

# Devoir maison n°9 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier  
TE1

## Problème 1 - Bac 1974

Soient  $a, b \in \mathbb{R}^*$ . On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

Soit  $\Delta$  le discriminant de l'équation caractéristique  $x^2 - ax - b = 0$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .

1)

$$u_2 = au_1 + bu_0$$

$$u_3 = au_2 + bu_1 = a(au_1 + bu_0) + bu_1 = (a^2 + b)u_1 + bu_0$$

$$u_4 = au_3 + bu_2 = a((a^2 + b)u_1 + bu_0) + b(au_1 + bu_0) = (a^3 + 2ab)u_1 + (ab + b^2)u_0$$

$$\begin{aligned} u_5 &= au_4 + bu_3 = (a^4 + 2a^2b)u_1 + (a^2b + ab^2)u_0 + (a^2b + b^2)u_1 + b^2u_0 \\ &= (a^4 + 3a^2b + b^2)u_1 + (a^2b + ab^2 + b^2)u_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_6 &= au_5 + bu_4 = (a^5 + 3a^3b + ab^2)u_1 + (a^3b + a^2b^2 + ab^2)u_0 + (a^3b + 2ab^2)u_1 + (ab^2 + b^3)u_0 \\ &= (a^5 + 4a^3b + 3ab^2)u_1 + (a^3b + a^2b^2 + 2ab^2 + b^3)u_0 \end{aligned}$$

---

2) On suppose  $\Delta > 0$ . On note  $\alpha$  et  $\beta$  les solutions de l'équation caractéristique.

a) D'après les relations coefficients-racines d'un polynôme du second degré, on a :

$$\alpha + \beta = -\frac{-a}{1} = a \text{ et } \alpha\beta = \frac{-b}{1} = -b.$$

Ainsi, la relation (1) peut se réécrire comme suit :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= (\alpha + \beta)u_{n+1} - \alpha\beta u_n \\ \text{i.e. } u_{n+2} - \alpha u_{n+1} &= \beta(u_{n+1} - \alpha u_n). \end{aligned}$$

b) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$  et  $w_n = u_{n+1} - \beta u_n$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . D'une part,  $v_{n+1} = u_{n+2} - \alpha u_{n+1}$  soit d'après la relation précédente,  $v_{n+1} = \beta(u_{n+1} - \alpha u_n) = \beta v_n$ . La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc géométrique de raison  $\beta$ .

D'autre part,



$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= u_{n+2} - \beta u_{n+1} \\
&= (\alpha + \beta)u_{n+1} - \alpha\beta u_n - \beta u_{n+1} \\
&= \alpha u_{n+1} - \alpha\beta u_n \\
&= \alpha w_n.
\end{aligned}$$

La suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc géométrique de raison  $\alpha$ .

**c)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
v_n &= v_0 \beta^n = (u_1 - \alpha u_0) \beta^n \\
w_n &= w_0 \alpha^n = (u_1 - \beta u_0) \alpha^n
\end{aligned}$$

**d)** D'après la question ci-dessus et d'après les définitions respectives de  $(v_n)$  et  $(w_n)$ ,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - \alpha u_n &= (u_1 - \alpha u_0) \beta^n \\
u_{n+1} - \beta u_n &= (u_1 - \beta u_0) \alpha^n
\end{aligned}$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient :  $(\alpha - \beta)u_n = (u_1 - \beta u_0)\alpha^n - (u_1 - \alpha u_0)\beta^n$ . Puisque  $\Delta > 0$ ,  $\alpha \neq \beta$  et  $\alpha - \beta \neq 0$ . Ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{u_1 - \beta u_0}{\alpha - \beta} \alpha^n - \frac{u_1 - \alpha u_0}{\alpha - \beta} \beta^n \\
\text{ou encore } u_n &= A\alpha^n - B\beta^n \\
\text{avec } A &= \frac{u_1 - \beta u_0}{\alpha - \beta} \text{ et } B = \frac{u_1 - \alpha u_0}{\alpha - \beta}.
\end{aligned}$$

**3)** On suppose  $\Delta = 0$ . On note  $\alpha$  la solution de l'équation caractéristique.

**a)** En reprenant la question 2.a. en remplaçant  $\beta$  par  $\alpha$ , dans la mesure où  $\alpha$  est ici une racine double, on trouve :  $u_{n+2} - \alpha u_{n+1} = \alpha(u_{n+1} - \alpha u_n)$ .

**b)** Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \alpha^n s_n$ . La relation (1) devient alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned}
\alpha^{n+2}s_{n+2} - \alpha\alpha^{n+1}s_{n+1} &= \alpha(\alpha^{n+1}s_{n+1} - \alpha\alpha^n s_n) \\
\alpha^{n+2}s_{n+2} - \alpha^{n+2}s_{n+1} &= \alpha^{n+2}s_{n+1} - \alpha^{n+2}s_n \\
s_{n+2} - s_{n+1} &= s_{n+1} - s_n.
\end{aligned}$$

La différence entre deux termes consécutifs de  $(s_n)$  demeure constante. On en déduit que la suite  $(s_n)$  est arithmétique ; on note  $R$  sa raison.

**c)** La suite  $(s_n)$  étant arithmétique de raison  $R$  et de premier terme  $s_0$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
s_n &= s_0 + nR \\
\frac{u_n}{\alpha^n} &= \frac{u_0}{\alpha^0} + n(s_1 - s_0) \\
u_n &= \alpha^n \left( u_0 + n \left( \frac{u_1}{\alpha} - u_0 \right) \right)
\end{aligned}$$



Alors, en posant  $A = u_0$  et  $B = \frac{u_1}{\alpha} - u_0$ , on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha^n(A + nB).$$