Devoir maison n°12 : Suites récurrentes d'ordre 2 non linéaires

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A -

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

1)

a)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $u_n \geqslant 1$:

D'une part, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ sont clairement supérieurs ou égaux à 1. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} \geqslant 1$. Alors, en utilisant la relation de récurrence, il vient :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} \geqslant \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \geqslant 1$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

b)

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$. En utilisant la relation de récurrence, on a :

$$l = \sqrt{l} + \sqrt{l} = 2\sqrt{l} \text{ d'où } l = 4 \text{ ou } l = 0$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$. On en déduit que la seule limite possible de la suite u_n est $l = 4$.

c) Le script python suivant calcule la valeur de u_n suivant la valeur de n fournie.

```python
def u(n):
    if n == 0 or n == 1:
        return 1
    i = 1
    a, b = 1, 1
    while i < n:
        i += 1
        c = a**0.5 + b**0.5
        b, a = c, b
    return c

print(u(50)) # u_50 = 3.999999998476622
```

2)

Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$.

a)

Supposons que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel, pour tout $n \geqslant N$:

$$|v_n - 0| < \varepsilon \text{ soit } |\frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1| < \varepsilon \text{ soit } |\sqrt{u_n} - 2| < 2\varepsilon$$

b)

c)

d)

e)

f)

Partie B -

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}$$

1)

a)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $u_n \geqslant 1$:

D'une part, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ sont clairement supérieurs ou égaux à 1. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} \geqslant 1$. Alors, en utilisant la relation de récurrence, il vient :

$$u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \geqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2 \geqslant 1$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

b)

c)

---

2)

a)

b)

c)

d)

e)

Fin du DM12 - J'ai perdu.