# Devoir maison n°7 : Autour de Farey

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

**Remarque :**
L'addition des cancres et les déterminants de fractions sont dépendantes de l'écriture des fractions : par la suite, on suppose donc par défaut que toutes les fractions sont irréductibles.

## Partie A - Somme des cancres dans $\mathbb{Q}_+$.

Soient $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{e}{f},$ avec $a, c, e \in \mathbb{N},$ et $b, d, f \in \mathbb{N}^*$.

**1)**

$$x \oplus x = \frac{a}{b} \oplus \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

Donc $x \oplus x = x$.

---

**2)**

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d} \quad \text{et} \quad y \oplus x = \frac{c+a}{d+b} = \frac{a+c}{b+d}$$

$x \oplus y = y \oplus x$ donc l'opération est commutative.

---

**3)** D'une part :

$$(x \oplus y) \oplus z = \left(\frac{a+c}{b+d}\right) \oplus \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Et d'autre part :

$$x \oplus (y \oplus z) = \frac{a}{b} \oplus \left(\frac{c+e}{d+f}\right) = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ donc l'opération est associative.

---

**4)** Raisonnons par contraposée : Montrons que $(x \geqslant x \oplus y \vee x \oplus y \geqslant y) \Longrightarrow x \geqslant y$.

- Supposons $x \geqslant x \oplus y$ :

$$\begin{aligned}
x \geqslant x \oplus y &\Longrightarrow \frac{a}{b} \geqslant \frac{a+c}{b+d} \\
&\Longrightarrow \frac{ab+ad-ab-bc}{b(b+d)} \geqslant 0 \\
&\Longrightarrow ad-bc \geqslant 0 \quad \text{car } b(b+d) \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow \frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d} \\
&\Longrightarrow x \geqslant y
\end{aligned}$$

- Supposons $x \oplus y \geqslant y$ :

$$\begin{aligned}
x \oplus y \geqslant y &\Longrightarrow \frac{a+c}{b+d} \geqslant \frac{c}{d} \\
&\Longrightarrow \frac{ad+cd-bc-cd}{d(b+d)} \geqslant 0 \\
&\Longrightarrow ad-bc \geqslant 0 \quad \text{car } d(b+d) \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow \frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d} \\
&\Longrightarrow x \geqslant y
\end{aligned}$$

Nous avons montré que $(x \geqslant x \oplus y \vee x \oplus y \geqslant y) \Longrightarrow x \geqslant y$, et donc, par contraposée, que $x < y \Longrightarrow x < x \oplus y < y$.

## Partie B - Déterminant de deux nombres de $\mathbb{Q}_+$.

Nous reprenons $x, y$ tels que dans la partie précédente.

**1)** Montrons que : $x = y \Longleftrightarrow \delta(x, y) = 0$.

- Supposons que $x = y$. Alors :

$$\begin{aligned}
\delta(x, y) &= \delta(x, x) \\
&= ab - ba \\
&= 0
\end{aligned}$$

- Supposons que $\delta(x, y) = 0$. Alors :

$$\begin{gathered}
ad - bc = 0 \\
ad = bc \\
\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\
x = y
\end{gathered}$$

Nous avons donc montré que $x = y \Longleftrightarrow \delta(x, y) = 0$.

**2)** D'une part :

$$\delta(y,x) = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

D'autre part :

$$-\delta(x,y) = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -ad + bc$$

Donc $\delta(y,x) = -\delta(x,y)$.

---

**3)**

$$\begin{aligned} x < y &\iff \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ &\iff ad < bc \quad \text{car } b,d > 0 \\ &\iff ad - bc < 0 \\ &\iff \delta(x,y) < 0 \\ &\iff \delta(x,y) \leqslant -1 \quad \text{car } \delta(x,y) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc $x < y \iff \delta(x,y) \leqslant -1$.

---

**4)** D'une part :

$$\begin{aligned} \delta(x, x \oplus y) &= \begin{vmatrix} a & a+c \\ b & b+d \end{vmatrix} \\ &= a(b+d) - b(a+c) \\ &= ab + ad - ab - bc \\ &= ad - bc \\ &= \delta(x,y) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \delta(x \oplus y, y) &= \begin{vmatrix} a+c & c \\ b+d & d \end{vmatrix} \\ &= d(a+c) - c(b+d) \\ &= ad + dc - cb - cd \\ &= ad - bc \\ &= \delta(x,y) \end{aligned}$$

Donc $\delta(x, x \oplus y) = \delta(x \oplus y, y) = \delta(x,y)$.

