

# TD SIGNAL

Lundi 29 avril 2024 :

## Exercice ① :

① Soit  $u = x - T$ ,  $x = u + T$ ;  $f(x) = f(u + T)$

$$\frac{dx}{du} = 1 \text{ donc } dz = du$$

Bornes:  $x = T \Rightarrow u = 0$   
 $x = T + a \Rightarrow u = a$

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(u+T) du$$

or  $\forall u \in \mathbb{R}, f(u+T) = f(u)$  donc  $\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_0^a f(u) du$

② La fonction  $f$  n'est pas dépendante au niveau de périodicité avec  $a$ . Utilisons donc une autre méthode.

Donc:  $* \oplus \Rightarrow$  Des choses

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &\stackrel{(*)}{=} \int_a^T f(x) dx + \int_T^{T+a} f(x) dx \\ &= \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\ &\quad \text{(*)} \boxed{\int_0^T f(x) dx} \end{aligned}$$

## Exercice ② :

- P est continue et  $(2\pi)$ -périodique

$\Rightarrow$  On peut appliquer la formule de  $c_m(f)$  pour  $f = P$  et  $T = 2\pi$ .

[Indice :  $e^{i2\pi m} = 1$  lorsque  $m \in \mathbb{Z}$ ]

$$c_m(P) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} (e^{-imx}) dx$$

$$= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} e^{i(k-m)x} dx$$

$k \neq m$

$$= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} c_k \left[ \frac{e^{i(k-m)x}}{ih - im} \right]_0^{2\pi}$$

$$= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} c_k \left[ \frac{e^{i(k-m)2\pi} - 1}{ih - im} \right] = \frac{1}{ih - im}$$

$$= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} c_k (0)$$

= 0

$k = m$

$$= \sum_{k=-N}^N \frac{1}{2\pi} c_k \int_0^{2\pi} 1 dx$$

$$= \boxed{\sum_{k=-N}^N c_k} = c_m$$

$$\Rightarrow c_m(P) = \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k \neq m}}^N c_k + \sum_{\substack{k=-N \\ \text{avec } k=m}}^N c_m$$

$$= \boxed{\begin{cases} c_m & \text{si } m \in [-N, N] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

### Exercice 3 :

Mardi 30 avril 2024

① •  $f$  est paire donc  $f(-x) = f(x)$ .

• Grâce à l'Exercice ①, on peut écrire :

$$b_m(f) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx$$

$$= \frac{2}{T} \left( \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx + \int_0^0 f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx \right)$$

$$\stackrel{u = -x}{=} \frac{2}{T} \left( \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx - \int_0^{-T/2} f(u) \sin\left(\frac{2\pi mu}{T}\right) du \right)$$

$$= \frac{2}{T} \times 0 = 0$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T} \left( \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx + \int_{-T/2}^0 f(-x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \right)$$

$$\stackrel{u = -x}{=} \frac{2}{T} \left( \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx + \int_0^{T/2} f(u) \cos\left(\frac{2\pi nu}{T}\right) du \right)$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx$$

$$② a_n(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx$$

$$= \frac{2}{T} \left( \int_{-T}^0 f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx + \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \right)$$

$$= \frac{2}{T} \left[ - \int_0^{T/2} f(u) \cos\left(\frac{2\pi nu}{T}\right) du + \int_0^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{T}\right) dx \right]$$

$$= 0$$

$$b_m(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx$$

$$= \frac{2}{T} \left( \int_{-T/2}^0 f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx + \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi mx}{T}\right) dx \right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{T} \left( \int_0^{T/2} f(u) \sin\left(\frac{2\pi m u}{T}\right) du + \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) dx \right) \\ &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi m x}{T}\right) dx \end{aligned}$$

Exo 4 :

①

Utiliser la formule  $\overline{\int g(t) dt} = \int \overline{g(t)} dt$

$$\text{On calcule } c_n(F) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{F(x)} e^{-inx} dx$$

$$\text{puis } \overline{c_{-n}(F)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} e^{inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} e^{inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} e^{-inx} dx$$

