TD 5

Rappels :

Méthode 1 : ① Écrire le système d'EDO sous forme matricielle :

$$\underset{\text{Vecteur}}{X'(t)} = \underset{\text{matrice}}{A}\ \underset{\text{vecteur}}{X(t)} \qquad (*)$$

② Si c'est possible, on diagonalise A :

$$A = P \underset{\text{mat diagonale}}{D} \underset{\text{mat. inversible}}{P^{-1}}$$

③ **Astuce :** $(*) \Rightarrow X'(t) = PDP^{-1}X(t)$

$$\Rightarrow P^{-1}X'(t) = D\ P^{-1}X(t)$$

On fait un changement de variable $Z(t) = P^{-1}X(t)$, et on a :

$$Z'(t) = D\ Z(t)$$

cad : $\underset{\text{coefficients du vecteur } Z(t)}{z_i'(t)} = \underset{\text{coefficients de } D}{d_i}\ z_i(t)$

↳ on résout facilement

④ On retrouve $X(t)$:

$$X(t) = P\, Z(t)$$

Rmq : Si $X(t) = k_1 X_1(t) + k_2 X_2(t)$ avec $X_1, X_2 \in \mathbb{C}^2$ on peut passer à $\mathbb{R}^2$ en prenant $Re(X_1)$, $Im(X_2)$:

$$X(t) = k_1\, Re(X_1(t)) + k_2\, Im(X_2(t)) \in \mathbb{R}^2$$

(voir Exo ①. 2)

Rappel : Pour vérifier si A est diagonalisable, on calcule le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

→ on trouve les valeurs propres et leur multiplicité

→ A est diagonalisable ssi chaque v.p admet un espace propre $\ker(A - \lambda I_n)$ de même dimension que la multiplicité.

Ex : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Méthode 2 : Si l'on ne peut pas diagonaliser A, soit on essaie de la trianguler et on fait comme Méthode 1, soit on fait la " technique des espaces caractéristiques : (Voir Exo 2 & 3) :

→ Par exemple, si A admet un vp double λ mais un seul $\vec{vp}$ associé, (V_1) alors on cherche V_2 tel que $\{V_1, V_2\}$ forme une base de $\ker\left((A-\lambda I_n)^2\right)$

⇒ Les solution à (*) sont de la forme :

$$\boxed{X(t) = k_1\, e^{\lambda t}\left[I_n + t(A-\lambda I_n)\right]V_1 + k_2\, e^{\lambda t}\left[I_n + t(A-\lambda I_n)\right]V_2,}$$

avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 :

1. $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -6 & 4 & 10 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

Polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 5 \\ -6 & 4-\lambda & 10 \\ 3 & -2 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 10 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$!!\ - \ 2 \begin{vmatrix} -6 & 10 \\ 3 & -5-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \ 5 \begin{vmatrix} -6 & 4-\lambda \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= (-3-\lambda)\left[(4-\lambda)(-5-\lambda) - (-2)\times 10\right]$$
$$-2\left[-6\times(-5-\lambda) - 3\times 10\right]$$
$$+5\left[-6\times(-2) - 3(4-\lambda)\right]$$

$$= \ \dots \ = \boxed{-\lambda^2(\lambda+4)}$$

Donc, les valeurs propres sont :

- 0, de multiplicité 2
- -4, de multiplicité 1

Trouvons les vecteurs propres :

- <u>Pour $\lambda = 0$</u> : Résoudre $A\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{=V} = \underbrace{0}_{\lambda}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

$=V$

$$\begin{cases} -3x + 2y + 5z = 0 \\ -6x + 4y + 10z = 0 \\ 3x - 2y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3}(-2y - 5z) \\ \left.\begin{array}{l} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\} \text{ car } \begin{array}{l} L_2 = 2L_1 \\ L_3 = -L_1 \end{array} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = (2k_1 + 5k_2) \\ y = k_1 \\ z = k_2 \end{cases}$$

on met le " $\frac{1}{3}$ " dans les constantes

$$\Rightarrow \quad V = k_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=V_1} + k_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=V_2}$$

$\lambda = 0$ admet 2 $\vec{vp}$: $V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $V_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

⊗ <u>Pour $\lambda = -4$:</u> On résout $AV = -4V$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y + 5z = -4x \\ -6x + 4y + 10z = -4y \\ 3x - 2y - 5z = -4z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \quad V = k_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$= V_3$

Ainsi : $D = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -4 \end{bmatrix}$, $P = \left[V_1 \middle| V_2 \middle| V_3 \right]$

$= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

- Changement de variable :

$$Z(t) = P^{-1} X(t)$$

(pas besoin de calculer P^{-1} !!)

