TD SIGNAL

Lundi 29 avril 2024 :

Exercice 1 :

① Soit $u = x - T$, $x = u + T$; $f(x) = f(u+T)$ $\qquad \frac{dx}{du} = 1$ donc $dx = du$

Bornes : $x = T \Rightarrow u = 0$
$x = T + a \Rightarrow u = a$

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u+T)\,du$$

or $\forall u \in \mathbb{R}, f(u+T) = f(u)$ donc $\boxed{\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du}$

② La fonction f n'est pas dependante au niveau de periodicité avec a. Utilisons donc une autre methode.

Donc : $\quad$ * = ⟹ Dev chasles

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \underbrace{\int_T^{T+a} f(x)\,dx}$$

$$= \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \boxed{\int_0^T f(x)\,dx}$$

Exercice 2 :

- P est continue et (2π)- périodique

$\Rightarrow$ On peut appliquer la formule de $c_n(f)$ pour $f = P$ et $T = 2\pi$.

- [<u>Indice</u> : $e^{i 2\pi n} = 1$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$

- $$c_n(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \left(e^{-inx}\right) dx$$
$$= \sum_{k=-N}^{N} \underbrace{\frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} e^{ikx - inx} dx}$$

$k \neq n$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \left[\frac{e^{ikx - inx}}{ik - in} \right]_0^{2\pi}$$
$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \left(\frac{e^{ik2\pi - in2\pi}}{ik - in} - \frac{1}{ik - in} \right) \quad e^{ik2\pi - in2\pi} = 1$$
$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k (0)$$
$$\boxed{= 0}$$

$k = n$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} 1 \, dx$$
$$\boxed{= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} c_k} = c_n$$

$$\Rightarrow c_n(P) = \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k \neq n}}^{N} 0 + \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k = n}}^{N} c_n$$

$$\boxed{= \begin{cases} c_n & \text{si } n \in [-N, N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Exercice 3 : Mardi 30 avril 2024

1. • f est paire donc $f(-x) = f(x)$.

• Grâce à l'Exercice 1, on peut écrire :

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

$u = -x$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_{-T/2}^{0} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi n x}{T}\,dx - \int_0^{T/2} f(u)\sin\left(\frac{2\pi n u}{T}\right)du\right)$$

$$= \frac{2}{T}\times 0 \boxed{= 0}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_{-T/2}^{0} f(-x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_0^{T/2} f(u)\cos\left(\frac{2\pi n u}{T}\right)du\right)$$

$$= \boxed{\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx}$$

2. $$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left[-\int_0^{T/2} f(u)\cos\left(\frac{2\pi n u}{T}\right)du + \int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right]$$

$$\boxed{= 0}$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^{T} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(u)\sin\left(\frac{2\pi n u}{T}\right)du + \int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right)$$

$$\boxed{= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx}$$

Exo 4 :

① Utiliser la formule $\overline{\int g(t)\,dt} = \int \overline{g(t)}\,dt$

On calcule $c_n(\overline{F}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{F(x)}\, e^{-inx}\,dx$

puis $\overline{c_{-n}(F)} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\, e^{inx}\,dx}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{F(x)}\;\overline{e^{inx}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{F(x)}\; e^{-inx}\,dx$$

La fonction est continue et 2π-périodique

On a donc $\boxed{c_n(\overline{F}) = \overline{c_{-n}(F)}}$

② $g : t \mapsto f(-t)$, f est C^0 et 2π périodique

donc g est également C^0 et 2π périodique

Nous pouvons donc appliquer la formule de c_n.

- $c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{inx}\,dx$
- $c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-x)\, e^{-inx}\,dx$

Prenons $u = -x$, $\frac{du}{dx} = -1 \iff du = -dx$

On a donc

$$C_n(g) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{-2\pi} f(u)\, e^{inu}\, du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(u)\, e^{inu}\, du$$

Nous avons vu que f et g sont 2π periodique, donc

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(u)e^{inu}\, du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\, e^{inu}\, du}$$

CCL : les deux intégrales sont égales !!

