

Devoir maison n°10 : Droites Tropicales

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

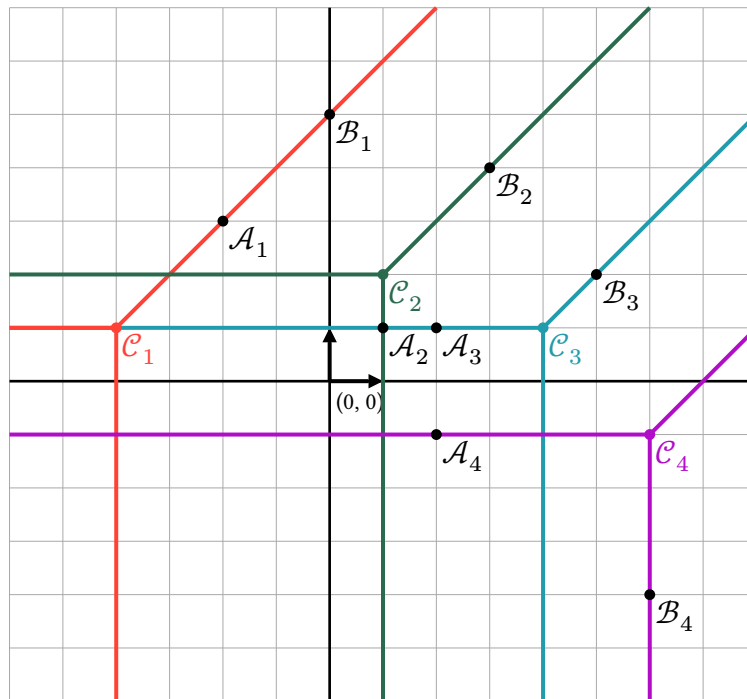
Partie A - Les droites tropicales

(\mathcal{A}') « Par deux points du plan passe une droite tropicale. »

(\mathcal{B}') « Par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale. »

(\mathcal{C}') « Deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point. »

1) a)



b) On cherche à prouver (\mathcal{A}'). Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux points quelconques du plan. Par une translation T on se ramène au cas où :

$$\mathcal{A}(0,0) \text{ et } \mathcal{B}(x,y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

Etudions d'abord des cas particuliers :

Si $x = 0$ et $y = 0$ alors $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, la droite tropicale de centre \mathcal{A} convient.

Si $y = 0$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\max(0, x), 0)$ convient.

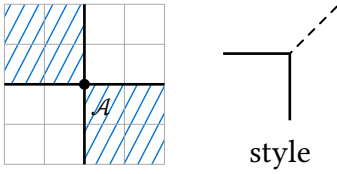
Si $x = 0$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(0, \max(0, y))$ convient.

Si $x = y$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\min(0, x), \min(0, y))$ convient.

Attaquons nous désormais aux cas généraux :



Si $x < 0$ et $y > 0$



Il existe $\mathcal{C}(0, y)$. Soient les demi-droites :

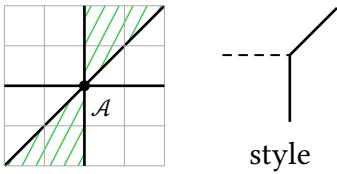
$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$ par construction, \mathcal{H} est parallèle à l'axe des abscisses.

$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$ par construction, \mathcal{V} est parallèle à l'axe des ordonnées.

Comme $x < 0$, \mathcal{H} est de direction $-\vec{i}$ et comme $y > 0$, \mathcal{V} est de direction $-\vec{j}$. Donc \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} .

En inversant les rôles de \mathcal{A} et \mathcal{B} , on obtient la deuxième partie rayée.

Si $x > 0$ et $y > 0$ et $y > x$



Soit \mathcal{D}' la droite parallèle à $y = x$ et passant par \mathcal{B} . On nomme \mathcal{C} l'intersection entre \mathcal{D}' et l'axe des ordonnées. Comme $y > x$, $y_{\mathcal{C}} > 0$. Soient les demi-droites :

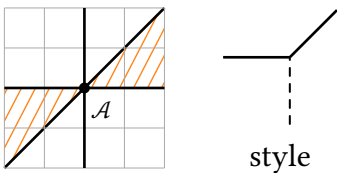
$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$ par construction, \mathcal{D} est de direction $\vec{i} + \vec{j}$

$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$ par construction, \mathcal{V} est de direction $-\vec{j}$

Donc \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} .

