Devoir maison n°8 : D'Hiver

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Exercice 1 - La couleur des nombres

Notons $x \sim y$ la relation d'équivalence sur $\mathbb{Q}_+^*$: « x et y sont de même couleur »[1]. Les propriétés d'équivalence sont évidentes. On colore enfin en bleu les nombres bleus et en rouge les nombres rouges.

Les deux premières règles deviennent :

$$1 \tag{a}$$

$$x \sim \frac{1}{x} \tag{b}$$

Enfin, comme il n'y a que deux couleurs, si x et y sont de couleurs différentes, alors x et y sont de couleurs opposées. La 3e règle devient donc :

$$x + 1 \nsim x \tag{c}$$

1)

D'après (a), 1 est rouge et d'après (c), la couleur s'inverse à chaque ajout de 1. Par récurrence évidente, tous les nombres pairs sont donc bleus et tous les nombres impairs rouges.

Ainsi, comme 2016 est pair, 2016 est bleu.

---

2) Soit $x \in \mathbb{Q}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$. D'après (c) appliquée deux fois, $x + 2 \sim x$. Par une récurrence évidente, $x + 2k \sim x$.

Ainsi, si $n \in \mathbb{N}$ est pair, alors $x + n \sim x$, et si n est impair :

$$\begin{aligned} x + n &\sim x + (n-1) + 1 \\ &\sim x + 1 && \text{car } n - 1 \text{ est pair} \\ &\nsim x && \text{par (c)} \end{aligned}$$

Ainsi, selon la couleur de x, si n est pair, $x + n$ aura la même couleur que x et si n est impair $x + n$ sera de couleur opposée à x.

[1]Bien que $\sim$ soit une relation d'équivalence, ce n'est pas une relation de congruence sur l'addition, i.e on n'a pas que si $a \sim b$ et $c \sim d$ alors $a + c \sim b + d$: par exemple, $2 \sim \frac{1}{2}$ mais $2 + 2 = 4 \nsim \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sim 1$. On utilisera donc $\sim$ avec attention et uniquement pour simplifier les notations.

3)

$$\begin{aligned}\frac{2016}{2015} &\sim 1+\frac{1}{2015}\\ &\sim 1+2015\\ &\sim 2016\end{aligned}$$

Donc $\frac{2016}{2015}$ est bleu.

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{4}{13} &\sim \frac{13}{4}\\ &\sim 3+\frac{1}{4}\\ &\sim 3+4\\ &\sim 7\end{aligned}$$

Donc $\frac{4}{13}$ est rouge.

---

4) Ces deux règles sont fausses.

La première est fausse car $\frac{1}{3} \sim 3$ est rouge et $\frac{2}{3} \sim 1+\frac{1}{2} \nsim \frac{1}{2}$ est rouge, mais $\frac{1}{3}+\frac{2}{3} \sim 1$.

La seconde est fausse avec l'interprétation de la couleur sur les entiers : si un entier pair est bleu, alors la somme de deux entiers pairs est aussi paire et donc bleue : $2+2 \sim 4$.

---

5) On peut faire les calculs suivants :

$$\begin{aligned}\frac{235}{68} &\sim 3+\frac{1}{2+\frac{1}{5+\frac{1}{6}}}\\ &\nsim 2+\frac{1}{5+\frac{1}{6}}\\ &\nsim 5+\frac{1}{6}\\ &\sim 6\end{aligned}$$

Donc $\frac{235}{68}$ est bleu.

---

6) Prenons une fraction $\frac{a}{b}$. On peut toujours écrire b sous la forme $b'+na$ avec $n \in \mathbb{N}$. Alors on a :

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b'+na} \sim \frac{b'+na}{a} \sim n+\frac{b'}{a}$$

On est donc amené à répéter l'algorithme avec $\frac{b'}{a}$, c'est à dire calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b', jusqu'à ce que la fraction obtenue soit un entier, dans quel cas on peut facilement déterminer la couleur de la fraction initiale avec la parité de la somme des quotients.

Autrement dit, on peut déterminer la couleur d'une fraction $\frac{a}{b}$ en calculant la couleur de la somme des quotients donnés par l'algorithme d'Euclide pour calculer le pgcd de a et b (cela permet également d'assurer que l'algorithme se termine). C'est ce que fait l'algorithme en python ci-dessous :

```python
def couleur(a, b):
    c = 0
    while b != 0:
        q = a // b
        r = a % b

        c += q
        a = b
        b = r
        print(q)

    if c % 2 == 0:
        print("La fraction est bleue")
    else:
        print("La fraction est rouge")
```

Quand éxécuté avec $a = 235, b = 68$, l'algorithme renvoie que $\frac{235}{68}$, comme escompté.

