

# Devoir maison n°10 : Droites Tropicales

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

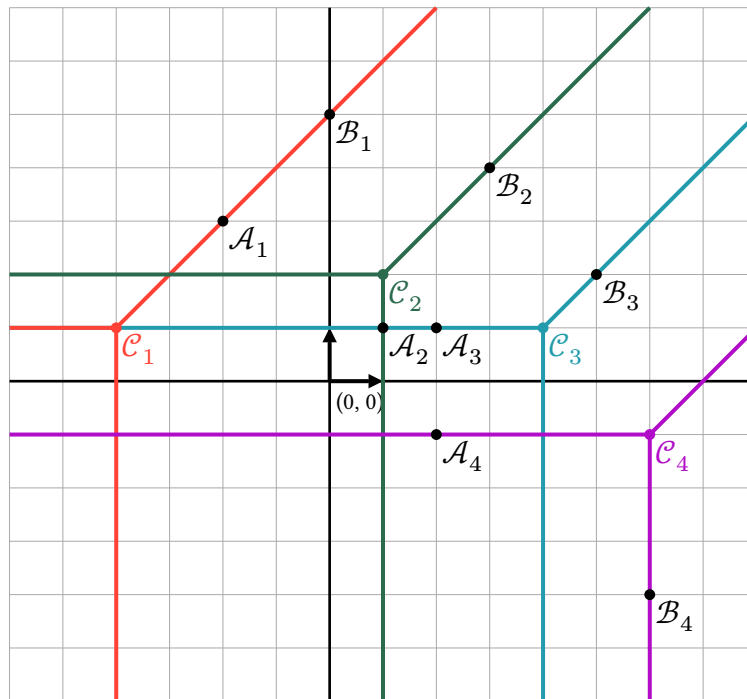
## Partie A - Les droites tropicales

( $\mathcal{A}'$ ) « Par deux points du plan passe une droite tropicale. »

( $\mathcal{B}'$ ) « Par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale. »

( $\mathcal{C}'$ ) « Deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point. »

1) a)



b) On cherche à prouver ( $\mathcal{A}'$ ). Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux points quelconques du plan. Par une translation  $T$  on se ramène au cas où :

$$\mathcal{A}(0,0) \text{ et } \mathcal{B}(x,y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

Etudions d'abord des cas particuliers :

**Si  $x = 0$  et  $y = 0$**  alors  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ , la droite tropicale de centre  $\mathcal{A}$  convient.

**Si  $y = 0$**  alors la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}(\max(0, x), 0)$  convient.

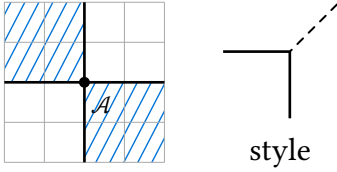
**Si  $x = 0$**  alors la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}(0, \max(0, y))$  convient.

**Si  $x = y$**  alors la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}(\min(0, x), \min(0, y))$  convient.

Attaquons nous désormais aux cas généraux :



**Si  $x < 0$  et  $y > 0$**



Il existe  $\mathcal{C}(0, y)$ . Soient les demi-droites :

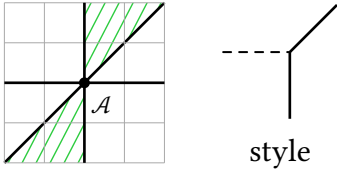
$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$  par construction,  $\mathcal{H}$  est parallèle à l'axe des abscisses.

$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$  par construction,  $\mathcal{V}$  est parallèle à l'axe des ordonnées.

Comme  $x < 0$ ,  $\mathcal{H}$  est de direction  $-\vec{i}$  et comme  $y > 0$ ,  $\mathcal{V}$  est de direction  $-\vec{j}$ . Donc  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  appartiennent à la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}$ .

En inversant les rôles de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , on obtient la deuxième partie rayée.

