

Devoir maison n°9 : Fonction du Boulanger

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

Problème 1 -

1)

Si $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $f(x) = 2x$ donc

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = [0, 1]$$

Si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$, $f(x) = 2(1 - x)$ donc

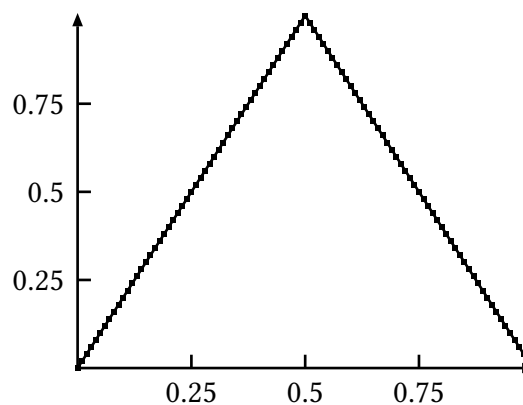
$$\frac{1}{2} < x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2(1 - x) < 1$$

$$\Leftrightarrow f\left(\left]\frac{1}{2}, 1\right]\right) = [0, 1[$$

Donc nous avons bien $f([0, 1]) = [0, 1]$



Représentation graphique de f sur $[0, 1]$

2) La fonction suite repose naturellement sur de la récursivité. Nous allons donc la programmer dans un langage qui supporte de manière optimale les fonctions récursives.



Voici suite a p en Haskell.

```
f x
| 0 <= x      && x <= 1 / 2 = 2 * x
| 1 / 2 < x    && x <= 1    = 2 * (1 - x)

suite a 1 = a
suite a p = suite (a ++ [f (last a)]) (p-1)
```

Voici suite a p en OCaml 🔥.

```
let f x =
  if x >= 0.0 && x <= 0.5 then 2.0 *. x
  else if x <= 1.0 then 2.0 *. (1.0 -. x)
  else failwith "x doit être dans l'intervalle [0, 1]"

let rec suite x p =
  if p > 0 then begin
    let x' = f x in
    Printf.printf "%.5f\n" x';
    suite x' (p - 1)
  end

let () =
  suite (2. /. 5.) 25
```

3) a)

- Si $a = \frac{1}{3}$, $u_0 = a = \frac{1}{3}$ $u_1 = f(u_0) = \frac{2}{3}$ car $u_0 < \frac{1}{2}$ $u_2 = 2(1 - \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ car $u_1 > \frac{1}{2}$

On remarque que $u_1 = u_2 = \frac{2}{3}$ puisque $f(\frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera constante pour $n \geq 1$.

Avec $a = \frac{1}{3}$:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } n = 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

- Si $a = 0.33$, On obtient : (0.33, 0.66, 0.68, 0.64, 0.72, 0.56, 0.88, 0.24, 0.48)

On remarque que, bien que $\frac{1}{3} \approx 0.33$, la suite ne devient pas constante pendant les 9 premiers termes.

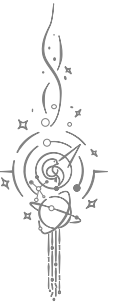
b)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $a = \frac{1}{2^k}$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2}$, donc

$$u_0 = \frac{1}{2^k}$$

$$u_1 = 2\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{k-1}}$$

$$u_2 = \frac{1}{2^{k-2}}$$



Cela ne varie pas tant que $n < k$.

$$u_k = \frac{1}{2^{k-k}} = 1$$

$$u_{k+1} = 0$$

$$u_{k+2} = 0$$

Or, $f(0) = 0$, donc

Avec $a = \frac{1}{2^k}$:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{k-n}} & \text{si } n \in \llbracket 0, k \rrbracket \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$$

c)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $a = \frac{1}{3 \times 2^k}$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{3 \times 2^k} \leq \frac{1}{3 \times 2} < \frac{1}{2}$, donc

$$u_0 = \frac{1}{3 \times 2^k}$$

$$u_1 = 2 \left(\frac{1}{3 \times 2^k} \right) = \frac{1}{3 \times 2^{k-1}}$$

$$u_2 = \frac{1}{3 \times 2^{k-2}}$$

Cela ne varie pas tant que $n < k$.

$$u_k = \frac{1}{3 \times 2^{k-k}} = \frac{1}{3}$$

$$u_{k+1} = \frac{2}{3}$$

$$u_{k+2} = \frac{2}{3}$$

Or, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$, nous l'avons déjà observé à la question 3) a).

Avec $a = \frac{1}{3 \times 2^k}$:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3 \times 2^{k-n}} & \text{si } n \in \llbracket 0, k \rrbracket \\ \frac{2}{3} & \text{si } n > k \end{cases}$$

4) a) Choisissons $a = 0$, comme $f(0) = 0$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera bien constante. Nous aurions aussi pu choisir $a = \frac{2}{3}$.

b) Choisissons $a = \frac{2}{5}$, comme $f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$, $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien périodique de période 2. Nous aurions bien-sûr aussi pu choisir $a = \frac{4}{5}$.

c) Choisissons $a = \frac{2}{7}$, comme $f\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7}$, $f\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{6}{7}$ et $f\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{2}{7}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera bien périodique de période 3. Nous aurions bien-sûr aussi pu choisir $a = \frac{4}{7}$ ou $a = \frac{6}{7}$.