



UNIVERSITÉ PAUL SABATIER

Compte rendu TP2 IFS

Master Énergie - Année 2024-2025

Pierre DOERFLER - Batiste RIVIERE

M2 semestre 2 - Janvier 2025

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 4 |
| 1.1 | Contexte | 4 |
| 1.2 | Système différentiel | 4 |
| 2 | Problème sans amortissement | 5 |
| 2.1 | Pulsations propres | 5 |
| 2.1.1 | Partie réelle | 6 |
| 2.1.2 | Partie imaginaire | 6 |
| 2.1.3 | Solution complète | 6 |
| 2.2 | Stabilité des solutions | 6 |
| 2.2.1 | Lorsque k à l'intérieur des limites ($k_{inf} < k < k_{sup}$) | 6 |
| 2.2.2 | Lorsque k en dehors des limites ($k_{inf} > k$) et ($k > k_{sup}$) | 7 |
| 2.3 | Calcul du gain | 7 |
| 2.4 | Programmation en python | 9 |
| 2.4.1 | Lecture des paramètres | 9 |
| 2.4.2 | Vecteur \mathbf{k} | 9 |
| 2.4.3 | Graphiques et figures | 9 |
| 2.5 | Résultats | 9 |
| 2.6 | Cas pour $k = 1$ | 12 |
| 2.7 | Cas pour $u=1$ et $k=1$ | 13 |
| 3 | Problème avec amortissement | 14 |
| 3.1 | Pulsation propres : | 14 |
| 3.2 | $\nu = 0.02$ | 15 |
| 3.3 | Cas pour $k = 1$ et $\nu = 0.02$ | 16 |
| 3.4 | Cas pour $u=1$, $k=1$ et $\nu = 0.02$ | 17 |
| 4 | Conclusion | 18 |
| 5 | Référence | 19 |

Table des figures

| | | |
|---|---|----|
| 1 | Représentation des résultats obtenus par le code python pour : -(a) La partie réelle de la pulsation ω -(b) Le module du Gain G -(c) La partie imaginaire de la pulsation ω -(d) La phase du Gain G | 10 |
| 2 | Figure 1.(a) corrigé | 11 |
| 3 | Représentation des résultats obtenus par le code python pour : -(a) La partie réelle de la pulsation ω -(b) Le module du Gain G -(c) La partie imaginaire de la pulsation ω -(d) La phase du Gain G | 12 |
| 4 | Affichage des résultats obtenus pour la partie réelle de ω : -(a) Le module du gain -(b) La phase | 13 |
| 5 | Représentation des résultats obtenus par le code python avec $\nu = 0.02$ pour : -(a) La partie réelle de la pulsation ω -(b) Le module du Gain G -(c) La partie imaginaire de la pulsation ω -(d) La phase du Gain G | 15 |
| 6 | Affichage des résultats python pour $k=1$ et $\nu = 0.02$: -(a) La partie réelle de la pulsation ω -(b) Le module du Gain G -(c) La partie imaginaire de la pulsation ω -(d) La phase du Gain G | 16 |

| | | |
|---|--|----|
| 7 | Affichage des résultats obtenus pour la partie réelle de ω et $\nu = 0.02$: -(a) Le module du gain -(b) La phase | 17 |
|---|--|----|

1 Introduction

1.1 Contexte

Les vibrations induites par des tourbillons (Vortex-Induced Vibrations, VIV) constituent un phénomène clé dans le domaine de l'interaction fluide-structure. Le travail présenté dans l'article joint, qui sert de base à cette étude, explore la dynamique de tels systèmes lorsqu'ils sont soumis à un champ de vitesse uniforme.

Ce projet a pour objectif d'étudier la stabilité linéaire d'un câble infiniment long, soumis à ces vibrations dans un écoulement uniforme. En s'appuyant sur le modèle proposé dans l'article original, ce travail se concentre principalement sur la compréhension de la méthodologie employée et l'étude des résultats obtenus lors des simulations de phénomènes complémentaires comme l'effet de l'amortissement.

La démarche adoptée repose dans un premier temps sur l'appropriation du modèle théorique et des équations liées puis de la compréhension et de l'implémentation du code fourni en début de séance.

1.2 Système différentiel

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \nu(\epsilon + \frac{\gamma}{\mu}u) \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = Mu^2 q \\ \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \nu\epsilon u^2 \frac{\partial y}{\partial t} + u^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{cases}$$

Soit $\alpha = \epsilon + \frac{\gamma}{\mu}u$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \nu\alpha \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - Mu^2 q = 0 \\ \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \nu\epsilon u^2 \frac{\partial y}{\partial t} + u^2 q - A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Une fois mis sous un système matricielle on obtient :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\epsilon u \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -Mu^2 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ q \end{pmatrix}$$

en implémentant $X = \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{q} \end{bmatrix} e^{i(\omega t + kz)}$ on obtient alors :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \nu \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\epsilon u \end{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial t} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} + \begin{pmatrix} 0 & -Mu^2 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} X = 0$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= i\omega \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{q} \end{bmatrix} e^{i(\omega t + kz)} & \frac{\partial X}{\partial z} &= ik \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{q} \end{bmatrix} e^{i(\omega t + kz)} \\ \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} &= -\omega^2 \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{q} \end{bmatrix} e^{i(\omega t + kz)} & \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} &= -k^2 \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{q} \end{bmatrix} e^{i(\omega t + kz)} \end{aligned}$$

Qui nous donne ainsi :

$$\Rightarrow \underbrace{\left[-\omega^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -A & 1 \end{pmatrix} + \nu i\omega \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\epsilon u \end{pmatrix} - k^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -Mu^2 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} \right]}_{=S} \begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{q} \end{bmatrix} e^{i(\omega t + kz)} = 0$$

Soit la matrice S :

$$S = \begin{bmatrix} -\omega^2 + i\nu\alpha\omega + k^2 & -Mu^2 \\ A\omega^2 & -\omega^2 - i\nu\epsilon u\omega + u^2 \end{bmatrix}$$

2 Problème sans amortissement

Pour implémenter le problème sans amortissement il nous suffit simplement de prendre le système précédent et de poser la vélocité du flux sans dimensions $\nu = 0$.

