Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

Ciclo 2018 - II

Soluciones de la Práctica calificada de Cálculo de Probabilidades CM- 1H2

Respuesta 1 Se tiene que:

$$\mathbb{P}(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{x!}p^x(1-p)^{n-x}.$$

Sustituyendo $p=\frac{\lambda}{n}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=x) &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-x+1)}{x!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^x\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}\\ \mathbb{P}(X=x) &= \frac{\lambda^x}{x!}\left[(1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x}-\cdot\end{aligned}$$

Por otro lado, fijando el valor de $\lambda=np$ (constante) y haciendo $n\to+\infty$, se tiene que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{i}{n}\right) &= 1, \quad \text{para todo } i=1,2,\cdots,(x-1)\\ \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n &= e^{-\lambda}\\ \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-x} &= 1\cdot\end{aligned}$$

Luego, $\lim\limits_{n\to\infty}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$.

Respuesta 2

a) Es falsa.
En general se verifica que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a<X\leq b) &= F(b)-F(a),\\ \mathbb{P}(a\leq X\leq b) &= F(b)-F(a)+\mathbb{P}(X=a),\\ \mathbb{P}(a<X<b) &= F(b)-F(a)+\mathbb{P}(X=b),\\ \mathbb{P}(a\leq X<b) &= F(b)-F(a)+\mathbb{P}(X=b)+\mathbb{P}(X=a)\cdot\end{aligned}$$

Si además X es variable aleatoria continua, se tiene que $\mathbb{P}(X=a)=0$ y por tanto, en ese caso:

$$\mathbb{P}(a<X\leq b)=\mathbb{P}(a<X<b)=\mathbb{P}(a\leq X\leq b)=\mathbb{P}(\leq X<b)\cdot$$

b) Es falsa.
En general se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a\leq X\leq b)+\mathbb{P}(b\leq X\leq c) &= F(b)-F(a)+\mathbb{P}(X=a)+F(c)-F(b)+\mathbb{P}(X=b),\\ &= F(c)-F(a)+\mathbb{P}(X=a)+P(X=b),\\ &= \mathbb{P}(a\leq X\leq c)+\mathbb{P}(X=b)\cdot\end{aligned}$$

Se observa que en el caso de que X sea una variable aleatoria continua, sí se verifica que

$$\mathbb{P}(a\leq X\leq c)=\mathbb{P}(a\leq X\leq b)+\mathbb{P}(b\leq X\leq c)\cdot$$

c) Es falsa.

Las condiciones sobre $f(x)$ en variables aleatorias continuas son $f(x) \geq 0$ y que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. se observa que $f(x)$ puede ser superior a 1 ya que $f(x)$ no es una probabilidad.

d) Es falsa.

Directamente se observa que la función de distribución $F(x)$ dada no cumple con las propiedades para ser función de distribución

- $F(+\infty) \neq 1$,
- $F(x)$ no es continua por derecha,
- $F(x)$ no es monotona no decreciente.

Por otro lado, para determinar $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ se tiene que

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt & x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}dt & 0 \leq x < 2 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}dt + \int_{2}^{x} 0dt & 2 \leq x \end{cases}$$

por lo que

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{4}x^2 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x. \end{cases}$$

Efectivamente, esta si cumple con todas las propiedades para ser una función de distribución.

Respuesta 3

- El el avión de cuatro motores es preferible a un avión de dos motores si y solo si

$$1 - \binom{4}{0} p^0(1-p)^4 - \binom{4}{1} p(1-p)^3 > 1 - \binom{2}{0} p^0(1-p)^2$$

Esta desigualdad da $p > 2/3$. Por lo tanto, un avión de cuatro motores es preferible si y solo si $p > 2/3$. Si $p = 2/3$, no hay diferencia.

- Un avión de cinco motores es preferible a un avión de tres motores si y solo si

$$1 - \binom{5}{5} p^5(1-p)^0 + \binom{5}{4} p^4(1-p) + \binom{5}{3} p^3(1-p)^2 > \binom{3}{2} p^2(1-p) + p^3.$$

Al simplificar esta desigualdad, obtenemos $3(p-1)^2(2p-1) \geq 0$, lo que implica que es preferible un plano de cinco motores si y solo si $2p - 1 \geq 0$.

Es decir, para $p > 1/2$, es preferible un avión de cinco motores; para $p < 1/2$, es preferible un avión de tres motores; para $p = 1/2$ no hace ninguna diferencia.

Respuesta 4

Dado que las pasas se mezclan en la masa, la probabilidad de que una galleta determinada contenga alguna pasa es $p = 1/k$. Si para las pasas el evento de terminar en una galleta dada es considerado un éxito, entonces X, el número de pasas en la galleta dada, es una variable aleatoria binomial.

Para valores grandes de k, $p = 1/k$ es pequeño. Si n también es grande pero n/k tiene un valor moderado, es razonable suponer que X es aproximadamente Poisson. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!},$$

donde $\lambda = np = n/k$. Por tanto la probabilidad que una galleta dada contenga al menos una pasa es,

$$\mathbb{P}(X \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - e^{-n/k}.$$

Para problemas del mundo real, es importante saber que en la mayoría de los casos, los ejemplos numéricos muestran que, incluso para valores pequeños de n, las propiedades entre las probabilidades binomiales y las de Poisson son sorprendentemente buenas.

Respuesta 5

a) Sea G y g la función de distribución y densidad de X^2, respectivamente. Para $t \geq 0$,

$$G(t) = \mathbb{P}(X^2 \leq t) = \mathbb{P}(-\sqrt{t} < X < \sqrt{t}) = F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t})\cdot$$

Así

$$g(t) = G^{'}(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} f(\sqrt{t}) + \frac{1}{2\sqrt{t}} f(-\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}} [f(\sqrt{t}) + f(-\sqrt{t})],\ t \geq 0\cdot$$

Para $t < 0, g(t) = 0$.