Devoir maison n°8 : D'Hiver

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Exercice 1 - La couleur des nombres

Notons $x \sim y$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{Q}_+^*$: « x et y sont de même couleur ». Les propriétés d'équivalence sont évidentes. On colore enfin en bleu les nombres bleus et en rouge les nombres rouges.

Les deux premières règles deviennent :

$$1 \tag{a}$$

$$x \sim \frac{1}{x} \tag{b}$$

Enfin, comme il n'y a que deux couleurs, si x et y sont de couleurs différentes, alors x et y sont de couleurs opposées. La 3e règle devient donc :

$$x + 1 \nsim x \tag{c}$$

1)

D'après (a), 1 est rouge et d'après (c), la couleur s'inverse à chaque ajout de 1. Par récurrence évidente, tous les nombres pairs sont donc bleus et tous les nombres impairs rouges.

Ainsi, comme 2016 est pair, 2016 est bleu.

---

2) Soit $x \in \mathbb{Q}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$. D'après (c) appliquée deux fois, $x + 2 \sim x$. Par une récurrence évidente, $x + 2k \sim x$.

Ainsi, si $n \in \mathbb{N}$ est pair, alors $x + n \sim x$, et si n est impair :

$$\begin{aligned} x + n &\sim x + (n-1) + 1 \\ &\sim x + 1 && \text{par (b)} \\ &\nsim x && \text{par (c)} \end{aligned}$$

Ainsi, selon la couleur de x, si n est pair, $x + n$ aura la même couleur que x et si n est impair $x + n$ sera de couleur opposée à x.

---

3)

$$\begin{aligned} \frac{2016}{2015} &\sim 1 + \frac{1}{2015} \\ &\sim 1 + 2015 \\ &\sim 2016 \end{aligned}$$

Donc $\frac{2016}{2015}$ est bleu.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{4}{13} &\sim \frac{13}{4} \\ &\sim 3 + \frac{1}{4} \\ &\sim 3 + 4 \\ &\sim 7 \end{aligned}$$

Donc $\frac{4}{13}$ est rouge.

---

4)

TODO

---

5)

TODO

---

6)

---

7) Après implémentation de l'algorithme en typst, celui-ci donne :

$$\frac{1515}{1789}$$

Exercice 2 - Intercaler la somme

1)

$E_4 = (1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1)$

$E_5 = (1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1)$

(bien entendu généré automatiquement, le script est dans le DM sur Github)

---

2) Les réponses suivantes sont calculées automatiquement :

a) E_{11} contient 1025 éléments.

b) La somme des éléments de E_{11} est 59050.

c) Le plus grand élément de E_{11} est 144.

---

3) a) Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = N_n - 1$. Les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont :

$$u_1 = 1 \qquad u_2 = 2 \qquad u_3 = 4 \qquad u_4 = 8$$

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

Preuve : Notons E'_n la liste E_n dans laquelle on omet le dernier 1, et on considère u_n comme le nombre d'éléments de E'_n. Pour construire E'_{n+1} à partir de E'_n, on rajoute un nombre à droite de chaque élément de E'_n. On a donc :

$$\begin{aligned} |E'_{n+1}| &= |E'_n| + |E'_n| \\ \iff u_{n+1} &= 2u_n \end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate, on a bien $u_n = 2^{n-1}$. Donc le nombre d'éléments de E_n est $N_n = 2^{n-1} + 1$.

b) Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n la somme des éléments de E_n et $v_n = S_n - 1$ que l'on interprète comme la somme des éléments de E'_n. Les premiers termes de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont :

$$v_1 = 1 \qquad v_2 = 3 \qquad v_3 = 9 \qquad v_4 = 27$$

On conjecture que $v_n = 3^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve : Notons x_i pour $1 \leq i \leq N_n$ le i-ème élément de la liste E_n. E'_{n+1} est composé d'une copie de la liste E'_n, ainsi que des sommes d'éléments consécutifs de E_n. On a donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \sum_{i=1}^{N_n - 1} (x_i + x_{i+1}) \\ &= v_n + \sum_{i=1}^{N_n - 1} x_i + \sum_{i=2}^{N_n} x_i \\ &= v_n + 2 \sum_{i=1}^{N_n - 1} x_i \qquad \text{car } x_1 = x_{N_n} \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, $v_n = 3^{n-1}$ et la somme des éléments de E_n est donc $3^{n-1} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.