

# Devoir maison n°1 : Fonctions contractantes, dilatantes et points fixes

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier  
TE1

## Problème 1 -

Partie A - Fonctions contractantes et rétrécissantes.

1) Soient  $k \in \mathbb{R}_+^*$ , et  $f$  une fonction  $k$ -lipschitzienne définie sur  $I$ . Montrons que cette fonction est continue.

Soit  $y$  dans  $I$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , posons  $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$ . Supposons  $|x - y| < \alpha$ , on obtient :

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{k} \iff k|x - y| < \varepsilon$$

Comme  $f$  est lipschitzienne,  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < \varepsilon$  donc  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ .

Nous avons prouvé que quelque soit le point  $y$  que l'on choisit dans le domaine de définition de  $f$ ,  $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$  ie toute fonction lipschitzienne est continue.

---

2) Soit  $f$  une fonction contractante définie sur  $I$ , et  $x, y \in I$ . Il existe donc  $k \in ]0, 1[$  tel que  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$  (\*).

Or,

$$\begin{aligned} k < 1 &\implies k|x - y| < |x - y| \\ &\implies |f(x) - f(y)| < |x - y| \text{ d'après (*)} \end{aligned}$$

$f$  est donc rétrécissante.

De plus,

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \implies |f(x) - f(y)| \leq 1 \times |x - y|$$

$f$  est donc 1-lipschitzienne.

---

3) Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $I = [a, +\infty[$ , et  $f : x \mapsto x + \frac{1}{x-a+1}$  pour tous  $x \in I$ .

a)  $f$  est dérivable sur  $I$ . Pour tout  $x \in I$ ,  $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-a+1)^2}$ . Or,



$$\begin{aligned}
 x \in I &\Rightarrow x \geq a \\
 &\Rightarrow x - a \geq 0 \\
 &\Rightarrow x - a + 1 \geq 1 \\
 &\Rightarrow (x - a + 1)^2 \geq 1 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{(x - a + 1)^2} \leq 1 \\
 &\Rightarrow 0 \leq f'(x).
 \end{aligned}$$

La dérivée de  $f$  est positive pour tout  $x \in I$ , donc  $f$  est bien croissante sur  $I$ .

Soit  $x \in I$ .

$$\begin{aligned}
 x \in I &\Rightarrow x \geq a \\
 &\Rightarrow x - a \geq 0 \\
 &\Rightarrow x - a + 1 > 0 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{x - a + 1} > 0.
 \end{aligned}$$

$x \geq a$ , donc par somme d'inégalités,  $x + \frac{1}{x-a+1} \geq a$  i.e.  $f(x) \in I$ .

**b)** Cherchons désormais à montrer que  $f$  est rétrécissante. Soient  $x, y \in I$  tel que  $x \neq y$ . On suppose sans perte de généralité que  $x < y$  et comme  $f$  est croissante sur  $I$

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(y)| &< |x - y| \Leftrightarrow f(y) - f(x) < y - x \\
 &\Leftrightarrow y - x + \frac{1}{y - a + 1} - \frac{1}{x - a + 1} < y - x \\
 &\Leftrightarrow y - a + 1 > x - a + 1 \\
 &\Leftrightarrow x < y
 \end{aligned}$$

Nous avons prouvé que  $f$  est rétrécissante.

**c)** Démontrons par l'absurde que  $f$  n'est pas contractante. On suppose  $f$  contractante ie  $f$  est  $k$ -lipschitzienne avec  $k \in ]0, 1[$ .

Avec  $t \in \mathbb{R}_+$ , on s'intéresse aux réels  $a + t$  et  $a + t + 1$  qui sont compris dans  $I = [a, +\infty[$ .  $f$  doit vérifier en particulier :

$$\begin{aligned}
 |f(a + t + 1) - f(a + t)| &\leq k|a + t + 1 - a - t| \\
 \Leftrightarrow \left| \frac{(a + t + 1 - a - t)((a + t + 1 - a + 1)(a + t - a + 1) - 1)}{(a + t + 1 - a + 1)(a + t - a + 1)} \right| &\leq k \\
 \Leftrightarrow \left| \frac{(1)((t + 1)(t + 2) - 1)}{(t + 1)(t + 2)} \right| &\leq k \\
 \Leftrightarrow \left| 1 - \frac{1}{(t + 1)(t + 2)} \right| &\leq k
 \end{aligned}$$



Or  $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t+1)(t+2) = +\infty$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| 1 - \frac{1}{(t+1)(t+2)} \right| = 1$ .

On en conclue que  $|f(a+t+1) - f(a+t)|$  tendant vers 1 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , il n'est pas possible de majorer cette expression dans tous les cas possibles par un réel  $k$  compris dans  $]0, 1[$ . Nous arrivons à une contradiction,  $f$  n'est donc pas contractante.

**4)** Soit la fonction  $f \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x + \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

**a)** On cherche à prouver que  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- Sur l'intervalle  $] -\infty, 1]$ ,  $f$  est constante.
- Sur l'intervalle  $]1, +\infty[$ ,  $f$  est dérivable comme somme de fonctions dérivables.

