Détecteur quantique optimal

Soient $\{\rho_i, 1 \leq i \leq m\}$ m opérateurs densités avec leur p_i probabilités respectives. On écrit $\rho'_i = p_i \rho_i$. On cherche à obtenir les Π_i opérateurs de mesure optimaux.

Programmation SdP - Problème primal

Formulation

On résout le problème suivant :

$$\max_{\Pi_i}(\sum_{i=1}^{m} Tr(\rho'_i \Pi_i) \tag{1}$$

Tel que :

$$\begin{aligned} &\Pi_i > 0, \quad 1 \leq i \leq m \\ &\sum_{i=1}^{m} \Pi_i = I \end{aligned} \tag{2}$$

Exemple

Soients 3 opérateurs densités $\rho_i = |\phi_i\rangle \langle\phi_i|$ avec

$$|\phi_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |\phi_3\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Ayant comme probabilités $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.6$, $p_3 = 0.3$.

On a donc :

$$\rho_1' = p_1\rho_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \rho_2' = p_2\rho_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \rho_3' = p_3\rho_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Le problème se ré-écrit avec les valeurs numériques :

$$\max_{\Pi_i} \left(Tr(\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Pi_1) + Tr(\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \Pi_2) + Tr(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \Pi_3) \right), \tag{3}$$

Tel que :

$$\begin{aligned} &\Pi_1 > 0, \quad \Pi_2 > 0, \quad \Pi_3 > 0 \\ &\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = I_n \end{aligned} \tag{4}$$

Développons les valeurs des traces :

$$\begin{aligned} tr_1 &= Tr(\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Pi_1) \\ &= Tr(\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{1_{11}} & \Pi_{1_{12}} \\ \Pi_{1_{21}} & \Pi_{1_{22}} \end{bmatrix}) \\ &= Tr(\begin{bmatrix} 0.1\Pi_{1_{11}} & 0.1\Pi_{1_{12}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}) \\ &= 0.1\Pi_{1_{11}} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} tr_2 &= Tr(\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \Pi_2) \\ &= Tr(\begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{2_{11}} & \Pi_{2_{12}} \\ \Pi_{2_{21}} & \Pi_{2_{22}} \end{bmatrix}) \\ &= Tr(\begin{bmatrix} 0.3\Pi_{2_{11}} + 0.3\Pi_{2_{21}} & 0.3\Pi_{2_{12}} + 0.3\Pi_{2_{22}} \\ 0.3\Pi_{2_{11}} + 0.3\Pi_{2_{21}} & 0.3\Pi_{2_{12}} + 0.3\Pi_{2_{22}} \end{bmatrix}) \\ &= 0.3(\Pi_{2_{11}} + \Pi_{2_{12}} + \Pi_{2_{21}} + \Pi_{2_{22}}) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} tr_3 &= Tr(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \Pi_3) \\ &= Tr(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{3_{11}} & \Pi_{3_{12}} \\ \Pi_{3_{21}} & \Pi_{3_{22}} \end{bmatrix}) \\ &= Tr(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1\Pi_{3_{11}} & 0.1\Pi_{3_{12}} \end{bmatrix}) \\ &= 0.1\Pi_{3_{22}} \end{aligned} \tag{7}$$

Nous avons donc la formulation finale du problème primal d'exemple en additionant 5, 6 et 7 :

$$\max_{\Pi_i}(0.1\Pi_{1_{11}} + 0.3(\Pi_{2_{11}} + \Pi_{2_{12}} + \Pi_{2_{21}} + \Pi_{2_{22}}) + 0.1\Pi_{3_{22}}) \tag{8}$$

Ce qui nous donne les opérateurs de mesure suivants (calculés avec `cvxpy`) :

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{bmatrix} 0.723 & 0.447 \\ 0.447 & 0.276 \end{bmatrix}, \quad \Pi_3 = \begin{bmatrix} 0.276 & -0.447 \\ -0.447 & 0.724 \end{bmatrix}$$

Information Mutuelle

L'information mutuelle de deux variables aléatoires X et Y est définie par :

$$I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y). \tag{9}$$

Dans le cas de la détection optimale quantique, on va appliquer ce critère comme critère à optimiser. On considère les deux variables aléatoires comme étant :

$$\begin{aligned} X &= \{\rho_i = p_i \left|\phi_i\right\rangle \left\langle\phi_i\right|, 1 \leq i \leq m\}, \\ Y &= \{\Pi_i = \left|\mu_i\right\rangle \left\langle\mu_i\right|, 1 \leq i \leq m\}, \end{aligned}$$

correspondant aux opérateurs densité des états à mesurer pour X (pondérées par les probabilités préalables), et aux opérateurs de mesure pour Y.