## Partie C - Ensembles de Farey.

**1)**

$$F_5 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{1}{1}\right\}$$

$$F_6 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{1}{1}\right\}$$

$$F_7 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{2}{7}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \frac{1}{2}; \frac{4}{7}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{5}{7}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{1}{1}\right\}$$

$$F_8 = \left\{\frac{0}{1}; \frac{1}{8}; \frac{1}{7}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{2}{7}; \frac{1}{3}; \frac{3}{8}; \frac{2}{5}; \frac{3}{7}; \frac{1}{2}; \frac{4}{7}; \frac{3}{5}; \frac{5}{8}; \frac{2}{3}; \frac{5}{7}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7}; \frac{7}{8}; \frac{1}{1}\right\}$$

~~Tapé à la main par nos soins.~~ Généré automatiquement par un algorithme qui est disponible dans le code du DM sur Github.

---

**2)** Si $\frac{m}{n} \in F_n$, alors $0 \leq m \leq n$ et $n \geq n - m \geq 0$. Donc $\frac{n-m}{n} \in F_n$.

Comme $n - (n - m) = m$, $\frac{m}{n} \in F_n$ si et seulement si $\frac{n-m}{n} \in F_n$, qui est son symétrique par rapport à leur moyenne $\frac{1}{2}$. Ce centre de symétrie ne dépend pas de $m$ : on en conclut donc que $\frac{1}{2}$ est le centre de $F_n$ pour $n \geq 2$.

---

### 3) Pas trouvé :/

---

**4)** Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion suivante : Si $x < y$ sont deux fractions consécutives de $F_n$, alors :

- $\delta(x, y) = -1$
- La première fraction qui apparaît dans un $F_m, m > n$ est $x \oplus y$

Il s'agit de prouver par récurrence $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**a) Initialisation :** Les seules fractions de $F_1$ sont $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$. On a bien $\delta\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right) = -1$ et la première fraction qui apparaît entre elles dans un $F_m$ suivant est $\frac{1}{2}$ dans $F_2$ : or, $\frac{1}{2} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1}$. Donc $P(1)$ est vraie.

**b) Hérédité :** On suppose par la suite $P(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et on prouve $P(n+1)$.

On pose $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles et consécutives dans $F_{n+1}$. Par **C.3**, on sait que $x \in F_n$ ou $y \in F_n$.

**1^er^ cas :** $x \in F_n$ et $y \in F_n$.

Comme $x$ et $y$ sont consécutives dans $F_{n+1}$, alors elles le sont aussi dans $F_n$, car $F_n \subseteq F_{n+1}$. Alors par l'hypothèse de récurrence, $\delta(x, y) = -1$. De plus, la première fraction qui apparaît entre $x$ et $y$ est $x \oplus y$ dans $F_m, m > n$. Mais $x$ et $y$ sont consécutives dans $F_{n+1}$, donc $m > n + 1$. Ainsi, dans ce cas, $P(n+1)$ est vérifiée.

**2^e^ cas :** $x \in F_n$ et $y \in F_{n+1} \setminus F_n$. Posons $z \in F_n$ la fraction successive de $x$ dans $F_n$.

Par hypothèse de récurrence, comme $y$ doit être la première fraction à s'être intercalée entre $x$ et $y$, on doit avoir $y = x \oplus z$. De plus, on a $\delta(x, z) = -1$. On a donc

$$\delta(x, y) = \delta(x, x \oplus z) = \delta(x, z) = -1$$

Ce qui valide la première condition de $P(n+1)$.

Posons maintenant $t = \frac{r}{s}$ la première fraction irréductible à apparaître entre $x$ et $y$ dans un $F_m$ pour $m > n + 1$.

