Analisi Matematica T-2

Urbinati Cristian

5/03/2018

e-mail: cristian.urbinati@studio.unibo.it

Altro : https://github.com/urbinaticri/Unibo_computerEngineeringNotes

1 Spazi metrici e normati

Definizione (metrica in $\mathbb{R}^n$) Un'applicazione $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una **metrica** se soddisfa: $\underline{x}$

1. $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \; d(\underline{x}, \underline{y}) \geq 0$ e $d(\underline{x}, \underline{y}) = 0 \iff \underline{x} = \underline{y}$
2. $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \; d(\underline{x}, \underline{y}) = d(\underline{x}, \underline{y})$
3. $\forall \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathbb{R}^n \; d(\underline{x}, \underline{y}) \leq d(\underline{x}, \underline{z}) + d(\underline{y}, \underline{z})$ (Disuguaglianza triangolare)

Definizione (spazio metrico) Sia X un insieme e d una metrica per X. Allora (X, d) si dice **spazio metrico**.

Definizione (norma di un vettore) Sia $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Si definisce norma di $\underline{x}$ una funzione $|| \cdot || : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $||\underline{x}|| \geq 0 \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ e $||\underline{x}|| = 0 \iff \underline{x} = \underline{0} = (0, \ldots, 0)$
2. $\forall \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n \; ||\underline{x} + \underline{y}|| \leq ||\underline{x}|| + ||\underline{y}||$
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \; ||\lambda \underline{x}|| = |\lambda| \cdot ||\underline{x}||$

1.1 Insiemistica

Definizione (palla aperta di centro $\underline{x}^{(0)}$ e raggio $\delta > 0$ in $\mathbb{R}^n$) $B_\delta(\underline{x}^{(0)}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\underline{x}, \underline{x}^{(0)}) < \delta\}$

Osservazione In $\mathbb{R}^2$è detto disco aperto.

Definizione (insieme aperto) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un **insieme aperto** se $\forall \underline{x}^{(0)} \in A\ \exists \delta > 0 \ : \ B_\delta(\underline{x}^{(0)}) \subseteq A$

Proprietà:

1. $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono insiemi aperti.
2. L'unione di un numero arbitrario di insiemi aperti è ancora un insieme aperto.
3. L'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è ancora un insieme aperto.

Definizione (palla chiusa di centro $\underline{x}^{(0)}$ e raggio $\delta > 0$ in $\mathbb{R}^n$) $B_\delta(\underline{x}^{(0)}) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\underline{x}, \underline{x}^{(0)}) \leq \delta\}$

Osservazione In $\mathbb{R}^2$ è detto disco chiuso.

Definizione (insieme chiuso) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un **insieme chiuso** se $\mathbb{R}^n \setminus A$ è un insieme aperto.

Proprietà:

1. $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono insiemi chiusi.
2. L'unione di un numero finito di insiemi chiusi è ancora un insieme chiuso.
3. L'intersezione di un numero arbitrario di insiemi chiusi è ancora un insieme chiuso.

Osservazione Insiemi chiusi in dimensioni inferiori rimangono chiusi in dimensioni superiori.

Definizione (punto interno di un insieme) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\underline{x}^{(0)} \in A$. Chiamiamo $\underline{x}^{(0)}$ **punto interno** di A se $\exists \delta > 0 \ : \ B_\delta(\underline{x}^{(0)}) \subseteq A$.

Definizione (interno di un insieme) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo **interno** di A l'insieme dei punti interni di A, denotato con $\mathring{A}$.

Osservazione $\mathring{A}$ è il più grande sottoinsieme di A aperto.

Definizione (punto aderente di un insieme) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Il punto $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ si dice **punto aderente** di A se $\forall \delta > 0\ A \cap B_\delta(\underline{x}^{(0)}) \neq \emptyset$

Osservazione Se $\underline{x}^{(0)}$ appartiene all'insieme, allora è un punto aderente dell'insieme.

Definizione (chiusura di un insieme) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo **chiusura** di A l'insieme dei punti aderenti di A, denotato con $\overline{A}$.

Osservazione $\overline{A}$ è il più piccolo sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ chiuso contenente A.

Proprietà:

1. Se A è aperto, allora $A = \mathring{A}$
2. Se A è chiuso, allora $A = \overline{A}$
3. $\mathring{A} \leq A \leq \overline{A}$

Definizione (punto di frontiera) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. $\underline{x}^{(0)}$ si dice **punto di frontiera** di A se $\underline{x}^{(0)}$ è aderente sia ad A che a $\mathbb{R}^n \setminus A$. Cioè $\exists \delta > 0 \ : \ A \cap B_\delta(\underline{x}^{(0)}) \neq \emptyset$ e $(\mathbb{R}^n \setminus A) \cap B_\delta(\underline{x}^{(0)}) \neq \emptyset$

Definizione (frontiera di un insieme) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Chiamiamo **frontiera** di A l'insieme dei punti di frontiera di A, denotato con ∂A.

Proprietà:

1. $\overline{A} = A \cup \partial A = \overset{\circ}{A} \cup \partial A$

Definizione (punto di accumulazione) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. $\underline{x}^{(0)}$ si dice **punto di accumulazione** per A se $\forall \delta > 0 \ (B_\delta(\underline{x}^{(0)}) \setminus \{\underline{x}^{(0)}\}) \cap A \neq \emptyset$

Osservazione Se $\underline{x}^{(0)}$ è punto di accumulazione per A, allora $\underline{x}^{(0)}$ è punto di aderenza di A.

Osservazione L'insieme dei punti di accumulazione è contenuto in $\overline{A}$ e contiene $\overset{\circ}{A}$.

Proposizione Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso allora contiene i suoi punti di accumulazione.

Definizione (insieme limitato) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **limitato** se $\exists M > 0$ tale che $A \subseteq B_M(\underline{0})$.

Teorema (di Bolzano-Weierstrass) Un insieme infinito e limitato in $\mathbb{R}^n$ possiede almeno un punto di accumulazione.

Definizione (insieme compatto) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è **compatto** se A è limitato e chiuso.

Definizione (inseieme connesso) $B \subseteq \mathbb{R}^n$è **connesso** se <u>non</u> esistono due insiemi aperti $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c.

- $A_1 \cap B \neq \emptyset \ A_2 \cap B \neq \emptyset$
- $(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) = B$

2 Funzioni

Definizione (funzione a valori scalari) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : A \to \mathbb{R}$ è una **funzione scalare** se$\forall \underline{x} \in A$ si ha che $f(\underline{x}) \in \mathbb{R}$.

Definizione (funzione a valori vettoriali) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : A \to \mathbb{R}^p$ è una **funzione vettoriale** se $\forall \underline{x} \in A$ si ha che $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \ldots, f_p(\underline{x})) \iff f_1, \ldots, f_p : A \to \mathbb{R}$.

Definizione (campo vettoriale) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : A \to \mathbb{R}^n$ è un **campo vettoriale** se $\forall \underline{x} \in A$ si ha che $f(\underline{x}) = (f_1(\underline{x}), \ldots, f_n(\underline{x}))$.

Definizione (funzione limitata) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : A \to \mathbb{R}^m$ è una **funzione limitata** se $f(A) = \left\{\underline{y} \subseteq \mathbb{R}^m : \exists \underline{x} \in A,\ f(\underline{x}) = \underline{y}\right\} \subseteq \mathbb{R}^m$ è un insieme limitato.

3 Limiti

Definizione (limite per funzioni a valori scalari) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f :: A \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per A, $l \in \mathbb{R}$. Diciamo che $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} f(\underline{x}) = l$

se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0\ :\ \forall \underline{x} \in A, \underline{x} \neq \underline{x}^{(0)},\ d(\underline{x}, \underline{x}^{(0)}) < \delta,\ |f(\underline{x}) - l| < \epsilon$

Definizione (limite per funzioni a valori vettoriali) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f :: A \to \mathbb{R}^p$, $\underline{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ punto di accumulazione per A, $\underline{l} \in \mathbb{R}^p$. Diciamo che

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} f(\underline{x}) = l \iff \begin{cases} \lim_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} f_1(\underline{x}) = l_1 \\ \vdots \\ \lim_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} f_p(\underline{x}) = l_p \end{cases}$$

3.1 Proprietà del limite

1. **Unicità del limite**: il limite, se esiste, è unico
2. **Località del limite**: invece di considerare f in tutto il dominio, posso considerare f definita in $A \cap B_r(\underline{x}^{(0)})$.
3. **Locale limitatezza di** f: se $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} f(\underline{x}) = l \in \mathbb{R}$ allora $\exists R > 0 :\ f : A \cap B_R(\underline{x}^{(0)}) \to \mathbb{R}$ è limitata

Teorema (proprietà algebriche dei limiti per valori scalari) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^{(0)}$ punto di accumulazione per A. Siano $l, m \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} f(\underline{x}) = l$ e $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} g(\underline{x}) = m$. Allora:

1. $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} [f(\underline{x}) \pm g(\underline{x})] = l \pm m$
2. $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} [f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x})] = l \cdot m$
3. Se $m \neq 0$ allora $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} \dfrac{1}{g(\underline{x})} = \dfrac{1}{m}$
4. Se $m \neq 0$ allora $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} \dfrac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} = \dfrac{l}{m}$

Teorema (proprietà algebriche dei limiti per valori vettoriali) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : A \to \mathbb{R}^p$, $\underline{x}^{(0)}$ punto di accumulazione per A. Siano $\underline{l}, \underline{m} \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} f(\underline{x}) = \underline{l}$ e $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} g(\underline{x}) = \underline{m}$. Allora:

1. $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} [f(\underline{x}) \pm g(\underline{x})] = \underline{l} \pm \underline{m}$
2. $\lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} [f(\underline{x}) \cdot g(\underline{x})] =< \underline{l}, \underline{m} >$

3.2 Continuità

Definizione (funzione continua in un punto per valori scalari) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}^{(0)} \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è continua in $\underline{x}^{(0)}$ se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ \left| f(\underline{x}) - f(\underline{x}^{(0)}) \right| < \epsilon\ \forall \underline{x} \in A :\ d_n(\underline{x}, \underline{x}^{(0)}) < \delta$.

Definizione (funzione continua in un punto per valori vettoriali) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}^{(0)} \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^p$. Diciamo che f è continua in $\underline{x}^{(0)}$ se $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ d_p(f(\underline{x}), f(\underline{x}^{(0)})) < \epsilon\ \forall \underline{x} \in A :\ d_n(\underline{x}, \underline{x}^{(0)}) < \delta$.

