

Devoir maison n°7 : Autour de Farey

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

Partie A - Somme des cancre dans \mathbb{Q}_+ .

Soient $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{e}{f}$, avec $a, c, e \in \mathbb{N}$, et $b, d, f \in \mathbb{N}^*$.

1)

$$x \oplus x = \frac{a}{b} \oplus \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

Donc $x \oplus x = x$.

2)

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d} \quad \text{et} \quad y \oplus x = \frac{c+a}{d+b} = \frac{a+c}{b+d}$$

$x \oplus y = y \oplus x$ donc l'opération est commutative.

3) D'une part :

$$(x \oplus y) \oplus z = \left(\frac{a+c}{b+d} \right) \oplus \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Et d'autre part :

$$x \oplus (y \oplus z) = \frac{a}{b} \oplus \left(\frac{c+e}{d+f} \right) = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ donc l'opération est associative.



Partie B - B

Partie C - Ensembles de Farey

1) Bah non en fait, Thomas python please

2) Si $\frac{m}{n} \in F_n$, alors $0 \leq m \leq n$ et $n \geq n - m \geq 0$. Donc $\frac{n-m}{n} \in F_n$.

Comme $n - (n - m) = m$, $\frac{m}{n} \in F_n$ si et seulement si $\frac{n-m}{n} \in F_n$, qui est son symétrique par rapport à leur moyenne $\frac{1}{2}$. Ce centre de symétrie ne dépend pas de m : on en conclut donc que $\frac{1}{2}$ est le centre de F_n pour $n \geq 2$.

3) Pas trouvé :/

4) Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion suivante : Si $x < y$ sont deux fractions consécutives de F_n , alors :

- $\delta(x, y) = -1$
- La première fraction qui apparaît dans un F_m , $m > n$ est $x \oplus y$

Il s'agit de prouver par récurrence $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Initialisation : Les seules fractions de F_1 sont $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$. On a bien $\delta(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}) = -1$ et la première fraction qui apparaît entre elles dans un F_m suivant est $\frac{1}{2}$ dans F_2 : or, $\frac{1}{2} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1}$. Donc $P(1)$ est vraie.

b) Hérédité : On suppose par la suite $P(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et on prouve $P(n+1)$.

On pose $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles et consécutives dans F_{n+1} . Par C.3, on sait que $x \in F_n$ ou $y \in F_n$.

1^{er} cas : $x \in F_n$ et $y \in F_n$.

Comme x et y sont consécutives dans F_{n+1} , alors elles le sont aussi dans F_n , car $F_n \subseteq F_{n+1}$. Alors par l'hypothèse de récurrence, $\delta(x, y) = -1$. De plus, la première fraction qui apparaît entre x et y est $x \oplus y$ dans F_m , $m > n$. Mais x et y sont consécutives dans F_{n+1} , donc $m > n+1$. Ainsi, dans ce cas, $P(n+1)$ est vérifiée.

2^e cas : $x \in F_n$ et $y \in F_{n+1} \setminus F_n$. Posons $z \in F_n$ la fraction successive de x dans F_n .

Par hypothèse de récurrence, comme y doit être la première fraction à s'être intercalée entre x et z , on doit avoir $y = x \oplus z$. De plus, on a $\delta(x, z) = -1$. On a donc

$$\delta(x, y) = \delta(x, x \oplus z) = \delta(x, z) = -1$$

Ce qui valide la première condition de $P(n+1)$.

Posons maintenant $t = \frac{r}{s}$ la première fraction irréductible à apparaître entre x et y dans un F_m pour $m > n+1$.



D'abord, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \delta(t, x) \geq 1 \\ \delta(y, t) \geq 1 \end{cases} &\stackrel{\text{B.2}}{\iff} \begin{cases} \delta(x, t) \leq -1 \\ \delta(t, y) \leq -1 \end{cases} \\ &\stackrel{\text{B.3}}{\iff} x < t < y \end{aligned}$$

Comme t s'intercale entre x et y , $\delta(t, x)$ et $\delta(y, t)$ sont bien supérieurs ou égaux à 1.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} a\delta(y, t) + c\delta(t, x) &= a(cs - dr) + c(br - as) \\ &= acs - acs + rbc - rad \\ &= r(bc - ad) \\ &= -r\delta(x, y) \\ &= r \end{aligned}$$

Similairement, on a :

$$\begin{aligned} b\delta(y, t) + d\delta(t, x) &= b(cs - dr) + d(br - as) \\ &= bdr - bdr + sbc - sad \\ &= s(bc - ad) \\ &= -s\delta(x, y) \\ &= s \end{aligned}$$

Si $\delta(t, x) \neq 1$ ou $\delta(t, y) \neq 1$, alors la fraction $t' = x \oplus y$ a un dénominateur $s' = b + d < s$. De plus, comme $\delta(x, y) = -1$, t' est irréductible. Donc t' s'intercale entre x et y strictement avant t , ce qui contredit la minimalité de t . Donc $\delta(x, t) = \delta(y, t) = 1$, et $t = x \oplus y$, ce qui conclut la preuve de la deuxième condition de $P(n + 1)$ dans ce cas.

3^e cas : TODO