Chapitre 6

Modélisation en logique des prédicats

Introduction

Modéliser

Modéliser c'est créer une approximation de la réalité qui permet de raisonner sur cette réalité. La modélisation en logique des prédicats est un raffinement de la logique des propositions, elle permet de modéliser le monde en termes d'objets, de relations entre objets, de propriétés des objets et de faits ou règles concernant ces relations et propriétés. Dans les formules logiques utilisées en modélisation

- les constantes, variables et (résultats de) fonctions représentent des objets de la partie du monde ou du système modélisé
- les symboles de prédicats représentent les relations entre objets ou, pour les prédicat unaires, le fait qu'un objet possède une propriété
- les formules fermées représentent des faits particuliers (formules sans quantificateurs) ou et règles générales (formules quantifiées)

Exemple 6.1. On veut modéliser les relations entre personnes (connaissances, amitié, ...), le fait qu'une personne a envoyé un message à une autre personne, et les règles générales sur ces relations. On utilise le vocabulaire de prédicats

- prédicats : personne (unaire), message (ternaire), connait (binaire),
- fonctions : age (unaire)
- constantes : marie, jean, xavier, charlotte, isidore (représentent des personnes), m1, m2, m3, ... (les messages)

Pour représenter le fait de Marie, représentée par la constante marie, est une personne on écrira la formule

$$f_1 = \text{personne}(\mathsf{marie}).$$

Pour représenter le fait que le message m3 a été envoyé par Marie à Xavier on écrira :

$$f_2 = \text{message}(\mathsf{m3}, \mathsf{marie}, \mathsf{xavier})$$

et pour dire que Xavier connait Charlotte :

$$f_3 = \text{connait}(\mathsf{xavier}, \mathsf{charlotte}).$$

La représentation des règles générales de ce domaine passe par l'écriture de formules quantifiées.

L'expéditeur et le destinataire d'un message sont forcément des personnes et elles doivent se connaitre :

$$f_4 = \forall \mathrm{x} \forall \mathrm{y} \forall \mathrm{z}\, (\text{message}(x, y, z) \Rightarrow \text{personne}(y) \wedge \text{personne}(z) \wedge \text{connait}(y, z)).$$

Pour être dans le réseau il faut connaitre au moins une personne

$$f_5 = \forall x\, (\text{personne}(x) \Rightarrow \exists y\, \text{connait}(x, y)).$$

6.1 Approche orientée modèle

Il y a plusieurs manière de voir le lien entre le monde réel ou le système à représenter et la modélisation logique par des formules. Dans l'approche orientée modèle on considère que l'état actuel du système étudié fournit l'interprétation (courante) du vocabulaire logique choisi (symboles de constantes, prédicats et fonctions). Si dans la réalité Xavier connait Charlotte, alors l'interprétation de connait contiendra la paire (Xavier, Charlotte). Si Xavier a 33 ans, dans l'interprétation de la fonction age on aura la paire Xavier $\mapsto$ 33.

Dans cette approche, le formule générales, appelées invariants du système servent à définir les états acceptables ou possible du système. Un état est acceptable si l'interprétation correspondante rend vrais tous les invariants. En d'autres termes, si cette interprétation est un modèle (au sens logique) de ces formules.

Exemple 6.2. On modélise les règles de fonctionnement d'une université avec un ensemble d'invariants :

1. Les étudiants et les enseignants sont des personnes.

$$\forall x((\text{enseignant}(x) \vee \text{étudiant}(x) \Rightarrow \text{personne}(x))$$

2. Seuls les étudiants peuvent s'inscrire à des cours.

$$\forall x \forall y \text{ inscription}(x, y) \Rightarrow \text{étudiant}(x)$$

3. On ne peut s'inscrire à un cours que s'il est enseigné par quelqu'un.

$$\forall x \forall y \text{inscription}(x, y) \Rightarrow (\exists z(\text{personne}(z) \wedge \text{enseigne}(z, y))$$

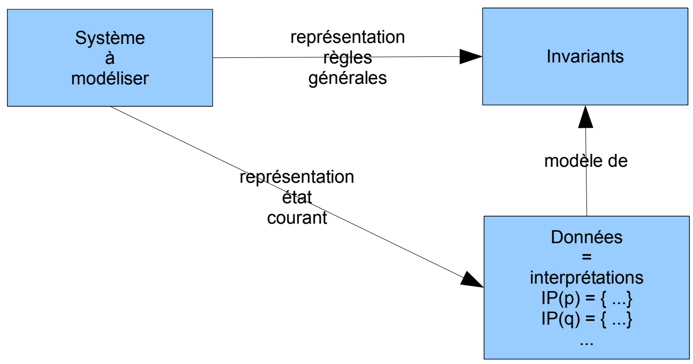
Considérons un état du système (l'université) dans lequel les étudiants sont Marie, Anne, Jules et Gaston ; les enseignants sont Jacques, Sylvie, Gaston et Antoine ; les inscriptions sont Marie inscrite à C101 et C103, Anne inscrite à C101 et C491, Sylvie inscrite à C103.

