

Fisica Generale T-2

Urbinati Cristian

21/09/2018

e-mail: cristian.urbinati@studio.unibo.it

Altro : https://github.com/urbinaticri/Unibo_computerEngineeringNotes

Materiale distribuito con licenza Creative Commons

Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 2.0 Italia (CC BY-NC-SA 2.0 IT)



1 Elettrostatica

Introduzione

L'elettrostatica è una branca dell'elettromagnetismo che studia le cariche elettriche in condizioni di equilibrio.

L'unità di misura della carica nel S.I. è il Coulomb (C) dove $C = A \cdot s$ (Ampere · secondi).

Si parla di **elettrizzazione vetrosa** se la carica elettrica è positiva.

Si parla di **elettrizzazione resinosa** se la carica elettrica è negativa.

Carica elettrica elementare: $|q_e| = 1.6 \times 10^{-19} C$

In un sistema isolato, la carica elettrica si conserva.

Legge di Coulomb

La forza elettrostatica esercitata dalla carica q_1 sulla carica q_2 è

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

dove $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2} \left(\frac{F}{m} \right)$

Principio di sovrapposizione

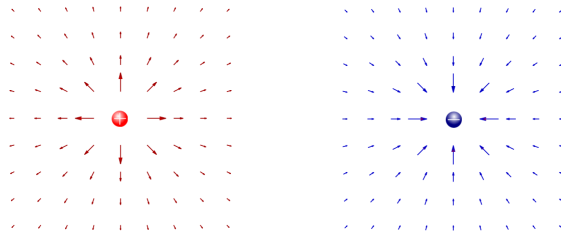
In un sistema di N cariche puntiformi la forza totale sulla carica q è la somma vettoriale delle forze che le cariche q_i eserciterebbero singolarmente su q se $q_{j \neq i}$ fossero assenti:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_i}{r_i^2} \hat{r}$$

dove \vec{r}_i è il vettore posizionale da q_i a q .

Campo elettrico di una carica puntiforme

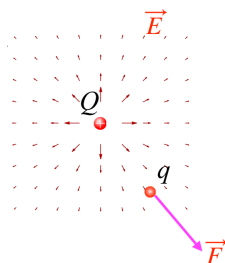
Il campo elettrico è un campo vettoriale $P (\in \mathbb{R}^3) \longrightarrow \vec{E}(P)$ con $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$.



Riformulazione della forza di Coulomb

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = q \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r} = q \vec{E}$$

dove \vec{E} è il campo elettrico generato da una carica $Q = \sum_{i=0}^N q_i$.




Distribuzione continua di carica


| Densità di carica volumetrica | Carica volume elementare | Carica volume |
|---|--------------------------|-----------------------------------|
| $\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau} = \frac{dq}{d\tau}$ | $dq = \rho d\tau$ | $q_\tau = \iiint_\tau \rho d\tau$ |

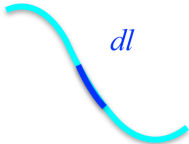
| Densità di carica superficiale | Carica superficie elementare | Carica superficie |
|--|------------------------------|---------------------------|
| $\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}$ | $dq = \sigma dS$ | $q_S = \iint_S \sigma dS$ |

| Densità di carica lineare | Carica linea elementare | Carica linea |
|---|-------------------------|---------------------------|
| $\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta l} = \frac{dq}{dl}$ | $dq = \lambda dl$ | $q_l = \int_l \lambda dl$ |

| Carica distribuita su volume | Carica distribuita su superficie | Carica distribuita su linea |
|------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|
|------------------------------|----------------------------------|-----------------------------|


$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_\tau \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d\tau$$


$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS$$

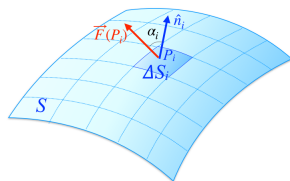

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_l \frac{\lambda(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dl$$

Integrale di superficie di una funzione vettoriale

Siano date in \mathbb{R}^3 una funzione vettoriale $\vec{F}(x, y, z)$. L'integrale di superficie di \vec{F} è definito come:

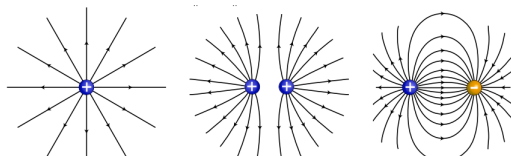
$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dS$$

dove dS è una sezione infinitesimamente piccola della superficie S .



Il flusso del campo elettrico

Il campo elettrico può essere rappresentato graficamente mediante le **linee di campo**:



Per flusso si intende il numero di linee di campo che attraversano una certa superficie orientata S . Esso è proporzionale alla grandezza della superficie e al modulo del campo elettrico.

Osservazione: Se la superficie è parallela al campo elettrico il numero di linee di campo che attraverserà la superficie sarà 0 e dunque il flusso sarà nullo.

Il flusso infinitesimo del campo elettrico attraverso una superficie infinitesimale dS è:

$$d\Phi_S(\vec{E}) = \vec{E} \cdot \hat{n} dS = E dS \cos \alpha = E d\Sigma$$

Se consideriamo una superficie estesa S :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iint_S E dS \cos \alpha = \iint_S E d\Sigma$$

Se consideriamo una superficie chiusa S contenente al suo interno una carica elettrica puntiforme q , sapendo che l'angolo solido è dato dalla formula $\Omega = \frac{\Sigma}{r^2} \in [0, 4\pi]$ dove Σ è la superficie sferica:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \oiint_S E \underbrace{d\Sigma}_{r^2 d\Omega} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \oiint_S d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Legge di Gauss del campo elettrico

Se all'interno della superficie chiusa S ci sono N cariche q_i puntiformi, per il principio di sovrapposizione del campo elettrico, il flusso vale:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad Q = \sum q_{\text{int}} \equiv \iiint_{\tau(S)} \rho d\tau$$

Oss: Il campo elettrico dipende unicamente dalla carica interna poichè nel caso delle cariche esterne alla superficie chiusa, il numero di linee di campo che entrano nella superficie è uguale al numero di linee di campo che escono e quindi vi è un apporto al flusso nullo:

$$d\Phi_{S_1}(\vec{E}_2) + d\Phi_{S_2}(\vec{E}_1) = \vec{E}_1 \cdot \hat{n}_1 dS_1 + \vec{E}_2 \cdot \hat{n}_1 dS_1 = E_1 dS_1 \cos \alpha_1 + E_2 dS_2 \cos \alpha_2 = E_1 (-d\Sigma_1) + E_2 (d\Sigma_2) = 0$$

Divergenza di un campo vettoriale

Consideriamo il flusso di un campo vettoriale \vec{E} attraverso una superficie chiusa S che delimita un volume τ :

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS$$

Siano S_1 e S_2 le superfici chiuse che delimitano τ_1 e τ_2 . Possiamo riscrivere il flusso come:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_{S_1} \vec{E} \cdot \hat{n} dS_1 + \oiint_{S_2} \vec{E} \cdot \hat{n} dS_2$$

Se ora invece supponiamo di dividere il volume τ in N volumi τ_i limitati dalle superfici chiuse S_i avremo che:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \sum_{i=1}^N \Phi_{S_i}(\vec{E}) \quad \text{dove} \quad \Phi_{S_i}(\vec{E}) = \oiint_{S_i} \vec{E} \cdot \hat{n}_i dS_i$$

Chiamiamo divergenza di un campo vettoriale il flusso uscente per unità di volume, espresso come:

$$\text{div} \vec{E} = \lim_{\tau_i \rightarrow 0} \frac{\Phi_{S_i}(\vec{E})}{\tau_i}$$

