Cálculo de Integrales mediante Números Aleatorios

1st Roberto Alexis Cerna Espiritu
EP de Ciencia de la Computación
Universidad Nacional de Ingeniería
Lima, Perú

2nd Piero Alexis Violeta Estrella
EP de Ciencia de la Computación
Universidad Nacional de Ingeniería
Lima, Perú

3rd Luis Gustavo Ticona Quispe
EP de Matemática
Universidad Nacional de Ingeniería
Lima, Perú

4th James Jeanpierre Ventura Eugenio
EP de Matemática
Universidad Nacional de Ingeniería
Lima,Perú

I. Objetivos

Estimar valores mediante el método de Montecarlo que represente la solución de integrales definidas.

II. Resumen

La integración por Montecarlo de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es un método de integración numérica el cual facilita evaluar integrales incluso funciones sin primitiva elemental,es útil debido a su simplicidad y que actualmente contamos con procesadores capaces de realizar esos cálculos de manera sencilla.
Consiste en utilizar n puntos aleatorios para los valores de x y sumar las funciones evaluadas en dichos puntos, finalmente la suma se multiplica por $\frac{b-a}{n}$ y el valor resultante será la estimación del valor de la integral.

III. Introducción

En la matemática existen técnicas para resolver integrales definidas, sin embargo algunas funciones poseen una antiderivada compleja o una no elemental, por ello necesitamos otros métodos para resolver este tipo de integrales.
La integración numérica es una forma de resolver este problema mediante métodos como el de Simpson, Trapecios o Montecarlo,en este trabajo utilizaremos el Método de Montecarlo aplicado a la cálculo de integrales. Los Métodos de Montecarlo son técnicas para analizar fenómenos por medio de algoritmos computacionales, que utilizan y dependen fundamentalmente de la generación de números aleatorios.
El estudio de los Métodos de Montecarlo requiere un conocimiento detallado en una amplia gama de campos; por ejemplo, la probabilidad para describir los experimentos y procesos aleatorios, la estadística para analizar los datos, la ciencia de la computación para implementar eficientemente los algoritmos y la programación.

IV. Marco teórico

Se mencionara algunos conceptos importantes para entender porque funciona este método.
Variable aleatoria: Dado un experimento aleatorio con espacio muestral S, la variable aleatoria es una funcion X que asigna un solo numero real $X(s) = x$ a cada elemento $s \in S$
Función de densidad de probabilidad:
Dado una variable aleatoria continua se le asocia una función $f(x)$que cumple

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Esperanza:
Se define como:

$$E[g(x)] = \int_x g(x)f(x)dx$$

Distribución Uniforme Decimos que la variable aleatoria X tiene Distribución Uniforme
$(X - U(a,b))$ si su función de densidad de probabilidad es

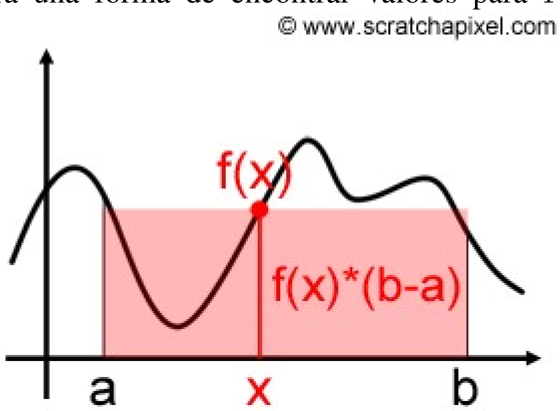
$$f(x) = (\frac{1}{b-a}), a < x < b$$

Integración de Montecarlo:

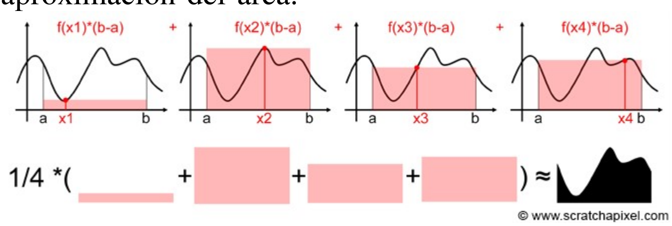
Primero definiremos una función:

