Devoir maison n°5 : Existence de la fonction exponentielle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Inégalité de Bernoulli

Partie B - Convergence de deux suites

1) **a)** On calcule :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right) &= \left(\frac{n+x}{n}\right)\left(\frac{(n+1)(n+x)-x}{(n+1)(n+x)}\right)\\ &= \frac{n(n+x)+n}{n(n+1)}\\ &= \frac{n+x+1}{n+1} = 1+\frac{x}{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}u_{n+1}(x) &= \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\\ &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

b) Pour tout x fixé, la suite $\left(-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 par quotient, car $n+a \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ pour tout $a\in\mathbb{R}$. Par définition de la convergence, il existe donc un rang n_0 pour lequel, avec $\varepsilon=\frac{1}{2}$, on a pour tout $n \geqslant n_0$ que :

$$-1 < -\frac{1}{2} < -\frac{x}{(n+1)(n+x)} < \frac{1}{2}$$

Similairement, $1+\frac{x}{n} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et on obtient un rang n_1 de la même manière.

c) Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Ainsi, pour tout $n \geqslant n_2$, $n \geqslant n_0$ permet d'appliquer l'inégalité de Bernoulli à $\left(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$ et $n \geqslant n_1$ permet d'avoir $n+x \neq 0$. On a donc :

$$\begin{aligned}u_{n+1}(x) &\overset{\text{Bernoulli}}{\geqslant} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+1}\left(1-\frac{x}{n+x}\right)\\ &\geqslant u_n(x)\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n+x}\right) = u_n(x)\frac{n+x}{n}\frac{n}{n+x}\\ &\geqslant u_n(x)\end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante au moins à partir du rang n_2.

---

2) On remarque que $w_n(x) = u_n(-x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or, la suite $(u_n(a))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang pour tout $a \in \mathbb{R}$. Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante à partir d'un certain rang.

De plus, w_n n'est nul que pour au plus un rang, et est non nul pour tous les autres termes. On a donc $v_n = w_n^{-1}$ au moins à partir d'un certain rang, et, par croissance de (w_n) et décroissance de la fonction inverse, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

---

3) **a)** Soit $n > |x|$. Alors $v_n \neq 0$ et :

$$\frac{u_n}{v_n} = \left(\frac{1+\frac{x}{n}}{\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-1}}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n$$

Or, $\frac{x^2}{n^2} < 1$. Donc $1 \geqslant \frac{u_n}{v_n}$[1], et on peut également appliquer l'inégalité de Bernoulli pour obtenir :

$$\frac{u_n}{v_n} \geqslant 1 - \frac{x^2}{n}$$

b) On obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{x^2}{n} \geqslant \frac{v_n - u_n}{v_n} \geqslant 0$$

Or, la suite (v_n) est strictement positive à partir d'un certain rang N et décroissante à partir d'un certain rang M. Ainsi, pour tout $n \geqslant k := \max(N, M, \lfloor |x| \rfloor + 1) > |x|$, on a :

$$v_k \frac{x^2}{n} \geqslant v_n \frac{x^2}{n} \geqslant v_n - u_n \geqslant 0$$

c) Comme x^2 et $v_k(x)$ sont fixés, $\lim_{n\to+\infty} v_k \frac{x^2}{n} = 0$. D'après le théorème d'encadrement, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(x) - u_n(x) = 0$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ sont adjacentes, en compilant les résultats du 1)c), du 2), et du 3)b). Ces deux suites admettent donc une limite finie commune.

Partie C - Existence

1) La suite $(u_n(0))$ est constante, égale à 1 et tend donc vers 1. Donc $f(0) = 1$.

---

2) **a)** On a :

[1] On note temporairement $u_n = u_n(x)$ et $v_n = v_n(x)$, tant que x est fixé.

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{h}{n+x}\right) = \frac{n+x}{n}\cdot\frac{n+x+h}{n+x}$$
$$= \frac{n+x+h}{n} = \left(1+\frac{x+h}{n}\right)$$

D'où l'égalité recherchée en passant à la puissance n.

b) Soient $|h|<1$ et $n>|x|+1$. On a donc $n+x\geqslant 1$ et $\left|\frac{h}{n+x}\right|<1$, et l'inégalité de Bernoulli s'applique car on a au moins $\frac{h}{n+x}>-1$. On a :

$$\left(1+\frac{x+h}{n}\right)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geqslant} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{nh}{n+x}\right) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{h}{1+\frac{x}{n}}\right)$$

c) En passant à la limite l'inégalité précédente, comme $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{x}{n}=1$, pour tout $|h|<1$:

$$f(x+h)\geqslant f(x)(1+h)$$

En particulier, $|-h|<1$ quand $|h|<1$ et en appliquant l'inégalité précédente à $x\leftarrow x+h$:

$$f(x+h-h)=f(x)\geqslant f(x+h)(1-h) \iff \frac{f(x)}{1-h}\geqslant f(x+h)$$

d) Fixons $x\in\mathbb{R}$ et $|h|<1$ non nul. On a donc les inégalités suivantes :

$$f(x)(1+h)\leqslant f(x+h)\leqslant\frac{f(x)}{1-h} \iff hf(x)\leqslant f(x+h)-f(x)\leqslant\frac{hf(x)}{1-h}$$

Ainsi, en fonction du signe de h :

$$f(x)\leqslant\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\leqslant\frac{f(x)}{1-h} \text{ ou } f(x)\geqslant\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\geqslant\frac{f(x)}{1-h}$$

e) En passant à la limite l'inégalité quand $h\longrightarrow 0$, on obtient par le théorème d'encadrement que :

$$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, f est dérivable en x et $f'(x)=f(x)$. Donc la fonction f satisfait bien l'équation différentielle définissant la fonction exponentielle.