Devoir maison n°11 : La ruine du joueur

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Étude d'une suite récurrente.

Soient $b, c \in \mathbb{N}^*$, et $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1}$, avec $u_0, u_{b+c} \in \mathbb{R}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1} &\Longleftrightarrow (p+q)u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1} \\ &\Longleftrightarrow qu_n - qu_{n-1} = pu_{n+1} - pu_n \\ &\Longleftrightarrow p(u_{n+1} - u_n) = q(u_n - u_{n-1}). \end{aligned}$$

---

2) Avec $p = q = \frac{1}{2}$, l'égalité précédente devient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) \Longleftrightarrow u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}.$$

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$ où r est une constante réelle. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc arithmétique de raison r.

Par conséquent,

$$u_{b+c} = u_0 + (b+c)r \text{ i.e. } r = \frac{u_{b+c} - u_0}{b+c}.$$

On peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n\frac{u_{b+c} - u_0}{b+c}.$$

---

3)

Partie B - Ruine de Bob.

1) On représente une partie par une suite de gains, de pertes ou rien si la partie s'est terminée. Autrement dit, une partie est une suite $(u_n) \in \{0, \pm 1\}^{\mathbb{N}^*}$ représentant les gains algébriques de Bob au cours des parties. Ces suites doivent respecter les conditions suivantes :

- Ni Bob, ni la banque ne peuvent être dans le négatif. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-b \leqslant \sum_{k=0}^{n} u_k \leqslant c$$

- On joue jusqu'à la ruine, c'est à dire que s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = -b \quad \text{ou} \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = c$$

Alors $u_k \neq 0$ pour tout $k \leqslant n$ et $u_k = 0$ pour tout $k > n$.

On note Ω l'univers (infini) des déroulements possibles de partie.

On définit maintenant une tribu $\mathcal{T}$ sur Ω comme étant la tribu générée par les évènements élémentaires suivants : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \{\pm 1\}^n$:

$$\mathcal{E}((x_1, \dots, x_n)) = \left\{ (u_n) \in \{0, \pm 1\}^{\mathbb{N}^*} \mid \forall i \in [\![1; n]\!], u_i = x_i \right\}$$

On définit alors la loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{T})$ par :

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}((x_1, \dots, x_n))) = \frac{1}{2^n}$$

Ainsi que les évènements B_k de la manière suivante.

$$\Sigma_k = \{\}$$

2)

a)

b)

c)

3)

4)

Partie C - Temps d'attente de la ruine de Bob.

J'ai perduuu

1) Supposons que $p = q = \frac{1}{2}$.

a)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pour tout $k \geqslant 1$, la variable $Y_k = X_k + \alpha k^2$ vérifie $\mathbb{E}(Y_k) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{k+1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{k-1})$ si et seulement si par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_k) + \alpha k^2 = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_{k-1}) + \frac{1}{2}\alpha(k-1)^2 + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_{k+1}) + \frac{1}{2}\alpha(k+1)^2$$

Or $\mathbb{E}(X_k) = 1 + q\mathbb{E}(X_{k-1}) + p\mathbb{E}(X_{k+1}) = 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_{k-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(X_{k+1})$, donc on peut écrire :

$$1 + \alpha k^2 = \frac{1}{2}\alpha(k-1)^2 + \frac{1}{2}\alpha(k+1)^2 \iff \alpha = 1$$

b)

D'après la partie A - 2), lorsque $p = q = \frac{1}{2}$, la suite $(\mathbb{E}(Y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et pour tout $b \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}(Y_b) = \mathbb{E}(Y_0) + b\frac{\mathbb{E}(Y_{b+c}) - \mathbb{E}(Y_0)}{b+c} = \mathbb{E}(X_0) + 0^2 + b\frac{\mathbb{E}(X_{b+c}) + (b+c)^2 - \mathbb{E}(X_0) - 0^2}{b+c}$$

Soit :

$$\mathbb{E}(X_b) = \mathbb{E}(Y_b) - b^2 = b(b+c) - b^2 = bc$$

---

2) Supposons que $p \neq q$ et posons $x = \frac{q}{p}$.

a)

Soit $\beta \in \mathbb{R}$.

Pour tout $k \geqslant 1$, la variable $Z_k = X_k + \beta k$ vérifie $\mathbb{E}(Z_k) = p\mathbb{E}(Z_{k+1}) + q\mathbb{E}(Z_{k-1})$ si et seulement si, par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(X_k) + \beta k = p\mathbb{E}(X_{k+1}) + q\mathbb{E}(X_{k-1}) + p\beta(K+1) + q\beta(k-1)$$

Or $\mathbb{E}(X_k) = p\mathbb{E}(X_{k+1}) + q\mathbb{E}(X_{k-1})$, d'où :

$$\mathbb{E}(X_k) + \beta k = \mathbb{E}(X_k) - 1 + \beta(pk + qk + p - q)$$

Soit, puisque $pk + qk = k(p+q) = k(p+1-p) = k$, il vient :

$$\beta(p-q) = 1 \iff \beta = \frac{1}{p-q} = \frac{1}{2p-1}$$

b)

D'après la partie A - 3), la suite $(\mathbb{E}(Z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}(Z_0) + \left(\mathbb{E}(Z_{b+C}) - \mathbb{E}(Z_0)\right)\frac{1-x^n}{1-x^{b+c}}$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}(Z_n) = \beta(b+c)\frac{1-x^n}{1-x^{b+c}}$$

Soit :

$$\mathbb{E}(X_b) = \frac{1}{p-q}\frac{x^b-1}{x^{b+c}-1}(b+c) - \frac{1}{p-q}b = \frac{1}{p-q}\left(\frac{\left(x^b-1\right)(b+c)}{x^{b+c}-1} - b\right)$$

c)

d)