Réunion d'avancement

Pierre Engelstein

2 avril 2021

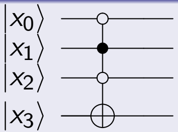
Sommaire

Portes CNOT

Porte de Pauli X contrôlée par n qubits

On note le contrôle par 1 avec $\bullet$;
On note le contrôle par 0 avec $\circ$;
Le contrôle global est un ET des contrôles individuels.

Exemple



$$|x_0, x_1, x_2, x_3\rangle \mapsto |x_0, x_1, x_2, x_3 \oplus (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3)\rangle$$

Construction du circuit

4 étapes

1. Écriture de la table de vérité,
2. Pour chaque sortie donnant 1, former une porte `NOT` controlée. Chaque entrée va servir de contrôle, par 1 si l'entrée est à 1, et par 0 si l'entrée est à 0,
3. Développement du circuit pour n'avoir que des portes `NOT` contrôlées par 0,
4. Simplification du circuit.

Méthode montrée par Younes et Miller en 2003 [1] .

1. Younes, A. and Miller, J., "Automated Method for Building CNOT Based Quantum Circuits for Boolean Functions", 2003

Construction du circuit

.

Exemple

Soit la fonction booléenne
$f(x_1, x_2, x_3) =$
$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$.

x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$|x_1\rangle$ ——
$|x_2\rangle$ ——
$|x_3\rangle$ ——
$|x_f\rangle$ ——

Circuit quantique pour $f(x_1, x_2, x_3)$

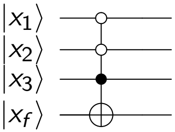
Construction du circuit

.

Exemple

Soit la fonction booléenne
$f(x_1, x_2, x_3) =$
$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$.

x_1	x_2	x_3	$F(x_1,\ x_2,\ x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Circuit quantique pour $f(x_1, x_2, x_3)$

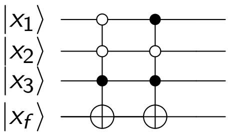
Construction du circuit

.

Exemple

Soit la fonction booléenne
$f(x_1, x_2, x_3) =$
$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$.

x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Circuit quantique pour $f(x_1, x_2, x_3)$

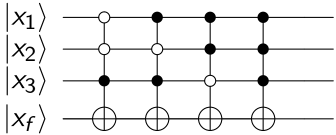
Construction du circuit

.

Exemple

Soit la fonction booléenne
$f(x_1, x_2, x_3) =$
$(x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$.

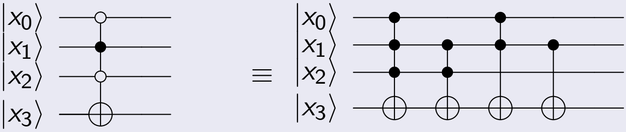
x_1	x_2	x_3	$F(x_1,\ x_2,\ x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1



Circuit quantique pour $f(x_1, x_2, x_3)$

Développement du circuit

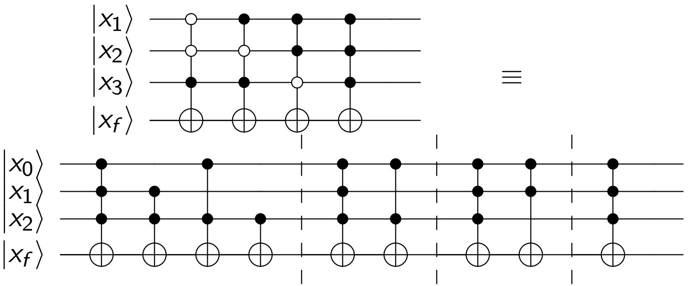
On transforme les contrôles par 0 en combinaison de contrôles par 1 :



Équivalent sans contrôles par 0

Développement du circuit

En reprennant l'exemple développé précédemment $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_3 \wedge \neg x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$, on obtient :



Équivalent sans contrôles par 0

Simplification

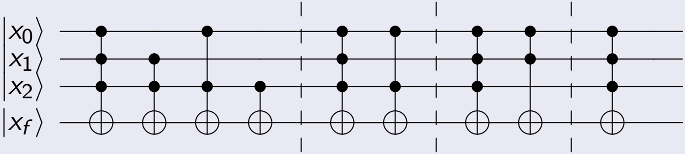
Proposition

Considérons un circuit `X` contenant un couple de portes identiques. Le circuit privé de ce couple de portes est équivalent à `X`.

