

TD SIGNAL

Lundi 29 avril 2024 :

Exercice ① :

① Soit $u = x - T$, $x = u + T$; $f(x) = f(u + T)$

$$\frac{dx}{du} = 1 \text{ donc } dz = du$$

Bornes: $x = T \Rightarrow u = 0$
 $x = T + a \Rightarrow u = a$

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(u+T) du$$

or $\forall u \in \mathbb{R}, f(u+T) = f(u)$ donc $\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(u) du$

② La fonction f n'est pas dépendante au niveau de périodicité avec a . Utilisons donc une autre méthode.

Donc: $* \oplus \Rightarrow$ Des choses

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &\stackrel{(*)}{=} \int_a^T f(x) dx + \int_T^{T+a} f(x) dx \\ &= \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &\quad \text{(*)} \boxed{\int_0^T f(x) dx} \end{aligned}$$

Exercice ② :

- P est continue et (2π) -périodique

\Rightarrow On peut appliquer la formule de $c_m(f)$ pour $f = P$ et $T = 2\pi$.

• Indice : $e^{i2\pi m} = 1$ lorsque $m \in \mathbb{Z}$

$$\bullet \quad c_m(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} (e^{-imx}) dx$$

$$= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x} dx$$

$k \neq m$

$$= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} c_k \left[\frac{e^{i(k-m)x}}{ih - im} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} c_k \left[\frac{e^{i(k-m)2\pi} - 1}{ih - im} \right] = \frac{1}{ih - im}$$

$$= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} c_k (0)$$

$= 0$

$k = m$

$$= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} 1 dx$$

$= \sum_{k=-N}^N c_k = c_m$

$$\Rightarrow c_m(P) = \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k \neq m}}^N c_k + \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k=m}}^N c_m$$

$= \begin{cases} c_m & \text{si } m \in [-N, N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 3 :

Mardi 30 avril 2024

① • f est paire donc $f(-x) = f(x)$.

• Grâce à l'Exercice ①, on peut écrire :

$$b_m(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx$$

$$= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx + \int_0^0 f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx \right)$$

$$\stackrel{u = -x}{=} \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx - \int_{-T/2}^0 f(u) \sin\left(\frac{2\pi mu}{T}\right) du \right)$$

$$= \frac{2}{T} \times 0 = 0$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx + \int_{-T/2}^0 f(-x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \right)$$

$$\stackrel{f(-x) = f(x)}{=} \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx + \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \right)$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx$$

$$② a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx$$

$$= \frac{2}{T} \left(\int_{-T}^0 f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx + \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \right)$$

$$= \frac{2}{T} \left[- \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx + \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \right]$$

$$= 0$$

$$b_m(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx$$

$$= \frac{2}{T} \left(\int_{-T/2}^0 f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx + \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{T/2} f(u) \sin\left(\frac{2\pi m u}{T}\right) du + \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) dx \right) \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) dx \end{aligned}$$

Exo 4 :

①

Utiliser la formule $\overline{\int g(t) dt} = \int \overline{g(t)} dt$

$$\text{On calcule } c_n(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{F(x)} e^{-inx} dx$$

$$\text{puis } \overline{c_{-n}(F)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} e^{inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} e^{inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} e^{-inx} dx$$

La fonction est continue et 2π -périodique

On a donc

$$\boxed{c_n(F) = \overline{c_{-n}(F)}}$$

②

$g : t \mapsto f(-t)$, f est C^0 et 2π périodique

donc g est également C^0 et 2π périodique

Nous pouvons donc appliquer la formule de c_n .

$$\bullet \quad c_{-n}(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} dx$$

$$\bullet \quad c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(-x) e^{-inx} dx$$

Prenons $u = -x$, $\frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow du = -dx$

On a donc

$$C_n(g) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{-2\pi} f(u) e^{inx} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 f(u) e^{inx} du$$

Nous avons vu que f et g sont 2π périodiques, donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 f(u) e^{inx} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{inx} du$$

CC L : les deux intégrales sont égales !!

