Devoir maison n°8 : Chemins sur un quadrillage

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Retrouver des formules bien connues

1) Un chemin entre O et $M(p,q)$ équivaut à une somme ordonnée de p vecteurs $\vec{\imath}$ et de q vecteurs $\vec{\jmath}$. Une telle somme est composée de $p+q$ termes, et est déterminée uniquement par la position des p vecteurs $\vec{\imath}$ parmi les $p+q$ termes, en complétant tous les autres termes par des $\vec{\jmath}$. Ainsi, comme l'ordre des $\vec{\imath}$ n'importe pas, il y a $\binom{p+q}{p}$ telles sommes.

On en déduit que le nombre de chemins entre O et $M(p,q)$ est de $\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$ (par symétrie).

---

2) Un chemin de longueur n partant d'un point consiste en une somme ordonnée de n vecteurs parmi $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$, assimilable à une n-liste de cet ensemble à deux éléments. On en déduit qu'il y a 2^n chemins de longueur n partant de tout point (et en particulier de l'origine).

---

3) **a)** Par translation de vecteur $\overrightarrow{PO} = \binom{0}{-1}$, un chemin joignant $P(0,1)$ à $B_k(n-k,k)$ équivaut à un chemin joignant l'origine et $B'_k(n-k,k-1)$. Ceux ci sont donc au nombre de $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$.

Similairement, un chemin entre Q et $B_k(n-k,k)$ équivaut à un chemin entre l'origine et $B''_k(n-k-1,k)$. Ils sont donc au nombre de $\binom{n-k-1+k}{k} = \binom{n-1}{k}$.

b) On double compte les chemins de O à B_k. D'une part, ceux-ci sont au nombre de $\binom{n}{k}$ par le 1). D'autre part, un tel chemin doit passer soit par $Q(1,0)$, soit par $P(0,1)$ en fonction du premier vecteur du chemin. Ainsi, un chemin entre O et B_k est soit un chemin de Q à B_k, soit un chemin de P à B_k. On en déduit :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

c) Un chemin de O à $B_n(n,n)$ passant par $B_k(n-k,k)$ équivaut à la donnée de deux chemins, l'un de O à B_k, et l'autre de B_k à B_n. Ainsi, ces chemins sont au nombre de :

$$\binom{n-k+k}{k} \cdot \binom{n-(n-k)+(n-k)}{n-k} = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$$

Où l'on a dénombré les chemin de B_k à B_n par translation de vecteur $\overrightarrow{B_k O}$.

d) On double compte les chemins de O à $B_n(n,n)$. D'une part, ceux-ci sont au nombre de $\binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$. D'autre part, chaque tel chemin, après n étapes, se trouve sur un unique point de la forme $B_k(n-k,k)$ avec $k \in \{0, \ldots, n\}$, car ceux-ci forment l'ensemble des points atteignables depuis O par un chemin de longueur n. Ainsi, par disjonction et le dénombrement de la question précédente, on déduit :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Partie B - Chemins de Dyck et nombres de Catalan

1) **a)** TODO : Thomas stp :3