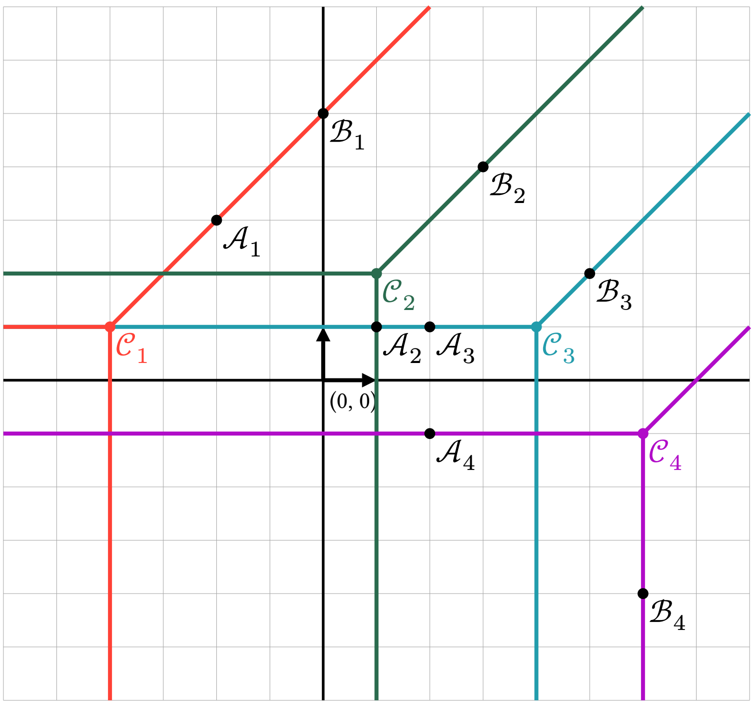
# Devoir maison n°10 : Droites Tropicales

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

## Partie A - Les droites tropicales

($\mathcal{A}'$) par deux points du plan passe une droite tropicale
($\mathcal{B}'$) par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale
($\mathcal{C}'$) deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point.

**1) a)**




**b)** On cherche à prouver ($\mathcal{A}'$). Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux points quelconques du plan. Par une translation $T$ on se ramène au cas où :

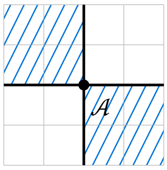
$$\mathcal{A}(0,0) \text{ et } \mathcal{B}(x,y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

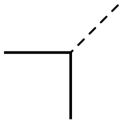
Etudions d'abord des cas particuliers :

**Si $x = 0$ et $y = 0$** alors $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, la droite tropicale de centre $\mathcal{A}$ convient.
**Si $y = 0$** alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\max(0,x), 0)$ convient.
**Si $x = 0$** alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(0, \max(0,y))$ convient.
**Si $x = y$** alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\min(0,x), \min(0,y))$ convient.

Attaquons nous désormais aux cas généraux :

**Si** $x < 0$ **et** $y > 0$



style

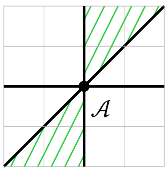
Il existe $\mathcal{C}(0, y)$. Soient les demi-droites :

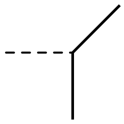
$$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{B}) \text{ par construction, } \mathcal{H} \text{ est parallèle à l'axe des abcisses.}$$
$$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A}) \text{ par construction, } \mathcal{V} \text{ est parallèle à l'axe des ordonnées.}$$

Comme $x < 0$, $\mathcal{H}$ est de direction $-\vec{i}$ et comme $y > 0$, $\mathcal{V}$ est de direction $-\vec{j}$. Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$.

En inversant les rôles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on obtient la deuxième partie rayée.

**Si** $x > 0$ **et** $y > 0$ **et** $y > x$



style

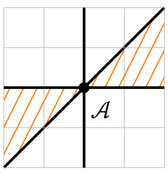
Soit $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à $y = x$ et passant par $\mathcal{B}$. On nomme $\mathcal{C}$ l'intersection entre $\mathcal{D}'$ et l'axe des ordonnées. Comme $y > x$, $y_{\mathcal{C}} > 0$. Soient les demi-droites :

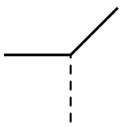
$$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B}) \text{ par construction, } \mathcal{D} \text{ est de direction } \vec{i} + \vec{j}$$
$$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A}) \text{ par construction, } \mathcal{V} \text{ est de direction } -\vec{j}$$

Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$.

En inversant les rôles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on obtient que pour $0 > x$ et $0 > y$ et $x > y$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$, soit la deuxième zone rayée.