**Si  $x > 0$  et  $y > 0$  et  $y > x$**



Soit  $\mathcal{D}'$  la droite parallèle à  $y = x$  et passant par  $\mathcal{B}$ . On nomme  $\mathcal{C}$  l'intersection entre  $\mathcal{D}'$  et l'axe des ordonnées. Comme  $y > x$ ,  $y_{\mathcal{C}} > 0$ . Soient les demi-droites :

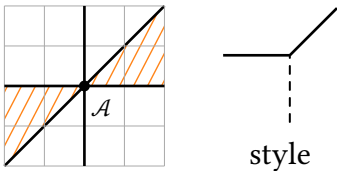
$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$  par construction,  $\mathcal{D}$  est de direction  $\vec{i} + \vec{j}$

$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$  par construction,  $\mathcal{V}$  est de direction  $-\vec{j}$

Donc  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  appartiennent à la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}$ .

En inversant les rôles de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , on obtient que pour  $0 > x$  et  $0 > y$  et  $x > y$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  appartiennent à la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}$ , soit la deuxième zone rayée.

**Si  $x > 0$  et  $y > 0$  et  $y < x$**

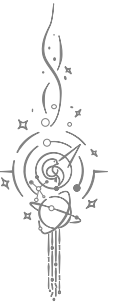


Doit  $\mathcal{D}'$  la droite parallèle à  $y = x$  et passant par  $\mathcal{B}$ . On nomme  $\mathcal{C}$  l'intersection entre  $\mathcal{D}'$  et l'axe des abscisses. Comme  $y < x$ ,  $x_{\mathcal{C}} > 0$ . Soient les demi-droites :

$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$  par construction,  $\mathcal{D}$  est de direction  $\vec{i} + \vec{j}$

$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$  par construction,  $\mathcal{H}$  est de direction  $-\vec{i}$

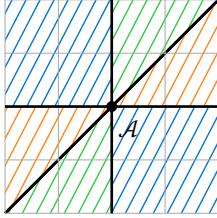
Donc  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  appartiennent à la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}$ .



En inversant les rôles de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , on obtient que pour  $0 > x$  et  $0 > y$  et  $x < y$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  appartiennent à la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}$ , soit la deuxième zone rayée.

### Conclusion

En combinant les différentes disjonctions de cas démontrées plus haut on obtient :



Le cas des lignes noires est couvert par les cas particuliers. Nous avons donc prouvé que pour tout point quelconque  $\mathcal{B}$ , il existe une droite tropicale passant par  $\mathcal{B}$  et par l'origine  $\mathcal{A}$ . Nous pouvons revenir au cas général avec deux points quelconques par la translation inverse de  $T$ .

Nous avons donc démontré  $(\mathcal{A}')$  : par deux points du plan passe une droite tropicale.

**2) a)** La propriété  $(\mathcal{B})$  n'est pas vraie pour les droites tropicales dans le cas de deux points dépendants.

Contre-exemple : Prenons les points  $\mathcal{A}(0, 0)$  et  $\mathcal{B}(1, 0)$ , qui sont dépendants. La droite tropicale de point central  $\mathcal{C}_1(2, 0)$  passe par  $\mathcal{A}$  et par  $\mathcal{B}$ , mais celle de point central  $\mathcal{C}_2(3, 0)$  aussi. Il y a même une infinité de droites tropicales passant par ces deux points : toutes celles dont le point central est d'ordonnée nulle et d'abscisse supérieure à 1.

**b)** On cherche à prouver  $(\mathcal{B}')$  : « Par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale. »

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux points indépendants du plan. Par une translation  $T$  on fait en sorte que  $\mathcal{A}(0, 0)$  et  $\mathcal{B}(x, y)$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ . Comme  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont indépendants,  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  et  $x \neq y$ .

D'après  $(\mathcal{A}')$ , il existe une droite tropicale de centre  $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $\beta \in \mathbb{R}$  passant par  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ . On nomme respectivement  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{D}$  les demi-droites de direction  $-\vec{i}$ ,  $-\vec{j}$  et  $\vec{i} + \vec{j}$  formant cette droite tropicale.

