Devoir maison n°7 : Autour de Farey

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Partie A - Somme des cancres dans $\mathbb{Q}_+$.

Soient $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{e}{f},$ avec $a, c, e \in \mathbb{N},$ et $b, d, f \in \mathbb{N}^*$.

1)

$$x \oplus x = \frac{a}{b} \oplus \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

Donc $x \oplus x = x$.

---

2)

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d} \quad \text{et} \quad y \oplus x = \frac{c+a}{d+b} = \frac{a+c}{b+d}$$

$x \oplus y = y \oplus x$ donc l'opération est commutative.

---

3) D'une part :

$$(x \oplus y) \oplus z = \left(\frac{a+c}{b+d}\right) \oplus \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Et d'autre part :

$$x \oplus (y \oplus z) = \frac{a}{b} \oplus \left(\frac{c+e}{d+f}\right) = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ donc l'opération est associative.

---

4) Raisonnons par contraposée : Montrons que $(x \geqslant x \oplus y \vee x \oplus y \geqslant y) \Longrightarrow x \geqslant y$.

- Supposons $x \geqslant x \oplus y$:

$$\begin{aligned} x \geqslant x \oplus y &\Longrightarrow \frac{a}{b} \geqslant \frac{a+c}{b+d} \\ &\Longrightarrow \frac{ab+ad-ab-bc}{b(b+d)} \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow ad - bc \geqslant 0 \quad \text{car } b(b+d) \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow \frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d} \\ &\Longrightarrow x \geqslant y \end{aligned}$$

- Supposons $x \oplus y \geqslant y$:

$$\begin{aligned} x \oplus y \geqslant y &\Longrightarrow \frac{a+c}{b+d} \geqslant \frac{c}{d} \\ &\Longrightarrow \frac{ad+cd-bc-cd}{d(b+d)} \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow ad-bc \geqslant 0 \quad \text{car } d(b+d) \in \mathbb{N} \\ &\Longrightarrow \frac{a}{b} \geqslant \frac{c}{d} \\ &\Longrightarrow x \geqslant y \end{aligned}$$

Nous avons montré que $(x \geqslant x \oplus y \vee x \oplus y \geqslant y) \Longrightarrow x \geqslant y$, et donc, par contraposée, que $x < y \Longrightarrow x < x \oplus y < y$.

Partie B - Déterminant de deux nombres de $\mathbb{Q}_+$.

Nous reprenons x, y tels que dans la partie précédente.

1) Montrons que : $x = y \Longleftrightarrow \delta(x,y) = 0$.

- Supposons que $x = y$. Alors :

$$\begin{aligned} \delta(x,y) &= \delta(x,x) \\ &= ab - ba \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Supposons que $\delta(x,y) = 0$. Alors :

$$\begin{gathered} ad - bc = 0 \\ ad = bc \\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ x = y \end{gathered}$$

Nous avons donc montré que $x = y \Longleftrightarrow \delta(x,y) = 0$.

---

2) D'une part :

$$\delta(y,x) = \begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = bc - ad$$

D'autre part :

$$-\delta(x,y) = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -ad + bc$$

Donc $\delta(y,x) = -\delta(x,y)$.

3)

$$\begin{aligned} x < y &\iff \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \\ &\iff ad < bc \quad \text{car } b, d > 0 \\ &\iff ad - bc < 0 \\ &\iff \delta(x,y) < 0 \\ &\iff \delta(x,y) \leqslant -1 \quad \text{car } \delta(x,y) \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Donc $x < y \iff \delta(x,y) \leqslant -1$.

Partie C - Ensembles de Farey.

1) Bah non en fait, Thomas python please

---

2) Si $\frac{m}{n} \in F_n$, alors $0 \leq m \leq n$ et $n \geq n - m \geq 0$. Donc $\frac{n-m}{n} \in F_n$.

Comme $n - (n - m) = m$, $\frac{m}{n} \in F_n$ si et seulement si $\frac{n-m}{n} \in F_n$, qui est son symétrique par rapport à leur moyenne $\frac{1}{2}$. Ce centre de symétrie ne dépend pas de m : on en conclut donc que $\frac{1}{2}$ est le centre de F_n pour $n \geq 2$.

---

3) Pas trouvé :/

---

4) Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ l'assertion suivante : Si $x < y$ sont deux fractions consécutives de F_n, alors :

- $\delta(x,y) = -1$
- La première fraction qui apparaît dans un $F_m, m > n$ est $x \oplus y$

Il s'agit de prouver par récurrence $P(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Initialisation : Les seules fractions de F_1 sont $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$. On a bien $\delta\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right) = -1$ et la première fraction qui apparaît entre elles dans un F_m suivant est $\frac{1}{2}$ dans F_2 : or, $\frac{1}{2} = \frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1}$. Donc $P(1)$ est vraie.

b) Hérédité : On suppose par la suite $P(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, et on prouve $P(n+1)$.

On pose $x = \frac{a}{b}$ et $y = \frac{c}{d}$ deux fractions irréductibles et consécutives dans F_{n+1}. Par **C.3**, on sait que $x \in F_n$ ou $y \in F_n$.

1^er^ cas : $x \in F_n$ et $y \in F_n$.

Comme x et y sont consécutives dans F_{n+1}, alors elles le sont aussi dans F_n, car $F_n \subseteq F_{n+1}$. Alors par l'hypothèse de récurrence, $\delta(x,y) = -1$. De plus, la première fraction qui apparaît entre x et y est $x \oplus y$ dans $F_m, m > n$. Mais x et y sont consécutives dans F_{n+1}, donc $m > n + 1$. Ainsi, dans ce cas, $P(n+1)$ est vérifiée.

2^e^ cas : $x \in F_n$ et $y \in F_{n+1} \setminus F_n$. Posons $z \in F_n$ la fraction successive de x dans F_n.

