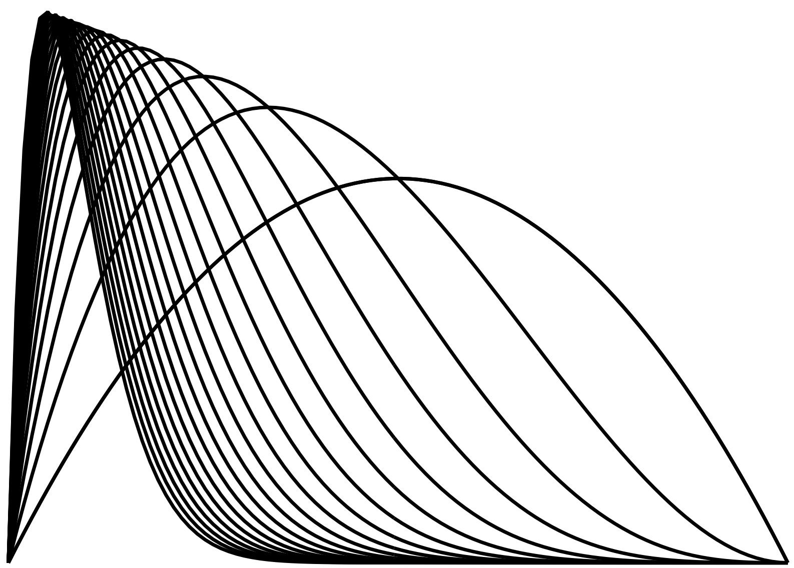
Outils Mathématiques pour l'Ingénieur

Séries numériques et séries de fonctions



- **Suites numériques réelles :** opérations, convergence, divergence, suites monotones, suites récurrentes
- **Algèbre**
  1. Décomposition en éléments simples Ex. : $\frac{p+1}{p^2(p-1)} = \frac{-2}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{2}{p-1}$
- **Algèbre linéaire**
  1. Calcul vectoriel et matriciel, espaces vectoriels et bases
  2. Produit scalaire et projection
  3. Valeurs propres, vecteurs propres $Av = \lambda v$, Ex. : $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$
- **Dérivation et intégration**
  1. Dérivation
  2. Intégration / parties : $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$, Ex. : $\int_0^{\pi} x\sin x \mathrm{d}x$
  3. Intégration / chang. de var. : $\int_a^b u(v(t))v'(t)\mathrm{d}t = \int_{v(a)}^{v(b)} u(x)\mathrm{d}x$k, Ex. : $\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x}\mathrm{d}x$

Définition 1

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres réels (ou complexes)*

On appelle série de terme général $u_n, n \in \mathbb{N}$*, notée* $\sum u_n$*, la suite* $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *définie pour tout* $N \in \mathbb{N}$ *par :*

$$S_N = u_0 + u_1 + \cdots + u_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$$

La série $\sum u_n$ est donc la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de u_n

Ex. : la série $\sum u_n = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$:

$$\begin{aligned}
S_0 &= u_0 = 1 \\
S_1 &= u_0 + u_1 = 1 + \frac{1}{2} \\
S_2 &= u_0 + u_1 + u_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \\
\cdots &= \cdots \\
S_N &= u_0 + u_1 + \cdots + u_N = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^N}
\end{aligned}$$

Définition 2

— *Si la suite* $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *est t.q.* $\lim_{N\to+\infty} S_N = S$ *alors la série* $\sum u_n$ *converge ou est convergente et* $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est la somme de* $\sum u_n$ *et* $R_m = S - S_m = \sum_{i=m+1}^{\infty} u_i$ *le reste d'ordre* m

— *Si la suite* $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *n'admet pas de limite, la série* $\sum u_n$ *diverge ou est divergente*

Théorème 1

Si la série $\sum u_n$ *converge alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

Ex. :

Série harmonique : $\sum \frac{1}{n}$ diverge avec $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Série géométrique : soit $\sum aq^n,\ a \neq 0$. On sait que $S_n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ donc convergence si et seulement si $|q| < 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{a}{1-q}$

