

# BARRAGES ET RISQUES D'INONDATIONS



03/06/2017

Pierre-Elie Bélouard  
Thomas Jasmin  
X2015



## TABLE DES MATIÈRES

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	De l'importance des barrages en France . . . . .	3
1.2	Problématiques économique, sociétale et environnementale . . . . .	4
1.3	Problématiques de modélisation et de simulation . . . . .	5
1.4	Plan de l'étude . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Modélisation mathématique du phénomène et simulations naïves</b>	<b>5</b>
2.1	Modélisation des précipitations en amont du barrage par un processus de Poisson . . . . .	5
2.2	Simulation du processus de Poisson composé . . . . .	6
2.3	Modélisation du fonctionnement d'un barrage . . . . .	7
2.4	Calcul du débit de la rivière en vallée . . . . .	9
2.5	Simulation naïve pour un barrage . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Utilisation d'un changement de probabilité pour simuler les événements rares</b>	<b>13</b>
3.1	Transformation d'Esscher . . . . .	13
3.1.1	Principe . . . . .	13
3.1.2	Théorème . . . . .	13
3.1.3	Calculs . . . . .	14
3.2	Simulations . . . . .	15
3.2.1	Etude d'un barrage . . . . .	15
3.2.2	Etude du débit en vallée . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Raffinements du modèle</b>	<b>20</b>
4.1	Corrélation des précipitations . . . . .	20
4.2	Modélisation des précipitations en aval du barrage . . . . .	21
4.3	Impact du niveau de corrélation et de la prise en compte des précipitations en aval sur le débit observé en vallée . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>24</b>



FIGURE 1 – Vue aérienne du lac de Serre-ponçon

# 1 INTRODUCTION

## 1.1 DE L'IMPORTANCE DES BARRAGES EN FRANCE

La France métropolitaine compte près de 450 barrages, et ces derniers y jouent un rôle crucial à bien des égards. Tout d'abord, de nombreux barrages sont associés à une **centrale hydroélectrique**. L'hydroélectricité, avec un puissance installée de 25 GW (soit l'équivalent de 25 réacteurs nucléaires de deuxième génération) est la deuxième source d'énergie en France (après le nucléaire, justement), et contribue à hauteur de 12 % à la production totale d'électricité en métropole. L'un des avantages majeurs de l'énergie hydroélectrique est sa très grande flexibilité : en quelques secondes, il est possible de passer d'une production quasi-nulle à une production extrêmement élevée afin de faire face à un pic de demande.

Mais les barrages hydroélectriques jouent également un rôle extrêmement important dans la **prévention des catastrophes naturelles** associées à des événements climatiques extraordinaires : en cas de sécheresse, les barrages représentent une importante réserve d'eau permettant de maintenir l'irrigation. De manière dual, les barrages permettent également de réguler le débit des principaux cours d'eau lors d'importantes chutes d'eau, et ce afin de limiter le risque de crues dévastatrices dans les vallées. Les aménagements importants réalisés dans l'Après-Guerre ont ainsi été une révolution pour de nombreuses vallées alpines ou pyrénéennes : la construction des barrages de Tignes et du Chevril sur l'Isère ont ainsi permis de sécuriser la haute vallée de la Tarentaise et ont permis l'incroyable développement touristique qui a fait de Tignes et Val d'Isère deux stations d'altitude de renom.



FIGURE 2 – Le barrage de Cap de Long, dans les Hautes-Pyrénées

## 1.2 PROBLÉMATIQUES ÉCONOMIQUE, SOCIÉTALE ET ENVIRONNEMENTALE

---

Lors de la réalisation d'un barrage, deux questions extrêmement importantes se posent alors :

1. Quel volume faut-il prévoir pour la retenue d'eau ?
2. Quel débit maximal est à prévoir en aval du barrage ?

Le **volume maximal** est lié à la géographie de la retenue d'eau, mais également à la nature des précipitations en amont du barrage. Il est important de dimensionner ce volume au plus juste : si le volume maximal est atteint, il faut alors utiliser les vannes de secours afin d'éviter un écroulement du barrage. Un débit phénoménal est alors envoyé dans la vallée, provoquant un danger d'inondation. Un sur-dimensionnement du barrage est par ailleurs associé à des coûts de construction et de maintenance très élevés, et peut également conduire à une catastrophe paysagère (si le taux de remplissage moyen du barrage est trop faible, le lac devient inesthétique).

Les conventions suivantes sont alors adoptées :

- Le **volume du barrage** sera défini comme un **quantile de niveau  $\alpha$** , c'est-à-dire comme le plus petit volume  $V_\alpha$  tel que la probabilité que le volume du barrage dépasse  $V_\alpha$  sur une durée d'une année soit inférieure à  $\alpha$ .
- Par la suite, nous prendrons  $\alpha = 10^{-6}$ .
- Sauf mention explicite du contraire, tous les volumes seront désormais exprimés en  $10^5 \text{ m}^3$ . Tous les débits seront exprimés en  $10^5 \text{ m}^3 \text{ par an}$ .

Remarquons qu'il est également important d'avoir une estimation du quantile de niveau  $\alpha$  pour le **débit du cours d'eau en vallée**, afin de dimensionner au mieux les infrastructures avales (lit du cours d'eau, ponts, réalisation de plans de prévention anti-inondation). C'est pourquoi nous n'allons pas uniquement nous concentrer sur le quantile de niveau  $\alpha$  pour le volume du barrage, mais étudierons également le quantile de niveau  $\alpha$  du débit en vallée, à la confluence de deux cours d'eau, chacun issu d'un lac en amont.

### 1.3 PROBLÉMATIQUES DE MODÉLISATION ET DE SIMULATION

---

Cette étude passe par une modélisation réaliste et basée sur des observations expérimentales des phénomènes suivants :

- Précipitations survenant en amont du barrage
- Fonctionnement du barrage : lien entre volume du barrage et débit à la sortie
- Corrélation éventuelle entre les précipitations survenant en amont des deux barrages.
- Précipitations survenant en aval, entre le barrage et le point de confluence des cours d'eau.

Les événements étudiés étant par ailleurs des **événements rares** ( $\alpha \leq 10^{-4}$ ), il sera nécessaire de mettre en œuvre des méthodes spécifiques pour les simuler.

### 1.4 PLAN DE L'ÉTUDE

---

La première partie de ce rapport présente la modélisation mathématique retenue. Nous détaillerons notamment les différents paramètres du modèle et expliquerons leur signification physique, puis expliquerons la non-pertinence des méthodes de simulation naïve pour de tels événements. La deuxième partie est consacrée à la mise en œuvre d'une méthode spécifique : un changement de loi par transformation d'Esscher. Nous analyserons la pertinence de cette méthode par la construction d'intervalles de confiance asymptotiques puis présenterons les résultats physiques obtenus par cette méthode. Enfin, la troisième partie se penche sur les moyens de raffiner le modèle afin d'obtenir des résultats plus réalistes et plus précis.

## 2

# MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DU PHÉNOMÈNE ET SIMULATIONS NAÏVES

---

### 2.1 MODÉLISATION DES PRÉCIPITATIONS EN AMONT DU BARRAGE PAR UN PROCESSUS DE POISSON

---

Comme le suggère l'énoncé, nous optons pour la modélisation suivante :

- Le barrage n'est alimenté que par les précipitations situées en amont du barrage. On néglige donc l'alimentation du barrage par les ruissellements, issus par exemple de la fonte des neiges. Ce modèle est particulièrement approprié pour les barrages de moyenne montagne (Auvergne, Cantal, où le manteau neigeux hivernal est extrêmement faible), ou pour les barrages de haute montagne à l'été et à l'automne (lorsque la fonte des neiges devient négligeable). Ce modèle ne convient pas pour les lacs d'altitude en hiver et au printemps, ainsi que pour tous les barrages situés en aval d'un autre lac : pour analyser ces autres cas de figure (ce que nous n'avons pas

fait), il faudrait réaliser une **autre modélisation avec un apport d'eau continu variable**.

