

# Devoir maison n°9 : Fonction du Boulanger

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

## Problème 1 -

1)

Si  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $f(x) = 2x$  donc

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = [0, 1]$$

Si  $x \in ]\frac{1}{2}, 1]$ ,  $f(x) = 2(1 - x)$  donc

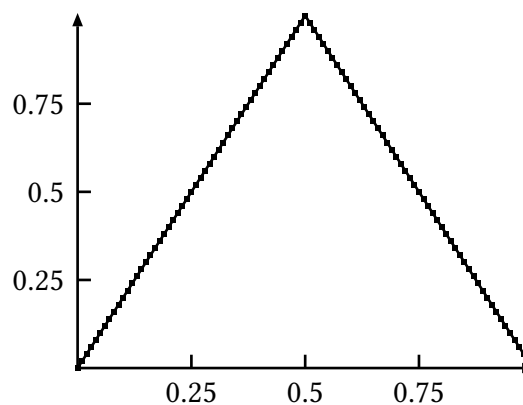
$$\frac{1}{2} < x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2(1 - x) < 1$$

$$\Leftrightarrow f\left(\left]\frac{1}{2}, 1\right]\right) = [0, 1[$$

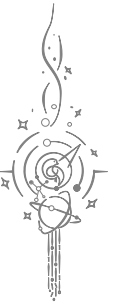
Donc nous avons bien  $f([0, 1]) = [0, 1]$ .



Représentation graphique de  $f$  sur  $[0, 1]$

---

2) La fonction suite repose naturellement sur de la récursivité. Nous allons donc la programmer dans un langage qui supporte de manière optimale les fonctions récursives.



Voici suite a p en Haskell.

```
f x
| 0 <= x      && x <= 1 / 2 = 2 * x
| 1 / 2 < x   && x <= 1    = 2 * (1 - x)

suite a 1 = a
suite a p = suite (a ++ [f (last a)]) (p-1)
```

Voici suite a p en OCaml.

```
let f x =
  if 0.0 <= x && x <= 0.5 then 2.0 *. x
  else if 0.5 < x && x <= 1.0 then 2.0 *. (1.0 -. x)
  else failwith "x doit être dans l'intervalle [0, 1]"

let rec suite x p =
  if p > 0 then begin
    let x' = f x in
    Printf.printf "%.5f\n" x';
    suite x' (p - 1)
  end

let () =
  suite (2. /. 5.) 25
```

Voici suite(a, p) en Python.

```
def f(x):
    if 0 <= x <= 1/2:
        return 2*x
    elif 1/2 < x <= 1:
        return 2*(1-x)

def suite(a, p):
    u = [a]
    for _ in range(p-1):
        u.append(f(u[-1]))
    return u
```

---

3) a)

- Si  $a = \frac{1}{3}$ :
  - $u_0 = \frac{1}{3}$
  - $u_1 = f(u_0) = \frac{2}{3}$  car  $u_0 < \frac{1}{2}$



•  $u_2 = 2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$  car  $u_1 > \frac{1}{2}$

On remarque que  $u_1 = u_2 = \frac{2}{3}$  puisque  $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ , donc la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sera constante pour  $n \geq 1$ .

Avec  $a = \frac{1}{3}$ :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } n = 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

• Si  $a = 0.33$ , On obtient : (0.33, 0.66, 0.68, 0.64, 0.72, 0.56, 0.88, 0.24, 0.48)

On remarque que, bien que  $\frac{1}{3} \approx 0.33$ , la suite ne devient pas constante pendant les 9 premiers termes.

**b)**

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $a = \frac{1}{2^k}$ .  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2}$ , donc

$$u_0 = \frac{1}{2^k} \qquad u_1 = 2\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{k-1}} \qquad u_2 = \frac{1}{2^{k-2}}$$

Cela ne varie pas tant que  $n < k$ .

$$u_k = \frac{1}{2^{k-k}} = 1 \qquad u_{k+1} = 0 \qquad u_{k+2} = 0$$

Or,  $f(0) = 0$ , donc

Avec  $a = \frac{1}{2^k}$  :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{k-n}} & \text{si } n \in \llbracket 0, k \rrbracket \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$$

**c)**

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $a = \frac{1}{3 \times 2^k}$ .  $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{3 \times 2^k} \leq \frac{1}{3 \times 2} < \frac{1}{2}$ , donc

$$u_0 = \frac{1}{3 \times 2^k} \qquad u_1 = 2\left(\frac{1}{3 \times 2^k}\right) = \frac{1}{3 \times 2^{k-1}} \qquad u_2 = \frac{1}{3 \times 2^{k-2}}$$

Cela ne varie pas tant que  $n < k$ .

$$u_k = \frac{1}{3 \times 2^{k-k}} = \frac{1}{3} \qquad u_{k+1} = \frac{2}{3} \qquad u_{k+2} = \frac{2}{3}$$

Or,  $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ , nous l'avons déjà observé à la question 3) a).

