Devoir maison n°11 : Équation de Pell-Fermat

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Partie A - Premières propriétés

$$(E) : x^2 - 5y^2 = 1$$

1) Symétries : Les variables x et y sont mises au carré dans (E) et donc toujours positives. Donner un nombre négatif présent dans $\mathbb{Z}$ est équivalent à donner son opposé qui est dans $\mathbb{N}$. Il suffit donc de chercher toutes les solutions (x, y) positives qui sont dans $\mathbb{N}^2$ pour obtenir toutes les solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de (E).

---

2) Nombre de solutions

a) Soient $a, b \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\left(a^2 - 5b^2\right)^2 &= \left(a^2 + 5b^2 - 10b^2\right)^2 \\
&= \left(a^2 + 5b^2\right)^2 + \left(10b^2\right)^2 - 2(a^2 + 5b^2)(10b^2) \\
&= \left(a^2 + 5b^2\right)^2 + 100b^4 - 20a^2b^2 - 100b^4 \\
\left(a^2 - 5b^2\right)^2 &= \left(a^2 + 5b^2\right)^2 - 5(2ab)^2 \qquad \text{Brahmagupta}
\end{aligned}$$

b) Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, tel que $(x, y) \neq (1, 0)$ et (x, y) solution de $(E) : x^2 - 5y^2 = 1$.

D'après Brahmagupta, on obtient $(E) \Leftrightarrow \left(x^2 + 5y^2\right)^2 - 5(2xy)^2 = 1$

Or en remplaçant $X := x^2 + 5y^2, Y := 2xy$, on a $X^2 - 5Y^2 = 1$

$(X, Y) \in \mathbb{N}^2$ et $(X, Y) \neq (x, y)$ car $(x, y) \neq (1, 0)$. Cette nouvelle équation étant équivalente à (E), (X, Y) est donc une nouvelle solution de (E).

On peut itérer cette opération autant de fois que l'on veut. Pour une solution (x, y) de (E), $(x^2 + 5y^2, 2xy)$ est aussi solution. S'il existe au moins une solution de (E) différente de $(0, 1)$, alors il en existe une infinité.

c) Soit (a, b) une solution de (E) avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. On a donc :

$$\begin{aligned}
&(E) : a^2 - 5b^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow a^2 = 1 + 5b^2 \\
&\Leftrightarrow a = \sqrt{1 + 5b^2}
\end{aligned}$$

car $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$ donc $a \geq 0$, $1 + 5b^2 \geq 0$.

Une telle fonction est donc

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{N} &\to \mathbb{R}_+ \\
b &\mapsto \sqrt{1 + 5b^2}
\end{aligned}
$$

La solution est valide si et seulement si $f(b) \in \mathbb{N}$.

Voici un script Haskell qui détermine des couples solution :

```haskell
f :: Double -> Double
f b = sqrt (1 + 5 * b^2)

test_to :: Double -> [Double]
test_to n = filter (isNat . f) [1..n]
```

On obtient :

```
[4, 72, 1292, 23184, 416020, 7465176, 16692641, 24157817, 31622993, 48315634,
55780810,  63245986,  79938627,  87403803,  94868979,  111561620,  119026796,
126491972, 133957148, ..., 3077073806,3077489826, 3078836095, ...]
```

Partie B - L'ensemble $\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right] = \left\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$

Partie C - Détermination d'un élément générateur de $\mathbb{U}$.