Osservazioni:

- Se $\underline{x}^{(0)} \in A$ è un punto isolato allora f è banalmente continua in $\underline{x}^{(0)}$
- Se $\underline{x}^{(0)} \in A$ è un punto di accumulazione per A allora f continua in $\underline{x}^{(0)} \iff \lim\limits_{\underline{x} \to \underline{x}^{(0)}} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^{(0)})$

Teorema (proprietà algebriche delle funzioni continue a valori scalari) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}^{(0)} \in A$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ continue in $\underline{x}^{(0)}$. Allora:

1. $f \pm g$ e $f \cdot g$ sono continue in $\underline{x}^{(0)}$
2. Se $g(\underline{x}) \neq 0$ allora $\frac{1}{g}$ e $\frac{f}{g}$ sono continue in $\underline{x}^{(0)}$

Teorema (proprietà algebriche delle funzioni continue a valori vettoriali) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}^{(0)} \in A$, $f, g : A \to \mathbb{R}^p$ funzioni continue in $\underline{x}^{(0)}$. Allora:

1. $f \pm g$ è continua in $\underline{x}^{(0)}$
2. $||f(\underline{x})||$ è continua in $\underline{x}^{(0)}$
3. $\langle f(\underline{x}), g(\underline{x}) \rangle$ è continua in $\underline{x}^{(0)}$

Definizione (composizione di funzioni a valori vettoriali) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}^k$ allora $g \circ f(\underline{x}) = (g_1(f_1(\underline{x}), \ldots, f_p(\underline{x})), \ldots, g_k(f_1(\underline{x}), \ldots, f_p(\underline{x})))\quad \forall \underline{x} \in A$.

Teorema (continuità della funzione composta) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^p$, $f : A \to B$ continua in $\underline{x}^{(0)} \in A$, $g : B \to \mathbb{R}^k$ continua in $\underline{y_0} \in B$, allora $g \circ f : A \to \mathbb{R}^k$ è continua in $\underline{x}^{(0)} \in A$.

Teorema (permanenza del segno) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\underline{x}^{(0)} \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$ continua in $\underline{x}^{(0)}$. Se $f(\underline{x}^{(0)}) > 0$ allora $\exists \delta > 0$ tale che $f(\underline{x}) > 0\quad \forall \underline{x} \in B_\delta(\underline{x}^{(0)}) \cap A$.

Osservazione Questo teorema ha senso se f è a valori scalari.

Definizione (massimo di una funzione) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha massimo in A se $\exists \underline{x}^{(0)} \in A$: $f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}^{(0)})\quad \forall \underline{x} \in A$

Definizione (minimo di una funzione) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f ha minimo in A se $\exists \underline{x}^{(0)} \in A$: $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^{(0)})\quad \forall \underline{x} \in A$

Teorema (di Weierstrass a valori scalari) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e $f : A \to \mathbb{R}$ continua in A. Allora $\exists \min\limits_A f$ e $\exists \max\limits_A f$.

Teorema (di Weierstrass a valori vettoriali) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto e $f : A \to \mathbb{R}^p$ continua in A. Allora $f(A)$ è un insieme compatto in $\mathbb{R}^p$.

Teorema (di Bolzano) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ connesso e $f : A \to \mathbb{R}^p$ continua in A. Allora $f(A) \subseteq \mathbb{R}^p$ è connesso.

4 Calcolo differenziale per funzioni a valori scalari

Definizione (derivata parziale) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ e $\underline{x}^{(0)} \in A$. Diciamo che f è derivabile parzialmente rispetto a x_i nel punto $\underline{x}^{(0)} = (x_1, \dots, x_n)$ se esiste finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, ..., x_i + h, ..., x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^{(0)})$$

Definizione (gradiente) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in $\underline{x}^{(0)} \in A$. Si dice **gradiente** di f in $\underline{x}^{(0)}$ il vettore

$$Df(\underline{x}^{(0)}) = \nabla f(\underline{x}^{(0)}) = (\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^{(0)}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^{(0)}))$$

Teorema (derivate parziali e continuità di f) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^{(0)} \in A$ e $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^{(0)}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^{(0)})$ continue in $\underline{x}^{(0)}$, allora f è continua in $\underline{x}^{(0)}$.

Teorema (piano tangente al grafico di una funzione) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^{(0)} \in A$ e $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^{(0)}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^{(0)})$ continue in $\underline{x}^{(0)}$, allora:

$$y = f(\underline{x}^{(0)}) + \langle \nabla f(\underline{x}^{(0)}), \underline{x} - \underline{x}^{(0)} \rangle$$

Teorema (formula di Taylor al primo ordine) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^{(0)} \in A$ e s$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^{(0)}), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^{(0)})$ continue in $\underline{x}^{(0)}$, allora:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^{(0)}) + \langle \nabla f(\underline{x}^{(0)}), \underline{x} - \underline{x}^{(0)} \rangle + o(||\underline{x} - \underline{x}^{(0)}||) \qquad ||\underline{x} - \underline{x}^{(0)}|| \to 0$$

Definizione (derivata direzionale) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\hat{\underline{\lambda}} = (\lambda_1, ..., \lambda_n), \underline{x}^{(0)} \in A$ con $||\hat{\underline{\lambda}}|| = 1$.

Chiameremo **derivata direzionale** di f nella direzione di $\hat{\underline{\lambda}}$ il limite, se esiste finito, seguente:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{\underline{\lambda}}}(\underline{x}^{(0)}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}^{(0)} + h\hat{\underline{\lambda}}) - f(\underline{x}^{(0)})}{h}$$

Teorema Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^{(0)} \in A$. Se $\nabla f(\underline{x})$ è continua in $\underline{x}^{(0)}$ allora $\forall \hat{\underline{\lambda}} \in \mathbb{R}^n$ con $||\hat{\underline{\lambda}}|| = 1$ si ha:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \hat{\underline{\lambda}}}(\underline{x}^{(0)}) \right| \leq \left\| \nabla f(\underline{x}^{(0)}) \right\|$$

ed in particolare la variazione è massima, cioè pari a $\bigtriangledown f(\underline{x}^{(0)})$, se $\hat{\underline{\lambda}} = \pm \frac{\bigtriangledown f(\underline{x}^{(0)})}{\|\bigtriangledown f(\underline{x}^{(0)})\|}$ ovvero ha la stessa direzione del gradiente ma norma unitaria essendo un versore.

Definizione (derivate parziali di ordine superiore) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^{(0)} \in A$. Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è derivabile in A, chiamiamo derivata parziale seconda di f rispetto a $x_i x_j$ il limite, se esiste finito, seguente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^{(0)}) \right) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^{(0)} + h\hat{\underline{e}}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^{(0)})}{h}$$

Definizione (matrice hessiana) Supponiamo che $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, possegga tutte le derivate parziali al secondo ordine. Allora chiamiamo **matrice hessiana** di f in $\underline{x}^{(0)}$ la matrice:

$$H_f(\underline{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \nabla \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^{(0)}) \\ \vdots \\ \nabla \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\underline{x}^{(0)}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\underline{x}^{(0)}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\underline{x}^{(0)}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\underline{x}^{(0)}) \end{bmatrix}$$

Teorema (lemma di Schwarz) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$. Se esistono continue le derivate parziali seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ in $\underline{x}^{(0)} \in A$. Allora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}^{(0)}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\underline{x}^{(0)})$$

cioè $H_f(\underline{x}^{(0)})$ è simmetrica e quindi il numero massimo di elementi diversi è $\frac{n(n+1)}{2}$.

Teorema (formula di Taylor al secondo ordine) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ con derivate parziali seconde continue in $\underline{x}^{(0)} \in A$. Allora:

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n \qquad f(\underline{x}^{(0)} + \underline{h}) = f(\underline{x}^{(0)}) + \langle \nabla f(\underline{x}^{(0)}), \underline{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle \underline{h}, H_f(\underline{x}^{(0)}) \underline{h} \rangle + o(||\underline{h}||^2) \qquad ||h|| \to 0$$

cioè:

$$\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n \qquad f(\underline{x}^{(0)} + \underline{h}) = f(\underline{x}^{(0)}) + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}^{(0)}) h_i \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}^{(0)}) h_i h_j \right) + o(||\underline{h}||^2) \qquad ||h|| \to 0$$

dove $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\underline{x}^{(0)}) h_i h_j$ è la forma quadratica associata alla matrice hessiana.

Definizione (forme quadratiche) Sia A una matrice $n \times n$. Una **forma quadratica** è un'applicazione $q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$q_A(\underline{h}) = \langle \underline{h}, A\underline{h} \rangle = \underline{h}^\top A \underline{h} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

- definita positiva se $q_A(\underline{h}) > 0 \quad \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- definita negativa se $q_A(\underline{h}) < 0 \quad \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$
- semidefinita positiva se $q_A(\underline{h}) \geq 0 \quad \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$
- semidefinita negativa se $q_A(\underline{h}) \leq 0 \quad \forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$
- indefinita se $\exists \underline{h}, \underline{k} \in \mathbb{R}^n$ tali che $q_A(\underline{h}) < 0 < q_A(\underline{k})$

Osservazione $\forall A \in M_{n \times n} \quad \exists! q_A$

Osservazione Presa una forma quadratica q_A possiamo associarle infinite matrici, ma una sola è simmetrica.