En inversant les rôles de \mathcal{A} et \mathcal{B} , on obtient que pour $0 > x$ et $0 > y$ et $x > y$, \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} , soit la deuxième zone rayée.

Si $x > 0$ et $y > 0$ et $y < x$



Doit \mathcal{D}' la droite parallèle à $y = x$ et passant par \mathcal{B} . On nomme \mathcal{C} l'intersection entre \mathcal{D}' et l'axe des abscisses. Comme $y < x$, $x_{\mathcal{C}} > 0$. Soient les demi-droites :

$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$ par construction, \mathcal{D} est de direction $\vec{i} + \vec{j}$

$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$ par construction, \mathcal{H} est de direction $-\vec{i}$

Donc \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} .



Par définition, $(\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}')$, $(\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}')$ et $(\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}')$ sont respectivement parallèles non confondus puisque qu'elles sont de même direction et que $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$.

Si $y > 0$ et $x < 0$ alors \mathcal{V}' coupe \mathcal{H} en I . \mathcal{H}' et \mathcal{V}' ne peuvent pas couper \mathcal{D} puisque tous les points de \mathcal{D} sont d'ordonnée positive et ceux de \mathcal{H}' et \mathcal{V}' d'ordonnée strictement négative. \mathcal{H}' ne peut pas couper \mathcal{V} puisque tous les points de \mathcal{H}' sont d'ordonnée strictement positive. \mathcal{D}' ne peut pas couper \mathcal{H} ou \mathcal{V} puisque tous les points de \mathcal{D}' sont d'ordonnée strictement positives.

De manière similaire :¹

Si $y > 0$ et $x > 0$ et $y > x$ alors \mathcal{V}' coupe \mathcal{D} en I . etc...

Si $y < 0$ et $x < 0$ et $y > x$ alors \mathcal{D}' coupe \mathcal{H} en I . etc...

Si $y < 0$ et $x < 0$ et $y < x$ alors \mathcal{D}' coupe \mathcal{V} en I . etc...

Si $y > 0$ et $x > 0$ et $y < x$ alors \mathcal{H}' coupe \mathcal{D} en I . etc...

Si $y < 0$ et $x > 0$ alors \mathcal{H}' coupe \mathcal{V} en I . etc...

Il n'y a aucune intersection autre que I entre les demi-droites pour chacun des cas, donc deux droites tropicales indépendantes se croisent en un unique point.

Conclusion

Nous avons démontré (\mathcal{B}'') , que deux droites tropicales se croisent en un unique point *si et seulement si* les centres de ces droites tropicales sont indépendants. Deux droites tropicales se coupent en plus d'un point si et seulement si ces points sont dépendants. Donc si deux droites tropicales se coupent en un point : alors un point si deux droites tropicales se coupent en plus d'un point : alors ces points sont dépendants

« Par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale. »

On cherche maintenant à prouver (\mathcal{B}') : « Par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale. » Nous savons d'après (\mathcal{A}') qu'il existe au minimum une droite tropicale passant par deux points quelconques du plan.

Raisonnons par l'absurde, supposons qu'il existe plus qu'une droite tropicale passant par deux points indépendants. Il est alors *nécessaire* qu'il existe deux droites tropicales qui se coupent en ces deux points indépendants. Or deux droites se coupent en plus d'un point *si et seulement si* ces deux points sont dépendants, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ.

Pour qu'il existe plus qu'une droite tropicale passant par deux points, il est *nécessaire* qu'il existe deux droites tropicales se coupant en ces deux points au minimum. Or ces deux points sont alors nécessairement dépendants. Ce qui est

deux droites tropicales se coupent en deux points au minimum \Leftrightarrow les centres de ces droites tropicales sont dépendants \Leftrightarrow ces points sont dépendants

« Il existe deux droites tropicales se coupant en deux point au minimum » est une condition nécessaire pour

¹Il s'agit des mêmes disjonctions qu'à la question 1b sur (\mathcal{A}')



3) On cherche à prouver (\mathcal{C}') : « Deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point. »

Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux centres de droites tropicales, indépendants. Par une translation T , on se ramène à $\mathcal{C}(0, 0)$ et $\mathcal{C}'(x, y)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Comme \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont indépendants, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$.