③ h_a est C^∞ et 2π périodique car f l'est aussi et a est fixé

$$C_n(h_a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+a) e^{-inx} dx \quad \text{Soit } u = x+a, x = u-a$$

$$f(x+a) = f(u) \quad \frac{dx}{du} = 1 \Rightarrow dx = du \quad u=0 \Rightarrow u=a$$

$$e^{-inx} = e^{-ina} \quad u=2\pi+a \Rightarrow u=2\pi+a$$

$$C_n(h_a) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{2\pi+a} f(u) e^{-inu} e^{ina} du = \frac{e^{ina}}{2\pi} \int_a^{2\pi+a} f(u) e^{-inu} du$$

$$\text{Donc } \frac{e^{ina}}{2\pi} \int_a^{2\pi+a} f(u) e^{-inu} du = \frac{e^{ina}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-inu} du = e^{ina} C_n(f)$$

Exercice 5 :

① $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -périodique, $f=1$ sur $[0, \pi]$

impaire : $f(-x) = -f(x)$

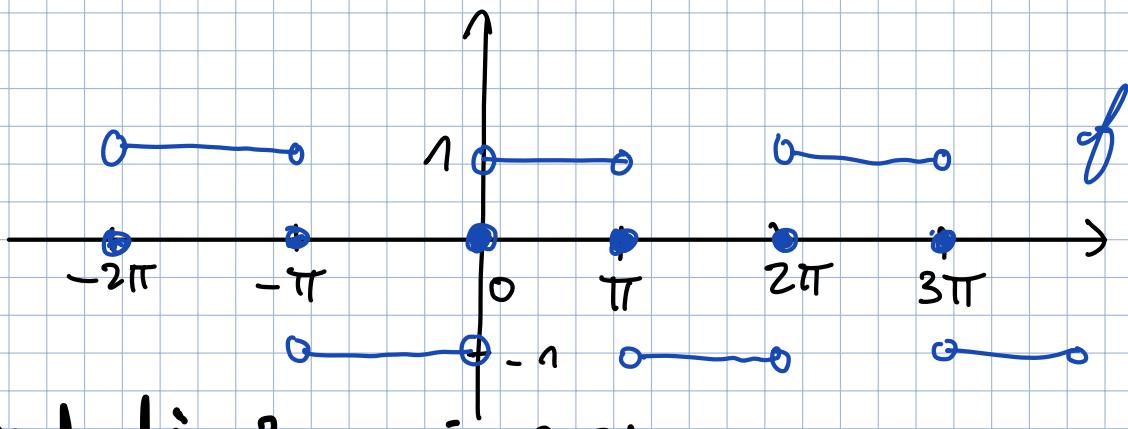
$$\circ f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\bullet \quad f(\pi) = f(-\pi - 2\pi) = f(-\pi) = -f(\pi)$$

↑
par 2π périodicité ↑
imparité

$$\Rightarrow \boxed{f(\pi) = 0}$$

2



Vendredi 3 mai 2024 :

3

f est constante par morceaux

\Rightarrow dérivable par morceaux
de dérivée $= 0$ continue

$$\Rightarrow \boxed{f \in C^1}.$$

4 Grâce à l'exo 3, $a_n(f) = 0$

f est impaire et 2π périodique.

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(nx) dx + \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx \right) \quad \begin{matrix} u = -x \\ du = -dx \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin(nx) dx + \int_0^{-\pi} \sin(nx) du \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi}$$

$$\pi - \frac{2}{\pi n} \times ((-1)^n - 1)$$

sin pair: $b_n(f) = 0$

sin impair: $b_n(f) = \frac{4}{\pi n}$

(5)

Indice 1: Combiner Thm 7 page 23 ("Dirichlet") avec Def 13 page 19

Indice 2:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} a_m = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m$$

paire
($m = 2k$)

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}$$

impaire
($m = 2k+1$)

(5) Def 13, p 19:

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{m=1}^N (a_m(f) \cos(mx) + b_m(f) \sin(mx))$$

On sait que $a_0(f)$ et $a_m(f) = 0$ car question 4

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{m=1}^N \frac{2}{\pi m} (-(-1)^m + 1) \sin(mx) \\ &= \sum_{m=2}^N 0 + \sum_{m=1}^N \frac{4}{\pi m} \sin(mx) \\ &\quad (\text{m paire}) \quad (\text{m impair}) \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} \frac{4 \sin((2k+1)x)}{\pi (2k+1)} \end{aligned}$$

$m = 2k+1$
 $k = \frac{n-1}{2}$
 pour $n = 1$
 $k = 0$
 pour $n = N$
 $k = \frac{N-1}{2}$

$$m=k \quad \sum_{n=0}^{N-1} \frac{4 \sin((2n+1)x)}{\pi(2n+1)}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4 \sin((2n+1)x)}{\pi(2n+1)} = \tilde{f}(x)$$

car Th de Dirichlet.

⑥ On a déterminé à la question précédente que

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)}.$$

afin de correspondre à la question 6, on cherche x tq

$$\sin[(2n+1)x] = (-1)^n$$

Essayons pour $n=0 \rightarrow \sin(2x0+1)x = \sin(1x)$

Ainsi on remarque que x doit être $\pm \frac{\pi}{2}$ pour $n=0$.

