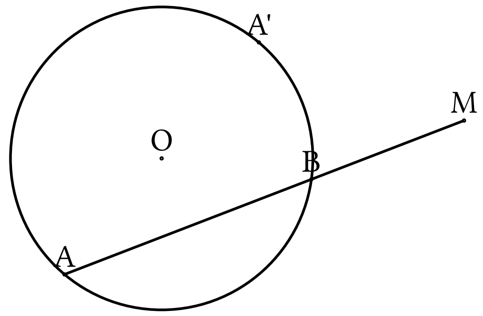
Devoir maison n°14 : Puissance d'un point par rapport à un cercle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Problème 1 -

Partie A - Définition



1) **a)** Comme $[AA']$ forme un diamètre de Γ, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B}$ sont orthogonaux. Comme $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{A'B}$ et :

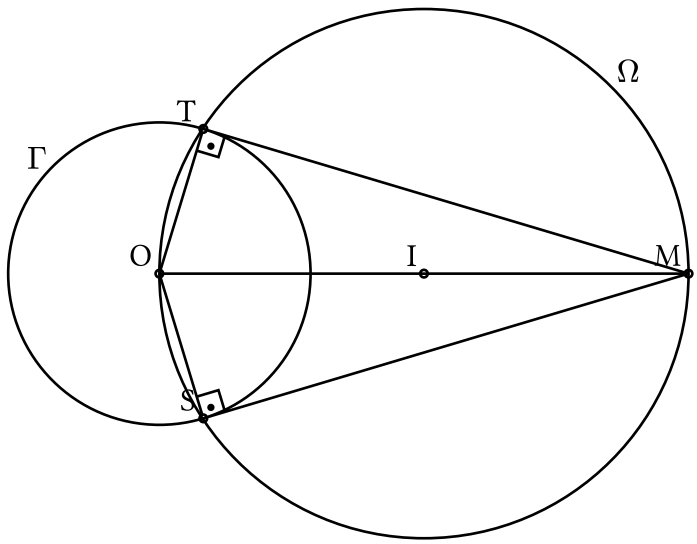
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{A'B} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}\end{aligned}$$

b) Comme $[AA']$ est un diamètre de Γ, en appliquant la formule de la médiane,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = OM^2 - R^2$$

---

2) **a)** On peut tracer I le milieu de $[OM]$ (faisable au compas et à la règle) et tracer le cercle Ω de centre I qui passe par O. Alors, si T, S sont les points d'intersection de Ω et Γ, alors $T, S \in \Gamma$ et le triangle OTM (respectivement OSM) est rectangle en T (respectivement S) car $[OM]$ forme un diamètre de Ω : T, S sont donc les points de contact des tangentes à Γ passant par M.



b) Notons H l'un des points T ou S : la preuve est la même pour les deux. Par définition des tangentes, le triangle MHO est rectangle en H, et par Pythagore :

$$\begin{aligned} MH^2 + OH^2 &= OM^2 \\ \Longleftrightarrow P_\Gamma(M) = OM^2 - OH^2 &= MH^2 \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'égalité.

---

3)
- $\mathcal{E}_1$: Pour un point M n'appartenant pas à Γ, $OM \neq R$ et $OM^2 \neq R^2$, d'où $P_\Gamma(M) \neq 0$. Donc $\mathcal{E}_1 = \emptyset$. (Alternativement, en étendant la définition de P_Γ, $\mathcal{E}_1 = \Gamma$)
- $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$: Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \Gamma$. Alors :

$$\begin{aligned} P_\Gamma(M) < 0 &\Leftrightarrow OM^2 < R^2 \\ &\Leftrightarrow OM < R \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{E}_2$ est l'intérieur de Γ et $\mathcal{E}_3$ est l'extérieur de Γ.

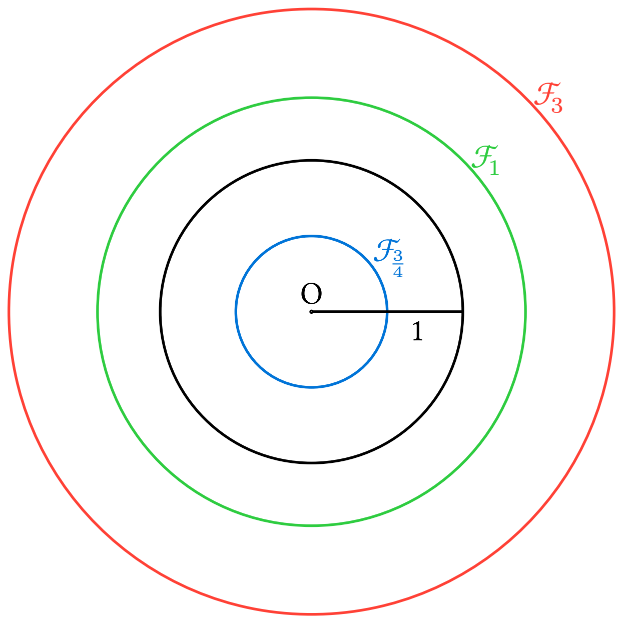
---

4) **a)** C'est un cercle (montrer que comme P_Γ est cste, OM est constant)