Ainsi la matrice S devient :

$$S = \begin{bmatrix} -\omega^2 + k^2 & -Mu^2 \\ A\omega^2 & -\omega^2 + u^2 \end{bmatrix}$$

2.1 Pulsations propres

On cherche alors à avoir le déterminant de cette matrice nul.

$$\text{Det}(S) = \omega^4 - u^2\omega^2 - k^2\omega^2 + k^2u^2 + AMu^2\omega^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega^4 + [u^2(AM - 1) - k^2] \omega^2 + k^2u^2 = 0$$

Le discriminant est alors : $\Delta(k, u) = b^2 - 4ac = [-u^2(AM - 1) - k^2]^2 - 4k^2u^2$ avec les solutions :

$$\Omega(k, u)_{\pm} = \omega(k, u)_{\pm}^2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{k^2 + u^2(1 - AM) \pm \sqrt{\Delta(k, u)}}{2}$$

$$\sqrt{\Omega(k, u)_{\pm}} = \omega(k, u)_{\pm} = \sqrt{\frac{k^2 + u^2(1 - AM) \pm \sqrt{\Delta(k, u)}}{2}}$$

$$\omega(k, u)_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[k^2 + u^2(1 - AM) \pm \sqrt{(k^2 + u^2(1 - AM))^2 - 4k^2u^2} \right]^{1/2}$$

Ces solutions sont complexe si $\Delta(k, u) < 0$.

$$\Delta(k, u) = (k^2 + u^2(1 - AM))^2 - 4k^2u^2 < 0$$

Soit l'inégalité suivante :

$$(k^2 + u^2(1 - AM))^2 < 4k^2u^2 \Rightarrow -2ku < k^2 + u^2(1 - AM) < 2ku$$

On résout alors (avec l'aide de ChatGPT) :

$$k^2 + u^2(1 - AM) < 2ku$$

$$k^2 - 2ku + u^2(1 - AM) < 0$$

$$\Rightarrow \Delta' = 4u^2 - 4u^2(1 - AM) = 4u^2AM$$

$$\sqrt{\Delta'} = 2u\sqrt{AM}$$

et on obtient ainsi :

$$k_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta'}}{2a} = \frac{2u \pm 2u\sqrt{AM}}{2} = u(1 \pm \sqrt{AM})$$

Nous pouvons alors définir k_{inf} et k_{sup} comme les deux bornes inférieure et supérieure entre lesquelles k , le nombre d'onde sans dimension (de la structure), nous renvoie une solution complexe.

$$k_{\text{inf}} = u(1 - \sqrt{AM}) \quad k_{\text{sup}} = u(1 + \sqrt{AM})$$

Pour un $\Delta(k,u) < 0$ on peut alors définir ω^2 tel que :

$$\omega^2 = Re(\omega^2) + i \cdot Im(\omega^2)$$

$$\text{soit : } \omega = \pm Re(\omega) \pm i \cdot Im(\omega)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [\pm Re(k^2 + u^2(1 - AM) + \dots) \pm i \cdot Im(k^2 + u^2(1 - AM) + \dots)]^{1/2}$$

On part alors de l'inégalité suivante :

$$\Delta(k,u) = (k^2 + u^2(1 - AM))^2 - 4k^2u^2 = 0$$

$$\Rightarrow -2ku < k^2 + u^2(1 - AM) < 2ku$$

Pour trouver :

2.1.1 Partie réelle

$$\Rightarrow 0 < k^2 + 2ku + u^2(1 - AM) < 4ku$$

donc : $k^2 + 2ku + u^2(1 - AM)$ la racine $\Delta > 0$, nous donne la partie réelle.

$$Re(\omega(k,u)_{\pm}) = \pm [k^2 + 2ku + u^2(1 - AM)]$$

2.1.2 Partie imaginaire

$$\Rightarrow -4ku < k^2 - 2ku + u^2(1 - AM) < 0$$

donc : $k^2 - 2ku + u^2(1 - AM)$ la racine de $\Delta < 0$, nous donne la partie imaginaire.

$$Im(\omega(k,u)_{\pm}) = \pm i [k^2 - 2ku + u^2(1 - AM)]$$

2.1.3 Solution complète

$$\omega(k,u)_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\pm (k^2 + 2ku + u^2(1 - AM)) \pm i (k^2 - 2ku + u^2(1 - AM))]^{1/2}$$

2.2 Stabilité des solutions

2.2.1 Lorsque k à l'intérieur des limites ($k_{inf} < k < k_{sup}$)

Les solutions sont instables lorsque ω possède une partie imaginaire. Cela signifie que les perturbations initiales sont amplifiées dans le temps, indiquant une instabilité dynamique.

Dans la solution ci-dessus des pulsations, dans le cas où :

$$k_{inf} < k < k_{sup}$$

Cela se produit physiquement lorsque la fréquence naturelle de l'oscillation de la structure est en résonance avec la fréquence de détachement des tourbillons/du sillage. A cet instant, l'interaction fluide-structure amplifie les vibrations amenant une instabilité temporelle, traduit par la partie imaginaire.

Ainsi on peut dire que :

- $\mathbf{Re}(\omega)$, correspond à la fréquence propre d'oscillation du système. Elle détermine à quelle vitesse les oscillations se produisent lorsqu'il y a instabilité.
- $\mathbf{Im}(\omega) > 0$, traduit l'amplitude des instabilité

2.2.2 Lorsque k en dehors des limites ($k_{inf} > k$) et ($k > k_{sup}$)

Dans le cas où k est en dehors de l'intervalle $[k_{inf}; k_{sup}]$ les solutions sont stables car les deux pulsations des oscillations de la structure et du sillage se détache. Cela signifie que les perturbations initiales s'amortissent avec le temps, le système retourne à son état d'équilibre il est donc stable. Physiquement cela se traduit par le fait que l'énergie du fluide vers le câble devient insuffisant pour compenser les pertes dues à l'amortissement.

