Devoir maison n°10 : Droites Tropicales

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

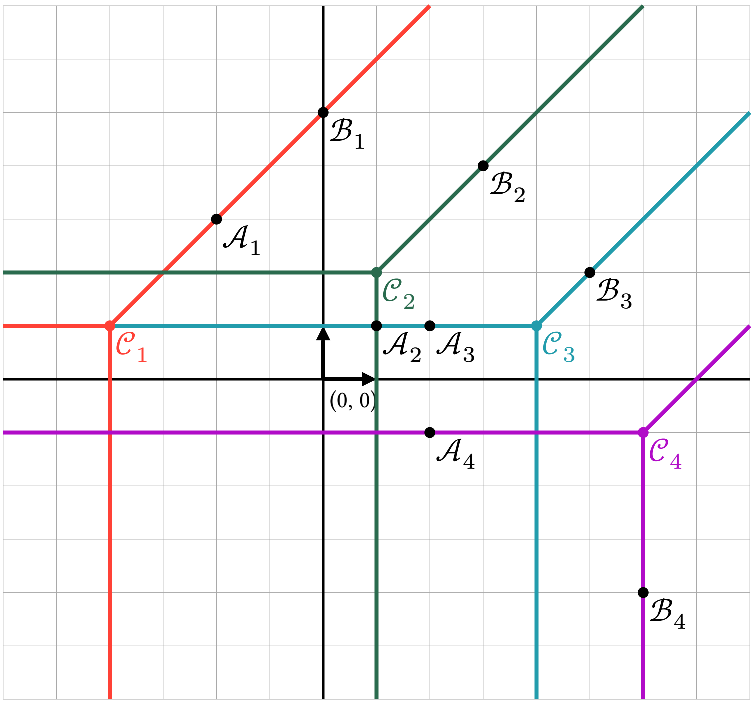
Partie A - Les droites tropicales

$(\mathcal{A}')$ « Par deux points du plan passe une droite tropicale. »

$(\mathcal{B}')$ « Par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale. »

$(\mathcal{C}')$ « Deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point. »

1) a)



b) On cherche à prouver $(\mathcal{A}')$. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux points quelconques du plan. Par une translation T on se ramène au cas où :

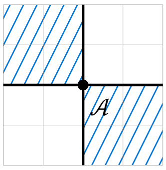
$$\mathcal{A}(0,0) \text{ et } \mathcal{B}(x,y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

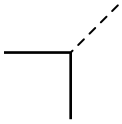
Etudions d'abord des cas particuliers :

Si $x = 0$ et $y = 0$ alors $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, la droite tropicale de centre $\mathcal{A}$ convient.
Si $y = 0$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\max(0,x),0)$ convient.
Si $x = 0$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(0,\max(0,y))$ convient.
Si $x = y$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\min(0,x),\min(0,y))$ convient.

Attaquons nous désormais aux cas généraux :

Si $x < 0$ **et** $y > 0$





style

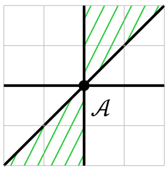
Il existe $\mathcal{C}(0, y)$. Soient les demi-droites :

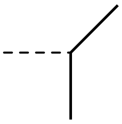
$$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{B}) \text{ par construction, } \mathcal{H} \text{ est parallèle à l'axe des abscisses.}$$
$$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A}) \text{ par construction, } \mathcal{V} \text{ est parallèle à l'axe des ordonnées.}$$

Comme $x < 0$, $\mathcal{H}$ est de direction $-\vec{i}$ et comme $y > 0$, $\mathcal{V}$ est de direction $-\vec{j}$. Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$.

En inversant les rôles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on obtient la deuxième partie rayée.

