

# Devoir maison n°12 : Suites récurrentes d'ordre 2 non linéaires

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier  
TE1

## Partie A -

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

1)

a)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrons que  $u_n \geq 1$  :

D'une part,  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1$  sont clairement supérieurs ou égaux à 1. D'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $u_n \geq 1$  et  $u_{n+1} \geq 1$ . Alors, en utilisant la relation de récurrence, il vient :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} \geq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \geq 1$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ .

b)

Supposons que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $l \in \mathbb{R}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . En utilisant la relation de récurrence, on a :

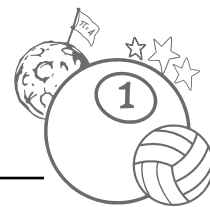
$$l = \sqrt{l} + \sqrt{l} = 2\sqrt{l} \text{ d'où } l = 4 \text{ ou } l = 0$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ . On en déduit que la seule limite possible de la suite  $u_n$  est  $l = 4$ .

c) Le script python suivant calcule la valeur de  $u_n$  suivant la valeur de  $n$  fournie.

```
def u(n):
    if n == 0 or n == 1:
        return 1
    i = 1
    a, b = 1, 1
    while i < n:
        i += 1
        c = a**0.5 + b**0.5
        b, a = c, b
    return c

print(u(50)) # u_50 = 3.999999998476622
```



2)

Considérons la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$ .

a)

Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  à partir duquel, pour tout  $n \geq N$  :

$$|v_n - 0| < \varepsilon \text{ soit } \left| \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \right| < \varepsilon \text{ soit } |\sqrt{u_n} - 2| < 2\varepsilon$$

Ainsi, en posant  $\delta = 2\varepsilon$ , pour tout  $n \geq N$ ,  $|\sqrt{u_n} - 2| < \delta$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = 2$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$  par continuité de la fonction  $x \rightarrow x^2$  et car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1 > 0$ .

b)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrons que  $v_{n+2} = \frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$  :

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})} = \frac{\frac{1}{2}u_{n+2} - 2}{2 + \sqrt{u_{n+2}}} = \frac{(\sqrt{u_{n+2}} + 2)(\sqrt{u_{n+2}} - 2)}{2(2 + \sqrt{u_{n+2}})} = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1 = v_{n+2}$$

c)

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|v_{n+2}| = |v_{n+1} + v_n| \frac{1}{2|2 + v_{n+2}|}$$

Or ,

$$u_{n+2} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{u_{n+2}} \geq 1 \Rightarrow 2(2 + v_{n+2}) \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{2|2 + v_{n+2}|} \leq \frac{1}{3}$$

On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|v_{n+2}| \leq |v_{n+1} + v_n| \frac{1}{3}$$

d)

Considérons la fonction  $f : x \mapsto x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$  continue sur  $[0, 1]$  car polynomiale.

Puisque  $f(0) = -\frac{1}{3} < 0$  et que  $f(1) = \frac{1}{3} > 0$ , alors d'après le TVI il existe un réel  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ , soit tel que  $\alpha^2 = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}$ .

e)

Posons  $\mu = \max(v_0, v_1) \in \mathbb{R}_+^*$ . Prouvons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'assertion  $P(n) : « |v_n| \leq \mu \times \alpha^n »$  est vraie par récurrence double.

Initialisation : De manière immédiate,  $v_0 \leq \mu$  et  $v_1 \leq \mu$ . Ainsi,  $P(0)$  et  $P(1)$  vraies.

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $P(n)$  et  $P(n+1)$  vraies.



Puisque  $|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_n| + |v_{n+1}|)$ , il vient :

$$|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(\mu \times \alpha^n + \mu \times \alpha^{n+1}) = \underbrace{\mu \times \alpha^n \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha \right)}_{=\alpha^2} = \mu \times \alpha^n \times \alpha^2 = \mu \times \alpha^{n+2}$$

On en déduit que  $P(n+2)$  vraie à son tour, et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|v_n| \leq \mu \times \alpha^n$ .

f)

Puisque  $|\alpha| < 1$  et que  $\mu$  est un réel fixé, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu \times \alpha^n) = 0$ .

De plus, comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $0 \leq |v_n| \leq \mu \times \alpha^n$ , alors par théorème d'encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

Ainsi, par le résultat de la question 2.a,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ .

## Partie B -

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}$$

1)

a)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrons que  $u_n \geq 1$  :

D'une part,  $u_0 = 1 \in [1, 2]$  et  $u_1 = 1 \in [1, 2]$ . D'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $u_n \in [1, 2]$  et  $u_{n+1} \in [1, 2]$ . Alors, en utilisant la relation de récurrence, il vient :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leq u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [1, 2]$ .

b)

Supposons que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $l \in \mathbb{R}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . En utilisant la relation de récurrence, on a :

$$l = \frac{1}{l} + \frac{1}{l} = \frac{2}{l} \text{ d'où } l = \sqrt{2} \text{ ou } l = -\sqrt{2}$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [1, 2]$ . On en déduit que la seule limite possible de la suite  $u_n$  est  $l = \sqrt{2}$ .

c)

Le script python suivant calcule la valeur de  $u_n$  suivant la valeur de  $n$  fournie.



```
def u(n):  
    if n == 0 or n == 1:  
        return 1  
    i = 1  
    a, b = 1, 1  
    while i < n:  
        i += 1  
        c = 1/a + 1/b  
        b, a = c, b  
    return c  
  
print(u(50)) # u_50 = 1.414213546982309
```

2)

Considérons la suite  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $\delta_n = u_n - \sqrt{2}$ .

a)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\delta_{n+1}}{\sqrt{2}u_{n+1}} + \frac{\delta_n}{\sqrt{2}u_n}\right) &= \frac{\sqrt{2} - u_{n+1}}{\sqrt{2}u_{n+1}} + \frac{\sqrt{2} - u_n}{\sqrt{2}u_n} = \frac{\sqrt{2}u_n - u_n u_{n+1} + \sqrt{2}u_{n+1} - u_n u_{n+1}}{\sqrt{2}u_n u_{n+1}} \\ &= \frac{u_n + u_{n+1} - \sqrt{2}u_n u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n + u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} - \sqrt{2} = \left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2}\right) = \delta_{n+2} \end{aligned}$$

Et d'autre part,

$$\begin{aligned} -\frac{\delta_n}{2u_n} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) + \frac{\delta_{n-1}}{2u_{n-1}u_{n+1}} &= \frac{1}{\sqrt{2}u_{n+1}} \underbrace{\left(\frac{\delta_n}{\sqrt{2}u_n} + \frac{\delta_{n-1}}{\sqrt{2}u_{n-1}}\right)}_{=-\delta_{n+1}} - \frac{\delta_n}{\sqrt{2}u_n} \\ &= -\left(\frac{\delta_{n+1}}{\sqrt{2}u_{n+1}} + \frac{\delta_n}{\sqrt{2}u_n}\right) = \delta_{n+2} \end{aligned}$$

Ce qui conclut.

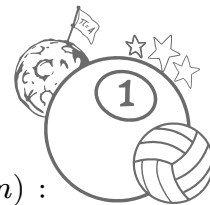
b)

c)

Considérons la fonction  $f : x \mapsto x^3 - \frac{2\sqrt{2}-1}{2}x - \frac{1}{2}$  continue sur  $[0, 1]$  car polynomiale.

Puisque  $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$  et que  $f(1) = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} > 0$ , alors d'après le TVI il existe un réel  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $f(\alpha) = 0$ , soit tel que  $\alpha^3 = \frac{2\sqrt{2}-1}{2}\alpha + \frac{1}{2}$ .

d)



Posons  $\mu = \max(\delta_0, \delta_1) = 1\} \in \mathbb{R}_+^*$ . Prouvons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'assertion  $P(n)$  : «  $|\delta_n| \leq \mu \times \alpha^n$  » est vraie par récurrence double.

Initialisation :

De manière immédiate,  $\delta_0 \leq \mu$  et  $\delta_1 \leq \mu$ . Ainsi,  $P(0)$  et  $P(1)$  vraies.

De plus,  $\delta_2 = 2 - \sqrt{2} \leq 1 = \mu$ , d'où  $P(2)$  vraie également.

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons  $P(n)$  et  $P(n-1)$  vraies.

Puisque  $|\delta_{n+2}| \leq \frac{2\sqrt{2}-1}{2} |\delta_n| + \frac{1}{2} |\delta_{n-1}|$ , il vient :

$$|\delta_{n+2}| \leq \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \mu \times \alpha^n + \frac{1}{2} \mu \times \alpha^{n-1} = \mu \times \alpha^{n-1} \underbrace{\left( \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \right)}_{=\alpha^3} = \mu \times \alpha^{n+2}$$

On en déduit que  $P(n+2)$  vraie à son tour, et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|\delta_n| \leq \mu \times \alpha^n$ .

e)

Puisque  $|\alpha| < 1$  et que  $\mu$  est un réel fixé, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\mu \times \alpha^n) = 0$ .

De plus, comme pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $0 \leq |\delta_n| \leq \mu \times \alpha^n$ , alors par théorème d'encadrement,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta_n = 0$ .

Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \sqrt{2}) = 0$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$ .

Fin du DM12 - J'ai perdu.