Devoir maison n°2 : Autour de la continuité

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie 1 - Bornitude et continuité

1) Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. Il existe ainsi $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \leqslant g(x) \leqslant M$.

D'une part, $f(x) \in \mathbb{R}$ donc puisque g est bornée, $m \leqslant g(f(x)) \leqslant M$ i.e. $g \circ f$ est bornée.

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \in [m, M]$. f est continue donc d'après le TVI, l'image du segment $[m, M]$ par f est aussi un segment $[m', M']$ $(m', M' \in \mathbb{R})$.
Donc $f(g(x)) \in [m', M']$ i.e. $f \circ g$ est bornée.

Partie 2 - Injectivité et continuité

1) Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Pour tout x et y tel que $x < y$, soit $f(x) < f(y)$ soit $f(x) > f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$. Il n'existe pas deux antécédants qui donnent la même image donc f est injective.

Prenons la fonction :

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$
$$f : x \quad \mapsto \begin{cases} -1 \text{ si } x = 1 \\ x \quad \text{sinon} \end{cases}$$

f est une bijection puique $-1 \notin \mathbb{R}_+$ donc f est injective. Or $f(1) < f(0) < f(2)$ donc f n'est pas monotone. La réciproque est fausse.