

# Devoir maison n°12 : Première fois. Stabilité géométrique

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

## Problème 1 - Première fois.

**Partie A :** Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels.

Soit une fonction  $\Delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  possédant les propriétés :

(1)  $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$

(2) Pour tout entier premier  $p$ ,  $\Delta(p) = 1$

(3) Pour tous entiers  $a$  et  $b$  :  $\Delta(a \times b) = b\Delta(a) + a\Delta(b)$

1) Soit  $p$  un nombre premier,  $n$  un entier naturel. On cherche à prouver que  $\Delta(p^n) = np^{n-1}$ .

**Initialisation :**

Pour  $n = 0$ ,  $\Delta(p^0) = \Delta(1) = 0$  d'après (1). Ce qui correspond à la formule.

Pour  $n = 1$ ,  $\Delta(p^1) = \Delta(p) = 1$  d'après (2). Or avec la formule on obtient  $p^0 = 1$ , ce qui est donc correct.

**Hérédité :**

On suppose que  $\Delta(p^n) = np^{n-1}$ , cherchons à prouver que  $\Delta(p^{n+1}) = (n+1)p^n$ .

$$\Delta(p^{n+1}) = \Delta(p \times p^n) = p^n \Delta(p) + p \Delta(p^n) = p^n + pnp^{n-1} = (n+1)p^n$$

Par principe de récurrence,  $\Delta(p^n) = np^{n-1}$ .

On remarque par ailleurs que  $\Delta(p^p) = pp^{p-1} = p^p$ .

---

2) a) Soit  $p$  et  $q$  des nombres premiers distincts,  $m$  et  $n$  des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.  $\Delta(p^m \times q^n) = q^n \Delta(p^m) + p^m \Delta(q^n)$  D'après la question précédente, on a alors :  $m q^n p^{m-1} + n p^m q^{n-1} = (p^{m-1} q^{n-1})(mq + np)$

b)  $\Delta(10^n) = \Delta(2^n \times 5^n)$  Comme 2 et 5 sont premiers et distincts,  $n$  supérieur ou égal à 1, on a d'après la question précédente :  $\Delta(2^n \times 5^n) = 7n(2^{n-1} \times 5^{n-1})$ .  $\Delta(10^n)$  est donc un multiple de 7 quand  $n \geq 1$ .

---

3) a) On cherche à montrer que si  $n \geq 2$  alors  $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_k q_k$  avec  $q_{1\dots k} = \frac{n}{p_{1\dots k}}$ .

Soit  $n \geq 2$ , On a donc,  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  avec  $p_{1\dots k}$  premier et  $\alpha_{1\dots k} \in \mathbb{N}^*$ .

**Initialisations :**



On suppose que  $k = 1$ , que  $n = p_1^{\alpha_1}$ , alors  $\Delta(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1-1}$  Or  $q_1 = \frac{n}{p_1} = p_1^{\alpha_1-1}$ .

Donc  $\Delta(n) = \alpha_1 q_1$

On suppose que  $k = 2$ , que  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$ , alors d'après 2)a),  $\Delta(n) = p_2^{\alpha_2} \alpha_1 p_1^{\alpha_1-1} + p_1^{\alpha_1} \alpha_2 p_2^{\alpha_2-1} = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}) \left( \frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2} \right) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$ .

**Hérédité :**

On suppose que  $\Delta(m) = \alpha'_1 q'_1 + \alpha'_2 q'_2 + \dots + \alpha'_k q'_k$  pour  $m$  pouvant s'écrire  $m = p_1^{\alpha'_1} \times p_2^{\alpha'_2} \times \dots \times p_k^{\alpha'_k}$ .

On cherche à prouver que  $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}$  pour  $n$  pouvant s'écrire sous la forme  $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \times p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$ .

$$\begin{aligned} \Delta(n) &= \Delta(p_1^{\alpha_1}) \left( \frac{n}{p_1^{\alpha_1}} \right) + p_1^{\alpha_1} \Delta \left( \frac{n}{p_1^{\alpha_1}} \right) \text{ d'après 2)a)} \\ &= \alpha_1 \left( n \frac{p_1^{\alpha_1-1}}{p_1^{\alpha_1}} \right) + p_1^{\alpha_1} \Delta \left( \underbrace{p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k} \times p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}}_{\text{est un nombre comme } m} \right) \end{aligned}$$

En faisant correspondre  $m = \frac{n}{p_1^{\alpha_1}}$ ,  $p'_1 = p_2, \dots, p'_k = p_{k+1}$  et  $\alpha'_1 = \alpha_2, \dots, \alpha'_k = \alpha_{k+1}$ , on a

$$\begin{aligned} \Delta(n) &= \alpha_1 q_1 + p_1^{\alpha_1} \left( \alpha_2 \frac{m}{p_2} + \dots + \alpha_k \frac{m}{p_k} + \alpha_{k+1} \frac{m}{p_{k+1}} \right) \\ &= \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1} \end{aligned}$$

Par principe de récurrence, nous avons prouvé que quelque soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et par conséquent quelque soit  $n \in \mathbb{N}$  avec  $n \geq 2$ ,  $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k$ .