On nomme respectivement \mathcal{H} , \mathcal{V} et \mathcal{D} les demi-droites de direction $-\vec{i}$, $-\vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ contenant la droite tropicale \mathcal{C} . On fait de même pour \mathcal{C}' avec \mathcal{H}' , \mathcal{V}' et \mathcal{D}' .

Si $y > 0$ et $x < 0$ alors \mathcal{V}' coupe \mathcal{H} en I .

Si $y > 0$ et $x > 0$ et $y > x$ alors \mathcal{V}' coupe \mathcal{D} en I .

Si $y < 0$ et $x < 0$ et $y > x$ alors \mathcal{D}' coupe \mathcal{H} en I .

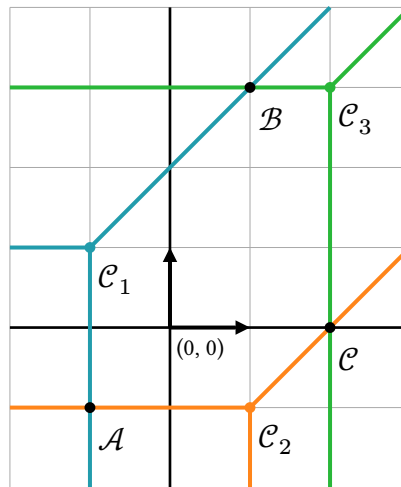
Si $y < 0$ et $x < 0$ et $y < x$ alors \mathcal{D}' coupe \mathcal{V} en I .

Si $y > 0$ et $x > 0$ et $y < x$ alors \mathcal{H}' coupe \mathcal{D} en I .

Si $y < 0$ et $x > 0$ alors \mathcal{H}' coupe \mathcal{V} en I .

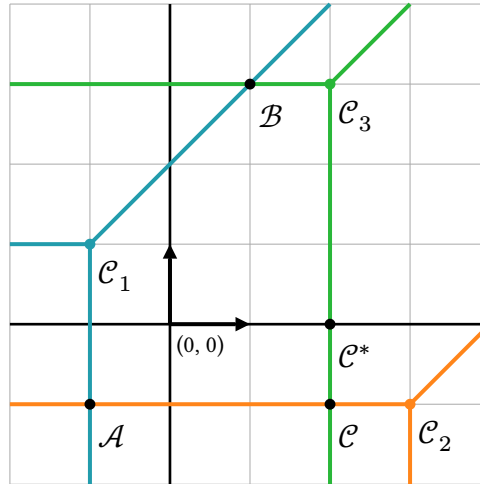
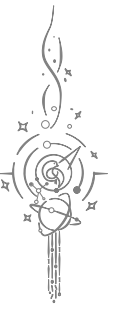
Il n'y a aucune intersection autre que I entre les demi-droites pour chacun des cas, donc I est bien l'unique intersection de deux droites tropicales.

4) Voici l'exemple donné de triangle tropical :



Il est spécifié que dans cet exemple, $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{C}} = 360^\circ$.

a) On considère le triangle tropicale suivant :



On a repris la figure de l'exemple, sur laquelle on a rajouté 2 à l'abscisse de \mathcal{C}_2 .

\mathcal{C}^* représente l'emplacement de \mathcal{C} sur l'ancienne figure. $\hat{\mathcal{A}}$ et $\hat{\mathcal{B}}$ ne sont pas impactés par le changement, par contre alors que $\hat{\mathcal{C}}^*$ était obtus, $\hat{\mathcal{C}}$ est droit. Donc $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{C}} < 360$.

L'égalité $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{C}} = 360$ n'est pas vrai pour tous les triangles tropicaux.

b)

Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ trois points indépendants du plan, centres de trois droites tropicales et sommets d'un triangle tropical.

D'après (\mathcal{C}') , les trois intersections $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ des trois droites tropicales doivent exister.

Il existe deux intersections sur une demi-droite de direction $-\vec{i}, -\vec{j}$ ou $\vec{i} + \vec{j}$ **si et seulement si** les deux intersections sont dépendantes.

