Devoir maison n°9 : Fonction du Boulanger

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Problème 1 -

1)

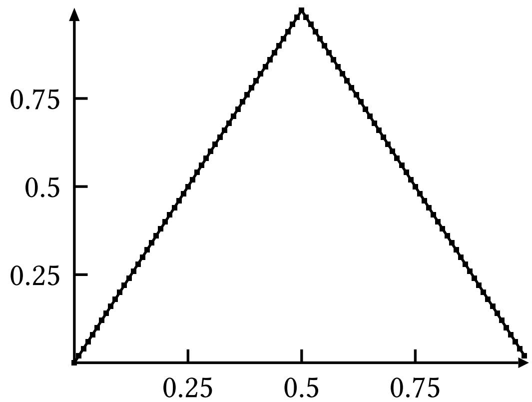
Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = 2x$ donc

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 1$$
$$\Leftrightarrow f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = [0, 1]$$

Si $x \in \ \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, $f(x) = 2(1 - x)$ donc

$$\frac{1}{2} < x \leq 1$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - x < \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 2(1 - x) < 1$$
$$\Leftrightarrow f\left(\left]\frac{1}{2}, 1\right]\right) = [0, 1[$$

Donc nous avons bien $f([0, 1]) = [0, 1]$.



Représentation graphique de f sur $[0, 1]$

---

2) La fonction `suite` repose naturellement sur de la récursivité. Nous allons donc la programmer dans un language qui supporte de manière optimale les fonctions récursives.

Voici `suite a p` en Haskell.

```haskell
f x
  | 0 <= x     &&  x <= 1 / 2  =  2 * x
  | 1 / 2 < x  &&  x <= 1      =  2 * (1 - x)

suite a 1 = a
suite a p = suite (a ++ [f (last a)]) (p-1)
```

Voici `suite a p` en OCaml.

```ocaml
let f x =
  if        0.0 <= x && x <= 0.5  then  2.0 *. x
  else if  0.5 <  x && x <= 1.0  then  2.0 *. (1.0 -. x)
  else failwith "x doit être dans l'intervalle [0, 1]"

let rec suite x p =
  if p > 0 then begin
    let x' = f x in
    Printf.printf "%.5f\n" x';
    suite x' (p - 1)
  end

let () =
  suite (2. /. 5.) 25
```

Voici `suite(a, p)` en Python.

```python
def f(x):
    if 0 <= x <= 1/2:
        return 2*x
    elif 1/2 < x <= 1:
        return 2*(1-x)

def suite(a, p):
    u = [a]
    for _ in range(p-1):
        u.append(f(u[-1]))
    return u
```

---

3) a)

- Si $a = \frac{1}{3}$:
  - $u_0 = \frac{1}{3}$
  - $u_1 = f(u_0) = \frac{2}{3}$ car $u_0 < \frac{1}{2}$

- $u_2 = 2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ car $u_1 > \frac{1}{2}$

On remarque que $u_1 = u_2 = \frac{2}{3}$ puisque $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera constante pour $n \geq 1$.

Avec $a = \frac{1}{3}$:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ si } n = 0 \\ \frac{2}{3} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

- Si $a = 0.33$, On obtient : $(0.33, 0.66, 0.68, 0.64, 0.72, 0.56, 0.88, 0.24, 0.48)$

On remarque que, bien que $\frac{1}{3} \approx 0.33$, la suite ne devient pas constante pendant les 9 premiers termes.

b)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $a = \frac{1}{2^k}$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2}$, donc

$u_0 = \frac{1}{2^k}$ $\quad$ $u_1 = 2\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{k-1}}$ $\quad$ $u_2 = \frac{1}{2^{k-2}}$

Cela ne varie pas tant que $n < k$.

$u_k = \frac{1}{2^{k-k}} = 1$ $\quad$ $u_{k+1} = 0$ $\quad$ $u_{k+2} = 0$

Or, $f(0) = 0$, donc

Avec $a = \frac{1}{2^k}$:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{k-n}} & \text{si } n \in [\![0, k]\!] \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$$

c)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $a = \frac{1}{3\times 2^k}$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{3\times 2^k} \leq \frac{1}{3\times 2} < \frac{1}{2}$, donc

$u_0 = \frac{1}{3\times 2^k}$ $\quad$ $u_1 = 2\left(\frac{1}{3\times 2^k}\right) = \frac{1}{3\times 2^{k-1}}$ $\quad$ $u_2 = \frac{1}{3\times 2^{k-2}}$

Cela ne varie pas tant que $n < k$.

$u_k = \frac{1}{3\times 2^{k-k}} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $u_{k+1} = \frac{2}{3}$ $\quad$ $u_{k+2} = \frac{2}{3}$

Or, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$, nous l'avions déjà observé à la question 3) a).

