TD SIGNAL

Lundi 29 avril 2024 :

Exercice 1 :

① Soit $u = x - T$, $x = u + T$; $f(x) = f(u+T)$ $\qquad \frac{dx}{du} = 1$ donc $dx = du$

Bornes : $x = T \Rightarrow u = 0$
$x = T + a \Rightarrow u = a$

$$\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u+T)\,du$$

or $\forall u \in \mathbb{R}, f(u+T) = f(u)$ donc $\boxed{\int_T^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^a f(u)\,du}$

② la fonction f n'est pas dependante au niveau de periodicité avec a. Utilisons donc une autre methode.

Donc : $* \; (=) \Rightarrow$ Dev chasles

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_a^T f(x)\,dx + \int_T^{T+a} f(x)\,dx$$

$$= \int_a^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \boxed{\int_0^T f(x)\,dx}$$

Exercice 2 :

- P est continue et (2π)- périodique

$\Rightarrow$ On peut appliquer la formule de $c_n(f)$ pour $f = P$ et $T = 2\pi$.

- [Indice : $e^{i2\pi n} = 1$ lorsque $n \in \mathbb{Z}$

- $$c_n(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}\left(e^{-inx}\right)dx$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} \underbrace{\frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} e^{ikx-inx}\,dx}$$

$k \neq n$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \left[\frac{e^{ikx-inx}}{ik-in}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \left(\frac{\underbrace{e^{ik2\pi-in2\pi}}_{=1}}{ik-in} - \frac{1}{ik-in}\right)$$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k (0)$$

$$\boxed{=0}$$

$k = n$

$$= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} \frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} 1\,dx$$

$$\boxed{= \cancel{\sum_{k=-N}^{N}} c_k} = c_n$$

$$\Rightarrow c_n(P) = \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k\neq n}}^{N} 0 + \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k=n}}^{N} c_n$$

$$= \boxed{\begin{cases} c_n & \text{si } n \in [-N, N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Exercice 3 : Mardi 30 avril 2024

① • f est paire donc $f(-x) = f(x)$.

• Grâce à l'Exercice ①, on peut écrire :

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_{-T/2}^{0} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx\right)$$

$u = -x$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\sin\frac{2\pi n x}{T}dx - \int_0^{T/2} f(u)\sin\left(\frac{2\pi n u}{T}\right)du\right)$$

$$= \frac{2}{T}\times 0 \boxed{= 0}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_{-T/2}^{0} f(-x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx + \int_0^{T/2} f(u)\cos\left(\frac{2\pi n u}{T}\right)du\right)$$

$$= \boxed{\frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx}$$

② $$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} f(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx + \int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left[-\int_0^{T/2} f(u)\cos\left(\frac{2\pi m u}{T}\right)du + \int_0^{T/2} f(x)\cos\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx\right]$$

$$\boxed{= 0}$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_{-T/2}^{0} f(x)\sin\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx + \int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi m x}{T}\right)dx\right)$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} f(u)\sin\left(\frac{2\pi n u}{T}\right) du + \int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx\right)$$

$$\boxed{= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx}$$

Exo 4 :

1. Utiliser la formule $\overline{\int g(t)\,dt} = \int \overline{g(t)}\,dt$

On calcule $c_n(\overline{F}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{F(x)}\, e^{-inx}\, dx$

puis $\overline{c_{-n}(F)} = \overline{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\, e^{inx}\, dx}$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{F(x)}\;\overline{e^{inx}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{F(x)}\, e^{-inx}\, dx$$

La fonction est continue et 2π-périodique

On a donc $\boxed{c_n(\overline{F}) = \overline{c_{-n}(F)}}$

2. $g : t \mapsto f(-t)$, f est C^0 et 2π périodique

donc g est également C^0 et 2π périodique

Nous pouvons donc appliquer la formule de c_n.

- $c_{-n}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{inx}\, dx$
- $c_n(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(-x)\, e^{-inx}\, dx$

Prenons $u = -x$, $\frac{du}{dx} = -1 \Longleftrightarrow du = -dx$

On a donc

$$C_n(g) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{-2\pi} f(u)e^{inu}\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(u)\,e^{inu}\,du$$

Nous avons vu que f et g sont 2π periodique, donc

$$\boxed{\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{0} f(u)e^{inu}\,du = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)\,e^{inu}\,du}$$

CCL : les deux intégrales sont égales !!

③ h_a est $\mathcal{C}^0$ et 2π périodique car f l'est aussi et a est fixé

$$c_n(h_a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+a)e^{-nxi}\,dx \qquad \text{Soit } u = x+a,\ x = u-a$$

$f(x+a) = f(u)$ $\qquad \frac{dx}{du} = 1 \Rightarrow dx = du$ $\qquad x=0 \Rightarrow u=a$

$e^{-inx} = e^{-inu+ina}$ $\qquad x = 2\pi \Rightarrow u = 2\pi+a$

$$C_n(h_a) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}e^{ina}\,du = \frac{e^{ina}}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}\,du$$

Donc $$\frac{e^{ina}}{2\pi}\int_a^{2\pi+a} f(u)e^{-inu}\,du = \frac{e^{ina}}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu}\,du = \boxed{e^{ina}\,c_n(f)}$$

