TD 4 — Séries temporelles : autocorrélation & corrections

Pierre Beaucoral

Rappel de cours

Les hypothèses des estimations MCO

- L'estimateur des Moindres Carrés Ordinaires est le meilleur estimateur linéaire sous certaines hypothèses

> **Note**
>
> - On dit qu'il est `BLUE` (*Best Linear Unbiased Estimator*)
> - Néanmoins il est sensible aux observations extrêmes

- Ces hypothèses concernent les termes d'erreurs (ε):
  - Normalité des résidus: $\varepsilon \rightsquigarrow N(0, \sigma_\varepsilon^2)$
  - Espérance nulle: $E(\varepsilon_i) = 0$
  - Homoscédasticité: $V(\varepsilon_i) = \sigma^2 = \text{constante}$
  - Indépendance sérielle: $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad \forall i \neq j$

    (Absence de corrélation entre les résidus)
  - Orthogonalité des résidus (ou exogénéité): $Cov(x_i, \varepsilon_i) = 0$

Précisions sémantiques

- On distingue les propriétés sur petits échantillons et grands échantillons. Les propriétés sur petits échantillons:
  - L'estimateur est sans biais si $E(\hat{\beta}) = \beta$.
  - L'estimateur est à variance minimale si $Var(\hat{\beta}) \leq Var(\tilde{\beta})$

    avec $\tilde{\beta}$ un autre estimateur sans biais de β.
  - L'estimateur est efficace s'il remplit ces deux propriétés
- Sur grands échantillons:
  - L'estimateur est convergent si la variance de β tend vers 0 quand N tend vers l'infini:

    $\lim_{N\to\infty} Var(\beta) = 0$

Hypothèse et propriétés des estimateurs

Propriété / Hypothèse	Problème si non respectée	Test(s) associé(s)	Méthode(s) de correction
Absence de biais (orthogonalité)	Biais dans les estimations ; non-convergence	—	**Instrumentation** (variables instrumentales)
Efficience (sphéricité des erreurs)	Estimation non efficace (mais pas de biais)	- Homoscédasticité : tests de Breusch–Pagan, White- Absence d'autocorrélation sérielle : tests de Durbin–Watson, Breusch–Godfrey	- Correction de White (robust std. errors)- HAC (Newey–West)

- Ce TD se concentre uniquement sur le problème d'éfficience

Les tests d'hypothèses

- **Objectif :**
  - Voir si le modèle est **économétriquement** correct.
- **Comment ?**
  - En vérifiant que les erreurs respectent les hypothèses des MCO et que l'estimateur est efficace (**BLUE**).
  - En particulier, les tests se concentrent sur cinq hypothèses :
    1. **Normalité des résidus** : $\varepsilon \ N(0, \sigma_\varepsilon^2)$
    2. **Espérance nulle** : $E(\varepsilon_i) = 0$
    3. **Homoscédasticité** : $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ (constante)
    4. **Indépendance sérielle** : $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ pour tout $i \neq j$
    5. **Orthogonalité des résidus** : $Cov(x_i, \varepsilon_i) = 0$
- **Remarque :**
  - H2 est respectée par construction de l'estimateur MCO.
  - H5 fait l'objet d'un traitement particulier (cf. Semestre 2).

Les tests d'hypothèses

Hypothèse	Test(s) associé(s)	Traité ?
H1 : Normalité	Test de Bera–Jarque	
H3 : Homoscédasticité	Test de Goldfeld–Quandt	
	Test de Breusch–Pagan	
	Test de White	
H4 : Indépendance sérielle	Test de Durbin–Watson	
	Test de Breusch–Godfrey	

La normalité des erreurs

Le test de Bera–Jarque

- La normalité des écarts aléatoires est utile pour mettre en œuvre les **tests de sphéricité**.

- Le test utilisé est celui de **Bera–Jarque**.
- Ce test repose sur deux indicateurs :
  - **Skewness** η : mesure l'**asymétrie** de la distribution (η doit être $= 0$).
  - **Kurtosis** υ : représente l'aplatissement de la distribution (υ doit être $= 3$).

Le test de Bera–Jarque

- La statistique BJ calculée est :

  $BJ = N\ [\ \ ^2 / 6 + (\ \ - 3)^2 / 24\ ] \rightarrow$ suit une loi $\ ^2(2)$

- Hypothèses testées :
  - **H :** $BJ = 0 \rightarrow$ la distribution suit une loi normale
  - **H :** $BJ\ \ \ 0 \rightarrow$ la distribution ne suit pas une loi normale

- **Règle de décision :**
  Si $BJ >\ \ ^2(2)$ th (6 au seuil de 5 %),
  on rejette H .

Le test de Bera–Jarque (dans EViews)

- Pour administrer le test via l'interface graphique :
  1. Ouvrir la fenêtre de l'équation.
  2. Aller dans **View** → **Residual Diagnostic**.
  3. Choisir **Histogram – Normality Test** pour lancer le test de BJ.
  4. Lire et interpréter les résultats.

