

# Devoir maison n°12 : Suites récurrentes d'ordre 2 non linéaires

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier  
TE1

## Partie A -

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

1)

a)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrons que  $u_n \geq 1$  :

D'une part,  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1$  sont clairement supérieurs ou égaux à 1. D'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $u_n \geq 1$  et  $u_{n+1} \geq 1$ . Alors, en utilisant la relation de récurrence, il vient :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} \geq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \geq 1$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ .

b)

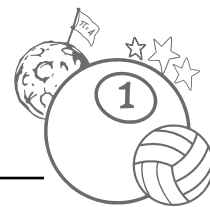
Supposons que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $l \in \mathbb{R}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . En utilisant la relation de récurrence, on a :

$$l = \sqrt{l} + \sqrt{l} = 2\sqrt{l} \text{ d'où } l = 4 \text{ ou } l = 0$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ . On en déduit que la seule limite possible de la suite  $u_n$  est  $l = 4$ .

c) Le script python suivant calcule la valeur de  $u_n$  suivant la valeur de  $n$  fournie.

```
def u(n):  
    if n == 0 or n == 1:  
        return 1  
    i = 1  
    a, b = 1, 1  
    while i < n:  
        i += 1  
        c = a**0.5 + b**0.5  
        b, a = c, b  
    return c  
  
print(u(50)) # u_50 = 3.999999998476622
```



2)

Considérons la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$ .

a)

Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  à partir duquel, pour tout  $n \geq N$  :

$$|v_n - 0| < \varepsilon \text{ soit } \left| \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \right| < \varepsilon \text{ soit } |\sqrt{u_n} - 2| < 2\varepsilon$$

Ainsi, en posant  $\delta = 2\varepsilon$ , pour tout  $n \geq N$ ,  $|\sqrt{u_n} - 2| < \delta$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = 2$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$  par continuité de la fonction  $x \rightarrow x^2$  et car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1 > 0$ .

b)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrons que  $v_n = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$  :

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})} = \frac{\frac{1}{2}u_{n+2} - 2}{2 + \sqrt{u_{n+2}}} = \frac{(\sqrt{u_{n+2}} + 2)(\sqrt{u_{n+2}} - 2)}{2(2 + \sqrt{u_{n+2}})} = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1 = v_{n+2}$$

c)

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|v_{n+2}| = |v_{n+1} + v_n| \frac{1}{2|2 + v_{n+2}|}$$

Or ,

$$u_{n+2} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{u_{n+2}} \geq 1 \Rightarrow 2(2 + v_{n+2}) \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{2|2 + v_{n+2}|} \leq \frac{1}{3}$$

On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|v_{n+2}| \leq |v_{n+1} + v_n| \frac{1}{3}$$

d)

e)

f)

## Partie B -

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}$$



1)

a)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrons que  $u_n \geq 1$  :

D'une part,  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1$  sont clairement supérieurs ou égaux à 1. D'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $u_n \geq 1$  et  $u_{n+1} \geq 1$ . Alors, en utilisant la relation de récurrence, il vient :

$$u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2 \geq 1$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ .

b)

c)

---

2)

a)

b)

c)

d)

e)

Fin du DM12 - J'ai perdu.