

# TD 2

(6 février 2024)

## Méthode :

Équation Différentielle Ordinaire  
d'ordre 2, à coeff. constants

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t) \quad (E)$$

### ① Solutions Homogènes :

- On calcule l'équation caractéristique:

$$a r^2 + b r + c = 0$$

- On trouve  $r$  avec le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\rightarrow r_{\frac{1}{2}} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

[Rmq : " $\sqrt{-1} = i$ "

- ⇒ la solution homogène:

$$y_h(t) = A y_1(t) + B y_2(t) \quad (A, B \in \mathbb{R})$$

où  $y_i(t) = \begin{cases} e^{r_i t} & \text{si } \Delta > 0 \\ e^{r_i t} \\ \exp(\operatorname{Re}(r_i)t) \cos(\operatorname{Im}(r_i)t) & \text{si } \Delta = 0 \\ \end{cases}$

$$y_2(t) = \begin{cases} e^{r_2 t} & r_1 = r_2 \text{ quand } \Delta = 0 \\ t e^{r_1 t} & \text{Si } \Delta > 0 \\ \exp(\operatorname{Re}(r_1)t) \sin(\operatorname{Im}(r_1)t) & \text{Si } \Delta = 0 \\ \exp(\operatorname{Re}(r_1)t) \cos(\operatorname{Im}(r_1)t) & \text{Si } \Delta < 0 \end{cases}$$

(2) Solution particulière : variation des constantes

On cherche  $y_p(t)$  sous la forme :

$$y_p(t) = A(t) y_1(t) + B(t) y_2(t).$$

Rmq: On a le droit de supposer

$$A'(t) y_1(t) + B'(t) y_2(t) = 0$$

car on cherche une seule solution particulière

(3) Solution générale :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

$t \in \mathbb{R}, A, B \in \mathbb{R}$

(13 février 2024)

(E)

Exercice 1:  $y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = te^{2t} \cos(3t)$

(1) Solution homogène: Polynôme caractéristique:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \times 1 \times 3 = 4 > 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = 3 \\ r_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{\Delta}}{2 \times 1} = 1 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow y_h(t) = A e^{3t} + B t e^t \quad A, B \in \mathbb{R}$$

(2) Solution particulière:  $\Leftrightarrow$  variation des constantes  $\Rightarrow$

On cherche  $y_p$  sous la forme

$$y_p(t) = A(t) e^{3t} + B(t) e^t$$

$$\Rightarrow y_p'(t) = A'(t) e^{3t} + 3A(t) e^{3t} + B'(t) e^t + B(t) e^t$$

On peut supposer  $= 0$   
 $(*)$

$$\Rightarrow y_p''(t) = 3A'(t) e^{3t} + 9A(t) e^{3t} + B'(t) e^t + B(t) e^t$$

On injecte dans (E) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (*) \\ y_p''(t) - 4y_p'(t) + 3y_p(t) = t e^{2t} \cos(3t) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (*) \\ 3A'(t) e^{3t} + B'(t) e^t + A(t) [9e^{2t} - 12e^{3t} + 3e^{3t}] = 0 \\ + B(t) [e^t - 4e^t + 3e^t] = t e^{2t} \cos(3t) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\ast) A'(t) e^{st} + B'(t) e^t = 0 \\ 3A'(t) e^{3t} + B'(t) e^t = t e^{2t} \cos(3t) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B'(t) = -\frac{1}{2} t e^t \cos(3t) \\ A'(t) = \frac{1}{2} t e^{-t} \cos(3t) \end{array} \right.$$

On calcule une primitive de  $B'(t)$ :

$$B(t) = \int^t B'(x) dx = \int^t -\frac{1}{2} x e^x \underbrace{\cos(3x)}_{f g'} dx$$

Pour faire cette IPP,  
il nous faut  $\int g' \rightarrow$  On va faire une autre  
IPP

