Devoir maison n°10 : Théorème de Beatty et jeu de Wythoff

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Théorème de Beatty

1) **a)** Sans perte de généralité, supposons que $\alpha \leqslant 1$. Alors $\frac{1}{\alpha} \geqslant 1$ et comme $\beta > 0$,

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > 1$$

Ce qui est une contradiction. Donc $\alpha < 1$, et de la même manière $\beta < 1$.

b) Puisque $x, y \notin \mathbb{Z}$, on a :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor < x \text{ et } y - 1 < \lfloor y \rfloor < y$$

En sommant les inégalités, on obtient :

$$x + y - 2 < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor < x + y$$

Soit comme tous les termes sont entiers :

$$x + y - 1 \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant x + y - 1$$

Ce qui donne l'égalité attendue.

---

2) **a)** Comme $\alpha \neq 1$, on peut écrire :

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} - 1 \text{ soit } \beta = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 1}$$

Comme $\alpha \in \mathbb{Q}$ et que $\mathbb{Q}$ est clos sous la somme et l'inversion, on a $\beta \in \mathbb{Q}$.

b) On écrit $\alpha = \frac{a}{b}$ et $\beta = \frac{c}{d}$ pour $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$ac = (bc)\alpha \in M(\alpha) \text{ et } ac = (da)\beta \in M(\beta)$$

Donc $ac \in M(\alpha) \cap M(\beta)$, qui n'est donc pas vide.

De plus, $ac \in \mathbb{N}$. On a donc $ac \in \mathrm{Sp}(\alpha) \cap \mathrm{Sp}(\beta)$. Ces ensembles ne sont donc pas disjoints et ne peuvent former une partition de $\mathbb{N}^*$. On a donc prouvé que si α ou β est rationnel, alors $\mathrm{Sp}(\alpha)$ et $\mathrm{Sp}(\beta)$ ne peuvent former une partition de $\mathbb{N}^*$, i.e la contraposée de l'implication indirecte du théorème de Beatty.

---

3) **a)** On procède par contradiction. Supposons que β soit rationnel. Alors par le même raisonnement qu'au $2)a)$, α est également rationnel, ce qui est une contradiction. Donc β est irrationnel.

b) On raisonne à nouveau par contradiction. Supposons que $M(\alpha) \cap M(\beta) \neq \emptyset$. Il existe alors $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n\alpha = m\beta$. On a alors par hypothèse :

$$\frac{n}{m} = \frac{\alpha}{\beta} = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) - 1 = \alpha - 1$$

Donc $\alpha = 1 + \frac{n}{m}$ est rationnel, ce qui est une contradiction. Donc $M(\alpha)$ et $M(\beta)$ sont disjoints.

On ne peut pas encore en conclure que $\mathrm{Sp}(\alpha)$ et $\mathrm{Sp}(\beta)$ sont disjoints, puisqu'il reste la possibilité d'avoir :

$$n\alpha \neq m\beta \text{ mais } \lfloor n\alpha \rfloor = \lfloor m\beta \rfloor$$

c) Comme α, β sont irrationnels, on a :

$$k < n\alpha, m\beta < k + 1$$

On en déduit :

$$\frac{k}{\alpha} < n < \frac{k}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{k}{\beta} < m < \frac{k}{\beta} + \frac{1}{\beta}$$

En sommant les inégalités, on obtient :

$$k\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) < n + m < (k+1)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \quad \text{soit}$$
$$k < n + m < k + 1$$

On a donc un entier entre deux entiers consécutifs, ce qui est une contradiction. Donc si $\mathrm{Sp}(\alpha)$ et $\mathrm{Sp}(\beta)$ ne sont pas disjoints, alors α est rationnel. On en déduit que comme α est rationnel, alors $\mathrm{Sp}(\alpha) \cap \mathrm{Sp}(\beta) = \emptyset$

d) **i.** Le nombre p d'éléments de $B_N(\alpha)$ est le nombre d'entiers $k \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$1 \leqslant k\alpha < N \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{1}{\alpha} \leqslant k < \frac{N}{\alpha}$$