Exercice 5 :

① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π- périodique, $f = 1$ sur $]0,\pi[$

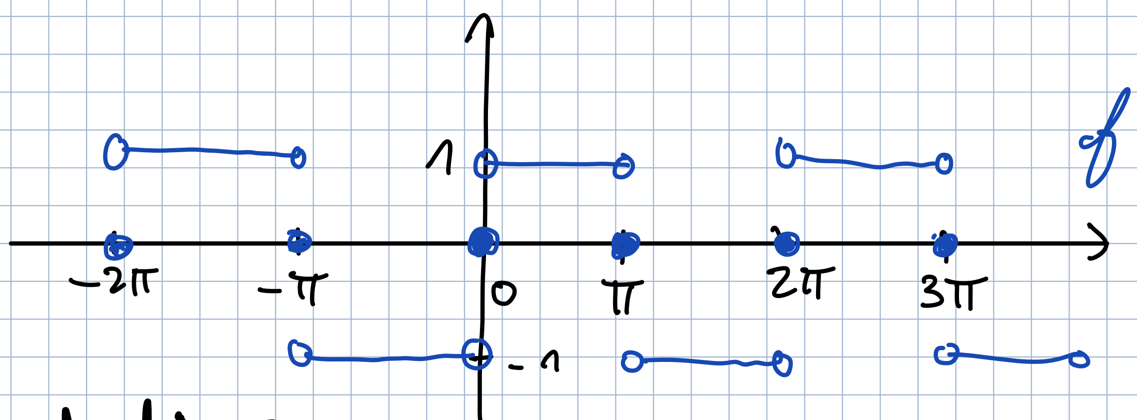
impaire : $f(-x) = -f(x)$

- $f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$

- $f(\pi) \underset{\text{par } 2\pi \text{ périodicité}}{=} f(\pi - 2\pi) = f(-\pi) \underset{\text{imparité}}{=} -f(\pi)$

$\Rightarrow \boxed{f(\pi) = 0}$

②



Vendredi 3 mai 2024 :

③ f est constante par morceaux

$\Rightarrow$ dérivable par morceaux
de dérivée $=0$ continue

$\Rightarrow \boxed{f \in \mathcal{C}^1.}$

④ Grâce à l'exo 3, $a_n(f) = 0$

f est impaire et 2π périodique.

$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$

$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx + \int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(nx)\,dx\right)$ $\quad u = -x$, $du = -dx$

$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx + \int_0^{\pi} \sin(nu)\,du\right)$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi}$

$$= -\frac{2}{\pi n} \times ((-1)^n - 1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{si } n \text{ pair : } b_n(f) = 0 \\ \text{si } n \text{ impair : } b_n(f) = \dfrac{4}{\pi n} \end{array}}$$

(5) **Indice 1 :** Combiner Thm 7 page 23 ("Dirichlet") avec Def 13 page 19

Indice 2 : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{\substack{n=1 \\ \text{paire} \\ (n=2k)}}^{+\infty} a_n + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impaire} \\ (n=2k+1)}}^{+\infty} a_n$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}$$

(5) Def 13 p 19 :

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$$

On sait que $a_0(f)$ et $a_n(f) = 0$ car question 4

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{\pi n}\left(-(-1)^n + 1\right)\sin(nx)$$

$$= \sum_{\substack{n=2 \\ (n \text{ pair})}}^{N} 0 + \sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ impair})}}^{N} \frac{4}{\pi n}\sin(nx)$$

$$= \sum_{k=0}^{?} \frac{4\sin((2k+1)x)}{\pi(2k+1)}$$

$n = 2k+1$

$k = \dfrac{n-1}{2}$

pour $n = 1$

$k = 0$

pour $n = N$

$k = \dfrac{N-1}{2}$

$n=k$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \frac{4\sin((2n+1)x)}{\pi(2n+1)}$$

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4\sin((2n+1)x)}{\pi(2n+1)} = \tilde{f}(x)}$$

car Th de Dirichlet.

(6) On a determiné à la question précédente que

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)}.$$

afin de correspondre à la question 6, on cherche x tq $\sin[(2n+1)x] = (-1)^n$

Essayons pour $n=0 \to \sin(2\times 0+1)\times x = \sin(1\times x)$

Ainsi on remarque que x doit être $\pm\frac{\pi}{2}$ pour $n=0$.

Prenons $x = \frac{\pi}{2}$:

n	$\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)$
0	$\sin\frac{\pi}{2} = 1$
1	$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
2	$\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$

On remarque qu'il y a une repetition. Prenons donc $x = \frac{\pi}{2}$

On obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\overbrace{\sin\left(\pi n + \frac{\pi}{2}\right)}^{=(-1)^n}}{(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

En prenant le th de Dirichlet page 23, on a

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right) \quad \text{avec } x = \frac{\pi}{2}$$

