Devoir maison n°5 : Existence de la fonction exponentielle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Inégalité de Bernoulli

1) **a)** On calcule :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right) &= \left(\frac{n+x}{n}\right)\left(\frac{(n+1)(n+x)-x}{(n+1)(n+x)}\right)\\ &= \frac{n(n+x)+n}{n(n+1)}\\ &= \frac{n+x+1}{n+1} = 1+\frac{x}{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}u_{n+1}(x) &= \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

b) Pour tout x fixé, la suite $\left(-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 par quotient, car $n+a \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ pour tout $a\in\mathbb{R}$. Par définition de la convergence, il existe donc un rang n_0 pour lequel, avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on a pour tout $n \geqslant n_0$ que :

$$-1 < -\frac{1}{2} < -\frac{x}{(n+1)(n+x)} < \frac{1}{2}$$

Similairement, $1+\frac{x}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et on obtient un rang n_1 de la même manière.

c) Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_2$, $n \geqslant n_0$ permet d'appliquer l'inégalité de Bernoulli à $\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$ et $n \geqslant n_1$ permet d'avoir $n+x \neq 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}u_{n+1}(x) &\overset{\text{Bernoulli}}{\geqslant} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n+x}\right)\\ &\geqslant u_n(x)\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n+x}\right) = u_n(x)\frac{n+x}{n}\frac{n}{n+x}\\ &\geqslant u_n(x)\end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante au moins à partir du rang n_2.

Partie B - Convergence de deux suites

Partie C - Existence