Fisica Generale T-2

Elettromagnetismo

Autore: Urbinati Cristian

Contatto: cristian.urbinati@studio.unibo.it

PROPRIETÀ DELLA CARICA ELETTRICA

- Esistono due tipi di cariche elettriche, convenzionalmente positive e negative. Si parla di elettrizzazione vetrosa se la carica elettrica è positiva e di elettrizzazione resinosa se è negativa.
- In natura le cariche sono multiple della carica elettrica elementare $|q_e| = 1.6 \times 10^{-19} C$
- In un sistema isolato la carica elettrica si conserva

FORZA ELETTROSTATICA E LEGGE DI COULOMB

La legge di Coulomb dice che la forza elettrostatica esercitata da una carica q_1 su una carica q_2 è:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

Per la forza elettrostatica vale il principio di sovrapposizione, ovvero in un sistema di N cariche puntiformi la forza totale sulla carica q è la somma vettoriale delle forze che le cariche q_i eserciterebbero singolarmente su q:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i q}{r^2}\hat{r}_i \quad \equiv \quad \vec{F} = q\vec{E}$$

PROPRIETÀ DEL CAMPO ELETTROSTATICO

- Il campo elettrostatico è un campo vettoriale

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r} \qquad Q = \sum_{1}^{N} q_i = \iiint_\tau \rho \, \mathrm{d}\tau$$

- $\vec{F} = q\vec{E}$
- $\vec{E} = \lim_{q\to 0}\frac{\vec{F}}{q}$
- $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$
- Il campo elettrostatico è conservativo (irrotazionale)

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \ \ \forall\Gamma \quad \equiv \quad \vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{0}$$

LEGGE DI GAUSS

Sia S una superficie chiusa contenente N cariche q_i allora il flusso del campo elettrico attraverso S è:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} \qquad Q_{INT} = \sum_{1}^{N} q_i = \iiint_{\tau(S)} \rho \, \mathrm{d}\tau$$

In forma locale si ha che se la carica è distribuita uniformemente:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Il flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie S chiusa è:

$$\Phi_S(\vec{E}) = \oiint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,\mathrm{d}S = \iiint_{\tau(S)} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}\tau$$

PROPRIETÀ DEL POTENZIALE ELETTROSTATICO

- Il potenziale elettrostatico è una funzione scalare:

$$V(\vec{r}) = -\int_{\Gamma} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{cost.}$$

- Per il potenziale vale il principio di sovrapposizione:

$$V(\vec{r}) = \sum_{1}^{N} V_i(\vec{r})$$

- Il lavoro per spostare una carica q da un punto A ad un punto B è:

$$W_{AB} = \int_A^B q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q\Delta V_{AB}$$

- L'energia potenziale elettrostatica di una carica q situata in un punto dello spazio in cui è presente un potenziale V è:

$$U_E = qV = W$$

In generale per un sistema di cariche:

$$U_E = \frac{1}{2}\sum_{1}^{N} q_i V_i = \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \quad \equiv \quad U_E = \frac{1}{2}\int_{\tau} \rho V \,\mathrm{d}\tau \quad \equiv \quad U_E = \iiint_{spazio} \boxed{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}\,\mathrm{d}\tau$$

u_E : densità di energia elettrostatica

DIPOLO ELETTRICO

Il dipolo elettrico è un sistema formato da due cariche elettriche in quiete, di uguale valore assoluto Q ma di segno opposto e poste a una distanza d.

