Devoir maison n°12 : Suites récurrentes d'ordre 2 non linéaires

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A -

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

1)

a)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $u_n \geqslant 1$:

D'une part, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ sont clairement supérieurs ou égaux à 1. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} \geqslant 1$. Alors, en utilisant la relation de récurrence, il vient :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} \geqslant \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \geqslant 1$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

b)

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$. En utilisant la relation de récurrence, on a :

$$l = \sqrt{l} + \sqrt{l} = 2\sqrt{l} \text{ d'où } l = 4 \text{ ou } l = 0$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$. On en déduit $l = 4$.

c)

---

2)

a)

b)

c)

d)

e)

f)

Partie B -

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}$$

1)

a)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $u_n \geqslant 1$:

D'une part, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ sont clairement supérieurs ou égaux à 1. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} \geqslant 1$. Alors, en utilisant la relation de récurrence, il vient :

$$u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \geqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2 \geqslant 1$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

b)

c)

---

2)

a)

b)

c)

d)

e)

Fin du DM12 - J'ai perdu.