Viviane Pons, Maîtresse de Conférences

Viviane Pons
Laboratoire Interdisciplinaire des Sciences du Numérique
Université Paris-Salay
Orsay
E-mail: viviane.pons@lisn.upsaclay.fr
URL: http://www.lri.fr/~pons

26 juillet 2024

Rapport sur la thèse de Pierre Catoire
Contexte algébrique d'applications des algèbres de Hopf combinatoires

La thèse présentée par Pierre Catoire se situe en combinatoire algébrique, plus précisément sur l'étude des algèbres de Hopf et autres structures algébriques associées. Le document est divisé en quatre parties dont trois décrivant des résultats originaux sur, respectivement, les algèbres tridendriformes, les bigèbres doubles et les algèbres Post-Hopf.

Les algèbres de Hopf sont des bigèbres particulières, c'est-à-dire des espaces vectoriels munis d'une structure de produit pour composer les éléments et de coproduits pour les décomposer, qui vérifient un certain nombre d'axiomes et en particulier des propriétés de *compatibilité* et *d'inversion* de certaines opérations. Comme rappelé dans l'introduction du document, on les retrouve dans de nombreux contextes : probabilités libres, théorie des représentations, géométrie différentielle, analyse numérique, théorie du contrôle, théorie de la renormalisation. Cela en fait des structures essentielles de la combinatoire algébrique. L'approche combinatoire permet en effet souvent de donner des descriptions explicites des opérations de produit et coproduit. D'un point de vue algébrique, de nombreuses questions d'ordre structurelles se posent. Ainsi le théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore, rappelé dans la première partie de la thèse, met en lumière l'importance des *éléments primitifs* (dont le coproduit réduit est nul) et le lien avec les algèbres de Lie : si H est une bigèbre connexe sur un corps de caractéristique 0, alors elle est isomorphe à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de ses primitifs.

La thèse de Pierre Catoire se focalise sur des questions structurelles autour d'algèbres de Hopf enrichies de structures ou opérations supplémentaires. Pierre Catoire apporte des réponses à la fois algébriques – définition des bigèbres tridendriformes, théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore pour les algèbres Post-Hopf – et combinatoires – description explicite de la structure tridendriforme libre sur les arbres, bigèbre double sur les matrices. La thèse commence par une première partie apportant le contexte nécessaire. Pierre Catoire donne les définitions et propriétés de base des algèbres de Hopf jusqu'au théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore. Plus qu'un rappel, ce premier chapitre pose les bases théoriques qui seront nécessaires par la suite. Des preuves élémentaires et claires de nombreux résultats connus sont données ce qui permet de bien saisir le fonctionnement des structures présentées.

La seconde partie de la thèse, composée d'un chapitre, traite de la structure tridendriforme.

Il est possible d'affiner la structure d'algèbre en écrivant le produit associatif comme une somme d'opérations (non associatives) vérifiant certaines relations : c'est ce qu'on appelle la structure *dendriforme*. Loïc Foissy a ainsi étudié les *bigèbres bidendriformes* en découpant le produit et le coproduit en deux produits (resp. coproduits) dits "gauche" et "droit". On obtient alors une structure plus rigide ce qui permet d'obtenir des résultats en terme de classification : par exemple, les bigèbres bidendriformes sont entièrement caractérisées par leurs ensembles d'éléments primitifs. La théorie des probabilités libres rend naturelle le découpage du produit associatif en trois opérations : produit gauche, droit et milieu. On obtient alors les algèbres dites *tridendriformes* introduites par Loday, Ronco et Burgunder. Dans ce chapitre, Pierre Catoire cherche à étendre cette structure aux bigèbres. Pour cela, il doit résoudre un certain nombre de soucis techniques – définition du produit tensoriel, ajout d'une unité avec les *algèbres tridenformes augmentées* – tout en conservant les relations tridendrifomes sur le produit. C'est ce qu'il fait dans les sections 2.3 et 2.4. La suite du chapitre est plus combinatoire : Pierre Catoire étudie la bigèbre tridendriforme libre à un générateur. L'ensemble sous-jacent est naturellement donné par les *arbres de Schröder*. Les Proposition 2.5.9, le Théorème 2.5.15 et le Corollaire 2.5.16 donnent respectivement le coproduit, le produit et le détail des produits gauche, milieu et droit de façon combinatoire et non récursive sur les arbres. La Proposition 2.5.9 permet en particulier d'identifier les éléments primitifs. Dans la suite du chapitre, Pierre Catoire décrit la structure duale et exhibe un exemple d'algèbre $(3,2)$-dendriformes, c'est-à-dire une bigèbre où le produit est découpé en 3 et le coproduit en 2.