- Les **précipitations** sont considérées comme **instantanées** : à la suite d'une précipitation, un volume de pluie  $V$  est tombé sur l'ensemble du bassin de la retenue d'eau, et ce volume d'eau  $V$  est ajouté instantanément au volume de la retenue d'eau. Cette modélisation est pertinente tant que la durée des précipitations est inférieure au pas de temps considéré. Dans notre étude, et du fait du nombre moyen de précipitations annuelles (une cinquantaine), le pas de temps est de l'ordre de quelques jours. Cette approximation semble donc justifiée, sachant que dans les montagnes françaises, la durée des précipitations dépasse rarement quelques jours, et est souvent très courte (violents orages de quelques heures dans les Pyrénées par exemple). Cette modélisation ne serait en revanche pas adaptée pour un barrage en zone équatoriale, où les précipitations sont quasiment continues tout au long de l'année : à Mawsynram (Est de l'Inde), il pleut par exemple près de 350 jours par an !
- Les dates d'arrivée des précipitations sont modélisées par un processus de Poisson :
  - Le nombre  $N_t$  de précipitations ayant touché le bassin du lac entre 0 et  $t$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda t$ .
  - $\forall t, s, t < s \Rightarrow N_t \text{ et } N_{s-t}$  sont indépendants.
- Les **intensités** des différentes précipitations, notées  $U_n$ , sont **indépendantes et identiquement distribuées** suivant une loi double exponentielle. Cette loi permet de créer une distinction entre les précipitations importantes (une succession d'orages violents, ou une pluie torrentielle sur une dizaine d'heures) et les précipitations plus modérées (petit orage, pluie régulière peu conséquente). Les trois paramètres à régler pour cette loi double exponentielle sont :  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  et  $b$ . Voici les interprétations physiques de ces différents paramètres :
  - $\delta_2$  caractérise le volume d'eau arrivant dans la retenue d'eau à la suite d'une faible précipitation.  $\delta_2$  peut être calculé à partir de la superficie du bassin hydrologique (correspondant à tous les points de la carte d'où les eaux termineront leur course dans le lac) et de la donnée des précipitations annuelles à cet endroit donné.
  - $\frac{\delta_1}{\delta_2}$  correspond au rapport entre l'intensité d'une forte précipitation et celle d'une faible précipitation.
  - $b$  correspond à la fréquence des fortes précipitations (nous avons par exemple choisi  $b = 0.2$ , ce qui signifie que 20 % des précipitations sont des fortes précipitations).

## 2.2 SIMULATION DU PROCESSUS DE POISSON COMPOSÉ

---

La fonction qui donne le volume cumulé d'arrivée d'eau dans la retenue du barrage est donc un **processus de Poisson composé** :

$$A_t = \sum_{n=1}^{N_t} U_n$$

Pour simuler ce processus de Poisson composé sur une période fixée  $T$  (un an par exemple), nous adoptons la méthode classique suivante :

- Nous simulons tout d'abord le **nombre de précipitations (sauts)**  $N = N_T$  sur la période  $T$  : il s'agit d'une loi de Poisson de paramètre  $\lambda T$  (où  $\lambda$  est le nombre moyen de précipitations

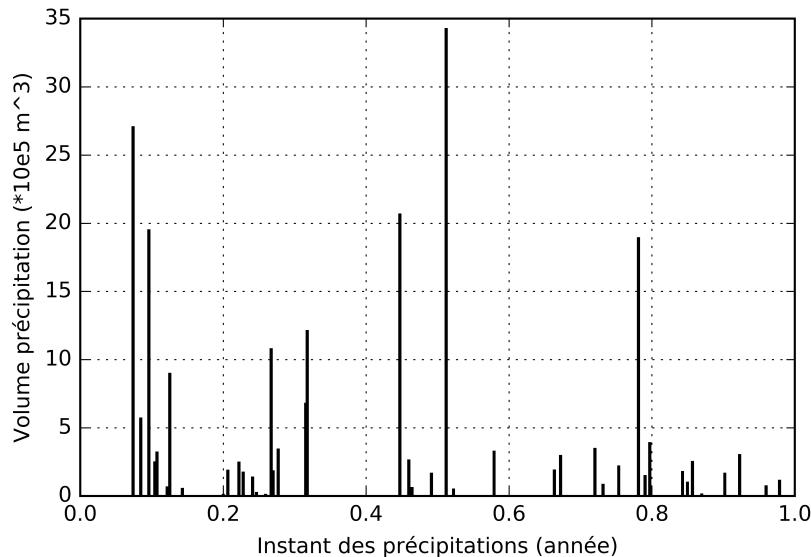


FIGURE 3 – Un exemple de simulation de précipitations sur une année

par an).

- Nous déterminons ensuite les **instants** des  $N$  précipitations : il s’agit de  $N$  variables aléatoires uniformes indépendantes sur  $[0, T]$ .
- Enfin, nous simulons les **intensités** des précipitations, c’est-à-dire  $N$  variables aléatoires indépendantes suivant des lois double exponentielle.

## 2.3 MODÉLISATION DU FONCTIONNEMENT D’UN BARRAGE

---

Comme suggéré par l’énoncé, nous modélisons le barrage de la manière suivante : le débit sortant à l’instant  $t$  d’une retenue d’eau ne dépend que de son volume à cet instant  $t$ , noté  $X_t$ , et s’écrit comme une fraction du volume :  $D_t = \frac{1}{\tau}X_t$ , où  $\tau$  (homogène à un temps) est le temps de demi-vidange du barrage. Nous prenons ici  $\tau = 1$  an.

L’équation différentielle intégrale régissant l’évolution du volume d’eau dans la retenue d’eau s’écrit donc ainsi :

1.

$$X_t = X_0 + A_t - \int_0^t \frac{1}{\tau} X_s \, ds$$

**Résolution de l’équation :**

- Le volume d’eau est une fonction continue par morceau du temps. Les discontinuités correspondent aux sauts liés aux arrivées soudaines de précipitations.

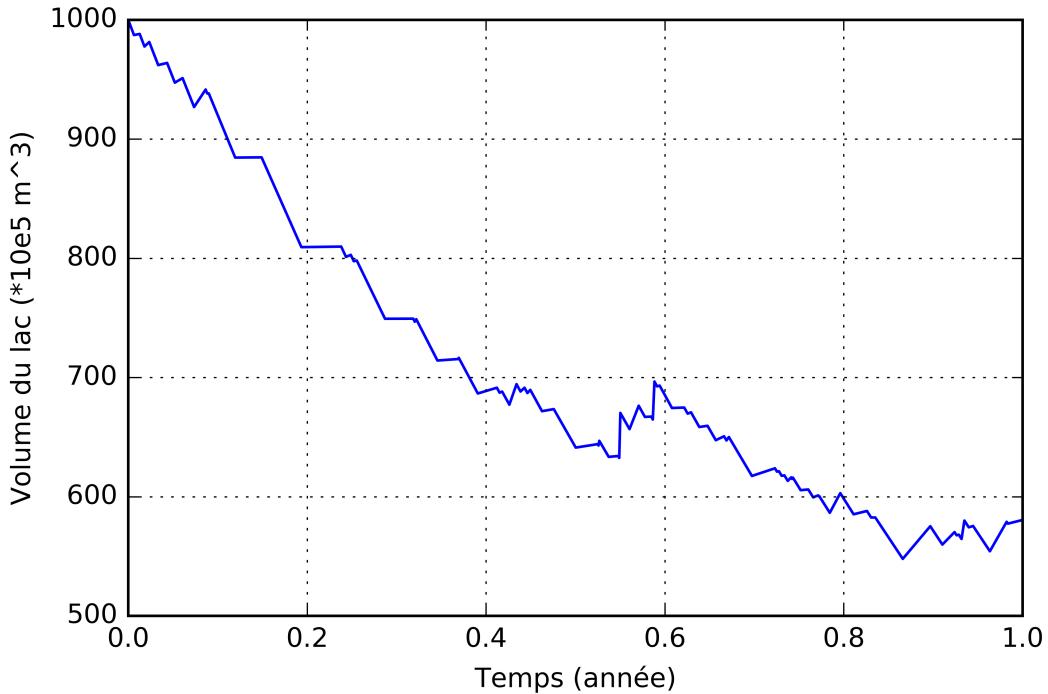


FIGURE 4 – Une simulation de la trajectoire du volume du barrage sur une année ( $V_0 = 1000$ )

- Notons  $t_1, \dots, t_N$  les instants d'arrivée des  $N$  précipitations. Le volume d'eau dans le barrage est continu entre  $t_i$  et  $t_{i+1}$  et s'exprime ainsi, pour  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  :

$$X_t = X_{t_i^+} \exp \frac{t - t_i}{\tau}$$

- Au niveau d'une discontinuité, on a la relation :

$$X_{t_i^+} = X_{t_i^-} + U_i$$

Ces formules permettent de simuler l'évolution du volume d'une retenue d'eau au cours du temps. Avant de réaliser ces simulations, il fallait trouver une valeur pertinente pour le volume initial  $V_0$ .

- Nous avons tout d'abord pensé à mettre une valeur de l'ordre de grandeur du volume du lac de Serre-Ponçon, qui a un volume de l'ordre du  $\text{km}^3$ , soit 10000 dans l'unité que nous utilisons ici ( $10^5 \text{ m}^3$ ). Cependant, nous avons constaté que ce volume était inadapté à la modélisation des précipitations et que, quelles que soient les précipitations, le barrage se vide très rapidement (voir graphique ci-joint).
- Nous aurions pu adapter les précipitations à la taille du bassin versant du lac de Serre-Ponçon : le bassin versant de ce lac étant gigantesque, il aurait fallu appliquer un coefficient multiplicateur (constant, de l'ordre de 100) pour avoir une modélisation des précipitations en accord avec le dimensionnement du lac de Serre-Ponçon.

