

Devoir maison n°10 : Droites Tropicales

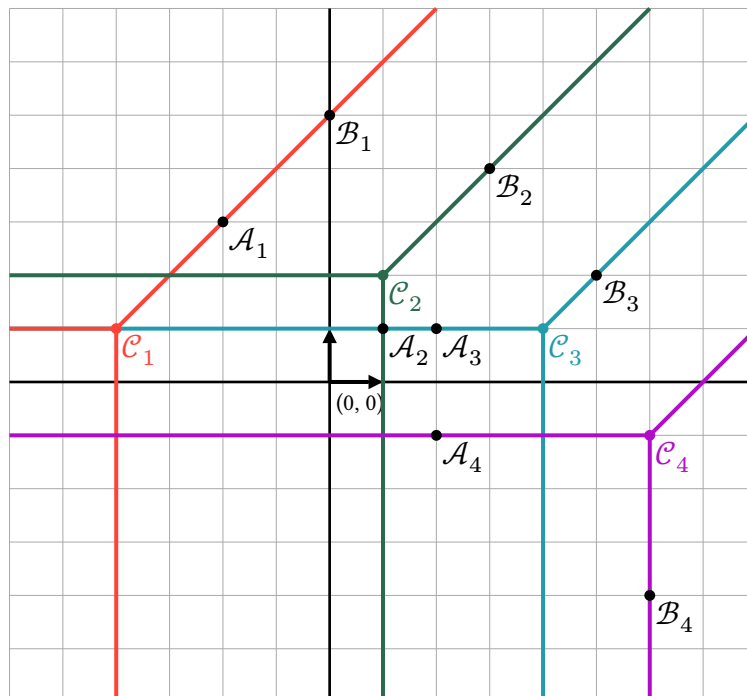
Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

Partie A - Les droites tropicales

- (\mathcal{A}') par deux points du plan passe une droite tropicale
- (\mathcal{B}') par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale
- (\mathcal{B}') deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point.

1) a)



b) On cherche à prouver (\mathcal{A}'). Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux points quelconques du plan. Par une translation T on se ramène au cas où :

$$\mathcal{A}(0,0) \text{ et } \mathcal{B}(x,y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

Etudions d'abord des cas particuliers :

Si $x = 0$ et $y = 0$ alors $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, la droite tropicale de centre \mathcal{A} convient.

Si $y = 0$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\max(0, x), 0)$ convient.

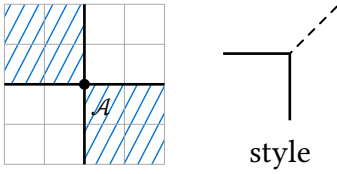
Si $x = 0$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(0, \max(0, y))$ convient.

Si $x = y$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\min(0, x), \min(0, y))$ convient.

Attaquons nous désormais aux cas généraux :



Si $x < 0$ et $y > 0$



Il existe $\mathcal{C}(0, y)$. Soient les demi-droites :

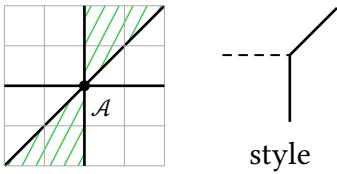
$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$ par construction, \mathcal{H} est parallèle à l'axe des abscisses.

$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$ par construction, \mathcal{V} est parallèle à l'axe des ordonnées.

Comme $x < 0$, \mathcal{H} est de direction $-\vec{i}$ et comme $y > 0$, \mathcal{V} est de direction $-\vec{j}$. Donc \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} .

En inversant les rôles de \mathcal{A} et \mathcal{B} , on obtient la deuxième partie rayée.

Si $x > 0$ et $y > 0$ et $y > x$



Soit \mathcal{D}' la droite parallèle à $y = x$ et passant par \mathcal{B} . On nomme \mathcal{C} l'intersection entre \mathcal{D}' et l'axe des ordonnées. Comme $y > x$, $y_{\mathcal{C}} > 0$. Soient les demi-droites :

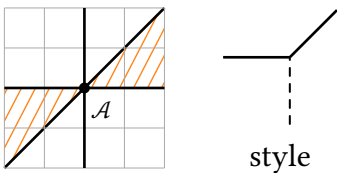
$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$ par construction, \mathcal{D} est de direction $\vec{i} + \vec{j}$

$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$ par construction, \mathcal{V} est de direction $-\vec{j}$

Donc \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} .

En inversant les rôles de \mathcal{A} et \mathcal{B} , on obtient que pour $0 > x$ et $0 > y$ et $x > y$, \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} , soit la deuxième zone rayée.

