

Devoir maison n°6 : Localisation de racines

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Problème 1 -

Considérons, pour tout entier $n \geq 2$, l'équation (E_n) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n + z + 1 = 0$$

1) Cas $n = 2$.

On considère l'équation (E_2) à résoudre dans \mathbb{C}

$$z^2 + z + 1 = 0,$$

Puisqu'il s'agit d'une équation quadratique, calculons le discriminant : $\Delta = 1 - 4 = -3$

Les solutions sont donc

$$z = -\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ ou } z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

Et le module de chacune de ces racines est

$$|z| = \frac{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

ce qui est inférieur à 2.

2) Cas $n = 3$

a)

Soit $f : t \mapsto t^3 + t + 1$, définie sur \mathbb{R} .

Remarquons d'abord que f est continue et dérivable sur \mathbb{R} puisque c'est une fonction polynomiale.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$$

ce qui montre que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Ainsi, comme $f(-1) = -1 < 0$ et $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} > 0$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires garantit que f admet une unique racine $r \in]-1, -\frac{1}{2}[$. Celle-ci constitue donc la seule solution réelle de (E_3) .

b)

Notons z_1 et z_2 les deux autres solutions complexes de (E_3) .



Puisque r est une racine de (E_3) , le polynôme $P(z) = z^3 + z + 1$ se factorise sous la forme

$$P(z) = (z - r)(z^2 + az + b) \text{ avec } a, b \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, en développant cette expression, on obtient :

$$P(z) = z^3 + (a - r)z^2 + (b - ar)z - br$$

Par identification polynomiale, on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} a - r = 0 \\ b - ar = 1 \\ -br = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r \\ b = r^2 + 1 \\ \underbrace{r^3 + r + 1 = 0}_{(E_3)} \end{cases}$$

Par conséquent, les racines z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation quadratique

$$z^2 + rz + (r^2 + 1) = 0.$$

Enfin, par les propriétés des racines d'un polynôme du second degré, on obtient avec $r \neq 0$:

$$z_1 + z_2 = -r \text{ et } z_1 z_2 = r^2 + 1$$

Or $r^3 + r + 1 = 0$ avec $r \neq 0$, d'où $r^2 + 1 = -\frac{1}{r}$, soit $z_1 z_2 = -\frac{1}{r}$.

c)

Puisque l'on a $r \in]-1, -\frac{1}{2}[$, il vient $\frac{1}{2} < |r| < 1$,

$$\text{i.e. } \frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1 \text{ car } |r| = |z_1 + z_2|.$$

De même, on a $|z_1 z_2| = \frac{1}{|r|}$, ce qui donne

$$1 < |z_1 z_2| < 2.$$

d)

Supposons que $|z_1| \geq 2$. Alors,

$$|z_1| + |z_2| \geq 2 + |z_2|$$

Or nous avions montré précédemment que $|z_1 + z_2| < 1$, donc on obtient

$$2 + |z_2| < 1 \implies |z_2| < -1$$

ce qui est absurde car $|z_2| \geq 0$.

Nous concluons donc que

$$|z_1| < 2.$$

e)

Le même raisonnement (en échangeant les rôles de z_1 et de z_2) donne $|z_2| < 2$.



Ainsi, toutes les racines de l'équation (E_3) ont un module strictement inférieur à 2.

3) Cas général.

Soit un entier $n \geq 2$.

a)

Considérons la fonction $\varphi : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi : t \mapsto t^n - t - 1$$

Déterminons ses limites aux bornes de son intervalle de définition :

$$\lim_{t \rightarrow 2} \varphi(t) = 2^n - 2 - 1 = 2^n - 3 \geq 1$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$$

Remarquons ensuite que φ est continue et dérivable sur $[2, +\infty[$ puisque c'est une fonction polynomiale.

Ainsi, pour tout $t \in [2, +\infty[,$ on a

$$\varphi'(t) = nt^{n-1} - 1 \geq 3 > 0 \text{ et donc } \varphi(t) \geq \varphi(2) \geq 3 > 0$$

ce qui montre que φ est strictement croissante sur $[2, +\infty[.$

On en déduit le tableau suivant :

t	2	$\pi = 4$	$+\infty$
signe de φ'		+	
variation de φ	$2^n - 3$		$+\infty$
signe de φ		+	

b)

Soit $z \in \mathbb{C},$



Si z est une racine de l'équation $z^n + z + 1 = 0$, alors $|z^n + z + 1| = 0$.

Or, par l'inégalité triangulaire inversée, on a

$$|z^n + z + 1| \geqslant | |z^n| - |z| - |1| | = | |z|^n - |z| - 1 |$$

Ainsi, pour que $|z^n + z + 1| = 0$, il faut et il suffit que $| |z|^n - |z| - 1 | = 0$, c'est-à-dire que $|z|^n - |z| - 1 = 0$. Cela signifie que $|z|$ est une racine de l'équation $t^n - t - 1 = 0$.

Or, d'après le tableau précédent, l'équation $t^n - t - 1 = 0$ n'admet pas de racine dans l'intervalle $[2, +\infty[$. On en déduit que pour toute racine z de l'équation (E_n) , on a $|z| < 2$.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(z^n + z + 1 = 0) \implies (|z| < 2).$$

Problème 2 -

1) Soit z une racine complexe de P de partie réelle positive

a)

Puisque

$$\Re\left(\frac{1}{z}\right) = \Re\left(\frac{\Re(z) - \Im(z)}{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}\right) = \underbrace{\frac{\Re(z)}{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}}_{>0}$$

et que $\Re(z) > 0$, alors $\Re\left(\frac{1}{z}\right) > 0$.

b) Supposons que $|z| > 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $a_n \geqslant 1$ et $a_{n-1} > 0$ deux réels, il vient :

$$\Re(a_n) = a_n \geqslant 1 \text{ et } \Re\left(a_{n-1}\frac{1}{z}\right) = a_{n-1}\Re\left(\frac{1}{z}\right) > 0$$

d'où

$$\Re\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}\right) = \Re(a_n) + \Re\left(a_{n-1}\frac{1}{z}\right) \geqslant 1$$