



Master Systèmes Dynamiques et Signaux

Mémoire de master

Informatique Quantique

Auteur :
M. Pierre ENGELSTEIN

Encadrants :
Dr. Nicolas DELANOUE
Pr. François
CHAPEAU-BLONDEAU

Jury :
Pr. Laurent HARDOUIN
Dr. Nicolas DELANOUE
Pr. François CHAPEAU-BLONDEAU
Pr. Sébastien LAHAYE
Dr. Mehdi LHOMMEAU
Pr. David ROUSSEAU

Version du
20 avril 2021

Remerciements

Je remercie Dr. Nicolas Delanoue et Pr. François Chapeau-Blondeau pour leur encadrement sur ce travail. Je remercie également mes parents pour les encouragements et l'aide apportés sur cette année de Master.

Table des matières

1	Introduction	1
2	Informatique quantique : éléments de base	3
2.1	Postulats de base	3
2.1.1	Etat d'un système quantique	3
2.1.2	Mesure projective	4
2.1.3	Dynamique du système	4
2.2	Vers une informatique quantique	5
2.2.1	Multiples qubits	5
2.2.2	Portes quantiques	6
3	Mises en œuvres expérimentales	8
3.1	Processeurs quantiques et langages de programmation	8
3.2	Simulateurs quantiques	9
4	Algorithmes quantiques	10
4.1	Algorithme de Deutsch-Jozsa	10
4.2	Algorithme de Grover	12
4.3	Algorithme de Shor	14
5	Ouverture vers le stage	17
6	Conclusion	18
A	Algorithme de Deutsch-Jozsa	19
A.1	Problème à résoudre	19
A.1.1	Exemple	21
A.2	Visualisation géométrique	24
A.2.1	Fonction constante $f_0(x) = 0$	24
A.2.2	Fonction équilibrée quelconque $f_1(x)$	25

B	Algorithme de Bernstein-Vazirani	26
B.1	Problème à résoudre	26
B.1.1	Solution classique	26
B.1.2	Solution quantique	27
B.1.3	Exemple	28
B.1.4	Implémentation du circuit	29
C	Algorithme de Grover	31
C.1	Rappels d'algèbre : projection et reflection	31
C.2	Problème à résoudre	32
C.2.1	Exemple	34
C.2.2	Implémentation	36
	Bibliographie	37

Table des figures

2.1	Exemple de circuit quantique, avec U_f pour $f(a, b, c) = (\neg a) \oplus c$	7
4.1	Schéma du circuit de l'algorithme de Deutsch-Jozsa	10
4.2	Schéma du circuit de l'algorithme de Grover	12
4.3	Evolution des amplitudes pour $n = 3$ qubits	13
4.4	Evolution des amplitudes pour $n=16$, sur 1000 itérations . . .	14
4.5	Algorithme de factorisation en nombres premiers	15
A.1	Evolution des états pour une fonction f constante, vecteurs d'états séparés et réunis	24
A.2	Evolution des états pour une fonction f équilibrée, vecteurs d'états séparés	25
C.1	Evolution des amplitudes pour $n=16$, sur 1000 itérations . . .	35

Chapitre 1

Introduction

L'informatique quantique, application des théories quantiques développées depuis le début du vingtième siècle à la théorie de l'information puis spécifiquement au calcul, est aujourd'hui en plein développement, théorique avec la découverte de nouveaux algorithmes, mais aussi pratique avec l'intérêt porté par les différents industriels. On voit alors l'apparition de nouvelles plateformes basées sur des processeurs quantiques, permettant de mettre en place les différentes avancées théoriques.

L'informatique quantique offre une accélération de certains traitements permettant théoriquement d'effectuer des calculs qui seraient infaisables en des temps raisonnables sur nos calculateurs classiques, par exemple le casage des clés cryptographiques dans l'ordre de minutes au lieu de dizaines d'années.

Avec ce nouveau champ, de nombreuses questions se posent sur nos infrastructures actuelles, notamment en termes de cybersécurité et il est alors important de comprendre les capacités qu'offre l'informatique quantique.

Ce travail présente en première partie les notions fondamentales à la compréhension de l'informatique quantique. On y montre ce qu'est un qubit, puis on explique le mécanisme de mesure qui vient apporter de la probabilité, et enfin les principes d'évolution de systèmes quantiques permettant de construire des systèmes de calcul.

La deuxième partie de ce travail présente un tableau des mises en œuvres expérimentales au travers des processeurs quantiques et des simulateurs, développés par les différents industriels tels que Microsoft, IBM, Google et Atos depuis le début des années 2010.

Enfin, la dernière partie présente trois algorithmes majeurs au développement de l'informatique quantique, qui notamment illustrent les apports spécifiques du quantique, avec des performances de traitement de l'information inaccessibles en classique. On explique tout d'abord l'algorithme de Deutsch-Jozsa, sur la parallélisation d'évaluation de fonction ; puis l'algo-

rithme de Grover, sur la recherche de base de données ; et enfin l'algorithme de Shor sur la factorisation en nombres premiers.

Chapitre 2

Informatique quantique : éléments de base

Les notions de base d'informatique quantique sont décrites dans plusieurs ouvrages de référence, notamment dans [1, 2]. On présente ici un résumé des notions fondamentales à connaître pour la suite du rapport.

2.1 Postulats de base

On pose 3 postulats, servant de base aux raisonnements qui suivront. Ces postulats sont confirmés jusqu'à présent par les expériences.

2.1.1 Etat d'un système quantique

Un système quantique peut être représenté par un vecteur d'état, de la même manière qu'un système physique classique. On le représente par la notation de Dirac, notée de la forme $|\psi\rangle$. Ce vecteur d'état est nécessairement de norme 1 (la somme des modules au carré vaut 1). On peut distinguer deux types d'états pour un système quantique : les états de base, formant une base orthonormée d'un espace vectoriel complexe, et les états superposés. Ces états superposés correspondent à une combinaison linéaire des états de base. On peut écrire généralement un état quantique de la façon suivante :

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |k_i\rangle, \quad (2.1)$$

avec les $|k_i\rangle$ états de base, et les c_i respectant $\sum_i |c_i|^2 = 1$ pour la normalisation du vecteur d'état.

Dans le cadre de l'informatique quantique, on utilise le système quantique le plus simple, appelé **qubit**. Ce système quantique est composé de deux états de base, $|0\rangle$ et $|1\rangle$, et des états superposés. Similairement à l'informatique classique, où on travaille sur le système physique le plus élémentaire - le

bit - en quantique on travaille sur le système physique quantique élémentaire - le qubit. On dispose des mêmes états de base, mais l'informatique quantique apporte les états *intermédiaires* superposés. Dans la base canonique $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, on note un qubit de la façon suivante : $|\psi\rangle = \alpha \cdot |0\rangle + \beta \cdot |1\rangle$.

2.1.2 Mesure projective

Que se passe-t-il quand on mesure un système quantique ? On a évoqué au dessus la notion de superposition des états. L'expérience montre que, lorsqu'on va mesurer un système quantique, on va mesurer au hasard un des états de base, avec comme probabilité le carré du coefficient correspondant.

Mathématiquement, la mesure effectue une projection de l'état du système sur un des états de base dont il est composé. Par exemple, si on a un qubit dans l'état $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$, alors la probabilité de mesurer 0, c'est-à-dire de projeter le système dans l'état de base $|0\rangle$ est $|\frac{1}{\sqrt{2}}|^2 = \frac{1}{2}$; et de même pour l'état de base $|1\rangle$. On a donc exactement la même probabilité de mesurer $|0\rangle$ que de mesurer $|1\rangle$.

Il faut noter que, lorsqu'on fait la mesure, on projette réellement le système quantique dans l'état de base. Concrètement, si on a un état superposé qu'on mesure, il se place dans l'état de base qu'on mesure, et toutes les mesures successives qu'on fera sur ce qubit donneront le même résultat. La mesure fait donc perdre l'état qu'on avait auparavant.

2.1.3 Dynamique du système

Comme n'importe quel système physique, on peut faire évoluer un système quantique dans le temps. Ici apparaissent deux propriétés. Tout d'abord, il découle du premier postulat que la dynamique d'un système quantique doit conserver la norme unité. En effet, un état quantique doit, pour être valide, avoir une norme de 1, et donc l'évolution d'un système quantique d'un premier état vers un autre doit conserver cette unitarité. Cela veut dire que la matrice représentant l'évolution du système quantique doit respecter la propriété suivante :

$$U^\dagger U = U U^\dagger = I, \quad (2.2)$$

avec U la matrice d'évolution du système, U^\dagger la matrice conjuguée transposée, ou adjointe, de U , et I l'identité.

Une deuxième propriété est également posée, ne découlant pas des deux postulats précédents. La dynamique d'un système quantique doit être aussi linéaire. Ainsi, on pourrait penser que n'importe quelle évolution unitaire

serait valable, mais l'expérience nous montre que non, il faut en plus qu'elle soit linéaire.

2.2 Vers une informatique quantique

À partir de ces 3 postulats de base, on peut commencer à comprendre comment se construit l'informatique quantique, et quels sont les apports sur l'informatique classique.

