1 Introduzione

Definizione (Insieme delle parti)
Sia $A = \{1,2,3\}$ un insieme, l'insieme delle parti di A è $\{\{\emptyset\},\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$. La cardinalità di $P(A)$ è 2^n dove n è il numero di elementi in A.

Definizione (Struttura algebrica)
Definiamo struttura algebrica la struttura composta da un insieme e k operazioni interne (con $k \in \mathbb{N}$)
Es: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
Proprietà:
Supponiamo di avere la struttura algebrica $(A, \clubsuit, \spadesuit)$
Proprietà associativa Se $(a_1 \clubsuit a_2) \clubsuit a_3 = a_1 \clubsuit (a_2 \clubsuit a_3)$
Proprietà commutativa Se $a_1 \clubsuit a_2 = a_2 \clubsuit a_1$
Properietà distributiva Se $a_1 \clubsuit (a_2 \spadesuit a_3) = (a_1 \clubsuit a_2) \spadesuit (a_1 \clubsuit a_3)$

Definizione (Elemento neutro)
Sia $(A, \clubsuit)$ una struttura algebrica, se $(a \clubsuit u) = (u \clubsuit a) = a \ \forall a \in A,\ u \in A$ allora u è un elemento neutro (unità).

Definizine (Inverso di un elemento)
Sia $(A, \clubsuit)$ una struttura algebrica, se $\exists u \in A$ elemento neutro allora a'è inverso di a se $(a \clubsuit a') = (a' \clubsuit a) = u$.

Definizione (Gruppo)
Sia $(A, \clubsuit)$ una struttura algebrica, diremo che essa è gruppo se:
- $\clubsuit$è associativa
- $\exists! u \in A$ elemento neutro
- $\forall a \in A \ \exists! a'$ elemento inverso

Definizione (Anello)
Sia $(A, \clubsuit, \spadesuit)$ una struttura algebrica binaria (2 operazioni), diremo che essa è anello se:
- $(A, \clubsuit)$ è un gruppo commutativo (abeliano)
- $\spadesuit$è associativa
- $\spadesuit$è distributiva rispetto a $\clubsuit$

Definizione (Campo)
Sia $(A, \clubsuit, \spadesuit)$ una struttura algebrica binaria, diremo che essa è un campo se:
- $(A, \clubsuit, \spadesuit)$ è un anello commutativo con unità
- $\exists a \in A \neq 0_A$ (0_Aelemento nullo di A)
- $\forall a \in A \neq 0_A \ \exists a'$elemento inverso

Osservazione
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ non è un campo. Al contrario, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ lo sono.

2 Spazi vettoriali

Definizione (Spazio Vettoriale)
Si dice spazio vettoriale la quaterna campo, insieme, operazione interna e operazione non interna (che coinvolge insieme e campo) se per $(K, V, \clubsuit, \spadesuit)$ valgono le proprietà:
-$(V, \clubsuit)$è un gruppo commutativo (abeliano)
-$\alpha(v + w) = \alpha v + \alpha w \; \forall \alpha \in K, \; \forall v, w \in V$
-$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \; \forall \alpha, \beta \in K, \; \forall v \in V$
-$\alpha(\beta v) = (\alpha v)\beta \; \forall \alpha, \beta \in K, \; \forall v \in V$
-$1v = v \; \forall v \in V$
Dimostrazione $0v = 0_v \; \forall v \in V$
$(1 + 0)v = v + 0_v = v \Rightarrow 0v = 0_v$

Definizione (Omomorfismo tra spazi vettoriali)
Siano V e W due spazi vettoriali sullo stesso campo K
Sia $f : V \to W$ una funzione tale che:
-$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \; \forall v_1, v_2 \in V$
-$f(\alpha v) = \alpha f(v) \; \forall \alpha \in K, \; \forall v \in V$
allora diremo che esiste un **omomorfismo** tra i due spazi vettoriali
Allo stesso modo diremo che esiste:
un **endomorfismo** se $f : V \to V$
un **isomorfismo** se $f : V \underset{su}{\overset{1-1}{\to}} W$
un **automorfismo** se $f : V \underset{su}{\overset{1-1}{\to}} V$

Definizione (Combinazione lineare)
Sia V uno spazio vettoriale, siano $v_{1,} \dots, v_k \in V$, siano $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$
Chiameremo combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$ ogni espressione $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$

Definizione (Sistema di generatori)
Un sottoinsieme $G \subseteq V$ si dice sistema di generatori per V se ogni vettore $v \in V$ può essere scritto come combinazione lineare di vettori di G.

Definizione (Insieme linearmente indipendente)
Preso un insieme di vettori $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ esso si dice linearmente indipendente se nessuno dei vettori si può scrivere come combinazione lineare dei rimanenti vettori. Allo stesso modo si deve avere che $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k = 0_v \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$.

Definizione (Base di uno spazio vettoriale)
Chiamiamo base di uno spazio vettoriale V un sistema di generatori per V linearmente indipendente.
Osservazione Se V ha una base, allora ne ha infinite (a meno che non sia lo spazio $(K_p, \mathbb{Z}_n, \clubsuit, \spadesuit)$ con p numero primo)
Osservazione Nessuna base può contenere il vettore nullo
Osservazione L'unica base per $(K, \{0_v\}, \clubsuit, \spadesuit)$ è l'insieme vuoto

Definizione (Dimensione di uno spazio vettoriale)
Si dice dimensione di uno spazio vettoriale la cardinalità di una sua qualunque base.
Teorema:
Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base
Dimostrazione:
Prendiamo un insieme finito di generatori $\{v_1, \dots, v_k\}$. Se $\{v_1, \dots, v_k\}$è linearmente indipendente abbiamo la base cercata. Se non lo è esisterà un vettore v_i che si può scrivere come combinazione lineare dei vettori rimanenti. Togliamo v_i dall'insieme e ripetiamo il procedimento fino a trovare una base.