IPP:  $\int f g' = [fg] - \int f' g$

Mémo: Pour la retrouver :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\Rightarrow fg' = (fg)' - f'g$$

$$\Rightarrow \int f g' = [fg] - \int f' g$$

$$I = \int^t \underbrace{e^x}_{g'} \underbrace{\cos(3x)}_f dx$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\text{iPP}}{=} \left[ e^x \cos(3x) \right]^t - \int e^x \times (-3) \sin(3x) dx \\
 & = e^t \cos(3t) + 3 \int e^x \underbrace{\sin(3x)}_g dx \quad \underbrace{\text{f}}_{\text{f}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\text{iPP}}{=} e^t \cos(3t) + 3 \left[ e^x \sin(3x) \right]^t - 3 \int e^x \times 3 \cos(3x) dx \\
 & = e^t (\cos(3t) + 3 \sin(3t)) - 9 I \quad \underbrace{= -9I}_{\text{I}}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 10I = e^t (\cos(3t) + 3 \sin(3t))$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{e^t}{10} (\cos(3t) + 3 \sin(3t))$$

$$B(t) = \int^t -\frac{1}{2} x \underbrace{(e^x \cos(3x))}_{\text{f}} dx \quad \underbrace{\left( e^x \cos(3x) \right) dx}_g$$

$$\begin{aligned}
 & \stackrel{\text{iPP}}{=} [f g] - \int f' g
 \end{aligned}$$

I d'avant

$$\begin{aligned}
 & = \left[ -\frac{1}{2} x \frac{e^x}{10} (\cos(3x) + 3 \sin(3x)) \right]^t \\
 & \quad - \int^t -\frac{1}{2} x \frac{e^x}{10} (\cos(3x) + 3 \sin(3x)) dx \\
 & = -\frac{1}{2} t \frac{e^t}{10} (\cos(3t) + 3 \sin(3t))
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{20} \int e^t \cos(3t) dt + \frac{1}{20} \int e^t \sin(3t) dt$$

= I d'avant  
= comme pour I  
=  $\frac{e^t}{10} (\cos(3t) + 3\sin(3t))$   
=  $\frac{e^t}{10} (\sin(3t) - 3\cos(3t))$

$$= \frac{e^t}{20} \cos(3t) \left[ -t + \frac{1}{10} - \frac{9}{10} \right] + \frac{e^t}{20} \sin(3t) \left[ -3t + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \right]$$

$$\Rightarrow B(t) = \frac{e^t}{100} \cos(3t) [-5t - 4] + \frac{e^t}{100} \sin(3t) [-15t + 3]$$

Des calculs similaires donnent:

$$A(t) = \frac{e^{-t}}{100} \cos(3t) [4 - 5t] + \frac{e^{-t}}{100} \sin(3t) [15t + 3]$$

$$\Rightarrow y_p(t) = A(t) e^{3t} + B(t) e^t$$

$$= \frac{e^{2t}}{100} \left[ \cos(3t) (4 - 5t) + \sin(3t) (15t + 3) \right. \\ \left. + \cos(3t) (-5t - 4) + \sin(3t) (-15t + 3) \right]$$

$$= \frac{e^{2t}}{100} \left[ -10t \cos(3t) + 6 \sin(3t) \right]$$

(3)

Solution générale :

$$y(t) = A e^{3t} + B e^t + \frac{e^{2t}}{100} \left[ -10t \cos(3t) + 6 \sin(3t) \right]$$

pour  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$ 

1er Mars 2024

$$x'' - 4x' + 3x = t e^{2t} \cdot \cos(3t)$$

éq homogène

$$\sigma^2 - 4\sigma + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4 \times 3 = 4$$

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{4+2}{2} & \sigma_2 &= 1 \\ \sigma_2 &= 3 & &\end{aligned}$$

$$\text{on a } x_h(t) = A e^{\sigma_1 t} + B e^{\sigma_2 t}$$

$$(A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Sol particulière

Second membre de forme

$$f(t) = \underline{t} e^{\sigma_1 t} \cdot \underline{\cos(3t)}$$

Cela revient à calculer la partie réelle de  $e^{(\underline{2} + \underline{3i})t}$

