Curso: Cálculo de probabilidades CM-1H2
Momentos

Lista de ejercicios

1. Sea X una variable aleatoria con función de masa de probabilidad $p(i) = 1/5, i = 1, 2, \ldots, 5$, cero en otros casos. Encuentra $\mathbb{M}_X(t)$.

2. Sea X una variable aleatoria discreta. Sea $0 < s < r$. Demuestra que si existe el r- ésimo momento absoluto de X, entonces también existe el momento absoluto de orden s de X.

3. Sea X una variable aleatoria que toma valores enteros no negativos y es asociado con una transformada de la forma:

$$M_X(s) = c \cdot \frac{3 + 4e^{2s} + 2e^{3s}}{3 - e^s},$$

donde c es un escalar. Encuentra $\mathbb{E}(X)$ y $p_X(1)$.

4. Se define la función generadora de momentos de una variable aleatoria X a la función $M_X = G_X(e^t)$.

   (a) Prueba que para una variable aleatoria Poisson de parámetro λ se tiene:

   $$M(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)).$$

   (b) Sea $p_r > 0$ y $a_r \in \mathbb{R}$ para $1 \leq r \leq n$. ¿ Cuál de las siguientes expresiones es una función generadora de momentos y para que variable aleatoria?

   $$M(t) = 1 + \sum_{r=1}^{n} p_r t^r \quad M(t) = \sum_{r=1}^{n} p_r e^{a_r t}.$$

   (c) Sea X una variable aleatoria geométrica con parámetro p. Muestra que la función generadora de momentos de X, es dada por:

   $$M_X(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t}, \quad q = 1 - p, \quad t < -\ln q$$

   Usa $M_X(t)$ para encontrar $\mathbb{E}(X)$ y $\text{Var}(X)$.

5. Sea $Z \sim N(0, 1)$. Usa $M_Z(t) = e^{t^2/2}$ para calcular $\mathbb{E}(Z^N)$, donde n es un número positivo.

6. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias con funciones de distribución $F_1, F_2, \ldots$ y las funciones generadoras de momentos $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t), \ldots$ respectivamente. Sea X una variable aleatoria con función de distribución F y función generadora de momentos $M_X(t)$.

   Si para todos los valores de t, $M_{X_n}(t)$ converge a $M_X(t)$ entonces en los puntos de continuidad de F, F_n converge a F.

7. Sea X e Y variables aleatorias independientes, con media 0 y varianza 1 y una función generadora de momentos $M(t)$. Si $X + Y$ y $X - Y$ son independientes, muestra que:

$$M(2t) = M(t)^3 M(-t)$$

y deduce que X e Y tienen una distribución normal con media 0 y varianza 1 .