Devoir maison n°12 : Première fois. Stabilité géométrique

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Problème 1 - Première fois.

Partie A : Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels.

Soit une fonction $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ possédant les propriétés :
(1) $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$
(2) Pour tout entier premier p, $\Delta(p) = 1$
(3) Pour tous entiers a et b : $\Delta(a \times b) = b\Delta(a) + a\Delta(b)$

1) Soit p un nombre premier, n un entier naturel. On cherche à prouver que $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, $\Delta(p^0) = \Delta(1) = 0$ d'après (1). Ce qui correspond à la formule.

Pour $n = 1$, $\Delta(p^1) = \Delta(p) = 1$ d'après (2). Or avec la formule on obtient $p^0 = 1$, ce qui est donc correct.

Hérédité :

On suppose que $\Delta(p^n) = np^{n-1}$, cherchons à prouver que $\Delta(p^{n+1}) = (n+1)p^n$.

$$\Delta(p^{n+1}) = \Delta(p \times p^n) = p^n\Delta(p) + p\Delta(p^n) = p^n + pnp^{n-1} = (n+1)p^n$$

Par principe de récurrence, $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.

---

2) a) Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. $\Delta(p^m \times q^n) = q^n\Delta(p^m) + p^m\Delta(q^n)$ D'après la question précédente, on a alors : $mq^np^{m-1} + np^mq^{n-1} = (p^{m-1}q^{n-1})(mq + np)$

b) $\Delta(10^n) = \Delta(2^n \times 5^n)$ Comme 2 et 5 sont premiers et distincts, n supérieur ou égal à 1, on a d'après la question précédente : $\Delta(2^n \times 5^n) = 7n(2^{n-1} \times 5^{n-1})$. $\Delta(10^n)$ est donc un multiple de 7 quand $n \geq 1$.

---

3) a) On cherche à montrer que si $n \geq 2$ alors $\Delta(n) = \alpha_1q_1 + \alpha_2q_2 + \ldots + \alpha_kq_k$ avec $q_{1\ldots k} = \frac{n}{p_{1\ldots k}}$.

Soit $n \geq 2$, On a donc, $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ avec $p_{1\ldots k}$ premier et $\alpha_{1\ldots k} \in \mathbb{N}^*$.

Initialisations :

On suppose que $k = 1$, que $n = p_1^{\alpha_1}$, alors $\Delta(n) = \alpha_1p_1^{\alpha_1-1}$ Or $q_1 = \frac{n}{p_1} = p_1^{\alpha_1-1}$.

Donc $\Delta(n) = \alpha_1 q_1$

On suppose que $k = 2$, que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, alors d'après 2)a), $\Delta(n) = p_2^{\alpha_2} \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} + p_1^{\alpha_1} \alpha_2 p_2^{\alpha_2 - 1} = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2})\left(\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2}\right) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$.

Hérédité :

On suppose que $\Delta(m) = \alpha_1' q_1' + \alpha_2' q_2' + \ldots + \alpha_k' q_k'$ pour m pouvant s'écrire $m = p_1'^{\alpha_1'} \times p_2'^{\alpha_2'} \times \ldots \times p_k'^{\alpha_k'}$.

On cherche à prouver que $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}$ pour n pouvant s'écrire sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k} \times p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$.

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \Delta(p_1^{\alpha_1})\left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}\right) + p_1^{\alpha_1}\Delta\left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}\right) \text{ d'après 2)a)} \\
&= \alpha_1\left(n\frac{p_1^{\alpha_1 - 1}}{p_1^{\alpha_1}}\right) + p_1^{\alpha_1}\Delta\left(\underbrace{p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k} \times p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}}_{\text{est un nombre comme } m}\right)
\end{aligned}$$

En faisant correspondre $m = \frac{n}{p_1^{\alpha_1}}$, $p_1' = p_2, \ldots, p_k' = p_{k+1}$ et $\alpha_1' = \alpha_2, \ldots, \alpha_k' = \alpha_{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \alpha_1 q_1 + p_1^{\alpha_1}\left(\alpha_2 \frac{m}{p_2} + \ldots + \alpha_k \frac{m}{p_k} + \alpha_{k+1}\frac{m}{p_{k+1}}\right) \\
&= \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}
\end{aligned}$$

Par principe de récurrence, nous avons prouvé que quelque soit $k \in \mathbb{N}^*$ et par conséquent quelque soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_k q_k$.

b) Vérifions que $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_k q_k$ satisfait les propriétés (2) et (3) :

(1) Pour p premier, $p = p^1$: $\Delta(p) = 1 \times \frac{p}{p} = 1$. Cela correspond bien à la propriété (1).