2.2.1 Multiples qubits

On a vu la définition d'un qubit. Cela nous permet d'étendre ce système quantique élémentaire à des systèmes composés de multiples qubits. En informatique classique, on travaille quasi systématiquement sur des mots binaires plutôt que des bits uniques ; l'équivalent est vrai en quantique. Pour cela, les systèmes quantiques, et donc les qubits, sont munis d'une opération : le produit tensoriel. Quand on veut effectuer une combinaison de deux qubits, cela revient à faire un produit tensoriel des états des deux qubits individuels. Par exemple, si nous disposons de deux qubits ayant pour valeur $|\psi_1\rangle = |0\rangle$ et $|\psi_2\rangle = |1\rangle$, alors on peut écrire le 2-qubit combinaison des deux de la façon suivante :

$$|\psi\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle, \quad (2.3)$$

qu'on écrit généralement sous la forme plus simple :

$$|\psi\rangle = |01\rangle. \quad (2.4)$$

Prenons un 2-qubit formé par la combinaison de 2 qubits :

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= (\alpha_1 \cdot |0\rangle + \beta_1 \cdot |1\rangle) \otimes (\alpha_2 \cdot |0\rangle + \beta_2 \cdot |1\rangle), \\ &= \alpha_1\alpha_2 |0\rangle \otimes |0\rangle + \alpha_1\beta_2 |0\rangle \otimes |1\rangle + \beta_1\alpha_2 |1\rangle \otimes |0\rangle + \beta_1\beta_2 |1\rangle \otimes |1\rangle. \end{aligned}$$

On peut donc, si on a un 2-qubit combinaison linéaire de tous les états de base, le factoriser en deux qubits séparés qu'on peut caractériser.

Considérons maintenant le 2-qubit suivant :

$$|\psi\rangle = \gamma_1 |00\rangle + \gamma_2 |11\rangle$$

Il paraît évident alors qu'on ne peut pas factoriser ce 2-qubit en produit tensoriel de 2 qubits individuels. Dans ce cas, on dit que les deux qubits sont **intriqués** et donc non séparables.

2.2.2 Portes quantiques

Dans la représentation d'état classique, et spécifiquement en informatique, on peut faire évoluer l'état au travers de portes. En informatique classique, on dispose ainsi de portes élémentaires telles que **AND**, **NOT**, **OR**, etc.

De la même manière, en respectant le troisième postulat posé précédemment, on peut construire des portes logiques quantiques, les combiner, afin de créer des circuits quantiques. Ces portes quantiques sont nécessairement unitaires, donc inversibles. En informatique quantique, on distingue donc plusieurs portes élémentaires, utilisées dans beaucoup de circuit [3] :

Les portes quantiques sont complètement caractérisées par la façon dont elles transforment les états quantiques dans la base canonique. On peut alors utiliser des tables de vérité pour les définir, de la même façon qu'en informatique classique :

1. La porte de Hadamard H . Elle permet de passer un qubit d'un état de base $|0\rangle$ à l'état superposé $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$, ou de l'état de base $|1\rangle$ à l'état superposé $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$. Elle est très utilisée en début de circuit pour préparer les qubits entrants dans un état permettant l'évaluation parallèle de toutes les entrées ;
2. Les portes de Pauli X , Y et Z permettant d'effectuer des rotations aux états des qubits ;
3. La porte de Toffoli, similaire d'un **NON** booléen à 3 qubit (il effectue un **NON** sur le dernier qubit quand les deux premiers sont à $|1\rangle$), est une porte universelle quantique [4]. Elle permet donc de construire l'ensemble des autres portes faisables.

Les tables de vérité des différentes portes quantiques évoquées sont disponibles en annexes.

Un exemple de circuit est le suivant : On dispose d'un 3-qubit dans l'état $|000\rangle$. Au départ, on applique à ces trois qubits une porte de Hadamard, qui les fait se retrouver dans une superposition équilibrée des états de base (c'est-à-dire de sorte qu'une mesure nous donne l'un des états de base avec une probabilité de $\frac{1}{8}$). On applique ensuite deux portes de Pauli Z , une au premier qubit, et une au troisième. On applique de la même façon 3 portes de Hadamard à la sortie, puis on mesure.

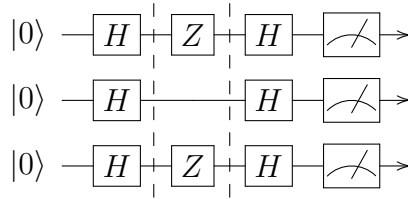


FIGURE 2.1 – Exemple de circuit quantique, avec U_f pour $f(a, b, c) = (\neg a) \oplus c$

Dans cet exemple, les deux portes de Pauli Z permettent d'appliquer une fonction f booléenne. En informatique classique, pour évaluer cette fonction sur les 2^n entrées possibles, il faudrait effectuer 2^n évaluations de f . Ici, avec ce circuit quantique, on n'effectue qu'une seule évaluation quantique de f sur l'état équilibré donné par les portes de Hadamard. On vient évaluer la fonction f sur tout les états de base composant l'état quantique. Puisque cet état est équilibré, les 2^n états de base vont être évalués, c'est-à-dire toutes les entrées qu'on voulait évaluer en classique.

L'avantage du quantique bien montré ici : les deux portes du milieu vont faire changer l'état des qubits, mais en parallèle : on fait évoluer le système simultanément pour tous les états de base qui nous intéressent, puisqu'ils sont superposés.

Chapitre 3

Mises en œuvres expérimentales

Toutes ces considérations théoriques, algébriques, sont mises en place depuis les années 1990 par plusieurs acteurs. On voit apparaître des considérations théoriques, notamment la machine de Turing quantique par David Deutsch [5] qui présente un premier modèle général pour le calcul quantique.

3.1 Processeurs quantiques et langages de programmation

Le travail de réalisation pratique de processeurs quantique débute en 1988 avec les travaux de Y. Yamamoto et K. Igeta [6] démontrant la faisabilité d'un processeur se basant sur les photons, permettant de faire des opérations sur 2 qubits. Depuis les années 1990, plusieurs articles sont publiés proposant des implémentations des différentes portes [7, 8, 9].

En 1998, une première implémentation expérimentale permet de mettre en œuvre l'algorithme de Deutsch sur 2 qubits [10]. En 2000, David DiVincenzo met en place 5 requis théoriques pour la mise en place effective de processeurs quantiques [11] (la possibilité d'avoir un système physique contenant les qubits ; la possibilité d'initialiser l'ensemble des qubits à un état initial comme $|000\dots\rangle$; des temps de décohérence bien supérieurs aux temps d'opération des portes ; posséder un ensemble universel de portes quantique ; et enfin la possibilité de mesurer les qubits individuellement).

Parallèlement à ces travaux d'implémentation pratique, on peut voir la mise en place de langages de programmation afin d'interagir avec ces processeurs. Plusieurs constructeurs mettent en place des bibliothèques de développement à disposition du public, en particulier Microsoft avec le Q# [12], ou IBM avec Qiskit [13]. Ces deux solutions sont considérées plutôt haut niveau, et s'intègrent au sein de langages de programmation classiques : tous les langages .NET et python pour Q#, et python seulement pour Qiskit.

À côté de cela, des langages plus bas niveaux existent, en particulier des implémentations langages types assembleur tels que le QASM / OpenQASM [14]. Ces langages plus bas niveaux permettent, comme les langages plus haut niveau, de décrire des circuits quantiques, mais le font avec une syntaxe plus lourde, mais sont exécutables directement sur des processeurs quantiques. Les langages de plus haut niveau compilent vers ces langages assembleurs pour s'exécuter sur des processeurs quantiques.

3.2 Simulateurs quantiques

Un autre champ d'application pratique de l'informatique quantique est l'étude de systèmes physiques difficiles voire impossibles à modéliser avec les supercalculateurs actuels. En 1982, Richard Feynman a été l'un des premiers à proposer un modèle de simulateur quantique universel [15]. Le concept de ce type d'application est de modéliser des systèmes et problèmes physiques faisant apparaître des comportements quantiques. Ces systèmes entraînent des comportements aujourd'hui mal compris, ne pouvant pas être simulés de façon correcte avec l'informatique classique. Plusieurs champs de la science bénéficieraient ainsi des améliorations apportées par ce domaine, notamment la chimie ou la biologie, où on se retrouve avec des systèmes composés de nombreux corps microscopiques avec des interactions quantiques difficiles ou compliquées à modéliser classiquement. Précisément, la difficulté avec la simulation de systèmes quantiques sur des ordinateurs classiques est due à la quantité de mémoire qui serait requise pour modéliser un système quantique dans son entièreté (par exemple, si on veut modéliser un système quantique à deux états purs, composé de N particules, il faudrait 2^N nombres en mémoire, et une matrice de taille $2^N \times 2^N$ pour l'évolution du système).

Plus de détails sur l'implémentation et l'utilisation des simulateurs quantiques sont disponibles, notamment par Buluta et Nori en 2009 [16]

Aujourd'hui, plusieurs industriels implémentent et mettent à disposition des services dédiés à la simulation quantique. Notamment, Microsoft propose intégré au Q# toute une partie dédiée à ces problèmes.

