TD 1 — Modèle de Poisson (R)

Année universitaire 2025–2026 ▪ Parcours Économie de la santé & Développement durable

Pierre Beaucoral

Contexte: On étudie d'anciennes données reliant **tabagisme** et **décès par cancer du poumon**. Variables : `age` (classes), `smoking status` (4 classes), `population` (centaines de milliers), `deaths` (décès annuels).

Préparation

Objectifs de ce TD

- Importer et préparer un tableau **comptages + exposition** (population à risque).
- Ajuster un **GLM Poisson** avec *offset* (log-exposition).
- Évaluer l'ajustement : **déviance** (vs modèle saturé) & **Pearson**.
- Comparer des modèles via **tests de rapport de vraisemblance (LR)**.
- Interpréter en **ratios de taux d'incidence (IRR)** et produire des **comptes attendus**.

Packages

Import et manipulation des données

Importer les données `smoking_dat.xlsx`

Dans l'énoncé, les données à importer sont `smoking_dat.xlsx` et les variables `age`, `smoking status`, `population`, `deaths`.

> **Note**
>
> Dictionnaire des variables :
> - age: en classes (40-44, 45-49, 50-54, 55-59, 60-64, 65-69, 70-74, 75-79, 80+).

- smoking status: 4 classes (ne fume pas / fume le cigare ou la pipe / fume la cigarette et le cigare ou la pipe ; fume seulement la cigarette)
- population: en centaine de milliers de personnes
- deaths: comptage des décès par cancer du poumon en un an.

```
Rows: 36
Columns: 4
$ age            <chr> "40-44", "45-59", "50-54", "55-59", "60-64", "65-69", "~
$ smoking_status <chr> "no", "no", "no", "no", "no", "no", "no", "no", "no", "~
$ population     <dbl> 656, 359, 249, 632, 1067, 897, 668, 361, 274, 145, 104,~
$ deaths         <dbl> 18, 22, 19, 55, 117, 170, 179, 120, 120, 2, 4, 3, 38, 1~
```

Coder les deux variables enregistrées en texte avec des chiffres

En Stata on ferait `encode` + `i.variable`.

En R, il suffit de déclarer les variables comme `factor`.

```
[1] "40-44" "45-59" "50-54" "55-59" "60-64" "65-69" "70-74" "75-79" "80+"
```

```
[1] "cigarPipeOnly"  "cigarretteOnly" "cigarrettePlus" "no"
```

> **Note**
>
> **Rappel** : Les facteurs indiquent à R qu'il s'agit de variables qualitatives. Chaque modalité sera transformée en **variable indicatrice** (dummy) dans la régression.

Unité d'exposition

L'énoncé précise que `population` est en **centaines de milliers**. Pour une interprétation plus intuitive, on peut ramener l'exposition à l'unité **personne** (facultatif) :

```
    Min.   1st Qu.    Median      Mean   3rd Qu.      Max.
 9800000  36925000  85850000 155894444 230550000 605200000
```

Estimations

Appliquer un premier modèle de régression log-linéaire

Modèle Poisson **log-linéaire** avec effets de `smoking_status` et `age`, et *offset* `log(exposure)` : c'est l'équivalent de Stata `poisson deaths i.smokecod i.agecod, exposure(pop)`.

> Tip
>
> **Pourquoi un modèle de Poisson ?**
> Les données sont des **comptages** (nombre de décès).
> Le modèle de Poisson relie l'**espérance** de ces comptages à des variables explicatives par une fonction de lien log :
>
> $$\log(\mathbb{E}[Y]) = X\beta$$
>
> Cette structure garantit que la prédiction est **positive** et que la variance est proportionnelle à la moyenne (hypothèse de Poisson).