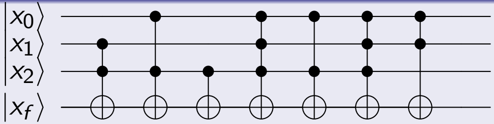
Simplification

On retire les paires de portes identiques qui s'annulent sur le circuit.

Circuit complet



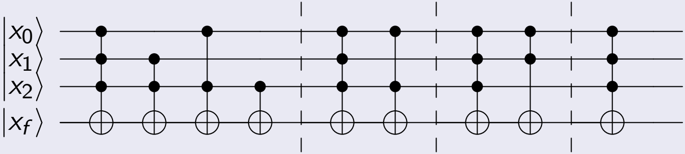
Première simplification



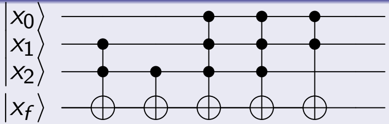
Simplification

On retire les paires de portes identiques qui s'annulent sur le circuit.

Circuit complet



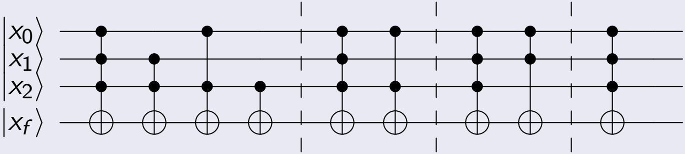
Deuxième simplification



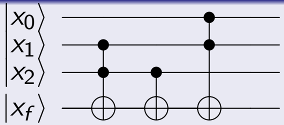
Simplification

On retire les paires de portes identiques qui s'annulent sur le circuit.

Circuit complet



Troisième simplification : circuit final



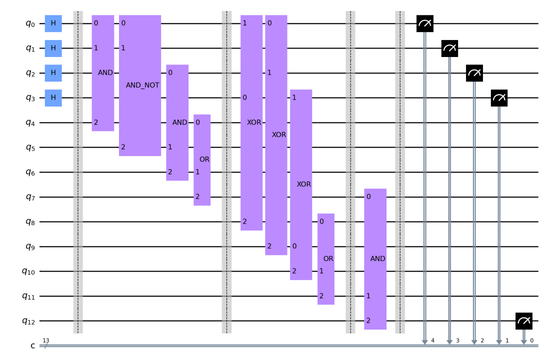
Construction de circuits composés

Proposition

A partir de ces briques, on peut construire pour une expression booléenne un circuit.

Exemple

$f(a, b, c, d) = ((a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b \wedge c)) \wedge ((d \oplus a) \vee (a \oplus c \oplus d))$



Applications

En pouvant construire des circuits booléens, on peut résoudre, par exemple en utilisant l'algorithme de Grover [1] :

1. Recherche de minimum
2. Minimisation de somme
3. Couverture de sommet
4. Problème du voyageur de commerce

1. Rodriguez, J., "Évaluation du potentiel des machines quantiques pour l'optimisation combinatoire", Juillet 2020.

Modèle d'Ising

Définition

L'énergie d'un système peut être donnée par l'opérateur Hamiltonien. On l'écrit avec le modèle d'Ising de la façon suivante :

$$\mathcal{H} = -\sum_{<i,j>} J_{ij}\sigma_i\sigma_j - \sum_i h_i\sigma_i. \tag{1}$$

On a d'un côté le terme $\sum h_i\sigma_i$ indiquant la contribution de chaque variable au système global, c'est le **biais** du système.

De l'autre côté, on a $\sum J_{ij}\sigma_i\sigma_j$ indiquant les interactions entre chaque paires de variables. C'est le **couplage** du système.

Recuit Quantique

Utilisation d'un opérateur Hamiltonien évoluant au cours du temps :

$$\mathcal{H}(t) = A(t)\mathcal{H}_0 + B(t)\mathcal{H}_1. \tag{2}$$

On fait évoluer $A(t)$ de 1 à 0, et $B(t)$ de 0 à 1.

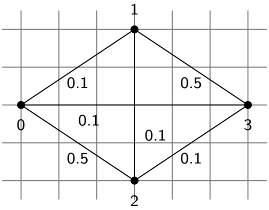
En prenant un Hamiltonien $\mathcal{H}_0$ tel qu'on puisse construire facilement son état minimal, on fait évoluer le système vers $\mathcal{H}_1$, en restant dans un état minimal du système (théorème adiabatique quantique).