Chapitre 4

Algorithmes quantiques

On présente ici trois algorithmes permettant d'illustrer les apports spécifiques du quantique. Ils montrent notamment que l'informatique quantique permet d'obtenir des performances de traitement de l'information inaccessibles en informatique classique.

4.1 Algorithme de Deutsch-Jozsa

Le problème de Deutsch-Jozsa s'intéresse à une fonction booléenne qui est soit équilibrée (ayant autant d'entrées à 1 qu'à 0), soit constante (toutes les entrées à 1, ou toutes les entrées à 0).

Problème 1 (Deutsch-Jozsa). *Etant donnée une fonction f booléenne qui est soit équilibrée, soit constante. Le problème de Deutsch-Jozsa est de déterminer si f est constante ou équilibrée.*

Dans le cas classique, il faut effectuer au pire $2^{n-1} + 1$ évaluations pour déterminer si f est constante ou équilibrée. Tout d'abord, dès que deux évaluations sont différentes, f est nécessairement équilibrée. De plus, si après avoir évalué 2^{n-1} entrées et obtenu la même valeur, une évaluation supplémentaire nous permet de connaître dans quelle catégorie f se trouve.

Dans le cas quantique, on peut résoudre ce problème en effectuant qu'une seule évaluation, parallèle, de f . La figure 4.1 illustre le fonctionnement de l'algorithme présenté par Deutsch et Jozsa en 1992 [17] :

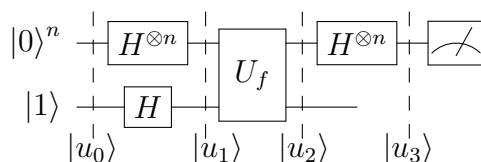


FIGURE 4.1 – Schéma du circuit de l'algorithme de Deutsch-Jozsa

Les détails algébriques de l'algorithme sont disponibles en annexe A

On dispose au départ un $(n+1)$ -qubit, c'est-à-dire $n+1$ qubits associés, les n premiers mis à 0 et le dernier mis à 1. Cet état d'entrée $|u_0\rangle$ est construit préalablement, puis est donné en entrée à des portes de Hadamard. Pour rappel, cette porte permet de faire passer un qubit de la base canonique $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ à la base de Fourier $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, avec $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ et $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. Elle permet notamment de faire passer les états de base $|0\rangle$ et $|1\rangle$ à des états superposés avec les mêmes probabilités pour les deux états de base.

Au sortir de cette porte, on obtient l'état $|u_1\rangle$, qui si mesuré va nous donner avec autant de probabilité un des états de base. On le passe donc à la "boîte" U_f . On appelle ce bloc **oracle**, qui implémente la fonction f qu'on souhaite évaluer pour n qubits (on ne détaille pas ici la façon d'implémenter f). L'entrée étant un $(n+1)$ -qubit équilibré, l'oracle va évaluer en parallèle toutes les entrées, correspondant aux états de base superposés. C'est ici qu'on peut à nouveau montrer la force de l'informatique quantique : avec en entrée un état superposé, un bloc fonctionnel va faire évoluer le système en effectuant le calcul pour tous les états de base superposés composant l'entrée.

On obtient $|u_2\rangle$, qui contient la solution de notre problème. Néanmoins, si on essaye ici de mesurer le système, on ne va pas obtenir directement une réponse "oui" ou "non" à notre problème : le système est encore dans un état superposé, et la réponse est codée dans les modules associés aux états de base superposés. Si on mesure $|u_2\rangle$, on obtiendra aléatoirement un des états de base composant le système.

Pour résoudre ce problème, on applique à nouveau une porte de Hadamard pour obtenir un $|u_3\rangle$. On l'a dit précédemment, quand appliqué à un état de base, la porte de Hadamard permet de créer un état équilibré. En revanche, quand comme ici on l'applique à un état déjà superposé, on peut obtenir directement un état qui va nous donner à coup sûr une réponse binaire. Ici, quand on va mesurer $|u_3\rangle$, on va soit mesurer un mot binaire de n bits valant 0, et dans ce cas la fonction est constante. Si on obtient n'importe quelle autre solution, alors la fonction est équilibrée. À nouveau, les détails algébriques de cet algorithme sont disponibles en annexe A.

Cet algorithme permet principalement de prouver la supériorité de l'informatique quantique sur ce type de problèmes : on arrive effectivement à atteindre des performances qui sont inatteignables avec des ordinateurs classiques. Plusieurs autres algorithmes ont été créés en se basant sur celui-là, en modifiant le problème et la fonction évaluée, mais en gardant l'algorithme. On peut notamment citer l'algorithme de Bernstein-Vazirani [18] qui permet de résoudre un problème d'arithmétique modulaire.

4.2 Algorithme de Grover

On s'intéresse maintenant à un problème classique d'informatique : la recherche dans des listes. En informatique classique, on connaît un certain nombre d'algorithmes pour effectuer des recherches dans des listes, qu'elles soient triées ou non triées.

Problème 2 (Grover). *Soit une liste non triée à N entrées. Le problème de Grover est de rechercher une entrée spécifique dans cette liste de façon efficace.*

Classiquement, l'algorithme le plus efficace devra effectuer au pire N itérations sur la liste pour trouver l'élément voulu. La liste étant non triée, on ne peut pas utiliser des algorithmes qui divisent la liste, qui permettent d'obtenir des performances en $\mathcal{O}(\log N)$.

En utilisant les principes de l'informatique quantique, Lou Grover a proposé en 1992 [19] un algorithme permettant de trouver la solution avec une forte probabilité, en juste $\mathcal{O}(\sqrt{N})$. La figure 4.2 illustre le circuit permettant de réaliser l'algorithme de Grover.

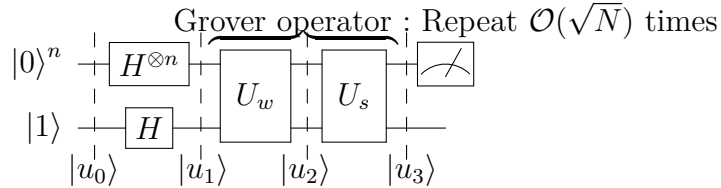


FIGURE 4.2 – Schéma du circuit de l'algorithme de Grover

De même que pour Deutsch-Jozsa, les détails algébriques de cet algorithme sont disponibles en annexe C. Cet algorithme a aussi été bien expliqué dans [20], notamment en étendant à une recherche de solutions multiples, et en détaillant l'implémentation de l'opérateur de Grover.

On commence donc de la même manière avec n qubits initialisés à $|0\rangle$ et 1 à $|1\rangle$, et on les passe tous dans une porte de Hadamard pour avoir des qubits équilibrés, afin de faire un traitement parallèle.

La deuxième étape consiste à appliquer l'opérateur de Grover à l'état superposé $|u_1\rangle$. On vient effectuer deux opérations successives ici.

1. Une opération d'inversion d'amplitude avec l'opérateur U_w . On a au départ les n états de base superposés de façon équilibrée, ils ont donc tous la même amplitude (le module devant l'état de base). Cet opérateur vient inverser l'amplitude de l'état de base qu'on cible. On se retrouve après dans un état équilibré, puisque les probabilités sont les

amplitudes mises au carré. On a donc la réponse dans l'état quantique, mais elle est inaccessible à la mesure.

2. Une opération de miroir à la moyenne avec l'opérateur U_s . Cet opérateur vient calculer la moyenne des amplitudes, puis enlever aux amplitudes leur différence à la moyenne. Dans le cas des amplitudes qui n'ont pas bougé avec U_w , on se retrouve légèrement en dessous de la moyenne, et dans le cas de l'état ciblé, on se retrouve bien au dessus de la moyenne.

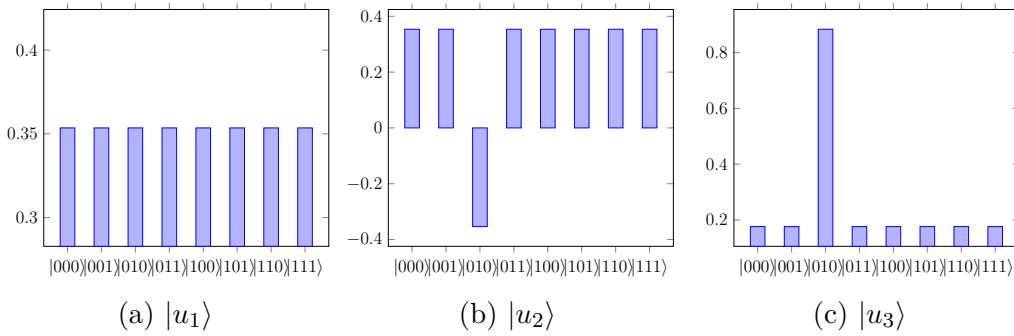


FIGURE 4.3 – Evolution des amplitudes pour $n = 3$ qubits

La figure 4.3 illustre cette évolution pour 3 qubits. On voit qu'à la fin de U_s , on obtient un état quantique qui a une forte probabilité de tomber sur l'état voulu (ici, $|010\rangle$), les amplitudes de ceux qu'on ne veut pas ayant été fortement réduites. Néanmoins, on est toujours pas sûr de tomber sur le bon résultat : dans ce cas précis, la probabilité de tomber sur $|010\rangle$ est d'environ 78%, on a quand même plus de 20% de chances de mesurer un autre état. Ce n'est pas satisfaisant.