On a :

$$Z'(t) = D \, Z(t)$$

càd $\begin{bmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \\ z_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix}$

càd $\begin{cases} z_1'(t) = 0 \, z_1(t) = 0 \\ z_2'(t) = 0 \, z_2(t) = 0 \\ z_3'(t) = -4 z_3(t) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1(t) = c_1 \\ z_2(t) = c_2 \\ z_3(t) = c_3 e^{-4t} \end{cases}$$

Puis on retrouve $X(t)$:

$$X(t) = P \; Z(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 e^{-4t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2c_1 + 5c_2 + c_3 e^{-4t} \\ 3c_1 + 2c_3 e^{-4t} \\ 3c_2 - c_3 e^{-4t} \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 2c_1 + 5c_2 + c_3 e^{-4t} \\ y(t) = 3c_1 + 2c_3 e^{-4t} \\ z(t) = 3c_2 - c_3 e^{-4t} \end{cases} \quad \text{avec } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}}$$

② $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Polynôme caractéristique :

$$\chi_A(\lambda) = \dots = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i)$$

$\Rightarrow$ Deux valeurs propres :

- $\lambda_1 = 1 + i$, de multiplicité 1
- $\lambda_2 = 1 - i$, de multiplicité 1

Vecteurs propres :

- Pour $\lambda_1 = 1+i$, on résout $A \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{= V_1} = \underbrace{(1+i)}_{= \lambda_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{= V_1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y = (1+i)x \\ x + 2y = (1+i)y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1+i}{2} x \\ x - (1+i)x = (1+i) \times \left(-\frac{1+i}{2} x\right) \end{cases}$$

factoriser par x

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1+i}{2} x \\ \underbrace{\left[\cancel{1} - \cancel{1} - i - (1+i)\left(-\frac{1+i}{2}\right)\right]}_{= -i + \frac{1}{2}(\cancel{1} + 2i - \cancel{1})} x = 0 \end{cases}$$

$= 0$

$\Longleftrightarrow \quad y = -\frac{1+i}{2} x$

$\rightsquigarrow$ prendre $\quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1+i}{2} \end{bmatrix}$

ou bien $\boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ -1-i \end{bmatrix}}$

Pour $\lambda_2 = 1 - i$:

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (1-i) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -2y = (1-i)x \\ x + 2y = (1-i)y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1-i}{2} x \\ x + 2\left(-\frac{1-i}{2}\right)x = (1-i) \times \left(-\frac{1-i}{2}\right)x \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1-i}{2} x \\ \left[\cancel{1} - \cancel{1} + i - (1-i) \times \left(-\frac{1-i}{2}\right)\right] x = 0 \end{cases}$$

$$= i + \frac{1}{2}(\cancel{1} - 2i - \cancel{1}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = -\frac{1-i}{2}x$$

k

$\rightarrow$ On peut prendre

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1-i}{2} \end{bmatrix}$$

k $y = -\frac{1-i}{2}k$

ou bien $\boxed{\begin{bmatrix} -2 \\ 1-i \end{bmatrix}}$

On a :

$$A = P D P^{-1},$$

avec $D = \begin{bmatrix} 1+i & \\ & 1-i \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} V_1 & | & V_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1-i & 1-i \end{bmatrix}$$

