

Devoir maison n°12 : Première fois. Stabilité géométrique

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

Problème 1 - Première fois.

- Partie A : Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels.

Soit une fonction $\Delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ possédant les propriétés :

(1) $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$

(2) Pour tout entier premier p , $\Delta(p) = 1$

(3) Pour tous entiers a et b : $\Delta(a \times b) = b\Delta(a) + a\Delta(b)$

1) Soit p un nombre premier, n un entier naturel. On cherche à prouver que $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, $\Delta(p^0) = \Delta(1) = 0$ d'après (1). Ce qui correspond à la formule.

Pour $n = 1$, $\Delta(p^1) = \Delta(p) = 1$ d'après (2). Or avec la formule on obtient $p^0 = 1$, ce qui est donc correct.

Hérédité :

On suppose que $\Delta(p^n) = np^{n-1}$, cherchons à prouver que $\Delta(p^{n+1}) = (n+1)p^n$.

$$\Delta(p^{n+1}) = \Delta(p \times p^n) = p^n \Delta(p) + p \Delta(p^n) = p^n + pnp^{n-1} = (n+1)p^n$$

Par principe de récurrence, $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.

2) a) Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. $\Delta(p^m \times q^n) = q^n \Delta(p^m) + p^m \Delta(q^n)$ D'après la question précédente, on a alors : $m q^n p^{m-1} + n p^m q^{n-1} = (p^{m-1} q^{n-1})(mq + np)$

b) $\Delta(10^n) = \Delta(2^n \times 5^n)$ Comme 2 et 5 sont premiers et distincts, n supérieur ou égal à 1, on a d'après la question précédente : $\Delta(2^n \times 5^n) = 7n(2^{n-1} \times 5^{n-1})$. $\Delta(10^n)$ est donc un multiple de 7 quand $n \geq 1$.

3) a) On cherche à montrer que si $n \geq 2$ alors $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_k q_k$ avec $q_{1\dots k} = \frac{n}{p_{1\dots k}}$.

Soit $n \geq 2$, On a donc, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ avec $p_{1\dots k}$ premier et $\alpha_{1\dots k} \in \mathbb{N}^*$.

Initialisations :

On suppose que $k = 1$, que $n = p_1^{\alpha_1}$, alors $\Delta(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1-1}$ Or $q_1 = \frac{n}{p_1} = p_1^{\alpha_1-1}$.

Donc $\Delta(n) = \alpha_1 q_1$



On suppose que $k = 2$, que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, alors d'après 2)a), $\Delta(n) = p_2^{\alpha_2} \alpha_1 p_1^{\alpha_1-1} + p_1^{\alpha_1} \alpha_2 p_2^{\alpha_2-1} = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) \left(\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} \right) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$.

Hérédité :

On suppose que $\Delta(m) = \alpha'_1 q'_1 + \alpha'_2 q'_2 + \dots + \alpha'_k q'_k$ pour m pouvant s'écrire $m = p_1^{\alpha'_1} \times p_2^{\alpha'_2} \times \dots \times p_k^{\alpha'_k}$.

On cherche à prouver que $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}$ pour n pouvant s'écrire sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \times p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$.

$$\begin{aligned} \Delta(n) &= \Delta(p_1^{\alpha_1}) \left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}} \right) + p_1^{\alpha_1} \Delta \left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}} \right) \text{ d'après 2)a)} \\ &= \alpha_1 \left(n \frac{p_1^{\alpha_1-1}}{p_1^{\alpha_1}} \right) + p_1^{\alpha_1} \Delta \left(\underbrace{p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \times p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}}_{\text{est un nombre comme } m} \right) \end{aligned}$$

En faisant correspondre $m = \frac{n}{p_1^{\alpha_1}}$, $p'_1 = p_2, \dots, p'_k = p_{k+1}$ et $\alpha'_1 = \alpha_2, \dots, \alpha'_k = \alpha_{k+1}$, on a

$$\begin{aligned} \Delta(n) &= \alpha_1 q_1 + p_1^{\alpha_1} \left(\alpha_2 \frac{m}{p_2} + \dots + \alpha_k \frac{m}{p_k} + \alpha_{k+1} \frac{m}{p_{k+1}} \right) \\ &= \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1} \end{aligned}$$

Par principe de récurrence, nous avons prouvé que quelque soit $k \in \mathbb{N}^*$ et par conséquent quelque soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k$.

b) Vérifions que $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k$ satisfait les propriétés (2) et (3) :

Pour p premier, $p = p^1$: $\Delta(p) = 1 \times \frac{p}{p} = 1$. Cela correspond bien à la propriété (1).