Prenons $x = \frac{\pi}{2}$:

| n | $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})$ |
|-----|---|
| 0 | $\sin \frac{\pi}{2} = -1$ |
| 1 | $\sin \left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ |
| 2 | $\sin \left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$ |

On remarque qu'il y a une répétition. Prenons donc $x = \frac{\pi}{2}$

$$= (-1)^n$$

On obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin(\pi n + \frac{\pi}{2})}{(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

En prenant le th de Dirichlet page 23, on a

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+)) \quad \text{avec } x = \frac{\pi}{2}$$

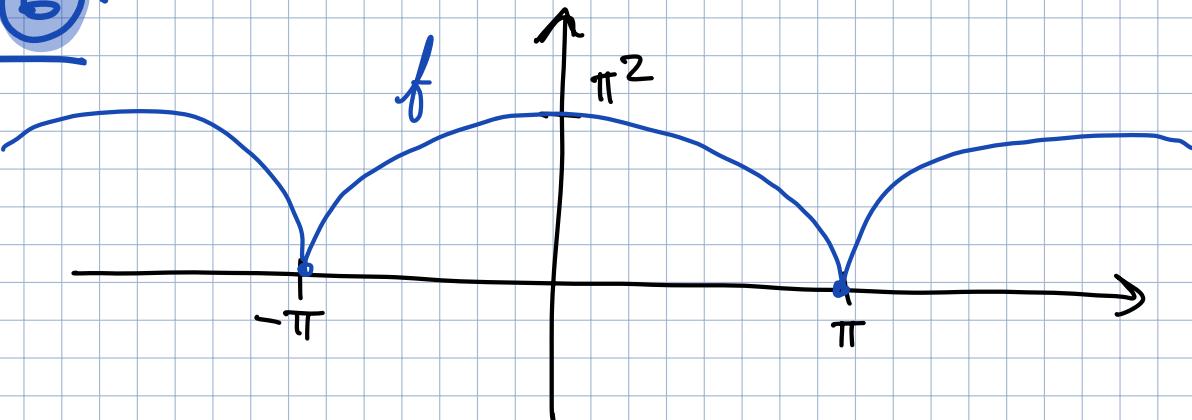
Nous avons vu à la question 2 que $f(x^-) = f(x^+) = f(x) = 1$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

Ainsi $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Exo 6:

①



② • f est continue sur $]-\pi, \pi[$

Or $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$

$\Rightarrow f$ continue sur $[-\pi, \pi]$

\Rightarrow f continue sur \mathbb{R} par 2π -pén.

• f est C^1 par morceaux

(même \cos par morceaux !!)

Car polynomiale sur $]-\pi, \pi[$
et 2π -périodique.

③ (Lundi 13 Mai 2024)

$$\begin{aligned}
 C_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - \alpha^2) e^{-inx} d\alpha \\
 &\stackrel{u = e^{-inx}}{=} \frac{1}{2\pi} \left(\left[-\frac{e^{-inx}}{ni} (\pi^2 - \alpha^2) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\alpha e^{-inx} \frac{1}{ni} d\alpha \right) \\
 &\stackrel{u' = -n e^{-inx}, n=1}{=} \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{2e^{-inx}}{n^2} \alpha \right]_{-\pi}^{\pi} - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{n^2} d\alpha \right) \\
 &= -\frac{2}{2\pi} \left(\left[\frac{e^{-inx}\pi}{n^2} + \frac{e^{inx}\pi}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{e^{-inx}}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \\
 &= -\frac{2}{2\pi} \left(\left(\frac{(-1)^n \pi}{n^2} + \frac{(-1)^n \pi}{n^2} \right) + 0 \right) \\
 &= -\frac{2}{2\pi} \times \frac{2(-1)^n \pi}{n^2} = \boxed{\frac{(-1)^n 2}{n^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{si } n=0, C_0(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - \alpha^2) d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\pi^2 \alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3} + \pi^3 - \frac{\pi^3}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{4\pi^3}{3} \right) = \boxed{\frac{2\pi^2}{3}}
 \end{aligned}$$

④ Indice ①: Combiner Def 13 page 19
et Thm 7 page 23

Indice ②: Pour la 2^e série,

utiliser Thm 8 page 24

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(-\frac{2}{n^2} (-1)^n \right) e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{2}{n^2} (-1)^n e^{inx} \right)$$

$$= \sum_{m=n}^{+\infty} -\frac{2}{(-m)^2} (-1)^{-m} e^{-inx}$$

$$= e^{inx} + e^{-inx} = 2 \cos(nx)$$

$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} -2 \frac{(-1)^n}{n^2} \times 2 \cos(nx)$

$$= \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \tilde{f}(x) \quad (\text{Th. Dirichlet})$$

mêmes coefficients

On puisque f est C^0 , $\tilde{f}(x) = f(x)$

Donc $\forall x \in [-\pi; \pi]$, $\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$

