TD 4

Séries Entières & EDO

Rappels :

- Les <u>séries entières</u> sont un cas particulier de série de fonction, de la forme :

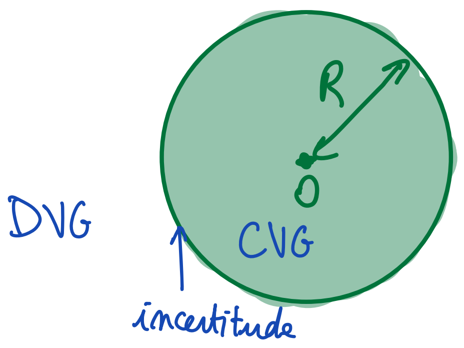
$$\sum_n a_n z^n \quad \text{avec } z \in \mathbb{C},\ a_n \in \mathbb{C} \qquad \left(\text{ou } \sum_n a_n x^n \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},\ a_n \in \mathbb{R}\right)$$

- Elles sont intéressantes car :

① En $z=0$, on a toujours convergence.

② elles ont un rayon de convergence :

$$R := \sup \left\{ r \geq 0 \;\middle|\; \sum_n a_n r^n \text{ converge} \right\}$$



$\rightarrow$ Disque de convergence de la série « $D(0,R)$ »

③ **Thm :** la série entière $\sum_n a_n z^n$ converge <u>normalement</u> sur tout ensemble $K \subseteq D(0,R)$ fermé et borné.

④ La série entière DVG en dehors de $D(0,R)$

- Grâce au Thm, on peut toujours appliquer "l'intuition" du TD 3 : on peut dériver facilement, on peut intégrer facilement, etc...

Exo 1 :

1. Indice : "Série géométrique"

$\sum_n q^n$ converge vers $\frac{1}{1-q}$ ssi $|q|<1$

$$R = \sup\{r \geq 0, \sum a_n r^n \text{ CV}\}$$

$$u_n^{(z)} = \frac{(-1)^n z^{2n}}{2^n} = \left(\frac{(-1) z^2}{2}\right)^n = q^n$$

donc CV ssi $|z|^2 < 2$ ssi $|q|<1$

$|z| < \sqrt{2}$

Donc $R = \sqrt{2}$ et $D = D(0, \sqrt{2})$

Question : Quelle est l'expression de a_n ?

$$a_n = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{2^k} & \text{si } n = 2k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum_n a_n z^n = \sum_k \frac{(-1)^k}{2^k} z^{2k}$$

Rmk : C'est possible aussi avec la Règle de d'Alembert.

② Grâce à l'indice, on obtient :

$\forall x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n \quad \text{avec} \quad q = \frac{-x^2}{2}$$

$$= \frac{1}{1-q}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{-x^2}{2}} = \boxed{\frac{2}{2+x^2}}$$

c'est la somme de la série

③ $$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n}$$

On a convergence normale à l'intérieur du disque, donc on peut dériver terme-à-terme :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, 2n \, x^{2n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n-1}}{2^{n-1}}$$

Car en $n=0$, la dérivée $=0$

On évalue en $x = 1 \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$:

$$S'(1) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} \right) \times 2$$

D'autre part on avait calculé $S(x) = \frac{2}{2+x^2}$,

Donc :

$$S'(1) = -\frac{4}{9}$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n} = -\frac{4}{9} \times \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{2}{9}}$

Exo 2 :

① Utiliser le critère de d'Alembert :

- calculer $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$
- Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n(z)$ CVG
- Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n(z)$ DVG
- Si $\ell = 1$: incertitude

On a : $u_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)} \neq 0$ pour $x \neq 0$

$\Rightarrow \left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2 = \ell$

$\Rightarrow$ la série CVG si $\ell < 1$

i.e. $x^2 < 1$

i.e. $x \in]-1, 1[$

et elle diverge pour $|x| > 1$

Donc $\boxed{R = 1}$

② $\ln(1+X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{X^n}{n}$

$\Rightarrow \ln(1+x^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$

n

On a convergence normale à l'intérieur de $]-1,1[$, donc on peut intégrer terme-à-terme:

$$\int^{u} \ln(1+x^2)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int^{u} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n}\, dx$$

$\Rightarrow$ calculs ...

$$\Rightarrow \boxed{x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{Arctan}(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{n(2n+1)} \boxed{= S(x)}$$

③ $$\|u_n(z)\|_{\infty,[-1,1]} = \frac{1}{n(2n+1)}$$

$$\Rightarrow \sum_n \|u_n(z)\|_\infty = \sum_n \frac{1}{n(2n+1)} \quad \text{CVG par Riemann}$$

$\Rightarrow$ CVG normale sur $[-1,1]$.