Definizione (Sottospazio vettoriale)
Un sottoinsieme W di V che è chiuso rispetto alle operazioni dello spazio vettoriale $(K, V, \clubsuit, \spadesuit)$ è detto sottospazio vettoriale di V. E si ha che:
-$0_v \in W$
-$(\alpha \spadesuit v_1) \clubsuit (\beta \spadesuit v_2) \in W \; \forall \alpha, \beta \in K, \; \forall v_1, v_2 \in W$

Definizione (Base ordinata)
Chiamiamo $(v_1, \ldots, v_n)$ una base ordinata per V.
Teorema:
Sia $(v_1, \ldots, v_n)$ una base ordinata per V, allora $\forall v \in V\ \exists!$ n-upla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K\ :\ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$
Dimostrazione:
-L'esistenza è banale visto che $(v_1, \ldots, v_n)$ essendo una base è un sistema di generatori
-L'unicità si dimostra per assurdo: supponiamo che $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$ con $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, allora $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0_v$ il che è assurdo.

Definizione (Coordinate del vettore)
Si dicono coordinate del vettore v rispetto alla base ordinata $(v_1 \ldots v_n)$ i coefficenti ordinati $(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ per ottenere v mediante la base.

Teorema:
Ogni base di $\mathbb{R}^n$ ha cardinalità n.

Teorema:
Sia $(v_1, \ldots, v_n)$ una base per V. La funzione $f\ :\ V \to \mathbb{R}^n$è un isomorfismo di spazi vettoriali.

Teorema:
Gli isomorfismi conservano la proprietà di essere sistema di generatori e la proprietà di essere un insieme linearmente indipendente.

Teorema:
Due spazi vettoriali finitamente generati hanno la stessa dimensione se e solo se sono isomorfi.

Teorema (Intersezione tra sottospazi vettoriali):
Siano U, W due sottospazi vettoriali di V, allora $U \cap W$è un sottospazio vettoriale di V.
Dimostrazione: Siano $v_1, v_2 \in U \cap W$. Allora visto che U e W sono spazi vettoriali, $v_1 + v_2 \in U$ e $v_1 + v_2 \in W$. Quindi $v_1 + v_2 \in U \cap W$. Inoltre $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $v \in U$ e $v \in W$ si ha che $\alpha \cdot v \in U$ e $\alpha \cdot v \in W$. Quindi anche $\alpha \cdot v \in U \cap W$.

Definizione (Spazio somma):
Siano V_1, V_2 due sottospazi vettoriali di V, chiamiamo spazio somma il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente V_1 e V_2 e scriveremo $V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2 :\ v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$.
Se $V_1 \cap V_2 = \{0_v\}$ allora la somma viene detta **somma diretta** e la indicheremo con $V_1 \oplus V_2$.

Definizione (Chiusura lineare)
Siano $v_1, v_2, ..., v_s \in V$ vettori. Si dice chiusura lineare di $v_1, ..., v_s$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, ..., v_s$ e si scrive $< v_1, \ldots, v_s >$.
Osservazione La chiusura lineare di $v_1, ..., v_s$ è sempre un sottospazio di V
Proposizione La chiusura lineare è anche il più piccolo sottospazio vettoriale di V contenente $v_1, ..., v_s$.

Proposizione Intersezione e somma tra sottospazi vettoriali generano a loro volta un sottospazio. L'unione tra sottospazi, in generale, no.

Teorema (Relazione di Grassman)
Siano V_1 e V_2 spazi vettoriali finitamente generati. Allora $\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim V_1 \cap V_2$
Dimostrazione: Prendiamo una base $S = \{v_1, ..., v_s\}$ di $V_1 \cap V_2$. Completiamo S a una base B_{V_1} di V_1 e a una base B_{V_2} di V_2.
$B_{V_1} = \{v_1, ..., v_s, w_{s+1}, ..., w_{s+r}\}$
$B_{V_2} = \{v_1, ..., v_s, w'_{s+1}, ..., w'_{s+t}\}$
Dobbiamo ora dimostrare che $S = \{v_1, ..., v_s, w_{s+1}, ..., w_{s+r}, w'_{s+1}, ..., w'_{s+t}\}$ è una base per $V_1 + V_2$.
Osserviamo prima di tutto che $S = \{v_1, ..., v_s, w_{s+1}, ..., w_{s+r}, w'_{s+1}, ..., w'_{s+t}\}$ è un sistema di generatori per $V_1 + V_2$. Infatti, qualunque combinazione lineare di questi vettori ci dà un vettore di $V_1 + V_2$.
Dimostriamo che i vettori di S sono linearmente indipendenti. Consideriamo la seguente uguaglianza:
$a_1v_1 + ... + a_sv_s + b_{s+1}w_{s+1} + ... + b_{s+r}w_{s+r} + c_{s+1}w'_{s+1} + ... + c_{s+t}w'_{s+t} = 0_V$.
Ricaviamo:
$a_1v_1 + ... + a_sv_s + b_{s+1}w_{s+1} + ... + b_{s+r}w_{s+r} = -c_{s+1}w'_{s+1} - ... - c_{s+t}w'_{s+t}$
Sappiamo che il vettore a sinistra appartiene a V_1, mentre quello a destra appartiene a V_2. Quindi entrambi appartengono a $V_1 \cap V_2$.
Inoltre, si ha necessariemente che $c_{s+1} = ... = c_{s+t} = 0$, altrimenti il vettore a destra potrebbe essere scritto come combinazione lineare dei vettori $v_1, ..., v_s$; ciò però non può accadere perché i vettori $w'_{s+1}, ..., w'_{s+t}$ e $v_1, ..., v_s$ sono linearmente indipendenti dato che formano una base per V_2.
Analogamente si può dimostrare che necessariamente $b_{s+1} = ... = b_{s+r} = 0$.
Si ottiene quindi l'equazione $a_1v_1 + ... + a_sv_s = 0_V$.
Quindi anche $a_1 = ... = a_s = 0$.
Perciò $dim(S) = s$ è la cardinalità di $V_1 \cap V_2$ e:
$\dim(V_1) = s + r$
$\dim(V_2) = s + t$
$\dim(V_1 + V_2) = s + r + t$

Osservazione $\dim V_1 \oplus V_2 = r + t$

3 Matrici

Definizione (Matrice)
Definiamo matrice una funzione $f : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to K$. Scriveremo $M_{m\times n}(K)$ è insieme delle matrici $m \times n$ (m righe e n colonne) a coefficienti nel campo K.