Série de Riemann : soit $\sum \frac{1}{n^\alpha},\ n \in \mathbb{N}^*$ alors convergence si et seulement si $\alpha > 1$

Définition 3

Une série $\sum u_n$ *est* *à termes positifs* *si* $\forall n \in \mathbb{N},\, u_n \geq 0$

Ex. :

- la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$
- La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$
- La série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

Nota : La suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est nécessairement une suite croissante

Théorème 2

Si la série $\sum u_n$ *est à termes positifs alors*

$\sum u_n$ *converge* $\Longleftrightarrow (S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *est majorée*

Théorème 3

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *deux suites réelles à termes positifs*

- *Si* $\forall\, n \geq n_0 \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq K v_n$ *pour* $K > 0$*, alors*

  1. *Si la série* $\sum v_n$ *converge alors la série* $\sum u_n$ *converge et*
  $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = U \leq KV = K \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$
  2. *Si la série* $\sum u_n$ *diverge alors la série* $\sum v_n$ *diverge*

- *Si* $\forall\, n \geq n_0 \in \mathbb{N},\ \exists\ a$ *et* b *constantes positives telles que* $a \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq b$ *alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature*
- *Si* $u_n \sim v_n$ *alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature*

Nota : $u_n \sim v_n$: les deux suites sont équivalentes pour $n \to \infty$, i.e. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$

Ex. : $\displaystyle\sum u_n = \sum \frac{\ln(n)}{n}$

Théorème 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes positifs*

1- *S'il existe un réel* $l \geq 0$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ *alors*

- *Si* $0 \leq l < 1$*, la série* $\sum u_n$ *converge*
- *Si* $l > 1$*, la série* $\sum u_n$ *diverge*
- *Si* $l = 1$*, la règle de Cauchy ne permet pas de conclure*

2- *Si* $\forall\, n \geq n_0$

- $\sqrt[n]{u_n} \leq K < 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *converge*
- $\sqrt[n]{u_n} > 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *diverge*

Ex. : Soit $\sum u_n = \sum \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{-n^2}$ avec $a \in \mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-a}$ donc

- Pour $a > 0$ alors $\sum u_n$ converge
- Pour $a < 0$ alors $\sum u_n$ diverge
- Pour $a = 0$ alors $u_n = 1$ qui ne tend pas vers 0 donc $\sum u_n$ diverge

Séries à termes positifs : règles de d'Alembert

Théorème 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes* **strictement** *positifs*

1- S'il existe un réel positif ou nul l *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$ *alors*

— *Si* $0 \leq l < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge*

— *Si* $l > 1$, *la série* $\sum u_n$ *diverge*

— *Si* $l = 1$, *la règle de D'Alembert ne permet pas de conclure*

2- Si $\forall\, n \geq n_0$

— $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq K < 1$ *alors* $\sum u_n$ *converge et* $0 \leq R_n \leq \dfrac{K u_n}{1-K}$

— $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ *alors la série* $\sum u_n$ *diverge*

Ex. : Soit $\sum u_n = \sum \dfrac{1}{n!}$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{n+1} = 0$ donc $l = 0$ et la série est convergente de somme e

Théorème 6

On suppose qu'il existe une fonction $f : (a, \infty) \to \mathbb{R}^+$ *décroissante et telle que* $\forall\, n \geq n_0$, $f(n) = u_n$ *alors la série* $\sum u_n$ *et l'intégrale indéfinie* $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ *sont de même nature*

Ex. : Soit $\sum u_n = \sum \frac{1}{n^\alpha}$, pour $\alpha > 0$ alors

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\right]_a^{+\infty} = -\frac{1}{1-\alpha}a^{1-\alpha}$$

quand $\alpha > 1$

Nota : Cas des séries à termes tous négatifs

Soit $\sum u_n$ t.q. $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \leq 0$ alors $\sum u_n$ et $\sum(-u_n)$ sont de même nature