Si $x > 0$ **et** $y > 0$ **et** $y > x$





style

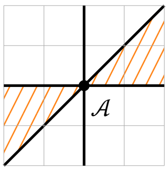
Soit $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à $y = x$ et passant par $\mathcal{B}$. On nomme $\mathcal{C}$ l'intersection entre $\mathcal{D}'$ et l'axe des ordonnées. Comme $y > x$, $y_{\mathcal{C}} > 0$. Soient les demi-droites :

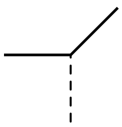
$$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B}) \text{ par construction, } \mathcal{D} \text{ est de direction } \vec{i} + \vec{j}$$
$$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A}) \text{ par construction, } \mathcal{V} \text{ est de direction } -\vec{j}$$

Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$.

En inversant les rôles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on obtient que pour $0 > x$ et $0 > y$ et $x > y$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$, soit la deuxième zone rayée.

Si $x > 0$ **et** $y > 0$ **et** $y < x$





style

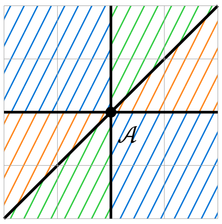
Doit $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à $y = x$ et passant par $\mathcal{B}$. On nomme $\mathcal{C}$ l'intersection entre $\mathcal{D}'$ et l'axe des abscisses. Comme $y < x$, $x_{\mathcal{C}} > 0$. Soient les demi-droites :

$$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B}) \text{ par construction, } \mathcal{D} \text{ est de direction } \vec{i} + \vec{j}$$
$$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{A}) \text{ par construction, } \mathcal{H} \text{ est de direction } -\vec{i}$$

Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$.

En inversant les rôles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on obtient que pour $0 > x$ et $0 > y$ et $x < y$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$, soit la deuxième zone rayée.

Conclusion
En combinant les différentes disjonctions de cas démontrées plus haut on obtient :



Le cas des lignes noires est couvert par les cas particuliers. Nous avons donc prouvé que pour tout point quelconque $\mathcal{B}$, il existe une droite tropicale passant par $\mathcal{B}$ et par l'origine $\mathcal{A}$. Nous pouvons revenir au cas général avec deux points quelconques par la translation inverse de T.

Nous avons donc démontré $(\mathcal{A}')$: par deux points du plan passe une droite tropicale.

---

2) a) La propriété $(\mathcal{B})$ n'est pas vraie pour les droites tropicales dans le cas de deux points dépendants.

Contre-exemple : Prenons les points $\mathcal{A}(0,0)$ et $\mathcal{B}(1,0)$, qui sont dépendants. La droite tropicale de point central $\mathcal{C}_1(2,0)$ passe par $\mathcal{A}$ et par $\mathcal{B}$, mais celle de point central $\mathcal{C}_2(3,0)$ aussi. Il y a même une infinité de droites tropicales passant par ces deux points : toutes celles dont le point central est d'ordonnée nulle et d'abscisse supérieure à 1.

~~**b)** On chercher à prouver~~ $(\mathcal{B}')$ ~~: « Par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale. »~~

~~Soient~~ $\mathcal{A}$ ~~et~~ $\mathcal{B}$ ~~deux points indépendants du plan. Par une translation~~ T ~~on fait en sorte que~~ $\mathcal{A}(0,0)$ ~~et~~ $\mathcal{B}(x,y)$ ~~avec~~ $x \in \mathbb{R}$ ~~et~~ $y \in \mathbb{R}$~~. Comme~~ $\mathcal{A}$ ~~et~~ $\mathcal{B}$ ~~sont indépendants,~~ $x \neq 0$~~,~~ $y \neq 0$ ~~et~~ $x \neq y$~~.~~

~~D'après~~ $(\mathcal{A}')$~~, il existe une droite tropicale de centre~~ $\mathcal{C}(\alpha,\beta)$ ~~avec~~ $\alpha \in \mathbb{R}$ ~~et~~ $\beta \in \mathbb{R}$ ~~passant par~~ $\mathcal{A}$ ~~et~~ $\mathcal{B}$~~. On nomme respectivement~~ $\mathcal{H}$~~,~~ $\mathcal{V}$ ~~et~~ $\mathcal{D}$ ~~les demi-droites de direction~~ $-\vec{i}$~~,~~ $-\vec{j}$ ~~et~~ $\vec{i}+\vec{j}$ ~~formant cette droite tropicale.~~

