Mathématiques : Devoir maison n° 4

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Partie A - Définitions

1)

$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est injective sur $\mathcal{E}$ si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathcal{E}, f(x) = f(y) \implies x = y$$

On en conclut que f n'est pas injective si et seulement si :

$$\exists x, y \in \mathcal{E}, x \neq y \wedge f(x) = f(y)$$

2)

$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est surjective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\forall y \in \mathcal{F}, \exists x \in \mathcal{E}, y = f(x)$$

On en déduit que f n'est pas surjective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\exists y \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathcal{E}, y \neq f(x)$$

3)

$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\forall y \in \mathcal{F}, \exists! x \in \mathcal{E}, y = f(x)$$

On en déduit que f n'est pas bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\exists y \in \mathcal{F}, \Big(\forall x \in \mathcal{E}, y \neq f(x)\Big) \vee \Big(\exists a, b \in \mathcal{E}, a \neq b \wedge f(a) = f(b)\Big)$$