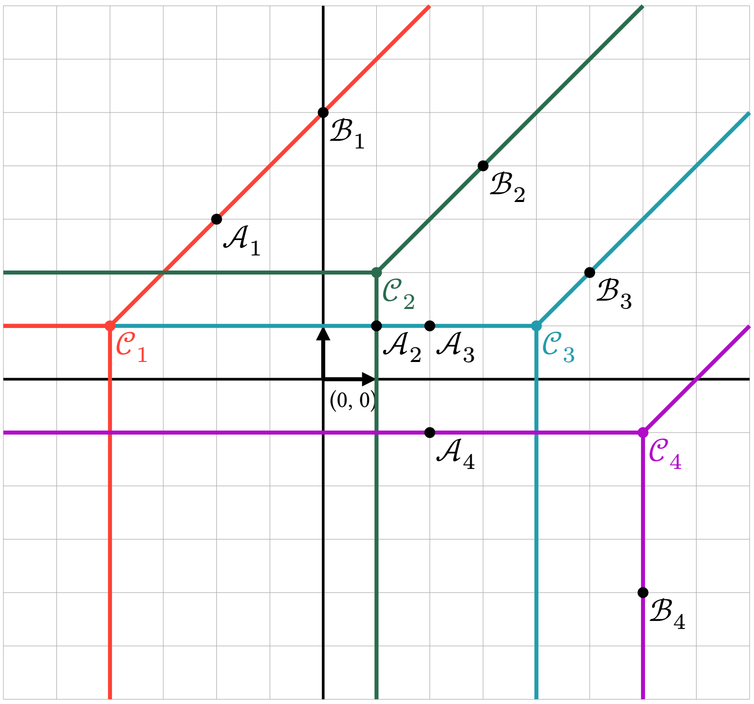
Devoir maison n°10 : Droites Tropicales

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Partie A - Les droites tropicales

$(\mathcal{A}')$ par deux points du plan passe une droite tropicale
$(\mathcal{B}')$ par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale
$(\mathcal{B}')$ deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point.

1) a)



b) On cherche à prouver $(\mathcal{A}')$. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux points quelconques du plan. Par une translation T on se ramène au cas où :

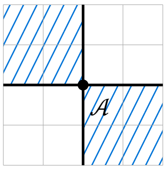
$$\mathcal{A}(0,0) \text{ et } \mathcal{B}(x,y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

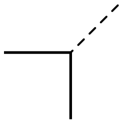
Etudions d'abord des cas particuliers :

Si $x = 0$ et $y = 0$ alors $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, la droite tropicale de centre $\mathcal{A}$ convient.
Si $y = 0$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\max(0,x),0)$ convient.
Si $x = 0$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(0,\max(0,y))$ convient.
Si $x = y$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\min(0,x),\min(0,y))$ convient.

Attaquons nous désormais aux cas généraux :

Si $x < 0$ **et** $y > 0$





style

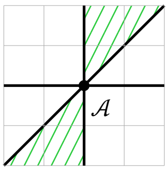
Il existe $\mathcal{C}(0, y)$. Soient les demi-droites :

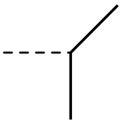
$$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{B}) \text{ par construction, } \mathcal{H} \text{ est parallèle à l'axe des abcisses.}$$
$$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A}) \text{ par construction, } \mathcal{V} \text{ est parallèle à l'axe des ordonnées.}$$

Comme $x < 0$, $\mathcal{H}$ est de direction $-\vec{i}$ et comme $y > 0$, $\mathcal{V}$ est de direction $-\vec{j}$. Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$.

En inversant les rôles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on obtient la deuxième partie rayée.

Si $x > 0$ **et** $y > 0$ **et** $y > x$





style

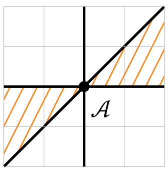
Soit $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à $y = x$ et passant par $\mathcal{B}$. On nomme $\mathcal{C}$ l'intersection entre $\mathcal{D}'$ et l'axe des ordonnées. Comme $y > x$, $y_{\mathcal{C}} > 0$. Soient les demi-droites :

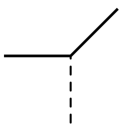
$$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B}) \text{ par construction, } \mathcal{D} \text{ est de direction } \vec{i} + \vec{j}$$
$$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A}) \text{ par construction, } \mathcal{V} \text{ est de direction } -\vec{j}$$

Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$.

En inversant les rôles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on obtient que pour $0 > x$ et $0 > y$ et $x > y$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$, soit la deuxième zone rayée.

