

# Devoir maison n°10 : Droites Tropicales

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

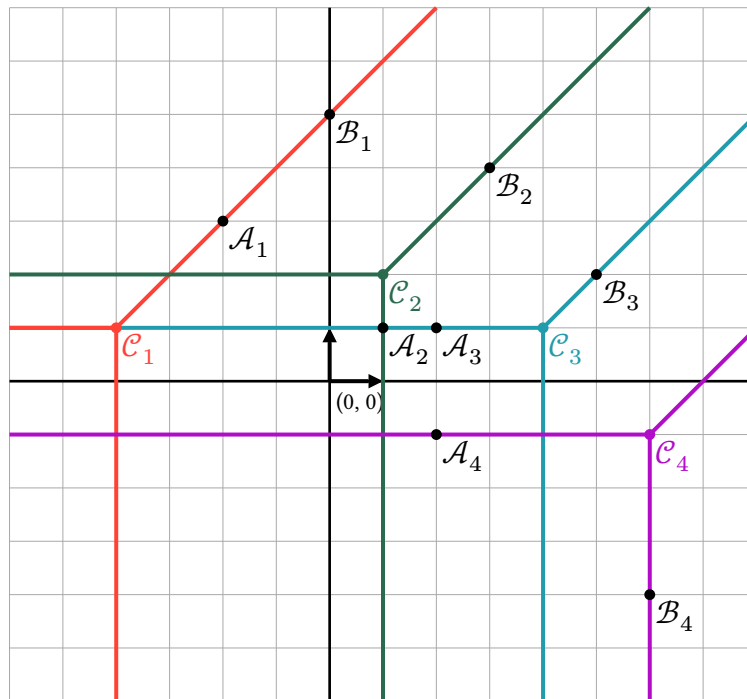
## Partie A - Les droites tropicales

( $\mathcal{A}'$ ) « Par deux points du plan passe une droite tropicale. »

( $\mathcal{B}'$ ) « Par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale. »

( $\mathcal{B}'$ ) « Deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point. »

1) a)



b) On cherche à prouver ( $\mathcal{A}'$ ). Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux points quelconques du plan. Par une translation  $T$  on se ramène au cas où :

$$\mathcal{A}(0,0) \text{ et } \mathcal{B}(x,y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

Etudions d'abord des cas particuliers :

**Si  $x = 0$  et  $y = 0$**  alors  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ , la droite tropicale de centre  $\mathcal{A}$  convient.

**Si  $y = 0$**  alors la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}(\max(0, x), 0)$  convient.

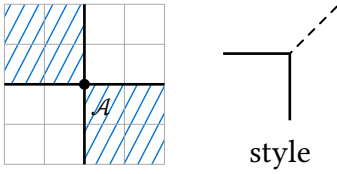
**Si  $x = 0$**  alors la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}(0, \max(0, y))$  convient.

**Si  $x = y$**  alors la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}(\min(0, x), \min(0, y))$  convient.

Attaquons nous désormais aux cas généraux :



**Si  $x < 0$  et  $y > 0$**



Il existe  $\mathcal{C}(0, y)$ . Soient les demi-droites :

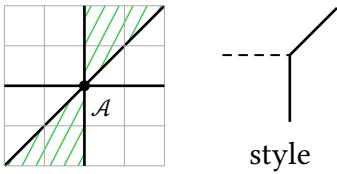
$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$  par construction,  $\mathcal{H}$  est parallèle à l'axe des abscisses.

$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$  par construction,  $\mathcal{V}$  est parallèle à l'axe des ordonnées.

Comme  $x < 0$ ,  $\mathcal{H}$  est de direction  $-\vec{i}$  et comme  $y > 0$ ,  $\mathcal{V}$  est de direction  $-\vec{j}$ . Donc  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  appartiennent à la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}$ .

En inversant les rôles de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , on obtient la deuxième partie rayée.

**Si  $x > 0$  et  $y > 0$  et  $y > x$**



Soit  $\mathcal{D}'$  la droite parallèle à  $y = x$  et passant par  $\mathcal{B}$ . On nomme  $\mathcal{C}$  l'intersection entre  $\mathcal{D}'$  et l'axe des ordonnées. Comme  $y > x$ ,  $y_{\mathcal{C}} > 0$ . Soient les demi-droites :

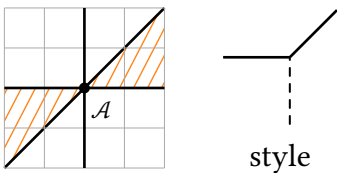
$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$  par construction,  $\mathcal{D}$  est de direction  $\vec{i} + \vec{j}$

$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$  par construction,  $\mathcal{V}$  est de direction  $-\vec{j}$

Donc  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  appartiennent à la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}$ .

En inversant les rôles de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , on obtient que pour  $0 > x$  et  $0 > y$  et  $x > y$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  appartiennent à la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}$ , soit la deuxième zone rayée.