Nous voulons expliquer le nombre de décès par l'âge et le statut tabagique, en tenant compte de l'exposition.

```
Call:
glm(formula = deaths ~ smoking_status + age + offset(log(exposure)),
    family = poisson(link = "log"), data = df)

Coefficients:
                             Estimate Std. Error  z value Pr(>|z|)
(Intercept)                -15.14514    0.06783 -223.293  < 2e-16 ***
smoking_statuscigarretteOnly   0.36915    0.03791    9.737  < 2e-16 ***
smoking_statuscigarrettePlus   0.17015    0.03643    4.671 3.00e-06 ***
smoking_statusno              -0.04781    0.04699   -1.017    0.309
age45-59                       0.55388    0.07999    6.924 4.38e-12 ***
age50-54                       0.98039    0.07682   12.762  < 2e-16 ***
age55-59                       1.37946    0.06526   21.138  < 2e-16 ***
age60-64                       1.65423    0.06257   26.439  < 2e-16 ***
age65-69                       1.99817    0.06279   31.824  < 2e-16 ***
age70-74                       2.27141    0.06435   35.296  < 2e-16 ***
age75-79                       2.55858    0.06778   37.746  < 2e-16 ***
age80+                         2.84692    0.07242   39.310  < 2e-16 ***
---
```

```
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 4055.984  on 35  degrees of freedom
Residual deviance:   21.487  on 24  degrees of freedom
AIC: 285.51

Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

> **!** Important
>
> L'argument `offset(log(exposure))` ajoute le **log de l'exposition** avec un coefficient fixé à 1. Cela revient à modéliser un **taux** de décès (décès / population).

Calculer la déviance du modèle ajusté. DEV1

```
     dev1        df   p_value
21.486738 24.000000  0.609872
```

Quel est l'effet de l'âge sur la probabilité de décès par cancer du poumon ?

> Interprétez les coefficients associés aux **modalités d'âge** (comparées à la catégorie de référence) en termes d'IRR (voir section IRR) et/ou d'impact sur le **taux de décès** (à exposition fixée). (Discussion attendue.)

Interprétez les coefficients d'âge (IRR = `exp(coef)`) :

- IRR > 1 : taux de décès plus élevé que la catégorie de référence.
- IRR < 1 : taux plus faible.

Sauvegarde du modèle (utile pour LR tests)

Tester l'ajustement de ce modèle

Pour cela nous allons réaliser **deux tests** :

- **Deviance GOF** (modèle ajusté vs **saturé**).

test	statistic	df	p_value
Deviance GOF	21.48674	24	0.6098720
Pearson GOF	20.61936	24	0.6610658

- **Pearson GOF** (comparaison effectifs attendus vs observés). Les **degrés de liberté** correspondent ici au nombre de cellules moins le nombre de paramètres estimés (y compris l'interception). L'énoncé suggère **24 df** pour chacun de ces tests (voir justification plus bas).

Justifiez pourquoi ces tests sont effectués avec le même df.

> Tip
>
> Rappel : pour un GLM Poisson, `df = N - p`, où `N` est le nombre de cellules et `p` le nombre de paramètres estimés (y compris l'interception). Discuter les **conditions d'un** [2] (souvent $\hat{\mu} \geq 5$ dans la plupart des cellules).

Ajuster un modèle sans la variable smoke, et effectuer un test de rapport de vraisemblance entre ce nouveau modèle et celui précédemment sauvegardé

On ajuste un modèle **sans tabac** et on compare à `mod1` par **LR test**. En Stata : `lrtest`. En R : `anova(mod0, mod1, test="Chisq")`.

```
Analysis of Deviance Table

Model 1: deaths ~ age + offset(log(exposure))
Model 2: deaths ~ smoking_status + age + offset(log(exposure))
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance  Pr(>Chi)
1        27    191.723
2        24     21.487  3   170.24 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Conclure sur l'impact de l'usage du tabac sur la probabilité de décès par cancer du poumon.

Construire une nouvelle variable qui prend la valeur 1 si l'individu fume des cigarettes, 0 s'il n'en fume pas.

Créer une variable `cigarette_user` égale à **1 si l'individu fume des cigarettes**, **0 sinon** : l'énoncé demande de distinguer le type de produit et de concentrer l'attention sur la **cigarette**.

```
   cigarPipeOnly cigarretteOnly cigarrettePlus no
0              9              0              0  9
1              0              9              9  0
```