Critère de Cauchy et convergence absolue

Théorème 7 *Critère de Cauchy*

$\sum u_n$ *converge ssi* $\forall\, \epsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geq N, \forall\, p \geq N, |u_n + \cdots + u_{n+p}| \leq \epsilon$

Définition 4 $\sum u_n$ *est absolument convergente lorsque* $\sum |u_n|$ *converge*

Théorème 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite à termes réels alors*

$$\sum u_n \text{ est absolument convergente } \Rightarrow \sum u_n \text{ est convergente et } \left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

<u>Ex. :</u> Soit $\sum u_n = \sum \frac{\sin n}{n^2}$ alors $|u_n| = \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = v_n$, série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$ donc

$\sum \frac{\sin n}{n^2}$ est absolument convergente et donc convergente

$\sum u_n$ avec $u_{2n} = 1/(n+1)$ et $u_{2n+1} = -1/(n+1)$ converge vers 0 mais ne converge pas absolument

Définition 5

La série numérique $\sum u_n$ *est dite alternée si* $\forall\, n \geq n_0, \operatorname{sign}(u_n) = -\operatorname{sign}(u_{n+1})$

Théorème 9

Soit la série numérique alternée $\sum u_n$

Si la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et* $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ *alors* $\sum u_n$ *converge*

De plus $0 \leq |R_p| \leq |u_{p+1}|$ *avec* R_p *du signe de* u_{p+1}

Ex. :

- $\sum \dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*$ converge car la suite $|u_n| = \dfrac{1}{n}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$
- Soit $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}},\ n \in \mathbb{N}^*$ converge car la suite $|u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$
- La série $\sum \left(\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n}\right),\ n \in \mathbb{N}^*$ diverge

Une suite de fonctions est donnée par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n : \Delta \to \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Définition 6

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur Δ si et seulement s'il existe $f : \Delta \to \mathbb{R}$ telle que

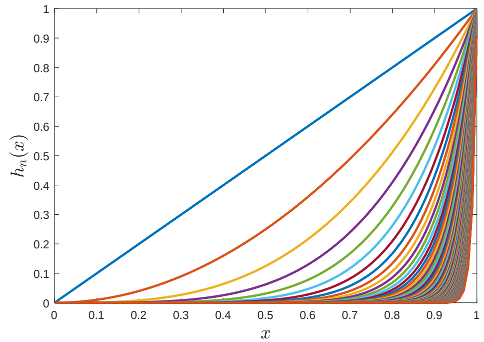
$$(\forall x \in \Delta)(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x))$$

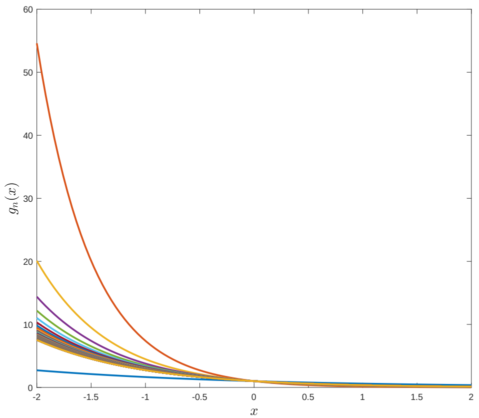
ou de manière équivalente

$$\forall x \in \Delta,\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon, x) \text{ tel que } n \geq N(\epsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

-

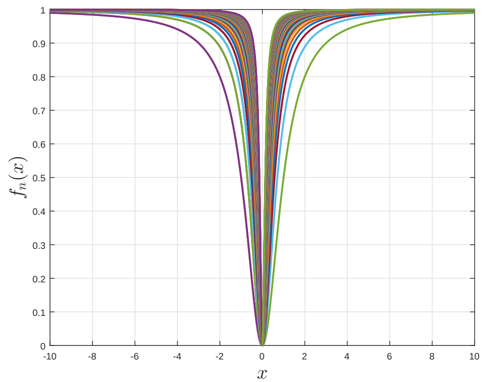
$$h_n(x) = x^n \to 0 \text{ sur } \Delta =]0,1[$$





$$g_n(x) = e^{-x\left(1+\frac{1}{n}\right)} \to e^{-x} \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}$$

