidad de que tenga la enfermedad A?.
2. Un estudiante responde una pregunta de un examen de múltiple selección que tiene cuatro respuestas posibles. Suponga que la probabilidad de que el estudiante conozca la respuesta a la pregunta es 0,8 y la probabilidad de que adivine es 0,2. Si el estudiante adivina, la probabilidad de que acierte es 0,25. Si el estudiante responde acertadamente la pregunta, ¿cuál es la probabilidad de que el estudiante realmente supiera la respuesta?.
3. El primer hijo que tiene una mujer es un niño hemofílico. La mujer, en cuya historia familiar no aparecen casos de hemofilia, tiene dudas sobre tener un segundo hijo, pero piensa que su hijo no heredó la hemofilia de ella y que su enfermedad es debida a una mutación. Por lo tanto, la probabilidad de que un segundo hijo tenga hemofilia es la de que nuevamente la enfermedad venga de una mutación, y esto es un número pequeño, m (digamos $m = 10^{-5}$). Calcula cuál es en realidad la probabilidad de que el segundo hijo tenga hemofilia si el primero nació hemofílico.
4. Supongamos que existen N familias en la tierra y que el número máximo de hijos de una familia es c. Sea $\alpha_j(0 \leq j \leq c, \sum_{j=0}^{c} \alpha_j = 1)$ la fracción de familias con j niños. Encuentra la fracción de todos los niños en el mundo que son los k-nacidos de sus familias ($k = 1, 2, \ldots, c$).
5. Hay dos establos en una granja, uno que contiene 20 caballos y 13 mulas, el otro con 25 caballos y ocho mulas. Los animalitos de vez en cuando dejan sus establos y luego regresan a sus establos. Supongamos que durante un periodo en que todos los animalitos están en sus establos, un caballo sale de un establo y luego regresa. ¿ Cuál es la probabilidad de que el siguiente animalito que salga del mismo establo sea también un caballo?.
6. Una urna contiene cinco chips rojos y tres azules. Supongamos que cuatro de estos chips son seleccionados al azar y transferidos a una segunda urna, que originalmente estaba vacía. Si un chip aleatorio de esta segunda urna es azul. ¿Cuál es la probabilidad de que dos chips rojos y dos azules fueran transferidos de la primera urna a la segunda?.
7. Supongamos que el 80 % de los estudiantes de último año, el 70 % de los estudiantes de tercer año, el 50 % de los estudiantes de segundo año y el 30 % de los estudiantes de primer aõ de una universidad utilizan con frecuencia la biblioteca de su campus. Si el 30 % de todos los estudiantes son estudiantes de primer año, el 25 % son estudiantes de segundo año, el 25 % son estudiantes de tercer año y el 20 % son personas de último año, ¿qué porcentaje de todos los estudiantes usan la biblioteca con frecuencia?.
8. Un juez está 65 % seguro de que un sospechoso ha cometido un crimen. Durante el transcurso del juicio, un testigo convence al juez de que hay un 85 % de posibilidades de que el criminal sea zurdo. Si el 23 % de la población es zurda y el sospechoso también es zurdo, con esta nueva información, ¿cuán seguro debería ser el juez de la culpabilidad del sospechoso?.
9. La ventaja de un cierto análisis de sangre es que el 90 % de veces es positivo para los pacientes que tienen una cierta enfermedad. Su desventaja es que el 25 % de las veces también es positivo en personas sanas. En un cierto lugar el 30 % de la gente tiene la enfermedad y cualquier persona con una prueba de sangre positiva se le da un medicamento que cure la enfermedad. Si el 20 % de veces el medicamento produce escocedura. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de este lugar que tiene escocedura tuvo la enfermedad en primer lugar?.
10. En un estudio realizado hace tres años, se encontró que el 82 % de las personas en una muestra seleccionada al azar tenía calificaciones crediticias financieras ”buenas”, mientras que el 18 % restante tenía calificaciones crediticias financieras ”malas”. Los registros actuales de las personas de esa muestra muestran que el 30 % de aquellos con malas calificaciones crediticias han mejorado sus calificaciones desde entonces, mientras que el 15 % de aquellos con buenas calificaciones crediticias han cambiado desde entonces a tener una mala calificación de crédito. ¿Qué porcentaje de personas con buenas calificaciones crediticias ahora, tenían malas calificaciones hace tres años?.

Variables aleatorias, función de masa de probabilidad, función de distribución acumulativa

1. Sea X una variable aleatoria con función de masa probabilidad dada por la siguiente tabla:

x_i	:	-2	-1	0	1	2	3	4	5
π	:	0.1	0.2	0.15	0.2	0.1	0.15	0.05	0.05

   Calcula las probabilidades de los siguientes eventos:

   - X es negativa
   - X es par
   - X toma valores entre 1 y 5, ambos inclusive.
   - $\mathbb{P}(X = -2|X \leq 0)$
   - $\mathbb{P}(X \geq 2|X > 0)$.

