Résumé discussion Adrien Busnot-Laurent

Pierre Catoire

6 mars 2025

Résumé

Une tentative pour donner un cadre algébrique aux arbres exotiques

1 Rappel des définitions élémentaires

Definition 1.1 (Algèbres Post-Lie)**.** Une *algèbre Post-Lie (à gauche)* est un triplet $(\mathfrak{h}, [,], \rhd)$ où $(\mathfrak{h}, [,])$ est une algèbre de Lie et $\rhd : \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}$ est une application linéaire satisfaisant pour tous $x, y, z \in \mathfrak{h}$:

$$x \rhd [y, z] = [x \rhd y, z] + [y, x \rhd z]\,, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} [x, y] \rhd z &= a_{\rhd}(y, x, z) - a_{\rhd}(x, y, z) \\ &= (y \rhd x) \rhd z - y \rhd (x \rhd z) - (x \rhd y) \rhd z + x \rhd (y \rhd z). \end{aligned} \tag{2}$$

Definition 1.2 (algèbres Post-Hopf)**.** Une *algèbre Post-Hopf* est un 6-uplet $(H, \cdot, 1, \Delta, \varepsilon, \rhd)$ tel que $(H, \cdot, 1, \Delta, \varepsilon)$ est une algèbre de Hopf et $\rhd : H \otimes H \to H$ est un morphisme de cogèbres satisfaisant pour tous $x, y, z \in H$:

$$x \rhd (y \cdot z) = \left(x^{(1)} \rhd y\right) \cdot \left(x^{(2)} \rhd z\right), \tag{3}$$

$$x \rhd (y \rhd z) = \left(x^{(1)} \cdot \left(x^{(2)} \rhd y\right)\right) \rhd z, \tag{4}$$

et telle que :

$$\alpha_{\rhd} : \left\{ \begin{array}{ccc} H & \to & H, \\ y & \mapsto & x \rhd y, \end{array} \right. \tag{5}$$

est inversible dans $\mathrm{Hom}(H, \mathrm{Hom}(H))$.

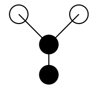
2 Forêts à décorer, forêt décorées et forêts exotiques

2.1 Définition des objets

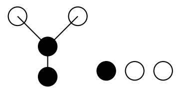
Definition 2.1. On appelle *forêt à décorer* une forêt planaire d'arbres planaires dont certaines feuilles disposent d'affixes vides dites à décorer. Notons l'ensemble des forêts à décorer $\mathcal{FTBD}$.

Remark 2.1. La forêt vide 1 est un élément de $\mathcal{FTBD}$ tandis que l'arbre décoré vide n'est pas un élément de de $\mathcal{TTBD}$.

Example 2.1. — Voici un exemple d'arbre à décoré :



— Voici un exemple de forêt à décorer :



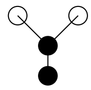
Definition 2.2. On appelle *forêt décorée* un élément de $\mathcal{FTBD} \otimes T(\mathbb{N}^*)$:

$$F \otimes w$$

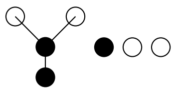
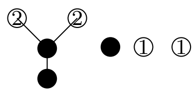
où en posant k le nombre de feuilles blanches de F, $w = w_1 \dots w_k$.

Définissons $\mathcal{FD}$ l'ensemble de ces forêts décorées.

Example 2.2. — Voici un exemple d'arbre décoré :

 $\otimes\, 11.$

— Voici un exemple d'une forêt exotique :

 $\otimes\, 2211 \leftrightarrow$ 

Remark 2.2. Ceci peut se voir en utilisant des espèces. Voir par exemple l'introduction de l'article :`http://arxiv.org/abs/1905.10199v1` de Loïc sur le sujet pour plus de détails (Cela contient le minimum syndical).

Definition 2.3. Une *forêt exotique* est une forêt décorée avec un nombre pairs de sommets à décorer "couplée" à un mot de longueur égale au nombre de sommets blancs (qui seront les sommets à décorés et les noirs sont ceux qui ne peuvent pas décorés) à support dans $[\![1, n]\!]$ tel que chaque élément de $[\![1, n]\!]$ apparaît deux fois exactement. On note l'ensemble des forêts exotiques $\mathcal{EF}$.