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2} \to f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \text{ sur } \mathbb{R}$$



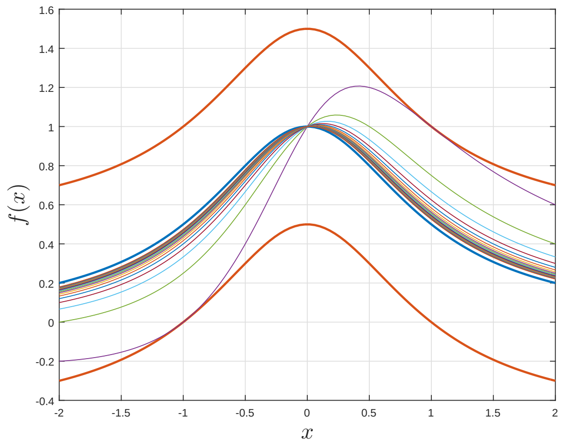
Définition 7 *La suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* Δ *si et seulement si*

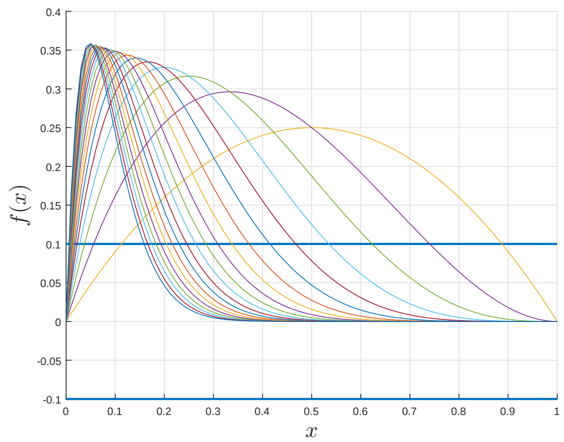
$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) \text{ tel que } n \geq N(\epsilon) \Rightarrow \forall x \in \Delta,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

ou

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{x\in\Delta}|f_n(x) - f(x)|\right) = 0$$

Ex. : $f_n(x) = \dfrac{x+n}{n(1+x^2)}$ CU vers $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$ et $f_n(x) = nx(1-x)^n$ ~~CU~~ vers 0 sur $[0,1]$





Théorème 10 *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $\Delta \Rightarrow$ *elle converge simplement sur* Δ

Procédure :

- Etudier la CS $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer f et étudier $\sup\limits_{x\in\Delta} |f_n(x) - f(x)|$
- Si $\exists\ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\sup\limits_{x\in\Delta} |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CU sur Δ
- Si $\exists\ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ t.q. $\sup\limits_{x\in\Delta} |f_n(x) - f(x)| \geq \alpha_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n \neq 0$ alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ~~CU~~ sur Δ

Définition 8 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* $\Delta \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est uniformément de Cauchy sur* Δ *ssi :*

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) \in \mathbb{N} \mid (n \geq N(\epsilon), m \geq N(\epsilon)) \Rightarrow \sup_{x\in\Delta} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

Théorème 11 *(Suites de Cauchy et CU)*

Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie sur* $\Delta \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *converge uniformément sur* Δ *si et seulement si elle est uniformément de Cauchy sur* Δ

Ex. : pour $f_n(x) = \dfrac{x+n}{n(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| = \left| \frac{x+n}{n(1+x^2)} - \frac{x+n+1}{(n+1)(1+x^2)} \right| = \frac{|x|}{n(n+1)(1+x^2)} \leq \frac{1}{n(n+1)} \to 0$$

Théorème 12

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : \Delta \to \mathbb{R}$ *CU vers* f *sur* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *et t.q.* $\forall\, n,\ f_n$ *est continue en* $x_0 \in \Delta$ *alors* f *est continue en* x_0

Nota : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ continue sur Δ + CU vers f sur Δ alors f continue sur Δ