La fonction est continue et  $2\pi$ -périodique

On a donc

$$\boxed{c_n(F) = \overline{c_{-n}(F)}}$$

②

$g : t \mapsto f(-t)$ ,  $f$  est  $C^0$  et  $2\pi$  périodique

donc  $g$  est également  $C^0$  et  $2\pi$  périodique

Nous pouvons donc appliquer la formule de  $c_n$ .

$$\bullet \quad c_{-n}(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} dx$$

$$\bullet \quad c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(-x) e^{-inx} dx$$

Prenons  $u = -x$ ,  $\frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow du = -dx$

On a donc

$$C_n(g) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{-2\pi} f(u) e^{inx} du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 f(u) e^{inx} du$$

Nous avons vu que  $f$  et  $g$  sont  $2\pi$  périodiques, donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^0 f(u) e^{inx} du = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{inx} du$$

CC L : les deux intégrales sont égales !!

③  $h_a$  est  $C^\infty$  et  $2\pi$  périodique car  $f$  l'est aussi et  $a$  est fixé

$$C_n(h_a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x+a) e^{-inx} dx \quad \text{Soit } u = x+a, x = u-a$$

$$f(x+a) = f(u) \quad \frac{dx}{du} = 1 \Rightarrow dx = du \quad u=0 \Rightarrow u=a$$

$$e^{-inx} = e^{-ina} \quad u=2\pi+a \Rightarrow u=2\pi+a$$

$$C_n(h_a) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{2\pi+a} f(u) e^{-inu} e^{ina} du = \frac{e^{ina}}{2\pi} \int_a^{2\pi+a} f(u) e^{-inu} du$$

$$\text{Donc } \frac{e^{ina}}{2\pi} \int_a^{2\pi+a} f(u) e^{-inu} du = \frac{e^{ina}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u) e^{-inu} du = e^{ina} C_n(f)$$

Exercice 5 :

①  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $2\pi$ -périodique,  $f=1$  sur  $[0, \pi]$

impaire :  $f(-x) = -f(x)$

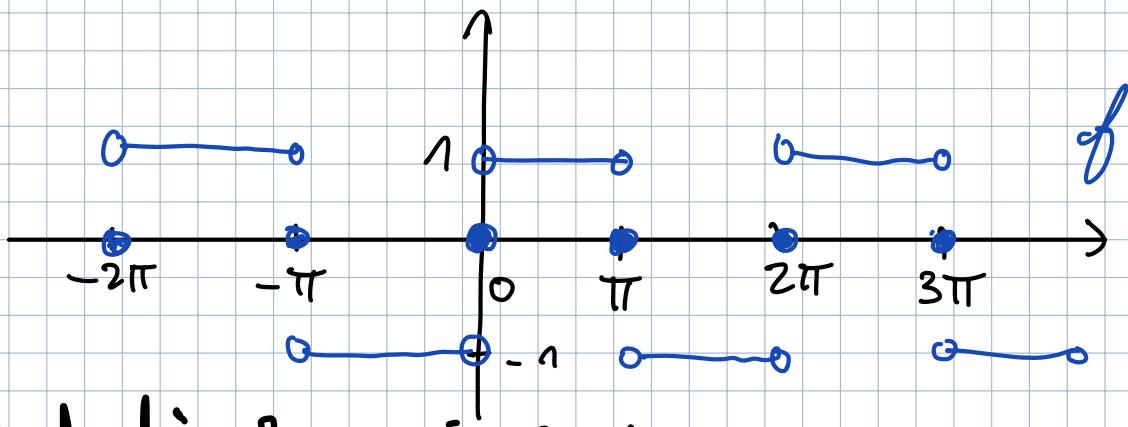
$$\circ f(0) = f(-0) = -f(0) \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\bullet \quad f(\pi) = f(-\pi - 2\pi) = f(-\pi) = -f(\pi)$$

↑  
par  $2\pi$  périodicité      ↑  
imparité

$$\Rightarrow \boxed{f(\pi) = 0}$$

2



Vendredi 3 mai 2024 :

3

$f$  est constante par morceaux

$\Rightarrow$  dérivable par morceaux  
de dérivée  $= 0$  continue

$$\Rightarrow \boxed{f \in C^1}.$$

4 Grâce à l'exo 3,  $a_n(f) = 0$

$f$  est impaire et  $2\pi$  périodique.

