

# Mathématiques : Devoir maison n° 5

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois  
1E1

## Partie A - Méthode de Cardan

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (E_0)$$

1)

$$X = x + \frac{a}{3} \Leftrightarrow x = X - \frac{a}{3}$$

On remplace  $x$  dans  $(E_0)$ .

$$\begin{aligned} & \left(X - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(X - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \\ \Leftrightarrow & X^3 - 3X^2\left(\frac{a}{3}\right) + 3X\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X^2 - 2X\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right) + bX - \frac{ab}{3} + c = 0 \\ \Leftrightarrow & X^3 - aX^2 + aX^2 + bX + \frac{a^2}{3}X - 2\left(\frac{a^2}{3}X\right) - \frac{a^3}{3^3} + \frac{a^3}{3^2} - \frac{ab}{3} + c = 0 \\ \Leftrightarrow & X^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)X + \frac{2a^3}{3^3} - \frac{ab}{3} + c = 0 \\ \Leftrightarrow & X^3 + pX + q = 0 \quad (E_1) \end{aligned}$$

$$\text{avec } p, q \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} p = b - \frac{a^2}{3} \\ q = \frac{2a^3}{3^3} - \frac{ab}{3} + c \end{cases}$$

2)

a)

$$X = u + v \quad \text{avec } u, v \in \mathbb{R}$$

On remplace  $X$  dans  $(E_1)$ .

$$\begin{aligned} & (u + v)^3 + p(u + v) + q = 0 \\ \Leftrightarrow & u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0 \\ \Leftrightarrow & u^3 + v^3 + v(3uv + p) + u(3uv + p) + q = 0 \\ \Leftrightarrow & u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0 \quad (E_2) \end{aligned}$$

b) On impose  $3uv + p = 0$  donc  $(E_2)$  devient :

$$u^3 + v^3 + q = 0 \quad (E_3)$$

c)

$$\begin{aligned} & 3uv + p = 0 \quad (\text{relation imposée}) \\ \Leftrightarrow & uv = \frac{-p}{3} \\ \Leftrightarrow & u^3v^3 = \frac{-p^3}{3^3} \quad (\text{on élève au cube}) \quad (E_4) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} & u^3 + v^3 + q = 0 && \text{d'après } (E_3) \\ \Leftrightarrow & u^3 + \frac{u^3 v^3}{u^3} + q = 0 && (*) \\ \Leftrightarrow & u^3 + \frac{-p^3}{3^3 u^3} + q = 0 && \text{d'après } (E_4) \\ \Leftrightarrow & u^6 - \frac{p^3}{3^3} + q u^3 = 0 && \text{(on multiplie par } u^3) \end{aligned}$$

Avec  $U = u^3$  on a :

$$U^2 + qU - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \quad (E_5)$$

qui est une équation du second degré,  $u^3$  est donc solution d'une équation du second degré.

À l'étape (\*) nous aurions pu multiplier et diviser par  $v^3$  sur  $u^3$ , nous aurions alors obtenu une équation similaire à  $(E_5)$  mais avec  $v$  à la place de  $u$ .

$u^3$  et  $v^3$  sont donc racines d'un polynôme du second degré.

## Partie B - Exemples

1)

2)

$$\begin{aligned} & 2x^3 + 5x^2 - 24x - 63 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 12x - \frac{63}{2} = 0 \end{aligned}$$

Posons  $X = x + \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = X - \frac{5}{6}$ .