~~On considère toutes les combinaisons de demi-droites auxquelles pourraient appartenir~~ $\mathcal{A}$ ~~et~~ $\mathcal{B}$ ~~afin de déterminer~~ $\mathcal{C}(\alpha,\beta)$~~.~~

~~**Cas impossibles :**~~
~~Si~~ $\mathcal{A}$ ~~et~~ $\mathcal{B}$ ~~appartiennent à la même demi-droite, alors ils sont dépendants ce qui n'est pas possible donc on peut éliminer les cas~~ $(\mathcal{A} \in \mathcal{H}$ ~~**et**~~ $\mathcal{B} \in \mathcal{H})$~~,~~ $(\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ ~~**et**~~ $\mathcal{B} \in \mathcal{V})$ ~~et~~ $(\mathcal{A} \in \mathcal{D}$ ~~**et**~~ $\mathcal{B} \in \mathcal{D})$~~.~~

~~**Cas génériques :**~~
~~**Si**~~ $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ ~~**et**~~ $\mathcal{B} \in \mathcal{H}$ ~~alors les contraintes sur~~ $\mathcal{C}$ ~~sont~~ $\mathcal{A} \in \mathcal{V} \Rightarrow \alpha = 0$ ~~et~~ $\mathcal{B} \in \mathcal{H} \Rightarrow \beta = y$~~.~~
~~Cela donne~~ $\mathcal{C}(0,y)$~~.~~

~~Si~~ $\boldsymbol{\mathcal{A} \in \mathcal{C}}$ ~~et~~ $\boldsymbol{\mathcal{B} \in \mathcal{H}}$ ~~alors les contraintes sur $\mathcal{C}$ sont~~ $\mathcal{A} \in \mathcal{D} \Rightarrow \alpha = \beta$ ~~et~~ $\mathcal{B} \in \mathcal{H} \Rightarrow \beta = y$~~.~~
~~Cela donne~~ $\mathcal{C}(y, y)$~~.~~
~~Si~~ $\boldsymbol{\mathcal{A} \in \mathcal{C}}$ ~~et~~ $\boldsymbol{\mathcal{B} \in \mathcal{V}}$ ~~alors les contraintes sur $\mathcal{C}$ sont~~ $\mathcal{A} \in \mathcal{D} \Rightarrow \alpha = \beta$ ~~et~~ $\mathcal{B} \in \mathcal{V} \Rightarrow \alpha = x$~~.~~
~~Cela donne~~ $\mathcal{C}(x, x)$~~.~~

~~En inversant les roles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ on obtient également les contraintes suivantes : TODO~~

~~On remarque qu'à moins que $x = 0$, $y = 0$ ou $x = y$ ce qui n'est pas possible puisque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendants, il n'est pas possible que plusieurs droites donne le même centre.~~

~~(ce qui n'est pas ce que l'on cherche à démontrer)~~

---

3) On chercher à prouver $(\mathcal{C}')$: « Deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point. »

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux centres de droites tropicales, indépendants. Par une translation T, on se ramène à $\mathcal{C}(0, 0)$ et $\mathcal{C}'(x, y)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Comme $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont indépendants, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq y$.

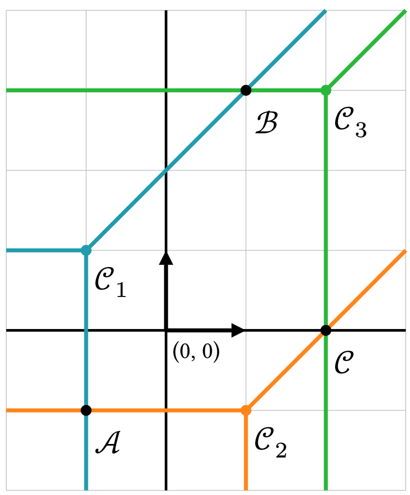
On nomme respectivement $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{D}$ les demi-droites de direction $-\vec{i}$, $-\vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ contituant la droite tropicale $\mathcal{C}$. On fait de même pour $\mathcal{C}'$ avec $\mathcal{H}'$, $\mathcal{V}'$ et $\mathcal{D}'$.