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \sin(nx) dx + \int_{-\pi}^0 \sin(nx) dx \right) \quad \begin{matrix} u = -x \\ du = -dx \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \sin(nx) dx + \int_0^{-\pi} \sin(nx) du \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[ -\frac{1}{n} \cos(nx) \right]_0^{\pi}$$

$$\pi - \frac{2}{\pi n} \times ((-1)^n - 1)$$

sin pair:  $b_n(f) = 0$

sin impair:  $b_n(f) = \frac{4}{\pi n}$

(5)

Indice 1: Combiner Thm 7 page 23 ("Dirichlet") avec Def 13 page 19

Indice 2:

$$\sum_{m=1}^{+\infty} a_m = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m + \sum_{m=1}^{+\infty} a_m$$

paire  
( $m = 2k$ )

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} a_{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1}$$

impaire  
( $m = 2k+1$ )

(5) Def 13, p 19:

$$S_N(f)(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{m=1}^N (a_m(f) \cos(mx) + b_m(f) \sin(mx))$$

On sait que  $a_0(f)$  et  $a_m(f) = 0$  car question 4

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{m=1}^N \frac{2}{\pi m} (-(-1)^m + 1) \sin(mx) \\ &= \sum_{m=2}^N 0 + \sum_{m=1}^N \frac{4}{\pi m} \sin(mx) \\ &\quad \begin{aligned} &\text{(m paire)} && \text{(m impair)} \\ &= \sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} 4 \sin((2k+1)x) \end{aligned} \end{aligned}$$

$m = 2k+1$   
 $k = \frac{n-1}{2}$   
 pour  $n = 1$   
 $k = 0$   
 pour  $n = N$   
 $k = \frac{N-1}{2}$

$$m=k \quad \sum_{n=0}^{N-1} \frac{4 \sin((2n+1)x)}{\pi(2n+1)}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4 \sin((2n+1)x)}{\pi(2n+1)} = \tilde{f}(x)$$

car Th de Dirichlet.

⑥ On a déterminé à la question précédente que

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)}.$$

afin de correspondre à la question 6, on cherche  $x$  tq

$$\sin[(2n+1)x] = (-1)^n$$

Essayons pour  $n=0 \rightarrow \sin(2x0+1)x = \sin(1x)$

Ainsi on remarque que  $x$  doit être  $\pm \frac{\pi}{2}$  pour  $n=0$ .

Prenons  $x = \frac{\pi}{2}$ :

$n$	$\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})$
0	$\sin \frac{\pi}{2} = -1$
1	$\sin \left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
2	$\sin \left(\frac{5\pi}{2}\right) = 1$

On remarque qu'il y a une répétition. Prenons donc  $x = \frac{\pi}{2}$

$$= (-1)^n$$

On obtient donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin((2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{\sin(\pi n + \frac{\pi}{2})}{(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{\pi} \times \frac{(-1)^n}{(2n+1)}$$

En prenant le th de Dirichlet page 23, on a

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} (f(x^-) + f(x^+)) \quad \text{avec } x = \frac{\pi}{2}$$

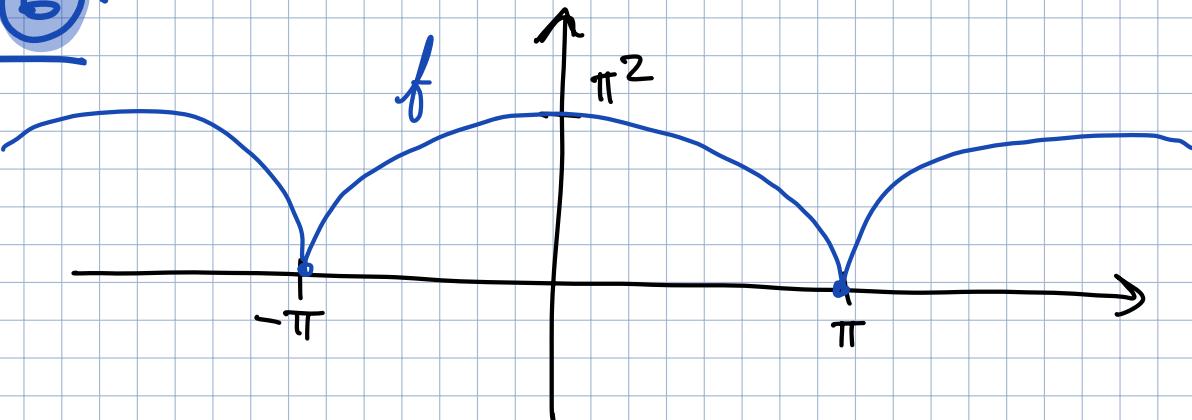
Nous avons vu à la question 2 que  $f(x^-) = f(x^+) = f(x) = 1$  pour  $x = \frac{\pi}{2}$ .

