Curso: Cálculo de probabilidades CM-1H2
Seminario 2

Lista de ejercicios

---

1. En una lotería, un jugador paga \$1 y selecciona cuatro números distintos de 0 a 9. Luego, de una urna que contiene 10 bolas idénticas numeradas de 0 a 9 se extraen cuatro bolas al azar y sin reemplazo. Si los números de tres o cuatro de estas bolas coinciden con los números del jugador, gana \$5 y \$10, respectivamente.

   De lo contrario, pierde. En promedio, ¿cuánto dinero gana el jugador por juego? (Ganancia = ganancia - pérdida.)

2. Un hombre borracho tiene n llaves, una de las cuales abre la puerta de su oficina. Intenta usar las llaves al azar, una por una, e independientemente. Calcula la media y la varianza de la cantidad de intentos necesarios para abrir la puerta si no se eliminan las llaves incorrectas (a), (b) se eliminan.

3. Se puede permitir un veredicto mayoritario de 10 a 2 o más en un juicio con jurado. Suponiendo que cada jurado tiene una probabilidad de 0.9 de llegar a un veredicto de culpabilidad y decide independientemente, ¿cuál es la probabilidad de que el jurado decida condenar?.

4. Supongamos que dentro de un juego de servicio dado en el tenis, los puntos sucesivos forman pruebas de Bernoulli con $p = \mathbb{P}(\text{(Servidor gana)} > 1/2)$. Las reglas del tenis dicen que el juego de servicio termina tan pronto como uno de los jugadores haya ganado al menos cuatro puntos y esté al menos dos puntos por delante del otro. Encuentra las posibilidades de que el servidor gane el juego $4-0$, $4-1$ y $4-2$. Encuentra también la posibilidad de que el juego alcance $3-3$ ('Deuce').

   Sea D la probabilidad de que el servidor gane el juego, si la puntuación ahora es Deuce. Demuestra que $D = p^2 + 2pqD$ y por lo tanto, deduzca que la probabilidad general de que el servidor gane el juego es $(p^4 - 16p^4q^4)/(p^4 - q^4)$.

5. Muestre que, como en la distribución binomial, las probabilidades sucesivas en una distribución de Poisson aumentan a un máximo, luego disminuyen hacia cero. ¿Bajo qué circunstancias hay una probabilidad máxima única?.

6. Modela el número de intentos que hace un carcelero para ubicar la llave en una celda, cuando tiene un manojo de K llaves y no tiene idea de cuál es la clave correcta. Dé las respuestas para los casos en que (a) repasa lógicamente las llaves, una a la vez, y (b) está ebrio y no tiene idea si ya probó alguna llave en particular.

7. Sean P_1 y P_2 dos distribuciones discretas sobre el mismo conjunto de resultados. Define $d(P_1, P_2) = \sup_A |P_1(A) - P_2(A)|$ como la distancia de variación total entre ellos, es decir, la mayor diferencia entre las probabilidades que P_1 y P_2 que se ajusta a un evento.
   Demuestra que $d(P_1, P_2) = \sum_{n\in\Sigma} |p_1(n) - p_2(n)|/2$.

   Encuentra la distancia de variación total entre la distribución de Binomial$(3, 1/3)$ y la Poisson(1).

8. La distribución logarítmica se ha utilizado en ecología para modelar con qué frecuencia aparece una especie en particular en un hábitat. Su PGF es de la forma $c\log(1-qz)$, donde c es una constante y $0 < q < 1$. Encuentra c en términos del parámetro q y escribe una expresión de la probabilidad de que una especie aparezca localizada k veces.

9. Supongamos que los autobuses llegan al azar, a una velocidad promedio λ, de modo que el tiempo de espera sigue una distribución exponencial. Demuestra que, condicional a que ya haya esperado un tiempo T, sin la llegada un bus, el tiempo restante que tiene que esperar es independiente de T.

10. Para cada función f, decide si hay o no alguna constante k que hace que f sea una función densidad. Cuando se encuentre tal k, encuentra su valor, evalúa la probabilidad de obtener un valor entre 1 y 2 y la función de distribución $F(x)$.

(a) $f(x) = kx$ en $0 < x < 2$.
(b) $f(x) = -k\sin(x)$ en $0 < x < \pi/2$.
(c) $f(x)k\cos(x)$ en $0 < x < 2$.
(d) $f(x) = k|x|$ en $-1 < x < 1$.

(En todos los casos $f(x) = 0$ fuera del rango indicado).

11. Supongamos que la proporción de vehículos comerciales entre los usuarios del Humber Bridge varía aleatoriamente de un día a otro, con una densidad $f(x) = cx(1-x)^2$ en $0 < x < 1$, donde c es una constante. Muestra que $c = 12$, encuentra la función de distribución y haga un bosquejo de las funciones densidad y distribución en $-1 < x < 2$.

    ¿En qué fracción de días es la proporción de vehículos comerciales entre 20% y 50%?.

12. Once caballos entran en una carrera. El Sr. C tarda exactamente 60 segundos en completar el curso. Cada uno de los otros diez caballos, independientemente, se toman más de 60 segundos con probabilidad p, o menos de 60 segundos con probabilidad $1-p$. Escribe un modelo para la posición del Sr. C en la carrera. Encuentra las posibilidades de que gane y de que se ubique (en los primeros tres). Encuentra el valor de p que hace que los once caballos tengan la misma probabilidad de ganar. Para este valor de p, encuentra la posibilidad del Sr. C. ¿Es una sorpresa que la última respuesta no sea $3/11$?.

13. Verifica que $f(x) = -\log(x)$ en $0 < x < 1$ es una función densidad, y realiza un boceto del resultado. Escribe $A = (1/4, 3/4)$ y $B = (0, 1/2)$. Usa tu gráfico de la función densidad para determinar cuál es más grande, $\mathbb{P}(A)$ o $\mathbb{P}(A|B)$. Calcula ambos valores; Comprueba que tu evaluación fue correcta.

14. Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad:

    $$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty.$$

    Prueba que $\mathbb{E}(|X|^\alpha)$ converge si $0 < \alpha < 1$ y diverge si $\alpha \geq 1$.

15. Es requerido estimar $J = \displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ donde $0 \leq g(x) \leq 1$ para todo x. Sean X y Y variables aleatorias independientes con función densidad común $f(x) = 1$ si $0 < x < 1$, $f(x) = 0$ en otros casos. Sea $U = I_{\{Y \leq g(X)\}}$, la función indicador del evento que $Y \leq g(X)$ y sea $V = g(X)$, $W(X) = \frac{1}{2}\{g(X) + g(1-X)\}$.

    Muestra que $\mathbb{E}(U) = \mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(W) = J$ y que $\text{Var}(W) \leq \text{Var}(V) \leq \text{Var}(U)$. Prueba que W es el estimador más eficiente de J.

16. El departamento de matemáticas de una universidad envía 8 a 12 profesores a la reunión anual de la Sociedad Matemática Latinoamericana, que dura cinco dias. El hotel en el que se celebra la conferencia ofrece una tarifa de un dolar por dia por persona, si las reservas se realizan 45 o más dias de antelación, pero cobra un cargo de cancelación de 2 dolares por persona. El departamento no está seguro de cuántos profesores irán.

    Sin embargo, de la experiencia pasada se sabe que la probabilidad de la asistencia de i profesores es $1/5$ para $i = 8, 9, 10, 11$ y 12. Si la tarifa regular del hotel es $2a$ dolares por dia por persona. ¿ Debería hacer el departamento alguna reserva?si es así, ¿ cuántos?.