2. Dos dados son lanzados y el valor absoluto de la diferencia de los resultados se denota por X.

   ¿ Cuáles son los valores posibles de X y las probabilidades asociadas con esos valores?.

3. De una urna que contiene 5 chips rojos, 5 blancos y 5 azules, sacamos dos chips al azar. Por cada chip azul ganamos 1 sol , por cada chip blanco ganamos 2 soles, pero por cada chip rojo perdemos 3 soles. Si X representa la cantidad que ganamos o perdemos. ¿Cuáles son los posibles valores de X y las probabilidades asociadas a eso valores?.

4. En una sociedad de población N, la probabilidad es p que una persona tenga cierta enfermedad independientemente de otras. Sea X el número de personas que deben ser examinadas hasta que se encuentre una persona con la enfermedad, $X = 0$ si no se encuentra a nadie con la enfermedad.

   ¿ Cuáles son los posibles valores de X?. Determina las probabilidades asociadas con estos valores.

5. Determina el valor de la constante A para que las siguientes sean funciones de masa de probabilidad.

   - $\mathbb{P}(X = i) = \begin{cases} A_i & i = 1, 2, \cdots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
   - $\mathbb{P}(X = i) = \begin{cases} A_i/2^i & i = 1, 2, \cdots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
   - $\mathbb{P}(X = i) = \begin{cases} A_i/3^i & i = 1, 3, \cdots, 2n-1 \\ A_i/4^i & i = 2, 4, \cdots, 2n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

6. En lanzamientos sucesivos de un dado justo, sea X el número de lanzamientos hasta que aparezca el primer 6. Determine la función de masa de probabilidad y la función de distribución de X.

7. Un dado se lanza sucesivamente. Sea X el número de lanzamientos hasta que cada uno de los seis posibles resultados ocurran al menos una vez. Encuentra la función de masa de probabilidad de X.

8. En una ciudad hay 40 taxis, numerados del 1 al 40. Tres taxis llegan al azar a una estación para recoger pasajeros. ¿ Cuál es la probabilidad de que el número de al menos uno de los taxis sea menor de 5?.

9. En el experimento de lanzar un dado equilibrado dos veces, sea X el máximo de los dos números obtenidos. Determina y dibuja la función de masa de probabilidad y la función de distribución de X.

10. Sea X la cantidad de nacimientos en un hospital hasta que nazca la primera niña. Determina la función de masa de probabilidad y la función de distribución de X. Suponga que la probabilidad es 1/2 de que un bebé nacido sea una niña.

Esperanza matemática

1. Demuestra que si $X \geq 0$ y existe $\mathbb{E}(X)$, entonces $\mathbb{E}(X) \geq 0$.
2. Demuestra que si X es una variable aleatoria acotada entonces existe $\mathbb{E}(X)$.

3. Proporciona una variable aleatoria discreta, para la cual no exista valor esperado.
4. Sean X una variable aleatoria discreta y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y consideremos la nueva variable aleatoria discreta $Y = g(X)$. Prueba que, si existe la esperanza matemática de Y, ésta es $\mathbb{E}[Y] = \sum_{n=1}^{\infty} g(x_n)p_n$.
5. Un dado se lanza sucesivamente. Sea X el número de lanzamientos hasta que cada uno de los seis posibles resultados ocurran al menos una vez. Encuentra la función de masa de probabilidad de X.
6. Lanzamos una moneda dos veces y sea X el número de caras obtenidas. ¿ Cuál es la esperanza o el valor esperado de X?.
7. Escribimos los números $a_1, a_2, \ldots$, para bolas idénticas y las mezclamos en una caja. ¿Cuál es el valor esperado de una bola seleccionada al azar?.
8. En la loteria de un determinado estado, los jugadores eligen seis enteros diferentes entre el 1 y 49, siendo el orden de selección irrelevante. La comisión de la loteria entonces selecciona seis de estos números al azar como los números que deberian ser los ganadores. Un jugador gana el gran premio de $1,200,000$ soles, si los seis números que ha seleccionado coinciden con los números ganadores. Gana el segundo y tercer premio de 800 y 35 soles, respectivamente, si exactamente cinco y cuatro de sus seis números seleccionados coinciden con los números ganadores. ¿ Cuál es la esperanza de la cantidad que un jugador gana en un juego?.
9. La función distribución de una variable aleatoria X es dado por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ 3/8 & -3 \leq x < 0 \\ 1/2 & 0 \leq x < 3 \\ 3/4 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

   Calcula $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X^2 - 2|X|)$ y $\mathbb{E}(X|X|)$.
10. Proporciona un ejemplo de dos variables aleatorias X e Y que no sean independientes, pero que, sin embargo, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, lo cual implica que no están correlacionadas.