La solution est de réappliquer les portes U_w et U_s . Ceci va encore plus diminuer les probabilités des états non voulus et augmenter la probabilité de l'état voulu. On peut prouver, notamment géométriquement, que le nombre d'optimal d'itérations est $\frac{\pi}{4}\sqrt{N}$. En fait, il se passe autre chose : si on dépasse ce nombre optimal d'itération, on va diminuer l'amplitude de l'état voulu et augmenter les probabilités des autres états : c'est cyclique. La figure 4.4 illustre une simulation sur plus d'itérations que ce qui est nécessaire.

En bleu, on représente le module de l'état cible, en rouge le module des autres états (en vert, pour indication, la somme des modules au carré pour vérifier l'unitarité de l'état). On voit bien ici le rebouclement après $\frac{\pi}{4}\sqrt{N}$ itérations.

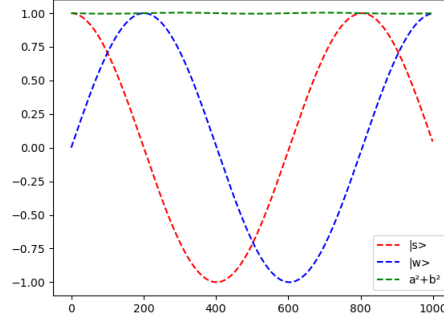


FIGURE 4.4 – Evolution des amplitudes pour $n=16$, sur 1000 itérations

4.3 Algorithme de Shor

On peut enfin étudier l'algorithme de Shor, proposé par Peter Shor en 1997 [21].

Problème 3. *On s'intéresse au problème de la factorisation d'un nombre $N = p \times q$ avec p et q nombres premiers très grands.*

Ce problème est à la base d'une bonne partie de chiffrements utilisés en cybersécurité, notamment l'algorithme RSA [22]. Son utilisation est due à la difficulté de factoriser des nombres N très grands, la résolution ayant une complexité exponentielle en informatique classique ($\mathcal{O}(\exp[c \cdot n^{\frac{1}{3}}(\log n)^{\frac{2}{3}}])$), par exemple avec l'algorithme du crible du corps algébrique [23]. Cet algorithme est certes efficace pour des nombres supérieurs à 10^{100} , mais ne permet pas de factoriser pour des nombres de 2048 ou 4096 bits, rendant le cassage des clés de chiffrement impossible pour des nombres suffisamment grands. Ce domaine de recherche avance rapidement, et de nouveaux algorithmes sont trouvés permettant d'améliorer les performances. On ne trouve en revanche toujours pas d'algorithmes permettant de résoudre ce problème en un temps polynomial.

En utilisant l'informatique quantique, Shor a démontré que ce problème était résoluble bien plus rapidement qu'en utilisant l'informatique classique, en un peu plus rapidement que $\mathcal{O}(n^3)$. En fait, Shor résout avec son algorithme une sous-partie de l'algorithme de la figure 4.5

```

Data: N
repeat
  choose a coprime with N;
  find smallest r such that  $a^r \equiv 1 \pmod{N}$ ;
  if r is even then
     $x \equiv a^{\frac{r}{2}} \pmod{N}$ ;
    if  $x + 1 \not\equiv 0 \pmod{N}$  then
      at least one of  $\{p, q\} \in \{gcd(x + 1, N), gcd(x - 1, N)\}$ ;
      break;
    else
      continue;
    end
  else
    continue;
  end
until;

```

FIGURE 4.5 – Algorithme de factorisation en nombres premiers

Cet algorithme permet de trouver les facteurs premiers p et q . On peut prouver que la deuxième instruction revient à chercher la période de la fonction $a^r \pmod{N}$. C'est cette instruction spécifique qui est compliquée à résoudre classiquement, mais que Shor a réussi à résoudre en quantique.

Cet algorithme se passe en 3 étapes. Les deux premières sont similaires aux deux algorithmes précédents : on fait passer un n-qubit de l'état $|0\rangle^{\otimes n}$ à un état superposé équiprobable ; puis on évalue la fonction $a^r \pmod{N}$ pour l'état équilibré. La troisième étape fait intervenir une nouvelle notion : la transformée de Fourier quantique. C'est une généralisation de la porte de Hadamard, qui fait passer les qubits de la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ à la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ (pour rappel, on a $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, et $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$).

La transformée de Fourier quantique peut être comprise ici en faisant l'analogie à la version classique. Dans un cas classique, quand on a une fonction périodique, l'application de la transformée de Fourier permet de passer de la représentation temporelle à la représentation fréquentielle. Sur cette représentation, on obtient des raies de Dirac aux fréquences correspondant aux périodes de la fonction. Il suffit alors de lire les valeurs pour obtenir les périodes. Il s'agit du même principe en quantique : la transformée de Fourier quantique nous permet d'obtenir directement la valeur de la période, avec l'avantage de faire le calcul parallélisé.

Cet algorithme a déjà été implémenté sur de réels processeurs quantique,

permettant de factoriser 15 en 5 et 3 en 2001 [24], puis de factoriser 21 en 3 et 7 en 2011 [25]. Aucun travail expérimental n'a réussi à ce jour à factoriser des nombres plus grands que ça, limitant les risques potentiels à la cybersécurité engendrés par cet algorithme. La structure de la solution de Shor nécessite en effet beaucoup de corrections d'erreur sur les mises en œuvres pratiques dues au bruit sur les grands nombres de portes utilisées, ce qui complexifie et ralentit les implémentations.

En revanche, ce problème de factorisation n'a pas pour seule solution celle proposée par Shor, et notamment une proposition théorique de 2018 montre une factorisation d'entiers de 2048 bits en 8 heures, en utilisant 20 million de qubits [26]. D'autres algorithmes sont présentés depuis 2010 notamment, présentant d'autres alternatives à Shor [27].

Chapitre 5

Ouverture vers le stage

A la suite de ce travail, un certain nombre de questions restent ouvertes et serviront de pistes de travail pour le stage qui suit :

- Sur la construction effective des circuits, est-il optimal de décomposer le circuit en portes élémentaires CNOT ou est-il plus rapide de juste exécuter le problème classiquement ? La question se pose en particulier pour l'algorithme de Deutsch-Jozsa où l'oracle a besoin, a priori, d'être construit en connaissant déjà toutes les sorties de la fonction.
- Sur l'algorithme de Deutsch-Jozsa encore une fois, que se passe-t-il quand on l'applique à d'autres classes de fonction, et comment peut-on l'adapter pour différencier d'autres types de fonctions ?
- Sur le problème de Deutsch-Jozsa, peut-on trouver un autre algorithme permettant de résoudre le problème ? Cela amène vers l'écriture des contraintes algébriques nécessaires à la résolution du problème, et d'essayer de déterminer si la solution proposée par Deutsch-Jozsa est optimale ou non.
- En étendant le point précédent, peut-on poser des contraintes algébriques sur les problèmes ou écrire des spécifications algébriques pour les différents algorithmes ? Cela permettrait de caractériser systématiquement les problèmes pouvant disposer d'une amélioration quantique.

Chapitre 6

Conclusion

Ce travail bibliographique met ainsi en place les différents éléments nécessaires à la compréhension de l'informatique quantique : la notion de système quantique, amenant la définition de qubit, les mécanismes permettant de faire évoluer les systèmes, ainsi que la mesure. On illustre de plus trois algorithmes majeurs dans l'histoire de ce domaine, en montrant leur champ d'application, les problèmes qu'ils permettent de résoudre. De tout ce travail découle la conclusion que l'informatique quantique permet d'accélérer considérablement la résolution d'un certain nombre de problèmes impossibles à résoudre avec les technologies classiques.

Annexe A

Algorithme de Deutsch-Jozsa

A.1 Problème à résoudre

Pour rappel, on cherche à déterminer si une fonction f booléenne définie par

$$\begin{aligned} f : \{0, 1\}^n &\rightarrow \{0, 1\} \\ (x_0, x_1, \dots, x_n) &\mapsto y = f(x_0, x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

est équilibrée ou constante. On sait à l'avance que f est soit constante, soit équilibrée, mais ne peut pas être aucun.

Exemple 1. Soit f la fonction booléenne $f : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ définie par la table de vérité suivante :

(x_1, x_2)	$f(x_1, x_2)$
(0, 0)	0
(0, 1)	1
(1, 0)	1
(1, 1)	0

Cette fonction est équilibrée. On notera qu'elle correspond au classique “ou exclusif”. Cette fonction pourrait être représentée par le vecteur de ces valeurs : $(0, 1, 1, 0)$. Elle peut aussi être codée en listant les entrées où elle est vraie, ici $\{(0, 1), (1, 0)\}$ (ou bien en base 10 : $\{1, 2\}$).