→ polynôme de deg 1

Donc on cherche

$$x_{P_1}(t) = (\underline{\alpha + \beta t}) e^{(2+3i)t} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} x_{P_1}'(t) &= e^{(2+3i)t} ((2+3i)(\alpha + \beta t) + \beta) \\ &= e^{(2+3i)t} (2\alpha + 2\beta t + \beta + 3i\alpha + 3i\beta t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{P_1}''(t) &= e^{(2+3i)t} \underbrace{((2+3i)^2(\alpha + \beta t) + (2+3i)\beta)}_{(4-9+28i)} \\ &\quad + 2\beta + 3i\beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= e^{(2+3i)t} (5\alpha + 28i\alpha + 5\beta t + 28i\beta t \\ &\quad + 2\beta + 3i\beta + 2\beta + 3i\beta) \end{aligned}$$

on injecte

$$e^{(2+3i)t} (5\alpha + 28i\alpha + \cancel{5\beta t} + \cancel{28i\beta t} \\ + 2\beta + 3i\beta + 2\beta + 3i\beta - 8\alpha - \cancel{8\beta t} \\ - 4\beta - 12i\alpha - \cancel{12i\beta t} + 3\alpha + \cancel{3\beta t}) \\ = \underline{t} e^{(2+3i)t}$$

et pour identification

$$\left\{ \begin{array}{l} \cancel{5\beta} + 28i\beta - \cancel{8\beta} - 12i\beta \\ \quad + \cancel{3\beta} = 1 \\ \cancel{5\alpha} + 28i\alpha + \cancel{2\beta} + 3i\beta + \cancel{2\beta} \\ \quad + 3i\beta - \cancel{8\alpha} - \cancel{4\beta} - 12i\alpha + \cancel{3\alpha} = 0 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow 16i\beta = 1 \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{16i}$$

$$\boxed{\beta = \frac{i}{-16^2}}$$

$$\rightarrow 16i\alpha + 6i\beta = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{16i} (-6i \times \frac{1}{16i}) = \frac{-6}{16^2 i}$$

$$\alpha = \frac{3}{640} + \frac{3}{130} \cdot i$$

$$\beta = -\frac{1}{130} - \frac{4}{65} i$$

$$x_{p_1}(t) = (\alpha + \beta t) e^{(2+3i)t}$$

$$\alpha + \beta t = \frac{3}{640} + \frac{3}{130} i - \frac{1}{130} t - \frac{4}{64} t \cdot i$$

$$= \left( \frac{3}{640} - \frac{1}{130} t \right) + \left( \frac{3}{130} - \frac{4}{64} t \right) i$$

$$\operatorname{Re}(x_{p_1}(t))$$

$$= \left( \dots \cdot e^{2t} \right) \cos(3t) - \left( \dots \right) \sin(3t)$$

$\hat{x}$  sol partikuläre  
 $x_p$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$



### Exo 2

①  $y''(t) + 4y(t) = \tan(t)$  pour  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

⊗ Sol. Homo: Équation caractéristique:  
 $\lambda^2 + 4 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \pm 2i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1(t) = \cos(2t) \\ y_2(t) = \sin(2t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_h(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t) \quad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

$\sin(-2t) = -\sin(2t)$

⊗ Solution particulière: "Variation des constantes"

$$\begin{cases} A'(t) \cos(2t) + B'(t) \sin(2t) = 0 \\ -2A'(t) \sin(2t) + 2B'(t) \cos(2t) = \tan(t) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} A'(t) = -B'(t) \frac{\sin(2t)}{\cos(2t)} \\ -2 \times \left[ -B'(t) \frac{\sin(2t)}{\cos(2t)} \right] \times \sin(2t) + 2B'(t) \cos(2t) = \tan(t) \end{cases} \\ \Leftrightarrow B'(t) \times \left[ +2 \frac{\sin^2(2t)}{\cos(2t)} + 2 \cos(2t) \right] = \tan(t) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow B'(t) \left[ 2 \sin^2(2t) + 2 \cos^2(2t) \right] = \tan(t) \cos(2t)$$