Teorema Sia q_A una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$, allora:

- q_A è definita positiva $\iff \exists m > 0 : q_A(\underline{h}) \geq m \left\| \underline{h}^2 \right\| \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$
- q_A è definita negativa $\iff \exists m < 0 : q_A(\underline{h}) \leq m \left\| \underline{h}^2 \right\| \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$

Teorema Sia $A \in M_{n\times n}$ simmetrica, $\mu_1 \leq \cdots \leq \mu_n \in \mathbb{R}$ i suoi autovalori e q_A la forma quadratica associata ad A. Allora $\forall \underline{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$\mu_1 \left\| \underline{h}^2 \right\| \leq q_A \leq \mu_n \left\| \underline{h}^2 \right\|$$

Teorema (forme quadratiche e autovalori) Sia $A \in M_{n\times n}$ simmetrica, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ i suoi autovalori e q_A la forma quadratica associata ad A. Allora q_A è:

- definita positiva $\iff \lambda_1, ..., \lambda_n > 0$
- definita negativa $\iff \lambda_1, ..., \lambda_n < 0$
- semidefinita positiva in senso proprio $\iff \lambda_1, ..., \lambda_n \geq 0$ e $\exists \lambda_i, \lambda_j$ tali che $\lambda_i = 0$ e $\lambda_j > 0$
- semidefinita negativa in senso proprio $\iff \lambda_1, ..., \lambda_n \leq 0$ e $\exists \lambda_i, \lambda_j$ tali che $\lambda_i = 0$ e $\lambda_j < 0$
- indefinita $\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ autovalori tali che $\lambda < 0 < \mu$

Teorema (criterio di Sylvester per la matrici $2x2$) Sia $A \in M_{2\times 2}$ simmetrica e $q_A(\underline{h})$ la forma quadratica associata ad A. Allora:

- $q_A(\underline{h})$ è definita $\iff \det(A) > 0$
- $q_A(\underline{h})$ è definita positiva $\iff \det(A) > 0$ e $a_{11} > 0$
- $q_A(\underline{h})$ è definita negativa $\iff \det(A) < 0$ e $a_{11} < 0$
- $q_A(\underline{h})$ è indefinita $\iff \det(A) < 0$
- $q_A(\underline{h})$ è semidefinita $\iff \det(A) = 0$
- $q_A(\underline{h})$ è semidefinita positiva $\iff \det(A) = 0$ e $a_{11}, a_{22} \geq 0$
- $q_A(\underline{h})$ è semidefinita negativa $\iff \det(A) = 0$ e $a_{11}, a_{22} \leq 0$

Definizione (minore principale) Sia $A \in M_{n\times n}$. Per ogni $k \in \{1, \ldots, n\}$ diremo minori principali di A, e li indicheremo con A_k, le matrici ottenute da A eliminando le ultime $n-k$ righe e $n-k$ colonne. Ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow A_1 = (4)\,,\ A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Teorema (criterio di Sylvester per le matrici $n \times n$) Sia $A \in M_{n\times n}$ simmetrica e $q_A(\underline{h})$la forma quadratica associata ad A. Allora:

- $q_A(\underline{h})$ è definita positiva $\iff \det(A_k) > 0\ \forall k = 1, ..., n$
- $q_A(\underline{h})$ è definita negativa $\iff (-1)^k \det(A_k) > 0\ \forall k = 1, ..., n$
- Se $\det(A_k) \neq 0\ \forall k = 1, ..., n$ e non sono rispettate le regole di segno precedenti, allora $q_A(\underline{h})$ è indefinita.

4.1 Punti critici

Definizione (massimo e minimo locale) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che $\underline{x}^{(0)} \in A$ è un punto di **massimo locale** (risp. di **minimo locale**) se:

$$\exists \delta > 0 : f(\underline{x}^{(0)}) \geq f(\underline{x}) \text{ (risp. } f(\underline{x}^{(0)}) \leq f(\underline{x})) \ \forall \underline{x} \in A \cap B_\delta(\underline{x}^{(0)})$$

Definizione (punto di sella) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^{(0)} \in A$ punto critico per f. Chiamiamo $\underline{x}^{(0)}$ **punto di sella** se:

$$\exists \delta > 0 \ \exists \underline{x}, \underline{y} \in A \cap B_\delta(\underline{x}^{(0)}) : f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}^{(0)}) \leq f(\underline{y})$$

Teorema (di Fermat) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^{(0)} \in A$ punto di massimo o minimo locale per f. Se $\exists \nabla f(\underline{x}^{(0)})$ allora $\nabla f(\underline{x}^{(0)}) = \underline{0}$.

Osservazione E' una condizione necessaria ma non sufficiente.

Definizione (Punto critico) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : A \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^{(0)} \in A$. Se $\exists \nabla f(\underline{x}^{(0)})$ t.c. $\nabla f(\underline{x}^{(0)}) = \underline{0}$ allora $\underline{x}^{(0)}$ è un **punto critico o stazionario** per f.

Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in \mathcal{C}^{(2)}(A, \mathbb{R})$ e $\underline{x}^{(0)} \in A$. Allora:

1. se $\underline{x}^{(0)}$ è un punto di minimo locale $\Longrightarrow \nabla f(\underline{x}^{(0)}) = \underline{0}$ e $H_f(\underline{x}^{(0)})$ è semidefinita positiva
2. se $\underline{x}^{(0)}$ è un punto di massimo locale $\Longrightarrow \nabla f(\underline{x}^{(0)}) = \underline{0}$ e $H_f(\underline{x}^{(0)})$ è semidefinita negativa
3. se $\nabla f(\underline{x}^{(0)}) = \underline{0}$ e $H_f(\underline{x}^{(0)})$ è definita positiva $\Longrightarrow \underline{x}^{(0)}$ è un punto di minimo locale
4. se $\nabla f(\underline{x}^{(0)}) = \underline{0}$ e $H_f(\underline{x}^{(0)})$ è definita negativa $\Longrightarrow \underline{x}^{(0)}$ è un punto di massimo locale
5. se $\nabla f(\underline{x}^{(0)}) = \underline{0}$ e $H_f(\underline{x}^{(0)})$ è indefinita $\Longrightarrow \underline{x}^{(0)}$ è un punto di sella

Osservazione Se $\nabla f(\underline{x}^{(0)}) = 0$ e $H_f(\underline{x}^{(0)})$ è semidefinita positiva in senso proprio sicuramente $\underline{x}^{(0)}$ non potrà essere di massimo locale. Sarà quindi un punto di minimo locale o sella. Viceversa se $\nabla f(\underline{x}^{(0)}) = 0$ e $H_f(\underline{x}^{(0)})$ è semidefinita negativa in senso proprio sicuramente $\underline{x}^{(0)}$ non potrà essere di minimo locale ma sarà un un punto di massimo locale o sella.

5 Calcolo differenziale per funzioni a valori vettoriali

Definizione (derivata parziale) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^p$, $\underline{x}^{(0)} \in A$. Se ogni componente f_i , $i \in [1, \dots, p]$ è derivabile parzialmente rispetto a x_j , $j \in [1, \dots, n]$ in $\underline{x}^{(0)}$ allora:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}^{(0)}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\underline{x}^{(0)}), \cdots , \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(\underline{x}^{(0)}) \right)$$

Definizione (matrice jacobiana) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^p$, $\underline{x}^{(0)} \in A$. Si definisce **matrice jacobiana** di f in $\underline{x}^{(0)}$ la matrice $p \times n$ i cui elementi della i-esima riga con $i \in [1, \dots, p]$ sono le componenti del gradiente di f_i.

$$J_f(\underline{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(\underline{x}^{(0)}) \\ \vdots \\ \nabla f_p(\underline{x}^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^{(0)}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^{(0)}) \end{bmatrix}$$

Osservazione Se $p = 1$, $J_f(\underline{x}^{(0)}) = \nabla f(\underline{x}^{(0)})$.

Osservazione Se $f \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R}^p)$, usando la formula di Taylor per le componenti f_i, $i = 1, ..., p$, abbiamo per ogni $\underline{x}^{(0)} \in A$ fissato

$$\begin{bmatrix} f_1(\underline{x}^{(0)} + \underline{h}) \\ \vdots \\ f_p(\underline{x}^{(0)} + \underline{h}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\underline{x}^{(0)}) + \langle \nabla f_1(\underline{x}^{(0)}), \underline{h} \rangle + o(||\underline{h}||) \\ \vdots \\ f_p(\underline{x}^{(0)}) + \langle \nabla f_p(\underline{x}^{(0)}), \underline{h} \rangle + o(||\underline{h}||) \end{bmatrix}$$

cioè

$$f(\underline{x}^{(0)} + \underline{h}) = f(\underline{x}^{(0)}) + \langle J_f(\underline{x}^{(0)}), \underline{h} \rangle + o(||\underline{h}||) \qquad ||\underline{h}|| \to 0$$

5.1 Composizione di funzioni

Teorema (composizione di funzioni e derivata parziale) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $B \subseteq \mathbb{R}^p$ aperto, $f \in \mathcal{C}^{(1)}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}^{(1)}(B, \mathbb{R})$. Allora $g \circ f \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$ e

$$\frac{\partial\,(g \circ f)}{\partial x_j}(\underline{x}) = \left\langle \nabla g(f(\underline{x})), \frac{\partial f}{\partial x_j}(\underline{x}) \right\rangle \qquad j \in [1, \dots, n]\,, \forall \underline{x} \in A$$

Teorema (matrice jacobiana della funzione composta) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $B \subseteq \mathbb{R}^p$ aperto, $f \in \mathcal{C}^{(1)}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}^{(1)}(B, \mathbb{R}^k)$. Allora $g \circ f \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R}^k)$ e

$$J_{g \circ f}(\underline{x}) = J_g(f(\underline{x})) \cdot J_f(\underline{x}) \qquad \forall \underline{x} \in A$$

5.2 Funzione inversa

Definizione (Diffeomormismo) Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti, $f \in \mathcal{C}^{(1)}(A, B)$ è un **diffeomorfismo** se $f : A \xrightarrow[su]{1-1} B$ e $f^{-1} \in \mathcal{C}^{(1)}(B, A)$.

Teorema (matrice jacobiana della funzione inversa) Sia $f \in \mathcal{C}^{(1)}(A, B)$ diffeomorfismo fra insiemi $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti, allora:

$$J_{f^{-1}}(\underline{y}) = J_f^{-1}(f^{-1}(\underline{y}))$$

6 Varietà ed estremanti condizionati

Definizione (Varietà regolare in $\mathbb{R}^n$) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $g \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R}^k)$. Diremo che l'insieme

$$\Gamma = \{\underline{x} \in A : g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_k(\underline{x}) = 0\} \subseteq A$$

è una varietà regolare $(n-k)$-dimensionale se $\forall \underline{x} \in \Gamma$ si ha che $J_g(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \nabla g_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \nabla g_k(\underline{x}) \end{pmatrix}$ ha rango massimo.