Les probabilités jointes des deux variables vont correspondre à la trace de la multiplication des matrices :

$$P(X = \rho_i, Y = \Pi_j) = \operatorname{tr}(\rho_i \Pi_j) \tag{10}$$

Les probabilités marginales découlent en étant simplement la somme des probabilités jointes :

$$P(X = \rho_i) = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{tr}(\rho_i \Pi_j) \tag{11}$$

On peut donc ensuite calculer les entropies marginales $H(\rho)$ et $H(\Pi)$:

$$
\begin{aligned}
H(\rho) &= -\sum_{i=1}^{m} P(\rho_i)\log_2 P(\rho_i), \\
&= -\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\operatorname{tr}(\rho_i\Pi_j)\right)\log_2\sum_{j=1}^{m}\operatorname{tr}(\rho_i\Pi_j), \qquad (12)\\
H(\Pi) &= -\sum_{i=1}^{m} P(\Pi_i)\log_2 P(\Pi_i), \\
&= -\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m}\operatorname{tr}(\Pi_i\rho_j)\right)\log_2\sum_{j=1}^{m}\operatorname{tr}(\Pi_i\rho_j), \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Et l'entropie conjointe de X et Y est donnée par :

$$
H(\rho,\Pi) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\operatorname{tr}(\rho_i\Pi_j)\log_2(\operatorname{tr}(\rho_i\Pi_j)) \qquad (14)
$$

Pour simplifier l'écriture, on note $\alpha_{ij} = \operatorname{tr}(\rho_i\Pi_j)$. Le critère à minimiser est donc exprimé par :

$$
\begin{aligned}
I(\rho;\Pi) &= H(\rho) + H(\Pi) - H(\rho,\Pi) \\
&= -\sum_{i=1}^{m}[\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}]\log_2\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij} - \sum_{i=1}^{m}[\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ji}]\log_2\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ji} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij}\log_2(\alpha_{ij}) \\
&= -\sum_{i=1}^{m}\Big[(\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij})\log_2\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ij} + (\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ji})\log_2\sum_{j=1}^{m}\alpha_{ji} - \sum_{j=1}^{m}(\alpha_{ij}\log_2\alpha_{ij})\Big]
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

Le problème se formule comme un problème de maximization de l'information mutuelle : on cherche à maximiser l'information qu'on peut obtenir sur ρ_i quand on a les opérateurs de mesure Π_i :

$$
\max_{\Pi} I(\rho,\Pi) \qquad (16)
$$

tel que :

$$
\begin{aligned}
\Pi_i \succeq 0 \quad 1 \leq i \leq m \qquad (17)\\
\sum_{i=1}^{m}\Pi_i = I \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Application numérique

Ce problème de maximisation n'est pas convexe, on ne peut donc pas le résoudre simplement avec une librarie telle que `cvxpy`. Une bonne solution consiste à utiliser l'analyse par intervalle pour résoudre ce problème, et nous utilisons la librarie `ibex` pour résoudre ce problème.

	ρ'_1	ρ'_2	ρ'_3
Π_1	$Tr(\Pi_1\rho_1)$	$Tr(\Pi_1\rho_2)$	$Tr(\Pi_1\rho_3)$
Π_2	$Tr(\Pi_2\rho_1)$	$Tr(\Pi_2\rho_2)$	$Tr(\Pi_2\rho_3)$
Π_3	$Tr(\Pi_3\rho_1)$	$Tr(\Pi_2\rho_2)$	$Tr(\Pi_3\rho_3)$