

# Devoir maison n°11 : Équation de Pell-Fermat

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

## Partie A - Premières propriétés

$$(E) : x^2 - 5y^2 = 1$$

**1) Symétries :** Les variables  $x$  et  $y$  sont mises au carré dans  $(E)$  et donc toujours positives. Donner un nombre négatif présent dans  $\mathbb{Z}$  est équivalent à donner son opposé qui est dans  $\mathbb{N}$ . Il suffit donc de chercher toutes les solutions  $(x, y)$  positives qui sont dans  $\mathbb{N}^2$  pour obtenir toutes les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  de  $(E)$ .

---

### 2) Nombre de solutions

a) Soient  $a, b \in \mathbb{N}$ . L'identité de BRAHMAGUPTA est équivalente à :

$$(a^2 + 5b^2)^2 - (a^2 - 5b^2)^2 = 5(2ab)^2$$

En factorisant le côté gauche de l'équation, on trouve :

$$\begin{aligned}(a^2 + 5b^2)^2 - (a^2 - 5b^2)^2 &= (a^2 + a^2 + 5b^2 - 5b^2)(a^2 - a^2 + 5b^2 + 5b^2) \\ &= (2a^2)(2 \cdot 5b^2) \\ &= 5(2ab)^2\end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

b) Soient  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ , tel que  $(x, y) \neq (1, 0)$  et  $(x, y)$  solution de  $(E) : x^2 - 5y^2 = 1$ .

l'identité de BRAHMAGUPTA assure que :

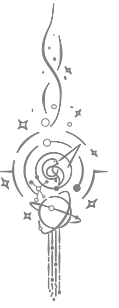
$$1 = (a^2 + 5b^2) - 5(2ab)^2$$

Autrement dit,  $(a^2 + 5b^2, 2ab)$  est également une solution de  $(E)$ . Comme  $a^2 + 5b^2 > a$  et  $2ab > b$ , cette solution est également différente de  $(a, b)$  et de tout autre solution  $(x, y)$  où  $x < a, y < b$ . Il existe donc, en itérant ce procédé, une infinité de solutions de  $(E)$  dans  $\mathbb{N}^2$ .

c)  $(a, b) \in \mathbb{N}^2$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $a^2 = 1 + 5b^2$ . Comme  $b^2 \geq 0$  et  $a \geq 0$ , on trouve que  $(a, b)$  est solution si et seulement si  $a = \sqrt{1 + 5b^2}$ . On pose donc  $f(b) = \sqrt{1 + 5b^2}$ .

TODO : script

d) Supposons que  $(a, b)$  et  $(a', b)$  soient solutions. Alors  $a = f(b) = a'$  et  $a = a'$ . On peut donc bien choisir un « couple minimal » comme le couple avec le  $b$  minimal.



## Partie B - L'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$

1) L'existence de cette écriture est assurée par la définition de  $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ . Supposons que  $x = a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5}$  pour  $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$ . Si  $b \neq d$ , alors :

$$\begin{aligned} a + b\sqrt{5} &= c + d\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow \sqrt{5} &= \frac{c - a}{b - d} \end{aligned}$$

Ce qui contredit l'irrationalité de  $\sqrt{5}$ . Donc  $b = d$ , et  $a + b\sqrt{5} = c + b\sqrt{5}$ , d'où  $a = c$ . Donc l'écriture  $x = a + b\sqrt{5}$  de chaque  $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$  est unique.

---

2) Posons  $x = a + b\sqrt{5}, y = c + d\sqrt{5}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \overline{x + y} &= \overline{(a + c) + (b + d)\sqrt{5}} \\ &= (a + c) - (b + d)\sqrt{5} \\ &= (a - b\sqrt{5}) + (c - d\sqrt{5}) \\ &= \overline{x} + \overline{y} \end{aligned}$$

Et similairement :

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \overline{(ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}} \\ &= ac + 5bd - (ad + bc)\sqrt{5} \\ \overline{x} \cdot \overline{y} &= (a - b\sqrt{5}) \cdot (c - d\sqrt{5}) \\ &= (ac + 5bd) - (ad + bc)\sqrt{5} \end{aligned}$$

D'où  $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ .

## Partie C - Détermination d'un élément générateur de $\mathbb{U}$ .