Les Bases Mathématiques de la Mécanique Quantique

Pierre Botteron [1], *Université de Toulouse.*

- **Einstein.** Einstein dévoila en 1905 l'aspect dual de la lumière [Ein05] : la lumière est à la fois corpusculaire (un ensemble de particules, les *photons*) et ondulatoire (une onde). Ce phénomène est si important en mécanique quantique qu'il reçu un prix Nobel en 1921. Pourtant, il ne croyait pas en la modification d'un système simplement par l'observation : « *Croyez-vous vraiment que la lune n'existe que quand vous la regardez ?* », et il ne croyait pas non plus que le résultat puisse donner des résultats *complètement* aléatoire, sans relation de cause à effet : « *Dieu ne joue pas aux dés* ». Avec ses collègues Podolsky et Rosen, il alla même jusqu'à publier dans un article en 1935 un paradoxe induit par la mécanique quantique [EPR35] : selon sa compréhension des choses, l'intrication quantique permettrait une communication plus rapide que la vitesse de la lumière, ce qui serait un vrai désastre, ou plus précisément une « action effrayante à distance » selon ses mots.
- **Grosse découverte théorique.** Plus tard, en 1964, John Bell découvrit théoriquement que les particules quantiques ne sont pas soumises aux lois de cause-à-effet de la mécanique classique [Bel64]. En termes de jeu `CHSH`, ceci implique que certaines stratégies quantiques sont bien meilleures que les stratégies classiques (les stratégies probabilistes).
- **Confirmation expérimentale.** Quelques années après, en 1982, le scientifique français Alain Aspect (parmi d'autres) confirma expérimentalement l'existence de ces particules intriquées dans la nature [AGR82]. C'est la raison pour laquelle il vient d'être honoré d'un prix Nobel en 2022. La classe !

A. Qu'est-ce qu'un qubit ? Et un état quantique ?

- **Qubit.** Un qubit est la version quantique d'un bit (en anglais : « quantum bit »). Au lieu d'être simplement juste 0 ou 1, un qubit est un vecteur de norme 1 dans $\mathbb{C}^2$ (pour la norme euclidienne, la norme usuelle $||\cdot||_2$). Notez qu'il y existe beaucoup plus de qubits possibles que de bits.
- **Notation de Dirac (1/3).** Dirac a inventé une notation pratique pour les qubits : par exemple, les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ sont des qubits (puisque qu'ils sont de norme $= 1$) et on les note $|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ et $|1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Ainsi, un qubit $|\psi\rangle$ peut s'écrire sous la

|1|. Pour la dernière version à jour : https://pierre-botteron.github.io/

Dernière modification : le 7 juin 2023. Les exercices proposés sont là pour aider à la compréhension des notions et préparent le terrain pour pouvoir répondre aux questions de la dernière partie.

forme $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle$, où α et β sont des nombres complexes tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

- **Exemples connus de qubits.** $|+\rangle := \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ et $|-\rangle := \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.
- **État quantique.** On généralise la notion de qubit : un état quantique est modélisé par un vecteur de norme 1 dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. (Rappel : un espace de Hilbert est simplement un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui est complet. En dimension finie, tous les espaces vectoriels normés sont complets, donc ne vous inquiétez pas si cette notion est floue, retenez surtout qu'on dispose d'un produit scalaire.) Un état quantique est aussi noté $|\psi\rangle$ avec la notation de Dirac. Remarque : un qubit est un état quantique en prenant $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$.
- **Superposition quantique.** Soit $\{|e_1\rangle, \ldots, |e_n\rangle\}$ une base orthonormée (« BON ») de $\mathcal{H}$. Alors, un état $|\psi\rangle$ de $\mathcal{H}$ peut se décomposer dans la base : $|\psi\rangle = \alpha_1|e_1\rangle + \cdots + \alpha_n|e_n\rangle$, avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, on dit que $|\psi\rangle$ est une superposition des états $|e_1\rangle, \ldots, |e_n\rangle$, et sa probabilité d'être dans l'état $|e_i\rangle$ pour un certain i est modélisé par $|\alpha_i|^2$.