Remark 2.3. Les deux exemples précédents sont des forêts exotiques.

2.2 Magma pour les arbres à décorer

Nous définissons également l'opération binaire suivante sur $\mathcal{TTBD}^{\otimes 2}$ de la manière suivante :

Definition 2.4. Soit T_1 et T_2 deux éléments de $\mathcal{TTBD}$, on définit :

$$T_1 \rhd T_2 = \sum \text{greffes à gauche de } T_1 \text{ sur } T_2 \text{ sur un nœud noir.}$$

3 Structure Post-Hopf sur les forêts à décorer

3.1 Structure d'algèbre de Hopf sur $\mathcal{FTBD}$

Remarquons que $\mathcal{FTBD}$ est munie d'une structure d'algèbre avec $\cdot$ le produit de concaténation des forêts d'unité 1. Par conséquent, en identifiant le produit de concaténation de $\mathcal{FTBD}$ et celui de $\mathcal{TTBD}$, nous avons :

$$(\mathcal{FTBD}, \cdot, 1) \simeq (T(\mathcal{TTBD}), \cdot, 1)$$

où $\cdot$ à droite est le produit de concaténation des mots. Cette algèbre hérite donc de la structure naturelle d'algèbre de Hopf provenant de $T(V)$ donnée par :

$$(T(\mathcal{TTBD}), \cdot, 1, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, \varepsilon).$$

Remarquons maintenant que $\triangleright : \mathcal{TTBD}^{\otimes 2} \to \mathcal{TTBD}$ est un magma. Dans [6, 9, 5, 10], les auteurs étendent la définition du produit Post-Lie d'une algèbre Post-Lie à droite ou à gauche à son algèbre enveloppante pour le crochet $[,]$ dans la proposition 1, proposition 3.7, proposition 3.1 et dans le théorème 2.8. Les résultats suivants sont des résumés du lemme 1 et de la proposition 1 de [6] :

Proposition 3.1. *Soit V un espace vectoriel et $\triangleright$ un produit magmatique sur V. Alors, $\triangleright$ s'étend uniquement en $\triangleright : T(V)^{\otimes 2} \to T(V)$ telle que pour tous $f, g, h \in T(V)$ et $x, y \in V$:*
— $\varepsilon(f \triangleright g) = \varepsilon(f)\varepsilon(g)$;
— $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}(f \triangleright g) = \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(f) \triangleright \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(g)$;
— $f \triangleright 1 = \varepsilon(f)1$;
— $1 \triangleright f = f$;
— $(yg) \triangleright f = y \triangleright (g \triangleright f) - (y \triangleright g) \triangleright y$;
— $h \triangleright (fg) = \sum \left(h^{(1)} \triangleright f\right)\left(h^{(2)} \triangleright g\right)$;
— $h \triangleright (g \triangleright f) = \sum \left(h^{(1)}\left(h^{(2)} \triangleright g\right)\right) \triangleright f$,
où Δ est le coproduit de déshuffle.

Examples 3.1. Soit V un espace vectoriel et v_1, v_2, v_3, v_4 quatre éléments de V. Alors :

$$\begin{aligned}
v_1 \triangleleft v_2 &= v_1 \triangleleft v_2, \\
(v_1 v_2) \triangleleft v_3 &= (v_1 \triangleleft v_3) v_2 + v_1 (v_2 \triangleleft v_3), \\
v_1 \triangleleft (v_2 v_3) &= (v_1 \triangleleft v_2) \triangleleft v_3 - v_1 \triangleleft (v_2 \triangleleft v_3), \\
(v_1 v_2 v_3) \triangleleft v_4 &= (v_1 \triangleleft v_4) v_2 v_3 + v_1 (v_2 \triangleleft v_4) + v_1 v_2 (v_3 \triangleleft v_4), \\
v_1 \triangleleft (v_2 v_3 v_4) &= ((v_1 \triangleleft v_2) \triangleleft v_3) \triangleleft v_4 - (v_1 \triangleleft (v_2 \triangleleft v_3)) \triangleleft v_4 - (v_1 \triangleleft (v_2 \triangleleft v_4)) \triangleleft v_3 \\
&\quad + v_1 \triangleleft ((v_2 \triangleleft v_4) \triangleleft v_3) - (v_1 \triangleleft v_2) \triangleleft (v_3 \triangleleft v_4) + v_1 \triangleleft (v_2 \triangleleft (v_3 \triangleleft v_4)).
\end{aligned}$$

Par conséquent, cela donne une définition de $\triangleright$ sur l'espace $\mathcal{FTBD}$ vérifiant les identités ci-dessus.

