Devoir maison n°1 : Fonctions contractantes, dilatantes et points fixes

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Problème 1 -

Partie A - Fonctions contractantes et rétrécissantes.

1) Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$, et f une fonction k-lipschitzienne définie sur I. Montrons que cette fonction est continue.

Soit y dans I. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$. Supposons $|x - y| < \alpha$, on obtient :

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{k} \iff k|x - y| < \varepsilon$$

Comme f est lipschitzienne, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| < \varepsilon$ donc $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Nous avons prouvé que quelque soit le point y que l'on choisit dans le domaine de définition de f, $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ie toute fonction lipschitzienne est continue.

---

2) Soit f une fonction contractante définie sur I, et $x, y \in I$. Il existe donc $k \in]0, 1[$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \quad (*)$.

Or,

$$\begin{aligned} k < 1 &\Longrightarrow k|x - y| < |x - y| \\ &\Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y| \text{ d'après } (*) \end{aligned}$$

f est donc rétrécissante.

De plus,

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1 \times |x - y|$$

f est donc 1-lipschitzienne.

---

3) Soient $a \in \mathbb{R}$, $I = [a, +\infty[$, et $f : x \longmapsto x + \frac{1}{x-a+1}$ pour tous $x \in I$.

a) f est dérivable sur I. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-a+1)^2}$. Or,

$$\begin{aligned}
x \in I &\Longrightarrow x \geqslant a \\
&\Longrightarrow x - a \geqslant 0 \\
&\Longrightarrow x - a + 1 \geqslant 1 \\
&\Longrightarrow (x - a + 1)^2 \geqslant 1 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{(x-a+1)^2} \leqslant 1 \\
&\Longrightarrow 0 \leqslant f'(x).
\end{aligned}$$

La dérivée de f est positive pour tout $x \in I$, donc f est bien croissante sur I.

Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned}
x \in I &\Longrightarrow x \geqslant a \\
&\Longrightarrow x - a \geqslant 0 \\
&\Longrightarrow x - a + 1 > 0 \\
&\Longrightarrow \frac{1}{x-a+1} > 0.
\end{aligned}$$

$x \geqslant a$, donc par somme d'inégalités, $x + \frac{1}{x-a+1} \geqslant a$ i.e. $f(x) \in I$.

b) Cherchons désormais à montrer que f est rétrécissante. Soient $x, y \in I$ tel que $x \neq y$. On suppose sans perte de généralité que $x < y$ et comme f est croissante sur I

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| < |x - y| &\Leftrightarrow f(y) - f(x) < y - x \\
&\Leftrightarrow y - x + \frac{1}{y-a+1} - \frac{1}{x-a+1} < y - x \\
&\Leftrightarrow y - a + 1 > x - a + 1 \\
&\Leftrightarrow x < y
\end{aligned}$$

Nous avons prouvé que f est rétrécissante.

c) Démontrons par l'absurde que f n'est pas contractante. On suppose f contractante ie f est k-lipschitzienne avec $k \in]0, 1[$.

On choisit deux réels $a + t$ et $a + t + 1$ dans $I = [a, +\infty[$ avec $t \in \mathbb{R}$. f doit vérifier en particulier :

$$\begin{aligned}
&|f(a+t+1) - f(a+t)| \leqslant k|a+t+1-a-t| \\
\Leftrightarrow &\left| \frac{(a+t+1-a-t)\Big((a+t+1-a+1)(a+t-a+1) - 1\Big)}{(a+t+1-a+1)(a+t-a+1)} \right| \leqslant k \\
\Leftrightarrow &\left| \frac{(1)\Big((t+1)(t+2) - 1\Big)}{(t+1)(t+2)} \right| \leqslant k \\
\Leftrightarrow &\left| 1 - \frac{1}{(t+1)(t+2)} \right| \leqslant k
\end{aligned}$$

Or $\lim_{t\to+\infty}(t+1)(t+2) = +\infty$ donc $\lim_{t\to+\infty}\left|1 - \frac{1}{(t+1)(t+2)}\right| = 1$.

On en conclue que $|f(a+t+1) - f(a+t)|$ tendant vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$, il n'est pas possible de majorer cette expression dans tous les cas possibles par un réel k compris dans $]0,1[$. Nous arrivons à une contradiction, f n'est donc pas contractante.

---

4) Soit la fonction $f \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x+\frac{1}{x} & \text{si } x>1 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{R}$.

a) On cherche à prouver que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

- Sur l'intervalle $]-\infty, 1]$, f est constante.
- Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, f est dérivable comme somme de fonctions dérivables.