Il dipolo viene matematicamente indicato con il momento di dipolo elettrico $\vec{p} = Q\vec{d}$

Potenziale elettrostatico:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r^- - r^+}{r^+ r^-}\right) \to \text{per } r \gg d \to \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{d\cos\theta}{r^2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{dr\cos\theta}{r^3}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

Campo elettrostatico:

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\frac{xp_x + yp_x + zp_x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\right] - \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p_x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}} - (xp_x+yp_x+zp_x)\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\,2x}{(x^2+y^2+z^2)^3}\right] - \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \\
&= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p_x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3x(xp_x+yp_x+zp_x)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\right] - \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})x}{r^5} - \frac{p_x}{r^3}\right] - \frac{\partial V_y}{\partial y} - \frac{\partial V_z}{\partial z} = \cdots = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}[3(\vec{p}\cdot\hat{r})\hat{r} - \vec{p}]
\end{aligned}$$

Momento delle forze:

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{b} \wedge \vec{F} = (d\sin\theta)(QE) = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Energia potenziale:

$$U = +QV^+ - QV^- = +Q\left(-\frac{d}{2}E\cos\theta\right) - Q\left(\frac{d}{2}E\cos\theta\right) = -QdE\cos\theta = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

PROPRIETÀ ELETTROSTATICHE DEI MATERIALI CONDUTTORI

- Cariche libere di muoversi sul conduttore (comportamento elettroni simile ad un gas)
- In presenza di un campo esterno o di un eccesso di carica, le cariche si redistribuiscono sul conduttore fino a raggiungere una condizione di equilibrio. Le cariche si dispongono dunque in modo da generare un campo interno che annulla quello esterno e dunque il campo interno risulta sempre nullo, perciò:
$$\Phi_S(\vec{E}) = \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}S = 0$$
- La presenza di addensamenti di carica sulla superficie del conduttore deforma le linee di campo esterne in modo che siano sempre perpendicolari alla sua superficie:
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n}$$
Per questo motivo se un conduttore presenta delle punte vi è maggiore addensamento di carica e dunque una maggiore intensità del campo elettromagnetico.
- Un conduttore cavo scherma la cavità interna: no campo elettrico e carica totale nulla. Se però si pone della carica all'interno, si ha induzione completa e il conduttore trasferisce sulla propria superficie esterna una carica uguale al valore complessivo delle cariche all'interno della cavità.
- In condizioni stazionarie tutti i punti del conduttore sono equipotenziali.
- La capacità quantifica l'attitudine del conduttore di accumulare carica ad un certo potenziale: $C = \frac{Q}{V}$

CONDENSATORI

Il condensatore è un sistema formato da due conduttori carichi per i quali si verifica induzione completa (tutte le linee di forza uscenti da un conduttore incontrano l'altro). I due conduttori sono le armature del condensatore, lo spazio interposto tra le armature è l'intercapedine.

- Condensatore piano: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0} \to \Delta V = \int_0^d E \, \mathrm{d}l = \frac{Qd}{S\varepsilon_0} \to C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$
- Condensatore cilindrico: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0} \to \Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E \, \mathrm{d}l = \frac{Q}{2\pi h \varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \to C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$
- Condensatore sferico: $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0} \to \Delta V = \int_{R_1}^{R_2} E \, \mathrm{d}l = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right) \to C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)}$

Condensatori in serie:	Condensatori in parallelo:
$\frac{1}{C_{TOT}} = \sum_1^N \frac{1}{C_i}$ stessa carica	$C_{TOT} = \sum_1^N C_i$ stessa d.d.p.

Serie:

$$\begin{cases} V_A - V_M = \dfrac{Q}{C_1} \\ V_M - V_B = \dfrac{Q}{C_2} \end{cases} \to \Delta V = V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_B) = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q}{C_{TOT}}$$

Parallelo:

$$\begin{cases} Q_1 = C_1(V_A - V_B) \\ Q_2 = C_2(V_A - V_B) \end{cases} \to Q = Q_1 + Q_2 = (V_A - V_B)(C_1 + C_2) = \Delta V C_{TOT}$$

Energia di un condensatore:

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Forza tra le armature di un condensatore:

$$F = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S}$$

CONDENSATORI CON DIELETTRICI

Il vantaggio di porre un materiale isolante nell'intercapedine di un condensatore è che a livello microscopico le cariche si polarizzano e creano un campo $\vec{E}_P = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} = -\frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}\hat{n}$ che si oppone a quello presente tra le armature $\vec{E}_0 = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \vec{E}_P = \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0} - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \qquad \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon_R - 1)\vec{E} \qquad \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \varepsilon_R \vec{E}$$

Dove $\vec{P}$ è detto vettore polarizzazione, $\vec{D}$ è detto vettore spostamento elettrico, χ è detta suscettività elettrica ed è sempre ≥ 0 ed ε_R è detta costante dielettrica relativa ed è sempre ≥ 1. Vale la relazione $\chi = \varepsilon_R - 1$.