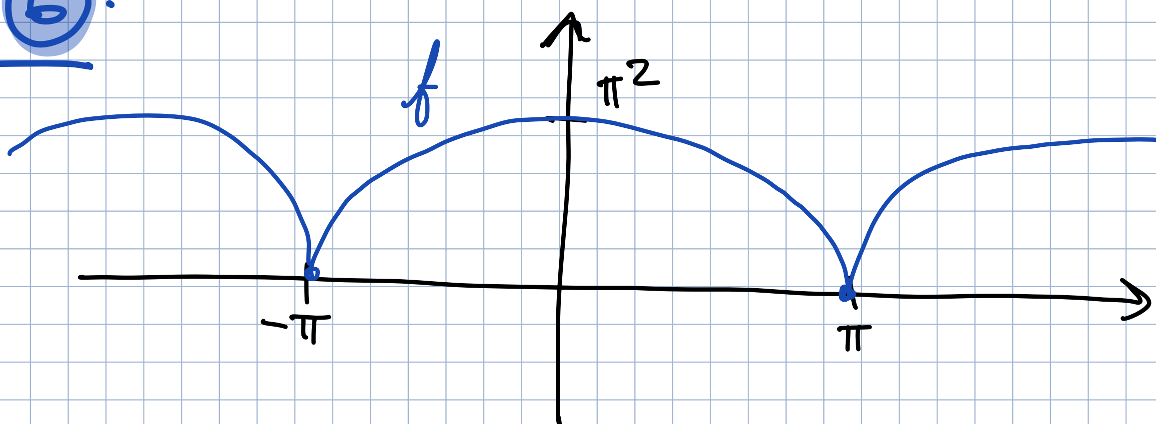
Nous avons vu à la question 2 que $f(x^-) = f(x^+) = f(x) = 1$ pour $x = \frac{\pi}{2}$.

Donc $\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

Ainsi $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 \iff \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

Exo 6 :

1



2 • f est continue sur $]-\pi, \pi[$

Or $\lim_{x \to \pi^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to \pi^+} f(x)$

$\Rightarrow$ f continue sur $[-\pi, \pi]$

$\Rightarrow$ $\boxed{f \text{ continue sur } \mathbb{R}}$ par 2π-pér.

• $\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ par morceaux}}$

(même $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux!!)
car polynomiale sur $]-\pi;\pi[$
et 2π-périodique.

③ (Lundi 13 mai 2024)

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)e^{-inx}\,dx \qquad u' = e^{-inx} \quad v = \pi^2 - x^2 \qquad u = -\frac{e^{-inx}}{ni} \quad v' = -2x$$

__si $n \neq 0$__

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{\left[-\frac{e^{-inx}}{ni}(\pi^2 - x^2)\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \int_{-\pi}^{\pi} 2x\,\frac{e^{-inx}}{ni}\,dx\right) \qquad u' = \frac{e^{-inx}}{ni} \quad v = x \qquad u = +\frac{e^{-inx}}{n^2} \quad v' = 1$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left(\left[\frac{2e^{-inx}}{n^2}\,x\right]_{-\pi}^{\pi} - 2\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-inx}}{n^2}\,dx\right)$$

$$= -\frac{2}{2\pi}\left(\left(\frac{e^{-in\pi}\times\pi}{n^2} + \frac{e^{in\pi}\times\pi}{n^2}\right) + \left[\frac{e^{-inx}}{n^3 i}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= -\frac{2}{2\pi}\left(\left(\frac{(-1)^n\times\pi}{n^2} + \frac{(-1)^n\pi}{n^2}\right) + 0\right)$$

$$= -\frac{2}{2\pi}\times\frac{2(-1)^n\pi}{n^2} = \boxed{\frac{-(-1)^n\times 2}{n^2}}$$

__si $n = 0$__, $C_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\,dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi^3 - \frac{\pi^3}{3} + \pi^3 - \frac{\pi^3}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi^3}{3}\right) = \boxed{\frac{2\pi^2}{3}}$$

④ __Indice ①__ : Combiner Def 13 page 19
et Thm 7 page 23

__Indice ②__ : Pour la 2^e série,

utiliser Thm 8 page 24

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-\frac{2}{n^2}(-1)^n\right)e^{inx}} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{2}{n^2}(-1)^n e^{inx}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{2}{(-n)^2}(-1)^{-n} e^{-inx}$$

$e^{inx}+e^{-inx}$

$= 2\cos(nx)$

mêmes coefficients

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} -2\frac{(-1)^n}{n^2}\times 2\cos(nx)$$

$$= \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \tilde{f}(x) \quad \text{(Th. Dirichlet)}$$

Or puisque f est $\mathcal{C}^0$, $\tilde{f}(x) = f(x)$

Donc $\forall x \in [-\pi;\pi]$, $\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} - 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$

En particulier, pour $x=\pi$, on a : $\frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} \iff \boxed{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}}$

Rappel : $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt}$

pour f qui est T-périodique et $\mathcal{C}^0$

$$\|f\|_2^2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt}^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\pi^2 - t^2|^2\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^4 - 2\pi^2 t^2 + t^4)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\pi^4 t - \frac{2}{3}\pi^2 t^3 + \frac{1}{5}t^5\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\pi^5 - \frac{2}{3}\pi^5 + \frac{\pi^5}{5} - \left(-\pi^5 + \frac{2}{3}\pi^5 - \frac{\pi^5}{5}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(2\pi^4 - \frac{4}{3}\pi^4 + \frac{2}{5}\pi^4\right) = \boxed{\pi^4 \times \frac{8}{15}}$$