Exercice 1. (1) Montrer que les vecteurs $|+\rangle$ et $|-\rangle$ sont bien des qubits.

(2) Trouver un coefficient $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que le vecteurs $\frac{1}{3}|e_1\rangle + \frac{1}{4}|e_2\rangle + \alpha|e_3\rangle$ de $\mathbb{C}^3$ soit un état quantique. Ce coefficient α est-il unique ?

(3) Trouver une condition sur les $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour qu'une superposition quantique $|\psi\rangle = \alpha_1|e_1\rangle + \cdots + \alpha_n|e_n\rangle$ soit bien un état quantique.

B. Comment mesurer un état quantique ?

En mécanique classique, on peut facilement mesurer la vitesse d'un objet, sa position, sa masse, etc... sans impacter le système. En d'autres termes, étant donné un système dans un certain état, on peut mesurer une quantité (une « observable ») sans trop le perturber. Mais nous allons voir que ce n'est pas le cas avec les états quantiques : lorsqu'on les mesure, on les modifie... Voir [Pel08, Section 1.1] pour plus de détails (en français en plus !). À partir de maintenant, on prend $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$.

- **Observable quantique.** L'observable quantique est modélisée par une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = A^*$, où A^* est définie comme la *matrice adjointe* de A (*i.e.* $A^* := \overline{A^\top}$). On dit qu'une telle matrice A est *auto-adjointe* (ou bien *Hermitienne*). L'observable est la quantité que l'on veut mesurer (par exemple, la vitesse d'une voiture dans le cas de la mécanique classique).

Théorème. *Une matrice carrée auto-adjointe est toujours diagonalisable en base orthonormée et ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont réelles. En d'autres termes, elle admet toujours des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et des vecteurs propres associées $|v_1\rangle, \ldots, |v_n\rangle$ qui forment une BON de $\mathcal{H}$.*

$\rightsquigarrow$ Dans ce cas-là, on peut écrire $A = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Q_j$, où $Q_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice qui projette orthogonalement un vecteur $|v\rangle \in \mathcal{H}$ sur l'espace vectoriel engendré par $|v_j\rangle$.

$\rightsquigarrow$ Pour éviter le problème des valeurs propres qui se répètent, on peut reformuler le théorème comme suit : toute matrice auto-adjointe A peut s'écrire sous la forme :

$$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i P_i \,, \tag{$\star$}$$

où $k \leq n$, où les λ_i sont les valeurs propres de A deux-à-deux distinctes et réelles, et où les $P_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont les projections orthogonales sur les sous-espaces propres E_{λ_i}. Les matrices P_i sont appelées *projecteurs spectraux*.

- **Valeurs d'une observable.** Lorsque l'on mesure une observable A, les différentes valeurs possibles que l'on peut obtenir sont modélisées par les valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de A. Exemple : si l'observable A modélisait « le spin d'une particule », on pourrait la modéliser sous la forme $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (qui est bien une matrice auto-adjointe !), et on aurait $\lambda_1 = 1$ qui modélise le « spin up », et $\lambda_2 = 0$ qui modélise le « spin down », ce sont les deux seules valeurs qu'on peut obtenir en mesurant cette observable.
- **Mesurer la valeur d'une observable.** En mécanique quantique, lorsque l'on mesure la valeur d'une observable, on n'obtient pas un résultat "déterministe" : le résultat est aléatoire parmi les λ_i suivant la loi de probabilité suivante. En reprenant les notations de ($\star$) du théorème ci-dessus, on modélise la probabilité d'obtenir la valeur λ_i par :

  $$\mathbb{P}\Big(\text{observer la valeur } \lambda_i \text{ d'une observable } A \text{ à partir d'un état } |\psi\rangle\Big) := \Big|\Big| P_i \,|\psi\rangle \Big|\Big|_2^2 .$$

