

# Devoir maison n°7 : Autour de Farey

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

## Remarque :

L'addition des cancrs et les déterminants de fractions sont dépendantes de l'écriture des fractions : par la suite, on suppose donc par défaut que toutes les fractions sont irréductibles.

## Partie A - Somme des cancrs dans $\mathbb{Q}_+$ .

Soient  $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{e}{f}$ , avec  $a, c, e \in \mathbb{N}$ , et  $b, d, f \in \mathbb{N}^*$ .

1)

$$x \oplus x = \frac{a}{b} \oplus \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

Donc  $x \oplus x = x$ .

---

2)

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d} \quad \text{et} \quad y \oplus x = \frac{c+a}{d+b} = \frac{a+c}{b+d}$$

$x \oplus y = y \oplus x$  donc l'opération est commutative.

---

3) D'une part :

$$(x \oplus y) \oplus z = \left( \frac{a+c}{b+d} \right) \oplus \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Et d'autre part :

$$x \oplus (y \oplus z) = \frac{a}{b} \oplus \left( \frac{c+e}{d+f} \right) = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$  donc l'opération est associative.

---

4) Raisonnons par contraposée : Montrons que  $(x \geq x \oplus y \vee x \oplus y \geq y) \implies x \geq y$ .

- Supposons  $x \geq x \oplus y$  :



$$\begin{aligned}
x \geq x \oplus y &\Rightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+d} \\
&\Rightarrow \frac{ab+ad-ab-bc}{b(b+d)} \geq 0 \\
&\Rightarrow ad-bc \geq 0 \quad \text{car } b(b+d) \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \\
&\Rightarrow x \geq y
\end{aligned}$$

- Supposons  $x \oplus y \geq y$  :

$$\begin{aligned}
x \oplus y \geq y &\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} \geq \frac{c}{d} \\
&\Rightarrow \frac{ad+cd-bc-cd}{d(b+d)} \geq 0 \\
&\Rightarrow ad-bc \geq 0 \quad \text{car } d(b+d) \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \\
&\Rightarrow x \geq y
\end{aligned}$$

Nous avons montré que  $(x \geq x \oplus y \vee x \oplus y \geq y) \Rightarrow x \geq y$ , et donc, par contraposée, que  $x < y \Rightarrow x < x \oplus y < y$ .

## Partie B - Déterminant de deux nombres de $\mathbb{Q}_+$ .

Nous reprenons  $x, y$  tels que dans la partie précédente.

**1)** Montrons que :  $x = y \Leftrightarrow \delta(x, y) = 0$ .

- Supposons que  $x = y$ . Alors :

$$\begin{aligned}
\delta(x, y) &= \delta(x, x) \\
&= ab - ba \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Supposons que  $\delta(x, y) = 0$ . Alors :

$$\begin{aligned}
ad - bc &= 0 \\
ad &= bc \\
\frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \\
x &= y
\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que  $x = y \Leftrightarrow \delta(x, y) = 0$ .



---

2) D'une part :

$$\delta(y, x) = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

D'autre part :

$$-\delta(x, y) = - \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -ad + bc$$

Donc  $\delta(y, x) = -\delta(x, y)$ .

---

3)

$$\begin{aligned} x < y &\iff \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ &\iff ad < bc \quad \text{car } b, d > 0 \\ &\iff ad - bc < 0 \\ &\iff \delta(x, y) < 0 \\ &\iff \delta(x, y) \leq -1 \quad \text{car } \delta(x, y) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc  $x < y \iff \delta(x, y) \leq -1$ .

---

4) D'une part :

$$\begin{aligned} \delta(x, x \oplus y) &= \begin{vmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{vmatrix} \\ &= a(b+d) - b(a+c) \\ &= ab + ad - ab - bc \\ &= ad - bc \\ &= \delta(x, y) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \delta(x \oplus y, y) &= \begin{vmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{vmatrix} \\ &= d(a+c) - c(b+d) \\ &= ad + dc - cb - cd \\ &= ad - bc \\ &= \delta(x, y) \end{aligned}$$

Donc  $\delta(x, x \oplus y) = \delta(x \oplus y, y) = \delta(x, y)$ .