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

$$= \frac{4}{9}\pi^4 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left|\frac{(-1)^{n+1} \times 2}{n^2}\right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1} \times 2}{n^2}\right|^2$$

$$\boxed{= \frac{4}{9}\pi^4 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4}}$$

Avec le Th. de Parseval:

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

$$\iff \pi^4 \frac{8}{15} = \frac{4}{9}\pi^4 + 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

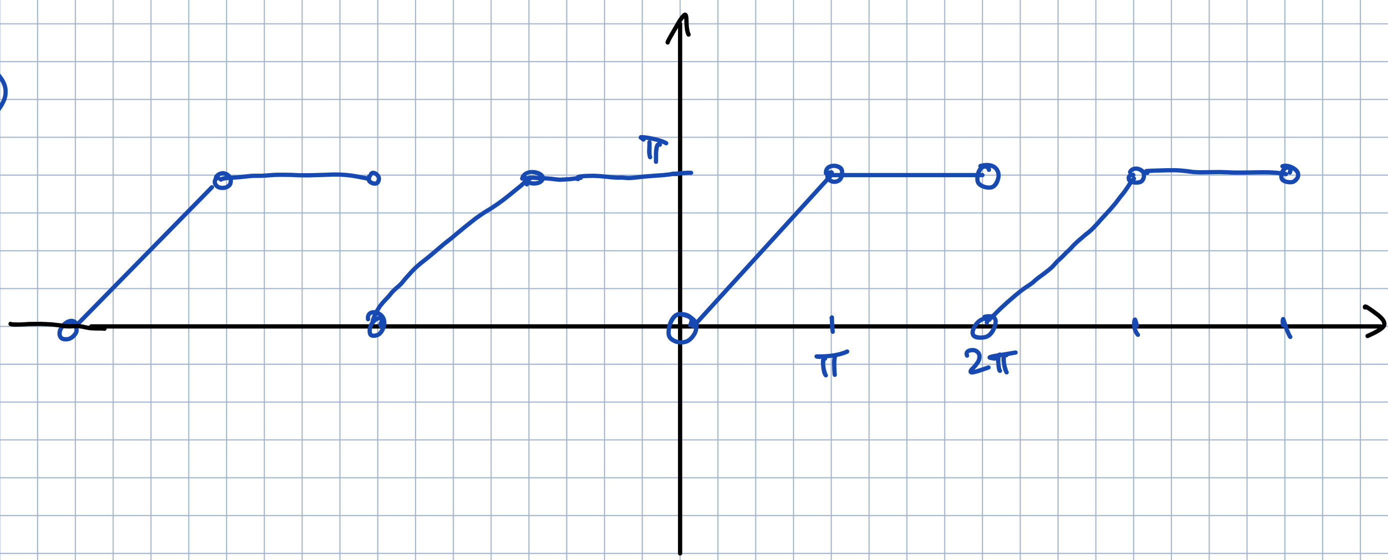
$$\iff \pi^4 \frac{8}{15} - \frac{4}{9}\pi^4 = 8\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\iff \pi^4 \frac{1}{15} - \frac{1}{18}\pi^4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\iff \pi^4\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{18}\right) = \boxed{\pi^4 \times \frac{1}{90} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}}$$

Exo 7 :

1.



2. La fonction f est polynomiale par morceaux, donc $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

3. et 4. comme Exo 6 → à faire à la maison.

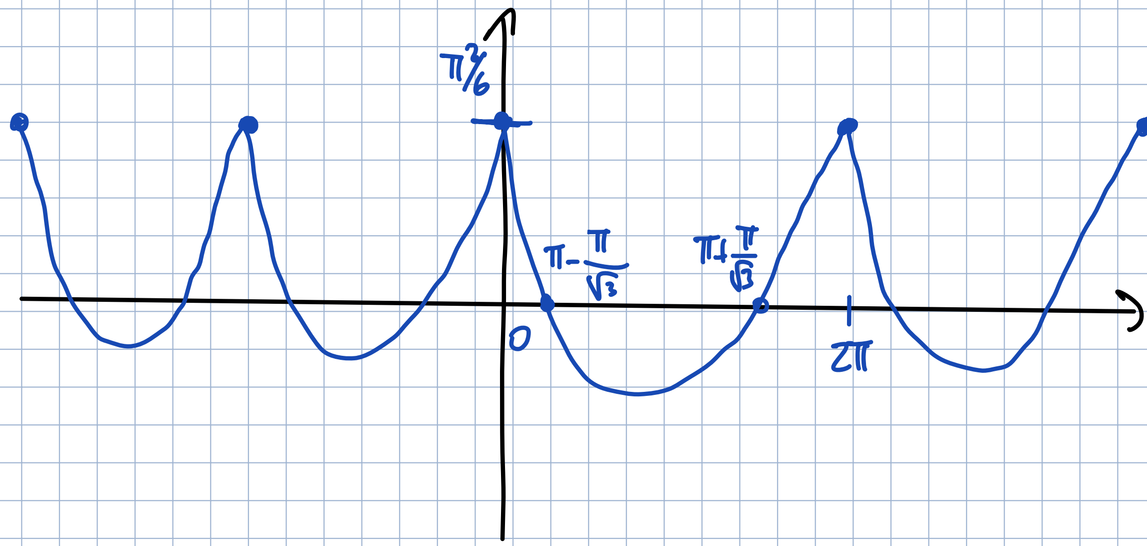
Exo 8 : (Mardi 14 mai 2024)

- On veut appliquer le Thm de Dirichlet, on choisit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}x + \frac{1}{4}x^2 \qquad \text{pour } x \in [0, 2\pi[$$

et on l'étend sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

- $f(2\pi) = \dfrac{\pi^2}{6}$



f est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$,
et $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux car polynomiale par morceaux.