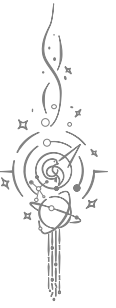
On considère toutes les combinaisons de demi-droites auxquelles pourraient appartenir  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  afin de déterminer  $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ :

### Cas impossibles :

Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  appartiennent à la même demi-droite, alors ils sont dépendants ce qui n'est pas possible donc on peut éliminer les cas  $(\mathcal{A} \in \mathcal{H} \text{ et } \mathcal{B} \in \mathcal{H})$ ,  $(\mathcal{A} \in \mathcal{V} \text{ et } \mathcal{B} \in \mathcal{V})$  et  $(\mathcal{A} \in \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{B} \in \mathcal{D})$ .

### Cas génériques :

Si  $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$  et  $\mathcal{B} \in \mathcal{H}$  alors les contraintes sur  $\mathcal{C}$  sont  $\mathcal{A} \in \mathcal{V} \Rightarrow \alpha = 0$  et  $\mathcal{B} \in \mathcal{H} \Rightarrow \beta = y$ . Cela donne  $\mathcal{C}(0, y)$ .



**Si  $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$  et  $\mathcal{B} \in \mathcal{H}$  alors les contraintes sur  $\mathcal{C}$  sont  $\mathcal{A} \in \mathcal{D} \Rightarrow \alpha = \beta$  et  $\mathcal{B} \in \mathcal{H} \Rightarrow \beta = y$ .  
Cela donne  $\mathcal{C}(y, y)$ ;  
**Si  $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$  et  $\mathcal{B} \in \mathcal{V}$  alors les contraintes sur  $\mathcal{C}$  sont  $\mathcal{A} \in \mathcal{D} \Rightarrow \alpha = \beta$  et  $\mathcal{B} \in \mathcal{V} \Rightarrow \alpha = x$ .  
Cela donne  $\mathcal{C}(x, x)$ .****

En inversant les rôles de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  on obtient également les contraintes suivantes : TODO

On remarque qu'à moins que  $x = 0, y = 0$  ou  $x = y$  ce qui n'est pas possible puisque  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont indépendants, il n'est pas possible que plusieurs droites donne le même centre.  
(ce qui n'est pas ce que l'on cherche à démontrer)

**3)** On cherche à prouver ( $\mathcal{C}'$ ) : « Deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point. »

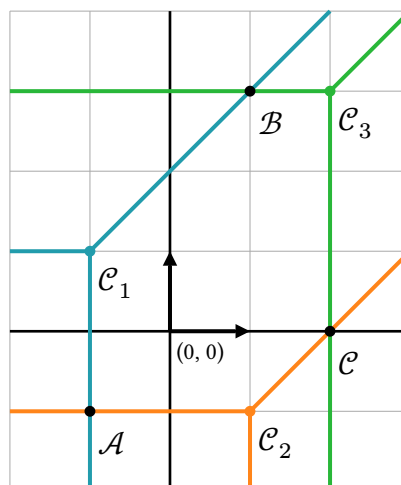
Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux centres de droites tropicales, indépendants. Par une translation  $T$ , on se ramène à  $\mathcal{C}(0, 0)$  et  $\mathcal{C}'(x, y)$  avec  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ . Comme  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont indépendants,  $x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$ .

On nomme respectivement  $\mathcal{H}, \mathcal{V}$  et  $\mathcal{D}$  les demi-droites de direction  $-\vec{i}, -\vec{j}$  et  $\vec{i} + \vec{j}$  continuant la droite tropicale  $\mathcal{C}$ . On fait de même pour  $\mathcal{C}'$  avec  $\mathcal{H}', \mathcal{V}'$  et  $\mathcal{D}'$ .

