TD 2

(6 février 2024)

Méthode :

Équation Différentielle Ordinaire d'ordre 2, à coeff. constants

$$a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = f(t) \qquad (E)$$

① Solutions Homogènes :

- On calcule l'équation caractéristique :

$$a r^2 + b r + c = 0$$

- On trouve r avec le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\rightarrow \quad r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

[Rmq : " $\sqrt{-1} = i$ "

$\Rightarrow$ la solution homogène :

$$\boxed{y_h(t) = A\, y_1(t) + B\, y_2(t)} \qquad (A, B \in \mathbb{R})$$

où $y_1(t) = \begin{cases} e^{r_1 t} & \text{si } \Delta > 0 \\ e^{r_1 t} & \text{si } \Delta = 0 \\ \exp(Re(r_1)t)\cos(Im(r_1)t) & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$

$$y_2(t) = \begin{cases} e^{r_2 t} & \text{si } \Delta>0 \\ t\, e^{r_1 t} & \text{si } \Delta=0 \\ \exp(\mathrm{Re}(r_1)\, t)\ \sin(\mathrm{Im}(r_1)\, t) & \text{si } \Delta<0 \end{cases}$$

$r_1 = r_2$ quand $\Delta = 0$

α β

$\Rightarrow r_2 = \overline{r_1}$

② Solution particulière : « Variation des constantes »

On cherche $y_p(t)$ sous la forme :

$$y_p(t) = A(t)\, y_1(t) + B(t)\, y_2(t).$$

Rmq : On a le droit de supposer

$$A'(t)\, y_1(t) + B'(t)\, y_2(t) = 0$$

car on cherche une seule solution particulière

③ Solution générale :

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)} \qquad t \in \mathbb{R},\quad A, B \in \mathbb{R}$$

(13 février 2024)

Exercice ① :

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = te^{2t}\cos(3t) \qquad (E)$$

① Solution Homogène : Polynôme caractéristique :

$$r^2 - 4r + 3 = 0$$

$$\Delta = 16 - 4\times1\times3 = 4 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_1 = \dfrac{-(-4)+\sqrt{\Delta}}{2\times1} = 3 \\[2ex] r_2 = \dfrac{-(-4)-\sqrt{\Delta}}{2\times1} = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_h(t) = A e^{3t} + B e^{t}} \qquad A, B \in \mathbb{R}$$

② <u>Solution particulière</u> : « variation des constantes »

On cherche y_p sous la forme

$$y_p(t) = A(t)\, e^{3t} + B(t)\, e^{t}$$

$$\Rightarrow \quad y_p'(t) = A'(t)\, e^{3t} + 3A(t)\, e^{3t} + B'(t)\, e^{t} + B(t)\, e^{t}$$

On peut supposer $A'(t)\, e^{3t} + B'(t)\, e^{t} = 0$ $(*)$

$$\Rightarrow \quad y_p''(t) = 3A'(t)\, e^{3t} + 9A(t)\, e^{3t} + B'(t)\, e^{t} + B(t)\, e^{t}$$

On injecte dans (E) :

$$\begin{cases} (*) \\ y_p''(t) - 4y_p'(t) + 3y_p(t) = t e^{2t} \cos(3t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (*) \\ 3A'(t)\, e^{3t} + B'(t)\, e^{t} + A(t)\underbrace{\left[9e^{2t} - 12e^{3t} + 3e^{3t}\right]}_{=0} + B(t)\underbrace{\left[e^{t} - 4e^{t} + 3e^{t}\right]}_{=0} = t e^{2t} \cos(3t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (*) \quad A'(t)\, e^{3t} + B'(t)\, e^{t} = 0 \\ 3A'(t)\, e^{3t} + B'(t)\, e^{t} = t e^{2t} \cos(3t) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B'(t) = -\frac{1}{2} t e^{t} \cos(3t) \\ A'(t) = \frac{1}{2}\, t\, e^{-t} \cos(3t) \end{cases}$$

On calcule une primitive de $B'(t)$:

$$B(t) = \int^{t} B'(x)\, dx = \int^{t} \underbrace{-\frac{1}{2}x}_{f}\, \underbrace{e^{x} \cos(3x)}_{g'}\, dx$$

