TD 4 — Séries temporelles : autocorrélation & corrections (Cours)

Pierre Beaucoral

Introduction

Ce document reprend les **slides du TD 4** sous forme **cours**, avec des explications supplémentaires pour guider la lecture et la pratique sous **EViews**. L'objectif est de comprendre **pourquoi** on applique ces tests, comment **les mettre en œuvre**, et **comment interpréter** les résultats.

> **i** Note
>
> **À retenir.** Les tests présentés concernent les hypothèses sur les **erreurs** du modèle MCO. Ils ne modifient pas la structure du modèle mais la **validation des inférences** que l'on effectue (significativité, intervalles de confiance).

Rappel : hypothèses MCO et propriétés

Les hypothèses des estimations MCO

- L'estimateur des **moindres carrés ordinaires (MCO)** est le **BLUE** (*Best Linear Unbiased Estimator*) **si** certaines hypothèses sont respectées.
- Ces hypothèses portent sur le terme d'erreur ε :
    1. **Normalité** : $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$
    2. **Espérance nulle** : $\mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$
    3. **Homoscédasticité** : $\text{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ (constante)
    4. **Indépendance sérielle** : $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \ \forall i \neq j$
    5. **Orthogonalité** : $\text{Cov}(x_i, \varepsilon_i) = 0$ (exogénéité)

Caution

Sensibilité. L'estimateur MCO est sensible aux **observations extrêmes** : soyez vigilants aux **valeurs aberrantes** et aux **leviers**.

Propriétés des estimateurs (rappels sémantiques)

- **Petit échantillon**
  - *Sans biais* : $\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \beta$
  - *Variance minimale* : $\text{Var}(\hat{\beta}) \leq \text{Var}(\tilde{\beta})$
  - *Efficace* : sans biais **et** à variance minimale
- **Grand échantillon**
  - *Convergent* : $\text{Var}(\hat{\beta}) \to 0$ lorsque $N \to \infty$

Hypothèses, problèmes et corrections

Propriété / Hypothèse	Problème si non respectée	Test(s) associé(s)	Méthode(s) de correction
Absence de biais (orthogonalité)	Biais ; non-convergence	—	**Instrumentation** (variables instrumentales)
Efficience (sphéricité des erreurs)	Estimation non efficace (mais pas de biais)	Homoscédasticité : Breusch–Pagan, White ;Indépendance sérielle : Durbin–Watson, Breusch–Godfrey	Erreurs standards **White** (robustes) ; **HAC** (Newey–West)

Important

Focus du TD. Nous traitons surtout les hypothèses d'**efficience** (3 et 4) : homoscédasticité et indépendance sérielle.

Les tests d'hypothèses : principe

- **Objectif** : vérifier que le **modèle est économétriquement correct** au sens des hypothèses MCO (afin d'interpréter correctement t, F, IC…).
- **Démarche** : on applique des **tests sur les résidus** et on adapte les **erreurs standards** (ou le modèle) si nécessaire.

Hypothèse	Test(s) associé(s)	Traité ?
H1 : Normalité	Bera–Jarque	
H3 : Homoscédasticité	Goldfeld–Quandt	—
	Breusch–Pagan	
	White	
H4 : Indépendance sérielle	Durbin–Watson	
	Breusch–Godfrey	

Normalité des erreurs : test de Bera–Jarque

Intuition et indicateurs

- La normalité facilite certains tests de **sphéricité**.
- **Bera–Jarque (BJ)** combine :
  - **Skewness ( )** : asymétrie (= 0 sous normalité)
  - **Kurtosis ( )** : aplatissement (= 3 sous normalité)

Statistique, hypothèses, décision

- **Statistique** : $BJ = N\left[\frac{\eta^2}{6} + \frac{(\upsilon-3)^2}{24}\right]$
  Sous H_0, BJ suit approximativement une χ^2.
- **Hypothèses** :
  - H_0 : normalité $BJ \approx 0$
  - H_1 : non-normalité $BJ \neq 0$
- **Règle** (5 %) : si $BJ > \chi^2_{2;0,95} \approx 6$ **rejeter** H_0.

Mise en œuvre dans EViews

1. Ouvrir la **fenêtre de l'équation**.
2. **View** $\rightarrow$ **Residual Diagnostic** $\rightarrow$ **Histogram – Normality Test**.
3. Lire **BJ**, *p-value*, skewness et kurtosis ; conclure.

> Tip
>
> **Lecture** : une *p-value* faible (5 %) $\rightarrow$ rejet de la normalité. On peut poursuivre les tests d'hétéroscédasticité / autocorrélation même si la normalité est discutée.

Homoscédasticité (variance constante)

- L'homoscédasticité : $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ **constante**.
- L'hétéroscédasticité survient souvent quand la **dispersion des erreurs** croît avec le **niveau d'une variable** explicative (ou de la variable expliquée).

> ! Important
>
> Si l'hypothèse est violée, les MCO restent **sans biais**, mais ne sont plus **efficients** $\rightarrow$ erreurs standards faussées (t, F, IC non fiables).

Test de Breusch–Pagan (BP)

- **Idée** : la **variance** des erreurs dépend des **variables explicatives**.
- **Modèle** estimé : $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_i + \varepsilon_i$ et $\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i - \hat{\beta}_2 Z_i$.
- **Hypothèses** :
  - H_0 : $\mathrm{Var}(\hat{\varepsilon}_i) = \sigma^2$ (indépendante de X, Z)
  - H_1 : $\mathrm{Var}(\hat{\varepsilon}_i) = \theta_0 + \theta_1 X_i + \theta_2 Z_i + \omega_i$
- **Procédure** :
  1. Estimer le modèle MCO ; calculer $\hat{\varepsilon}_i^2$.
  2. Régression de test : $\hat{\varepsilon}_i^2 = \theta_0 + \theta_1 X_i + \theta_2 Z_i + \omega_i$.
  3. $BP = N \times R^2$ de l'équation de test $\rightarrow \chi^2(K-1)$;
     si $BP \geq \chi^2_t h$, **rejeter** H_0.