Dunque diminuendo il campo elettrostatico, e di conseguenza la differenza di potenziale, aumenta la capacità del condensatore:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_R} \quad \rightarrow \quad \Delta V = \frac{\Delta V_0}{\varepsilon_R} \quad \rightarrow \quad C = \varepsilon_R C_0$$

CORRENTI ELETTRICHE STAZIONARIE ED EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

Consideriamo un conduttore all'interno del quale è mantenuta una differenza di potenziale. In tale caso gli elettroni all'interno del conduttore si mettono in moto e questo risulta percorso da una corrente elettrica. Definiamo intensità di corrente la quantità di carica che attraversa una sezione S del conduttore per unità di tempo:

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

Definiamo il vettore densità di corrente come la corrente che passa attraverso l'unità di superficie dS ed ha verso della velocità di deriva:

$$\vec{j} = n q_e \vec{v}_d \qquad n = \frac{N}{\mathrm{d}\tau}$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$i = \Phi_S(\vec{j}) = \oiint_S \vec{j} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = \iiint_\tau \vec{\nabla} \cdot \vec{j}\, \mathrm{d}\tau$$

$$i_{USCENTE} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau \rho\, \mathrm{d}\tau$$

Equazione di continuità $\qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$

Si hanno condizioni stazionarie quando:

- La carica entrante è pari alla carica uscente: $\Delta q = q_{OUT} - q_{IN} = 0$
- La carica q internamente ad S si mantiene costante: $i_{USCENTE} = 0$
- Il flusso della densità di corrente è nullo: $\Phi_S(\vec{j}) = 0$
- Il campo densità di corrente è solenoidale: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$

LEGGI DI OHM E RESISTENZA ELETTRICA

Prima legge di Ohm: La costante di proporzionalità tra l'intensità di corrente e la differenza di potenziale è la resistenza elettrica:

$$\Delta V = Ri$$

Seconda legge di Ohm: La resistenza di un conduttore omogeno, filiforme di lunghezza L e sezione S vale:

$$R = \rho_R \frac{L}{S} = \frac{1}{\sigma_C} \frac{L}{S}$$

dove ρ_R è detta resistività elettrica del materiale e $\sigma_C = \frac{1}{\rho_R}$ è detta conduttività elettrica del materiale.

Leggi in forma locale:

$$\vec{E} = \rho_R \vec{j} \quad \equiv \quad \vec{j} = \sigma_C \vec{E}$$

Resistenze in serie:	Resistenze in parallelo:
$R_{TOT} = \sum_{1}^{N} R_i$ stessa corrente	$\frac{1}{R_{TOT}} = \sum_{1}^{N} \frac{1}{R_i}$ stessa d.d.p.

Serie:

$$\begin{cases} V_A - V_M = R_1 i \\ V_M - V_B = R_2 i \end{cases} \rightarrow \Delta V = V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_B) = (R_1 + R_2)i = R_{TOT} i$$

Parallelo:

$$\begin{cases} i_1 = \dfrac{V_A - V_B}{R_1} \\ i_2 = \dfrac{V_A - V_B}{R_2} \end{cases} \rightarrow i = i_1 + i_2 = \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A - V_B}{R_2} = (V_A - V_B)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{\Delta V}{R_{TOT}}$$

EFFETTO JOULE

L'effetto Joule consiste nella dissipazione della potenza dovuta agli urti degli elettroni con gli atomi di un conduttore, i quali aumentano la propria energia vibrazionale e producono come risultato un aumento della temperatura.

