Devoir maison n°11 : Équation de Pell-Fermat

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Partie A - Premières propriétés

$$(E) : x^2 - 5y^2 = 1$$

1) Symétries : Les variables x et y sont mises au carré dans (E) et donc toujours positives. Donner un nombre négatif présent dans $\mathbb{Z}$ est équivalent à donner son opposé qui est dans $\mathbb{N}$. Il suffit donc de chercher toutes les solutions (x, y) positives qui sont dans $\mathbb{N}^2$ pour obtenir toutes les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de (E).

---

2) Nombre de solutions

a) Soient $a, b \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\left(a^2 - 5b^2\right)^2 &= \left(a^2 + 5b^2 - 10b^2\right)^2 \\
&= \left(a^2 + 5b^2\right)^2 + \left(10b^2\right)^2 - 2(a^2 + 5b^2)(10b^2) \\
&= \left(a^2 + 5b^2\right)^2 + 100b^4 - 20a^2b^2 - 100b^4 \\
\left(a^2 - 5b^2\right)^2 &= \left(a^2 + 5b^2\right)^2 - 5(2ab)^2 \qquad \textsc{Brahmagupta}
\end{aligned}$$

b) Soient $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, tel que $(x, y) \neq (1, 0)$ et (x, y) solution de $(E) : x^2 - 5y^2 = 1$.

D'après Brahmagupta, on obtient $(E) \Leftrightarrow \left(x^2 + 5y^2\right)^2 - 5(2xy)^2 = 1$

Or en remplaçant $X := x^2 + 5y^2, Y := 2xy$, on a $X^2 - 5Y^2 = 1$

$(X, Y) \in \mathbb{N}^2$ et $(X, Y) \neq (x, y)$ car $(x, y) \neq (1, 0)$. Cette nouvelle équation étant équivalente à (E), (X, Y) est donc une nouvelle solution de (E).

On peut itérer cette opération autant de fois que l'on veut. Pour une solution (x, y) de (E), $(x^2 + 5y^2, 2xy)$ est aussi solution. S'il existe au moins une solution de (E) différente de $(0, 1)$, alors il en existe une infinité.

Partie B - L'ensemble $\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right] = \left\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$

Partie C - Détermination d'un élément générateur de $\mathbb{U}$.