



Rapport sur le mémoire de Pierre Catoire : "Contexte algébrique d'applications des algèbres de Hopf combinatoires"

par Jean-Christophe Novelli

Le mémoire présenté par Pierre Catoire est divisé, outre la partie introductive, en trois parties distinctes bien qu'assez proches dans leur esprit et leurs approches : un étude approfondie autour de l'algèbre tridendriforme libre tout d'abord, puis des constructions de bigèbres doubles sur des matrices et sur des matroïdes et enfin une étude des algèbres post-Hopf. Il s'agit d'un document qui comporte de nombreuses constructions originales qui synthétisent et regroupent dans chaque contexte des résultats provenant d'horizons divers, constructions dont certains cas particuliers sont étudiés très en détail.

Résumé

Pierre Catoire commence par une introduction qui donne un aperçu des principaux résultats du mémoire. Il en donne une description précise avec des exemples bien détaillés. Il continue ensuite avec une présentation claire des outils algébriques dont il aura besoin dans les parties suivantes.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des algèbres tridendriformes libres. Après une rapide introduction sur l'intérêt en général des algèbres tridendriformes libres, son premier résultat présente l'adaptation naturelle de la description du produit dendriforme par mélange/greffe des deux arbres ici sur des arbres de Schröder. Il généralise ensuite les diverses notions d'algèbres et de cogèbres (tri)dendriformes et développe en particulier les algèbres $(3, 2)$ -dendriformes. Cela lui permet en particulier de calculer efficacement les éléments primitifs (coassociatifs et codendriformes) de l'algèbre dendriforme libre sur un générateur. La fin de la partie est consacrée à des résultats sur des algèbres tridendriformes à plusieurs générateurs.

La troisième partie du mémoire est consacrée à la construction de bigèbres doubles, une question difficile. Le premier chapitre de cette partie concerne la structure de bigèbre double sur les matrices indexées et leur application aux multihypergraphes. La



construction est donnée dans de grands détails et est très bien justifiée. Les applications et les liens avec les polynômes chromatiques sont en particulier très intéressants. Le chapitre suivant montre des recherches pour l'instant non abouties mais bien engagées malgré tout pour trouver une structure de bigèbre double sur les matroïdes.

Dans la quatrième partie de son mémoire, Pierre Catoire étudie les algèbres post-Hopf. Après des préliminaires importants et utiles sur cette structure introduite en 2007, son résultat principal est l'adaptation du théorème de Milnor-Moore au cas post-Hopf, un résultat très intéressant. Ce résultat permet en particulier plusieurs descriptions originales de l'algèbre post-Lie libre données dans la fin du chapitre.

Conclusion

En conclusion, le manuscrit présenté par Pierre Catoire propose des généralisations très intéressantes de résultats classiques à des objets combinatoires complexes. Il y apporte des contributions significatives, intéressantes et originales.

Pour toutes ces raisons, je donne un avis très favorable à sa soutenance.

Fait à Champs-sur-Marne le 5 septembre 2024,
Jean-Christophe Novelli,
Professeur des Universités.