En particulier, pour $x = \pi$, on a : $\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$

Rappel :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

pour f qui est T -périodique et C^0

$$\|f\|_2^2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}^2$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\pi^2 - t^2|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^4 - 2\pi^2 t^2 + t^4) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\pi^4 t - \frac{2}{3} \pi^2 t^3 + \frac{1}{5} t^5 \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\pi^5 - \frac{2}{3} \pi^5 + \frac{\pi^5}{5} - \left[-\pi^5 + \frac{2}{3} \pi^5 - \frac{\pi^5}{5} \right] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(2\pi^4 - \frac{4}{3} \pi^4 + \frac{2}{5} \pi^4 \right) = \boxed{\pi^4 \times \frac{8}{15}}
 \end{aligned}$$

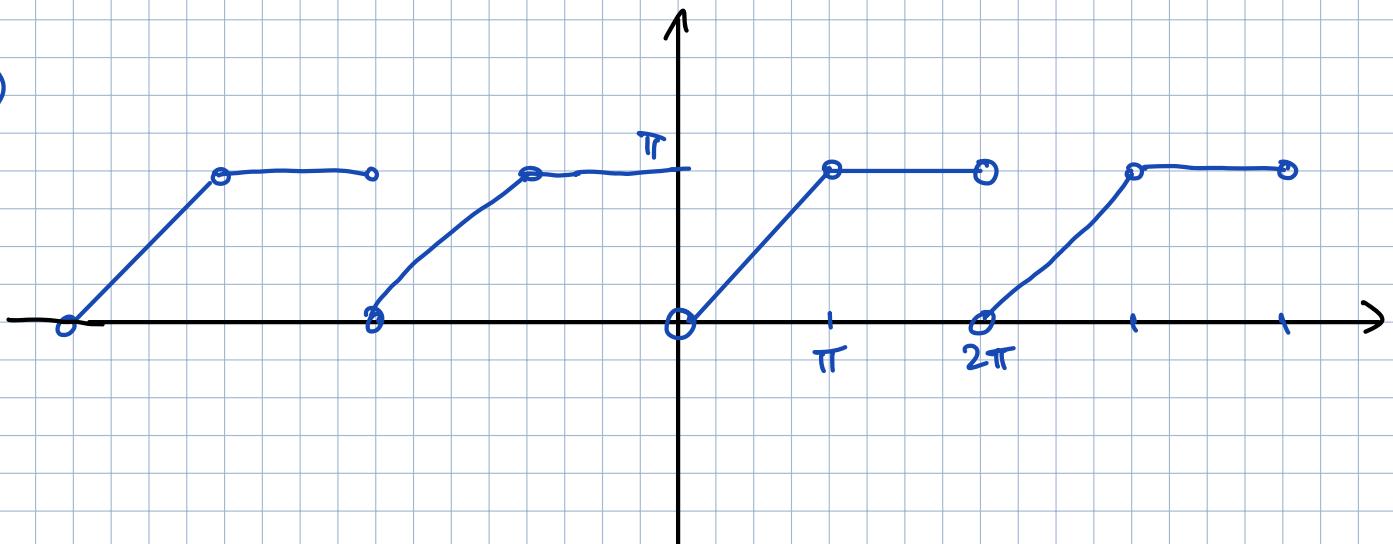
$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=-N}^N |C_m(f)|^2 &= |c_0(f)|^2 + \sum_{m=-\infty}^{-1} |C_m(f)|^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} |C_m(f)|^2 \\
 &= \frac{4}{9} \pi^4 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left| \frac{(-1)^{n+1} \times 2}{n^2} \right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \times 2}{n^2} \right|^2 \\
 &= \boxed{\frac{4}{9} \pi^4 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4}}
 \end{aligned}$$

Àvec le Th. de Parseval:

$$\begin{aligned}
 \|f\|_2^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n(f)|^2 \\
 \Leftrightarrow \pi^4 \frac{8}{15} &= \frac{4}{9} \pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \\
 \Leftrightarrow \pi^4 \frac{8}{15} - \frac{4}{9} \pi^4 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \\
 \Leftrightarrow \pi^4 \frac{1}{75} - \frac{1}{18} \pi^4 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \\
 \Leftrightarrow \pi^4 \left(\frac{1}{75} - \frac{1}{18} \right) &= \boxed{\pi^4 \times \frac{1}{90} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}}
 \end{aligned}$$

Exo 7:

①



② La fonction f est polynomiale par morceaux, donc C¹ par morceaux.