3.2 Structure Post-Hopf sur $T(\mathcal{FTBD})$

Considérons l'algèbre Post-Hopf $(T(\mathcal{FTBD}), |, 1, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, \varepsilon, \triangleright)$ où :
— $T(\mathcal{FTBD}) = T(T(\mathcal{TTBD}))$ est l'espace des phrases sur l'alphabet des arbres à décorer ;
— $|$ est la concaténation des phrases ;
— 1 est la forêt vide ;
— $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$ est le coproduit de démélange sur les phrases ;

— ε est la counité valant 1 uniquement sur la forêt vide.
Par conséquent, en considérant $T(\mathcal{TTBD}) \simeq \mathcal{FTBD}$ avec sa structure Post-Lie donnée par $\rhd$, nous savons comme indiqué dans [4], proposition 4.26 :

Proposition 3.2. *Pour toutes phrases $S, P \in T\left(T(V)_+\right)_+$, on pose $S = S_1|\dots|S_n$ et $P = P_1|\dots|P_k$, on a :*

$$P \rhd S = \sum_{f:[\![1,k]\!]\hookrightarrow[\![1,n]\!]} \left(P_{f^{-1}(\{1\})} \rhd S_1\right)|\dots|\left(P_{f^{-1}(\{n\})} \rhd S_n\right).$$

Ainsi , $(T(T(\mathcal{TTBD})), |, 1, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, \varepsilon, \rhd)$ est une algèbre Post-Hopf.

4 Structure d'algèbre Post-Hopf sur les forêts exotiques

4.1 Structure d'algèbre Post-Hopf sur $T(\mathcal{FD})$

Pour clarifier les idées, nous détaillons en détails la structure algébrique naturelle de $T(\mathcal{FD})$ avec l'identification suivante :

$$\forall F_1, F_2, \forall w_1, w_2 \in T(\mathbb{N}^*), (F_1 \otimes w_1)|(F_2 \otimes w_2) = F_1|F_2 \otimes w_1|w_2$$

où $F_1|F_2 \in T(\mathcal{FD})$ et $w_1|w_2 \in T(T(\mathbb{N}^*))$.

Definition 4.1 (Structure d'algèbre sur $T(\mathcal{FD})$)**.** On définit le produit suivant :

$$| : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}\mathcal{FD} \otimes \mathbb{K}\mathcal{FD} & \to & \mathbb{K}\mathcal{FD} \\ (F_1 \otimes w_1) \otimes (F_2 \otimes w_2) & \mapsto & F_1|F_2 \otimes w_1|w_2 \end{array} \right.$$

où le produit | à gauche est le produit de concaténation de $T(\mathcal{FTBD})$ et le second est le produit de concaténation des mots dans $T(T(\mathbb{N}^*))$.

La forêt décorée vide est l'élément neutre pour la multiplication.

Definition 4.2 (Structure de cogèbre sur $T(\mathcal{FD})$)**.** On définit le coproduit suivant :

$$\Delta_{\sqcup\!\sqcup} : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}\mathcal{FD} & \to & \mathbb{K}\mathcal{FD} \otimes \mathbb{K}\mathcal{FD} \\ F_1|\dots|F_k \otimes w_1|\dots|w_k & \mapsto & \displaystyle\sum_{I \subseteq [\![1,k]\!]} (F_I \otimes w_I) \otimes (F_{I^c} \otimes w_{I^c}). \end{array} \right.$$

Ce coproduit est le démélange/deshuffle des forêts décorées. Sa counité est donnée par l'application linéaire valant 1 sur la forêt vide de $\mathcal{FD}$.