3 h_a est C^0 et 2π périodique car f l'est aussi et a est fixé

$$c_n(h_a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+a)e^{-nxi}\, dx$$ Soit $u = x+a$, $x = u-a$

$f(x+a) = f(u)$ $\qquad \frac{dx}{du} = 1 \Rightarrow dx = du$ $\qquad x=0 \Rightarrow u=a$

$e^{-inx} = e^{-inu+ina}$ $\qquad x = 2\pi \Rightarrow u = 2\pi+a$

$$C_n(h_a) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}e^{ina}\, du = \frac{e^{ina}}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}\, du$$

Donc $$\frac{e^{ina}}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}du = \frac{e^{ina}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}du = \boxed{e^{ina}\, c_n(f)}$$

Exercice 5 :

1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- périodique, $f = 1$ sur $]0,\pi[$

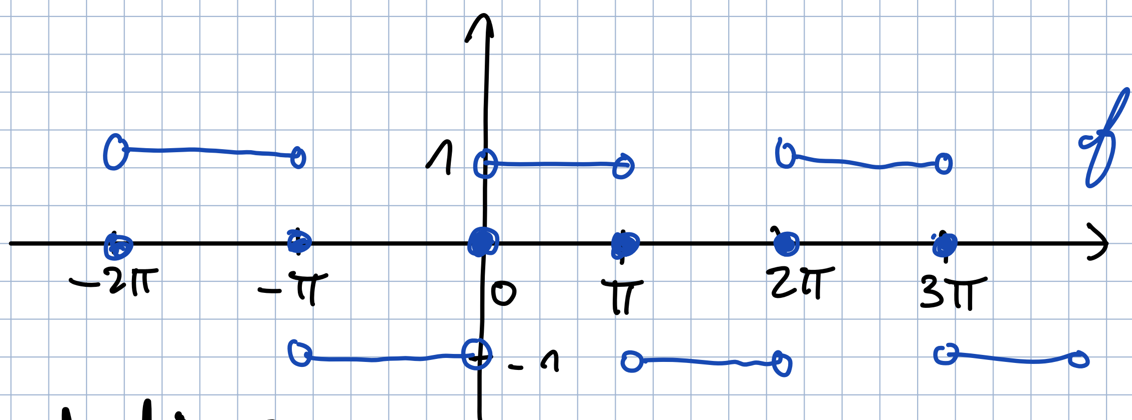
impaire : $f(-x) = -f(x)$

- $f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

• $f(\pi) \underset{\text{par } 2\pi \text{ périodicité}}{=} f(\pi - 2\pi) = f(-\pi) \underset{\text{imparité}}{=} -f(\pi)$

$\Rightarrow \boxed{f(\pi) = 0}$

(2)



Vendredi 3 mai 2024 :

(3) f est constante par morceaux

$\Rightarrow$ dérivable par morceaux de dérivée $=0$ continue

$\Rightarrow \boxed{f \in \mathcal{C}^1}$

(4) Grâce à l'exo 3, $a_n(f) = 0$

f est impaire et 2π périodique.

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)\,dx\right) \qquad \begin{aligned} u &= -x \\ du &= -dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx + \int_0^{\pi} \sin(nu)\,du\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$

$= -\frac{2}{\pi n} \times ((-1)^n - 1)$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } n \text{ pair : } b_n(f) = 0 \\ \text{si } n \text{ impair : } b_n(f) = \frac{4}{\pi n} \end{array}}$

⑤ Indice 1 : Combiner Thm 7 page 23 ("Dirichlet") avec Def 13 page 19

Indice 2 : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{paire} \\ (n=2k)}}^{+\infty} a_n + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impaire} \\ (n=2k+1)}}^{+\infty} a_n$