  Rappel : P_i est une matrice, et $|\psi\rangle$ est un vecteur, donc le produit $P_i\,|\psi\rangle$ est un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et on peut facilement en calculer la norme 2.
- **Notation de Dirac (2/3).** On peut voir $\langle v_i|$ comme une application $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ qui à partir d'un vecteur $|\psi\rangle$ donne le nombre $\langle v_i, \psi\rangle \in \mathbb{C}$. Ainsi, à la place d'écrire $\langle v_i, \psi\rangle$, on peut plutôt noter $\langle v_i \,|\, \psi\rangle$, comme si l'on appliquait la fonction $\langle v_i|$ au vecteur $|\psi\rangle$. La fonction $\langle v_i|$ est parfois appelée le *dual* de v_i.
- **Réduction du paquet d'ondes.** Il se passe un truc un peu mystérieux en mécanique quantique : quand on mesure un état, l'état change... C'est comme si, en mesurant la position d'une voiture, on déformait la voiture... Immédiatement après avoir mesuré l'observable A sur un état $|\psi\rangle$, on obtient une valeur au hasard λ_i pour un certain i, et tout à coup l'état $|\psi\rangle$ est transformé en :

  $$\Big|\widetilde{\psi_i}\Big\rangle := \frac{P_i\,|\psi\rangle}{\Big|\Big|\, P_i\,|\psi\rangle \,\Big|\Big|} .$$

  Ce phénomène s'appelle la *réduction du paquet d'ondes*. Ce qui est encore plus impressionnant, c'est que l'état est maintenant figé : si l'on mesure à nouveau l'observable A sur le nouvel état $|\widetilde{\psi_i}\rangle$, alors on obtient forcément la même valeur λ_i qu'avant, on a perdu l'aspect aléatoire du résultat... Impressionnant tout ça, on comprend pourquoi Einstein rejetait tout ça !

Exercice 2. Vérifier que les matrices ci-dessous A_1, A_2, A_3 sont bien des observables quantiques, et calculer-en la décomposition comme dans ($\star$). En déduire les valeurs λ_i possibles de ces observables (ces valeurs doivent être des nombres réels si les calculs sont bons).

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2i-1 \\ -2i-1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 5i & 2-i \\ -5i & 1 & 0 \\ 2+i & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puis, dans le cas de l'observable A_1, calculer la probabilité de mesurer λ_1 et λ_2 lorsque l'état initial est $|\psi\rangle = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, puis calculer le nouvel état $|\widetilde{\psi}_i\rangle$ obtenu après réduction du paquet d'onde pour chaque $i = 1, 2$.

Exercice 3 (Bonus). Quand les valeurs mesurables λ_i sont deux-à-deux distinctes, montrer que l'on peut simplifier l'expression comme suit :

$$\mathbb{P}\Big(\text{observer la valeur } \lambda_i \text{ d'une observable } A \text{ à partir d'un état } |\psi\rangle\Big) = \Big|\langle v_i, \psi\rangle\Big|^2,$$

où $|v_i\rangle$ est un vecteur propre associé à λ_i.

C. Qu'est-ce que le produit tensoriel ?

En physique généralement, le produit tensoriel $\otimes$ modélise la notion d'*indépendance* entre des sous-systèmes. Par exemple, si l'on étudie le mouvement de la Lune et de Mars et qu'on suppose que leurs mouvements sont indépendants l'un de l'autre, on étudie en fait le mouvement du système Lune $\otimes$ Mars.

