Devoir maison n°12 : Suites récurrentes d'ordre 2 non linéaires

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A -

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

1)

a)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $u_n \geqslant 1$:

D'une part, $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ sont clairement supérieurs ou égaux à 1. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \geqslant 1$ et $u_{n+1} \geqslant 1$. Alors, en utilisant la relation de récurrence, il vient :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} \geqslant \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \geqslant 1$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

b)

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$. En utilisant la relation de récurrence, on a :

$$l = \sqrt{l} + \sqrt{l} = 2\sqrt{l} \text{ d'où } l = 4 \text{ ou } l = 0$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$. On en déduit que la seule limite possible de la suite u_n est $l = 4$.

c) Le script python suivant calcule la valeur de u_n suivant la valeur de n fournie.

```python
def u(n):
    if n == 0 or n == 1:
        return 1
    i = 1
    a, b = 1, 1
    while i < n:
        i += 1
        c = a**0.5 + b**0.5
        b, a = c, b
    return c

print(u(50)) # u_50 = 3.999999998476622
```

2)

Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$.

a)

Supposons que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ à partir duquel, pour tout $n \geqslant N$:

$$|v_n - 0| < \varepsilon \text{ soit } |\frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1| < \varepsilon \text{ soit } |\sqrt{u_n} - 2| < 2\varepsilon$$

Ainsi, en posant $\delta = 2\varepsilon$, pour tout $n \geqslant N$, $|\sqrt{u_n} - 2| < \delta$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{u_n} = 2$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$ par continuité de la fonction $x \longrightarrow x^2$ et car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1 > 0$.

b)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $v_{n+2} = \frac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})}$:

$$\frac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})} = \frac{\frac{1}{2}u_{n+2} - 2}{2 + \sqrt{u_{n+2}}} = \frac{\left(\sqrt{u_{n+2}} + 2\right)\left(\sqrt{u_{n+2}} - 2\right)}{2\left(2 + \sqrt{u_{n+2}}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1 = v_{n+2}$$

c)

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|v_{n+2}| = |v_{n+1} + v_n| \; \frac{1}{2|2 + v_{n+2}|}$$

Or ,

$$u_{n+2} \geqslant 1 \Rightarrow \sqrt{u_{n+2}} \geqslant 1 \Rightarrow 2(2 + v_{n+2}) \geqslant 3 \Rightarrow \frac{1}{2|2 + v_{n+2}|} \leqslant \frac{1}{3}$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|v_{n+2}| \leqslant |v_{n+1} + v_n| \; \frac{1}{3}$$

d)

Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$ continue sur $[0, 1]$ car polynomiale.

Puisque $f(0) = -\frac{1}{3} < 0$ et que $f(1) = \frac{1}{3} > 0$, alors d'après le TVI il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$, soit tel que $\alpha^2 = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}$.

e)

Posons $\mu = \max(v_0, v_1)\} \in \mathbb{R}_+^*$. Prouvons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $P(n)$: « $|v_n| \leqslant \mu \times \alpha^n$ » est vraie par récurrence double.

Initialisation : De manière immédiate, $v_0 \leqslant \mu$ et $v_1 \leqslant \mu$. Ainsi, $P(0)$ et $P(1)$ vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et $P(n + 1)$ vraies.

Puisque $|v_{n+2}| \leqslant \frac{1}{3}(|v_n| + |v_{n+1}|)$, il vient :

$$|v_{n+2}| \leqslant \frac{1}{3}(\mu \times \alpha^n + \mu \times \alpha^{n+1}) = \mu \times \alpha^n \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha\right)}_{=\alpha^2} = \mu \times \alpha^n \times \alpha^2 = \mu \times \alpha^{n+2}$$

On en déduit que $P(n+2)$ vraie à son tour, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leqslant \mu \times \alpha^n$.

f)

Puisque $|\alpha| < 1$ et que μ est un réel fixé, alors $\lim_{n\to+\infty}(\mu \times \alpha^n) = 0$.

De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant |v_n| \leqslant \mu \times \alpha^n$, alors par théorème d'encadrement, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Ainsi, par le résultat de la question 2.a, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.

Partie B -

Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}$$

1)

a)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrons que $u_n \geqslant 1$:

D'une part, $u_0 = 1\} \in [1,2]$ et $u_1 = 1\} \in [1,2]$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $u_n \in [1,2]$ et $u_{n+1} \in [1,2]$. Alors, en utilisant la relation de récurrence, il vient :

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leqslant u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$.

b)

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque n tend vers $+\infty$. En utilisant la relation de récurrence, on a :

$$l = \frac{1}{l} + \frac{1}{l} = \frac{2}{l} \text{ d'où } l = \sqrt{2} \text{ ou } l = -\sqrt{2}$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [1,2]$. On en déduit que la seule limite possible de la suite u_n est $l = \sqrt{2}$.

c)