Teorema della divergenza

Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie S chiusa è pari all'integrale sul volume τ delimitato da S della divergenza di tale campo vettoriale:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\tau} \text{div} \vec{E} d\tau$$

Legge di Gauss in forma locale

Combinando il teorema della divergenza e la legge di Gauss, se la carica è distribuita uniformemente si ha:

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Significato fisico della divergenza

La divergenza ci dà un'informazione sul comportamento locale delle linee di campo, esse:

- **convergono** nel punto se $\text{div} \vec{E} < 0$
- **divergono** nel punto se $\text{div} \vec{E} > 0$

Divergenza in coordinate cartesiane

$$\text{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}$$

Rotore

Teorema di Stokes

Il flusso del rotore di un campo vettoriale attraverso una superficie S aperta e orientata è uguale alla circuitazione del campo vettoriale lungo il bordo Γ di tale superficie:

$$\iint_{S(\Gamma)} (\vec{\nabla} \wedge \vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Campi conservativi

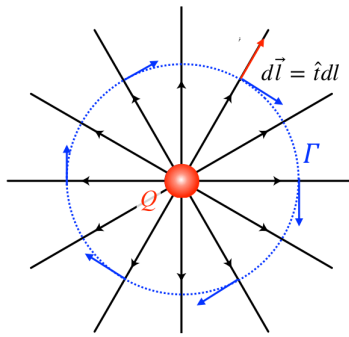
Un campo vettoriale \vec{F} è conservativo se:

1. detto $\varphi = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ allora $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \varphi(B) - \varphi(A)$
2. $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \forall \Gamma$
3. $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \vec{0}$
4. $\exists \varphi : \vec{F} = -\vec{\nabla} \varphi$

Circuitazione del campo elettrostatico

La circuitazione del campo lungo la linea chiusa Γ data dalla circonferenza di raggio r e centrata in Q è nulla:

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint_{\Gamma} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{t}}_0 d\vec{l} = 0$$



Per cui il campo elettrico generato da una carica puntiforme ferma è conservativo e dunque eredita le proprietà dei campi conservativi:

1. $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(B) - V(A)$ dove V è il **potenziale elettrostatico**
2. $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \forall \Gamma$
3. $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$ è irrotazionale (non esistono linee di campo chiuse su loro stesse)
4. $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

Il potenziale elettrostatico

Il potenziale elettrostatico V è una funzione scalare in \mathbb{R}^3 . Dato un campo elettrostatico, operativamente il potenziale si calcola integrando il differenziale esatto $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$. L'unità di misura del potenziale nel S.I. è il Volt (V) dove $V = J/C$ (Joule/Coulomb).

L'integrale indefinito lungo una generica curva Γ del differenziale esatto del potenziale vale:

$$V(\vec{r}) = - \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\Gamma} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \cdot (\hat{r} dr + \hat{i} dl_t) = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cost.}$$

La differenza di potenziale tra due punti A e B quindi varrà:

$$\Delta V_{AB} = -(V_B - V_A) = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_A^B = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] = V_A - V_B$$

Oss: Se si pone il punto B a distanza infinita dal punto A allora $\frac{1}{r_B} \rightarrow 0$. Ciò ci permette di determinare il livello di potenziale nel punto A :

$$V(\vec{r}_A) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_A}$$

Principio di sovrapposizione del potenziale

Il potenziale elettrostatico generato da un sistema di cariche q_1, \dots, q_n gode del principio di sovrapposizione:

$$V(\vec{r}) = - \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \left(\sum_{i=1}^N \vec{E}_i \cdot d\vec{l} \right) = \sum_{i=1}^N \int -\vec{E}_i \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^N V_i(\vec{r})$$
$$V(x, y, z) = \sum_{i=1}^N V_i(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i}$$

Equazione di Poisson

Combinando la legge di Gauss in forma locale $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ e la quarta proprietà del campo elettrostatico $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ si ha che:

$$\vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla}V) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Lavoro della forza elettrostatica

Il lavoro compiuto per spostare una certa carica q da un punto A ad un punto B è:

$$W = \mathcal{L}_{el} = \int_A^B \vec{F}_{el} \cdot d\vec{l} = \int_A^B q\vec{E} \cdot d\vec{l} = q \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = q(V_A - V_B) = q\Delta V_{AB}$$

Energia potenziale

Possiamo definire l'energia potenziale di una carica q situata in un punto dello spazio in cui è presente un potenziale V :

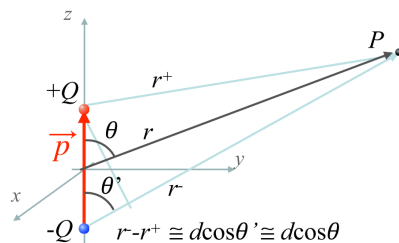
$$U = qV$$

$$\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a} \quad \vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

$$\Delta T = -\Delta U$$

Dipolo elettrico

Il dipolo elettrico è un sistema formato da 2 cariche elettriche in quiete, di uguale valore assoluto ma segno opposto poste ad una distanza fissata d .



Il dipolo elettrico viene matematicamente indicato con il **momento di dipolo elettrico**: $\vec{p} = Q\vec{d}$ (in questo caso $\vec{d} = d\hat{k}$).

Potenziale elettrostatico

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{+Q}{r^+} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{r^-} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-} \right)$$

Potenziale elettrostatico ($r \gg d$) Nel caso in cui $r \gg d$ allora $r^- - r^+ \cong d \cos \theta$ e $r^- r^+ \cong r^2$.

Allora $\vec{p} \cdot \vec{r} = pr \cos \theta = Qdr \cos \theta$ e il potenziale risulta:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Campo elettrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \hat{r} - \vec{p}]$$

Osservazioni:

- Il campo del dipolo elettrico decresce con la distanza come $\frac{1}{r^3}$.
- In ogni punto il campo è la somma di una componente radiale e di una componente parallela al vettore momento di dipolo.

Azioni meccaniche su un dipolo elettrico

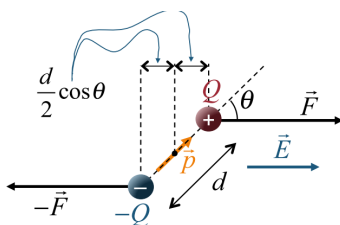
Calcoliamo il **momento della forza** esercitato da un campo esterno \vec{E} su un dipolo elettrico:

$$\mathcal{M} = Fb = (QE)(d \sin \theta) = pE \sin \theta$$

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Energia potenziale L'energia potenziale è descritta dalla formula $U = QV$ ma poichè in un dipolo $V^+ = -E \frac{d}{2} \cos \theta$ e $V^- = E \frac{d}{2} \cos \theta$ allora:

$$U = QV^+ + (-Q)V^- = -(Qd)E \cos \theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$



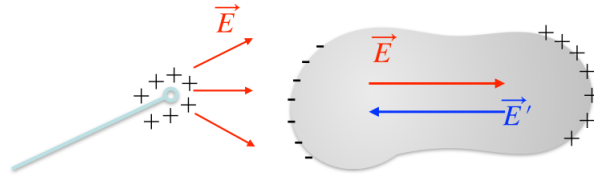
2 Elettrostatica dei conduttori

| Materiali isolanti | Materiali conduttori |
|---|--|
| Cariche localizzate, vincolate a muoversi all'interno delle molecole | Cariche libere di muoversi sul conduttore (almeno un elettrone per atomo è in grado di muoversi liberamente) |
| Un campo elettrico esterno non produce movimento di cariche se non su piccola scala | In presenza di un campo esterno o di un eccesso di carica, le cariche si redistribuiscono sul conduttore |

Conduttori in presenza di carica esterna

In presenza di un campo elettrostatico esterno le cariche del conduttore si spostano fino a raggiungere una nuova condizione di equilibrio ($\Delta t \sim 10^{-9}\text{s}$).

