Lista de ejercicios

1. Considera la función densidad de gamma con parámetros α y λ,

$$\frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

donde $\Gamma(\alpha)$ es de la forma $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{\alpha-1}dx$. Prueba:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$
- $\Gamma(k) = (k-1)!$ si k es entero.
- $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

2. Sea $\phi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}, z \in \mathbb{R}$. Se puede usar las coordenadas polares para mostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \phi(z)dz = 1$, realizando los siguientes pasos:

   (a) Muestra que es suficiente probar $\displaystyle\int_0^\infty e^{-z^2/2}dz = \sqrt{\pi/2}$,

   (b) Verifica que $\left[\displaystyle\int_0^\infty e^{-z^2/2}dz\right]^2 = \displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2/2}du \int_0^\infty e^{-v^2/2}dv$. Así muestra que $\displaystyle\int_{t=0}^\infty \int_{s=0}^\infty e^{-(u^2+v^2)/2}dudv = \frac{1}{2}\pi$,

   (c) En la doble integral encontrada en el ítem anterior, usa las sustituciones $u = r\cos(\theta), v = r\sin(\theta), 0 < r < \infty$ y $0 < \theta < 2\pi$. Entonces reescribe $\displaystyle\int_{t=0}^\infty \int_{s=0}^\infty e^{-(u^2+v^2)/2}dudv = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left[\int_{r=0}^\infty e^{-r^2/2}rdr\right]d\theta$,

   (d) Evalua para mostrar que $\displaystyle\int_{r=0}^\infty e^{-r^2/2}rdr = 1$,

   (e) ¿ La parte (c) implica a la parte (b)?.

3. En el campo de la ciencia actuarial, la estrategia del reaseguro proporcional ha sido ampliamente estudiada. En virtud del reaseguro proporcional, una compañía de seguros (llamada 'aseguradora') se asocia con una compañía de reaseguros (llamada 'reaseguradora'). El reasegurador se compromete a pagar el excedente de cualquier reclamo sobre un monto acordado A.

   Más específicamente, supongamos que la variable aleatoria X denota la cantidad (en dólares) de un reclamo y que además X tiene una distribución $f_X(x), 0 < x < \infty$. Entonces, $U = \min(X, A)$ es la cantidad pagada por la aseguradora y $V = \max(0, X - A)$ es la cantidad pagada por el reasegurador.

   (a) Muestra que

$$\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(X) = \int_0^\infty yf_X(y+A)dy,$$

de modo que la cantidad esperada pagada por reclamo del asegurador se reduzca bajo una estrategia de reaseguro proporcional.

(b) Si

$$f_X(x) = \frac{1}{\alpha}e^{-x/\alpha}, \qquad 0 < x < \infty,\ 0 < \alpha < \infty,$$

encuentra el valor de A, A^* que será una función de α, de modo que el monto promedio de la reclamación pagado por la aseguradora se reduzca exactamente en un 20% utilizando una estrategia de reaseguro proporcional.

4. La variable aleatoria X es llamada `doble exponencial distribuida` si su función densidad es dada por:

$$f(x) = ce^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty$$

(a) Encuentra el valor de c.

(b) Prueba que $\mathbb{E}(X^{2n}) = (2n)!$ y $\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0$.

5. Sea X una variable aleatoria positiva con función densidad f y función distribución F. Definimos la función de Hazard $H(x) = -\log[1 - F(x)$ y la razón de Hazard como:

$$r(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h}\mathbb{P}(X \leq x + h | X > x), \ \ x \geq 0.$$

Muestra que:

(a) $r(x) = H^{'}(x) = f(x)/[1 - F(x)]$.

(b) Si $r(x)$ aumenta con x, entonces $H(x)/x$ aumenta con x.

(c) $H(x)/x$ aumenta con x si y sólo si $[1 - F(x)]^\alpha \leq 1 - F(\alpha x)$ para todo $0 \leq \alpha \leq 1$,

(d) Si $H(x)/x$ aumenta con x, entonces $H(x + y) \geq H(x) + H(y)$, para todo $x, y \geq 0$.

6. Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \ \ -\infty < x < \infty.$$

Calcula $\mathrm{Var}(X)$.

7. Una variable aleatoria X con función densidad:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \ \ -\infty < x < \infty,$$

es llamada una variable aleatoria de Cauchy.

(a) Encuentra el valor de c.

(b) Muestra que el valor de $\mathbb{E}(X)$ no existe.

8. Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Prueba que $\mathbb{E}(|X|^\alpha)$ converge si $0 < \alpha < 1$ y diverge si $\alpha \geq 1$.