Devoir maison n°11 : La ruine du joueur

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Étude d'une suite récurrente.

Soient $b, c \in \mathbb{N}^*$, et $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1}$, avec $u_0, u_{b+c} \in \mathbb{R}$.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1} &\iff (p+q)u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1} \\ &\iff qu_n - qu_{n-1} = pu_{n+1} - pu_n \\ &\iff p(u_{n+1} - u_n) = q(u_n - u_{n-1}). \end{aligned}$$

---

2) Avec $p = q = \frac{1}{2}$, l'égalité précédente devient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1}) \iff u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}.$$

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$.

Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$ où r est une constante réelle. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc arithmétique de raison r.

Par conséquent,

$$u_{b+c} = u_0 + (b+c)r \text{ i.e. } r = \frac{u_{b+c} - u_0}{b+c}.$$

On peut donc écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n\frac{u_{b+c} - u_0}{b+c}.$$

---

3)

Partie B - Ruine de Bob.

1)

---

2)

a)

b)

c)

3)

4)

Partie C - Temps d’attente de la ruine de Bob.

1)

a)

b)

2)

a)

b)

c)

d)

Les jeux d’argent et de hasard peuvent être dangereux : pertes d’argent, conflits familiaux, addiction… Retrouvez des conseils sur joueurs-info-service.fr (09 74 75 13 13 - Appel non surtaxé).