Si $\boldsymbol{y > 0}$ et $\boldsymbol{x < 0}$ alors $\mathcal{V}'$ coupe $\mathcal{H}$ en I.
Si $\boldsymbol{y > 0}$ et $\boldsymbol{x > 0}$ et $\boldsymbol{y > x}$ alors $\mathcal{V}'$ coupe $\mathcal{D}$ en I.
Si $\boldsymbol{y < 0}$ et $\boldsymbol{x < 0}$ et $\boldsymbol{y > x}$ alors $\mathcal{D}'$ coupe $\mathcal{H}$ en I.
Si $\boldsymbol{y < 0}$ et $\boldsymbol{x < 0}$ et $\boldsymbol{y < x}$ alors $\mathcal{D}'$ coupe $\mathcal{V}$ en I.
Si $\boldsymbol{y > 0}$ et $\boldsymbol{x > 0}$ et $\boldsymbol{y < x}$ alors $\mathcal{H}'$ coupe $\mathcal{D}$ en I.
Si $\boldsymbol{y < 0}$ et $\boldsymbol{x > 0}$ alors $\mathcal{H}'$ coupe $\mathcal{V}$ en I.

Il n'y a aucune intersection autre que I entre les demi-droites pour chacun des cas, donc I est bien l'unique intersection de deux droites tropicales.

---

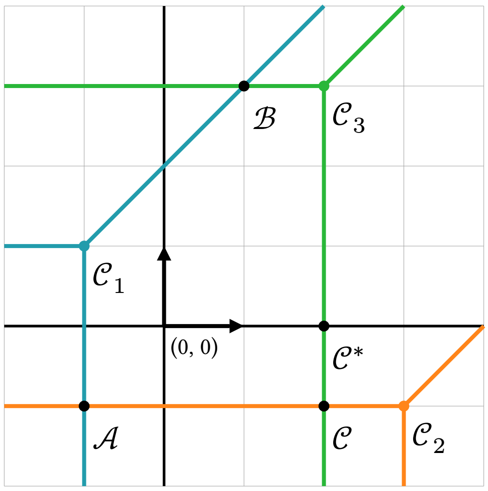
4) Voici l'exemple donné de triangle tropical :



Il est spécifié que dans cet exemple, $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{C}} = 360°$.

a) On considère le triangle tropicale suivant :

$$\pi = 4$$



On a repris la figure de l'exemple, sur laquelle on a rajouté 2 à l'abscisse de $\mathcal{C}_2$.

$\mathcal{C}^*$ représente l'emplacement de $\mathcal{C}$ sur l'ancienne figure. $\hat{\mathcal{A}}$ et $\hat{\mathcal{B}}$ ne sont pas impactés par le changement, par contre alors que $\widehat{\mathcal{C}^*}$ était obtus, $\hat{\mathcal{C}}$ est droit. Donc $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{C}} < 360$.

L'égalité $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{C}} = 360$ n'est pas vrai pour tous les triangles tropicaux.

b)

Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ trois points indépendants du plan, centres de trois droites tropicales et sommets d'un triangle tropical.

D'après $(\mathcal{C}')$, les trois intersections $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ des trois droites tropicales doivent exister.

Il existe deux intersections sur une demi-droite de direction $-\vec{i}$, $-\vec{j}$ ou $\vec{i} + \vec{j}$ **si et seulement si** les deux intersections sont dépendantes.

Or on suppose $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ indépendants donc chaque demi-droite possède *au plus* une intersection.

Nous savons donc que chaque droite tropicale possède deux intersections qui sont répartis entre ses trois demi-droites. Donc l'unique cas de figure possible est que chacune des trois intersections soit entre deux demi-droites dont la combinaisons de leur direction est inédite.[1]

Or, l'intersection entre une demi-droite de direction $-\vec{i}$ et $-\vec{j}$ donne un angle de 90°. $\vec{i} + \vec{j}$ et $-\vec{i}$ donne $90° + 45°$. $\vec{i} + \vec{j}$ et $-\vec{j}$ donne $90° + 45°$.

