Proposition de communication pour la journée GdR CNRS ISIS
"Traitement du signal et applications quantiques" du 22 juin 2021.

Conception de détecteurs quantiques optimaux via le calcul par intervalles

Pierre ENGELSTEIN, Nicolas DELANOUE, François CHAPEAU-BLONDEAU,
Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS),
Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.

Nous abordons un problème de base du traitement de l'information supportée par des états quantiques, qui consiste en la conception d'un détecteur quantique maximisant la performance de détection pour distinguer parmi une famille d'états quantiques, chacun étant représenté par un opérateur densité. Étant donnée en entrée une famille d'opérateurs densité $\rho = \{\rho_j, 1 \leq j \leq m\}$ avec des probabilités a priori p_j, une famille d'opérateurs de mesure $\Pi = \{\Pi_k, 1 \leq k \leq n\}$ délivre en sortie la mesure k. La probabilité conditionnelle de mesurer k en sortie quand l'entrée est dans l'état j est fournie par la trace $\mathrm{Tr}(\rho_j \Pi_k)$. Nous considérons ici le critère de performance constitué par l'information mutuelle entrée–sortie notée $I(\rho, \Pi)$. Formellement, on cherche ainsi à résoudre le problème d'optimisation sous contraintes

$$\max_{\Pi \subset \mathcal{B}} I(\rho, \Pi) \ , \quad \text{tel que} \quad \sum_{k=1}^{n} \Pi_k = \mathrm{Id} \quad \text{et les} \quad \Pi_k \preceq 0 \ , \tag{1}$$

où $\mathcal{B}$ dénote l'ensemble des matrices hermitiennes.

Le problème (1) est communément réputé difficile car non linéaire. Pour résoudre (1), une méthode d'optimisation globale s'appuyant sur le calcul par intervalles est proposée [1, 2]. Ces approches algorithmiques convergent de façon garantie vers la solution optimale [2, 3]. En exploitant la nature convexe de l'information mutuelle et la convexité de l'espace des solutions admissibles, on montre qu'il est possible de calculer efficacement un détecteur optimal avec une précision donnée. Le problème (1) peut être confronté au problème convexe [4] résolu dans [5]. Dans [5], les auteurs considèrent le détecteur quantique optimal minimisant la probabilité d'erreur de détection, qui constitue un critère linéaire. Les approches par intervalles nous permettent de résoudre le problème de [5] également, mais a contrario, l'approche de [5] ne s'applique pas en présence du critère non linéaire constitué par l'information mutuelle. Le critère d'information mutuelle, bien en adéquation avec la théorie de l'information, nous ouvre des perspectives pour l'étude de la transmission sur des canaux quantiques bruités [6] et possiblement en présence d'intrication dans les séquences d'états d'entrée [7].

[1] N. Delanoue, M. Lhommeau, S. Lagrange ; "Nonlinear optimal control : A numerical scheme based on occupation measures and interval analysis" ; *Computational Optimization and Applications* 77, 307–334 (2020).

[2] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit, E. Walter ; "Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics" ; Springer (London), 2001.

[3] W. Tucker ; "Validated Numerics : A Short Introduction to Rigorous Computations" ; Princeton University Press, USA, 2011.

[4] J.-B. Lasserre ; "Global optimization with polynomials and the problem of moments" ; *SIAM Journal on Optimization* 11, 796–817 (2001).

[5] Y. C. Eldar, A. Megretski, G. C. Verghese ; "Designing optimal quantum detectors via semidefinite programming" ; *IEEE Transactions on Information Theory* 49, 1007–1012 (2003).

[6] F. Chapeau-Blondeau ; "Optimization of quantum states for signaling across an arbitrary qubit noise channel with minimum-error detection" ; *IEEE Transactions on Information Theory* 61, 4500–4510 (2015).

[7] F. Chapeau-Blondeau ; "Optimized entanglement for quantum parameter estimation from noisy qubits" ; *International Journal of Quantum Information* 16, 1850056,1–25 (2018).