Si $x > 0$ **et** $y > 0$ **et** $y < x$





style

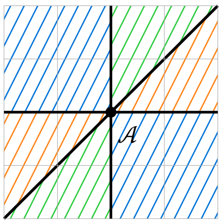
Doit $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à $y = x$ et passant par $\mathcal{B}$. On nomme $\mathcal{C}$ l'intersection entre $\mathcal{D}'$ et l'axe des abcisses. Comme $y < x$, $x_{\mathcal{C}} > 0$. Soient les demi-droites :

$$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B}) \text{ par construction, } \mathcal{D} \text{ est de direction } \vec{i} + \vec{j}$$
$$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{A}) \text{ par construction, } \mathcal{H} \text{ est de direction } -\vec{i}$$

Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$.

En inversant les rôles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on obtient que pour $0 > x$ et $0 > y$ et $x < y$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$, soit la deuxième zone rayée.

Conclusion
En combinant les différentes disjonctions de cas démontrées plus haut on obtient :



Le cas des lignes noires est couvert par les cas particuliers. Nous avons donc prouvé que pour tout point quelconque $\mathcal{B}$, il existe une droite tropicale passant par $\mathcal{B}$ et par l'origine $\mathcal{A}$. Nous pouvons revenir au cas général avec deux points quelconques par la translation inverse de T.

Nous avons donc démontré $(\mathcal{A}')$: par deux points du plan passe une droite tropicale.

Partie B - Addition et Multiplication tropicales

On définit sur $\mathbb{R}$ l'addition tropicale et la multiplication tropicale tel que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad \text{et} \quad a \otimes b = a + b$$

1) On a donc : $3 \oplus 7 = 7$ $\quad -5 \oplus 2 = 2$ $\quad 3 \otimes 7 = 10$ $\quad -5 \otimes 2 = -3$

---

2) $\oplus$ est associatif et commutatif car max est associatif et commutatif.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons sans perte de généralité que $b \leq c$ car $\oplus$ est commutatif.

On a $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes c = a \otimes b \oplus a \otimes c$ puisque $a \otimes b \leq a \otimes c$.

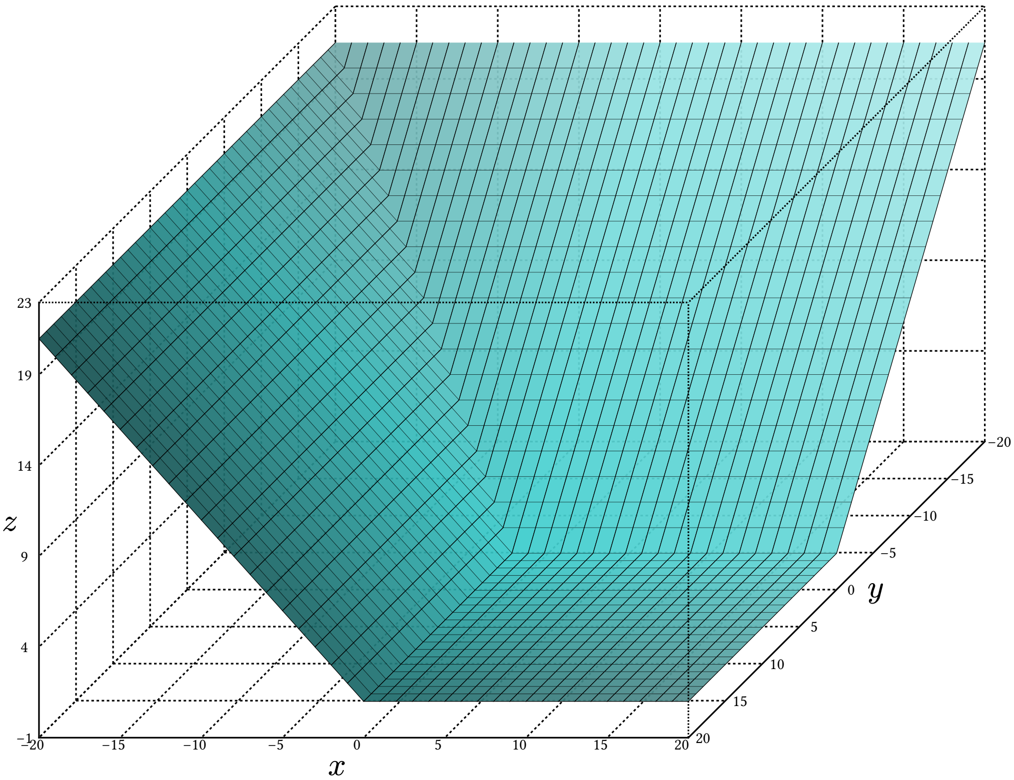
---

3)

