Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2018 - II

Soluciones del Examen Parcial de Cálculo de Probabilidades CM- 1H2

Respuesta 1

a) $\Omega = \{QR, GR, L, GL\}$.

b) Se tiene que $\mathbb{P}(QL) = 1 - \mathbb{P}(QR) - \mathbb{P}(GR) - \mathbb{P}(GL) = 0{,}1$. Luego, $\mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(QL) + \mathbb{P}(GL) = 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}3$.

c) $\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(GR) + \mathbb{P}(GL) = 0{,}2 + 0{,}2 = 0{,}4$.

d) $\mathbb{P}(L \cup G) = \mathbb{P}(L) + \mathbb{P}(G) - \mathbb{P}(LG) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}5$.

Respuesta 2

Let X be the largest number selected. Clearly,

$$\mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(X \leq i) - \mathbb{P}(X \leq i-1) = \left(\frac{i}{N}\right)^n - \left(\frac{i-1}{N}\right)^n, \quad i = 1, 2, \ldots, N\cdot$$

Así,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{i^{n+1}}{N^n} - \frac{i(i-1)^n}{N^n}\right] = \frac{1}{N^n}\sum_{i=1}^{N}[i^{n+1} - i(i-1)^n] \\ &= \frac{1}{N^n}\sum_{i=1}^{N}[i^{n+1} - (i-1)^{n+1} - (i-1)^n] = \frac{N^{n+1} - \sum_{i=1}^{N}(i-1)^n}{N^n}\cdot\end{aligned}$$

Para un valor grande de N,

$$\sum_{i=1}^{N}(i-1)^n \approx \int_0^N x^n dx = \frac{N^{n+1}}{n+1}\cdot$$

Por tanto,

$$\mathbb{E}(X) \approx \frac{N^{n+1} - \frac{N^{n+1}}{n+1}}{N^n} = \frac{nN}{n+1}\cdot$$

Respuesta 3

Sea A el evento en el que al menos $(n-1)$ de las monedas de las n monedas muestren todas las caras o todo sellos y sea B el evento de que todas las n monedas muestren todas caras o todas sellos. Entonces, se pide encontrar el valor numérico de,

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}\cdot$$

Ahora,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot$$

Además, el evento A ocurrirá si se obtienen exactamente $(n-1)$ caras, o si se obtienen exactamente $(n-1)$ sellos, o si se obtienen exactamente n caras, o si se obtienen exactamente n sellos, de modo que

$$\mathbb{P}(A) = n\left(\frac{1}{2}\right)^n + n\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = (1+n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot$$

Así,

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{(1/2)^{n-1}}{(1+n)(1/2)^{n-1}} = \frac{1}{n+1}, \quad n = 3, 4, \ldots, \infty\cdot$$

Respuesta 4

a) El valor esperado de X es

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{x=0}^{4} x\mathbb{P}_X(x) \\
&= 0C_0^4\frac{1}{2^4} + 1C_1^4\frac{1}{2^4} + 2C_2^4\frac{1}{2^4} + 3C_3^4\frac{1}{2^4} + 4C_4^4\frac{1}{2^4} \\
&= [4+12+12+4]\frac{1}{2^4} \\
&= 2,
\end{aligned}$$

El valor esperado de X^2 es,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) &= \sum_{x=0}^{4} x^2\mathbb{P}_X(x) \\
&= 0^2C_0^4\frac{1}{2^4} + 1^2C_1^4\frac{1}{2^4} + 2^2C_2^4\frac{1}{2^4} + 3^2C_3^4\frac{1}{2^4} + 4^2C_4^4\frac{1}{2^4} \\
&= [4+24+36+16]\frac{1}{2^4} \\
&= 5,
\end{aligned}$$

La varianza de X es

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X^2) = 5 - 2^2 = 1\cdot$$

Luego, la desviación estándar de X es $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = 1$.

b) La probabilidad de que X esté dentro de una desviación estándar de su valor esperado es

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mu_X - \sigma_X \leq X \leq \mu_X + \sigma_X) &= \mathbb{P}(2-1 \leq X \leq 2+1) \\
&= \mathbb{P}(1 \leq X \leq 3)\cdot
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = \mathbb{P}_X(1) + \mathbb{P}_X(2) + \mathbb{P}_X(3) = \frac{7}{8}\cdot$$