- **Produit tensoriel de matrices.** Le produit tensoriel est noté $\otimes$ et il est aussi appelé *produit de Kronecker* (voir page Wikipedia). Si l'on a deux matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{C})$, alors on définit une nouvelle matrice $A \otimes B \in \mathcal{M}_{mp\ \times nq}(\mathbb{C})$ avec la notation de matrice par blocs par :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

  Remarque : la formule marche aussi pour les vecteurs, puisqu'un vecteur est une matrice avec une seule coordonnée. Exemple : $\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}6 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot\begin{bmatrix}6 & 7\end{bmatrix} & 2\cdot\begin{bmatrix}6 & 7\end{bmatrix} \\ 3\cdot\begin{bmatrix}6 & 7\end{bmatrix} & 4\cdot\begin{bmatrix}6 & 7\end{bmatrix}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 7 & 12 & 14\\18 & 21 & 24 & 28\end{bmatrix}$.
- **Multiplication avec un vecteur.** Si l'on a des matrices A et B et des vecteurs v et w, alors $(A \otimes B)(v \otimes w) = (Av) \otimes (Bw)$.
- **Produit scalaire d'un produit tensoriel.** $\langle a \otimes b \,|\, c \otimes d\rangle := \langle a \,|\, c\rangle \langle b \,|\, d\rangle$.
- **Bilinéarité du produit tensoriel.** $\Big(\sum_i \alpha_i A_i\Big) \otimes \Big(\sum_j \beta_j B_j\Big) = \sum_{ij} \alpha_i\beta_j (A_i \otimes B_j)$.
- **Produit tensoriel d'espaces de Hilbert.** Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont des espaces de Hilbert, alors $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ est un autre espace de Hilbert (plus "grand") ; il est défini comme l'espace vectoriel engendré par les produits tensoriels de vecteurs :

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}' := \text{vect}\Big\{|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \ :\ |\psi\rangle \in \mathcal{H}, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}'\Big\}.$$

  Donc les éléments de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ s'écrivent sous la forme $\sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle \otimes |\varphi_i\rangle$ pour certains $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$, $|\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}'$.

- **État intriqué.** Un état $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ est dit *séparable* s'il peut s'écrire sous la forme $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ avec $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ et$|\varphi\rangle \in \mathcal{H}'$. Si ce n'est pas possible, alors on dit que $|\Psi\rangle$ est *intriqué*. Exemple : l'état $|\Psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |1\rangle$ est séparable car il peut s'écrire $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes \big(|0\rangle + |1\rangle\big)$. Par contre, l'état $|\Omega\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes |1\rangle$ est intriqué car il ne peut pas se réduire sous la forme d'un état séparable.
- **Notation de Dirac (3/3).** L'état $|0\rangle \otimes |0\rangle$ est simplement noté $|00\rangle$, et de même l'état $|1\rangle \otimes |1\rangle$ est simplement noté $|11\rangle$. Ainsi, l'état intriqué ci-dessus se reformule en $|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$.
- **Puissance de l'intrication quantique.** L'état intriqué $|\Omega\rangle$ ci-dessus est composé de 2 particules : une dans $\mathcal{H}$ et une autres dans $\mathcal{H}'$. On en donne une à Alice et l'autre à Bob. Si Alice mesure sa particule et qu'elle obtient 0, alors on sait que Bob obtiendra aussi 0 en mesurant sa particule, même s'il fait sa mesure instantanément après celle d'Alice. Et de même avec les 1. Et pourtant, malgré tout ça, il n'y a pas de communication plus rapide que la vitesse de la lumière, contrairement à ce que Einstein pensait !

Exercice 4. (1) Calculer $(A \otimes B)(u \otimes v)$ pour les matrices et vecteurs suivants :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 7+i \\ i & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} 2i \\ -3 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(2) En utilisant formule $||u||^2 = \langle u, u\rangle$ et la formule du produit scalaire ci-dessus, montrer que le vecteur $|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ est bien un état quantique de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ (c.à.d. qu'il est bien de norme $= 1$). Puis, prouver que cet état est intriqué.

D. Retour au jeu CHSH

À vous de faire les calculs ! ;) Nous allons montrer qu'il est possible de faire strictement mieux avec les stratégies quantiques qu'avec les stratégies classiques.

(1) Trigonométrie. Montrer que $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$. |2|

(2) Observable quantique. On considère les matrices suivantes :

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad A_\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \qquad M_\theta = A_\theta M A_\theta^{-1},$$

où θ est un paramètre réel.

