

Devoir maison n°13 : Calcul de $\zeta(2)$

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1) Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^2} > 0$, la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est strictement croissante. De plus, $u_1 = 1 \leq v_1 = 1$ et pour tout $k \geq 2$, par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = v_n$$

2) La suite (v_n) est convergente. En effet, pour tout $n \geq 2$:

$$v_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$. Comme v_n converge, alors elle est majorée. (u_n) est donc alors également majorée, et croissante. Donc (u_n) converge par le théorème de la limite monotone.

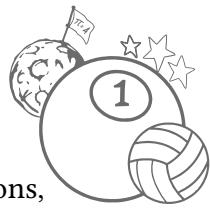
Partie B - Analyse de (u_n)

1) a) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n(0) = \sum_{k=1}^n \cos(0) = n$. De plus, pour tout $t \in]0; \pi]$:

$$\begin{aligned} C_n(t) &= \sum_{k=1}^n \Re(e^{ikt}) = \Re\left(\sum_{k=1}^n e^{ikt}\right) \\ &\stackrel{e^{it} \neq 1}{=} \Re\left(e^{it} \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1}\right) \\ &\stackrel{\text{Angle moitié}}{=} \Re\left(e^{it} \frac{e^{i\frac{n}{2}t} \cdot 2 \sin(\frac{nt}{2})}{e^{i\frac{t}{2}} \cdot 2 \sin(\frac{t}{2})}\right) \\ &= \frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \Re\left(e^{\frac{i(n+1)}{2}t}\right) \\ &= \frac{\sin(\frac{nt}{2}) \cos(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C_n est une somme finie de fonctions continues sur $[0; \pi]$, et est donc continue sur $[0; \pi]$.

c) TODO



d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0; \pi]$, $D_n(t) = 1 + 2C_n(t)$. Par continuité de C_n et opérations, D_n est également continue sur $[0; \pi]$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $t \mapsto C_n(t)$ sont de classe C^∞ par opérations (\cos est de classe C^∞). On peut donc calculer par intégration par parties :

TODO : d droit

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = \left[\frac{1}{n} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sin(nt) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt \\ \stackrel{\sin(k\pi)=0}{=} -\frac{1}{n} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt$$

Ainsi que :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt = \left[\frac{1}{n} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) (-\cos(nt)) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n\pi} (-\cos(nt)) dt \\ = \left[\frac{1}{n} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) (-\cos(nt)) \right]_0^\pi + \left[\frac{1}{n^2\pi} (-\sin(nt)) \right]_0^\pi$$

On a :

$$\left[\frac{1}{n} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) (-\cos(nt)) \right]_0^\pi = \left(0 - \frac{1}{n} (-1) (-\cos(0)) \right) = -\frac{1}{n} \text{ et} \\ \left[\frac{1}{n^2\pi} (-\sin(nt)) \right]_0^\pi \stackrel{\sin(k\pi)=0}{=} 0$$

On en conclut donc que :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = -\frac{1}{n} \left(-\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n^2}$$