**Si  $x > 0$  et  $y > 0$  et  $y < x$**



Doit  $\mathcal{D}'$  la droite parallèle à  $y = x$  et passant par  $\mathcal{B}$ . On nomme  $\mathcal{C}$  l'intersection entre  $\mathcal{D}'$  et l'axe des abscisses. Comme  $y < x$ ,  $x_{\mathcal{C}} > 0$ . Soient les demi-droites :

$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$  par construction,  $\mathcal{D}$  est de direction  $\vec{i} + \vec{j}$

$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$  par construction,  $\mathcal{H}$  est de direction  $-\vec{i}$

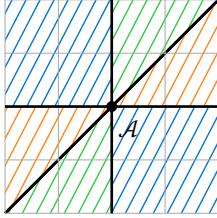
Donc  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  appartiennent à la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}$ .



En inversant les rôles de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ , on obtient que pour  $0 > x$  et  $0 > y$  et  $x < y$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  appartiennent à la droite tropicale de centre  $\mathcal{C}$ , soit la deuxième zone rayée.

### Conclusion

En combinant les différentes disjonctions de cas démontrées plus haut on obtient :



Le cas des lignes noires est couvert par les cas particuliers. Nous avons donc prouvé que pour tout point quelconque  $\mathcal{B}$ , il existe une droite tropicale passant par  $\mathcal{B}$  et par l'origine  $\mathcal{A}$ . Nous pouvons revenir au cas général avec deux points quelconques par la translation inverse de  $T$ .

Nous avons donc démontré ( $\mathcal{A}'$ ) : par deux points du plan passe une droite tropicale.

**2) a)** La propriété ( $\mathcal{B}$ ) n'est pas vraie pour les droites tropicales dans le cas de deux points dépendants.

Contre-exemple : Prenons les points  $\mathcal{A}(0, 0)$  et  $\mathcal{B}(1, 0)$ , qui sont dépendants. La droite tropicale de point central  $\mathcal{C}_1(2, 0)$  passe par  $\mathcal{A}$  et par  $\mathcal{B}$ , mais celle de point central  $\mathcal{C}_2(3, 0)$  aussi. Il y a même une infinité de droites tropicales passant par ces deux points : toutes celles dont le point central est d'ordonnée nulle et d'abscisse supérieure à 1.

## Partie B - Addition et Multiplication tropicales

On définit sur  $\mathbb{R}$  l'addition tropicale et la multiplication tropicale tel que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad \text{et} \quad a \otimes b = a + b$$

**1)** On a donc :  $3 \oplus 7 = 7$        $-5 \oplus 2 = 2$        $3 \otimes 7 = 10$        $-5 \otimes 2 = -3$

**2)**  $\oplus$  est associatif et commutatif car  $\max$  est associatif et commutatif.

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Supposons sans perte de généralité que  $b \leq c$  car  $\oplus$  est commutatif.

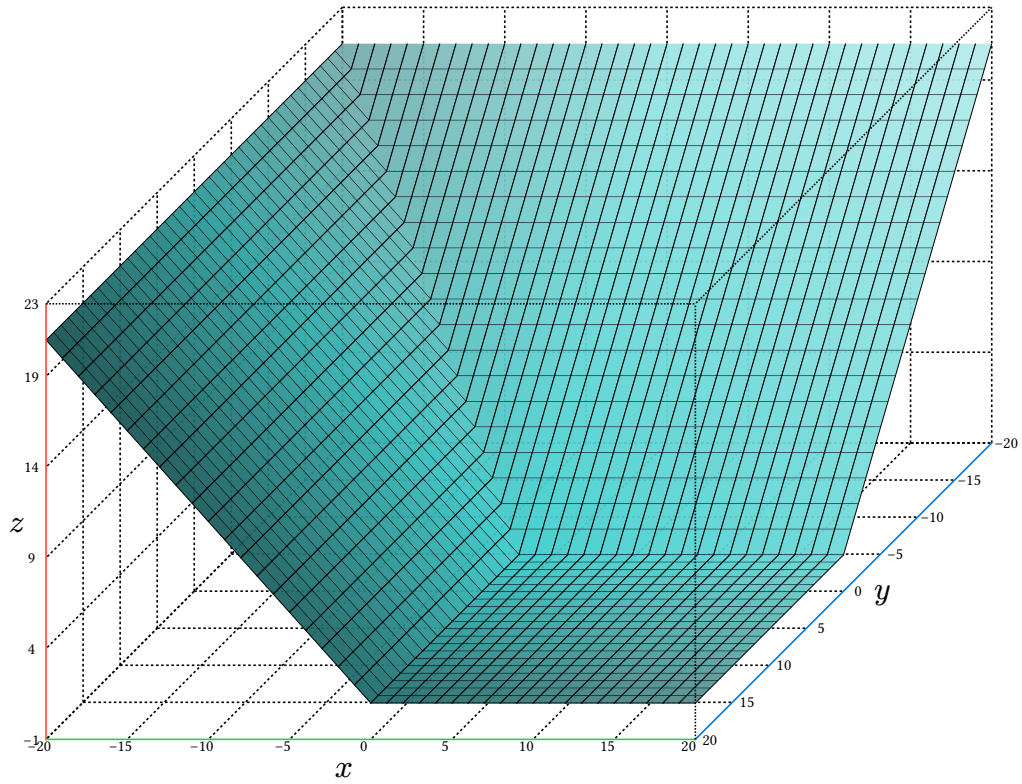
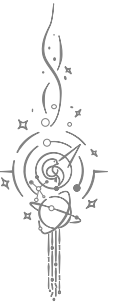
On a  $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes c = a \otimes b \oplus a \otimes c$  puisque  $a \otimes b \leq a \otimes c$ .