## Partie C - Ensembles de Farey.

1)

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_6 = \left\{ \frac{0}{1}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_7 = \left\{ \frac{0}{1}; \frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{2}{7}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \frac{1}{2}; \frac{4}{7}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{5}{7}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{6}{7}; \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_8 = \left\{ \frac{0}{1}; \frac{1}{8}; \frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{2}{7}; \frac{1}{3}; \frac{3}{8}; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \frac{1}{2}; \frac{4}{7}; \frac{3}{5}; \frac{5}{8}; \frac{2}{3}; \frac{5}{7}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{1}{1} \right\}$$

Tapé à la main par nos soins. Généré automatiquement par un algorithme qui est disponible dans le code du DM sur Github.

---

2) Si  $\frac{m}{n} \in F_n$ , alors  $0 \leq m \leq n$  et  $n \geq n - m \geq 0$ . Donc  $\frac{n-m}{n} \in F_n$ .

Comme  $n - (n - m) = m$ ,  $\frac{m}{n} \in F_n$  si et seulement si  $\frac{n-m}{n} \in F_n$ , qui est son symétrique par rapport à leur moyenne  $\frac{1}{2}$ . Ce centre de symétrie ne dépend pas de  $m$  : on en conclut donc que  $\frac{1}{2}$  est le centre de  $F_n$  pour  $n \geq 2$ .

---

### 3) Pas trouvé :/

---

4) Notons pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(n)$  l'assertion suivante : Si  $x < y$  sont deux fractions consécutives de  $F_n$ , alors :

- $\delta(x, y) = -1$
- La première fraction qui apparaît dans un  $F_m$ ,  $m > n$  est  $x \oplus y$

Il s'agit de prouver par récurrence  $P(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**a) Initialisation :** Les seules fractions de  $F_1$  sont  $\frac{0}{1}$  et  $\frac{1}{1}$ . On a bien  $\delta\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right) = -1$  et la première fraction qui apparaît entre elles dans un  $F_m$  suivant est  $\frac{1}{2}$  dans  $F_2$  : or,  $\frac{1}{2} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1}$ . Donc  $P(1)$  est vraie.

**b) Hérédité :** On suppose par la suite  $P(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , et on prouve  $P(n+1)$ .

On pose  $x = \frac{a}{b}$  et  $y = \frac{c}{d}$  deux fractions irréductibles et consécutives dans  $F_{n+1}$ . Par C.3, on sait que  $x \in F_n$  ou  $y \in F_n$ .

**1<sup>er</sup> cas :**  $x \in F_n$  et  $y \in F_n$ .

Comme  $x$  et  $y$  sont consécutives dans  $F_{n+1}$ , alors elles le sont aussi dans  $F_n$ , car  $F_n \subseteq F_{n+1}$ . Alors par l'hypothèse de récurrence,  $\delta(x, y) = -1$ . De plus, la première fraction qui apparaît entre  $x$  et  $y$  est  $x \oplus y$  dans  $F_m$ ,  $m > n$ . Mais  $x$  et  $y$  sont consécutives dans  $F_{n+1}$ , donc  $m > n + 1$ . Ainsi, dans ce cas,  $P(n+1)$  est vérifiée.



**2<sup>e</sup> cas :**  $x \in F_n$  et  $y \in F_{n+1} \setminus F_n$ . Posons  $z \in F_n$  la fraction successive de  $x$  dans  $F_n$ .

Par hypothèse de récurrence, comme  $y$  doit être la première fraction à s'être intercalée entre  $x$  et  $y$ , on doit avoir  $y = x \oplus z$ . De plus, on a  $\delta(x, z) = -1$ . On a donc

$$\delta(x, y) = \delta(x, x \oplus z) = \delta(x, z) = -1$$

Ce qui valide la première condition de  $P(n+1)$ .

Posons maintenant  $t = \frac{r}{s}$  la première fraction irréductible à apparaître entre  $x$  et  $y$  dans un  $F_m$  pour  $m > n+1$ .

