

# Devoir maison n°8 : Chemins sur un quadrillage

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

TE1

## Partie A - Retrouver des formules bien connues

1) Un chemin entre  $O$  et  $M(p, q)$  équivaut à une somme ordonnée de  $p$  vecteurs  $\vec{i}$  et de  $q$  vecteurs  $\vec{j}$ . Une telle somme est composée de  $p + q$  termes, et est déterminée uniquement par la position des  $p$  vecteurs  $\vec{i}$  parmi les  $p + q$  termes, en complétant tous les autres termes par des  $\vec{j}$ . Ainsi, comme l'ordre des  $\vec{i}$  n'importe pas, il y a  $\binom{p+q}{p}$  telles sommes.

On en déduit que le nombre de chemins entre  $O$  et  $M(p, q)$  est de  $\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$  (par symétrie).

2) Un chemin de longueur  $n$  partant d'un point consiste en une somme ordonnée de  $n$  vecteurs parmi  $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ , assimilable à une  $n$ -liste de cet ensemble à deux éléments. On en déduit qu'il y a  $2^n$  chemins de longueur  $n$  partant de tout point (et en particulier de l'origine).

3) a) Par translation de vecteur  $\overrightarrow{PO} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , un chemin joignant  $P(0, 1)$  à  $B_k(n - k, k)$  équivaut à un chemin joignant l'origine et  $B'_k(n - k, k - 1)$ . Ceux ci sont donc au nombre de  $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ .

Similairement, un chemin entre  $Q$  et  $B_k(n - k, k)$  équivaut à un chemin entre l'origine et  $B''_k(n - k - 1, k)$ . Ils sont donc au nombre de  $\binom{n-k-1+k}{k} = \binom{n-1}{k}$ .

b) On double compte les chemins de  $O$  à  $B_k$ . D'une part, ceux-ci sont au nombre de  $\binom{n}{k}$  par le 1). D'autre part, un tel chemin doit passer soit par  $Q(1, 0)$ , soit par  $P(0, 1)$  en fonction du premier vecteur du chemin. Ainsi, un chemin entre  $O$  et  $B_k$  est soit un chemin de  $Q$  à  $B_k$ , soit un chemin de  $P$  à  $B_k$ . On en déduit :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

c) Un chemin de  $O$  à  $B_n(n, n)$  passant par  $B_k(n - k, k)$  équivaut à la donnée de deux chemins, l'un de  $O$  à  $B_k$ , et l'autre de  $B_k$  à  $B_n$ . Ainsi, ces chemins sont au nombre de :

$$\binom{n-k+k}{k} \cdot \binom{n-(n-k)+(n-k)}{n-k} = \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$$

Où l'on a dénombré les chemins de  $B_k$  à  $B_n$  par translation de vecteur  $\overrightarrow{B_kO}$ .

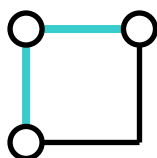


d) On double compte les chemins de  $O$  à  $B_n(n, n)$ . D'une part, ceux-ci sont au nombre de  $\binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$ . D'autre part, chaque tel chemin, après  $n$  étapes, se trouve sur un unique point de la forme  $B_k(n-k, k)$  avec  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , car ceux-ci forment l'ensemble des points atteignables depuis  $O$  par un chemin de longueur  $n$ . Ainsi, par disjonction et le dénombrement de la question précédente, on déduit :

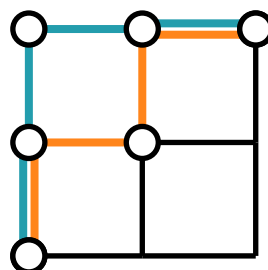
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

## Partie B - Chemins de DYCK et nombres de CATALAN

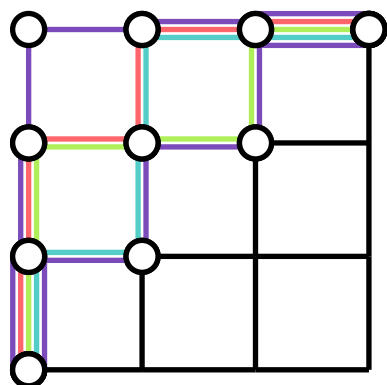
1) a)