Equilibrio \Rightarrow cariche ferme \Rightarrow forza nulla \Rightarrow campo elettrico complessivamente nullo



Le cariche del conduttore si dispongono in modo da generare un campo interno \vec{E}' (indotto) che annulla il campo esterno \vec{E} :

$$\vec{E}_{\text{condutt.}} = \vec{E} + \vec{E}' = 0$$

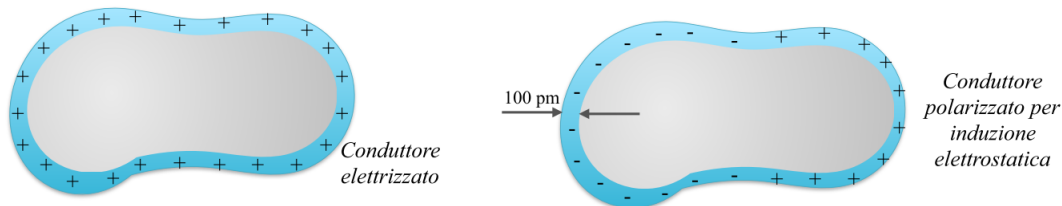
Dunque il campo elettrico interno ai conduttori è sempre nullo. Per la legge di Gauss quindi:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_S}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_S = \iiint \rho d\tau = 0$$

Osservazione: All'interno del conduttore **non ci sono cariche in eccesso** (cariche positive e negative hanno uguale densità).

Carica superficiale di un conduttore

Poichè abbiamo osservato che le cariche non sono all'interno ci viene da pensare che esse si trovino all'esterno. In particolare, la carica in eccesso si dispone sulla superficie del conduttore in una configurazione tale che il campo elettrico interno sia nullo.



Il campo elettrico è sempre normale alla superficie dei conduttori

In presenza di un conduttore, le linee di campo esterne vengono deviate dalla presenza di addensamenti locali di carica sulla superficie del conduttore. In conduttore deforma le linee di campo esterne in modo che siano sempre perpendicolari alla sua superficie.

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$



Conduttori cavi

Sulla superficie interna di un conduttore cavo la carica totale è nulla e non si osservano cariche localizzate.

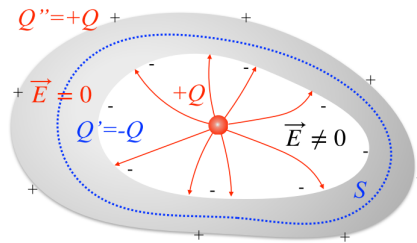


Se un conduttore dotato di cavità viene esposto a un campo elettrico esterno, il campo elettrico all'interno della cavità è comunque nullo e non vi sono cariche elettriche indotte sulla superficie della cavità stessa.

In altre parole il conduttore **scherma** l'interno della cavità dai campi elettrici all'esterno (**gabbia di Faraday**)

Induzione completa Poniamo una carica puntiforme all'interno della cavità di un conduttore neutro. La carica genera un campo con linee radiali che poi curvano per diventare perpendicolari alla superficie interna.

Si parla cioè di induzione completa ovvero tutte le linee di forza si chiudono sul conduttore.



Osservazione: Un conduttore cavo trasferisce sulla propria superficie esterna una carica uguale al valore complessivo delle cariche contenute all'interno della cavità, quindi è possibile dall'esterno sapere se all'interno è presente una carica.

Potenziale elettrostatico nei conduttori

Tutti i punti del conduttore sono equipotenziali (la differenza di potenziale tra due qualsiasi punti del conduttore è nulla):

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = V_B$$

Capacità di un conduttore

Definiamo capacità di un conduttore come il rapporto tra la carica e il potenziale del conduttore:

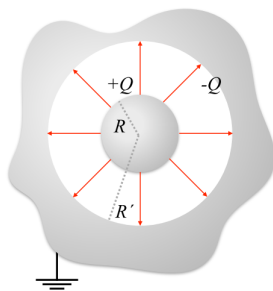
$$C = \frac{Q}{V}$$

Nel S.I. la capacità si misura in Farad (F) e $F = \frac{C}{V}$.

- La capacità quantifica l'attitudine di un conduttore ad accumulare carica ad un dato potenziale.
- La capacità dipende solo da forma e dimensione del conduttore e dal mezzo che lo circonda.

Condensatore

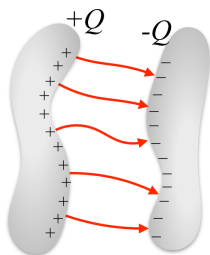
La capacità di un conduttore aumenta se posto in vicinanza di un altro conduttore:



Notiamo come la capacità della sfera interna è maggiore alla capacità della sfera isolata:

$$V_{\text{int.}} = V(R) - V(R') = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_R^{R'} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right) \Rightarrow C_{\text{int.}} = \frac{Q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)} > 4\pi\epsilon_0 R = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}} = \frac{Q}{V} = C_{\text{isol.}}$$

Il **condensatore** è un sistema formato da due conduttori carichi per i quali si verifica induzione completa (tutte le linee di forza uscenti da un conduttore incontrano l'altro conduttore). I due conduttori sono le **armature** del condensatore, lo spazio interposto tra le armature è l'**intercapedine**.



$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

| Condensatore piano | Condensatore sferico | Condensatore cilindrico |
|------------------------------|---|--|
| $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ | $C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \right)$ | $C = \frac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ |

Condensatori in parallelo

Nella connessione in parallelo gli elementi circuitati sono alla stessa differenza di potenziale.

$$C_{\text{TOT}} = \Sigma C_i$$

Condensatori in serie

Nella connessione in serie gli elementi circuitati hanno la stessa carica.

$$\frac{1}{C_{\text{TOT}}} = \Sigma \frac{1}{C_i}$$

Energia elettrostatica di un sistema di cariche

L'energia potenziale elettrostatica di una carica situata in un punto dello spazio in cui è presente un potenziale V vale:

$$U = qV$$

e rappresenta il lavoro che bisogna fare sulla carica q per portarla dall'infinito al punto in cui il potenziale vale V .

In un sistema di più cariche (ad esempio 3), per portare la prima carica nella posizione non occorre fare lavoro, per portare la seconda occorre fare un lavoro in contrapposizione al campo generato dalla prima, per portare la terza occorre fare un lavoro in contrapposizione al campo generato dalla prima e dalla seconda:

$$U_E = U_{12} + U_{23} + U_{31}$$

In generale:

Sistema discreto

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \sum_{j \neq i}^n \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Sistema continuo

$$U_E = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau$$

In alternativa utilizzando la legge di Gauss in forma locale: $\rho = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ possiamo ridefinire la formula precedente mediante il concetto di **densità di energia** del campo elettrostatico:

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

e dunque

$$U_E = \int_{\text{spazio}} u_E d\tau$$

Energia di un condensatore

Il lavoro infinitesimo per portare una carica $+dq$ dall'armatura caricata negativamente a quella caricata positivamente è:

$$d\mathcal{L} = dq \Delta V_q = dq \frac{q}{C}$$

Il lavoro complessivo per caricare completamente il condensatore dalla carica 0 alla carica Q :

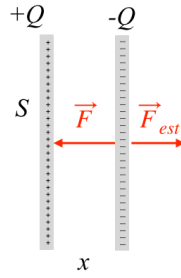
$$\mathcal{L} = \int_0^Q d\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

L'energia elettrostatica accumulata in un condensatore è

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \int_{\tau} u_E d\tau$$

Forza tra le armature di un condensatore

Le armature di un condensatore hanno cariche opposte e dunque si attraggono.