Or on suppose $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ indépendants donc chaque demi-droite possède *au plus* une intersection.

Nous savons donc que chaque droite tropicale possède deux intersections qui sont répartis entre ses trois demi-droites. Donc l'unique cas de figure possible est que chacune des trois intersections soit entre deux demi-droites dont la combinaison de leur direction est inédite.²

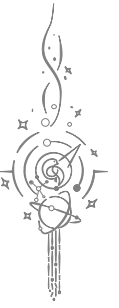
Or, l'intersection entre une demi-droite de direction $-\vec{i}$ et $-\vec{j}$ donne un angle de 90° . $\vec{i} + \vec{j}$ et $-\vec{i}$ donne $90^\circ + 45^\circ$. $\vec{i} + \vec{j}$ et $-\vec{j}$ donne $90^\circ + 45^\circ$.

La somme des angles d'un triangle tropical dont les sommets sont indépendants donne donc $4 \times 90^\circ = 360^\circ$.

Partie B - Addition et Multiplication tropicales

On définit sur \mathbb{R} l'addition tropicale et la multiplication tropicale tel que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

²En effet, soient deux directions, pour avoir deux fois une intersection entre des demi-droites ayant ces directions, comme cela arrive à la figure de la question 4) a), il est nécessaire que la troisième demi-droite formant les intersections (appartenant à \mathcal{C}_2 dans l'exemple) possède deux intersections, ce qui est contraire à la conclusion que chaque demi-droite possède *au plus* une intersection.



$$a \oplus b = \max(a, b) \quad \text{et} \quad a \otimes b = a + b$$

1) On a donc : $3 \oplus 7 = 7$ $-5 \oplus 2 = 2$ $3 \otimes 7 = 10$ $-5 \otimes 2 = -3$

2) \oplus est associatif et commutatif car \max est associatif et commutatif.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons sans perte de généralité que $b \leq c$ car \oplus est commutatif.

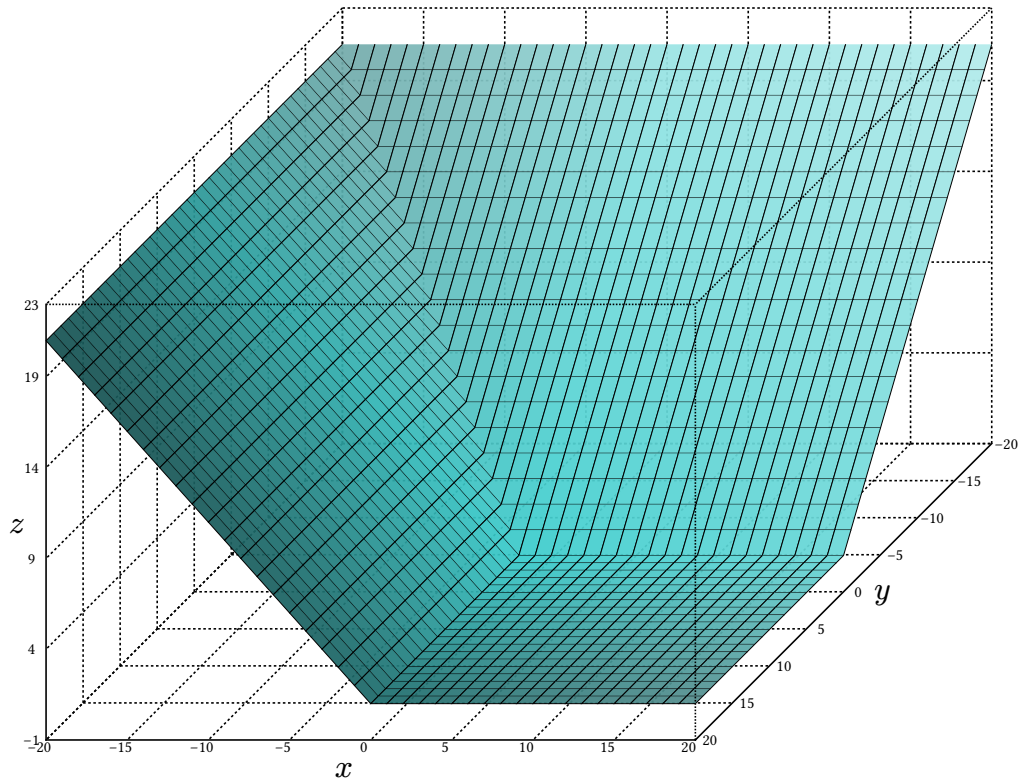
On a $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes c = a \otimes b \oplus a \otimes c$ puisque $a \otimes b \leq a \otimes c$.

3) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ les paramètres du polynôme de premier degré et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ représentant les points du plan.

Visualisation graphique

Voici à quoi ressemble une fonction tropicale³ de degré 1 : $a \otimes x \oplus b \otimes y \oplus c$:

$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$

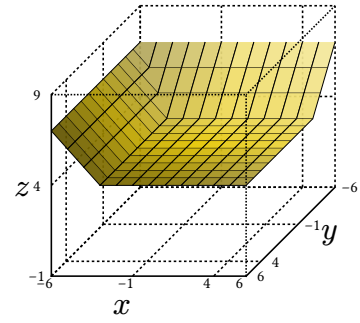
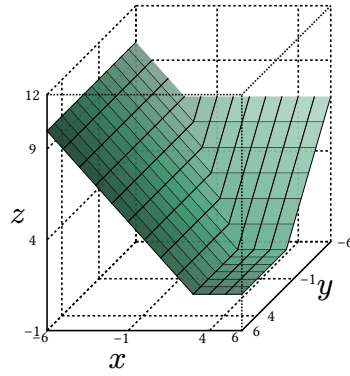
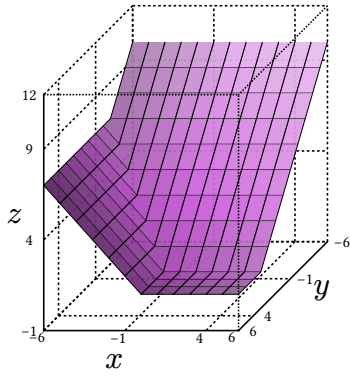


$$1 \otimes x \oplus 5 \otimes y \oplus 1$$

$$5 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$

$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 5$$

³Pour des raisons esthétiques, nous utilisons dans les graphiques l'opposé des valeurs de x et y .



On remarque que modifier les valeurs a , b et c « décale » l'un des « bords ».

Démonstration

On recherche le lieu (les droites) qui permettent d'atteindre deux fois le maximum dans $P_T = \max(a+x, b+y, c)$, ce qui est vrai si et seulement si :

$$\begin{aligned} a+x=c &\Leftrightarrow x=c-a &\rightarrow \text{parallèle à l'ordonnée} \\ b+y=c &\Leftrightarrow y=c-b &\rightarrow \text{parallèle à l'abscisse} \\ a+x=b+y &\Leftrightarrow x-y=b-a &\rightarrow \text{parallèle à } x=y \end{aligned}$$

Nous avons donc bien trois droites habituelles avec les bonnes directions qui permettraient de former une droite tropicale si ces trois droites se coupaient au même point.⁴

Or $x-y=(c-a)-(c-b)=b-a$, donc le point $\mathcal{C}(c-a, c-b)$ appartient aux trois droites et est le centre de la droite tropicale.⁵

Par ailleurs, remplacer x et y par $c-a$ et $c-b$ dans $\max(a+x, b+y, c)$ permet bien d'atteindre trois fois le maximum.

Le lieu des coins de P_T est une droite tropicale de centre $\mathcal{C}(c-a, c-b)$.

4) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ représentant les points du plan.

