Algorithme de Bernstein-Vazirani

1 Problème à résoudre

Soient x et s tels que $x, s \in \{0,1\}^n$.
On pose une fonction f définie par :

$$\begin{array}{lll} f: & x & \to \quad y = s \cdot x \pmod 2 = x_1 s_1 + x_2 s_2 + \cdots + x_n s_n \\ f: & \{0,1\}^n & \to \quad \{0,1\}, \end{array}$$

Exemple 1. *Soit s le mot booléen suivant : $s = 10$. La fonction f a donc la table de véritée suivante :*

(x_1, x_2)	s	$f(x_1, x_2)$
$(0,0)$	10	0
$(0,1)$	10	0
$(1,0)$	10	1
$(1,1)$	10	1

On observe que le résultat est de 1 pour les entrées (x_1, x_2) où l'emplacement des 1 correspond à ceux de s.

Problème 1 (Bernstein-Vazirani)**.** *Etant donné un mot s secret, et la fonction f implémentant l'opération décrite précédemment, comment peut on retrouver s en le moins d'évaluations de f possibles ?*

1.1 Solution classique

Dans le cas classique, on va devoir évaluer au pire toutes les valeurs possibles de s pour trouver sa valeur, soit n évaluations de f. C'est un algorithme de complexité $\mathcal{O}(n)$

1.2 Solution quantique

Dans le cas quantique, ce problème se résout en une seule évaluation quantique de f. L'algorithme reprends celui de Deutsch-Jozsa en changeant la fonction appliquée dans l'oracle quantique.

1.2.1 Initialisation

On commence avec : $|u_0\rangle = (|0\rangle^{\bigotimes n})$: n-qubits à $|0\rangle$

1.2.2 Etape 1

On applique une porte de Hadamard à $|u_0\rangle$ pour avoir un état équiprobable : $|u_1\rangle = H|u_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle$

1.2.3 Etape 2

On applique l'oracle quantique suivant à $|u_1\rangle$:

$$o : |x\rangle|y\rangle \mapsto |x\rangle|y \oplus (s \cdot x \pmod 2)\rangle.$$

En suivant exactement le même raisonnement que pour Deutsch-Jozsa, on arrive à l'expression suivante :

$$|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{s \cdot x \pmod 2} |x\rangle \tag{1}$$

1.2.4 Etape 3

De la même façon à Deutsch-Jozsa, on applique une porte Hadamard à chaque qubit sortant, ce qui donne :

$$|u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{s \cdot x \pmod 2} \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{x.y} |y\rangle \right)$$

$$|u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} (-1)^{s \cdot x \pmod 2} \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{x.y} |y\rangle \right) \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{(s \cdot x \pmod 2)+x.y} |y\rangle \tag{3}$$

Et on peut prouver que $\frac{1}{2^n} \sum_{x=0}^{2^n-1} \sum_{y=0}^{2^n-1} (-1)^{(s \cdot x \pmod 2)+x.y} |y\rangle$ est égal à $|s\rangle$ (*à faire ...*)

1.3 Exemple

Prenons par exemple $s = (10)_2 = 2_{10}$, soit $f(x) = 2 \cdot x \pmod 2$

Etape 1 : porte de Hadamard

On commence avec $|u_0\rangle = |00\rangle$. La première étape est l'application de la porte d'hadamard à $|u_0\rangle$:

$$|u_1\rangle = H|u_0\rangle = H|0\rangle \otimes H|0\rangle \tag{4}$$
$$= \frac{1}{2}\left((|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle + |1\rangle)\right) \tag{5}$$
$$= \frac{1}{2}\{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\} \tag{6}$$

Etape 2 : oracle quantique

On applique à $|u_1\rangle$ l'oracle quantique $|x\rangle|y\rangle \to |x\rangle|y \oplus (s \cdot x \pmod 2)\rangle =:$

$$\begin{aligned}|u_2\rangle &= \frac{1}{2}((-1)^{10\cdot 00 \pmod 2}|00\rangle + (-1)^{10\cdot 01 \pmod 2}|01\rangle + (-1)^{10\cdot 10 \pmod 2}|10\rangle + (-1)^{10\cdot 11 \pmod 2}|11\rangle) \\ &= \frac{1}{2}((-1)^0|00\rangle + (-1)^0|01\rangle + (-1)^1|10\rangle + (-1)^1|11\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)\end{aligned}$$

Etape 3 : porte de Hadamard

On applique donc une porte de hadamard à $|u_2\rangle$:

$$|u_3\rangle = \frac{1}{2}H\left((|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\right) \tag{7}$$

Nous sommes sur une porte de hadamard pour 2 qubits, ce qui donne la relation matricielle suivante pour $|u_3\rangle$:

$$|u_3\rangle = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\\ -1\end{bmatrix}, \tag{8}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 4\\ 0\end{bmatrix}. \tag{9}$$

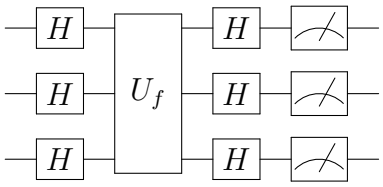
Lors de la mesure, on va obtenir l'état $|10\rangle$ avec une probabilité de 1, qui était bien notre mot binaire s de départ.

On peut observer que, lors de l'application de la porte de Hadamard à $|u_2\rangle$, on obtient la superposition d'état suivante : $|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle$. Cela correspond à la troisième ligne de la matrice de Hadamard, correspondant au $|s\rangle$ voulu. Dans tout les cas, peut importe le s choisi, on obtiendra une superposition d'état correspondant à une des lignes de la matrice, forçant à 0 les probabilités de tout les états sauf de celui indiqué.

1.4 Implémentation du circuit

Circuit global

L'implémentation du circuit quantique pour cet algorithme est très similaire à celui de Deutsch-Jozsa, à la différence qu'on a un qubit de moins :



Implémentation de l'oracle

Prenons le cas où $n = 2$. La matrice correspondant à la porte U_f va avoir 4 possibilité pour obtenir, comme on l'a dit lors de l'exemple, une des 4 lignes de la matrice de Hadamard :

$$U_{f_{00}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U_{f_{01}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, U_{f_{10}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, U_{f_{11}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On remarque que ces quatres matrices sont en fait des produits tensoriels de deux matrices correspondant à des portes à 1 qubit :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Pour $n = 2$, on a $s \in \{00, 01, 10, 11\}$. En reprenant les matrices correspondantes, on obtient les produits tensoriels suivant :

$$U_{f_{00}} = I \otimes I, U_{f_{01}} = I \otimes Z, U_{f_{10}} = Z \otimes I, U_{f_{11}} = Z \otimes Z$$

On peut généraliser sur l'implémentation en disant :

$$U_f = \bigotimes_{i=0}^{n} U_i,\ U_i = \begin{cases} I & \text{si } s_i = 0 \\ Z & \text{si } s_i = 1 \end{cases} \tag{10}$$

Un exemple d'implémentation complète serait alors (pour $s = 101$) :