Colcoliamo la forza tra le armature partendo dall'energia

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2 x}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow dU_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2 dx}{\varepsilon_0 S} = \delta \mathcal{L}_{est} = F_{est} dx$$

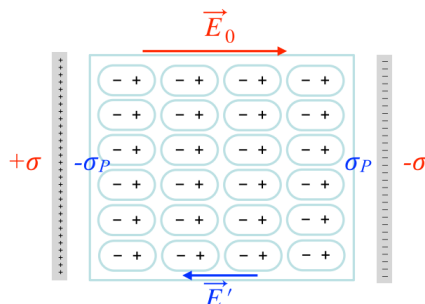
quindi:

$$\vec{F} = -\vec{F}_{est} = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \hat{n}$$

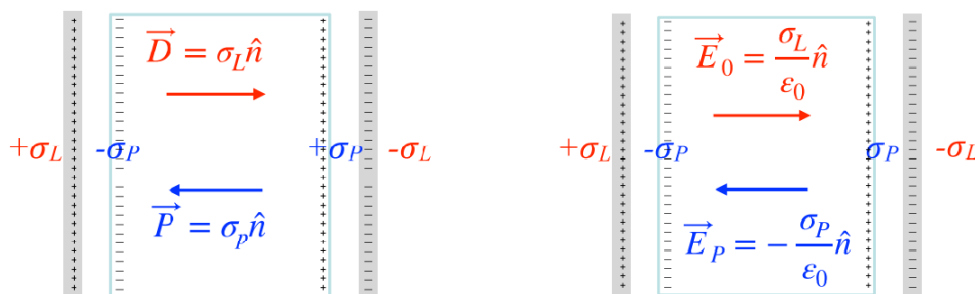
Si definisce **pressione elettrostatica** :

$$p = \frac{F}{S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$$

Condensatori con dielettrici



Se riempiamo con materiale isolante l'intercapedine di un condensatore, le cariche del dielettrico non si muovono, però a livello microscopico sulle superfici del dielettrico a contatto con le armature del condensatore si osserva un eccesso di carica σ_P (**carica di polarizzazione**). Le cariche di polarizzazione creano un campo elettrico opposto al campo del condensatore. Il campo elettrico totale (e di conseguenza la differenza di potenziale) diminuisce mentre la capacità del condensatore aumenta.



Ogni singola molecola si allineerà rispetto al momento delle forze a cui è soggetta: $\vec{\mathcal{M}} = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$.

Definiamo il **momento di dipolo medio** con il simbolo $\langle \vec{p} \rangle$.

Sia $n = \frac{N}{\Delta\tau}$ il numero di atomi/molecole per unità di volume, si definisce **vettore polarizzazione** $\vec{P} = n \langle \vec{p} \rangle$.

Il modulo del vettore polarizzazione è la **densità di carica di polarizzazione** $|\vec{P}| = \sigma_P$.

Si definisce **vettore spostamento elettrico** $\vec{D} = \sigma_L \hat{n}$

Oss: Il un dielettrico isotropo (è uguale in tutto lo spazio) e omogeneo (la materia è distribuita nello spazio allo stesso modo):

- le cariche di polarizzazione sono distribuite solo superficialmente
- i vettori campo elettrico, polarizzazione e spostamento elettrico sono paralleli
- si definiscono le due quantità adimensionali **suscettività elettrica** χ ($\chi > 0$) e **costante dielettrica relativa** ε_R ($\varepsilon_R \geq 1$) legate dalla relazione:

$$\chi = \varepsilon_R - 1$$

Riformulazione di vettore polarizzazione e vettore spostamento elettrico

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_R - 1) \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 (\varepsilon_R - 1) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_R \vec{E}$$

Riformulazione legge di Gauss in funzione delle cariche libere

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_L \qquad \oiint \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q_L$$

Formule condensatore con dielettrico

- Campo elettrico:

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0 \varepsilon_R} = \frac{\sigma_L \hat{n}}{\varepsilon_0 \varepsilon_R} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_R} \quad \vec{E}_0 \text{ è il campo elettrico con condensatore vuoto}$$

- Potenziale elettrico:

$$\Delta V = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_R} \quad \vec{V}_0 \text{ è il potenziale elettrico con condensatore vuoto}$$

- Capacità condensatore con dielettrico:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \varepsilon_R \frac{Q}{\Delta V_0} = \varepsilon_R C_0 \quad C_0 \text{ è la capacità con condensatore vuoto}$$

- Capacità condensatore piano con dielettrico

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_R S}{d}$$

3 Correnti elettriche

Modello di Drude-Lorentz

Se tramite un generatore si pone una differenza di potenziale (d.d.p.) tra due punti del conduttore gli elettroni di conduzione si mettono in moto ed il conduttore risulta percorso da una corrente elettrica.

Se la d.d.p. è costante ci si aspetta che il moto degli elettroni sia uniformemente accelerato. Sperimentalmente però si trova che la velocità media degli elettroni è proporzionale al campo mentre l'accelerazione no: $\langle \vec{v}_e \rangle \propto \vec{E}$.

Questo perchè gli elettroni nel loro moto urtano contro i protoni cedendo energia, dunque rallentano e aumentano l'energia vibrazionale e conseguentemente la temperatura.

La velocità media con cui si muovono gli elettroni è detta velocità di deriva:

$$\vec{v}_e = \vec{a}_e t = \frac{q_e}{m_e} \vec{E} t \Rightarrow \vec{v}_d = \langle \vec{v}_e \rangle = \frac{q_e}{m_e} \vec{E} \langle t \rangle$$

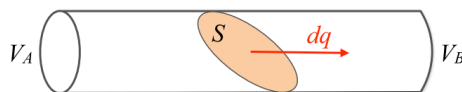
Con $\langle t \rangle$ il tempo medio che intercorre tra due urti.

Gli elettroni possiedono anche una velocità dovuta all'agitazione termica, ma si può dimostrare che essa ha valore medio nullo (perché casuale in ogni direzione).

Intensità di corrente

Data una sezione S di un conduttore all'interno del quale è mantenuta una differenza di potenziale, definiamo l'**intensità di corrente** elettrica come la quantità di carica che attraversa il conduttore per unità di tempo:

$$i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$



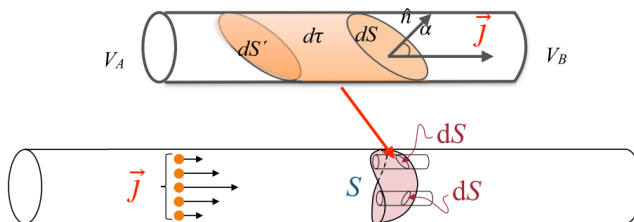
Nel S.I. l'unità di misura della corrente è l'Ampere ($A = \frac{C}{s}$).

Dal punto di vista sperimentale, in elettromagnetismo, il moto di una carica positiva è equivalente al moto di una carica negativa che procede in verso opposto. La convenzione impone il verso positivo delle correnti quello in cui si muovono i portatori di carica positivi.

Vettore densità di corrente elettrica

Definiamo il vettore densità di corrente elettrica come la corrente che passa attraverso l'unità di superficie dS ed ha verso della velocità di deriva:

$$\vec{j} = nq_e \vec{v}_d$$



Il flusso della densità di corrente elettrica, attraverso una superficie chiusa interna al conduttore, rappresenta la corrente elettrica che attraversa tale superficie:

$$di = \left(\frac{dq}{dt} \right)_{dS} = \vec{j} \cdot \hat{n} dS \Rightarrow i = \Phi_S(\vec{j}) = \oint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS$$

Equazione di continuità

Per il teorema della divergenza possiamo riscrivere $i = \oint_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS = \iiint_{\tau_S} \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d\tau$

Possiamo considerare la corrente uscente $i_{\text{uscente}} = -\frac{dq}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\tau_S} \rho d\tau = -\iiint_{\tau_S} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$ data $q = \iiint_{\tau_S} \rho d\tau$

Considerando che la corrente i e quella uscente i_{uscente} sono in modulo uguali e che il dominio di integrazione τ_S è lo stesso per le due espressioni si ricava la formula:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Cioè la divergenza del vettore di densità bilancia la variazione di carica.