On a alors  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ . Pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ ,

$$x > 1 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} > -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

$f$  est croissante sur  $]1, +\infty[$

- Prouvons que  $f$  est continue en 1.

$$f(1) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + \frac{1}{x} = 2$$

Comme  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ ,  $f$  est continue en 1.

$f$  est continue en 1, elle ne peut donc pas faire un saut au niveau de la disjonction des cas. Or à gauche de 1  $f$  est constante et croissante à droite. On en conclue que  $f$  est donc croissante sur  $\mathbb{R}$ .

**b)** Cherchons à prouver que  $f$  est rétrécissante. Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  avec  $x \neq y$ . Dans la définition d'une fonction rétrécissante,  $x$  et  $y$  sont interchangeable, on suppose donc sans perte de généralité que  $x < y$ .

- Si  $x < y \leq 1$ ,

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \Leftrightarrow |2 - 2| < |x - y| \Leftrightarrow 0 < |x - y|$$

Ce qui est toujours vrai puisque  $x \neq y$ .

- Si  $x \leq 1 < y$ ,

$$x \leq 1 \Leftrightarrow y - 1 \leq y - x \Leftrightarrow (y - 1)^2 \leq (y - 1)(y - x)$$

car  $y - 1 > 0$ . Comme  $(y - 1)^2 \leq (y - 1)(y - x)$ , alors  $(y - 1)^2 < y(y - x)$ . On a alors :

$$\begin{aligned} (y - 1)^2 < y(y - x) &\Leftrightarrow \left| -\frac{(y - 1)^2}{y} \right| < |x - y| \\ &\Leftrightarrow \left| 2 - \left( y + \frac{1}{y} \right) \right| < |x - y| \\ &\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y| \end{aligned}$$



- Si  $1 < x < y$ ,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| < |x - y| &\Leftrightarrow \left| (x - y) + \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right| < y - x \\ &\Leftrightarrow \left| (y - x) + \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right| < y - x \end{aligned}$$

Or  $y - x > 0$  et par croissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{x} > 0$ .  
L'intérieur de la valeur absolue est donc positif soit :

$$\begin{aligned} \left| (y - x) + \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right| < y - x &\Leftrightarrow (y - x) + \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) < y - x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow x < y \end{aligned}$$

Nous avons prouvé dans les trois cas distincts que  $f$  est rétrécissante.

**c)** Démontrons par l'absurde que  $f$  n'est pas contractante. On suppose  $f$  contractante ie  $f$  est  $k$ -lipschitzienne avec  $k \in ]0, 1[$ .

On considère cette propriété pour les réels  $t$  et  $t + 1$ .  $f$  doit vérifier en particulier :

$$|f(t + 1) - f(t)| \leq k|t + 1 - t| \Leftrightarrow |f(t + 1) - f(t)| \leq k$$

En particulier, on pose  $1 < t < t + 1$ .

$$|f(t + 1) - f(t)| = \left| t + 1 + \frac{1}{t + 1} - t - \frac{1}{t} \right| = \left| 1 - \frac{1}{t(t + 1)} \right|$$

Or  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t(t + 1) = +\infty$  donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| 1 - \frac{1}{t(t + 1)} \right| = 1$ .

On en conclue que  $|f(t + 1) - f(t)|$  tendant vers 1 lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , il n'est pas possible de majorer cette expression dans tous les cas possibles par un réel  $k$  compris dans  $]0, 1[$ . Nous arrivons à une contradiction,  $f$  n'est donc pas contractante.

Partie B - Fonctions rétrécissantes et point fixe.

**1) a)** Posons  $g : x \mapsto f(x) - x$ . Comme  $I$  est stable par  $f$ ,  $f(a), f(b) \in I$ . Comme  $I = [a; b]$ , on en déduit que  $f(a) \geq a$  et  $f(b) \leq b$ , c'est à dire que  $g(a) \geq 0$  et  $g(b) \leq 0$ .

Comme  $g$  est continue et change de signe, par corollaire du TVI,  $g$  s'annule en  $x_o \in I$ , qui est donc un point fixe de  $f$ .

**b)** Supposons que  $\alpha, \beta \in I$  soient des points fixes distincts de  $f$ . Alors :

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = |\alpha - \beta| \overset{\text{rétrécissante}}{<} |\alpha - \beta|$$

Ce qui est impossible. Donc  $\alpha = \beta$  et le point fixe de  $f$  est fixe.



2) Comme  $I$  n'est pas borné en haut, on peut prendre  $f : x \mapsto x + 1$  qui laisse bien  $I$  fixe : si  $x \in I$  i.e  $x \geq a$ , alors  $f(x) = x + 1 \geq a$ , donc  $f(x) \in I$ . Clairement,  $f$  n'a pas de point fixe.

Partie C - Fonctions dilatantes.

On fixe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue et dilatante.

