Mathématiques : Devoir maison n° 3

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Problème 1 - Partie entière

1)

$\lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$

$\lfloor -\pi \rfloor = -4$

$\lfloor \frac{2\pi}{7} \rfloor = 0$

Version originale :

```python
def part_ent(x):
    n = 0
    # Quand x est negatif, cette condition est fausse des le depart
    while n+1 <= x:
        n += 1
    return n

from math import pi
print(partent(5/2)) # 2
print(partent(-pi)) # 0 FAUX
print(partent(2*pi/7)) # 0
```

Version corrigée :

```python
def part_ent(x):
    n = 0
    while n+1 <= abs(x):
        n += 1
    if x >= 0:
        return n
    else:
        return -n-1

from math import pi
print(partent(5/2)) # 2
print(partent(-pi)) # -4
print(partent(2*pi/7)) # 0
```

Versions optimisées :

```python
def part_ent1(x):
    n = 0
    abs_x = abs(x)
    while (n := n+1) <= abs_x: pass
    return n-1 if x >= 0 else -n

def part_ent2(x):
    return int(x) - (1 if x <= 0 else 0)
```

2)

a) Soit x un réel et p un entier naturel.

Un nombre décimal s'écrit sous la forme $\frac{a}{10^b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$.

Par définition, $\lfloor 10^p x \rfloor$ est un entier relatif et $p \in \mathbb{N}$ donc :

$$\frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} \in \mathbb{D}$$

Par définition,

$$\forall c \in \mathbb{R}, c - 1 < \lfloor c \rfloor \leqslant c < \lfloor c \rfloor + 1$$

Donc avec $c = 10^p x$:

$$\lfloor 10^p x \rfloor \leqslant 10^p x < \lfloor 10^p x \rfloor + 1$$

Or $10^p > 0$ donc

$$\frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} \leqslant x < \frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} + \frac{1}{10^p}$$

Nous avons prouvé que $\frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p}$ est un nombre décimal et que $\frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} \leqslant x < \frac{\lfloor 10^p x \rfloor}{10^p} + \frac{1}{10^p}$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$.

b) Le chiffre des unités de 10^x est la p-e décimale de x. Un arrondi à 10^{-p} près de x revient donc à diviser par 10^p un arrondi à l'unité de x.

Notons $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction qui à $x \in \mathbb{R}$ associe son arrondi à l'unité.

Si $x \in \mathbb{R}^+$: Notons d la première décimale de x. Si $d \in [\![0; 4]\!]$, alors par définition $\alpha(x) = \lfloor x \rfloor$. Mais $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor$. Donc $\alpha(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

Si $d \in [\![5; 9]\!]$, par définition, $\alpha(x) = \lfloor x \rfloor + 1$. Mais $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. Donc $\alpha(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

Si $x \in \mathbb{R}^-$: Si $d \in [\![0; 4]\!]$, alors par définition $\alpha(x) = \lfloor x \rfloor + 1$. Mais $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. Donc $\alpha(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

Si $d \in [\![5; 9]\!]$, par définition, $\alpha(x) = \lfloor x \rfloor +$. Mais $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor$. Donc $\alpha(x) = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$.

Synthèse : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\alpha(x) = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$. Un arrondi à 10^-p près de x est donc donné par $\frac{\alpha(10^p x)}{10^p} = \frac{\left\lfloor 10^p x + \frac{1}{2} \right\rfloor}{10^p}$, ce qu'il fallait démontrer.

Problème 2 - Notion de densité

1)

a)

Théorème (Grenouille généralisée)**.** Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Soit $l = |x - y|$ et $0 < \delta < l$. Alors il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\delta \in \,]x; y[$.

Démonstration. On procède par l'absurde en supposant que $n\delta \notin \,]x; y[$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Soit $p \in \mathbb{Z}$ le plus petit entier tel que $p\delta > y$. Son existence est assurée par l'existence de parties entières, en prenant $p = \left\lfloor \frac{y}{\delta} \right\rfloor + 1$, ou par la propriété archimédienne de $\mathbb{R}$. Par hypothèse, $(p-1)\delta \notin \,]x; y[$. Par minimalité de p, $(p-1)\delta \leq y$. Donc $(p-1)\delta < x$.

Ainsi, on trouve que $(p-1)\delta < x < y < p\delta$. Donc $]x; y[\, \subseteq \,](p-1)\delta; p\delta[$, et $|p\delta - (p-1)\delta| = \delta \geq |x - y| = l$, ce qui est une contradiction.

Donc il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n\delta \in \,]x; y[$. □

b) Si $0 \leq x < y$, alors $n\delta > x$ est équivalent à ce que $n > \frac{x}{\delta}$. En particulier, si n est le plus petit tel entier, alors $n\delta \in \,]x; y[$. En effet, si $n\delta \geq y$, alors $m \geq n$ implique que $m\delta \geq y$ et $m < n$ implique par hypothèse que $m\delta \leq x$, et $m\delta \notin \,]x; y[$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, ce qui contredit le théorème de la Grenouille.

Or, $n = \left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor + 1$ est le plus petit entier tel que $n\delta > x$, et $n\delta \in \,]x; y[$. Donc la grenouille tombe dans la mare après $\left\lfloor \frac{x}{\delta} \right\rfloor + 1$ sauts.

