Devoir maison n°12 : Première fois. Stabilité géométrique

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Problème 1 - Première fois.

Partie A : Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels.

Soit une fonction $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ possédant les propriétés :
(1) $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$
(2) Pour tout entier premier p, $\Delta(p) = 1$
(3) Pour tous entiers a et b : $\Delta(a \times b) = b\Delta(a) + a\Delta(b)$

1) Soit p un nombre premier, n un entier naturel. On cherche à prouver que $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, $\Delta(p^0) = \Delta(1) = 0$ d'après (1). Ce qui correspond à la formule.

Pour $n = 1$, $\Delta(p^1) = \Delta(p) = 1$ d'après (2). Or avec la formule on obtient $p^0 = 1$, ce qui est donc correct.

Hérédité :

On suppose que $\Delta(p^n) = np^{n-1}$, cherchons à prouver que $\Delta(p^{n+1}) = (n+1)p^n$.

$$\Delta(p^{n+1}) = \Delta(p \times p^n) = p^n\Delta(p) + p\Delta(p^n) = p^n + pnp^{n-1} = (n+1)p^n$$

Par principe de récurrence, $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.

On remarque par ailleurs que $\Delta(p^p) = pp^{n-1} = p^p$.

---

2) a) Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. $\Delta(p^m \times q^n) = q^n\Delta(p^m) + p^m\Delta(q^n)$ D'après la question précédente, on a alors : $mq^np^{m-1} + np^mq^{n-1} = (p^{m-1}q^{n-1})(mq + np)$

b) $\Delta(10^n) = \Delta(2^n \times 5^n)$ Comme 2 et 5 sont premiers et distincts, n supérieur ou égal à 1, on a d'après la question précédente : $\Delta(2^n \times 5^n) = 7n(2^{n-1} \times 5^{n-1})$. $\Delta(10^n)$ est donc un multiple de 7 quand $n \geq 1$.

---

3) a) On cherche à montrer que si $n \geq 2$ alors $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_k q_k$ avec $q_{1\ldots k} = \frac{n}{p_{1\ldots k}}$.

Soit $n \geq 2$, On a donc, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ avec $p_{1\ldots k}$ premier et $\alpha_{1\ldots k} \in \mathbb{N}^*$.

Initialisations :

On suppose que $k = 1$, que $n = p_1^{\alpha_1}$, alors $\Delta(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1}$ Or $q_1 = \frac{n}{p_1} = p_1^{\alpha_1 - 1}$.

Donc $\Delta(n) = \alpha_1 q_1$

On suppose que $k = 2$, que $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$, alors d'après 2)a), $\Delta(n) = p_2^{\alpha_2} \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1} + p_1^{\alpha_1} \alpha_2 p_2^{\alpha_2 - 1} = \left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}\right)\left(\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2}\right) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$.

Hérédité :

On suppose que $\Delta(m) = \alpha_1' q_1' + \alpha_2' q_2' + \ldots + \alpha_k' q_k'$ pour m pouvant s'écrire $m = p_1'^{\alpha_1'} \times p_2'^{\alpha_2'} \times \ldots \times p_k'^{\alpha_k'}$.

On cherche à prouver que $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}$ pour n pouvant s'écrire sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k} \times p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$.

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \Delta(p_1^{\alpha_1})\left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}\right) + p_1^{\alpha_1} \Delta\left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}\right) \text{ d'après 2)a)} \\
&= \alpha_1 \left(n \frac{p_1^{\alpha_1 - 1}}{p_1^{\alpha_1}}\right) + p_1^{\alpha_1} \Delta\left(\underbrace{p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k} \times p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}}_{\text{est un nombre comme } m}\right)
\end{aligned}$$

En faisant correspondre $m = \frac{n}{p_1^{\alpha_1}}$, $p_1' = p_2, \ldots, p_k' = p_{k+1}$ et $\alpha_1' = \alpha_2, \ldots, \alpha_k' = \alpha_{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}
\Delta(n) &= \alpha_1 q_1 + p_1^{\alpha_1}\left(\alpha_2 \frac{m}{p_2} + \ldots + \alpha_k \frac{m}{p_k} + \alpha_{k+1} \frac{m}{p_{k+1}}\right) \\
&= \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}
\end{aligned}$$

Par principe de récurrence, nous avons prouvé que quelque soit $k \in \mathbb{N}^*$ et par conséquent quelque soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_k q_k$.

b) Vérifions que $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_k q_k$ satisfait les propriétés (2) et (3) :

(1) Pour p premier, $p = p^1$: $\Delta(p) = 1 \times \frac{p}{p} = 1$. Cela correspond bien à la propriété (1).

