Les Bases
de la Mécanique Quantique

Pierre Botteron, *Université de Toulouse* [1]

- **Einstein.** Einstein dévoile en 1905 l'aspect dual de la lumière [Ein05] : la lumière est à la fois corpusculaire (un ensemble de particules, les *photons*) et ondulatoire (une onde). Ceci est à la base de la mécanique quantique, et il a reçu un prix Nobel pour cela en 1921. Pourtant, il ne croyait pas que le fait de mesurer un état quantique modifie le système : « *Croyez-vous vraiment que la lune n'existe que quand vous la regardez ?* », et il ne croyait pas non plus que le résultat est complètement aléatoire, sans relation de cause à effet : « *Dieu ne joue pas aux dés* ». Avec ses collègues Podolsky et Rosen, il publie même dans un article en 1935 que c'est tellement absurde que ça impliquerait un gros paradoxe [EPR35] : une communication plus rapide que la vitesse de la lumière (selon lui...) ; il décrivait l'intrication quantique comme une « action effrayante à distance ».
- **Grosse découverte théorique.** En 1964, John Bell découvre théoriquement que les particules quantiques ne sont pas soumises aux lois de cause-à-effet de la mécanique classique [Bel64], et que donc certaines stratégies quantiques sont potentiellement meilleures que les stratégies classiques (les stratégies probabilistes).
- **Confirmation expérimentale.** Parmi d'autres scientifiques, le français Alain Aspect a vérifié expérimentalement ces résultats en 1982 [AGR82], et il vient de recevoir un prix Nobel en 2022 pour cela.

A. Qu'est-ce qu'un qubit ? Et un état quantique ?

- **Qubit.** Un qubit est la version quantique d'un bit (en anglais : « quantum bit »). Au lieu d'être simplement juste 0 ou 1, un qubit est un vecteur de norme 1 dans $\mathbb{C}^2$ (pour la norme euclidienne, la norme usuelle $||\cdot||_2$). Notez qu'il y a beaucoup plus de qubits que de bits possibles.
- **Notation de Dirac (1/3).** Dirac a inventé une notation pratique pour les qubits : par exemples, les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ sont des qubits (puisque de norme = 1) et on les note $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Ainsi, un qubit $|\psi\rangle$ peut s'écrire sous la forme $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle$, où α et β sont des nombres complexes tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.
- **Exemples connus de qubits.** $|+\rangle := \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ and $|-\rangle := \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$.
- **État quantique.** On généralise la notion de qubit : un état quantique est modélisé par un vecteur de norme 1 dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. (Rappel : un espace de Hilbert est simplement un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui est complet. En

[1]. Dernière modification : 16 février 2023.

dimension finie, tous les espaces vectoriels normés sont complets.) Un état quantique est aussi noté $|\psi\rangle$ avec la notation de Dirac. Remarque : un qubit est toujours un état quantique, en prenant $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$.

- **Superposition quantique.** Soit $\{|e_1\rangle, \ldots, |e_n\rangle\}$ une base orthonormée de $\mathcal{H}$. Alors, un état $|\psi\rangle$ de $\mathcal{H}$ peut se décomposer dans la base : $|\psi\rangle = \alpha_1|e_1\rangle + \cdots + \alpha_n|e_n\rangle$, avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, on dit que $|\psi\rangle$ est une superposition des états $|e_1\rangle, \ldots, |e_n\rangle$, et sa probabilité d'être dans l'état $|e_i\rangle$ pour un certain i est modélisé par $|\alpha_i|^2$.

B. Comment mesurer un état quantique ?

Dans la mécanique classique, on peut facilement mesurer la vitesse d'un objet, sa position, sa masse, etc... sans impacter le système. En d'autres termes, étant donné un système dans un certain état, on peut mesurer une quantité (une « observable ») sans trop causer de problème. Mais voyons ce qu'il se passe avec les états quantiques. Voir [Pel08, Section 1.1] pour plus de détails (en français en plus !).

- **Observable quantique.** L'observable quantique est modélisée par une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = A^*$, où A^* est la matrice adjointe de A (*i.e.* $A^* = A$). On dit qu'une telle matrice A est *auto-adjointe*. L'observable est la quantité que l'on veut mesurer (par exemple, la vitesse d'une voiture dans le cas de la mécanique classique).
- **Théorème.** Une matrice auto-adjointe à coefficients complexes est toujours diagonalisable en base orthonormée, *i.e.* elle admet toujours des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ (elles sont reélles car $A = A^*$) et des vecteurs propres associées $|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle$ qui forment un BON de $\mathcal{H}$.
- **Valeurs possibles d'une observable.** Les différentes valeurs possibles que peut prendre une observable A sont modélisées par les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A. Exemple : si l'observable A était « la couleur d'un stylo », on pourrait avoir par exemple $\lambda_1 =$ « rouge », $\lambda_2 =$ « vert », $\lambda_3 =$ « bleu », $\lambda_4 =$ « noir ». Dans notre cas, les λ_i seront simplement des nombres réels.
- **Mesurer la valeur d'une observable.** On note $|v_i\rangle$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, *i.e.* on a $A\,|v_i\rangle = \lambda_i\,|v_i\rangle$ pour tout i. Lorsque l'on mesure une observable A

$$\mathbb{P}\Big(\text{observer la valeur } \lambda_i \text{ d'une observable } A \text{ à partir d'un état } |\psi\rangle\Big) := \Big|\langle v_i, \psi\rangle\Big|^2.$$