Cet état, que nous appellerons interprétation I n'est pas acceptable car l'invariant 2 n'est pas satisfait, on a $(\text{Sylvie}, \text{C103}) \in I(\text{inscription})$ mais Sylvie $\notin I(\text{étudiant})$.

Si on retire Sylvie de la liste des étudiants on obtient une interprétation I' qui est une modèle pour la formule 2. Pour que I' soit un modèle de tous les invariants il faut encore s'assurer que tous les étudiants et enseignants sont bien des personnes, c'est-à-dire que $I(\text{étudiant}) \subseteq I(\text{personne})$ et $I(\text{enseignant}) \subseteq I(\text{personne})$. Et finalement il faut vérifier qu'on a bien un enseignant pour chaque cours pour lequel il y a des inscriptions (C101, C103, C491).

Interprétation et bases de données

Dans la pratique des systèmes d'information l'interprétation représentant l'état courant du système est stockée sous forme de données *dans* une *base de données* (ou simplement dans des fichiers ou des feuilles de calcul).



Le modèle I' de l'exemple ci-dessus pourrait être représenté par une base de donnée relationnelle formée des tables Inscription, Etudiant, Enseignant, Personne, Enseigne, dont les schémas et contenus seraient :

Etudiant

nom
Marie
Anne
Jules
Gaston

Enseignant

nom
Jacques
Sylvie

Personne

nom
Marie
Anne
Jules
Gaston
Jacques
Sylvie

Inscription

nom_etudiant	cours
Marie	C101
Marie	C103
Anne	C101
Anne	C491
Sylvie	C103

Enseigne

nom_ens	cours
Jacques	101
Sylvie	103
Jacques	491

Les invariants du systèmes peuvent avoir divers usages pratiques :

1. Comme contraintes d'intégrité (invariants structurels) de la base de données. Par exemple, l'invariant
$$\forall x \forall y \text{ inscrit-à}(x, y) \Rightarrow \text{étudiant}(x)$$
implique que toute valeur qui apparait dans la colonne nom_étudiant de la table Inscrit doit également apparaitre dans la colonne nom de la table Etudiant (dépendance existentielle)
2. Comme règle de déduction/calcul. Par exemple, l'invariant
$$\forall x (\text{personne}(x) \Leftrightarrow (\text{enseignant}(x) \vee \text{étudiant}(x)))$$
peut se traduire par la définition de la table Personne en tant que vue : Personne := Enseignant $\cup$ Etudiant.
3. Comme élément de la spécification d'une application. Chaque fonction (transaction) de l'application doit maintenir la validité des invariants. Par exemple, la fonction de saisie d'une inscription d'un étudiant à un cours doit s'assurer qu'un enseignant a bien été affecté à ce cours avant d'enregistrer l'inscription.

Hypothèse du monde fermé Si le contenu de la base de données forme une interprétation du vocabulaire des prédicats, par définition de la notion d'interprétation, tout ce qui n'est pas explicitement stocké dans la base de données est considéré comme *faux*. Dans l'exemple ci-dessus, l'interprétation de la formule étudiant(Sylvie) aura la valeur faux car Sylvie $\notin I(\text{étudiant}) =$ Etudiant. On dit dans ce cas que l'on travaille sous l'*hypothèse du* *monde fermé* : le contenu de la base de données représente *tout* ce qui est vrai, et « en creux », tout ce qui est faux. Il n'y a pas de place pour l'inconnu. Il n'y a par exemple pas de moyen direct de spécifier qu'on ne sait pas si Paul est étudiant ou non.

6.2 Axiomatisation et approche déductive

Théorie logique

Une théorie est un ensemble de formules.
Une théorie est **fermée** si elle contient toutes ses conséquences logiques.