Pour a et b des entiers naturels : $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ $b = p_1'^{\alpha_1'} \ldots p_{k'}'^{\alpha_{k'}'}$ D'une part, $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b) = b\alpha_1 \frac{a}{p_1} + \ldots + b\alpha_k \frac{a}{p_k} + a\alpha_1' \frac{b}{p_1'} + \ldots + a\alpha_{k'}' \frac{b}{p_{k'}'} = \alpha_1 \frac{a \times b}{p_1} + \ldots + \alpha_k \frac{a \times b}{p_k} + \alpha_1' \frac{a \times b}{p_1'} + \ldots + \alpha_{k'}' \frac{a \times b}{p_{k'}'} \ldots$

Partie B : Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ.

---

4) a)

Calculons $\Delta(12)$. On a $12 = 2^2 \times 3$.

Donc d'après la formule, $\Delta(12) = 2\frac{12}{2} + \frac{12}{3} = 16$.

Calculons $\Delta(56)$. On a $56 = 2^3 \times 7$.

Donc d'après la formule, $\Delta(56) = 3\frac{56}{2} + \frac{56}{7} = 92$.

Calculons $\Delta(1001)$. On a $1001 = 7 \times 11 \times 13$.

Donc d'après la formule, $\Delta(1001) = \frac{1001}{7} + \frac{1001}{11} + \frac{1001}{13} = 311$.

Preuves générées automatiquement (le script est sur Github).[1,2]

b) Cherchons les solutions de $\Delta(x) = 0$ avec $x \in \mathbb{N}$.

Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors d'après (1), $\Delta(x) = 0$.

Si $x \geq 2$, $\Delta(x) = \alpha_1 q_1 + ... + \alpha_k q_k$. Or $\alpha_{1...k} \in \mathbb{N}^*$ et $q_{1...k} = \frac{x}{p_{1...k}}$, comme $x, p_{1...k} \in \mathbb{N}^*$ alors $q_{1..k} > 0$. Ainsi comme somme de nombres tous strictements positifs, $\Delta(x) > 0$.

Les seules solutions à $\forall x \in \mathbb{N}, \Delta(x) = 0$ sont $\{0, 1\}$.

Nous avons également prouvé que pour tout $x \geq 2$ alors $\Delta(x) > 0$.

c) Cherchons les solutions de $\Delta(x) = 1$ avec $x \in \mathbb{N}$.

Si $x = 0$ ou $x = 1$ alors d'après (1), $\Delta(x) = 0$.

Si x est premier alors d'après (2), $\Delta(x) = 1$.

Si x n'est pas premier et différent de 0 et 1, alors on peut écrire x sous la forme $x = p \times b$ avec p premier et $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. En effet si $b = 0$ alors $x = 0$ et si $b = 1$ alors x est premier, ce qui n'est pas autorisé. D'après la question précédente, $\Delta(b) > 0$. On a donc :

$$\Delta(x) = \Delta(p \times b) = b\Delta(p) + p\Delta(b) = \underbrace{b}_{\geq 2} + \underbrace{p}_{\geq 2}\underbrace{\Delta(b)}_{>0}$$

Par addition d'un nombre supérieur ou égal à 2 avec un nombre strictement supérieur à 0, $\Delta(x) > 2$.

Les seules solutions à $\forall x \in \mathbb{N}, \Delta(x) = 1$ sont donc l'ensemble des nombres premiers.

d) Nous cherchons à prouver que 2 et 3 ne possèdent pas d'antécédent par Δ.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$ ou $n = 1$ alors $\Delta(n) = 0$ et si n est premier alors $\Delta(n) = 1$. On considère donc tous les $n \geq 2$ et qui ne sont pas premiers.

