

Devoir maison n°10 : Droites Tropicales

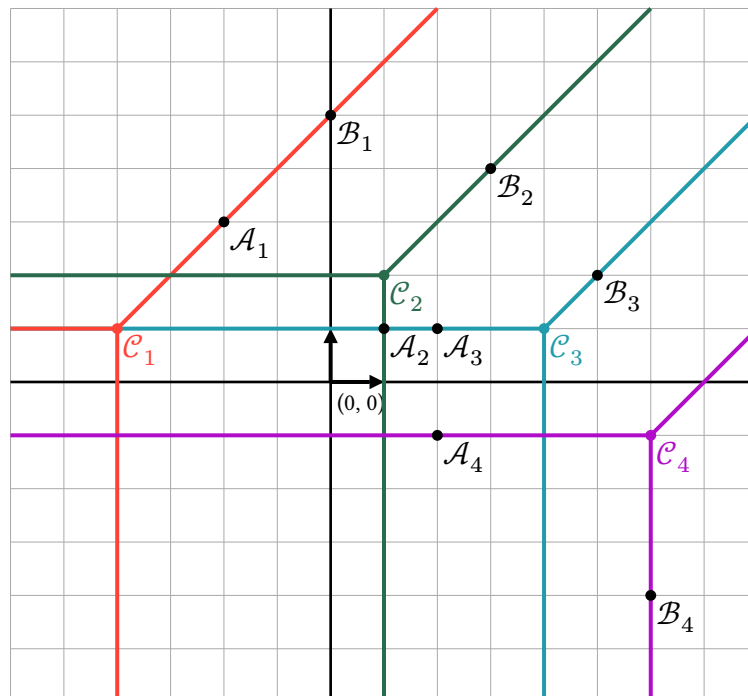
Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

Partie A - Les droites tropicales

- (\mathcal{A}') par deux points du plan passe une droite tropicale
- (\mathcal{B}') par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale
- (\mathcal{B}') deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point.

1) a)



b) On cherche à prouver (\mathcal{A}'). Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux points quelconques du plan. Par une translation T on se ramène au cas où :

$$\mathcal{A}(0,0) \text{ et } \mathcal{B}(x,y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

Etudions d'abord des cas particuliers :

Si $y = 0$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\max(0, x), 0)$ convient.

Si $x = 0$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(0, \max(0, y))$ convient.

Si $x = y$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\min(0, x), \min(0, y))$ convient.

Attaquons nous désormais aux cas généraux :

Si $x < 0$ et $y > 0$

Il existe $\mathcal{C}(0, y)$. Soient les demi-droites :



$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$ par construction, \mathcal{H} est parallèle à l'axe des abscisses.

$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$ par construction, \mathcal{V} est parallèle à l'axe des ordonnées.

Comme $x < 0$, \mathcal{H} est de direction $-\vec{i}$ et comme $y > 0$, \mathcal{V} est de direction $-\vec{j}$. Donc \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} . En inversant les rôles de \mathcal{A} et \mathcal{B} , on obtient la deuxième partie grillée.

Partie B - Addition et Multiplication tropicales

On définit sur \mathbb{R} l'addition tropicale et la multiplication tropicale tel que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad \text{et} \quad a \otimes b = a + b$$

1) On a donc : $3 \oplus 7 = 7$ $-5 \oplus 2 = 2$ $3 \otimes 7 = 10$ $-5 \otimes 2 = -3$

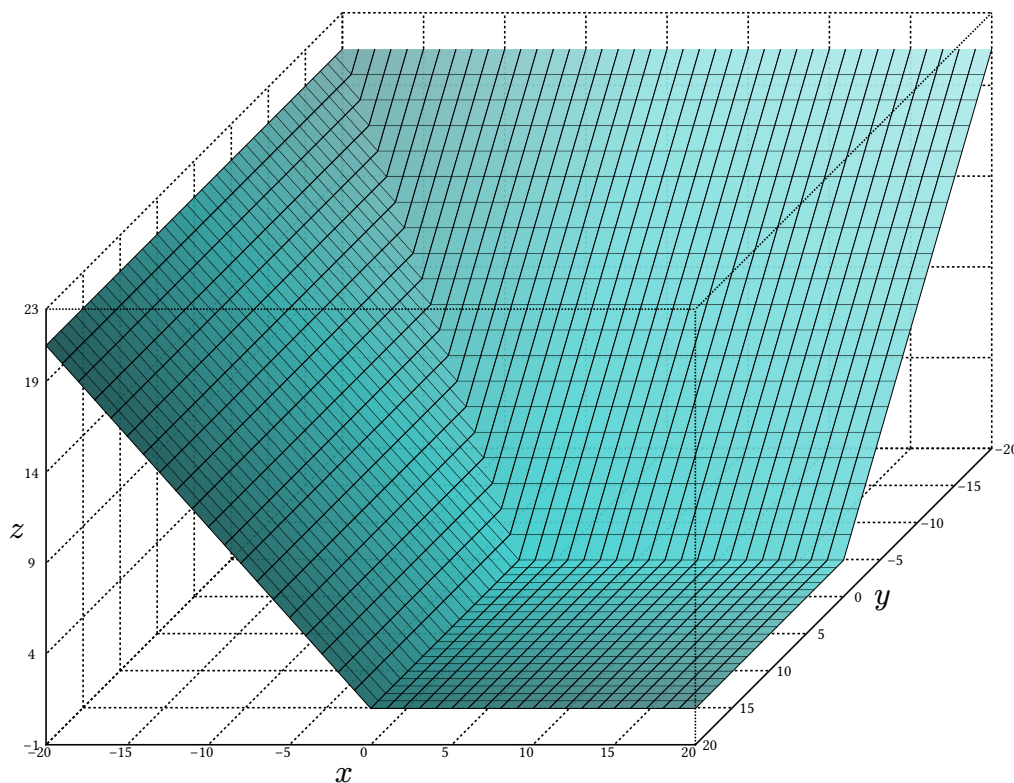
2) \oplus est associatif et commutatif car \max est associatif et commutatif.

