

Devoir maison n°7 : Autour de Farey

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

Partie A - Somme des cancrs dans \mathbb{Q}_+ .

Soient $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{e}{f}$, avec $a, c, e \in \mathbb{N}$, et $b, d, f \in \mathbb{N}^*$.

1)

$$x \oplus x = \frac{a}{b} \oplus \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

Donc $x \oplus x = x$.

2)

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d} \text{ et } y \oplus x = \frac{c+a}{d+b} = \frac{a+c}{b+d}$$

$x \oplus y = y \oplus x$ donc l'opération est commutative.

3) D'une part :

$$(x \oplus y) \oplus z = \left(\frac{a+c}{b+d} \right) \oplus \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Et d'autre part :

$$x \oplus (y \oplus z) = \frac{a}{b} \oplus \left(\frac{c+e}{d+f} \right) = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ donc l'opération est associative.

Partie B - B

