

Devoir maison n°8 : Chemins sur un quadrillage

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

TE1

Partie A - Retrouver des formules bien connues

1) Un chemin entre O et $M(p, q)$ équivaut à une somme ordonnée de p vecteurs \vec{i} et de q vecteurs \vec{j} . Une telle somme est composée de $p + q$ termes, et est déterminée uniquement par la position des p vecteurs \vec{i} parmi les $p + q$ termes, en complétant tous les autres termes par des \vec{j} . Ainsi, comme l'ordre des \vec{i} n'importe pas, il y a $\binom{p+q}{p}$ telles sommes.

On en déduit que le nombre de chemins entre O et $M(p, q)$ est de $\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$ (par symétrie).

2) Un chemin de longueur n partant d'un point consiste en une somme ordonnée de n vecteurs parmi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$, assimilable à une n -liste de cet ensemble à deux éléments. On en déduit qu'il y a 2^n chemins de longueur n partant de tout point (et en particulier de l'origine).

3) a) Par translation de vecteur $\overrightarrow{PO} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, un chemin joignant $P(0, 1)$ à $B_k(n - k, k)$ équivaut à un chemin joignant l'origine et $B'_k(n - k, k - 1)$. Ceux ci sont donc au nombre de $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$.

Similairement, un chemin entre Q et $B_k(n - k, k)$ équivaut à un chemin entre l'origine et $B''_k(n - k - 1, k)$. Ils sont donc au nombre de $\binom{n-k-1+k}{k} = \binom{n-1}{k}$.

b) On double compte les chemins de O à B_k . D'une part, ceux-ci sont au nombre de $\binom{n}{k}$ par le 1). D'autre part, un tel chemin doit passer soit par $Q(1, 0)$, soit par $P(0, 1)$ en fonction du premier vecteur du chemin. Ainsi, un chemin entre O et B_k est soit un chemin de Q à B_k , soit un chemin de P à B_k . On en déduit :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

c) Un chemin de O à $B_n(n, n)$ passant par $B_k(n - k, k)$ équivaut à la donnée de deux chemins, l'un de O à B_k , et l'autre de B_k à B_n . Ainsi, ces chemins sont au nombre de :

$$\binom{n-k+k}{k} \cdot \binom{n-(n-k)+(n-k)}{n-k} = \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$$

Où l'on a dénombré les chemins de B_k à B_n par translation de vecteur $\overrightarrow{B_kO}$.

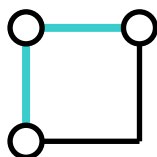
d) On double compte les chemins de O à $B_n(n, n)$. D'une part, ceux-ci sont au nombre de $\binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$. D'autre part, chaque tel chemin, après n étapes, se trouve sur un unique point de la forme $B_k(n - k, k)$ avec $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, car ceux-ci forment l'ensemble des points atteignables depuis O par un chemin de longueur n . Ainsi, par disjonction et le dénombrement de la question précédente, on déduit :



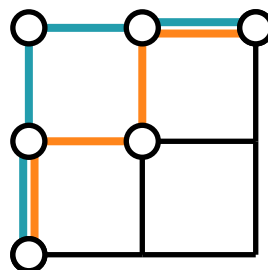
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Partie B - Chemins de DYCK et nombres de CATALAN

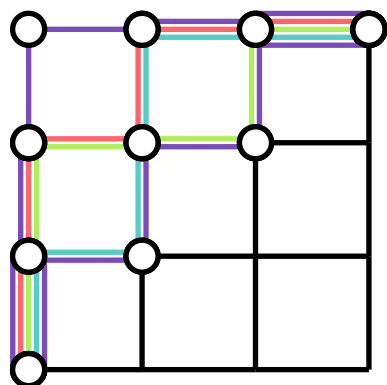
1) a)



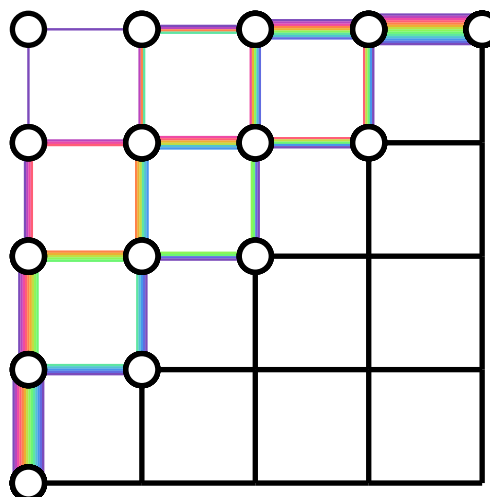
chemins de DYCK de longueur 2



chemins de DYCK de longueur 4



chemins de DYCK de longueur 6



chemins de DYCK de longueur 8

(Chemins de DYCK générés automatiquement). On trouve $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ et $C_3 = 5$.

b) Un chemin de DYCK de longueur $2n$ ne rencontrant la diagonale qu'en O et A_n doit forcément passer par $P(0, 1)$ (monter à la première étape) et $P'(n - 1, n)$: sinon, le chemin passerait par $Q(n, n - 1)$ qui est en dessous de la diagonale. (voir *Schéma 1* ci-dessous)

De plus, le chemin induit entre P et P' , de longueur $2(n - 1)$, doit forcément être de DYCK relativement à la diagonale entre P et P' : sinon, il rencontrerait la diagonale entre O et A_n . Ainsi, ces chemins sont au nombre de C_{n-1} . (voir *Schéma 2*)

