Curso: Cálculo de probabilidades CM-1H2
Distribuciones continuas

# Lista de ejercicios

---

1. El radio de una esfera es un número aleatorio entre 2 y 4. ¿ Cuál es el valor esperado de su volumen?. ¿ Cuál es la probabilidad de que su volumen sea a lo más $36\pi$?.
2. Un agricultor que tiene dos piezas de madera de longitud $a$ y $b$ ($a < b$) decide construir un gallinero en forma de triángulo para sus pollos. El envía a uno de sus hijos a cortar el pedazo más largo y el muchacho, sin tomar ningún criterio, hace un corte en la madera de longitud $b$, en un punto seleccionado al azar. ¿ Cuáles son las posibilidades de que las dos piezas resultantes y la pieza de longitud $a$ se puedan utilizar para formar un gallinero triangular?.
3. Sea $\theta$ un número aleatorio entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Encuentra la función densidad de probabilidad de $X = \tan\theta$.
4. Sea $X$ un número aleatorio de $(0,1)$. Encuentra la función densidad de (a) $Y = -\ln(1-X)$ y (b)$Z = X^n$.
5. Sea $X$ una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 1+\theta)$, donde $0 < \theta < 1$ es un parámetro dado. Encuentra una función de $X$, $g(X)$, tal que $\mathbb{E}[g(X)] = \theta^2$.
6. Sea $X$ una variable aleatoria continua con función de distribución $F$. Prueba que $F(X)$ está distribuida uniformemente sobre $(0,1)$.
7. Sea $g$ una función de valor real no negativa en $\mathbb{R}$, que satisface la relación $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1$. Muestra que si, una variable aleatoria $X$, la variable aleatoria $Y = \int_{-\infty}^{X} g(t)dt$ es uniforme, entonces $g$ es la función densidad de $X$.
8. El espacio muestral de un experimento es $S = (0,1)$ y para cada subconjunto $A$ de $S$, $\mathbb{P}(A) = \int_A dx$. Sea $X$ la variable aleatoria definida en $S$ por $X(\omega) = 5\omega - 1$. Prueba que $X$ es una variable aleatoria uniforme sobre el intervalo $(-1,4)$.
9. Sea $Y$ un número aleatorio de $(0,1)$. Sea $X$ el segundo dígito de $\sqrt{Y}$. Prueba que para $n = 0, 1, \dots, 9$, $\mathbb{P}(X = n)$ crece cuando $n$ crece. Esto es notable porque muestra que $\mathbb{P}(X = n), n = 1, 2, 3, \dots$ , no es constante. Es decir, $Y$ es uniforme, pero $X$ no lo es.
10. Los clientes llegan a una oficina de correos a una tasa de Poisson de tres por minuto. ¿Cuál es la probabilidad de que el próximo cliente no llegue durante los próximos 3 minutos?.
11. Sea $X$ una variable aleatoria exponencial con media 1. Halle la función densidad de probabilidad de $Y = -\ln X$.
12. Los huéspedes llegan a un hotel, de acuerdo a un proceso de Poisson, a razón de cinco por hora. Supongamos que durante los últimos 10 minutos ningún huésped ha llegado. ¿Cuál es la probabilidad de que (a) el siguiente llegue en menos de 24 minutos; (b) desde la llegada del décimo a la llegada del undécimo huésped no toma más de 2 minutos?.
13. Sea $X$ una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda$. Encuentra:
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 2\sigma_X).$$
14. En una fábrica, una determinada máquina funciona durante un período que se distribuye exponencialmente con el parámetro $\lambda$. Luego se rompe y estará en el taller de reparaciones por un período, que también está distribuido exponencialmente con una media $1/\lambda$. Los tiempos de operación y

reparación son independientes. Para esta máquina, decimos que un cambio de `estado` se produce cada vez que se rompe, o cada vez que se fija. En un intervalo de tiempo de longitud $t$, encuentre la función de masa de probabilidad del número de veces que ocurre un cambio de estado.

15. En la comunicación de datos, los mensajes suelen ser combinaciones de caracteres y cada carácter consta de un número de bits. Un bit es la unidad más pequeña de información y son 1 o 0. Supongamos que $L$, la longitud de un carácter (en bits) es una variable aleatoria geométrica con parámetro $p$. Si un emisor emite mensajes a una velocidad de 1000 bits por segundo. ¿Cuál es la distribución de $T$, el tiempo que tarda el emisor en emitir un carácter?.

16. Sea $X$, la vida útil (en años) de un tubo de radio, exponencialmente distribuida con media $1/\lambda$. Prueba que $[X]$, la parte entera de $X$, que es el número completo de años que el tubo funciona, es una variable aleatoria geométrica.

17. Muestra que la función densidad gamma con parámetros $(r, \lambda)$ tiene un único máximo en $(r-1)/\lambda$.

18. Sea $X$ una variable aleatoria gamma $(r, \lambda)$ . Encuentra la función de distribución de $cX$, donde $c$ es una constante positiva.

19. Para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, calcula $\Gamma(n + 1/2)$.

20. Resuelve

    (a) Sea $Z$ una variable aleatoria normal estándar. Muestra que la variable aleatoria $Y = X^2$ es gamma y encuentra sus parámetros.

    (b) Sea $X$ una variable aleatoria normal con media $\mu$ y una desviación estándar $\sigma$. Encuentra la función de distribución de $W = \left(\dfrac{X-\mu}{\mu}\right)^2$.

21. Claudio ingresa a un banco que tiene $n$ cajeros. Todos los cajeros están ocupados atendiendo a los clientes y todos los cajeros atienden exactamente una cola, con un cliente por delante de Claudioesperando ser atendidos. Si el tiempo de servicio de un cliente es exponencial con parámetro $\lambda$, encuentra la distribución del tiempo de espera para Claudio en la cola.