Avec $a = \frac{1}{3\times 2^k}$:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3\times 2^{k-n}} & \text{si } n \in [\![0, k]\!] \\ \frac{2}{3} & \text{si } n > k \end{cases}$$

---

4) a) Choisissons $a = 0$. Comme $f(0) = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera bien constante. Nous aurions aussi pu choisir $a = \frac{2}{3}$.

b) Choisissons $a = \frac{2}{5}$. Comme $f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$, $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien périodique de période 2. Nous aurions aussi pu choisir $a = \frac{4}{5}$.

c) Choisissons $a = \frac{2}{7}$. Comme $f\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7}$, $f\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{6}{7}$ et $f\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{2}{7}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera bien périodique de période 3. Nous aurions aussi pu choisir $a = \frac{4}{7}$ ou $a = \frac{6}{7}$.

---

5)

Si $k = 2$, comme vu auparavant, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, nous n'étudierons donc pas ce cas afin de simplifier le raisonnement.

Soit un entier k tel que $k > 2$.

On a $2^k - 1 \geq 7$, donc $0 < \frac{2}{2^k-1} < \frac{1}{2}$. Ainsi, $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, ce qui garantit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par f.

On remarque de manière évidente que si tous les termes de la suite u_n sont inférieurs à $\frac{1}{2}$ jusqu'à un rang n, $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 2^n \cdot a = \frac{2^{n+1}}{2^k - 1}$$

Or, $2^n \cdot a$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc il adviendra un moment où $2^n \cdot a > \frac{1}{2}$

D'où, au rang $k - 1$, car

$u_{k-3} = \frac{2^{k-2}}{2^k-1} < \frac{1}{2}$ et $u_{k-2} = \frac{2^{k-1}}{2^k-1} > \frac{1}{2}$

On a :

$$u_{k-1} = 2\left(1 - \frac{2^{k-1}}{2^k - 1}\right) = 2 - \frac{2^k}{2^k - 1} = 1 - \frac{1}{2^k - 1} > \frac{1}{2}$$

$$u_k = 2\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2^k - 1}\right)\right) = 2 - 2 - \frac{2}{2^k - 1} = a$$

Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc périodique de période k.

---

6) a) Supposons a rationnel, i.e $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ et $p \leq q$.

Toutes les images de a par f peuvent être écrites sous la forme $\frac{m}{q}$, $m \in \mathbb{N}$:

- si $a \leq \frac{1}{2}$, on a $f(a) = 2 \cdot a = \frac{2 \cdot p}{q} = \frac{m}{q}$ avec $m = 2 \cdot p$
- si $a > \frac{1}{2}$, on a $f(a) = 2 \cdot (1 - a) = 2 - \frac{2 \cdot p}{q} = \frac{m}{q}$ avec $m = 2 \cdot (q - p)$

Or, il existe un nombre fini de fractions possibles $\frac{m}{q}$, $m < q$, conditions satisfaites par les propriétés de la fonction f, qui ne change pas le dénominateur et renvoie toujours un nombre positif inférieur à 1 (cf question 1).

Ce qui implique que la suite finira par « revisiter » un de ses termes précédants, formant ainsi un cycle périodique.

b) Supposons que (u_n) est périodique de période k.

On remarque que pour tout n, $f \circ f \circ ... \circ f(x)$ (n fois) est de la forme $a + bx$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Or, comme $u_n = u_{n+k}$, u_n est un point fixe de f^k (f composée k fois avec elle-même), et puisque $a + bu_n = u_n$, alors $u_n \in \mathbb{Q}$.

Enfin, puisque $u_n \in \mathbb{Q}$, $a \in \mathbb{Q}$ car $u_n = m + na$ pour $m, n \in \mathbb{Z}$.

---

7) On dit que « a atteint sa cible » si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Soit $a = 0$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle par récurrence immédiate : « a atteint sa cible ».

Sinon, supposons que $a \neq 0$, $u_{n-1} \neq 0$ et $u_n = 0$, on n'a que deux cas :

- $u_n = 2 \cdot u_{n-1} \neq 0$: contradiction car on suppose que $u_n = 0$
- $u_n = 2(1 - u_{n-1}) = 2 - 2 \cdot u_{n-1}$, si et seulement si $u_{n-1} = 1$

Donc « a atteint sa cible » si l'un des termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est égal à 1.

En poursuivant ce raisonnement, nous pouvons conjecturer le fait que « a atteint sa cible » si et seulement si $a = \frac{p}{2^m}$, avec $p, m \in \mathbb{N}$ et $p \leq 2^m$.

En effet, à partir d'un certain rang, a aura « subi » une série de modifications au niveau de son numérateur : des multiplications par 2 et/ou des « renversements ».