Prima legge di Ohm

La costante di proporzionalità tra l'intensità di corrente e la differenza di potenziale è la **resistenza elettrica**.

$$\Delta V = Ri$$

La resistenza nel S.I. si misura in Ohm ($\Omega = \frac{V}{A}$).

Seconda legge di Ohm

La resistenza di un conduttore omogeneo, filiforme di lunghezza l e sezione S vale:

$$R = \rho_R \frac{l}{S}$$

dove ρ_R è detta **resistività elettrica** e dipende dalla natura del materiale.

Chiamiamo invece **conduttività elettrica** il rapporto $\sigma_C = \frac{1}{\rho_R}$.

Leggi di Ohm in forma locale

Per la definizione di differenziale di corrente elettrica si ha che $di = j dS$.

Per le due leggi di Ohm si ha che $dV = R di = \rho_R \frac{dl}{dS} di = \rho_R j dl$.

Infine dalla definizione di differenziale di potenziale $dV = E dl$ di può ricavare che

$$\vec{E} = \rho_R \vec{j} \quad \equiv \quad \vec{j} = \sigma_C \vec{E}$$

Resistenza

Resistenze in serie

Nella connessione in serie gli elementi circuitati sono attraversati dalla stessa corrente.

$$R_{\text{TOT}} = \Sigma R_i$$

Resistenze in parallelo

Nella connessione in parallelo gli elementi circuitati sono alla stessa differenza di potenziale.

$$\frac{1}{R_{\text{TOT}}} = \Sigma \frac{1}{R_i}$$

Effetto Joule

L'effetto Joule consiste nella dissipazione della potenza dovuta agli urti degli elettroni con gli atomi di un conduttore, i quali aumentano la propria energia vibrazionale e producono come risultato un aumento della temperatura. Calcoliamo tale potenza:

Quando una corrente i scorre attraverso un conduttore filiforme, la carica che attraversa una sezione S in un tempo dt è $dq = idt$. Il lavoro compiuto dal campo elettrico nello spostamento di una carica q nell'intervallo dt è:

$$\delta \mathcal{L} = dU = \Delta V dq = (Ri) idt = Ri^2 dt$$

Definiamo la **potenza**:

$$P = \frac{dU}{dt} = Ri^2 = i\Delta V = \frac{\Delta V^2}{R}$$

La potenza nel S.I. si misura in Watt ($W = \frac{J}{s}$).

Effetto Joule in forma locale

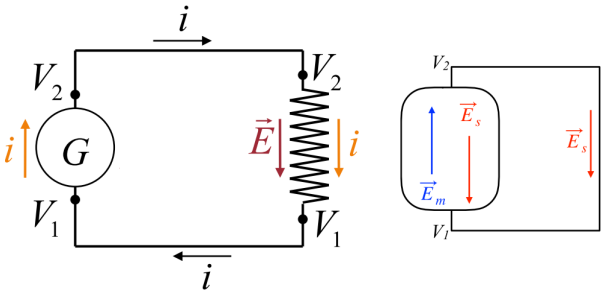
Relazione locale che esprime la potenza applicata sugli N elettroni contenuti in un volume $d\tau$:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{\delta \mathcal{L}}{d\tau dt} = \vec{E} \cdot \vec{j}$$

Superconduttori

Alcuni metalli o leghe, al di sotto di una temperatura critica T_c prossima allo zero assoluto mostrano una resistività nulla. In tali condizioni di superconduttività, le correnti circolano senza dissipazione di energia e i superconduttori non si riscaldano, anche con correnti molto intense.

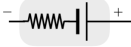
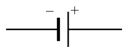
Generatore di forza elettromotrice



Tra di due capi del generatore si deve avere una differenza di potenziale dato che nel circuito è presente una corrente. All'interno del generatore si ha il campo elettromotore \vec{E}_m (non conservativo). La **forza elettromotrice** si calcola:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = - \oint \vec{E}_S \cdot d\vec{l} = \Delta V$$

| Generatori ideali | Generatori reali |
|---|--|
| La tensione ai capi del generatore si mantiene costante | La tensione ai capi del generatore presenta una caduta ohmica (Occorre considerare una resistenza interna al generatore) |



Prima legge di Kirchhoff

In qualunque nodo di un circuito la corrente totale entrante è uguale alla corrente totale uscente:

$$\sum_{\text{nodo}} i_k = \sum_{\text{entranti}} i_k - \sum_{\text{uscenti}} i_k = 0$$

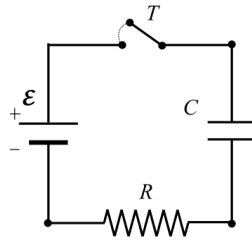
Seconda legge di Kirchhoff

Su qualunque maglia di un circuito la caduta di potenziale è uguale alla somma delle tensioni erogate dai generatori:

$$\sum_k \mathcal{E}_k = R_{\text{tot}} i = \Delta V$$

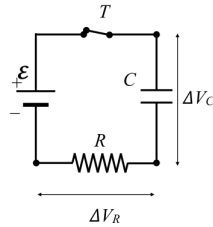
Circuiti RC in regime transitorio

Si tratta di circuiti (ideali) formati da una resistenza, un condensatore e da un generatore di forza elettromotrice.



Carica di un condensatore

Nel caso si vada a chiudere l'interruttore si avrà che ai capi della resistenza la differenza di potenziale è $\Delta V_R(t) = Ri(t)$ mentre ai capi del condensatore $\Delta V_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$. Applicando la legge delle maglie:



$$\mathcal{E} = \Delta V_R(t) + \Delta V_C(t) = Ri(t) + \frac{Q(t)}{C} = \text{derivando rispetto a } t \Rightarrow 0 = R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dQ}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \int_{i(0)}^{i(t)} \frac{di'}{i'} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt' \Rightarrow \ln \left(\frac{i(t)}{i(0)} \right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow i(t) = i(0) e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow$$

$$\text{Nell'istante iniziale } \mathcal{E} = Ri(0) + \overbrace{\frac{Q(0)}{C}}^0 = Ri(0) \Rightarrow i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = RC$$

$$\Delta V_R(t) = Ri(t) = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = RC$$

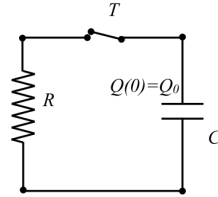
$$Q(t) = \int i(t) dt = \mathcal{E} C \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \tau = RC$$

$$\Delta V_C(t) = \frac{Q(t)}{C} = \mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad \tau = RC$$

Scarica di un condensatore

L'equazione alle maglie alla chiusura dell'interruttore è:

$$0 = \mathcal{E} = \Delta V_R(t) + \Delta V_C(t) = Ri(t) + \frac{Q(t)}{C} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_{Q(0)}^{Q(t)} \frac{dQ'}{Q'} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt' \Rightarrow \ln\left(\frac{Q(t)}{Q(0)}\right) = -\frac{t}{RC} \Rightarrow Q(t) = Q(0) e^{-\frac{t}{RC}}$$



$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = RC$$

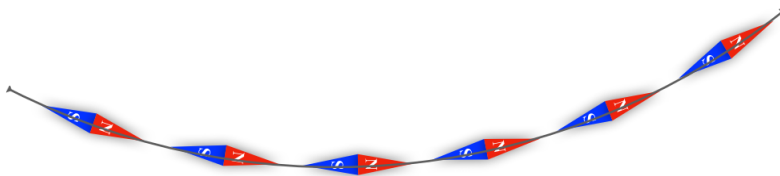
$$i(t) = \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{V_C}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = RC$$

$$U_R = \int_0^\infty P_R dt = \int_0^\infty Ri^2 dt = \frac{1}{2} CV_C^2 = U_C$$

Cioè l'energia che era inizialmente accumulata nel condensatore viene interamente dissipata sulla resistenza

4 Campi Magnetici Stazionari

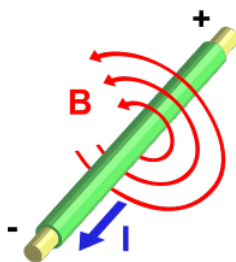
Si introduce un campo vettoriale \vec{B} detto **campo magnetico** o campo induzione magnetica le cui linee di forza entrano nel polo sud ed escono dal polo nord di un ipotetico ago magnetico e dunque è tangente alla sua direzione.



