Devoir maison n°7 : Autour de Farey

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Remarque :
L'addition des cancres et les déterminants de fractions sont dépendantes de l'écriture des fractions : par la suite, on suppose donc par défaut que toutes les fractions sont irréductibles.

Partie A - Somme des cancres dans $\mathbb{Q}_+$.

Soient $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{e}{f},$ avec $a, c, e \in \mathbb{N},$ et $b, d, f \in \mathbb{N}^*$.

1)

$$x \oplus x = \frac{a}{b} \oplus \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

Donc $x \oplus x = x$.

---

2)

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d} \quad \text{et} \quad y \oplus x = \frac{c+a}{d+b} = \frac{a+c}{b+d}$$

$x \oplus y = y \oplus x$ donc l'opération est commutative.

---

3) D'une part :

$$(x \oplus y) \oplus z = \left(\frac{a+c}{b+d}\right) \oplus \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Et d'autre part :

$$x \oplus (y \oplus z) = \frac{a}{b} \oplus \left(\frac{c+e}{d+f}\right) = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ donc l'opération est associative.

---

4) Raisonnons par contraposée : Montrons que $(x \geqslant x \oplus y \vee x \oplus y \geqslant y) \Longrightarrow x \geqslant y$.

- Supposons $x \geqslant x \oplus y$:

$$\begin{aligned}
x \geqslant x \oplus y &\Longrightarrow \frac{a}{b} \geqslant \frac{a+c}{b+d} \\
&\Longrightarrow \frac{ab+ad-ab-bc}{b(b+d)} \geqslant 0 \\
&\Longrightarrow ad-bc \geqslant 0 \quad \text{car } b(b+d) \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow \frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d} \\
&\Longrightarrow x \geqslant y
\end{aligned}$$

- Supposons $x \oplus y \geqslant y$:

$$\begin{aligned}
x \oplus y \geqslant y &\Longrightarrow \frac{a+c}{b+d} \geqslant \frac{c}{d} \\
&\Longrightarrow \frac{ad+cd-bc-cd}{d(b+d)} \geqslant 0 \\
&\Longrightarrow ad-bc \geqslant 0 \quad \text{car } d(b+d) \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow \frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d} \\
&\Longrightarrow x \geqslant y
\end{aligned}$$

Nous avons montré que $(x \geqslant x \oplus y \vee x \oplus y \geqslant y) \Longrightarrow x \geqslant y$, et donc, par contraposée, que $x < y \Longrightarrow x < x \oplus y < y$.

Partie B - Déterminant de deux nombres de $\mathbb{Q}_+$.

Nous reprenons x, y tels que dans la partie précédente.

1) Montrons que : $x = y \Longleftrightarrow \delta(x,y) = 0$.

- Supposons que $x = y$. Alors :

$$\begin{aligned}
\delta(x,y) &= \delta(x,x) \\
&= ab - ba \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Supposons que $\delta(x,y) = 0$. Alors :

$$\begin{gathered}
ad - bc = 0 \\
ad = bc \\
\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\
x = y
\end{gathered}$$

Nous avons donc montré que $x = y \Longleftrightarrow \delta(x,y) = 0$.

2) D'une part :

$$\delta(y,x) = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

D'autre part :

$$-\delta(x,y) = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -ad + bc$$

Donc $\delta(y,x) = -\delta(x,y)$.

3)

$$\begin{aligned} x < y &\Longleftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ &\Longleftrightarrow ad < bc \quad \text{car } b, d > 0 \\ &\Longleftrightarrow ad - bc < 0 \\ &\Longleftrightarrow \delta(x,y) < 0 \\ &\Longleftrightarrow \delta(x,y) \leqslant -1 \quad \text{car } \delta(x,y) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc $x < y \Longleftrightarrow \delta(x,y) \leqslant -1$.

