$y'(t) + a(t)\, y(t) = b(t)$ (E)

① Équation homogène :

$y_h'(t) + a(t)\, y_h(t) = 0$

$\frac{y_h'(t)}{y_h(t)} = -a(t)$ (! pas de div par 0)

$\Rightarrow \ln(y_h(t)) = -\int^t a(x)\,dx + C$

$\Rightarrow \boxed{y_h(t) = K\exp\left(-\int^t a(x)\,dx\right)}$ $K \in \mathbb{R}$

② Solution particulière :

" variation de la cte "

On supp. que $y_p(t) = K(t)\exp\left(-\int^t a(x)\,dx\right)$

⇝ On injecte dans (E) et on résout.

③ Solution générale.

$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$

Exercice 1 : (2 février 2024)

1. $y' + 2y = e^t$

* EH : $y_H' + 2y_H = 0 \Rightarrow \boxed{y_H = Ke^{-2t}}$

* EP : méthode de la variation de la constante.

$y_p = K(t)e^{-2t}$

$y_p' = K'(t)e^{-2t} - 2K(t)e^{-2t}$

on injecte : $K'(t)e^{-2t} - \cancel{2K(t)}e^{-2t} + \cancel{2K(t)}e^{-2t} = e^t$

$\Leftrightarrow K'(t) = \frac{e^t}{e^{-2t}} = e^t e^{2t} = e^{3t}$

$K(t) = \frac{1}{3}e^{3t} + \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

donc on a : $y_p(t) = \left(\frac{1}{3}e^{3t} + \alpha\right)e^{-2t}$

* SG : $y(t) = y_H(t) + y_p(t)$

$\Leftrightarrow y(t) = Ke^{-2t} + \left(\frac{1}{3}e^{3t} + \alpha\right)e^{-2t} \qquad k = K + \alpha \in \mathbb{R}$

e^t

$\Leftrightarrow \boxed{y(t) = ke^{-2t} + \frac{1}{3}e^t}$

(2) $y' - y = e^t \quad (E)$

* Eq homogène : $y' - y = 0 \Rightarrow \boxed{y_h = h e^t}$
* Solution particulière :

$$y_p(t) = k e^t \quad \text{et} \quad y_p'(t) = k' e^t + k e^t$$

dans (E) :

$$k' e^t + k e^t - k e^t = e^t$$

$$\Rightarrow k' e^t = e^t \quad \Rightarrow k' = 1$$

On intègre k' : $\boxed{k = t}$

$$\boxed{y_p = t e^t}$$

* Solution générale :

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = h e^t + t e^t$$

$$\boxed{y(t) = (h + t)\, e^t} \quad h \in \mathbb{R}, \; t \in \mathbb{R}$$

(3) $y' + ty = t$

homogène : $K e^{-\frac{1}{2}t^2} = y_h(t)$

sol particulière

$$y_p(t) = K(t) e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$y_p'(t) = (K'(t) - K(t) \cdot t) e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

On injecte $y' + ty = t$

$$K'(t) e^{-\frac{1}{2}t^2} = t$$

$$K'(t) = t e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$K(t) = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

$$y(t) = Ke^{-\frac{1}{2}t^2} + \underbrace{e^{\frac{1}{2}t^2} e^{-\frac{1}{2}t^2}}_{=1}$$

$$\boxed{= Ke^{-\frac{1}{2}t^2} + 1}$$

$K \in \mathbb{R}$

$t \in \mathbb{R}$

4) $y' + y = \cos(t)$

EH: $y_H' + y_H = 0 \Rightarrow \frac{y_H'}{y_H} = -1 \Rightarrow y_H(t) = Ke^{-t}$

SP:

On pose $y_p(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$

$y_p'(t) = -A\sin(t) + B\cos(t)$

$\Rightarrow (A+B)\cos(t) + (B-A)\sin(t) = \cos(t)$

$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ B-A=0 \end{cases} \Rightarrow 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} = B$

$\Rightarrow y_p(t) = \frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t))$

$\Rightarrow y(t) = \boxed{\frac{1}{2}(\cos(t) + \sin(t)) + Ke^{-t}}$ $\quad (t, K) \in \mathbb{R}^2$

⑤ $y' + \tan(t)\, y = 1$

Solution homogène : $y_h = K e^{+\ln|\cos t|}$

$y_h = K|\cos(t)| = K\cos(t)$

car $t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

Solution particulière :