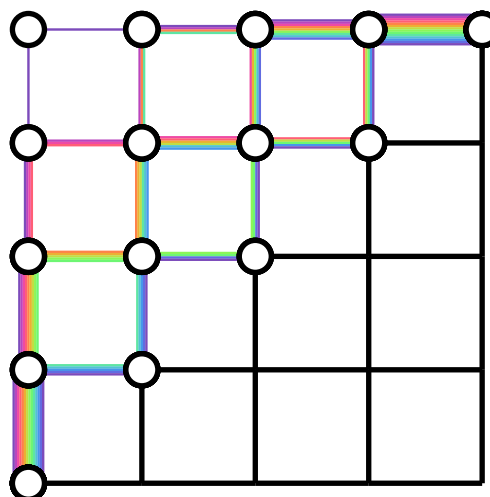
chemins de DYCK de longueur 2



chemins de DYCK de longueur 4



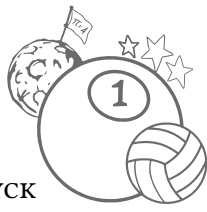
chemins de DYCK de longueur 6



chemins de DYCK de longueur 8

(Chemins de DYCK générés automatiquement). On trouve  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 2$  et  $C_3 = 5$ .

b) Un chemin de DYCK de longueur  $2n$  ne rencontrant la diagonale qu'en  $O$  et  $A_n$  doit forcément passer par  $P(0, 1)$  (monter à la première étape) et  $P'(n-1, n)$  : sinon, le chemin passerait par  $Q(n, n-1)$  qui est en dessous de la diagonale. (voir *Schéma 1* ci-dessous)



De plus, le chemin induit entre  $P$  et  $P'$ , de longueur  $2(n-1)$ , doit forcément être de DYCK relativement à la diagonale entre  $P$  et  $P'$  : sinon, il rencontrerait la diagonale entre  $O$  et  $A_n$ . Ainsi, ces chemins sont au nombre de  $C_{n-1}$ . (voir Schéma 2)

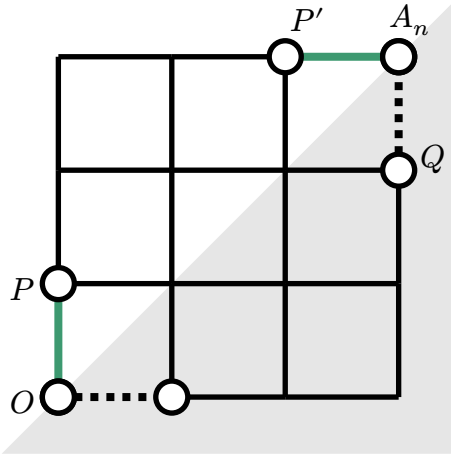


Schéma 1: Premier trait

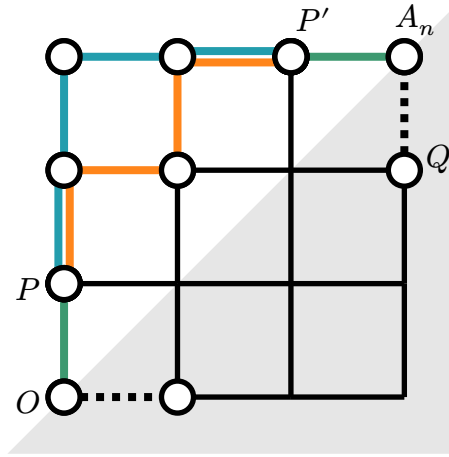


Schéma 2: Chemins de DYCK de  $P$  à  $P'$

c) Soit  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ . Un tel chemin passe forcément par  $M_k(k, k)$ , et est de DYCK jusqu'à avoir atteint  $M_k$ , et strictement au dessus de la diagonale  $\Delta$  (qui est aussi la diagonale entre  $M_k$  et  $M_n$ ) entre  $M_k$  et  $M_n$ , à la manière du b).

Ainsi, la donnée d'un tel chemin équivaut à celle d'un chemin de DYCK entre  $O$  et  $M_k$ , de longueur  $2k$ , au nombre de  $C_k$ , et d'un chemin, comme dans le b), de longueur  $2n-2k = 2(n-k)$ , qui sont donc au nombre de  $C_{n-k-1}$ .

Par le principe du et, ces chemins sont au nombre de  $C_k C_{n-k-1}$ .