Definizione (Spazio tangente a Γ in $\underline{x}^{(0)} \in \Gamma$) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $g \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R}^k)$. Sia inoltre

$$\Gamma = \{\underline{x} \in A : g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_k(\underline{x}) = 0\} \subseteq A$$

varietà regolare $(n-k)$-dimensionale e $\underline{x}^{(0)} \in \Gamma$. Allora lo spazio tangente a Γ in $\underline{x}^{(0)}$ è $(n-k)$-dimensionale e:

$$T_{\underline{x}^{(0)}}\Gamma = \left\{\underline{h} \in \mathbb{R}^n : \left\langle \nabla g_1(\underline{x}^{(0)}), \underline{h} \right\rangle = 0, \ldots, \left\langle \nabla g_k(\underline{x}^{(0)}), \underline{h} \right\rangle = 0\right\}$$

Definizione (Spazio normale a Γ in $\underline{x}^{(0)} \in \Gamma$) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e $g \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R}^k)$. Sia inoltre

$$\Gamma = \{\underline{x} \in A : g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_k(\underline{x}) = 0\} \subseteq A$$

varietà regolare $(n-k)$-dimensionale e $\underline{x}^{(0)} \in \Gamma$. Allora lo spazio normale a Γ in $\underline{x}^{(0)}$ è k-dimensionale e:

$$N_{\underline{x}^{(0)}}\Gamma = \left\{\underline{h} \in \mathbb{R}^n : \exists c_1, \ldots c_k \in \mathbb{R} \quad \underline{h} = c_1 \nabla g_1(\underline{x}^{(0)}) + \cdots + c_k \nabla g_k(\underline{x}^{(0)})\right\}$$

Definizione (Estremante condizionato) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Gamma = \{\underline{x} \in A : g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_k(\underline{x}) = 0\} \subseteq A$ varietà regolare, $f : \Gamma \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^{(0)} \in \Gamma$ allora:

- $\underline{x}^{(0)}$ è un punto di **massimo locale condizionato** a Γ per f se $\exists \delta > 0 :\ f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}^{(0)})\ \forall x \in \Gamma \cap B_\delta(\underline{x}^{(0)})$
- $\underline{x}^{(0)}$ è un punto di **minimo locale condizionato** a Γ per f se $\exists \delta > 0 :\ f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^{(0)})\ \forall x \in \Gamma \cap B_\delta(\underline{x}^{(0)})$

Osservazione La condizione di maggioranza (risp. di minoranza) su $\Gamma \cap B_\delta(\underline{x}^{(0)})$ è più debole rispetto a tutto $B(\underline{x}^{(0)})$

Teorema (di Fermat per estremanti condizionati) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$.

Sia $\Gamma = \{\underline{x} \in A : g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_k(\underline{x}) = 0\} \subseteq A$. Se $\underline{x}^{(0)} \in \Gamma$ è un punto di massimo (risp. di minimo) locale condizionato a Γ per f allora $\frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(\underline{x}^{(0)}) = 0\ \forall \hat{\nu} \in T_{\underline{x}^{(0)}}\Gamma$.

Definizione (Punto critico o stazionario condizionato) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$, $g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$. Sia $\Gamma = \{\underline{x} \in A : g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_k(\underline{x}) = 0\} \subseteq A$ e $\underline{x}^{(0)} \in \Gamma$ allora chiameremo $\underline{x}^{(0)}$**punto critico o stazionario condizionato** a Γ per f se $\frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(\underline{x}^{(0)}) = 0\ \forall \hat{\nu} \in T_{\underline{x}^{(0)}}\Gamma$.

Osservazione $\frac{\partial f}{\partial \hat{\nu}}(\underline{x}^{(0)}) = \left\langle \nabla f(\underline{x}^{(0)}), \hat{\nu} \right\rangle = 0\ \forall \hat{\nu} \in T_{\underline{x}^{(0)}}\Gamma \iff \nabla f(\underline{x}^{(0)}) \in N_{\underline{x}^{(0)}}\Gamma \iff \exists! \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} : \nabla f(\underline{x}^{(0)}) = \lambda_1 \nabla g_1(\underline{x}^{(0)}) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(\underline{x}^{(0)})$

Teorema Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$ e $\Gamma = \{\underline{x} \in A : g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_k(\underline{x}) = 0\} \subseteq A$ varietà regolare $(n-k)$-dimensionale. Se $\underline{x}^{(0)} \in \Gamma$ è di massimo (risp. di minimo) locale condizionato a Γ per f allora $\nabla f(\underline{x}^{(0)}) \in N_{\underline{x}^{(0)}}\Gamma$.

Teorema (moltiplicatori di Lagrange) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f, g_1, \ldots, g_k \in \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$.

Sia $\Gamma = \{\underline{x} \in A : g_1(\underline{x}) = 0, \ldots, g_k(\underline{x}) = 0\} \subseteq A$ varietà regolare $(n-k)$-dimensionale.

Sia $F : A \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ la **funzione lagrangiana**:

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i(x_1, \ldots, x_n)$$

Se $\underline{x}^{(0)} \in \Gamma$ è un estrem. condizionato a Γ per f allora $\exists \overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_k} \in \mathbb{R} : (x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, \overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_k})$ è un pt. critico di F.

Cioè:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1}(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, \overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_k}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}^{(0)}) - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i} \dfrac{\partial g_i}{\partial x_1}(\underline{x}^{(0)}) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, \overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_k}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x}^{(0)}) - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \overline{\lambda_i} \dfrac{\partial g_i}{\partial x_n}(\underline{x}^{(0)}) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \overline{\lambda_1}}(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, \overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_k}) = -\, g_1(\underline{x}^{(0)}) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial F}{\partial \overline{\lambda_k}}(x_1^{(0)}, \ldots x_n^{(0)}, \overline{\lambda_1}, \ldots, \overline{\lambda_k}) = -\, g_k(\underline{x}^{(0)}) = 0 \end{cases}$$

Teorema (di Dini - 1 equazione in 2 variabili)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto, $g \subseteq \mathcal{C}^{(1)}(A, \mathbb{R})$, $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\right\}$ varietà regolare rispetto a $(x_0, y_0) \in \Gamma$.

Se $\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ allora, vicino a (x_0, y_0), Γ è il grafico di una funzione $f \in \mathcal{C}^{(1)}\left(]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2[\,,]y_0 - \varepsilon_1, y_0 + \varepsilon_2[\right)$ tale che:

$$g(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y = f(x) \quad \text{e} \quad f'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x))} \; \forall x \in\,]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2[$$

7 Integrazione

7.1 Integrazione (o misura) di Peano-Jordan

Definizione (Intervallo superiormente semiaperto) E' detto **intervallo superiormente semiaperto** (s.s.) un intervallo del tipo $[a_1, b_1[\times [a_2, b_2[= I$.

Definizione (Misura o area) Sia I un intervallo superiormente semiaperto. Chiamiamo **misura** (o area) di I il valore $\mu_n(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$.

Definizione (Plurintervallo) Chiamiamo **plurintervallo** un'unione finita di intervalli (chiusi, aperti, semiaperti).

Definizione (I-partizione) Sia P un plurintervallo superiormente semiaperto, è detta ***I*-partizione** di P una qualunque famiglia finita di intervalli $I_1, \ldots, I_m$superiormente semiaperti t.c. :

- $\bigcup_{k=1}^{m} I_k = P$
- $I_i \cap I_j = \emptyset$ se $i \neq j$

Se $\{I_k\}_{k=1,\ldots,m}$ sono una I-partizione di P definiamo la misura di P il valore $\mu_n(P) = \sum_{k=1}^{m} \mu_n(I_k)$.

Definizione (Misura di un plurintervallo) Definiamo **misura di un plurintervallo** qualunque Q come $\mu_n(Q) = \mu_n(P)$ con P plurintervallo s.s. t.c. $\overline{Q} = \overline{P}$ (medesima chiusura).

Proprietà

- Se P e Q sono due pluintervalli s.s. allora $P \cup Q$, $P \cap Q$, $P \setminus Q$ sono plurintervalli s.s.
- Se $P_1, \ldots, P_m$ sono plurintervalli s.s. a due a due disgiunti allora $\mu_n(P_1 \cup \cdots \cup P_m) = \sum_{k=1}^{m} \mu_n(P_k)$ ossia μ_n è finitamente additiva.
- Se P e Q sono due plurintervalli s.s. allora:
  - $\mu_n(P \cup Q) = \mu_n(P) + \mu_n(Q) - \mu_n(P \cap Q)$
  - $\mu_n(P \setminus Q) = \mu_n(P) - \mu_n(P \cap Q)$

Definizione (Misura nulla) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato. Diremo che X ha **misura nulla** se $\forall \varepsilon > 0$ esiste un plurintervallo P t.c. $X \subseteq P$ e $\mu_n(P) \leq \varepsilon$.

Proposizione Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato, consideriamo due classi di numeri positivi $\{\mu_n(P_1)\}_{P_1 \subseteq X}$ e $\{\mu_n(P_2)\}_{X \subseteq P_2}$.

Tali classi di numeri sono separate, ossia $\forall P_1, P_2$ $P_1 \subseteq X \subseteq P_2$ si ha che $\mu_n(P_1) \leq \mu_n(P_2)$, quindi:

$$0 \leq \sup_{P_1 \subseteq X} \mu_n(P_1) \leq \inf_{X \subseteq P_2} \mu_n(P_2) < +\infty$$

Definizione (misura interna) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato, consideriamo $\{\mu_n(P_1)\}_{P_1 \subseteq X}$.

Definiamo **misura interna** $\mu_n^i(X) = \sup_{P_1 \subseteq X} \mu_n(P_1)$.

Definizione (misura esterna) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato, consideriamo $\{\mu_n(P_2)\}_{X \subseteq P_2}$.

Definiamo **misura esterna** $\mu_n^e(X) = \inf_{X \subseteq P_2} \mu_n(P_2)$.

7.1.1 Insiemi limitati

Definizione (Insieme limitato misurabile secondo Peano-Jordan) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato, se $\mu_n^i(X) = \mu_n^e(X)$ diremo che X è **misurabile secondo Peano-Jordan**.

Proprietà Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato, allora

- X è misurabile secondo Peano-Jordan $\iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists P_1, P_2 : P_1 \leq X \leq P_2$ e $\mu_n(P_2 \backslash P_1) \leq \varepsilon$ con P_1,P_2 plurintervalli superiormente semiaperti.
- X è misurabile secondo Peano-Jordan $\iff \forall \varepsilon > 0 \, \exists X_1,\ X_2$ limitati e misurabili secondo Peano-Jordan con $X_1 \subseteq X \subseteq X_2$ e $\mu_n(X_2 \setminus X_1) \leq \varepsilon$.

Osservazione Se X, Y sono limitati e misurabili secondo Peano-Jordan allora anche $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$ sono misurabili secondo Peano-Jordan.