Initialisation

On commence avec : $|u_0\rangle = (|0\rangle^{\otimes n}) \otimes |1\rangle$: n -qubits à $|0\rangle$ et 1-qubit à $|1\rangle$.

Etape 1

On applique une porte de Hadamard à $|u_0\rangle$ pour avoir un état équiprobable : $|u_1\rangle = H |u_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle)$.

Etape 2

On applique l'oracle quantique suivant à $|u_1\rangle$:

$$o : |x\rangle |y\rangle \mapsto |x\rangle |y \oplus f(x)\rangle .$$

Posons x , on est alors dans l'une des deux situations disjointes suivantes :

- $f(x) = 0$,
- $f(x) = 1$.

Analysons chacune de ces situations, tout d'abord si $f(x) = 0$ alors

$$o : |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle) \mapsto |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle) .$$

Autrement dit $|x\rangle (|0\rangle - |1\rangle)$ est un point fixe de o .

Dans l'autre situation, on a $f(x) = 1$ et on en déduit

$$o : |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle) \mapsto |x\rangle (|1\rangle - |0\rangle) .$$

Autrement dit, dans ce cas, le vecteur $|x\rangle (|0\rangle - |1\rangle)$ est envoyé sur son opposé via o .

Finalement, les deux cas précédents peuvent être résumés sous la forme suivante

$$o : |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle) \mapsto (-1)^{f(x)} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle) .$$

Par linéarité, on en déduit :

$$|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle) . \quad (\text{A.1})$$

On peut ignorer le dernier qubit $(|0\rangle - |1\rangle)$ comme il est constant. Finalement, on en déduit :

$$|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} |x\rangle . \quad (\text{A.2})$$

Etape 3

On réapplique une porte Hadamard à chaque qubit sortant, ce qui donne :

$$|u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle \right).$$

Par linéarité, on a :

$$|u_3\rangle = \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle. \quad (\text{A.3})$$

La probabilité $|p|$ de mesurer $|0\rangle^{\otimes n}$ est donc :

$$\left| \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)} \right|, \quad (\text{A.4})$$

$$\text{avec } p = \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{f(x)}.$$

Si on a une fonction $f(x)$ constante, alors chaque élément de la somme retourne la même valeur (1 ou -1 suivant que $f(x)$ retourne 0 ou 1), la somme va donc valoir $\pm 2^n$. Dans le cas où la fonction est équilibrée, on va avoir autant de 1 que de -1, la somme est donc nulle.

On a donc les valeurs suivantes dépendant du type de $f(x)$:

1. Si $f(x)$ est constante : $p = \pm \frac{1}{2^n} \times 2^n = \pm 1$,
2. Si $f(x)$ est équilibrée : $p = \pm \frac{1}{2^n} \times 0 = 0$.

Dans le cas constant, on ne peut donc que mesurer $|0\rangle^{\otimes n}$ puisqu'il a une probabilité de 1 d'apparaître. Dans le cas équilibré, on ne mesure jamais $|0\rangle^{\otimes n}$ puisque sa probabilité est nulle.

On en conclue que, lorsqu'on effectue une mesure, si on tombe sur $|0\rangle^{\otimes n}$ alors la fonction est constante, sinon elle est équilibrée.

A.1.1 Exemple

Prenons une fonction f comme définie précédemment avec $n = 2$, sans savoir si elle est constante ou équilibrée.

Etape 1

On commence avec $|u_0\rangle = |001\rangle$. La première étape est l'application de la porte d'Hadamard à $|u_0\rangle$:

$$\begin{aligned}
|u_1\rangle &= H|u_0\rangle = H|0\rangle \otimes H|0\rangle \otimes H|1\rangle, \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} ((|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)), \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{|000\rangle - |001\rangle + |010\rangle - |011\rangle + |100\rangle - |101\rangle + |110\rangle - |111\rangle\}, \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{|00\rangle(|0\rangle - |1\rangle) + |01\rangle(|0\rangle - |1\rangle) + |10\rangle(|0\rangle - |1\rangle) + |11\rangle(|0\rangle - |1\rangle)\}.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Etape 2 : oracle quantique

On applique à $|u_1\rangle$ l'oracle quantique $|x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|y \oplus f(x)\rangle$:

$$\begin{aligned}
|u_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} |00\rangle (|0 \oplus f(00)\rangle - |1 \oplus f(00)\rangle) + \\
&\quad |01\rangle (|0 \oplus f(01)\rangle - |1 \oplus f(01)\rangle) + \\
&\quad |10\rangle (|0 \oplus f(10)\rangle - |1 \oplus f(10)\rangle) + \\
&\quad |11\rangle (|0 \oplus f(11)\rangle - |1 \oplus f(11)\rangle).
\end{aligned}$$

On peut alors réécrire l'équation de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
|u_2\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (-1)^{f(00)} |00\rangle (|0\rangle - |1\rangle) + \\
&\quad (-1)^{f(01)} |01\rangle (|0\rangle - |1\rangle) + \\
&\quad (-1)^{f(10)} |10\rangle (|0\rangle - |1\rangle) + \\
&\quad (-1)^{f(11)} |11\rangle (|0\rangle - |1\rangle).
\end{aligned}$$

Par la suite, on va appliquer une porte de Hadamard à $|u_2\rangle$. Le qubit $|0\rangle - |1\rangle$ donne $|1\rangle$ par la cette porte, il est donc constant par rapport à $|u_0\rangle$. On peut donc le retirer de l'équation, ce qui nous donne pour $|u_2\rangle$:

$$|u_2\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((-1)^{f(00)} |00\rangle + (-1)^{f(01)} |01\rangle + (-1)^{f(10)} |10\rangle + (-1)^{f(11)} |11\rangle \right). \tag{A.6}$$

Matriciellement, on peut donc écrire

$$|u_2\rangle = \begin{pmatrix} (-1)^{f(00)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{f(01)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^{f(10)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^{f(11)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Etape 3 : porte de Hadamard

On applique donc une porte de Hadamard à $|u_2\rangle$:

$$|u_3\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} H \left((-1)^{f(00)} |00\rangle + (-1)^{f(01)} |01\rangle + (-1)^{f(10)} |10\rangle + (-1)^{f(11)} |11\rangle \right). \quad (\text{A.8})$$

Nous sommes sur une porte de Hadamard pour 2 qubits, ce qui donne la relation matricielle suivante pour $|u_3\rangle$:

$$\begin{aligned} |u_3\rangle &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^{f(00)} \\ (-1)^{f(01)} \\ (-1)^{f(10)} \\ (-1)^{f(11)} \end{bmatrix}, \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-1)^{f(00)} + (-1)^{f(01)} + (-1)^{f(10)} + (-1)^{f(11)} \\ (-1)^{f(00)} - (-1)^{f(01)} + (-1)^{f(10)} - (-1)^{f(11)} \\ (-1)^{f(00)} + (-1)^{f(01)} - (-1)^{f(10)} - (-1)^{f(11)} \\ (-1)^{f(00)} - (-1)^{f(01)} - (-1)^{f(10)} + (-1)^{f(11)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Si f est constante, alors $(-1)^{f(00)} = (-1)^{f(01)} = (-1)^{f(10)} = (-1)^{f(11)}$. En fonction du fait que $f = 0$ ou bien $f = 1$:

$$|u_3\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ou bien } |u_3\rangle = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

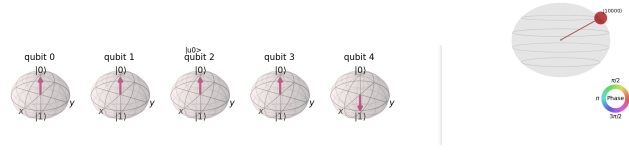
On a donc une probabilité de 1 de mesurer l'état $|00\rangle$.

En revanche, si f est équilibrée, la moitié des valeurs vont valoir $(-1)^0 = 1$ et l'autre moitié $(-1)^1 = -1$. La première ligne du vecteur $|u_3\rangle$ donne donc systématiquement 0, on ne mesure donc jamais l'état $|00\rangle$.

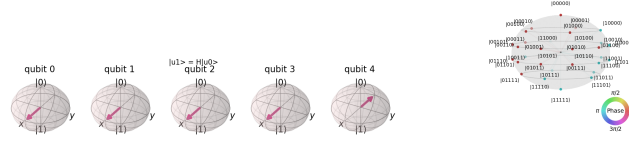
A.2 Visualisation géométrique

Reprenons cet algorithme avec $n = 4$ qubits et affichons l'évolution des états des qubits avec des sphères de bloch.