③ Et ④ comme Exo 6 → à faire
à la maison.

Exo 8:

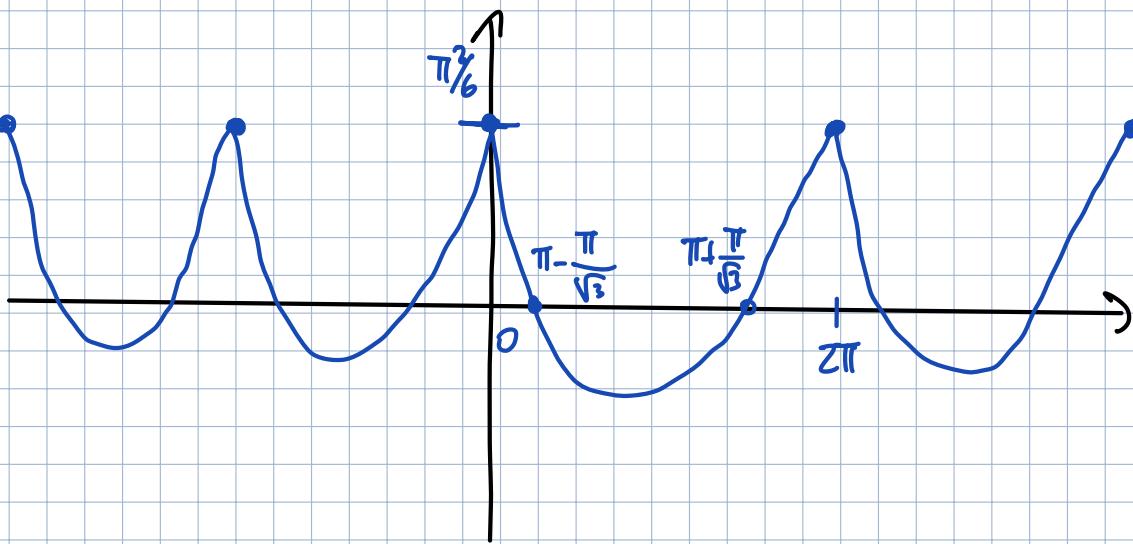
(Mardi 14 mai 2014)

- On veut appliquer le Thm de Dirichlet, on choisit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \quad \text{pour } x \in [0, 2\pi[$$

et on l'étend sur \mathbb{R} par 2π-périodicité.

$$f(2\pi) = \frac{\pi^2}{6}$$



f est C^0 sur \mathbb{R} ,
et C^∞ par morceaux (en polynomiale par morceaux).

- On calcule les coefficients trigonométriques:

Pour $m \neq 0$: $a_m(f) = \dots$ faire 2 IPP ... = $\frac{1}{m^2}$

Pour $m=0$: $a_0(f) = \dots = 0$

- Pour les b_m : comme f est paire
(voir graphique), on utilise l'^{Exo 3} pour voir que $b_m(f) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$.

- Ainsi :

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \underbrace{\frac{a_0(f)}{2}}_{=0} + \sum_{m=1}^N \underbrace{a_m(f) \cos(mx)}_{=1/m^2} \\ &\quad + \sum_{m=1}^N \underbrace{b_m(f) \sin(mx)}_{=0} \\ &= \sum_{m=1}^N \frac{\cos(mx)}{m^2} \end{aligned}$$

On fait $N \rightarrow \infty$, et on utilise le Thm de Dirichlet : $\forall x \in [0, 2\pi]$.