Comme $\frac{1}{\alpha} < 1$ et que $\frac{N}{\alpha}$ n'est pas entier, ces k sont au nombre de $p = \left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor$.

ii. Par la question précédente, $|B_N(\alpha)| = \left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor$ et $|B_N(\beta)| = \left\lfloor \frac{N}{\beta} \right\rfloor$. D'après la question 3)$b$), $M(\alpha)$ et $M(\beta)$ sont disjoints. Donc $B_N(\alpha)$ et $B_N(\beta)$ également et :

$$|B_N(\alpha) \cup B_N(\beta)| = \left\lfloor \frac{N}{\alpha} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{N}{\beta} \right\rfloor$$

Or par hypothèse sur α et β, $\frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\beta} = N$ est entier. Par la question 1)b), on a alors :

$$|B_N(\alpha) \cup B_N(\beta)| = \frac{N}{\alpha} + \frac{N}{\beta} - 1 = N - 1$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}|(M(\alpha)\cup M(\beta))\cap[1;N[| &= |(M(\alpha)\cap[1;N[)\cup(M(\beta)\cap[1;N[)| \\ &= |B_N(\alpha)\cup B_N(\beta)| \\ &= N-1\end{aligned}$$

iii. Pour tout $N \geqslant 2$, il y a $N-1$ entiers et $N-1$ éléments de $M(\alpha)\cup M(\beta)$ dans l'intervalle $[1;N[$. Comme $\alpha, \beta > 1$, deux éléments de $M(\alpha)$ ou de $M(\beta)$ ne peuvent pas avoir la même partie entière puisqu'ils sont espacés d'au moins α ou β.

De même, un élément de $M(\alpha)$ et un élément de $M(\beta)$ ne peuvent avoir la même partie entière puisque $\mathrm{Sp}(\alpha)$ et $\mathrm{Sp}(\beta)$ sont disjoints d'après la question 3)c).

Ainsi, on en déduit qu'il y a $N-1$ éléments de $\mathrm{Sp}(\alpha)\cup\mathrm{Sp}(\beta)$ dans $[1;N[$. Comme tous ces éléments sont entiers, on en déduit que :

$$(\mathrm{Sp}(\alpha)\cup\mathrm{Sp}(\beta))\cap[1;N[= [\![1;N-1]\!]$$

On en déduit ainsi les égalités d'ensembles suivantes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Sp}(\alpha)\cup\mathrm{Sp}(\beta) &= (\mathrm{Sp}(\alpha)\cup\mathrm{Sp}(\beta))\cap[1;+\infty] \\ &= (\mathrm{Sp}(\alpha)\cup\mathrm{Sp}(\beta))\cap\bigcup_{N=2}^{+\infty}[1;N[\\ &= \bigcup_{N=2}^{+\infty}(\mathrm{Sp}(\alpha)\cup\mathrm{Sp}(\beta))\cap[1;N[\\ &= \bigcup_{N=2}^{+\infty}[\![1;N-1]\!] \\ &= \mathbb{N}^*\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du théorème de Beatty.

Partie B - Jeu de Wythoff

1) a) Si l'état initial est $(3,4)$, alors le premier joueur peut retirer 2 au deux piles pour avoir la configuration $(1,2)$, qui est toujours perdante pour le second joueur. En effet, si ce dernier retire tous les pions d'une pile, alors le premier joueur gagne en terminant la deuxième. Or, le seul moyen pour le deuxième joueur de ne pas terminer une pile est de jouer la configuration $(1,1)$, auquel cas le joueur 1 gagne en retirant 1 à chaque pile.

Donc la position $(2,1)$ est toujours perdante pour le 2e joueur, et la position $(3,4)$ toujours gagnante pour le premier.

b)

---

2) a) Par définition, φ satisfait $\varphi^2 = \varphi + 1$. Ainsi :

$$\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi^2} = \frac{\varphi+1}{\varphi^2} = 1$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$b_n = \lfloor n\varphi^2 \rfloor = \lfloor n\varphi + n \rfloor = \lfloor n\varphi \rfloor + n = a_n + n$$

---

3)