D'abord, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \delta(t, x) \geq 1 \\ \delta(y, t) \geq 1 \end{cases} &\stackrel{\text{B.2}}{\iff} \begin{cases} \delta(x, t) \leq -1 \\ \delta(t, y) \leq -1 \end{cases} \\ &\stackrel{\text{B.3}}{\iff} x < t < y \end{aligned}$$

Comme  $t$  s'intercale entre  $x$  et  $y$ ,  $\delta(t, x)$  et  $\delta(y, t)$  sont bien supérieurs ou égaux à 1.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} a\delta(y, t) + c\delta(t, x) &= a(cs - dr) + c(br - as) \\ &= acs - acs + rbc - rad \\ &= r(bc - ad) \\ &= -r\delta(x, y) \\ &= r \end{aligned}$$

Similairement, on a :

$$\begin{aligned} b\delta(y, t) + d\delta(t, x) &= b(cs - dr) + d(br - as) \\ &= bdr - bdr + sbc - sad \\ &= s(bc - ad) \\ &= -s\delta(x, y) \\ &= s \end{aligned}$$

Si  $\delta(t, x) \neq 1$  ou  $\delta(t, y) \neq 1$ , alors la fraction  $t' = x \oplus y$  a un dénominateur  $s' = b + d < s$ . De plus, comme  $\delta(x, y) = -1$ ,  $t'$  est irréductible. Donc  $t'$  s'intercale entre  $x$  et  $y$  strictement avant  $t$ , ce qui contredit la minimalité de  $t$ . Donc  $\delta(x, t) = \delta(y, t) = 1$ , et  $t = x \oplus y$ , ce qui conclut la preuve de la deuxième condition de  $P(n+1)$  dans ce cas.

**3<sup>e</sup> et dernier cas :**  $x \in F_{n+1} \setminus F_n$  et  $y \in F_n$ .

D'une part, posons  $z \in F_n$  la fraction précédant  $y$  dans  $F_n$  (qui existe bien car  $y > 0$ ). Par  $P(n)$ ,  $x = z \oplus y$ . Donc  $\delta(x, y) = \delta(y \oplus z, y) = \delta(z, y) = -1$ , où la dernière égalité vient de  $P(n)$ .

D'autre part,  $F_{n+1}$  est symétrique par rapport à  $\frac{1}{2}$ . On pose donc  $x' = \frac{b-a}{b}$  et  $y' = \frac{d-c}{d}$ . Alors  $y' \in F_n$  et  $x' \in F_{n+1} \setminus F_n$  sont consécutives dans  $F_{n+1}$ . La première fraction à apparaître entre  $y'$  et  $x'$  dans un  $F_m$ ,  $m > n+1$  est :



$$y' \oplus x' = \frac{b + d - (a + c)}{b + d}$$

Qui est le symétrique par rapport à  $\frac{1}{2}$  de  $\frac{a+c}{b+d} = x \oplus y$ . Comme  $y' \oplus x'$  est la première fraction à apparaître entre  $y'$  et  $x'$ , par symétrie,  $x \oplus y$  est nécessairement également la première à apparaître entre  $x$  et  $y$ , ce qui conclut ce cas.

Conclusion : Par récurrence,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## Partie D - Cercles de Ford.

### 1) Tangents à l'axe des abscisses.

Prouvons que tout cercle de Ford est tangent à l'axe des abscisses. Soit  $\frac{a}{b}$  une fraction irréductible. Son cercle de Ford associé est de centre  $(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2})$  et de rayon  $\frac{1}{2b^2}$ . Comme le rayon du cercle et son ordonnée sont égaux, tout cercle Ford est bien tangent à l'axe des abscisses.

---

### 2) Tangents entre eux quand consécutifs.

Nous allons raisonner par équivalence dans un repère orthonormé.

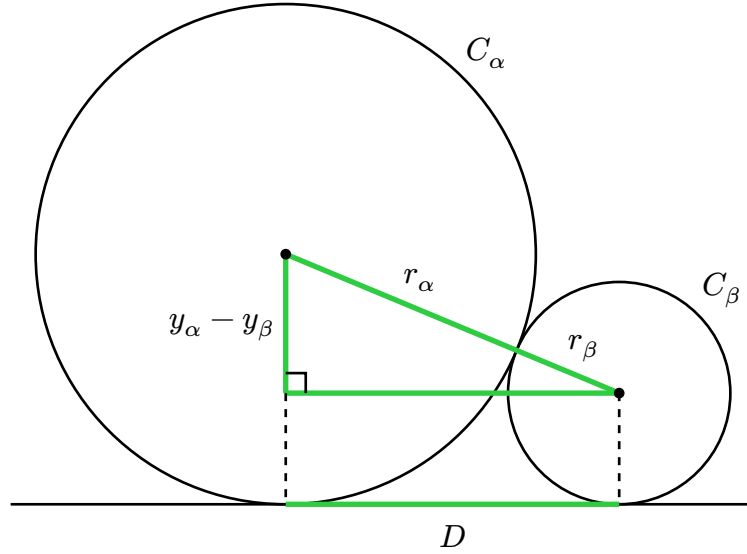
Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux fractions consécutives de  $F_n$  tel que

$$\alpha = \frac{m}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n}{b}$$

avec  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha < \beta$ .

