Mathématiques : Devoir maison n° 4

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Partie A - Définitions

1)

$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est injective sur $\mathcal{E}$ si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathcal{E}, f(x) = f(y) \implies x = y$$

On en conclut que f n'est pas injective si et seulement si :

$$\exists x, y \in \mathcal{E}, x \neq y \wedge f(x) = f(y)$$

2)

$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est surjective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\forall y \in \mathcal{F}, \exists x \in \mathcal{E}, y = f(x)$$

On en déduit que f n'est pas surjective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\exists y \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathcal{E}, y \neq f(x)$$

3)

$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\forall y \in \mathcal{F}, \exists! x \in \mathcal{E}, y = f(x)$$

On en déduit que f n'est pas bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\exists y \in \mathcal{F}, \Big(\forall x \in \mathcal{E}, y \neq f(x)\Big) \vee \Big(\exists a, b \in \mathcal{E}, a \neq b \wedge f(a) = f(b)\Big)$$

Partie B - Exemples

1)

2)

3)

a) Prouvons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(p, q) = n$.

Si $n = 2^p(2q+1)$, c'est que $\frac{n}{2^p}$ est un entier impair et donc que 2^p est la plus grande puissance de 2 qui divise n. Par le théorème fondamental de l'arithmétique, ce choix existe, et est unique ($p = v_2(n)$). Le choix de q est maintenant forcé par celui de p en prenant l'unique $q \in \mathbb{N}$ tel que $2q + 1 = \frac{n}{2^p}$; celui-ci existe, car $\frac{n}{2^p}$ est impair.

b) Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique antécédant de n par f. Donc f est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

c) Posons $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ telle que $g(p, q) = f(p, q) - 1$. g est injective comme composition de fonctions injectives (voir partie C, question a)), et surjective. En effet, si $n \in \mathbb{N}$, alors $n + 1 \in \mathbb{N}^*$ a un antécédant par f, et n a un antécédant par g.

Donc g est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

d) i) <u>h est injective :</u> Soient $(a, b, c), (x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ deux triplets d'entiers. Si $h(a, b, c) = h(x, y, z)$, par injectivité de g, $g(a, b) = g(x, y)$ et $c = z$. Encore par injectivité de g, on trouve que $(a, b, c) = (x, y, z)$. Donc h est injective.

<u>h est surjective :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors n a un antécédant (m, c) par g par surjectivité de g. Encore par surjectivité de g, m a un antédédant (a, b) par g. On a donc trouvé des entiers a, b, c tels que $g(g(a, b), c) = n$. Donc n a un antécédant par h ($(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$), et h est surjective.

Donc h est une bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$.

ii) L'antécédant de 2023 par g est $(3, 126)$. L'antécédant de 2023 par h est donc $(2, 0, 126)$.

e) On prouve le résultat généralisé suivant :

Théorème. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une bijection $\varphi_n : \mathbb{N}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}^n \cong \mathbb{N}$).

Démonstration. La preuve est par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ s'il existe une telle bijection φ_n.

Initialisation : Si $n = 1$, $\varphi_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Donc $P(1)$.

Hérédité : Supposons qu'il existe une bijection $\varphi_n : \mathbb{N}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$\varphi_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) = g\left(\varphi_n(a_1, \dots, a_n), a_{n+1}\right)$$

Prouvons que φ_{n+1} est bijective.

Injectivité : Soient $(a_1, \dots, a_{n+1}), (b_1, \dots, b_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$. Si $\varphi_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) = \varphi_{n+1}(b_1, \dots, b_{n+1})$, par injectivité de g, puis de φ_n, $(a_1, \dots, a_{n+1}) = (b_1, \dots, b_{n+1})$. Donc φ_{n+1} est injective.

Surjectivité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors n a un antécédant (m, a_{n+1}) par g. De même, $m \in \mathbb{N}$ et m a un antécédant $(a_1, \dots, a_n)$ par φ_n, car celle-ci est surjective dans $\mathbb{N}$. Donc n a pour antécédant $(a_1, \dots, a_{n+1})$ par φ_{n+1}. Donc φ_{n+1} est surjective dans $\mathbb{N}$.

Donc $P(n+1)$. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

En particulier, on obtient que $\varphi : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ définie par $\varphi(a_1, a_2, a_3, a_4) = g(h(a_1, a_2, a_3), a_4)$ est une bijection.

4)

On procède par analyse-synthèse.

Analyse : Soit f une fonction qui satisait l'énoncé. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f(n) = n$.

Initialisation : $f(0) \leq 0$, et $f(0) \geq 0$ car $f(0) \in \mathbb{N}$. Donc $f(0) = 0$.

Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(k) = k$ pour tout $k \leq n$. Alors $f(n+1) > n$: en effet, si $f(n+1) \leq n$, alors $f(n+1) = f(k)$ pour $k = f(n+1) \leq n$, ce qui contredit l'injectivité de f.

Donc $f(n+1) \geq n+1$ et $f(n+1) \leq n+1$. Donc $f(n+1) = n+1$.

Par le principe de récurrence, $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Synthèse : La fonction $f : n \mapsto n$ satisfait bien l'énoncé car elle est injective et $f(n) = n \leq n$. La fonction $f : n \mapsto n$ est donc la seule solution injective de cet énoncé.

Partie C - Propriétés

1)

a)

f et g injectives : Soient $x, y \in \mathcal{E}$. Si $g \circ f(x) = g \circ f(y)$, alors par injectivité de g, $f(x) = f(y)$. Encore par injectivité de f, $x = y$. Donc $g \circ f$ est injective si f et g sont injectives.

f et g surjectives : Soit $x \in \mathcal{G}$. Alors x a un antécédant $y \in \mathcal{F}$ par g car g est surjective. De même, y a un antécédant $z \in \mathcal{E}$ par f. Donc x a un antécédant, z, par la fontion $g \circ f$: celle-ci est donc surjective si f et g sont surjectives.

b)

$g \circ f$ injective : On procède par contraposée en montrant que si f n'est pas injective, alors $g \circ f$ ne l'est pas non plus.

$g \circ f$ surjective : On procède encore par contraposée en supposant que g n'est pas surjective. Alors il existe $x \in \mathcal{G}$ qui n'a pas d'antécédant par g. Alors x ne peut pas avoir d'antécédant par $g \circ f$. Donc $g \circ f$ n'est pas surjective.

2)

a) 1e implication : Supposons que g est injective. Soient $f_1, f_2 : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ telles que $g \circ f_1 = g \circ f_2$. Si $x \in \mathcal{E}$ par injectivité de g, $f_1(x) = f_2(x)$ pour tout $x \in \mathcal{E}$. Ainsi, si $g \circ f_1 = g \circ f_2$, alors $f_1 = f_2$.

2e implication : On procède par contraposée en supposant que g n'est pas injective.

G ne peut être vide : sinon, g est immédiatement injective. Donc F n'est pas vide non plus, et contient au moins deux éléments, sinon quoi g est injective.

Donc il existe $x \in \mathcal{G}$ qui a deux antécédants distincts $a, b \in \mathcal{F}$ par g ($\mathcal{F}$ contient au moins deux éléments car une fonction définie sur un ensemble d'un élément ne peut qu'être injective). Posons $f_1(e) = a$ et $f_2(e) = b$ pour tout $e \in \mathcal{E}$. Alors $g \circ f_1 = g \circ f_2$, mais $f_1(e) \neq f_2(e)$ pour tout $e \in \mathcal{E}$ - donc pour au moins un $e \in \mathcal{E}$ car $\mathcal{E}$ n'est pas vide.

b) 1e implication : Supposons que f est surjective. Soient $g_1, g_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ telles que $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Soit $x \in \mathcal{F}$. Alors il existe $y \in \mathcal{E}$ tel que $f(y) = x$. Comme $g_1 \circ f(y) = g_2 \circ f(y)$, on a $g_1(x) = g_2(x)$ pour tout $x \in \mathcal{F}$. Donc $g_1 = g_2$.

2e implication : On procède de nouveau par contraposée en supposant que f n'est pas surjective. Alors il existe $x_0 \in \mathcal{F}$ qui n'a pas d'antécédant par f. Posons

$$g_1(x) = \begin{cases} a \text{ si } x \neq x_0 \\ b \text{ si } x = x_0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = a \tag{1}$$

Où $a, b \in \mathcal{G}$ sont distincts (existent par hypothèse). Alors g_1 et g_2 diffèrent en $x = x_0$, mais $g_1 \circ f = g_2 \circ f$.

On en déduit que si f n'est pas surjective, alors l'assertion $g_1 \circ f = g_2 \circ f \qquad g_1 = g_2$ est fausse.

3)

Soient $x, y \in \mathcal{E}$ tels que $f(x) = f(y)$. Si $x > y$, alors $f(x) > f(y)$ si f est strictement croissante, $f(x) < f(y)$ si f est décroissante, c'est une contradiction. Similairement, si $y > x$, $f(y) > f(x)$ ou $f(y) < f(x)$ qui est une contradiction. Donc $x = y$ et f est injective.