On a alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$x > 1 \Longleftrightarrow x^2 > 1 \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2} < 1 \Longleftrightarrow -\frac{1}{x^2} > -1 \Longleftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \Longleftrightarrow f'(x) > 0$$

f est croissante sur $]1, +\infty[$

- Prouvons que f est continue en 1.

$$f(1) = 2 \qquad \lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x + \frac{1}{x} = 2$$

Comme $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$, f est continue en 1.

Comme f est continue en 1, elle ne peut pas faire un saut au niveau de la disjonction des cas. Or à gauche de 1 f est constante et croissante à droite. On en conclue que f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Cherchons à prouver que f est rétrécissante. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$. Dans la définition d'une fonction rétrécissante, x et y sont interchangeables, on suppose donc sans perte de généralité que $x < y$.

- Si $x < y \leqslant 1$,

$$|f(x) - f(y)| < |x-y| \Leftrightarrow |2-2| < |x-y| \Leftrightarrow 0 < |x-y|$$

Ce qui est toujours vrai puisque $x \neq y$.

- Si $x \leqslant 1 < y$,

$$x \leqslant 1 \Leftrightarrow y - 1 \leqslant y - x \Leftrightarrow (y-1)^2 \leqslant (y-1)(y-x)$$

car $y - 1 > 0$. Comme $(y-1)^2 \leqslant (y-1)(y-x)$, alors $(y-1)^2 < y(y-x)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(y-1)^2 < y(y-x) &\Leftrightarrow \left|-\frac{(y-1)^2}{y}\right| &< |x-y| \\
&\Leftrightarrow \left|2 - \left(y + \frac{1}{y}\right)\right| &< |x-y| \\
&\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| &< |x-y|
\end{aligned}$$

- Si $1 < x < y$,

$$|f(x)-f(y)| < |x-y| \Leftrightarrow \left|(x-y)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right| < y-x$$
$$\Leftrightarrow \left|(y-x)+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\right| < y-x$$

Or $y-x>0$ et par croissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$, $x<y \Leftrightarrow \frac{1}{x}<\frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{y}-\frac{1}{x}>0$. L'intérieur de la valeur absolue est donc positif soit :

$$\left|(y-x)+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)\right| < y-x \Leftrightarrow (y-x)+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right) < y-x$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{y}<\frac{1}{x}$$
$$\Leftrightarrow x<y$$

Nous avons prouvé dans les trois cas distincts que f est rétrécissante.

c) Démontrons par l'absurde que f n'est pas contractante. On suppose f contractante ie f est k-lipschitzienne avec $k \in]0,1[$.

On choisit le réel t et son successeur $t+1$. f doit vérifier en particulier :

$$|f(t+1)-f(t)| \leqslant k|t+1-t| \Leftrightarrow |f(t+1)-f(t)| \leqslant k$$

En particulier, on pose $1<t<t+1$.

$$|f(t+1)-f(t)| = \left|t+1+\frac{1}{t+1}-t-\frac{1}{t}\right| = \left|1-\frac{1}{t(t+1)}\right|$$

Or $\lim_{t\to+\infty} t(t+1) = +\infty$ donc $\lim_{t\to+\infty}\left|1-\frac{1}{t(t+1)}\right| = 1$.

On en conclue que $|f(t+1)-f(t)|$ tendant vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$, il n'est pas possible de majorer cette expression dans tous les cas possibles par un réel k compris dans $]0,1[$. Nous arrivons à une contradiction, f n'est donc pas contractante.

Partie B - Fonctions rétrécissantes et point fixe.

1) a) Posons $g : x \mapsto f(x)-x$. Comme I est stable par f, $f(a), f(b) \in I$. Comme $I=[a;b]$, on en déduit que $f(a) \geqslant a$ et $f(b) \leqslant b$, c'est à dire que $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$.

Comme g est continue et change de signe, par corollaire du TVI, g s'annule en $x_o \in I$, qui est donc un point fixe de f.

b) Supposons que $\alpha, \beta \in I$ soient des points fixes distincts de f. Alors :

$$|f(\alpha)-f(\beta)| = |\alpha-\beta| \overset{\text{rétrécissante}}{<} |\alpha-\beta|$$

Ce qui est impossible. Donc $\alpha=\beta$ et le point fixe de f est fixe.

2) Comme I n'est pas borné en haut, on peut prendre $f : x \mapsto x+1$ qui laisse bien I fixe : si $x \in I$ i.e $x \geqslant a$, alors $f(x) = x+1 \geqslant a$, donc $f(x) \in I$. Clairement, f n'a pas de point fixe.

Partie C - Fonctions dilatantes.

On fixe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dilatante.