2.3 Calcul du gain

Le gain est défini à partir par des équations en fonction d'amplitude tel que :

$$G(k, u) = \frac{\hat{q}}{\hat{y}} = \frac{A\omega^2}{\omega^2 - u^2} \quad (1)$$

On décompose dans un premier temps les solutions des équations différentielles pour $y(z, t)$ et $q(z, t)$ où on exprime sous forme complexe par :

$$[y, q] = [\hat{y}, \hat{q}]e^{i(\omega t - kz)}$$

Dans le modèle sans amortissement on y substitue les expressions afin d'obtenir une relation entre \hat{q} et \hat{y} . Pour cela on rappelle les équations sans amortissement en \mathbf{y} et \mathbf{q} :

- Pour y :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = Mu^2 q$$

- Pour q :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - u^2 q = A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

On rappelle les dérivées temporelles et spatiales avant de les substituer :

- Pour $y(z, t)$:

Selon t :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 \hat{y} e^{i(\omega t - kz)}$$

Selon z :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -k^2 \hat{y} e^{i(\omega t - kz)}$$

- Pour $q(z, t)$:

Selon t :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\omega^2 \hat{q} e^{i(\omega t - kz)}$$

On substitue maintenant dans l'équation pour la variable de sillage $q(z,t)$:

$$-\omega^2 \hat{q} - u^2 \hat{q} = A(-\omega^2 \hat{y}) \Leftrightarrow \hat{q} = \frac{-A\omega^2}{\omega^2 - u^2} \hat{y} \quad (2)$$

De même dans l'équation du déplacement :

$$\hat{q} = \frac{-\omega^2 + k^2}{Mu^2} \hat{y} \quad (3)$$

Nous avons à cette étape ci deux équations liant \hat{q} , en égalant ces deux équations on retrouve :

$$\frac{-\omega^2 + k^2}{Mu^2} = \frac{-A\omega^2}{\omega^2 - u^2} \quad (4)$$

On retrouve finalement :

$$G(k,u) = \frac{\hat{q}}{\hat{y}} = \frac{A\omega^2}{\omega^2 - u^2}$$

2.4 Programmation en python

2.4.1 Lecture des paramètres

Les paramètre par défaut utilisé sont les suivants :

| Paramètre | Valeur | Paramètre | Valeur |
|--------------------|--------|------------------|-----------|
| A | 12 | μ | 1 |
| M | 0.02 | γ | 0.5 |
| ξ | 1.0 | ν | 0 |
| u | 1 | ϵ | 10^{-4} |
| k_{start} | 0 | k_{end} | 2 |
| k_{ref} | 1 | nombre de point | 101 |

TABLE 1 – Paramètres par défaut du fichié `default.py`.

2.4.2 Vecteur \mathbf{k}

On rappelle que les limites sont $k_{\text{inf}} = u(1 - \sqrt{AM})$ et $k_{\text{sup}} = u(1 + \sqrt{AM})$ et que le vecteur \mathbf{k} soit défini dans l'intervalle $[0,2]$.

On a alors :

$$k_{\text{inf}} = 1 - 0.4899 \approx 0.51, \quad k_{\text{sup}} = 1 + 0.4899 \approx 1.49.$$

2.4.3 Graphiques et figures

Les parties réelles et imaginaires de ω confirment les zones d'instabilité et de stabilité (en fonction des k_{lim}).

2.5 Résultats

| k | Discriminant | ω_1 | ω_2 | ω_3 | ω_4 |
|------|--------------|----------------|----------------|-----------------|-----------------|
| 0.00 | 0.58 | 0.87 | 0.00 | 0.00 | -0.87 |
| 0.20 | 0.48 | 0.86 | 0.23 | -0.23 | -0.86 |
| 0.40 | 0.21 | 0.83 | 0.48 | -0.48 | -0.83 |
| 0.50 | 0.02 | 0.76 | 0.66 | -0.66 | -0.76 |
| 0.60 | -0.19 | $0.76 + 0.14j$ | $0.76 - 0.14j$ | $-0.76 + 0.14j$ | $-0.76 - 0.14j$ |
| 0.80 | -0.60 | $0.87 + 0.22j$ | $0.87 - 0.22j$ | $-0.87 + 0.22j$ | $-0.87 - 0.22j$ |
| 1.00 | -0.90 | $0.97 + 0.24j$ | $0.97 - 0.24j$ | $-0.97 + 0.24j$ | $-0.97 - 0.24j$ |
| 1.20 | -0.92 | $1.07 + 0.22j$ | $1.07 - 0.22j$ | $-1.07 + 0.22j$ | $-1.07 - 0.22j$ |
| 1.40 | -0.44 | $1.17 + 0.14j$ | $1.17 - 0.14j$ | $-1.17 + 0.14j$ | $-1.17 - 0.14j$ |
| 1.50 | 0.06 | 1.28 | 1.18 | -1.18 | -1.28 |
| 1.60 | 0.78 | 1.45 | 1.10 | -1.10 | -1.45 |
| 1.80 | 3.04 | 1.69 | 1.06 | -1.06 | -1.69 |
| 2.00 | 6.66 | 1.92 | 1.04 | -1.04 | -1.92 |

TABLE 2 – Tableau pour k , le discriminant et les valeurs de ω

On observe bien que le discriminant devient négatif pour $k_{\text{inf}} < k < k_{\text{sup}}$ introduisant au passage des solutions complexe comme expliqué précédement.