---

7) Après implémentation de l'algorithme en typst et en python, celui-ci donne :

$$\frac{1515}{1789}$$

Exercice 2 - Intercaler la somme

1) $E_4 = (1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1)$

$E_5 = (1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1)$

(bien entendu généré automatiquement, le script est dans le DM sur Github)

---

2) Les réponses suivantes sont calculées automatiquement :

a) E_{11} contient 1025 éléments.

b) La somme des éléments de E_{11} est 59050.

c) Le plus grand élément de E_{11} est 144.

3) a) Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = N_n - 1$. Les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont :

$$u_1 = 1 \qquad u_2 = 2 \qquad u_3 = 4 \qquad u_4 = 8$$

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.

Preuve : Notons E'_n la liste E_n dans laquelle on omet le dernier 1, et on considère u_n comme le nombre d'éléments de E'_n. Pour construire E'_{n+1} à partir de E'_n, on rajoute un nombre à droite de chaque élément de E'_n. On a donc :

$$\begin{aligned} |E'_{n+1}| &= |E'_n| + |E'_n| \\ \iff u_{n+1} &= 2u_n \end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate, on a bien $u_n = 2^{n-1}$. Donc le nombre d'éléments de E_n est $N_n = 2^{n-1} + 1$.

b) Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, S_n la somme des éléments de E_n et $v_n = S_n - 1$ que l'on interprète comme la somme des éléments de E'_n. Les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont :

$$v_1 = 1 \qquad v_2 = 3 \qquad v_3 = 9 \qquad v_4 = 27$$

On conjecture que $v_n = 3^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve : Notons x_i pour $1 \leq i \leq N_n$ le i-ème élément de la liste E_n. E'_{n+1} est composé d'une copie de la liste E'_n, ainsi que des sommes d'éléments consécutifs de E_n. On a donc :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \sum_{i=1}^{N_n-1} (x_i + x_{i+1}) \\ &= v_n + \sum_{i=1}^{N_n-1} x_i + \sum_{i=2}^{N_n} x_i \\ &= v_n + 2\sum_{i=1}^{N_n-1} x_i \qquad \text{car } x_1 = x_{N_n} \\ &= 3v_n \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate, $v_n = 3^{n-1}$ et la somme des éléments de E_n est donc $3^{n-1} + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 - Mon beau sapin !

1) Aire foncée de $\boldsymbol{B}_n$

a) Considérons les figures suivantes :

...

$\boldsymbol{B}_1$ $\boldsymbol{B}_2$ $\boldsymbol{B}_3$ $\boldsymbol{B}_4$ $\boldsymbol{B}_n$

On nomme $\boldsymbol{B}_{n,a}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}_+$, chacune de ces figures. n représente la complexité de la figure c'est à dire combien de fois le rajout de triangles est répété, et a représente l'aire *foncée* initiale, c'est à dire l'aire du plus grand triangle *foncé* présent sur la Base.

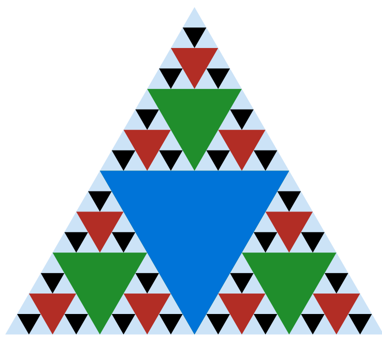
Remarquons que les deux valeurs n et a suffisent à définir complètement une unique Base.

On nomme $\mathcal{B}_{n,a}$ l'aire totale formée par les triangles *foncés* d'une Base $\boldsymbol{B}_{n,a}$.

Ainsi, $\mathcal{B}_{1,a} = a$. Nous rajoutons que $\mathcal{B}_{0,a} = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, cela correspond à la situation où aucun triangle n'est créé donc l'aire est nulle.

b) Tentons maintenant de déterminer l'aire $\mathcal{B}_{n,a}$ de toute Base $\boldsymbol{B}_{n,a}$ en fonction de l'aire a. Dans la suite de cette partie, nous écrirons $\mathcal{B}_n$ pour $\mathcal{B}_{n,a}$ car nous travaillons toujours pour une aire $a = \mathcal{B}_1$.