Definizione (Misura di Peano-Jordan di un insieme limitato) Indichiamo con $J_b(\mathbb{R}^n)$ la famiglia degli insiemi limitati misurabili secondo Peano-Jordan, allora è definita **misura di Peano-Jordan di un insieme limitato** la funzione $\mu_n : J_b(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty[$ e valgono le proprietà:

- μ_n è finitamente additiva, ossia se $X_k \in J_b(\mathbb{R}^n)$ $k = 1, \ldots, m$ e a due a due disgiunti allora $\mu_n(X_1 \cup \cdots \cup X_m) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mu_n(X_k)$
- $\mu_n(X \cup Y) = \mu_n(X) + \mu_n(Y) - \mu_n(X \cap Y) \quad \forall X, Y \in J_b(\mathbb{R}^n)$
- $\mu_n(X \setminus Y) = \mu_n(X) - \mu_n(X \cap Y) \quad \forall X, Y \in J_b(\mathbb{R}^n)$

Teorema Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato, allora $X \in J_b(\mathbb{R}^n) \iff \mu_n(\partial X) = 0$ dove con "∂" indichiamo la frontiera.

7.1.2 Insiemi non limitati

Definizione (Insieme non limitato misurabile secondo Peano-Jordan) Sia $X \subseteq \mathbb{R}^n$ non limitato, se $\forall Y \in J_b(\mathbb{R}^n)$ si ha che $X \cap Y \in J_b(\mathbb{R}^n)$ diremo che X è **misurabile secondo Peano-Jordan**.

Definizione (Misura di Peano-Jordan di un insieme non limitato) Indichiamo con $J(\mathbb{R}^n)$ la famiglia degli insiemi non limitati misurabili secondo Peano-Jordan, allora è definita **misura di Peano-Jordan di un insieme non limitato** il valore $\mu_n = \sup\limits_{Y \in J_b(\mathbb{R}^n)} \mu_n(X \cap Y) \in [0, +\infty]$ con $X \in J(\mathbb{R}^n)$.

7.2 Integrale secondo Riemann

Definizione (Grafico di una funzione) Sia $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo il **grafico** di tale funzione

$\Gamma(f) = \big\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ (x_1, \ldots, x_n) \in A,\, x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\big\}$.

Definizione (Sottografico di una funzione) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ non negativa, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo il **sottografico** di tale funzione $\mathsf{R}(f) = \big\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ (x_1, \ldots, x_n) \in A,\, 0 \le x_{n+1} \le f(x_1, \ldots, x_n)\big\}$

Definizione (Funzione non negativa integrabile secondo Riemann) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ non negativa, $A \in J(\mathbb{R}^n)$, $\underline{x} \in A$, se $\mathsf{R}(f) \in J(\mathbb{R}^{n+1})$ diremo che f è **integrabile secondo Riemann** e poniamo:

$$\int_A f(\underline{x}) d\underline{x} = \mu_{n+1}(\mathsf{R}(f)) \in [0, +\infty]$$

Se inoltre $\mu_{n+1}(\mathsf{R}(f))$ è finito ($< +\infty$) diremo che f è sommabile secondo Riemann.

Definizione (Funzione integrabile secondo Riemann) Sia $f : A \to \mathbb{R}$ di segno qualunque, $A \in J(\mathbb{R}^n)$, $\underline{x} \in A$, consideriamo le due funzioni:

$$\text{parte positiva } f^+ = \max\{f(\underline{x}), 0\} \text{ e parte negativa } f^- = \max\{-f(\underline{x}), 0\}$$

Si ha che:

- $f(\underline{x}) = f^+(\underline{x}) - f^-(\underline{x})$
- $|f(\underline{x})| = f^+(\underline{x}) + f^-(\underline{x})$

Se $\mathsf{R}(f^+), \mathsf{R}(f^-) \in J(\mathbb{R}^{n+1})$ e non entrambi $+\infty$ diremo che f è **integrabile secondo Riemann** e poniamo:

$$\int_A f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_A f^+(\underline{x}) d\underline{x} - \int_A f^-(\underline{x}) d\underline{x}$$

Teorema Sia $A \in J(\mathbb{R}^n)$, $\underline{x} \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann, allora:

- L'esistenza e il valore dell'integrale di f non dipendono dai valori che f assume su un insieme di misura nulla.
- f è Riemann integrabile $\iff |f|$è Riemann integrabile e $\left|\int_A f(\underline{x}) d\underline{x}\right| \le \int_A |f(\underline{x})|\, d\underline{x}$ (Disuguaglianza triangolare)
- $\inf_A f \le \frac{1}{\mu_n(A)} \int_A f(\underline{x}) d\underline{x} \le \sup_A f$ con $\mu_n(A) \in \,]0, +\infty[$

Proprietà Sia $A \in J(\mathbb{R}^n)$, $\underline{x} \in A$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ sommabili secondo Riemann, allora:

- $\int_A (c_1 f(\underline{x}) + c_2 g(\underline{x})) d\underline{x} = c_1 \int_A f(\underline{x}) d\underline{x} + c_2 \int_A g(\underline{x}) d\underline{x}$ (**Linearità**)
- $f(\underline{x}) \ge g(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in A \implies \int_A f(\underline{x}) d\underline{x} \ge \int_A g(\underline{x}) d\underline{x}$ (**Monotonia**)

  Presi $A_1, A_2 \in J(\mathbb{R}^n) : A_1 \cup A_2 = A,\ A_1 \cap A_2 = \emptyset$ o $\mu_n(A_1 \cap A_2) = 0$
- allora $\int_A f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{A_1} f(\underline{x}) d\underline{x} + \int_{A_2} f(\underline{x}) d\underline{x}$ (**Additività**)

7.3 Teoremi di riduzione degli integrali multipli

Definizione (Insieme normale) Siano $A \in J(\mathbb{R}^n)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $g(\underline{x}) \leq f(\underline{x}) \, \forall \underline{x} \in A$. Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$ $B = \left\{(\underline{x}, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \underline{x} \in A, \, g(\underline{x}) \leq y \leq f(\underline{x})\right\}$ è detto **normale** rispetto a y.

Osservazione Se f, g sono sommabili allora $B \in J(\mathbb{R}^{n+1})$ e la sua misura $\mu_{n+1}(B) = \int\limits_A f(\underline{x}) - g(\underline{x}) d\underline{x} < +\infty$.

Definizione ($A \subset \mathbb{R}^2$ dominio normale) Siano $A \in J(\mathbb{R})$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $g(x) \leq f(x) \, \forall x \in A$. Il sottoinsieme $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, \, g(x) \leq y \leq f(x)\right\}$ è detto **normale** rispetto a y.

Teorema (di riduzione degli integrali doppi)

- caso rettangoli

Sia $I = [a, b] \times [c, d]$, $f : I \to \mathbb{R}$ continua, allora $G : [c, d] \to \mathbb{R}$, $G(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ è continua e sommabile in $[c, d]$ e:

$$\iint\limits_I f(x, y) dx dy = \int_c^d G(y) dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Analogamente, la funzione $H : [a, b] \to \mathbb{R}$, $H(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ è continua e sommabile in $[a, b]$ e:

$$\iint\limits_I f(x, y) dx dy = \int_a^b H(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Osservazione Se $f(x, y) = g(x) h(y)$ con $g[a, b] \to \mathbb{R}$ e $h : [c, d] \to \mathbb{R}$ continua, allora:

$$\iint\limits_I f(x, y) dx dy = \int_a^b g(x) dx \int_c^d h(y) dy$$

- caso insiemi piani normali

Siano $\varphi_1, \varphi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$ continue e supponiamo che $\varphi_1(y) \leq \varphi_2(y) \; \forall y \in [c, d]$, l'insieme
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \; \varphi_1(y) \leq x \leq \varphi_2(y)\right\}$ normale rispetto a x.

Siano inoltre $f : K \to \mathbb{R}$ continua e $G(y) = \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx$ continua, allora:

$$\iint\limits_K f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

Analogamente se $\psi_1, \psi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue e supponiamo che $\psi_1(x) \leq \psi_2(x) \; \forall x \in [a, b]$, l'insieme
$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \; \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)\right\}$ normale rispetto a y.

Siano inoltre $f : K \to \mathbb{R}$ continua e $H(x) = \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy$ continua, allora:

$$\iint\limits_K f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

Definizione (solido di Cavalieri) Un sottoinsieme $V \in \mathbb{R}^3$ è detto **solido di Cavalieri** se $V \in J_b(\mathbb{R}^3)$ ed esiste una retta λ tale che per ogni piano perpendicolare a λ, l'intersezione di questo piano con l'insieme V (che indicheremo con $sez_\lambda(V)$) è un misurabile secondo $P.J.$ nel piano (ossia $sez_\lambda(V) \in J_b(\mathbb{R}^2)$).

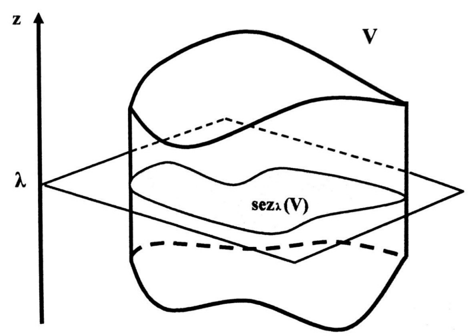
Teorema (di Cavalieri) Siano V_1 e V_2 due solidi di Cavalieri di asse λ, se $\mu_2(sez_\lambda(V_1)) \leq \mu_2(sez_\lambda(V_2))$ per ogni piano perpendicolare all'asse λ, allora:

$$\mu_3(V_1) \leq \mu_3(V_2)$$

Osservazione Segue che se $\mu_2(sez_\lambda(V_1)) = \mu_2(sez_\lambda(V_2))$ allora $\mu_3(V_1) = \mu_3(V_2)$.

Teorema (di riduzione per strati o di Cavalieri) Sia V un solido di Cavalieri di asse z e supponiamo che la funzione $f : z \to \mu_2(sez_z(V))$ sia sommabile e nulla al di fuori di un certo intervallo $[\alpha, \beta]$, allora:

$$\mu_3(V) = \int_\alpha^\beta \mu_2(sez_z(V))\,dz < +\infty \quad \text{e} \quad \iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_\alpha^\beta \left(\iint\limits_{sez_z(V)} f(x,y,z)\,dxdy \right) dz$$

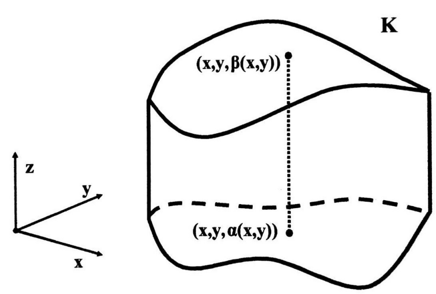


Definizione (solido di rotazione) Nel piano xz consideriamo il grafico di $f; [a,b] \to \mathbb{R}_z$. Facendo ruotare di 2π il sottografico di f attorno all'asse x otteniamo un solido V di Cavalieri rispetto a x e $\mu_3(V) = \int_a^b \pi f^2(x)\,dx$.