4) D'une part :

$$\begin{aligned} \delta(x, x \oplus y) &= \begin{vmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{vmatrix} \\ &= a(b+d) - b(a+c) \\ &= ab + ad - ab - bc \\ &= ad - bc \\ &= \delta(x,y) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \delta(x \oplus y, y) &= \begin{vmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{vmatrix} \\ &= d(a+c) - c(b+d) \\ &= ad + dc - cb - cd \\ &= ad - bc \\ &= \delta(x,y) \end{aligned}$$

Donc $\delta(x, x \oplus y) = \delta(x \oplus y, y) = \delta(x,y)$.

Supposons qu'il existe $k \geq 2$, tel que $k \mid (a+c)$ et $k \mid (b+d)$.

Alors

$$\begin{aligned}\delta(x, x \oplus y) &= \begin{vmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{vmatrix} \\ &= (b+d)a - (a+c)b\end{aligned}$$

Donc $k \mid \delta(x, x \oplus y) = \delta(x, y) = -1$.

Contradiction car $k \geq 2$.

Partie C - Ensembles de Farey.

1)

$$F_5 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{1}{1}\right\}$$
$$F_6 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{1}{1}\right\}$$
$$F_7 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{2}{7}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \frac{1}{2}; \frac{4}{7}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{5}{7}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{1}{1}\right\}$$
$$F_8 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{8}; \frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{2}{7}; \frac{1}{3}; \frac{3}{8}; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \frac{1}{2}; \frac{4}{7}; \frac{3}{5}; \frac{5}{8}; \frac{2}{3}; \frac{5}{7}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{1}{1}\right\}$$

~~Tapé à la main par nos soins.~~ Généré automatiquement par un algorithme qui est disponible dans le code du DM sur Github.

---

2) Si $\frac{m}{n} \in F_n$, alors $0 \leq m \leq n$ et $n \geq n - m \geq 0$. Donc $\frac{n-m}{n} \in F_n$.

Comme $n - (n - m) = m$, $\frac{m}{n} \in F_n$ si et seulement si $\frac{n-m}{n} \in F_n$, qui est son symétrique par rapport à leur moyenne $\frac{1}{2}$. Ce centre de symétrie ne dépend pas de m : on en conclut donc que $\frac{1}{2}$ est le centre de F_n pour $n \geq 2$.

---

3) Pas trouvé :/

---

4) Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion suivante : Si $x < y$ sont deux fractions consécutives de F_n, alors :
- $\delta(x, y) = -1$
- La première fraction qui apparaît dans un $F_m, m > n$ est $x \oplus y$

Il s'agit de prouver par récurrence $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Initialisation : Les seules fractions de F_1 sont $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$. On a bien $\delta\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right) = -1$ et la première fraction qui apparaît entre elles dans un F_m suivant est $\frac{1}{2}$ dans F_2 : or, $\frac{1}{2} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1}$. Donc $P(1)$ est vraie.

b) Hérédité : On suppose par la suite $P(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et on prouve $P(n+1)$.

On pose $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles et consécutives dans F_{n+1}. Par **C.3**, on sait que $x \in F_n$ ou $y \in F_n$.

1er cas : $x \in F_n$ et $y \in F_n$.

Comme x et y sont consécutives dans F_{n+1}, alors elles le sont aussi dans F_n, car $F_n \subseteq F_{n+1}$. Alors par l'hypothèse de récurrence, $\delta(x, y) = -1$. De plus, la première fraction qui apparaît entre x et y est $x \oplus y$ dans $F_m, m > n$. Mais x et y sont consécutives dans F_{n+1}, donc $m > n + 1$. Ainsi, dans ce cas, $P(n + 1)$ est vérifiée.

2e cas : $x \in F_n$ et $y \in F_{n+1} \setminus F_n$. Posons $z \in F_n$ la fraction successive de x dans F_n.

Par hypothèse de récurrence, comme y doit être la première fraction à s'être intercalée entre x et y, on doit avoir $y = x \oplus z$. De plus, on a $\delta(x, z) = -1$. On a donc

$$\delta(x, y) = \delta(x, x \oplus z) = \delta(x, z) = -1$$

Ce qui valide la première condition de $P(n + 1)$.