- On calcule les coefficients trigonométriques:

Pour $n \neq 0$: $a_n(f) = \dots$ faire 2 ipp $\dots = \frac{1}{n^2}$

Pour $n = 0$: $a_0(f) = \dots = 0$

- Pour les b_n: comme f est paire (Voir graphique), on utilise l' Exo 3 pour voir que $b_n(f) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

- Ainsi :

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2}^{=0} + \sum_{n=1}^{N} \underbrace{a_n(f)}_{=1/n^2} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{N} \underbrace{b_n(f)}_{=0} \sin(nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

On fait $N \to +\infty$, et on utilise le Thm de Dirichlet : $\forall x \in [0, 2\pi]$.

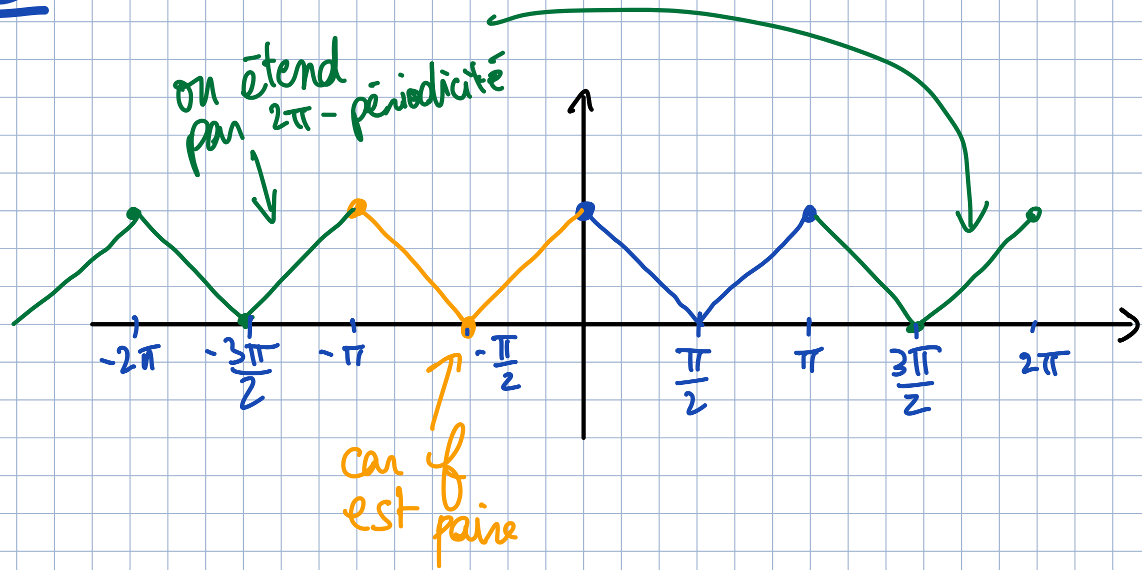
$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x) = \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}}$$

$$= \tilde{f}(x) = f(x) = \boxed{\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{4} x^2}$$

car f est continue sur $\mathbb{R}$

Exo 9 :

(1)



(2) • f est continue sur $\mathbb{R}$ car continue par morceaux et continue aux bords des intervalles

• f est polynomiale par morceaux donc C^∞ par morceaux.

③ • f est paire $\Rightarrow$ $\boxed{b_n(f) = 0}$ $\forall n.$

• On remarque f est π-périodique $\Rightarrow T = \pi$

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(-x + \frac{\pi}{2}\right) \cos(2nx)\, dx$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(2nx)\, dx$$

$$= \dots \text{ ipp } \dots$$

$$= \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2}$$

pour $n \neq 0$, et $\boxed{a_0(f) = \frac{\pi}{2}}$

④ Indice : Thm 6 page 20

• f est $\mathcal{C}^0$ et 2π-périodique, et $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Rightarrow f \in \mathcal{C}^0_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$

• $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n(f)| = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$ converge

• $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(f)| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\left| \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} \right|}_{= \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} \leqslant \frac{2}{\pi} \times \frac{1}{n^2}}$

$$\leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Converge par le critère de Riemann

(Rappel : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ CVG $\Leftrightarrow \alpha > 1$)

On peut appliquer le Thm 6 page 20 :

$(S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge normalement vers f

$\Rightarrow (S_N(f))_{N\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

(5) Rappel : $\boxed{\|g\|_2^2 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx}$ ♡

pour g 2π-périodique.

$$\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2 \, dx$$

$$= 2\pi \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\underbrace{S_N(f)(x) - f(x)}_{=:g(x)}|^2 dx$$

$$= 2\pi \lim_{N\to+\infty} \|S_N(f) - f\|_2^2$$

On veut appliquer le Corollaire 3 page 26 (" convergence quadratique ") : on a bien que f est continue par morceaux, 2π-périodique et $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, donc

$$\lim_{N\to+\infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$$

$\Rightarrow$ En mettant au carré et en multipliant par 2π, on a bien le résultat voulu :

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2 \, dx = 0}.$$

Exo 10 :

1) On suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.
On sait que f est continue, donc continue par morceaux, et elle est 2π-pér.