Par hypothèse de récurrence, comme y doit être la première fraction à s'être intercalée entre x et y, on doit avoir $y = x \oplus z$. De plus, on a $\delta(x, z) = -1$. On a donc

$$\delta(x, y) = \delta(x, x \oplus z) = \delta(x, z) = -1$$

Ce qui valide la première condition de $P(n + 1)$.

Posons maintenant $t = \frac{r}{s}$ la première fraction irréductible à apparaître entre x et y dans un F_m pour $m > n + 1$.

D'abord, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \delta(t, x) \geq 1 \\ \delta(y, t) \geq 1 \end{cases} &\overset{\textbf{B.2}}{\iff} \begin{cases} \delta(x, t) \leq -1 \\ \delta(t, y) \leq -1 \end{cases} \\ &\overset{\textbf{B.3}}{\iff} x < t < y \end{aligned}$$

Comme t s'intercale entre x et y, $\delta(t, x)$ et $\delta(y, t)$ sont bien supérieurs ou égaux à 1.

Ensuite, on a :

$$\begin{aligned} a\delta(y, t) + c\delta(t, x) &= a(cs - dr) + c(br - as) \\ &= acs - acs + rbc - rad \\ &= r(bc - ad) \\ &= -r\delta(x, y) \\ &= r \end{aligned}$$

Similairement, on a :

$$\begin{aligned} b\delta(y, t) + d\delta(t, x) &= b(cs - dr) + d(br - as) \\ &= bdr - bdr + sbc - sad \\ &= s(bc - ad) \\ &= -s\delta(x, y) \\ &= s \end{aligned}$$

Si $\delta(t, x) \neq 1$ ou $\delta(t, y) \neq 1$, alors la fraction $t' = x \oplus y$ a un dénominateur $s' = b + d < s$. De plus, comme $\delta(x, y) = -1$, t' est irréductible. Donc t' s'intercale entre x et y strictement avant t, ce qui contredit la minimalité de t. Donc $\delta(x, t) = \delta(y, t) = 1$, et $t = x \oplus y$, ce qui conclut la preuve de la deuxième condition de $P(n + 1)$ dans ce cas.

3^{e} cas : TODO

Partie D - Cercles de Ford.

1) Tangents à l'axe des abscisses.

Prouvons que tout cercle de Ford est tangent à l'axe des abscisses. Soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible. Son cercle de Ford associé est de centre $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2b^2}$. Comme le rayon du cercle et son ordonnée sont égaux, tout cercle Ford est bien tangent à l'axe des abscisses.

2) Tangents entre eux quand consécutifs.

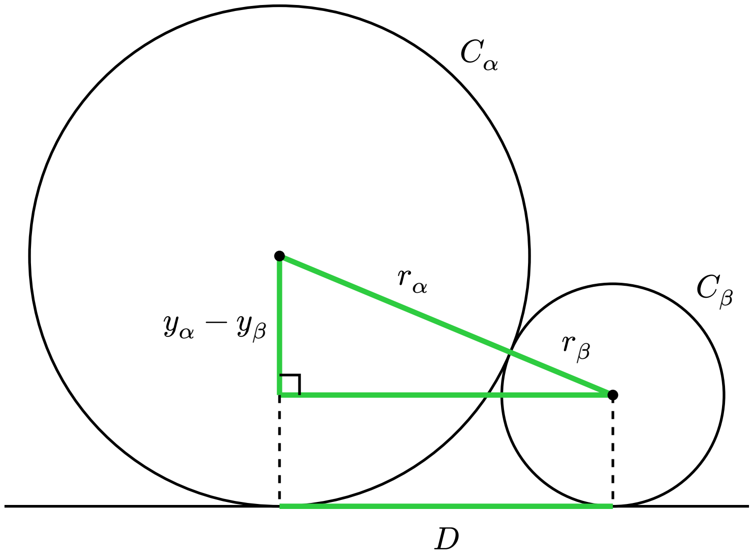
Nous allons raisonner par équivalence.

Soient α et β deux fractions consécutives de F_n tel que

$$\alpha = \frac{m}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n}{b}$$

avec $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha < \beta$.

Les deux cercles de Ford C_α et C_β associés à α et β sont tangents à l'axe des abscisses d'après la propriété ci-dessus. On nomme r_α et r_β les rayons respectifs des cercles, et D la distance entre leur centre.



Le triangle rectangle vert existe avec les longeurs indiquées si et seulement si les deux cercles sont tangents.

C_α et C_β sont tangents ssi

$$
\begin{aligned}
& & D^2 &= \left(r_\alpha + r_\beta\right)^2 - \left(y_\alpha - y_\beta\right)^2 \\
\iff & & D^2 &= \left(\frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2b^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2b^2}\right)^2 \\
\iff & & D^2 &= \left(2\left(\frac{1}{2a^2}\right)\right)\left(2\left(\frac{1}{2b^2}\right)\right) \\
\iff & & D^2 &= \left(\frac{1}{ab}\right)^2 \qquad \text{Or } D > 0 \text{ et } a, b \in \mathbb{N}^* \\
\iff & & D &= \frac{1}{df} \\
\iff & & \frac{n}{b} - \frac{m}{a} &= \frac{1}{df} \qquad \text{car } \alpha < \beta \\
\iff & & \frac{an - mb - 1}{df} &= 0 \\
\iff & & mb - an &= -1 \\
\iff & & \delta(\alpha, \beta) &= -1
\end{aligned}
$$

Or $\delta(\alpha, \beta)$ est bien égal à −1 car TODO donc par équivalence, α et β sont tangeants.

Nous avons prouvé que les cercles Ford associés à deux fractions consécutives de F_n sont tangeants entre eux.