

# Devoir maison n°10 : Théorème de Beatty et jeu de Wythoff

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier  
TE1

## Partie A - Théorème de Beatty

- 1) a) Sans perte de généralité, supposons que  $\alpha \leq 1$ . Alors  $\frac{1}{\alpha} \geq 1$  et comme  $\beta > 0$ ,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > 1$$

Ce qui est une contradiction. Donc  $\alpha < 1$ , et de la même manière  $\beta < 1$ .

- b) Puisque  $x, y \notin \mathbb{Z}$ , on a :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor < x \text{ et } y - 1 < \lfloor y \rfloor < y$$

En sommant les inégalités, on obtient :

$$x + y - 2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor < x + y$$

Soit comme tous les termes sont entiers :

$$x + y - 1 \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y - 1$$

Ce qui donne l'égalité attendue.

- 
- 2) a) Comme  $\alpha \neq 1$ , on peut écrire :

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} - 1 \text{ soit } \beta = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 1}$$

Comme  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et que  $\mathbb{Q}$  est clos sous la somme et l'inversion, on a  $\beta \in \mathbb{Q}$ .

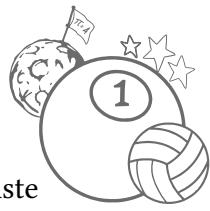
- b) On écrit  $\alpha = \frac{a}{b}$  et  $\beta = \frac{c}{d}$  pour  $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ . Alors :

$$ac = (bc)\alpha \in M(\alpha) \text{ et } ac = (da)\beta \in M(\beta)$$

Donc  $ac \in M(\alpha) \cap M(\beta)$ , qui n'est donc pas vide.

De plus,  $ac \in \mathbb{N}$ . On a donc  $ac \in \text{Sp}(\alpha) \cap \text{Sp}(\beta)$ . Ces ensembles ne sont donc pas disjoints et ne peuvent former une partition de  $\mathbb{N}^*$ . On a donc prouvé que si  $\alpha$  ou  $\beta$  est rationnel, alors  $\text{Sp}(\alpha)$  et  $\text{Sp}(\beta)$  ne peuvent former une partition de  $\mathbb{N}^*$ , i.e la contraposée de l'implication indirecte du théorème de Beatty.

- 
- 3) a) On procède par contradiction. Supposons que  $\beta$  soit rationnel. Alors par le même raisonnement qu'au 2)a),  $\alpha$  est également rationnel, ce qui est une contradiction. Donc  $\beta$  est irrationnel.



**b)** On raisonne à nouveau par contradiction. Supposons que  $M(\alpha) \cap M(\beta) \neq \emptyset$ . Il existe alors  $n, m \in \mathbb{N}^*$  tels que  $n\alpha = m\beta$ . On a alors par hypothèse :

$$\frac{n}{m} = \frac{\alpha}{\beta} = 1 - \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) = 1 - \alpha$$

Donc  $\alpha = 1 - \frac{n}{m}$  est rationnel, ce qui est une contradiction. Donc  $M(\alpha)$  et  $M(\beta)$  sont disjoints.