Ex. : $f_n(x) = x^n$ ne converge uniformément ni sur $\Delta_1 = [0,1]$ ni sur $\Delta_2 = [0,1)$

Corollaire 1 *(Double limite)*

Soient $(f_n)_{n\geq 0}$, $f_n : \Delta \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \Delta$ *ou* a *est une extrémité de* Δ

Si :

(i) $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniformément sur* Δ *vers* $f : \Delta \to \mathbb{R}$

(ii) $\forall\, n \geq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)$ *existe et est finie*

Alors, la suite $(\lim\limits_{x\to a}(f_n(x))_{n\geq 0}$ *converge,* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe et*

$$\lim_{x\to a}(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)) = \lim_{n\to+\infty}(\lim_{x\to a} f_n(x))$$

Théorème 13 *Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CU vers* f *sur* $\Delta \subset \mathbb{R}$ *t.q.* $\forall\, n,\ f_n$ *est intégrable sur* Δ *alors :*

(i) f *est intégrable sur* Δ

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x_1} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\mathrm{d}t,\ \forall\, x_0, \forall\, x_1 \in \Delta$

(iii) $\displaystyle g_n(x) = \int_{x_0}^{x} f_n(t)\mathrm{d}t$ *converge uniformément sur* Δ *vers* $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t$

Ex. :

- Soit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}, n \geq 1$ CU sur $\mathbb{R}$ vers f : $x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$. On a :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\mathrm{d}x = \int_0^1 |x|\mathrm{d}x = 1/2$$

- $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^4}, n \in \mathbb{N}$ et $x \in \Delta = [0,1]$ CS vers 0 sur $[0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0$ Or

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{2nx}{1+n^2x^4}\mathrm{d}x = \arctan(n)$$

donc $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \pi/2$ et $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^4}$ ~~CU~~ vers 0 sur $[0,1]$

Théorème 14 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *t.q. :*

- $\forall\, n$, f'_n *est définie et continue sur* Δ
- *la suite* $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* g *sur* Δ
- $\exists\, x_0 \in \Delta$ *tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = l$

Alors :

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *CU sur* Δ *vers*

$$f : x \mapsto f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)\mathrm{d}t$$

(ii) f *est dérivable sur* Δ *et* $f' = g$

Nota : la convergence uniforme est supposée vraie pour la suite de fonctions des dérivées $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec f_n dérivable sur Δ, CU vers f sur $\Delta \not\Rightarrow$ f dérivable sur Δ

Ex. : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$, $n \geq 1$.Cette suite de fonctions CU sur $\mathbb{R}$ vers $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x| \in \mathbb{R}$. Chaque f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$

Définition 9 *On appelle* *série de fonctions* *notée* $\sum f_n$, *la suite de fonctions* $(\mathcal{S}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ *définie* $\forall\ N \in \mathbb{N}$ *et* $\forall\ x \in \Delta$ *par :*

$$\mathcal{S}_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x)$$

Définition 10 *La série* $\sum f_n(x)$ *converge simplement* *sur* (a, b) *vers* S *si*

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} f_k(x) = S(x),\ \forall x \in (a, b)$$

La suite de fonctions des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* S *sur* (a, b)

Pour une série de fonctions simplement convergente, on définit **le reste d'ordre** n par :

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k\geq n+1} f_k(x)$$

Définition 11 *La série $\sum f_n$ converge uniformément sur (a,b) vers S si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in(a,b)} \left| \sum_{k=0}^{n} f_k(x) - S(x) \right| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in(a,b)} |R_n(x)| = 0$$

La suite de fonctions des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers S sur (a,b)

Ex. : $\sum x^{2n}$ CS et CU vers $S(x) : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $[0,1)$ car $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^{2n} = \frac{1-(x^2)^{N+1}}{1-x^2} \to S(x)$ et

$$|R_N(x)| = \frac{x^{2N+2}}{1-x^2} \to 0$$

Théorème 15 *(Critère de Cauchy)*

La série $\sum f_n(x)$ converge uniformément sur (a,b) si et seulement si :

$$\forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, N(\epsilon) \in \mathbb{N} \,|\, \forall\, p \geq N(\epsilon) \text{ et } q \geq 0,\ \sup_{x\in(a,b)} \left| \sum_{k=p+1}^{p+q} f_k(x) \right| \leq \epsilon$$