$$\lim_{N \rightarrow \infty}$$

$$S_N(f)(x) =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

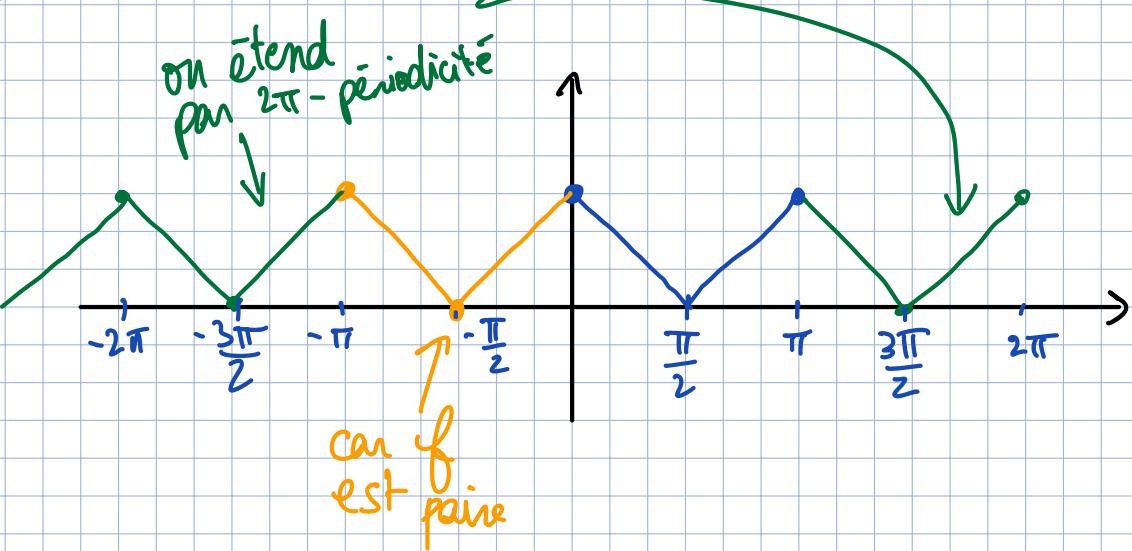
$$= \tilde{f}(x) =$$

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}x^2$$

car f est continue sur \mathbb{R}

Exo 9 :

①



②

- f est continue sur \mathbb{R} car continue par morceaux et continue aux bords des intervalles
- f est polymorphe par morceaux.
car donc pas par morceaux.

③ • f est paire $\Rightarrow b_m(f) = 0 \quad \forall m.$

• On remarque f est π -périodique $\Rightarrow T = \pi$

$$a_m(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \cos(2mx) dx$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(2mx) dx$$

= ... IPP ...

$$= \frac{1 - (-1)^m}{\pi m^2}$$

pour $m \neq 0$, et $a_0(f) = \frac{\pi}{2}$

④

Indice : Thm 6 page 20

• f est C° et 2π -périodique, et $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Rightarrow f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |b_m(f)| = \sum_{m=0}^{+\infty} 0 = 0 \quad \text{converge}$$

$$\sum_{m=0}^{+\infty} |a_m(f)| = \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \underbrace{\left| \frac{1 - (-1)^m}{\pi m^2} \right|}_{= \frac{1 - (-1)^m}{\pi m^2}}$$

$$< \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{m^2}$$

$$< \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2}$$

Converge par le critère
de Riemann

(Rappel: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ CGU $\Leftrightarrow \alpha > 1$)

On peut appliquer le Thm 6 page 20:

$(S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge normalement vers f

$\Rightarrow (S_N(f))_{N \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

⑤ Rappel: $\|g\|_2^2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx$ ❤️

Pour g 2π -périodique.

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2 dx$$

$$= 2\pi \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2 dx$$

$\underbrace{\qquad}_{=: g(x)}$

$$= 2\pi \lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(f) - f\|_2^2$$

On veut appliquer le Corollaire 3 page 26

("convergence quadratique") : on a bien
que f est continue par morceaux,
 2π -périodique et $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$$

\Rightarrow En mettant au carré et en multipliant par 2π , on a bien le résultat voulu:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2 dx = 0.$$

Exo 10:

- ① On suppose $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.
 On sait que f est continue, donc continue par morceaux, et elle est 2π -périodique.
 \Rightarrow On peut appliquer le Thm de Parseval:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n(f)|^2 \text{ converge}$$

$$\Rightarrow |C_n(f)|^2 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow C_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

② (a) On a $C_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx.$

$$\text{et on } C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Faisons une IPP sur $C_n(f)$ avec:

| | |
|--------------------|-----------------------|
| $u(x) = f(x)$ | $u'(x) = f'(x)$ |
| $v(x) = -e^{-inx}$ | $v'(x) = in e^{-inx}$ |

On obtient

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \left(\left[f(x) \times (-e^{-inx}) \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx \right)$$

On a une 2π -périodique
donc $f(0) = f(2\pi)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \left(f(2\pi) \times (-e^{-inx}) - f(0) \times (-e^{-in0}) + \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(f(0) \times (-e^{-in0}) - f(0) \times (-e^{-in0}) + \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx
 \end{aligned}$$

CCL: $C_n(f') = in C_n(f)$

②b Rappel: "petit θ "

On dit que $a_m = o(b_m)$
ssi $\frac{a_m}{b_m} \xrightarrow[m \rightarrow +\infty]{} 0$