$\Rightarrow$ On peut appliquer le Thm de Parseval :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 \text{ converge}$$

$$\Rightarrow |c_n(f)|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \boxed{c_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}.$$

2) (a) On a $c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} \, dx.$

et $in\, c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} in\, f(x) e^{-inx} \, dx$

Faisons une IPP sur $c_n(f)$ avec : $u(x) = f(x)$ $\quad u'(x) = f'(x)$

$v(x) = -e^{-inx}$ $\quad v'(x) = in\, e^{-inx}$

On obtient $c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \left(\left[f(x) \times (-e^{-inx}) \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} \, dx \right)$

On a une 2π periodicité donc $f(0)=f(2\pi)$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(f(2\pi)\times\left(-e^{-in2\pi}\right) - f(0)\times\left(-e^{-in0}\right) + \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\underbrace{f(0)\times\left(-e^{-in0}\right) - f(0)\times\left(-e^{-in0}\right)}_{=0} + \int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)e^{-inx}\,dx$$

CCL : $\boxed{C_n(f') = in\,C_n(f).}$

2 b

Rappel : " petit o "

On dit que $a_n = o(b_n)$

ssi $\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

On a ici $C_n(f) = o\left(\frac{1}{n}\right)$ ssi $\dfrac{c_n(f)}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\iff n\,c_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\iff \dfrac{C_n(f')}{i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

or F est $C^1 \Rightarrow F'$ est C^0

et F est 2π-periodique $\Rightarrow F'$ aussi

et par la Q1, on a $C_n(F) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour F C^0 et 2π-periodique

$\Rightarrow C_n(F') \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ aussi

$\Rightarrow \frac{1}{i}C_n(F') \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$\boxed{\Rightarrow c_n(F) = o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Exo 11 : (17 mai 2024)

1. Ici, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, continue par morceau, $T = 2\pi$ périodique. Donc on peut calculer les $c_n(f)$:

$e^a e^b = e^{a+b}$

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\alpha x} e^{-i \frac{2\pi n x}{2\pi}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix(\alpha - n)} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{ix(\alpha-n)}}{i(\alpha-n)} \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{i\pi(\alpha-n)}}{i(\alpha-n)} - \frac{e^{-i\pi(\alpha-n)}}{i(\alpha-n)} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i(\alpha-n)} \left(e^{i\pi(\alpha-n)} - e^{-i\pi(\alpha-n)} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i(\alpha-n)} \left(e^{i\pi\alpha} e^{-i\pi n} - e^{-i\pi\alpha} e^{i\pi n} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i(\alpha-n)} \left(e^{i\pi\alpha} (-1)^n - e^{-i\pi\alpha} (-1)^n \right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi(\alpha-n)} \left(\frac{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}}{2i} \right)$$

$$\boxed{= \frac{(-1)^n}{\pi(\alpha-n)} \sin(\pi\alpha)}$$

② $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto e^{i\alpha x} \end{cases}$

On va appliquer les Thm de Dirichlet et Parseval, puis on va essayer de conclure.

⊛ Dirichlet : f est $\mathcal{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique donc on peut appliquer le Thm de Dirichlet :

$$\lim_{N \to +\infty} S_N(f)(x) = \tilde{f}(x)$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e^{inx} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{(-1)^n}{\alpha - n} e^{inx}$$

On choisit $x = \pi$ pour annuler le $(-1)^n$:

$$\boxed{\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha - n} = \tilde{f}(\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{e^{i\alpha\pi} + e^{-i\alpha\pi}}{2}$$

on le fait passer à droite

$$= \cos(\alpha\pi)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha - n} = \pi \times \frac{\cos(\alpha\pi)}{\sin(\alpha\pi)} = \frac{\pi}{\tan(\alpha\pi)}}$$

⊛ Parseval : f est $\mathcal{C}^0$ par morceaux, 2π-périodique, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ On peut applique le Thm de Parseval :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \|f\|_2^2$$

Or $$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|e^{i\alpha t}|^2}_{=1}\,dt = \frac{1}{2\pi}\times 2\pi = 1$$

et $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left| \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{\alpha-n}\right|^2$$

$$= \frac{\sin(\alpha\pi)^2}{\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha-n)^2}$$

$\Rightarrow$ On regroupe :

$$\frac{\sin(\alpha\pi)^2}{\pi^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha-n)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha-n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin(\alpha\pi)^2}}$$