1) a) La fonction  $g : x \mapsto x + e^x$  est continue sur  $\mathbb{R}$  comme somme de fonctions continues. De plus, si  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |(x - y) + (e^x - e^y)| \stackrel{\text{Triangulaire}}{\geq} |x - y| + |e^x - e^y| \\ &\geq |x - y| \end{aligned}$$

Donc  $g$  est bien dilatante.

b) La fonction  $g_\lambda$  est continue sur  $] -\infty; \lambda[$  et sur  $]\lambda; +\infty[$  car ses restrictions à ces intervalles sont continues. Montrons que  $g_\lambda$  est continue en  $\lambda$ . D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \lambda^-} -x = -\lambda$$

et d'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \lambda^+} \lambda - 2x = \lambda - 2\lambda = -\lambda$$

Comme les limites de  $g$  (qui existent par continuité avant et après  $\lambda$ ) en  $\lambda$  coïncident avec  $g(\lambda) = -\lambda$ , on en déduit que  $g$  est continue en  $\lambda$  et donc sur tout  $\mathbb{R}$ . Montrons maintenant que  $g$  est dilatante. On distingue trois cas :

- $x, y < \lambda : |g(x) - g(y)| = |y - x| = |x - y| \geq |x - y|$
- $x, y \geq \lambda : |g(x) - g(y)| = |2y - 2x| = 2|x - y| \geq |x - y|$
- $x < \lambda$  et  $y \geq \lambda : |g(x) - g(y)| = |2y - \lambda - x| = |(y - \lambda) + (y - x)| \stackrel{\text{Triangulaire}}{\geq} |x - y|$

Ce qui montre que  $g$  est bien dilatante.

2) a) Soit  $\lambda \in ]f(a_1); f(a_2)[ \cap ]f(a_3); f(a_2)[$ . Cette intersection n'est pas vide, car elle contient au moins  $]\max(f(a_1), f(a_3)); f(a_2)[$ . Alors en posant  $g : x \mapsto f(x) - \lambda$ , qui est continue par somme, comme  $g(a_1), g(a_3) < 0$  et  $g(a_2) > 0$ , on obtient en appliquant TVI un  $b \in ]a_1; a_2[$  et un  $c \in ]a_2; a_3[$  tels que  $g(b) = g(c) = 0$ , c'est à dire  $f(b) = f(c) = \lambda$ .

b) Comme  $f$  est dilatante,

$$|f(b) - f(c)| = 0 \geq |b - c| \geq 0$$

On en déduit que  $|b - c| = 0$ , donc  $b = c$ . Donc  $f$  dilatante implique  $f$  injective.

c) Supposons que  $f$  ne soit pas strictement monotone, i.e  $f$  n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. Comme  $f$  n'est pas strictement décroissante, il existe  $a_1 < a_2$  tels que  $f(a_1) \leq f(a_2)$ ; a fortiori, comme  $f$  est injective,  $f(a_1) < f(a_2)$ .



TODO : l'argument est long

**3)** On sait que  $f$  est continue et strictement monotone. Quitte à travailler avec  $-f$  au lieu de  $f$ , supposons que  $f$  est strictement croissante.

Soit  $x \geq 0$ . Alors  $|f(x) - f(0)| \geq |x|$ , c'est à dire que  $f(x) \geq x + f(0)$ . Comme la fonction  $x \mapsto x + f(0)$  n'est pas majorée sur  $\mathbb{R}^+$ , a fortiori,  $f$  n'est pas majorée sur  $\mathbb{R}^+$  et donc sur  $\mathbb{R}$ .

Similairement, soit  $x \leq 0$ . Alors  $|f(x) - f(0)| = f(0) - f(x) \geq |x| = -x$ , et on obtient  $x + f(0) \geq f(x)$ . On en déduit donc que  $f$  n'est pas minorée sur  $\mathbb{R}^-$  et donc sur  $\mathbb{R}$ .

Donc  $f$  n'est pas bornée.

**4) a)** Soient  $x \geq y \in \mathbb{R}$ . Alors :

$$\begin{aligned} h(x) - h(y) &= f(x) - f(y) + y - x \geq 0 \\ \Leftrightarrow f(x) - f(y) &\stackrel{\text{croissance}}{=} |f(x) - f(y)| \geq x - y = |x - y| \end{aligned}$$

Où cette dernière inégalité est vraie car  $f$  est dilatante. Donc  $h$  est bien croissante.

**b)** La fonction  $h : x \mapsto f(x) - x$  est strictement négative, mais est croissante. Par le théorème de la limite monotone, on déduit l'existence de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \leq 0$ . Ainsi, par quotient de limites :

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

D'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ .

**c)** La fonction  $h : x \mapsto f(x) - x$  est strictement positive et croissante. En particulier, la fonction décroissante  $x \mapsto h(-x)$  est strictement positive et on déduit du théorème de la limite monotone l'existence de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) \geq 0$$

Ainsi, encore par quotient de limites,

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

D'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ .

**d)** Si  $a, b$  sont des points fixes de  $f$ , alors  $h(a) = h(b) = 0$ . Comme  $h$  est croissante, pour tous  $c \in [a; b]$ ,

$$h(a) = 0 \leq h(c) \leq h(b) = 0$$

D'où  $h(c) = 0$ . Donc  $c$  est un point fixe de  $f$ , et  $[a; b] \subseteq F$ .