Toute Base est composée de triangles de différentes tailles :



$\boldsymbol{B}_4$

On nomme $\boldsymbol{T}_1$ le triangle bleu, $\boldsymbol{T}_2$ le triangle vert, $\boldsymbol{T}_3$ le triangle rouge et ainsi de suite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{T}_n$, l'aire d'un *unique* triangle $\boldsymbol{T}_n$.

On remarque que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{B}_1$.

Surface d'un triangle Quelle surface foncée possède un unique triangle $\boldsymbol{T}_{n+1}$ par rapport à la surface de son prédécesseur $\boldsymbol{T}_n$?

Dû à la disposition des triangles équilatéraux, il est clair que $\mathcal{T}_{n+1} = \frac{\mathcal{T}_n}{4}$, donc par récurrence immédiate,

$$\mathcal{T}_n = 4^{-(n-1)}\mathcal{T}_1 = 4^{-(n-1)}\mathcal{B}_1$$

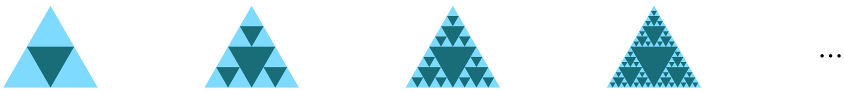
Nombre de triangle Combien de triangles $\boldsymbol{T}_{n+1}$ sont rajoutés par rapport au nombre de triangle $\boldsymbol{T}_n$ déjà présents ?

Chaque triangle $\boldsymbol{T}_n$ existant rajoute 3 triangles $\boldsymbol{T}_{n+1}$, un sur chacun de ses côtés. En notant N_{T_n} le nombre de triangle $\boldsymbol{T}_n$ on a : $N_{T_{n+1}} = 3N_{T_n}$

Pour $n = 1$, il n'y a qu'un seul triangle donc $N_{T_1} = 1$. Par récurrence immédiate on a :

$$N_{T_n} = 3^{n-1}$$

c)



$\boldsymbol{B}_1$ $\boldsymbol{B}_2$ $\boldsymbol{B}_3$ $\boldsymbol{B}_4$ $\boldsymbol{B}_n$

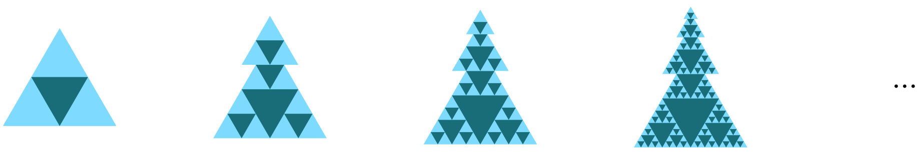
On remarque qu'à chaque fois des triangles *foncés* sont rajoutés mais aucun n'est supprimé. Donc on peut exprimer l'aire d'une Base $\mathcal{B}_n$ en fonction des précédentes. Or nous connaissons la surface d'un triangle $\mathcal{T}_n$ en fonction de $\mathcal{B}_1$ et le nombre de triangle N_{T_n} rajouté à chaque étape. On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{n+1} &= \mathcal{B}_n + N_{T_{n+1}} \times \mathcal{T}_{n+1} \\
\mathcal{B}_{n+1} &= \mathcal{B}_n + 3^n \times 4^{-n}\mathcal{B}_1 \\
\mathcal{B}_{n+1} &= \mathcal{B}_n + \left(\frac{3}{4}\right)^n \mathcal{B}_1 \\
\mathcal{B}_n &= \mathcal{B}_1 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
\mathcal{B}_{n,a} &= a \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right)^k
\end{aligned}$$

---

2) Aire des Sapins.

Comme les données de l'exercice sont des schémas, nous continuons pour le moment de raisonner avec des schémas.