Potenza dissipata:

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta V\,\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \Delta V i = \frac{\Delta V^2}{R} = Ri^2$$

In forma locale:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\tau \mathrm{d}t} = \frac{\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\, N q_e}{\mathrm{d}\tau \mathrm{d}t} = \frac{\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}\, n q_e}{\mathrm{d}t} = \vec{E} \cdot \vec{v}_d n q_e = \vec{E} \cdot \vec{j}$$

GENERATORE DI FORZA ELETTROMOTRICE

All'interno del generatore si ha il campo elettromotore $\vec{E}_m$ che deve contrastare il campo $\vec{E}_s$ che genera la d.d.p.:

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_m \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\oint \vec{E}_s \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \Delta V$$

LEGGI DI KIRCHOFF

Prima legge di Kirchoff: In qualunque nodo di un circuito la corrente tot entrante è uguale alla corrente tot uscente:

$$\sum_{NODO} i_k = \sum_{entranti} i_k - \sum_{uscenti} i_k = 0$$

Seconda legge di Kirchoff: In qualunque maglia di un circuito la caduta di potenziale è uguale alla somma delle tensioni erogate dai generatori di forza elettromotrice:

$$\sum_{1}^{N} \mathcal{E}_k = R_{TOT} i = \Delta V$$

CIRCUITI RC

Si tratta di circuiti ideali formati da una resistenza, un condensatore e un generatore di forza elettromotrice

Carica condensatore:

$$\mathcal{E} = \Delta V_R(t) + \Delta V_C(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} \rightarrow \text{ derivando rispetto a } t \rightarrow 0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\frac{1}{C} = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{i} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \rightarrow \int_{i(0)}^{i(t)} \frac{\mathrm{d}i}{i} = \int_0^t -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \rightarrow \ln\left(\frac{i(t)}{i(0)}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow i(t) = i(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

Nell'istante iniziale $\mathcal{E} = Ri(0) + \frac{q(0)}{C} = Ri(0) \rightarrow i(0) = \frac{\mathcal{E}}{R}$

- $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$
- $q(t) = \int_0^t i(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{RC}{1}\frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\right]_0^t = \mathcal{E}C\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$
- $\Delta V_R(t) = Ri(t) = \mathcal{E}e^{-\frac{t}{RC}}$
- $\Delta V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \mathcal{E}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

Scarica condensatore:

$$0 = \mathcal{E} = \Delta V_R(t) + \Delta V_C(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C}$$

$$\frac{\mathrm{d}q}{q} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \rightarrow \int_{q(0)}^{q(t)} \frac{\mathrm{d}q}{q} = \int_0^t -\frac{\mathrm{d}t}{RC} \rightarrow \ln\left(\frac{q(t)}{q(0)}\right) = -\frac{t}{RC} \rightarrow q(t) = q(0)e^{-\frac{t}{RC}}$$

- $q(t) = q(0)e^{-\frac{t}{RC}}$
- $i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{q(0)}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{\Delta V_C}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$
- $\Delta V_R(t) = Ri(t) = -\Delta V_C\, e^{-\frac{t}{RC}}$
- $\Delta V_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{q(0)}{C} e^{-\frac{t}{RC}}$
- $U_R = \int_0^\infty Ri(t)^2\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}C\Delta V_C{}^2 = U_C$

PROPRIETÀ DEL CAMPO MAGNETICO STAZIONARIO

- Il campo magnetico è un campo vettoriale generato da cariche in movimento cioè da correnti o da campi elettrici variabili nel tempo
- Le linee di campo sono tangenti alla direzione lungo la quale si allineano gli aghi magnetici
- $\vec{F}_M = k_M \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$
- Il campo magnetico non è conservativo (solenoidale):

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = 0 \quad \equiv \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