**b)** Vérifions que  $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k$  satisfait les propriétés (2) et (3) :

(1) Pour  $p$  premier,  $p = p^1 : \Delta(p) = 1 \times \frac{p}{p} = 1$ . Cela correspond bien à la propriété (1).

Pour  $a$  et  $b$  des entiers naturels :  $a = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$   $b = p_1^{\alpha'_1} \dots p_{k'}^{\alpha'_{k'}}$  D'une part,  $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b) = b \alpha_1 \frac{a}{p_1} + \dots + b \alpha_k \frac{a}{p_k} + a \alpha'_1 \frac{b}{p'_1} + \dots + a \alpha'_{k'} \frac{b}{p'_{k'}} = \alpha_1 \frac{a \times b}{p_1} + \dots + \alpha_k \frac{a \times b}{p_k} + \alpha'_1 \frac{a \times b}{p'_1} + \dots + \alpha'_{k'} \frac{a \times b}{p'_{k'}} \dots$

**Partie B : Étude de quelques images d'entiers par la fonction  $\Delta$ .**

**4) a)**

Calculons  $\Delta(12)$ . On a  $12 = 2^2 \times 3$ .

Donc d'après la formule,  $\Delta(12) = 2 \frac{12}{2} + \frac{12}{3} = 16$ .

Calculons  $\Delta(56)$ . On a  $56 = 2^3 \times 7$ .

Donc d'après la formule,  $\Delta(56) = 3 \frac{56}{2} + \frac{56}{7} = 92$ .

Calculons  $\Delta(1001)$ . On a  $1001 = 7 \times 11 \times 13$ .



Donc d'après la formule,  $\Delta(1001) = \frac{1001}{7} + \frac{1001}{11} + \frac{1001}{13} = 311$ .

Preuves générées automatiquement (le script est sur Github).<sup>12</sup>

**b)** Cherchons les solutions de  $\Delta(x) = 0$  avec  $x \in \mathbb{N}$ .

Si  $x = 0$  ou  $x = 1$  alors d'après (1),  $\Delta(x) = 0$ .

Si  $x \geq 2$ ,  $\Delta(x) = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_k q_k$ . Or  $\alpha_{1\dots k} \in \mathbb{N}^*$  et  $q_{1\dots k} = \frac{x}{p_{1\dots k}}$ , comme  $x, p_{1\dots k} \in \mathbb{N}^*$  alors  $q_{1\dots k} > 0$ . Ainsi comme somme de nombres tous strictements positifs,  $\Delta(x) > 0$ .

Les seules solutions à  $\forall x \in \mathbb{N}, \Delta(x) = 0$  sont  $\{0, 1\}$ .

Nous avons également prouvé que pour tout  $x \geq 2$  alors  $\Delta(x) > 0$ .

**c)** Cherchons les solutions de  $\Delta(x) = 1$  avec  $x \in \mathbb{N}$ .

Si  $x = 0$  ou  $x = 1$  alors d'après (1),  $\Delta(x) = 0$ .

Si  $x$  est premier alors d'après (2),  $\Delta(x) = 1$ .

Si  $x$  n'est pas premier et différent de 0 et 1, alors on peut écrire  $x$  sous la forme  $x = p \times b$  avec  $p$  premier et  $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ . En effet si  $b = 0$  alors  $x = 0$  et si  $b = 1$  alors  $x$  est premier, ce qui n'est pas autorisé. D'après la question précédente,  $\Delta(b) > 0$ . On a donc :

$$\Delta(x) = \Delta(p \times b) = b\Delta(p) + p\Delta(b) = \underbrace{b}_{\geq 2} + \underbrace{p}_{\geq 2} \underbrace{\Delta(b)}_{> 0}$$

Par addition d'un nombre supérieur ou égal à 2 avec un nombre strictement supérieur à 0,  $\Delta(x) > 2$ .

Les seules solutions à  $\forall x \in \mathbb{N}, \Delta(x) = 1$  sont donc l'ensemble des nombres premiers.

**d)** Nous cherchons à prouver que 2 et 3 ne possèdent pas d'antécédent par  $\Delta$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $n = 0$  ou  $n = 1$  alors  $\Delta(n) = 0$  et si  $n$  est premier alors  $\Delta(n) = 1$ . On considère donc tous les  $n \geq 2$  et qui ne sont pas premiers.