(a) Montrer que $A_\theta^{-1} = A_\theta^\top$.

(b) Montrer que M_θ est une observable quantique.

(c) En remarquant que M_θ est sous la forme PDP^{-1} avec D matrice diagonale et P matrice inversible, en déduire les deux valeurs propres λ_0, λ_1 de M.

|2|. Indice : utiliser les formules trigonométriques.

(d) En remarquant que M s'écrit $M = \lambda_0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, montrez que la décomposition ($\star$) du théorème pour la matrice M_θ est :

$$M_\theta = \lambda_0 Q_0^\theta + \lambda_1 Q_1^\theta \,,$$

où $Q_0^\theta := \begin{bmatrix} \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix}$ et $Q_1^\theta := \begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$.

(3) Mesure quantique. Appliquons l'observable M_θ à un état.

(a) Montrer que le vecteur $|\psi\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{C}^2$ est un état quantique.

(b) Montrer que la probabilité d'obtenir λ_0 en mesurant l'observable M_θ à partir de l'état $|\psi\rangle$ est :

$$\mathbb{P}\Big(\text{obtenir } \lambda_0\Big) \;=\; \frac{1 + \;\sin(2\theta)}{2} \,.$$

(c) En déduire celle d'obtenir λ_1.

(4) État intriqué. Utilisons la puissance des états intriqués pour avoir une stratégie efficace au jeu `CHSH`. Nous allons travailler dans $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Il faut penser au premier $\mathbb{C}^2$ comme l'espace des états qu'Alice peut détenir, et le second $\mathbb{C}^2$ comme celui de Bob. La particule d'Alice et celle Bob se comportent indépendamment l'une de l'autre quand on a un état séparable (se souvenir que le produit tensoriel traduit la notion d'*indépendance*), tandis que les particules sont liées l'une à l'autre si l'état est intriqué.

(a) Montrer que $|\Omega\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ est un état quantique de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, puis montrer qu'il est intriqué (par l'absurde).

(b) Montrer que $M_\theta \otimes I$ est une observable quantique, où I est la matrice identité de taille 2.

(c) Montrer que $M_\theta \otimes I$ a les mêmes valeurs propres λ_0 et λ_1 que précédemment, et que :

$$M_\theta \otimes I \;=\; \lambda_0 \left(Q_0^\theta \otimes I\right) + \lambda_1 \left(Q_1^\theta \otimes I\right).$$

(d) Montrer que la probabilité d'obtenir λ_0 en mesurant l'observable $M_\theta \otimes I$ à partir de l'état $|\Omega\rangle$ est uniforme et indépendante de θ :

$$\mathbb{P}(\lambda_0 \,|\, \theta) \;=\; \frac{1}{2} \;=\; \mathbb{P}(\lambda_1 \,|\, \theta) \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}\,.$$

(5) Protocole. On pourvoit à Alice et Bob l'état intriqué $|\Omega\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$, dont ils possède chacun une particule. Sans perte de généralité, disons qu'Alice commence à mesurer sa particule. Si elle veut mesurer une observable A sur sa particule, elle doit en fait mesurer l'observable $A \otimes I$ sur l'état total $|\Omega\rangle$. C'est la raison pour laquelle nous avons fait des calculs avec $M_\theta \otimes I$ précédemment.

(a) Une fois qu'Alice a reçu son bit x du référent, elle choisit $\theta = 0$ lorsque $x = 0$, ou bien elle choisit $\theta = \frac{\pi}{4}$ lorsque $x = 1$. Elle mesure ensuite l'observable $M_\theta \otimes I$ sur l'état $|\Omega\rangle$, et elle note a le résultat obtenu. Ce bit a est la réponse qu'elle donne au référent. Grâce à ce qui précède, en déduire les différentes valeurs de $\mathbb{P}(a \,|\, x)$.