LEGGI DI LAPLACE DEL CAMPO MAGNETICO

Prima legge di Laplace: Un tratto di filo infinitesimo $\mathrm{d}\vec{l}$ percorso da una corrente i genera un campo magnetico a distanza r pari a:

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2} \qquad \rightarrow \qquad \vec{B}_q = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v}_d \wedge \hat{r}}{r^2}$$

Seconda legge di Laplace: Un tratto di filo infinitesimo $\mathrm{d}\vec{l}$ percorso da una corrente i ed immerso in un campo magnetico $\vec{B}$ subisce una forza pari a:

$$\mathrm{d}\vec{F} = i\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B}$$

LEGGE DI BIOT-SAVART

Il campo magnetico generato da un filo rettilineo di lunghezza indefinita percorso da una corrente i a distanza r è:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \hat{t}$$

FORZA DI LORENTZ

Una carica puntiforme q in moto con velocità $\vec{v}$ in presenza di un campo elettrostatico $\vec{E}$ e di un campo magnetico $\vec{B}$ subisce una forza pari a:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

EFFETTO HALL

Consideriamo un conduttore a sezione rettangolare $b \times h$ percorso da una corrente $i = j\ \mathrm{d}S = nqv_d(bh)$ e immerso in un campo magnetico uniforme B perpendicolare alla corrente.

$$F_{LORENTZ} = qv_d B = qE_h = F_{ELETTROSTATICA}$$

$$\Delta V = E_h h = v_d B h = \frac{i}{nqb} B$$

TEOREMA DI EQUIVALENZA DI AMPÈRE TRA SPIRA E MAGNETE

Una spira percorsa da corrente e immersa in un campo magnetico si comporta come un dipolo magnetico elementare (ago magnetico) di momento $\vec{m} = iS\hat{n}$ perpendicolare al piano della spira e orientato con la regola della mano destra:

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

LEGGE DI AMPÈRE

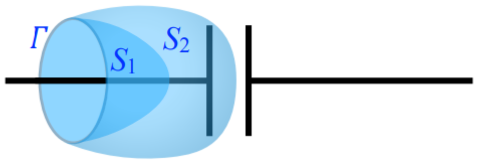
La legge di Ampère dice che la circuitazione del campo magnetico è proporzionale alla somma delle correnti concatenate:

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{CONC.} i_k$$

In forma locale:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{j}$$

Si può verificare però che tale legge vale solo in condizioni stazionarie ad esempio considerando due superfici:



S_1 che interseca il filo e S_2 che passa per l'intercapedine del condensatore e non interseca il filo, entrambe con bordo Γ.

Mentre in condizioni stazionarie la legge è soddisfatta, a regime il flusso attraverso S_1 risulta diverso da zero e nullo attraverso S_2.

Oltre al problema del condensatore la legge di Ampère presenta un altro problema formale:

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\vec{j} \;\rightarrow\; \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{B}\right) = \mu_0\vec{\nabla}\cdot\vec{j}$$

La divergenza di un rotore è sempre nulla qualunque sia il campo ma la divergenza della densità di corrente non è in generale nulla se non in regime stazionario.

LEGGE DI AMPÈRE MAXWELL

La legge di Ampère-Maxwell dice che il campo magnetico può essere generato da cariche in moto e da campi elettrici variabili nel tempo. Essa si propone di generalizzare la legge di Ampère anche in condizioni non stazionarie utilizzando l'equazione di continuità $\vec{\nabla}\cdot\vec{j}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ e la legge di Gauss in forma locale per determinare $\rho=\varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$. Sostituendo si ricava $\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=0$ e dunque che il vettore $\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ ha sempre divergenza nulla.