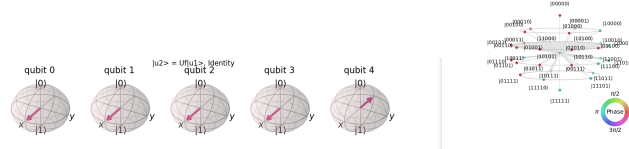
A.2.1 Fonction constante $f_0(x) = 0$



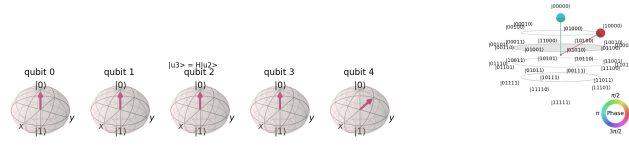
(a) $|u_0\rangle = |00001\rangle$



(b) $|u_1\rangle = H|u_0\rangle = |+++-\rangle$



(c) $|u_2\rangle = U_f|u_1\rangle = |+++-\rangle$



(d) $|u_3\rangle = H|u_2\rangle = |0000\rangle|-\rangle$

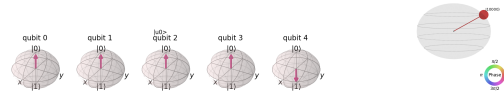
FIGURE A.1 – Evolution des états pour une fonction f constante, vecteurs d'états séparés et réunis

On voit ici l'ensemble des états que prend le registre de sortie. Dans le cas constant, on se retrouve bien à mesurer exclusivement la valeur 0 (pour

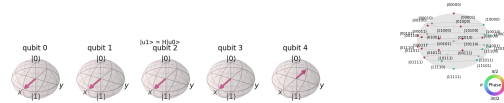
rappel, on ne mesure pas le dernier qubit qui est constant à 1). Pour les deux étapes intermédiaires, on visualise bien qu'on se retrouve dans une certaine superposition des états possibles. A noter, la visualisation présentée dans la colonne de gauche montre les états séparés. On peut rappeler que cette représentation n'est possible que parce que le 4-qubit est dans un état séparable. La représentation serait impossible si il était dans un état superposé (par exemple, si $|u\rangle = \frac{1}{2}(|10001\rangle + |01001\rangle)$).

A.2.2 Fonction équilibrée quelconque $f_1(x)$

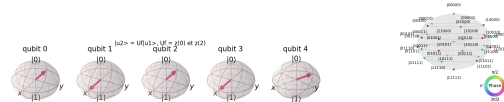
La figure suivante présente la même visualisation, pour une fonction équilibrée :



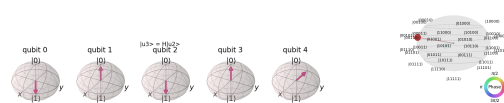
(a) $|u0\rangle = |0001\rangle$



(b) $|u1\rangle = H|u0\rangle = |++++\rangle$



(c) $|u2\rangle = U_f|u1\rangle = |-++-\rangle$



(d) $|u3\rangle = H|u2\rangle = |1010\rangle|-\rangle$

FIGURE A.2 – Evolution des états pour une fonction f équilibrée, vecteurs d'états séparés

On voit bien sur cette figure que dans le cas d'une fonction équilibrée, l'état va se situer à un des points indiqués sur la sphère de Bloch mais jamais sur le point 0.

Annexe B

Algorithme de Bernstein-Vazirani

B.1 Problème à résoudre

Soient x et s tels que $x, s \in \{0, 1\}^n$.

On pose une fonction f définie par :

$$\begin{aligned} f : x &\rightarrow y = s \cdot x \pmod{2} = x_1s_1 + x_2s_2 + \cdots + x_ns_n \\ f : \{0, 1\}^n &\rightarrow \{0, 1\}, \end{aligned}$$

Exemple 2. Soit s le mot booléen suivant : $s = 10$. La fonction f a donc la table de vérité suivante :

(x_1, x_2)	s	$f(x_1, x_2)$
$(0, 0)$	10	0
$(0, 1)$	10	0
$(1, 0)$	10	1
$(1, 1)$	10	1

On observe que le résultat est de 1 pour les entrées (x_1, x_2) où l'emplacement des 1 correspond à ceux de s .

Problème 4 (Bernstein-Vazirani). Etant donné un mot s secret, et la fonction f implémentant l'opération décrite précédemment, comment peut-on retrouver s en le moins d'évaluations de f possibles ?

B.1.1 Solution classique

Dans le cas classique, on va devoir évaluer au pire toutes les valeurs possibles de s pour trouver sa valeur, soit n évaluations de f . C'est un algorithme de complexité $\mathcal{O}(n)$.

B.1.2 Solution quantique

Dans le cas quantique, ce problème se résout en une seule évaluation quantique de f . L'algorithme reprend celui de Deutsch-Jozsa en changeant la fonction appliquée dans l'oracle quantique.

Initialisation

On commence avec : $|u_0\rangle = (|0\rangle^{\otimes n})$: n-qubits à $|0\rangle$.

Etape 1

On applique une porte de Hadamard à $|u_0\rangle$ pour avoir un état équiprobable : $|u_1\rangle = H|u_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$.

Etape 2

On applique l'oracle quantique suivant à $|u_1\rangle$:

$$o : |x\rangle |y\rangle \mapsto |x\rangle |y \oplus (s \cdot x \pmod{2})\rangle.$$

En suivant exactement le même raisonnement que pour Deutsch-Jozsa, on arrive à l'expression suivante :

$$|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{s \cdot x \pmod{2}} |x\rangle. \quad (\text{B.1})$$

Etape 3

De la même façon à Deutsch-Jozsa, on applique une porte Hadamard à chaque qubit sortant, ce qui donne :

$$\begin{aligned} |u_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{s \cdot x \pmod{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle \right), \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{s \cdot x \pmod{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{x \cdot y} |y\rangle \right), \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{(s \cdot x \pmod{2}) + x \cdot y} |y\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Et on peut prouver que $\frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{(s \cdot x \pmod{2}) + x \cdot y} |y\rangle$ est égal à $|s\rangle$.

B.1.3 Exemple

Prenons par exemple $s = (10)_2 = 2_{10}$, soit $f(x) = 2 \cdot x \pmod{2}$.

Etape 1 : porte de Hadamard

On commence avec $|u_0\rangle = |00\rangle$. La première étape est l'application de la porte d'Hadamard à $|u_0\rangle$:

$$\begin{aligned} |u_1\rangle &= H |u_0\rangle = H |0\rangle \otimes H |0\rangle, \\ &= \frac{1}{2} ((|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)), \\ &= \frac{1}{2} \{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\} \end{aligned} \tag{B.3}$$

Etape 2 : oracle quantique

On applique à $|u_1\rangle$ l'oracle quantique $|x\rangle |y\rangle \rightarrow |x\rangle |y \oplus (s \cdot x \pmod{2})\rangle =:$

$$\begin{aligned} |u_2\rangle &= \frac{1}{2} ((-1)^{10 \cdot 00 \pmod{2}} |00\rangle + (-1)^{10 \cdot 01 \pmod{2}} |01\rangle + (-1)^{10 \cdot 10 \pmod{2}} |10\rangle + (-1)^{10 \cdot 11 \pmod{2}} |11\rangle) \\ &= \frac{1}{2} ((-1)^0 |00\rangle + (-1)^0 |01\rangle + (-1)^1 |10\rangle + (-1)^1 |11\rangle), \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) \end{aligned} \tag{B.4}$$

Etape 3 : porte de Hadamard

On applique donc une porte de Hadamard à $|u_2\rangle$:

$$|u_3\rangle = \frac{1}{2} H (|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle). \tag{B.5}$$

Nous sommes sur une porte de Hadamard pour 2 qubits, ce qui donne la relation matricielle suivante pour $|u_3\rangle$:

$$\begin{aligned}
|u_3\rangle &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \\
&= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{B.6}
\end{aligned}$$

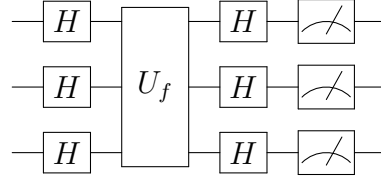
Lors de la mesure, on va obtenir l'état $|10\rangle$ avec une probabilité de 1, qui était bien notre mot binaire s de départ.

On peut observer que, lors de l'application de la porte de Hadamard à $|u_2\rangle$, on obtient la superposition d'état suivante : $|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle$. Cela correspond à la troisième ligne de la matrice de Hadamard, correspondant au $|s\rangle$ voulu. Dans tout les cas, peu importe le s choisi, on obtiendra une superposition d'état correspondant à une des lignes de la matrice, forçant à 0 les probabilités de tous les états sauf de celui indiqué.

B.1.4 Implémentation du circuit

Circuit global

L'implémentation du circuit quantique pour cet algorithme est très similaire à celui de Deutsch-Jozsa, à la différence qu'on a un qubit de moins :



Implémentation de l'oracle

Prenons le cas où $n = 2$. La matrice correspondant à la porte U_f va avoir 4 possibilité pour obtenir, comme on l'a dit lors de l'exemple, une des 4 lignes de la matrice de Hadamard :

$$U_{f_{00}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U_{f_{01}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, U_{f_{10}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, U_{f_{11}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On remarque que ces quatres matrices sont en fait des produits tensoriels de deux matrices correspondant à des portes à 1 qubit :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

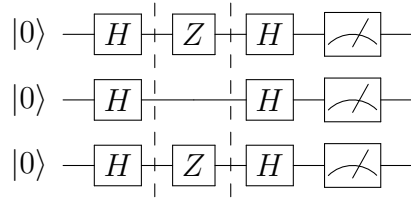
Pour $n = 2$, on a $s \in \{00, 01, 10, 11\}$. En reprenant les matrices correspondantes, on obtient les produits tensoriels suivant :

$$U_{f_{00}} = I \otimes I, U_{f_{01}} = I \otimes Z, U_{f_{10}} = Z \otimes I, U_{f_{11}} = Z \otimes Z.$$

On peut généraliser sur l'implémentation en disant :

$$U_f = \bigotimes_{i=0}^n U_i, U_i = \begin{cases} I & \text{si } s_i = 0 \\ Z & \text{si } s_i = 1 \end{cases}. \quad (\text{B.7})$$

Un exemple d'implémentation complète serait alors (pour $s = 101$) :



Annexe C

Algorithme de Grover

C.1 Rappels d'algèbre : projection et réflexion

On utilise ici la notation de Dirac pour noter les vecteurs, et on ne norme pas les vecteurs pour plus de simplicité dans les calculs. Les raisonnements restent les mêmes si on respectait la norme.