2)

a) $\frac{1}{n} < y - x$ si et seulement si $\frac{1}{y-x} < n$. Donc $n = \left\lfloor \frac{1}{y-x} \right\rfloor + 1$ fonctionne.

b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Prouvons qu'il existe $a \in \mathbb{Q}$, $a \in \,]x; y[$. Par la question précédente, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{q} < y - x$. Par le théorème de la Grenouille, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p\frac{1}{q} = \frac{p}{q} \in \,]x; y[$. Comme $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $\frac{p}{q} \in \,]\frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{y}{\sqrt{2}}[$. On peut choisir $\frac{p}{q} \neq 0$, soit si $0 \notin \,]x; y[$, soit en prenant $\frac{p}{q}$ dans $]0; \frac{y}{\sqrt{2}}[\, \subseteq \,]\frac{x}{\sqrt{2}}; \frac{y}{\sqrt{2}}[$. Dans ces deux cas, $\frac{p}{q}\sqrt{2} \in \,]x; y[$.

Montrons maintenant par l'absurde que $\frac{p}{q}\sqrt{2}$ est irrationel. Supposons que $\frac{p}{q}\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, avec $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Alors $\sqrt{2} = \frac{aq}{bp} \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Donc $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3)

a) Prouvons par récurrence que $(1+a)^n \geq 1 + an$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $P(n)$ l'assertion $(1+a)^n \geq 1 + an$.

Initialisation : $P(1) \iff (1+a)^1 = 1 + a \geq 1 + 1a = 1 + a$. Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $P(n)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$. Prouvons $P(n+1)$.

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1} = (1+a)(1+a)^n \geq (1+a)(1+an) &= 1 + a(n+1) + a^2 n \\ &\geq 1 + a(n+1)\end{aligned}$$

Donc si $P(n)$, alors $P(n+1)$. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Trouver $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $b^n \leq \frac{C}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ revient à trouver un majorant de la fonction $f : n \mapsto nb^n$. On dit que f est croissante en $n \in \mathbb{N}^*$ si $f(n+1) \geq f(n)$. Montrons donc qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f est croissante avant p et strictement décroissante après p, de manière à ce que f soit au moins majorée par $f(p)$.

On procède par équivalence :

$$\begin{aligned}f \text{ strictement décroissante en } p &\iff f(p) > f(p+1) \\ &\iff pb^p > (p+1)b^{p+1} \\ &\iff \frac{p}{p+1} > b \\ &\iff 1 - \frac{1}{p+1} > b \\ &\iff 1 - b > \frac{1}{p+1} \\ &\iff p+1 > \frac{1}{1-b} \\ &\iff p+1 \geq \left\lfloor \frac{1}{1-b} \right\rfloor + 1 \\ &\iff p \geq \left\lfloor \frac{1}{1-b} \right\rfloor\end{aligned}$$

Donc f est croissante avant $\left\lfloor \frac{1}{1-b} \right\rfloor$ et strictement décroissante après $\left\lfloor \frac{1}{1-b} \right\rfloor$. Donc f est majorée (en particulier, par $f\left(\left\lfloor \frac{1}{1-b} \right\rfloor\right) \in \mathbb{R}_+^*$).

4)

a) On prouve l'assertion suivante, plus générale : si $x < y$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{10^n} < |y - x|$.

Par la question précédente, il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\left(\frac{1}{10}\right)^n \leq \frac{C}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En prenant $n > \frac{C}{|y-x|}$ (celui-ci existe par existence des parties entières), on a :

$$\frac{1}{10^n} < \frac{C}{\frac{C}{|y-x|}} = |y - x|$$

Donc il existe bien $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{10^n} < |y - x|$.

b) Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Par définition $\mathbb{D} = \{\frac{m}{10^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. On choisit $n \in \mathbb{N}^*$ de manière à ce que $\frac{1}{10^n} < |x - y|$. Par le théorème de la Grenouille, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{m}{10^n} \in]x; y[$. Comme $\frac{m}{10^n} \in \mathbb{D}$, $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

5)

a) On pose $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ avec $x = a + b\sqrt{2}$ et $y = c + \sqrt{2}$. Alors :

$$x + y = (a + c) + (b + d)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

Et :

$$xy = (ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$$

Donc $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est stable par addition et multiplication.

b) On prouve encore l'assertion suivante, plus générale : si $x < y$, alors il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p < |y-x|$.

Soit $u = \sqrt{2} - 1$. Montrons que $0 < u < 1$. Comme $\sqrt{2} > 1$, $u > 0$. Si $u \geq 1$, alors $\sqrt{2} \geq 2$ et $2 \geq 4$, ce qui est absurde. Donc $u \in]0; 1[$.

Donc il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $u^p \leq \frac{C}{p}$. En prenant $p > \frac{C}{|x-y|}$, $u^p < |x-y|$.

Donc il existe bien $p \in \mathbb{N}^*$, $u^p < |x-y|$.

c) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Choisissons $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p < |x-y|$. Par le théorème de la Grenouille, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nu^p \in]x; y[$. Comme $n, u \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $nu^p \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$.

Donc $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est dense dans $\mathbb{R}$.