On peut alors réécrire  $n$  comme le produit de deux entiers naturels différents de 0 et 1 :  $n = a \times b$ . On a alors :

$$\Delta(n) = \Delta(a \times b) = \Delta(a) \times \underbrace{b}_{\geq 2} + \underbrace{a}_{\geq 2} \times \Delta(b)$$

Or nous avons prouvé précédemment que les seules solutions à l'équation  $\Delta(x) = 0$  sont 0 et 1. Comme  $a$  et  $b$  sont différents de 0 et 1 on a :

$$\Delta(n) = \underbrace{\Delta(a)}_{\geq 1} \times \underbrace{b}_{\geq 2} + \underbrace{a}_{\geq 2} \times \underbrace{\Delta(b)}_{\geq 1}$$

La valeur minimale de  $\Delta(n)$  est donc 4 quand  $n$  est différent de 0 et 1 et n'est pas premier.

<sup>1</sup>Par exemple : Calculons  $\Delta(987654321)$ . On a  $987654321 = 3^2 \times 17^2 \times 379721$ . Donc d'après la formule,  $\Delta(987654321) = 2 \frac{987654321}{3} + 2 \frac{987654321}{17} + \frac{987654321}{379721} = 774633441$ .

<sup>2</sup>(Pourquoi écrire les preuves à la main alors qu'on peut passer 5 fois plus de temps à coder le script qui le fait automatiquement ?)



Comme 0, 1 et les nombres premiers ne donnent ni 2 ni 3 par  $\Delta$  nous avons prouvé que 2 et 3 ne possèdent pas d'antécédents par  $\Delta$ .

Tout entier naturel  $n$  n'a donc pas au moins un antécédent par  $\Delta$ .<sup>3</sup>

e) Calculons  $\Delta(8)$ . On a  $8 = 2^3$ .

Donc d'après la formule,  $\Delta(8) = 3 \frac{8}{2} = 12$ .

Nous avons donc  $\Delta(8) > 8$ . La propriété  $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta(n) \leq n$  est fausse.

---

5) a) Montrons que pour deux nombres  $p$  et  $q$  premiers,  $\Delta(p \times q) = p + q$ . D'après les propriétés (1) et (2) :

$$\Delta(p \times q) = q\Delta(p) + p\Delta(q) = p + q$$

b) On considère les entiers naturels 3 et 4.

Calculons  $\Delta(12)$ . On a  $12 = 2^2 \times 3$ . Donc d'après la formule,  $\Delta(12) = 2 \frac{12}{2} + \frac{12}{3} = 16$ .

Or  $3 + 4 = 7 \neq 16$ . La propriété  $\forall n, m \in \mathbb{N}, \Delta(n \times m) = n + m$  est donc fausse.

---

6) a) Considérons les nombres 2 et 3. Comme 2, 3 et  $2 + 3 = 5$  sont premiers, on a :

$$\Delta(2 + 3) = 1 \neq \Delta(2) + \Delta(3) = 2$$

La propriété  $\forall n, m \in \mathbb{N}, \Delta(n + m) = \Delta(n) + \Delta(m)$  est donc fausse.

b) Soient  $a, b \in \mathbb{N}$  tel que  $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . D'après la propriété (3) :

$$\begin{aligned} \Delta(ka + kb) &= \Delta(k(a + b)) = \Delta(k)(a + b) + k\Delta(a + b) \\ &= \Delta(k)a + \Delta(k)b + k\Delta(a) + k\Delta(b) \\ &= (a\Delta(k) + k\Delta(a)) + (b\Delta(k) + k\Delta(b)) \\ \Delta(ka + kb) &= \Delta(ka) + \Delta(kb) \end{aligned}$$

**Partie C : Les points fixes de la fonction**

---

7) a) Soit  $p$  un nombre premier. Soit  $m$  un entier naturel multiple de  $p^p$ . Soit  $n$  un entier naturel tel que  $m = np^p$ .

Considérons  $\Delta(p^p)$ , d'après la question 1),  $\Delta(p^p) = pp^{p-1} = p^p$ .

$$\Delta(m) = \Delta(np^p) = p^p \Delta(n) + n\Delta(p^p) = p^p(n + \Delta(n))$$

Nous avons prouvé que  $\Delta(m)$  est un multiple de  $p^p$ .

b) Proposition : disjoncter sur  $p^p \mid m$  Analyse : Soit  $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$  tel que  $\Delta(m) = m$ . Supposons d'abord qu'il existe  $p$  premier tel que  $p^p \mid m$ , et notons  $m = np^p$ . Alors

---

<sup>3</sup> $\Delta$  n'est pas surjective.



$$\Delta(m) = m = np^p = np^p + p^p \Delta(n)$$

Donc  $p^p \Delta(n) = 0$  et  $\Delta(n) = 0$ , d'où  $n = 0$  soit  $m = 0$  ou  $n = 1$ , soit  $m = p^p$ . Supposons que pour tout  $p \mid m$ ,  $v_p(m) < p$ . Choisissons  $p_1$  l'un de ces facteurs premiers, d'exposant  $\alpha_1$ . Par la formule,

$$\Delta(m) \equiv \alpha_1 \frac{m}{p_1} [p_1^{\alpha_1}]$$

Mais comme  $\alpha_1$  ne peut être divisible par  $p_1$ , étant plus petit,  $\Delta(m)$  n'est pas divisible par  $p_1^{\alpha_1}$  : ainsi,  $\Delta(m) \neq m$ .