(b) Desuite après la mesure d'Alice, l'état quantique change, il y a ce qu'on appelle une *projection du paquet d'onde* (voir la Section **B**.). L'ancien état est $|\Omega\rangle$, et le nouveau est :

$$\left|\widetilde{\Omega}_x^a\right\rangle := \frac{\left(Q_a^\theta \otimes I\right)|\Omega\rangle}{\left|\left|\left(Q_a^\theta \otimes I\right)|\Omega\rangle\right|\right|}\,.$$

Montrer que :

$$\left|\widetilde{\Omega}^{a=0}_{x=0}\right\rangle = |11\rangle\,, \quad \left|\widetilde{\Omega}^{a=1}_{x=0}\right\rangle = |00\rangle\,, \quad \left|\widetilde{\Omega}^{a=0}_{x=1}\right\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle \quad \left|\widetilde{\Omega}^{a=1}_{x=1}\right\rangle = |-\rangle \otimes |-\rangle\,,$$ [3]

où $|+\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big)$ et $|-\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0\rangle - |1\rangle\Big)$.

(c) Ensuite, c'est au tour de Bob de mesurer sa particule (sachant qu'elle a été modifiée à cause de la projection du paquet d'ondes). Si le référent lui a envoyé le bit $y = 0$, alors il choisit $\theta = \frac{\pi}{8}$, sinon c'est qu'il a reçu $y = 1$ et il choisit $\theta = -\frac{\pi}{8}$. Il mesure ensuite l'observable $I \otimes M_\theta$ à l'état $\left|\widetilde{\Omega}^{a}_{x}\right\rangle$, et il note b le résultat qu'il obtient. Ce bit b est la réponse qu'il adresse au référent. Dans le cas où $x = 0$ et $a = 0$, on sait que la particule partagée est devenu $\left|\widetilde{\Omega}^{a=0}_{x=0}\right\rangle = |11\rangle$ (voir question précédente). Montrer que la probabilité d'obtenir λ_0 en mesurant l'observable $I \otimes M_\theta$ sur l'état $|11\rangle$ est :

$$\mathbb{P}(\text{obtenir } \lambda_0) = \cos^2(\theta)\,.$$

En déduire que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(b = 0 \,\Big|\, y = 0, x = 0, a = 0\Big) \;&=\; \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right),\\
\mathbb{P}\Big(b = 0 \,\Big|\, y = 1, x = 0, a = 0\Big) \;&=\; \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right),\\
\mathbb{P}\Big(b = 1 \,\Big|\, y = 0, x = 0, a = 0\Big) \;&=\; 1 - \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right),\\
\mathbb{P}\Big(b = 1 \,\Big|\, y = 1, x = 0, a = 0\Big) \;&=\; 1 - \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right).
\end{aligned}$$

(d) Dans le cas où $x = 0$ et $a = 1$, faire de même pour obtenir :

$$\mathbb{P}(\text{obtenir } \lambda_0) = \sin^2(\theta)\,,$$

et en déduire que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(b = 0 \,\Big|\, y = 0, x = 0, a = 1\Big) \;&=\; 1 - \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right),\\
\mathbb{P}\Big(b = 0 \,\Big|\, y = 1, x = 0, a = 1\Big) \;&=\; 1 - \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right),\\
\mathbb{P}\Big(b = 1 \,\Big|\, y = 0, x = 0, a = 1\Big) \;&=\; \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right),\\
\mathbb{P}\Big(b = 1 \,\Big|\, y = 1, x = 0, a = 1\Big) \;&=\; \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right).
\end{aligned}$$

(e) Dans le cas $x = 1$ et $a = 0$, faire de même pour montrer obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(b = 0 \,\Big|\, y = 0, x = 1, a = 0\Big) \;&=\; \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right),\\
\mathbb{P}\Big(b = 0 \,\Big|\, y = 1, x = 1, a = 0\Big) \;&=\; 1 - \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right),\\
\mathbb{P}\Big(b = 1 \,\Big|\, y = 0, x = 1, a = 0\Big) \;&=\; 1 - \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right),\\
\mathbb{P}\Big(b = 1 \,\Big|\, y = 1, x = 1, a = 0\Big) \;&=\; \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right).
\end{aligned}$$