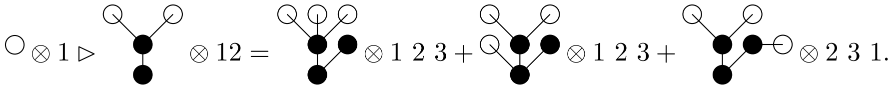
Nous parvenons également à récupérer la structure Post-Hopf sur cette algèbre de la manière suivante :

Definition 4.3. Soit $F_1 \otimes w_1, F_2 \otimes w_2$ deux éléments de $\mathcal{FD}$, on définit le magma $\rhd$ suivant :

$$F_1 \otimes w_1 \rhd F_2 \otimes w_2 = \sum_{F \in F_1 \rhd F_2} F \otimes w_F$$

où w_F est le nouveau mot obtenu en traquant le parcourt des lettres de w_1 et w_2 dans la greffe de F_2 sur F_1 afin d'obtenir F, puis en ajoutant $\max(w_1)$ à toutes les lettres de w_2.

Example 4.1.



Remark 4.1. Si on veut faire ça rigoureusement, il faut le faire avec des arbres décorés où chaque décoration des feuilles blanches sont différentes puis projeter dans l'espace des mots où les lettres se répètent en ayant une fonction qui associe à la position des lettres un entier.

En utilisant le prolongement de la proposition 3.1, nous obtenons alors une opération Post-Hopf sur $T(\mathcal{FD})$.

5 Transport de la structure vers les forêts exotiques

On considère l'idéal suivant de $(T(\mathcal{FD}), |, 1)$:

$$I = \left\langle F \otimes w \;\middle|\; \begin{array}{c} F \text{ à un nombre impair de feuilles blanches ou une des lettres de} \\ w \text{ n'apparaît pas exactement deux fois} \end{array} \right\rangle$$

Lemma 5.1. *L'idéal I est un coidéal de $(T(\mathcal{FD}), \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, \varepsilon)$.*

Démonstration. Soit $F \otimes w$ un générateur de l'idéal I. Par construction du coproduit, $F \otimes w$ est un élément primitif. Par conséquent, I est un coidéal. □

Ainsi, I est un biidéal de de $(T(\mathcal{FD}), |, 1, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, \varepsilon)$. Par conséquent, ${T(\mathcal{FD})}/{I}$ admet une structure d'algèbre de Hopf donnée par la structure quotient.

Avec ceci, remarquons que ${\mathcal{FD}}/{I}$ représente exactement les éléments de $\mathcal{EF}$. Ainsi, ceci donne une structure naturelle d'algèbre de Hopf sur $(T(\mathcal{EF}), \cdot, 1, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, I)$ où $T(\mathcal{EF})$ désigne l'espace des phrases dont l'alphabet est l'ensemble des forêts décorées.

5.1 Des forêts décorés aux forêts exotiques

Refs : [8, 7]

5.1.1 La structure d'algèbre

Definition 5.2. On définit un produit sur $\mathcal{EF}$ comme le produit de concaténation des forêts exotiques en effectuant un décalage des décorations des nœuds si nécessaire pour obtenir une forêt exotique.

Example 5.1.

$$\circ\,\circ \otimes 11 \cdot \circ\,\circ \otimes 11 = \circ\,\circ\,\circ\,\circ \otimes 1122.$$

Remark 5.1. Les générateurs de $\mathcal{EF}$ pour ce produit sont les forêts exotiques dites *irréductibles.* Ce sont les éléments de $\mathcal{EF}$ ne pouvant être écrit comme la concaténation de forêts exotiques. On notera l'ensemble des générateurs de cet espace $\mathrm{Gen}(\mathcal{EF})$.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} (T(\mathcal{EF}), |, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, \varepsilon, \rhd) \arrow[r, bend right, "\pi"'] & (\mathcal{EF}, \cdot, 1,) \arrow[l, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

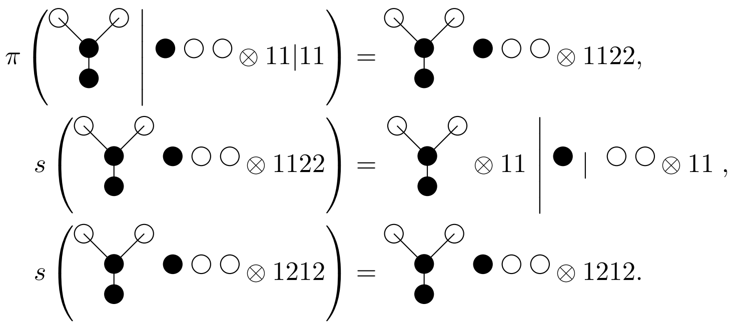
où π est l'unique morphisme d'algèbres de $(T(\mathcal{FTBD}), |, 1)$ dans $(\mathcal{FTBD}, \cdot, 1)$ avec $\cdot$ la concaténation des forêts à décorer et la section s est définie comme l'unique morphisme d'algèbres tel que pour tout générateur de $(\mathcal{EF}, \cdot, 1)$:

$$s|_{\mathrm{Gen}(\mathcal{EF})} = \mathrm{Id}\,|_{\mathcal{EF}}.$$

Remark 5.2. L'application π n'est pas injective néanmoins nous avons les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \pi \circ s &= \mathrm{Id}_{\mathcal{EF}}, \\ s \circ \pi|_{T(\mathrm{Gen}(\mathcal{EF}))} &= \mathrm{Id}_{T(\mathrm{Gen}(\mathcal{EF}))}, \\ \mathrm{Im}(s) &= T(\mathrm{Gen}(\mathcal{EF})) \subseteq T(\mathcal{EF}), \\ \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(T(\mathrm{Gen}(\mathcal{EF}))) &\subseteq T(\mathrm{Gen}(\mathcal{EF})) \otimes T(\mathrm{Gen}(\mathcal{EF})). \end{aligned}$$

Example 5.2.



5.2 Structure d'algèbre de Hopf sur $\mathcal{EF}$

Refs : [2, 3, 1]

On peut définir une structure de de cogèbre sur la structure $\mathcal{EF}$ en posant pour tout élément $x \in \mathcal{EF}$:

$$\Delta_{\mathcal{EF}}(x) := (\pi \otimes \pi) \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup} \circ s(x).$$

Proposition 5.3. *L'application $\Delta_{\mathcal{EF}} : \mathbb{K}\,\mathcal{EF} \otimes \mathbb{K}\,\mathcal{EF} \to \mathbb{K}\,\mathcal{EF}$ est une comultiplication coassociative. De plus, $(\mathcal{EF}, \cdot, 1, \Delta_{\mathcal{EF}}, \varepsilon)$ est une algèbre de Hopf cocommutative.*

Démonstration. Effectuons le calcul suivant en utilisant les propriétés énumérées de la remarque 5.2 :

$$\begin{aligned} (\Delta_{\mathcal{EF}} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{\mathcal{EF}} &= (\pi^{\otimes 2} \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup} \circ s \otimes \mathrm{Id}) \circ \pi^{\otimes 2} \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup} \circ s \\ &= \pi^{\otimes 3} \circ (\Delta_{\sqcup\!\sqcup} \otimes \mathrm{Id}) \circ (s \circ \pi \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup} \circ s \\ &= \pi^{\otimes 3} \circ (\Delta_{\sqcup\!\sqcup} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup} \circ s \\ &= \pi^{\otimes 3} \circ (\mathrm{Id} \otimes \Delta_{\sqcup\!\sqcup}) \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup} \circ s \\ &= (\pi \otimes \pi^{\otimes 2} \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup}) \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup} \circ s \\ &= (\pi \otimes \pi^{\otimes 2} \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup}) \circ (\mathrm{Id} \otimes s \circ \pi) \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup} \circ s \\ &= (\mathrm{Id} \otimes \pi^{\otimes 2} \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup} \circ s) \circ \pi^{\otimes 2} \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup} \circ s \\ &= (\mathrm{Id} \otimes \Delta_{\mathcal{EF}}) \circ \Delta_{\mathcal{EF}}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\Delta_{\mathcal{EF}}$ est coassociative. Sa counité est identique à celle de $T(\mathcal{EF})$ envoyant la forêt exotique vide sur 1.

De plus, comme $s, \Delta_{⧢}$ et π sont des morphismes d'algèbres, nous en déduisons que $\Delta_{\mathcal{EF}}$ est un morphisme d'algèbres.