$\Rightarrow$ $S(x)$ est continue sur $[-1,1]$

$$\Rightarrow \underbrace{S(1)}_{= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)}} = \lim_{x\to 1} S(x) = \lim_{x\to 1} \left(x\ln(1+x^2) - 2x + 2\operatorname{Arctan} x\right)$$

$$= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

D'où $$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2n+1)} = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}}.$$

Exo 4 :

25 mars 2024

① Poser $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ sur $]-R, R[$ avec $R>0$.

$$\Rightarrow y''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\, a_n\, t^{n-2}$$

pour $n \in \{0,1\}$, on a : $(a_0 + a_1 t)'' = 0$

Changement de var. $k = n-2$

$$\overset{\downarrow}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2}\, t^k$$

Donc : $y''(t) - y(t) \overset{\swarrow}{=} 0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \boxed{0} \cdot t^k$

EDo de l'énoncé

série entière

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2}\, t^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \boxed{\left[(k+2)(k+1)\, a_{k+2} - a_k\right]} t^k$$

Par "identification des coefficients" :

$\forall k \in \mathbb{N}, \quad 0 = (k+2)(k+1)\, a_{k+2} - a_k$

→ Trouvons a_k en fonct de a_0 et a_1.

$$a_{k+2} = \frac{a_k}{(k+2)(k+1)}$$

Ex : $k=4$

$$a_6 = \frac{a_4}{(4+2)(4+1)} = \frac{1}{(4+2)(4+1)} \times \frac{a_2}{(2+2)(2+1)} = \frac{1}{(4+2)(4+1)} \times \frac{1}{(2+2)(2+1)} \times \frac{a_0}{(0+2)(0+1)}$$

$$= \frac{1}{6\times5\times4\times3\times2\times1} a_0$$

$$= \frac{1}{6!} a_0 = \frac{1}{(k+2)!} a_0$$

Pour $k = 2n$ pair, $a_{k+2} = \frac{1}{(k+2)!} a_0$ (par récurrence)

cad : $a_k = \frac{1}{k!} a_0$

cad : $a_{2n} = \frac{1}{(2n)!} a_0$

Ex : $k=5$

$$a_7 = \dots = \frac{1}{7!} a_1$$

De même, par récurrence, pour $k = 2n+1$ impair :

$$a_k = \frac{1}{k!} a_1, \quad \text{cad : } a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!} a_1$$

Donc les solutions à l'équation différentielles sont de la forme :

$$\boxed{y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Rmq : On retrouve le développement en série entière de fonctions usuelles :

$$y(t) = a_0 \cosh(t) + a_1 \sinh(t)$$

② **Même idée :**

On pose $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$

$$\Rightarrow \omega^2 t\, y(t) = \omega^2 t \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \omega^2 a_k t^{k+1}$$

et : $2y'(t) = 2\sum_{k=1}^{+\infty} k\, a_k t^{k-1}$

Changement de variable

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1)\, a_{k+1} t^k$$

et : $t\, y''(t) = t \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\, a_k t^{k-2}$

$$= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\, a_k t^{k-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2} t^{k+1}$$

Donc :

$$0 \overset{\text{EDO}}{=} t\, y''(t) + 2y'(t) + \omega^2 t\, y(t)$$

$$\overset{\text{séries entières}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+2)(k+1)\, a_{k+2}\, t^{k+1}$$

$$+ \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+1)\, a_{k+1}\, t^k} \rightarrow \overset{\text{on veut } t^{k+1}}{=} 2a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} 2(k+2) a_{k+2}\, t^{k+1}$$

$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} w^2 a_k\, t^{k+1}$$

$$= 2a_1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \Big[(k+2)(k+1) a_{k+2} + 2(k+2) a_{k+2} + w^2 a_k \Big] t^{k+1}$$

Donc, par identification des coefficients :

$$\begin{cases} 0 = 2a_1 \\ 0 = (k+2)(k+1) a_{k+2} + 2(k+2) a_{k+2} + w^2 a_k \end{cases}$$

$$= (k+2)(k+1+2)\, a_{k+2} + w^2 a_k$$

$$= (k+2)(k+3)\, a_{k+2} + w^2 a_k$$

<u>cad</u> :
$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_{k+2} = \dfrac{-w^2 a_k}{(k+2)(k+3)} \end{cases} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Par récurrence : (à faire)

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n w^{2n}}{(2n+1)!} a_0 & \text{si } k = 2n \\ 0 & \text{si } k = 2n+1 \end{cases}$$

Donc
$$\boxed{y(t)} = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n+1)!} t^{2n}$$

on veut t^{2n+1} pour retrouver un développement usuel

$$= \frac{a_0}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n+1)!} t^{2n+1}$$

$$= \boxed{\frac{a_0}{t} \sin(\omega t)}$$

<u>Commentaire</u> : L' équation différentielle est homogène et de degré 2, donc l' ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimention 2.

⇒ il reste une solution homogène indépendente à trouver pour obtenir une base de l' ensemble des solutions.

→ En étant malin, on peut penser que $\frac{1}{t} \cos(\omega t)$ est aussi solution, il suffit de vérifier que c'est bien le cas.