

Devoir maison n°1 : Fonctions contractantes, dilatantes et points fixes

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Problème 1 -

Partie A - Fonctions contractantes et rétrécissantes.

1) Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$, et f une fonction k -lipschitzienne définie sur I . Montrons que cette fonction est continue.

Soit y dans I . Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$. Supposons $|x - y| < \alpha$, on obtient :

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{k} \iff k|x - y| < \varepsilon$$

Comme f est lipschitzienne, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < \varepsilon$ donc $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Nous avons prouvé que quelque soit le point y que l'on choisit dans le domaine de définition de f , $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ie toute fonction lipschitzienne est continue.

2) Soit f une fonction contractante définie sur I , et $x, y \in I$. Il existe donc $k \in]0, 1[$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ (*).

Or,

$$\begin{aligned} k < 1 &\implies k|x - y| < |x - y| \\ &\implies |f(x) - f(y)| < |x - y| \text{ d'après (*)} \end{aligned}$$

f est donc rétrécissante.

De plus,

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \implies |f(x) - f(y)| \leq 1 \times |x - y|$$

f est donc 1-lipschitzienne.

3) Soient $a \in \mathbb{R}$, $I = [a, +\infty[$, et $f : x \mapsto x + \frac{1}{x-a+1}$ pour tous $x \in I$.

a) f est dérivable sur I . Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-a+1)^2}$. Or,



$$\begin{aligned}
x \in I &\Rightarrow x \geq a \\
&\Rightarrow x - a \geq 0 \\
&\Rightarrow x - a + 1 \geq 1 \\
&\Rightarrow (x - a + 1)^2 \geq 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{(x - a + 1)^2} \leq 1 \\
&\Rightarrow 0 \leq f'(x).
\end{aligned}$$

La dérivée de f est positive pour tout $x \in I$, donc f est bien croissante sur I .

Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned}
x \in I &\Rightarrow x \geq a \\
&\Rightarrow x - a \geq 0 \\
&\Rightarrow x - a + 1 > 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{x - a + 1} > 0.
\end{aligned}$$

$x \geq a$, donc par somme d'inégalités, $x + \frac{1}{x-a+1} \geq a$ i.e. $f(x) \in I$.

b)

- Partie B - Fonctions rétrécissantes et point fixe.
- Partie C - Fonctions dilatantes.

On fixe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dilatante.

1) a) La fonction $g : x \mapsto x + e^x$ est continue sur \mathbb{R} comme somme de fonctions continues. De plus, si $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &= |(x - y) + (e^x - e^y)| \stackrel{\text{Triangulaire}}{\geq} |x - y| + |e^x - e^y| \\
&\geq |x - y|
\end{aligned}$$

Donc g est bien dilatante.

b) La fonction g_λ est continue sur $] -\infty; \lambda[$ et sur $]\lambda; +\infty[$ car ses restrictions à ces intervalles sont continues. Montrons que g_λ est continue en λ . D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \lambda^-} -x = -\lambda$$

et d'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \lambda^+} \lambda - 2x = \lambda - 2\lambda = -\lambda$$

Comme les limites de g (qui existent par continuité avant et après λ) en λ coïncident avec $g(\lambda) = -\lambda$, on en déduit que g est continue en λ et donc sur tout \mathbb{R} . Montrons maintenant que g est dilatante. On distingue trois cas :



- $x, y < \lambda : |g(x) - g(y)| = |y - x| = |x - y| \geq |x - y|$
- $x, y \geq \lambda : |g(x) - g(y)| = |2y - 2x| = 2|x - y| \geq |x - y|$
- $x < \lambda$ et $y \geq \lambda : |g(x) - g(y)| = |2y - \lambda - x| = |(y - \lambda) + (y - x)| \stackrel{\text{Triangulaire}}{\geq} |x - y|$

Ce qui montre que g est bien dilatante.

2) a) Soit $\lambda \in]f(a_1); f(a_2)[\cap]f(a_3); f(a_2)[$. Cette intersection n'est pas vide, car elle contient au moins $] \max(f(a_1), f(a_3)); f(a_2)[$. Alors en posant $g : x \mapsto f(x) - \lambda$, qui est continue par somme, comme $g(a_1), g(a_3) < 0$ et $g(a_2) > 0$, on obtient en appliquant TVI un $b \in]a_1; a_2[$ et un $c \in]a_2; a_3[$ tels que $g(b) = g(c) = 0$, c'est à dire $f(b) = f(c) = \lambda$.

b) Comme f est dilatante,

$$|f(b) - f(c)| = 0 \geq |b - c| \geq 0$$

On en déduit que $|b - c| = 0$, donc $b = c$. Donc f dilatante implique f injective.

c) Supposons que f ne soit pas strictement monotone, i.e f n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. Comme f n'est pas strictement décroissante, il existe $a_1 < a_2$ tels que $f(a_1) \leq f(a_2)$; a fortiori, comme f est injective, $f(a_1) < f(a_2)$.

TODO : l'argument est long

3) On sait que f est continue et strictement monotone. Quitte à travailler avec $-f$ au lieu de f , supposons que f est strictement croissante.

Soit $x \geq 0$. Alors $|f(x) - f(0)| \geq |x|$, c'est à dire que $f(x) \geq x + f(0)$. Comme la fonction $x \mapsto x + f(0)$ n'est pas majorée sur \mathbb{R}^+ , a fortiori, f n'est pas majorée sur \mathbb{R}^+ et donc sur \mathbb{R} .

Similairement, soit $x \leq 0$. Alors $|f(x) - f(0)| = f(0) - f(x) \geq |x| = -x$, et on obtient $x + f(0) \geq f(x)$. On en déduit donc que f n'est pas minorée sur \mathbb{R}^- et donc sur \mathbb{R} .

Donc f n'est pas bornée.

4) a) Soient $x \geq y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} h(x) - h(y) &= f(x) - f(y) + y - x \geq 0 \\ \Leftrightarrow f(x) - f(y) &\stackrel{\text{croissance}}{=} |f(x) - f(y)| \geq x - y = |x - y| \end{aligned}$$

Où cette dernière inégalité est vraie car f est dilatante. Donc h est bien croissante.

b) La fonction $h : x \mapsto f(x) - x$ est strictement négative, mais est croissante. Par le théorème de la limite monotone, on déduit l'existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \leq 0$. Ainsi, par quotient de limites :

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.



c) La fonction $h : x \mapsto f(x) - x$ est strictement positive et croissante. En particulier, la fonction décroissante $x \mapsto h(-x)$ est strictement positive et on déduit du théorème de la limite monotone l'existence de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) \geq 0$$

Ainsi, encore par quotient de limites,

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

d) Si a, b sont des points fixes de f , alors $h(a) = h(b) = 0$. Comme h est croissante, pour tous $c \in [a; b]$,

$$h(a) = 0 \leq h(c) \leq h(b) = 0$$

D'où $h(c) = 0$. Donc c est un point fixe de f , et $[a; b] \subseteq F$.