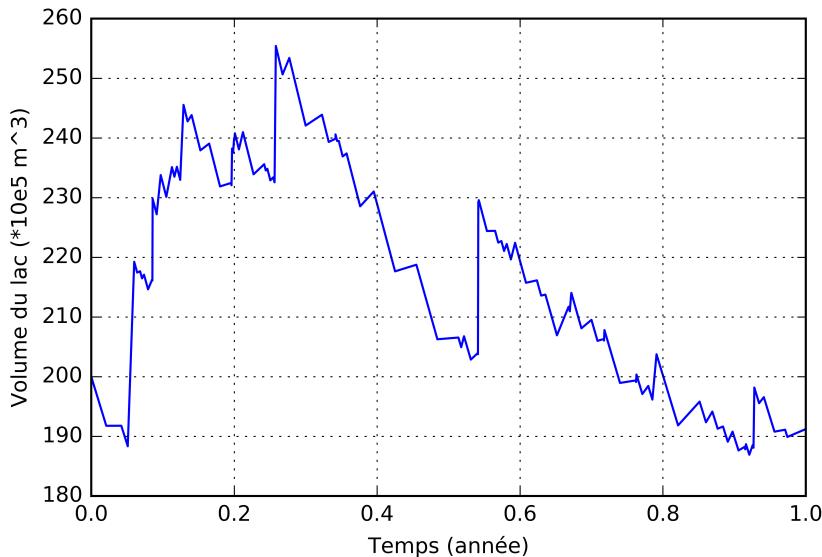


FIGURE 5 – Une simulation de la trajectoire du volume du barrage sur une année ( $V_0 = 200$ )

- Nous avons cependant opté pour une autre solution : chercher numériquement un **volume d'équilibre** pour le lac, égal à la moyenne empirique du volume du lac au bout d'un temps long (plusieurs années) pour de nombreux volumes initiaux différents. Cette moyenne empirique a été estimée à 200. Nous choisissons cette valeur d'équilibre comme volume initial dans nos simulations.
- Cette valeur de 201 (soit 2 millions de m<sup>3</sup>) est du même ordre de grandeur que de nombreux lacs montagnards de taille moyenne : le volume maximal du lac des Gloriettes est de 280, celui du lac de Cap de Long de 680. Ces deux lacs sont situés dans les Hautes-Pyrénées.

Tous les éléments sont désormais réunis pour simuler l'évolution du volume dans une retenue d'eau au cours du temps. Vous trouverez les graphiques correspondant à différentes trajectoires pour une durée d'étude égale à une année.

**Remarque :** En optant pour une telle modélisation, nous négligeons les variations du débit sortant liées au fonctionnement de la centrale hydroélectrique (variations essentiellement liées aux variations de la demande en électricité). Notons que, dans certains cas de surplus de production d'électricité, il existe même des centrales remontant l'eau de la vallée vers le barrage afin d'utiliser le surplus d'électricité en communiquant une énergie potentielle à cette masse d'eau.

## 2.4 CALCUL DU DÉBIT DE LA RIVIÈRE EN VALLÉE

---

Nous nous intéressons désormais à la variation du débit du torrent dans la vallée. Pour cela, nous nous plaçons dans le schéma suivant :

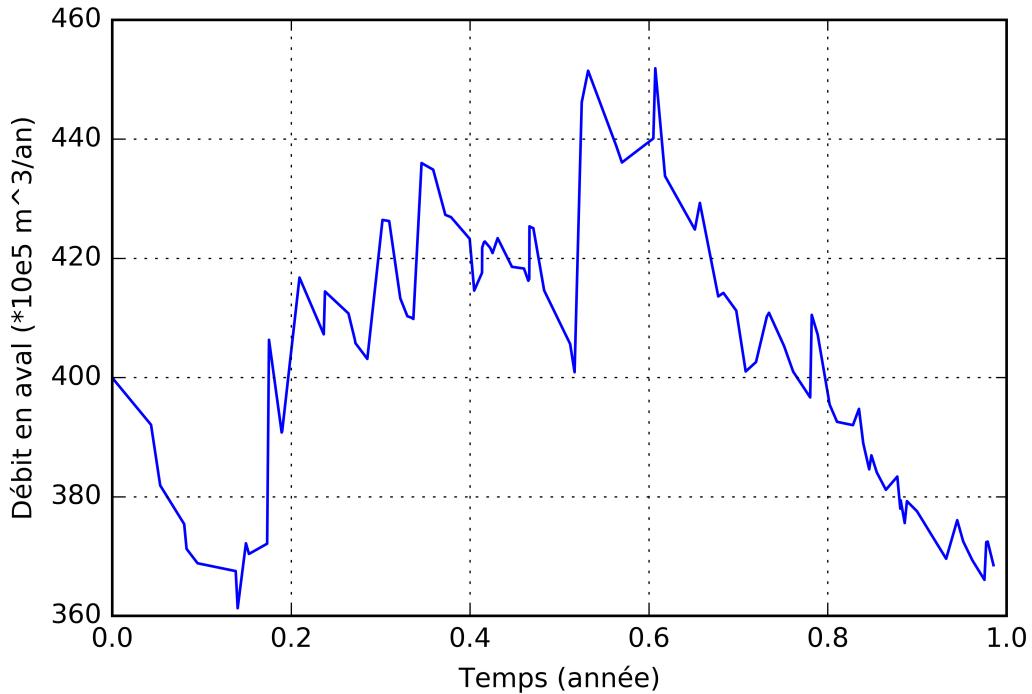


FIGURE 6 – Une trajectoire possible pour le débit à la confluence des deux cours d'eau

- **Deux barrages** sont situés en amont de la vallée. Pour plus de simplicité, nous supposons que ces deux barrages ont exactement les mêmes caractéristiques  $(\delta_1, \delta_2, b, V_0, \tau)$ .
- A chaque instant  $t$ , un débit  $D_t^i = \frac{1}{\tau}V_t^i$  s'échappe de la retenue d'eau.
- Nous faisons l'hypothèse que le débit observé en  $t$  à la confluence des deux torrents vaut est égal à la somme des débits sortant des retenues d'eau :

$$D_t = D_{t-T_1}^1 + D_{t-T_2}^2$$

où  $T_1$  et  $T_2$  sont les temps de trajet de la retenue d'eau à la confluence.

- Dans un premier temps, nous supposons les deux processus de Poisson **indépendants**. Cette hypothèse sera ensuite remise en question dans la dernière partie.

#### Remarques :

1. Quelle valeur choisir pour le temps de propagation ? Si nous restons à l'échelle d'une vallée montagnarde, au vu des distances à parcourir (quelques dizaines de kilomètres tout au plus) et de la vitesse élevée des torrents, vitesse due à un fort dénivelé positif, ces temps de propagation ne dépassent pas quelques heures. Dans ce cadre-là (et c'est celui que nous avons choisi), il n'est donc pas pertinent de prendre en compte les temps de propagation. Nous fixons donc :  $T_1 = T_2 = 0$ .
2. Nous remarquons expérimentalement que le rôle joué par le temps de propagation devient non négligeable lorsque  $|T_1 - T_2|$  dépasse quelques jours.

3. Un exemple d'étude pour laquelle il serait indispensable de prendre en compte le temps de propagation est l'étude de l'évolution du débit du Rhône à sa confluence avec la Saône à Lyon. Les eaux du Rhône mettent en effet plusieurs jours à atteindre Lyon depuis le barrage du lac Léman, situé à 150 km.
4. Comme seul le débit maximal nous intéresse et que le temps de propagation est supposé nul, il suffit de calculer le débit à la confluence aux instants des précipitations.
5. Mentionnons enfin un petit point mathématique qui sera extrêmement utile dans la partie suivante pour réaliser le changement de loi : simuler deux processus de Poisson composés indépendants de paramètre  $\lambda$  ayant la même loi pour les sauts peut se faire en utilisant la **méthode du coloriage** : simuler un processus de Poisson composé de paramètre  $2\lambda$  (il y a donc environ deux fois plus de sauts) puis colorier aléatoirement (avec une probabilité 0.5) chaque saut afin de déterminer s'il s'agit d'un saut du premier processus de Poisson ou du deuxième. Simuler deux processus de Poisson composés revient donc à simuler un unique processus de Poisson composé.

#### **Exemple explicite : la confluence du gave de Gaube et du gave de Lutour dans la vallée de Cauterêts (Hautes-Pyrénées)**

La configuration géographique que nous avons retenue correspond exactement à celle de la vallée de Cauterêts, dont voici une image satellite légendée. Au niveau du hameau de La Raillère (marqué par une étoile rouge sur la carte), les gaves (gave signifie torrent dans cette région) de Lutour (en orange sur la carte) et de Gaube (en jaune) se rejoignent pour former le gave de Cauterêts. Chacun de ces deux gaves est alimenté par un lac (respectivement le lac d'Estom et le lac de Gaube). Le volume de chacun de ces deux lacs (en bleu sur l'image) est régulé par un barrage (arc de cercle rouge). Le bassin du lac de Gaube est la partie avec les points vert pomme, celui du lac d'Estom correspond à la partie avec les croix vert foncé. Les pluies tombant dans la partie hachurée en violet parviendront directement à la Raillère, sans être passées par aucun des deux lacs, apportant ainsi une contribution supplémentaire au débit à la confluence. Dans cette partie, nous négligerons tout d'abord cette contribution (voir la troisième partie pour étudier la modélisation de ce débit supplémentaire).