Soient deux vecteurs $|u\rangle$ et $|v\rangle$, avec $|v\rangle$ normalisé.

Définition 1. La matrice de projection P de $|u\rangle$ sur $|v\rangle$ est définie par $P = |v\rangle \cdot \langle v|$.

Définition 2. La matrice de réflexion R de $|u\rangle$ par rapport à $|v\rangle$ est définie par $R = 2|v\rangle \cdot \langle v| - I$.

Exemple 3. Prenons $|u\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $|v\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

On projete $|u\rangle$ sur $|v\rangle$:

$$P = \frac{|v\rangle \cdot \langle v|}{\|v\|^2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit : } |u_v\rangle = P|u\rangle = \begin{bmatrix} -0.8 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

Exemple 4. Prenons à nouveau $|u\rangle = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $|v\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. On effectue une réflexion de $|u\rangle$

$$R = 2 \times \frac{|v\rangle \cdot \langle v|}{\|v\|^2} - I = 2 \times \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La première étape est la double projection $2 \times P$, ce qui donne le vecteur $\begin{bmatrix} -1.6 \\ 3.2 \end{bmatrix}$.

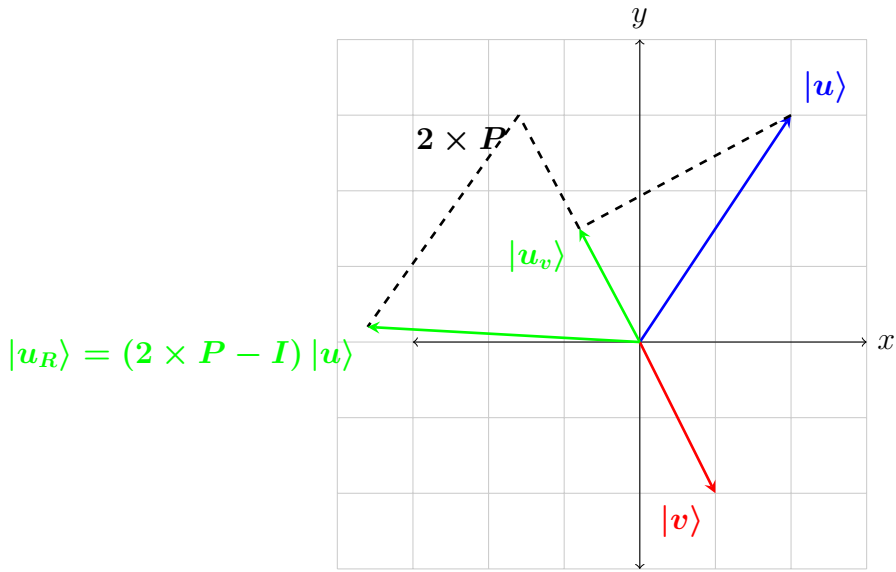
La deuxième étape est d'enlever le vecteur initial, ce qui donne le vecteur $|u_R\rangle = \begin{bmatrix} -3.6 \\ 0.2 \end{bmatrix}$.

On peut vérifier les angles θ_{UV} et θ_{VU_R} :

$$\theta_{UV} = \arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}\right) = \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{13} \times \sqrt{5}}\right) = 119.7^\circ$$

$$\theta_{VU_R} = \arccos\left(\frac{v \cdot u_R}{\|v\| \|u_R\|}\right) = \arccos\left(\frac{-4}{\sqrt{5} \times \sqrt{13}}\right) = 119.7^\circ$$

Les deux angles sont bien égaux, on a effectué une réflexion.



C.2 Problème à résoudre

Soit une base de données non triée à N entrées. Nous voulons trouver un algorithme permettant de chercher efficacement un enregistrement dans cette base.

Initialisation

On commence avec : $|u_0\rangle = (|0\rangle^{\otimes n}) \otimes |1\rangle$: n-qubits à $|0\rangle$ et 1-qubit à $|1\rangle$

Etape 1

On applique une porte de Hadamard à $|u_0\rangle$ pour avoir un état équiprobable : $|u_1\rangle = H |u_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{n+1}}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle)$

On pose alors $|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$

Etape 2 : opérateurs de Grover

On définit les deux opérateurs suivants :

$U_w = I - 2 |w\rangle \langle w|$, avec w état cible correspondant à la solution du problème (amplitude de 1 sur l'état visé, amplitude nulle sur le reste)

$U_s = 2 |s\rangle \langle s| - I$

Remarque 1. On reconnaît ici que ces deux opérateurs sont semblables à la réflexion vue dans la partie 1.

On effectue ici un changement de base : au lieu de continuer les calculs dans la base canonique $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, on se place dans la base $\{|w\rangle, |s\rangle\}$

Inversion d'amplitude L'opérateur U_w effectue l'inversion de l'amplitude de l'état cible, tandis que l'opérateur U_s effectue le miroir des amplitudes par rapport à la moyenne.

On applique U_w puis U_s :

$$U_w |s\rangle = (I - 2 |w\rangle \langle w|) |s\rangle = |s\rangle - 2 |w\rangle \langle w|s\rangle$$

Or, $\langle w|s\rangle$ est un produit scalaire. $|w\rangle$ est défini plus haut, et $|s\rangle$ est l'état équiprobable obtenu après la porte de Hadamard. Le résultat est donc $\langle w|s\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}$. On peut donc réécrire :

$$|u_3\rangle = U_w |s\rangle = |s\rangle - \frac{2}{\sqrt{2^n}} |w\rangle$$

Miroir à la moyenne On applique ensuite l'opérateur U_s au résultat de U_w . On peut voir qu'en pratique U_s effectue un miroir de $|u_3\rangle$ par rapport à $|s\rangle$.

$$\begin{aligned}
U_s |u_3\rangle &= (2 |s\rangle \langle s| - I)(|s\rangle - \frac{2}{\sqrt{2^n}} |w\rangle) \\
&= 2 |s\rangle \langle s|s\rangle - |s\rangle - \frac{4}{\sqrt{2^n}} |s\rangle \langle s|w\rangle + \frac{2}{\sqrt{2^n}} |w\rangle \\
&= 2 |s\rangle - |s\rangle + \frac{4}{\sqrt{2^n}} \times \frac{1}{\sqrt{2^n}} |s\rangle + \frac{2}{\sqrt{2^n}} |w\rangle \\
&= |s\rangle - \frac{4}{2^n} |s\rangle + \frac{2}{\sqrt{2^n}} |w\rangle \\
|u_4\rangle &= \frac{2^n - 4}{2^n} |s\rangle + \frac{2}{\sqrt{2^n}} |w\rangle
\end{aligned} \tag{C.1}$$

Plus généralement, cette application de U_w puis U_s revient à appliquer la matrice suivante à l'état d'entrée, dans la base $\{|w\rangle, |s\rangle\}$: $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{2^n}} \\ \frac{-2}{\sqrt{N}} & \frac{2^n-4}{2^n} \end{bmatrix}$

C.2.1 Exemple

Prenons par exemple une base de données de 4 bits ($n = 4$), avec l'état $|w\rangle$ cible valant l'état $|0100\rangle$ (amplitude de 1 sur cet état, et de 0 sur l'ensemble de 15 autres).

On initialise un $(n+1)$ -qubit à l'état suivant :

$$|u_0\rangle = |00001\rangle \tag{C.2}$$

Etape 1

On applique la porte de Hadamard à l'état initial $|u_0\rangle$:

$$|u_1\rangle = \frac{1}{16} \sum_{x=0}^{15} |x\rangle (|0\rangle - |1\rangle) \tag{C.3}$$

On obtient donc les deux états formant notre base pour les calculs suivants : $|s\rangle = |u_1\rangle$ et $|w\rangle$.