La somme des angles d'un triangle tropical dont les sommets sont indépendants donne donc $4 \times 90° = 360°$.

Partie B - Addition et Multiplication tropicales

On définit sur $\mathbb{R}$ l'addition tropicale et la multiplication tropicale tel que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

[1]En effet, soient deux directions, pour avoir deux fois une intersection entre des demi-droites ayant ces directions, comme cela arrive à la figure de la question 4) a), il est necessaire que la troisième demi-droite formant les intersections (appartenant à C_2 dans l'exemple) possède deux intersections, ce qui est contraire à la conclusion que chaque demi-droite possède *au plus* une intersection.

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad \text{et} \quad a \otimes b = a + b$$

1) On a donc : $\quad 3 \oplus 7 = 7 \qquad -5 \oplus 2 = 2 \qquad 3 \otimes 7 = 10 \qquad -5 \otimes 2 = -3$

---

2) $\oplus$ est associatif et commutatif car max est associatif et commutatif.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons sans perte de généralité que $b \leq c$ car $\oplus$ est commutatif.

On a $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes c = a \otimes b \oplus a \otimes c$ puisque $a \otimes b \leq a \otimes c$.

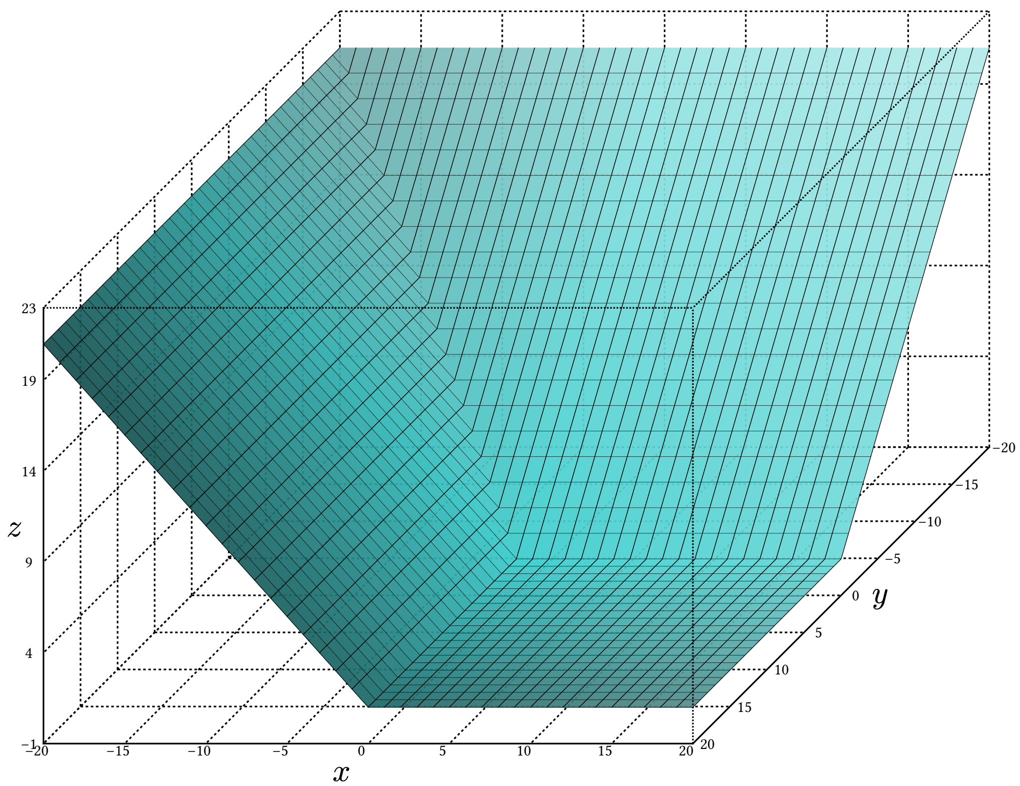
---

3) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ les paramètres du polynome de premier degré et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ représentant les points du plan.