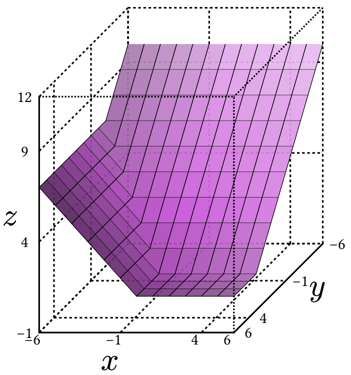
Voici à quoi ressemble une fonction tropicale[1] de degré 1 : $a \otimes x \oplus b \otimes y \oplus c$:

$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$

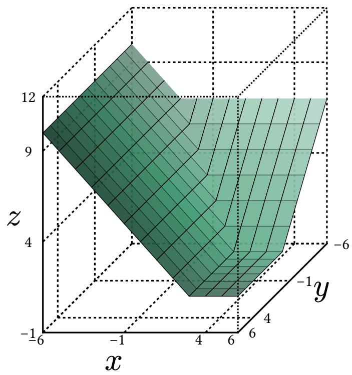
[1]Pour des raisons esthétiques, nous utilisons dans les graphiques l'opposé des valeurs de x et y.



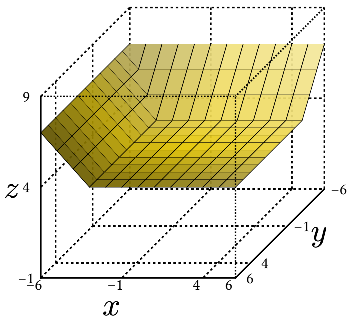
$1 \otimes x \oplus 5 \otimes y \oplus 1$



$5 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$



$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 5$

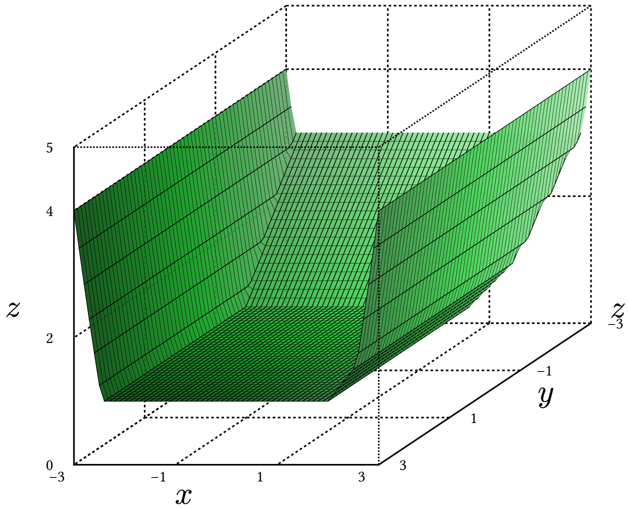


On remarque que modifier les valeurs a, b et c « décale » l'un des « bords ».

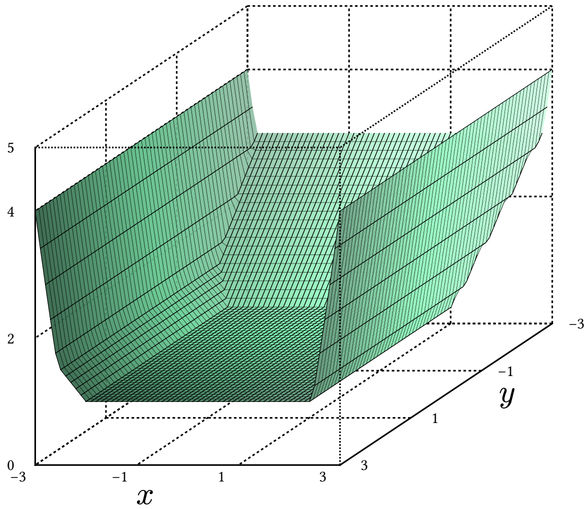
4) Voici à quoi ressemble la fonction tropicale du second degré[2] :

$$1 \oplus (-1) \otimes x \oplus 0 \otimes y \oplus (-5) \otimes x^2$$

D'un côté :



De l'autre en prenant l'opposé pour l'axe x :



[2]On prend l'opposé pour l'axe y