ℹ Note

Intuition : sous homoscédasticité, **R² → 0** dans l'équation auxiliaire : X et Z n'expliquent pas la **variance** des résidus.

Test de White

- Même logique que BP mais **plus flexible** (termes au carré et produits croisés).
- **Hypothèses** :
  - $H_0 : \text{Var}(\hat{\varepsilon}_i) = \sigma^2$
  - $H_1 : \text{Var}(\hat{\varepsilon}_i) = \theta_0 + \theta_1 X_i + \theta_2 Z_i + \theta_3 X_i^2 + \theta_4 X_i Z_i + \theta_5 Z_i^2 + \omega_i$
- **Statistiques** :
  - $W = N \times R^2 \to \chi^2(K-1)$ (K = nb de paramètres de l'équation auxiliaire)
  - Variante petits échantillons (F-test) : $W = \left(\frac{SCR_r - SCR_{nr}}{SCR_r}\right) \frac{N-k}{k-1} \to F(k-1, N-k)$

Mise en œuvre dans EViews

- **View → Residual Diagnostic → Heteroskedasticity Tests**
  - **Breusch–Pagan–Godfrey** (BP)
  - **White**

Indépendance sérielle (autocorrélation)

- Absence d'autocorrélation : **Cov(,) = 0** pour **t s**.
- Problème classique en **séries temporelles** ; fausse les erreurs standards.

Test de Durbin–Watson (DW)

- Conditions : constante incluse ; $n > 15$; pas de variable dépendante retardée ; pas de données manquantes ; processus AR(1) uniquement.
- **Statistique** : $DW = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{\varepsilon}_t^2} \approx 2(1 - \hat{\rho})$
- **Lecture** via bornes **D__L** et **D__U** (zones : rejet H , incertitude, acceptation).

Caution

Limites DW : **zone d'incertitude**, conditions restrictives → préférer souvent **Breusch–Godfrey** quand les conditions DW ne sont pas réunies.

Test de Breusch–Godfrey (BG)

- Plus **flexible** (AR(p) avec $p \geq 1$).
- Équation de test (ex. AR(2)) : $\hat{\varepsilon}_t = \rho 1 \hat{\varepsilon} t - 1 + \rho 2 \hat{\varepsilon} t - 2 + \theta_1 X_t + \theta_2 Z_t + \omega_t$
- **Statistique** : $BG = T \times R^2 \to \chi^2(p)$; rejeter H_0 si $BG \geq \chi^2_t h$.
- **EViews** : **View** → **Residual Diagnostic** → **Serial correlation LM test** (choisir les lags).

Corriger pour des inférences valides

- Si **hétéroscédasticité** : erreurs standards **White** (robustes).
- Si **autocorrélation** (et/ou hétéroscédasticité) : erreurs standards **HAC** (Newey–West).
- Si l'autocorrélation est structurelle : envisager une **modélisation explicite** (par ex. **Cochrane–Orcutt**, AR(1) sur l'erreur) plutôt que de corriger seulement les erreurs standards.

Tip

Effet des corrections. Les **coefficients** MCO restent en général inchangés ; ce sont les **écarts-types** (et donc t, p-values, IC) qui sont ajustés.

Questions – Réponses (TD4)

Question :

Vous devez estimer les équations où la dépense qui porte sur un secteur dépend d'une constante, du revenu et du prix réel dans le secteur en question et tester la présence d'une autocorrélation à l'ordre un dans le terme d'erreurs à l'aide du test de Durbin et Watson. Qu'en concluez-vous ?

Afficher la réponse

Le test de Durbin-Watson est utile pour détecter une autocorrélation d'ordre 1.
Hypothèses : **H** pas d'autocorrélation d'ordre 1 ; **H** autocorrélation présente.

Résultats : **Habillement** DW = 1,679 (entre DU = 1,55 et 2) → pas d'autocorrélation.
Téléphone DW = 0,901 (< DL = 1,21) → autocorrélation présente.
Transport aérien DW = 1,462 (entre DL et DU) → **zone d'incertitude**.

Question :

Testez la présence d'une autocorrélation à l'ordre un dans le terme d'erreurs par le test de Breusch-Godfrey. Qu'en concluez-vous ?

Afficher la réponse

Hypothèses : **H** pas d'autocorrélation jusqu'au nombre de retards choisi ; **H** autocorrélation.
Statistique : BG = T × R^2 → ^{2}(t).

Résultats : **Habillement** BG = 0,018 < 3,841 → pas d'autocorrélation.
Téléphone BG = 0,281 > 3,841 → autocorrélation.
Transport aérien BG = 0,051 < 3,841 → pas d'autocorrélation.

Question :

Corrigez l'autocorrélation éventuelle par la procédure automatique de Cochrane-Orcutt. Qu'en concluez-vous ?

Afficher la réponse

Correction via **Cochrane–Orcutt** : inclure un terme **AR(1)** dans l'équation (EViews : option AR(1)).
Conclusion : pas de correction particulière à retenir pour les **dépenses téléphoniques** après application.

Question :

Faites un test des facteurs communs (COMFAC) pour les dépenses en téléphone et dégagez la meilleure spécification de l'équation explicative pour ces dépenses.

Afficher la réponse

Aucun résultat détaillé n'est fourni dans la correction pour cette question (COMFAC).