Il polo nord magnetico coincide con il polo sud geografico.

Nel S.I. il campo magnetico si misura in Tesla $T = \frac{Vs}{m^2}$

Un campo magnetico è generato da cariche in movimento e cioè da correnti.

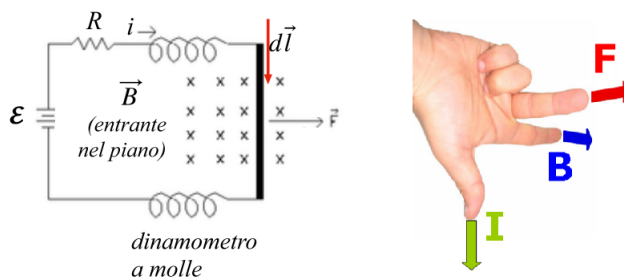


Il campo magnetico è solenoidale ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) cioè non è conservativo (perchè vedremo che dipende dalla velocità delle cariche elettriche).

Seconda legge di Laplace

Un tratto di filo $d\vec{l}$ percorso da una corrente i ed immerso in un campo di induzione magnetica \vec{B} subisce una forza descritta da:

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$$



Forza di Lorentz

Una carica puntiforme q in moto con velocità \vec{v} in presenza di un campo di induzione magnetica \vec{B} subisce una forza pari a:

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

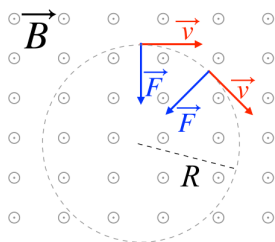
La forza di Lorentz dipende dalla velocità e dunque non è conservativa.

In presenza di un campo elettrico e un campo magnetico la forza di Lorentz si scrive:

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Moto di cariche in campi magnetici

Studiamo il moto di una carica q che si muove con velocità costante \vec{v} , perpendicolare ad un campo magnetico uniforme \vec{B} :



$$F_{\text{centripeta}} = m \frac{v^2}{R} = qvB = F_{\text{Lorentz}}$$

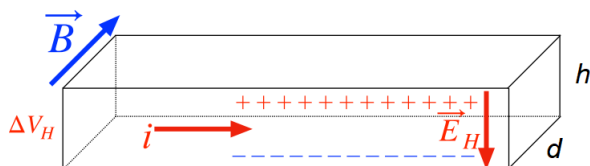
$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{m}{qB}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$$

Effetto Hall

Consideriamo un conduttore metallico a sezione rettangolare ($d \times h$) percorso da corrente i . Poniamo il sistema in un campo magnetico uniforme



Campo di Hall

$$\vec{F}_{\text{Lorentz}} = qv_d B = qE_H = \vec{F}_{\text{elettrostatica}}$$

Potenziale di Hall

$$\Delta V_H = E_H h = v_d B h = \frac{i}{nqd} B = R_H \frac{iB}{d}$$

dove $R_H = \frac{1}{nq} \left(\sim 10^{-11} \frac{m^3}{C} \right)$ è la **costante di Hall**.

Circuito in un campo magnetico

La forza totale esercitata su un tratto del circuito $d\vec{l}$ percorso da una corrente i da parte di un campo magnetico \vec{B} ricavata dalla seconda legge di Laplace è:

$$\vec{F} = i \oint d\vec{l} \wedge \vec{B}$$

Il momento delle forze è:

$$\vec{\mathcal{M}} = \oint \vec{r} \wedge d\vec{F} = i \oint \vec{r} \wedge (d\vec{l} \wedge \vec{B})$$

dove r è la distanza di un punto dall'asse di rotazione.

Considerando una spira rettangolare immersa in un campo magnetico uniforme essa non traslerà poichè la risultante delle forze a cui è sottoposta è nulla, ma ruoterà perchè il momento delle forze non è nullo.

In generale per una spira di qualsiasi forma la risutante dell forze sarà sempre nulla mentre si ha che il **momento magnetico della spira** vale

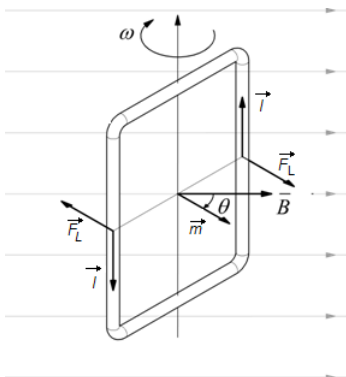
$$\vec{m} = iS\hat{n}$$

e il momento delle forze si può calcolare come

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Teorema di equivalenza di Ampère

Una spira percorsa da corrente e immersa in un campo magnetico si comporta come un dipolo magnetico elementare (ago magnetico) di momento $\vec{m} = iS\hat{n}$, perpendicolare al piano della spira e orientato con la regola della mano destra.



Piccole oscillazioni di una spira

Consideriamo una spira il cui momento magnetico forma con il campo magnetico un angolo $\theta \approx 0$.

La spira avrà un momento di inerzia I e si comporterà come un pendolo fisico.

Conoscendo la corrente e momento di inerzia della spira, abbiamo un metodo per misurare l'intensità del campo B a partire dalla misura del periodo di oscillazione:

$$B = \frac{I}{iS} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

Energia di una spira

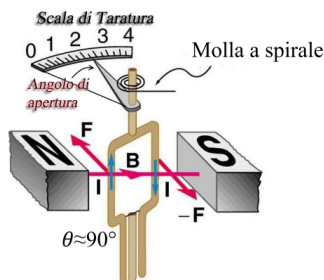
$$d\mathcal{L} = \mathcal{M} d\theta = mB \sin \theta d\theta \Rightarrow \mathcal{L} = \int mB \sin \theta d\theta = -mB \cos \theta = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

$$U_M = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Galvanometro

Il galvanometro è uno strumento utilizzato per misurare piccole intensità di corrente. Il momento delle forze magnetiche $\mathcal{M}_M = -iSB \sin \theta \sim -iSB$ sulla spira è bilanciato dal momento delle forze elastiche $\mathcal{M}_{\text{molla}} = -k\alpha$. La misura della corrente è data da:

$$i = \frac{k\alpha}{SB}$$

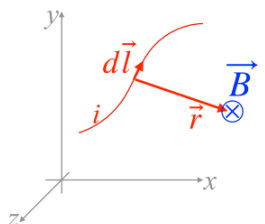


Prima legge di Laplace

Evidenze sperimentali mostrano che i fili percorsi da corrente generano campi magnetici: in particolare un filo infinitesimo $d\vec{l}$ percorso da una corrente i genera un campo magnetico infinitesimo a distanza r pari a:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{id\vec{l} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

dove la costante μ_0 è detta **permeabilità magnetica nel vuoto** e vale $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$ Henry (H) = 1H = 1Ω · 1s



Dato che $id\vec{l} = \vec{j}d\tau = nq\vec{v}_d d\tau = Nq\vec{v}_d$ allora possiamo riscrivere la formula precedente in relazione a N cariche. Dunque una singola carica in movimento genera un campo magnetico \vec{B} che a distanza r dalla carica stessa vale:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v}_d \wedge \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v}_d \wedge \vec{r}}{r^3}$$

Legge di Biot-Savart

Il campo induzione magnetica generato da un filo rettilineo di lunghezza indefinita, percorso da corrente i è:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{t}$$

tangente alle circonferenze normali al filo.

