

Devoir maison n°12 : Première fois. Stabilité géométrique

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Problème 1 - Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels.

- Partie A.

Soit une fonction $\Delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ possédant les propriétés :

- (1) $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$
- (2) Pour tout entier premier p , $\Delta(p) = 1$
- (3) Pour tous entiers a et b : $\Delta(a \times b) = b\Delta(a) + a\Delta(b)$

- 1) Soit p un nombre premier, n un entier naturel. On cherche à prouver que $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, $\Delta(p^0) = \Delta(1) = 0$ d'après (1). Ce qui correspond à la formule.

Pour $n = 1$, $\Delta(p^1) = \Delta(p) = 1$ d'après (2). Or avec la formule on obtient $p^0 = 1$, ce qui est donc correct.

Hérédité :

On suppose que $\Delta(p^n) = np^{n-1}$, cherchons à prouver que $\Delta(p^{n+1}) = (n+1)p^n$.

$$\Delta(p^{n+1}) = \Delta(p \times p^n) = p^n \Delta(p) + p \Delta(p^n) = p^n + pnp^{n-1} = (n+1)p^n$$

Par principe de récurrence, $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.