Devoir maison n°13 : Calcul de $\zeta(2)$

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1) Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^2} > 0$, la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est strictement croissante. De plus, $u_1 = 1 \leqslant v_1 = 1$ et pour tout $k \geqslant 2$, par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = v_n$$

---

2) La suite (v_n) est convergente. En effet, pour tout $n \geqslant 2$:

$$v_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$. Comme v_n converge, alors elle est majorée. (u_n) est donc alors également majorée, et croissante. Donc (u_n) converge par le théorème de la limite monotone.

Partie B - Analyse de (u_n)

1) a) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \cos(0) = n$. De plus, pour tout $t \in]0;\pi]$:

$$\begin{aligned}
C_n(t) &= \sum_{k=1}^{n} \Re\left(e^{ikt}\right) = \Re\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right) \\
&\overset{e^{it}\neq 1}{=} \Re\left(e^{it}\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1}\right) \\
&\overset{\text{Angle moitié}}{=} \Re\left(e^{it}\frac{e^{i\frac{n}{2}t}\cdot 2\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\cdot 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\Re\left(e^{\frac{i(n+1)}{2}t}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, t \in [0;\pi]$, C_n est une somme finie de fonctions continues sur $[0;\pi]$, et est donc continue sur $[0;\pi]$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*, t \in]0;\pi]$, on calcule avec des indentités trigonométriques :

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) &= \sin\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{n}{2}t\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \\
&= \sin\left(\frac{t}{2}\right)C_n(t) + \cos\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{n}{2}t\right) + \cos\left(\frac{n}{2}t\right)^2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{t}{2}\right)C_n(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{n}{2}t\right) - \sin\left(\frac{n}{2}t\right)^2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{t}{2}\right)C_n(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{n}{2}t\right)\left[\cos\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{n}{2}t\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right] \\
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)C_n(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$D_n(t) = 2C_n(t) + 1 = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [O;\pi]$, $D_n(t) = 1 + 2C_n(t)$. Par continuité de C_n et opérations, D_n est également continue sur $[0;\pi]$

---

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $t \mapsto C_n(t)$ sont de classe C^∞ par opérations (cos est de classe C^∞). On peut donc calculer par intégration par parties :

TODO : d droit

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt &= \left[\frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sin(nt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)dt \\
&\overset{\sin(k\pi)=0}{=} -\frac{1}{n}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)dt
\end{aligned}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)dt &= \left[\frac{1}{n}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)(-\cos(nt))\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n\pi}(-\cos(nt))dt \\
&= \left[\frac{1}{n}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)(-\cos(nt))\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{n^2\pi}(-\sin(nt))\right]_0^\pi
\end{aligned}$$

On a :

$$\left[\frac{1}{n}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)(-\cos(nt))\right]_0^\pi = \left(0 - \frac{1}{n}(-1)(-\cos(0))\right) = -\frac{1}{n} \text{ et}$$

$$\left[\frac{1}{n^2\pi}(-\sin(nt))\right]_0^\pi \overset{\sin(k\pi)=0}{=} = 0$$

On en conclut donc que :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt = -\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$$

Enfin, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}
u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)dt \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\right)dt \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)C_n(t)dt
\end{aligned}$$

---

3) On calcule en primitivant :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt &= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{6\pi}t^3\right]_0^\pi - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^\pi\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
u_n - \frac{\pi^2}{6} &= u_n + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)dt \\
&= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(C_n(t) + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)D_n(t)
\end{aligned}$$

Partie C - Calcul de $\lim_{n\to+\infty} u_n$

1) f est continue par opérations sur $]0;\pi]$. De plus, pour tout $t \in]0;\pi]$:

$$f(t) = 2\frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})}\left(1 - \frac{t}{2\pi}\right)$$

En remarquant que le facteur du milieu est l'inverse d'un taux d'accroissement, on obtient :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = 2 = f(0)$$

Donc f est bien continue sur $[0;\pi]$. D'après le théorème des bornes atteintes, on dispose donc de $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f| \leqslant M$ sur $[0;\pi]$.

2) a) Pour tout $\alpha \in]0;\pi[$, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\alpha f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right| &\leqslant \int_0^\alpha |f(t)|\left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|dt \text{ par inégalité triangulaire}\\ &\leqslant \int_0^\alpha |f(t)|\ dt \text{ car } |\sin| \leqslant 1\\ &\leqslant \int_0^\alpha M dt = \alpha M \text{ car } |f| \leqslant M\end{aligned}$$

b) f est dérivable par opérations sur $]0;\pi]$: comme $\alpha > 0$, elle est a fortiori dérivable sur $[\alpha;\pi]$. De plus, pour tout $t \in [\alpha;\pi]$:

$$f'(t) = \frac{\left(1-\frac{t}{\pi}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(t-\frac{t^2}{2\pi}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

Qui est continue par opérations sur $[\alpha;\pi]$. Encore par le théorème des bornes atteintes, on dispose donc de $M' \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f'| \leqslant M'$ sur $[\alpha;\pi]$.

c) Comme f est de classe C^1, on peut calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ par intégration par parties :

$$\begin{aligned}I_n &= \int_\alpha^\pi f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\\ &= \left[-\frac{2}{2n+1}f(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right]_\alpha^\pi - \int_\alpha^\pi -\frac{2}{2n+1}f'(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\\ &\overset{\cos\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right)=0}{=} \frac{2}{2n+1}f(\alpha)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) + \frac{2}{2n+1}\int_\alpha^\pi f'(t)\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par l'inégalité triangulaire (sur la somme et l'intégrale):

$$\begin{aligned}|I_n| &\leqslant \left|\frac{2}{2n+1}f(\alpha)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)\right| + \frac{2}{2n+1}\int_\alpha^\pi |f'(t)|\left|\cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\right|dt\\ &\leqslant \frac{2}{2n+1}\left|f(\alpha)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right)\right| + \frac{2}{2n+1}(\pi-\alpha)M'\end{aligned}$$

Comme α et M' sont fixés, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}|I_n| = 0 \text{ d'où } \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}\left|u_n - \frac{\pi^2}{6}\right| &= \left|\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)D_n(t)dt\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right| \text{ par l'expression du B)1)c}\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout choix de $0 < \alpha < \pi$, par la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right| &\leqslant \left|\int_0^{\alpha} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right| + \left|\int_{\alpha}^{\pi} f(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)dt\right| \\ &\leqslant \alpha M + |I_n|\end{aligned}$$

Où M ne dépend pas de α. Ainsi :

$$\left|u_n - \frac{\pi^2}{6}\right| \leqslant \frac{1}{2}\alpha M + \frac{1}{2}|I_n|$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut alors choisir $0 < \alpha < \pi$ tel que $\frac{1}{2}\alpha M < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour ce α, il existe un rang à partir duquel $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc à partir duquel $\left|u_n - \frac{\pi^2}{6}\right| < \varepsilon$. Ainsi, on obtient enfin :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$$