## **2.5 SIMULATION NAÏVE POUR UN BARRAGE**

---

Pour calculer le quantile  $\alpha$  de manière naïve on peut réaliser une fonction de répartition empirique de  $X_T$  ou  $\max(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  selon que l'on s'intéresse au volume maximal atteint sur une année ou au volume atteint ou bout d'un an. Une estimation du quantile  $\alpha$  pour une variable aléatoire  $X$  est alors donné par  $X_{(\lceil n(1-\alpha) \rceil)}$  qui est la  $\lceil n(1-\alpha) \rceil$ <sup>ème</sup> plus grande valeur parmi les  $n$  variables aléatoires simulées. Cependant cette estimation n'est pertinente que si  $n\alpha$  est très supérieur à 1. Pour  $\alpha = 10^{-6}$  cette simulation n'est donc pas pertinente.

On peut être tenté de calculer différentes probabilités pour différents volumes seuils afin de trouver un volume seuil dont la probabilité de dépassement avoisine  $\alpha$ . C'est ce que l'on fera par la suite

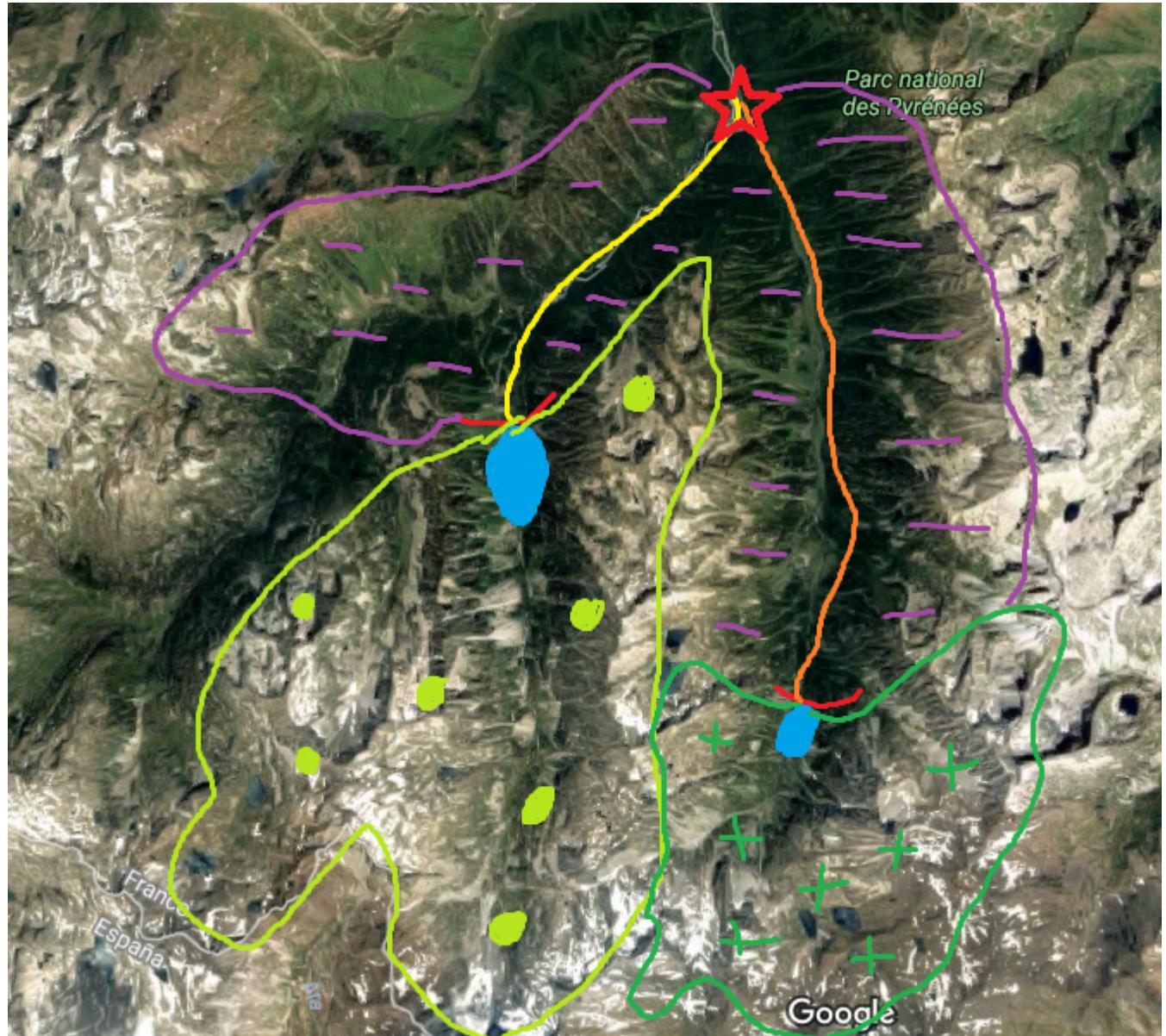


FIGURE 7 – Image satellite commentée de la vallée de Cauterêts

mais lorsque ces probabilités deviennent trop faibles celles-ci ne peuvent pas être calculées avec un intervalle de confiance suffisamment étroit par une simple méthode de Monte-Carlo.

En effet la méthode de Monte-Carlo consiste à approximer  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{X_T > V_{\text{seuil}}})$  par la moyenne empirique des  $X_T$ . Le théorème central limite nous donne un intervalle de confiance à 95 pourcents obtenu à partir de la variance empirique de l'échantillon simulé.

On trouve pour un nombre de simulations  $n = 10000$  pour la variable aléatoire  $X_T$

$V_{\text{seuil}}$	200	300	350	400	
$\alpha$	0,46	0,02	0,003	0,0003	Pour des probabilités de l'ordre de $10^{-4}$ la demi largueur de
$\pm$	0,01	0,0055	0,002	0,0007	

l'intervalle de confiance à 95 pourcents dépasse la valeur de la probabilité. La méthode de Monte-Carlo naïve est donc inopérante pour la recherche de quantile à des niveaux inférieurs à  $10^{-4}$ .

### 3

## UTILISATION D'UN CHANGEMENT DE PROBABILITÉ POUR SIMULER LES ÉVÉNEMENTS RARES

### 3.1 TRANSFORMATION D'ESSCHER

#### 3.1.1 • PRINCIPE

La transformation d'Esscher consiste en un changement de probabilité afin de forcer l'apparition d'événements rares. Notre but est ici de trouver une nouvelle loi de probabilité sous laquelle le processus  $(A_t)_{0 \leq t \leq T}$  des précipitations prend des valeurs importantes avec une plus grande probabilité.

#### 3.1.2 • THÉORÈME

Soit  $f$  une fonction mesurable à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On note  $A_T(f)$  le nouveau processus de Poisson dont les sauts  $U_n$  de loi  $U$  sont modifiés :

$$A_T(f) = \sum_{n=1}^{N_T} f(U_n) \quad (1)$$

On note également la variable aléatoire  $L_T$  définie par

$$L_T = \exp \left[ A_T(f) - \lambda T \mathbb{E} \left( e^{f(U)} - 1 \right) \right] \quad (2)$$

Soit  $\mathcal{F}_T$  la tribu engendrée par les  $(A_t)_{0 \leq t \leq T}$ . La variable aléatoire  $L_T$  est d'espérance 1 et peut donc définir une nouvelle probabilité sur  $\mathcal{F}_T$  :

$$\mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T} = L_T \mathbb{P}|_{\mathcal{F}_T} \quad (3)$$

On a alors pour  $g$  fonction mesurable telle que  $\mathbb{E}(|g((A_t)_{0 \leq t \leq T})|) < +\infty$  :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\left(g(A_t)_{0 \leq t \leq T}\right)\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{g((A_t)_{0 \leq t \leq T})}{L_T}\right) \quad (4)$$

L'intérêt de ce changement de probabilité réside dans le fait que sous  $\mathbb{Q}$ ,  $(A_t)_{0 \leq t \leq T}$  est encore un processus de Poisson (qu'on sait donc simuler) mais dont les paramètres sont modifiés. On obtient ainsi un nouveau paramètre  $\lambda^{\mathbb{Q}}$  égal au nombre annuel moyen de précipitations et une nouvelle loi à densité  $\nu^{\mathbb{Q}}$  pour les précipitations.

$$\lambda^{\mathbb{Q}} = \lambda \mathbb{E}(e^{f(U)}) \quad (5)$$

$$\nu^{\mathbb{Q}}(du) = \frac{e^{f(u)} \nu(du)}{\mathbb{E}(e^{f(U)})} \quad (6)$$