Si $x > 0$ et $y > 0$ et $y < x$



Doit \mathcal{D}' la droite parallèle à $y = x$ et passant par \mathcal{B} . On nomme \mathcal{C} l'intersection entre \mathcal{D}' et l'axe des abscisses. Comme $y < x$, $x_{\mathcal{C}} > 0$. Soient les demi-droites :

$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$ par construction, \mathcal{D} est de direction $\vec{i} + \vec{j}$

$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$ par construction, \mathcal{H} est de direction $-\vec{i}$

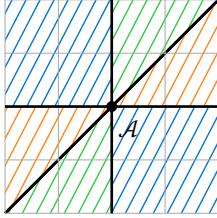
Donc \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} .



En inversant les rôles de \mathcal{A} et \mathcal{B} , on obtient que pour $0 > x$ et $0 > y$ et $x < y$, \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} , soit la deuxième zone rayée.

Conclusion

En combinant les différentes disjonctions de cas démontrées plus haut on obtient :



Le cas des lignes noires est couvert par les cas particuliers. Nous avons donc prouvé que pour tout point quelconque \mathcal{B} , il existe une droite tropicale passant par \mathcal{B} et par l'origine \mathcal{A} . Nous pouvons revenir au cas général avec deux points quelconques par la translation inverse de T .

Nous avons donc démontré (\mathcal{A}') : par deux points du plan passe une droite tropicale.

Partie B - Addition et Multiplication tropicales

On définit sur \mathbb{R} l'addition tropicale et la multiplication tropicale tel que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad \text{et} \quad a \otimes b = a + b$$

1) On a donc : $3 \oplus 7 = 7$ $-5 \oplus 2 = 2$ $3 \otimes 7 = 10$ $-5 \otimes 2 = -3$

2) \oplus est associatif et commutatif car \max est associatif et commutatif.

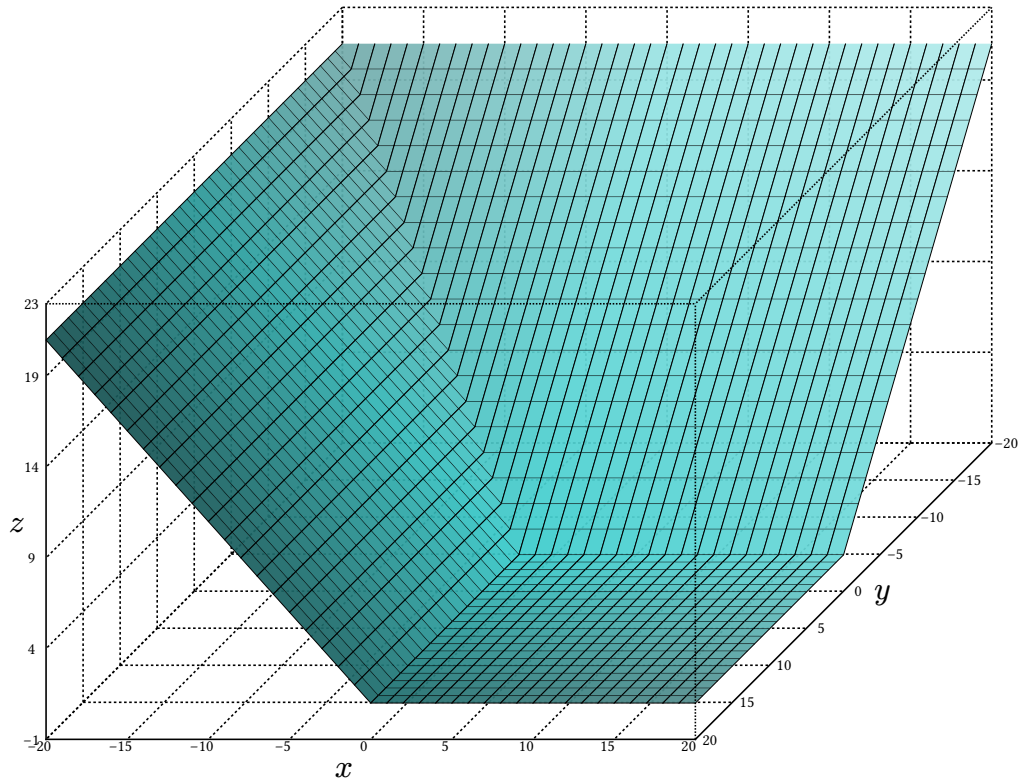
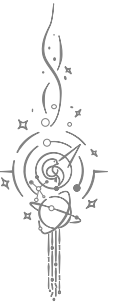
TODO : Il y a t il une preuve plus joli que par disjonction $a < b < c$ / $b < a < c$ / $b < c < a$?
(car b et c interchangeables car \max)