Avec  $a = \frac{1}{3 \times 2^k}$  :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3 \times 2^{k-n}} & \text{si } n \in \llbracket 0, k \rrbracket \\ \frac{2}{3} & \text{si } n > k \end{cases}$$

**4) a)** Choisissons  $a = 0$ . Comme  $f(0) = 0$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sera bien constante. Nous aurions aussi pu choisir  $a = \frac{2}{3}$ .

**b)** Choisissons  $a = \frac{2}{5}$ . Comme  $f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$ ,  $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien périodique de période 2. Nous aurions aussi pu choisir  $a = \frac{4}{5}$ .



c) Choisissons  $a = \frac{2}{7}$ . Comme  $f(\frac{2}{7}) = \frac{4}{7}$ ,  $f(\frac{4}{7}) = \frac{6}{7}$  et  $f(\frac{6}{7}) = \frac{2}{7}$ , la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sera bien périodique de période 3. Nous aurions aussi pu choisir  $a = \frac{4}{7}$  ou  $a = \frac{6}{7}$ .

5)

Si  $k = 2$ , comme vu auparavant, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante, nous n'étudierons donc pas ce cas afin de simplifier le raisonnement.

Soit un entier  $k$  tel que  $k > 2$ .

On a  $2^k - 1 \geq 7$ , donc  $0 < \frac{2}{2^k - 1} < \frac{1}{2}$ . Ainsi,  $a \in [0, \frac{1}{2}]$ , ce qui garantit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie par  $f$ .

On remarque de manière évidente que si tous les termes de la suite  $u_n$  sont inférieurs à  $\frac{1}{2}$  jusqu'à un rang  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$u_n = 2^n \cdot a = \frac{2^{n+1}}{2^k - 1}$$

Or,  $2^n \cdot a$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , donc il adviendra un moment où  $2^n \cdot a > \frac{1}{2}$

D'où, au rang  $k - 1$ , car

$$u_{k-3} = \frac{2^{k-2}}{2^k - 1} < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{k-2} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} > \frac{1}{2}$$

On a :

$$u_{k-1} = 2 \left( 1 - \frac{2^{k-1}}{2^k - 1} \right) = 2 - \frac{2^k}{2^k - 1} = 1 - \frac{1}{2^k - 1} > \frac{1}{2}$$

$$u_k = 2 \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{2^k - 1} \right) \right) = 2 - 2 + \frac{2}{2^k - 1} = a$$

Et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc périodique de période  $k$ .

6)

Supposons  $a$  rationnel, i.e  $a = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $q \neq 0$  et  $p \leq q$

Toutes les images de  $a$  par  $f$  peuvent être écrites sous la forme  $\frac{m}{q}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  :

- si  $a \leq \frac{1}{2}$ , on a  $f(a) = 2 \cdot a = \frac{2 \cdot p}{q} = \frac{m}{q}$  avec  $m = 2 \cdot p$
- si  $a > \frac{1}{2}$ , on a  $f(a) = 2 \cdot (1 - a) = 2 - \frac{2 \cdot p}{q} = \frac{m}{q}$  avec  $m = 2 \cdot (q - p)$

Or, il existe un nombre fini de fractions possibles  $\frac{m}{q}$ ,  $m < q$ , conditions satisfaites par les propriétés de la fonction  $f$ , qui ne change pas le dénominateur et renvoie toujours un nombre positif inférieur à 1 (cf question 1).

Ce qui implique indubitablement que la suite finira par « revisiter » un de ses termes précédents, formant ainsi un cycle périodique.



7) On dit que «  $a$  atteint sa cible » si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est nulle à partir d'un certain rang.

Soit  $a = 0$  et la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est nulle par récurrence immédiate : «  $a$  atteint sa cible ».

Sinon, supposons que  $a \neq 0$ ,  $u_{n-1} \neq 0$  et  $u_n = 0$ , on n'a que deux cas :

- $u_n = 2 \cdot u_{n-1} \neq 0$  : contradiction car on suppose que  $u_n = 0$
- $u_n = 2(1 - u_{n-1}) = 2 - 2 \cdot u_{n-1}$ , si et seulement si  $u_{n-1} = 1$

Donc «  $a$  atteint sa cible » si l'un des termes de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est égal à 1.

En poursuivant ce raisonnement, nous pouvons conjecturer le fait que «  $a$  atteint sa cible » si et seulement si  $a = \frac{p}{2^m}$ , avec  $p, m \in \mathbb{N}$  et  $p \leq 2^m$ .

En effet, à partir d'un certain rang,  $a$  aura « subi » une série de modifications au niveau de son numérateur : des multiplications par 2 et/ou des « renversements ».

Ce terme pourra alors être réécrit sous forme d'entier, son dénominateur ayant été « anihilié » par les multiplications par 2.