**Si** $x > 0$ **et** $y > 0$ **et** $y < x$



style

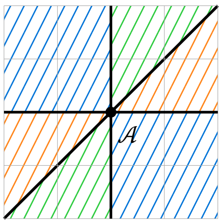
Doit $\mathcal{D}'$ la droite parallèle à $y = x$ et passant par $\mathcal{B}$. On nomme $\mathcal{C}$ l'intersection entre $\mathcal{D}'$ et l'axe des abcisses. Comme $y < x$, $x_{\mathcal{C}} > 0$. Soient les demi-droites :

$$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B}) \text{ par construction, } \mathcal{D} \text{ est de direction } \vec{i} + \vec{j}$$
$$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{A}) \text{ par construction, } \mathcal{H} \text{ est de direction } -\vec{i}$$

Donc $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$.

En inversant les rôles de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on obtient que pour $0 > x$ et $0 > y$ et $x < y$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ appartiennent à la droite tropicale de centre $\mathcal{C}$, soit la deuxième zone rayée.

**Conclusion**
En combinant les différentes disjonctions de cas démontrées plus haut on obtient :




Le cas des lignes noires est couvert par les cas particuliers. Nous avons donc prouvé que pour tout point quelconque $\mathcal{B}$, il existe une droite tropicale passant par $\mathcal{B}$ et par l'origine $\mathcal{A}$. Nous pouvons revenir au cas général avec deux points quelconques par la translation inverse de $T$.

Nous avons donc démontré $(\mathcal{A}')$ : par deux points du plan passe une droite tropicale.

## Partie B - Addition et Multiplication tropicales

On définit sur $\mathbb{R}$ l'addition tropicale et la multiplication tropicale tel que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad \text{et} \quad a \otimes b = a + b$$

**1)** On a donc : $3 \oplus 7 = 7$ $\quad -5 \oplus 2 = 2$ $\quad 3 \otimes 7 = 10$ $\quad -5 \otimes 2 = -3$

---

**2)** $\oplus$ est associatif et commutatif car max est associatif et commutatif.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons sans perte de généralité que $b \leq c$ car $\oplus$ est commutatif.

On a $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes c = a \otimes b \oplus a \otimes c$ puisque $a \otimes b \leq a \otimes c$.