On peut alors réécrire n comme le produit de deux entiers naturels différents de 0 et 1 : $n = a \times b$. On a alors :

$$\Delta(n) = \Delta(a \times b) = \Delta(a) \times \underbrace{b}_{\geq 2} + \underbrace{a}_{\geq 2} \times \Delta(b)$$

Or nous avons prouvé précédement que les seules solutions à l'équation $\Delta(x) = 0$ sont 0 et 1. Comme a et b sont différents de 0 et 1 on a :

$$\Delta(n) = \underbrace{\Delta(a)}_{\geq 1} \times \underbrace{b}_{\geq 2} + \underbrace{a}_{\geq 2} \times \underbrace{\Delta(b)}_{\geq 1}$$

La valeur minimale de $\Delta(n)$ est donc 4 quand n est différent de 0 et 1 et n'est pas premier.

[1]Par exemple : Calculons $\Delta(987654321)$. On a $987654321 = 3^2 \times 17^2 \times 379721$. Donc d'après la formule, $\Delta(987654321) = 2\frac{987654321}{3} + 2\frac{987654321}{17} + \frac{987654321}{379721} = 774633441$.

[2](Pourquoi écrire les preuves à la main alors qu'on peut passer 5 fois plus de temps à coder le script qui le fait automatiquement ?)

Comme 0, 1 et les nombres premiers ne donnent ni 2 ni 3 par Δ nous avons prouvé que 2 et 3 ne possèdent pas d'antécédents par Δ.

Tout entier entier naturel n n'a donc pas au moins un antécédent par Δ.[3]

e) Calculons $\Delta(8)$. On a $8 = 2^3$.

Donc d'après la formule, $\Delta(8) = 3\frac{8}{2} = 12$.

Nous avons donc $\Delta(8) > 8$. La propriété $\forall n \in \mathbb{N}, \Delta(n) \leq n$ est fausse.

---

5) a) Montrons que pour deux nombres p et q premiers, $\Delta(p \times q) = p + q$. D'après les propriétés (1) et (2) :

$$\Delta(p \times q) = q\Delta(p) + p\Delta(q) = p + q$$

b) On considère les entiers naturels 3 et 4.

Calculons $\Delta(12)$. On a $12 = 2^2 \times 3$. Donc d'après la formule, $\Delta(12) = 2\frac{12}{2} + \frac{12}{3} = 16$.

Or $3 + 4 = 7 \neq 16$. La propriété $\forall n, m \in \mathbb{N}, \Delta(n \times m) = n + m$ est donc fausse.

---

6) a) Considérons les nombres 2 et 3. Comme 2, 3 et $2 + 3 = 5$ sont premiers, on a :

$$\Delta(2 + 3) = 1 \neq \Delta(2) + \Delta(3) = 2$$

La propriété $\forall n, m \in \mathbb{N}, \Delta(n + m) = \Delta(n) + \Delta(m)$ est donc fausse.

b) Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta(a + b) = \Delta(a) + \Delta(b)$. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la propriété (3) :

$$\begin{aligned}
\Delta(ka + kb) &= \Delta(k(a + b)) = \Delta(k)(a + b) + k\Delta(a + b) \\
&= \Delta(k)a + \Delta(k)b + k\Delta(a) + k\Delta(b) \\
&= (a\Delta(k) + k\Delta(a)) + (b\Delta(k) + k\Delta(b)) \\
\Delta(ka + kb) &= \Delta(ka) + \Delta(kb)
\end{aligned}$$

Partie C : Les points fixes de la fonction

---

7) a) Soit p un nombre premier. Soit m un entier naturel multiple de p^p. Soit n un entier naturel tel que $m = np^p$.

