TD 3

(5 mars 2024)

Séries de fonctions

Déf : ① $\sum f_n$ CVG simplement

$\Leftrightarrow \exists$ fonction S tq $\forall x$, $\sum_{n\geq 0} f_n(x) = S(x)$

② $\sum f_n$ CVG uniformément

$\Leftrightarrow \exists$ fonction S t.q. $\lim_{N\to+\infty} \| \sum_{n=0}^{N} f_n - S \|_\infty = 0$

③ $\sum f_n$ CVG normalement

$\Leftrightarrow$ $\sum \|f_n\|_\infty$ converge

Thm : CVG norm $\Rightarrow$ CVG unif. $\Rightarrow$ CVG sp.

Intuition : La CVG uniforme "préserve" la régularité des fonctions

(ex : Si f_n est $\mathcal{C}^0$ $\forall n$,
et que $\sum f_n$ CVG unif,
alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est $\mathcal{C}^0$)

Exo 1 :

1 **Cas où $x = 0$**

$\forall n \quad f_n(0) = 0$ donc $\sum_{n=0} f_n = 0$ donc f_n converge pour $x = 0$

Cas où $x > 0$

$f_n \sim \frac{x n}{x^2 n^3} = \frac{1}{x n^2}$

On : $f_n(x) > 0$ pour $x > 0$!!

$\Rightarrow \sum f_n$ et $\sum \frac{1}{x n^2}$ sont de même nature

et $\frac{1}{x} \sum_{n=0} \frac{1}{n^2}$ converge (Rieman)

Donc $\sum f_n$ pour $x > 0$ converge

Cas où $x < 0$

f_n est impaire $(f(-x) = -f(x))$

donc $\boxed{\sum_{n=0} f_n \text{ converge sur } \mathbb{R}}$

Important : $\sum u_n$ CVG $\Rightarrow$ $u_n \to 0$

Mais le contraire est faux !!!

Ex : $u_n = \frac{1}{n}$

$\sum u_n = \sum \frac{1}{n}$ = "série Harmonique" DVG par Riemann

(b) $\|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x)|$ pour n fixé

$$f_n'(x) = \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}$$

$$1 - n^3x^2 > 0 \iff x^2 < \frac{1}{n^3} \iff x < \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

car $x \in \mathbb{R}_+$

tableau de variation

x	0		$\frac{1}{\sqrt{n^3}}$	
$n(1-n^3x^2)$		$+$	0	$-$
$(1+n^3x^2)^2$		$+$		$+$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$
$f_n(x)$		$\nearrow$	$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$	$\searrow$

$f_n\left(\frac{1}{\ }\right) = \frac{1}{\ }$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right) \quad \frac{1}{2\sqrt{n}}$

or $\sum \frac{1}{2\sqrt{n}}$ diverge selon Riemann

$\boxed{\text{Ainsi, il n'y a pas CV normale sur } \mathbb{R}_+}$

(2) On fixe $a>0$.

Calculer $\|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \sup_{x \geq a} |f_n(x)|$.

$\boxed{\text{Pour } n \text{ assez grand,}}$

x	0	$\frac{1}{\sqrt{n^3}}$	a	$+\infty$
f_n	$\nearrow$		$\searrow$	

$\Rightarrow$ Sur $[a,+\infty[$,

$$\|f_n\|_\infty = |f_n(a)| \quad \text{pour } n > N$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_{\infty,[a,+\infty[} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$$

$$\leq \sum_{n=0}^{N} \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} \qquad = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |f_n(a)|$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \left|\frac{1}{2^n}\right| \qquad < +\infty$$

par CVG simple de ①

$< +\infty$ car somme finie de réels

Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[} < +\infty$

$\Rightarrow \sum \|f_n\|_{\infty, [a, +\infty[}$ converge

$\Rightarrow$ $\boxed{\sum f_n \text{ CVG normalement sur } [a, +\infty[}$

(b) $\sum f_n$ cv normalement $\Rightarrow$ $\sum f_n$ cv uniformément et d'après "l'intuition":

$\forall n$; les f_n sont continues car il n'y a pas de division par 0.

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \forall x \in [a, +\infty[$, est C^0, $\forall a > 0$

donc $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

les f_n sont impaires alors $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}_*}$

3 **Thm : (Dérivée de série)**

Si : (i) f_n dérivable $\forall n$,

(ii) $\exists x_0$ tq $\sum f_n(x_0)$ CVG,

(iii) $\sum f_n'$ CVG unif,

alors $\left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right)' = \sum_{n\geq 0} f_n'(x) \quad \forall x$

(a) $\|f_n'\|_{\infty,[a,+\infty[} = \sup_{x\in[a,+\infty} |f_n'(x)|$

$$= \sup_x \left| \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2} \right|$$

à vérifier

$$\leq \sup_x \left| \frac{n(1\cancel{+}n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^{\cancel{2}}} \right|$$

$$= \sup_x \left| \frac{n}{1+n^3x^2} \right|$$

$$\leq \sup_x \left| \frac{n}{n^3x^2} \right|$$

$$= \sup_x \left| \frac{1}{n^2x^2} \right|$$

c'est décroissant $\Rightarrow$ sup atteint en $x=a$

$$= \left|\frac{1}{n^2a^2}\right| = \frac{1}{n^2a^2}$$

$\Rightarrow \sum \|f_n'\|_\infty = \frac{1}{a^2}\sum \frac{1}{n^2}$ CVG par Riemann

$\Rightarrow \sum f_n'$ CVG normalement

(b) $\Rightarrow \sum f_n'$ CVG unif. (iii)

(i) f_n est bien dérivable $\forall n$

(ii) prendre $x_0=a \Rightarrow \sum f_n(x_0)$ converge par la CVG simple de ①

Par le Théorème de dérivée de série, la série S est dérivable et:

$$S'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n(1-n^3x^2)}{(1+n^3x^2)^2}$$