Visualisation graphique

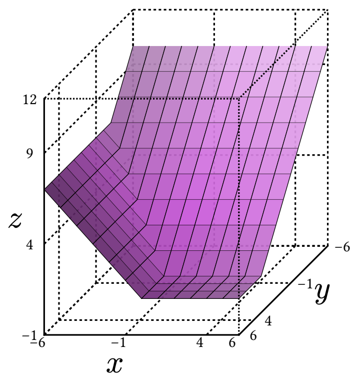
Voici à quoi ressemble une fonction tropicale[2] de degré 1 : $a \otimes x \oplus b \otimes y \oplus c$:

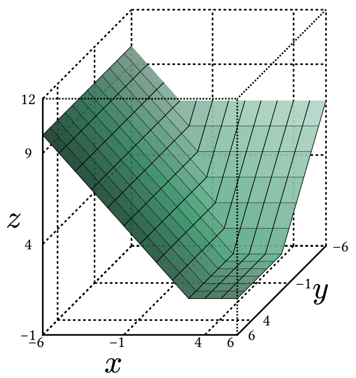
$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$

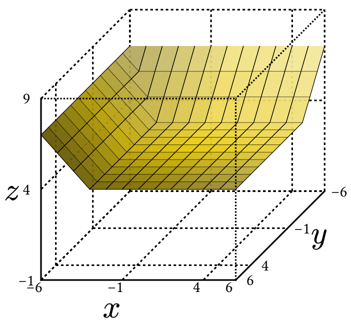


$1 \otimes x \oplus 5 \otimes y \oplus 1 \qquad 5 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1 \qquad 1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 5$

[2]Pour des raisons esthétiques, nous utilisons dans les graphiques l'opposé des valeurs de x et y.







On remarque que modifier les valeurs a, b et c « décale » l'un des « bords ».

Démonstration

On recherche le lieu (les droites) qui permettent d'atteindre deux fois le maximum dans $P_T = \max(a+x, b+y, c)$, ce qui est vrai si et seulement si :

$$\begin{array}{rcccl} a+x=c & \Leftrightarrow & x=c-a & \rightarrow & \text{parallèle à l'ordonnée} \\ b+y=c & \Leftrightarrow & y=c-b & \rightarrow & \text{parallèle à l'abscisse} \\ a+x=b+y & \Leftrightarrow & x-y=b-a & \rightarrow & \text{parrallèle à } x=y \end{array}$$

Nous avons donc bien trois droites habituelles avec les bonnes directions qui permettraient de former une droite tropicale si ces trois droites se coupaient au même point.[3]

Or $x - y = (c-a) - (c-b) = b - a$, donc le point $\mathcal{C}(c-a, c-b)$ appartient aux trois droites et est le centre de la droite tropicale.[4]

Par ailleurs, remplacer x et y par $c-a$ et $c-b$ dans $\max(a+x, b+y, c)$ permet bien d'atteindre trois fois le maximum.

Le lieu des coins de P_T est une droite tropicale de centre $\mathcal{C}(c-a, c-b)$.

---

4) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ représentant les points du plan.

Visualisation graphique

Voici à quoi ressemble la fonction tropicale du second degré[5] :

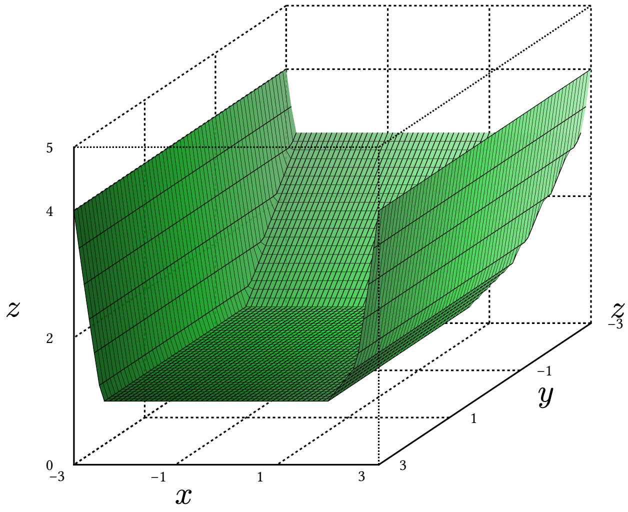
$$Q_T(x,y) = 1 \oplus (-1) \otimes x \oplus 0 \otimes y \oplus (-5) \otimes x^2$$