Definizione Siano $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $A = (a_{i\,j})$, $B = (b_{i\,j})$ e $\lambda \in K$. Si definiscono
-$A + B = (a_{i\,j} + b_{i\,j})$
-$\lambda A = (\lambda a_{i\,j})$

Definizione (Operazioni riga su matrice)
1)Scambiare due righe
2)Moliplicare una riga per $\lambda \in K$ non nullo
3)Aggiungere ad una riga il multiplo di un'altra

Teorema
Un numero finito di operazioni riga applicate ad una matrice generano una matrice equivalente a quella di partenza tale che:
-Le righe della matrice di partenza hanno la stessa chiusura lineare delle righe della matrice di arrivo
-Le righe della matrice di partenza sono linearmente indipendenti se e solo se lo sono quelle della matrice di arrivo

Definizione (Pivot)
Chiamiamo pivot di riga di una matrice il primo elemento non nullo della riga.

Definizione (Matrice a gradini / Ridotta per righe)
Una matrice si dice a gradini se le righe nulle eventualmente presenti sono in fondo alla matriche e, in quelle non nulle, i pivot si spostano sempre più a destra con l'incrementare dell'indice di riga.
Se inoltre abbiamo che i pivot sono tutti uguali a 1 e sopra i pivot troviamo tutti zeri, la matrice si dice **completamente ridotta**.

Definizione (Prodotto fra matrici)
Siano $A \in M_{m\times p}(K)$ e $B \in M_{p\times n}(K)$ allora il prodotto tra matrici può essere fatto e genera una matrice $C \in M_{m\times n}(K)$ tale che $c_{i\,j} = \sum_{r=1}^{p} a_{i\,r} \cdot b_{r\,j}$

Proposizione $(M_{m\times n}(K), +)$ è un gruppo commutativo.
Proposizione $(M_{m\times n}(K), +, \cdot)$ è un anello con unità (non commutativo).

Proprietà
-$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B\ \forall \alpha \in K,\ \forall A, B \in M_{m\times n}(K)$
-$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A\ \forall \alpha, \beta \in K,\ \forall A \in M_{m\times n}(K)$
-$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)\ \forall \alpha, \beta \in K,\ \forall A \in M_{m\times n}(K)$
-$1A = A$
Proprietà
-$(A + B)C = AC + BC\ \forall A, B, C \in M_{m\times n}(K)$, $A(B + C) = AB + AC\ \forall A, B, C \in M_{m\times n}(K)$
-$(AB)C = A(BC)\ \forall A, B, C \in M_{m\times n}(K)$
-$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)\ \forall \alpha \in K,\ \forall A, B \in M_{m\times n}(K)$
-$A0 = 0_A$, $B0 = 0_B\ \forall A, B \in M_{m\times n}(K)$
-$AB \neq BA$ in generale $\forall A, B \in M_{m\times n}(K)$
Proprietà
-$(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
-$(A + B)(A - B) = A^2 - AB + BA - B^2$
-$A^n = A \cdots A$ con $n > 1$
-$A^1 = A$
-$A^0 = I$ se $A \neq 0$

Definizione (Matrice quadrata)
Si definiscono matrici quadrate le matrici appartenenti a $M_{n\times n}(K)$.
Definizione (Traccia di una matrice quadrata)
Sia $A \in M_{n\times n}(K)$, si dice traccia di A la somma degli elementi sulla sua diagonale principale
Definizione (Matrice triangolare) **SOTTOSPAZIO VETTORIALE**
-Si definiscono matrici triangolari alte le matrici quadrate tali che $\forall a_{i\,j} \neq 0$ si ha che $j \geq i$
-Si definiscono matrici triangolari basse le matrici quadrate tali che $\forall a_{i\,j} \neq 0$ si ha che $j \leq i$
Definizione (Matrice diagonale) **SOTTOSPAZIO VETTORIALE**
Si definiscono matrici diagonali le matrici contemporaneamente triangolari alte e triangolari basse.
Definizione (Matrice trasposta)
Sia $A = (a_{i\,j})$ una matrice. Si definisce **matrice trasposta** la matrice ${}^tA = (b_{i\,j})$, dove $b_{i\,j} = a_{j\,i}$.
Proprietà Siano $A \in M_{m\times p}(K)$ e $B \in M_{p\times n}(K)$ allora ${}^t(AB) =^t B^tA$ e ${}^t(A+B) =^t A +^t B$
Definizione (Matrice simmetrica) **SOTTOSPAZIO VETTORIALE**
Si definiscono matrici simmetriche le matrici tali che $A =^t A$.
Definizione (Matrice antisimmetrica)
Si definiscono matrici antisimmetriche le matrici tali che $A = -^tA$.
Definizione (Matrice identica)
Si definiscono marici identiche le matrici quadrate digonali che hanno sulla diagonale principale tutti 1.
Sono generate dal delta di Kronecker ($\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}$)
Osservazione La matrice identica è l'elemento neutro rispetto al prodotto tra matrici quadrate.
Definizione (Matrice inversa)
Siano $A, B \in M_{n\times n}(K)$, diciamo che B è inversa di A (e viceversa) se $AB = BA = I_n$.
Le matrici che ammettono inversa si dicono **invertibili / non singolari**.
Proposizione Le potenze di una matrice invertibile sono ancora matrici invertibili
Teorema Se una matrice è un divisore dello 0 (cioè moltiplicata per un'altra matrice restituisce la matrice nulla) allora non è invertibile.
Teorema Sia $A \in M_{n\times n}(K)$, A ammette inversa se il suo determinante è diverso da 0
Teorema Siano $A, B \in M_{n\times n}(K)$ due matrici invertibili, allora anche AB è invertibile e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
Definizione (Matrice ortogonale)
Si definiscono matrici ortogonali le matrici invertibili la cui trasposta coincide con la loro inversa.
Definizione (Spazio delle righe)
Lo spazio delle righe di una matrice $m \times n$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ generato dalle righe della matrice.
Definizione (Spazio delle colonne)
Lo spazio delle colonne di una matrice $m \times n$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$ generato dalle colonne della matrice.
Teorema La dimensione dello spazio delle righe coincide con la dimensione dello spazio delle colonne e coincide con il rango della matrice
Definizione (Rango)
Si dice rango di una matrice $A \in M_{m\times n}(K)$:
-Il numero di pivot di una sua qualsiasi forma ridotta
-La dimensione dello spazio delle righe
-La dimensione dello spazzio delle colonne
Proposizione $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}({}^tA)$
Proposizione $(M_{n\times n}, +, \cdot)$ è un anello non commutativo. La matrice identità $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix}$ è l'unità dell'anello.
Definizione (Determinante matrice 2x2)
Sia $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ della forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ allora $ad - bc$ si chiama determinante di una matrice 2×2 e si indica con $\det(A)$.
Osservazione Sia $A \in M_{2\times 2}(K)$ della forma $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$
L'inversa di A è: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{\det A} & \frac{-b}{\det A} \\ \frac{-c}{\det A} & \frac{a}{\det A} \end{bmatrix}$

