Devoir maison n°1 : Fonctions contractantes, dilatantes et points fixes

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Problème 1 -

Partie A - Fonctions contractantes et rétrécissantes.

1) Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$, et f une fonction k-lipschitzienne définie sur I. Montrons que cette fonction est continue.

Soit y dans I. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$. Supposons $|x-y| < \alpha$, on obtient :

$$|x-y| < \frac{\varepsilon}{k} \iff k|x-y| < \varepsilon$$

Comme f est lipschitzienne, $|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y| < \varepsilon$ donc $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$.

Nous avons prouvé que quelque soit le point y que l'on choisit dans le domaine de définition de f, $|x-y| < \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$ ie toute fonction lipschitzienne est continue.

---

2) Soit f une fonction contractante définie sur I, et $x, y \in I$. Il existe donc $k \in]0,1[$ tel que $|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y| \quad (*)$.

Or,

$$\begin{aligned} k < 1 &\Longrightarrow k|x-y| < |x-y| \\ &\Longrightarrow |f(x)-f(y)| < |x-y| \text{ d'après } (*) \end{aligned}$$

f est donc rétrécissante.

De plus,

$$|f(x)-f(y)| < |x-y| \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant 1 \times |x-y|$$

f est donc 1-lipschitzienne.

---

3) Soient $a \in \mathbb{R}$, $I = [a, +\infty[$, et $f : x \longmapsto x + \frac{1}{x-a+1}$ pour tous $x \in I$.

a) f est dérivable sur I. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-a+1)^2}$. Or,

$$\begin{aligned} x \in I &\Longrightarrow x \geqslant a \\ &\Longrightarrow x - a \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow x - a + 1 \geqslant 1 \\ &\Longrightarrow (x-a+1)^2 \geqslant 1 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{(x-a+1)^2} \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow 0 \leqslant f'(x). \end{aligned}$$

La dérivée de f est positive pour tout $x \in I$, donc f est bien croissante sur I.

Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned} x \in I &\Longrightarrow x \geqslant a \\ &\Longrightarrow x - a \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow x - a + 1 > 0 \\ &\Longrightarrow \frac{1}{x-a+1} > 0. \end{aligned}$$

$x \geqslant a$, donc par somme d'inégalités, $x + \frac{1}{x-a+1} \geqslant a$ i.e. $f(x) \in I$.

b)

Partie B - Fonctions rétrécissantes et point fixe.

Partie C - Fonctions dilatantes.

On fixe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dilatante.

1) a) La fonction $g : x \mapsto x + e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues. De plus, si $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| = |(x-y) + (e^x - e^y)| &\overset{\text{Triangulaire}}{\geqslant} |x-y| + |e^x - e^y| \\ &\geqslant |x-y| \end{aligned}$$

Donc g est bien dilatante.

b) La fonction g_λ est continue sur $]-\infty;\lambda[$ et sur $]\lambda;+\infty[$ car ses restrictions à ces intervalles sont continues. Montrons que g_λ est continue en λ. D'une part,

$$\lim_{x \to \lambda^-} g(x) = \lim_{x \to \lambda^-} -x = -\lambda$$

et d'autre part,

$$\lim_{x \to \lambda^+} g(x) = \lim_{x \to \lambda^+} \lambda - 2x = \lambda - 2\lambda = -\lambda$$

Comme les limites de g (qui existent par continuité avant et après λ) en λ coïncident avec $g(\lambda) = -\lambda$, on en déduit que g est continue en λ et donc sur tout $\mathbb{R}$. Montrons maintenant que g est dilatante. On distingue trois cas :

- $x, y < \lambda : |g(x) - g(y)| = |y - x| = |x - y| \geqslant |x - y|$
- $x, y \geqslant \lambda : |g(x) - g(y)| = |2y - 2x| = 2|x - y| \geqslant |x - y|$
- $x < \lambda$ et $y \geqslant \lambda : |g(x) - g(y)| = |2y - \lambda - x| = |(y - \lambda) + (y - x)| \overset{\text{Triangulaire}}{\geqslant} |x - y|$

Ce qui montre que g est bien dilatante.

---

2) **a)** Soit $\lambda \in \left]f(a_1); f(a_2)\right[\cap \left]f(a_3); f(a_2)\right[$. Cette intersection n'est pas vide, car elle contient au moins $\left]\max(f(a_1), f(a_3)); f(a_2)\right[$. Alors en posant $g : x \mapsto f(x) - \lambda$, qui est continue par somme, comme $g(a_1), g(a_3) < 0$ et $g(a_2) > 0$, on obtient en appliquant TVI un $b \in \left]a_1; a_2\right[$ et un $c \in \left]a_2; a_3\right[$ tels que $g(b) = g(c) = 0$, c'est à dire $f(b) = f(c) = \lambda$.

b) Comme f est dilatante,

$$|f(b) - f(c)| = 0 \geqslant |b - c| \geqslant 0$$

On en déduit que $|b - c| = 0$, donc $b = c$. Donc f dilatante implique f injective.

c) Supposons que f ne soit pas strictement monotone, i.e f n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. Comme f n'est pas strictement décroissante, il existe $a_1 < a_2$ tels que $f(a_1) \leqslant f(a_2)$; a fortiori, comme f est injective, $f(a_1) < f(a_2)$.

TODO : l'argument est long