> Tip
>
> **Remarque :** la procédure est identique pour les autres tests de sphéricité, à l'exception de l'étape 3.

Homoscédasticité

- L'homoscédasticité suppose que la variance est constante : $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$.
  L'hétéroscédasticité apparaît généralement lorsque la taille des erreurs est proportionnelle aux valeurs prises par une variable explicative.
- Si cette hypothèse n'est pas respectée :
  - l'estimateur MCO reste **sans biais**,
  - mais il **n'est plus à variance minimale** (moins efficace).
- Tests pour vérifier cette hypothèse :
  - **Goldfeld–Quandt** (non présenté)
  - **Breusch–Pagan**
  - **White**

Test de Breusch–Pagan

- **Logique :** vérifier si la variance des résidus dépend des variables explicatives.
- Modèle estimé :
  - $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 Z_i + \varepsilon_i$
  - $\varepsilon_i = Y_i – \beta_0 – \beta_1 X_i – \beta_2 Z_i$
- **Hypothèses :**
  - $H_0 : Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ (la variance ne dépend pas des variables explicatives)
  - $H_1 : Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \theta_0 + \theta_1 X_i + \theta_2 Z_i + \omega_i$
    ($\theta_1 et \theta_2 \neq 0 \rightarrow$ variance liée aux variables explicatives)

> Tip
>
> Remarque : la variance des erreurs est approximée par les résidus au carré : $Var(\varepsilon_i) \approx \varepsilon_i^2$.

Test de Breusch–Pagan : procédure

1. Estimer le modèle par MCO.
2. Calculer les résidus au carré : ε_i^2.
3. Régression de test :

   $\varepsilon_i^2 = \theta_0 + \theta_1 X_i + \theta_2 Z_i + \omega_i$.
4. Examiner le pouvoir explicatif via le R² de cette équation :
   - Statistique $BP = N \times R^2 \rightarrow$ suit une loi $\chi^2(K{-}1)$, K = nombre de paramètres.
   - Règle : si $BP \geq \chi_t^2 h$ **rejet de** H_0.

> **Note**
>
> Intuition : sous homoscédasticité, R² → 0, donc X et Z n'expliquent pas la variance des résidus.

Test de White

- Même logique et démarche que Breusch–Pagan, mais avec une représentation **plus flexible** de l'hétéroscédasticité.
- **Hypothèses :**
  - $H_0 : Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$
  - $H_1 : Var(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 = \theta_0 + \theta_1 X_i + \theta_2 Z_i + \theta_3 X_i^2 + \theta_4 X_i Z_i + \theta_5 Z_i^2 + \omega_i$

    (les coefficients sont conjointement 0)
- Équation de test : $\varepsilon_i^2 = \theta_0 + \theta_1 X_i + \theta_2 Z_i + \theta_3 X_i^2 + \theta_4 X_i Z_i + \theta_5 Z_i^2 + \omega_i$.

Statistiques du test de White

- Statistique principale :
  - $W = N \times R^2 \to loi\chi^2(K–1)$, K = nombre de paramètres (ici 6).
- Version petits échantillons (F-test) :
  - $W = ((SCR_r–SCR_nr)/SCR_r) \times (N–k)/(k–1) \to F(k–1, N–k)$
    - SCR_r: somme des carrés des résidus en régressant ˆ ² sur constante seule.
    - SCR_nr: idem mais sur l'équation de test.
    - k : nombre de paramètres sous H (ici 3).
- **Règle de décision :** si $W \geq \chi_t^2 h \Rightarrow rejetdeH_0$.

Mise en œuvre sous EViews

- Les tests de Breusch–Pagan et de White sont directement programmés :
  - **View → Residual Diagnostic → Heteroskedasticity Tests**
    - **Breusch–Pagan–Godfrey** : test de Breusch–Pagan
    - **White** : test de White

Indépendance sérielle

- L'indépendance sérielle est nécessaire pour garantir que l'estimateur des MCO soit **efficace** (variance minimale).
- Indépendance sérielle = **absence d'autocorrélation des erreurs**:

  $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0, \forall t \neq s$
- Ce problème concerne surtout les **séries temporelles**.
- Tests usuels :
  - **Durbin–Watson**
  - **Breusch–Godfrey**

Test de Durbin–Watson

- Premier test développé, avec des conditions restrictives :
  - Il faut une **constante** dans le modèle.
  - Le nombre d'observations doit être **supérieur à 15**.
  - La variable expliquée **retardée** ne doit pas être introduite dans le modèle.
  - Pas de données manquantes.
  - On ne peut tester que l'autocorrélation issue d'un processus AR(1) :
    $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$.
- Ce test a servi de base à de nombreux autres tests d'autocorrélation.

Hypothèses du test

- $H_0 : Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + \varepsilon_t$
- $H_1 : Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + \varepsilon_t$
  avec $\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$.
- Sous H , l'écart aléatoire est **corrélé dans le temps**.
- Statistique de Durbin–Watson :

  $DW = \Sigma_{t=2}^{T}(\varepsilon_t – \varepsilon_{t-1})^2 / \Sigma_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2 \approx 2(1–\rho)$
- Cette statistique est directement fournie par EViews dans le tableau de régression.