(2) Introduisons une notation alternative.

Soient $a, b, c \in \mathbb{N}$ tel que $c = a \times b$.

$$\begin{gathered}
\mathbb{I} = \{(p, \alpha) \in \mathbb{N}^{*2}, p \text{ premier}\} \text{ tel que} \\
\forall (p, \alpha) \in \mathbb{I}, \forall (p', \alpha') \in \mathbb{I}, p = p' \Rightarrow \alpha = \alpha'
\end{gathered}$$

On prend $\mathbb{I}$ tel que

$$c = \prod_{(p,\alpha) \in \mathbb{I}} p^\alpha$$

$$\begin{gathered}
\mathbb{A} = \{(p, \alpha) \in \mathbb{N}^{*2}, p \text{ premier}\} \\
\mathbb{B} = \{(p, \alpha) \in \mathbb{N}^{*2}, p \text{ premier}\}
\end{gathered}$$

avec les conditions suivantes :

$$\forall (p,\alpha) \in \mathbb{A}, \forall (p',\alpha') \in \mathbb{A}, p = p' \Rightarrow \alpha = \alpha'$$
$$\forall (p,\alpha) \in \mathbb{B}, \forall (p',\alpha') \in \mathbb{B}, p = p' \Rightarrow \alpha = \alpha'$$
$$(A) : \{p \in \mathbb{N} \mid (p,\_) \in \mathbb{A} \cup \mathbb{B}\} = \{p \in \mathbb{N} \mid (p,\_) \in \mathbb{I}\}$$
$$(B) : \forall (p,\alpha) \in \mathbb{I}, \forall (p_a,\alpha_a) \in \mathbb{A}, \forall (p_b,\alpha_b) \in \mathbb{B}, p = p_a = p_b \Rightarrow \alpha_a + \alpha_b = \alpha$$

$$a = \prod_{(p,\alpha)\in\mathbb{A}} p^\alpha$$
$$b = \prod_{(p,\alpha)\in\mathbb{B}} p^\alpha$$

Il est logique par association que :

$$\Delta(a) = \sum_{(p,\alpha)\in\mathbb{A}} \alpha\frac{a}{p} \qquad \Delta(b) = \sum_{(p,\alpha)\in\mathbb{B}} \alpha\frac{b}{p} \qquad \Delta(c) = \sum_{(p,\alpha)\in\mathbb{I}} \alpha\frac{c}{p}$$

$$\Delta(a) \times b + a \times \Delta(b)$$
$$= b\left(\sum_{(p,\alpha)\in\mathbb{A}} \alpha\frac{a}{p}\right) + a\left(\sum_{(p,\alpha)\in\mathbb{B}} \alpha\frac{b}{p}\right)$$
$$= c\left(\sum_{(p,\alpha)\in\mathbb{A}} \frac{\alpha}{p} + \sum_{(p,\alpha)\in\mathbb{B}} \frac{\alpha}{p}\right)$$

Nous savons avec (A) que l'union des p de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ donne bien tous les p de $\mathbb{I}$. De plus avec (B) nous savons pour les cas qui le demandent que la somme des α correspond au α de $\mathbb{I}$. Donc on obtient en developpant les sommes :

$$= c \sum_{(p,\alpha)\in\mathbb{I}} \frac{\alpha}{p} = \Delta(c)$$

(Je sais que cette partie n'a quasiment aucune chance de rester dans le DM final mais je me suis bien amusé)

Partie B : Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ.

---

4) a)

Calculons $\Delta(12)$. On a $12 = 2^2 \times 3$.