Utilisation de D-Wave - 1

Résolution du problème du voyageur de commerce avec les outils fournis par D-Wave :

```python
import dwave_networkx
import networkx
import dimod
g = networkx.Graph()
g.add_weighted_edges_from({(0, 1, .1), (0, 2, .5), (0, 3, .1), (1, 2, .1),(1, 3, .5), (2, 3, .1)})

dwave_networkx.algorithms.traveling_salesperson(g, dimod.ExactSolver(), start=0)
```



Graphe TSP correspondant

Utilisation de D-Wave - 2

Résolution directe de problème Ising et QUBO : utilisation des solvers D-Wave.

```
import dimod
import neal
''' 2 QUBO problems '''
Q1 = {('q1', 'q1'): 0.1, ('q2', 'q2'): 0.1, ('q1', 'q2'): -0.2}
Q2 = {('q1', 'q1'): 0.5, ('q2', 'q2'): 0.5, ('q1', 'q2'): -1}
''' 2 types of solvers: exact, and simulated annealing '''
exact_sampler = dimod.ExactSolver()
sa_sampler = neal.SimulatedAnnealingSampler()
''' Solve using exact solver '''
sample_set = exact_sampler.sample_qubo(Q1)
print(sample_set)
''' Solve using simulated annealing'''
sample_set_1 = exact_sampler.sample_qubo(Q2)
print(sample_set_1)
```

Formulation de problèmes NP sous forme d'Ising [2].

2. Lucas, A., "Ising formulations of many NP problems", Frontiers in Physics, 2014

Détecteur optimal - moindres carrés

Problème

Soit $|\phi_i\rangle$ un ensemble de m vecteurs d'état dans $\mathcal{H}$ engendrant un sous espace $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$. On note $dim(\mathcal{U}) = r$, $dim(\mathcal{H}) = n$ et Φ la matrice $n \times m$ de colonnes $|\phi_i\rangle$.
Soit $|\hat{\mu}_i\rangle$ les m vecteurs optimaux de mesure minimisant l'erreur quadratique $E = \sum_{i=1}^{m} \langle e_i | e_i \rangle$, $|e_i\rangle = |\phi_i\rangle - |\mu_i\rangle$. On note $\hat{M}$ la matrice de colonnes $|\hat{\mu}_i\rangle$.

Théorème

La matrice $\hat{M}$ optimale est donnée par $\hat{M} = \Phi((\Phi^\star\Phi)^{\frac{1}{2}})^\dagger$.

Détecteur optimal - SdP

Problème primal

Soit ρ_i m opérateurs densités de $\mathcal{H}$, ayant chacun une probabilité $p_i > 0$.

$$\max_{\Pi_i}\left(\sum_{i=1}^{m} Tr(p_i \rho_i \Pi_i)\right) \tag{3}$$

Soumis à

$$\Pi_i > 0, 1 \leq i \leq m$$

$$\sum_{i=1}^{m} \Pi_i = I$$

Détecteur optimal - SdP

Problème dual

Soit ρ_i m opérateurs densités de $\mathcal{H}$, ayant chacun une probabilité $p_i > 0$.

$$\min_X Tr(X) \tag{4}$$

Soumis à

$$X \geq p_i \rho_i, 1 \leq i \leq m$$

Détecteur optimal - SdP

Exemple

Soient 3 opérateurs de densité $\rho_i = |\phi_i\rangle \langle\phi_i|$, avec

$$|\phi_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |\phi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, |\phi_3\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Ayant comme probabilités $p_1 = 0.1,\ p_2 = 0.6,\ p_3 = 0.3.$

Les vecteurs de mesure optimaux $|\mu_i\rangle$ calculés sont :

$$|\mu_1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |\mu_2\rangle = \begin{bmatrix} 0.849 \\ 0.527 \end{bmatrix}, |\mu_3\rangle = \begin{bmatrix} -0.524 \\ 0.849 \end{bmatrix}.$$

Compte rendu et travaux à venir

1. Construction de circuits : ce n'est pas un secteur où des travaux novateurs pourraient être effectués ;
2. Recuit quantique : on peut envisager d'identifier un problème non courant proche des spécialités du LARIS (robotique, automatique) et effectuer des comparaisons de performances entre les solveurs classiques et le solveur quantique de D-Wave ;
3. Détection optimale : pouvoir utiliser le critère de l'information mutuelle pour optimiser le schéma de détection.