

Devoir maison n°3 : Théorème de la corde universelle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Exemples.

Dans les parties A et B, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1) Soient $f : x \mapsto 1 - |2x - 1|$ définie sur $[0, 1]$, et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

On a $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = 1 - \left|2x + \frac{2}{n} - 1\right|$.

De plus, $n \geq 2 \implies 1 \geq \frac{2}{n} \implies \frac{1}{2} \geq \frac{1}{n} \implies \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geq 0$.

x	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{2}$	1
$ 2x - 1 $	$-2x + 1$	$-2x + 1$	0	$2x - 1$
$f(x)$	$2x$	$2x$	0	$-2x + 2$
$ 2x - 1 + \frac{2}{n} $	$-2x + 1 - \frac{2}{n}$	0	$2x - 1 + \frac{2}{n}$	$2x - 1 + \frac{2}{n}$
$f\left(x + \frac{1}{n}\right)$	$2x + \frac{2}{n}$	$-2x + 2 - \frac{2}{n}$	$-2x + 2 - \frac{2}{n}$	$-2x + 2 - \frac{2}{n}$
$f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$	$-\frac{2}{n}$	$4x - 2 + \frac{2}{n}$	$\frac{2}{n}$	$\frac{2}{n}$

L'équation $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ équivaut à $f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) = 0$ qui n'a pas de solutions sur $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right]$ d'après les tableau d'expressions.

Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right]$,

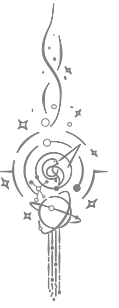
$$\begin{aligned} f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) = 0 &\iff 4x - 2 + \frac{2}{n} = 0 \\ &\iff x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Et :

$$n \geq 2 \implies n > 0 \implies \begin{cases} 2n > n \\ \frac{1}{2n} > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{2n} < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Notre solution est donc acceptable.

$$S = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right\}.$$



2) Soit $f : x \mapsto 16x^2(1-x)^2$ définie sur $[0, 1]$. Pour tout $x \in [0, \frac{1}{n}]$,

$$f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$$

$$\Leftrightarrow f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 16\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 - x - \frac{1}{n}\right)^2 - 16x^2(1-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\left(x + \frac{1}{n}\right)\left(1 - x - \frac{1}{n}\right)\right)^2 - (x(1-x))^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - x^2 - \frac{x}{n} + \frac{1}{n} - \frac{x}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^2 - (x - x^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-x^2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2}\right)^2 - (x - x^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-x^2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2} + x - x^2\right)\left(-x^2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2} - x + x^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(-2x^2 + \left(2 - \frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(-\frac{2}{n}x + \frac{n-1}{n^2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + \left(2 - \frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2} = 0 \vee -\frac{2}{n}x + \frac{n-1}{n^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + \frac{2n-2}{n}x + \frac{n-1}{n^2} = 0 \vee x = \frac{n-1}{2n}$$

Et :

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{n-1}{2n} \leq 1 - \frac{1}{n} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq n-1 \\ n-1 \leq 2n-2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq n \\ 0 \leq n-1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow n \geq 1 \end{aligned}$$

Vrai car $n \geq 2$, donc par équivalence, $\frac{n-1}{2n} \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Cette solution est donc acceptable, et ainsi l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ admet au moins cette solution sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

3) Soit $f : x \mapsto x(e - e^x)$ définie et dérivable 2 fois sur $[0, 1]$.

a)

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = e - e^x + x(-e^x) = e - e^x - xe^x$$

$$f''(x) = -e^x - e^x - xe^x = -e^x(2 + x)$$

Or d'une part, $e^x > 0$, et d'autre part, $x \geq 0$ donc $x + 2 > 0$. Ainsi $f''(x) < 0$ pour tout $x \in [0, 1]$, et f' est donc strictement décroissante sur ce même intervalle.



$f'(0) = e - 1 > 0$ et $f'(1) = e - e - e = -e < 0$ donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

x	0	α	1
$f''(x)$	—		
f'	$e - 1$	0	$-e$
$f'(x)$	+	0	—
f	0	$f(\alpha)$	0

b) On recherche les solutions de l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ pour tout $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$.

