

# Devoir maison n°7 : Autour de Farey

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

## Partie A - Somme des cancre dans $\mathbb{Q}_+$ .

Soient  $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{e}{f}$ , avec  $a, c, e \in \mathbb{N}$ , et  $b, d, f \in \mathbb{N}^*$ .

1)

$$x \oplus x = \frac{a}{b} \oplus \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

Donc  $x \oplus x = x$ .

---

2)

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d} \quad \text{et} \quad y \oplus x = \frac{c+a}{d+b} = \frac{a+c}{b+d}$$

$x \oplus y = y \oplus x$  donc l'opération est commutative.

---

3) D'une part :

$$(x \oplus y) \oplus z = \left( \frac{a+c}{b+d} \right) \oplus \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Et d'autre part :

$$x \oplus (y \oplus z) = \frac{a}{b} \oplus \left( \frac{c+e}{d+f} \right) = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$  donc l'opération est associative.

---

4) Raisonnons par contraposée : Montrons que  $(x \geq x \oplus y \vee x \oplus y \geq y) \implies x \geq y$ .

• Supposons  $x \geq x \oplus y$  :

$$\begin{aligned} x \geq x \oplus y &\implies \frac{a}{b} \geq \frac{a+c}{b+d} \\ &\implies \frac{ab+ad-ab-bc}{b(b+d)} \geq 0 \\ &\implies ad-bc \geq 0 \quad \text{car } b(b+d) \in \mathbb{N} \\ &\implies \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \\ &\implies x \geq y \end{aligned}$$



- Supposons  $x \oplus y \geq y$  :

$$\begin{aligned}x \oplus y \geq y &\implies \frac{a+c}{b+d} \geq \frac{c}{d} \\&\implies \frac{ad+cd-bc-cd}{d(b+d)} \geq 0 \\&\implies ad-bc \geq 0 \quad \text{car } d(b+d) \in \mathbb{N} \\&\implies \frac{a}{b} \geq \frac{c}{d} \\&\implies x \geq y\end{aligned}$$

Nous avons montré que  $(x \geq x \oplus y \vee x \oplus y \geq y) \implies x \geq y$ , et donc, par contraposée, que  $x < y \implies x < x \oplus y < y$ .

## Partie B - Déterminant de deux nombres de $\mathbb{Q}_+$ .

Nous reprenons  $x, y$  tels que dans la partie précédente.

**1)** Montrons que :  $x = y \iff \delta(x, y) = 0$ .

- Supposons que  $x = y$ . Alors :

$$\begin{aligned}\delta(x, y) &= \delta(x, x) \\&= ab - ba \\&= 0\end{aligned}$$

- Supposons que  $\delta(x, y) = 0$ . Alors :

$$\begin{aligned}ad - bc &= 0 \\ad &= bc \\ \frac{a}{b} &= \frac{c}{d} \\x &= y\end{aligned}$$

Nous avons donc montré que  $x = y \iff \delta(x, y) = 0$ .

---

**2)** D'une part :

$$\delta(y, x) = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

D'autre part :

$$-\delta(x, y) = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -ad + bc$$

Donc  $\delta(y, x) = -\delta(x, y)$ .



3)

$$\begin{aligned}
 x < y &\iff \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\
 &\iff ad < bc \quad \text{car } b, d > 0 \\
 &\iff ad - bc < 0 \\
 &\iff \delta(x, y) < 0 \\
 &\iff \delta(x, y) \leq -1 \quad \text{car } \delta(x, y) \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Donc  $x < y \iff \delta(x, y) \leq -1$ .

## Partie C - Ensembles de Farey.

1) Bah non en fait, Thomas python please

2) Si  $\frac{m}{n} \in F_n$ , alors  $0 \leq m \leq n$  et  $n \geq n - m \geq 0$ . Donc  $\frac{n-m}{n} \in F_n$ .

Comme  $n - (n - m) = m$ ,  $\frac{m}{n} \in F_n$  si et seulement si  $\frac{n-m}{n} \in F_n$ , qui est son symétrique par rapport à leur moyenne  $\frac{1}{2}$ . Ce centre de symétrie ne dépend pas de  $m$  : on en conclut donc que  $\frac{1}{2}$  est le centre de  $F_n$  pour  $n \geq 2$ .

3) Pas trouvé :/

4) Notons pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P(n)$  l'assertion suivante : Si  $x < y$  sont deux fractions consécutives de  $F_n$ , alors :

- $\delta(x, y) = -1$
- La première fraction qui apparaît dans un  $F_m$ ,  $m > n$  est  $x \oplus y$

Il s'agit de prouver par récurrence  $P(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**a) Initialisation :** Les seules fractions de  $F_1$  sont  $\frac{0}{1}$  et  $\frac{1}{1}$ . On a bien  $\delta(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}) = -1$  et la première fraction qui apparaît entre elles dans un  $F_m$  suivant est  $\frac{1}{2}$  dans  $F_2$  : or,  $\frac{1}{2} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1}$ . Donc  $P(1)$  est vraie.