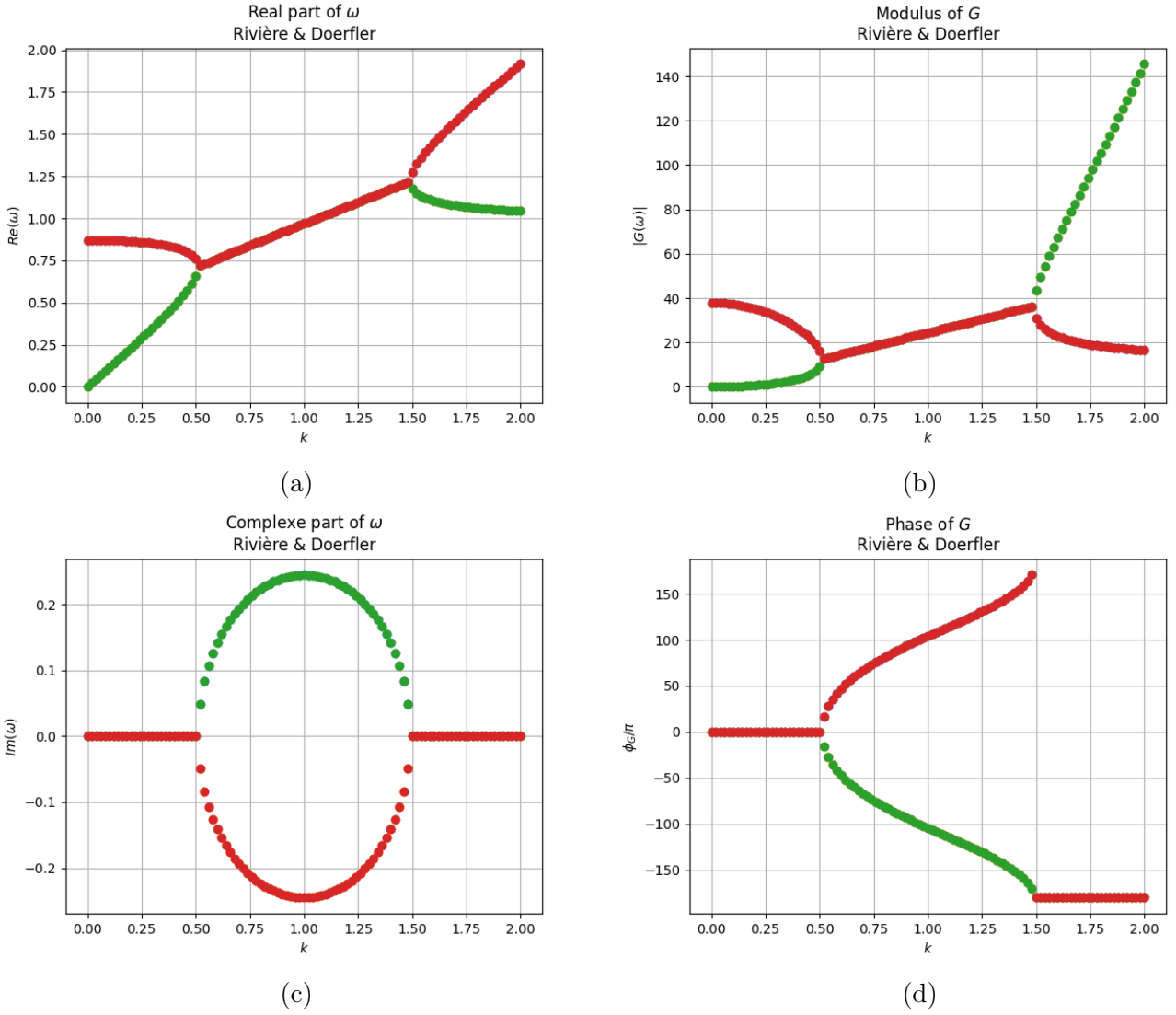


FIGURE 1 – Représentation des résultats obtenus par le code python pour :
 -(a) La partie réelle de la pulsation ω -(b) Le module du Gain G
 -(c) La partie imaginaire de la pulsation ω -(d) La phase du Gain G

On remarque alors, sur la **Figure 1.(a)**, que les deux pulsations des oscillations de la structure et du sillage convergent autour de $k \simeq 0.5$, tandis que le détachement se produit à $k \simeq 1.5$. On peut aussi trouver les valeurs de :

- ω_{inf} pour $k_{\text{inf}} = 0.52 \simeq 0.5101$: $\Rightarrow \omega_{\text{inf}} : \pm 0.719 \pm i0.049$
- ω_{sup} pour $k_{\text{sup}} = 1.48 \simeq 1.4899$: $\Rightarrow \omega_{\text{sup}} : \pm 1.216 \pm i0.049$

On remarque les mêmes parties imaginaires entre ω_{inf} et ω_{sup} . Le code nous permet de trouver ω_{max} approché tel que :

$\omega_{\text{max}} = 0.970 + i 0.245$, associé à $k = 0.98$.

On vérifie alors avec la formule théorique :

$$\omega_{\text{max}} = u \sqrt{1 - \frac{AM}{4}} + iu \frac{\sqrt{AM}}{2}$$

qui nous donne :

$$\omega_{\text{max}} \simeq 0.9695 + i 0.2449$$

Dans l'article "*A linear stability approach to vortex-induced vibrations and waves*", il est décrit que la fréquence des oscillations du sillage reste constante contrairement aux oscillations de la structure qui elles augmentent linéairement en même temps que k .

Cela peut s'interpréter par le fait que u la vitesse du fluide reste inchangée dans ce cas précis, contrairement à k , le nombre d'onde (de la structure), que l'on fait varier ce qui impacte forcément notre câble sous tensions.

Il est alors plus judicieux de représenter la **Figure 1.(a)** comme tel :

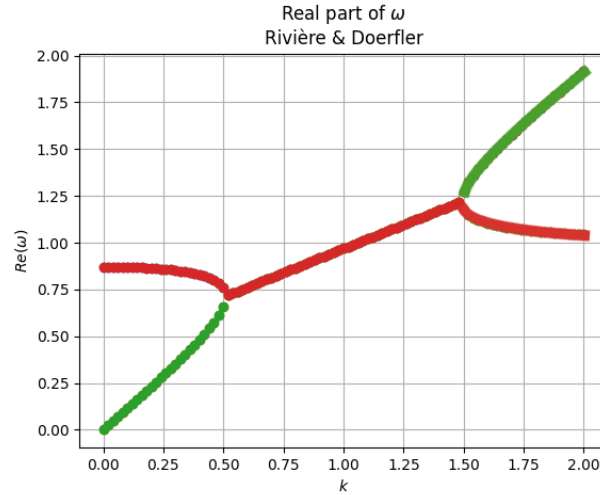


FIGURE 2 – **Figure 1.(a)** corrigé

Avec en rouge les fréquences d'oscillation du sillage et en vert celle de la structure.

2.6 Cas pour $k = 1$

On fixe dans cette partie k à 1. On fait cependant varier u dans l'intervalle $[0;3]$ afin d'afficher des figures similaires à celles de l'article.