Pour faire cette iPP, il nous faut $\int g'$ $\rightsquigarrow$ On va faire une autre iPP

iPP : $\int f g' = [fg] - \int f' g$

Mémo : Pour la retrouver :

$$(fg)' = f'g + fg'$$

$$\Rightarrow fg' = (fg)' - f'g$$

$$\Rightarrow \int fg' = [fg] - \int f'g$$

$$I = \int^{t} \underbrace{e^{x}}_{g'}\, \underbrace{\cos(3x)}_{f}\, dx$$

$$\overset{ipp}{=} \left[e^{x} \cos(3x) \right]^{t} - \int e^{x} \times (-3) \sin(3x)\, dx$$

$$= e^{t} \cos(3t) + 3 \int^{t} \underbrace{e^{x}}_{g'} \underbrace{\sin(3x)}_{f}\, dx$$

$$\overset{ipp}{=} e^{t} \cos(3t) + 3\left[e^{x} \sin(3x) \right]^{t} \underbrace{- 3 \int^{t} e^{x} \times 3 \cos(3x)\, dx}_{= -9I}$$

$$= e^{t} \left(\cos(3t) + 3 \sin(3t) \right) - 9 I$$

$$\Leftrightarrow \quad 10 I = e^{t} \left(\cos(3t) + 3 \sin(3t) \right)$$

$$\Leftrightarrow \quad I = \frac{e^{t}}{10} \left(\cos(3t) + 3 \sin(3t) \right)$$

$$B(t) = \int^{t} \underbrace{-\frac{1}{2} x}_{f} \underbrace{\left(e^{x} \cos(3x) \right)}_{g'} dx$$

$$\overset{ipp}{=} \left[f g \right] - \int f' g$$

I d' avant

$$= \left[-\frac{1}{2} x \frac{e^{x}}{10} \left(\cos(3x) + 3 \sin(3x) \right) \right]^{t}$$

$$- \int^{t} -\frac{1}{2} \cancel{x} \frac{e^{x}}{10} \left(\cos(3x) + 3 \sin(3x) \right) dx$$

$$= -\frac{1}{2} t \frac{e^{t}}{10} \left(\cos(3t) + 3 \sin(3t) \right)$$

$$+\frac{1}{20}\underbrace{\int e^{x}\cos(3x)\,dx}_{\substack{=I\text{ d'avant}\\ =\frac{e^t}{10}\left(\cos(3t)+3\sin(3t)\right)}} + \frac{\;}{20}\underbrace{\int e^{x}\sin(3x)\,dx}_{\substack{=\text{ comme pour } I\\ =\frac{e^t}{10}\left(\sin(3t)-3\cos(3t)\right)}}$$

$$= \frac{e^t}{20}\cos(3t)\left[-t+\frac{1}{10}-\frac{9}{10}\right]$$

$$+\frac{e^t}{20}\sin(3t)\left[-3t+\frac{3}{10}+\frac{3}{10}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{B(t) = \frac{e^t}{100}\cos(3t)\left[-5t-4\right] + \frac{e^t}{100}\sin(3t)\left[-15t+3\right]}$$

Des calculs similaires donnent:

$$\boxed{A(t) = \frac{e^{-t}}{100}\cos(3t)\left[4-5t\right] + \frac{e^{-t}}{100}\sin(3t)\left[15t+3\right]}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_p(t)} = A(t)\,e^{3t} + B(t)\,e^{t}$$

$$= \frac{e^{2t}}{100}\Big[\cos(3t)\,(\cancel{4}-5t) + \sin(3t)\,(\cancel{15t}+3)$$

$$+\cos(3t)\,(-5t-\cancel{4}) + \sin(3t)\,(-\cancel{15t}+3)\Big]$$

$$= \frac{e^{2t}}{100}\left[-10t\cos(3t) + 6\sin(3t)\right]$$

③ Solution générale :

$$\boxed{y(t) = A e^{3t} + B e^{t} + \frac{e^{2t}}{100}\left[-10t\cos(3t) + 6\sin(3t)\right]}$$

pour $t \in \mathbb{R}$, $A, B \in \mathbb{R}$