Devoir maison n°9 : Fonction du Boulanger

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Problème 1 -

1)

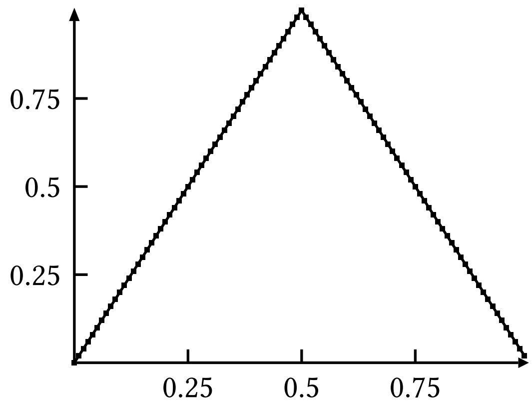
Si $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $f(x) = 2x$ donc

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 2x \leq 1$$
$$\Leftrightarrow f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) = [0, 1]$$

Si $x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, $f(x) = 2(1 - x)$ donc

$$\frac{1}{2} < x \leq 1$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - x < \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq 2(1 - x) < 1$$
$$\Leftrightarrow f\left(\left]\frac{1}{2}, 1\right]\right) = [0, 1[$$

Donc nous avons bien $f([0, 1]) = [0, 1]$



Représentation graphique de f sur $[0, 1]$

---

2) La fonction `suite` repose naturellement sur de la récursivité. Nous allons donc la programmer dans un language qui supporte de manière optimale les fonctions récursives.

Voici `suite a p` en Haskell.

```haskell
f x
  | 0 <= x     &&  x <= 1 / 2  =  2 * x
  | 1 / 2 < x  &&  x <= 1      =  2 * (1 - x)

suite a 1 = a
suite a p = suite (a ++ [f (last a)]) (p-1)
```

Voici `suite a p` en OCaml 🔥 .

```ocaml
let f x =
  if x >= 0.0 && x <= 0.5 then 2.0 *. x
  else if x <= 1.0 then 2.0 *. (1.0 -. x)
  else failwith "x doit être dans l'intervalle [0, 1]"

let rec suite x p =
  if p > 0 then begin
    let x' = f x in
    Printf.printf "%.5f\n" x';
    suite x' (p - 1)
  end

let () =
  suite (2. /. 5.) 25
```

Voici `suite(a, p)` en Python.

```python
def f(x):
    if 0 <= x <= 1/2:
        return 2*x
    elif 1/2 < x <= 1:
        return 2*(1-x)

def suite(a, p):
    u = [a]
    for _ in range(p-1):
        u.append(f(u[-1]))
    return u
```

---

3) a)

- Si $a = \frac{1}{3}$, $\quad u_0 = a = \frac{1}{3} \quad u_1 = f(u_0) = \frac{2}{3}$ car $u_0 < \frac{1}{2} \quad u_2 = 2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$ car $u_1 > \frac{1}{2}$

On remarque que $u_1 = u_2 = \frac{2}{3}$ puisque $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera constante pour $n \geq 1$.

Avec $a = \frac{1}{3}$:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{ si } n = 0 \\ \frac{2}{3} \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

- Si $a = 0.33$, On obtient : $(0.33, 0.66, 0.68, 0.64, 0.72, 0.56, 0.88, 0.24, 0.48)$

On remarque que, bien que $\frac{1}{3} \approx 0.33$, la suite ne devient pas constante pendant les 9 premiers termes.

b)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $a = \frac{1}{2^k}$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2}$, donc

$u_0 = \frac{1}{2^k}$ $\quad$ $u_1 = 2\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{k-1}}$ $\quad$ $u_2 = \frac{1}{2^{k-2}}$

Cela ne varie pas tant que $n < k$.

$u_k = \frac{1}{2^{k-k}} = 1$ $\quad$ $u_{k+1} = 0$ $\quad$ $u_{k+2} = 0$

Or, $f(0) = 0$, donc

Avec $a = \frac{1}{2^k}$:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{2^{k-n}} & \text{si } n \in [\![0, k]\!] \\ 0 & \text{si } n > k \end{cases}$$

c)

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $a = \frac{1}{3\times 2^k}$. $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{3\times 2^k} \leq \frac{1}{3\times 2} < \frac{1}{2}$, donc

$u_0 = \frac{1}{3\times 2^k}$ $\quad$ $u_1 = 2\left(\frac{1}{3\times 2^k}\right) = \frac{1}{3\times 2^{k-1}}$ $\quad$ $u_2 = \frac{1}{3\times 2^{k-2}}$

Cela ne varie pas tant que $n < k$.

$u_k = \frac{1}{3\times 2^{k-k}} = \frac{1}{3}$ $\quad$ $u_{k+1} = \frac{2}{3}$ $\quad$ $u_{k+2} = \frac{2}{3}$

Or, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$, nous l'avions déjà observé à la question 3) a).

Avec $a = \frac{1}{3\times 2^k}$:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3\times 2^{k-n}} & \text{si } n \in [\![0, k]\!] \\ \frac{2}{3} & \text{si } n > k \end{cases}$$

---

4) a) Choisissons $a = 0$, comme $f(0) = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera bien constante. Nous aurions aussi pu choisir $a = \frac{2}{3}$.

b) Choisissons $a = \frac{2}{5}$, comme $f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$, $f\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien périodique de période 2. Nous aurions bien-sûr aussi pu choisir $a = \frac{4}{5}$.

c) Choisissons $a = \frac{2}{7}$, comme $f\left(\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{7}$, $f\left(\frac{4}{7}\right) = \frac{6}{7}$ et $f\left(\frac{6}{7}\right) = \frac{2}{7}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera bien périodique de période 3. Nous aurions bien-sûr aussi pu choisir $a = \frac{4}{7}$ ou $a = \frac{6}{7}$.

---

5)

Si $k = 2$, comme vu auparavant, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, nous n'étudierons donc pas ce cas afin de simplifier le raisonnement.

Soit un entier k tel que $k > 2$.

On a $2^k - 1 \geq 7$, donc : $0 < \frac{2}{2^k-1} < \frac{1}{2}$. Ainsi, $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, ce qui garantit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie par f.

On remarque de manière évidente que si tous les termes de la suite u_n sont inférieurs à $\frac{1}{2}$ jusqu'à un rang n, $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 2^n \cdot a = \frac{2^{n+1}}{2^k - 1}$$

Or, $2^n \cdot a$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc il adviendra un moment où $2^n \cdot a > \frac{1}{2}$

D'où, au rang $k - 1$, car

$u_{k-3} = \frac{2^{k-2}}{2^k-1} < \frac{1}{2}$ et $u_{k-2} = \frac{2^{k-1}}{2^k-1} > \frac{1}{2}$

On a :

$$u_{k-1} = 2\left(1 - \frac{2^{k-1}}{2^k - 1}\right) = 2 - \frac{2^k}{2^k - 1} = 1 - \frac{1}{2^k - 1} > \frac{1}{2}$$

$$u_k = 2\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2^k - 1}\right)\right) = 2 - 2 - \frac{2}{2^k - 1} = a$$

Et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc périodique de période k.