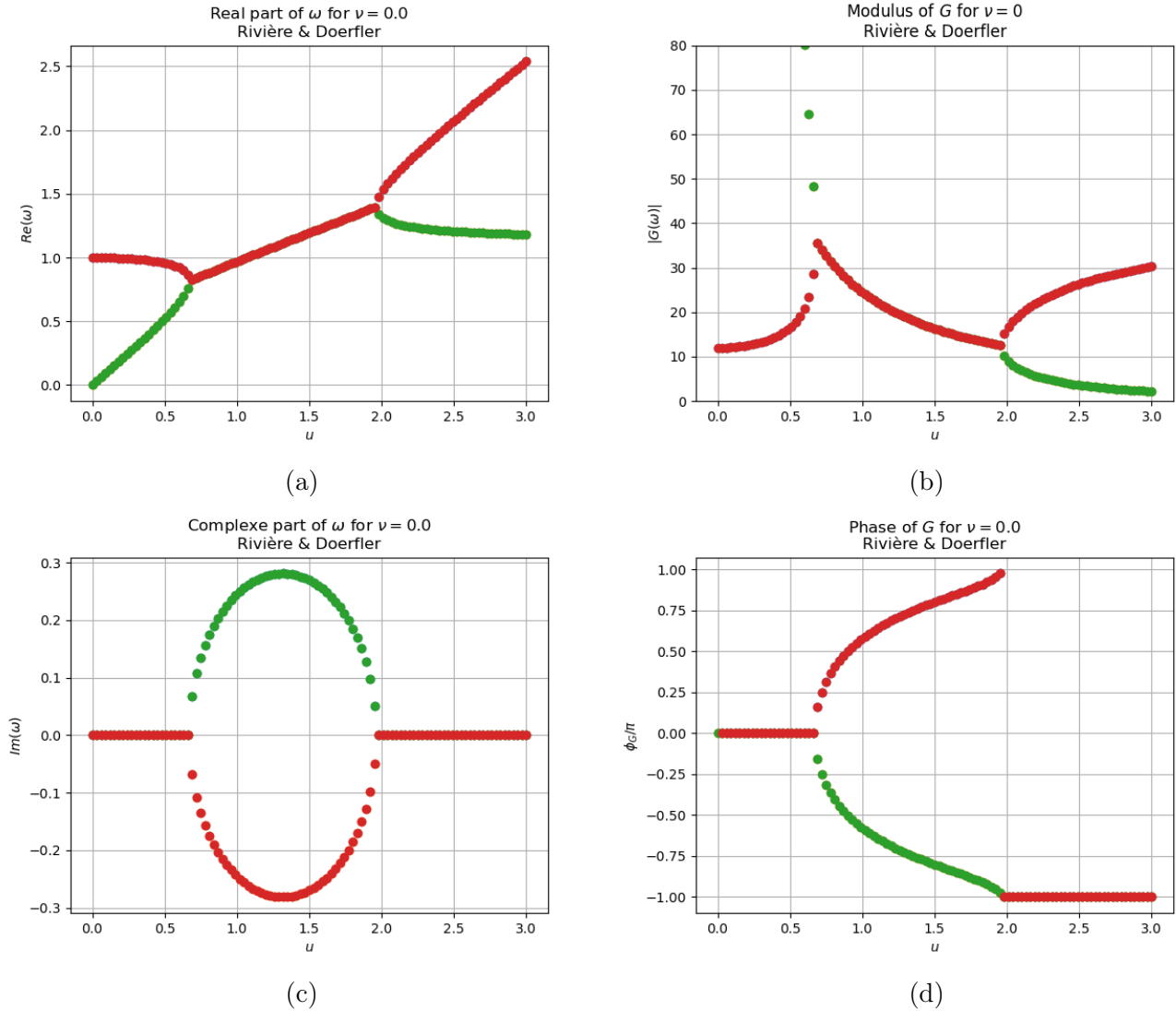


FIGURE 3 – Représentation des résultats obtenus par le code python pour :
 -(a) La partie réelle de la pulsation ω -(b) Le module du Gain G
 -(c) La partie imaginaire de la pulsation ω -(d) La phase du Gain G

En faisant varier u et en fixant k on retrouve les figures de l'article avec une zone d'instabilité comprise lorsque que $\frac{k}{1+\sqrt{AM}} < u < \frac{k}{1-\sqrt{AM}}$, traduit par la sous-figure (c). On remarque également que la fréquence des oscillations induites dépendent directement de la vitesse et augmentent avec une vitesse plus élevée, cela se visualise par l'augmentation de la partie réelle des racines. On observe bien une décroissance du gain dans la zone $\frac{k}{1+\sqrt{AM}} < u < \frac{k}{1-\sqrt{AM}}$ ce qui rejoint les résultats de l'article. Finalement fixer le nombre d'onde k équivaut à remplacer la dérivée seconde en envergure du déplacement dans par une constante multipliée par le déplacement. Après simulations, on observe la même instabilité liée à la fusion des fréquences de deux ondes.

On vérifie désormais si la solution ω est bien complexe dans l'intervalle :

$$\frac{k}{1 + \sqrt{AM}} < u < \frac{k}{1 - \sqrt{AM}}$$

Les 4 racines de ω_{inf} pour $u_{inf}=0.69\approx 0.67$ sont : $\Omega_{inf} : \pm 0.827 \pm i 0.067$

Les 4 racines de ω_{sup} pour $u_{sup}=1.95\approx 1.96$ sont : $\Omega_{sup} : \pm 1.396 \pm i 0.050$

2.7 Cas pour $u=1$ et $k=1$

Pour le cas où la vitesse et le vecteur k sont fixés, nous faisons varier maintenant la pulsation réelle dans l'intervalle $[0,2]$ et nous affichons le gain et la phase :

