Les Bases de la Mécanique Quantique

Pierre Botteron, *Université de Toulouse* [1]

I. Qu'est-ce qu'un qubit ? Et un état quantique ?

- **Qubit.** Un qubit est la version quantique d'un bit (en anglais : « quantum bit »). Au lieu d'être simplement juste 0 ou 1, un qubit est un vecteur de norme 1 dans $\mathbb{C}^2$, donc il y a beaucoup plus de possibilités.
- **Notation de Dirac (1/3).** Dirac a inventé une notation pratique pour les qubits : par exemples, les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^2$ sont des qubits (puisque de norme = 1) et on les note $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Ainsi, un qubit $|\psi\rangle$ peut s'écrire sous la forme $|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta|1\rangle$, où α et β sont des nombres complexes tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.
- **Exemples connus de qubits.** $|+\rangle := \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$ and $|-\rangle := \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$.
- **État quantique.** On généralise la notion de qubit : un état quantique est un vecteur de norme 1 dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. (Rappel : un espace de Hilbert est simplement un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.) Un état quantique est aussi noté $|\psi\rangle$ avec la notation de Dirac.
- **Superposition quantique.** Soit $\{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ une base de $\mathcal{H}$. Alors, un état $|\psi\rangle$ de $\mathcal{H}$ peut se décomposer dans la base : $|\psi\rangle = \alpha_1|e_1\rangle + \cdots + \alpha_n|e_n\rangle$, avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, on dit que $|\psi\rangle$ est une superposition des états $|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle$, et sa probabilité d'être dans l'état $|e_i\rangle$ pour un certain i est $|\alpha_i|^2$.

II. Comment mesurer un état quantique ?

Dans la mécanique classique, on peut mesurer la vitesse d'un objet, sa position, sa masse, etc... bref, étant donné un système dans un certain état, on peut mesurer un quantité (une observable) sans trop de difficulté. Voyons ce qu'il se passe avec les états quantiques. Voir [Pel08, Section 1.1] pour plus de détails (en français en plus !).

- **Observable quantique.** L'observable quantique est modélisée par une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = A^*$, où A^* est la matrice adjointe de A (*i.e.* $A^* = A$). On dit qu'une telle matrice A est *auto-adjointe*.

|1|. Dernière modification : 15 février 2023.

- **Théorème.** Une matrice auto-adjointe est toujours diagonalisable en base orthonormée, donc elle admet toujours des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et vecteurs propres associées $|v_1\rangle, \dots, |v_n\rangle$ qui forment un BON de $\mathcal{H}$.
- **Valeurs possibles d'une observable.** Les différentes valeurs possibles que peut prendre une observable A sont modélisées par les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A. Ex : si l'observable A était « la couleur d'un stylo », on pourrait avoir différentes valeurs possibles : rouge, vert, bleu, noir, violet, ...
- **Mesurer la valeur d'une observable.** On note $|v_i\rangle$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, *i.e.* on a $A\,|v_i\rangle = \lambda_i\,|v_i\rangle$ pour tout i. Lorsque l'on mesure une observable A

$$\mathbb{P}\Big(\text{observer la valeur } \lambda_i \text{ d'une observable } A \text{ à partir d'un état } |\psi\rangle\Big) := \Big|\langle v_i, \psi\rangle\Big|^2.$$