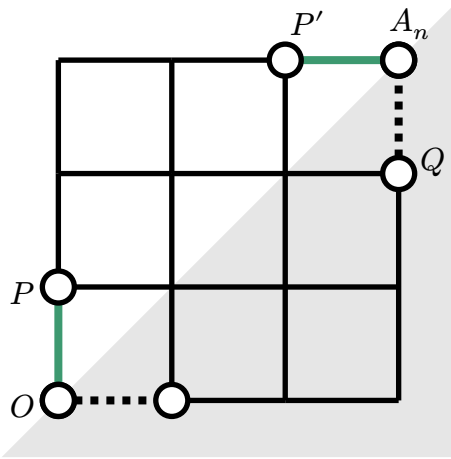


Schéma 1: Premier trait

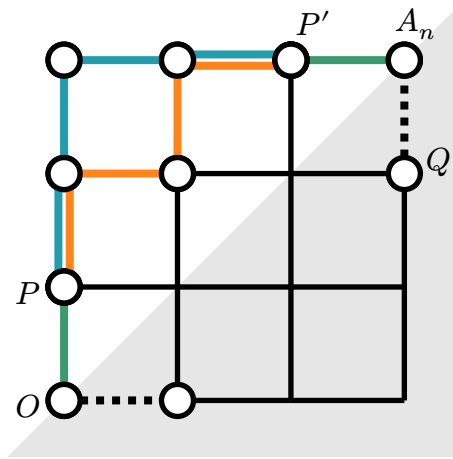


Schéma 2: Chemins de DYCK de P à P'

c) Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Un tel chemin passe forcément par $M_k(k, k)$, et est de DYCK jusqu'à avoir atteint M_k , et strictement au dessus de la diagonale Δ (qui est aussi la diagonale entre M_k et M_n) entre M_k et M_n , à la manière du b).

Ainsi, la donnée d'un tel chemin équivaut à celle d'un chemin de DYCK entre O et M_k , de longueur $2k$, au nombre de C_k , et d'un chemin, comme dans le b), de longueur $2n - 2k = 2(n - k)$, qui sont donc au nombre de C_{n-k-1} .

Par le principe du et, ces chemins sont au nombre de $C_k C_{n-k-1}$.

d) On double compte les chemins de DYCK entre O et M_n . D'une part, par définition, ceux-ci sont au nombre de C_n . D'autre part, tout chemin de DYCK atteint la diagonale pour la dernière fois avant son arrivée en un point $M_k(k, k)$, $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$. Pour chaque $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, ces chemins sont au nombre de $C_k C_{n-k-1}$, et pour $k = 0$, les chemins sont ceux de la question b), qui sont au nombre de $C_{n-1} = C_0 C_{n-0-1}$, où l'on utilise la convention $C_0 = 1$.

Par disjonction, on obtient :

$$C_n = C_0 C_{n-0-1} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

e) En appliquant la formule précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} C_4 &= C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 \\ &= 2(C_0 C_3 + C_1 C_2) \\ &= 2(5 + 2) \\ &= 14 \end{aligned}$$

2)



```
def catalan(n):
    Ck = [1]

    # Calculs successifs des C_i pour tout 1 <= i <= n
    # Avec la formule du d)
    for i in range(1, n + 1):
        Ci = 0
        for j in range(i):
            Ci += Ck[j] * Ck[i - j - 1]

        Ck.append(Ci)

    return Ck[n]
```

3) a) Un chemin entre O et $M_n(n, n)$ est soit toujours au dessus de la diagonale, soit franchit la diagonale en un point. Par disjonction, on obtient :

$$C_n + F_n = \binom{2n}{n}$$

b) Supposons que le chemin franchissant \mathcal{C} prenne la forme :

$$\underbrace{\vec{j} + \dots + \vec{i}}_{(k+1)\vec{i} + k\vec{j} = \overrightarrow{OA(k+1, k)}} + \underbrace{\dots}_{(n-k-1)\vec{i} + (n-k)\vec{j}} = \overrightarrow{OM_n}$$

Le chemin \mathcal{C}' prend alors la forme :

$$(k+1)\vec{i} + k\vec{j} + (n-k-1)\vec{j} + (n-k)\vec{i} = (n+1)\vec{i} + (n-1)\vec{j} \\ = \overrightarrow{OB(n+1, n-1)}$$

c) Tout chemin de O à $B(n+1, n-1)$ franchit la diagonale Δ au moins une fois, au plus tard en passant de $P(n-1, n-1)$ à $Q(n, n-1)$. Montrons que pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, les chemins de O à M_n franchissant pour la première fois en $A_k(k+1, k)$ sont en même nombre que les chemins de O à B passant par A_k .

A MIEUX FAIRE

d) Les chemins joignant O et $B(n+1, n-1)$ sont au nombre de $\binom{n+1+n-1}{n+1}$. Par la question précédente, on déduit que :

$$F_n = \binom{2n}{n+1}$$

D'où $C_n = \binom{2n}{n} - F_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$

e) Par l'expression des coefficients binomiaux :



$$\binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{\frac{n+1}{n}n!n!} = \frac{n}{n+1} \frac{2n!}{n!n!} = \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Ainsi, on obtient :

$$C_n = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$