4 Sistemi lineari

Definizione (Sistema lineare)
Collezione di equazioni di primo grado.
Proposizione Sia dato un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite $AX = B$. Se $\det A = ad - bc \neq 0$, allora l'unica soluzione del sistema è $X = A^{-1}B$

Definizione (Matrice completa)
Chiamiamo matrice completa del sistema lineare la matrice ottenuta accostando alla matrice incompleta A, il vettore dei termini noti

Metodo di risoluzione di Gauss
L'algoritmo di Gauss per la risoluzione dei sistemi lineari consiste nel ridurre completamente la matrice completa del sistema.

Osservazione Se nella matrice completa completamente ridotta compare un pivot nell'ultima colonna, allora il sistema è irrisolubile.
Teorema (di Rouché-Capelli)
Un sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni se e solo se $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A \mid B)$ (matrice completa).

Teorema (Dimensione delle soluzioni di un sistema lineare)
Sia $AX = B$ un sistema lineare. Si dice dimensione delle soluzioni il numero di variabili libere del sistema ed è data da $n - \mathrm{r}(A)$, dove n è il numero di incognite.
Proposizione Un sistema lineare può avere solo 0 o 1 o ∞^n soluzioni.

Definizione (Sistema lineare omogeneo)
Si dice sistema lineare omogeneo un sistema che ha tutti i termini noti pari a 0 e si può scrivere $AX = 0$.
Proposizione Le soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite costituiscono sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5 Matrici e applicazioni lineari

Definizione (Trasformazione Lineare)
$f : V \to W$ si dice trasformazione lineare se $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)\ \forall v_1, v_2 \in V,\ \forall \alpha, \beta \in K$.
Proposizione Sia $T : V \to W$ una trasformazione lineare e siano V, W spazi vettoriali di dimensioni finite $\dim V = n$ e $\dim W = m$. Date due basi qualunque $B_V = \{v_1, ..., v_n\}$ e $B_W = \{w_1, ..., w_m\}$ rispettivamente di V e W, se $\forall j = 1, ..., n$ si ha $f(v_j) = a_{i\,j} w_1 + ... + a_{m\,j} w_m$, allora la matrice associata a T rispetto alle basi B_V e B_W, $M_{B_V B_W}(T) = (a_{i\,j}) \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ è tale che, $\forall v \in V$, il vettore $f(v) \in W$ ha coordinate rispetto a B_W

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ ... \\ y_m \end{bmatrix} = M_{B_V B_W}(T) \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$$

dove $x_1, ..., x_n$ sono le coordinate di v rispetto a B_V.

Definizione (Nucleo / Kernel)
Definiamo nucleo di una trasformazione lineare $f : V \to W$ l'insieme dei vettori di V che vengono portati mediante f in 0_w. $ker(f) = \{v \in V\} : f(v) = 0_w$
Definizione (Immagine)
Definiamo immagine di una trasformazione lineare $f : V \to W$ l'insieme dei vettori di W raggiunti mediante la trasformazione lineare f dai vettori di V. $im(f) = \{w \in W : \exists v \in V,\ f(v) = w\}$
Proposizione Sia $ker(f)$ che $im(f)$ sono sottospazi vettoriali.
Proposizione $f : V \to W$ è iniettiva se e solo se $ker(f) = \{0_w\}$
Proposizione Sia $f : V \to W$ una trasformazione lineare. Se $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è un sistema di generatori per V, allora $\{f(v_1), \ldots, f(v_k)\}$ è un sistema di generatori per $im(f)$.

Teorema (Equazione dimensionale)
Sia $f : V^n \to W^m$ allora $n = dim(V) = dim(ker(f)) + dim(im(f))$.
Dimostrazione Prendiamo una base $(v_1, \dots, v_r)$ per il $ker(f)$ (essa esiste perchè il nucleo è sempre uno spazio vettoriale finitamente generato). Completiamo la base del ker ad una base di V $(v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$.
Posso affermare che $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ è un sistema di generatori per $im(f)$. Supponiamo che $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ sia addirittura una base per $im(f)$, allora in tal caso $\alpha_{r+1}f(v_{r+1})+\dots+\alpha_n f(v_n) = 0_w$ e ciò significherebbe che $f(\alpha_{r+1}v_{r+1}+\dots+\alpha_n v_n) = 0_w$ e che quindi tali vettori fanno ancora parte del $ker(f)$. Siccome $(v_1, \dots, v_r)$ è una base per il $ker(f)$ avremo dunque che $\alpha_{r+1}v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r$ cioè
$\alpha_{r+1}v_{r+1} + \dots + \alpha_n v_n - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_r v_r = 0_v$ perchè $(v_1, \dots, v_n)$ è una base per V.
In conclusione:
-$(v_{r+1}, \dots, v_n)$ è una base per $im(f)$.
-$dim(ker(f)) = r$
-$dim(im(f)) = n - r$
-$dim(V) = r + (n - r) = n$