**b) Hérédité :** On suppose par la suite  $P(n)$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , et on prouve  $P(n+1)$ .

On pose  $x = \frac{a}{b}$  et  $y = \frac{c}{d}$  deux fractions irréductibles et consécutives dans  $F_{n+1}$ . Par C.3, on sait que  $x \in F_n$  ou  $y \in F_n$ .

**1<sup>er</sup> cas :**  $x \in F_n$  et  $y \in F_n$ .

Comme  $x$  et  $y$  sont consécutives dans  $F_{n+1}$ , alors elles le sont aussi dans  $F_n$ , car  $F_n \subseteq F_{n+1}$ . Alors par l'hypothèse de récurrence,  $\delta(x, y) = -1$ . De plus, la première fraction qui apparaît entre  $x$  et  $y$  est  $x \oplus y$  dans  $F_m$ ,  $m > n$ . Mais  $x$  et  $y$  sont consécutives dans  $F_{n+1}$ , donc  $m > n+1$ . Ainsi, dans ce cas,  $P(n+1)$  est vérifiée.

**2<sup>e</sup> cas :**  $x \in F_n$  et  $y \in F_{n+1} \setminus F_n$ . Posons  $z \in F_n$  la fraction successive de  $x$  dans  $F_n$ .



Par hypothèse de récurrence, comme  $y$  doit être la première fraction à s'être intercalée entre  $x$  et  $y$ , on doit avoir  $y = x \oplus z$ . De plus, on a  $\delta(x, z) = -1$ . On a donc

$$\delta(x, y) = \delta(x, x \oplus z) = \delta(x, z) = -1$$

Ce qui valide la première condition de  $P(n+1)$ .

Posons maintenant  $t = \frac{r}{s}$  la première fraction irréductible à apparaître entre  $x$  et  $y$  dans un  $F_m$  pour  $m > n+1$ .

D'abord, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \delta(t, x) \geq 1 \\ \delta(y, t) \geq 1 \end{cases} &\stackrel{\text{B.2}}{\iff} \begin{cases} \delta(x, t) \leq -1 \\ \delta(t, y) \leq -1 \end{cases} \\ &\stackrel{\text{B.3}}{\iff} x < t < y \end{aligned}$$

Comme  $t$  s'intercale entre  $x$  et  $y$ ,  $\delta(t, x)$  et  $\delta(y, t)$  sont bien supérieurs ou égaux à 1.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} a\delta(y, t) + c\delta(t, x) &= a(cs - dr) + c(br - as) \\ &= acs - acs + rbc - rad \\ &= r(bc - ad) \\ &= -r\delta(x, y) \\ &= r \end{aligned}$$

Similairement, on a :

$$\begin{aligned} b\delta(y, t) + d\delta(t, x) &= b(cs - dr) + d(br - as) \\ &= bdr - bdr + sbc - sad \\ &= s(bc - ad) \\ &= -s\delta(x, y) \\ &= s \end{aligned}$$

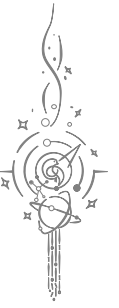
Si  $\delta(t, x) \neq 1$  ou  $\delta(t, y) \neq 1$ , alors la fraction  $t' = x \oplus y$  a un dénominateur  $s' = b + d < s$ . De plus, comme  $\delta(x, y) = -1$ ,  $t'$  est irréductible. Donc  $t'$  s'intercale entre  $x$  et  $y$  strictement avant  $t$ , ce qui contredit la minimalité de  $t$ . Donc  $\delta(x, t) = \delta(y, t) = 1$ , et  $t = x \oplus y$ , ce qui conclut la preuve de la deuxième condition de  $P(n+1)$  dans ce cas.

**3<sup>e</sup> cas : TODO**

## Partie D - Cercles de Ford.

### 1) Tangents à l'axe des abscisses.

Prouvons que tout cercle de Ford est tangent à l'axe des abscisses. Soit  $\frac{a}{b}$  une fraction irréductible. Son cercle de Ford associé est de centre  $(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2})$  et de rayon  $\frac{1}{2b^2}$ . Comme le rayon du cercle et son ordonnée sont égaux, tout cercle Ford est bien tangent à l'axe des abscisses.



---

## 2) Tangents entre eux quand consécutifs.

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux fractions consécutives de  $F_n$  tel que

$$\alpha = \frac{m}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n}{b}$$

avec  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha < \beta$ .

Les deux cercles de Ford associés à  $\alpha$  et  $\beta$  sont tangents à l'axe des abscisses d'après la propriété