D'abord, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \delta(t, x) \geq 1 \\ \delta(y, t) \geq 1 \end{cases} &\overset{\mathbf{B.2}}{\iff} \begin{cases} \delta(x, t) \leq -1 \\ \delta(t, y) \leq -1 \end{cases} \\ &\overset{\mathbf{B.3}}{\iff} x < t < y \end{aligned}$$

Comme $t$ s'intercale entre $x$ et $y$, $\delta(t, x)$ et $\delta(y, t)$ sont bien supérieurs ou égaux à 1.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} a\delta(y, t) + c\delta(t, x) &= a(cs - dr) + c(br - as) \\ &= acs - acs + rbc - rad \\ &= r(bc - ad) \\ &= -r\delta(x, y) \\ &= r \end{aligned}$$

Similairement, on a :

$$
\begin{aligned}
b\delta(y,t) + d\delta(t,x) &= b(cs - dr) + d(br - as) \\
&= bdr - bdr + sbc - sad \\
&= s(bc - ad) \\
&= -s\delta(x,y) \\
&= s
\end{aligned}
$$

Si $\delta(t,x) \neq 1$ ou $\delta(t,y) \neq 1$, alors la fraction $t' = x \oplus y$ a un dénominateur $s' = b + d < s$. De plus, comme $\delta(x,y) = -1$, $t'$ est irréductible. Donc $t'$ s'intercale entre $x$ et $y$ strictement avant $t$, ce qui contredit la minimalité de $t$. Donc $\delta(x,t) = \delta(y,t) = 1$, et $t = x \oplus y$, ce qui conclut la preuve de la deuxième condition de $P(n+1)$ dans ce cas.

**3e et dernier cas :** $x \in F_{n+1} \setminus F_n$ et $y \in F_n$.

D'une part, posons $z \in F_n$ la fraction précédant $y$ dans $F_n$ (qui existe bien car $y > 0$). Par $P(n)$, $x = z \oplus y$. Donc $\delta(x,y) = \delta(y \oplus z, y) = \delta(z,y) = -1$, où la dernière égalité vient de $P(n)$.

D'autre part, $F_{n+1}$ est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$. On pose donc $x' = \frac{b-a}{b}$ et $y' = \frac{d-c}{d}$. Alors $y' \in F_n$ et $x' \in F_{n+1} \setminus F_n$ sont consécutives dans $F_{n+1}$. La première fraction à apparaître entre $y'$ et $x'$ dans un $F_m, m > n+1$ est :

$$y' \oplus x' = \frac{b + d - (a + c)}{b + d}$$

Qui est le symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$ de $\frac{a+c}{b+d} = x \oplus y$. Comme $y' \oplus x'$ est la première fraction à apparaître entre $y'$ et $x'$, par symétrie, $x \oplus y$ est nécessairement également la première à apparaître entre $x$ et $y$, ce qui conclut ce cas.

Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

# Partie D - Cercles de Ford.

## 1) Tangents à l'axe des abscisses.

Prouvons que tout cercle de Ford est tangent à l'axe des abscisses. Soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible. Son cercle de Ford associé est de centre $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2b^2}$. Comme le rayon du cercle et son ordonnée sont égaux, tout cercle Ford est bien tangent à l'axe des abscisses.

---

## 2) Tangents entre eux quand consécutifs.

Nous allons raisonner par équivalence dans un repère orthonormé.

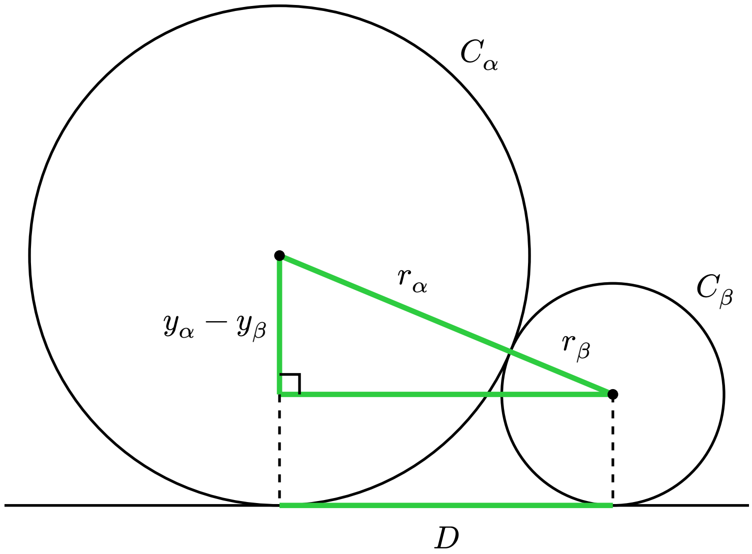
Soient $\alpha$ et $\beta$ deux fractions consécutives de $F_n$ tel que

$$\alpha = \frac{m}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n}{b}$$

avec $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha < \beta$.

