Devoir maison n°10 : Théorème de Beatty et jeu de Wythoff

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Théorème de Beatty

1) a) Sans perte de généralité, supposons que $\alpha \leqslant 1$. Alors $\frac{1}{\alpha} \geqslant 1$ et comme $\beta > 0$,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > 1$$

Ce qui est une contradiction. Donc $\alpha < 1$, et de la même manière $\beta < 1$.

b) Puisque $x, y \notin \mathbb{Z}$, on a :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor < x \text{ et } y - 1 < \lfloor y \rfloor < y$$

En sommant les inégalités, on obtient :

$$x + y - 2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor < x + y$$

Soit comme tous les termes sont entiers :

$$x + y - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y - 1$$

Ce qui donne l'égalité attendue.

---

2) a) Comme $\alpha \neq 1$, on peut écrire :

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} - 1 \text{ soit } \beta = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 1}$$

Comme $\alpha \in \mathbb{Q}$ et que $\mathbb{Q}$ est clos sous la somme et l'inversion, on a $\beta \in \mathbb{Q}$.

b) On écrit $\alpha = \frac{a}{b}$ et $\beta = \frac{c}{d}$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$ac = (bc)\alpha \in M(\alpha) \text{ et } ac = (da)\beta \in M(\beta)$$

Donc $ac \in M(\alpha) \cap M(\beta)$, qui n'est donc pas vide.

De plus, $ac \in \mathbb{N}$. On a donc $ac \in \mathrm{Sp}(\alpha) \cap \mathrm{Sp}(\beta)$. Ces ensembles ne sont donc pas disjoints et ne peuvent former une partition de $\mathbb{N}^*$. On a donc prouvé que si α ou β est rationnel, alors $\mathrm{Sp}(\alpha)$ et $\mathrm{Sp}(\beta)$ ne peuvent former une partition de $\mathbb{N}^*$, i.e la contraposée de l'implication indirecte du théorème de Beatty.

---

3) a) On procède par contradiction. Supposons que β soit rationnel. Alors par le même raisonnement qu'au 2)a), α est également rationnel, ce qui est une contradiction. Donc β est irrationnel.

b) On raisonne à nouveau par contradiction. Supposons que $M(\alpha) \cap M(\beta) \neq \emptyset$. Il existe alors $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n\alpha = m\beta$. On a alors par hypothèse :

$$\frac{n}{m} = \frac{\alpha}{\beta} = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) - 1 = \alpha - 1$$

Donc $\alpha = 1 + \frac{n}{m}$ est rationnel, ce qui est une contradiction. Donc $M(\alpha)$ et $M(\beta)$ sont disjoints.

On ne peut pas encore en conclure que $\mathrm{Sp}(\alpha)$ et $\mathrm{Sp}(\beta)$ sont disjoints, puisqu'il reste la possibilité d'avoir :

$$n\alpha \neq m\beta \text{ mais } \lfloor n\alpha \rfloor = \lfloor m\beta \rfloor$$

c) **i.** Par définition de la valeur absolue, on a :

$$k \leqslant n\alpha, m\beta < k + 1$$

On en déduit :

$$\frac{k}{\alpha} \leqslant n < \frac{k}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{k}{\beta} \leqslant m < \frac{k}{\beta} + \frac{1}{\beta}$$

En sommant les inégalités, on obtient :

$$k\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \leqslant n + m < (k+1)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \quad \text{soit}$$
$$k \leqslant n + m < k + 1$$

On en déduit que $n + m = k$.

ii.

iii. Comme $M(\alpha) \cap M(\beta) \neq \emptyset$, par la contraposée de la question 3)b), on a que $\alpha \in \mathbb{Q}$.