**Si  $y > 0$  et  $x < 0$  alors  $\mathcal{V}'$  coupe  $\mathcal{H}$  en  $I$ .  
Si  $y > 0$  et  $x > 0$  et  $y > x$  alors  $\mathcal{V}'$  coupe  $\mathcal{D}$  en  $I$ .  
Si  $y < 0$  et  $x < 0$  et  $y > x$  alors  $\mathcal{D}'$  coupe  $\mathcal{H}$  en  $I$ .  
Si  $y < 0$  et  $x < 0$  et  $y < x$  alors  $\mathcal{D}'$  coupe  $\mathcal{V}$  en  $I$ .  
Si  $y > 0$  et  $x > 0$  et  $y < x$  alors  $\mathcal{H}'$  coupe  $\mathcal{D}$  en  $I$ .  
Si  $y < 0$  et  $x > 0$  alors  $\mathcal{H}'$  coupe  $\mathcal{V}$  en  $I$ .**

Il n'y a aucune intersection autre que  $I$  entre les demi-droites pour chacun des cas, donc  $I$  est bien l'unique intersection de deux droites tropicales.

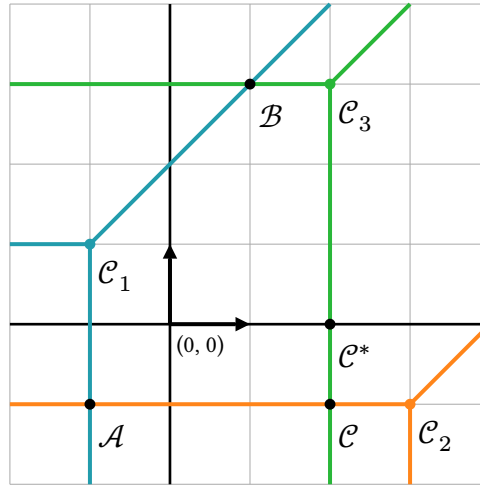
**4)** Voici l'exemple donné de triangle tropical :



Il est spécifié que dans cet exemple,  $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{C}} = 360^\circ$ .

a) On considère le triangle tropicale suivant :

$$\pi = 4$$



On a repris la figure de l'exemple, sur laquelle on a rajouté 2 à l'abscisse de  $\mathcal{C}_2$ .

$\mathcal{C}^*$  représente l'emplacement de  $\mathcal{C}$  sur l'ancienne figure.  $\hat{\mathcal{A}}$  et  $\hat{\mathcal{B}}$  ne sont pas impactés par le changement, par contre alors que  $\hat{\mathcal{C}}^*$  était obtus,  $\hat{\mathcal{C}}$  est droit. Donc  $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{C}} < 360$ .

L'égalité  $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{C}} = 360$  n'est pas vrai pour tous les triangles tropicaux.

b)

Soient  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  trois points indépendants du plan, centres de trois droites tropicales et sommets d'un triangle tropical.

D'après  $(\mathcal{C}')$ , les trois intersections  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  des trois droites tropicales doivent exister.

Il existe deux intersections sur une demi-droite de direction  $-\vec{i}, -\vec{j}$  ou  $\vec{i} + \vec{j}$  **si et seulement si** les deux intersections sont dépendantes.

Or on suppose  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  indépendants donc chaque demi-droite possède *au plus* une intersection.

Nous savons donc que chaque droite tropicale possède deux intersections qui sont répartis entre ses trois demi-droites. Donc l'unique cas de figure possible est que chacune des trois intersections soit entre deux demi-droites dont la combinaison de leur direction est inédite.<sup>1</sup>

Or, l'intersection entre une demi-droite de direction  $-\vec{i}$  et  $-\vec{j}$  donne un angle de  $90^\circ$ .  $\vec{i} + \vec{j}$  et  $-\vec{i}$  donne  $90^\circ + 45^\circ$ .  $\vec{i} + \vec{j}$  et  $-\vec{j}$  donne  $90^\circ + 45^\circ$ .

La somme des angles d'un triangle tropical dont les sommets sont indépendants donne donc  $4 \times 90^\circ = 360^\circ$ .