Tale vettore è la somma di due termini:

- densità di corrente di conduzione $\vec{j}$ (dovuta a cariche in moto)
- densità di corrente di spostamento $\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (dovuta a variazione di campo elettrico)

Da qui le espressioni della legge di Ampère-Maxwell:

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{CONC.} \left(i_{C_k}+i_{S_k}\right)$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$$

CORRENTI DI CONDUZIONE E CORRENTI DI SPOSTAMENTO

La corrente di conduzione è il flusso della densità di corrente. L'espressione si ricava a partire dalla densità di corrente di conduzione $\vec{j}_C = \vec{j}$:

$$i_C = \iint_S \vec{j}_C \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = \iint_S j \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = \Phi_S(\vec{j})$$

La corrente di spostamento è dovuta alla variazione del flusso del campo elettrico. L'espressione si ricava a partire dalla densità di corrente di spostamento $\vec{j}_S = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$:

$$i_S = \iint_S \vec{j}_S \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = \iint_S \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} \mathrm{d}S = \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{E})}{\mathrm{d}t}$$

LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ

La legge di Faraday-Neumann-Lenz dice che la variazione temporale del flusso di un campo magnetico "induce" una forza elettromotrice, la quale si oppone alla variazione di flusso che l'ha generata:

$$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mathcal{E}_{IND} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_S(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \oiint_S \vec{B} \cdot \hat{n} \, \mathrm{d}S$$

In forma locale:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

MUTUA INDUZIONE E AUTOINDUZIONE

Si parla di mutua induzione quando una variazione di corrente in un conduttore genera un campo magnetico variabile nel tempo il quale induce una corrente in un secondo conduttore e viceversa.

$$\Phi(\vec{B})_{1\to 2} = M i_1 \qquad \Phi(\vec{B})_{2\to 1} = M i_2$$

Dove M è detto coefficiente di mutua induzione e dipende solamente dalla geometria del conduttore.

Si parla di autoinduzione quando una variazione di corrente in un conduttore genera un campo magnetico variabile nel tempo.

$$\Phi(\vec{B}) = Li$$

Dove L è detto coefficiente di autoinduzione o induttanza e dipende solamente dalla geometria del conduttore.

INDUTTANZA E INDUTTORI

L'induttanza L è il rapporto tra il flusso del campo magnetico e la corrente. Nel caso di un solenoide cilindrico ideale:

$$L = \frac{\Phi_{solenoide}(\vec{B})}{i(t)} = \frac{N\Phi_{spira}(\vec{B})}{i(t)} = \frac{N \mu_0 \frac{N}{l} i(t) S}{i(t)} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S \quad S = \pi r^2$$

Induttori in serie:	Induttori in parallelo:
$L_{TOT} = \sum_1^N L_i$ stessa corrente	$\frac{1}{L_{TOT}} = \sum_1^N \frac{1}{L_i}$ stessa d.d.p.

Serie:

$$\begin{cases} V_A - V_M = -L_1 \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \\ V_M - V_B = -L_1 \dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases} \rightarrow \Delta V = V_A - V_B = (V_A - V_M) + (V_M - V_B) = -(L_1 + L_2)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = L_{TOT}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

Parallelo:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{V_A - V_B}{L_1} \\ \dfrac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{V_A - V_B}{L_2} \end{cases} \rightarrow \frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{V_A - V_B}{L_1} - \frac{V_A - V_B}{L_2} = -(V_A - V_B)\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) = -\frac{\Delta V}{L_{TOT}}$$

Energia magnetica di un induttore:

$$U_B = \frac{1}{2}Li^2 \quad \equiv \quad U_B = \iiint_{spazio} \boxed{\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}} \mathrm{d}\tau$$

u_B : densità di energia magnetica

CIRCUITI RL

Si tratta di circuiti ideali formati da una resistenza, un'induttanza e un generatore di forza elettromotrice

Carica induttore:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_{IND} = \mathcal{E} - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri \rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{\mathcal{E}}{R}\right) \rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\left(i - \frac{\mathcal{E}}{R}\right)} = -\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{\mathrm{d}i}{\left(i - \frac{\mathcal{E}}{R}\right)} = \int_0^t -\frac{R}{L}\mathrm{d}t \rightarrow \ln\left(\frac{i(t) - \frac{\mathcal{E}}{R}}{i(0) - \frac{\mathcal{E}}{R}}\right) = -\frac{R}{L}t \rightarrow \left(i(t) - \frac{\mathcal{E}}{R}\right) = \left(i(0) - \frac{\mathcal{E}}{R}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

