Lista de ejercicios

1. Para las variables aleatorias X e Y con coeficiente de correlación $\rho(X,Y)$, prueba lo siguiente:
   (a) $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$.
   (b) Con probabilidad 1, $\rho(X,Y) = 1$ si y solo si $Y = aX + b$ para las constantes a, b con $a > 0$.
   (c) Con probabilidad 1, $\rho(X,Y) = -1$ si y solo si $Y = aX + b$ para las constantes a, b con $a < 0$.

2. Muestra que si X e Y son variables aleatorias continuas con una función de densidad de probabilidad conjunta,

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

   entonces X e Y no están relacionados linealmente.

3. Sea X un número aleatorio desde el intervalo $(0,1)$ y $Y = X^2$. La función densidad de probabilidad de X es,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

   Calcula el coeficiente de correlación $\rho(X,Y)$.

4. Un palo de longitud 1 se rompe en dos piezas en un punto aleatorio. Encuentra el coeficiente de correlación y la covarianza de estas piezas.

5. Prueba que si $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$, entonces

$$\rho(X+Y, X-Y) = \frac{\operatorname{Var}(X) - \operatorname{Var}(Y)}{\operatorname{Var}(X) + \operatorname{Var}(Y)}.$$

6. Muestra que si la función densidad de probabilidad conjunta de X e Y es,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{en otros casos,} \end{cases}$$

   entonces no existe una relación lineal entre X e Y.

7. En una ciudad hay n taxis. Una mujer toma uno de estos taxis todos los días al azar y con reemplazo. En promedio, ¿cuánto tiempo pasa antes de que ella pueda afirmar que ha estado en cada taxi en la ciudad?.

8. Se lanzan dos dados. La suma de los resultados se denota por X y el valor absoluto de su diferencia por Y. Calcula la covarianza de X e Y. ¿ X e Y no están correlacionados?, ¿Son independientes?.

9. ¿Cuál es el número esperado de dígitos aleatorios que se deben generar para obtener tres ceros consecutivos?.

10. En términos de las medias, las varianzas y la covarianza de las variables aleatorias X e Y, encuentre α y β para que $\mathbb{E}(Y - \alpha - \beta X)^2$ es mínimo. Este es el método de mínimos cuadrado, esto es, la 'mejor' línea $y = \alpha + \beta x$ a la distribución de Y.