On pose

$$\begin{aligned}
 g(x) &= f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \\
 &= \frac{1}{n}\left(e - e^{x+\frac{1}{n}}\right) + x\left(e - e^{x+\frac{1}{n}}\right) - x(e - e^x) \\
 &= \frac{1}{n}\left(e - e^{x+\frac{1}{n}}\right) + x\left(e^x - e^{x+\frac{1}{n}}\right)
 \end{aligned}$$

Déterminons le signe de g en 0 et $1 - \frac{1}{n}$.

- $g(0) = \frac{1}{n}\left(e - e^{\frac{1}{n}}\right)$

Or $2 \leq n \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{n} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} \leq -e^{\frac{1}{n}}$ par stricte croissance de l'exponentielle sur \mathbb{R} . Donc

$$0 < e - e^{\frac{1}{2}} \leq e - e^{\frac{1}{n}}$$

et comme $\frac{1}{n} > 0$, on a $g(0) > 0$.

- $g\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(e - e^{1-\frac{1}{n}}\right)$

Or d'une part $2 \leq n \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{n}$.



De plus, $0 < \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1 > 1 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow -e < -e^{1-\frac{1}{n}} \Leftrightarrow 0 < e - e^{1-\frac{1}{n}}$ par stricte croissance de l'exponentielle sur \mathbb{R} .

On a donc $g(1 - \frac{1}{n}) < 0$.

Comme g est continue par opérations et compositions de fonctions continues et que $g(0)$ et $g(1 - \frac{1}{n})$ sont de signes opposés, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $g(c) = 0$ ie il existe au moins une solution à l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ dans $[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Partie B - Généralisation.

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Pour tout $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on pose $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$.

1) La fonction continue $x \mapsto x + \frac{1}{n}$ a son ensemble image inclus dans $[0, 1]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Or f est continue sur $[0, 1]$ donc g est continue sur $[0, 1]$ par opérations et composition de fonctions continues sur $[0, 1]$.

2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \\ &= f(0) - f(1) \quad \text{par télescopage} \\ &= 0 \quad \text{car } f(0) = f(1) \end{aligned}$$

3) On recherche s'il existe $\alpha \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$,

- soit $g(\frac{k}{n})$ est égal à 0 pour tous $k \in [0, n-1]$ et l'on peut prendre n'importe quel k pour avoir $\alpha = \frac{k}{n}$ puisque $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ donc $\frac{k}{n} \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$.
- soit il existe k' tel que $g(\frac{k'}{n}) \neq 0$. Dans ce cas puisque la somme vaut 0, il existe nécessairement au moins un k'' tel que $g(\frac{k''}{n})$ soit de signe opposé à $g(\frac{k'}{n})$. Comme g est continue sur $[0, 1]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires¹ $\alpha \in [\frac{k'}{n} \leftrightarrow \frac{k''}{n}]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $[\frac{k'}{n} \leftrightarrow \frac{k''}{n}] \subseteq [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on a bien $\alpha \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$.

¹Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $[a \leftrightarrow b] = \begin{cases} [a, b] & \text{si } a \leq b \\ [b, a] & \text{si } b < a \end{cases}$



Partie C - Généraliser encore ?

Soit $T \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{T} \notin \mathbb{Z}$, et f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. On considère $f : x \mapsto \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - x \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)$ d'inconnue $x \in [0, 1 - T]$.

1) Comme la fonction sinus est continue sur \mathbb{R} et que $T \neq 0$, f est continue sur $[0, 1]$ par opérations et composition de fonctions continues.

$$f(0) = \sin^2(0) - 0 = 0$$

$$f(1) = \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0$$

Donc on a bien $f(0) = f(1)$.

2)

$$\begin{aligned} f(x) - f(x+T) &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \underbrace{x \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)}_{=0} - \sin^2\left(\frac{\pi(x+T)}{T}\right) + (x+T) \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{T} + \pi\right) + T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \left(\sin\left(\frac{\pi x}{T}\right) \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \cos\left(\frac{\pi x}{T}\right) \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \right)^2 + T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\ &= T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \end{aligned}$$

Or $T \neq 0$ et comme $\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{T} = 0$ ou $\frac{\pi}{T} = \pi$ et $T \neq 1$, on a que pour tout x dans $[0, 1 - T]$, $f(x) - f(x+T) > 0$

3) On a que $f(x) - f(x+T) > 0$ ie $f(x) > f(x+T)$ donc $f(x) \neq f(x+T)$ pour tout x dans $[0, 1 - T]$.

$f(x+T) = f(x)$ est impossible pour tout x dans $[0, 1 - T]$.