- Pour obtenir la 1ère série, on fait un changement de variable $k=-n \in \mathbb{Z}$, et on obtient :

$$\boxed{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(\alpha+k)^2} = \frac{\pi^2}{\sin(\alpha\pi)^2}}$$

- Pour la 2e :

<u>indice</u> : Décomposer en éléments simples :

$$\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2} = \frac{2\alpha}{(n-\alpha)(n+\alpha)} = \frac{A}{n-\alpha} + \frac{B}{n+\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad 2\alpha = A(n+\alpha) + B(n-\alpha)$$
$$= (A+B)n + \alpha(A-B)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ (A-B)\alpha = 2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=-A \\ 2A\alpha = 2\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}$$

On obtient : $\frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2} = \frac{1}{n-\alpha} - \frac{1}{n+\alpha}$

$$= \frac{1}{n-\alpha} + \frac{1}{-n-\alpha}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\alpha}{n^2-\alpha^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-\alpha} + \frac{1}{-n-\alpha}\right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n-\alpha}\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{-n-\alpha}\right)$$

on peut séparer car chaque série CVG

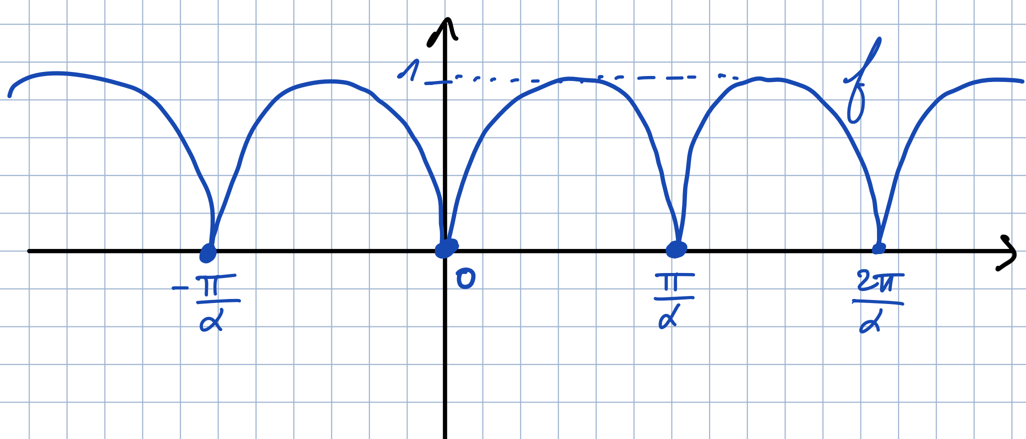
$$= \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k-\alpha}}_{k=n} \right) + \left(\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{0} \frac{1}{k-\alpha}}_{k=-n} \right)$$

$$= \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{k-\alpha}}_{\substack{\text{par Dirichlet} \\ = -\frac{\pi}{\tan(\alpha\pi)}}} + \frac{1}{0-\alpha}$$

$$= \boxed{-\frac{\pi}{\tan(\alpha\pi)} - \frac{1}{\alpha}}$$

Exo 12 : (21 mai 2024)

1



On voit directement que la période est $T = \frac{\pi}{\alpha}$.
De plus, f est paire $\Rightarrow b_n(f) = 0 \quad \forall n$.

$\rightarrow a_n(f) = ?$

Indice : $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}$

Indice : $|\sin(t)| = \sin(t)$

pour $t \in [0, \pi]$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)dx \qquad T = \frac{\pi}{\alpha}$$

$$= \frac{2}{\pi/\alpha}\int_0^{\pi/\alpha} |\sin(\alpha x)|\cos\left(\frac{2\pi n x}{\frac{\pi}{\alpha}}\right)dx$$

$$= \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^{\pi/\alpha} \sin(\alpha x)\cos(2n\alpha x)\,dx$$

$$= \frac{\cancel{2}\alpha}{\pi}\int_0^{\pi/\alpha} \frac{\sin(\alpha x + 2n\alpha x) + \sin(\alpha x - 2n\alpha x)}{\cancel{2}}dx$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\left(\int_0^{\pi/\alpha} \sin(\alpha x(1+2n))\,dx + \int_0^{\pi/\alpha}\sin(\alpha x(1-2n))\,dx\right)$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\left(\left[\frac{\cos(\alpha x(1+2n))}{-\alpha(1+2n)}\right]_0^{\frac{\pi}{\alpha}} + \left[\frac{\cos(\alpha x(1-2n))}{-\alpha(1-2n)}\right]_0^{\pi/\alpha}\right)$$

$$= \frac{\cancel{\alpha}}{\pi}\left(\left(\frac{\cos(\pi(1+2n))}{-\cancel{\alpha}(1+2n)} + \frac{1}{\cancel{\alpha}(1+2n)}\right) + \left(\frac{\cos(\pi(1-2n))}{-\cancel{\alpha}(1-2n)} + \frac{1}{\cancel{\alpha}(1-2n)}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^{1+2n}}{-(1+2n)} + \frac{1}{1+2n} + \frac{(-1)^{1-2n}}{-(1-2n)} + \frac{1}{1-2n}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{1+2n} + \frac{2}{1-2n}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2(1-2n) + 2(1+2n)}{1-4n^2}\right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{1-4n^2}\right)}$$