1) a) La fonction $g : x \mapsto x + e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues. De plus, si $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |g(x)-g(y)| = |(x-y)+(e^x-e^y)| &\overset{\text{Triangulaire}}{\geqslant} |x-y| + |e^x - e^y| \\ &\geqslant |x-y| \end{aligned}$$

Donc g est bien dilatante.

b) La fonction g_λ est continue sur $]-\infty; \lambda[$ et sur $]\lambda; +\infty[$ car ses restrictions à ces intervalles sont continues. Montrons que g_λ est continue en λ. D'une part,

$$\lim_{x \to \lambda^-} g(x) = \lim_{x \to \lambda^-} -x = -\lambda$$

et d'autre part,

$$\lim_{x \to \lambda^+} g(x) = \lim_{x \to \lambda^+} \lambda - 2x = \lambda - 2\lambda = -\lambda$$

Comme les limites de g (qui existent par continuité avant et après λ) en λ coïncident avec $g(\lambda) = -\lambda$, on en déduit que g est continue en λ et donc sur tout $\mathbb{R}$. Montrons maintenant que g est dilatante. On distingue trois cas :

- $x, y < \lambda$: $|g(x)-g(y)| = |y-x| = |x-y| \geqslant |x-y|$
- $x, y \geqslant \lambda$: $|g(x)-g(y)| = |2y-2x| = 2|x-y| \geqslant |x-y|$
- $x < \lambda$ et $y \geqslant \lambda$: $|g(x)-g(y)| = |2y-\lambda-x| = |(y-\lambda)+(y-x)| \overset{\text{Triangulaire}}{\geqslant} |x-y|$

Ce qui montre que g est bien dilatante.

2) a) Soit $\lambda \in]f(a_1); f(a_2)[\cap]f(a_3); f(a_2)[$. Cette intersection n'est pas vide, car elle contient au moins $]\max(f(a_1), f(a_3)); f(a_2)[$. Alors en posant $g : x \mapsto f(x) - \lambda$, qui est continue par somme, comme $g(a_1), g(a_3) < 0$ et $g(a_2) > 0$, on obtient en appliquant TVI un $b \in]a_1; a_2[$ et un $c \in]a_2; a_3[$ tels que $g(b) = g(c) = 0$, c'est à dire $f(b) = f(c) = \lambda$.

b) Comme f est dilatante,

$$|f(b) - f(c)| = 0 \geqslant |b-c| \geqslant 0$$

On en déduit que $|b-c| = 0$, donc $b = c$. Donc f dilatante implique f injective.

c) Supposons que f ne soit pas strictement monotone, i.e f n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. Comme f n'est pas strictement décroissante, il existe $a_1 < a_2$ tels que $f(a_1) \leqslant f(a_2)$; a fortiori, comme f est injective, $f(a_1) < f(a_2)$.

TODO : l'argument est long

---

3) On sait que f est continue et strictement monotone. Quitte à travailler avec $-f$ au lieu de f, supposons que f est strictement croissante.

Soit $x \geqslant 0$. Alors $|f(x) - f(0)| \geqslant |x|$, c'est à dire que $f(x) \geqslant x + f(0)$. Comme la fonction $x \mapsto x + f(0)$ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^+$, a fortiori, f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}^+$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Similairement, soit $x \leqslant 0$. Alors $|f(x) - f(0)| = f(0) - f(x) \geqslant |x| = -x$, et on obtient $x + f(0) \geqslant f(x)$. On en déduit donc que f n'est pas minorée sur $\mathbb{R}^-$ et donc sur $\mathbb{R}$.

Donc f n'est pas bornée.

---

4) **a)** Soient $x \geqslant y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} & h(x) - h(y) = f(x) - f(y) + y - x \geqslant 0 \\ \iff & f(x) - f(y) \overset{\text{croissance}}{=} |f(x) - f(y)| \geqslant x - y = |x - y| \end{aligned}$$

Où cette dernière inégalité est vraie car f est dilatante. Donc h est bien croissante.

b) La fonction $h : x \mapsto f(x) - x$ est strictement négative, mais est croissante. Par le théorème de la limite monotone, on déduit l'existence de $\lim_{x \to +\infty} h(x) \leqslant 0$. Ainsi, par quotient de limites :

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - 1 \overset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

c) La fonction $h : x \mapsto f(x) - x$ est strictement positive et croissante. En particulier, la fonction décroissante $x \mapsto h(-x)$ est strictement positive et on déduit du théorème de la limite monotone l'existence de

$$\lim_{x \to +\infty} h(-x) = \lim_{x \to -\infty} h(x) \geqslant 0$$

Ainsi, encore par quotient de limites,

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - 1 \overset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$$

D'où $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

d) Si a, b sont des points fixes de f, alors $h(a) = h(b) = 0$. Comme h est croissante, pour tous $c \in [a; b]$,

$$h(a) = 0 \leqslant h(c) \leqslant h(b) = 0$$

D'où $h(c) = 0$. Donc c est un point fixe de f, et $[a; b] \subseteq F$.