Donc  $\tilde{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1+1) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

Ainsi  $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

### Exo 6:

①



② •  $f$  est continue sur  $]-\pi, \pi[$

Or  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x)$

$\Rightarrow f$  continue sur  $[-\pi, \pi]$

$\Rightarrow$  f continue sur  $\mathbb{R}$  par  $2\pi$ -pén.

• f est  $C^1$  par morceaux

(même  $\cos$  par morceaux !!)

Car polynomiale sur  $]-\pi, \pi[$   
et  $2\pi$ -périodique.

③ (Lundi 13 Mai 2024)

$$\begin{aligned}
 C_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - \alpha^2) e^{-inx} d\alpha \\
 &\stackrel{u = e^{-inx}}{=} \frac{1}{2\pi} \left( \left[ -\frac{e^{-inx}}{ni} (\pi^2 - \alpha^2) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\alpha e^{-inx} \frac{1}{ni} d\alpha \right) \\
 &\stackrel{u' = -n e^{-inx}, n=1}{=} \frac{1}{2\pi} \left( \left[ \frac{2e^{-inx}}{n^2} \alpha \right]_{-\pi}^{\pi} - 2 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{n^2} d\alpha \right) \\
 &= -\frac{2}{2\pi} \left( \left[ \frac{e^{-inx}\pi}{n^2} + \frac{e^{inx}\pi}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} + \left[ \frac{e^{-inx}}{n^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \\
 &= -\frac{2}{2\pi} \left( \left( \frac{(-1)^n \pi}{n^2} + \frac{(-1)^n \pi}{n^2} \right) + 0 \right) \\
 &= -\frac{2}{2\pi} \times \frac{2(-1)^n \pi}{n^2} = \boxed{\frac{(-1)^n 2}{n^2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{si } n=0, C_0(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - \alpha^2) d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \pi^2 \alpha - \frac{\alpha^3}{3} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \pi^3 - \frac{\pi^3}{3} + \pi^3 - \frac{\pi^3}{3} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{4\pi^3}{3} \right) = \boxed{\frac{2\pi^2}{3}}
 \end{aligned}$$

④ Indice ①: Combiner Def 13 page 19  
et Thm 7 page 23

Indice ②: Pour la 2<sup>e</sup> série,

utiliser Thm 8 page 24

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left( -\frac{2}{n^2} (-1)^n \right) e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( -\frac{2}{n^2} (-1)^n e^{inx} \right)$$

$$= \sum_{m=n}^{+\infty} -\frac{2}{(-m)^2} (-1)^{-m} e^{-inx}$$

$$= e^{inx} + e^{-inx} = 2 \cos(nx)$$

$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(f)(x) = \frac{2\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} -2 \frac{(-1)^n}{n^2} \times 2 \cos(nx)$

$$= \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \tilde{f}(x) \quad (\text{Th. Dirichlet})$$

mêmes coefficients

On puisque  $f$  est  $C^0$ ,  $\tilde{f}(x) = f(x)$

Donc  $\forall x \in [-\pi; \pi]$ ,  $\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} - 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$

En particulier, pour  $x = \pi$ , on a :  $\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}}$

Rappel :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}$$

pour  $f$  qui est  $T$ -périodique et  $C^0$

$$\|f\|_2^2 = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt}^2$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\pi^2 - t^2|^2 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\pi^4 - 2\pi^2 t^2 + t^4) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[ \pi^4 t - \frac{2}{3} \pi^2 t^3 + \frac{1}{5} t^5 \right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi} \left( \pi^5 - \frac{2}{3} \pi^5 + \frac{\pi^5}{5} - \left[ -\pi^5 + \frac{2}{3} \pi^5 - \frac{\pi^5}{5} \right] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left( 2\pi^4 - \frac{4}{3} \pi^4 + \frac{2}{5} \pi^4 \right) = \boxed{\pi^4 \times \frac{8}{15}}
 \end{aligned}$$

