COPPIA DI VARIABILI CASUALI

Definiamo coppia di variabili casuali due variabili casuali associate allo stesso esperimento.

CASO DISCRETO

FUNZIONE DI MASSA DI PROBABILITÀ CONGIUNTA

$$p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \mid p(a,b) = p(X = a, Y = b) \qquad X = \{x_1, \cdots, x_n\} \; Y = \{y_1, \cdots, y_m\}$$

PROPRIETÀ

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} p(x_k, y_l) = 1$$

FUNZIONE DI MASSA DI PROBABILITÀ MARGINALE CONGIUNTA

$$p_X(a) = \sum_{l=1}^{m} p(a, y_l) \quad oppure \quad p_Y(b) = \sum_{k=1}^{n} p(x_k, b)$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ CONGUNTA

$$F: \mathbb{R}^2 \to [0,1] \mid F(a,b) = p(X \leq a, Y \leq b) = \sum_{k \leq a \; l \leq b} p(x_k, y_l)$$

PROPRIETÀ

- $F(-\infty, -\infty) = 0$
- $F(+\infty, +\infty) = 1$
- F è non decrescente
- F ha delle discontinuità

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ MARGINALE CONGIUNTA

$$F_X(a) = \sum_{k \leq a \; l \leq m} p(x_k, y_l) \quad oppure \quad F_Y(b) = \sum_{k \leq n \; l \leq b} p(x_k, y_l)$$

CASO CONTINUO

FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ CONGIUNTA

$$\exists f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+ \mid P\big((x,y) \in B\big) = \iint_B f(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

FUNZIONE DI DENSITÀ DI PROBABILITÀ MARGINALE CONGIUNTA

$$f_X(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(a,t)\mathrm{d}t \quad oppure \quad f_Y(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s,b)\mathrm{d}s$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ CONGIUNTA

$$F: \mathbb{R}^2 \to [0,1] \mid F(a,b) = p(X \leq a, Y \leq b) = \int_{-\infty}^{a} \left(\int_{-\infty}^{b} f(s,t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}s$$

PROPRIETÀ

- $\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F(a,b) = f(a,b)$
- prime 3 proprietà nel caso discreto

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ MARGINALE CONGIUNTA

$$F_X(a) = F(a, +\infty) \quad oppure \quad F_Y(b) = F(+\infty, b)$$

INDIPENDENZA

- $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B)$
- $p(a,b) = p_X(a)\, p_Y(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $f(a,b) = f_X(a)\, f_Y(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
- $F(a,b) = F_X(a)\, F_Y(b) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$