On fait un changement de variable :

$$Z(t) = P^{-1} X(t)$$

$\Rightarrow$ on a : $Z'(t) = D\, Z(t)$

c.a.d : $\begin{cases} z_1'(t) = (1+i)\, z_1(t) \\ z_2'(t) = (1-i)\, z_2(t) \end{cases}$

c.a.d. $\begin{cases} z_1(t) = k_1 e^{(1+i)t} \\ z_2(t) = k_2 e^{(1-i)t} \end{cases}$

$$\Rightarrow X(t) = P \; z(t)$$

$$= \underbrace{k_1 e^{(1+i)t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1-i \end{bmatrix}}_{=X_1(t)} + \underbrace{k_2 e^{(1-i)t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1-i \end{bmatrix}}_{=X_2(t)}$$

On a $X(t) \in \mathbb{C}^2$, on veut passer à $X(t) \in \mathbb{R}^2$:

$$X(t) = k_1 \operatorname{Re}(X_1(t)) + k_2 \operatorname{Im}(X_2(t))$$

$$= \dots$$

$$\boxed{= k_1 e^t \begin{bmatrix} -\sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix} + k_2 e^t \begin{bmatrix} \cos(t) + \sin(t) \\ -\cos(t) \end{bmatrix}}$$

Exo 2 : Faire la "Méthode 2"

1. A est semblable à B lorsque $\exists P$ inversible telle $A = PBP^{-1}$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Poly caract: $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 3)^2$

$\Rightarrow \lambda_1 = 3$ de multiplicité 2

vecteur propre $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \ker(A - \lambda_1 I)$

On cherche $v_2 \in \ker((A - \lambda_1 I)^{2})$

car il nous faut 2 vecteurs et que $\ker(A - \lambda_1 I)$ n'en a qu'un seul indépendant

$\rightarrow$ Prendre $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad T = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(Vérifier que $A = P\, T\, P^{-1}$)

- Changement de variable:

$$Z(t) = P^{-1} X(t)$$

On obtient: $Z'(t) = T\, Z(t)$

$$\begin{cases} z_1'(t) = 3 z_1(t) + z_2(t) \\ z_2'(t) = 3 z_2(t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1'(t) = 3 z_1(t) + k_2 e^{3t} & (**) \\ z_2(t) = k_2 e^{3t} \end{cases}$$

- Pour $(**)$, on trouve les solutions homogènes:

$$z_{1,h}(t) = k_1 e^{3t}$$

On fait une variation de la constante pour trouver une solution particulière:

$$z_{1,p}(t) = k_1(t) e^{3t}$$

On inject dans $(**)$ et on a:

$$k_1'(t) \cancel{e^{3t}} + \cancel{3k_1(t) e^{3t}} = \cancel{3 k_1(t) e^{3t}} + k_2 \cancel{e^{3t}}$$

$$\Rightarrow k_1'(t) = k_2$$

$$\Rightarrow k_1(t) = k_2 t + k_3$$

Donc $z_{1,p}(t) = (k_2 t + k_3) e^{3t}$

D'où,

$$z_1(t) = z_{1,h}(t) + z_{1,p}(t)$$

$$= k_1 e^{3t} + k_2 t e^{3t} + k_3 e^{3t}$$

k_4

$$= k_4 e^{3t} + k_2 t e^{3t}$$

D'où :

$$Z(t) = \begin{bmatrix} k_4 e^{3t} + k_2 t e^{3t} \\ k_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X(t) = P \, Z(t)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_4 e^{3t} + k_2 t e^{3t} \\ k_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (k_4 + k_2) e^{3t} + k_2 t e^{3t} \\ k_2 e^{3t} \end{bmatrix}$$

② "Méthode des espaces caractéristiques" (voir Rappels)

On trouve $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ comme avant.

Puis la solution est donnée par :

Voir Rappels ci-dessus

$$X(t) = k_1 e^{\lambda t} \left[I_n + t (A - \lambda I_n) \right] V_1 ,$$

$$+ k_2 e^{\lambda t} \left[I_n + t (A - \lambda I_n) \right] V_2 ,$$

avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

$$= \dots = k_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1+t \\ t \end{bmatrix} + k_2 e^{3t} \begin{bmatrix} -t \\ 1+t \end{bmatrix}$$

D'où :

$$\begin{cases} x(t) = k_1 e^{3t}(1+t) - k_2 e^{3t} t \\ y(t) = k_1 e^{3t} t + k_2 e^{3t}(1+t) \end{cases}$$

avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$