Teorema
Sia $f : V \to W$, se $dim(V) = dim(W)$ allora f è iniettiva $\iff$ f è suriettiva
Proposizione Sia $f : V^n \to W^m$, allora:
- Se $n > m$ allora f non può essere iniettiva
- Se $m > n$ allora f non può essere suriettiva

Dimostrazione
- Dimostriamo la contronominale. f suriettiva implica $dim(im(f)) = m$. Sappiamo inoltre che $dim(ker(f)) \geq 0$. Usando l'equazione dimensionale, necessariamente $n \geq m$.
- Dimostriamo la contronominale. f iniettiva implica $dim(ker(f)) = 0$. Usando l'equazione dimensionale abbiamo $dim(im(f)) = n$. Sappiamo inoltre che $m \geq dim(im(f)) = n$.

Teorema
Sia $f : V \to W$ un isomorfismo (e quindi biunivoca), allora $f^{-1} : W \to V$ è anch'essa lineare.
Proposizione Sia $f : V \to W$ trasformazione lineare e $dim(V) = n$. Sia $A = M_{B_V \times B_W}(f)$ la matrice associata a f rispetto alle basi B_V e B_W. Allora:
-$dim(im(f)) = \mathrm{r}(A)$
-$dim(ker(f)) = n - \mathrm{r}(A)$
Osservazione Prendiamo il seguente caso: $\underset{baseB}{V^n} \xrightarrow{f} \underset{baseC}{W^m} \xrightarrow{g} \underset{baseD}{U^k}$
Vogliamo adesso trovare la matrice associata a $g \circ f$ rispetto alle basi B e D : $\underset{baseB}{V^n} \xrightarrow{g \circ f} \underset{baseD}{U^k}$
Sappiamo che: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ ... \\ y_m \end{bmatrix} \qquad z = \begin{bmatrix} z_1 \\ ... \\ z_k \end{bmatrix}$
sono i vettori delle coordinate rispettivamente di v, $f(v)$ e $g(f(v))$. Sappiamo inoltre
- $y = M_{BC}(f) \cdot x$
- $z = M_{CD}(g) \cdot y = M_{CD}(g) \cdot M_{BC}(f) \cdot x$

Quindi la matrice associata a $g \circ f$ rispetto alle basi B e D è: $M_{BD}(g \circ f) = M_{CD}(g) \cdot M_{BC}(f)$

Definizione (Matrice del cambiamento di base)
Sia $f : \underset{baseB}{V} \xrightarrow{id_V} \underset{baseB'}{V}$ chiameremo $M_{B_V B'_V}(id_V)$ la matrice del cambiamento di base da B_V a B'_V.
Osservazione In alcuni casi potrebbe essere più facile calcolare le coordinate della matrice del cambiamento di base passando per la base canonica $\underset{baseB_V}{V} \xrightarrow{id_V} \underset{base\xi_V}{E} \xrightarrow{id_V} \underset{baseB'_V}{V}$.
Infatti $M_{B_V B'_V}(id_V) = M_{\xi_V B'_V}(id_V) \cdot M_{B_V \xi_V}(id_V)$ (considerando $\xi_V$la base canonica di V).

Osservazione Vale la formula $M_{B'_V B'_V}(id_V \circ f \circ id_V) = M_{B_V B'_V}(id_V) \cdot M_{B_V B_V}(f) \cdot M_{B'_V B_V}(id_V)$
Definizione (Matrice simile)
Siano $A, B \in M_{n\times n}(K)$, se esiste una matrice $E \in M_{n\times n}(K) : B = EAE^{-1}$ allora diremo che A e B sono tra loro simili.

Teorema fondamentale delle trasformazioni lineari
Siano V e W due spazi vettoriali finitamente generati. Siano $B_V = (v_1, ..., v_n)$ una base di V e $\{w_1, ..., w_n\}$ una n-upla di W. Esiste una e una sola trasformazione lineare $f : V \to W$ tale che $f(v_1) = w_1, ..., f(v_n) = w_n$.

6 Applicazioni lineari

Definizione (Sottomatrice)
Sia $A \in M_{m\times n}(K)$, la sottomatrice $B_{i\,j}$ di A è la matrice che si ottiene da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.
Definizione (Minore di una matrice / Sottomatrice quadrata)
Sia $A \in M_{m\times n}(K)$, le sottomatrici quadrate ottenute cancellando un dato numero di righe e/o colonne si dicono minori di A.
Sia $A \in M_{n\times n}(K)$, il minore $B_{i\,j}$di A è la matrice quadrata che si ottiene da A cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna.

Definizione (Orlato di un minore)
Sia B un minore di $A \in M_{m\times n}(K)$. Definiamo orlato di B il minore che si ottiene calcellando una riga e una colonna in meno rispetto a quelle cancellate per ottenere B.
Proprietà:
Sia $A \in M_{m\times n}(K)$, sia $B \in M_{p\times q}(K)$ una sottomatrice di A, allora il numero di orlati di B è $(m-p)\cdot(n-q)$.

Teorema (di Kronecker)
Sia $A \in M_{n\times n}(K)$ non nulla, allora se B è un minore di A con $det(B) \neq 0$ e ogni su orlato ha determinante nullo, il rango di A è dato dall'ordine di B.
Osservazione Solitamente occorre trovare il minore più grande con $det(B) \neq 0$.