Exemple 6.3. La théorie

$$T_1 = \{p(a), q(a), p(b), \forall x(p(x) \Rightarrow q(x))\}$$

n'est pas fermée car la conséquence $q(b)$ n'est pas dans T_1

Une théorie T est **axiomatisable** si on peut trouver un ensemble de formules G (les axiomes) tel que T soit formé de toutes les conséquences logiques de G, $T = \{g|G \models g\}$

Exemple 6.4. On peut axiomatiser la théorie

$$\begin{aligned} T \;\; = \;\; & \{r(a), r(b), s(c), s(d), \\ & t(a,c), t(a,d), t(b,c), t(b,d), \\ & t(c,a), t(d,a), t(c,b), t(d,b,)\} \end{aligned}$$

à l'aide des axiomes

1. $r(a)$
2. $r(b)$
3. $s(c)$
4. $s(d)$
5. $\forall x \forall y((r(x) \wedge s(y)) \Rightarrow (t(x,y) \wedge t(y,x)))$

Exemple – théorie des feux bicolores

prédicats : rouge(.), vert(.), perpendiculaires(., .)
constantes : a, b, c, ...
Axiomes :

1. Un feu est soit rouge, soit vert .

$$\forall x(rouge(x) \vee vert(x))$$

2. Un feu ne peut être rouge et vert

$$\forall x \neg(rouge(x) \wedge vert(x))$$

3. Deux feux perpendiculaires ne peuvent être verts tous les deux

$$\forall x \forall y \; perpendiculaires(x, y) \Rightarrow \neg(vert(x) \wedge vert(y))$$

La théorie

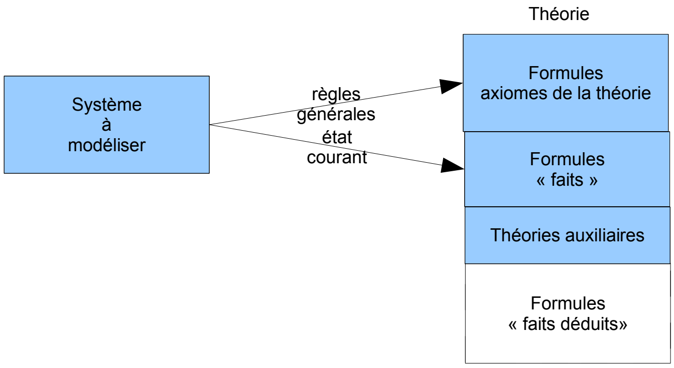
Quelques conséquences des axiomes :
$\models perpendiculaires(a, b) \Rightarrow \neg(vert(a) \wedge vert(b))$
$\models vert(a) \wedge perpendiculaires(a, b) \Rightarrow \neg vert(b)$
$\models vert(a) \wedge perpendiculaires(a, b) \Rightarrow rouge(b)$
$\models vert(a) \wedge \neg rouge(c) \Rightarrow vert(a) \wedge vert(c)$
$\models vert(a) \wedge \neg rouge(c) \Rightarrow \neg\neg(vert(a) \wedge vert(c))$
$\models vert(a) \wedge \neg rouge(c) \Rightarrow \neg perpendiculaires(a, c)$

Modélisation et théorie logique

Pour modéliser un système de manière générale on crée une théorie composée de
– axiomes du domaine (système)
– axiomes d'autres théories nécessaires (nombres, égalité, etc.)
Pour représenter une situation (état) particulière on ajoute des formules de base (sans variables)

La théorie obtenue contient tous ce qu'on peut dire de l'état actuel du système.

Principe



Utilisation

Système déductifs et systèmes experts

Programmation logique : remplacer la programmation impérative par l'application de règles

Exemple 6.5. Recherche d'itinéraire

Vocabulaire : r (route) et i (itinéraire)

Règles

$$\forall x \forall y (r(x,y) \Rightarrow i(x,y))$$

$$\forall x \forall y \forall z ((r(x,y) \wedge i(y,z) \Rightarrow i(x,z))$$

Faits

$$r(a,b), r(b,c), r(c,d), r(a,e), r(e,f), r(e,d)$$

Conséquences logiques

$$i(a,b), i(b,c), \ldots, i(a,c), i(a,d), \ldots$$

Ajouter L'approche déductive peut se révéler contre-intuitive. Considérons une modélisation logique où nous avons les faits 1 à 7 et la règle 8 :

1. formation($\mathsf{BA1}$)
2. partie($\mathsf{CR101}, \mathsf{BA1}$)
3. partie($\mathsf{CR103}, \mathsf{BA1}$)
4. partie($\mathsf{CR106}, \mathsf{BA1}$)
5. réussi($\mathsf{Zoe}, \mathsf{CR101}$)
6. réussi($\mathsf{Zoe}, \mathsf{CR103}$)
7. réussi($\mathsf{Zoe}, \mathsf{CR106}$)
8. $\forall e \forall f (\forall c(\text{partie}(c,f) \Rightarrow \text{réussi}(e,c))) \Rightarrow \text{diplomé}(e,f)$
   pour tout étudiant e et toute formation f si e a réussi tous les cours c qui font partie de la formation alors e est diplômé de la formation f.

