Devoir maison n°13 : Calcul de $\zeta(2)$

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1) Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^2} > 0$, la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est strictement croissante. De plus, $u_1 = 1 \leqslant v_1 = 1$ et pour tout $k \geqslant 2$, par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = v_n$$

---

2) La suite (v_n) est convergente. En effet, pour tout $n \geqslant 2$:

$$v_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$. Comme v_n converge, alors elle est majorée. (u_n) est donc alors également majorée, et croissante. Donc (u_n) converge par le théorème de la limite monotone.

Partie B - Analyse de (u_n)

1) a) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \cos(0) = n$. De plus, pour tout $t \in]0; \pi]$:

$$\begin{aligned}
C_n(t) &= \sum_{k=1}^{n} \Re\left(e^{ikt}\right) = \Re\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right) \\
&\overset{e^{it}\neq 1}{=} \Re\left(e^{it}\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1}\right) \\
&\overset{\text{Angle moitié}}{=} \Re\left(e^{it}\frac{e^{i\frac{n}{2}t}\cdot 2\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\cdot 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\Re\left(e^{\frac{i(n+1)}{2}t}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C_n est une somme finie de fonctions continues sur $[0; \pi]$, et est donc continue sur $[0; \pi]$.

c) TODO