

# Devoir maison n°8 : D'Hiver

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

## Exercice 1 - La couleur des nombres

Pour alléger la syntaxe, nous établissons les notations suivantes : **nombre rouge**, **nombre bleu**.

Rappelons les règles sous une forme développée avec  $x \in \mathbb{Q}_+^*$  :

$$1 \quad (a)$$

$$\begin{cases} x \Leftrightarrow \frac{1}{x} \\ x \Leftrightarrow \frac{1}{x} \end{cases} \quad (b)$$

$$\begin{cases} x \Leftrightarrow x + 1 \\ x \Leftrightarrow x + 1 \end{cases} \quad (c)$$

1)

D'après (a), 1 est rouge et d'après (c), la couleur s'inverse à chaque ajout de 1. Par récurrence évidente, tous les nombres pairs sont donc bleus et tous les nombres impaires rouges.

Avec  $x \in \mathbb{Q}_+^*$  et  $k \in \mathbb{N}$  nous avons donc :

$$\begin{cases} x = 2k \Rightarrow x \\ x = 2k + 1 \Rightarrow x \end{cases} \quad (d)$$

Comme 2016 est pair, 2016 est **bleu**.

---

2) Soit  $x \in \mathbb{Q}_+^*$  et  $k \in \mathbb{N}$ , d'après (c) la couleur s'inverse à chaque ajout de 1. Nous avons donc par récurrence évidente :

$$\begin{cases} x + 2k \Rightarrow x + 2k \\ x + 2k + 1 \Rightarrow x + 2k + 1 \\ x + 2k \Rightarrow x + 2k \\ x + 2k + 1 \Rightarrow x + 2k + 1 \end{cases} \quad (e)$$

Selon la couleur de  $x$ , si  $n$  est pair,  $x + n$  aura la même couleur que  $x$  et si  $n$  est impaire  $x + n$  sera de couleur opposée à  $x$ .

---

3)



$$\begin{aligned}\frac{2016}{2015} &= 1 + \frac{1}{2015} \text{ d'après (a) et (d)} \\ &= 1 + \frac{1}{2015} \text{ d'après (b)} \\ &= \frac{2016}{2015} \text{ d'après (c)}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{4}{13} &= \frac{1}{\frac{13}{4}} \\ &= \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} \text{ d'après (d)} \\ &= \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} \text{ d'après (b)} \\ &= \frac{1}{\frac{13}{4}} \text{ d'après (e)} \\ &= \frac{4}{13} \text{ d'après (b)}\end{aligned}$$

---

4)

TODO

---

5)

TODO

---

6)

---

7) Après implémentation de l'algorithme en typst, celui-ci donne :

$$\frac{1515}{1789}$$