3)

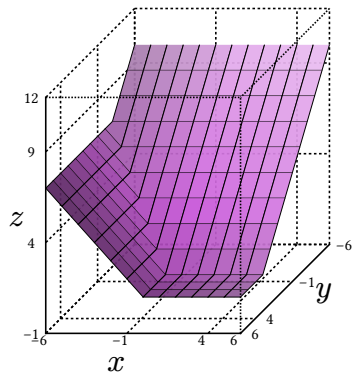
Voici à quoi ressemble une fonction tropicale¹ de degré 1 : $a \otimes x \oplus b \otimes y \oplus c$:

$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$

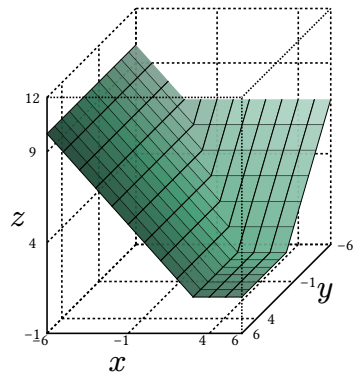
¹Pour des raisons esthétiques, nous utilisons dans les graphiques l'opposé des valeurs de x et y .



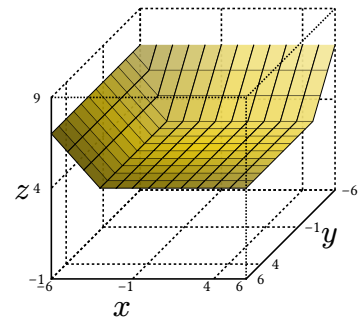
$$1 \otimes x \oplus 5 \otimes y \oplus 1$$



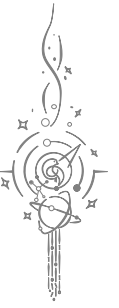
$$5 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$



$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 5$$



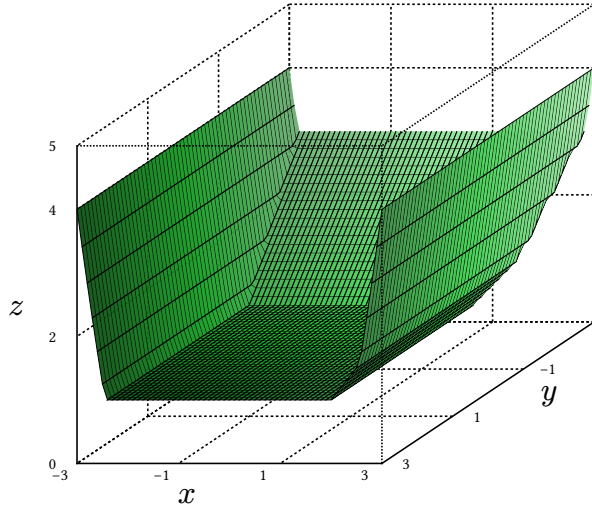
On remarque que modifier les valeurs a , b et c « décale » l'un des « bords ».



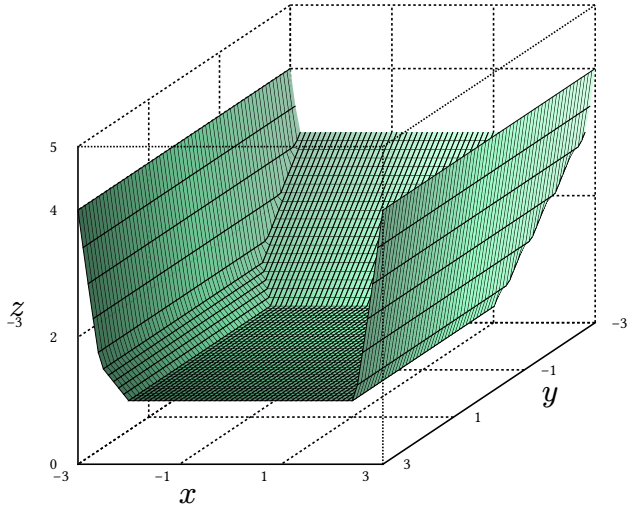
4) Voici à quoi ressemble la fonction tropicale du second degré² :

$$1 \oplus (-1) \otimes x \oplus 0 \otimes y \oplus (-5) \otimes x^2$$

D'un côté :



De l'autre en prenant l'opposé pour l'axe x :



²On prend l'opposé pour l'axe y