Curso: Cálculo de probabilidades CM-1H2
Esperanza, varianza y desviación estándar.

Lista de ejercicios

1. Un dado se lanza sucesivamente. Sea X el número de lanzamientos hasta que cada uno de los seis posibles resultados ocurran al menos una vez. Encuentra la función de masa de probabilidad de X.

2. Lanzamos una moneda dos veces y sea X el número de caras obtenidas. ¿ Cuál es la esperanza o el valor esperado de X?.

3. Escribimos los números $a_1, a_2, \ldots$, para bolas idénticas y las mezclamos en una caja. ¿Cuál es el valor esperado de una bola seleccionada al azar?.

4. En la loteria de un determinado estado, los jugadores eligen seis enteros diferentes entre el 1 y 49, siendo el orden de selección irrelevante. La comisión de la loteria entonces selecciona seis de estos números al azar como los números que deberian ser los ganadores. Un jugador gana el gran premio de $1,200,000$ soles, si los seis números que ha seleccionado coinciden con los números ganadores. Gana el segundo y tercer premio de 800 y 35 soles, respectivamente, si exactamente cinco y cuatro de sus seis números seleccionados coinciden con los números ganadores. ¿ Cuál es la esperanza de la cantidad que un jugador gana en un juego?.

5. Sea X_0, la cantidad de lluvia que caerá en los Estados Unidos el próximo dia de Navidad. Para $n > 0$, sea X_n la cantidad de lluvia que caerá en los Estados Unidos en Navidad, n años después. Sea N el menor número de años que transcurren antes de una lluvia de Navidad mayor que X_0. Supongamos que $P(X_i = X_j) = 0$ si $i \neq j$, los sucesos relativos a la cantidad de lluvia en dias de Navidad de diferentes años son independientes y los X_n son idénticamente distribuidos. Hallar el valor esperado de N.

6. Se sabe que $\sum\limits_{x=1}^{\infty} 1/x^2 = \pi^2/6$.

   (a) Muestra que $p(x) = 6/(\pi x)^2,\ x = 1, 2, 3, \ldots$, es la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria X.

   (b) Prueba que $\mathbb{E}(X)$ no existe.

   (c) Muestra que $p(x) = (|x| + 1)^2/27,\ x = -2, -1, 0, 1, 2$ es la función de masa de probabilidad de la variable aleatoria X.

   (d) Calcula $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(|X|$ y $\mathbb{E}(2X^2 - 5X + 7)$.

7. La función distribución de una variable aleatoria X es dado por:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ 3/8 & -3 \leq x < 0 \\ 1/2 & 0 \leq x < 3 \\ 3/4 & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

   Calcula $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(X^2 - 2|X|)$ y $\mathbb{E}(X|X|)$.

8. Supongamos que, para una variable aleatoria discreta X, $\mathbb{E}(X) = 2$ y $\mathbb{E}[X(X-4)] = 5$. Encuentra la varianza y la desviación estándar de $-4X + 12$.

9. Encuentra la varianza y la desviación estándar de una variable aleatoria X con función distribución:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ 3/8 & -3 \leq x < 0 \\ 3/4 & 0 \leq x < 6 \\ 1 & x \geq 6. \end{cases}$$

10. Sea X un entero aleatorio, del conjunto $\{1, 2, \ldots, N\}$. Encuentra $\mathbb{E}(X), \mathrm{Var}(X)$ y la desviación estándar de X.

11. Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, sea $x_n = (-1)^n \sqrt{n}$. Sea X una variable aleatoria discreta con un conjunto positivo de valores $A = \{x_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ y una funci ón de masa de probabilidad

$$p(X_n) = \mathbb{P}(X = x_n) = \frac{6}{(\pi n)^2}.$$

Muestra que inclusive si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^3 p(x_n) < \infty$, $\mathbb{E}(X^3)$ no existe.