Donc d'après la formule, $\Delta(12) = 2\frac{12}{2} + \frac{12}{3} = 16$.

Calculons $\Delta(56)$. On a $56 = 2^3 \times 7$.

Donc d'après la formule, $\Delta(56) = 3\frac{56}{2} + \frac{56}{7} = 92$.

Calculons $\Delta(1001)$. On a $1001 = 7 \times 11 \times 13$.

Donc d'après la formule, $\Delta(1001) = \frac{1001}{7} + \frac{1001}{11} + \frac{1001}{13} = 311$.

Preuves générés automatiquement (le script est sur Github).[1][2]

b) Cherchons les solutions de $\Delta(x) = 0$ avec $x \in \mathbb{N}$.

Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors d'après (1), $\Delta(x) = 0$.

Si $x \geq 2$, $\Delta(x) = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_k q_k$. Or $\alpha_{1\ldots k} \in \mathbb{N}^*$ et $q_{1\ldots k} = \frac{x}{p_{1\ldots k}}$, comme $x, p_{1\ldots k} \in \mathbb{N}^*$ alors $q_{1..k} > 0$. Ainsi comme somme de nombres tous strictements positifs, $\Delta(x) > 0$.

Les seules solutions à $\forall x \in \mathbb{N}, \Delta(x) = 0$ sont $\{0, 1\}$.

Nous avons également prouvé que pour tout $x \geq 2$ alors $\Delta(x) > 0$.

c) Cherchons les solutions de $\Delta(x) = 1$ avec $x \in \mathbb{N}$.

Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors d'après (1), $\Delta(x) = 0$.

Si x est premier alors d'après (2), $\Delta(x) = 1$.

Si x n'est pas premier et différent de 0 et 1, alors on peut écrire x sous la forme $x = p \times b$ avec p premier et $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. En effet si $b = 0$ alors $x = 0$ et si $b = 1$ alors x est premier, ce qui n'est pas autorisé. D'après la question précédente, $\Delta(b) > 0$. On a donc :

$$\Delta(x) = \Delta(p \times b) = b\Delta(p) + p\Delta(b) = \underbrace{b}_{\geq 2} + \underbrace{p}_{\geq 2} \underbrace{\Delta(b)}_{>0}$$

Par addition d'un nombre supérieur ou égal à 2 avec un nombre strictement supérieur à 0, $\Delta(x) > 2$.

Les seules solutions à $\forall x \in \mathbb{N}, \Delta(x) = 1$ sont donc l'ensemble des nombres premiers.

d) Nous cherchons à prouver que 2 et 3 ne possèdent pas d'antécédent par Δ.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ ou $n = 1$ alors $\Delta(n) = 0$ et si n est premier alors $\Delta(n) = 1$. On considère donc tous les $n \geq 2$ et qui ne sont pas premier.

On peut alors réécrire n comme le produit de deux entiers naturels différents de 0 et 1 : $n = a \times b$. On a alors :

$$\Delta(n) = \Delta(a \times b) = \Delta(a) \times \underbrace{b}_{\geq 2} + \underbrace{a}_{\geq 2} \times \Delta(b)$$

Or nous avons prouvé précédement que les seules solutions à l'équation $\Delta(x) = 0$ sont 0 et 1. Comme a et b sont différents de 0 et 1 on a :

$$\Delta(n) = \underbrace{\Delta(a)}_{\geq 1} \times \underbrace{b}_{\geq 2} + \underbrace{a}_{\geq 2} \times \underbrace{\Delta(b)}_{\geq 1}$$

La valeur minimale de $\Delta(n)$ est donc 4 quand n est différent de 0 et 1 et n'est pas premier.

[1]Par exemple : Calculons $\Delta(987654321)$. On a $987654321 = 3^2 \times 17^2 \times 379721$. Donc d'après la formule, $\Delta(987654321) = 2\frac{987654321}{3} + 2\frac{987654321}{17} + \frac{987654321}{379721} = 774633441$.

[2](Pourquoi écrire les preuves à la main alors qu'on peut passer 5 fois plus de temps à coder le script qui le fait automatiquement ?)