Definizione (Complemento algebrico)
Detto $B_{i\,j}$ il minore di una matrice A ottenuto cancellando la i-esima riga e la j-esima colonna, chiamiamo il valore $(-1)^{i+j} \cdot det(B_{i\,j})$ il complemento algebrico dell'elemento $a_{i\,j}$ di A.
Proposizione Sia $A \in M_{n\times n}(K)$ e $B \in M_{p\times q}(K)$ sottomatrice di A, allora ilnumero di orlati di B è $(m-p)\cdot(n-q)$

Definizione (Determinante)
Sia $A \in M_{n\times n}(K)$, chiamiamo determinante della matrice A:
1) $\sum\limits_{p\in S_n} sgn(p)\cdot a_{1\,p(1)}\cdot \ldots \cdot a_{n\,p(n)}$

Esempio $A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & a_{1\,2} & a_{1\,3} \\ a_{2\,1} & a_{2\,2} & a_{2\,3} \\ a_{3\,1} & a_{3\,2} & a_{3\,3} \end{pmatrix}$,

$S_n = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{matrix} \longleftarrow n \\ \longleftarrow p(n) \end{matrix}$
le permutazioni possibili di n elementi (in generale $\#S_n = n!$)
Con $sgn(p)$ intendiamo $(-1)^k$ dove k è il numero di scambi effettuati alla permutazione p (per esempio nella prima sono 0, nella seconda 1, nella terza 2 ecc.)
Quindi in questo caso $det(A) = (1)\cdot a_{1\,1}\cdot a_{2\,2}\cdot a_{3\,3} + (-1)\cdot a_{1\,1}\cdot a_{2\,3}\cdot a_{3\,2} + (1)\cdot a_{1\,2}\cdot a_{2\,1}\cdot a_{3\,3} + (-1)\cdot a_{1\,2}\cdot a_{2\,3}\cdot a_{3\,1} + (1)\cdot a_{1\,3}\cdot a_{2\,1}\cdot a_{3\,2} + (-1)\cdot a_{1\,3}\cdot a_{2\,2}\cdot a_{3\,1}$
2) **(Teorema di Laplace)** $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{k\,i}\cdot det(A_{k\,i}) \quad k\in\{1,\ldots,m\}$ oppure $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{k\,i}\cdot det(A_{k\,i}) \quad k\in\{1,\ldots,n\}$dove A è il complemento algebrico.
3) Volume (con segno) del parallelepipedo definito dalle righe/colonne di A.
4) E' l'unica funzione da $M_{n\times n}(K)$ in K che è multilineare, alternante, normalizzata.

Proprietà (Multinineare nelle righe)
$A' = \begin{pmatrix} a'_{1\,1} & \cdots & a'_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} a''_{1\,1} & \cdots & a''_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha\cdot a'_{1\,1} + \beta\cdot a''_{1\,1} & \cdots & \alpha\cdot a'_{1\,n} + \beta\cdot a''_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$
$det(B) = \alpha det(A') + \beta det(A'')$

Proprietà (Alternante)
$A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ a_{2\,1} & \cdots & a_{2\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a_{2\,1} & \cdots & a_{2\,n} \\ a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$
$det(B) = (-1)^k det(A)$ dove k è il numero di scambi di rige effettuati nella matrice B partendo da A.

Proprietà (Normalizzata)
$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$
$det(I) = 1$

Proprietà:
- Se $A \in M_{n\times n}(K)$ ha una riga nulla allora $det(A) = 0$
- Se $A \in M_{n\times n}(K)$ contiene due righe linearmente dipendenti allora $det(A) = 0$
- Se B si ottiene da $A \in M_{n\times n}(K)$ aggiungendo la i-esima riga alla j-esima riga (per i, j qualunque ma diversi tra loro) allora $det(B) = det(A)$
- Se $A \in M_{n\times n}(K)$ è triangolare allora $det(A)$ è il prodotto degli elementi sulla diagonale principale
- Se $A \in M_{n\times n}(K)$ allora $det(A) = det(^tA)$

Proposizione Se A è una matrice invertibile, allora $det(A^{-1}) = [det(A)]^{-1}$

Teorema (di Binet)
$det(AB) = det(A) \cdot det(B)$
Dimostrazione
$E_h \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A = C' \ \equiv A$
$B \cdot E_1 \cdot \ldots \cdot E_h = C'' \ \equiv B$
Allora C' e C'' sono matrici triangolari basse
$det(AB) = det(E_h^{-1} \cdot \ldots \cdot E_1^{-1} \cdot C' \ \cdot C'' \cdot E_1^{-1} \cdot \ldots \cdot E_h^{-1} = det(C'C'') = det(C') \cdot det(C'')$ perchè sono triangolari basse e quindi $= det(A) \cdot det(B)$

Calcolo dell'inversa di una matrice quadrata invertibile mediante matrice dei cofattori
Sia $A \in M_{n \times n}(K)$ non nulla e con $det(A) \neq 0$.
Consideriamo la **matrice dei cofattori**:
$A_{\#} = \begin{pmatrix} A_{1\,1} & \cdots & A_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n\,1} & \cdots & A_{n\,n} \end{pmatrix}$ dove $A_{i\,j} = (-1)^{i+j} \cdot det(M_{i\,j})$ e $M_{i\,j}$è un minore di A.
L'inversa di A:
$A^{-1} = \frac{{}^{t}A_{\#}}{det(A)}$

Calcolo dell'inversa di una matrice quadrata invertibile con il metodo delle matrici affiancate
Sia $A \in M_{n \times n}(K)$ non nulla.
Consideriamo la matrice $(A \mid I)$
$(A \mid I) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$
Eseguo operazioni riga sulla matrice $(A \mid I)$ fino ad ottenere la matrice identica a destra.
Allora avremo $(I \mid A^{-1})$.

Calcolo della potenza di una matrice
Sia $A \in M_{n \times n}(K)$ non nulla, ricaviamo mediante operazioni riga la matrice diagonale simile $D = E^{-1}AE$. Allora $A = EDE^{-1}$ e $A^n = ED^nE^{-1}$.
La potenza di una matrice diagonale è semplicemente la potenza dei valori sulla diagonale principale.

7 Autovalori e Autovettori

Sia $f : V \to V$ un endomorfismo, poniamo $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $U_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$. Se $U_\lambda \neq \{0_v\}$ allora diciamo che λ è un **autovalore** di f.
In tal caso i vettori di $U_\lambda$vengono detti **autovettori** associati all'autovalore λ. Lo spazio generato U_λ è detto **autospazio** di f .

