Lista de ejercicios

---

1. Sea X una variable aleatoria no negativa con $\mathbb{E}(X) = 5$ y $\mathbb{E}(X^2) = 42$. Encuentra una cota superior para $P(X \geq 11)$ usando (a) la desigualdad de Markov, (b) la desigualdad de Chebyshev.

2. Supongamos que el promedio de accidentes en una intersección es de dos por día.

   (a) Usa la desigualdad de Markov para encontrar una cota para la probabilidad de que al menos cinco accidentes ocurran mañana.

   (b) Utilizando la variable aleatoria de Poisson, calcula la probabilidad de que al menos cinco accidentes ocurran mañana. Compara este valor con la cota obtenida en la parte (a).

   (c) Sea que la variación de la cantidad de accidentes sea de dos por día. Utiliza la desigualdad de Chebyshev para encontrar una cota en la probabilidad de que mañana ocurran al menos cinco accidentes.

3. El período de espera desde el momento en que se solicita un libro hasta que se recibe es una variable aleatoria con una media de siete días y una desviación estándar de dos días. Si Jessica quiere estar segura al 95% de que recibe un libro en una fecha determinada, ¿con cuánta anticipación debe ordenar el libro?.

4. Para determinar p, la proporción de tiempo que un operador de línea aérea está ocupado respondiendo a los clientes, un supervisor observa al operador en momentos seleccionados al azar e independientemente de otros tiempos observados. Sea $X_i = 1$ si la vez que se observa al operador, él está ocupado; sea $X_i = 0$ de lo contrario. Para valores grandes de n, si $(1/n)\sum_{i=1}^{n} X_i$ se toman como estimaciones de p, ¿para qué valores de n es el error de estimación a lo sumo 0.05 con probabilidad 0.96?.

5. Sea X una variable aleatoria, muestra que para un $\alpha > 1$ y $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{1}{t}\ln\alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha}M_X(t).$$

6. Supongamos que un `mono inmortal` está escribiendo constantemente en un procesador de textos que no es rompible, dura para siempre y tiene memoria infinita. Supongamos que el teclado del procesador de textos tiene $m-1$ teclas, una barra espaciadora para espacios en blanco y teclas separadas para símbolos diferentes. Si cada vez que el mono presiona uno de los m símbolos (incluida la barra espaciadora) al azar y si al final de cada línea y al final de cada página, el procesador de textos avanza a una nueva línea y una nueva página. ¿Cuál es la probabilidad de que el mono finalmente produzca las obras completas de Shakespeare en orden cronológico y sin errores?.

7. Supongamos que existen N familias en la tierra y que el número máximo de hijos que tiene una familia es c. Sea $\alpha_j, j = 0, 1, \ldots, c, \sum_{j=0}^{c} \alpha_j = 1$, la fracción de familias con j hijos. Determina la fracción de los niños en el mundo que son de una familia con $k(k = 1, 2, \ldots, c)$ niños.

8. Sea $\{X_1, X_2, \ldots\}$, una secuencia de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas. En otras palabras, para todo n, sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria desde una distribución con media $\mu < \infty$. Sea $S_n = X_1 + X_2 + \cdots X_n$, $\overline{X}_n = S_n/n$. Muestra el siguiente resultado:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(n(\mu - \epsilon) \leq S_n \leq n(\mu + \epsilon)\Big) = 1.$$

9. Sea $X_1, X_2, \ldots,$ es una variable aleatoria positiva independiente, idénticamente distribuida, de media 2. Sea $Y_1, Y_2, \ldots,$ es una variable aleatoria positiva independiente, idénticamente distribuida, de media 3. Muestra que:

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n} \to \frac{2}{3},$$

con probabilidad 1. ¿ Importa si los X_i son independientes del Y_j?.

10. La vida útil de un tubo de TV (en años) es una variable aleatoria exponencial con una media de 10. ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de vida promedio de una muestra aleatoria de 36 tubos de TV sea al menos 10.5?.

11. Si se seleccionan 20 números aleatorios independientemente del intervalo $(0, 1)$, ¿cuál es la probabilidad aproximada de que la suma de estos números sea al menos ocho?.

12. Supongamos que, cuando se invita a una fiesta, la probabilidad de que una persona asista con un invitado es $1/3$, si asiste solo $1/3$ y no asiste $1/3$. Una empresa ha invitado a 300 empleados y sus invitados a una fiesta de Navidad. ¿Cuál es la probabilidad de que asistan al menos 320?.

13. Para las puntuaciones en una prueba de rendimiento dada a una cierta población de estudiantes, el valor esperado es 500 y la desviación estándar es 100. Sea $\overline{X}$ la media de las puntuaciones de una muestra aleatoria de 35 estudiantes. Estima $\mathbb{P}(460 < \overline{X} < 540)$.

14. Un dado justo se tira 20 veces. ¿Cuál es la probabilidad aproximada de que la suma de los resultados esté entre 65 y 75?.

15. Demuestra que para una variable aleatoria no negativa X con media μ, tenemos que $\forall n, n\mathbb{P}(X \geq n\mu) \leq 1$.