Definizione ($A \subset \mathbb{R}^3$ dominio normale) Siano $A \in J(\mathbb{R}^2)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $g(x,y) \leq f(x,y)\,\forall (x,y) \in A$. Il sottoinsieme $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\, g(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$ è detto **normale** rispetto a z.

Teorema (di riduzione di un integrale triplo per fili) Siano $\alpha, \beta : A \to \mathbb{R}$ con $A \in J_b(\mathbb{R}^2)$ con α, β continue e $\alpha(x,y) \leq \beta(x,y)\ \ \forall (x,y) \in A$. Sia $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A; \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\}$, K è detto normale rispetto all'asse z. Se $f : K \to \mathbb{R}$ è continua, allora:

$$\iiint\limits_K f\,dxdydz = \iint\limits_A \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy$$



Se inoltre A è normale rispetto a y, $A = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b; \psi_1(x) \leq y \leq \psi_2(x)\}$, con ψ_1, ψ_2 continue, allora $\iiint\limits_K f\,dxdydz = \int_a^b \left(\int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} \left(\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$.

7.4 Teorema del cambiamento di variabile nell'integrale multiplo

Proposizione Sia $\phi : \mathbb{R}^2_{(u,v)} \to \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ una trasformazione lineare non singolare e sia L la sua matrice associata nelle basi canoniche di partenza e di arrivo. Sia dato l'insieme di partenza $V = [0,a] \times [0,b]$, allora la sua immagine attraverso ϕ è un parallelogrammo e la sua area è $\mu_2(\phi(V)) = |\det(L)|\, \mu_2(V)$.

Più in generale, se $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare non singolare e L la matrice rappresentativa, per ogni insieme limitato e misurabile $V \subset \mathbb{R}^n$, si ha $\mu_n(\phi(V)) = |\det(L)|\, \mu_n(V)$.

Teorema (cambiamento di variabile nell'integrale multiplo)

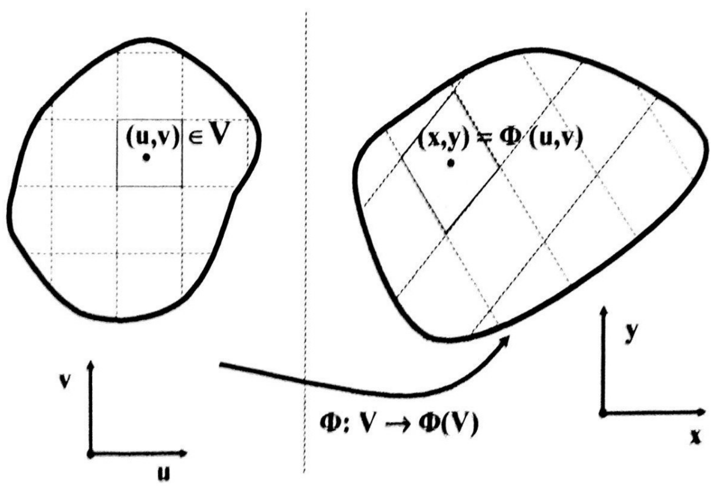
Siano $\phi \in \mathcal{C}^{(1)}(\Omega, \mathbb{R}^n_{\underline{x}})$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n_{\underline{v}}$ insieme aperto, $K \subset \Omega$ un insieme compatto misurabile, $f \in \mathcal{C}^{(1)}(\phi(K), \mathbb{R})$. Supponiamo che $\phi(K) \in J_b(\mathbb{R}^n)$. Se inoltre:

- $\phi(\underline{v})$ iniettiva $\forall \underline{v} \in K$
- $\det(J_\phi(\underline{v})) \neq 0 \ \forall \underline{v} \in K$

allora:

$$\int\limits_{\phi(K)} f(\underline{x})\, d\underline{x} = \int\limits_K f(\phi(\underline{v}))\, |\det(J_\phi(\underline{v}))|\, d\underline{v}$$

Osservazione Se $f \equiv 1$ allora $\mu_n(\phi(K)) = \int\limits_K |\det(J_\phi(\underline{v}))|\, d\underline{v}$. Da qui si può notare come il determinante coincida con la misura di un rettangolo, nel caso in cui si stia lavorando sul piano, o più in generale di un iperparallelepipedo di dimensioni infinitesimamente piccole. Esempio in figura:



Teorema (passaggio a coordinate polari in $\mathbb{R}^2$)

Sia $\phi : \mathbb{R}^2_{(\rho,\theta)} \to \mathbb{R}^2_{(x,y)}$ tale che $\phi(\rho,\theta) = (x,y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$, $\rho \in [0,+\infty]$, $\theta \in [\alpha, \alpha+2\pi]$. Allora:

- $\phi_{|[0,+\infty]\times[\alpha,\alpha+2\pi]}$ è iniettiva (tranne sul semiasse $\rho = 0$ dove ha però misura nulla)
- $J_\phi(\rho,\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{bmatrix}$ e $\left|\det\left(J_\phi(\rho,\theta)_{|[0,+\infty]\times[\alpha,\alpha+2\pi]}\right)\right| = \rho$

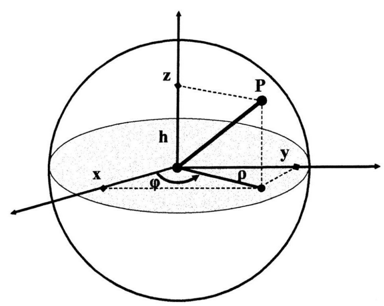
$$\iint\limits_{\phi(\rho,\theta)} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{\substack{\rho \in [0,+\infty] \\ \theta \in [\alpha,\alpha+2\pi]}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\, \rho\, d\rho d\theta$$

Teorema (passaggio a coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$)

Sia $\phi : \mathbb{R}^3_{(\rho,\theta,t)} \to \mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ tale che $\phi(\rho,\theta,t) = (x,y,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)$, $\rho \in [0,+\infty]$, $\theta \in [\alpha, \alpha+2\pi]$, $t \in \mathbb{R}$. Allora:

- $\phi_{|[0,+\infty]\times[\alpha,\alpha+2\pi]\times\mathbb{R}}$ è iniettiva (tranne sul piano $\rho = 0$ dove ha però misura nulla)
- $J_\phi(\rho,\theta,t) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $\left|\det\left(J_\phi(\rho,\theta,t)_{|[0,+\infty]\times[\alpha,\alpha+2\pi]\times\mathbb{R}}\right)\right| = \rho$

$$\iiint\limits_{\phi(\rho,\theta,t)} f(x,y)\, dxdydz = \iiint\limits_{\substack{\rho\in[0,+\infty] \\ \theta\in[\alpha,\alpha+2\pi] \\ t\in\mathbb{R}}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, t)\, \rho\, d\rho d\theta dt$$

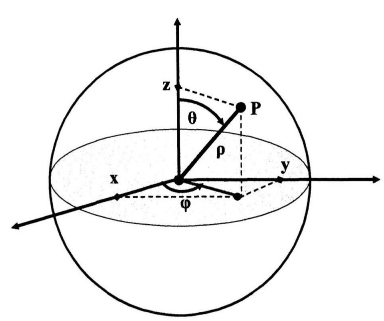


Teorema (passaggio a coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$)

Sia $\phi : \mathbb{R}^3_{(\rho,\theta,\varphi)} \to \mathbb{R}^3_{(x,y,z)}$ tale che $\phi(\rho,\theta,\varphi) = (x,y,z) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)$, $\rho \in [0,+\infty]$, $\theta \in [0,\pi]$, $\varphi \in [\alpha, \alpha+2\pi]$. Allora:

- $\phi_{|[0,+\infty]\times[0,\pi]\times[\alpha,\alpha+2\pi]}$ è iniettiva (tranne sui piani $\theta = 0, \pi$ e $\rho = 0$ dove ha però misura nulla)
- $J_\phi(\rho,\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \end{bmatrix}$ e $\left|\det\left(J_\phi(\rho,\theta,\varphi)_{|(0,+\infty)\times(0,\pi)\times(\alpha,\alpha+2\pi)}\right)\right| = \rho^2\sin\theta$

$$\iiint\limits_{\phi(\rho,\theta,\varphi)} f(x,y)\, dxdydz = \iiint\limits_{\substack{\rho\in[0,+\infty] \\ \theta\in[0,\pi] \\ \varphi\in[\alpha,\alpha+2\pi]}} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\, \rho\, d\rho d\theta d\varphi$$



8 Successioni numeriche

Definizione (Successione) È detta **successione** una applicazione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$). I valori di questa successione $x_n = f(n)$ sono detti elementi della successione e scriveremo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia i valori della successione che la successione stessa.

Definizione (Successione regolare o convergente) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori reali, $l \in \mathbb{R}$. Diremo che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge** a l e scriveremo $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x_n - l| \leq \varepsilon \ \forall n \geq \nu(\epsilon)$$

In questo caso diremo che la successione è **regolare o convergente**.

Osservazione La definizione precedente vale anche nel caso in cui $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione a valori complessi.

Definizione (Successione divergente) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione a valori reali. Diremo che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** positivamente (risp. negativamente) se

$$\forall k > 0 \ \exists \nu(k) \in \mathbb{N} : x \geq k \text{ (risp. } x_n \leq -k) \ \forall n \geq \nu(k)$$

Osservazione La definizione precedente vale anche nel caso in cui $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione a valori complessi se

$$\forall k > 0 \ \exists \nu(k) \in \mathbb{N} : |z_n| \geq k \ \forall n \geq \nu(k)$$

Definizione (Successione oscillante) Se una successione reale non è né convergente né divergente la diremo **oscillante**.