**8)** Résolvons  $\Delta(x) = x$  avec  $x \in \mathbb{N}$ .

Si  $x = 0$  alors  $\Delta(0) = 0$ . 0 est solution. Si  $x = 1$  alors  $\Delta(1) = 0$ .

On considère maintenant  $x \geq 2$ . On a donc :

$$\begin{aligned} \Delta(x) = x &\Leftrightarrow \alpha_1 \frac{x}{p_1} + \dots + \alpha_k \frac{x}{p_k} = x \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{p_1} + \dots + \frac{\alpha_k}{p_k} = 1 \quad (*) \end{aligned}$$

- S'il existe au moins un  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  tel que  $\alpha_i \geq p_i$  :

Si  $k > 1$  alors :

$$\underbrace{\frac{\alpha_1}{p_1}}_{>0} + \dots + \underbrace{\frac{\alpha_i}{p_i}}_{\geq 1} + \dots + \frac{\alpha_k}{p_k} = 1$$

Par somme de nombres tous strictement positifs avec un terme supérieur à 1, cette expression n'est jamais vraie quelque soient les valeurs de  $\alpha_{1\dots k}$  et  $p_{1\dots k}$  respectant les conditions.

Si  $k = 1$  alors  $i = 1$  d'où  $\alpha_1 \geq p_1$  et :

$$\underbrace{\frac{\alpha_1}{p_1}}_{\geq 1} = 1$$

Si  $\alpha_1 > p_1 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{p_1} > 1$  alors la condition n'est pas remplie.

Sinon on a  $\alpha_1 = p_1$ . Comme nous avons déjà prouvé que  $\Delta(p^p) = p^p$  à la question 1), sont solution  $\{p^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ premier}\}$ .

- Si pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $\alpha_i < p_i$  :

Alors d'après la question précédente on a :  $\Delta(x) = p_1^{\alpha_1-1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k-1}$  d'où

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \alpha_1 \frac{x}{p_1} + \dots + \alpha_k \frac{x}{p_k} = p_1^{\alpha_1-1} \times \dots \times p_k^{\alpha_k-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{p_1} + \dots + \frac{\alpha_k}{p_k} = \frac{1}{p_1 \times \dots \times p_k} \end{aligned}$$



Or nous avons obtenu précédemment que  $\frac{\alpha_1}{p_1} + \dots + \frac{\alpha_k}{p_k} = 1$  donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1 \times \dots \times p_k} &= 1 \\ \Leftrightarrow \underbrace{p_1}_{\geq 2} \times \dots \times \underbrace{p_k}_{\geq 2} &= 1 \end{aligned}$$

Ce qui est impossible, y compris si  $k = 1$ , puisque  $p_{1\dots k}$  est premier donc supérieur ou égal à 2.

Nous avons démontré que les seules solutions à  $\Delta(x) = x$  sont :

$$\mathcal{S} = \{p^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ premier}\} \cup \{0\}$$

## Problème 2 - Stabilité géométrique

Dans tout le problème, soit  $\varepsilon$  et  $q$  deux réels strictement positifs. On considère une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels telle que  $x_0 > 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq x_{n+1} - qx_n \leq \varepsilon$ .

1) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $b_n = x_{n+1} - qx_n$ . Montrons que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a  $x_n = q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + \dots + qb_{n-2} + b_{n-1}$ .

$$\begin{aligned} & q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + \dots + qb_{n-2} + b_{n-1} \\ &= q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k-1} b_k \\ &= q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k-1} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k} x_k \\ & \quad \text{en posant } l = k + 1 \\ &= q^n x_0 + \sum_{l=1}^n q^{n-l} x_l - \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k} x_k \\ &= q^n x_0 + x_n - q^n x_0 + \underbrace{\sum_{l=1}^n q^{n-l} x_l - \sum_{k=1}^n q^{n-k} x_k}_{\text{s'annule}} \\ &= x_n \end{aligned}$$

Nous avons montré que pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$x_n = q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + \dots + qb_{n-2} + b_{n-1}$$

---

2) On suppose que  $0 < q < 1$ .

a)