Le script python suivant calcule la valeur de u_n suivant la valeur de n fournie.

```python
def u(n):
    if n == 0 or n == 1:
        return 1
    i = 1
    a, b = 1, 1
    while i < n:
        i += 1
        c = 1/a + 1/b
        b, a = c, b
    return c

print(u(50)) # u_50 = 1.414213546982309
```

---

2)

Considérons la suite $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\delta_n = u_n - \sqrt{2}$.

a)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$-\left(\frac{\delta_{n+1}}{\sqrt{2}u_{n+1}} + \frac{\delta_n}{\sqrt{2}u_n}\right) = \frac{\sqrt{2} - u_{n+1}}{\sqrt{2}u_{n+1}} + \frac{\sqrt{2} - u_n}{\sqrt{2}u_n} = \frac{\sqrt{2}u_n - u_n u_{n+1} + \sqrt{2}u_{n+1} - u_n u_{n+1}}{\sqrt{2}u_n u_{n+1}}$$

$$= \frac{u_n + u_{n+1} - \sqrt{2}u_n u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n + u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} - \sqrt{2} = \left(\frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_n} - \sqrt{2}\right) = \delta_{n+2}$$

Et d'autre part,

$$-\frac{\delta_n}{2u_n}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) + \frac{\delta_{n-1}}{2u_{n-1}u_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}u_{n+1}}\underbrace{\left(\frac{\delta_n}{\sqrt{2}u_n} + \frac{\delta_{n-1}}{\sqrt{2}u_{n-1}}\right)}_{=-\delta_{n+1}} - \frac{\delta_n}{\sqrt{2}u_n}$$

$$= -\left(\frac{\delta_{n+1}}{\sqrt{2}u_{n+1}} + \frac{\delta_n}{\sqrt{2}u_n}\right) = \delta_{n+2}$$

Ce qui conclut.

b)

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|\delta_{n+2}| = |\delta_n| \times \left|\frac{1}{u_{n+1}} - \sqrt{2}\right| \times \frac{1}{2u_n} + |\delta_{n-1}| \times \frac{1}{2u_{n-1}u_{n+1}}$$

Et comme $u_n \in [1, 2]$, on a également :

$$\frac{1}{2u_{n-1}u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leqslant \sqrt{2} - \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{2\sqrt{2} - 2 \times 1}{2 \times 2} \leqslant \frac{2\sqrt{2}-1}{4}$$

On obtient finalement :

$$|\delta_{n+2}| \leqslant |\delta_{n-1}| \ \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \ |\delta_n|$$

c)

Considérons la fonction $f : x \mapsto x^3 - \frac{2\sqrt{2}-1}{4}x - \frac{1}{2}$ continue sur $[0, 1]$ car polynomiale.

Puisque $f(0) = -\frac{1}{2} < 0$ et que $f(1) = \frac{3-2\sqrt{2}}{4} > 0$, alors d'après le TVI il existe un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$, soit tel que $\alpha^3 = \frac{2\sqrt{2}-1}{4}\alpha + \frac{1}{2}$.

d)

Posons $\mu = \max(\delta_0, \delta_1) = 1\} \in \mathbb{R}_+^*$. Prouvons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $P(n)$: « $|\delta_n| \leqslant \mu \times \alpha^n$ » est vraie par récurrence double.

Initialisation :

De manière immédiate, $\delta_0 \leqslant \mu$ et $\delta_1 \leqslant \mu$. Ainsi, $P(0)$ et $P(1)$ vraies.

De plus, $\delta_2 = 2 - \sqrt{2} \leqslant 1 = \mu$, doù $P(2)$ vraie également.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $P(n)$ et $P(n-1)$ vraies.

Puisque $|\delta_{n+2}| \leqslant \frac{2\sqrt{2}-1}{4} \ |\delta_n| + \frac{1}{2} \ |\delta_{n-1}|$, il vient :

$$|\delta_{n+2}| \leqslant \frac{2\sqrt{2}-1}{4}\mu \times \alpha^n + \frac{1}{2}\mu \times \alpha^{n-1} = \mu \times \alpha^{n-1} \underbrace{\left(\frac{2\sqrt{2}-1}{4}\alpha + \frac{1}{2} \right)}_{=\alpha^3} = \mu \times \alpha^{n+2}$$

On en déduit que $P(n+2)$ vraie à son tour, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\delta_n| \leqslant \mu \times \alpha^n$.

e)

Puisque $|\alpha| < 1$ et que μ est un réel fixé, alors $\lim_{n \to +\infty}(\mu \times \alpha^n) = 0$.

De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant |\delta_n| \leqslant \mu \times \alpha^n$, alors par théorème d'encadrement, $\lim_{n \to +\infty} \delta_n = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \to +\infty}\left(u_n - \sqrt{2}\right) = 0$, d'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}$.

Fin du DM12 - J'ai perdu.