# Matematica Applicata T

## Variabili Casuali

*Autore: Urbinati Cristian*

*Contatto:* cristian.urbinati@studio.unibo.it

## VARIABILE CASUALE BERNOULLIANA

$X \sim Be(p)$

$E[X] = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$

$Var(X) = (0-p)^2 q + (1-p)^2 p = p^2 q + q^2 p = pq(p+q) = pq$

$\Phi_X(t) = e^{t \cdot 0} q + e^{t \cdot 1} p = q + e^t p$

## VARIABILE CASUALE BINOMIALE

$X \sim B(n,p)$ $\qquad p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$E[X]$ $\longrightarrow$ **Uso la bernoulliana** $\longrightarrow E[\sum_1^n Y_k] = \sum_1^n E[Y_k] = np$

$Var(X)$ $\longrightarrow$ **Uso la bernoulliana** $\longrightarrow Var(\sum_1^n Y_k) = \sum_1^n Var(Y_k) = npq$

$\Phi_X(t)$ $\longrightarrow$ **Uso la bernoulliana** $\longrightarrow \Phi_{\sum_1^n Y_k}(t) = \Phi_{Y_1}(t) \cdots \Phi_{Y_n}(t) = (q + e^t p)^n$

### RIPRODUCIBILITÀ

$X \sim B(n,p),\ \ Y \sim Po(m,p) \ \Rightarrow\ X + Y \sim B(n+m, p)$

$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X \Phi_Y = (q + e^t p)^n (q + e^t p)^m = (q + e^t p)^{n+m}$

## VARIABILE CASUALE GEOMETRICA

$X \sim G(p)$ $\qquad p(k) = (1-p)^{k-1} p$

$E[X] = \sum_1^n k q^{k-1} p = p \sum_1^n k q^{k-1} = p \sum_1^n \frac{d}{dq} q^k = p \frac{d}{dq} \sum_1^n q^k = p \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$

$E[X^2] = \sum_1^n (k^2 - \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}) q^{k-1} p = pq \sum_1^n k(k-1) q^{k-2} + p \sum_1^n k q^{(k-1)} = pq \sum_1^n \frac{d^2}{d^2 q} q^k + p \sum_1^n \frac{d}{dq} q^k =$

$= pq \frac{d^2}{d^2 q} \sum_1^n q^k + p \frac{d}{dq} \sum_1^n q^k = pq \frac{d^2}{d^2 q} \frac{1}{1-q} + p \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = pq \frac{d}{dq} \frac{1}{(1-q)^2} + \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{2p(1-p)}{(1-q)^3} + \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{2p - 2p^2 + p^2}{(1-q)^3} = \frac{2-p}{p^2}$

$Var(X) = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$

## VARIABILE CASUALE POISSONIANA

$X \sim Po(\lambda)$ $\qquad p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\Phi_X(t) = \sum_1^n e^{tk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_1^n \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_1^n \frac{(\lambda e^t)^k}{k!}$ $\longrightarrow$ **Uso sviluppo di Taylor di $e^x$** $\longrightarrow e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}$

$E[X]$ $\longrightarrow$ **Uso $\boldsymbol{\Phi_X(t)}$** $\longrightarrow \frac{d}{dt} e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} = e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t \Big|_{t=0} = \lambda$

$E[X^2]$ $\longrightarrow$ **Uso $\boldsymbol{\Phi_X(t)}$** $\longrightarrow \frac{d^2}{d^2 t} e^{\lambda(e^t-1)}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t \Big|_{t=0} = e^{\lambda(e^t-1)} (\lambda e^t)^2 + e^{\lambda(e^t-1)} \lambda e^t \Big|_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$

$Var(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

## RIPRODUCIBILITÀ

$X \sim Po(\lambda_1),\;\; Y \sim Po(\lambda_2) \;\; \Rightarrow \;\; X + Y \sim Po(\lambda_1 + \lambda_2)$

$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X \Phi_Y = e^{\lambda_1(e^t-1)} e^{\lambda_2(e^t-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^t-1)}$