Definizione (Successione limitata) Una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ è detta **limitata** se $\exists M > 0 : |x_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Teorema Siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni regolari in $\mathbb{R}$ con $x_n \to l$ e $y_n \to m$, $l, m \in \mathbb{R}$. Allora:

1. $x_n + y_n \to l + m$
2. $x_n \cdot y_n \to l \cdot m$
3. se $m \neq 0$ e $y_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, allora $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{l}{m}$
4. se $x_n \leq y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ (è sufficiente definitivamente, ossia da un certo indice in poi), allora $l \leq m$
5. se $l < m$, allora $x_n < y_m$ definitivamente

Teorema (del confronto) Siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali e supponiamo che $x_n, y_n \to l \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Allora se $x_n \leq z_n \leq y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, si ha $z_n \to l$.

Teorema Siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali e supponiamo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ infinitesima, cioè $x_n \to 0$. Allora:

1. se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, allora $x_n \cdot y_n \to 0$
2. se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} > 0$ (risp. $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} < 0$) $\forall n \in \mathbb{N}$, allora $\frac{1}{x_n} \to +\infty$ (risp. $x_n \to -\infty$)

Teorema (successioni divergenti) Siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ successioni reali. Allora

- se $x_n \to +\infty$
  1. se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $y_n \geq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n + y_n \to +\infty$
  2. se $\exists M > 0$ tale che $y_n > M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \cdot y_n \to +\infty$
  3. se $\exists M < 0$ tale che $y_n < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \cdot y_n \to -\infty$
  4. $\frac{1}{x_n} \to 0$ (è infinitesima, si suppone $x_n \neq 0 \; \forall n$)
- $x_n \to -\infty$
  1. se $\exists M \in \mathbb{R}$ tale che $y_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n + y_n \to -\infty$
  2. se $\exists M > 0$ tale che $y_n > M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \cdot y_n \to -\infty$
  3. se $\exists M < 0$ tale che $y_n < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \cdot y_n \to +\infty$
  4. $\frac{1}{x_n} \to 0$ (è infinitesima, si suppone $x_n \neq 0 \; \forall n$)

Teorema (criterio di Cauchy) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale (o a valori complessi). Allora è regolare se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| \leq \varepsilon \; \forall n, m \geq \nu(\varepsilon)$$

Osservazione Nel caso complesso si ha che $\sqrt{(\Re x_n - \Re x_m)^2 + (\Im x_n - \Im x_m)^2} \leq \varepsilon$.

Osservazione È una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza.

Definizione (successioni monotone) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Diremo che $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è **monotona** crescente (risp. decrescente) se

$$n < m \implies x_n \leq x_m \text{ (risp. } x_n \geq x_m)$$

La successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente (risp. strettamente decrescente) se

$$n < m \implies x_n < x_m \text{(risp. } x_n > x_m)$$

Definizione (successione estratta) Siano $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ o in $\mathbb{C}$ e $h \to \sigma(h)$ con $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente, allora la successione $\left\{x_{\sigma(h)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ si dice **successione estratta** da $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposizione Ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotona ha limite finito o infinito.

1. Nel caso di successioni crescenti si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup\limits_n x_n$. In particolare tale limite è finito se la successione è limitata, altrimenti la successione diverge positivamente.
2. Nel caso di successioni decrescenti si ha $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \inf\limits_n x_n$. In particolare tale limite è finito se la successione è limitata, altrimenti la successione diverge negativamente.

Definizione (numero di Eulero) Il numero di Eulero è definito come $lim_{n\to+\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$

Osservazione Si può dimostrare che:

1. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ è crescente
2. x_n è limitata superiormente (in particolare $2 < x_n < 3 \; \forall n \in \mathbb{N}$)

Dimostrazione

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} \left(\frac{1}{n}\right)^h \cdot 1^{n-h} =$$

$$= \sum_{h=0}^{n} \frac{n!}{h!(n-h)!} \cdot \frac{1}{n^h} =$$

$$= \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{h-1}{n}\right) <$$

$$< \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!} < 1 + \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{2^{h-1}} = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{2^h} = 1 + \frac{2^n-1}{2^{n-1}}$$

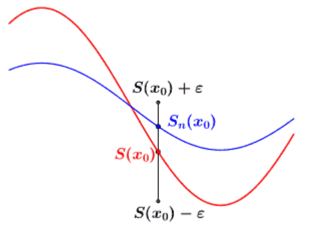
$$= 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

8.1 Successioni di funzioni reali

Definizione (Successione di funzioni) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $g_n : I \to \mathbb{R}$ una funzione dipendente dal parametro $n \in \mathbb{N}$. Chiameremo $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **successione di funzioni**.

Definizione (limite puntuale) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $g_n, g : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Diremo che $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a g se $\forall x \in I$ $g_n(x)$ converge a $g(x)$. La funzione g è detta **limite puntuale** della successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ovvero:

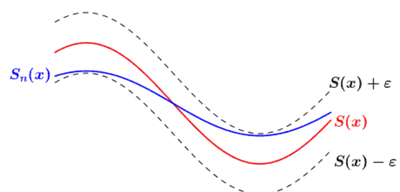
$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in I\ \exists \nu(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon\ \forall n \geq \nu(\varepsilon, x)$$



.

Definizione (limite uniforme) Diremo che $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a g se detta $\alpha_n = \sup_I |g_n(x) - g(x)|$, si ha che $\lim_{n\to+\infty} \sup_I |g_n(x) - g(x)| = 0$. La funzione g è detta **limite uniforme** della successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ovvero:

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in I\ \exists \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon\ \forall n \geq \nu(\varepsilon)$$



Osservazione Ovviamente se $g_n \overset{\text{unif.}}{\to} g$ allora $g_n \overset{\text{punt.}}{\to} g$. Il contrario è falso.

8.1.1 Teoremi di passaggio al limite

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzione $I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Valgono questi fatti:

1. Sia $f : I \to \mathbb{R}$ il limite uniforme di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, se f_n sono continue in $x_0 \in I$ allora anche f è continua in x_0:

$$\lim_{x\to x_0} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{x\to x_0} f_n(x) \right)$$

2. Sia $f_n \in \mathcal{C}^{(1)}(I, \mathbb{R})$, $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge per qualche $x_0 \in I$ e $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in I, allora:
   (a) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente in I (e in ogni $[a, b] \subseteq I$)
   (b) detta f il limite uniforme di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, essa risulta derivabile e f' è il limite uniforme di $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e si scrive

$$D\left[\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to+\infty} \left[D\left(f_n(x)\right)\right]\ \forall x \in I$$

3. Sia $I = [a, b]$, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sommabile secondo Riemann e $f : I \to \mathbb{R}$ il limite uniforme di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, allora
   (a) f è integrabile secondo Riemann
   (b) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx$

9 Serie numeriche

Definizione (Serie numerica) Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$, poniamo $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k$.

$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è detta successione delle somme parziali o **serie** di termine generale x_n e si indica con $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$ o $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Definizione (Serie convergente) Se esiste finito il $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ diremo che la serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$ è **convergente** e scriviamo

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

Definizione (Serie divergente) Se $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (risp. $-\infty$) diremo che la serie **diverge** positivamente (risp. negativamente).

Definizione (Serie oscillante) Se S_n non ha limite diremo che la serie è **oscillante**.

Osservazione Data una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$, se in essa si alterano un numero finito di termini il limite non cambia. Ciò non è vero per la serie associata.

Definizione (Serie telescopica) È detta **serie telescopica** una serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$ con $x_k = a_{k+1} - a_k$ per una certa successione $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. In questo caso

$$S_n = x_0 + ... + x_n = (a_1 - a_0) + ... + (a_n - a_{n-1}) = a_{n+1} - a_0$$

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} - a_0)$$

Teorema (criterio di Cauchy) $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$è la convergenza della successione delle somme parziali $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, quindi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k \text{ converge } \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\nu(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tale che } |S_n - S_m| \leq \varepsilon\ \forall n, m \geq \nu(\varepsilon)$$

cioè

$$\left|\sum_{m+1}^{n} x_k\right| \leq \varepsilon \quad (n \geq m)$$

Osservazione Se $n = m + 1$ si ha $x_{m+1} \to 0$

Teorema (condizione necessaria di convergenza) Se la serie $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} x_k$ è convergente, allora $x_k \to 0$.

Definizione (serie geometrica) Si dice **serie geometrica** di ragione x la serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k,\ x \in \mathbb{R}$$

- $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è infinitesima $\iff$ $|x| < 1$
- se $x \geq 1$ la serie diverge positivamente
- se $x \leq -1$ la serie è oscillante
- se $|x| < 1$ allora

  $$S_n = 1 + x + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

  e quindi

  $$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1-x}$$

Definizione (serie armonica) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è detta **serie armonica** e diverge positivamente.

Dimostrazione Applichiamo il criterio di Cauchy

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}$$

Quindi la serie non converge.

Definizione (convergenza assoluta) Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ una serie numerica. Diremo che essa **converge assolutamente** se converge la serie dei suoi valori assoluti $\sum_{k=0}^{+\infty} |x_k|$.

Teorema Se $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ converge assolutamente, allora converge semplicemente.

Dimostrazione Basta osservare che

$$|S_n - S_m| = |x_{n+1} + ... + x_n| \leq |x_{n+1}| + ... + |x_n| = |T_n - T_m|$$

dove $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è la successione delle somme parziali di $\sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge, allora $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soddisfa Cauchy, quindi $|T_n - T - m| \leq \varepsilon$ e quindi $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$.

9.0.1 Criteri di convergenza per serie a termini positivi

(**criterio del confronto**) Siano $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ due successioni a termini non negativi e supponiamo che $a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora:

1. se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge
2. se $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge, allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ diverge

(**criterio del rapporto**) Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi ($a_n \neq 0$ definitivamente) e $l = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Allora:

1. se $l < 1$ allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge
2. se $l > 1$ allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge
3. se $l = 1$ allora non si può concludere nulla

(**criterio della radice**) Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi e $l = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Allora:

1. se $l < 1$ allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ converge
2. se $l > 1$ allora $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge
3. se $l = 1$ allora non si può concludere nulla

(**criterio asintotico**) Siano $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi ($b_n \neq 0$ definitivamente). Se $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ ($L \neq 0$ finito), allora le due serie hanno lo stesso comportamento.

(**criterio integrale**) Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ positiva decrescente e integrabile su ogni segmento $[0, M]$ $\forall M > 0$. Allora:

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ converge $\iff \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ diverge $\iff \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = +\infty$

Osservazione

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$ possiamo vederla come l'area della funzione a gradini sopra il grafico di f.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ possiamo vederla come l'area della funzione a gradini sotto il grafico di f.