## Partie B - Addition et Multiplication tropicales

On définit sur  $\mathbb{R}$  l'addition tropicale et la multiplication tropicale tel que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

<sup>1</sup>En effet, soient deux directions, pour avoir deux fois une intersection entre des demi-droites ayant ces directions, comme cela arrive à la figure de la question 4) a), il est nécessaire que la troisième demi-droite formant les intersections (appartenant à  $\mathcal{C}_2$  dans l'exemple) possède deux intersections, ce qui est contraire à la conclusion que chaque demi-droite possède *au plus* une intersection.



$$a \oplus b = \max(a, b) \quad \text{et} \quad a \otimes b = a + b$$

1) On a donc :  $3 \oplus 7 = 7$        $-5 \oplus 2 = 2$        $3 \otimes 7 = 10$        $-5 \otimes 2 = -3$

2)  $\oplus$  est associatif et commutatif car  $\max$  est associatif et commutatif.

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Supposons sans perte de généralité que  $b \leq c$  car  $\oplus$  est commutatif.

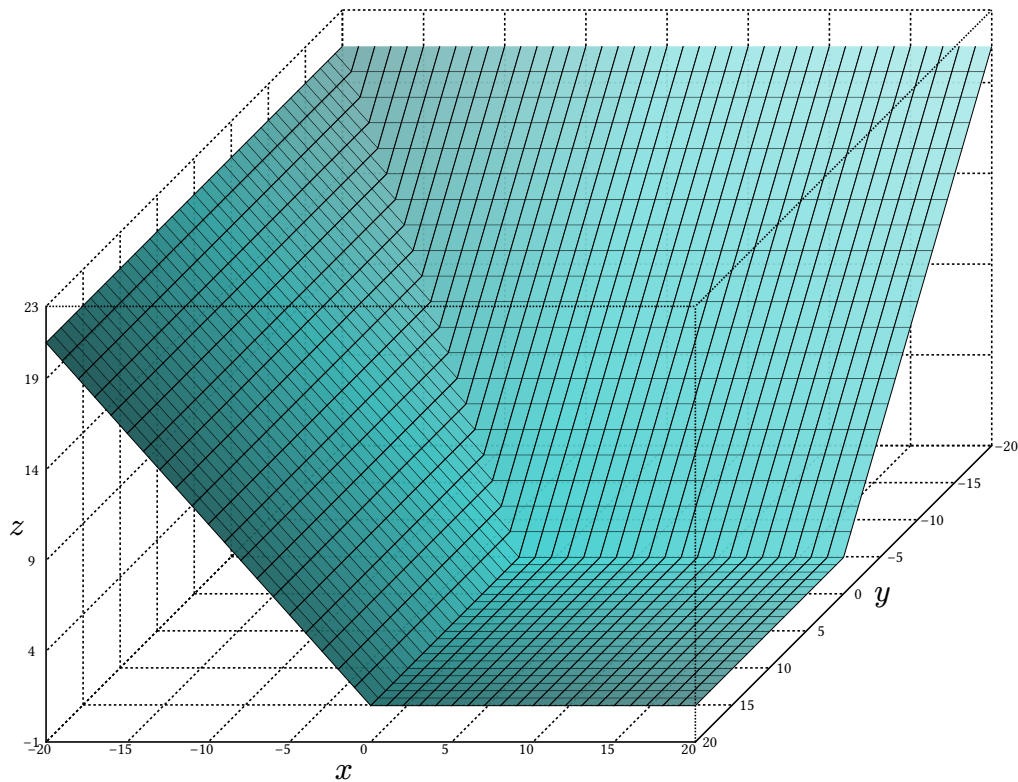
On a  $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes c = a \otimes b \oplus a \otimes c$  puisque  $a \otimes b \leq a \otimes c$ .

3) Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  les paramètres du polynôme de premier degré et  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  représentant les points du plan.