Définition 12 $\sum f_n(x)$ *converge normalement sur* (a,b) *si* $\exists\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *à termes positifs ou nuls t.q.* $\sum u_n$ *est convergente et t.q. :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ \forall x \in (a,b)\ \ |f_n(x)| \leq u_n$$

ou la série à termes positifs $\sum \sup\limits_{x\in(a,b)} |f_n(x)|$ *converge*

Ex. : $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$ CN donc CU donc CS sur $\mathbb{R}$ car $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{|\sin(nx)|}{n^3} \leq \dfrac{1}{n^3}$

Théorème 16

- *Si* $\sum f_n$ *converge uniformément alors* $\sum f_n$ *converge simplement*
- *Si* $\sum f_n$ *converge normalement alors* $\sum f_n$ *converge uniformément*

Ex. : Soit $\sum f_n(x)$, $f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)}{n} & \text{pour} \quad x \in]n\pi,(n+1)\pi[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$ $\sum f_n(x)$ ~~CN~~ sur $\mathbb{R}$ car $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ et $\sum f_n(x)$ CU sur $\mathbb{R}$ ($\forall\ x \in \mathbb{R}$, $|\sum\limits_{n=p}^{p+q} f_n(x)| \leq \dfrac{1}{p}$)

Théorème 17 *(Limite et continuité)*

1- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur Δ et t.q. $\sum f_n(x)$ CU sur Δ vers S alors S est continue sur Δ

2- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions t.q. $\sum f_n(x)$ CU sur Δ et soit $x_0 \in \Delta$ t.q. $\forall\, n \geq 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ existe et est finie alors :

(i) $\sum\limits_{n\geq 0} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$ *converge*

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{n\geq 0} f_n(x) = \sum\limits_{n\geq 0} \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)$

Ex. : $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ CS sur $]1, +\infty[$ (série de Rieman). Par contradiction, $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ ~~CU~~ sur $]1, +\infty[$: si elle converge uniformément sur $]1, +\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x) = \frac{1}{n}$ et $\sum \lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x) = \sum \frac{1}{n}$ devrait converger

Théorème 18 *(Intégration)*

Si $\sum f_n(x)$ *converge uniformément vers* S *et si* $\forall\, n \in \mathbb{N}, f_n \in \mathcal{C}_{[a,b]}$ *alors* $\forall[\alpha, \beta] \subset [a, b]$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta f_n(x)\mathrm{d}x\right) = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta S(x)\mathrm{d}x$$

Ex. : $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sin(nx)}{n^3}$ CU sur $\mathbb{R}$, les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ donc S est continue sur $\mathbb{R}$ et

$$\int_0^\pi S(x)\mathrm{d}x = 2\sum_{p\geq 1}\frac{1}{(2p-1)^4}$$

Théorème 19 *(Dérivation)*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues et dérivables sur* $[a, b]$. *Si* $\exists\, x_0 \in [a, b]$ *t.q.* $\sum f_n(x_0)$ *converge et si* $\sum f_n'$ *CU vers* g *alors* $\sum f_n$ *CU vers* S *qui est dérivable sur* Δ *avec* $S' = g$ *et :*

$$\forall x \in [a, b] \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

Ex. : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ CS sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$. De plus, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ CN sur $\mathbb{R}$ puisque :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \frac{|\cos(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

donc elle CU sur $\mathbb{R}$ et cela implique que $\sum f_n(x)$ CU sur $\mathbb{R}$ vers $S(x)$. En appliquant le théorème de dérivation des séries :

$$S'(x) = \left(\sum f_n(x)\right)' = \sum_{n\geq 1} f_n'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}\right) \mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S'(x)\mathrm{d}x = S(\frac{\pi}{2}) - S(0) = S(\frac{\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^3} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}
\end{aligned}$$