Devoir maison n°3 :
Théorème de la corde universelle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Exemples.

Dans les parties A et B, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1) Soient $f : x \mapsto 1 - |2x - 1|$ définie sur $[0, 1]$, et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

On a $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = 1 - \left|2x + \frac{2}{n} - 1\right|$.

De plus, $n \geqslant 2 \Longrightarrow 1 \geqslant \frac{2}{n} \Longrightarrow \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{n} \Longrightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geqslant 0$.

x	$\frac{0}{2}$		$\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$		$\frac{1}{2}$		1
$\lvert 2x - 1\rvert$		$-2x + 1$		$-2x + 1$	0	$2x - 1$	
$f(x)$		$2x$		$2x$		$-2x + 2$	
$\left\lvert 2x - 1 + \frac{2}{n}\right\rvert$		$-2x + 1 - \frac{2}{n}$	0	$2x - 1 + \frac{2}{n}$		$2x - 1 + \frac{2}{n}$	
$f\left(x + \frac{1}{n}\right)$		$2x + \frac{2}{n}$		$-2x + 2 - \frac{2}{n}$		$-2x + 2 - \frac{2}{n}$	
$f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$		$-\frac{2}{n}$		$4x - 2 + \frac{2}{n}$		$\frac{2}{n}$	

L'équation $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ équivaut à $f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) = 0$ qui n'a pas de solutions sur $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, 1\right]$ d'après les tableau d'expressions.

Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) = 0 &\Longleftrightarrow 4x - 2 + \frac{2}{n} = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Et :

$$n \geqslant 2 \Longrightarrow n > 0 \Longrightarrow \begin{cases} 2n > n \\ \frac{1}{2n} > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{2n} < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Notre solution est donc acceptable.

$$S = \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right\}.$$

2) Soit $f : x \mapsto 16x^2(1-x)^2$ définie sur $[0,1]$. Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$,

$$f\left(x+\frac{1}{n}\right) = f(x)$$
$$\iff f\left(x+\frac{1}{n}\right) - f(x) = 0$$
$$\iff 16\left(x+\frac{1}{n}\right)^2\left(1-x-\frac{1}{n}\right)^2 - 16x^2(1-x)^2 = 0$$
$$\iff \left(\left(x+\frac{1}{n}\right)\left(1-x-\frac{1}{n}\right)\right)^2 - (x(1-x))^2 = 0$$
$$\iff \left(x - x^2 - \frac{x}{n} + \frac{1}{n} - \frac{x}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^2 - \left(x-x^2\right)^2 = 0$$
$$\iff \left(-x^2 + \left(1-\frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2}\right)^2 - \left(x-x^2\right)^2 = 0$$
$$\iff \left(-x^2 + \left(1-\frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2} + x - x^2\right)\left(-x^2 + \left(1-\frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2} - x + x^2\right) = 0$$
$$\iff \left(-2x^2 + \left(2-\frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(-\frac{2}{n}x + \frac{n-1}{n^2}\right) = 0$$
$$\iff -2x^2 + \left(2-\frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2} = 0 \lor -\frac{2}{n}x + \frac{n-1}{n^2} = 0$$
$$\iff -2x^2 + \frac{2n-2}{n}x + \frac{n-1}{n^2} = 0 \lor x = \frac{n-1}{2n}$$

Et :

$$0 \leqslant \frac{n-1}{2n} \leqslant 1 - \frac{1}{n} \iff \begin{cases} 0 \leqslant n-1 \\ n-1 \leqslant 2n-2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1 \leqslant n \\ 0 \leqslant n-1 \end{cases}$$
$$\iff n \geqslant 1$$

Vrai car $n \geqslant 2$, donc par équivalence, $\frac{n-1}{2n} \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$.

Cette solution est donc acceptable, et ainsi l'équation $f\left(x+\frac{1}{n}\right) = f(x)$ admet au moins cette solution sur $\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$.

---

3) Soit $f : x \mapsto x(e - e^x)$ définie et dérivable 2 fois sur $[0,1]$.

a)

$$\forall x \in [0,1], f'(x) = e - e^x + x(-e^x) = e - e^x - xe^x$$
$$f''(x) = -e^x - e^x - xe^x = -e^x(2+x)$$

Or d'une part, $e^x > 0$, et d'autre part, $x \geqslant 0$ donc $x+2 > 0$. Ainsi $f''(x) < 0$ pour tout $x \in [0,1]$, et f' est donc strictement décroissante sur ce même intervalle.

