Curso: Cálculo de probabilidades CM-1H2
Seminario 1

Lista de ejercicios

---

1. Sea J el evento 'Juan tiene la culpa' y M el evento 'María tiene la culpa' Expresa las dos declaraciones 'Ciertamente, no es cierto que ni Juan ni María tienen la culpa' y 'Juan o María tienen la culpa, o ambos' en términos de los eventos J, J^c, M y M^c, y comprueba la equivalencia de los estados por medio de las leyes de De Morgan.

2. Si deseas anotar los años bisiestos, suponiendo que uno de cada cuatro años es un año bisiesto (que a su vez es una aproximación a la realidad!), ¿Cómo se puede asignar una probabilidad a cada mes?.

3. Considera el espacio muestral $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ de algún experimento, donde la salida a_i tiene la probabilidad p_i para $i = 1, \ldots, 6$. Llevamos a cabo este experimento dos veces de manera que las probabilidades asociadas son

   $$P((a_i, a_i)) = p_i, \quad \text{y} \quad P((a_i, a_j)) = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j, \quad \text{para} \quad i, j = 1, \ldots, 6.$$

   Comprueba que P es una función probabilidad del espacio muestral $\Omega = \{a_1, \ldots, a_6\} \times \{a_1, \ldots, a_6\}$ del experimento combinado. ¿ Cuál es la relación entre el primer experimento y el segundo experimento que está determinado por esta función de probabilidad?.

4. Supongamos un experimento en un laboratorio se repite cada día de la semana hasta que tiene éxito, la probabilidad de éxito es p. El primer experimento se inicia el lunes. ¿Cuál es la probabilidad de que la serie termine el próximo domingo?.

5. Supongamos que los eventos D_1 y D_2 representan desastres, que son raros: $P(D_1) \leq 10^{-6}$ y $P(D_2) \leq 10^{-6}$.¿ Qué se puede decir acerca de la probabilidad de que ocurra al menos uno de los dos desastres?. ¿Qué pasa con la probabilidad de que ambos se produzcan?.

6. Tres eventos E, F y G pueden no ocurrir simultáneamente. Además se sabe que $P(E \cap F) = P(F \cap G) = P(E \cap G) = 1/3$. Puedes determinar $P(E)$.

7. Muestra que $P(A|C) + P(A^c|C) = 1$.

8. Considera un recipiente de un reactor contínuamente agitado en donde una reacción química tiene lugar. En un lado el gas fluye y se mezcla con el gas que está presente en el recipiente, y eventualmente fluye hacia fuera por el otro lado del recipiento. Una de las características de cada reacción particular es la llamada `distribución de tiempo de residencia`, lo que nos dice cómo las partículas permanecen dentro del recipiente antes de continuar. Consideramos un reactor agitado continuamente: los contenidos del recipiente se mezclaron perfectamente en todo momento. Sea R_t el evento 'la partícula tiene un tiempo de residencia mayor que t segundos' con una probabilidad de e^{-t}. Calcula $P(R_3|R_4^c)$.

9. En un grupo de n personas elegidas arbitrariamente, cuál es la probabilidad de que no haya coincidencia de cumpleaños?. Calcula también la probabilidad de que tres personas elegidas de forma arbitraria hayan nacido en diferentes meses. Puedes dar una fórmula para n personas?.

10. En un determinado país, la probabilidad es 49/50 de que un avión de combate seleccionado al azar regrese de una misión sin percances. Jessica argumenta que esto significa que hay una misión con un percance en cada 50 vuelos consecutivos. Ella concluye que si un piloto de caza regresa con seguridad de 49 misiones consecutivas, debe regresar a casa antes de su quincuagésima misión. ¿Está en lo correcto Jessica? Explica por qué si o por qué no. Utiliza propiedades de la teoria de las probabilidades.

11. Sean A, B y C tres eventos. Muestra que:

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$$

si y sólo si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = 0$

12. A principios de 2001, la Comisión Europea introdujo pruebas masivas al ganado para determinar la infección *Bovine Spongiform Encephalopathy* (BSE) o 'mal de las vacas locas'. Como ninguna prueba es fiable al 100%, la mayoría de las pruebas tienen el problema de falsos positivos y falsos negativos.

Un *falso positivo* significa que de acuerdo con la prueba de la vaca está infectada, pero en realidad no lo está, por otro lado un *falso negativo* significa una vaca está infectada pero no es detectado por la prueba.