Imponendo $i(0) = 0$:

- $i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

In regime stazionario:

- $\mathcal{E}_{IND} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{E}e^{-\frac{R}{L}t} \longrightarrow 0$
- L'induttore si comporta come un filo a resistenza nulla
- Nell'induttore vi è immagazzinata un'energia magnetica $U_B = \frac{1}{2}Li^2$

Scarica induttore:

$$\mathcal{E}_{IND} = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = Ri \rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}i \rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{i} = -\frac{R}{L}\mathrm{d}t$$

$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{\mathrm{d}i}{i} = \int_0^t -\frac{R}{L}\mathrm{d}t \rightarrow \ln\left(\frac{i(t)}{i(0)}\right) = -\frac{R}{L}t \rightarrow i(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t}$$

La corrente iniziale si ricava dall'energia magnetica raggiunta in regime stazionario $U_B = \frac{1}{2}Li(0)^2 \rightarrow i(0) = \sqrt{\frac{2U_B}{L}}$:

$$i(t) = \sqrt{\frac{2U_B}{L}}e^{-\frac{R}{L}t}$$

EQUAZIONI DI MAXWELL

Forma integrale:

Campo elettrico	Campo magnetico
Legge di Gauss	Legge di Gauss
$\Phi_S(\vec{E}) = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = \dfrac{Q_{INT}}{\varepsilon_0}$	$\Phi_S(\vec{B}) = \oint\!\!\!\oint_S \vec{B} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = 0$
Conservatività	Legge di Ampère
$\oint_\Gamma \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \ \ \forall\Gamma$	$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum_{CONC} i_k$

Forma differenziale:

Campo elettrico	Campo magnetico
Legge di Gauss	Legge di Gauss
$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
Conservatività	Legge di Ampère
$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

OPERATORE LAPLACIANO

Nel vuoto si ha assenza di cariche ($\rho = 0$) e di corrente ($j = 0$). Utilizzando le leggi di F.N.L. e Ampère-Maxwell:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = \vec{\nabla} \wedge \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \end{cases} \rightarrow \quad \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = \vec{\nabla} \wedge \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \end{cases} \rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \rightarrow \vec{\nabla}^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

EQUAZIONE DI D'ALEMBERT

Una funzione $\vec{f}(\vec{r}, t)$ che rispetta l'equazione

$$\vec{\nabla}^2 \vec{f} = \frac{1}{{v_P}^2}\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2}$$

rappresenta un'onda. v_P è la velocità di propagazione dell'onda.

ONDE

Sia $\hat{n}$ il vettore direzione di propagazione dell'onda e v_P la sua velocità di propagazione. L'equazione di un'onda è:

$$f(\vec{r}, t) = f(\vec{r} \cdot \hat{n} \pm v_P t)$$

A seconda del segno dell'espressione, l'onda viene detta:

- Onda progressiva se il segno è $-$
- Onda regressiva se il segno è $+$

Dimostriamo che l'equazione rispetti l'equazione di D'Alembert in una dimensione (si estende poi nello spazio):

$$w = x \pm vt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial w} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{\partial w^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t} = \pm v \frac{\partial f}{\partial w} \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\frac{\partial w^2}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{f}}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} = \frac{1}{v^2} v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial w^2} \quad \blacksquare$$

ONDE SFERICHE

L'ampiezza diminuisce con la distanza.

$$f(\vec{r}, t) = \frac{A}{r} f(\vec{r} \cdot \hat{n} \pm v_P t)$$

ONDE PIANE

L'ampiezza rimane costante.

