Réunion d'avancement : Optimisation - Information Mutuelle

Pierre Engelstein

13 avril 2021

Définition

L'information mutuelle de deux variables aléatoires X et Y est définie par

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(X) + H(Y) - H(X,Y) && (1)\\ &= H(Y) - H(Y|X) && (2)\\ &= H(X) - H(X|Y) && (3) \end{aligned}$$

1. $H(X)$ et $H(Y)$ entropies marginales de X et Y ;
2. $H(X,Y)$ entropie conjointe de X et Y ;
3. $H(X|Y)$ entropie de X sachant Y.

$X = \{\rho_i = |\phi_i\rangle \langle\phi_i| \,, 1 \leq i \leq m\}$,

$Y = \{\Pi_i = |\mu_i\rangle \langle\mu_i| \,, 1 \leq i \leq m\}$

Avec $\{p_i\}$ distribution marginale de X.

Formulation des probabilités

Probabilités jointes entrées - sorties :

$$P(X = \rho_i, Y = \Pi_j) = p_i \operatorname{tr}(\rho_i \Pi_j) \tag{4}$$

Probabilité marginale de sortie :

$$P(Y = \Pi_j) = \sum_{i=1}^{m} p_i \operatorname{tr}(\rho_i \Pi_j) \tag{5}$$

Probabilités conditionnelles :

$$P(Y = \Pi_j | X = \rho_i) = \frac{\operatorname{tr}(\rho_i \Pi_j)}{\sum_{k=1}^{m} \operatorname{tr}(\rho_i \Pi_k)} \tag{6}$$

Formulation des entropies

Entropies de X et Y

$$H(\rho) = -\sum_{i=1}^{m} P(\rho_i)\log_2 P(\rho_i), \tag{7}$$

$$H(\Pi) = -\sum_{i=1}^{m} P(\Pi_i)\log_2 P(\Pi_i) \tag{8}$$

Entropie conjointe :

$$H(\rho,\Pi) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \mathrm{tr}(\rho_i\Pi_j)\log_2(\mathrm{tr}(\rho_i\Pi_j)) \tag{9}$$

Entropie conditionnelle :

$$H(\Pi|\rho) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \frac{\mathrm{tr}(\rho_i\Pi_j)}{\sum_{k=1}^{m}\mathrm{tr}(\rho_i\Pi_k)} \tag{10}$$

Travail à venir

1. Reformulation du problème avec des états orthogonaux de façon à reconnaître une solution correcte immédiatement ;
2. Coder la fonction $f(x) = x \log_2(x)$ pour éviter le problème du $log(0)$ qui envoie à l'infini l'intervale de solution.