

Devoir maison n°5 : Existence de la fonction exponentielle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Inégalité de Bernoulli

Soit $\alpha > -1$. On prouve l'inégalité de Bernoulli par récurrence sur n .

Initialisation : $(1 + \alpha)^0 = 1 \geqslant 1 + 0 \cdot \alpha = 1$. (On remarque que la convention $0^0 = 1$ n'est pas nécessaire car $\alpha \neq -1$)

Hérité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $(1 + \alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$. Alors :

$$\begin{aligned}(1 + \alpha)^{n+1} &\geqslant (1 + \alpha)(1 + n\alpha) = 1 + \alpha + n\alpha + n\alpha^2 \\ &\geqslant 1 + (n + 1)\alpha \quad \text{car } n \geqslant 0 \text{ et } \alpha^2 \geqslant 0\end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, l'inégalité de Bernoulli est bien vraie pour tout $\alpha > -1$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie B - Convergence de deux suites

1) a) On calcule :

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right) &= \left(\frac{n+x}{n}\right)\left(\frac{(n+1)(n+x)-x}{(n+1)(n+x)}\right) \\ &= \frac{n(n+x)+n}{n(n+1)} \\ &= \frac{n+x+1}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}u_{n+1}(x) &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

b) Pour tout x fixé, la suite $\left(-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 par quotient, car $n+a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Par définition de la convergence, il existe donc un rang n_0 pour lequel, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on a pour tout $n \geqslant n_0$ que :

$$-1 < -\frac{1}{2} < -\frac{x}{(n+1)(n+x)} < \frac{1}{2}$$



Similairement, $1 + \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ et on obtient un rang n_1 de la même manière.

c) Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Ainsi, pour tout $n \geq n_2$, $n \geq n_0$ permet d'appliquer l'inégalité de Bernoulli à $\left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$ et $n \geq n_1$ permet d'avoir $n+x \neq 0$. On a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &\stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) \\ &\geq u_n(x) \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) = u_n(x) \frac{n+x}{n} \frac{n}{n+x} \\ &\geq u_n(x) \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante au moins à partir du rang n_2 .

2) On remarque que $w_n(x) = u_n(-x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or, la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang pour tout $a \in \mathbb{R}$. Donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang.

De plus, w_n n'est nul que pour au plus un rang, et est non nul pour tous les autres termes. On a donc $v_n = w_n^{-1}$ au moins à partir d'un certain rang, et, par croissance de (w_n) et décroissance de la fonction inverse, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

3) a) Soit $n > |x|$. Alors $v_n \neq 0$ et :

$$\frac{u_n}{v_n} = \left(\frac{1 + \frac{x}{n}}{(1 - \frac{x}{n})^{-1}} \right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right)^n$$

Or, $\frac{x^2}{n^2} < 1$. Donc $1 \geq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}}$, et on peut également appliquer l'inégalité de Bernoulli pour obtenir :

$$\frac{u_n}{v_n} \geq 1 - \frac{x^2}{n}$$

b) On obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{x^2}{n} \geq \frac{v_n - u_n}{v_n} \geq 0$$

Or, la suite (v_n) est strictement positive à partir d'un certain rang N et décroissante à partir d'un certain rang M . Ainsi, pour tout $n \geq k := \max(N, M, \lfloor |x| \rfloor + 1) > |x|$, on a :

$$v_k \frac{x^2}{n} \geq v_n \frac{x^2}{n} \geq v_n - u_n \geq 0$$

c) Comme x^2 et $v_k(x)$ sont fixés, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_k \frac{x^2}{n} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) - u_n(x) = 0$$

¹On note temporairement $u_n = u_n(x)$ et $v_n = v_n(x)$, tant que x est fixé.



Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes, en compilant les résultats du 1)c), du 2), et du 3)b). Ces deux suites admettent donc une limite finie commune.

Partie C - Existence

1) La suite $(u_n(0))$ est constante, égale à 1 et tend donc vers 1. Donc $f(0) = 1$.

2) a) On a :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{h}{n+x}\right) &= \frac{n+x}{n} \cdot \frac{n+x+h}{n+x} \\ &= \frac{n+x+h}{n} = \left(1 + \frac{x+h}{n}\right) \end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée en passant à la puissance n .

b) Soient $|h| < 1$ et $n > |x| + 1$. On a donc $n+x \geq 1$ et $\left|\frac{h}{n+x}\right| < 1$, et l'inégalité de Bernoulli s'applique car on a au moins $\frac{h}{n+x} > -1$. On a :

$$\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{nh}{n+x}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}}\right)$$

c) En passant à la limite l'inégalité précédente, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{n} = 1$, pour tout $|h| < 1$:

$$f(x+h) \geq f(x)(1+h)$$

En particulier, $-h < 1$ quand $|h| < 1$ et en appliquant l'inégalité précédente à $x \leftarrow x + h$:

$$f(x+h-h) = f(x) \geq f(x+h)(1-h) \iff \frac{f(x)}{1-h} \geq f(x+h)$$

d) Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $|h| < 1$ non nul. On a donc les inégalités suivantes :

$$f(x)(1+h) \leq f(x+h) \leq \frac{f(x)}{1-h} \iff hf(x) \leq f(x+h) - f(x) \leq \frac{hf(x)}{1-h}$$

Ainsi, en fonction du signe de h :

$$f(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h} \text{ ou } f(x) \geq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \frac{f(x)}{1-h}$$

e) En passant à la limite l'inégalité quand $h \rightarrow 0$, on obtient par le théorème d'encadrement que :

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x et $f'(x) = f(x)$. Donc la fonction f satisfait bien l'équation différentielle définissant la fonction exponentielle.