### 3.1.3 • CALCULS

#### Nouvelle loi du processus de Poisson

En prenant une fonction  $f$  de la forme  $f(u) = \theta u$  avec  $\theta < \delta_1$  on a

$$\mathbb{E}(e^{f(U)}) = \frac{b\delta_1}{\delta_1 - \theta} + \frac{(1-b)\delta_2}{\delta_2 - \theta} \quad (7)$$

$$L_T = \exp\left[\theta A_T - \lambda T \left(\frac{b\delta_1}{\delta_1 - \theta} + \frac{(1-b)\delta_2}{\delta_2 - \theta} - 1\right)\right] \quad (8)$$

On obtient ainsi en combinant (5), (6) et (7) un nouveau paramètres  $\lambda^{\theta}$  et une loi des sauts de densité  $\nu^{\theta}$  qui reste une double loi exponentielle mais avec de nouveaux paramètres  $b^{\theta}$ ,  $\delta_1^{\theta}$  et  $\delta_2^{\theta}$  :

$$\lambda^{\theta} = \lambda \left(\frac{b\delta_1}{\delta_1 - \theta} + \frac{(1-b)\delta_2}{\delta_2 - \theta}\right) \quad (9)$$

$$\delta_1^{\theta} = \delta_1 - \theta \quad (10)$$

$$\delta_2^{\theta} = \delta_2 - \theta \quad (11)$$

$$b^{\theta} = b \frac{\lambda \delta_1}{\lambda^{\theta} \delta_1^{\theta}} \quad (12)$$

On peut réécrire  $L_T$  avec ces nouveaux paramètres :

$$L_T = \exp\left[\theta A_T - T(\lambda^{\theta} - \lambda)\right] \quad (13)$$

On notera  $\mathbb{P}^{\theta}$  la probabilité obtenue à partir de  $L_T$ .

### Calcul de probabilité

La recherche du quantile  $\alpha$  passe par le calcul des probabilités  $\mathbb{P}(\max(X_t)_{0 \leq t \leq T} > V_{seuil})$

$$\mathbb{P}(\max(X_t)_{0 \leq t \leq T} > V_{seuil}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\max(X_t)_{0 \leq t \leq T} > V_{seuil}}) \quad (14)$$

$\mathbb{1}_{\max(X_t)_{0 \leq t \leq T} > V_{seuil}}$  est mesurable sous  $\mathcal{F}_T$  donc d'après ()

$$\mathbb{P}(\max(X_t)_{0 \leq t \leq T} > V_{seuil}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\theta}\left(\frac{\mathbb{1}_{\max(X_t)_{0 \leq t \leq T} > V_{seuil}}}{L_T}\right) \quad (15)$$

On calcule ensuite cette espérance à l'aide d'une méthode de Monté-Carlo classique. Pour que la méthode de Monté-Carlo soit efficace, il faut que l'évènement  $(\max((X_t)_{0 \leq t \leq T}) > V_{seuil})$  soit réalisé souvent sous  $\mathbb{P}^\theta$ , c'est à dire que  $\max(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  prenne de grandes valeurs. Intuitivement la bonne valeur de  $\theta$  dans le changement de probabilité est donc celle qui maximise  $A_T$  donc le nombre moyen de précipitation  $\lambda^\theta$  et la valeur moyenne de chaque précipitation. Intuitivement il faut donc choisir un  $\theta$  proche de  $\delta_1$ .

### Recherche du theta optimal

L'évènement  $(\max((X_t)_{0 \leq t \leq T}) > V_{seuil})$  a une probabilité suffisamment forte sous  $\mathbb{P}^\theta$  si  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\theta}(X_T) = V_{seuil}$

Soit  $\Gamma(\theta) = \log(\mathbb{E}(\exp(\theta A_T)))$  la fonction log-Laplace de  $A_T$

Pour  $\theta < \delta_1$

$$\Gamma'(\theta) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^\theta}(A_T) \quad (16)$$

En supposant que les grands volumes d'eau sont obtenus lorsque le volume cumulé des précipitations est grand devant le volume de vidange du bassin c'est à dire  $X_T$  de l'ordre de  $A_T$  on pourra chercher un  $\theta$  tel que  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^\theta}(A_T) = V_{seuil}$

On cherchera donc à résoudre

$$\Gamma'(\theta) = V_{seuil} \quad (17)$$

Puisque  $\exp(\theta U)$  est intégrable pour  $\theta < \delta_1$  on a :

$$\Gamma(\theta) = \lambda T \mathbb{E}(\exp(\theta U) - 1) \quad (18)$$

On calcule ensuite  $\Gamma'(\theta)$  et  $\Gamma''(\theta)$  puis on résoud l'équation (17) à l'aide d'une méthode de Newton.

On vérifiera par la suite que cette méthode de recherche du théta optimal minimise de façon efficace la largeur des intervalles de confiance dans le calcul des probabilités  $\mathbb{P}(\max(X_t)_{0 \leq t \leq T} > V_{seuil})$

## 3.2 SIMULATIONS

---

### 3.2.1 • ETUDE D'UN BARRAGE

#### Recherche du quantile $\alpha$

Pour trouver le quantile alpha pour  $\alpha$  petit (ici  $10^6$ ), la méthode de la fonction de répartition empirique n'est pas adaptée car elle nécessiterait au moins  $\frac{1}{\alpha} = 10^6$  simulations pour commencer à être pertinente. On va donc rechercher le quantile  $\alpha$  en résolvant l'équation

$\mathbb{P} \left( \max(X_t)_{0 \leq t \leq T} > Q(\alpha) \right) = \alpha$  par recherche dichotomique où chaque probabilité  $\mathbb{P} \left( \max(X_t)_{0 \leq t \leq T} > V_{\text{seuil}} \right)$  est calculé grâce à (15) par simulation de Monte-Carlo.

Nous n'avons pas trouvé de formules explicites pour l'intervalle de confiance pour le quantile de niveau  $\alpha$ . Nous procédons donc de la manière suivante, nous calculons des intervalles de confiances à 95 pourcents pour différents volumes seuils. Puis, graphiquement nous en déduisons un intervalle de confiance infatigable sur la quantile  $\alpha$ .

Voici les résultats de nos simulations. On prend toujours  $n = 10000$

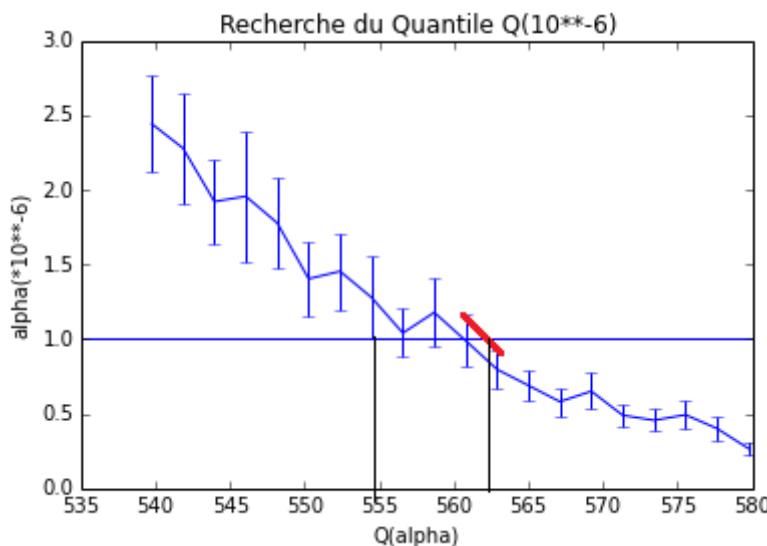


FIGURE 8 – Recherche de  $Q(10^{-6})$  pour  $\max(X_t)_{0 \leq t \leq T}$

L'intervalle de confiance du quantile obtenu grâce aux intervalles de confiances à 95 pourcents pour les probabilités se situe entre les deux barres verticales noires (ici à 554 et 562).

On trouve un quantile de l'ordre de 559 (unité du problème). Sachant que le volume de base est de 200, la hauteur seuil du barrage n'est que 3 fois celle de la profondeur moyenne du bassin. D'un point de vue de la construction cela est donc tout à fait réalisable.

### Prise en compte uniquement du volume en T

Une question assez importante vient alors de se poser : est-il plutôt pertinent de considérer la valeur (de volume  $V_T$ , de débit  $D_T$ ) à un **horizon fixé** (toujours au bout d'un an par exemple) ou de considérer la **valeur maximale** sur l'intervalle de temps  $[0, T]$ ? Pour cela, on analyse numériquement les quantiles obtenus (tous les deux par la méthode de Monte-Carlo après transformation d'Esscher). On obtient les résultats suivants :

- En considérant le volume maximal, le quantile obtenu est égal à 559.
- En considérant le volume du barrage à horizon fixé, le quantile obtenu est estimé à 514.

La différence notable entre les deux quantiles montre l'importance de distinguer ces deux valeurs. Les inondations étant liées non pas à la valeur en  $T$ , mais bien à la valeur maximale sur l'intervalle de temps considéré, nous avons fait le choix de considérer par la suite les quantiles de niveau  $\alpha$  pour la **valeur maximale sur l'intervalle**.