TODO : Il y a t il une preuve plus joli que par disjonction $a < b < c$ / $b < a < c$ / $b < c < a$?
(car b et c interchangeables car \max)

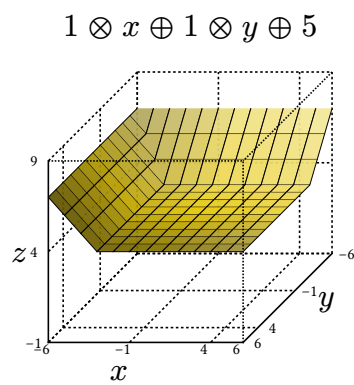
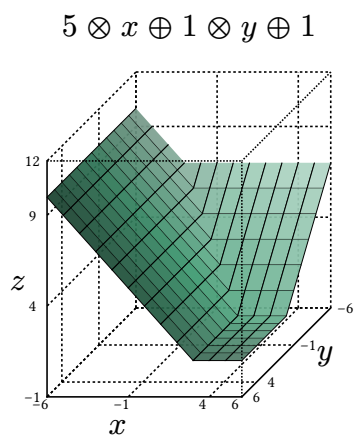
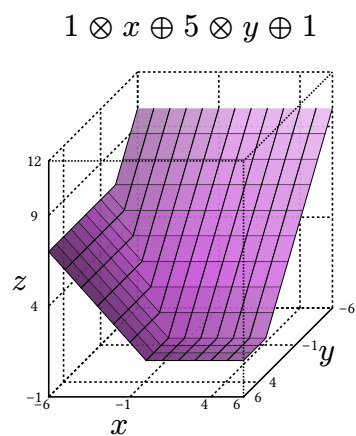
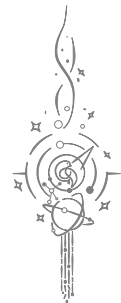
3)

Voici à quoi ressemble une fonction tropicale¹ de degré 1 : $a \otimes x \oplus b \otimes y \oplus c$:

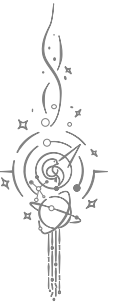
$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$



¹Pour des raisons esthétiques, nous utilisons dans les graphiques l'opposé des valeurs de x et y .



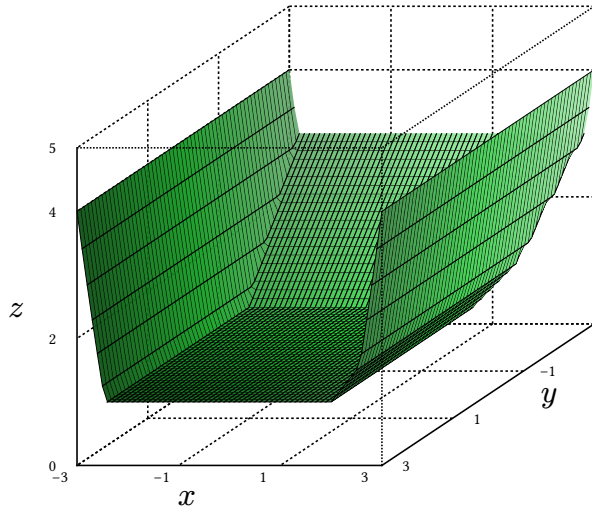
On remarque que modifier les valeurs a , b et c « décale » l'un des « bords ».



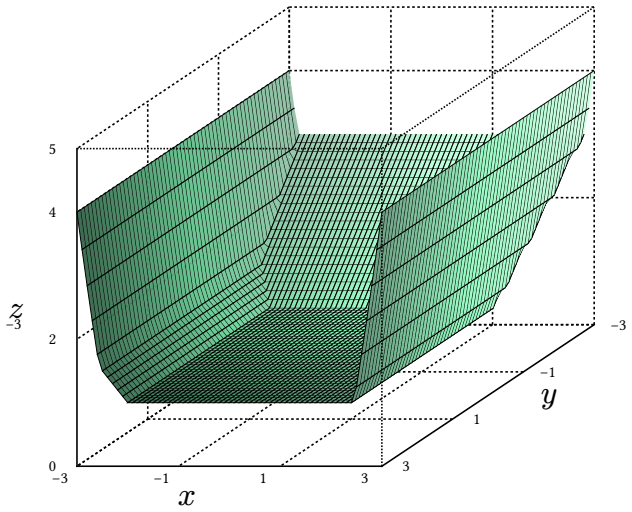
4) Voici à quoi ressemble la fonction tropicale du second degré² :

$$1 \oplus (-1) \otimes x \oplus 0 \otimes y \oplus (-5) \otimes x^2$$

D'un côté :



De l'autre en prenant l'opposé pour l'axe x :



²On prend l'opposé pour l'axe y