Sapin 1 (S_1) Sapin 2 (S_2) Sapin 3 (S_3) Sapin 4 (S_4) Sapin n (S_n)

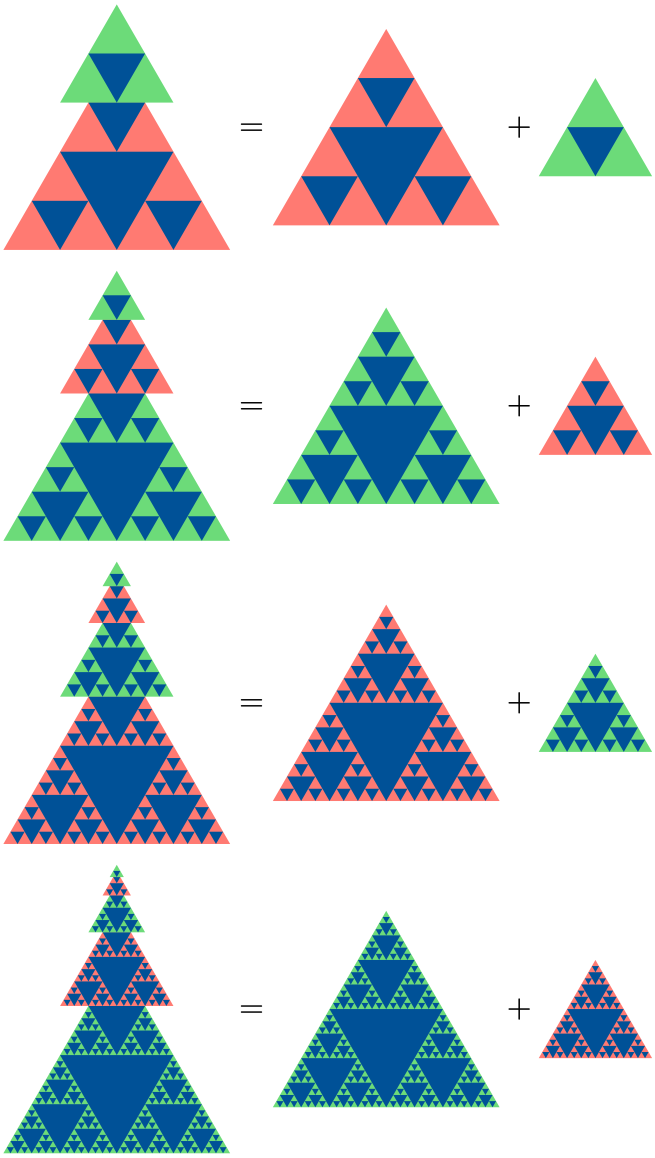
On nomme $\boldsymbol{S}_{n,a}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+$, chacune de ces figures. n représente la complexité de la figure c'est à dire combien de fois le rajout de triangles est répété, et a représente l'aire *foncée* initiale, c'est à dire l'aire du plus grand triangle *foncé* présent sur le Sapin.

Remarquons que les deux valeurs n et a suffisent à définir complètement un unique Sapin.

On nomme $\mathcal{S}_{n,a}$ l'aire totale formée par les triangles *foncés* d'un Sapin $\boldsymbol{S}_{n,a}$.

On remarque que $\boldsymbol{S}_{1,a} = \boldsymbol{B}_{1,a}$. Ainsi, $\mathcal{S}_{1,a} = a = \mathcal{B}_{1,a}$.

La forme complexe de chaque Sapin peut être transformé en deux formes plus simples, qui sont des figures Bases, sans que la surface *foncée* ne change de taille :



On obtient donc la formule suivante pour les aires foncés :

$$\mathcal{S}_{n,a} = \mathcal{B}_{n,a} + \mathcal{B}_{(n-1,\frac{a}{4})}$$

En effet, la plus petite des deux Bases est d'une complexité inférieure de 1 au Sapin et la surface de son plus grand triangle *foncé* est divisé par 4 par rapport à celle du Sapin.

Nous pourrions penser que cette formule n'est pas valable pour $n = 1$ puisque $\boldsymbol{S}_{1,a}$ est déjà une Base et ne pourrait pas être divisé en deux Bases mais comme $\mathcal{B}_{0,a} = 0$ par définition nous obtenons bien que $\mathcal{S}_{1,a} = \mathcal{B}_{1,a} + 0$ ce qui est exact.

$$\mathcal{S}_{n,a} = \mathcal{B}_{n,a} + \mathcal{B}_{\left(n-1,\frac{a}{4}\right)}$$

$$\mathcal{S}_{n,a} = a\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$

$$\mathcal{S}_{n,a} = a\left(\frac{5}{4}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{3}{4}\right)^k + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$$

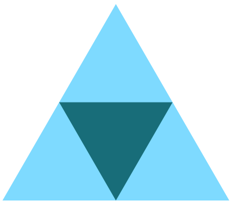
On rappelle l'identité géométrique : Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

$$\mathcal{S}_{n,a} = a\left(\frac{5}{4} \times \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 1}{\frac{3}{4} - 1} + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$$

$$\mathcal{S}_{n,a} = a\left(5 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$$

---

3) Application numérique.