Campi magnetici da cariche puntiformi in moto

Consideriamo il campo elettrico generato da una singola carica $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \frac{q\vec{r}}{r^3} = 4\pi\epsilon_0 \vec{E}$. Se andiamo a sostituire nella formula del campo magnetico generato da una carica $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3}$ ricaviamo:

$$\vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{v} \wedge \vec{E} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E}$$

c è la velocità della luce nel vuoto ed è legata alla costante dielettrica e alla costante di permeabilità magnetica nel vuoto mediante la formula $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

Flusso del campo magnetico

Per il teorema della divergenza, il flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie chiusa sarà nullo:

$$\oint_{S_{\text{chiusa}}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0 \quad \oint_{S_{\text{aperta}}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS \in \mathbb{R}$$

Circuitazione del campo magnetico

La circuitazione lungo una linea chiusa e orientata Γ che concatena il filo:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi} d\phi = \pm \mu_0 i$$

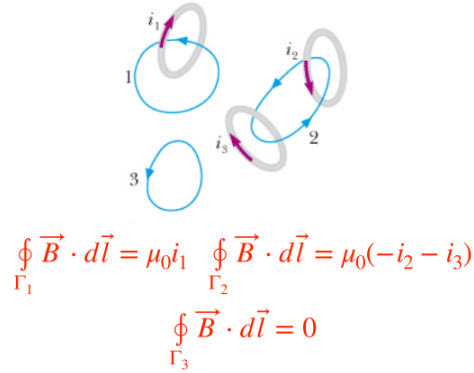
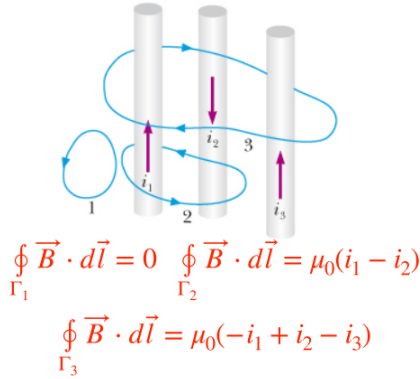
La circuitazione lungo una linea chiusa e orientata Γ che non concatena il filo:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Legge di Ampère

La circuitazione del campo magnetico è proporzionale alla somma delle correnti concatenate:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k^{\text{conc.}} i_k$$



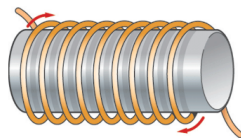
Densità di corrente concatenata (Legge di Ampère in forma locale)

Ciascuna corrente i_k può essere scritta in funzione della densità di corrente $i_k = \iint \vec{j}_k \cdot \hat{n}_k dS_k$ quindi:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{j}_{\text{conc.}} \cdot \hat{n} dS \quad \equiv \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Magnetismo della materia

Se riempiamo la parte interna di un solenoide rettilineo ideale si osserva una variazione del campo magnetico:



- materiali **diamagnetici** → leggera diminuzione
- materiali **paramagnetici** → leggero aumento
- materiali **ferromagnetici** → considerevole aumento

Per spiegare il magnetismo nella materia occorre partire dalla struttura microscopica semplificata (atomo idrogeno):

$m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$
 $|q_e| = |q_p| = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Dall'espressione della forza centrifuga ricaviamo la velocità:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e q_p}{r_H^2} = m_e \frac{v^2}{r_H}$$
$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e q_p}{m_e r_H}}$$

$T = \frac{2\pi R_H}{v}$
 $i = \frac{-q_e}{T} = -\frac{q_e v}{2\pi R_H}$

$R_H = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$

A diagram of a hydrogen atom in a simplified model. It consists of a central red sphere labeled 'p' representing the proton, and a blue sphere labeled 'e' representing the electron. The electron is moving in a circular orbit around the proton, indicated by a blue circular arrow. A red line connects the proton to the electron, representing the radius of the orbit, labeled as R_H.

$$\text{Momento angolare orbitale } \vec{p}_o = \vec{R}_H \wedge m_e \vec{v}$$

$$\text{Momento magnetico orbitale } \vec{m}_o = iS = -\frac{q_e v}{2} R_H = -\frac{q_e}{2m_e} \vec{p}_o$$

$$\text{Momento magnetico di spin } \vec{m}_s = -\frac{q_e}{m_e} \vec{p}_s$$

Il **momento magnetico totale** o intrinseco (\vec{m}) dato dall'accoppiamento tra momento magnetico orbitale e di spin, in un generico atomo, dipende dagli elettroni più esterni e in assenza di campi magnetici esterni esso è macroscopicamente nullo perchè i momenti magnetici degli atomi sono orientati casualmente e la loro somma vettoriale è nulla.

Materiali diamagnetici

In questi materiali, l'effetto di un campo esterno è quello di deviare la traiettoria degli elettroni in moto, inducendo una variazione di velocità (l'elettrone si allontana dal nucleo) e quindi una diminuzione della frequenza di rotazione (precessione di Larmor). L'effetto complessivo è una diminuzione del momento magnetico, che va ad opporsi leggermente al campo magnetico esterno.

I materiali diamagnetici in genere hanno un numero pari di elettroni e struttura simmetrica.

Materiali paramagnetici

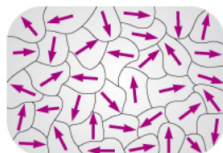
I materiali paramagnetici hanno atomi con momento angolare totale diverso da zero.

Gli atomi si comportano come dipoli magnetici che per effetto di un campo magnetico esterno tendono ad allinearsi con il campo magnetico esterno, contribuendo ad aumentarne leggermente il valore.

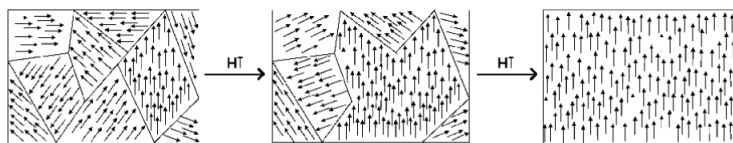
I materiali paramagnetici sono caratterizzati da un numero dispari di elettroni o da strutture atomiche asimmetriche.

Materiali ferromagnetici

I materiali ferromagnetici microscopicamente hanno una configurazione elettronica per cui si creano forti interazioni tra momenti orbitali e momenti di spin. Tali interazioni comportano che momenti magnetici di atomi adiacenti si “accoppiano”, aumentando considerevolmente il loro effetto magnetico rispetto al singolo atomo. All'interno del materiale si creano regioni formate da numerosi dipoli allineati (domini di Weiss).

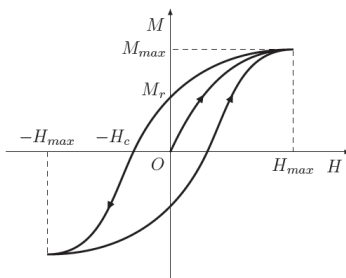


Quando un materiale ferromagnetico viene posto in un campo magnetico esterno i momenti si allineano con il campo magnetico, generando una fusione dei domini di Weiss.



I domini di Weiss vengono distrutti se il materiale viene riscaldato fino ad una temperatura critica (di Curie), per cui l'interazione tra gli atomi è maggiore dei momenti magnetici e dunque il materiale non risulta più magnetizzato ma si comporta come un materiale paramagnetico.

