

Devoir maison n°1 : Fonctions contractantes, dilatantes et points fixes

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Problème 1 - Problème unique.

Partie A - Fonctions contractantes et rétrécissantes.

1) Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$, et f une fonction définie sur I telle que pour tous $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

2) Soit f une fonction contractante définie sur I , et $x, y \in I$. Il existe donc $k \in]0, 1[$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ (*).

Or : $k < 1 \implies k|x - y| < |x - y| \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|$ d'après (*)

f est donc rétrécissante.

De plus,

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \implies |f(x) - f(y)| \leq 1 \times |x - y|$$

f est donc 1-lipschitzienne.

Partie B - Fonctions rétrécissantes et point fixe.

Partie C - Fonctions dilatantes.