Considérons $\Delta(p^p)$, d'après la question 1), $\Delta(p^p) = pp^{p-1} = p^p$.

$$\Delta(m) = \Delta(np^p) = p^p\Delta(n) + n\Delta(p^p) = p^p(n + \Delta(n))$$

Nous avons prouvé que $\Delta(m)$ est un multiple de p^p.

b) Soit $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$. Supposons que $p^\alpha \mid m$ pour p premier et $1 \leq \alpha < p$ (avec α maximal). Notons $m = np^\alpha$ avec $n \in \mathbb{N}$ non divisible par p. Alors

[3] Δ n'est pas surjective.

$$\begin{aligned}\Delta(m) &= n\Delta(p^\alpha) + p^{\alpha-1}\Delta(n) \\ &= np^{\alpha-1} + p^\alpha\Delta(n) \\ &= p^{\alpha-1}(n + p\Delta(n))\end{aligned}$$

Donc $p^{\alpha-1}$ divise $\Delta(m)$. Cependant, comme n n'est pas divisible par p, $n + p\Delta(n)$ non plus et $\Delta(m)$ n'est pas divisible par p^α. La puissance de p dans la décomposition de $\Delta(m)$ est donc bien $\alpha - 1$.

---

8) Résolvons $\Delta(x) = x$ avec $x \in \mathbb{N}$.

Si $x = 0$ alors $\Delta(0) = 0$. 0 est solution. Si $x = 1$ alors $\Delta(1) = 0$.

On considère maintenant $x \geq 2$. On a donc :

$$\begin{aligned}\Delta(x) = x &\Leftrightarrow \alpha_1 \frac{x}{p_1} + \ldots + \alpha_k \frac{x}{p_k} = x \\ &\Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{p_1} + \ldots + \frac{\alpha_k}{p_k} = 1 \quad (*)\end{aligned}$$

- S'il existe au moins un $i \in [\![1, k]\!]$ tel que $\alpha_i \geq p_i$:

Si $k > 1$ alors :

$$\underbrace{\frac{\alpha_1}{p_1}}_{>0} + \ldots + \underbrace{\frac{\alpha_i}{p_i}}_{\geq 1} + \ldots + \frac{\alpha_k}{p_k} = 1$$

Par somme de nombres tous strictements positifs avec un terme supérieur à 1, cette expression n'est jamais vrai quelque soient les valeurs de $\alpha_{1\ldots k}$ et $p_{1\ldots k}$ respectant les conditions.

Si $k = 1$ alors $i = 1$ d'où $\alpha_1 \geq p_1$ et :

$$\underbrace{\frac{\alpha_1}{p_1}}_{\geq 1} = 1$$

Si $\alpha_1 > p_1 \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{p_1} > 1$ alors la condition n'est pas remplie.

Donc on a $\alpha_1 = p_1$. Comme nous avons déjà prouvé que $\Delta(p^p) = p^p$ à la question 1), sont solution $\{p^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ premier}\}$.

- Si pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $\alpha_i < p_i$:

A fortiori, la puissance de p_1 dans la décomposition de m est $1 \leq \alpha_1 < p_1$. Par l'exercice précédent, la puissance de p_1 dans $\Delta(m)$ est donc de $\alpha_1 - 1$ exactement. Mais $\Delta(m) = m$, et c'est une contradiction. Ce cas est donc impossible.

Nous avons donc démontré que les seules solutions à $\Delta(x) = x$ sont :

$$\mathcal{S} = \{p^p \mid p \in \mathbb{N} \text{ et } p \text{ premier}\} \cup \{0\}$$

Problème 2 - Stabilité géométrique

Dans tout le problème, soit ε et q deux réels strictements positifs. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que $x_0 > 0$ et pour tout entier naturel n, $0 \leq x_{n+1} - qx_n \leq \varepsilon$.

1) Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = x_{x+1} - qx_n$. Montrons que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $x_n = q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + \ldots + q b_{n-2} + b_{n-1}$.

$$
\begin{aligned}
& q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + \ldots + q b_{n-2} + b_{n-1} \\
&= q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k-1} b_k \\
&= q^n x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k-1} x_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k} x_k \\
&\quad \text{en posant } l = k+1 \\
&= q^n x_0 + \sum_{l=1}^{n} q^{n-l} x_l - \sum_{k=0}^{n-1} q^{n-k} x_k \\
&= q^n x_0 + x_n - q^n x_0 + \underbrace{\sum_{l=1}^{n} q^{n-l} x_l - \sum_{k=1}^{n} q^{n-k} x_k}_{\text{s'annule}} \\
&= x_n
\end{aligned}
$$

Nous avons montré que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$x_n = q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + \ldots + q b_{n-2} + b_{n-1}$$

---

2) On suppose que $0 < q < 1$.

a)