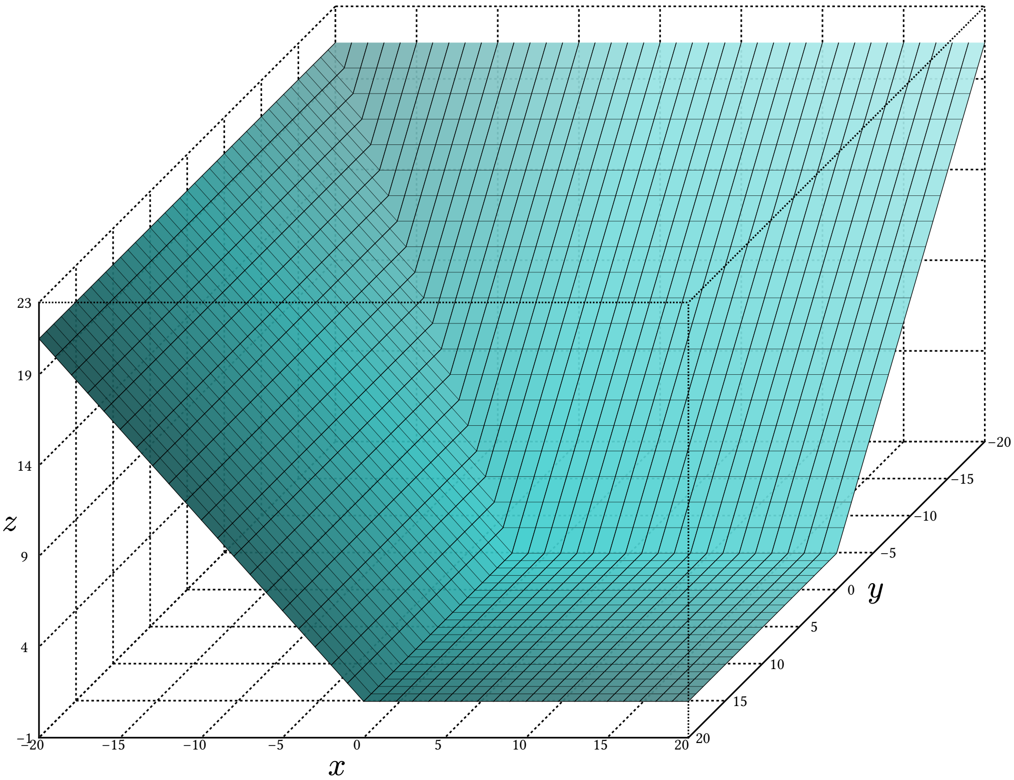
---

**3)**

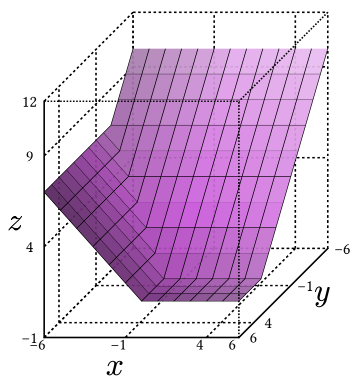
Voici à quoi ressemble une fonction tropicale[1] de degré 1 : $a \otimes x \oplus b \otimes y \oplus c$ :

$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$

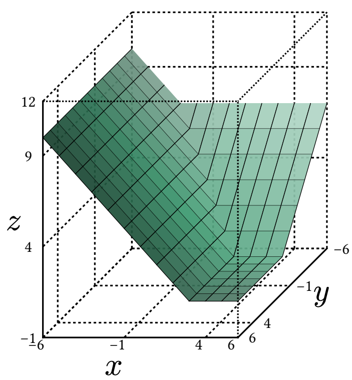
[1]Pour des raisons esthétiques, nous utilisons dans les graphiques l'opposé des valeurs de $x$ et $y$.



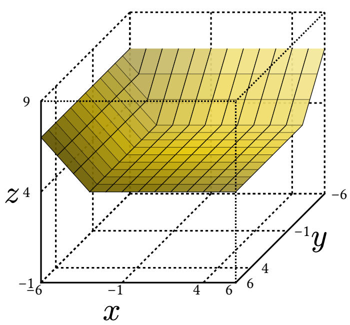

$1 \otimes x \oplus 5 \otimes y \oplus 1$




$5 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$




$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 5$

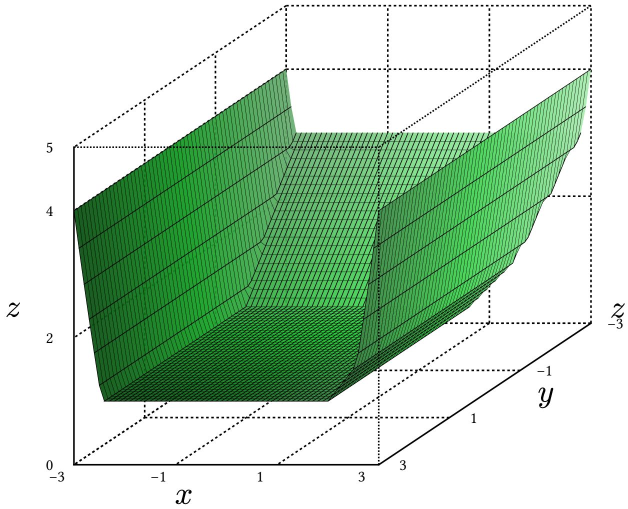



On remarque que modifier les valeurs $a$, $b$ et $c$ « décale » l'un des « bords ».

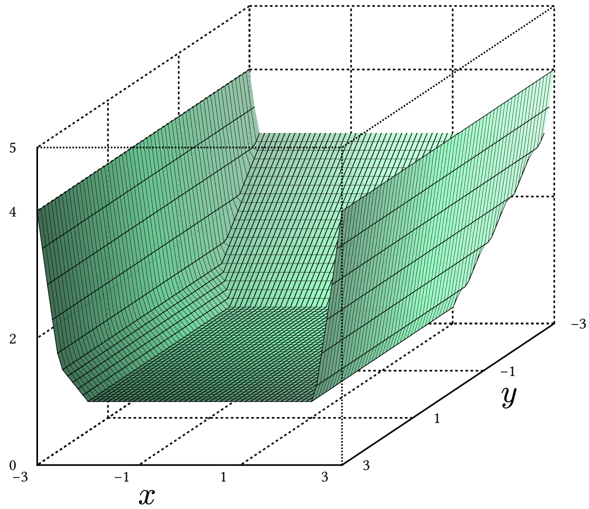
**4)** Voici à quoi ressemble la fonction tropicale du second degré[2] :

$$1 \oplus (-1) \otimes x \oplus 0 \otimes y \oplus (-5) \otimes x^2$$

D'un côté :




De l'autre en prenant l'opposé pour l'axe $x$ :




[2]On prend l'opposé pour l'axe $y$