[3]En effet, trois droites parallèles à l'abscisse, l'ordonnée et $x = y$ qui se croisent en un point $\mathcal{C}$ permettent de former trois demi-droites partant de $\mathcal{C}$ dans les direction $-\vec{i}$, $-\vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ et donc de former une droite tropicale de centre $\mathcal{C}$.

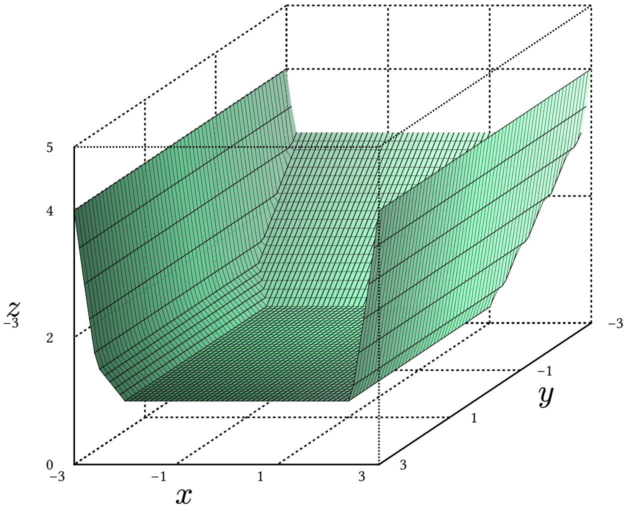
[4]Dans l'espace, le point $\mathcal{C}(c-a, c-b, c)$ est bien l'intersection des trois droites.

[5]On prend l'opposé pour l'axe y

D'un côté :[6]



De l'autre en prenant l'opposé pour l'axe x :



Démonstration

De manière similaire à ce que nous avons réalisé pour le polynôme de premier degré, recherchons les ensembles de points permettant d'atteindre deux fois le maximum $Q_T(x, y) = \max(1, x - 1, y, x^2 - 5)$:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}cl}
1 = x - 1 & \Leftrightarrow & x = 2 & \rightarrow & \text{parallèle à l'ordonnée} \\
x - 1 = y & \Leftrightarrow & x - y = 1 & \rightarrow & \text{parallèle à } x = y \\
y = 1 & \Leftrightarrow & y = 1 & \rightarrow & \text{parallèle à l'abscisse} \\
x^2 - 5 = 1 & \Leftrightarrow & x = \pm\sqrt{6} & \rightarrow & \text{parallèle à l'ordonnée} \\
x^2 - 5 = x - 1 & \Leftrightarrow & x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2} & \rightarrow & \text{parallèle à l'ordonnée} \\
x^2 - 5 = y & \Leftrightarrow & x^2 - y = 5 & \rightarrow & \text{n'est pas une droite}
\end{array}$$

Pour réaliser une droite tropicale, nous avons besoin d'une droite parallèle à l'abscisse et d'une parallèle à $x = y$, nous devons donc necessairement utiliser $y = 1$ et $x - y = 1$ et nous ne pourrons construire qu'une seule droite tropicale. En combinant ces deux équations nous obtenons $x = 2$ comme point de croisement. La droite $x = 2$ que nous avons précedement déterminée passe par ce point et convient donc.

Le lieu des coins de Q_T est la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(2, 1)$

[6] Il est interessant de remarquer que les deux lignes montantes ne sont pas des droites contrairement à ce que l'on pourrait penser. Ce sont des des polynômes du second degré étirés.