Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática Ciclo 2018 - II

Práctica dirigida de Cálculo de Probabilidades
CM- 1H2

Distribuciones discretas

1. Un agente de bienes raíces afirma que sólo el 30 % de las casas en un determinado vecindario se valoran en menos de 200,000 soles. Una muestra aleatoria de 20 casas de esa vecindad es seleccionada y evaluada. Los resultados en (miles de soles) son los siguientes:

   ```
   285 156 202 306 276 562 415
   245 185 143 186 377 225 192
   510 222 264 198 168 363
   ```

   Basándose en estos datos, ¿es aceptable la afirmación del agente inmobiliario?.

2. Si en el lanzamiento de un dado, el evento de obtener 4 o 6 se llama éxito y el evento de obtener $1, 2, 3$, o 5 se llama fracaso, entonces:

   $$X = \begin{cases} 1 & \text{si } 4, 6 \text{ es obtenido} \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

   es una variable de Bernoulli con paramétro $p = 1/3$. Calcula la función de masa de probabilidad de X.

3. En un restaurante de comida rápida 25 % de las órdenes para beber es una bebida pequeña, 35 % una mediana y 40 % una grande. Sea $X = 1$ si escoge aleatoriamente una orden de una bebida pequeña y sea $X = 0$ en cualquier otro caso. Sea $Y = 1$ si la orden de la bebida mediana y $Y = 0$ en cualquier otro caso. Sea $Z = 1$ si la orden es una bebida pequeña o media y $Z = 0$ para cualquier otro caso.

   - Sea $\mathbb{P}_X$ la probabilidad de éxito de X. Determina $\mathbb{P}_X$.
   - Sea $\mathbb{P}_Y$ la probabilidad de éxito de Y. Determina $\mathbb{P}_Y$.
   - Sea $\mathbb{P}_Z$ la probabilidad de éxito de Z. Determina P_Z.
   - ¿Es posible que X y Y sean iguales a 1?.
   - ¿Es $Z = X + Y$? explica tu respuesta.

4. Sea X una variable binomial con paramétros n y p. Entonces $p_X(x)$, la función de masa de probabilidad de X es:

   $$p_X(x) = \mathbb{P}(X = x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

5. Supongamos que, en una muestra aleatoria particular de n personas, k están contra el aborto. Demuestra que $\mathbb{P}(X = k)$ es el máximo para $\hat{p} = k/n$. Es decir, $\hat{p}$ es el valor de p que hace que el resultado $X = k$ más probable.

6. En el conjunto $\{x : 0 \leq x \leq 1\}$, 100 números son seleccionados aleatoriamente y redondeada a tres lugares decimales. ¿ Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos es 0,345?.

7. Sea X una variable aleatoria Binomial de paramétros n y p. Prueba que:

   $$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = n^2p^2 - np^2 + np.$$

8. Para averiguar el tamaõ N de una población de tortugas se utiliza el método siguiente de captura-marcaje-recaptura. Se capturan k tortugas, se les marca y se les reincorpora a su población. Un tiempo después se realizan n avistamientos independientes de los que X es el número de ellos que están marcados.
   - Obtiene una expresión para la probabilidad de que $X = m$.
   - Si $k = 4$ y $m = 1$, demuestra que la probabilidad es máxima cuando $N = 4n$.
   - Si $N = 12$, $k = 4$ y $n = 3$, ¿cuál es la probabilidad de que tres tortugas observadas estén marcados si sabemos que al menos uno de ellos lo está?.
9. En una caja hay 5 triángulos, 3 círculos y 2 rectángulos. Realizando extracciones con reemplazamiento, se piden las siguientes probabilidades:
   - Al realizar 8 extracciones, se obtengan en 4 ocasiones un círculo.
   - Se necesiten 8 extracciones para obtener 4 círculos.
   - Que aparezca el primer círculo en la 8 extracción.
   - Al realizar 8 extracciones aparezcan 3 triángulos, 3 círculos y 2 rectángulos.
   - Al realizar 6 extracciones sin remplazamiento aparezcan en 2 ocasiones un círculo.
10. Supongamos que X es una variable de Poisson con $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 3)$. Encuentra $\mathbb{P}(X = 5)$.
11. Una alumna trae cada día a la Universidad una tableta de chocolate de 16 cm., y de cuando en cuando le da un mordisco y se come la mitad de lo que le queda. Asumiendo que esta golosa apetencia aparece en la mañana siguiendo una distribución de Poisson de media un mordisco por hora:
   - Calcula la distribución del tiempo que transcurre hasta que aparece la primera mordida.
   - ¿Cuantos centímetros de chocolate esperas que le quede tras las cinco horas de clases?
   - ¿Qué probabilidad hay de que soporte una hora de clase sin morder su tableta?
   - Si un día, entre las 9:00 y las 14:00 horas, la ha mordido en cuatro ocasiones, ¿que probabilidad hay de que lo haya hecho durante las tres primeras horas de clase?.
12. Los mensajes que llegan a una computadora utilizada como servidor lo hacen de acuerdo con una distribución de Poisson con una tasa promedio de 0.1 mensajes por minuto.
   - ¿Cuál es la probabilidad de que lleguen como mucho 2 mensajes en una hora?
   - Determina el intervalo de tiempo necesario para que la probabilidad de que no llegue ningún mensaje durante ese lapso de tiempo sea 0,8.