## LEGGE DEGLI EVENTI RARI

$Y \sim B(n,p),\;\; n \gg 1,\;\; p = \frac{\lambda}{n} \;\; \Rightarrow \;\; \lim_{n\to\infty} p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k}$

$\longrightarrow$ **Uso la seconda condizione** $\longrightarrow \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$

$\longrightarrow$ **Uso la prima condizione** $\longrightarrow \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \quad n \longrightarrow \infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{n\ln\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)}$

$\longrightarrow$ **Uso sviluppo di Taylor di $\ln(1+x)$** $\longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-n\frac{\lambda}{n}} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

## PROCESSO STOCASTICO DI POISSON

Il processo stocastico di Poisson si propone di contare il numero di eventi a partire da un tempo $t = 0$. Si rappresenta:

$$N(t)$$

Se:

- $N(0) = 0$
- Il numero di eventi in intervalli disgiunti è indipendente
- Il numero di eventi in un intervallo dipende dalla lunghezza di esso ma non dalla posizione
- $P(N(h) = 1) \sim \lambda h \quad h \longrightarrow 0$
- $P(N(h) \geq 2) \sim 0 \quad h \longrightarrow 0$

dove con $h$ si intende la lunghezza dell'intervallo

$$\Downarrow$$

$$N(t) \sim Po(\lambda t)$$

Prendiamo un intervallo $[0,t]$ e dividiamolo in $n$ sottointervalli ciascuno di lunghezza $\frac{t}{n}$.

La probabilità che ci siano $k$ eventi in $[0,t]$ corrisponde a $P(N(t) = k) = P(A_k \cup B_k)$ dove:

$A_k$: *Ci sono sottointervalli con* $2$ *o più eventi, sottointervalli con* $1$ *evento e sottointervalli con* $0$ *eventi. Totale*: $k$ *eventi*

$B_k$: *Ci sono* $k$ *sottointervalli con* $1$ *evento e* $n-k$ *con* $0$ *eventi*

$P(A_k \cap B_k) = 0 \Rightarrow P(A_k \cup B_k) = P(A_k) + P(B_k) + P(A_k \cap B_k) \cong P(B_k) \quad$ per $n \gg 1$

$P(B_k) \sim B(n,p)$ con $p = \lambda \frac{t}{n}$ dalla 4) $\Rightarrow \; \sim Po(\lambda t)$ per la legge degli eventi rari

Il processo stocastico è utile anche per studiare i tempi che trascorrono tra un evento e l'altro.

$X_k$: *Tempo trascorso tra l'evento* $(k-1)$*-esimo e l'evento* $k$*-esimo*

$$P(X_1 \leq s) = 1 - P(X_1 > s) = 1 - P(N(s) = 0) = 1 - \frac{(\lambda s)^0}{0!} e^{-\lambda s} = 1 - e^{-\lambda s}$$

$$P(X_2 > s \mid X_1 \leq t) = P(N(s) = 0) = e^{-\lambda s}$$

$$\vdots$$

Quindi nel caso degli intertempi si comporta come una variabile casuale esponenziale $X_k \sim E(\lambda)$

## VARIABILE CASUALE BINOMIALE NEGATIVA

Numero di prove necessarie per ottenere $n$ successi. La probabilità di avere successo è $p$.

$$p(k) = In\ (k-1)\ prove\ si\ ottegono\ (n-1)\ successi \cap nell'ultima\ prova\ si\ ha\ successo$$

$$= \binom{k-1}{n-1} p^{n-1}(1-p)^{(k-1)-(n-1)}p = \binom{k-1}{n-1} p^n q^{k-n}$$

$E[X]$ $\longrightarrow$ **Uso la geometrica** (numero di tentativi che occorrono dopo il (j-1)-esimo successo per ottenere il j-esimo successo) $\longrightarrow E[\sum_1^n Y_k] = \sum_1^n E[Y_k] = \frac{n}{p}$

