

Devoir maison n°13 : Ln, IAF et suites

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

Problème 1 - Fonction logarithme népérien

1)

2)

3)

4)

5) a)

b)

c)

Problème 2 - Inégalité des accroissements finis et suites

Partie A

1) Supposons être dans les conditions de l'énoncé. Posons :

$$g(x) = f(x) - f(a) - M(x - a)$$

$$h(x) = f(x) - f(a) - m(x - a)$$

Alors, d'une part, $g(a) = h(a) = 0$. De plus, ces deux fonctions sont dérivables sur $]a; b[$ par sommes de fonctions dérivables et pour tout $x \in]a; b[$:

$$g'(x) = f'(x) - M \leq 0 \text{ par hypothèse}$$

Ainsi que :

$$h'(x) = f'(x) - m \geq 0 \text{ par hypothèse}$$

Donc g est décroissante sur $]a; b[$. Comme elle est continue sur $[a; b]$, on peut conclure que, comme $b \geq a$, $g(b) \leq g(a) = 0$, d'où :

$$f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Similairement, h est croissante sur $]a; b[$ et $h(b) \geq h(a) = 0$, d'où :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a)$$



Ce qu'il fallait démontrer.

Partie B

On définit sur \mathbb{R}_* :

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{5}{x} \right)$$

1) φ est impaire : soit $x \in \mathbb{R}_*$. Alors $-x \in \mathbb{R}_*$ et :

$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= \frac{1}{2} \left(-x - \frac{5}{x} \right) = -\frac{1}{2} \left(x + \frac{5}{x} \right) \\ &= -\varphi(x) \end{aligned}$$

2)

• Quand $x \rightarrow +\infty : \frac{5}{x} \rightarrow 0$ et par somme :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

• Quand $x \rightarrow -\infty : \frac{5}{x} \rightarrow 0$ et par somme :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$$

• Quand $x \rightarrow 0^- : \frac{5}{x} \rightarrow -\infty$ et par somme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \varphi(x) = -\infty$$

• Quand $x \rightarrow 0^+ : \frac{5}{x} \rightarrow +\infty$ et par somme :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$$

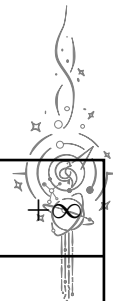
3) φ est dérivable sur son intervalle de définition comme somme de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R}_* . Sa dérivée est pour tout $x \in \mathbb{R}_*$:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2} - \frac{5}{2x^2}$$

Ainsi, $\varphi'(x) \leq 0$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \frac{5}{2x^2} \\ \Leftrightarrow x^2 &\leq 5 \\ \Leftrightarrow x &\in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \cap \mathbb{R}_* \end{aligned}$$

On a donc le tableau de variations suivant :



x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	0	$\sqrt{5}$	$+\infty$
Signe de $\varphi'(x)$	+		-	-	+
Variations de φ	$-\infty \nearrow -\sqrt{5} \searrow -\infty$		$+\infty \searrow \sqrt{5} \nearrow +\infty$		

4) TODO: Thomas ? dis moi si tu ne veux pas le faire :3

5) Soit $x \in \mathbb{R}_*$:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) - x &= \frac{x}{2} + \frac{5}{2}x - x \\
 &= -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}x \\
 &= \frac{5 - x^2}{2x}
 \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

6) Soit $x \in \left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$. Alors $x \geq \sqrt{5}$, et par le 3), $\varphi'(x) \geq 0$. De plus :

$$\begin{aligned}
 \varphi'(x) &\leq \frac{1}{10} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{10} &\leq \frac{5}{2x^2} \\
 \Leftrightarrow \frac{4}{5} &\leq \frac{5}{x^2} \\
 \Leftrightarrow x^2 &\leq \frac{25}{4} \\
 \Leftrightarrow x &\leq \frac{5}{2} \text{ car } x \geq \sqrt{5} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Donc $0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{1}{10}$ sur $\left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$.

Partie C

1) Par le tableau de variations, φ est croissante sur $\left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$. Ainsi, si pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$, u_{n+1} est bien défini et :



$$\sqrt{5} \leq u_{n+1} = \varphi(u_n) \leq \varphi\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{9}{4} \leq \frac{5}{2}$$

Comme $u_0 \in \left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$, par récurrence, la suite (u_n) est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{5} \leq u_n \leq \frac{5}{2}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \varphi(u_n) - u_n \\ &= \frac{5 - u_n^2}{2u_n} \text{ par le B)5)} \\ &\leq 0 \text{ car } u_n \geq \sqrt{5} \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} \leq u_n$ est la suite (u_n) est décroissante.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait par le B)6) que pour tout $x \in \left[\sqrt{5}; \frac{5}{2}\right]$, $0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{1}{10}$. φ est dérivable, en particulier continue, sur cet intervalle, et on peut donc appliquer l'IAF avec u_n et $\sqrt{5}$ qui sont dans le bon intervalle, donnant :

$$\begin{aligned} 0(u_n - \sqrt{5}) &\leq \varphi(u_n) - \varphi(\sqrt{5}) \leq \frac{1}{10}(u_n - \sqrt{5}) \\ \Leftrightarrow 0 &\leq u_{n+1} - \sqrt{5} \leq \frac{1}{10}(u_n - \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

b) On procède par récurrence.

Initialisation : $0 \leq u_0 - \sqrt{5}$ car $\frac{5}{2} \geq \sqrt{5}$, et $u_0 - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2}$ car $\sqrt{5} \geq 2$.

Hérédité : Supposons pour $n \in \mathbb{N}$ que $0 \leq u_n - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$. Alors $u_{n+1} - \sqrt{5} \geq 0$ par le 1), et le 3)a) donne :

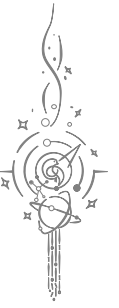
$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{5} &\leq \frac{1}{10}(u_n - \sqrt{5}) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n - \sqrt{5} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

4) La suite (u_n) est bornée en bas par $\sqrt{5}$ (1) et décroissante (2). Elle est donc convergente. Notons $l = \lim u_n$: on a donc $l \geq \sqrt{5}$. Par passage à la limite du membre droit du 3)b), $l - \sqrt{5} \leq 0$. Donc $l = \sqrt{5}$: la suite (u_n) tend vers $\sqrt{5}$.

(On aurait pu procéder uniquement avec le 3)b) par gendarmes.)



5) On voit par l'inégalité du 3)b) que $u_6 - \sqrt{5} \leq 10^{-6}$. Ainsi, $k \leq 6$. Le code python (non optimisé) suivant calcule la valeur de k :

```
from math import sqrt
def u(n):
    if n == 0:
        return 5/2
    else:
        return ( u(n-1) + 5/(u(n-1)) )/2

k = 0
while u(k) - sqrt(5) > 10**(-6):
    k += 1

print(k)
```

Trouvant $k = 3$. L'absence d'erreur de précision sur les flottant, trop récurrentes, a été vérifiée a posteriori sur calculatrice.