Peut-on en déduire diplomé($\mathsf{Zoe}, \mathsf{BA1}$) ?

Malgré les apparences la réponse est non car diplomé($\mathsf{Zoe}, \mathsf{BA1}$) n'est pas une conséquence logique des faits et de la règle donnée. Pour s'en convaincre on peut voir que l'interprétation I donnée par

$$\begin{aligned}
I(\text{formation}) &= \{\text{BA1}\} \\
I(\text{partie}) &= \{(\text{CR101}, \text{BA1}), (\text{CR102}, \text{BA1}), (\text{CR103}, \text{BA1}, (\text{CR106}, \text{BA1})\} \\
I(\text{réussi}) &= \{(\text{Zoé, CR101}), (\text{Zoé,CR103}), (\text{Zoé,CR106})\} \\
(\text{diplomé}) &= \{\}
\end{aligned}$$

est un modèle des faits et de la règle mais $I(\text{diplomé}(\mathsf{Zoe}, \mathsf{BA1})) = \mathbf{f}$. En d'autre termes, les faits représentés par la formules atomiques de base (1 à 7) ne représentent pas « toute la vérité ». Dans notre cas, on sait que les cours CR101, CR103 et CR106 font partie de la formation BA1 mais rien ne nous dit qu'il n'y en a pas d'autres.

Théorie égalitaire L'une des manières d'améliorer le pouvoir de déduction des modélisation logique est d'introduire la notion d'égalité. Pour cela on ajoute au vocabulaire le prédicat binaire $=$ et les axiomes

1. réflexivité : $\forall x x = x$
2. symétrie : $\forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x)$
3. transitivité : $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$

Pour pouvoir substituer des termes égaux dans les formules sans changer leur valeur il faut également introduire des axiomes de congruence. Pour chaque prédicat P du vocabulaire on introduit un axiome :

$$\begin{gathered}\forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_n (x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_n = y_n \wedge P(x_1, \ldots, x_n) \\ \Rightarrow P(y_1, \ldots y_n))\end{gathered}$$

De même, pour chaque fonction f on introduit :

$$\begin{gathered}\forall x_1 \ldots \forall x_k \forall y_1 \ldots \forall y_k (x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_k = y_k \\ \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_k) = f(y_1, \ldots, y_k))\end{gathered}$$

Dans l'exemple précédent on peut, à l'aide de l'égalité, préciser qu'il n'y a pas d'autres cours que CR101, CR103 et CR106 dans la formation BA1. Il suffit d'ajouter la règle

$$\forall c (\text{partie}(c, \mathsf{BA1}) \Rightarrow (c = \mathsf{CR101} \vee c = \mathsf{CR103} \vee c = \mathsf{CR106}))$$

Si on suppose que l'interprétation de $=$ est donnée de manière naturelle par

$$I(=) \quad = \quad \{(\text{BA1}, \text{BA1}), (\text{CR101}, \text{CR101}), \ldots (\text{Zoé}, \text{Zoé})\}$$

alors I n'est plus un modèle des formules 1. à 8 plus la nouvelle règle, car celle-ci interdit d'avoir $(\text{CR106}, \text{BA1})$ dans $I(\text{partie})$.

Les théories égalitaires sont nécessaires dès que la notion de comptage intervient dans les formules. Par exemple, pour exprimer

un étudiant ne peut s'inscrire qu'à une seule formation

on écrira

$$\forall e \forall f_1 \forall f_2 ((\text{inscrit}(e, f_1) \wedge \text{inscrit}(e, f_2)) \Rightarrow f_1 = f_2).$$

Pour exprimer

il y a au plus 3 cours dans la formation f

on écrira

$\forall c_1 \forall c_2 \forall c_3 \forall c_4 (\text{partie}(c_1, f) \wedge \text{partie}(c_2, f) \wedge \text{partie}(c_3, f) \wedge \text{partie}(c_4, f)) \Rightarrow (c_1 = c_2 \vee c_1 = c_3 \vee c_1 = c_4 \vee c_2 = c_3 \vee c_2 = c_4 \vee c_3 = c_4))$.

Évidemment, dès qu'il s'agit de parler de grands nombres cela devient impraticable. Il faut alors introduire une nouvelle théorie : la théorie des ensembles.

bd comme modèle d'une théorie

requêtes (select ... into) comme procédé de calcul de modèles