Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2018 - II

Soluciones de la Práctica calificada de Cálculo de Probabilidades CM- 1H2

Respuesta 1

a) $\mathbb{P}(\text{(los cuatro trabajadores elegidos al azar son miembros del mismo grupo)}) =$
$\mathbb{P}(\text{los cuatro trabajadores en el Grupo H}) + \mathbb{P}(\text{los cuatro trabajadores en el Grupo I})$
$+ \mathbb{P}(\text{los cuatro trabajadores en el Grupo L}) + \mathbb{P}(\text{los cuatro trabajadores en el Grupo U})$
$= (0{,}05)^4 + (0{,}15)^4 + (0{,}20)^4 + (0{,}60)^4 = 0{,}132\cdot$

b) Sea A el evento que 'dos de los cuatro trabajadores son miembros del Grupo H', y que B sea el evento de que 'los cuatro trabajadores están expuestos a niveles distintos de cero del potencial carcinógeno'. Entonces,

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{C_2^4(0{,}05)^2(0{,}35)^2}{(0{,}40)^4} = 0{,}0718\cdot$$

c) Sea B el caso de que un trabajador sea miembro del Grupo H o del Grupo I. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|C) &= \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}[(H \cup I) \cap C]}{\mathbb{P}(C)} = \frac{\mathbb{P}(H \cap C) + \mathbb{P}(I \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(C|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(C|I)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(C)} = \frac{(0{,}002)(0{,}05) + (0{,}001)(0{,}15)}{\mathbb{P}(C)} \\ &= \frac{0{,}000250}{\mathbb{P}(C)}\cdot\end{aligned}$$

Desde que $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(C|I)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(C|L)\mathbb{P}(L) + \mathbb{P}(C|U)\mathbb{P}(U) = (0{,}002)(0{,}05) + (0{,}001)(0{,}15) + (0{,}0001)(0{,}20) + (0{,}00001)(0{,}60) = 0{,}000276\cdot$ Luego se sigue que $\mathbb{P}(B|C) = 0{,}000250/0{,}000276 = 0{,}906$.

Respuesta 2

a) Sean los eventos: 'E_i': ocurre éxito en la prueba i y "E_j^c": no ocurre éxito en la prueba j; para todo $i, j = 1, 2, \cdots, n$.

- Sea A el evento 'ocurre al menos un éxito en las n pruebas', entonces $A = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ y

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i^c\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i^c) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1-p) \\ &= 1 - (1-p)^n\cdot\end{aligned}$$

- Se tiene que $\mathbb{P}(A) = 1 - (1-p)^n = 0{,}9999$, entonces $n = 2$. Por otro lado, la probabilidad de que el primer éxito se de en la k-ésima prueba $(k \geq 1)$ es $\mathbb{P}(\text{1er éxito en prueba k}) = (1-p)^{k-1}p$.
- Si B es el evento 'ocurre k éxitos en n pruebas', entonces, B consiste de C_k^n eventos que contienen cada uno, k éxitos (E) y $n-k$ no éxitos (E^c), luego, $\mathbb{P}(B) = C_k^n p^k (1-p)^{n-k}$.

- Sea D el evento 'ocurren k éxitos en n pruebas, de manera que el k-ésimo éxito se la n-ésima prueba". El último es un éxito y aplicando el resultado anterior, $\mathbb{P}(D) = C_{k-1}^{n-1} p^k (1-p)^{n-k}$.

Respuesta 3

Define los siguientes eventos: W, 'la bola blanca se coloca en la Urna 2' y B como 'la bola negra se pone en la urna 2'. Entonces,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=1) &= \mathbb{P}(Y=1|W)\mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(Y=1|B)\mathbb{P}(B) \\
&= \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = 5/12; \\
\mathbb{P}(Y=2) &= \mathbb{P}(Y=2|W)\mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(Y=2|B)\mathbb{P}(B) \\
&= \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = 11/36; \\
\mathbb{P}(Y=3) &= \mathbb{P}(Y=3|W)\mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(Y=3|B)\mathbb{P}(B) \\
&= \left(\frac{2}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = 7/36; \\
\mathbb{P}(Y=4) &= \mathbb{P}(Y=4|W)\mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(Y=4|B)\mathbb{P}(B) \\
&= (0)\left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(1)\left(\frac{1}{3}\right) = 1/12 \\
&= 1 - \mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}(Y=2) - \mathbb{P}(Y=3)\cdot
\end{aligned}
$$

Así la distribución de probabilidad de Y es:

$$
p_Y(y) = \frac{(19-4y)}{(36)} = \frac{19}{36} - \frac{y}{9}, \quad y = 1,2,3,4\cdot
$$

Así,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Y) &= \sum_{y=1}^{4} y\left[\frac{19}{36} - \frac{y}{9}\right] = \frac{19}{36}\sum_{y=1}^{4} y - \frac{1}{9}\sum_{y=1}^{4} y^2 \\
&= \frac{19}{36}\left[\frac{4(5)}{2}\right] - \frac{1}{9}\left[\frac{4(5)(9)}{6}\right] = 1{,}944\cdot
\end{aligned}
$$

Respuesta 4

The set of possible values of X is $\{2,3,4,\dots\}$. For $n \geq 2, X = n$ if and only if either all of the first $n-1$ bits generated are 0 and the nth bit generated is 1, or all of the first $n-1$ bits generated are 1 and the nth bit generated is 0. Therefore, by independence,

$$
\mathbb{P}(X=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}, \quad n \geq 2\cdot
$$

Respuesta 5

a) Para encontrar c utilizaremos el siguiente resultado:

$$
\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z\cdot
$$

Luego,

$$
\sum_{x=0}^{\infty} \frac{c3^x}{x!} = c\left(\sum_{x=0}^{\infty}\frac{3^x}{x!}\right) = ce^3 = 1 \Rightarrow c = e^{-3}\cdot
$$

b) Se tiene que $f(x) = \frac{e^{-3}3^x}{x!}$ para $x = 0, 1, 2, \cdots$ · La función de distribución acumulada de la variable aleatoria es,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{si } -\infty < x < 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{x} \frac{3^k e^{-3}}{k!} & , \quad \text{si } t \leq x < t+1 \cdot \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 3) &= 1 - \mathbb{P}(0 \leq X \leq 2) \\ &= 1 - (f(0) + f(1) + f(2)) \\ &= 1 - (e^{-3} + 3e^{-3} + 4{,}5e^{-3}) \\ &= 0{,}57681 \cdot \end{aligned}$$