$= 2 \times 1 = 2$

$$\Leftrightarrow B'(t) = \frac{1}{2} \tan(t) \cos(2t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A'(t) = -\frac{1}{2} \tan(t) \cos(2t) \times \frac{\sin(2t)}{\cos(2t)} = -\frac{1}{2} \tan(t) \sin(2t) \\ B'(t) = \frac{1}{2} \tan(t) \cos(2t) \end{cases}$$

Rappels:

- $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$  (1)
- $\sin(2t) = 2 \cos(t) \sin(t)$  (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A'(t) = -\frac{1}{2} \tan(t) \times 2 \cos(t) \sin(t) \\ B'(t) = \frac{1}{2} \tan(t) \times (2 \cos^2(t) - 1) \end{cases}$$

$\cotan(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A'(t) = -\sin^2(t) = -1 + \cos^2(t) \\ B'(t) = \sin(t) \cos(t) - \frac{1}{2} \tan(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A'(t) \stackrel{(1)}{=} -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) = \frac{1}{2} (\cos(2t) - 1) \\ B'(t) \stackrel{(2)}{=} \frac{\sin(2t)}{2} - \frac{1}{2} \tan(t) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(t) = \frac{1}{4} \sin(2t) - \frac{t}{2} \\ B(t) = -\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \ln(\underbrace{|\cos(t)|}_{=\cos(t)}) \end{cases}$$

$\left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$

Ainsi,

$$y_p(t) = \left[ \frac{1}{4} \sin(2t) - \frac{t}{2} \right] \cos(2t) + \left[ -\frac{1}{4} \cos(2t) + \frac{1}{2} \ln(\cos(t)) \right] \sin(2t)$$

\* Solution générale :

$$y(t) = \left[ A - \frac{t}{2} \right] \cos(2t) + \left[ B + \frac{1}{2} \ln(\cos(t)) \right] \sin(2t)$$

pour  $t \in \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ , et  $A, B \in \mathbb{R}$

## AUTRES SOLUTIONS :

Exo ②: ② •  $y_h(t) = A \cos(t) + B \sin(t)$

- Variation des constantes:

$$\begin{cases} A'(t) = -\frac{\sin^2(t)}{\cos(t)} = \cos(t) - \frac{1}{\cos(t)} \\ B'(t) = \cos(t) \tan(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A(t) = \sin(t) + \ln \left( \tan \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \\ B(t) = -\cos(t) \end{cases}$$

• Ainsi:

$$y(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + \cos(t) \times \ln \left( \tan \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

avec  $t \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$

③ •  $y_h(t) = A e^t + B e^{2t}$

• Variation des constantes:  $\begin{cases} A(t) = \arctan(e^{-t}) \\ B(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+e^{-2t}) \end{cases}$

$$\Rightarrow y(t) = A e^t + B e^{2t} + e^t \arctan(e^{-t}) - \frac{e^{2t}}{2} \ln(1+e^{-2t})$$

avec  $t \in \mathbb{R}$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$

Exo ③:

① Poser  $\beta(t) = y'(t)$

$$\Rightarrow \text{on a: } \beta'(t) + \frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)} \beta(t) = 1$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \beta(t) = \begin{cases} A \frac{t}{t^2 + 1} - \frac{1}{t^2 + 1} & \text{pour } t \in \mathbb{R}_+^* \\ B \frac{t}{t^2 + 1} - \frac{1}{t^2 + 1} & \text{pour } t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

$A \in \mathbb{R}$   
 $B \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} A \frac{\ln(t^2+1)}{2} - \arctan(t) + C, & \text{pour } t > 0 \\ B \frac{\ln(t^2+1)}{2} - \arctan(t) + D, & \text{pour } t \leq 0 \end{cases}$$

avec  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$

- ② • Injecter  $e^t$  dans (e).
- Si  $y_2(t) = e^t z(t)$ , alors:
- $$z''(t) + \frac{2t+1}{t+1} z'(t) = 0$$

