Devoir maison n°13 : Calcul de $\zeta(2)$

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

1) Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^2} > 0$, la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est strictement croissante. De plus, $u_1 = 1 \leqslant v_1 = 1$ et pour tout $k \geqslant 2$, par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2}$. Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$:

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = v_n$$

---

2) La suite (v_n) est convergente. En effet, pour tout $n \geqslant 2$:

$$v_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$. Comme v_n converge, alors elle est majorée. (u_n) est donc alors également majorée, et croissante. Donc (u_n) converge par le théorème de la limite monotone.

Partie B - Analyse de (u_n)

1) a) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n(0) = \sum_{k=1}^{n} \cos(0) = n$. De plus, pour tout $t \in]0;\pi]$:

$$\begin{aligned}
C_n(t) &= \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{R}(e^{ikt}) = \mathfrak{R}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right) \\
&\overset{e^{it}\neq 1}{=} \mathfrak{R}\left(e^{it}\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1}\right) \\
&\overset{\text{Angle moitié}}{=} \mathfrak{R}\left(e^{it}\frac{e^{i\frac{n}{2}t}\cdot 2\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{e^{i\frac{t}{2}}\cdot 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\mathfrak{R}\left(e^{\frac{i(n+1)}{2}t}\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}
\end{aligned}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C_n est une somme finie de fonctions continues sur $[0;\pi]$, et est donc continue sur $[0;\pi]$.

c) TODO

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [O;\pi]$, $D_n(t) = 1 + 2C_n(t)$. Par continuité de C_n et opérations, D_n est également continue sur $[0;\pi]$

---

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $t \mapsto C_n(t)$ sont de classe C^∞ par opérations (cos est de classe C^∞). On peut donc calculer par intégration par parties :

TODO : d droit

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt &= \left[\frac{1}{n}\left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\sin(nt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)dt \\ &\overset{\sin(k\pi)=0}{=} -\frac{1}{n}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)dt\end{aligned}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1\right)\sin(nt)dt &= \left[\frac{1}{n}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)(-\cos(nt))\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n\pi}(-\cos(nt))dt \\ &= \left[\frac{1}{n}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)(-\cos(nt))\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{n^2\pi}(-\sin(nt))\right]_0^\pi\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{t}{\pi} - 1\right)(-\cos(nt))\right]_0^\pi &= \left(0 - \frac{1}{n}(-1)(-\cos(0))\right) = -\frac{1}{n} \text{ et} \\ \left[\frac{1}{n^2\pi}(-\sin(nt))\right]_0^\pi &\overset{\sin(k\pi)=0}{=} = 0\end{aligned}$$

On en conclut donc que :

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt = -\frac{1}{n}\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$$

Enfin, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned}u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &= \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(kt)dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(\sum_{k=1}^n \cos(kt)\right)dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)C_n(t)dt\end{aligned}$$

---

3) On calcule en primitivant :

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{6\pi}t^3\right]_0^\pi - \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^\pi\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{6}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n - \frac{\pi^2}{6} &= u_n + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\left(C_n(t) + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) D_n(t) \end{aligned}$$