Par conséquent, $(\mathcal{EF}, \cdot, 1, \Delta_{\mathcal{EF}}, \varepsilon)$ est une algèbre de Hopf cocommutative. $\square$

Par conséquent, $\mathcal{EF}$ a pour produit la concaténation et comme coproduit la déconcaténation. Ainsi :

$$(\mathcal{EF}, \cdot, 1, \Delta_{⧢}, \varepsilon) \simeq (T(\mathcal{EF}), \cdot, 1, \Delta_{⧢}, \varepsilon) \tag{6}$$

5.3 La structure Post-Hopf sur $\mathcal{EF}$

Nous décrivons maintenant la structure Post-Hopf sur l'algèbre de Hopf $(\mathcal{EF}, \cdot, 1, \Delta_{\mathcal{EF}}, \varepsilon)$ que nous venons de construire. Pour cela, nous allons utiliser l'identification de l'équation 6.

Definition 5.4. Soit $F_1 \otimes w_1, F_2 \otimes w_2$ deux éléments de $\mathrm{Gen}(\mathcal{EF})$, on peut définir deux magmas $\triangleright$ et $\curvearrowleft$ suivants :

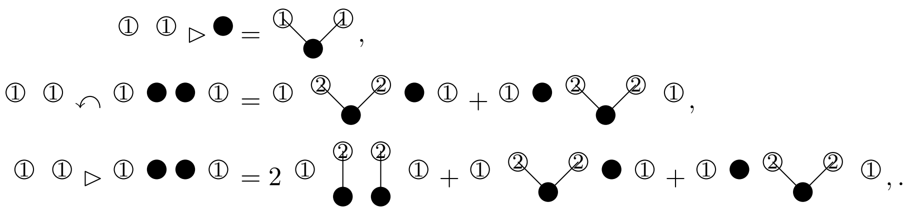
$$F_1 \otimes w_1 \triangleright F_2 \otimes w_2 = \sum_{F \in F_1 \triangleright F_2} F \otimes w_F$$

$$F_1 \otimes w_1 \curvearrowleft F_2 \otimes w_2 = \sum \text{greffes complètes de } F_1 \text{ sur un seul nœud de } F_2.$$

où w_F est le nouveau mot obtenu en traquant le parcourt des lettres de w_1 et w_2 dans la greffe de F_2 sur F_1 afin d'obtenir F, puis en ajoutant $\max(w_1)$ à toutes les lettres de w_2.

Remark 5.3. Le problème de ① ① $\triangleright$ ●● n'existe plus avec cette définition car ●● n'est plus un générateur.

Example 5.3.



6 Étude de cette algèbre Post-Hopf

Références

[1] E. Bronasco, A. Busnot Laurent, and B. Huguet. High order integration of stochastic dynamics on Riemannian manifolds with frozen-flow methods. *Preprint*, 2025.

[2] Eugen Bronasco. Exotic B-series and S-series : algebraic structures and order conditions for invariant measure sampling. *Found. Comput. Math.*, pages 1–31, 2024.

[3] Eugen Bronasco and Adrien Laurent. Hopf algebra structures for the backward error analysis of ergodic stochastic differential equations. *arXiv :2407.07451*, 2024.

[4] Pierre Catoire. The cartier-quillen-milnor-moore theorem in the post-hopf case, 2024.

[5] Kurusch Ebrahimi-Fard, Alexander Lundervold, and Hans Z. Munthe-Kaas. On the Lie enveloping algebra of a post-Lie algebra. *J. Lie Theory*, 25(4) :1139–1165, 2015.

[6] Loïc Foissy. Extension of the product of a post-Lie algebra and application to the SISO feedback transformation group. In *Computation and combinatorics in dynamics, stochastics and control. The Abel symposium, Rosendal, Norway, August 16–19, 2016. Selected papers*, pages 369–399. Cham : Springer, 2018.

[7] Adrien Laurent. *Algebraic Tools and Multiscale Methods for the Numerical Integration of Stochastic Evolutionary Problems*. PhD thesis, University of Geneva, 2021.

[8] Adrien Laurent and Gilles Vilmart. Exotic aromatic B-series for the study of long time integrators for a class of ergodic SDEs. *Math. Comp.*, 89(321) :169–202, 2020.

[9] Hans Z. Munthe-Kaas and Alexander Lundervold. On post-Lie algebras, Lie-Butcher series and moving frames. *Found. Comput. Math.*, 13(4) :583–613, 2013.

[10] Rong Tang Yunnan Li, Yunhe Sheng. Post-hopf algebras, relative rota-baxter operators and solutions of the yang-baxter equation. 2022.