

Mathématiques : Devoir maison n° 5

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Partie A - Méthode de Cardan

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (E_0)$$

1)

$$X = x + \frac{a}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = X - \frac{a}{3}$$

On remplace x dans (E_0) .

$$\begin{aligned} & (X - \frac{a}{3})^3 + a(X - \frac{a}{3})^2 + b(X - \frac{a}{3}) + c = 0 \\ \Leftrightarrow & X^3 - 3X^2(\frac{a}{3}) + 3X(\frac{a}{3})^2 - (\frac{a}{3})^3 + a(X^2 - 2X(\frac{a}{3}) + (\frac{a}{3})^2) + bX - \frac{ab}{3} + c = 0 \\ \Leftrightarrow & X^3 - aX^2 + aX^2 + bX + \frac{a^2}{3}X - 2(\frac{a^2}{3}X) - \frac{a^3}{3^3} + \frac{a^3}{3^2} - \frac{ab}{3} + c = 0 \\ \Leftrightarrow & X^3 + (b - \frac{a^2}{3})X + \frac{2a^3}{3^3} - \frac{ab}{3} + c = 0 \\ \Leftrightarrow & X^3 + pX + q = 0 \end{aligned} \quad (E_1)$$

$$\text{avec } p, q \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} p = (b - \frac{a^2}{3}) \\ q = \frac{2a^3}{3^3} - \frac{ab}{3} + c \end{cases}$$

2)

a)

$$X = u + v \quad \text{avec} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

On remplace X dans (E_1) .

$$\begin{aligned} & (u + v)^3 + p(u + v) + q = 0 \\ \Leftrightarrow & u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0 \\ \Leftrightarrow & u^3 + v^3 + v(3uv + p) + u(3uv + p) + q = 0 \\ \Leftrightarrow & u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0 \end{aligned} \quad (E_2)$$

b)

On impose $3uv + p = 0$ donc (E_2) devient :

$$u^3 + v^3 + q = 0 \quad (E_3)$$

c)

$$\begin{array}{lll}
& 3uv + p = 0 & \text{(relation imposée)} \\
\Leftrightarrow & uv = \frac{-p}{3} & \\
\Leftrightarrow & u^3 v^3 = \frac{-p^3}{3^3} & \text{(on élève au cube)} \quad (E_4)
\end{array}$$

d)

$$\begin{array}{lll}
& u^3 + v^3 + q = 0 & \text{d'après } (E_3) \\
\Leftrightarrow & u^3 + \frac{u^3 v^3}{u^3} + q = 0 & (*) \\
\Leftrightarrow & u^3 + \frac{-p^3}{3^3 u^3} + q = 0 & \text{d'après } (E_4) \\
\Leftrightarrow & u^6 - \frac{p^3}{3^3} + qu^3 = 0 & \text{(on multiplie par } u^3)
\end{array}$$

Avec $U = u^3$ on a :

$$U^2 + qU - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \quad (E_5)$$

qui est une équation du second degré, u^3 est donc solution d'une équation du second degré.

À l'étape (*) nous aurions pu multiplier et diviser par v^3 sur u^3 , nous aurions alors obtenu une équation similaire à (E_5) mais avec v à la place de u .

u^3 et v^3 sont donc solution d'une fonction du second degré.