Proprietà U_λè un sottospazio vettoriale di V .
Proprietà $f(v) = \lambda v \equiv AX = \lambda X \iff (A - \lambda I)X = 0$
Es: $A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} \end{pmatrix}$, $(A - \lambda I) = \begin{pmatrix} a_{1\,1} - \lambda & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & \ddots - \lambda & \vdots \\ a_{n\,1} & \cdots & a_{n\,n} - \lambda \end{pmatrix}$
Proposizione Per la ricerca di autovalori e autovettori mi interessa cercare quei valori di λ tali che $(A - \lambda I)X = 0$ ammette altre soluzioni oltre a quella nulla. Occorre dunque che $det(A - \lambda I) = 0$.
Proprietà $\lambda = 0$ è un autovalore quando $ker(f) \neq \{0_v\}$ cioè quando $r(A)$ non è massimo.
Proprietà Se λ è un autovalore di $f : V \to V$, allora λ^k è un autovalore di $f^k : V \to V$.
Proprietà Se f è invertibile e λ è un autovalore di $f : V \to V$ allora λ^{-1} è un autovalore di $f^{-1} : V \to V$.
Proposizione Il polinomio caratteristico è invariante per similitudine (sia il determinante che la traccia)

$$f : V \to V$$

$$B \to det(A - \lambda I) = 0 \qquad B' \to det(A' - \lambda I) = 0$$

Dimostrazione
$A' = E^{-1}AE$
$det(A' - \lambda I) = det(E^{-1}AE - \lambda E^{-1}IE) = det(E^{-1}(A - \lambda I)E) = det(E^{-1}) \cdot det(A - \lambda I) \cdot det(E) = det(A - \lambda I)$
Proprietà Se $f : V \to V$ e $dim(V)$ è n allora il grado del polinomio caratteristico è n.
Proprietà Se $f : V \to V$ e $dim(V)$ è dispari allora esiste sempre almeno un autovalore perchè anche il grado del polinomio caratteristico è dispari.

Teorema
Sia $f : V \to V$ un endomorfismo, siano $v_1, \dots v_k$ autovettori non nulli di f associati ad autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distinti. Allora $v_1, \dots v_k$ sono linearmente indipendenti.
Teorema
Sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Siano $U_{\lambda 1}, \dots, U_{\lambda k}$ gli autospazi di f e siano $B_{\lambda 1}, \dots, B_{\lambda k}$ le loro basi. Allora $B_{\lambda 1} \cup \dots \cup B_{\lambda k}$ è un insieme linearmente indipendente.
Se la sua cardinalità è $dim(V)$ allora tale insieme è una base per V .
Teorema
Sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Siano $U_{\lambda 1}, \dots, U_{\lambda k}$ gli autospazi di f. Se $\sum_{i=1}^{n} dim(U_{\lambda i}) = dim(V)$. Allora esiste una base spettrale.
$dim(U_{\lambda i})$ è detta **molteplicità geometrica** degli autovalori $mg(\lambda_i)$.
Osservazione λ_i possono coincedere fra loro
$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ Es: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Teorema
Sia $f : V \to V$ un endomorfismo con $dim(V) = n$. Allora f ammette una base spettrale se e solo se la somma $\sum_{i=1}^{n} mg(\lambda_i)$ delle molteplicità geometrice degli autovalori di f fa n.
Osservazione Cosa succede se mancano degli autovalori?

Supponiamo di avere $v_1, \ldots, v_k$con $k < n$. Allora avremo:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_k & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \longrightarrow P_A(\lambda) = (\lambda_1 - t) \cdot (\lambda_2 - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_k - t) \cdot q(t) \text{ dove } q(t) = (\lambda_{k+1} - t) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - t)$$

In questo caso se alcuni λ_i coincidono, la loro molteplicità viene detta **Molteplicità algebrica** e si indica con $ma(\lambda_i)$.
Osservazione $1 \leq mg(\lambda_i) \leq ma(\lambda_i)$
Definizione (Endomorfismo semplice)
Un endomorfismo che ammetta una base spettrale si dice semplice.
Proposizione $f : V \to V$ è semplice se si può descrivere con una matrice diagonale.

Teorema (Spettrale)
Ogni matrice quadrata $A \in M_{n \times n}(K)$ è diagonalizzabile, cioè descrive un endomorfismo semplice $f : V \to V$, cioè ammette una base spettrale, cioè $\sum_{i=1}^{n} mg(\lambda_i) = dim(V)$, se è simmetrica.
Se $A \in M_{n \times n}(K)$ è una matrice ortogonale con n dispari e $det(A) > 0$ allora A ammette 1 come autovalore.
Dimostrazione
Dimostriamo che $det(A - 1I\,) = 0$ cioè che 1 è autovalore per la matrice ortogonale $A \in M_{n \times n}(K)$ con n dispari e $det(A) > 0$.
$det(I) = det(A \cdot^t A) = det(A) \cdot det(^tA) = [det(A)]^2 \Longrightarrow det(A) = \pm 1$
$det(A - I) = det(A - I) \cdot det(^tA) = det((A - I) \cdot^t A) = det(I -^t A) = det(^t(^tI - A)) = det(^tI - A) = det(I - A)$
Se n è dispari allora:

$$\begin{matrix} det(A - I) = -det(A - I) \\ det(I - A) = -det(I - A) \end{matrix} \Longrightarrow det(A - I\,) = 0$$

Proprosizione Se un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ non è iniettivo allora ammette 0 come autovalore.

8 Prodotto scalare

Definizione (Prodotto scalare standard)
Il prodotto scalare standard su uno spazio vettoriale V è quella funzione $f : V \times V \to \mathbb{R}$ tale che:
- f è bilineare (multilineare con coefficienti pari a 2)
- f è simmetrica ($f(u,v) = f(v,u)$)
- f è definita positiva ($f(v,v) > 0 \, \forall v \neq 0 \in V$

$< (x_1, y_1), (x_2, y_2) > \equiv (x_1, y_1) \bullet (x_2, y_2) \equiv x_1 x_2 + y_1 y_2$

$u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot cos(\hat{uv})$

Proposizione I prodotti scalari su $\mathbb{R}^n$sono tutte le funzioni $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che si possono scrivere come:
$f((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = (x_1, \ldots, x_n) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ con A simmetrica e tutti i suoi autovalori positivi.