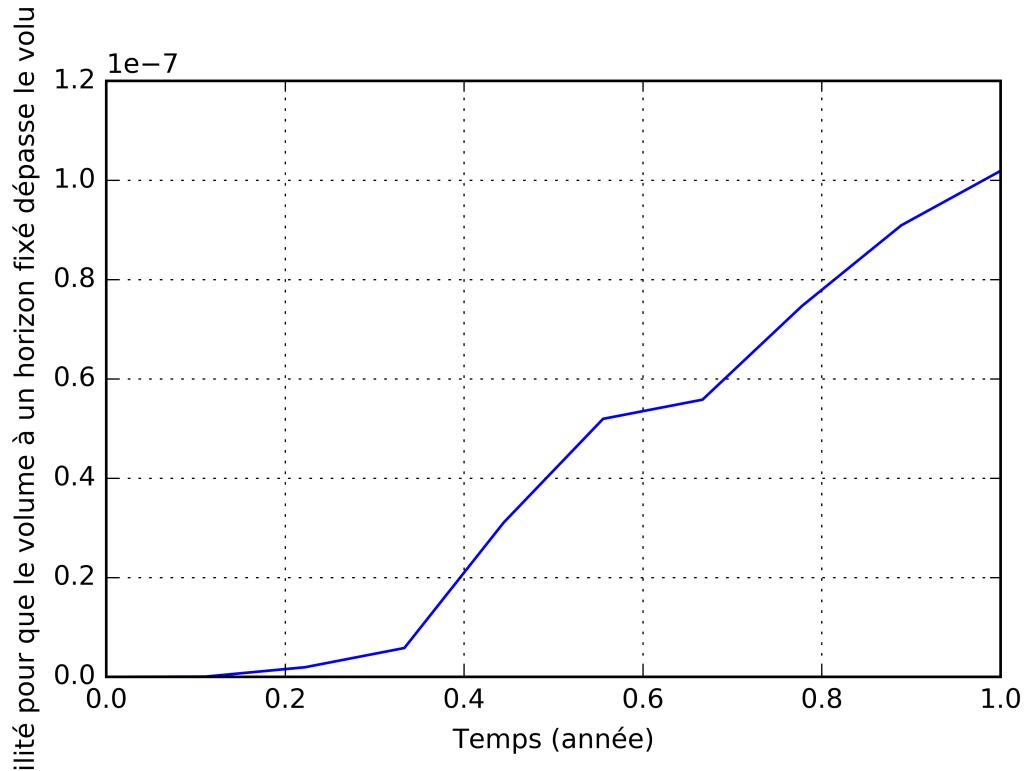


FIGURE 9 – Probabilité de dépassement du quantile de niveau  $10^{-6}$  à un instant donné

En complément, nous présentons la courbe de la probabilité de dépassement d'un volume seuil donné (ici, nous avons choisi 559, soit le quantile de niveau  $10^{-6}$  pour le niveau maximal sur la période donnée en fonction du temps. Il s'agit sans surprise d'une fonction croissante. En effet, partant d'un état stationnaire stable (volume initial égal à 200), la probabilité pour que des valeurs extrêmes soient atteintes augmente tout d'abord au cours du temps : pour dépasser le volume seuil, il faut en effet une succession de précipitations très importantes, et la probabilité pour que de telles précipitations se succèdent dans un laps de temps très court est relativement faible. Si nous avions prolongé la courbe au-delà de plusieurs années, nous aurions remarqué une convergence vers une certaine probabilité, qui est la probabilité correspondant à  $P(X_\infty > Q_\alpha)$ .

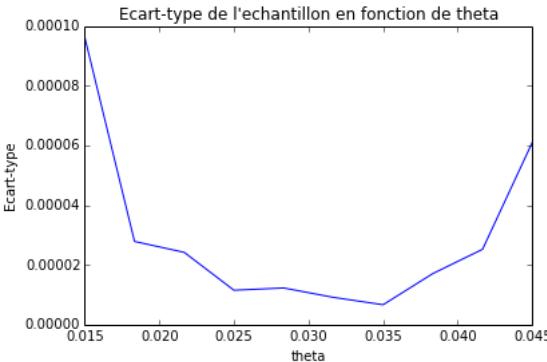
Ce complément corrobore la remarque ci-dessus et justifie le fait, pour un temps relativement court (une année), de centrer l'étude sur la valeur maximale sur une période donnée et non sur la valeur à une échéance donnée.

### Retour sur le $\theta$ optimal

D'après le paragraphe précédent, nous trouvons un quantile de niveau  $\alpha = 10^{-6}$  de 559. Nous avons donc calculer pour  $n = 10000$  les écarts types des échantillons simulés lors du calcul de  $\mathbb{P}(\max(X_t)_{0 \leq t \leq T} > 559)$  pour différentes valeurs de  $\theta$ .

On obtient les résultats suivants :

La méthode évoquée en (3.1.3) donne  $\theta_{optimal} = 0.324$ . Expérimentalement on trouve  $\theta_{optimal} = 0.35$ .

FIGURE 10 – Recherche du  $\theta$  optimal

La méthode théorique par résolution de  $\Gamma'(\theta) = V_{\text{seuil}}$  donne donc des résultats pertinents.

### Comparaison avec la méthode naïve

On va maintenant comparer les probabilités et intervalles de confiances obtenus avec les différentes méthodes (méthode naïve exposée en (2.5) et transformation d'Esscher). Dans le cadre de la transformation de Esscher on cherchera  $\theta$  avec la méthode exposée dans le paragraphe précédent.

$V_{\text{seuil}}$	300	350	375	425
$\alpha$ naïf	0,088	0,0164	0,0047	0,00070
$\alpha$ Esscher	0,087	0,02	0,0054	0,00065
$\pm$ naïf	0,006	0,0025	0,0014	0,00051
$\pm$ Esscher	0,003	0,0007	0,0003	0,00006

En prenant en compte les intervalles de confiance on observe des probabilités cohérentes d'une

méthode à l'autre. On observe également qu'à mesure qu' $\alpha$  diminue l'intervalle de confiance devient bien meilleur avec la méthode de Esscher qu'avec la méthode naïve.

#### 3.2.2 • ETUDE DU DÉBIT EN VALLÉE

##### Recherche du quantile

Comme expliqué en 2.4 nous cherchons dans cette partie à déterminer le quantile  $\alpha$  pour le débit  $\max((D_t)_{0 \leq t \leq T})$  au confluent des rivières issues des deux barrages. La variable aléatoire

$\mathbb{1}_{\max(D_t)_{0 \leq t \leq T} > D_{\text{seuil}}}$  est encore une fonction mesurable du processus de poisson  $(A_t)_{0 \leq t \leq T}$  des précipitations sur les deux barrages (avec cette fois un paramètre de Poisson de  $2\lambda$ ). Pour distinguer les précipitations arrivant sur le barrage 1 des précipitations du barrage 2 nous procédons simplement par coloriage. Nous pouvons donc procéder de nouveau par transformation de Esscher, seul le paramètre  $\lambda$  et la fonction des précipitations donnant le débit étant modifiés. Pour la recherche du quantile nous procédons comme en (3.1.3)

Voici le résultat de nos simulations ( $n = 10000$ )

L'intervalle de confiance du quantile obtenue grâce aux intervalles de confiance à 95 pourcents pour les probabilités se situe entre les deux barres verticales noires (ici à 839 et 852).

##### Probabilité conditionnelle

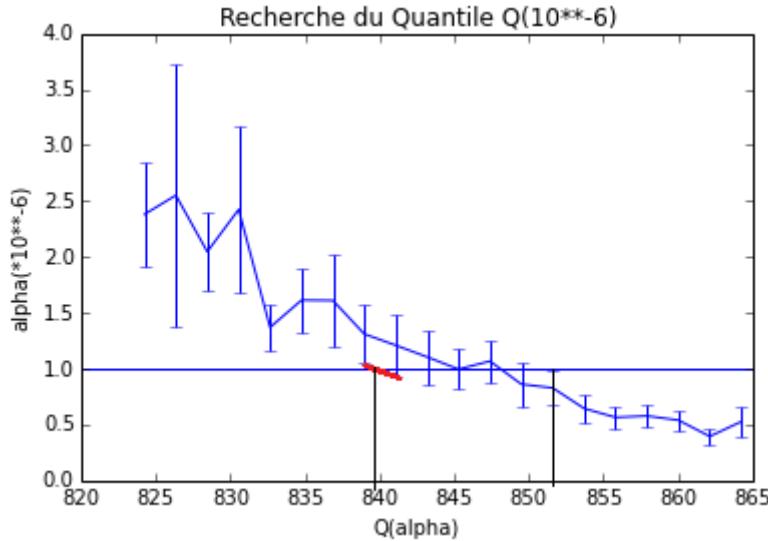


FIGURE 11 – Recherche de  $Q(10^{-6})$  pour  $\max(D_t)_{0 \leq t \leq T}$

Compte tenu du calcul du niveau critique d'un barrage réalisé en (3.2.1) il peut être intéressant de déterminer la probabilité du dépassement du débit seuil déterminé en (3.2.2) lorsque l'un des deux bassins est rempli au-dessus du niveau critique. Cela revient à calculer la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}(\max(D_t)_{0 \leq t \leq T} > D_{seuil} | (X_T^1 > V_{seuil}) \cup (X_T^2 > V_{seuil}))$

$$\mathbb{P}(\max(D_t)_{0 \leq t \leq T} > D_{seuil} | (X_T^1 > V_{seuil}) \cup (X_T^2 > V_{seuil})) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{I}_{(D_T > D_{seuil}) \cap (X_T^1 > V_{seuil}) \cup (X_T^2 > V_{seuil})}}{\mathbb{P}((X_T^1 > V_{seuil}) \cup (X_T^2 > V_{seuil}))}\right) \quad (19)$$

