TD SIGNAL

Lundi 29 avril 2024 :

Exercice 1 :

① Soit $u = x - T$, $x = u+T$; $f(x) = f(u+T)$ $\quad \frac{dx}{du} = 1$ donc $dx = du$

Bornes : $x = T \Rightarrow u = 0$
$x = T+a \Rightarrow u = a$

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u+T)\,du$$

or $\forall u \in \mathbb{R}, f(u+T) = f(u)$ donc $\boxed{\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du}$

② la fonction f n'est pas dependante au niveau de periodicité avec a. Utilisons donc une autre methode.

Donc : $\quad * \; (=) \Longrightarrow$ Dev chasles

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \underbrace{\int_T^{T+a} f(x)\,dx}$$

$$= \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \boxed{\int_0^T f(x)\,dx}$$

Exercice 2 :

- P est continue et (2π)- périodique

$\Rightarrow$ On peut appliquer la formule de $c_n(f)$ pour $f = P$ et $T = 2\pi$.

- [Indice : $e^{i2\pi n} = 1$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$

- $$c_n(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \left(e^{-inx}\right) dx$$
$$= \sum_{k=-N}^{N} \underbrace{\frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} e^{ikx - inx} dx}$$

$k \neq n$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \left[\frac{e^{ikx - inx}}{ik - in}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \left(\frac{\overset{=1}{e^{ik2\pi - in2\pi}}}{ik - in} - \frac{1}{ik - in} \right)$$
$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k (0)$$
$$\boxed{= 0}$$

$k = n$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} 1\, dx$$
$$\boxed{= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} c_k} = c_n$$

$$\Rightarrow c_n(P) = \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k \neq n}}^{N} 0 + \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k = n}}^{N} c_n$$

$$= \boxed{\begin{cases} c_n & \text{si } n \in [-N, N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Exercice 3 :