D’après la propriété ci-dessus, les deux cercles de Ford $C_\alpha$ et $C_\beta$ associés à $\alpha$ et $\beta$, de rayon respectif $r_\alpha$ et $r_\beta$, sont tangents à l’axe des abscisses. Les ordonnées $y_\alpha$ et $y_\beta$ des centres de $C_\alpha$ et $C_\beta$ est donc fixée, seules leurs abscisses $x_\alpha$ et $x_\beta$ pourraient encore varier. La distance entre elles est notée $D$ et comme $\alpha < \beta$, $D = x_\beta - x_\alpha$.

Soit le triangle vert tel que son hypothénuse relie les centres de $C_\alpha$ et $C_\beta$, et que ses côtés soient respectivement parallèle à l’abscisse et à l’ordonnée. Le triangle vert est donc un triangle rectangle.




Deux cercles sont tangents ssi il existe un unique point appartenant aux deux cercles, ssi la distance entre les deux centres est égale à la somme des deux rayons. L’hypothénuse du triangle rectangle vert relie justement les centres de $C_\alpha$ et $C_\beta$. Nous pouvons vérifier si l’hypothénuse mesure bien la somme des deux rayons en déterminant si le triangle ainsi formé est bien rectangle.

$C_\alpha$ et $C_\beta$ sont tangents ssi

$$
\begin{aligned}
& & D^2 &= (r_\alpha + r_\beta)^2 - (y_\alpha - y_\beta)^2 \\
&\iff & D^2 &= \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2}\right)^2 \\
&\iff & D^2 &= \left(2\left(\frac{1}{2a^2}\right)\right)\left(2\left(\frac{1}{2b^2}\right)\right) \\
&\iff & D^2 &= \left(\frac{1}{ab}\right)^2 \qquad \text{Or } D > 0 \text{ et } a, b \in \mathbb{N}^* \\
&\iff & D &= \frac{1}{ab} \\
&\iff & \frac{n}{b} - \frac{m}{a} &= \frac{1}{ab} \qquad \text{car } \alpha < \beta \\
&\iff & \frac{an - mb - 1}{ab} &= 0 \\
&\iff & mb - an &= -1 \\
&\iff & \delta(\alpha, \beta) &= -1
\end{aligned}
$$

Or $\delta(\alpha, \beta)$ est bien égal à −1 car $\alpha$ et $\beta$ sont consécutives dans $F_n$. Par équivalence, $C_\alpha$ et $C_\beta$ sont tangeants.

Nous avons prouvé que les cercles Ford associés à deux fractions consécutives de $F_n$ sont tangeants entre eux.

Accessoirement nous avons aussi prouvé que deux cercles tangents entre eux et à l'abscisse sont des cercles de Ford associés à deux fractions consécutives de $F_n$.

## Partie E - Approximation

### 1) a) Encadrement du nombre $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$

| Etape | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Valeur par défaut** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{12}{17}$ |
| **Valeur par excès** | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{5}{7}$ |

Nous sommes paresseux donc ce tableau et les suivants sont bien entendu générés automatiquement par un algorithme de notre création fonctionnant pour n'importe quel nombre entre 0 et 1. Il est disponible dans le DM sur Github.

#### b) Meilleur encadrement

En poursuivant la méthode utilisée dans le tableau ci-dessus, nous pouvons obtenir un encadrement de $\alpha$ sur un dénominateur allant jusqu'à 100 :

| Etape | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Valeur par défaut** | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{12}{17}$ | $\frac{12}{17}$ | $\frac{12}{17}$ | $\frac{41}{58}$ | $\frac{70}{99}$ |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Valeur par excès** | $\frac{1}{1}$ | $\frac{1}{1}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{5}{7}$ | $\frac{17}{24}$ | $\frac{29}{41}$ | $\frac{29}{41}$ | $\frac{29}{41}$ |

## 2) Pas trouvé :/