D'après la propriété ci-dessus, les deux cercles de Ford  $C_\alpha$  et  $C_\beta$  associés à  $\alpha$  et  $\beta$ , de rayon respectif  $r_\alpha$  et  $r_\beta$ , sont tangents à l'axe des abscisses. Les ordonnées  $y_\alpha$  et  $y_\beta$  des centres de  $C_\alpha$  et  $C_\beta$  est donc fixée, seules leurs abscisses  $x_\alpha$  et  $x_\beta$  pourraient encore varier. La distance entre elles est notée  $D$  et comme  $\alpha < \beta$ ,  $D = x_\beta - x_\alpha$ .

Soit le triangle vert tel que son hypoténuse relie les centres de  $C_\alpha$  et  $C_\beta$ , et que ses côtés soient respectivement parallèle à l'abscisse et à l'ordonnée. Le triangle vert est donc un triangle rectangle.



Deux cercles sont tangents ssi il existe un unique point appartenant aux deux cercles, ssi la distance entre les deux centres est égale à la somme des deux rayons. L'hypothénuse du triangle rectangle vert relie justement les centres de  $C_\alpha$  et  $C_\beta$ . Nous pouvons vérifier si l'hypothénuse mesure bien la somme des deux rayons en déterminant si le triangle ainsi formé est bien rectangle.

$C_\alpha$  et  $C_\beta$  sont tangents ssi

$$\begin{aligned}
 D^2 &= (r_\alpha + r_\beta)^2 - (y_\alpha - y_\beta)^2 \\
 \Leftrightarrow D^2 &= \left( \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2} \right)^2 - \left( \frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2} \right)^2 \\
 \Leftrightarrow D^2 &= \left( 2 \left( \frac{1}{2a^2} \right) \right) \left( 2 \left( \frac{1}{2b^2} \right) \right) \\
 \Leftrightarrow D^2 &= \left( \frac{1}{ab} \right)^2 \quad \text{Or } D > 0 \text{ et } a, b \in \mathbb{N}^* \\
 \Leftrightarrow D &= \frac{1}{ab} \\
 \Leftrightarrow \frac{n}{b} - \frac{m}{a} &= \frac{1}{ab} \quad \text{car } \alpha < \beta \\
 \Leftrightarrow \frac{an - mb - 1}{ab} &= 0 \\
 \Leftrightarrow mb - an &= -1 \\
 \Leftrightarrow \delta(\alpha, \beta) &= -1
 \end{aligned}$$

Or  $\delta(\alpha, \beta)$  est bien égal à  $-1$  car  $\alpha$  et  $\beta$  sont consécutives dans  $F_n$ . Par équivalence,  $C_\alpha$  et  $C_\beta$  sont tangents.

Nous avons prouvé que les cercles Ford associés à deux fractions consécutives de  $F_n$  sont tangents entre eux.



Accessoirement nous avons aussi prouvé que deux cercles tangents entre eux et à l'abscisse sont des cercles de Ford associés à deux fractions consécutives de  $F_n$ .

## Partie E - Approximation

1) a) Encadrement du nombre  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Etape	1	2	3	4	5	6
Valeur par défaut	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{12}{17}$
Valeur par excès	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$

Nous sommes paresseux donc ce tableau et les suivants sont bien entendu générés automatiquement par un algorithme de notre création fonctionnant pour n'importe quel nombre entre 0 et 1. Il est disponible dans le DM sur Github.

b) Meilleur encadrement

En poursuivant la méthode utilisée dans le tableau ci-dessus, nous pouvons obtenir un encadrement de  $\alpha$  sur un dénominateur allant jusqu'à 100 :

Etape	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeur par défaut	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{12}{17}$	$\frac{41}{58}$	$\frac{70}{99}$
Valeur par excès	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{29}{41}$	$\frac{29}{41}$	$\frac{29}{41}$

---

2) Pas trouvé :/