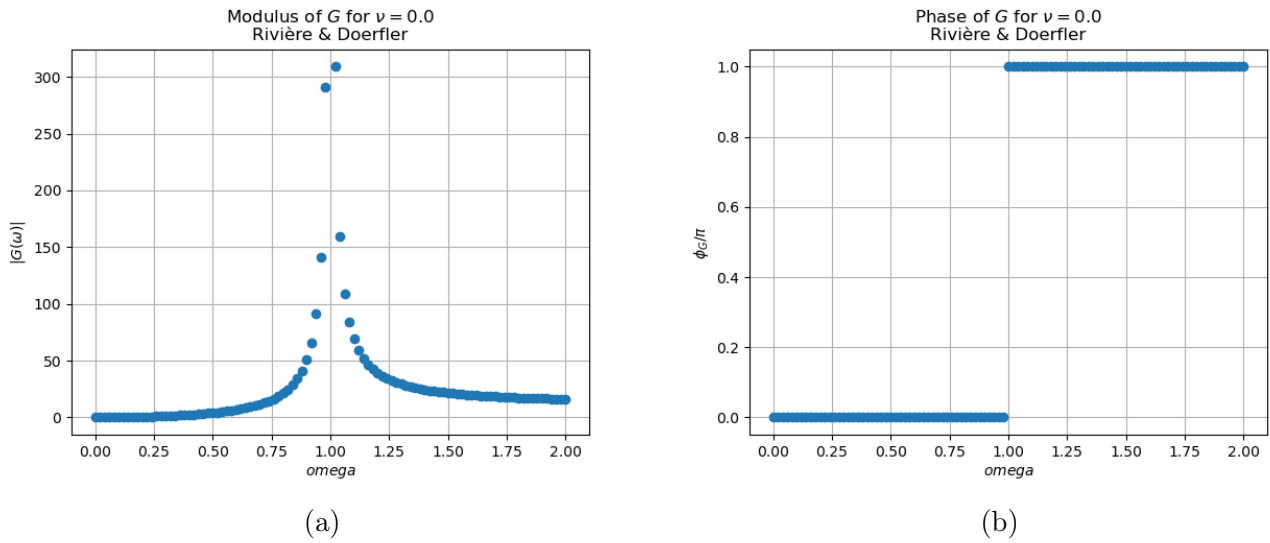


FIGURE 4 – Affichage des résultats obtenus pour la partie réelle de ω :
 -(a) Le module du gain -(b) La phase

Alors que les précédentes figures mettaient en avant deux solutions, ici le fait de n'étudier que la partie réelle des pulsations ω et de ne prendre que la valeur absolue de celles-ci nous font tracer une seule courbe par graphique.

Nous remarquons dans un premier temps que le gain atteint un pic de résonance pour une valeur de $\omega = 1$. Cette valeur particulière se reflète également sur la phase du module avec un changement de phase complet (π) en ce point.

C'est à dire que pour un couple de k et u fixés dans la zones d'instabilités, ces dernières vont augmenter jusqu'à rentrer en résonance pour une certaine valeur de pulsation puis décroître (à partir du changement de phase).

3 Problème avec amortissement

Pour implémenter le problème avec ammortissement, on part donc de la matrice :

$$S = \begin{bmatrix} -\omega^2 + i\nu\alpha\omega + k^2 & -Mu^2 \\ A\omega^2 & -\omega^2 - i\nu\epsilon u\omega + u^2 \end{bmatrix}$$

3.1 Pulsation propres :

On cherche alors :

$$\text{Det}(S) = 0$$

avec

$$\begin{aligned} \text{Det}(S) &= \omega^4 + i\nu\epsilon u\omega^3 - \omega^2 u^2 - i\nu\alpha\omega^3 + \nu^2\epsilon\alpha u\omega^2 + i\nu\alpha u^2\omega - k^2\omega^2 - i\nu\epsilon u k^2\omega + k^2 u^2 + u^2 A M \omega^2 \\ &= \omega^4 + i\nu(\epsilon u - \alpha)\omega^3 + (-u^2(1 - AM) + \nu^2\epsilon\alpha u - k^2)\omega^2 + i\nu(\alpha u^2 - \epsilon u k^2)\omega + k^2 u^2 \end{aligned}$$

rappelons que $\alpha = \xi + \frac{\gamma}{\mu}u = \xi + \beta u$, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \text{Det}(S) &= \omega^4 + i\nu(-\xi + u(\epsilon - \beta))\omega^3 + (-u^2(1 - AM) - k^2 + \nu^2\epsilon(\xi u + \beta u^2))\omega^2 \\ &\quad + i\nu((\xi + \beta u)u^2 - \epsilon u k^2)\omega + k^2 u^2 \end{aligned}$$

ou pour simplifié :

$$\text{Det}(S) = \omega^4 + a_1\omega^3 + a_2\omega^2 + a_3\omega + a_4 = 0$$

avec,

$$\begin{aligned} a_1 &= i\nu(-\xi + u(\epsilon - \beta)) & a_2 &= (-u^2(1 - AM) - k^2 + \nu^2\epsilon(\xi u + \beta u^2)) \\ a_3 &= i\nu((\xi + \beta u)u^2 - \epsilon u k^2) & a_4 &= k^2 u^2 \end{aligned}$$

3.2 $\nu = 0.02$

On peut alors imposer $\nu = 0.02$ dans notre problème et ainsi avoir un amortissement.