Posons maintenant $t = \frac{r}{s}$ la première fraction irréductible à apparaître entre x et y dans un F_m pour $m > n + 1$.

D'abord, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \delta(t, x) \geq 1 \\ \delta(y, t) \geq 1 \end{cases} &\overset{\textbf{B.2}}{\iff} \begin{cases} \delta(x, t) \leq -1 \\ \delta(t, y) \leq -1 \end{cases} \\ &\overset{\textbf{B.3}}{\iff} x < t < y \end{aligned}$$

Comme t s'intercale entre x et y, $\delta(t, x)$ et $\delta(y, t)$ sont bien supérieurs ou égaux à 1.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} a\delta(y, t) + c\delta(t, x) &= a(cs - dr) + c(br - as) \\ &= acs - acs + rbc - rad \\ &= r(bc - ad) \\ &= -r\delta(x, y) \\ &= r \end{aligned}$$

Similairement, on a :

$$\begin{aligned} b\delta(y, t) + d\delta(t, x) &= b(cs - dr) + d(br - as) \\ &= bdr - bdr + sbc - sad \\ &= s(bc - ad) \\ &= -s\delta(x, y) \\ &= s \end{aligned}$$

Si $\delta(t, x) \neq 1$ ou $\delta(t, y) \neq 1$, alors la fraction $t' = x \oplus y$ a un dénominateur $s' = b + d < s$. De plus, comme $\delta(x, y) = -1$, t' est irréductible. Donc t' s'intercale entre x et y strictement avant t, ce qui contredit la minimalité de t. Donc $\delta(x, t) = \delta(y, t) = 1$, et $t = x \oplus y$, ce qui conclut la preuve de la deuxième condition de $P(n + 1)$ dans ce cas.

3ᵉ et dernier cas : $x \in F_{n+1} \setminus F_n$ et $y \in F_n$.

D'une part, posons $z \in F_n$ la fraction précédant y dans F_n (qui existe bien car $y > 0$). Par $P(n)$, $x = z \oplus y$. Donc $\delta(x, y) = \delta(y \oplus z, y) = \delta(z, y) = -1$, où la dernière égalité vient de $P(n)$.

D'autre part, F_{n+1} est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$. On pose donc $x' = \frac{b-a}{b}$ et $y' = \frac{d-c}{d}$. Alors $y' \in F_n$ et $x' \in F_{n+1} \setminus F_n$ sont consécutives dans F_{n+1}. La première fraction à apparaître entre y' et x' dans un $F_m, m > n+1$ est :

$$y' \oplus x' = \frac{b + d - (a + c)}{b + d}$$

Qui est le symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$ de $\frac{a+c}{b+d} = x \oplus y$. Comme $y' \oplus x'$ est la première fraction à apparaître entre y' et x', par symétrie, $x \oplus y$ est nécessairement également la première à apparaître entre x et y, ce qui conclut ce cas.

Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie D - Cercles de Ford.

1) Tangents à l'axe des abscisses.

Prouvons que tout cercle de Ford est tangent à l'axe des abscisses. Soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible. Son cercle de Ford associé est de centre $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2b^2}$. Comme le rayon du cercle et son ordonnée sont égaux, tout cercle Ford est bien tangent à l'axe des abscisses.

---

2) Tangents entre eux quand consécutifs.

Nous allons raisonner par équivalence dans un repère orthonormé.

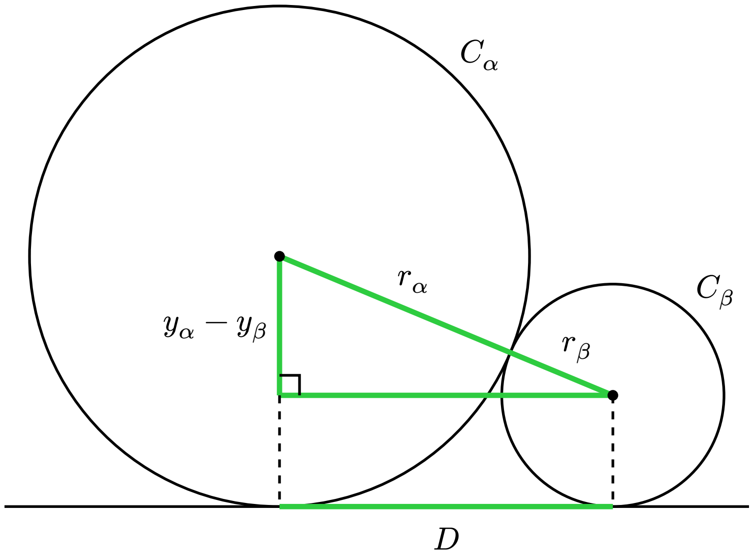
Soient α et β deux fractions consécutives de F_n tel que