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx$$

$F(x)$ representa el valor de la integral de $f(x)$ en el intervalo$[a,b]$,por lo tanto se mostrará una forma de encontrar valores para $F(x)$



Si se escoge un valor de x en el intervalo [a,b] ,se evalúa en f y multiplica por b-a,se obtendrá el área del rectángulo de base b-a y altura f(x) la cual es una intento de aproximación de F(x)
Si se realiza este proceso 4 veces en distintos puntos y se divide por 4 tendremos una mejor aproximación del área.



Formalizando esta idea:

$$< F(x)^N >= \frac{(b-a)\sum_{i=1}^{N} f(x_i)}{N}$$

$< \quad F(x)^N \quad >$:Notación que representa la aproximación de F utilizando N intentos
n:Es el número de intentos.

Para Xi se define como : $X_i = a + e(b-a)$ donde e es una variable aleatoria con distribución uniforme$(0,1)$. De esto se concluye que X_i es una v.a con distribución uniforme(a,b), por lo tanto la función de densidad de probabilidad de X_i es $pdf(xi) = 1/(b-a)$ De esta forma se tendrá números aleatorios en $[a,b]$

Calculando la esperanza de $< F(x)^N >$:

$$E[< F(x)^N >] = E[\frac{(b-a)\sum_{i=1}^{N} f(x_i)}{N}]$$
$$= \frac{(b-a)E[f(x)]}{N}$$
$$= \frac{(b-a)}{N}\sum_{i=1}^{N}\int_a^b f(x)pdf(x)dx$$
$$= \int_a^b f(x)dx = F(x)$$

V. Estado Del Arte

El método fue llamado así por el principado de Mónaco por ser “la capital del juego de azar”, al tomar una ruleta como un generador simple de números aleatorios. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Monte Carlo data aproximadamente de 1944 con el desarrollo de la computadora electrónica. Sin embargo hay varias instancias (aisladas y no desarrolladas) en muchas ocasiones anteriores a 1944.
El uso real de los métodos de Monte Carlo como una herramienta de investigación, viene del trabajo de la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial.
Este trabajo involucraba la simulación directa de problemas probabilísticos de hidrodinámica concernientes a la difusión de neutrones aleatorios en material de fusión.
Aún en la primera etapa de estas investigaciones, John von Neumann y Stanislao Ulam refinaron esta curiosa “Ruleta rusa” y los métodos“de división”.
Sin embargo, el desarrollo sistemático de estas ideas tuvo que esperar el trabajo de Harris y Herman Kahn en 1948.
Aproximadamente en el mismo año, Fermi, Metropolos y Ulam obtuvieron estimadores para

los valores característicos de la ecuación de Schrödinger para la captura de neutrones a nivel nuclear.
Aquí presentamos algunos artículos científicos:

1)*M.Barrera,A.TREJOS CARPINTERO,and P,CARVAJAL OLAYA,"Integración montecarlo",Scientia et technica,vol.12,no.32,2006.*
En este documento se va a mostrar como los números aleatorios, además de ser la base fundamental de cualquier modelo de simulación, también permite, entre otras, hacer evaluaciones de integrales definidas, herramienta útil en las ciencias y en la ingeniería.

2)*M.V.López and S.I.Mariño,"Aplicación del método de Montecarlo para el cálculo de integrales definidas",in IV Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación, 2002.*
En este trabajo se presenta un software educativo, desarrollado en Mathematica, para el cálculo de integrales definidas mediante el Método de Simulación o de Montecarlo.

3)*V.M.Á.Burbano,E. Aldana, and M.A Valdivieso,"Conocimiento estadístico-probabilístico base para calcular integrales definidas por métodos aleatorios,"Revista Virtual Universidad Cátolica del Norte,vol.48,pp. 332-351,2016.* En este trabajo se presenta una forma alternativa para calcular integrales definidas por medio de métodos aleatorios.
En este caso, es necesario utilizar elementos del conocimiento estadístico-probabilístico para generar números pseudoaleatorios provenientes de una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo $(0, 1)$ los cuales como datos numéricos superarán ciertas pruebas estadísticas y serán considerados números aleatorios apropiados para realizar procesos de simulación.