$Var(X)$ $\longrightarrow$ **Uso la geometrica** $\longrightarrow Var(\sum_1^n Y_k) = \sum_1^n Var(Y_k) = n\frac{q}{p^2}$

## VARIABILE CASUALE UNIFORME

$X \sim U(\alpha, \beta)$

$$f(x) = \begin{cases} k & se\ x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & altrimenti \end{cases} \quad k = \frac{1}{\beta-\alpha}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & se\ x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & se\ x \in [\alpha, \beta] \\ 1 & se\ x > \beta \end{cases}$$

$$E[X] = \int_\alpha^\beta xf(x)dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{\beta^2-\alpha^2}{2} = \frac{\beta+\alpha}{2}$$

$$E[X^2] = \int_\alpha^\beta x^2 f(x)dx = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{x^3}{3}\right]_\alpha^\beta = \frac{1}{\beta-\alpha}\frac{\beta^3-\alpha^3}{3} = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3}$$

$$Var(X) = \frac{\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2}{3} - \frac{(\beta+\alpha)^2}{4} = \frac{4\beta^2+4\alpha\beta+4\alpha^2-3\beta^2-6\alpha\beta-3\alpha^2}{12} = \frac{\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2}{12} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

## VARIABILE CASUALE ESPONENZIALE

$X \sim E(\lambda)$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \le 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & se\ x > 0 \end{cases} \quad con\ \lambda > 0$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \begin{cases} 0 & se\ x \le 0 \\ \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^x = 1-e^{-\lambda x} & se\ x > 0 \end{cases}$$

$$\Phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{(t-\lambda)x}\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-x(\lambda-t)}\,dx = \left[-\frac{\lambda}{\lambda-t}e^{-x(\lambda-t)}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-t}$$

$E[X]$ $\longrightarrow$ **Uso $\boldsymbol{\Phi_X(t)}$** $\longrightarrow \left.\frac{d}{dt}\frac{\lambda}{\lambda-t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}\right|_{t=0} = \frac{1}{\lambda}$

$E[X^2]$ $\longrightarrow$ **Uso $\boldsymbol{\Phi_X(t)}$** $\longrightarrow \left.\frac{d^2}{d^2t}\frac{\lambda}{\lambda-t}\right|_{t=0} = \left.\frac{d}{dt}\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}\right|_{t=0} = \left.\frac{2\lambda}{(\lambda-t)^3}\right|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

## PROPRIETÀ DELLA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

### 1) DISPOSITIVI IN SERIE

$X_k$: *Durata di funzionamento del k-esimo dispositivo*

$Y$ : *Durata di funzionamento complessiva del dispositivo*

$$F_Y(y) = P(min(X_1, \cdots, X_n) \leq y) = 1 - P(min(X_1, \cdots, X_n) > y) = 1 - P(X_1 > y) \cdots P(X_n > y) =$$
$$\begin{cases} 0 & se\ y \leq 0 \\ 1 - e^{-(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)y} & se\ y > 0 \end{cases}$$

### 2) DISPOSITIVI IN PARALLELO

$X_k$: *Durata di funzionamento del k-esimo dispositivo*

$Y$ : *Durata di funzionamento complessiva del dispositivo*

$$F_Y(y) = P(max(X_1, \cdots, X_n) \leq y) = P(X_1 \leq y) \cdots P(X_n \leq y) = F_{X_1}(y) \cdots F_{X_n}(y) =$$
$$\begin{cases} 0 & se\ y \leq 0 \\ \left(1 - e^{-\lambda_1 y}\right) \cdots \left(1 - e^{-\lambda_n y}\right) & se\ y > 0 \end{cases}$$

### 3) ASSENZA DI MEMORIA

$$P(X > s + t \mid X > t) = \frac{P(X>s+t \cap X>t)}{P(X>t)} = \frac{P(X>s+t)}{P(X>t)} = \frac{1-P(X\leq s+t)}{1-P(X\leq t)} = \frac{1-\left(1-e^{-\lambda(s+t)}\right)}{1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

