

# Devoir maison n°5 : Existence de la fonction exponentielle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier  
TE1

## Partie A - Inégalité de Bernoulli

1) a) On calcule :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right) &= \left(\frac{n+x}{n}\right) \left(\frac{(n+1)(n+x)-x}{(n+1)(n+x)}\right) \\ &= \frac{n(n+x)+n}{n(n+1)} \\ &= \frac{n+x+1}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

b) Pour tout  $x$  fixé, la suite  $\left(-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 par quotient, car  $n+a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . Par définition de la convergence, il existe donc un rang  $n_0$  pour lequel, avec  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , on a pour tout  $n \geq n_0$  que :

$$-1 < -\frac{1}{2} < -\frac{x}{(n+1)(n+x)} < \frac{1}{2}$$

Similairement,  $1 + \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et on obtient un rang  $n_1$  de la même manière.

c) Posons  $n_2 = \max(n_0, n_1)$ . Ainsi, pour tout  $n \geq n_2$ ,  $n \geq n_0$  permet d'appliquer l'inégalité de Bernoulli à  $\left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$  et  $n \geq n_1$  permet d'avoir  $n+x \neq 0$ . On a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &\stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) \\ &\geq u_n(x) \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) = u_n(x) \frac{n+x}{n} \frac{n}{n+x} \\ &\geq u_n(x) \end{aligned}$$

Donc la suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante au moins à partir du rang  $n_2$ .



---

2) On remarque que  $w_n(x) = u_n(-x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Or, la suite  $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante à partir d'un certain rang pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . Donc  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante à partir d'un certain rang.

De plus,  $w_n$  n'est nul que pour au plus un rang, et est non nul pour tous les autres termes. On a donc  $v_n = w_n^{-1}$  au moins à partir d'un certain rang, et, par croissance de  $(w_n)$  et décroissance de la fonction inverse, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante à partir d'un certain rang.

---

3) a) Soit  $n > |x|$ . Alors  $v_n \neq 0$  et :

$$\frac{u_n}{v_n} = \left( \frac{1 + \frac{x}{n}}{(1 - \frac{x}{n})^{-1}} \right)^n = \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right)^n$$

Or,  $\frac{x^2}{n^2} < 1$ . Donc  $1 \geqslant \frac{u_n}{v_n}$ , et on peut également appliquer l'inégalité de Bernoulli pour obtenir :

$$\frac{u_n}{v_n} \geqslant 1 - \frac{x^2}{n}$$

## Partie B - Convergence de deux suites

## Partie C - Existence