Devoir maison n°13 : Ln, IAF et suites

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Problème 1 - Fonction logarithme népérien

1)

---

2)

---

3)

---

4)

---

5) **a)**

b)

c)

Problème 2 - Inégalité des accroissements finis et suites

Partie A

1) Supposons être dans les conditions de l'énoncé. Posons :

$$g(x) = f(x) - f(a) - M(x - a)$$
$$h(x) = f(x) - f(a) - m(x - a)$$

Alors, d'une part, $g(a) = h(a) = 0$. De plus, ces deux fonctions sont dérivables sur $]a; b[$ par sommes de fonctions dérivables et pour tout $x \in]a; b[$:

$$g'(x) = f'(x) - M \leq 0 \text{ par hypothèse}$$

Ainsi que :

$$h'(x) = f'(x) - m \geq 0 \text{ par hypothèse}$$

Donc g est décroissante sur $]a; b[$. Comme elle est continue sur $[a; b]$, on peut conclure que, comme $b \geq a$, $g(b) \leq g(a) = 0$, d'où :

$$f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Similairement, h est croissante sur $]a; b[$ et $h(b) \geq h(a) = 0$, d'où :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Partie B

On définit sur $\mathbb{R}_*$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$$

1) φ est impaire : soit $x \in \mathbb{R}_*$. Alors $-x \in \mathbb{R}_*$ et :

$$\begin{aligned}\varphi(-x) &= \frac{1}{2}\left(-x - \frac{5}{x}\right) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right) \\ &= -\varphi(x)\end{aligned}$$

---

2)

- Quand $x \to +\infty$: $\frac{5}{x} \to 0$ et par somme :

  $$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

- Quand $x \to -\infty$: $\frac{5}{x} \to 0$ et par somme :

  $$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$$

- Quand $x \to 0^-$: $\frac{5}{x} \to -\infty$ et par somme :

  $$\lim_{x \to 0^-} \varphi(x) = -\infty$$

- Quand $x \to 0^+$: $\frac{5}{x} \to +\infty$ et par somme :

  $$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = +\infty$$

---

3) φ est dérivable sur son intervalle de définition comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_*$. Sa dérivée est pour tout $x \in \mathbb{R}_*$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2}$$

Ainsi, $\varphi'(x) \leq 0$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2} \leq \frac{5}{2x^2} \\ \Longleftrightarrow\ & x^2 \leq 5 \\ \Longleftrightarrow\ & x \in \left[-\sqrt{5}; \sqrt{5}\right] \cap \mathbb{R}_*\end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$	
Signe de $\varphi'(x)$		$+$		$-$	||	$-$		$+$
Variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{5}$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{5}$	$\nearrow$

---

4) TODO: Thomas ? dis moi si tu ne veux pas le faire :3

---

5) Soit $x \in \mathbb{R}_*$:

$$\begin{aligned} \varphi(x) - x &= \frac{x}{2} + \frac{5}{2}x - x \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}x \\ &= \frac{5 - x^2}{2x} \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

---

6) Soit $x \in \left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$. Alors $x \geq \sqrt{5}$, et par le 3), $\varphi'(x) \geq 0$. De plus :

$$\begin{aligned} &\varphi'(x) \leq \frac{1}{10} \\ \iff &\frac{1}{2} - \frac{1}{10} \leq \frac{5}{2x^2} \\ \iff &\frac{4}{5} \leq \frac{5}{x^2} \\ \iff &x^2 \leq \frac{25}{4} \\ \iff &x \leq \frac{5}{2} \text{ car } x \geq \sqrt{5} \geq 0. \end{aligned}$$

Donc $0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{1}{10}$ sur $\left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$.

Partie C

1) Par le tableau de variations, φ est croissante sur $\left[\sqrt{5}, \frac{5}{2}\right]$. Ainsi, si pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$, u_{n+1} est bien défini et :

$$\sqrt{5} \leq u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq \varphi\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4} \leq \frac{5}{2}$$

Comme $u_0 \in \left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$, par récurrence, la suite (u_n) est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{5} \leq u_n \leq \frac{5}{2}$.

---

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \varphi(u_n) - u_n \\ &= \frac{5 - u_n^2}{2u_n} \text{ par le B)5)} \\ &\leq 0 \text{ car } u_n \geq \sqrt{5} \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} \leq u_n$ est la suite (u_n) est décroissante.

---

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait par le B)6) que pour tout $x \in \left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$, $0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{1}{10}$. φ est dérivable, en particulier continue, sur cet intervalle, et on peut donc appliquer l'IAF avec u_n et $\sqrt{5}$ qui sont dans le bon intervalle, donnant :

$$\begin{gathered} 0\left(u_n - \sqrt{5}\right) \leq \varphi(u_n) - \varphi\left(\sqrt{5}\right) \leq \frac{1}{10}\left(u_n - \sqrt{5}\right) \\ \Longleftrightarrow 0 \leq u_{n+1} - \sqrt{5} \leq \frac{1}{10}\left(u_n - \sqrt{5}\right) \end{gathered}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

b) On procède par récurrence.

Initialisation : $0 \leq u_0 - \sqrt{5}$ car $\frac{5}{2} \geq \sqrt{5}$, et $u_0 - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}$ car $\sqrt{5} \geq 2$.

Hérédité : Supposons pour $n \in \mathbb{N}$ que $0 \leq u_n - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$. Alors $u_{n+1} - \sqrt{5} \geq 0$ par le 1), et le 3)a) donne :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{5} &\leq \frac{1}{10}\left(u_n - \sqrt{5}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Par récurrence, l'assertion est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

4)

---

5)