Ce terme pourra alors être réécrit sous forme d'entier, son dénominateur ayant été « anihilé » par les multiplications par 2.

Enfin, on peut exprimer celui-ci comme p, avec $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq 1$ (propriétés de la fonction f, d'où $u_n = 0$ ou $u_n = 1$, ce qui conclut.

a)

Si l'on pose $a = \frac{1789}{2^{1789}}$, a devrait atteindre sa cible.

En effet, comme $a < \frac{1}{2}$, au rang 1778 : $u_{1778} = 2^{1778} \cdot \frac{1789}{2^{1789}} = \frac{1789}{2^{11}} < 1$, u_{1778} étant le premier terme de la suite supérieur à $\frac{1}{2}$ car $2^{10} < 1789 < 2^{11}$.

Puis on a : $u_{1789} = 1$ d'où, pour tout $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geq 1790$: $u_N = 0$, ce qui implique que $\frac{1789}{2^{1789}}$ atteint bien sa cible.

b)

Comme vu ci-dessus, tous les nombres de la forme $\frac{p}{2^m}$, avec $p, m \in \mathbb{N}$ et $p \leq 2^m$ atteignent leur cible.

---

8)

a)

On remarque graphiquement qu'il existe deux cas, déterminés par x :

- si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, y est « contracté » par un facteur 2 tandis que x est « dilaté » par un facteur 2
- si $\frac{1}{2} < x \leq 1$, x est d'abord « dilaté » par un facteur 2 avant de se voir soustraire à 2 (on cherche sa distance au bord droit après élongation de la pâte), tandis que y est d'abord

« contracté » par un facteur 2 avant de se faire soustraire à 1 (on cherche sa distance au bord inférieur après élongation de la pâte).

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} (2 \cdot x, \frac{y}{2}) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \left(2(1-x), \frac{y+1}{2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

b)

Nous devons montrer qu'il existe un unique couple (x, y) pour tout couple (a, b) donné.

Cas 1) $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$
On a :

$$a = 2 \cdot x, b = \frac{y}{2}$$

D'où:

$$x = \frac{a}{2}, y = 2 \cdot b$$

Valide car:

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{a}{2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq a \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2 \cdot b \leq 1 \Rightarrow 0 \leq b \leq \frac{1}{2}$$

Donc cette solution est valide pour $0 \leq b \leq \frac{1}{2}$

Cas 2) $\frac{1}{2} < x \leq 1$
On a:

$$a = 2(1-x), b = \frac{y+1}{2}$$

D'où: $x = 1 - \frac{a}{2}, y = 2 \cdot b - 1$

Valide car:

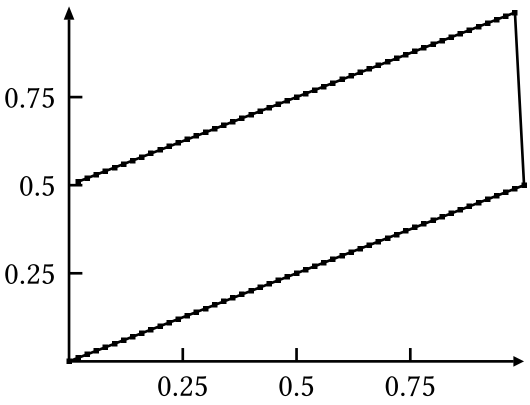
- $\frac{1}{2} < x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 - \frac{a}{2} \leq 1$
- $$0 \leq y \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2 \cdot b - 1 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < b \leq 1$$

Donc cette solution est valide pour $\frac{1}{2} < b \leq 1$

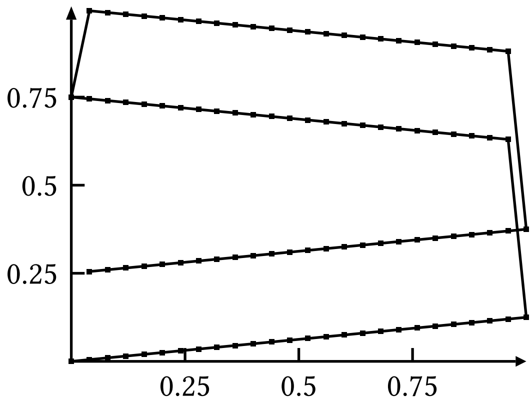
Pour chaque couple (a, b), il existe donc un unique couple (x, y) respectant les conditions de base.

c)

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} (2 \cdot x, \frac{y}{2}) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \left(2(1-x), \frac{y+1}{2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$



Représentation graphique de φ sur $[0, 1]$



Représentation graphique de $\varphi \circ \varphi$ sur $[0, 1]$

Problème 2 - Galette des rois

Bon appétit ![1]

Avec une jolie fève :)

[1]L'aire de cette galette est $4r^2$.