Comme 0, 1 et les nombres premiers ne donnent ni 2 ni 3 par Δ nous avons prouvé que 2 et 3 ne possèdent pas d'antécédents par Δ.

Tout entier entier naturel n n'a donc pas au moins un antécédent par Δ.[3]

e) Calculons $\Delta(8)$. On a $8 = 2^3$.

Donc d'après la formule, $\Delta(8) = 3\frac{8}{2} = 12$.

Nous avons donc $\Delta(8) > 8$. La propriété $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta(n) \leq n$ est fausse.

---

5) a) Montrons que pour deux nombres p et q premiers, $\Delta(p \times q) = p + q$. D'après les propriétés (1) et (2) :

$$\Delta(p \times q) = q\Delta(p) + p\Delta(q) = p + q$$

b) On considère les entiers naturels 3 et 4.

Calculons $\Delta(12)$. On a $12 = 2^2 \times 3$. Donc d'après la formule, $\Delta(12) = 2\frac{12}{2} + \frac{12}{3} = 16$.

Or $3 + 4 = 7 \neq 16$. La propriété $\forall n, m \in \mathbb{N}, \Delta(n \times m) = n + m$ est donc fausse.

---

6) a) Considérons les nombres 2 et 3. Comme 2, 3 et $2 + 3 = 5$ sont premiers, on a :

$$\Delta(2 + 3) = 1 \neq \Delta(2) + \Delta(3) = 2$$

La propriété $\forall n, m \in \mathbb{N}, \Delta(n + m) = \Delta(n) + \Delta(m)$ est donc fausse.

b) Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la propriété (3) :

$$\begin{aligned}
\Delta(ka + kb) &= \Delta(k(a + b)) = \Delta(k)(a + b) + k\Delta(a + b) \\
&= \Delta(k)a + \Delta(k)b + k\Delta(a) + k\Delta(b) \\
&= (a\Delta(k) + k\Delta(a)) + (b\Delta(k) + k\Delta(b)) \\
\Delta(ka + kb) &= \Delta(ka) + \Delta(kb)
\end{aligned}$$

Partie C : Les points fixes de la fonction

---

7) a) Soit p un nombre premier. Soit m un entier naturel multiple de p^p. Soit n un entier naturel tel que $m = np^p$.

Considérons $\Delta(p^p)$, d'après la question 1), $\Delta(p^p) = pp^{p-1} = p^p$.

$$\Delta(m) = \Delta(np^p) = p^p\Delta(n) + n\Delta(p^p) = p^p(n + \Delta(n))$$

Nous avons prouvé que $\Delta(m)$ est un multiple de p^p.

b)

[3] Δ n'est pas surjective.

Problème 2 - Stabilité géométrique

Dans tout le problème, soit ε et q deux réels strictements positifs. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $x_0 > 0$ et pour tout entier naturel n, $0 \leq x_{n+1} - qx_n \leq \varepsilon$.

1) Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = x_{x+1} - qx_n$. Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $x_n = q^n x_0 + q^{n-1}b_0 + q^{n-2}b_1 + \ldots + qb_{n-2} + b_{n-1}$.

$$
\begin{aligned}
&q^n x_0 + q^{n-1}b_0 + q^{n-2}b_1 + \ldots + qb_{n-2} + b_{n-1} \\
&= q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k-1} b_k \\
&= q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k-1} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k} x_k \\
&\quad \text{en posant } l = k+1 \\
&= q^n x_0 + \sum_{l=1}^{n} q^{n-l} x_l - \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k} x_k \\
&= q^n x_0 + x_n - q^n x_0 + \underbrace{\sum_{l=1}^{n} q^{n-l} x_l - \sum_{k=1}^{n} q^{n-k} x_k}_{\text{s'annule}} \\
&= x_n
\end{aligned}
$$

Nous avons montré que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$x_n = q^n x_0 + q^{n-1}b_0 + q^{n-2}b_1 + \ldots + qb_{n-2} + b_{n-1}$$

---

2) On suppose que $0 < q < 1$.

a)