TD SIGNAL

Lundi 29 avril 2024 :

Exercice 1 :

① Soit $u = x - T$, $x = u + T$; $f(x) = f(u+T)$ $\qquad \frac{dx}{du} = 1$ donc $dx = du$

Bornes : $x = T \Rightarrow u = 0$
$x = T + a \Rightarrow u = a$

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u+T)\,du$$

or $\forall u \in \mathbb{R}, f(u+T) = f(u)$ donc $\boxed{\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du}$

② La fonction f n'est pas dependante au niveau de periodicité avec a. Utilisons donc une autre methode.

Donc : $\quad * \; (=) \Rightarrow$ Dev chasles

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \underbrace{\int_T^{T+a} f(x)\,dx}$$

$$= \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \boxed{\int_0^T f(x)\,dx}$$

Exercice 2 :

- P est continue et (2π)- périodique

$\Rightarrow$ On peut appliquer la formule de $c_n(f)$ pour $f = P$ et $T = 2\pi$.

- [**Indice** : $e^{i 2\pi n} = 1$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$

- $$c_n(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \left(e^{-inx}\right) dx$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} \underbrace{\frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} e^{ikx - inx} dx}$$

$k \neq n$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \left[\frac{e^{ikx - inx}}{ik - in} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \left(\frac{\overbrace{e^{ik2\pi - in2\pi}}^{=1}}{ik - in} - \frac{1}{ik - in} \right)$$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k (0)$$

$$\boxed{= 0}$$

$k = n$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} 1 \, dx$$

$$\boxed{= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} c_k} = c_n$$

$$\Rightarrow c_n(P) = \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k \neq n}}^{N} 0 + \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k = n}}^{N} c_n$$

$$= \boxed{\begin{cases} c_n & \text{si } n \in [-N, N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Exercice 3 : Mardi 30 avril 2024

① • f est paire donc $f(-x) = f(x)$.

• Grâce à l'Exercice ①, on peut écrire :

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_{-T/2}^{0} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right)$$

$u = -x$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi n x}{T}\,dx - \int_0^{T/2} f(u)\sin\left(\frac{2\pi n u}{T}\right)du\right)$$

$$= \frac{2}{T}\times 0 \boxed{= 0}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_{-T/2}^{0} f(-x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_0^{T/2} f(u)\cos\left(\frac{2\pi n u}{T}\right)du\right)$$

$$= \boxed{\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx}$$

② $$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left[-\int_0^{T/2} f(u)\cos\left(\frac{2\pi n u}{T}\right)du + \int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right]$$

$$\boxed{= 0}$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(u) \sin\left[\frac{2\pi n u}{T}\right] du + \int_0^{T/2} f(x) \sin\left[\frac{2\pi n x}{T}\right] dx \right)$$

$$\boxed{= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left[\frac{2\pi n x}{T}\right] dx}$$

Exo 4 :

1) Utiliser la formule $\overline{\int g(t)\, dt} = \int \overline{g(t)}\, dt$

On calcule $c_n(\overline{F}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{F(x)}\, e^{-inx}\, dx$

puis $\overline{c_{-n}(F)} = \overline{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\, e^{inx}\, dx}$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{F(x)}\, \overline{e^{inx}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{F(x)}\, e^{-inx}\, dx$$

La fonction est continue et 2π-périodique

On a donc $\boxed{c_n(\overline{F}) = \overline{c_{-n}(F)}}$

2) $g : t \mapsto f(-t)$, f est C^0 et 2π périodique

donc g est également C^0 et 2π périodique

Nous pouvons donc appliquer la formule de c_n.

- $c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx$
- $c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(-x)\, e^{-inx}\, dx$

Prenons $u = -x$, $\frac{du}{dx} = -1 \iff du = -dx$

On a donc

$$C_n(g) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{-2\pi} f(u)e^{inu}\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(u)\,e^{inu}\,du$$

Nous avons vu que f et g sont 2π periodique, donc

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(u)e^{inu}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,e^{inu}\,du}$$

CCL : les deux intégrales sont égales !!

3) h_a est C^0 et 2π périodique car f l'est aussi et a est fixé

$$c_n(h_a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+a)e^{-nxi}\,dx$$ Soit $u = x+a$, $x = u-a$

$f(x+a) = f(u)$ $\quad \frac{dx}{du} = 1 \Rightarrow dx = du$ $\quad x = 0 \Rightarrow u = a$

$e^{-inx} = e^{-inu+ina}$ $\quad x = 2\pi \Rightarrow u = 2\pi + a$

$$C_n(h_a) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}e^{ina}\,du = \frac{e^{ina}}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}\,du$$

Donc $$\frac{e^{ina}}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}\,du = \frac{e^{ina}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}\,du \boxed{= e^{ina}\,c_n(f)}$$

Exercice 5 :

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- périodique, $f = 1$ sur $]0,\pi[$

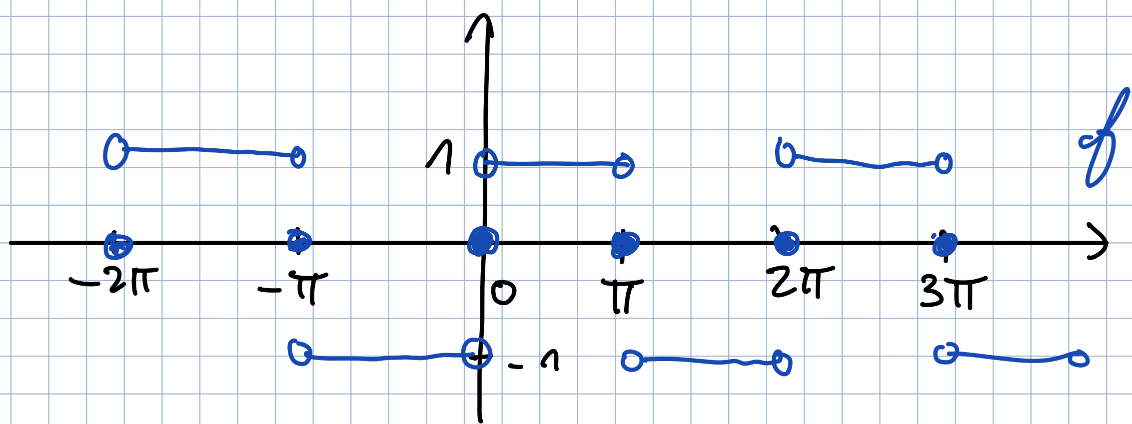
impaire : $f(-x) = -f(x)$

- $f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

• $f(\pi) \underset{\text{par } 2\pi \text{ périodicité}}{=} f(\pi - 2\pi) = f(-\pi) \underset{\text{imparité}}{=} -f(\pi)$

$\Rightarrow \boxed{f(\pi) = 0}$

2



3 f est constante par morceaux

$\Rightarrow$ dérivable par morceaux de dérivée $= 0$ continue

$\Rightarrow \boxed{f \in \mathcal{C}^1}$