### Visualisation graphique

Voici à quoi ressemble une fonction tropicale<sup>2</sup> de degré 1 :  $a \otimes x \oplus b \otimes y \oplus c$  :

$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$

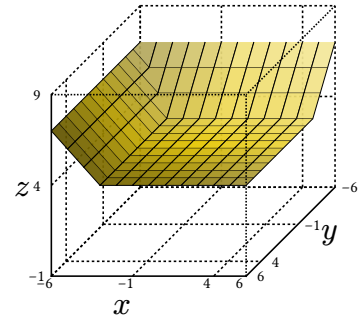
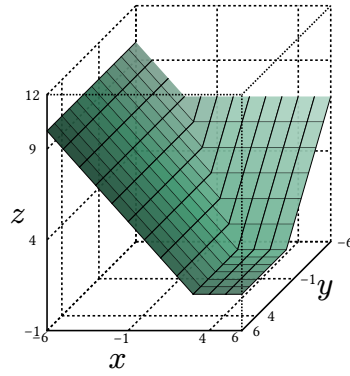
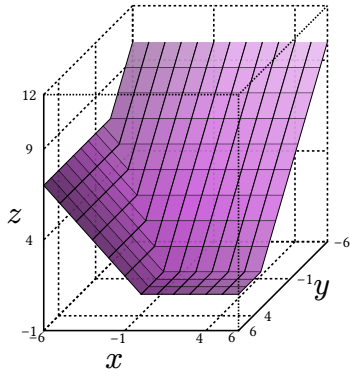
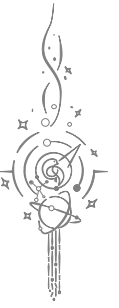


$$1 \otimes x \oplus 5 \otimes y \oplus 1$$

$$5 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$

$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 5$$

<sup>2</sup>Pour des raisons esthétiques, nous utilisons dans les graphiques l'opposé des valeurs de  $x$  et  $y$ .



On remarque que modifier les valeurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  « décale » l'un des « bords ».

### Démonstration

On recherche le lieu (les droites) qui permettent d'atteindre deux fois le maximum dans  $P_T = \max(a+x, b+y, c)$ , ce qui est vrai si et seulement si :

$$\begin{aligned} a+x=c &\Leftrightarrow x=c-a &\rightarrow \text{parallèle à l'ordonnée} \\ b+y=c &\Leftrightarrow y=c-b &\rightarrow \text{parallèle à l'abscisse} \\ a+x=b+y &\Leftrightarrow x-y=b-a &\rightarrow \text{parallèle à } x=y \end{aligned}$$

Nous avons donc bien trois droites habituelles avec les bonnes directions qui permettraient de former une droite tropicale si ces trois droites se coupaient au même point.<sup>3</sup>

Or  $x-y = (c-a) - (c-b) = b-a$ , donc le point  $\mathcal{C}(c-a, c-b)$  appartient aux trois droites et est le centre de la droite tropicale.<sup>4</sup>

Par ailleurs, remplacer  $x$  et  $y$  par  $c-a$  et  $c-b$  dans  $\max(a+x, b+y, c)$  permet bien d'atteindre trois fois le maximum.

Le lieu des coins de  $P_T$  est une droite tropicale de centre  $\mathcal{C}(c-a, c-b)$ .

4) Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  représentant les points du plan.

### Visualisation graphique

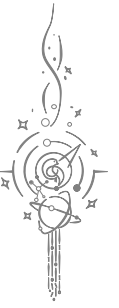
Voici à quoi ressemble la fonction tropicale du second degré<sup>5</sup> :

$$Q_T(x, y) = 1 \oplus (-1) \otimes x \oplus 0 \otimes y \oplus (-5) \otimes x^2$$