VI. DISEÑO DEL EXPERIMENTO

1) El experimento para evaluar la integral usando números aleatorios, tendrá dos partes:
La parte gráfica, donde podremos observar el área bajo la curva usando puntos aleatorios de colores distintos(debajo y encima de la curva) y un rectángulo que los contiene. Además en esta parte se detallara el valor aproximado de la integral usando el proceso detallado más adelante. Este experimento seguira seguirá los siguientes pasos:

a Definimos nuestra función a integrar. Lo llamaremos $f(x)$.

b Definimos los límites de integración los cuales determinan la base del rectángulo. Los llamaremos a y b.

c Definimos el alto del rectángulo que contiene la función. Lo llamaremos alt_{rect}.

d Generamos N valores aleatorios para x que están contenidos en el intervalo $[a, b]$.

e Generamos N valores aleatorios para y que están contenidos en el intervalo $[0, alt_{rect}]$.

f Clasificamos a los puntos que están debajo de la funcion usando: $y \leq f(x)$, serán de color azul.

g Todos los puntos que no estén debajo entraran a la clasificación encima de la curva, serán de color rojo.

h Sea debajo = Numero de puntos debajo de la función.
El área debajo de la curva está dado por
$$\frac{debajo * (b - a) * alt_{rect}}{N}$$
ya que para N muy grande
$$\frac{\text{Area debajo de la curva}}{\text{Areatotal}} = \frac{Debajo}{N}$$

2)Realizaremos la parte 1 unas N veces(sin graficar) y las áreas obtenidas de cada uno de los N experimentos serán ubicados en un histograma para ver que sucede a medida que el N aumenta.

VII. Resultados

Hallaremos la integral definida de 3 funciones en un intervalo conveniente.
Cada una realizada con las dos partes listadas en el diseño del experimento:

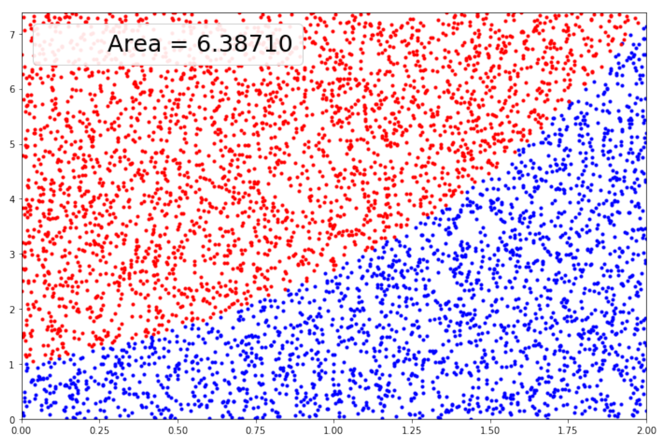
a Función 1:

$$f(x) = e^x$$

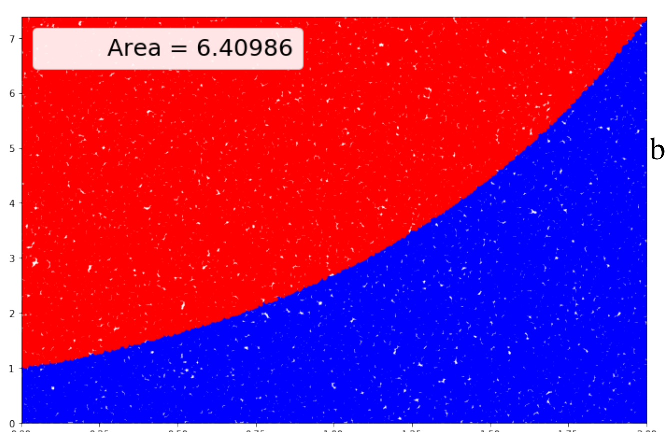
se hallara

$$\int_0^2 e^x dx$$

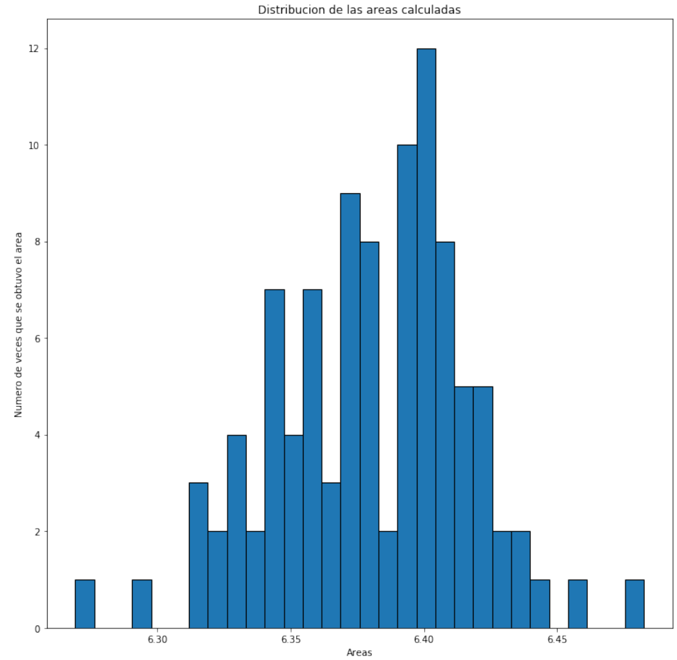
Con N=5000 puntos aleatorios



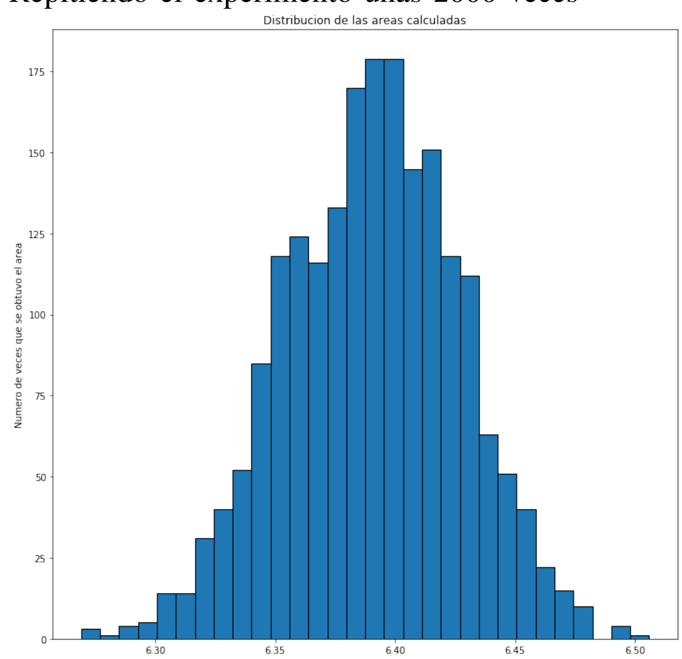
Con N=100000



Ahora realizaremos este ùltimo experimento lo repetiremos 100 veces y ubicamos las areas obtenidas en un histograma:



Repitiendo el experimento unas 2000 veces



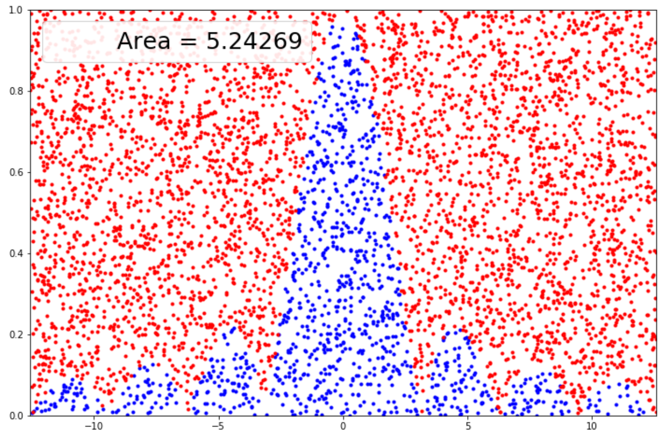
b Funcion 2: Integraremos una funcion que no posee antiderivada que se pueda expresar con funciones elementales:

$$f(x) = |\frac{\sin(x)}{x}|$$

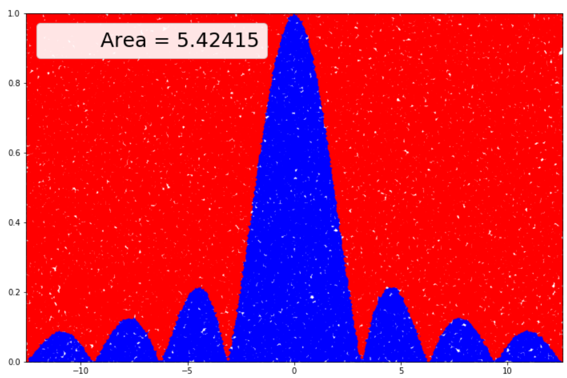
hallaremos

$$\int_{-4\pi}^{4\pi} |\frac{\sin(x)}{x}| dx$$

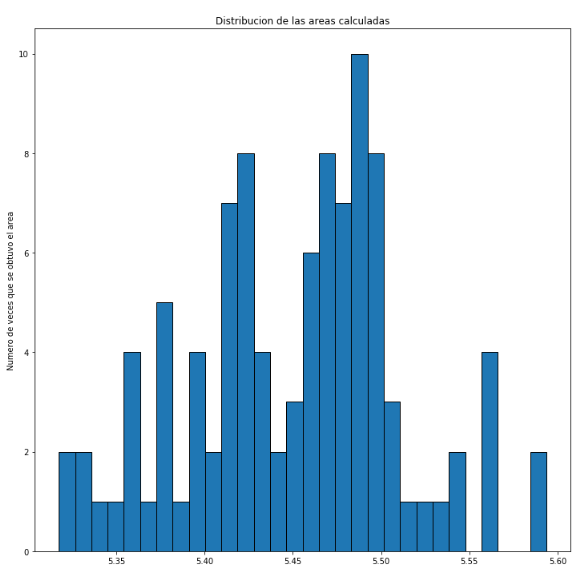
Con N=5000 puntos aleatorios



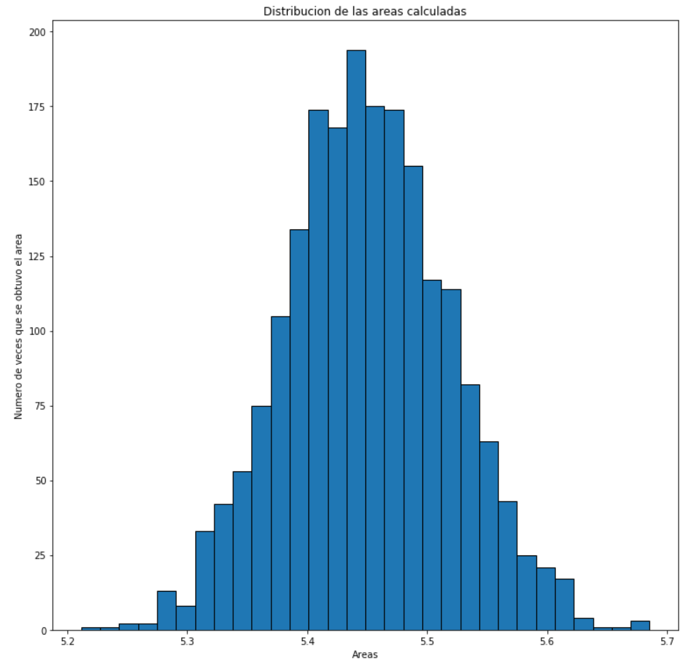
Con N= 100000 puntos aleatorios



este ùltimo experimento experimento unas 100 veces y ubicamos las areas obtenidas en un histograma:



Repitiendo el experimento unas 2000 veces:



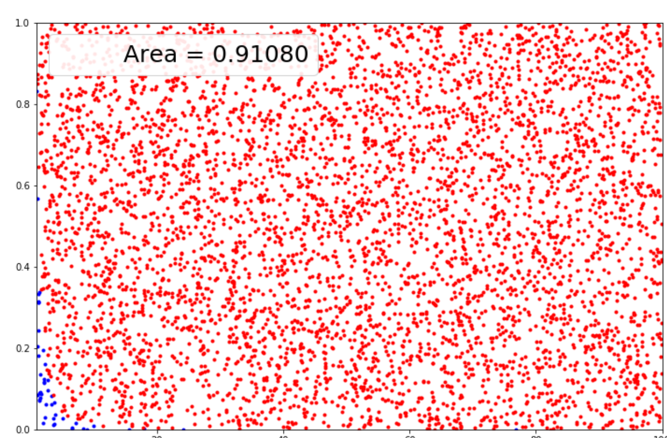
c Función 3: Tambien se puede utilizar este metodo para aproximarnos al valor de integrales impropias, integraremos la siguiente funcion, tomando al infinito como un valor relativamente grande. Veamos:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

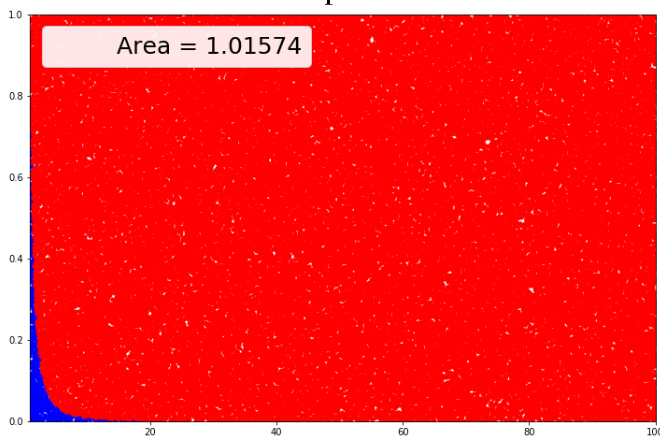
hallaremos

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \approx \int_1^{100} \frac{1}{x^2}$$

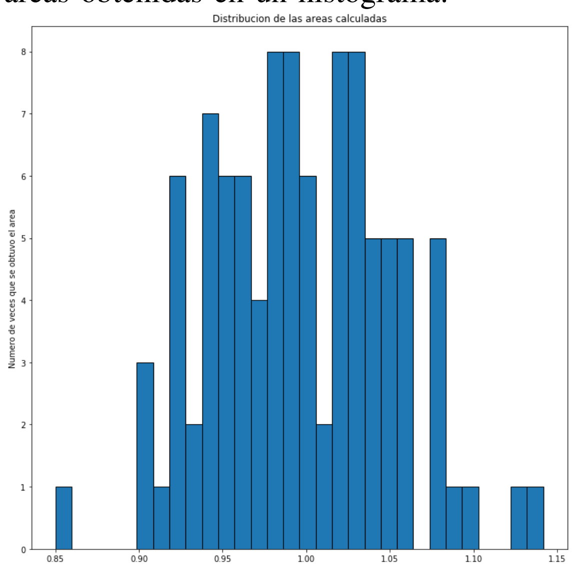
Con N=5000 puntos aleatorios(Notar los puntos azules en una esquina):