Etape 2 : Opérateur de Grover

On applique la transformation $U_s U_w = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{2^n}} \\ \frac{-2}{\sqrt{2^n}} & \frac{2^n-4}{2^n} \end{bmatrix}$ pour $n = 4$ soit

$$U_s U_w = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} :$$

$$|u_2\rangle = U_s U_w \cdot |s\rangle = \frac{3}{4} |s\rangle + \frac{1}{2} |w\rangle \quad (\text{C.4})$$

On voit que l'état cible $|w\rangle$ est passé d'une amplitude de 0 à une amplitude de 0.5. On peut effectuer l'opération plusieurs fois pour obtenir un résultat voulu. La figure suivante montre l'évolution des amplitudes de $|s\rangle$ et de $|w\rangle$ pour $n = 16$, pour 1000 itérations de l'opérateur. On observe qu'on arrive à l'état voulu $|w\rangle$ mais qu'on ne reste pas à cet état une fois atteint. Cela montre bien qu'il y a un nombre optimal d'itérations à effectuer, à ne pas dépasser. (la courbe verte sert d'indicateur, pour vérifier qu'on reste dans un état valide où la somme des amplitudes vaut bien 1)

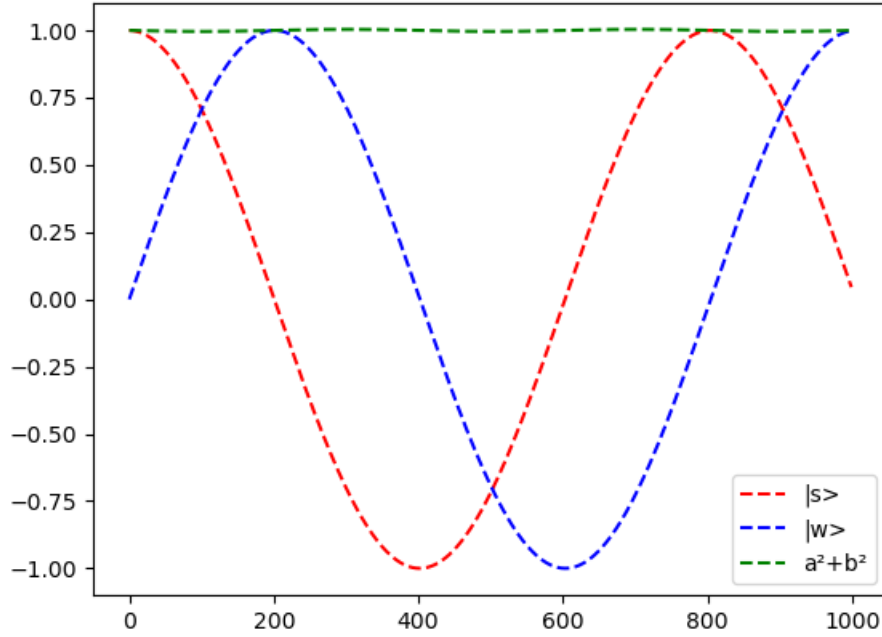


FIGURE C.1 – Evolution des amplitudes pour $n=16$, sur 1000 itérations

C.2.2 Implémentation

Simulation sur un ordinateur classique

Data: w vector of size 2^n of 0 with target index to 1 ;

Output: x vector of amplitudes (largest amplitude corresponding to wanted index)

begin

s vector of size 2^n of $\frac{1}{\sqrt{2^n}}$ $N \leftarrow 2^n$;

$N_{iter} \leftarrow \text{floor}(\frac{\pi}{4}\sqrt{N})$;

 /* Compute grover operator */

$U_w \leftarrow I_N - 2w \cdot w^T$;

$U_s \leftarrow 2s \cdot s^T - I_N$;

$g \leftarrow U_s \cdot U_w$;

$x \leftarrow s$;

 /* Apply grover operator N_{iter} times */

for $i = 0$ **to** N_{iter} **do**

$x \leftarrow g \cdot x$;

end

end

Bibliographie

- [1] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000.
- [2] D. N. Mermin, *Quantum Computer Science : An introduction*. Cambridge : Cambridge University Press, 2007.
- [3] A. Barenco, C. H. Bennett, R. Cleve, D. P. DiVincenzo, N. Margolus, P. Shor, T. Sleator, J. A. Smolin, and H. Weinfurter, “Elementary gates for quantum computation,” *Physical Review A*, vol. 52, pp. 3457–3467, 1995.
- [4] Y. Shi, “Both Toffoli and Controlled-NOT need little help to do universal quantum computation,” 2002.
- [5] D. Deutsch, “Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer,” *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 400, pp. 97–117, 1985.
- [6] K. Igeta and Y. Yamamoto, “Quantum mechanical computers with single atom and photon fields,” in *International Conference on Quantum Electronics*, Optical Society of America, 1988.
- [7] S.-L. Zhu and Z. D. Wang, “Implementation of universal quantum gates based on nonadiabatic geometric phases,” *Physical Review Letters*, vol. 89, Aug 2002.
- [8] J. Zhu, S. Kais, Q. Wei, D. Herschbach, and B. Friedrich, “Implementation of quantum logic gates using polar molecules in pendular states,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 138, no. 2, p. 024104, 2013.
- [9] F. Schmidt-Kaler, H. Haffner, M. Riebe, S. Gulde, C. P. T. Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, C. Roos, J. Eschner, and R. Blatt, “Realisation of the Cirac-Zoller controlled-NOT quantum gate,” in *2003 European Quantum Electronics Conference. EQEC 2003 (IEEE Cat No.03TH8665)*, pp. 384–, 2003.
- [10] I. Chuang, N. Gershenfeld, and M. Kubinec, “Experimental implementation of fast quantum searching,” *Physical Review Letters*, vol. 80, pp. 3408–3411, 1998.

- [11] D. P. DiVincenzo, “The physical implementation of quantum computation,” *Fortschritte der Physik*, vol. 48, p. 771–783, Sep 2000.
- [12] Microsoft, “Microsoft quantum documentation.” <https://docs.microsoft.com/en-us/quantum/?view=qsharp-preview>.
- [13] “Qiskit.” <https://qiskit.org/>.
- [14] A. W. Cross, L. S. Bishop, J. A. Smolin, and J. M. Gambetta, “Open quantum assembly language,” 2017.
- [15] R. P. Feynman, “Simulating physics with computers,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 21(6-7), pp. 467–488, 1982.
- [16] I. Buluta and F. , Nori, “Quantum simulators,” *Science*, vol. 326, pp. 108–111, 2009.
- [17] D. Deutsch and R. Jozsa, “Rapid solution of problems by quantum computation,” *Proceedings of the Royal Society of London A*, vol. 439, pp. 553–558, 1992.
- [18] E. Bernstein and U. Vazirani, “Quantum complexity theory,” *SIAM Journal on Computing*, vol. 26, pp. 1411–1473, 1997.
- [19] L. K. Grover, *A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search*, p. 212–219. STOC ’96, New York, NY, USA : Association for Computing Machinery, 1996.
- [20] E. Borbely, “Grover search algorithm,” 2007.
- [21] P. W. Shor, “Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer,” *SIAM Journal on Computing*, vol. 26, pp. 1484–1509, 1997.
- [22] R. L. Rivest, A. Shamir, and L. Adleman, “A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems,” *Commun. ACM*, vol. 21, p. 120–126, Feb. 1978.
- [23] S. Bai, P. Gaudry, A. Kruppa, E. Thom  , and P. Zimmermann, “Factorisation of RSA-220 with CADO-NFS.” May 2016.
- [24] L. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C. Yannoni, M. H. Sherwood, and I. L. Chuang, “Experimental realization of Shor’s quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance,” *Nature*, vol. 414, pp. 883–887, 2001.
- [25] E. Martín-López, A. Laing, T. Lawson, R. Alvarez, X. Zhou, and J. O’Brien, “Experimental realisation of Shor’s quantum factoring algorithm using qubit recycling,” *Nature Photonics*, vol. 6, pp. 773–776, 11 2011.

- [26] C. Gidney and M. Ekerå, “How to factor 2048 bit RSA integers in 8 hours using 20 million noisy qubits,” 2019.
- [27] E. Anschuetz, J. Olson, A. Aspuru-Guzik, and Y. Cao, “Variational quantum factoring,” in *Quantum Technology and Optimization Problems* (S. Feld and C. Linnhoff-Popien, eds.), (Cham), pp. 74–85, Springer International Publishing, 2019.

Résumé — Ce rapport bibliographique présente les différents éléments de base nécessaires à la compréhension de l'informatique quantique. On y présente en premier les concepts fondateurs de l'informatique quantique : le qubit, les mécanismes d'évolution des systèmes quantiques et enfin la mesure projective. On y montre ensuite trois algorithmes fondateurs en illustrant les problèmes résolus et leur fonctionnement. Ces trois algorithmes permettent de montrer l'apport de l'informatique quantique, ils permettent en effet d'obtenir des performances de traitement de l'information inaccessibles en classique.

Mots clés : Informatique quantique, qubit, mesure projective, Deutsch-Jozsa, Grover, Shor, parallélisation.

Abstract — This bibliographic report presents the fundamental aspects of quantum computing. We firstly show 3 concepts required to understand quantum computing : the notion of qubit, the mechanisms of evolution of quantum systems and the projective measurement of qubits. We then show three major quantum algorithms (Deutsch-Jozsa, Grover and Shor), explaining the problems they solve and how they work. With this report, we understand how quantum computing improves the solving of a certain category of problems, via parallelism.

Keywords : Quantum computing, qubit, projective measurement, Deutsch-Jozsa, Grover, Shor, parallelism.

Polytech Angers
62, avenue Notre Dame du Lac
49000 Angers