$$\alpha = \frac{m}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n}{b}$$

avec $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha < \beta$.

D'après la propriété ci-dessus, les deux cercles de Ford C_α et C_β associés à α et β, de rayon respectif r_α et r_β, sont tangents à l'axe des abscisses. Les ordonnées y_α et y_β des centres de C_α et C_β est donc fixée, seules leurs abscisses x_α et x_β pourraient encore varier. La distance entre elles est notée D et comme $\alpha < \beta$, $D = x_\beta - x_\alpha$.

Soit le triangle vert tel que son hypothénuse relie les centres de C_α et C_β, et que ses côtés soient respectivement parallèle à l'abscisse et à l'ordonnée. Le triangle vert est donc un triangle rectangle.



Deux cercles sont tangents ssi il existe un unique point appartenant aux deux cercles, ssi la distance entre les deux centres est égale à la somme des deux rayons. L'hypothénuse du triangle rectangle vert relie justement les centres de C_α et C_β. Nous pouvons vérifier si l'hypothénuse mesure bien la somme des deux rayons en déterminant si le triangle ainsi formé est bien rectangle.

C_α et C_β sont tangents ssi

$$\begin{aligned}
& & D^2 &= (r_\alpha + r_\beta)^2 - (y_\alpha - y_\beta)^2 \\
\iff & & D^2 &= \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2}\right)^2 \\
\iff & & D^2 &= \left(2\left(\frac{1}{2a^2}\right)\right)\left(2\left(\frac{1}{2b^2}\right)\right) \\
\iff & & D^2 &= \left(\frac{1}{ab}\right)^2 \qquad \text{Or } D > 0 \text{ et } a, b \in \mathbb{N}^* \\
\iff & & D &= \frac{1}{ab} \\
\iff & & \frac{n}{b} - \frac{m}{a} &= \frac{1}{ab} \qquad \text{car } \alpha < \beta \\
\iff & & \frac{an - mb - 1}{ab} &= 0 \\
\iff & & mb - an &= -1 \\
\iff & & \delta(\alpha, \beta) &= -1
\end{aligned}$$

Or $\delta(\alpha, \beta)$ est bien égal à −1 car α et β sont consécutives dans F_n. Par équivalence, C_α et C_β sont tangeants.

Nous avons prouvé que les cercles Ford associés à deux fractions consécutives de F_n sont tangeants entre eux.

Accessoirement nous avons aussi prouvé que deux cercles tangents entre eux et à l'abscisse sont des cercles de Ford associés à deux fractions consécutives de F_n.

Partie E - Approximation

1) a) Encadrement du nombre $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Etape	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Valeur par défaut	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{12}{17}$
Valeur par excès	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$

Nous sommes paresseux donc ce tableau et les suivants sont bien entendu générés automatiquement par un algorithme de notre création fonctionnant pour n'importe quel nombre entre 0 et 1. Il est disponible dans le DM sur Github.

b) Meilleur encadrement

En poursuivant la méthode utilisée dans le tableau ci-dessus, nous pouvons obtenir un encadrement de α sur un dénominateur allant jusqu'à 100 :

Etape	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Valeur par défaut	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{41}{58}$	$\frac{70}{99}$
Valeur par excès	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{29}{41}$	$\frac{29}{41}$	$\frac{29}{41}$

---

2) Pas trouvé :/