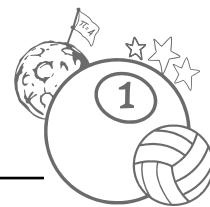
d) On double compte les chemins de DYCK entre  $O$  et  $M_n$ . D'une part, par définition, ceux-ci sont au nombre de  $C_n$ . D'autre part, tout chemin de DYCK atteint la diagonale pour la dernière fois avant son arrivée en un point  $M_k(k, k)$ ,  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ . Pour chaque  $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ , ces chemins sont au nombre de  $C_k C_{n-k-1}$ , et pour  $k = 0$ , les chemins sont ceux de la question b), qui sont au nombre de  $C_{n-1} = C_0 C_{n-0-1}$ , où l'on utilise la convention  $C_0 = 1$ .

Par disjonction, on obtient :

$$C_n = C_0 C_{n-0-1} + \sum_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$$

e) En appliquant la formule précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} C_4 &= C_0 C_3 + C_1 C_2 + C_2 C_1 + C_3 C_0 \\ &= 2(C_0 C_3 + C_1 C_2) \\ &= 2(5 + 2) \\ &= 14 \end{aligned}$$



2)

```
def catalan(n):  
    Ck = [1]  
  
    # Calculs successifs des C_i pour tout 1 <= i <= n  
    # Avec la formule du d)  
    for i in range(1, n + 1):  
        Ci = 0  
        for j in range(i):  
            Ci += Ck[j] * Ck[i - j - 1]  
  
        Ck.append(Ci)  
  
    return Ck[n]
```

3) a) Un chemin entre  $O$  et  $M_n(n, n)$  est soit toujours au dessus de la diagonale, soit franchit la diagonale en un point. Par disjonction, on obtient :

$$C_n + F_n = \binom{2n}{n}$$

b) Supposons que le chemin franchissant  $\mathcal{C}$  prenne la forme :

$$\underbrace{\vec{j} + \dots + \vec{i}}_{(k+1)\vec{i} + k\vec{j} = \overrightarrow{OA(k+1, k)}} + \underbrace{\dots}_{(n-k-1)\vec{i} + (n-k)\vec{j}} = \overrightarrow{OM_n}$$

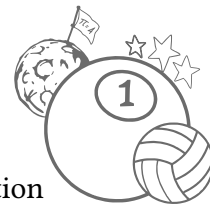
Le chemin  $\mathcal{C}'$  prend alors la forme :

$$(k+1)\vec{i} + k\vec{j} + (n-k-1)\vec{j} + (n-k)\vec{i} = (n+1)\vec{i} + (n-1)\vec{j} \\ = \overrightarrow{OB(n+1, n-1)}$$

c) Tout chemin de  $O$  à  $B(n+1, n-1)$  franchit la diagonale  $\Delta$  au moins une fois, au plus tard en passant de  $P(n-1, n-1)$  à  $Q(n, n-1)$ . Montrons que pour tout  $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ , les chemins de  $O$  à  $M_n$  franchissant pour la première fois en  $A_k(k+1, k)$  sont en même nombre que les chemins de  $O$  à  $B$  passant par  $A_k$ .

La construction précédente entre les chemins franchissants en  $A_k$  et les chemins de  $O$  à  $B$  passant par  $A_k$  est involutive : inverser le sens des pas après le  $2k+1$ -ième pas à deux reprises revient à n'avoir rien fait. Ainsi, cette construction est bijective, et le nombre de chemins franchissant en  $A_k$  est le même que le nombre de chemins de  $O$  à  $B$  passant par  $A_k$ .

Comme tout chemin franchissant doit passer par un unique  $A_k$ , on en déduit que les chemins franchissants sont en même nombre que les chemins de  $O$  à  $B$ .



**d)** Les chemins joignant  $O$  et  $B(n+1, n-1)$  sont au nombre de  $\binom{n+1+n-1}{n+1}$ . Par la question précédente, on déduit que :

$$F_n = \binom{2n}{n+1}$$

D'où  $C_n = \binom{2n}{n} - F_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$

**e)** Par l'expression des coefficients binomiaux :

$$\binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{\frac{n+1}{n}n!n!} = \frac{n}{n+1} \frac{2n!}{n!n!} = \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Ainsi, on obtient :

$$C_n = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$