Interprétation

- La statistique DW ne suit pas une loi standard : $0 \leq DW \leq 4$.
- Les auteurs ont tabulé des valeurs critiques : $D_L et D_U (D_L < D_U)$.

Lecture :

Zone	Interprétation
[0, D_L]	Rejet H : autocorrélation positive
(D_L, D_U)	Zone d'incertitude

Zone	Interprétation
[D_U, 2]	Acceptation H
[2, 4 – D_U]	Acceptation H
(4 – D_U, 4 – D_L)	Zone d'incertitude
[4 – D_L, 4]	Rejet H : autocorrélation négative

- Test imparfait en raison de la **zone de doute** et des conditions restrictives.
- Dans la table DW, les colonnes dépendent du nombre de paramètres du modèle hors constante.

Test de Breusch–Godfrey

- Breusch et Godfrey ont développé un test de maximum de vraisemblance plus **flexible** :
  - permet de tester des processus autorégressifs d'ordre   1.
- Exemple d'un processus d'ordre 2 :
  - $H_0 : Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + \varepsilon_t$
  - $H_1 : Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + \varepsilon_t$
    avec $\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + v_t$.
- Équation de test : $\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_1 X_t + \theta_2 Z_t + \omega_t$.
- Statistique : $BG = T \times R^2 \to$ suit une loi $\chi^2(t)$, où t est l'ordre du processus autorégressif (ici 2).
- **Règle de décision :**
  Rejeter H_0 si $BG \geq \chi^2_t h$.
- Procédure sous EViews :
  - **View → Residual Diagnostic → Serial correlation LM test**.
  - Choisir le nombre de retards (lags) à tester.

Correction des écarts aléatoires

- Les tests de **sphéricité** permettent de vérifier si les résidus sont :
  - **hétéroscédastiques**,
  - et/ou **autocorrélés dans le temps**.
- Dans les deux cas, il faut appliquer une **correction** pour améliorer l'**efficience** de l'estimateur.
  (Il existe de nombreuses méthodes, selon le type de problème rencontré.)
- **Sous EViews** (cf. Araujo et al., 2007) :
  - Menu : **Estimate → Options → Coefficient covariance matrix**.
  - En cas d'**hétéroscédasticité** :
    - choisir **White**.
  - En cas d'**autocorrélation sérielle** et/ou d'hétéroscédasticité :
    - choisir **HAC** (Newey–West).

Questions – Réponses (TD4)

Question :

Vous devez estimer les équations où la dépense qui porte sur un secteur dépend d'une constante, du revenu et du prix réel dans le secteur en question et tester la présence d'une autocorrélation à l'ordre un dans le terme d'erreurs à l'aide du test de Durbin et Watson. Qu'en concluez-vous ?

Afficher la réponse

Le test de Durbin-Watson est particulièrement utile pour détecter une autocorrélation d'ordre 1.
Hypothèses : - **H :** pas d'autocorrélation d'ordre 1 dans les résidus. - **H :** autocorrélation d'ordre 1 présente.

Résultats : - **Dépenses habillement :** DW = 1,679, compris entre DU = 1,55 et 2 → pas d'autocorrélation d'ordre 1. - **Téléphone :** DW = 0,901, inférieur à DL = 1,21 → présence d'autocorrélation d'ordre 1. - **Transport aérien :** DW = 1,462, entre DL et DU → zone d'incertitude, conclusion indéterminée.

Question :

Testez la présence d'une autocorrélation à l'ordre un dans le terme d'erreurs par le test de Breusch-Godfrey. Qu'en concluez-vous ?

Afficher la réponse

Hypothèses : - **H :** pas d'autocorrélation des erreurs jusqu'au nombre de retards spécifié. - **H :** autocorrélation présente.

Statistique : BG = T × R^2 → loi ^{2}(t) avec t = ordre du processus (ici 1).

Résultats : - **Habillement :** BG = 0,018 < 3,841 → on ne rejette pas H → pas d'autocorrélation. - **Téléphone :** BG = 0,281 > 3,841 → on rejette H → autocorrélation présente. - **Transport aérien :** BG = 0,051 < 3,841 → pas d'autocorrélation.

Question :

Corrigez l'autocorrélation éventuelle par la procédure automatique de Cochrane-Orcutt. Qu'en concluez-vous ?

Afficher la réponse

Pour corriger l'autocorrélation des erreurs, on applique la procédure **Cochrane–Orcutt** : inclure un terme AR(1) dans l'équation (sur EViews, ajouter AR(1) dans l'équation).

Conclusion : il n'y a pas de correction particulière à faire pour les dépenses téléphoniques après l'application de cette procédure.

Question :

Faites un test des facteurs communs (COMFAC) pour les dépenses en téléphone et dégagez la meilleure spécification de l'équation explicative pour ces dépenses.

Afficher la réponse

Aucun test spécifique n'a été effectué pour cette question (pas de résultat fourni dans la correction).