TD 4

Séries Entières & EDO

Rappels :

- Les <u>séries entières</u> sont un cas particulier de série de fonction, de la forme :

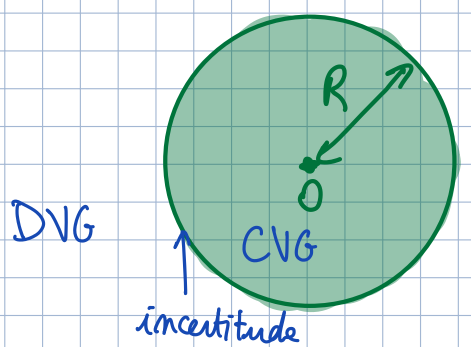
$$\sum_n a_n z^n \quad \text{avec } z \in \mathbb{C},\ a_n \in \mathbb{C} \qquad \left(\text{ou } \sum_n a_n x^n \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},\ a_n \in \mathbb{R}\right)$$

- Elles sont intéressantes car :

① En $z=0$, on a toujours convergence.

② elles ont un rayon de convergence :

$$R := \sup \left\{ r \geq 0 \;\middle|\; \sum_n a_n r^n \text{ converge} \right\}$$



$\rightarrow$ Disque de convergence de la série « $D(0, R)$ »

③ **Thm :** la série entière $\sum_n a_n z^n$ converge <u>normalement</u> sur tout ensemble $K \subseteq D(0,R)$ fermé et borné.

④ La série entière DVG en dehors de $D(0,R)$

- Grâce au Thm, on peut toujours appliquer "l'intuition" du TD 3 : on peut dériver facilement, on peut intégrer facilement, etc...

Exo 1 :

1. Indice : "Série géométrique"

$\sum_n q^n$ converge vers $\frac{1}{1-q}$ ssi $|q|<1$

$$R = \sup\{r \geq 0, \sum a_n r^n \text{ CV}\}$$

$$u_n^{(z)} = \frac{(-1)^n z^{2n}}{2^n} = \left(\frac{(-1) z^2}{2}\right)^n = q^n$$

donc CV ssi $|z|^2 < 2$ (ssi $|q|<1$)

$|z| < \sqrt{2}$

Donc $R = \sqrt{2}$ et $D = D(0, \sqrt{2})$

Question : Quelle est l'expression de a_n ?

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2^k} & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_n a_n z^n = \sum_k \frac{(-1)^k}{2^k} z^{2k}$$

Rmk : c'est possible aussi avec la Règle de d'Alembert.

(2) Grâce à l'indice, on obtient :

$\forall x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[,$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \qquad \text{avec} \qquad q = \frac{-x^2}{2}$$

$$= \frac{1}{1-q}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{-x^2}{2}} = \boxed{\frac{2}{2+x^2}}$$

c'est la somme de la série

(3) $$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n}$$

On a convergence normale à l'intérieure du disque, donc on peut dériver terme-à-terme :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, 2n \, x^{2n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, n \, x^{2n-1}}{2^{n-1}}$$

car en $n=0$, la dérivée $=0$

On évalue en $x = 1 \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$:

$$S'(1) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} \right) \times 2$$

D'autre part on avait calculé $S(x) = \frac{2}{2+x^2}$,

Donc :

$$S'(1) = -\frac{4}{9}$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} = -\frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{2}{9}}$

Exo 2 :

1. Utiliser le critère de d'Alembert :

- calculer $\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$
- Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n(z)$ CVG
- Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n(z)$ DVG
- Si $\ell = 1$: incertitude

On a : $u_n(x) = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)} \neq 0$ pour $x \neq 0$

$\Rightarrow \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2 = \ell$

$\Rightarrow$ la série CVG si $\ell < 1$

i.e. $x^2 < 1$

i.e. $x \in]-1, 1[$

et elle diverge pour $|x| > 1$

Donc $\boxed{R = 1}$

2. $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

$\Rightarrow \ln(1+x^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$

n

On a convergence normale à l'intérieur de $]-1,1[$, donc on peut intégrer terme-à-terme :

$$\int^{u} \ln(1+x^2)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int^{u} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}\,dx$$

$\Rightarrow$ calculs ...

$$\Rightarrow \boxed{x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{Arctan}(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)} = S(x)$$

③ $\|u_n(z)\|_{\infty,[-1,1]} = \dfrac{1}{n(2n+1)}$

$\Rightarrow \sum_n \|u_n(z)\|_\infty = \sum_n \dfrac{1}{n(2n+1)}$ CVG par Riemann

$\Rightarrow$ CVG normale sur $[-1,1]$.

$\Rightarrow$ $S(x)$ est continue sur $[-1,1]$

$$\Rightarrow S(1) = \lim_{x\to 1} S(x) = \lim_{x\to 1}\left(x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{Arctan} x\right)$$

$$= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

$$S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}$$

D'où
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}}.$$