

# Devoir maison n°3 :

## Théorème de la corde universelle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier  
TE1

### Partie A - Exemples

Dans les parties A et B,  $n$  désigne un entier supérieur ou égal à 2.

### Partie B - Généralisation

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1)$ . Pour tout  $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ , on pose  $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$ .

1) La fonction continue  $x \mapsto x + \frac{1}{n}$  a pour ensemble image, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $[0, 1]$ . Or  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  donc  $g$  est continue sur  $[0, 1]$  par opérations et composition de fonctions continues sur  $[0, 1]$ .

---

2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \\ &= f(0) - f(1) \quad \text{par télescopage} \\ &= 0 \quad \text{car } f(0) = f(1)\end{aligned}$$

---

3)

### Partie C - Généraliser encore ?

Soit  $T \in ]0, 1[$  tel que  $\frac{1}{T} \notin \mathbb{Z}$ , et  $f$  une fonction continue sur  $[0, 1]$  telle que  $f(0) = f(1)$ . On considère  $f : x \mapsto \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - x \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)$  d'inconnue  $x \in [0, 1 - T]$ .

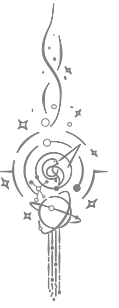
1) Comme la fonction sinus est continue sur  $\mathbb{R}$  et que  $T \neq 0$ ,  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  par opération et composition de fonctions continues.

$$\begin{aligned}f(0) &= \sin^2(0) - 0 = 0 \\ f(1) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0\end{aligned}$$

Donc on a bien  $f(0) = f(1)$ .

---

2)



$$\begin{aligned}
 f(x) - f(x+T) &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \underline{x \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} - \sin^2\left(\frac{\pi(x+T)}{T}\right) + (x+T) \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\
 &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{T} + \pi\right) + T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\
 &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \left( \sin\left(\frac{\pi x}{T}\right) \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \cos\left(\frac{\pi x}{T}\right) \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \right)^2 + T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\
 &= T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)
 \end{aligned}$$

Or  $T \neq 0$  et comme  $\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{T} = 0$  ou  $\frac{\pi}{T} = \pi$  et  $T \neq 1$ , on a que pour tout  $x$  dans  $[0, 1 - T]$ ,  $f(x) - f(x+T) > 0$

---

**3)** On a que  $f(x) - f(x+T) > 0$  ie  $f(x) > f(x+T)$  donc  $f(x) \neq f(x+T)$  pour tout  $x$  dans  $[0, 1 - T]$ .

L'équation  $f(x+T) = f(x)$  n'est donc pas valable pour les réels ( $T \in ]0, 1[$ ).