Puisque les deux processus de Poisson donnant les précipitations sont indépendants on a

$$\mathbb{P}((X_T^1 > V_{seuil}) \cup (X_T^2 > V_{seuil})) = 2\alpha - \alpha^2 \quad (20)$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(\max(D_t)_{0 \leq t \leq T} > D_{seuil} | (X_T^1 > V_{seuil}) \cup (X_T^2 > V_{seuil})) = \mathbb{E}\left(\frac{\mathbb{I}_{(D_T > D_{seuil}) \cap (X_T^1 > V_{seuil}) \cup (X_T^2 > V_{seuil})}}{2\alpha - \alpha^2}\right) \quad (21)$$

On trouve par calcul de Monte-Carlo après transformation de Esscher (en prenant n=100000)

$$\mathbb{P}(\max(D_t)_{0 \leq t \leq T} > D_{seuil} | (X_T^1 > V_{seuil}) \cup (X_T^2 > V_{seuil})) = 0,53 \pm 0,04 \quad (22)$$

### Obtenir de l'information sur le volume du barrage à partir de l'observation du débit en vallée

Si le débit en vallée dépend explicitement des volumes des deux barrages, on peut chercher à obtenir une information sur les volumes des deux barrages connaissant le débit en vallée. On peut ainsi chercher à calculer l'état du volume dans les deux barrages lorsque le débit seuil est dépassé. On cherchera donc à calculer  $\mathbb{E}(X_T^1 | D_T > D_{seuil})$ .

$$\mathbb{E}(X_T^1 | D_T > D_{seuil}) = \mathbb{E}\left(X_T^1 \frac{\mathbb{1}_{D_T > D_{seuil}}}{\mathbb{P}(D_T > D_{seuil})}\right) \quad (23)$$

$$\mathbb{E}(X_T^1 | D_T > D_{seuil}) = \mathbb{E}\left(X_T^1 \frac{\mathbb{1}_{D_T > D_{seuil}}}{\alpha}\right) \quad (24)$$

On trouve en calculant l'espérance comme précédemment

$$\mathbb{E}(X_T^1 | D_T > D_{seuil}) = 489 \pm 61 \quad (25)$$

## 4

# RAFFINEMENTS DU MODÈLE

---

### 4.1 CORRÉLATION DES PRÉCIPITATIONS

---

Une hypothèse importante que nous avons émise jusqu'alors est l'indépendance totale des deux processus de Poisson composés modélisant les précipitations. Cette hypothèse est cependant extrêmement discutable. Pour reprendre l'exemple développé dans la deuxième partie, comment envisager en effet l'indépendance totale des précipitations touchant deux lacs situés à quelques kilomètres seulement à vol d'oiseau l'un de l'autre ?

Dans l'objectif de concevoir une application qui soit la plus complète et la plus réaliste possible, nous avons rajouté un paramètre d'entrée qui correspond au niveau de corrélation entre les précipitations entre les deux bassins. Ce paramètre peut prendre trois valeurs, correspondant à trois scénarios différents :

- *Scenario 1 : Indépendance totale* entre les précipitations. Il s'agit du scénario développé dans la partie 1. Ce scénario peut être choisi si l'on considère des barrages lointains situés dans des zones géographiques distinctes au climat différent. Il pourrait être choisi pour étudier le débit à la confluence de la Garonne et de la Dordogne, puisque ces deux fleuves traversent des régions aux climats radicalement différents.
- *Scenario 2* : Les deux processus de Poisson sont totalement corrélés : les instants et les intensités des différentes précipitations sont **rigoureusement identiques** pour les deux bassins d'alimentation des deux retenues d'eau. Ce scénario correspond à deux barrages très proches situés dans la même vallée. Il est particulièrement adapté à l'étude du débit du gave de Cauterêts (voir image satellite dans la première partie).
- *Scenario 3* : Les **instants** des précipitations sont exactement les **mêmes** dans les deux vallées, mais les **intensités** des précipitations sont **indépendantes**. Ce scénario est pertinent dans le cas de deux barrages situés dans des vallées voisines (quelques dizaines de kilomètres l'une de l'autre). Il s'interprète de la manière suivante : une précipitation touche la chaîne de montagne, mais l'intensité de cette précipitation reste extrêmement localisée. Un exemple assez parlant est celui des vallées voisines de la Haute-Maurienne et de la Haute-Tarentaise (en Savoie), où une grande majorité des précipitations viennent de l'Est (retour d'Est) et sont extrêmement

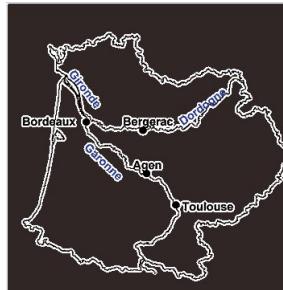


FIGURE 12 – Géographie de la Garonne et de la Dordogne, qui se rejoignent à Ambès pour former l'estuaire de la Gironde

localisées. Le 10 janvier 2012, Bonneval-sur-Arc (Haute-Maurienne) croule sous un mètre de neige suite à un retour d'Est particulièrement intense, alors que sa voisine Val d'Isère (à 20 kilomètres de là, de l'autre côté du col de l'Iseran) a dû se contenter de quelques centimètres.

### Comment simuler deux processus de Poisson corrélés ? Comment y appliquer la transformation d'Esscher ?

L'idée centrale est que, dans les trois cas présentés ci-dessus, *simuler deux processus de Poisson corrélés revient à simuler un unique processus de Poisson (éventuellement avec d'autres paramètres, ou sur une autre durée)*.

- Comme nous l'avons vu à la première partie, pour simuler deux processus de Poisson composés indépendants, il suffit de simuler un processus de Poisson (avec un paramètre deux fois plus important) puis d'y appliquer un coloriage aléatoire.
- Pour simuler deux processus de Poisson totalement corrélés, il suffit de simuler un unique processus de Poisson, puis de le dupliquer.
- La corrélation à l'oeuvre dans le troisième scenario est légèrement plus subtile. Les deux processus peuvent se simuler de la manière suivante : on simule un processus de Poisson sur une période de  $4T$  (on a en effet  $P(N_{4T}) > 2N_T \approx 1$ ). On note :  $N = N_t$ . On garde ensuite les  $N$  dates de précipitations  $t_1, \dots, t_N$  : elles correspondront aux dates d'arrivée des précipitations pour les deux barrages. Les  $N$  premières intensités  $U_1, \dots, U_N$  correspondront aux intensités des  $N$  précipitations arrivant dans le premier lac. Les  $N$  suivantes  $U_{N+1}, \dots, U_{2N}$  seront les intensités des  $N$  précipitations arrivant dans le deuxième lac.

Il est ainsi possible d'appliquer la **transformation d'Esscher** dans les trois cas, afin d'étudier de manière fine les événements rares.

## 4.2 MODÉLISATION DES PRÉCIPITATIONS EN AVAL DU BARRAGE

---

Comme nous l'avons vu dans la première partie avec l'exemple du gave de Cauterêts, il est tout à fait possible qu'une partie importante des précipitations arrive directement dans la vallée sans être passé par aucun des deux barrages. Tâchons désormais de modéliser ces précipitations. Commençons par donner une définition qui nous sera utile par la suite.

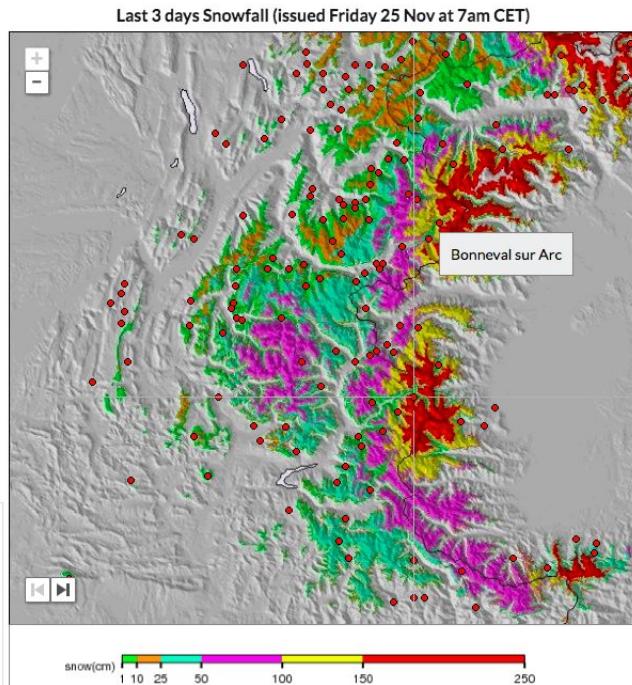


FIGURE 13 – Répartitions des précipitations le long de la frontière franco-italienne lors d'un retour d'Est

**Définition :** Le **bassin aval du barrage  $i$**  correspond à l'ensemble des points situés dans la vallée du barrage  $i$  d'où l'eau s'écoule directement jusqu'au point de confluence, sans passer par le premier barrage.