- **Notation de Dirac (2/3).** On peut voir $\langle v_i|$ comme une application $\mathcal{H} \to \mathbb{C}$ qui à partir d'un vecteur $|\psi\rangle$ donne le nombre $\langle v_i, \psi\rangle \in \mathbb{C}$. Ainsi, à la place d'écrire $\langle v_i, \psi\rangle$, on peut plutôt noter $\langle v_i\,|\,\psi\rangle$, comme si l'on appliquait la fonction $\langle v_i|$ au vecteur $|\psi\rangle$.
- **Projecteurs spectraux.** En utilisant cette notation, on peut définir $P_i := |v_i\rangle\langle v_i|$ qu'on appelle *projecteur spectral*, et on a alors $A = \sum_i \lambda_i P_i$ et la probabilité ci-dessus se simplifie en $\mathbb{P}(\dots) = \Big|\Big|\, P_i\,|\psi\rangle\,\Big|\Big|^2$.
- **Réduction du paquet d'ondes.** Il se passe un truc un peu mystérieux en mécanique quantique : quand on mesure un état, l'état change... C'est comme si, en mesurant la position d'une voiture, on déformait la voiture... Immédiatement après avoir mesuré l'observable A sur un état $|\psi\rangle$ et que l'on a obtenu une certaine valeur λ_i (pour un certain i), alors $|\psi\rangle$ devient automatiquement $|\widetilde{\psi}\rangle := \frac{P_i\,|\psi\rangle}{\Big|\Big|\, P_i\,|\psi\rangle\,\Big|\Big|}$. Ce phénomène s'appelle la *réduction du paquet d'ondes*. De plus, ce qui est impressionnant, c'est que l'état est maintenant figé : si l'on mesure à nouveau l'observable A sur le nouvel état $|\widetilde{\psi}\rangle$, alors on obtiendra forcément la même valeur λ_i qu'avant, on n'a plus l'aspect aléatoire du résultat, on n'a plus de superposition quantique comme avant.

III. Qu'est-ce que le produit tensoriel ?

Le produit tensoriel modélise la notion d'indépendance entre deux sous-systèmes (ou plus).

- **Produit tensoriel de matrices.** Aussi appelé *produit de Kronecker* (voir page Wikipedia). Si l'on a deux matrices $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p\times q}(\mathbb{C})$, alors on définit une nouvelle matrice $A \otimes B \in \mathcal{M}_{mp\ \times nq}(\mathbb{C})$ par (avec la notation de matrice par blocs) :

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

  Si l'on a des matrices A et B et des vecteurs v et w, alors $(A\otimes B)(v\otimes w) = (Av)\otimes(Bw)$.

- **Produit scalaire d'un produit tensoriel.** $\langle a\otimes b\,|\,c\otimes d\rangle := \langle a\,|\,c\rangle\,\langle b\,|\,d\rangle$.

- **Produit tensoriel d'espaces de Hilbert.** Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont des espaces de Hilbert, alors $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ est un autre espace de Hilbert, définit comme l'espace vectoriel engendré par les produits tensoriels de vecteurs :

$$\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}' := \text{vect}\left\{|\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle \,:\, |\psi\rangle \in \mathcal{H}, |\varphi\rangle \in \mathcal{H}'\right\}.$$

Donc les éléments de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ s'écrivent sous la forme $\sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle \otimes |\varphi_i\rangle$ pour certains $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}$, $|\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}'$ et $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

- **État intriqué.** Un état $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ est dit *séparé* s'il peut s'écrire sous la forme $|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes |\varphi\rangle$ avec $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ et$|\varphi\rangle \in \mathcal{H}'$. Si ce n'est pas possible, alors on dit que $|\Psi\rangle$ est *intriqué*. Ex : l'état $|\Omega\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \otimes |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \otimes |1\rangle$ est intriqué car il ne peut pas se réduire sous la forme d'un état séparé.

- **Notation de Dirac (3/3).** L'état $|0\rangle \otimes |0\rangle$ est simplement noté $|00\rangle$, et de même l'état $|1\rangle \otimes |1\rangle$ est simplement noté $|11\rangle$. Ainsi, l'état intriqué ci-dessus se reformule en $|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$.

IV. Retour au jeu `CHSH`

....

Références

[**Pel08**] Clément Pellegrini. *Existence, unicité et approximation des équations de Schrödinger stochastiques.* Thesis, Université Claude Bernard - Lyon I, June 2008. Cette thèse a reçue le prix 2008 de la fondation EADS dans la section “mathématiques et leurs interactions”.