On donne le côté $c = 10$ cm du triangle *clair*. On note a l'aire du triangle *foncé* et a' l'aire du triangle *clair*.

$$a = \frac{1}{4}a'$$

$$a = \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$$

$$a = \frac{\sqrt{3}}{16}c^2$$

On a donc :

$$\mathcal{S}_{\left(n,\frac{\sqrt{3}}{16}c^2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{16}c^2\left(5 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$$

$$\mathcal{S}_{\left(n,\frac{\sqrt{3}}{16}10^2\right)} = \frac{\sqrt{3}}{16}10^2\left(5 - 4\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}\right)$$

4) Limite.

Lorsque n tend vers $+\infty$, $a^n 0$ si $|a| < 1$ avec $a \in \mathbb{R}$.

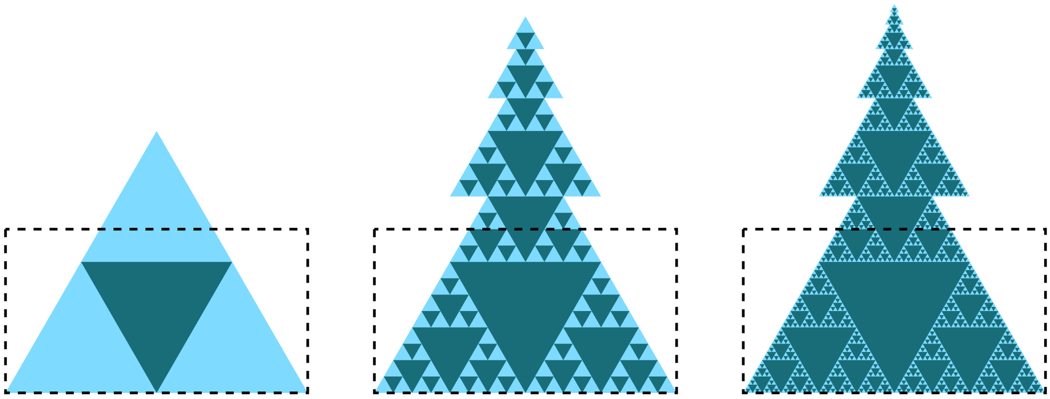
Donc $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Donc l'aire tend vers

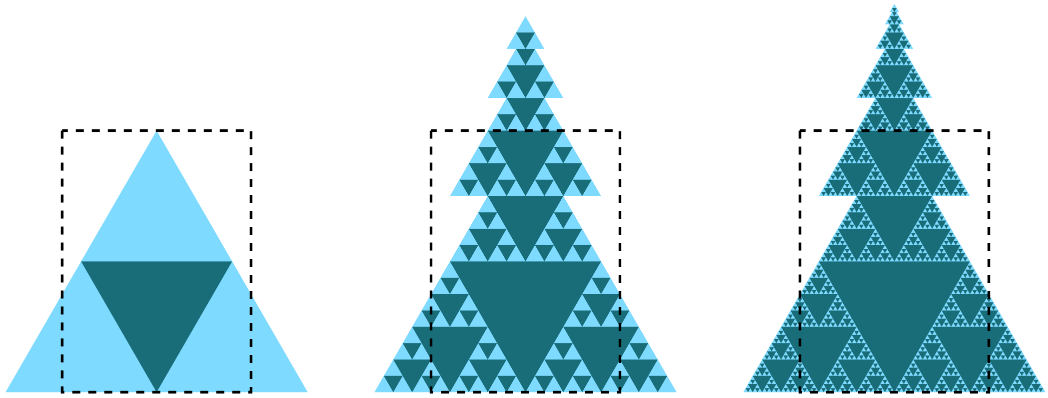
$$\frac{\sqrt{3}}{16} \times 5 \times c^2 = \frac{5}{8}\frac{\sqrt{3}}{2}c \times c$$

Or, $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ est la hauteur d'un triangle équilatéral de base c.

La surface tend donc vers le rectangle suivant :



Ou encore :



On peut visuellement se convaincre en « rabattant » les morceaux extérieurs vers l'intérieur du rectangle que la surface *claire* va tendre vers celle du rectangle. Et comme la surface *foncée* va tendre vers la surface *claire*, la surface *foncée* va tendre également vers l'aire du rectangle.