Le bassin d'alimentation du point de confluence se décompose donc en quatre bassins : le bassin du premier barrage (en amont du premier lac), le bassin du deuxième barrage (en amont du deuxième lac), le bassin aval du premier barrage et le bassin aval du deuxième barrage.

#### Modélisation des précipitations dans le bassin aval :

Nous choisissons de modéliser les précipitations touchant un bassin aval  $i$  de la manière suivante :

- Les instants et intensités des précipitations touchant le bassin aval sont exactement les mêmes que pour celles du bassin amont.
- Si une précipitation  $n$  se produit à l'instant  $t$  dans la vallée du barrage  $i$ , cette précipitation va apporter deux volumes d'eau  $V_{amont} = U_n$  (volume qui arrive instantanément dans la retenue d'eau) et  $V_{aval} = \beta U_n$  (volume qui arrive instantanément au point de confluence).
- Le coefficient  $\beta$  correspond au rapport des superficies des bassins aval et amont :

$$\beta = \frac{S_{aval}}{S_{amont}}$$

$\beta$  dépend donc entièrement de la géographie de la vallée. Remarquons qu'il peut être différent d'un barrage à l'autre :

$$\beta_1 \neq \beta_2$$

- Dans le cas de la vallée de Lutour, nous avons utilisé la fonction *Maparea* du logiciel en ligne Braginski pour mesurer (grossièrement) ces différentes surfaces. Nous avons trouvé  $S_{amont} = 22\text{km}^2$  et  $S_{aval} = 12\text{km}^2$ , ce qui donne une valeur (assez élevée) pour  $\beta$  de 0.54. Remarquons que cette valeur anormalement élevée vient du fait que l'on néglige le pouvoir de régulation d'autres petits lacs (naturels) situés dans le bassin aval du lac d'Estom.
- Dans notre modèle, la contribution de l'arrivée des eaux provenant du bassin aval lors d'une précipitation  $n$  à l'instant  $t_n$  au débit observé au niveau la confluence est donc un **dirac** : en négligeant le temps de propagation (ce qui est, rappelons-le, pertinent en haute montagne), le débit observé à l'instant  $t_n$  est augmenté de manière discontinue d'une valeur

$$\frac{\beta U_n}{\Delta}$$

où  $\Delta$  correspond au pas de temps (une journée par exemple).

### 4.3 IMPACT DU NIVEAU DE CORRÉLATION ET DE LA PRISE EN COMPTE DES PRÉCIPITATIONS EN AVAL SUR LE DÉBIT OBSERVÉ EN VALLÉE

---

Présentons maintenant les différents résultats obtenus pour le quantile de niveau  $\alpha$  du débit observé en vallée, à la confluence des deux cours d'eau, suivant que l'on prenne ou non en compte les précipitations et suivant les trois niveaux de corrélation choisis.

Ce premier tableau récapitule les valeurs choisies pour les différents paramètres pour réaliser cette simulation :

Paramètre	Valeur	Sens physique
$\alpha$	$10^{-6}$	Quantile recherché
$V_0$	200	Volume initial du premier lac
$V_1$	200	Volume initial du second lac
$\lambda$	50	Nombre de précipitations par an
$R_1$	1.	Taux de vidange du premier barrage
$R_2$	1.	Taux de vidange du deuxième barrage
$\delta_1$	0.07	Paramètre relatif à l'intensité des fortes précipitations
$\delta_2$	0.7	Paramètre relatif à l'intensité des faibles précipitations
$b$	0.2	fréquence des fortes précipitations
$T_1$	0	temps de trajet depuis le premier barrage
$T_2$	0	temps de trajet depuis le deuxième barrage
$\beta_1$	0.3	Rapport des superficies des bassins aval et amont(barrage 1)
$\beta_2$	0.3	Rapport des superficies des bassins aval et amont (barrage 2)
$T$	1	Horizon d'étude (en années)
$N$	5000	Nombre de simulations pour le calcul d'une probabilité

Paramètre	Commentaires
$\alpha$	Niveau de prise de risque à discuter avec les décideurs
$V_0$	A calibrer avec le volume du lac
$V_1$	A calibrer avec le volume du lac
$\lambda$	A adapter suivant le climat de la région
$R_1$	A adapter suivant le type de barrage
$R_2$	A adapter suivant le type de barrage
$\delta_1$	A adapter au climat
$\delta_2$	A adapter au climat
$b$	A adapter au climat
$T_1$	A adapter à la distance parcourue
$T_2$	A adapter à la distance parcourue
$\beta_1$	A adapter à la vallée
$\beta_2$	A adapter à la vallée
$T$	A discuter avec les décideurs
$N$	Analyser l'intervalle de confiance

Voici les résultats obtenus pour le quantile de niveau  $\alpha$  pour le débit (rappelons que le débit est exprimé en  $10^5 m^3/\text{an}$ ).

Précipitations...	indépendantes	identiques	corrélées
Avec précipitations avales	997	1278	1007
Sans Précipitations avales	844	1110	864

**Commentaires :** Sans surprise, nous pouvons remarquer les faits suivants :

- La prise en compte des précipitations tombées dans le bassin aval augmente sensiblement (de près de 20 % dans avec les paramètres que nous avons choisis), la valeur du quantile de niveau  $\alpha$ .
- Plus les précipitations sont corrélées, plus le quantile de niveau alpha est élevé. Le cas le plus défavorable est celui de précipitations identiques. Un financier adopterait le vocabulaire suivant pour qualifier le même phénomène : "pour minimiser le risque d'un portefeuille financier sans modifier le gain espéré, il suffit d'investir dans des actifs faiblement, voire négativement corrélés. Le risque le plus élevé est toujours associé à une parfaite corrélation des actifs du portefeuille."

## 5 CONCLUSION

---

Les processus de Poisson composés sont ainsi des lois particulièrement pertinentes pour simuler l'arrivée des perturbations et utiliser des procédés stochastiques pour analyser l'évolution sur une ou

plusieurs années d'un système dynamique hydrologique. La modélisation que nous avons développée ici, relativement élémentaire, se limite à l'étude de deux bassins alimentés exclusivement par des précipitations (éventuellement corrélées) supposées instantanées. Un énorme avantage des processus de Poisson composés à double loi exponentielle est la possibilité de réaliser la transformation d'Esscher : sous cette nouvelle loi (paramétrée par  $\theta$  pour lequel il faut trouver la valeur optimale), le processus de Poisson composé est très facilement simulable, puisqu'il s'agit d'un nouveau processus de Poisson composé de loi double exponentielle. Seuls les paramètres sont modifiés. La vraisemblance se calcule également de manière relativement élémentaire. Ces deux propriétés spécifiques nous ont ainsi d'utiliser ce changement de loi afin de simuler de manière extrêmement efficace des variables aléatoires fonctions de ce processus de Poisson composé. Il est ainsi possible de calculer une probabilité de l'ordre de  $10^{-6}$  avec une précision de 10

En utilisant l'application console interactive que nous avons implémentée en Python, l'utilisateur est amené à entrer une dizaine de paramètres prenant en compte les spécificités du système hydrographique étudié : nombre de jours de précipitations par an, cumul annuel de précipitations, volume des deux barrages, surface du bassin versant, corrélation entre les précipitations alimentant les deux lacs. Il est ensuite guidé et peut afficher différentes trajectoires du volume du barrage ou du débit en vallée, calculer le quantile de niveau  $\alpha$  ou encore l'espérance conditionnelle mentionnée ci-dessus.

Si le cadre de cette modélisation est modulable grâce à l'introduction de nombreux paramètres, notre modèle élémentaire peut être raffiné pour simuler de manière plus fine et plus efficace l'évolution des volumes et débits sur l'ensemble d'un bassin versant (le bassin versant du Rhône ou de la Garonne, par exemple). Pour cela, il est nécessaire de considérer un nombre bien plus important de barrages, mais également de prendre en compte la contribution du ruissellement et des résurgences (sources) à l'alimentation des retenues d'eau. Il ne faudrait pas non plus oublier certains phénomènes météorologiques saisonniers : les précipitations ne sont en effet pas uniformément réparties sur une année, et la formation d'un manteau neigeux dès la fin de l'automne en montagne, puis la fonte de ce manteau au printemps et en été ne jouent un rôle extrêmement important. Une telle simulation à si grande échelle nécessiterait alors des ressources en calcul plus importantes, et serait sûrement réalisée en C++ (langage plus complexe, mais plus rapide car plus bas niveau et compilé) et exécutée par un cluster d'ordinateurs.