Devoir maison n°9 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Problème 1 - Bac 1974

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \end{cases}$$

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1)

$$\begin{aligned} u_2 &= a u_1 + b u_0 \\ u_3 &= a u_2 + b u_1 = a(a u_1 + b u_0) + b u_1 = (a^2 + b) u_1 + b u_0 \\ u_4 &= a u_3 + b u_2 = a((a^2 + b) u_1 + b u_0) + b(a u_1 + b u_0) = (a^3 + 2ab) u_1 + (ab + b^2) u_0 \\ u_5 &= a u_4 + b u_3 = (a^4 + 2a^2 b) u_1 + (a^2 b + a b^2) u_0 + (a^2 b + b^2) u_1 + b^2 u_0 \\ &= (a^4 + 3a^2 b + b^2) u_1 + (a^2 b + a b^2 + b^2) u_0 \\ u_6 &= a u_5 + b u_4 = (a^5 + 3a^3 b + a b^2) u_1 + (a^3 b + a^2 b^2 + a b^2) u_0 + (a^3 b + 2a b^2) u_1 + (a b^2 + b^3) u_0 \\ &= (a^5 + 4a^3 b + 3a b^2) u_1 + (a^3 b + a^2 b^2 + 2a b^2 + b^3) u_0 \end{aligned}$$

---

2) On suppose $\Delta > 0$. On note α et β les solutions de l'équation caractéristique.

a) D'après les relations coefficients-racines d'un polynôme du second degré, on a :

$\alpha + \beta = -\frac{-a}{1} = a$ et $\alpha\beta = \frac{-b}{1} = -b$.

Ainsi, la relation (1) peut se réécrire comme suit :

$$\begin{gathered} u_{n+2} = (\alpha + \beta) u_{n+1} - \alpha\beta u_n \\ \text{i.e. } u_{n+2} - \alpha u_{n+1} = \beta(u_{n+1} - \alpha u_n). \end{gathered}$$

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ et $w_n = u_{n+1} - \beta u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part, $v_{n+1} = u_{n+2} - \alpha u_{n+1}$ soit d'après la relation précédente, $v_{n+1} = \beta(u_{n+1} - \alpha u_n) = \beta v_n$. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison β.

D'autre part,

$$
\begin{aligned}
w_{n+1} &= u_{n+2} - \beta u_{n+1} \\
&= (\alpha + \beta) u_{n+1} - \alpha\beta u_n - \beta u_{n+1} \\
&= \alpha u_{n+1} - \alpha\beta u_n \\
&= \alpha w_n .
\end{aligned}
$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison α.