$$M \in \mathcal{F}_k \Longleftrightarrow OM^2 = R^2 + k$$

Comme R et k sont des constantes, $\mathcal{F}_k$ est l'ensemble des points à une certaine distance du centre O. Ainsi :
- Si $k \geq -R^2$, $\mathcal{F}_k$ est un cercle de centre O et de rayon $\sqrt{R^2 + k}$
- Si $k < -R^2$, $\mathcal{F}_k = \emptyset$

b)



Partie B - Critère de cocyclicité

1) Notons Γ le cercle tel que $A, B, C, D \in \Gamma$. Comme A, B, C, D sont disticts, M n'appartient pas à Γ. Ainsi, le résultat du 1)b) d'unicité de la puissance d'un point s'applique et comme $[AB]$ et $[CD]$ sont des cordes de Γ :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = P_\Gamma(M) = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$$

Ce qui donne l'égalité cherchée.

---

2) Supposons que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$$

Par définition, $D, E \in (MC)$. On a donc dans un premier temps $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{MC}$ colinéaires. De plus, comme A, B, C, E sont sur un même cercle Γ, par unicité de la puissance d'un point, on obtient :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = P_\Gamma(M) = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{ME}$$

En faisant la différence des deux expressions de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MC} \cdot \left(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MD}\right) &= \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DE} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{MC}$. Comme $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont à la fois perpendiculaires et colinéaires, et que $\overrightarrow{MC} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{0}$ et $E = D$. Donc A, B, C, D sont bien cocycliques.

---

3) Notons Γ le cercle circonscrit à ABT et O son centre. Soit $M \in (AB)$. Comme $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = P_\Gamma(M) = OM^2 - R^2$, on trouve que :

$$OM^2 - R^2 = MT^2 \iff OM^2 = OT^2 + MT^2$$

Par le théorème de Pythagore, le triangle OTM est rectangle en T et (MT) est bien tangente à Γ

Partie C - Quelques applications

1) Notons I le milieu de $[AB]$. Donc $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$. Calculons $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DB}$ pour montrer que $(IM) \perp (BD)$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{MB} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DM} + \underbrace{(AM) \cdot \overrightarrow{DM}}_{=0} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB} + \underbrace{(AM) \cdot \overrightarrow{MB}}_{=0} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \left(\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MB}\right) \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DM} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc $(IM) \perp (DB)$: comme $M \in (IM)$, (IM) est bien la hauteur issue de M dans MDB.

---

2) **a)**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KH}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}\right) \\
&= \underbrace{\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AK}}_{=0} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{AK} + \underbrace{\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{KC}}_{=0} \\
&= \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{AK}
\end{aligned}$$

De plus, $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{KC} = -\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{KC} = -P_\Gamma(K)$

Et $\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KA_1} \cdot \overrightarrow{KA} = P_\Gamma(K)$

Donc $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, et H appartient à la hauteur issue de B.

b) Ce calcul est indépendant de l'ordre des sommets : ainsi, en permutant les sommets, on trouve que H appartient aux hauteurs issues de A, B et C : H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

---

3) <u>Lemme (Axe radical) :</u> Si Γ et Ω sont deux cercles différents d'intersection T et S <u>distincts</u>, alors le lieu des points $\Pi = \{M \mid P_\Gamma(M) = P_\Omega(M)\}$ est la droite (TS).

<u>Preuve :</u> D'une part, si $M \in (TS)$, comme $[TS]$ est une corde de Γ et de Ω, alors :

$$P_\Gamma(M) = \overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{MS} = P_\Omega(M)$$

Donc $M \in \Pi$.

D'autre part, soit $M \in \Pi$. Comme $P_\Gamma(T) = 0 = P_\Omega(T)$ et idem pour S, alors $T, S \in \Pi$ et on peut supposer $M \neq T, S$.

Tout d'abord, la droite (MT) n'est pas tangente aux cercles Γ ou Ω : si c'était le cas (sans perte de généralité, pour Γ) alors $P_\Gamma(M) = MT^2 = P_\Omega(M)$: Donc (MT) serait tangente aux deux cercles en même temps, ce qui est une contradiction car $T \in \Gamma, \Omega$.