On obtient :

$$X^3 - \frac{169}{12}X - \frac{4394}{216} = 0$$

Posons ensuite  $X = u + v$ , avec  $u, v \in \mathbb{R}$  et  $3uv - \frac{169}{12} = 0$ . On obtient :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} uv = \frac{169}{36} \\ u^3 + v^3 = \frac{4394}{216} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u^3 v^3 = \left(\frac{169}{36}\right)^3 \\ u^3 + v^3 = \frac{4394}{216} \end{cases} \end{aligned}$$

D'où, avec  $U = u^3$ , on a :

$$\begin{aligned} & U^2 - \frac{4394}{216}U + \left(\frac{169}{36}\right)^3 = 0 \\ \Delta = 0 \text{ donc } & U = \frac{4394}{216} \times \frac{1}{2} = \frac{2197}{216} \\ \text{d'où } & u^3 = v^3 = \frac{2197}{216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc } X &= u + v \\
&= 2\sqrt[3]{\frac{2197}{216}} \\
&= \frac{13}{3} \\
\text{d'où } x_1 &= \frac{13}{3} - \frac{5}{6} \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Nous obtenons une première solution. On peut ainsi factoriser le polynôme par  $(x - \frac{7}{2})$ . Ainsi :

$$\begin{aligned}
(E') &\iff \left(x - \frac{7}{2}\right)(2x^2 + 12x + 18) = 0 \\
&\iff 2\left(x - \frac{7}{2}\right)(x + 3)^2 = 0 \\
&\iff x - \frac{7}{2} = 0 \text{ ou } (x + 3)^2 = 0 \\
&\iff x = \frac{7}{2} \text{ ou } x = -3
\end{aligned}$$

Les solutions de  $(E')$  sont donc bien au nombre de deux.

$$S = \left\{-3; \frac{7}{2}\right\}$$

**3)**

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

a) Une solution évidente est 1 :

$$1^3 + 3 \times 1 - 4 = 0$$

b) Nous n'avons pas de terme en  $x^2$ , donc posons directement  $x = u + v$ , avec  $u, v \in \mathbb{R}$ . On obtient :

$$x^3 + px + q = 0 \text{ avec } p = 3, q = -4$$

## Partie C - Formules

**1)**

Notons  $P$  le polynôme de l'équation  $(E_1)$ . On sait qu'il existe une racine  $X_0 \in \mathbb{R}$  de  $P$  si et seulement si il existe  $u, v$  tels que  $u^3, v^3$  sont les racines du polynôme  $D(x) = x^2 + qx - \left(\frac{p}{3}\right)^3$ . Ce polynôme a pour discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3 \\
&= \frac{27q^2 + 4p^3}{27}
\end{aligned}$$

Ainsi, si  $\Delta > 0$ , le polynôme a deux racines distinctes  $U, V = \frac{-q}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ , qui donnent le choix unique de :

$$u, v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$$

Et enfin le choix unique de :

$$X_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}}$$

Qui est donc la seule racine réelle de  $P$ .<sup>1</sup>

2)

Si  $\Delta = 0$ ,  $D$  a une racine double  $U = -\frac{q}{2}$ . On doit donc poser  $u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$ . Donc  $X_1 = 2u$  est une racine de  $(E_1)$ .

En faisant la division euclidienne de  $P$  par  $x - X_1$ , on trouve  $P(x) = (x - X_1)Q(x)$  avec un deuxième facteur quadratique  $Q(x) = x^2 + X_1x + (X_1^2 + p)$  dont le discriminant  $\Delta'$  est :

$$\Delta' = -3X_0^2 - 4p$$

On trouve enfin que :

$$\begin{aligned} \Delta' = 0 &\iff -12u^2 = 4p \\ &\iff -u^2 = \frac{p}{3} \\ &\iff -\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}\right)^2 = \frac{p}{3} \\ &\iff -\frac{q^2}{4} = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \\ &\iff \Delta = 0 \end{aligned}$$

Comme  $\Delta = 0$ ,  $\Delta' = 0$  et  $Q$  a une racine double  $X_2 = -\frac{X_1}{2}$ . Ainsi, si  $\Delta = 0$ , les seules racines de  $P$  sont :

$$X_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \quad X_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$

---

1. Nous avons conscience que cet argument n'est pas très rigoureux, mais la méthode de l'exercice suivant n'a pas porté ses fruits sur celui-ci pour prouver l'unicité de  $X_1$ ...