Definizione (Serie armonica generalizzata) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ è detta **serie armonica generalizzata** e

- se $p \leq 1$ diverge
- se $p > 1$ converge

9.1 Serie resto

Definizione Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini positivi convergente. La serie $\sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n = a_{k+1} + a_{k+2} + ...$ è detta **serie resto di indice k**.

Proposizione Sia R_n la somma della serie resto. Se l è la somma della serie originaria e S_n le sue somme parziali, allora $R_n = l - S_n$.

Osservazione Ovviamente $R_n \to 0$. Se riusciamo a stimare R_n possiamo stimare l'errore approssimando l con S_n.

9.2 Altri criteri di convergenza

Teorema (criterio di Leibniz per serie a segno alterno) Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione monotona decrescente e infinitesima. Allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ è convergente e $|R_n| \leq |a_{n+1}|$.

Teorema (criterio di Dirichlet) Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$, $z_n \in \mathbb{C}$, una serie a somme parziali limitate. Se $\{b_n\} \searrow 0$ (decrescente e infinitesima) la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n b_n$ converge.

Teorema (criterio di Abel) Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$, $z_n \in \mathbb{C}$ convergente e sia $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monotona limitata. Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n b_n$ è convergente.

9.3 Serie di funzioni

Definizione (Serie di funzioni)Siano $f_k : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $k \in \mathbb{N}$. La successione $S_n : I \to \mathbb{R}$ con $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ è detta **serie di funzioni** di termine generale $f_k(x)$ e la indicheremo con il simbolo $\sum_{0}^{+\infty} f_k(x)$.

Definizione (Limite puntuale) Se $\forall x \in I \ \exists \lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$ finito, allora la funzione $S : I \to \mathbb{R}$ la diremo limite puntuale della serie $\sum_{0}^{+\infty} f_k(x)$ e scriveremo $S(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\ \forall x \in I$.

Definizione (Limite uniforme) Se la successione $\{S_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a S, allora la funzione S è detta limite uniforme. Se $S_n(x) \xrightarrow{\text{unif.}} S(x) \Longrightarrow S_n(x) \xrightarrow{\text{punt.}} S(x)$ (viceversa falso).

Teorema (criterio di Weierstrass) Sia $f_k : I \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni, $I \subseteq \mathbb{R}$ e supponiamo che

$$\sup_I |f_k(x)| = M_k < +\infty \text{ e } \sum_{k=0}^{+\infty} M_k < +\infty \text{ (si dice che } \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \text{ converge totalmente)}$$

allora $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ converge assolutamente e uniformemente.

9.3.1 Teoremi di passaggio al limite

1. Se $f_k : I \to \mathbb{R}$ è una successione di funzioni continue in $x_0 \in I$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \overset{\text{unif.}}{\to} S(x)$, allora $S(x)$ è continua in x_0 e si scrive:
$$\lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x)$$

2. Se $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann e se $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \overset{\text{unif.}}{\to} S(x)$ in I, allora $S(x)$ è integrabile su $[a,b]$.

   Se f_k sono sommabili allora anche $S(x)$ è sommabile e:
$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_a^b f_k(x)dx$$

3. Se $f_k \in \mathcal{C}^{(1)}(I,\mathbb{R})$, $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ converge per qualche $x_0 \in I$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k'(x)$ converge uniformemente su I, allora $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ converge uniformemente su I. Posto $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) \overset{\text{unif.}}{\to} S(x)$, $S(x)$ è derivabile in I e $S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k'(x)$. Ovvero:
$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(f_k(x)\right)$$

9.4 Serie di potenze

Definizione (Serie di potenze) È detta serie di potenze di punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$ la serie di funzioni $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$ con $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = a_k(x-x_0)^k$ e $\{a_k\}$ successione reale.

Osservazione La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-x_0)^k$ converge almeno per $x = x_0$ e detta $S : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha che $S(x_0) = a_0$.

Lemma Supponiamo che in $x_1 \neq 0$ la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_1^k$ converga. Allora la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ converge assolutamente $\forall\, |x| < |x_1|$.

Dimostrazione Poiché $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x_1^k$ converge si ha $\lim_{n\to+\infty} a_k x_1^k = 0$, quindi $\exists M > 0$ tale che $\left|a_k x_1^k\right| \leq M\ \forall k \in \mathbb{N}$. Allora
$$\left|a_k x^k\right| = \left|a_k x_1^k \left(\frac{x}{x_1}\right)^k\right| \leq M \left|\left(\frac{x}{x_1}\right)^k\right|$$

ma $\frac{x}{x_1} < 1$, perciò $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k x^k|$ è maggiorata da una serie geometrica di ragione < 1 e quindi converge.

Definizione (Raggio di convergenza) È detto **raggio di convergenza** della serie di potenze $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ il numero:

$$R = \sup\{|x| : \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \text{converge}\} \in [0, +\infty]$$

e l'intervallo $]-R, R[$ è detto **intervallo di convergenza**.

Proposizione (Convergenza assoluta) Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ una serie di potenze di raggio di convergenza $R > 0$.

Allora $\forall |x| < R$ la serie converge assolutamente. Per $x = \pm R$ nessuna conclusione.

Proposizione (Convergenza assoluta e uniforme ($\Rightarrow$puntuale)) Sia $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ una serie di potenze avente raggio di convergenza $R > 0$. Allora converge assolutamente e uniformemente ($\Rightarrow$puntualmente) su ogni intervallo $[-r, r]$, $r < R$.

9.4.1 Criteri di determinazione del raggio di convergenza

Proposizione Sia R il raggio di convergenza di $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, allora:

1. se $\lambda = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \implies R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \text{ se } \lambda > 0 \\ +\infty \text{ se } \lambda = 0 \end{cases}$
2. se $\exists \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda \implies R = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \text{ se } \lambda > 0 \\ +\infty \text{ se } \lambda = 0 \end{cases}$
3. se $\exists \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lambda \implies R = \lambda$

Teorema Sia $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ con $|x| < R$, $R > 0$ raggio di convergenza. Allora f è derivabile in $]-R, R[$ e

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k k x^{k-1}$$

Osservazione Notiamo che la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$ ha lo stesso raggio di convergenza.

Osservazione Possiamo iterare il teorema e ottenere che $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(]-R, R[, \mathbb{R})$ e:

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{+\infty} k(k-1)...(k-m+1) a_k x^{k-m} \text{ e } f^{(m)}(0) = m! a_m$$

9.5 Approssimazione di una funzione data mediante una serie opportuna di funzioni

9.5.1 Sviluppabilità in serie di Taylor

Definizione (serie di Taylor) Siano $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(I, \mathbb{R})$ e R raggio di convergenza di $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

Se vale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \quad x \in]x_0 - R, x_0 + R[$$

allora tale serie si definisce **serie di Taylor** di punto iniziale x_0 sull'intervallo $]x_0 - R, x_0 + R[$ e diremo che f è sviluppabile in serie di Taylor su tale intervallo. Inoltre si ha che, indicato con $T_n(x)$ il polinomio di Taylor di $f(x)$ di punto iniziale x_0, posto

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

si ha

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(x) = 0 \iff \left[f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right]$$

Teorema Sia $f \in \mathcal{C}^{(\infty)}(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \mathbb{R})$. Se $\exists M > 0$ tale che $|f^{(n)}(x_0)| < M^n$ $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, allora f è sviluppabile in serie di Taylor di punto iniziale x_0 in tutto l'intervallo.

9.5.2 Serie di Fourier

Definizione Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diremo che f è periodica di periodo $T > 0$ se $f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Osservazione Se f è periodica di periodo T, allora è periodica di periodo $nT \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Se $S > 0$ è un altro periodo di f, allora $S + T$ è ancora un periodo di f. Se l'insieme dei periodi è discreto (non ha punti di accumulazione), su $[0, +\infty[$, è detto periodo fondamentale di f il $\min\{S > 0 : S \text{ è periodo di f}\}$.

Osservazione Le funzioni costanti sono periodiche di periodo $S \geq 0$ qualunque sia S.

Osservazione Le funzioni $\cos(\frac{2\pi}{T}kx)$ e $\sin(\frac{2\pi}{T}kx)$ sono periodiche di periodo $\frac{T}{k}$ e $T_f = T$.

Osservazione Posto $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (frequenza) si ha

$$\int_0^T \cos(n\omega x)\sin(m\omega x)dx = 0 \ \forall n.m \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^T \cos(n\omega x)\cos(m\omega x)dx = \frac{T}{2}\delta(n-m) \ \forall n, m \in \mathbb{N}$$

$$\int_0^T \sin(n\omega x)\sin(m\omega x)dx = \frac{T}{2}\delta(n-m) \ \forall n, m \in \mathbb{N}$$

con $\delta = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

Dimostrazioni Calcolare gli integrali ricordandosi che $\cos(x) = \frac{\exp(ix)+\exp(-ix)}{2}$ e $\sin(x) = \frac{\exp(ix)-\exp(-ix)}{2i}$.

Definizione (serie di Fourier) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo fondamentale $T = T_f$ e supponiamo che in $[0, T]$ sia continua a tratti (ossia f limitata e con un numero finito di punti di discontinuità di I specie). Definiamo le successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dei suoi coefficienti di Fourier in questo modo:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos(\frac{2\pi}{T} nx)dx$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin(\frac{2\pi}{T} nx)dx$$

La serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right]$$

è detta **serie di Fourier** associata a f.

Definizione Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo fondamentale $T > 0$. Diremo che f è $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti in $[0, T]$ se f è derivabile in $[0, T]$ eccetto in un numero finito di punti più un numero finito di punti di discontinuità di I specie e nei punti di non derivabilità la sua derivata prima ammette limite destro e limite sinistro finiti.

Teorema (di Fourier) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo fondamentale $T > 0$ e $\mathcal{C}^{(1)}$ a tratti. Allora

- f è sviluppabile in serie di Fourier in tutti i punti di continuità di f.
- se $c \in \mathbb{R}$ è un punto di discontinuità per f allora la sua serie di Fourier converge a $\frac{1}{2}(f(c+) + f(c-))$
- f è sviluppabile in serie di Fourier uniformemente su tutti gli intervalli di $\mathbb{R}$ che non contengono punti di discontinuità
- la serie di Fourier associata a f è integrabile su ogni intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ e si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{a_0}{2}(b - a) + \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T} nx\right) \right]$$