$y_p = K\cos(t)$

$y_p' = K'\cos(t) - K\sin(t)$

$$K'\cos(t) - K\sin(t) + \underbrace{\tan(t) \times K \times \cos(t)}_{K\sin(t)} = 1$$

$K'\cos(t) = 1$

$K' = \frac{1}{\cos(t)} \longrightarrow K = \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

astuce $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ (changement de variable)

$$\boxed{y(t) = K\cos(t) + \ln\left(\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)\cos(t)}$$

$K \in \mathbb{R}$ $\qquad t \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

Exercice ② : (6 février 2024)

$\boxed{1.1}$ ⊛ Équation Homogène : $y_h'(t) + \frac{1}{t} y_h(t) = 0$

pour $]0,+\infty[$: $\ln(t)$

pour $]-\infty, 0[$: $\ln(|t|)$

$\Leftrightarrow \frac{y_h'(t)}{y_h(t)} = -\frac{1}{t}$ ↘ $\int$

$\Leftrightarrow \ln(y_h(t)) = -\ln(|t|) + c$

$\Leftrightarrow \ln(y_h(t)) = \ln\left(\frac{1}{|t|}\right) + c$

$\Leftrightarrow y_h(t) = e^{\ln\left(\frac{1}{|t|}\right)+c} = \frac{1}{|t|} e^c$

$\Leftrightarrow \boxed{y_h(t) = K\frac{1}{|t|}} = \begin{cases} K/t & \text{si } t \in I_1 \\ -K/t & \text{si } t \in I_2 \end{cases}$

⊛ Equation Particulière :

$$K'(t)\frac{1}{|t|} - K(t)\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}K(t)\frac{1}{|t|} = \frac{2}{t^2+1}$$

∘ pour $t \in]0,+\infty[$ $\quad K'(t)\frac{1}{t} - K(t)\frac{1}{t^2} + K(t)\frac{1}{t^2} = \frac{2}{t^2+1}$

$t \in I_1$ $\quad \boxed{y_p(t) = \ln(t^2+1)\cdot\frac{1}{t}}$

∘ pour $t \in]-\infty,0[$ $\quad y_p(t) = K(t)\frac{1}{|t|} = -K(t)\frac{1}{t}$

$$y_p'(t) = -K'(t)\frac{1}{t} + K(t)\frac{1}{t^2}$$

on injecte : $-K'(t)\frac{1}{t} + \cancel{K(t)\frac{1}{t^2}} - \frac{1}{t}\cancel{K(t)\frac{1}{t}} = \frac{2}{t^2+1}$

$\Leftrightarrow \quad K'(t) = -\frac{2t}{t^2+1}$

$\downarrow \int$

$\Rightarrow \quad K(t) = -\ln(t^2+1) =$

pour $t \in I_2$ on a $y_p(t) = -\ln(t^2+1)\frac{1}{-t} = \boxed{\ln(t^2+1)\frac{1}{t}}$

⊛ Solution générale :

$$\boxed{y(t) = \frac{K}{|t|} + \frac{1}{t}\ln(t^2+1)}$$

$K \in \mathbb{R}$

$t \in \mathbb{R}^* \ (I_1 \cup I_2)$

$\boxed{1.2}$ Règle de l'Hôpital : si $f,g : [a,b[\to \mathbb{R}$ sont dérivables en a et que $f(a) = 0 = g(a)$ et que $g'(a) \neq 0$, alors

$$\lim_{t \to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

On prend $k=0$ donc $g(t) = \frac{\ln(t^2+1)}{t}$

ici $f(t) = \ln(t^2+1)$ $\quad g(0)=0$

$g(t) = t$

$$\begin{cases} g'(t) = 1 \text{ donc } g'(0)=1 \\ f(0) = \ln(1) = 0 \\ f'(t) = \frac{2t}{t^2+1} \quad f'(0) : 0 \end{cases}$$

$$\cdot \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cdot \lim_{t \to 0^-} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{0}{1} = 0$$

Donc g se prolonge de manière continue en 0

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} \quad \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{\ln(t^2+1)}{t} - 0}{t}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln(t^2+1)}{t^2} \sim \frac{t^2}{t^2} = 1$$

Pareil pour $\lim_{t \to 0^-}$

Donc y est dérivable en 0 et $y'(0) = 1$

(Pour $K \neq 0$, $y(t)$ n'est pas prolongeable en 0. C'est pourquoi la solution sur $\mathbb{R}$ tout entier est unique, seulement pour $K = 0$).