Devoir maison n°1 : Fonctions contractantes, dilatantes et points fixes

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Problème 1 -

Partie A - Fonctions contractantes et rétrécissantes.

1) Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$, et f une fonction lipschitzienne définie sur I qui respecte donc pour tous $x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$. Montrons que cette fonction est continue.

Soit y dans I. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$. Dans les cas où $|x - y| < \alpha$, on obtient :

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{k} \iff k|x - y| < \varepsilon$$

Et comme f est lipschitzienne, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| < \varepsilon$ donc $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Nous avons prouvé que quelque soit le point y que l'on choisit dans le domaine de définition I de f, $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I, |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ie toute fonction lipschitzienne est continue.

---

2) Soit f une fonction contractante définie sur I, et $x, y \in I$. Il existe donc $k \in]0, 1[$ tel que $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$ $(*)$.

Or : $k < 1 \Longrightarrow k|x - y| < |x - y| \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|$ d'après $(*)$

f est donc rétrécissante.

De plus,

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant 1 \times |x - y|$$

f est donc 1-lipschitzienne.

Partie B - Fonctions rétrécissantes et point fixe.

Partie C - Fonctions dilatantes.

On fixe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dilatante.

---

3) **a)** La fonction $g : x \mapsto x + e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues. De plus, si $x, y \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
|g(x)-g(y)| = |(x-y)+(e^x-e^y)| &\overset{\text{Triangulaire}}{\geqslant} |x-y|+|e^x-e^y| \\
&\geqslant |x-y|
\end{aligned}
$$

Donc g est bien dilatante.

b) La fonction g_λ est continue sur $]-\infty;\lambda[$ et sur $]\lambda;+\infty[$ car ses restrictions à ces intervalles sont continues. Montrons que g_λ est continue en λ. D'une part,

$$\lim_{x\to\lambda^-} g(x) = \lim_{x\to\lambda^-} -x = -\lambda$$

et d'autre part,

$$\lim_{x\to\lambda^+} g(x) = \lim_{x\to\lambda^+} \lambda - 2x = \lambda - 2\lambda = -\lambda$$

Comme les limites de g (qui existent par continuité avant et après λ) en λ coïncident avec $g(\lambda) = -\lambda$, on en déduit que g est continue en λ et donc sur tout $\mathbb{R}$. Montrons maintenant que g est dilatante. On distingue trois cas :

- $x, y < \lambda$: $|g(x)-g(y)| = |y-x| = |x-y| \geqslant |x-y|$
- $x, y \geqslant \lambda$: $|g(x)-g(y)| = |2y-2x| = 2|x-y| \geqslant |x-y|$
- $x < \lambda$ et $y \geqslant \lambda$: $|g(x)-g(y)| = |2y-\lambda-x| = |(y-\lambda)+(y-x)| \overset{\text{Triangulaire}}{\geqslant} |x-y|$

Ce qui montre que g est bien dilatante