Visualisation graphique

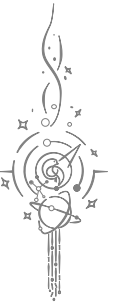
Voici à quoi ressemble la fonction tropicale du second degré⁶ :

$$Q_T(x, y) = 1 \oplus (-1) \otimes x \oplus 0 \otimes y \oplus (-5) \otimes x^2$$

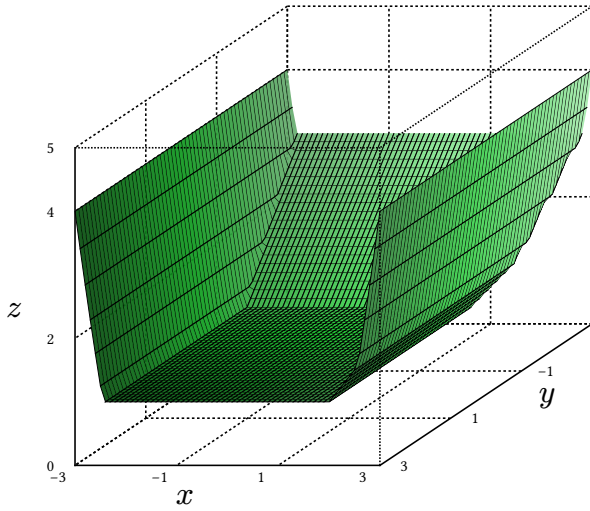
⁴En effet, trois droites parallèles à l'abscisse, l'ordonnée et $x=y$ qui se croisent en un point \mathcal{C} permettent de former trois demi-droites partant de \mathcal{C} dans les directions $-\vec{i}, -\vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ et donc de former une droite tropicale de centre \mathcal{C} .

⁵Dans l'espace, le point $\mathcal{C}(c-a, c-b, c)$ est bien l'intersection des trois droites.

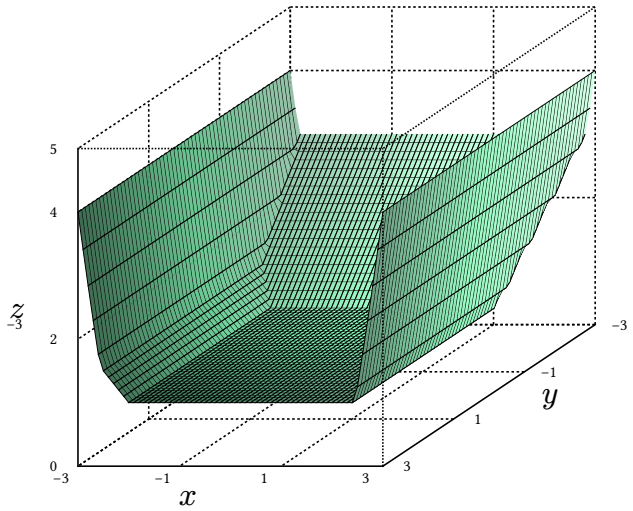
⁶On prend l'opposé pour l'axe y



D'un côté :⁷



De l'autre en prenant l'opposé pour l'axe x :



Démonstration

De manière similaire à ce que nous avons réalisé pour le polynôme de premier degré, recherchons les ensembles de points permettant d'atteindre deux fois le maximum $Q_T(x, y) = \max(1, x-1, y, x^2-5)$:

$$\begin{aligned}
 1 = x - 1 &\Leftrightarrow x = 2 && \rightarrow \text{parallèle à l'ordonnée} \\
 x - 1 = y &\Leftrightarrow x - y = 1 && \rightarrow \text{parallèle à } x = y \\
 y = 1 &\Leftrightarrow y = 1 && \rightarrow \text{parallèle à l'abscisse} \\
 x^2 - 5 = 1 &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6} && \rightarrow \text{parallèle à l'ordonnée} \\
 x^2 - 5 = x - 1 &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} && \rightarrow \text{parallèle à l'ordonnée} \\
 x^2 - 5 = y &\Leftrightarrow x^2 - y = 5 && \rightarrow \text{n'est pas une droite}
 \end{aligned}$$

Pour réaliser une droite tropicale, nous avons besoin d'une droite parallèle à l'abscisse et d'une parallèle à $x = y$, nous devons donc nécessairement utiliser $y = 1$ et $x - y = 1$ et nous ne pourrions construire qu'une seule droite tropicale. En combinant ces deux équations nous obtenons $x = 2$ comme point de croisement. La droite $x = 2$ que nous avons précédemment déterminée passe par ce point et convient donc.

Le lieu des coins de Q_T est la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(2, 1)$.

⁷Il est intéressant de remarquer que les deux lignes montantes ne sont pas des droites contrairement à ce que l'on pourrait penser. Il s'agit d'un polynôme du second degré étiré.