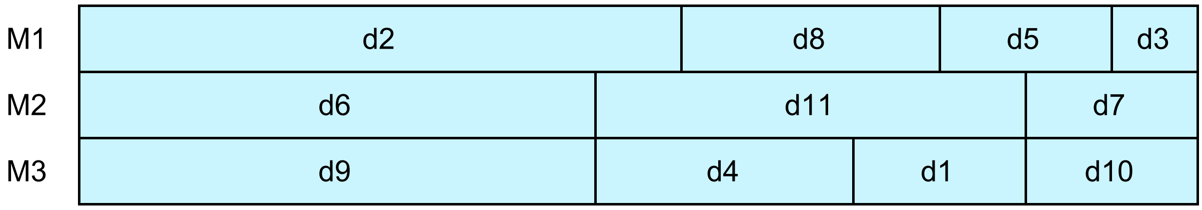
1



2

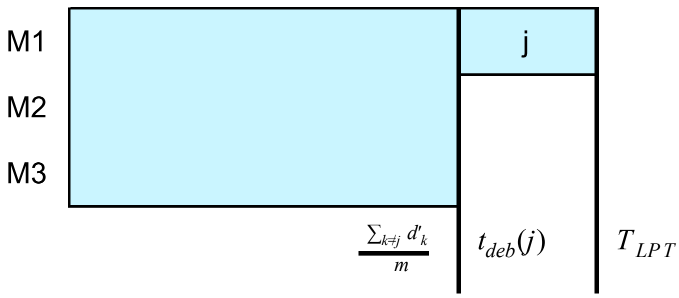
Sur cet exemple, l'application de LPT donne le résultat optimal : $T_{LPT}(I) = 1 * T_{opt}(I)$.
donc le ratio d'approximation est de **1**.

3

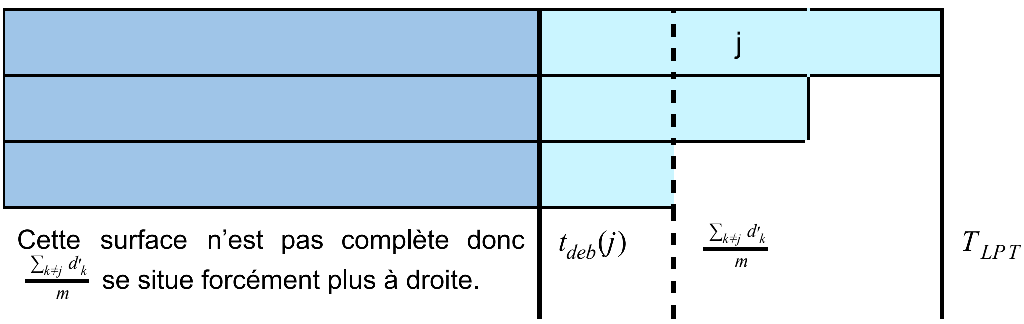
Soit $t_{deb}(j)$ le temps auquel débute la tâche j.

Montrons d'abord que $t_{deb}(j) \leq \frac{\sum_{k \neq j} d'_k}{m}$:

Comme on affecte toujours à la première machine libre, on a forcément une surface pleine avant $t_{deb}(j)$.
Dans le cas où $t_{deb}(j) = \frac{\sum_{k \neq j} d'_k}{m}$, on a :



Dans tous les autres cas, on a par exemple:



On a montré que $t_{deb}(j) \leq \frac{\sum_{k \neq j} d'_k}{m}$

or, $\forall\ I,\ T_{LPT}(I) = t_{deb}(j)\ +\ d'_j$

donc $T_{LPT}(I)\ \leq\ \frac{\sum_{k\neq j} d'_k}{m} +\ d'j$

4

Dans le cas où $n\ \leq m$, chaque machine se voit affecté au plus une tâche.
Dans ce cas $T_{LPT}\ =\ d'_{max}$ où d'_{max} est le temps de la tâche la plus longue.
Comme les tâches sont indivisibles, T_{LPT} est forcément optimal.

5

Dans le cas où $n \geq m+1$, chaque machine se voit affecté au moins une tâche et M1 au moins deux tâches.

Illustrons le cas où la valeur de $2 * d'_{m+1}$ est la plus grande possible. Pour obtenir une valeur de $2 * d'_{m+1}$ maximale, il nous faut une valeur de d'_{m+1} qui soit maximale. Les tâches étant réparties par ordre décroissant de leur durée, cela implique que $d'_{max} = d'_1$. Il nous faut donc illustrer le cas où $d'_1 = d'_{m+1}$.
Supposons donc le cas où m=3 et n = 4 avec $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 3$

M1	d1	d4
M2	d2	
M3	d3	

T_{opt} $2 * d'_{m+1}$

Dans ce cas, on a $T_{opt} =\ 2 * d'_{m+1}$

Pour que $2 * d'_{m+1}$ soit supérieur à T_{opt}, il faudrait que d'_{m+1} soit supérieur à d'_1
ce qui est impossible puisque les tâches sont affectées par ordre décroissant.

donc $\quad 2 * d'_{m+1}\ \leq\ T_{opt}(I)$

6

Dans le cas où $n\ \leq m$, d'après la réponse **4** on est dans le cas (a)
Sinon, dans le cas où $n \geq m+1$, on a :
Soit:

$T_{opt} =\ 2 * d'_{m+1}$ et dans ce cas $j = m+1$ comme illustré plus haut.

Soit:

$T_{opt}(I) > 2 * d'_{m+1}$ et dans ce cas on a $j\ > m+1$

7

Le cas (a) étant nécessairement optimal, on ne se place que dans le cadre du cas (b).
On a donc d'une part :

$j > m+1$ et les tâches sont affectées dans l'ordre décroissant de leur durée, donc $d'_j \leq d'_{m+1}$.

Or, d'après la réponse **5**, $2 * d'_{m+1} \leq T_{opt}(I) \Leftrightarrow d'_{m+1} \leq \frac{1}{2} T_{opt}(I)$

On a donc

$$\boxed{d'_j \leq d'_{m+1} \leq \tfrac{1}{2} T_{opt}(I)} \quad \textbf{A}$$

D'autre part,

On sait que $T_{LPT}(I) = t_{deb}(j) + d'_j \leq \frac{\sum_{k \neq j} d'_k}{m} + d'_j \leq T_{opt}(I) + d'_j$

donc

$$\boxed{T_{LPT}(I) \leq T_{opt}(I) + d'_j} \quad \textbf{B}$$

On déduit donc de **A** et **B** que :

$$T_{LPT}(I) \leq T_{opt}(I) + \tfrac{1}{2} T_{opt}(I)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{T_{LPT}(I) \leq \tfrac{3}{2} T_{opt}(I)}$$

8