Enfin, on peut exprimer celui-ci comme  $p$ , avec  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $p \leq 1$  (propriétés de la fonction  $f$ , d'où  $u_n = 0$  ou  $u_n = 1$ , ce qui conclut.

a)

Si l'on pose  $a = \frac{1789}{2^{1789}}$ ,  $a$  devrait atteindre sa cible.

En effet, comme  $a < \frac{1}{2}$ , au rang 1778 :  $u_{1778} = 2^{1778} \cdot \frac{1789}{2^{1789}} = \frac{1789}{2^{11}} < 1$ ,  $u_{1778}$  étant le premier terme de la suite supérieur à  $\frac{1}{2}$  car  $2^{10} < 1789 < 2^{11}$ .

Puis on a :  $u_{1789} = 1$  d'où, pour tout  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $N \geq 1790$  :  $u_N = 0$ , ce qui implique que  $\frac{1789}{2^{1789}}$  atteint bien sa cible.

b)

Comme vu ci-dessus, tous les nombres de la forme  $\frac{p}{2^m}$ , avec  $p, m \in \mathbb{N}$  et  $p \leq 2^m$  atteignent leur cible.

8)

a)

On remarque graphiquement qu'il existe deux cas, déterminés par  $x$  :

- si  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ,  $y$  est « contracté » par un facteur 2 tandis que  $x$  est « dilaté » par un facteur 2
- si  $\frac{1}{2} < x \leq 1$ ,  $x$  est d'abord « dilaté » par un facteur 2 avant de se voir soustraire à 2 (on cherche sa distance au bord droit après élongation de la pâte), tandis que  $y$  est d'abord « contracté » par un facteur 2 avant de se faire soustraire à 1 (on cherche sa distance au bord inférieur après élongation de la pâte).

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} (2 \cdot x, \frac{y}{2}) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (2(1 - x), \frac{y+1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$



**b)**

Nous devons montrer qu'il existe un unique couple  $(x, y)$  pour tout couple  $(a, b)$  donné.

**Cas 1)**  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

On a :

$$a = 2 \cdot x, b = \frac{y}{2}$$

D'où:

$$x = \frac{a}{2}, y = 2 \cdot b$$

Valide car:

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{a}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq a \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2 \cdot b \leq 1 \Rightarrow 0 \leq b \leq \frac{1}{2}$$

Donc cette solution est valide pour  $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$

**Cas 2)**  $\frac{1}{2} < x \leq 1$

On a :

$$a = 2(1 - x), b = \frac{y + 1}{2}$$

D'où:  $x = 1 - \frac{a}{2}, y = 2 \cdot b - 1$

Valide car:

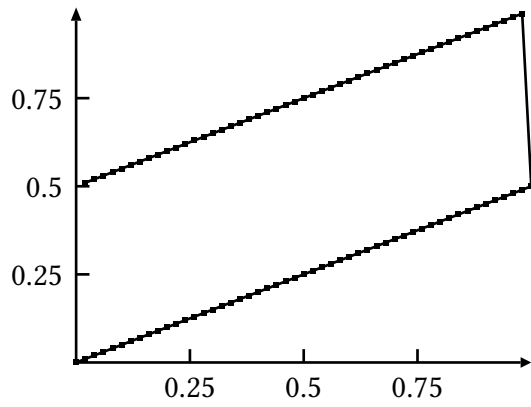
- $\frac{1}{2} < x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 - \frac{a}{2} \leq 1$
- $0 \leq y \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2 \cdot b - 1 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < b \leq 1$

Donc cette solution est valide pour  $\frac{1}{2} < b \leq 1$

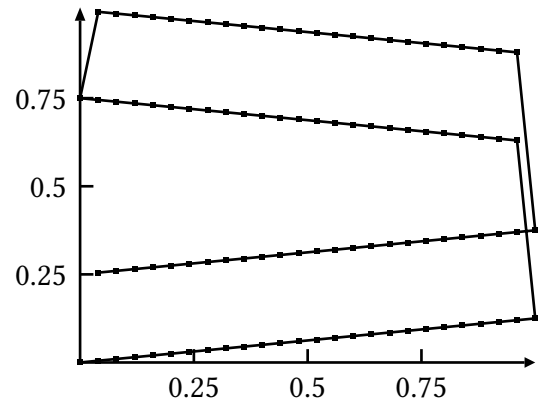
Pour chaque couple  $(a, b)$ , il existe donc un unique couple  $(x, y)$  respectant les conditions de base.

**c)**

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} (2 \cdot x, \frac{y}{2}) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ (2(1 - x), \frac{y+1}{2}) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$



Représentation graphique de  $\varphi$  sur  $[0, 1]$



Représentation graphique de  $\varphi \circ \varphi$  sur  $[0, 1]$

## Problème 2 - Galette des rois



Bon appétit !<sup>1</sup>



Avec une jolie fève :)

<sup>1</sup>L'aire de cette galette est  $4r^2$ .