Pour a et b des entiers naturels : $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ $b = p_1^{\alpha'_1} \dots p_{k'}^{\alpha'_{k'}}$ D'une part, $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b) = b \alpha_1 \frac{a}{p_1} + \dots + b \alpha_k \frac{a}{p_k} + a \alpha'_1 \frac{b}{p'_1} + \dots + a \alpha'_{k'} \frac{b}{p'_{k'}} = \alpha_1 \frac{a \times b}{p_1} + \dots + \alpha_k \frac{a \times b}{p_k} + \alpha'_1 \frac{a \times b}{p'_1} + \dots + \alpha'_{k'} \frac{a \times b}{p'_{k'}}$
...

• Partie B : Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ .

4) a)

Calculons $\Delta(12)$. On a $12 = 2^2 \times 3$

Donc d'après la formule, $\Delta(12) = 2 \frac{12}{2} + \frac{12}{3} = 16$

Calculons $\Delta(56)$. On a $56 = 2^3 \times 7$

Donc d'après la formule, $\Delta(56) = 3 \frac{56}{2} + \frac{56}{7} = 92$

Calculons $\Delta(1001)$. On a $1001 = 7 \times 11 \times 13$

Donc d'après la formule, $\Delta(1001) = \frac{1001}{7} + \frac{1001}{11} + \frac{1001}{13} = 311$



Preuves générés automatiquement (le script est sur Github).¹²

b) Cherchons les solutions de $\Delta(x) = 0$ avec $x \in \mathbb{N}$.

Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors d'après (1), $\Delta(x) = 0$.

Si $x \geq 2$, $\Delta(x) = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k$. Or $\alpha_{1\dots k} \in \mathbb{N}^*$ et $q_{1\dots k} = \frac{x}{p_{1\dots k}}$, comme $x, p_{1\dots k} \in \mathbb{N}^*$ alors $q_{1\dots k} > 0$. Ainsi comme somme de nombres tous strictements positifs, $\Delta(x) > 0$.

Les seules solutions à $\forall x \in \mathbb{N}$, $\Delta(x) = 0$ sont $\{0, 1\}$.

Nous avons également prouvé que pour tout $x \geq 2$ alors $\Delta(x) > 0$.

c) Cherchons les solutions de $\Delta(x) = 1$ avec $x \in \mathbb{N}$.

Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors d'après (1), $\Delta(x) = 0$.

Si x est premier alors d'après (2), $\Delta(x) = 1$.

Si x n'est pas premier et différent de 0 et 1, alors on peut écrire x sous la forme $x = p \times b$ avec p premier et $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$. En effet si $b = 0$ alors $x = 0$ et si $b = 1$ alors x est premier, ce qui n'est pas autorisé. D'après la question précédente, $\Delta(b) > 0$. On a donc :

$$\Delta(x) = \Delta(p \times b) = b\Delta(p) + p\Delta(b) = \underbrace{b}_{\geq 2} + \underbrace{p}_{\geq 2} \underbrace{\Delta(b)}_{> 0}$$

Par addition d'un nombre supérieur ou égal à 2 avec un nombre strictement supérieur à 0, $\Delta(x) > 2$.

Les seules solutions à $\forall x \in \mathbb{N}$, $\Delta(x) = 1$ sont donc l'ensemble des nombres premiers.

d) Cherchons à prouver que 2 ne possède pas d'antécédent par Δ . Soit $x \in \mathbb{N}$.

Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors $\Delta(x) = 0$.

Si x est premier alors $\Delta(x) = 1$.

Si $x \geq 2$ et n'est pas premier, alors $\Delta(x) = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k$, avec $\alpha_{1\dots k} \in \mathbb{N}^*$ et $q_{1\dots k} = \frac{x}{p_{1\dots k}}$. $p_{1\dots k}$ sont premiers.

$p_{1\dots k}$ divise x donc $x \geq p_{1\dots k}$. Comme x n'est pas premier, $x > p_{1\dots k}$ donc $q_{1\dots k} > 1$ soit $q_{1\dots k} \geq 2$

Toujours dans ce cas, supposons que $k = 1$, alors $\Delta(x) = \underbrace{\alpha_1}_{\geq 1} \underbrace{q_1}_{\geq 2}$. On a donc $\Delta(x) \geq 2$. Par récurrence immédiate et par somme de nombres strictements positifs on a $\Delta(x) \geq 2$ quelque soit k .

¹Par exemple : Calculons $\Delta(987654321)$. On a $987654321 = 3^2 \times 17^2 \times 379721$

Donc d'après la formule, $\Delta(987654321) = 2 \frac{987654321}{3} + 2 \frac{987654321}{17} + \frac{987654321}{379721} = 774633441$

²(Pourquoi écrire les preuves à la main alors qu'on peut passer 5 fois plus de temps à coder le script qui le fait automatiquement ?)