2) Nous allons utiliser le théorème de Dirichlet (p23) :

$$\hookrightarrow S_N(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n(f)\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + \underbrace{b_n(f)}_{=0}\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$$

avec $a_0 = \frac{4}{\pi(1-4\times 0^2)} = \frac{4}{\pi}$

$\forall x \in \mathbb{R}$. On obtient $S_N(f)(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right)$

$\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) = \cos(2\alpha n x)$ car f est $\frac{\pi}{\alpha}$ periodique

Donc $N \to +\infty$, $\boxed{\tilde{f}(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2\alpha n x)}$

Par continuité, $\tilde{f}(x) = f(x)$.

$$\boxed{f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2\alpha n x)}$$

3) Théorème de Parseval (24 mai 2024)

$$\|F\|_2^2 = \frac{|a_0(F)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(|a_n(F)|^2 + |b_n(F)|^2\right) \quad (p.26)$$

$a_0(F) = \frac{4}{\pi}$, $\frac{|a_0(F)|^2}{4} = \frac{4}{\pi^2}$

$$\sum_{n\geq 1}\left(|a_n(F)|^2 + |b_n(F)|^2\right) = \sum_{n\geq 1}|a_n(F)|^2 = \sum_{n\geq 1}\left|\frac{4}{\pi(1-4n^2)}\right|^2 = \sum_{n\geq 1}\frac{16}{\pi^2(1-4n^2)^2}$$

$$\|F\|_2^2 = \frac{1}{T}\int_0^T |F(t)|^2 dt = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\pi/\alpha} \sin(\alpha t)^2 dt$$

$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$ donc $(\sin a)^2 = \frac{1-\cos(2a)}{2}$

$$\|F\|_2^2 = \frac{\alpha}{\pi}\int_0^{\pi/\alpha}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\alpha t)}{2}\right)dt = \frac{\alpha}{\pi}\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\alpha t)}{2\alpha}\right]_0^{\pi/\alpha}\right) = \frac{\alpha}{2\pi}\times\frac{\pi}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

On injecte dans le théorème de Parseval :

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{16}{\pi^2(4n^2-1)^2}$$

Soit $S = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$

$$\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{1}{2}\times\frac{16}{\pi^2}\times S \iff \frac{\pi^2}{2} - 4 = 8S \iff \boxed{S = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}}$$

Exo 7 :

1, 2 : voir plus haut pour la correction.
Il nous manque seulement les questions 3 et 4

3 f est $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\mathcal{C}^0$ par morceaux et $T = 2\pi$ - périodique
$\Rightarrow$ on peut calculer les coeff. de Fourier:

$n \neq 0$: $$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx + \int_{\pi}^{2\pi} \pi\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} -\frac{\sin(nx)}{n}dx + \pi\int_{\pi}^{2\pi}\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} + \pi\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right) = \boxed{\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}}$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx + \int_{\pi}^{2\pi}\pi\sin(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[x\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{-\cos(nx)}{n}dx + \int_{\pi}^{2\pi}\pi\sin(nx)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi\frac{-\cos(n\pi)}{n} - 0 - \left[\frac{-\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\pi(-\cos(nx))}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi(-1)^{n+1}}{n} - \left(\frac{-\sin(n\pi)}{n^2} + \frac{\sin(0)}{n^2}\right) + \left[\frac{-\cos(nx)\pi}{n}\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\left(\frac{\cancel{\pi}(-1)^{n+1}}{n} + \frac{-\cos(2\pi n)\cancel{\pi}}{n} + \frac{\cos(\pi n)\cancel{\pi}}{n}\right)$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{-1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} = \frac{-(-1)^n - 1 + (-1)^n}{n} = \boxed{\frac{-1}{n}}$$

$n = 0$: $$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x\cos(0\times x)dx + \int_{\pi}^{2\pi}\pi\cos(0\times x)dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} x \times 1\, dx + \int_{\pi}^{2\pi}\pi\times 1\, dx\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} + \left[\pi x\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} + 2\pi^2 - \pi^2\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} + \pi^2\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} + \pi = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

4 ∘ Pour la 1ère série, on va utiliser le Thm de Dirichlet. On peut car $f \in \mathcal{C}^1_{pm,2\pi}(\mathbb{R})$:

$$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \tilde{f}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

On calcule chacun séparément :

- $$\lim_{N\to+\infty} S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$$

$$= \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos(nx) - \frac{1}{n}\sin(nx)\right]$$

On choisit astucieusement $x = \pi$ pour avoir $\cos(nx) = (-1)^n$, $\sin(nx) = 0$

$$= \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \times (-1)^n$$

$$= \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\boxed{1 - (-1)^n}}{\pi n^2}$$

$$\boxed{1 - (-1)^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ 2 & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

on peut peut faire un changement de variable

$$= \frac{3\pi}{4} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)^2} = \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Si $k=0$, alors $n = 2\times 0+1 = 1$

- $$\tilde{f}(\pi) = \frac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \frac{\pi+\pi}{2} = \pi$$

Ainsi, en regroupant, on obtient :

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{4}\pi$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

<u>Pour l'autre :</u> utiliser Thm de Parseval (DM).