Ajuster un troisième modèle avec effet de l'âge et de cette variable d'usage de la cigarette.

```
Call:
glm(formula = deaths ~ cigarette_user + age + offset(log(exposure)),
    family = poisson, data = df)

Coefficients:
                Estimate Std. Error  z value Pr(>|z|)
(Intercept)    -15.15590    0.06378 -237.625  < 2e-16 ***
cigarette_user   0.26910    0.02757    9.762  < 2e-16 ***
age45-59         0.55342    0.07999    6.919 4.56e-12 ***
age50-54         0.98480    0.07682   12.820  < 2e-16 ***
age55-59         1.37640    0.06526   21.092  < 2e-16 ***
age60-64         1.64629    0.06256   26.317  < 2e-16 ***
age65-69         1.99023    0.06277   31.708  < 2e-16 ***
age70-74         2.26143    0.06432   35.161  < 2e-16 ***
age75-79         2.54560    0.06766   37.626  < 2e-16 ***
age80+           2.82907    0.07215   39.211  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

(Dispersion parameter for poisson family taken to be 1)

    Null deviance: 4055.984  on 35  degrees of freedom
```

```
Residual deviance:   92.237  on 26  degrees of freedom
AIC: 352.26

Number of Fisher Scoring iterations: 4


Analysis of Deviance Table

Model: poisson, link: log

Response: deaths

Terms added sequentially (first to last)

               Df Deviance Resid. Df Resid. Dev  Pr(>Chi)
NULL                                35     4056.0
cigarette_user  1     58.3        34     3997.6 2.195e-14 ***
age             8   3905.4        26       92.2 < 2.2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Comparer ce modèle avec le modèle initial par un test de rapport de vraisemblance

On compare le **modèle multiniveaux par type de tabac** (`mod1`) avec le **modèle binaire cigarette vs non** (`mod2`).

```
Analysis of Deviance Table

Model 1: deaths ~ cigarette_user + age + offset(log(exposure))
Model 2: deaths ~ smoking_status + age + offset(log(exposure))
  Resid. Df Resid. Dev Df Deviance  Pr(>Chi)
1        26     92.237
2        24     21.487  2    70.75 4.334e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

IRR (modèle 1) — exp(coef) avec IC 95%

term	estimate	conf.low	conf.high	p.value
age80+	1.723470e+01	1.496968e+01	1.988626e+01	0.000000e+00
age75-79	1.291740e+01	1.132626e+01	1.477500e+01	0.000000e+00
age70-74	9.693017e+00	8.558760e+00	1.101560e+01	6.852385e-273
age65-69	7.375556e+00	6.533324e+00	8.357251e+00	2.978913e-222
age60-64	5.229045e+00	4.633991e+00	5.922596e+00	4.943059e-154
age55-59	3.972749e+00	3.501347e+00	4.522490e+00	3.581870e-99
age50-54	2.665487e+00	2.294116e+00	3.100656e+00	2.658489e-37
age45-59	1.739985e+00	1.487796e+00	2.036040e+00	4.376858e-12
smoking_statuscigarretteOnly	1.446509e+00	1.343418e+00	1.558691e+00	2.099342e-22
smoking_statuscigarrettePlus	1.185481e+00	1.104252e+00	1.273769e+00	3.001586e-06
smoking_statusno	9.533182e-01	8.692799e-01	1.045138e+00	3.090007e-01
(Intercept)	2.645745e-07	2.312255e-07	3.016715e-07	0.000000e+00

Le type de produit fumé semble-t-il influencer la probabilité de décès par cancer du poumon ?

En Poisson log-linéaire : **IRR = exp(coef)**. On reporte aussi des **IC 95%** exponentiés.

Extensions

Comptes attendus & tableau Observé vs Attendu

Vérification d'éventuelle sur-dispersion

Le GLM Poisson suppose `Var(Y) = E[Y]`. Si `Var(Y) >> E[Y]`, la **sur-dispersion** peut invalider les tests usuels (SE sous-estimés).

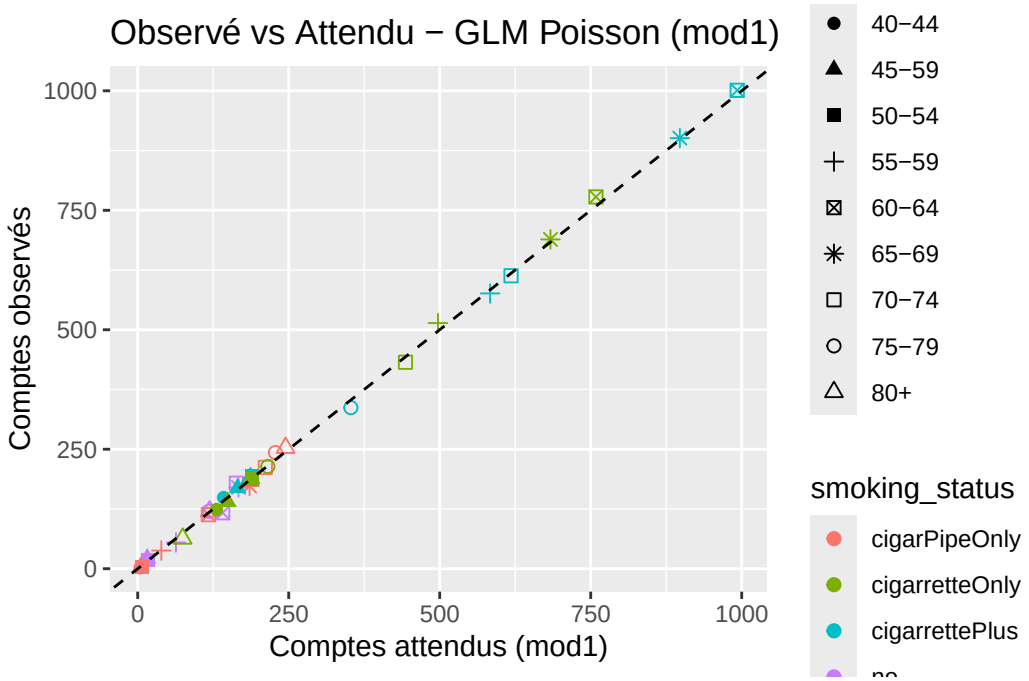
```
# Overdispersion test

       dispersion ratio =  0.859
  Pearson's Chi-Squared = 20.619
                p-value =  0.661
```