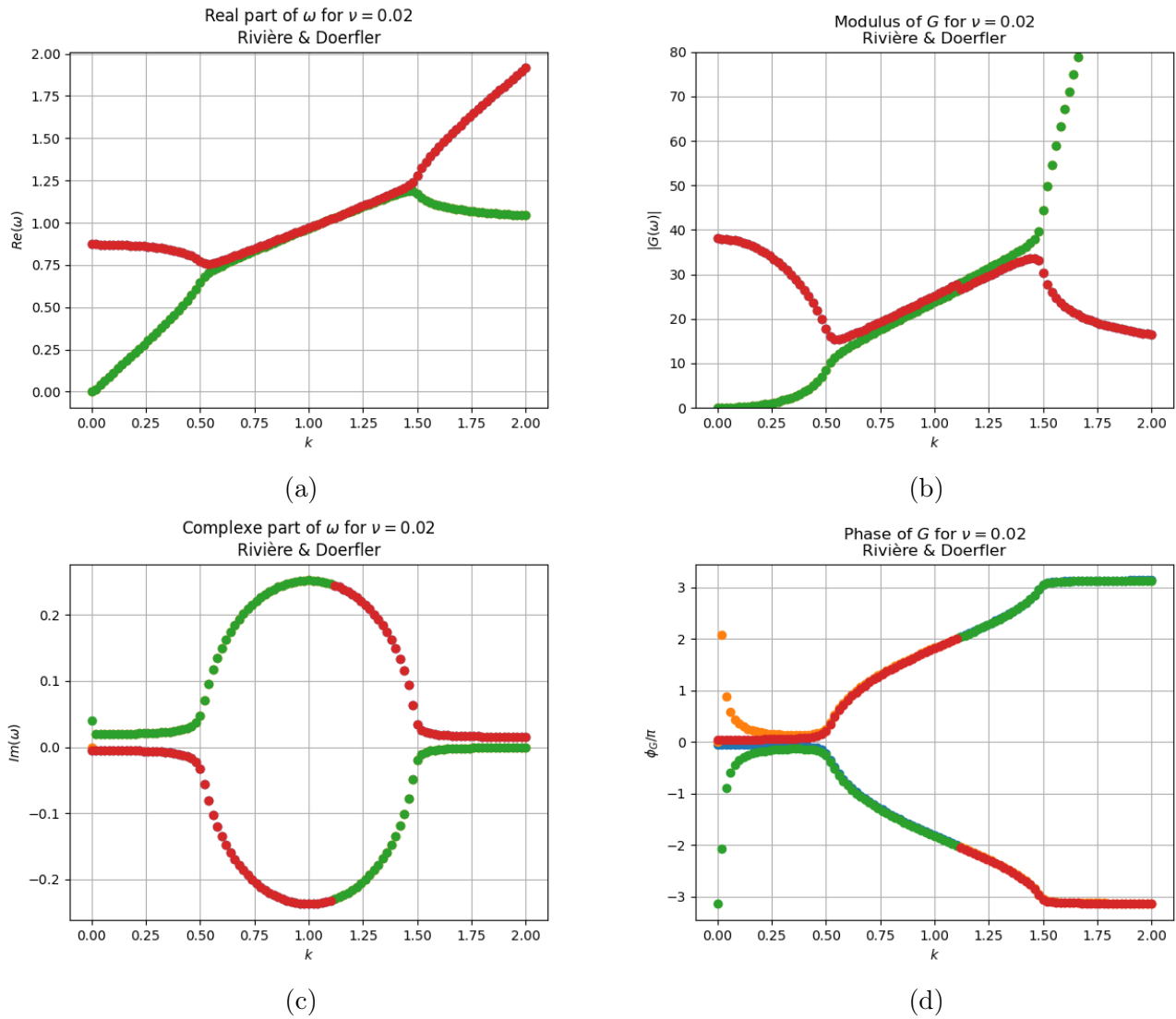


FIGURE 5 – Représentation des résultats obtenus par le code python avec $\nu = 0.02$ pour :

- (a) La partie réelle de la pulsation ω
- (b) Le module du Gain G
- (c) La partie imaginaire de la pulsation ω
- (d) La phase du Gain G

On retrouve les mêmes graphiques que pour la **Figure 1**. On remarque malgré tout que la solution reste instable peu importe u car on retrouve une partie imaginaire. Il est aussi possible de remarquer que les différentes pulsations des parties réelles ne se superposent pas réellement.

3.3 Cas pour $k = 1$ et $\nu = 0.02$

On fixe dans cette partie k à 1 et on ajoute un amortissement de $\nu = 0.02$. On fait cependant varier u dans l'intervalle $[0;3]$.

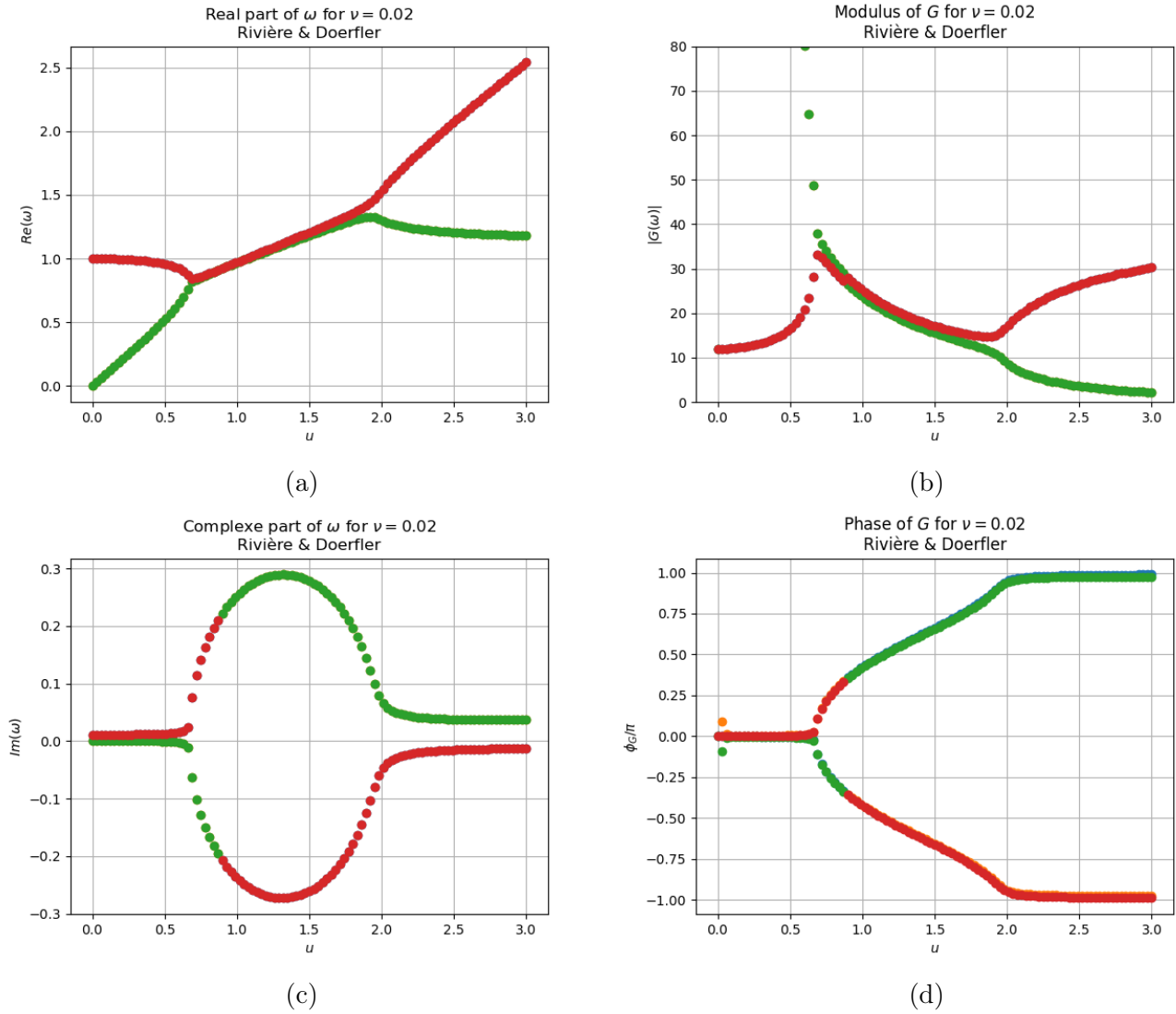


FIGURE 6 – Affichage des résultats python pour $k=1$ et $\nu = 0.02$:
 -(a) La partie réelle de la pulsation ω -(b) Le module du Gain G
 -(c) La partie imaginaire de la pulsation ω -(d) La phase du Gain G