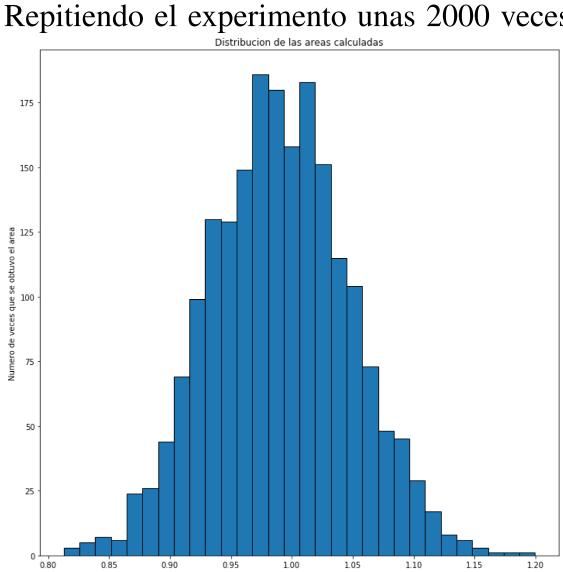
Con N= 100000 puntos aleatorios



Ahora realizaremos este ùltimo experimento experimento unas 100 veces y ubicamos las areas obtenidas en un histograma:



Repitiendo el experimento unas 2000 veces:



VIII. Discusiones

Los resultados de la primera parte del experimento(parte gráfica), pueden ser fácilmente explicados por el marco teórico pero que sucede con la segunda parte del experimento(histograma) ¿Porque los resultados de la segunda parte del experimento con número de repeticiones grande tienen cierto parecido? Esto se debe al Teorema Del Límite Central:

El teorema del límite central es un teorema fundamental de la probabilidad y la estadística. El teorema describe la distribución de la media de una muestra aleatoria proveniente de una población con varianza finita. Cuando el tamaño de la muestra es lo suficientemente grande, la distribución de las medias siguen aproximadamente a una distribución normal. El Teorema del Límite Central le permite aplicar estos procedimientos a muestras que son considerablemente no normales.
Esto resuelve nuestra pregunta planteada al inicio. Los resultados de la segunda parte del experimento inicialmente tienen un comportamiento no normal, y a medida que aumentamos el número de muestra, por el Teorema Del Límite Central, este empieza a tender un comportamiento como el de una distribución normal. Es por esto que los resultados con número de muestra grande se asemejan entre ellos pues siguen a la distribución normal.

Cabe resaltar, que como siguen a una distribución normal esta es centrada en la media; por lo tanto el valor central de cada histograma será el Valor Esperado aproximado de cada integral. Se comprueba fácilmente comparando con los resultados de la parte gráfica.

IX. Conclusiones

Se concluye lo siguiente:

a La utilización de el Método De Monte-Carlo es bastante útil, no solo para evaluar integrales sino para cualquier área donde se implique el uso de números aleatorios.

b Esta es una de las maneras en las que se evalúan integrales definidas en sus distintos campos de aplicación. Por lo tanto la evaluación de integrales elípticas no es un problema, ya que tenemos este método con el que podríamos resolverlo con una buena aproximación.

c El coste computacional al evaluar integrales no es demasiado, ya que fácilmente se puede llegar a una aproximación de no menos de 5 decimales en un tiempo menor a 10 minutos

X. Referencias

-R. Briega, Ïntroducción a los métodos de Monte-Carlo con Python", Relopezbriega.github.io, 2018. [Online]. Available: https://relopezbriega.github.io/blog/2017/01/10/introduccion-a-los-metodos-de-monte-carlo-con-python/. [Accessed: 01- Dec- 2018].

-"Monte Carlo Methods in Practice (Monte Carlo Integration)", Scratchapixel.com, 2018. [Online]. Available: https://www.scratchapixel.com/lessons/mathematics-physics-for-computer-graphics/monte-carlo-methods-in-practice/monte-carlo-integration [Accessed: 01- Dec- 2018].

-[3]"Monte Carlo Integration In Python For Noobs", YouTube, 2018. [Online]. Available https://www.youtube.com/watch?v=WAf0rqwAvgg [Accessed: 03- Dec- 2018].

-Imagenes de Fuente propia realizados en Python, utilizando Jupyter Notebooks

XI. Anexo

Se puede encontrar en el código fuente, asi también como un cuaderno sobre integración de Montecarlo en el siguiente link:https://github.com/PieroVioleta/Montecarlo-Integration/tree/master/Notebooks-Pdf