En cas de sur-dispersion marquée, envisagez **Quasi-Poisson** (`family = quasipoisson`) ou **Négative Binomiale** (`MASS::glm.nb`) et comparez l'ajustement.

age	smoking_status	exposure	y_obs	mu_hat
40-44	cigarPipeOnly	14,500,000.00	2.00	3.84
40-44	cigarretteOnly	341,000,000.00	124.00	130.50
40-44	cigarrettePlus	453,100,000.00	149.00	142.11
40-44	no	65,600,000.00	18.00	16.55
45-59	cigarPipeOnly	10,400,000.00	4.00	4.79
45-59	cigarretteOnly	223,900,000.00	140.00	149.10
45-59	cigarrettePlus	303,000,000.00	169.00	165.36
45-59	no	35,900,000.00	22.00	15.76
50-54	cigarPipeOnly	9,800,000.00	3.00	6.91
50-54	cigarretteOnly	185,100,000.00	187.00	188.82
50-54	cigarrettePlus	226,700,000.00	193.00	189.53
50-54	no	24,900,000.00	19.00	16.74
55-59	cigarPipeOnly	37,200,000.00	38.00	39.10
55-59	cigarretteOnly	327,000,000.00	514.00	497.17
55-59	cigarrettePlus	468,200,000.00	576.00	583.40
55-59	no	63,200,000.00	55.00	63.33
60-64	cigarPipeOnly	84,600,000.00	113.00	117.04
60-64	cigarretteOnly	379,100,000.00	778.00	758.66
60-64	cigarrettePlus	605,200,000.00	1,001.00	992.58
60-64	no	106,700,000.00	117.00	140.73
65-69	cigarPipeOnly	94,900,000.00	173.00	185.19
65-69	cigarretteOnly	242,100,000.00	689.00	683.37
65-69	cigarrettePlus	388,000,000.00	901.00	897.57
65-69	no	89,700,000.00	170.00	166.87
70-74	cigarPipeOnly	82,400,000.00	212.00	211.32
70-74	cigarretteOnly	119,500,000.00	432.00	443.30
70-74	cigarrettePlus	203,300,000.00	613.00	618.07
70-74	no	66,800,000.00	179.00	163.31
75-79	cigarPipeOnly	66,700,000.00	243.00	227.95
75-79	cigarretteOnly	43,600,000.00	214.00	215.54
75-79	cigarrettePlus	87,100,000.00	337.00	352.89
75-79	no	36,100,000.00	120.00	117.62
80+	cigarPipeOnly	53,700,000.00	253.00	244.86
80+	cigarretteOnly	11,300,000.00	63.00	74.53
80+	cigarrettePlus	34,500,000.00	189.00	186.49
80+	no	27,400,000.00	120.00	119.11

Graphiques (facultatifs)



Bilan

- Le modèle de Poisson permet d'estimer des **taux de décès** en fonction du tabagisme et de l'âge.
- Les **tests d'ajustement** (déviance, Pearson) valident le modèle si p-value élevée.
- Le **tabagisme** a un impact significatif sur la mortalité par cancer du poumon.
- Les **IRR** offrent une interprétation intuitive : *par rapport à la catégorie de référence, combien de fois le taux de décès est-il multiplié.*

  Conseil pratique : en recherche appliquée, vérifiez toujours la sur-dispersion et documentez les hypothèses de variance (Poisson vs quasi-Poisson vs binomiale négative).