On vérifie désormais si la solution ω est bien complexe dans l'intervalle :

$$\frac{k}{1 + \sqrt{AM}} < u < \frac{k}{1 - \sqrt{AM}}$$

Les 4 racines de ω_{inf} pour $u_{inf}=0.659 \approx 0.67$ sont :

Omega inf : $\pm 0.869 \pm i 0.024$

Les 4 racines de ω_{sup} pour $u_{sup}=1.95 \approx 1.96$ sont :

Omega inf : $\pm 1.469 \pm i 0.079$

3.4 Cas pour $u=1$, $k=1$ et $\nu = 0.02$

Pour le cas où la vitesse et le vecteur k sont fixés, nous faisons varier maintenant la pulsation réelle dans l'intervalle $[0,2]$ et nous affichons le gain et la phase :

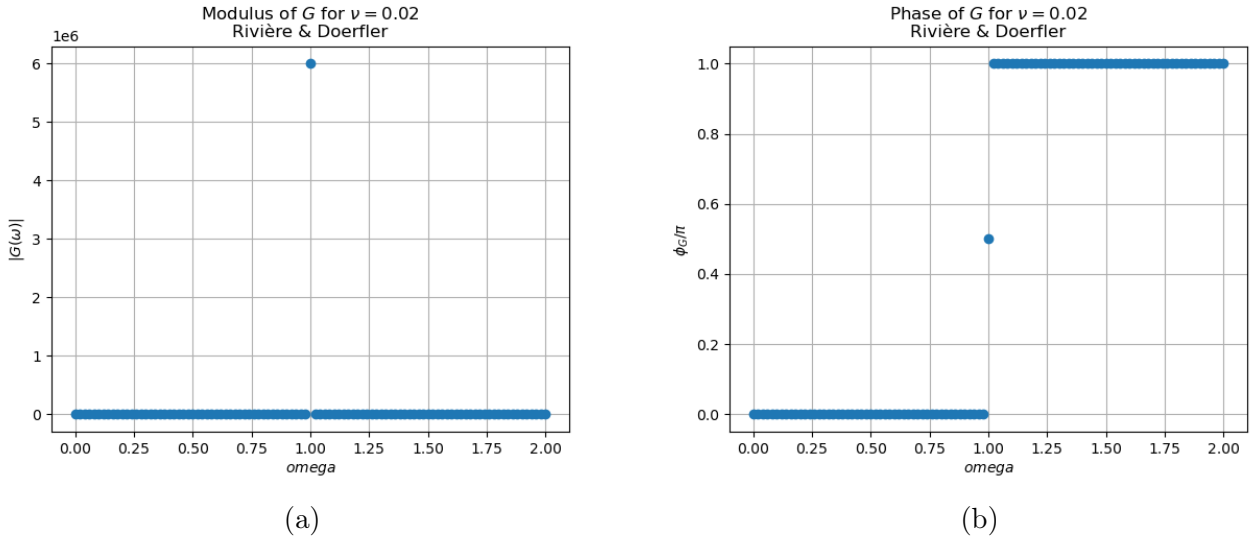


FIGURE 7 – Affichage des résultats obtenus pour la partie réelle de ω et $\nu = 0.02$:
 -(a) Le module du gain -(b) La phase

L'étude de la partie réelle des pulsations omega ne nous font tracer une seule courbe par graphique.

Comme précédemment nous notons que le gain atteint un pic de résonnance pour une valeur de $\omega = 1$. Cette valeur particulière se reflète également sur la phase du module avec un changement de phase complet (π) en ce point.

Ce phénomène s'avère être bien plus marqué pour la cas avec amortissement car la bande de résonnance n'est désormais plus aussi large et est même contrainte à l'unique valeur de $\omega = 1$. En effet, pour le cas avec amortissement seul un point critique apparaît. On note cependant l'augmentation de l'intensité du module du gain, passant de 200 pour le mode sans amortissement à 10^6 pour le cas avec amortissement.

Cette différence majeure dans la réponse en pulsation du système vient de la définition du gain pour un système amortis qui est :

$$G(k,u) = \frac{\hat{q}}{\hat{y}} = \frac{A\omega^2}{\omega^2 - u^2 + i \nu \epsilon u \omega}$$

4 Conclusion

Durant ces séances nous avons étudié la stabilité linéaire d'un câble soumis à des vibrations induites par des tourbillons dans un écoulement uniforme. Nous avons exploité deux configurations principales : sans amortissement et avec amortissement.

Les cas sans amortissement sont caractérisés par des zones d'instabilité où les solutions complexes pour les pulsations propres induisent de l'instabilité. On définit les limites de stabilités grâce au paramètre k , où les interactions fluide-structure amplifient les oscillations du câble. Les simulations numériques ont permis de vérifier ces résultats théoriques, notamment à travers la visualisation des parties réelles et imaginaires des pulsations.

L'introduction de l'amortissement a révélé une réduction significative de la bande de résonance. Bien que le système demeure instable pour certaines configurations, l'amortissement modifie profondément la réponse en pulsation en resserrant les pics de résonance autour d'une valeur critique de ω .

les phénomènes de vibrations induites par des tourbillons. Ils soulignent également l'importance de paramètres tels que k et u ainsi que l'amortissement dans la stabilité des systèmes étudiés.

5 Référence

A linear stability approach to vortex-induced vibrations and waves
de : R. Violette, E. de Langrea, J. Szydlowskib