- **Notation de Dirac (2/3).** On peut voir $\langle v_i|$ comme une application $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ qui à partir d'un vecteur $|\psi\rangle$ donne le nombre $\langle v_i, \psi\rangle \in \mathbb{C}$. Ainsi, à la place d'écrire $\langle v_i, \psi\rangle$, on peut plutôt noter $\langle v_i\,|\,\psi\rangle$, comme si l'on appliquait la fonction $\langle v_i|$ au vecteur $|\psi\rangle$.
- **Projecteurs spectraux.** En utilisant cette notation, on peut définir $P_i := |v_i\rangle\langle v_i|$ qu'on appelle *projecteur spectral*, et on a alors $A = \sum_i \lambda_i P_i$ et la probabilité ci-dessus se simplifie en $\mathbb{P}(...) = \Big|\Big|\,P_i\,|\psi\rangle\,\Big|\Big|^2$.
- **Réduction du paquet d'ondes.** Il se passe un truc un peu mystérieux en mécanique quantique : quand on mesure un état, l'état change... C'est comme si, en mesurant la position d'une voiture, on déformait la voiture... Immédiatement après avoir mesuré l'observable A sur un état $|\psi\rangle$ et que l'on a obtenu une certaine valeur λ_i (pour un

certain i), alors $|\psi\rangle$ devient automatiquement $|\widetilde{\psi}\rangle := \frac{P_i\,|\psi\rangle}{\left\| P_i\,|\psi\rangle \right\|}$. Ce phénomène s'appelle la *réduction du paquet d'ondes*. De plus, ce qui est impressionnant, c'est que l'état est maintenant figé : si l'on mesure à nouveau l'observable A sur le nouvel état $|\widetilde{\psi}\rangle$, alors on obtiendra forcément la même valeur λ_i qu'avant, on n'a plus l'aspect aléatoire du résultat, on n'a plus de superposition quantique comme avant.

C. Qu'est-ce que le produit tensoriel ?

Le produit tensoriel modélise la notion d'indépendance entre deux sous-systèmes (ou plus).

- **Produit tensoriel de matrices.** Aussi appelé *produit de Kronecker* (voir page Wikipedia). Si l'on a deux matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{C})$, alors on définit une nouvelle matrice $A \otimes B \in \mathcal{M}_{mp\ \times nq}(\mathbb{C})$ par (avec la notation de matrice par blocs) :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

  Si l'on a des matrices A et B et des vecteurs v et w, alors $(A\otimes B)(v\otimes w) = (Av)\otimes(Bw)$.

- **Produit scalaire d'un produit tensoriel.** $\langle a \otimes b \,|\, c \otimes d\rangle := \langle a \,|\, c\rangle \,\langle b \,|\, d\rangle$.
- **Produit tensoriel d'espaces de Hilbert.** Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont des espaces de Hilbert, alors $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ est un autre espace de Hilbert, définit comme l'espace vectoriel engendré par les produits tensoriels de vecteurs :

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}' \ := \ \mathrm{vect}\left\{|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \ : \ |\psi\rangle \in \mathcal{H}, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}'\right\}.$$

  Donc les éléments de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ s'écrivent sous la forme $\sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle \otimes |\varphi_i\rangle$ pour certains $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$, $|\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}'$ et $\alpha_i \in \mathbb{C}$.
- **État intriqué.** Un état $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ est dit *séparé* s'il peut s'écrire sous la forme $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ avec $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ et$|\varphi\rangle \in \mathcal{H}'$. Si ce n'est pas possible, alors on dit que $|\Psi\rangle$ est *intriqué*. Exemple : l'état $|\Omega\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes |1\rangle$ est intriqué car il ne peut pas se réduire sous la forme d'un état séparé.
- **Notation de Dirac (3/3).** L'état $|0\rangle \otimes |0\rangle$ est simplement noté $|00\rangle$, et de même l'état $|1\rangle \otimes |1\rangle$ est simplement noté $|11\rangle$. Ainsi, l'état intriqué ci-dessus se reformule en $|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$.
- **Puissance de l'intrication quantique.** L'état intriqué $|\Omega\rangle$ ci-dessus est composé de 2 particules : une dans $\mathcal{H}$ et une autres dans $\mathcal{H}'$. On en donne une à Alice et l'autre à Bob. Si Alice mesure sa particule et qu'elle obtient $|0\rangle$, alors on sait que Bob obtiendra aussi le même résultat s'il fait la même mesure de son côté sur sa particule : il obtiendra aussi $|0\rangle$, même s'il fait sa mesure instantanément après celle d'Alice.

D. Retour au jeu `CHSH`

...
- Dessiner un état intriqué

Références

[**AGR82**] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment : A new violation of bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :91–94, Jul 1982.
DOI : 10.1103/PhysRevLett.49.91.

[**Bel64**] J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1 :195–200, Nov 1964.
DOI : 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195.

[**Ein05**] A. Einstein. Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtes betreffenden heuristischen gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 322(6) :132–148, 1905.
DOI : 10.1002/andp.19053220607.

[**EPR35**] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ? *Phys. Rev.*, 47 :777–780, May 1935.
DOI : 10.1103/PhysRev.47.777.

[**Pel08**] Clément Pellegrini. *Existence, unicité et approximation des équations de Schrödinger stochastiques.* Thesis, Université Claude Bernard - Lyon I, June 2008. Cette thèse a reçue le prix 2008 de la fondation EADS dans la section “mathématiques et leurs interactions”.
PDF : https://theses.hal.science/tel-00334668/file/These_Clement.pdf.