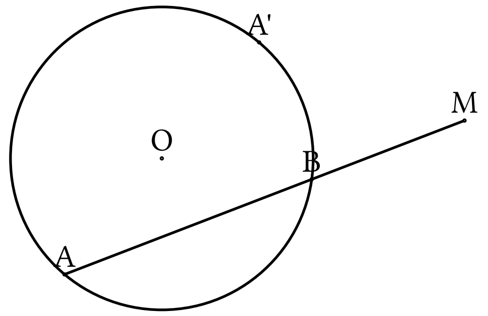
Devoir maison n°14 : Puissance d'un point par rapport à un cercle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Problème 1 -

Partie A - Définition



1) a) Comme $[AA']$ forme un diamètre de Γ, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B}$ sont orthogonaux. Comme $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{A'B}$ et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{A'B} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}\end{aligned}$$

b) Comme $[AA']$ est un diamètre de Γ, en appliquant la formule de la médiane,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = OM^2 - R^2$$

---

2) a) TODO

b) Notons H l'un des points T ou S : la preuve est la même pour les deux. Par définition des tangentes, le triangle MHO est rectangle en H, et par Pythagore :

$$\begin{aligned}&MH^2 + OH^2 = OM^2 \\ \Longleftrightarrow\ & P_\Gamma(M) = OM^2 - OH^2 = MH^2\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'égalité.

---

3)

- $\mathcal{E}_1$: Pour un point M n'appartenant pas à Γ, $OM \neq R$ et $OM^2 \neq R^2$, d'où $P_\Gamma(M) \neq 0$. Donc $\mathcal{E}_1 = \emptyset$. (Alternativement, en étendant la définition de P_Γ, $\mathcal{E}_1 = \Gamma$)
- $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$: Soit $M \in \mathcal{P} \setminus \Gamma$. Alors :

$$\begin{aligned} P_\Gamma(M) < 0 &\Leftrightarrow OM^2 < R^2 \\ &\Leftrightarrow OM < R \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{E}_2$ est l'intérieur de Γ et $\mathcal{E}_3$ est l'extérieur de Γ.

---

4) **a)** C'est un cercle (montrer que comme P_Γ est cste, OM est constant)

b) :3:3

Partie B - Critère de cocyclicité

1) Notons Γ le cercle tel que $A, B, C, D \in \Gamma$. Comme A, B, C, D sont disticts, M n'appartient pas à Γ. Ainsi, le résultat du 1)b) d'unicité de la puissance d'un point s'applique et comme $[AB]$ et $[CD]$ sont des cordes de Γ :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = P_\Gamma(M) = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$$

Ce qui donne l'égalité cherchée.

---

2) Supposons que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$$

Par définition, $D, E \in (MC)$. On a donc dans un premier temps $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{MC}$ colinéaires. De plus, comme A, B, C, E sont sur un même cercle Γ, par unicité de la puissance d'un point, on obtient :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = P_\Gamma(M) = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{ME}$$

En faisant la différence des deux expressions de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MC} \cdot \left(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MD}\right) &= \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DE} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{MC}$. Comme $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{MC}$ sont à la fois perpendiculaires et colinéaires, et que $\overrightarrow{MC} \neq \vec{0}$, $\overrightarrow{DE} = \vec{0}$ et $E = D$. Donc A, B, C, D sont bien cocycliques.

---

3)

Partie C - Quelques applications

1)

---

2) **a)**

b)

3)