Imaginemos que hacemos una prueba a una vaca. Sea B el evento 'la vaca tiene BSE' y T denota el evento 'la prueba surge positiva' (según la prueba debemos creer que la vaca está infectada con BSE). Uno puede 'probar la prueba' mediante el análisis de muestras de vacas que se sabe que están infectados o sanas y así determinar la efectividad de la prueba. La Comisión Europea había hecho esto durante cuatro pruebas en 1999 y para varios más tarde. Los resultados para lo que el informe llama la `Prueba A` se puede resumir de la siguiente manera: una vaca infectada tiene una probabilidad del 70% de dar positivo, y una vaca sana sólo el 10%; en fórmulas:

$$P(T|B) = 0.70$$
$$P(T|B^c) = 0.10$$

Supongamos que queremos determinar la probabilidad $P(T)$ de que una para unavaca arbitraria la prueba de positivo. La vaca que ha hecho la prueba está infectada o no lo está: T se produce en combinación con B o con B^c (no hay otras posibilidades). En términos de eventos

$$T = (T \cap B) \cup (T \cap B^c),$$

así que:

$$P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap B^c),$$

ya que $T \cap B$ y $T \cap B^c$ son disjuntos. Aplicamos la siguiente fórmula llamada, algunas veces `regla de la multiplicación`

$$P(T \cap B) = P(T|B) \cdot P(B) \tag{1}$$
$$P(T \cap B^c) = P(T|B^c) \cdot P(B^c) \tag{2}$$

Así, que tenemos $P(T) = P(T|B) \cdot P(B) + P(T|B^c) \cdot P(B^c)$.

Esta es una aplicación de la Ley de la Probabilidad Total: calcula la probabilidad a través del condicionamiento de varios eventos disjuntos que componen todo el espacio muestral (en este caso dos). Sea $P(B) = 0.02$, calcula el valor de $P(T)$. Si $P(T|B) = 0.99$ y $P(T|B^c) = 0.05$, hallar $P(T)$.

13. Otra, quizá más pertinente pregunta sobre la prueba BSE es la siguiente: supongamos que una vaca da positivo en la prueba, ¿cuál es la probabilidad de que realmente tiene BSE?.

14. Calcula $P(B|T)$ y $P(B|T^c)$ si $P(T|B) = 0.99$ y $P(T|B^c) = 0.05$.

15. Un dado justo se lanza dos veces. A es el evento 'suma de los lanzamientos es igual a 4' y B denota al evento, 'al menos uno de los lanzamientos es un 3'.

- Calcula $P(A|B)$.
- A y B son eventos independientes?.

16. Se establece que al menos uno de los eventos $A_r, 1 \leq r \leq n$, es seguro que ocurra, pero ciertamente no más de dos ocurren. Si $\mathbb{P}(A_r) = p$ y $\mathbb{P}(A_r \cap A_s) = q, r \neq s$, muestra que $p \geq 1/n$ y $q \leq 2/n$.

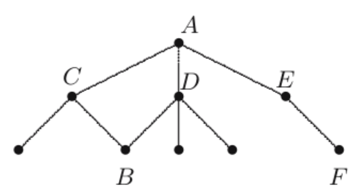
17. Se establece que al menos uno, pero no más que tres, de los eventos $A_r, 1 \leq r \leq n$ ocurre, donde $n \geq 3$. La probabilidad de que al menos dos ocurran es $\frac{1}{2}$. Si $\mathbb{P}(A_r) = p, \mathbb{P}(A_r \cap A_s) = q, r \neq s$ y $\mathbb{P}(A_r \cap A_s \cap A_t) = x, r < s < t$, mostrar que $p \geq 3/(2n)$ y $q \leq 4/n$.

18. Prueba que $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)/\mathbb{P}(B)$, siempre que $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \neq 0$. Muestra que, si $\mathbb{P}(A|B) > \mathbb{P}(A)$, entonces $\mathbb{P}(B|A) > \mathbb{P}(B)$.

19. Extraemos dos cartas de una baraja de 52. Let S_1 el evento 'el primero es una espada', y S_2 'el segundo es una espada'.

    - Calcula $P(S_1), P(S_2|S_1)$ y $P(S_2|S_1^c)$.
    - Calcula $P(S_2)$ por el condicionamiento de que si la primera carta es una espada.

20. Su profesor quiere caminar desde A a B (véase el mapa). Para ello, selecciona primero al azar una de las rutas de acceso a C, D o E. A continuación selecciona al azar uno de los caminos posibles en ese momento (por lo que si se selecciona por primera vez el camino a E, se puede seleccionar la ruta de acceso a A o la ruta de acceso a F), etc.

    ¿Cuál es la probabilidad de que llegará a B después de dos selecciones?.

21. Calcula

    - $P(A \cup B)$ si es dado que $P(A) = 1/3$ y $P(B|A^c) = 1/4$.
    - $P(B)$ si es dado que $P(A \cup B) = 2/3$ y $P(A^c|B^c) = 1/2$.

22. La nave espacial del astronauta Spiff tiene una luz de advertencia que se supone que encienda cuando se sobrecalienta los desintegradores. Sea el evento W 'la luz de advertencia está encendida' y F 'los desintegradores están sobrecalentados'. Supongase que la probabilidad de los desintegradores sobrecalentados es $P(F) = 0.1$ y que la luz se enciende cuando ellos se recalienta es 0.99 y que hay un 2% de probabilidad de que se enciende cuando no hay nada malo:$P(W|F^c) = 0.02$.

    - Determina la probabilidad de que la luz de advertencia se encienda.
    - Determina la probabilidad condicional de que los desintegradores estén recalentado, dado que la luz de advertencia está encendida.