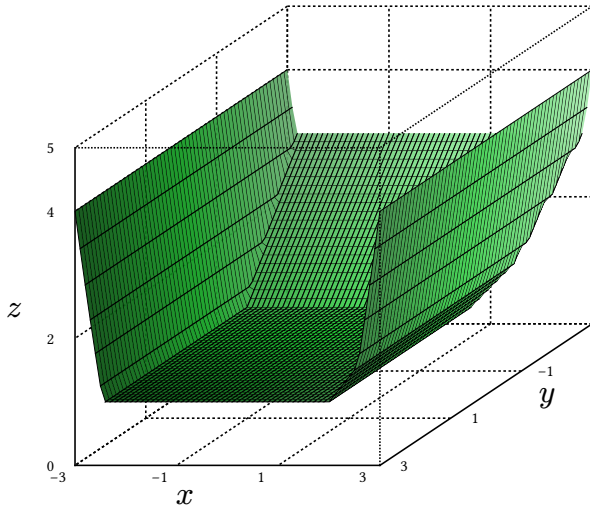
<sup>3</sup>En effet, trois droites parallèles à l'abscisse, l'ordonnée et  $x=y$  qui se croisent en un point  $\mathcal{C}$  permettent de former trois demi-droites partant de  $\mathcal{C}$  dans les directions  $-\vec{i}, -\vec{j}$  et  $\vec{i} + \vec{j}$  et donc de former une droite tropicale de centre  $\mathcal{C}$ .

<sup>4</sup>Dans l'espace, le point  $\mathcal{C}(c-a, c-b, c)$  est bien l'intersection des trois droites.

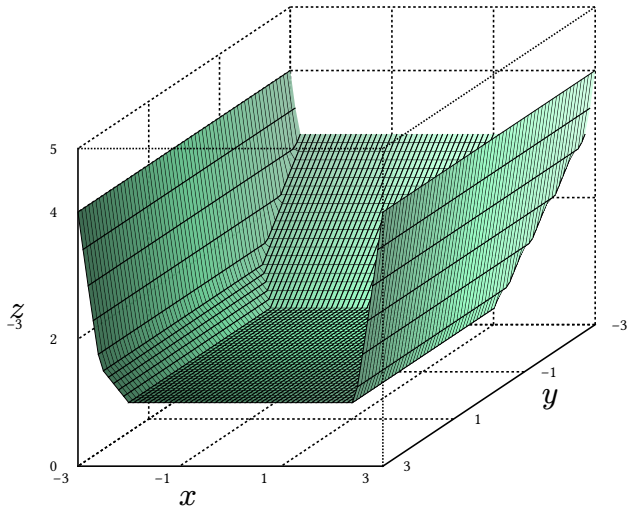
<sup>5</sup>On prend l'opposé pour l'axe  $y$



D'un côté :<sup>6</sup>



De l'autre en prenant l'opposé pour l'axe  $x$  :



### Démonstration

De manière similaire à ce que nous avons réalisé pour le polynôme de premier degré, recherchons les ensembles de points permettant d'atteindre deux fois le maximum  $Q_T(x, y) = \max(1, x-1, y, x^2-5)$  :

$$\begin{array}{llll}
 1 = x - 1 & \Leftrightarrow & x = 2 & \rightarrow \text{parallèle à l'ordonnée} \\
 x - 1 = y & \Leftrightarrow & x - y = 1 & \rightarrow \text{parallèle à } x = y \\
 y = 1 & \Leftrightarrow & y = 1 & \rightarrow \text{parallèle à l'abscisse} \\
 x^2 - 5 = 1 & \Leftrightarrow & x = \pm\sqrt{6} & \rightarrow \text{parallèle à l'ordonnée} \\
 x^2 - 5 = x - 1 & \Leftrightarrow & x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} & \rightarrow \text{parallèle à l'ordonnée} \\
 x^2 - 5 = y & \Leftrightarrow & x^2 - y = 5 & \rightarrow \text{n'est pas une droite}
 \end{array}$$

Pour réaliser une droite tropicale, nous avons besoin d'une droite parallèle à l'abscisse et d'une parallèle à  $x = y$ , nous devons donc nécessairement utiliser  $y = 1$  et  $x - y = 1$  et nous ne pourrions construire qu'une seule droite tropicale. En combinant ces deux équations nous obtenons  $x = 2$  comme point de croisement. La droite  $x = 2$  que nous avons précédemment déterminée passe par ce point et convient donc.

Le lieu des coins de  $Q_T$  est la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}(2, 1)$

<sup>6</sup>Il est intéressant de remarquer que les deux lignes montantes ne sont pas des droites contrairement à ce que l'on pourrait penser. Il s'agit d'un polynôme du second degré étiré.