On a ici $C_n(f) = o(\frac{1}{n})$ si $\frac{C_n(f)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

$$\Leftrightarrow n C_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$\Leftrightarrow \frac{C_n(f')}{i} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ or F est $C^1 \Rightarrow F'$ est C^0
et F est 2π -périodique $\Rightarrow F$ aussi

et par la Q1, on a $C_n(f) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ pour $F \in C^0$ et 2π -périodique

$\Rightarrow C_n(F') \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ aussi

$\Rightarrow \frac{1}{i} C_n(F') \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

$\Rightarrow C_n(F) = o(\frac{1}{n})$

Exo 11: (17 mai 2024)

① Ici, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, continue par morceau,

$T = 2\pi$ périodique. Donc on peut calculer les $c_m(f)$: $e^a e^b = e^{a+b}$

$$\begin{aligned}
 c_m(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha x} e^{-i\frac{2\pi m x}{2\pi}} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(\alpha-m)} dx \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{ix(\alpha-m)}}{i(\alpha-m)} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{i\pi(\alpha-m)}}{i(\alpha-m)} - \frac{e^{-i\pi(\alpha-m)}}{i(\alpha-m)} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi i(\alpha-m)} \left[e^{i\pi(\alpha-m)} - e^{-i\pi(\alpha-m)} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i(\alpha-m)} \left[e^{i\pi\alpha} e^{-i\pi m} - e^{-i\pi\alpha} e^{i\pi m} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi i(\alpha-m)} \left[e^{i\pi\alpha} (-1)^m - e^{-i\pi\alpha} (-1)^m \right] \\
 &= \frac{(-1)^m}{\pi(\alpha-m)} \left[\frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2i} \right] \\
 &= \boxed{\frac{(-1)^m}{\pi(\alpha-m)} \sin(\pi\alpha)}
 \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} f : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ & x \mapsto e^{ix} \end{aligned}$$

On va appliquer les Thm de Dirichlet et Parseval, puis on va essayer de conclure.

⊗ Dirichlet: f est \mathcal{C}^1 par morceaux et 2π -périodique donc on peut appliquer le Thm de Dirichlet:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \tilde{f}(x)$$

!!

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e^{imx} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\sin(\pi mx)}{\pi} \frac{(-1)^m}{\alpha - m} e^{imx}$$

On choisit $x = \pi$ pour annuler le $(-1)^m$:

$$\boxed{\frac{\sin(\pi \alpha)}{\pi}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha - m} = \tilde{f}(\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{e^{i\alpha\pi} + e^{-i\alpha\pi}}{2}$$

on le fait passer à droite

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha - m} = \pi \times \frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{\pi}{\tan(\alpha\pi)}}$$

⊗ Parseval: f est \mathcal{C}^0 par morceaux, 2π -périodique, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

\Rightarrow On peut appliquer le Thm de Parseval:

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(f)|^2 = \|f\|_2^2$$

Or $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |e^{i\alpha t}|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \times 2\pi = 1$$

$|e^{i\alpha t}|^2 \underbrace{=}_{=} 1$

et $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(f)|^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \times \frac{(-1)^m}{\alpha-m} \right|^2$

$$= \frac{\sin(\alpha\pi)^2}{\pi^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha-m)^2}$$

\Rightarrow On regroupe:

$$\frac{\sin(\alpha\pi)^2}{\pi^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha-m)^2} = 1$$

\Leftrightarrow
$$\boxed{\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha-m)^2} = \frac{\pi^2}{\sin(\alpha\pi)^2}}$$

- Pour obtenir la 1^{ère} série, on fait un changement de variable $k = -m \in \mathbb{Z}$, et on obtient:

$$\boxed{\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha+k)^2} = \frac{\pi^2}{\sin(\alpha\pi)^2}}$$

• Pour la 2e :

indice : Décomposer en éléments simples:

$$\frac{2\alpha}{m^2 - \alpha^2} = \frac{2\alpha}{(m-\alpha)(m+\alpha)} = \frac{A}{m-\alpha} + \frac{B}{m+\alpha}$$

$$\Rightarrow 2\alpha = A(m+\alpha) + B(m-\alpha)$$

$$= (A+B)m + \alpha(A-B)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ (A-B)\alpha = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ 2A\alpha = 2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

On obtient:

$$\frac{2\alpha}{m^2 - \alpha^2} = \frac{1}{m-\alpha} - \frac{1}{m+\alpha}$$

$$= \frac{1}{m-\alpha} + \frac{1}{-m-\alpha}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2\alpha}{m^2 - \alpha^2} = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{m-\alpha} + \frac{1}{-m-\alpha} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m-\alpha} \right) + \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{-m-\alpha} \right)$$

on peut séparer car chaque

$$= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k-\alpha} \right) + \left(\sum_{k=-\infty}^0 \frac{1}{k-\alpha} \right)$$

