

## Lista de ejercicios

---

1. Muestra por la desigualdad de Jensen que  $\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(X)^2$ .
2. Si  $u_0, u_1, \dots$  tiene una función generadora  $U(s)$  y  $v_0, v_1, \dots$  una función generadora  $V(s)$ , encuentra  $V(s)$  en términos de  $U(s)$ , cuando  $(a)v_n = 2u_n$ ,  $(b)v_n = u_n + 1$ ,  $(c)v_n = nu_n$ .
3. Sea  $0 < p = 1 - q < 1$ . ¿De qué secuencia es  $U(s) = \sqrt{1 - 4pqs^2}$ , la función generadora?
4. Si  $X$  es una variable aleatoria con función generadora de probabilidad  $G_X(s)$  y  $k$  es un entero positivo. Muestra que  $Y = kZ$  y  $Z = X + k$ , tienen funciones generadoras de probabilidad:

$$G_Y(s) = G_X(s^k), \quad G_Z(s) = s^k G_X(s).$$

5. Si  $X$  es uniformemente distribuida en  $\{0, 1, 2, \dots, a\}$ , tal que:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{a+1} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots, a,$$

muestra que  $X$  tienen una función generadora de probabilidad:

$$G_X(s) = \frac{1 - s^{a+1}}{(a+1)(1-s)}.$$

6. Sea  $N$  y  $X_1, X_2, \dots$  variables aleatorias  $X$ , cada una tomando valores en  $\{0, 1, 2, \dots\}$ . Si las  $X_i$  son idénticamente distribuidas con una función generadora de probabilidad  $G_X$ , entonces prueba que la suma:

$$S = X_1 + X_2 + \dots + X_N,$$

tiene una función generadora de probabilidad:

$$G_S(s) = G_N(G_X(s)).$$

7. Sea  $X$  una variable aleatoria de Bernoulli, con parámetro  $p$ , esto es:

$$\mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} 1-p & x = 0 \\ p & x = 1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Determina  $\mathbb{M}_X(t)$  y  $\mathbb{E}(X^n)$ .

8. Sea  $X$  una variable aleatoria binomial con parámetros  $(n, p)$ . Encuentra la función generadora de momentos de  $X$  y calcula  $\mathbb{E}(X)$  y  $\text{Var}(X)$ .
9. Sea  $X$  una variable aleatoria exponencial con un parámetro  $\lambda$ . Usando la función generadora de momentos, calcula la esperanza y la varianza de  $X$ .
10. Para una variable aleatoria  $X$ ,  $M_X(t) = (1/81)(e^t + 2)^4$ . Encuentra  $\mathbb{P}(X < 2)$ .
11. Prueba que la función  $t/(1-t)$ ,  $t < 1$ , no puede tener función generadora de momentos de una variable aleatoria.