TD 2

(6 février 2024)

Méthode :

Équation Différentielle Ordinaire d'ordre 2, à coeff. constants

$$a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = f(t) \qquad (E)$$

① Solutions Homogènes :

- On calcule l'équation caractéristique :

$$a r^2 + b r + c = 0$$

- On trouve r avec le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\hookrightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

[Rmg : " $\sqrt{-1} = i$ "

$\Rightarrow$ la solution homogène :

$$\boxed{y_h(t) = A\, y_1(t) + B\, y_2(t)} \qquad (A, B \in \mathbb{R})$$

où
$$y_1(t) = \begin{cases} e^{r_1 t} & \text{si } \Delta > 0 \\ e^{r_1 t} & \text{si } \Delta = 0 \\ \exp(\mathrm{Re}(r_1) t) \cos(\mathrm{Im}(r_1) t) & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

$$y_2(t) = \begin{cases} e^{r_2 t} & \text{si } \Delta > 0 \\ t\, e^{r_1 t} & \text{si } \Delta = 0 \\ \exp(\mathrm{Re}(r_1) t) \sin(\mathrm{Im}(r_1) t) & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$

$r_1 = r_2$ quand $\Delta = 0$

α, β

$\Rightarrow r_2 = \overline{r_1}$

② Solution particulière : « Variation des constantes »

On cherche $y_p(t)$ sous la forme :

$$y_p(t) = A(t)\, y_1(t) + B(t)\, y_2(t).$$

Rmq : On a le droit de supposer

$$A'(t)\, y_1(t) + B'(t)\, y_2(t) = 0$$

car on cherche une seule solution particulière

③ Solution générale :

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$$

$t \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$