$\rightarrow$  On pose  $u(t) = z'(t)$ , et on a:

$$u'(t) + \frac{2t+1}{t+1} u(t) = 0$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow y_2(t) = -\frac{1}{2}te^{-t} - \frac{3}{4}e^{-t}$$

On (e) est une EDL d'ordre 2,  
donc, l'ensemble  $\mathcal{Y}$  des solutions forme  
un espace affine de dimension 2

De plus (e) est homogène  
 $\Rightarrow \mathcal{Y}$  est un e.v. de dim = 2

$$\mathcal{Y} = \left\{ A y_1(t) + B y_2(t) : A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

car  $y_1$  et  $y_2$  sont indep  
 $\Rightarrow$  forment une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{Y}$ .

$$= \left\{ A e^t + B \left( -\frac{1}{2}t - \frac{3}{4} \right) e^{-t} : A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

pour  $t \in ]-\infty, 1[$

Exo 4 :

①  $\mathcal{Y}$  est un sous-espace affine de dimension 2 de  $C^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$  car EDL d'ordre 2

② Chercher  $x_2(t)$  sous la forme :

$$x_2(t) = x_1(t) \gamma(t)$$

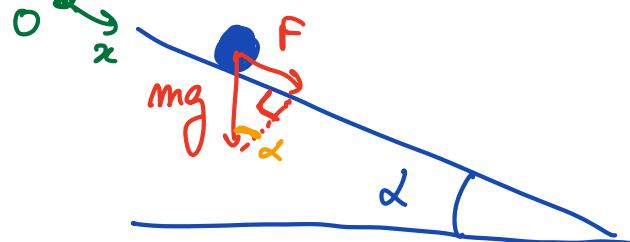
$$\Rightarrow \dots \Rightarrow x_2(t) = 1 - 2t \sin(t) + t^2 + t$$

$$\Rightarrow \mathcal{Y} = \left\{ A x_1(t) + B x_2(t) : A, B \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \boxed{\left\{ C t^2 + D t - 2t \sin(t) + 1 : C, D \in \mathbb{R} \right\}}$$

avec  $t \in ]0, +\infty[$

Exo 5 :

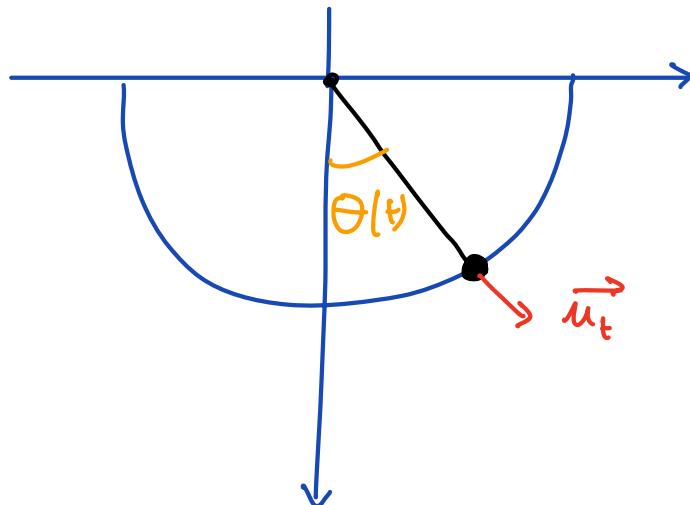


① • Principe de Newton  $\Rightarrow x''(t) = g \sin(\alpha)$

- Solution:  $x(t) = At + B + \frac{1}{2}gt^2 \sin(\alpha)$

avec  $t > 0$ ,  $A, B \in \mathbb{R}$

②



(a)  $M(t) = \lambda(t) \vec{u}_t$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow L\theta''(t) + g \sin(\theta(t)) = 0$$