$f'(0) = e - 1 > 0$ et $f'(1) = e - e - e = -e < 0$ donc d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in [0, 1]$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

x	0		α		1
$f''(x)$			$-$		
f'	$e-1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-e$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

b) On recherche les solutions de l'équation $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$ pour tout $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

On pose

$$\begin{aligned} g(x) &= f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \\ &= \frac{1}{n}\left(e - e^{x+\frac{1}{n}}\right) + x\left(e - e^{x+\frac{1}{n}}\right) - x(e - e^x) \\ &= \frac{1}{n}\left(e - e^{x+\frac{1}{n}}\right) + x\left(e^x - e^{x+\frac{1}{n}}\right) \end{aligned}$$

Déterminons le signe de g en 0 et $1 - \frac{1}{n}$.

- $g(0) = \frac{1}{n}\left(e - e^{\frac{1}{n}}\right)$

Or $2 \leqslant n \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{n} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} \leqslant -e^{\frac{1}{n}}$ par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$. Donc

$$0 < e - e^{\frac{1}{2}} \leqslant e - e^{\frac{1}{n}}$$

et comme $\frac{1}{n} > 0$, on a $g(0) > 0$.

- $g\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(e - e^{1-\frac{1}{n}}\right)$

Or d'une part $2 \leqslant n \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{n} \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

De plus, $0 < \frac{1}{n} \Leftrightarrow 1 > 1 - \frac{1}{n} \Leftrightarrow -e < -e^{1-\frac{1}{n}} \Leftrightarrow 0 < e - e^{1-\frac{1}{n}}$ par stricte croissance de l'exponentielle sur $\mathbb{R}$.

On a donc $g\left(1 - \frac{1}{n}\right) < 0$.

Comme g est continue par opérations et compositions de fonctions continues, d'après le théorème des valeures intermédaires, il existe $c \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $g(c) = 0$ ie il existe au moins une solution à l'équation $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x)$ dans $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

Partie B - Généralisation.

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Pour tout $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, on pose $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

1) La fonction continue $x \mapsto x + \frac{1}{n}$ a son ensemble image inclus dans $[0, 1]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Or f est continue sur $[0, 1]$ donc g est continue sur $[0, 1]$ par opérations et composition de fonctions continues sur $[0, 1]$.

---

2)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \\ &= f(0) - f(1) \quad \text{par télescopage} \\ &= 0 \text{ car } f(0) = f(1) \end{aligned}$$

---

3) On recherche s'il existe $\alpha \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = 0$,
- soit $g\left(\frac{k}{n}\right)$ est égal à 0 pour tous $k \in [0, n-1]$ et l'on peut prendre n'importe quel k pour avoir $\alpha = \frac{k}{n}$ puisque $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc $\frac{k}{n} \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.
- soit il existe k' tel que $g\left(\frac{k'}{n}\right) \neq 0$. Dans ce cas puisque la somme vaut 0, il existe nécessairement au moins un k'' tel que $g\left(\frac{k''}{n}\right)$ soit de signe opposé à $g\left(\frac{k'}{n}\right)$. Comme g est continue sur $[0, 1]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires[1] $\alpha \in \left[\frac{k'}{n} \leftrightarrow \frac{k''}{n}\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $\left[\frac{k'}{n} \leftrightarrow \frac{k''}{n}\right] \subseteq \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, on a bien $\alpha \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

[1]Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $[a \leftrightarrow b] = \begin{cases} [a,b] \text{ si } a \leqslant b \\ [b,a] \text{ si } b < a \end{cases}$

Partie C - Généraliser encore ?

Soit $T \in]0,1[$ tel que $\frac{1}{T} \notin \mathbb{Z}$, et f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. On considére $f : x \mapsto \sin^2(\frac{\pi x}{T}) - x\sin^2(\frac{\pi}{T})$ d'inconnue $x \in [0, 1-T]$.

1) Comme la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ et que $T \neq 0$, f est continue sur $[0,1]$ par opérations et composition de fonctions continues.

$$f(0) = \sin^2(0) - 0 = 0$$
$$f(1) = \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0$$

Donc on a bien $f(0) = f(1)$.

---

2)

$$\begin{aligned} f(x) - f(x+T) &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right)\underline{-x\sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} - \sin^2\left(\frac{\pi(x+T)}{T}\right) + (\underline{x} + T)\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{T} + \pi\right) + T\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \left(\sin\left(\frac{\pi x}{T}\right)\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \cos\left(\frac{\pi x}{T}\right)\underbrace{\sin(\pi)}_{=0}\right)^2 + T\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\ &= T\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \end{aligned}$$

Or $T \neq 0$ et comme $\sin^2(\frac{\pi}{T}) = 0 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{T}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{T} = 0$ ou $\frac{\pi}{T} = \pi$ et $T \neq 1$, on a que pour tout x dans $[0, 1-T]$, $f(x) - f(x+T) > 0$

---

3) On a que $f(x) - f(x+T) > 0$ ie $f(x) > f(x+T)$ donc $f(x) \neq f(x+T)$ pour tout x dans $[0, 1-T]$.

$f(x+T) = f(x)$ est impossible pour tout x dans $[0, 1-T]$.