La troisième partie de la thèse est composée de deux chapitres autour de la notion de *bigèbre double*. Une autre façon d'enrichir la structure d'algèbre de Hopf est d'introduire un second coproduit. Si ce deuxième coproduit vérifie un certain nombre de propriétés de compatibilité avec la structure de Hopf de départ, on obtient ce qu'on appelle une bigèbre double. Cette structure très riche permet en particulier d'obtenir un morphisme vers les polynômes qui donne des informations sur la structure combinatoire sous-jacente. Par exemple, Loïc Foissy a défini une bigèbre double sur les graphes et dans ce cas le polynôme associé est le polynôme chromatique. Dans le Chapitre 3, Pierre Catoire définit une structure de bigèbre double sur les matrices. La définition, qui parait assez naturelle, demande de relever plusieurs défis techniques. En effet, le produit et les coproduits demandent à être définis sur des matrices dont les colonnes sont indexées. Mais cependant, il faut "oublier" ces index pour obtenir la structure de bigèbre double. Algébriquement, cela signifie qu'il faut quotienter par un certains nombres d'idéaux bien définis et démontrer au passage un grand nombre de résultats intermédiaires, parfois techniques, que ce soit du point de vue algébrique que combinatoire. Le résultat principal est donc le Théorème 3.3.51 qui donne la structure de bigèbre double sur les matrices. Dans la suite du chapitre, Pierre Catoire étudie le polynôme associé qui est un équivalent du polynôme chromatique pour les matrices et donne une interprétation combinatoire des objets en terme de multihypergraphes. Dans le Chapitre 4, Pierre Catoire étudie la possibilité d'une structure de bigèbre double sur les matroïdes. Après une introduction très claire de ces objets qui généralisent la notion d'ensemble libre, il définit un produit et deux coproduits potentiels. Cependant, il n'est pas possible d'obtenir directement la compatibilité nécessaire à la structure de bigèbre double. Cela demande la définition d'une certaine relation d'équivalence entre les éléments du matroïdes qui pour l'instant n'est pas connue.

La quatrième et dernière partie de la thèse est composée de deux chapitres sur la notion d'algèbre Post-Hopf. Comme rappelé dans l'introduction de la partie, l'étude des algèbres de

Lie est un sujet riche et difficile en mathématique. La notion d'algèbre Post-Lie (à gauche ou à droite) a ainsi été introduite dans ce cadre. Elle a amené la définition des algèbres Post-Hopf (dont on peut déduire des structures d'algèbres Post-Lie sur les primitifs). Ce sont des algèbres de Hopf munie d'une opération supplémentaire vérifiant certaines relations. Elles sont utiles en particulier dans la cadre de la géométrie différentielle et de la résolution des équations de Rota–Baxter et Yang–Baxter. L'objectif du chapitre est d'obtenir un équivalent du théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore pour les algèbres Post-Hopf. C'est ce qui est fait jusqu'à l'obtention du Corolaire 5.3.15 qui énonce le résultat principal suivi des Corolaires 5.3.16 (cas cocommutatif) et Corolaire 5.3.21 (cas gradué). Ce début de chapitre est très algébrique et demande de démontrer de nombreux résultats intermédiaires assez techniques, comme le lien entre les Post-Hopf (et Post-Lie) à gauche et à droite. Dans la suite, Pierre Catoire revient à la combinatoire et donne une description trés lisible à base d'arbres binaires des algèbre Post-Lie libres. Le Chapitre 6, de nouveau plus algébrique, donne une autre version du Théorème de Cartier-Quillen-Milnor-Moore dans le cas Post-Hopf, cette fois basé sur les éléments de type groupe.

En conclusion, la thèse proposée par Pierre Catoire est riche et contient plusieurs résultats originaux sur les propriétés combinatoires et algébriques des algèbres de Hopf dans différents contextes, qui auront pour chacun d'eux des répercussions dans le domaine avec d'intéressantes perspectives. Les trois parties indépendantes montrent l'étendue du travail réalisé sur des thèmes qui, bien qu'ils se rapportent tous aux algèbres de Hopf, demandent de manipuler des structures et objets combinatoires très différents, complexes et la mise en œuvre de techniques variées. Par ailleurs, le manuscrit est écrit de façon claire et pédagogique et permet au lecteur ou à la lectrice de s'imprégner pleinement du sujet. Je recommande donc sans réserve la soutenance de la thèse de Pierre Catoire.

Paris, 26 juillet 2024

Viviane Pons, Maîtresse de
Conférences