BONUS :

⊛ Q : Différence entre série et suite ?

- Une série est une suite de la forme

$$\sum u_n \qquad \left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$$

← c'est une suite de nombres de la forme $(u_0, u_0+u_1, u_0+u_1+u_2, \dots)$

où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite

- Si cette suite converge, on appelle la limite "somme" et on la note :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{C}$$

↑ c'est un nombre

- $$\|f\|_\infty := \sup_{x\in \text{Domaine}(f)} |f(x)|$$

- Critère de Riemann :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

• Si $\sum u_n$ CVG, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

mais le contraire est faux

Ex: $u_n = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$ mais $\sum \frac{1}{n}$ DVG

• Si $a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = 0$

alors l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 car l'EDO est d'ordre 2.

TD 4. Exos :

1 On prend $x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n t^{n-1} \\ x''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n\, t^{n-2} \end{cases}$$

On injecte dans l'équation homogène:

$$t^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} - 2t \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n t^{n-1}$$

$$+ 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0\, t^n$$

On va sortir les premiers termes (pas besoin de faire le changement de variable ici, car on a de la chance, tous les termes sont déjà en t^n) :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \boxed{n(n-1)}\, a_n t^n$$

$$- 2t \times \underbrace{1 \times a_1 t^{1-1}}_{n=1} - 2 \sum_{n=2}^{+\infty} n\, a_n t^n$$

$$+ \underbrace{2a_0}_{n=0} + \underbrace{2a_1 t}_{n=1} + 2\sum_{n=2}^{+\infty} a_n t^n$$

$$= 0 + 0t + \sum_{n=2}^{+\infty} 0\, t^n$$

On regroupe :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left[n(n-1) - 2n + 2 \right] a_n t^n$$

$$- 2a_1 t + 2a_0 + 2a_1 t = 0 + 0t + \sum_{n=2}^{+\infty} 0\, t^n$$

Par identification des coeff :

$$\begin{cases} \left[n(n-1) - 2n + 2 \right] a_n = 0 & \forall n \geq 2 \\ -2a_1 + 2a_1 = 0 & \\ 2a_0 = 0 & \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = 0 & \forall n \geq 3 \\ 0 = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

car en $n=2$ on a $n(n-1)-2n+2=0$

$\Rightarrow$ Les variables a_1 et a_2 sont libres, et on obtient :

$$x(t) = \underbrace{a_1}_{\in \mathbb{R}} t + \underbrace{a_2}_{\in \mathbb{R}} t^2$$

$\Rightarrow$ Une base de solutions est donnée par $\{t, t^2\}$

- Important : Suite géométrique

$\sum_n q^n$ Converge ssi $|q| < 1$, et sa limite est $\frac{1}{1-q}$.

TD5 : Exponentielle de matrice :

On veut calculer :

$$\exp(A) := \sum^{+\infty} \frac{A^k}{\dots}$$

$$= I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots$$

Méthode pour calculer $\exp(A)$ en pratique:

① Diagonaliser A si possible:

$$A = P D P^{-1}$$

avec P: inversible et D: diagonale

Pour faire ça:

① On calcule le polynôme charactéristique

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$$

② On calcule ses racines: ce sont les valeurs propres

③ On calcule les vecteurs propres associés.

Par exemple, si on a une v.p. $\lambda = 3$, on cherche un vecteur $v \neq 0$ tel que $Av = 3v$

ou bien on cherche $v \in \ker(A - 3I)$

④ $P = \begin{bmatrix} \text{vecteurs propres en colonnes} \end{bmatrix}$ "passage"

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ "diagonale"

Rmq : On ne peut pas toujours diagonaliser, mais on peut toujours trigonaliser dans $\mathbb{C}$:

$$A = P \, T \, P^{-1}$$

T ← triangulaire supérieure

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \; * \\ & \ddots & * \; * \\ & & \ddots \; * \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{array}$$

$P =$ m̂ qu'avant (méthode)

$$AP = PT$$

$$\underbrace{A \left[v_1 | \dots | v_n \right]} = \underbrace{\left[v_1 | \dots | v_n \right] T}$$

→ ça fait un système, et on peut trouver les coeff de T

Rmq : Si il ne manque qu'un seul vecteur pour trouver P, on peut prendre le produit vectoriel $\wedge$ des précédents, ou m̂ directement voir un vecteur manquant.

" si dans $\mathbb{R}^4$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_4 - x_4 y_3 \\ x_4 y_1 - x_1 y_4 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$ "

à confirmer

② Ça simplifie le calcule car :

$$\exp(A) = \exp(PDP^{-1})$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\boxed{(PDP^{-1})^k}}{k!} \quad \text{par rec.} = PD^kP^{-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P \frac{D^k}{k!} P^{-1}$$

$$= P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!} \right) P^{-1}$$

$$= P \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \right) P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ 0 & \ddots & e^{\lambda_n} \end{bmatrix} P^{-1}$$

TD4 : Pour trouver le rayon de CVG "R" :

D'Alembert : si $\sum u_n z^n$,

alors $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \to \ell$

si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ DVG

si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ CVG

Autre version : $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \to \frac{1}{R}$

où R est le rayon de CVG

(si $|z| < R$, alors $\sum u_n z^n$ CVG,

et si $|z| > R$, alors $\sum u_n z^n$ DVG)

Formule de Cauchy-Hadamard :

$$\limsup_{n \to +\infty} |u_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$$

Comment fait-on si l'on a $\sum_n u_n z^{2n}$:

On peut réécrire cette série en :

$$\sum_n V_n \, z^n$$

où $V_n := \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ u_{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$

Il y a aussi une autre version :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} \longrightarrow \ell(z)$$

si $\ell(z) > 1$, alors $\sum u_n(z)$ DVG

si $\ell(z) < 1$, alors $\sum u_n(z)$ CVG

$\Rightarrow$ On peut utiliser cette méthode pour calculer $\sum a_n z^{2n} = \sum u_n(z)$

avec $u_n(z) = a_n z^{2n}$

$$\frac{|u_{n+1}(z)|}{|u_n(z)|} = \frac{|a_{n+1} z^{2n+2}|}{|a_n z^{2n}|} = \underbrace{\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z|^2}_{\xrightarrow{n \to +\infty} \ell(z)}$$

$\Rightarrow$ La série $\sum a_n z^{2n}$ CVG si $\ell(z) < 1$

$\circledast$ Si on connait R, comment on déduit le domaine de convergence $\mathcal{D}$?

D D

On a $\{ z \in \mathbb{C} : |z| < R \} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \}$

Ensuite, il faut vérifier si les $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = R$ appartiennent aussi à $\mathcal{D}$.