### 4)

$$Y = cX,\ X \sim E(\lambda),\ c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow Y \sim E\left(\frac{\lambda}{c}\right)$$

$$\Phi_X(t) = E[e^{tx}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

$$\Phi_Y(t) = E[e^{ty}] = E[e^{tcx}] = \Phi_X(tc) = \frac{\lambda}{\lambda - tc} = \frac{\frac{\lambda}{c}}{\frac{\lambda}{c} - t}$$

## VARIABILE CASUALE GAUSSIANA (O NORMALE)

$X \sim N(\mu, \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$

$$\Phi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \longrightarrow \boldsymbol{y = \frac{x-\mu}{\sigma} \Rightarrow x = \sigma y + \mu \Rightarrow dx = \sigma dy} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(\sigma y+\mu)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \sigma dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(\sigma y+\mu)} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2-2t\sigma y}{2}} dy$$

$$= \frac{e^{t\mu}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-t\sigma)^2-t^2\sigma^2}{2}} dy = \frac{e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(y-t\sigma)^2}{2}} dy = \frac{e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$$

$E[X] \quad \longrightarrow$ **Uso $\boldsymbol{\Phi_X(t)}$** $\longrightarrow \frac{d}{dt} e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}\Big|_{t=0} = e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}(\mu + t\sigma^2)\Big|_{t=0} = \mu$

$E[X^2] \quad \longrightarrow$ **Uso $\boldsymbol{\Phi_X(t)}$** $\longrightarrow \frac{d^2}{d^2t} e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}(\mu + t\sigma^2)\Big|_{t=0} =$

$$= e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}(\mu + t\sigma^2)^2 + e^{t\mu+\frac{t^2\sigma^2}{2}}\sigma^2\Big|_{t=0} = \mu^2 + \sigma^2$$

$Var(X) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$

### PROPRIETÀ

#### 1)

$$X \sim N(\mu, \sigma) \Rightarrow Y = \alpha X + \beta \sim N(\alpha\mu + \beta, |\alpha|\sigma)$$

$$E[Y] = E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$$

$$Var(Y) = Var(\alpha X + \beta) = \alpha^2 Var(X)$$

$$\Phi_Y(t) = E[e^{ty}] = E\left[e^{t(\alpha x+\beta)}\right] = e^{t\beta} E[e^{t\alpha x}] = e^{t\beta} e^{t\alpha\mu+\frac{t^2\alpha^2\sigma^2}{2}} = e^{t(\alpha\mu+\beta)+\frac{t^2\alpha^2\sigma^2}{2}}$$

#### 2) NORMALE STANDARD

$$\frac{X-\mu}{\sigma} = Z \sim N(0,1)$$

#### 3) RIPRODUCIBILITÀ

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1), X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2) \Rightarrow X_1 + X_2 \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{{\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2}\right)$$

$$\Phi_{X_1+X_2} = \Phi_{X_1}\Phi_{X_2} = e^{t\mu_1+\frac{t^2{\sigma_1}^2}{2}} e^{t\mu_2+\frac{t^2{\sigma_2}^2}{2}} = e^{t(\mu_1+\mu_2)+\frac{t^2({\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2)}{2}}$$

## VARIABILE CASUALE Χ² A *N* GRADI DI LIBERTÀ

$C \sim {\chi^2}_n$

$$C = \sum_{k=1}^{n} {Z_k}^2$$

$$E[C] = E\left[\sum_{k=1}^{n} {Z_k}^2\right] = \sum_{k=1}^{n} E\left[{Z_k}^2\right] = \sum_{k=1}^{n} Var(Z_k) + E[Z_k]^2 = \sum_{k=1}^{n} 1 + 0 = n$$

## VARIABILE CASUALE STUDENT A *N* GRADI DI LIBERTÀ

$T \sim t_n$

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{C}{n}}}$$

$$E[T] = 0$$

$$Var(T) = \frac{n}{n-2}$$