Ainsi, on peut noter R l'intersection de (MT) et Γ différente de T et R' l'intersection de (MT) et Ω différente de T. On a donc :

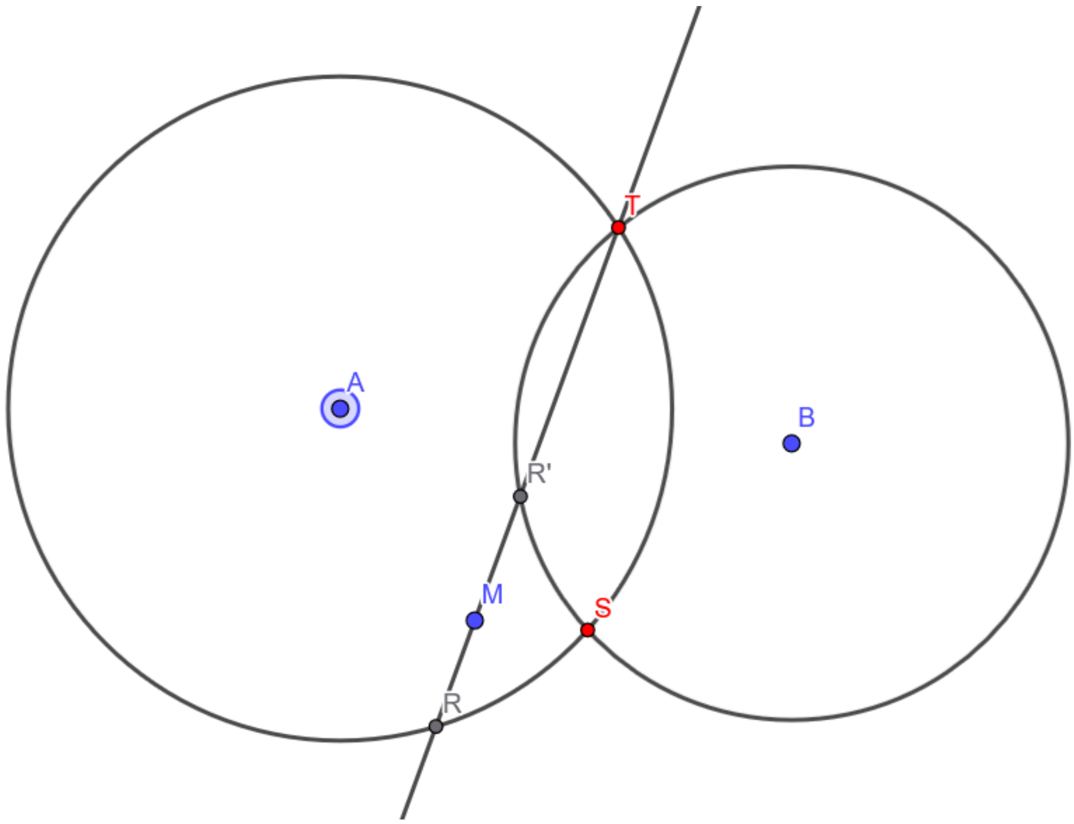
$$P_\Gamma(M) = \overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{MT} = P_\Omega(M) = \overrightarrow{MR}' \cdot \overrightarrow{MT}$$

En faisant la différence des équations, on trouve :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MT} \cdot \left(\overrightarrow{MR'} - \overrightarrow{MR}\right) &= -\overrightarrow{MT} \cdot \left(\overrightarrow{RM} - \overrightarrow{R'M}\right) \\ &= -\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{RR'} = 0 \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{MT} \perp \overrightarrow{RR'}$. Mais $\overrightarrow{RR'} // \overrightarrow{MT}$, et on trouve donc que $R = R'$.

Ainsi, (MT) intersecte Γ et Ω en un même point, qui ne peut que être S. Donc $S \in (MT)$ et $M \in (TS)$, ce qu'il fallait démontrer.



Notons maintenant M l'intersection des deux perpendiculaires de l'énoncé. M est l'intersection de deux hauteurs du triangle ABC : c'est donc son orthocentre, qui est de plus dans le triangle car celui-ci n'a que des angles aigus (source: Wikipedia).

Notons Γ le cercle de diamètre $[AB]$ et Ω le cercle de diamètre $[AC]$. Ceux-ci sont sécants en A, et comme l'angle $\widehat{BAC}$ ne peut être plat, en un second point A'. Comme $A' \in \Gamma$, le triangle $AA'B$ est rectangle en A', et A' est donc la base de la hauteur issue de A. Comme M est l'orthocentre de ABC, on a donc enfin que $M \in (AA')$.

Par le lemme précédent, M est donc sur l'axe radical des cercles Γ et Ω : Ainsi, on trouve que :

$$P_\Gamma(M) = \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = P_\Omega(M) = \overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{MS}$$

Donc $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MR} \cdot \overrightarrow{MS}$, et P, Q, R, S sont cocycliques par le B)2), ce qu'il fallait démontrer.