Mathématiques : Devoir maison n° 5

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Partie A - Méthode de Cardan

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (E_0)$$

1)

$$X = x + \frac{a}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = X - \frac{a}{3}$$

On remplace x dans (E_0).

$$\begin{aligned}
& \left(X - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(X - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X^3 - 3X^2\left(\frac{a}{3}\right) + 3X\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X^2 - 2X\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right) + bX - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X^3 - aX^2 + aX^2 + bX + \frac{a^2}{3}X - 2\left(\frac{a^2}{3}X\right) - \frac{a^3}{3^3} + \frac{a^3}{3^2} - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)X + \frac{2a^3}{3^3} - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X^3 + pX + q = 0 \qquad (E_1)
\end{aligned}$$

avec $p, q \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} p = b - \frac{a^2}{3} \\ q = \frac{2a^3}{3^3} - \frac{ab}{3} + c \end{cases}$

2)

a)

$$X = u + v \quad \text{avec} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

On remplace X dans (E_1).

$$\begin{aligned}
& (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & u^3 + v^3 + v(3uv + p) + u(3uv + p) + q = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0 \qquad (E_2)
\end{aligned}$$

b) On impose $3uv + p = 0$ donc (E_2) devient :

$$u^3 + v^3 + q = 0 \qquad (E_3)$$

c)

$$\begin{aligned}
& 3uv + p = 0 && \text{(relation imposée)} \\
\Leftrightarrow \quad & uv = \frac{-p}{3} \\
\Leftrightarrow \quad & u^3v^3 = \frac{-p^3}{3^3} && \text{(on élève au cube)} \qquad (E_4)
\end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
& & u^3 + v^3 + q = 0 & \qquad \text{d'après } (E_3) \\
\Leftrightarrow & & u^3 + \frac{u^3v^3}{u^3} + q = 0 & \qquad (*) \\
\Leftrightarrow & & u^3 + \frac{-p^3}{3^3u^3} + q = 0 & \qquad \text{d'après } (E_4) \\
\Leftrightarrow & & u^6 - \frac{p^3}{3^3} + qu^3 = 0 & \qquad \text{(on multiplie par } u^3\text{)}
\end{aligned}
$$

Avec $U = u^3$ on a :

$$U^2 + qU - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \qquad (E_5)$$

qui est une équation du second degré, u^3 est donc solution d'une équation du second degré.

À l'étape $(*)$ nous aurions pu multiplier et diviser par v^3 sur u^3, nous aurions alors obtenu une équation similaire à (E_5) mais avec v à la place de u.

u^3 et v^3 sont donc racines d'un polynôme du second degré.

Partie B - Exemples

1)

Nous avons $x^3 + 6x + 2 = 0$. Remarquons qu'il n'y a pas de terme x^2, et posons donc $x = u + v$, avec $u, v \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$x^3 + px + q = 0, \text{ avec } p = 6, q = 2$$

Ainsi, en posant $3uv + 6 = 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
& uv = -\frac{p}{3} = -2 \\
\Longleftrightarrow\ & u^3v^3 = -\frac{p^3}{3^3} = -8u^3 + v^3 = -q = -2
\end{aligned}
$$

D'où, en posant $U = u^3$, on obtient le trinôme du second degré suivant :

$$
\begin{aligned}
U^2 + qU - \left(\frac{p^3}{3^3}\right) = 0 \\
\text{et } \Delta = \sqrt{6^2}
\end{aligned}
$$

D'où $U = -4$ ou $U = 2$, donc $u = \sqrt[3]{-4}$ ou $u = \sqrt[3]{2}$.

On obtient finalement une unique valeur de x : $x = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$.

L'équation $x^3 + 6x + 2 = 0$ n'a donc qu'une seule solution réelle.

2)

$$
\begin{aligned}
& 2x^3 + 5x^2 - 24x - 63 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 12x - \frac{63}{2} = 0
\end{aligned}
$$

Posons $X = x + \frac{5}{6} \iff x = X - \frac{5}{6}$.