$k=m$ $k=-m$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{k-\alpha} + \frac{1}{0-\alpha}$$

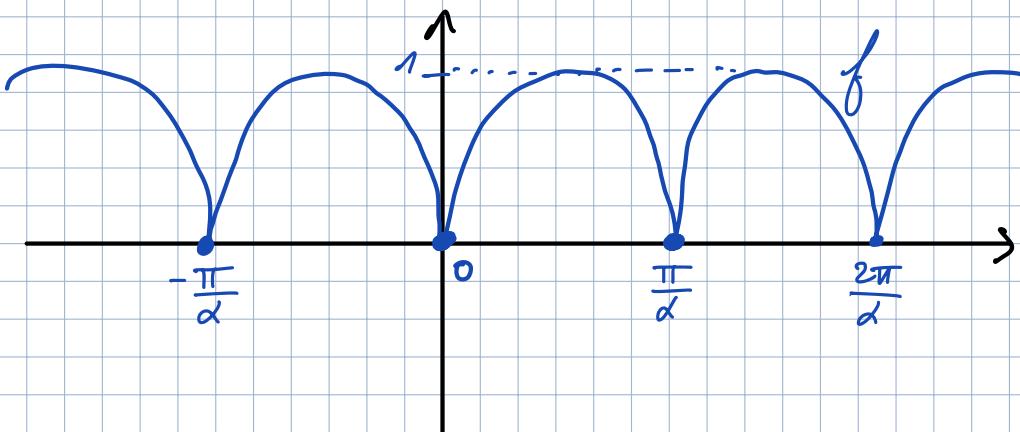
par Dirichlet

$$= -\frac{\pi}{\tan(\alpha\pi)}$$

$$= -\frac{\pi}{\tan(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha}$$

Exo 12: (21 mai 2024)

①



On voit directement que la période est $T = \frac{\pi}{\alpha}$.
De plus, f est paire $\Rightarrow b_m(f) = 0 \quad \forall m$.

$$\rightarrow a_m(f) = ?$$

Indice: $\sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$

Indice: $|\sin(t)| = \sin(t)$
für $t \in [0, \pi]$

$$a_m(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx \quad T = \frac{\pi}{\alpha}$$

$$= \frac{2}{\pi/\alpha} \int_0^{\pi/\alpha} |\sin(\alpha x)| \cos\left(\frac{2\pi mx}{\pi/\alpha}\right) dx$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/\alpha} |\sin(\alpha x)| \cos(2m\alpha x) dx$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\pi/\alpha} \frac{\sin(\alpha x + 2m\alpha x) + \sin(\alpha x - 2m\alpha x)}{2} dx$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \left[\int_0^{\pi/\alpha} \sin(\alpha x(1+2m)) dx + \int_0^{\pi/\alpha} \sin(\alpha x(1-2m)) dx \right]$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \left[\left[\frac{\cos(\alpha x(1+2m))}{-\alpha(1+2m)} \right]_0^{\pi/\alpha} + \left[\frac{\cos(\alpha x(1-2m))}{-\alpha(1-2m)} \right]_0^{\pi/\alpha} \right]$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \left(\frac{\cos(\pi(1+2m))}{-\alpha(1+2m)} + \frac{1}{\alpha(1+2m)} + \frac{\cos(\pi(1-2m))}{-\alpha(1-2m)} + \frac{1}{\alpha(1-2m)} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^{1+2m}}{-1-2m} + \frac{1}{1+2m} + \frac{(-1)^{1-2m}}{-1+2m} + \frac{1}{1-2m} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{1+2m} + \frac{2}{1-2m} \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2(1-2m) + 2(1+2m)}{1-4m^2} \right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{1-4m^2} \right)}$$

2) Nous allons utiliser le théorème de Dirichlet (p23) :

$$\hookrightarrow S_N(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N a_n(f) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + \underbrace{b_n(f)}_{=0} \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

$$\text{avec } a_0 = \frac{4}{\pi(1-4x_0^2)} = \frac{4}{\pi}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. On obtient $S_N(f)(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^N \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$ car f est $\frac{T}{2}$ périodique

Donc $N \rightarrow +\infty$, $\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2\alpha n x)$

Par continuité, $\tilde{f}(x) = f(x)$.

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2\alpha n x)$$

3) Théorème de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \quad (\text{p. 26})$$

$$a_0(f) = \frac{4}{\pi}, \quad \frac{|a_0(f)|^2}{4} = \frac{4}{\pi^2} \quad \dots$$