

# Devoir maison n°13 : Ln, IAF et suites

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

## Problème 1 - Fonction logarithme népérien

1)

---

2)

---

3)

---

4)

---

5) a)

b)

c)

## Problème 2 - Inégalité des accroissements finis et suites

### Partie A

1) Supposons être dans les conditions de l'énoncé. Posons :

$$g(x) = f(x) - f(a) - M(x - a)$$

$$h(x) = f(x) - f(a) - m(x - a)$$

Alors, d'une part,  $g(a) = h(a) = 0$ . De plus, ces deux fonctions sont dérivables sur  $]a; b[$  par sommes de fonctions dérivables et pour tout  $x \in ]a; b[$  :

$$g'(x) = f'(x) - M \leq 0 \text{ par hypothèse}$$

Ainsi que :

$$h'(x) = f'(x) - m \geq 0 \text{ par hypothèse}$$

Donc  $g$  est décroissante sur  $]a; b[$ . Comme elle est continue sur  $[a; b]$ , on peut conclure que, comme  $b \geq a$ ,  $g(b) \leq g(a) = 0$ , d'où :

$$f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Similairement,  $h$  est croissante sur  $]a; b[$  et  $h(b) \geq h(a) = 0$ , d'où :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a)$$



Ce qu'il fallait démontrer.

**Partie B**

On définit sur  $\mathbb{R}_*$  :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left( x + \frac{5}{x} \right)$$

1)  $\varphi$  est impaire : soit  $x \in \mathbb{R}_*$ . Alors  $-x \in \mathbb{R}_*$  et :

$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= \frac{1}{2} \left( -x - \frac{5}{x} \right) = -\frac{1}{2} \left( x + \frac{5}{x} \right) \\ &= -\varphi(x) \end{aligned}$$

---

2)

• Quand  $x \rightarrow +\infty : \frac{5}{x} \rightarrow 0$  et par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

• Quand  $x \rightarrow -\infty : \frac{5}{x} \rightarrow 0$  et par somme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$$

• Quand  $x \rightarrow 0^- : \frac{5}{x} \rightarrow -\infty$  et par somme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = -\infty$$

• Quand  $x \rightarrow 0^+ : \frac{5}{x} \rightarrow +\infty$  et par somme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$$

---

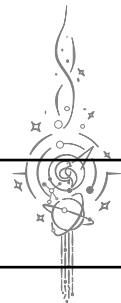
3)  $\varphi$  est dérivable sur son intervalle de définition comme somme de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}_*$ . Sa dérivée est pour tout  $x \in \mathbb{R}_*$  :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2}$$

Ainsi,  $\varphi'(x) \leq 0$  si et seulement si :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \frac{5}{2x^2} \\ \Leftrightarrow x^2 &\leq 5 \\ \Leftrightarrow x &\in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \cap \mathbb{R}_* \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant :



$x$	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$0$	$\sqrt{5}$	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	+		-	-	+
Variations de $\varphi$	$-\infty \nearrow -\sqrt{5} \searrow -\infty$		$+\infty \searrow \sqrt{5} \nearrow$		

4) TODO: Thomas ? dis moi si tu ne veux pas le faire :3

5) Soit  $x \in \mathbb{R}_*$  :

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) - x &= \frac{x}{2} + \frac{5}{2}x - x \\
 &= -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}x \\
 &= \frac{5 - x^2}{2x}
 \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

6) Soit  $x \in \left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$ . Alors  $x \geq \sqrt{5}$ , et par le 3),  $\varphi'(x) \geq 0$ . De plus :

$$\begin{aligned}
 \varphi'(x) &\leq \frac{1}{10} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{10} &\leq \frac{5}{2x^2} \\
 \Leftrightarrow \frac{4}{5} &\leq \frac{5}{x^2} \\
 \Leftrightarrow x^2 &\leq \frac{25}{4} \\
 \Leftrightarrow x &\leq \frac{5}{2} \text{ car } x \geq \sqrt{5} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Donc  $0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{1}{10}$  sur  $\left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$ .

### Partie C

1) Par le tableau de variations,  $\varphi$  est croissante sur  $\left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$ . Ainsi, si pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in \left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$ ,  $u_{n+1}$  est bien défini et :



$$\sqrt{5} \leq u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq \varphi\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4} \leq \frac{5}{2}$$

Comme  $u_0 \in \left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$ , par récurrence, la suite  $(u_n)$  est bien définie et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sqrt{5} \leq u_n \leq \frac{5}{2}$ .

**2)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \varphi(u_n) - u_n \\ &= \frac{5 - u_n^2}{2u_n} \text{ par le B)5)} \\ &\leq 0 \text{ car } u_n \geq \sqrt{5} \end{aligned}$$

Donc  $u_{n+1} \leq u_n$  est la suite  $(u_n)$  est décroissante.

**3) a)** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On sait par le B)6) que pour tout  $x \in \left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$ ,  $0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{1}{10}$ .  $\varphi$  est dérivable, en particulier continue, sur cet intervalle, et on peut donc appliquer l'IAF avec  $u_n$  et  $\sqrt{5}$  qui sont dans le bon intervalle, donnant :

$$\begin{aligned} 0(u_n - \sqrt{5}) &\leq \varphi(u_n) - \varphi(\sqrt{5}) \leq \frac{1}{10}(u_n - \sqrt{5}) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq u_{n+1} - \sqrt{5} \leq \frac{1}{10}(u_n - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

**b)** On procède par récurrence.

Initialisation :  $0 \leq u_0 - \sqrt{5}$  car  $\frac{5}{2} \geq \sqrt{5}$ , et  $u_0 - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}$  car  $\sqrt{5} \geq 2$ .

Hérédité : Supposons pour  $n \in \mathbb{N}$  que  $0 \leq u_n - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$ . Alors  $u_{n+1} - \sqrt{5} \geq 0$  par le 1), et le 3)a) donne :

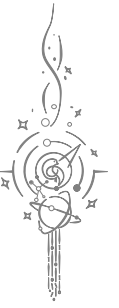
$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{5} &\leq \frac{1}{10}(u_n - \sqrt{5}) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$0 \leq u_n - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

**4)** La suite  $(u_n)$  est bornée en bas par  $\sqrt{5}$  (1) et décroissante (2). Elle est donc convergente. Notons  $l = \lim u_n$  : on a donc  $l \geq \sqrt{5}$ . Par passage à la limite du membre droit du 3)b),  $l - \sqrt{5} \leq 0$ . Donc  $l = \sqrt{5}$  : la suite  $(u_n)$  tend vers  $\sqrt{5}$ .

(On aurait pu procéder uniquement avec le 3)b) par gendarmes.)



5) On voit par l'inégalité du 3)b) que  $u_6 - \sqrt{5} \leq 10^{-6}$ . Ainsi,  $k \leq 6$ . Le code python (non optimisé) suivant calcule la valeur de  $k$  :

```
from math import sqrt
def u(n):
    if n == 0:
        return 5/2
    else:
        return ( u(n-1) + 5/(u(n-1)) )/2

k = 0
while u(k) - sqrt(5) > 10**(-6):
    k += 1

print(k)
```

Et échoue misérablement en trouvant  $k = 3$ , écrasé par les erreurs de précision de flottants, préférant en se ruant vers sa propre fin des insanités comme  $0.0001 = 10^{-10}$ , inscrivant pour l'éternité sa place dans le recueil des langages de programmation incapables de faire des calculs scientifiques sans y sacrifier une nuit blanche.