(f) Enfin, dans le cas $x = 1$ et $a = 1$, faire de même pour montrer obtenir :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(b = 0 \,\Big|\, y = 0, x = 1, a = 1\Big) \;&=\; 1 - \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right),\\
\mathbb{P}\Big(b = 0 \,\Big|\, y = 1, x = 1, a = 1\Big) \;&=\; \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right),\\
\mathbb{P}\Big(b = 1 \,\Big|\, y = 0, x = 1, a = 1\Big) \;&=\; \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right),\\
\mathbb{P}\Big(b = 1 \,\Big|\, y = 1, x = 1, a = 1\Big) \;&=\; 1 - \cos^2\left(\tfrac{\pi}{8}\right).
\end{aligned}$$

[3]. Si vous êtes perdu avec les notations de Dirac, repassez aux notations "usuelles" de l'algèbre linéaire. Par exemple $|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, ou encore $|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

(6) Résultat. À l'aide de tout ce qui précède et en utilisant la formule $\mathbb{P}(a, b \,|\, x, y) = \mathbb{P}(b \,|\, x, y, a) \times \mathbb{P}(a \,|\, x, y)$, completer le tableau suivant qui exprime la probabilité que Alice et Bob répondent (a, b) sachant qu'ils ont reçu (x, y) :

(x,y) \ (a,b)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)				
(0,1)				
(1,0)				
(1,1)				

Les valeurs à remplir sont $\mathbb{P}(a, b \,|\, x, y)$.

En utilisant la formule suivante :

$$\mathbb{P}(a \oplus b = xy) \; = \sum_{\substack{a,b,x,y \,\in\, \{0,1\} \\ \text{s.t. } a \oplus b = xy}} \mathbb{P}(a, b \,|\, x, y) \times \mathbb{P}(x, y)\,,$$

et en supposant que les bits x et y sont uniformément et indépendamment générés par le référent, en déduire que :

$$\boxed{\mathbb{P}(a \oplus b = xy) = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) \approx 85\%}\,.$$

Ainsi notre stratégie quantique surpasse les 75% des stratégies classiques, ce qui prouve la puissance des états intriqués !!!

Bonus. En fait, cette méthode nous donne même la meilleure probabilité de réussite à `CHSH` qu'on peut obtenir avec une stratégie quantique (résultat admis ici). À l'aide d'un algorithme, vérifier les réponses obtenues ci-dessus, et utiliser ensuite cet algorithme pour trouver une autre stratégie quantique qui atteint la même probabilité maximale.

Références

[**AGR82**] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental realization of einstein-podolsky-rosen-bohm gedankenexperiment : A new violation of bell's inequalities. *Phys. Rev. Lett.*, 49 :91–94, Jul 1982.
DOI : 10.1103/PhysRevLett.49.91.

[**Bel64**] J. S. Bell. On the einstein podolsky rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1 :195–200, Nov 1964.
DOI : 10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195.

[**Ein05**] A. Einstein. Über einen die erzeugung und verwandlung des lichtes betreffenden heuristischen gesichtspunkt. *Annalen der Physik*, 322(6) :132–148, 1905.
DOI : 10.1002/andp.19053220607.

[**EPR35**] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ? *Phys. Rev.*, 47 :777–780, May 1935.
DOI : 10.1103/PhysRev.47.777.

[**Pel08**] Clément Pellegrini. *Existence, unicité et approximation des équations de Schrödinger stochastiques.* Thesis, Université Claude Bernard - Lyon I, June 2008. Cette thèse a reçue le prix 2008 de la fondation EADS dans la section "mathématiques et leurs interactions".
PDF : https://theses.hal.science/tel-00334668/file/These_Clement.pdf.