- Pour  $\theta$  petit : dév. limité  $\Rightarrow \sin(\theta) \approx \theta$

$\leadsto$  On obtient:  $L\theta''(t) + g\theta(t) = 0$

(b) •  $\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right) + A \sin\left(\sqrt{\frac{g}{L}} t\right)$

avec  $t > 0$ ,  $A \in \mathbb{R}$

- Les oscillations ont pour période  $2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ 
  - $\Rightarrow$  indép de la position initiale
  - $\Rightarrow$  "isochronisme"

## Exo 6:

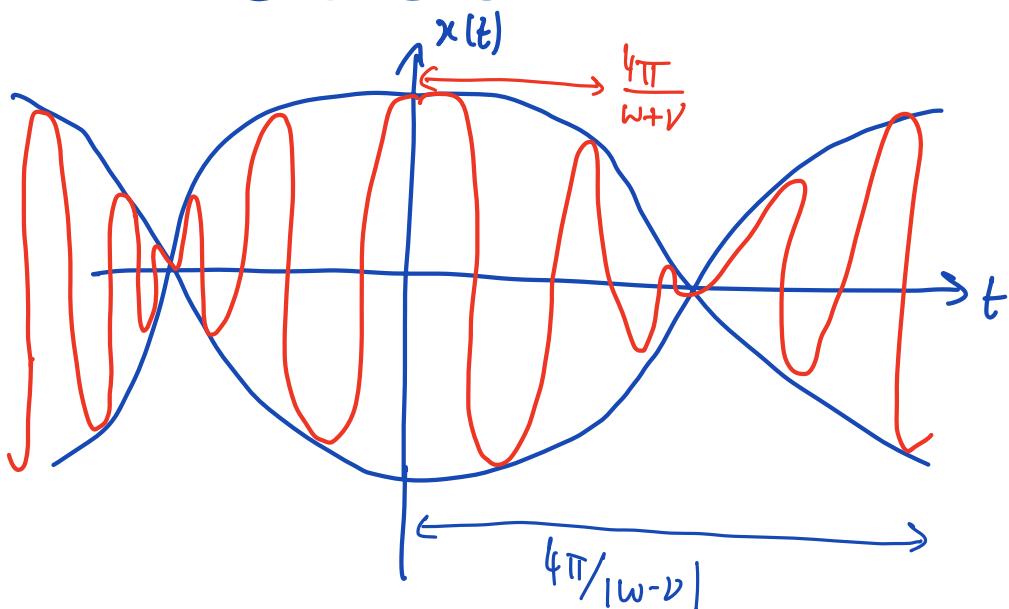
1.1

• Si  $\nu \neq \omega$ :

$$x(t) = \frac{2F}{\omega^2 - \nu^2} \left( \underbrace{\cos\left(\frac{\omega+\nu}{2}t\right)}_{\text{période } \frac{4\pi}{\omega+\nu}} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\omega-\nu}{2}t\right)}_{\text{période } \frac{4\pi}{|\omega-\nu|}} \right)$$

( $t \in \mathbb{R}$ )

Phénomène de battement:



• Si  $\nu = \omega$ :

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{F}{2\nu} t \sin(\nu t)$$

avec  $A, B \in \mathbb{R}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

1.2

•  $x_p(t) = -\frac{1}{32} \cos(3t) + \frac{3}{8} t \sin(t)$

•  $x_p(t) = -\frac{2}{3} \cos(t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cos(2t)$

avec  $t \in \mathbb{R}$

2.1

(e): équation homogène

- Si  $k^2 > 4w^2$ :  $x(t) = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t}$
  - Si  $k^2 = 4w^2$ :  $x(t) = (At + B)e^{-wt}$
  - Si  $0 < k^2 < 4w^2$ :  $x(t) = e^{-kt/2} \cdot \left[ A \cos\left(\frac{\sqrt{4w^2 - k^2}}{2}t\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{4w^2 - k^2}}{2}t\right) \right]$
- $A, B \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}$

2.2

$$x(t) = y(t) + \frac{F}{\sqrt{\omega}} \cos(\omega t - \Phi), \quad t \in \mathbb{R}.$$

