

Devoir maison n°13 : Calcul de $\zeta(2)$

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1) Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^2} > 0$, la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est strictement croissante. De plus, $u_1 = 1 \leq v_1 = 1$ et pour tout $k \geq 2$, par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = v_n$$

2) La suite (v_n) est convergente. En effet, pour tout $n \geq 2$:

$$v_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$. Comme v_n converge, alors elle est majorée. (u_n) est donc alors également majorée, et croissante. Donc (u_n) converge par le théorème de la limite monotone.