$= \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}$

⑤ Def 13 p 19 :

$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$

On sait que $a_0(f)$ et $a_n(f) = 0$ car question 4

$S_N(f)(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi n}\left(-(-1)^n + 1\right)\sin(nx)$

$= \underset{(n \text{ paire})}{\sum_{n=2}^{N} 0} + \underset{(n \text{ impaire})}{\sum_{n=1}^{N} \frac{4}{\pi n} \sin(nx)}$

$= \sum_{k=0}^{?} \frac{4\sin((2k+1)x)}{\pi(2k+1)}$

$n = 2k+1$

$k = \frac{n-1}{2}$

pour $n = 1$

$k = 0$

pour $n = N$

$k = \frac{N-1}{2}$

$n=k$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \frac{4\sin((2n+1)x)}{\pi(2n+1)}$$

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\sin((2n+1)x)}{\pi(2n+1)} = \tilde{f}(x)}$$

car Th de Dirichlet.

6) On a determiné à la question précédente que

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)}.$$

afin de correspondre à la question 6, on cherche x tq $\sin[(2n+1)x] = (-1)^n$

Essayons pour $n=0 \to \sin(2\times 0+1)\times x = \sin(1\times x)$

Ainsi on remarque que x doit être $\pm\frac{\pi}{2}$ pour $n=0$.

Prenons $x=\frac{\pi}{2}$:

n	$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$
0	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$
1	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
2	$\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$

On remarque qu'il y a une repetition. Prenons donc $x=\frac{\pi}{2}$

On obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\overbrace{\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}^{=(-1)^n}}{(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

En prenant le th de Dirichlet page 23, on a

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right) \quad \text{avec } x = \frac{\pi}{2}$$

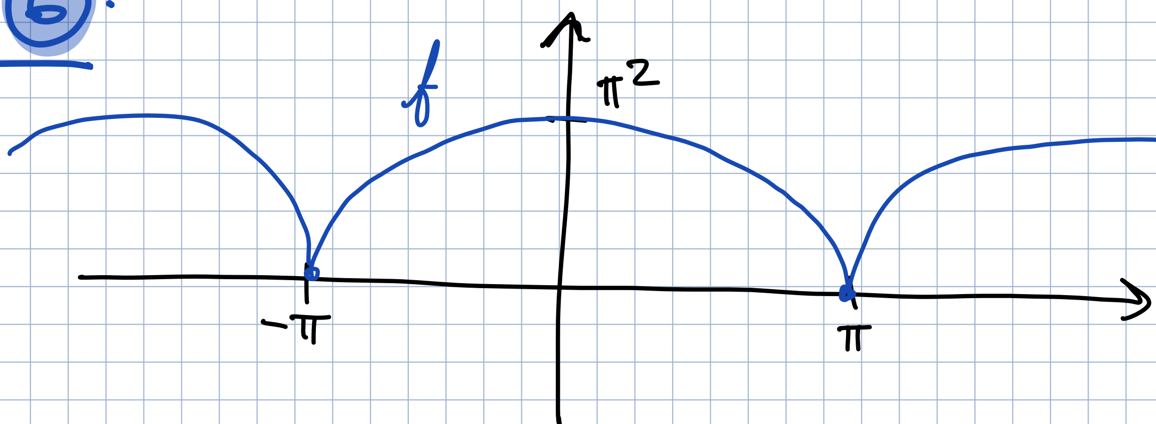
Nous avons vu à la question 2 que $f(x^-) = f(x^+) = f(x) = 1$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

Ainsi $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Exo 6 :

1



2 • f est continue sur $]-\pi, \pi[$

Or $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to \pi^+} f(x)$

$\Rightarrow$ f continue sur $[-\pi, \pi]$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ continue sur } \mathbb{R}}$ par 2π - pér.

• $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}}$

(même $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux !!)
car polynomiale sur $]-\pi ; \pi[$
et 2π-périodique.

③