Ponendo campi magnetici sempre più intensi, si arriva ad una condizione di saturazione cioè il materiale mantiene una magnetizzazione residua anche fuori dal campo magnetico.



Come si può osservare dall'immagine (ciclo di isteresi per un campo magnetico) in primo momento in cui si ha campo magnetico e magnetizzazione del materiale nulla, se si aumenta il campo magnetico, il materiale si magnetizza aumentando proporzionalmente con il campo e raggiunge il suo massimo valore detto **valore di saturazione**. Diminuendo il campo magnetico fino ad azzerarlo, il materiale mantiene una magnetizzazione residua.

Vettore magnetizzazione

Definiamo il vettore magnetizzazione come il prodotto del momento angolare intrinseco medio del materiale per il numero di atomi per unità di volume:

$$\vec{M} = n \langle \vec{m} \rangle = \frac{N}{d\tau} \langle \vec{m} \rangle$$

Vettore H

Definiamo il vettore H che descrive il campo magnetico nella materia, in funzione solo delle correnti di conduzione

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

Proprietà:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j} \qquad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$$

5 Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo

Equazioni di Maxwell (forma integrale)

| Campo elettrico | Campo magnetico |
|---|--|
| Legge di Gauss | Legge di Gauss |
| $\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_S}{\varepsilon_0}$ | $\oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$ |
| Conservatività | Legge di Ampère conc. |
| $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ | $\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k i_k$ |

Equazioni di Maxwell (forma differenziale)

| Campo elettrico | Campo magnetico |
|---|---|
| Legge di Gauss | Legge di Gauss |
| $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ | $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ |
| Conservatività | Legge di Ampère |
| $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$ | $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ |

Legge di Ampère-Maxwell

Il campo magnetico può essere generato da cariche in moto e da campi elettrici variabili nel tempo.

La legge di Ampère-Maxwell è valida sempre, sia in regime stazionario che non stazionario. Infatti la divergenza della somma dei termini di densità di corrente di spostamento e conduzione è sempre nulla.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k^{\text{conc.}} (i_c + i_s)$$

Legge di Faraday-Neumann-Lenz

La variazione temporale del flusso di un campo magnetico “induce” una forza elettromotrice, la quale è opposta alla variazione del flusso che l’ha generata

$$\mathcal{E}_{\text{ind.}} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot \hat{n} dS = - \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}$$

Osservazione: La superficie deve essere aperta altrimenti per il teorema di Gauss del campo magnetico il flusso è nullo.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Induzione

Poichè per la prima legge di Laplace il campo magnetico dipende linearmente dalla corrente allora anche il flusso del campo magnetico sarà proporzionale alla corrente:

$$\Phi(\vec{B}) = Mi$$

Dove M è detto **coefficiente di mutua induzione** e dipende solamente dalla forma del circuito percorso da corrente. Nel S.I si misura in Henry.

Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\mathcal{E}_{\text{ind.}} = - \frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = -M \frac{di}{dt}$$

Autoinduzione

Un circuito percorso da corrente variabile nel tempo genera un campo magnetico variabile nel tempo che comporta un flusso variabile nel tempo

$$\Phi(\vec{B}) = Li$$

Dove L è detto **coefficiente di autoinduzione** (o **induttanza**) e dipende solamente dalla forma del circuito percorso da corrente. Nel S.I. di misura in Henry.

Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz:

$$\mathcal{E}_{\text{ind.}} = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Induttanza

Esempio induttanza di un solenoide cilindrico ideale

L'induttanza di un solenoide cilindrico ideale di lunghezza l formato da N spire di raggio r vale:

$$L = \frac{\Phi_{\text{solenoid}}(\vec{B})}{i(t)} = \frac{N\Phi_{\text{spira}}(\vec{B})}{i(t)} = \frac{N\mu_0 \frac{N}{l} i(t) \pi r^2}{i(t)} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \quad S = \pi r^2$$

Induttanze in serie

Nella connessione in serie gli elementi circuitati sono attraversati dalla stessa corrente.

$$L_{\text{TOT}} = \Sigma L_i$$

Induttanze in parallelo

Nella connessione in parallelo gli elementi circuitati sono alla stessa differenza di potenziale.

$$\frac{1}{L_{\text{TOT}}} = \Sigma \frac{1}{L_i}$$

Energia magnetica

Per spostare la carica all'interno dell'induttanza occorre contrastare la fem autoindotta, cioè occorre fare un lavoro contro la fem autoindotta.

Il lavoro per aumentare la corrente di un valore di è:

$$\delta\mathcal{L} = -\mathcal{E}_{\text{autoindotta}}dq = -\left(-L\frac{di}{dt}\right)idt$$

Se inizialmente nell'induttanza non circola corrente $i(0) = 0$, per portare il circuito a corrente i occorre compiere un lavoro:

$$\mathcal{L} = \int_0^i Lidi = \frac{1}{2}Li^2$$

Il lavoro accumula energia nell'induttanza. Essendo $L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$ e $B = \mu_0 \frac{N}{l} i \Rightarrow i = \frac{Bl}{\mu_0 N}$

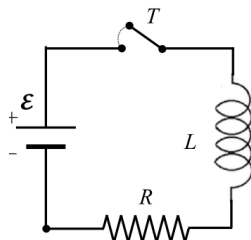
$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}(lS) = \frac{B^2}{2\mu_0}V_{\text{solenoid}} = \iiint_{\text{spazio}} u_B d\tau$$

Densità di energia magnetica

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Circuiti RL in regime transitorio

Carica di un induttore



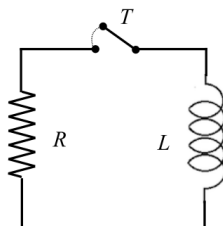
Nel momento in cui si va a chiudere l'interruttore l'equazione alla maglia diventa:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{ind.}} = \mathcal{E} - L \frac{di}{dt} = Ri \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \left(i - \frac{\mathcal{E}}{R} \right) \Rightarrow \frac{di}{\left(i - \frac{\mathcal{E}}{R} \right)} = -\frac{R}{L} dt$$
$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{di}{\left(i - \frac{\mathcal{E}}{R} \right)} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt \Rightarrow \left[\ln \left(i - \frac{\mathcal{E}}{R} \right) \right]_{i(0)}^{i(t)} = -\frac{R}{L} t \Rightarrow \ln \left(\frac{i - \frac{\mathcal{E}}{R}}{-\frac{\mathcal{E}}{R}} \right) = -\frac{R}{L} t \Rightarrow i - \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L} t}$$
$$i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right)$$

In regime stazionario ($t \rightarrow \infty$):

- $\mathcal{E}_{\text{ind.}} = -L \frac{di}{dt} = -\mathcal{E} e^{-\frac{R}{L} t} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$
- L'induttanza si comporta come un filo a resistenza nulla
- Nell'induttanza vi è immagazzinata un'energia magnetica $U_B = \frac{1}{2} Li^2$

Scarica di un induttore



$$\mathcal{E}_{\text{ind.}} = -L \frac{di}{dt} = Ri \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} i \Rightarrow \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$$
$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{di}{i} = \int_0^t -\frac{R}{L} dt \Rightarrow [\ln(i)]_{i(0)}^{i(t)} = -\frac{R}{L} t \Rightarrow \frac{i(t)}{i(0)} = e^{-\frac{R}{L} t}$$
$$i(t) = i(0) e^{-\frac{R}{L} t}$$

- La corrente iniziale si ricava dalla condizione iniziale di energia immagazzinata nell'induttanza:

$$U_B = \frac{1}{2} Li(0)^2 \Rightarrow i(0) = \sqrt{\frac{2U_B}{L}}$$

- Tutta l'energia accumulata nell'induttanza viene dissipata per effetto Joule sulla resistenza