Variables aleatorias continuas

1. El radio de una esfera es un número aleatorio entre 2 y 4. ¿ Cuál es el valor esperado de su volumen?. ¿ Cuál es la probabilidad de que su volumen sea a lo más 36π?.
2. Un agricultor que tiene dos piezas de madera de longitud a y b $(a < b)$ decide construir un gallinero en forma de triángulo para sus pollos. El envía a uno de sus hijos a cortar el pedazo más largo y el muchacho, sin tomar ningún criterio, hace un corte en la madera de longitud b, en un punto seleccionado al azar. ¿ Cuáles son las posibilidades de que las dos piezas resultantes y la pieza de longitud a se puedan utilizar para formar un gallinero triangular?.
3. Sea θ un número aleatorio entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Encuentra la función densidad de probabilidad de $X = \tan\theta$.
4. Considera la función densidad de gamma con parámetros α y λ,

$$\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

   donde $\Gamma(\alpha)$ es de la forma $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$. Prueba:
   - $\Gamma(1) = 1$
   - $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
   - $\Gamma(k) = (k-1)!$ si k es entero.

- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

5. Sea $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, z \in \mathbb{R}$. Se puede usar las coordenadas polares para mostrar que $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)dz = 1$, realizando los siguientes pasos:

   a) Muestra que es suficiente probar $\int_0^{\infty} e^{-z^2/2}dz = \sqrt{\pi/2}$,

   b) Verifica que $\left[\int_0^{\infty} e^{-z^2/2}dz\right]^2 = \int_0^{\infty} e^{-u^2/2}du \int_0^{\infty} e^{-v^2/2}dv$. Así muestra que $\int_{t=0}^{\infty}\int_{s=0}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)/2}dudv = \frac{1}{2}\pi$,

   c) En la doble integral encontrada en el ítem anterior, usa las sustituciones $u = r\cos(\theta), v = r\sin(\theta), 0 < r < \infty$ y $0 < \theta < 2\pi$. Entonces reescribe $\int_{t=0}^{\infty}\int_{s=0}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)/2}dudv = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2/2}rdr\right]d\theta$,

   d) Evalua para mostrar que $\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2/2}rdr = 1$,

   e) ¿ La parte (c) implica a la parte (b)?.

6. La variable aleatoria X es llamada `doble exponencial distribuida` si su función densidad es dada por:

$$f(x) = ce^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

   a) Encuentra el valor de c.

   b) Prueba que $\mathbb{E}(X^{2n}) = (2n)!$ y $\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0$.

7. Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \ -\infty < x < \infty.$$

   Calcula $\text{Var}(X)$.

8. Una variable aleatoria X con función densidad:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \ -\infty < x < \infty,$$

   es llamada una variable aleatoria de Cauchy.

   a) Encuentra el valor de c.

   b) Muestra que el valor de $\mathbb{E}(X)$ no existe.

9. Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

   Prueba que $\mathbb{E}(|X|^{\alpha})$ converge si $0 < \alpha < 1$ y diverge si $\alpha \geq 1$.

10. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad f_X y el conjunto de valores posibles A. Para la función invertible $h : A \to \mathbb{R}$, sea $Y = h(X)$ una variable aleatoria con el conjunto de valores posibles $B = h(A) = \{h(a) : a \in A\}$. Supongamos que la inversa de $y = h(x)$ es la función $x = h^{-1}(y)$, que es diferenciable para todos los valores de $y \in B$. Entonces, demuestra que, f_Y es la función densidad de Y, es dada por:

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y))|(h^{-1})'(y)|, \ y \in B.$$

11. Sea X una variable aleatoria con función densidad.

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

   Usando el método de las transformaciones, encuentra la función densidad de probabilidad de $Y = \sqrt{X}$.

12. Sea X una variable aleatoria continua con función densidad de probabilidad:

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x^3 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{en otros casos.} \end{cases}$$

Usando el método de las transformaciones, encuentra la función densidad de probabilidad de $Y = 1 - 3X^2$.

Distribuciones continuas

1. Sea X una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 1+\theta)$, donde $0 < \theta < 1$ es un parámetro dado. Encuentra una función de X, $g(X)$, tal que $\mathbb{E}[g(X)] = \theta^2$.

2. El espacio muestral de un experimento es $S = (0,1)$ y para cada subconjunto A de S, $\mathbb{P}(A) = \int_A dx$. Sea X la variable aleatoria definida en S por $X(\omega) = 5\omega - 1$. Prueba que X es una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo $(-1, 4)$.

3. Sea X una variable aleatoria exponencial con media 1. Halle la función densidad de probabilidad de $Y = -\ln X$.

4. Los huéspedes llegan a un hotel, de acuerdo a un proceso de Poisson, a razón de cinco por hora. Supongamos que durante los últimos 10 minutos ningún huésped ha llegado. ¿Cuál es la probabilidad de que (a) el siguiente llegue en menos de 24 minutos; (b) desde la llegada del décimo a la llegada del undécimo huésped no toma más de 2 minutos?.

5. Sea X una variable aleatoria exponencial con parámetro λ. Encuentra:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 2\sigma_X).$$

6. Supongamos que de todas las nubes que se siembran con yoduro de plata, el 58 % muestra un crecimiento espléndido. Si 60 nubes se siembran con yoduro de plata, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 35 muestren un crecimiento espléndido?.

7. Las calificaciones en una prueba de rendimiento otorgada a 100,000 estudiantes se distribuyen normalmente con una media de 500 y una desviación estándar de 100. ¿Cuál debe ser la puntuación de un estudiante para ubicarlo entre el 10 % superior de todos los estudiantes?.

8. La tasa de rendimiento anual de una acción específica es una variable aleatoria normal con una media del 10 % y una desviación estándar del 12 %. Una persona compra 100 acciones a un precio de \$60 por acción. ¿Cuál es la probabilidad de que después de un año la ganancia neta de esa inversión sea de al menos \$750? Ignora los costos de transacción y suponga que no hay dividendo anual.

9. Sea Z una variable aleatoria estándar y α una constante. Encuentra el número x que maximiza $\mathbb{P}(x < Z < x + \alpha)$.

10. Supongamos que la distribución de la presión arterial diastólica es normal para una persona seleccionada al azar en una determinada población que es normal con una media de 80 mmHg y una desviación estándar de 7mm Hg. Si las personas con presión arterial diastólica de 95 o más se consideran hipertensas y se considera que las personas con presión arterial diastólica por encima de 89 y por debajo de 95 tienen hipertensión leve, ¿qué porcentaje de esa población tiene hipertensión leve y qué porcentaje es hipertenso?. Supongamos que en esa población nadie tiene presión arterial sistólica anormal.

11. Un individuo lanza un dardo a una diana. La distancia d entre el punto central de la diana y el punto obtenido en el lanzamiento del dardo se distribuye como una normal de media 10 y varianza 4. Si el individuo consigue la puntuación máxima cuando la distancia d es menor que 8.
    - Calcular la probabilidad de que en 50 lanzamientos obtenga la puntuación máxima al menos una vez. (binomial)
    - Calcular la probabilidad de que obtenga la primera puntuación máxima en el segundo lanzamiento. (geométrica)
    - Calcular la probabilidad de que se necesiten 10 lanzamientos para obtener tres puntuaciones máximas (binomial negativa)
    - Calcular el número medio de lanzamientos para obtener tres puntuaciones máximas (binomial negativa)

12. Muestra que la función densidad gamma con parámetros (r, λ) tiene un único máximo en $(r-1)/\lambda$.

13. Sea X una variable aleatoria gamma (r, λ) . Encuentra la función de distribución de cX, donde c es una constante positiva.