On obtient :

$$X^3 - \frac{169}{12}X - \frac{4394}{216} = 0$$

Posons ensuite $X = u + v$, avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $3uv - \frac{169}{12} = 0$. On obtient :

$$\begin{cases} uv = \frac{169}{36} \\ u^3 + v^3 = \frac{4394}{216} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} u^3v^3 = (\frac{169}{36})^3 \\ u^3 + v^3 = \frac{4394}{216} \end{cases}$$

D'où, avec $U = u^3$, on a :

$$\begin{aligned} U^2 - \frac{4394}{216}U + \left(\frac{169}{36}\right)^3 &= 0 \\ \Delta = 0 \text{ donc } U = \frac{4394}{216} \times \frac{1}{2} &= \frac{2197}{216} \\ \text{d'où } u^3 = v^3 &= \frac{2197}{216} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } X &= u + v \\ &= 2\sqrt[3]{\frac{2197}{216}} \\ &= \frac{13}{3} \\ \text{d'où } x_1 &= \frac{13}{3} - \frac{5}{6} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Nous obtenons une première solution. On peut ainsi factoriser le polynôme par $(x - \frac{7}{2})$. Ainsi :

$$\begin{aligned} (E') &\iff \left(x - \frac{7}{2}\right)(2x^2 + 12x + 18) = 0 \\ &\iff 2\left(x - \frac{7}{2}\right)(x+3)^2 = 0 \\ &\iff x - \frac{7}{2} = 0 \text{ ou } (x+3)^2 = 0 \\ &\iff x = \frac{7}{2} \text{ ou } x = -3 \end{aligned}$$

Les solutions de (E') sont donc bien au nombre de deux.

$$S = \left\{-3; \frac{7}{2}\right\}$$

3)

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

a) Une solution évidente est 1 :

$$1^3 + 3 \times 1 - 4 = 0$$

b) Nous n'avons pas de terme en x^2, donc posons directement $x = u + v$, avec $u, v \in \mathbb{R}$. On obtient :

$$x^3 + px + q = 0 \text{ avec } p = 3, q = -4$$

En posant $3uv + 3 = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} uv = -\frac{p}{3} &\iff u^3v^3 = -1 \\ &\text{et } u^3 + v^3 = -q = 4 \end{aligned}$$

D'où avec $U = u^3$, on obtient :

$$U^2 - 4U - 1 = 0$$

On trouve ainsi $U = 2 - \sqrt{5}$ ou $U = 2 + \sqrt{5}$ Or $u^3 + v^3 = -q$, d'où $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$.

On trouve finalement $x = 1$ comme unique solution.

Partie C - Formules

1)

Notons P le polynôme de l'équation (E_1). On sait qu'il existe une racine $X_0 \in \mathbb{R}$ de P si et seulement si il existe u, v tels que u^3, v^3 sont les racines du polynôme $D(x) = x^2 + qx - \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Ce polynôme a pour discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3 \\ &= \frac{27q^2 + 4p^3}{27} \end{aligned}$$

Ainsi, si $\Delta > 0$, le polynôme a deux racines distinctes $U, V = \frac{-q}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, qui donnent le choix unique de :

$$u, v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$$

Et enfin le choix unique de :

$$X_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}}$$

Qui est donc la seule racine réelle de P.[1]

2)

Si $\Delta = 0$, D a une racine double $U = -\frac{q}{2}$. On doit donc poser $u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$. Donc $X_1 = 2u$ est une racine de (E_1).

En faisant la division euclidienne de P par $x - X_1$, on trouve $P(x) = (x - X_1)Q(x)$ avec un deuxième facteur quadratique $Q(x) = x^2 + X_1 x + (X_1^2 + p)$ dont le discriminant Δ' est :

$$\Delta' = -3X_0^2 - 4p$$

1. Nous avons conscience que cet argument n'est pas très rigoureux, mais la méthode de l'exercice suivant n'a pas porté ses fruits sur celui-ci pour prouver l'unicité de X_1...

On trouve enfin que :

$$\begin{aligned}
\Delta' = 0 &\iff -12u^2 = 4p \\
&\iff -u^2 = \frac{p}{3} \\
&\iff -(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}})^2 = \frac{p}{3} \\
&\iff -\frac{q^2}{4} = (\frac{p}{3})^3 \\
&\iff \Delta = 0
\end{aligned}$$

Comme $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$ et Q a une racine double $X_2 = -\frac{X_1}{2}$. Ainsi, si $\Delta = 0$, les seules racines de P sont :

$$X_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \qquad X_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$