Definizione (Spazio vettoriale euclideo)
Uno spazio si dice spazio vettoriale euclideo se è dotato di un prodotto scalare.

Teorema (Ortogonalità fra vettori)
Due vettori si dicono ortogonali rispetto al prodotto scalare se il risultato di tale prodotto è nullo.
Nel caso del prodotto scalare standard $u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot cos(\hat{uv}) = 0$. Es. se $\hat{uv} = \frac{\pi}{2}$ o la norma di uno dei due vettori è 0.
Teorema
Se $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori a due a due ortogonali non nulli, allora sono linearmente indipendenti.
Dimostrazione
$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0 \Longrightarrow (\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k) \cdot v_1 = 0 \cdot v_1 \equiv \alpha_1 \|v_1\|^2 \Longrightarrow \alpha_1 = 0$ Operazione ripetibile per ogni vettore.

Teorema (Complemento ortogonale)
Sia W un sottospazio vettoriale di V , $W^{\perp} = \{v \in V : v \bullet w = 0 \, \forall w \in W\}$ si dice complemento ortogonale di W e avremo che $dim(W^{\perp}) = n - dim(W)$
Proprietà
$(w^{\perp})^{\perp} = w$

Definizione (Base ortogonale)
Siano $v_1, \ldots, v_k$ vettori a due a due ortogonali non nulli, se essi costituiscono una base, allora si definisce base ortogonale.
Definizione (Base ortonormale)
Siano $v_1, \ldots, v_k$ vettori appartenenti ad una base ortogonale, se hanno tutti norma 1, allora prendono il nome di base ortonormale.
Proposizione Ogni spazio vettoriale reale di dimensione positiva ammette infinite basi ortonormali
Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Shmidt
Siano $< v_1, \ldots, v_s >$ vettori linearmente indipendenti di un sottospazio vettoriale di V, allora esistono $< w_1, \ldots, w_s > \in V$ che formano una base ortonormale per $< v_1, \ldots, v_s >$.
$v_1 \equiv \left\| \frac{v_1}{\|v_1\|} \right\| \longrightarrow w_1$ Lunghezza di $w_1 = 1$
$v_2 - (v_2 \bullet w_1) \cdot w_1 \longrightarrow w_2$
$v_3 - (v_3 \bullet w_1) \cdot w_1 - (v_3 \bullet w_2) \cdot w_2 \longrightarrow w_3$
$\vdots$
$v_k - (v_k \bullet w_1) \cdot w_1 - (v_k \bullet w_2) \cdot w_2 - \ldots - (v_k \bullet w_{k-1}) \cdot w_{k-1} \longrightarrow w_k$
Definizione (Isometria lineare di $\mathbb{R}^n$)
E' un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ che conserva il prodotto scalare, cioè $f(v_1) \bullet f(v_2) = v_1 \bullet v_2 \Longleftrightarrow \|f(v_1)\| \cdot \|f(v_2)\| \cdot cos(f(v_1) \hat{} f(v_2)) = \|v_1\| \cdot \|v_2\| \cdot cos(v_1 \hat{} v_2)$.
Osservazione Si conservano le lunghezze dei vettori e gli angoli compresi
Osservazione Nel caso della rappresentazione matriciale avremo:
$v_1 = (x_1, \ldots, x_n) = X$ e $v_2 = (y_1, \ldots, y_n) = Y$
$f(v_1) =^t (A(^tX))$ e $f(v_2) = A(^tY)$
A è isometria se $X \cdot (^tY) = X(^tA) \cdot A(^tY)$
Osservazione Se A è una matrice ortogonale le sue righe (o colonne) costituiscono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$.

9 Prodotto vettoriale

Definizione (Prodotto vettoriale)
Il prodotto vettoriale è una funzione $f\ :\ V_O^3 \times V_O^3 \to V_O^3$ e $|v \wedge w| = |v| \cdot |w| \cdot sin(\theta)$
Proprietà:
- $v \wedge w = -w \wedge w$
- $v_1 \wedge (v_2 + v_3) = v_1 \wedge v_2 + v_{1\wedge} v_3$
- $(\lambda v_1) \wedge v_2 = \lambda(v_1 \wedge v_2) = v_1 \wedge (\lambda v_2)$

PIANO
Consideriamo i piani di equazioni $\pi :\ ax + by + cz + d = 0$ e $\pi' :\ a'x + b'y + c'z + d' = 0$ essi sono:

- Paralleli se $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$
  - Paralleli disgiunti se $rk\left(\begin{array}{ccc:c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right) = 2$
  - Paralleli coincidenti se $rk\left(\begin{array}{ccc:c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \end{array}\right) = 1$
- Incidenti se $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2$
- Perpendicolari se $a \cdot a' + b \cdot b' + c \cdot c' = 0$

RETTA
Consideriamo due punti in $\mathbb{R}^3$;$P_0 :\ (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 :\ (x_1, y_1, z_1)$, la retta passante per tali punti è
$\begin{cases} x_1 = lt + x_0 & l = x_1 - x_0 \\ y_1 = mt + y_0 \text{ con } & m = y_1 - y_0 \\ z_1 = nt + z_0 & n = z_1 - z_0 \end{cases}$ Il vettore associato a tale retta è dato da (l, m, n)
Consideriamo due rette in $\mathbb{R}^3$; $r\ :(l, m, n)$ e $r'\ :(l', m', n')$esse sono:

- Parallele se $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 1$
- Perpendicolari se $l \cdot l' + m \cdot m' + n \cdot n' = 0$

Consideriamo la retta $r\ :\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi :\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ essi sono:

- Paralleli se $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 2$
  - Paralleli e disgiunti se $rk\left(\begin{array}{ccc:c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right) = 3$ (nessuna soluzione)
  - Paralleli e complanari se $rk\left(\begin{array}{ccc:c} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{array}\right) = 2$ (∞ soluzioni)
- Incidenti se $rk\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 3$