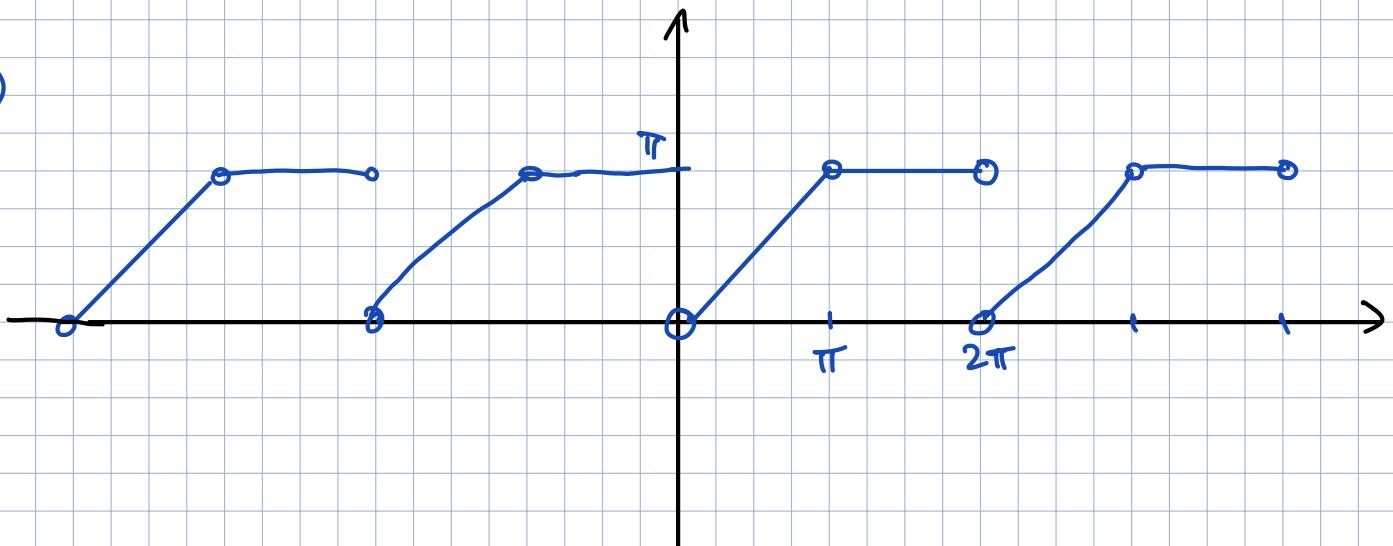
$$\begin{aligned}
 \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{m=-N}^N |C_m(f)|^2 &= |c_0(f)|^2 + \sum_{m=-\infty}^{-1} |C_m(f)|^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} |C_m(f)|^2 \\
 &= \frac{4}{9} \pi^4 + \sum_{m=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^{m+1} \times 2}{m^2} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{m+1} \times 2}{m^2} \\
 &= \boxed{\frac{4}{9} \pi^4 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{n^4}}
 \end{aligned}$$

Àvec le Th. de Parseval:

$$\begin{aligned}
 \|f\|_2^2 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |C_n(f)|^2 \\
 \Leftrightarrow \pi^4 \frac{8}{15} &= \frac{4}{9} \pi^4 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \\
 \Leftrightarrow \pi^4 \frac{8}{15} - \frac{4}{9} \pi^4 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \\
 \Leftrightarrow \pi^4 \frac{1}{75} - \frac{1}{18} \pi^4 &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \\
 \Leftrightarrow \pi^4 \left( \frac{1}{75} - \frac{1}{18} \right) &= \boxed{\pi^4 \times \frac{1}{90} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}}
 \end{aligned}$$

## Exo 7:

①



② La fonction  $f$  est polynomiale par morceaux, donc C<sup>1</sup> par morceaux.

③ Et ④ comme Exo ⑥ → à faire la maison.