

Devoir maison n°10 : Théorème de Beatty et jeu de Wythoff

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Théorème de Beatty

- 1) a) Sans perte de généralité, supposons que $\alpha \leq 1$. Alors $\frac{1}{\alpha} \geq 1$ et comme $\beta > 0$,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > 1$$

Ce qui est une contradiction. Donc $\alpha < 1$, et de la même manière $\beta < 1$.

- b) Puisque $x, y \notin \mathbb{Z}$, on a :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor < x \text{ et } y - 1 < \lfloor y \rfloor < y$$

En sommant les inégalités, on obtient :

$$x + y - 2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor < x + y$$

Soit comme tous les termes sont entiers :

$$x + y - 1 \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y - 1$$

Ce qui donne l'égalité attendue.

-
- 2) a) Comme $\alpha \neq 1$, on peut écrire :

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} - 1 \text{ soit } \beta = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 1}$$

Comme $\alpha \in \mathbb{Q}$ et que \mathbb{Q} est clos sous la somme et l'inversion, on a $\beta \in \mathbb{Q}$.

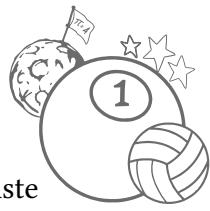
- b) On écrit $\alpha = \frac{a}{b}$ et $\beta = \frac{c}{d}$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$ac = (bc)\alpha \in M(\alpha) \text{ et } ac = (da)\beta \in M(\beta)$$

Donc $ac \in M(\alpha) \cap M(\beta)$, qui n'est donc pas vide.

De plus, $ac \in \mathbb{N}$. On a donc $ac \in \text{Sp}(\alpha) \cap \text{Sp}(\beta)$. Ces ensembles ne sont donc pas disjoints et ne peuvent former une partition de \mathbb{N}^* . On a donc prouvé que si α ou β est rationnel, alors $\text{Sp}(\alpha)$ et $\text{Sp}(\beta)$ ne peuvent former une partition de \mathbb{N}^* , i.e la contraposée de l'implication indirecte du théorème de Beatty.

-
- 3) a) On procède par contradiction. Supposons que β soit rationnel. Alors par le même raisonnement qu'au 2)a), α est également rationnel, ce qui est une contradiction. Donc β est irrationnel.



b) On raisonne à nouveau par contradiction. Supposons que $M(\alpha) \cap M(\beta) \neq \emptyset$. Il existe alors $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n\alpha = m\beta$. On a alors par hypothèse :

$$\frac{n}{m} = \frac{\alpha}{\beta} = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) - 1 = \alpha - 1$$

Donc $\alpha = 1 + \frac{n}{m}$ est rationnel, ce qui est une contradiction. Donc $M(\alpha)$ et $M(\beta)$ sont disjoints.

On ne peut pas encore en conclure que $\text{Sp}(\alpha)$ et $\text{Sp}(\beta)$ sont disjoints, puisqu'il reste la possibilité d'avoir :

$$n\alpha \neq m\beta \text{ mais } \lfloor n\alpha \rfloor = \lfloor m\beta \rfloor$$

c) Comme α, β sont irrationnels, on a :

$$k < n\alpha, m\beta < k + 1$$

On en déduit :

$$\frac{k}{\alpha} < n < \frac{k}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \text{ et } \frac{k}{\beta} < m < \frac{k}{\beta} + \frac{1}{\beta}$$

En sommant les inégalités, on obtient :

$$k\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) < n + m < (k + 1)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \text{ soit} \\ k < n + m < k + 1$$

On a donc un entier entre deux entiers consécutifs, ce qui est une contradiction. Donc si $\text{Sp}(\alpha)$ et $\text{Sp}(\beta)$ ne sont pas disjoints, alors α est rationnel. On en déduit que comme α est rationnel, alors $\text{Sp}(\alpha) \cap \text{Sp}(\beta) = \emptyset$

d) i. Le nombre p d'éléments de $B_N(\alpha)$ est le nombre d'entiers $k \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$1 \leq k\alpha < N \text{ c'est à dire } \frac{1}{\alpha} \leq k < \frac{N}{\alpha}$$

Comme $\frac{1}{\alpha} < 1$ et que $\frac{N}{\alpha}$ n'est pas entier, ces k sont au nombre de $p = \left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor$.

ii. Par la question précédente, $|B_N(\alpha)| = \left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor$ et $|B_N(\beta)| = \left\lfloor \frac{N}{\beta} \right\rfloor$. D'après la question 3)b), $M(\alpha)$ et $M(\beta)$ sont disjoints. Donc $B_N(\alpha)$ et $B_N(\beta)$ également et :

$$|B_N(\alpha) \cup B_N(\beta)| = \left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{\beta} \right\rfloor$$

Or par hypothèse sur α et β , $\frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\beta} = N$ est entier. Par la question 1)b), on a alors :

$$|B_N(\alpha) \cup B_N(\beta)| = \frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\beta} - 1 = N - 1$$

Ainsi,



$$\begin{aligned}
 |(M(\alpha) \cup M(\beta)) \cap [1; N[| &= |(M(\alpha) \cap [1; N[) \cup (M(\beta) \cap [1; N[)| \\
 &= |B_N(\alpha) \cup B_N(\beta)| \\
 &= N - 1
 \end{aligned}$$

iii. Pour tout $N \geq 2$, il y a $N - 1$ entiers et $N - 1$ éléments de $M(\alpha) \cup M(\beta)$ dans l'intervalle $[1; N[$. Comme $\alpha, \beta > 1$, deux éléments de $M(\alpha)$ ou de $M(\beta)$ ne peuvent pas avoir la même partie entière puisqu'ils sont espacés d'au moins α ou β .

De même, un élément de $M(\alpha)$ et un élément de $M(\beta)$ ne peuvent avoir la même partie entière puisque $\text{Sp}(\alpha)$ et $\text{Sp}(\beta)$ sont disjoints d'après la question 3)c).

Ainsi, on en déduit qu'il y a $N - 1$ éléments de $\text{Sp}(\alpha) \cup \text{Sp}(\beta)$ dans $[1; N[$. Comme tous ces éléments sont entiers, on en déduit que :

$$(\text{Sp}(\alpha) \cup \text{Sp}(\beta)) \cap [1; N[= \llbracket 1; N - 1 \rrbracket$$

On en déduit ainsi les égalités d'ensembles suivantes :

$$\begin{aligned}
 \text{Sp}(\alpha) \cup \text{Sp}(\beta) &= (\text{Sp}(\alpha) \cup \text{Sp}(\beta)) \cap [1; +\infty] \\
 &= (\text{Sp}(\alpha) \cup \text{Sp}(\beta)) \cap \bigcup_{N=2}^{+\infty} [1; N[\\
 &= \bigcup_{N=2}^{+\infty} (\text{Sp}(\alpha) \cup \text{Sp}(\beta)) \cap [1; N[\\
 &= \bigcup_{N=2}^{+\infty} \llbracket 1; N - 1 \rrbracket \\
 &= \mathbb{N}^*
 \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du théorème de Beatty.