Mathématiques : Devoir maison n° 4

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Partie A - Définitions

1)

$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est injective sur $\mathcal{E}$ si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathcal{E}, f(x) = f(y) \implies x = y$$

On en conclut que f n'est pas injective si et seulement si :

$$\exists x, y \in \mathcal{E}, x \neq y \land f(x) = f(y)$$

2)

$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est surjective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\forall y \in \mathcal{F}, \exists x \in \mathcal{E}, y = f(x)$$

On en déduit que f n'est pas surjective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\exists y \in \mathcal{F}, \forall x \in \mathcal{E}, y \neq f(x)$$

3)

$f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\forall y \in \mathcal{F}, \exists! x \in \mathcal{E}, y = f(x)$$

On en déduit que f n'est pas bijective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ si et seulement si :

$$\exists y \in \mathcal{F}, \Big(\forall x \in \mathcal{E}, y \neq f(x)\Big) \lor \Big(\exists a, b \in \mathcal{E}, a \neq b \land f(a) = f(b)\Big)$$

Partie B - Exemples

4)

5)

6)

a) Prouvons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(p, q) = n$.

Si $n = 2^p(2q + 1)$, c'est que $\frac{n}{2^p}$ est un entier impair et donc que 2^p est la plus grande puissance de 2 qui divise n. Par le théorème fondamental de l'arithmétique, ce choix existe, et est unique ($p = v_2(n)$). Le choix de q est maintenant forcé par celui de p en prenant l'unique $q \in \mathbb{N}$ tel que $2q+1 = \frac{n}{2^p}$; celui-ci existe, car $\frac{n}{2^p}$ est impair.

b) Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique antécédant de n par f. Donc f est bijective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$.

c) Posons $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ telle que $g(p,q) = f(p,q) - 1$. g est injective comme composition de fonctions injectives (voir partie C, question a)), et surjective. En effet, si $n \in \mathbb{N}$, alors $n+1 \in \mathbb{N}^*$ a un antécédant par f, et n a un antécédant par g.

Donc g est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

d) i) <u>h est injective :</u> Soient $(a,b,c),(x,y,z) \in \mathbb{N}^3$ deux triplets d'entiers. Si $h(a,b,c) = h(x,y,z)$, par injectivité de g, $g(a,b) = g(x,y)$ et $c = z$. Encore par injectivité de g, on trouve que $(a,b,c) = (x,y,z)$. Donc h est injective.

<u>h est surjective :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors n a un antécédant (m,c) par g par surjectivité de g. Encore par surjectivité de g, m a un antédédant (a,b) par g. On a donc trouvé des entiers a,b,c tels que $g(g(a,b),c) = n$. Donc n a un antécédant par h ($(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$), et h est surjective.

Donc h est une bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$.

ii) L'antécédant de 2023 par g est $(3,126)$. L'antécédant de 2023 par h est donc $(2,0,126)$.

e) On prouve le résultat généralisé suivant :

Théorème. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une bijection $\varphi_n : \mathbb{N}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ ($\mathbb{N}^n \cong \mathbb{N}$).

Démonstration. La preuve est par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $P(n)$ s'il existe une telle bijection φ_n.

<u>Initialisation :</u> Si $n = 1$, $\varphi_1 = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Donc $P(1)$.

<u>Hérédité :</u> Supposons qu'il existe une bijection $\varphi_n : \mathbb{N}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$$\varphi_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) = g\left(\varphi_n(a_1, \dots, a_n), a_{n+1}\right)$$

Prouvons que φ_{n+1} est bijective.

Injectivité : Soient $(a_1, \dots, a_{n+1}), (b_1, \dots, b_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$. Si $\varphi_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) = \varphi_{n+1}(b_1, \dots, b_{n+1})$, par injectivité de g, puis de φ_n, $(a_1, \dots, a_{n+1}) = (b_1, \dots, b_{n+1})$. Donc φ_{n+1} est injective.

Surjectivité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors n a un antécédant (m, a_{n+1}) par g. De même, $m \in \mathbb{N}$ et m a un antécédant $(a_1, \dots, a_n)$ par φ_n, car celle-ci est surjective dans $\mathbb{N}$. Donc n a pour antécédant $(a_1, \dots, a_{n+1})$ par φ_{n+1}. Donc φ_{n+1} est surjective dans $\mathbb{N}$.

Donc $P(n+1)$. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

En particulier, on obtient que $\varphi : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$ définie par $\varphi(a_1,a_2,a_3,a_4) = g(h(a_1,a_2,a_3),a_4)$ est une bijection.

7)

On procède par analyse-synthèse. <u>Analyse :</u> Soit f une fonction qui satisait l'énoncé. Prouvons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f(n) = n$.

Initialisation : $f(0) \leq 0$, et $f(0) \geq 0$ car $f(0) \in \mathbb{N}$. Donc $f(0) = 0$.

Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(k) = k$ pour tout $k \leq n$. Alors $f(n+1) > n$: en effet, si $f(n+1) \leq n$, alors $f(n+1) = f(k)$ pour $k = f(n+1) \leq n$, ce qui contredit l'injectivité de f.

Donc $f(n+1) \geq n+1$ et $f(n+1) \leq n+1$. Donc $f(n+1) = n+1$.

Par le principe de récurrence, $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Synthèse : La fonction $f : n \mapsto n$ satisfait bien l'énoncé car elle est injective et $f(n) = n \leq n$. La fonction $f : n \mapsto n$ est donc la seule solution injective de cet énoncé.