**3)**

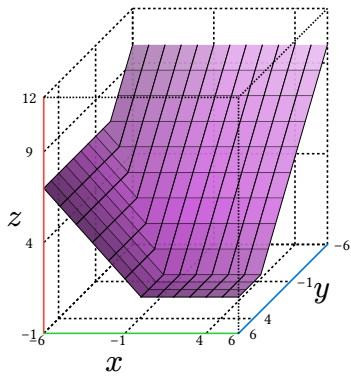
Voici à quoi ressemble une fonction tropicale<sup>1</sup> de degré 1 :  $a \otimes x \oplus b \otimes y \oplus c$  :

$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$

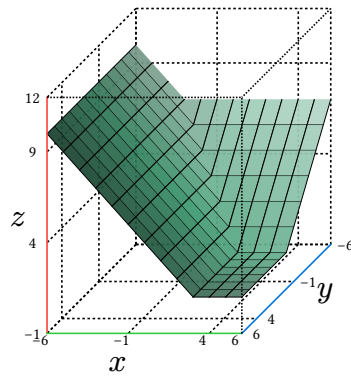
<sup>1</sup>Pour des raisons esthétiques, nous utilisons dans les graphiques l'opposé des valeurs de  $x$  et  $y$ .



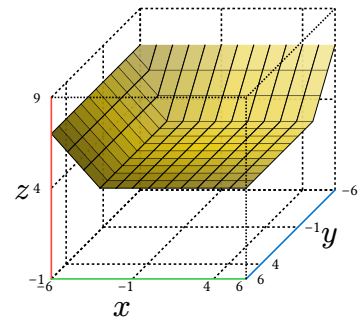
$$1 \otimes x \oplus 5 \otimes y \oplus 1$$



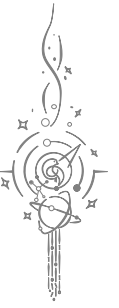
$$5 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$



$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 5$$



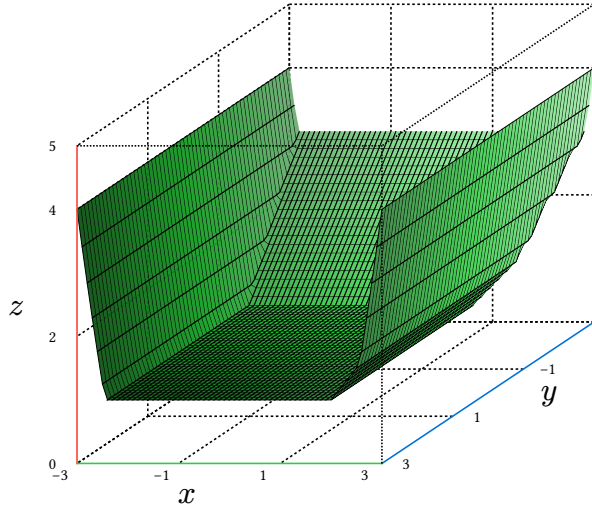
On remarque que modifier les valeurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  « décale » l'un des « bords ».



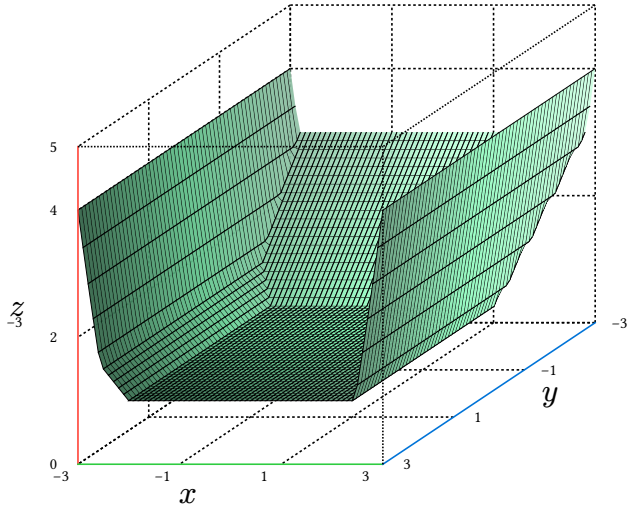
4) Voici à quoi ressemble la fonction tropicale du second degré<sup>2</sup> :

$$1 \oplus (-1) \otimes x \oplus 0 \otimes y \oplus (-5) \otimes x^2$$

D'un côté :



De l'autre en prenant l'opposé pour l'axe  $x$  :



<sup>2</sup>On prend l'opposé pour l'axe  $y$