$$f(\vec{r}, t) = A f(\vec{r} \cdot \hat{n} \pm v_P t)$$

APPROSSIMAZIONE DI ONDA PIANA

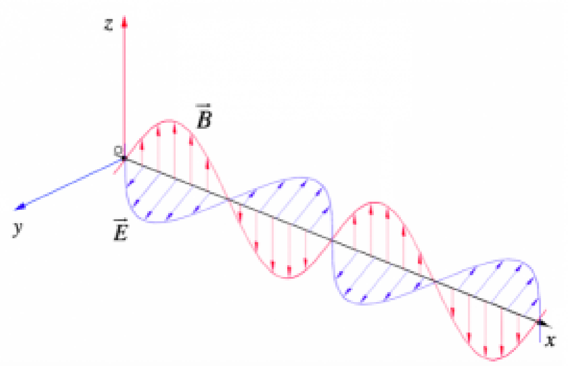
$$w = \vec{r} \cdot \hat{n} \pm vt = x\hat{n}_x + y\hat{n}_y + z\hat{n}_z \pm vt$$

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{dw}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{d}{dw}\hat{n}_x \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{d}{dw}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{d}{dw}\hat{n}_y \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{d}{dw}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{d}{dw}\hat{n}_z \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla} = \hat{n}\frac{d}{dw} \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{d\vec{E}}{dw}\frac{\partial w}{\partial t} = \pm v\frac{d\vec{E}}{dw} \quad ; \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{d\vec{B}}{dw}\frac{\partial w}{\partial t} = \pm v\frac{d\vec{B}}{dw}\end{gathered}}$$

$$\begin{cases}\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \left(\hat{n}\dfrac{d}{dw}\right) \wedge \vec{E} = \dfrac{d}{dw}(\hat{n} \wedge \vec{E}) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \dfrac{d\vec{B}}{dw}(\pm v) = \dfrac{d}{dw}(\pm v\vec{B})\end{cases} \rightarrow \hat{n} \wedge \vec{E} = \pm v\vec{B} \rightarrow \vec{B} = \frac{\hat{n} \wedge \vec{E}}{v} \rightarrow \qquad \vec{B} = \frac{1}{v^2}\vec{v} \wedge \vec{E}$$

$$\begin{cases}\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \left(\hat{n}\dfrac{d}{dw}\right) \wedge \vec{B} = \dfrac{d}{dw}(\hat{n} \wedge \vec{B}) \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{d\vec{E}}{dw}(\pm v) = \dfrac{d}{dw}\left(\pm\dfrac{\vec{E}}{v}\right)\end{cases} \rightarrow \hat{n} \wedge \vec{B} = \pm\frac{\vec{E}}{v} \rightarrow \qquad \vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Cioè il vettore velocità, il vettore campo magnetico e il vettore campo elettrico saranno sempre ortogonali tra loro.



TEOREMA DI POYNTING

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \quad ; \quad u_B = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \quad ; \quad u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}$$

Il teorema di Poynting esprime il principio di conservazione dell'energia del campo elettromagnetico nel caso non stazionario. In particolare la variazione di energia elettromagnetica si oppone alla potenza dissipata sulle cariche per unità di volume più la divergenza del vettore di Poynting:

$$\vec{E} \cdot \vec{j} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\frac{\partial u}{\partial t}$$

Dove $\vec{S} = \vec{E} \wedge \vec{H} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$

Si verifica che tale relazione è vera:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}\right) = \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathrm{B}} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathrm{E}} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial B^2}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\vec{\mathrm{E}} \cdot \left[\mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{\mu_0} + \varepsilon_0 E^2\right) - \vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{j}$
- $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}\right] = \varepsilon_0 E \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{B}{\mu_0} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{\mu_0} + \varepsilon_0 E^2\right)$

$$\vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{j} + \left[-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{\mu_0} + \varepsilon_0 E^2\right) - \vec{\mathrm{E}} \cdot \vec{j}\right] = -\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{\mu_0} + \varepsilon_0 E^2\right)\right] \quad \blacksquare$$