Devoir maison n°6 : Localisation de racines

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Problème 1 -

Considérons, pour tout entier $n \geqslant 2$, l'équation (E_n) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^n + z + 1 = 0$$

1) Cas $n = 2$.

On considère l'équation (E_2) à résoudre dans $\mathbb{C}$

$$z^2 + z + 1 = 0,$$

Puisqu'il s'agit d'une équation quadratique, calculons le discriminant : $\Delta = 1 - 4 = -3$

Les solutions sont donc

$$z = -\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ ou } z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

Et le module de chacune de ces racines est

$$|z| = \frac{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

ce qui est inférieur à 2.

---

2) Cas $n = 3$

a) Soit $f : t \longmapsto t^3 + t + 1$, définie sur $\mathbb{R}$.

Remarquons d'abord que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque c'est une fonction polynomiale.

De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$$

ce qui montre que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, comme $f(-1) = -1 < 0$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8} > 0$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires garantit que f admet une unique racine $r \in]-1, -\frac{1}{2}[$. Celle-ci constitue donc la seule solution réelle de (E_3).

b) Notons z_1 et z_2 les deux autres solutionss complexes de (E_3).

Puisque r est une racine de (E_3), le polynôme $P(z) = z^3 + z + 1$ se factorise sous la forme

$$P(z) = (z - r)(z^2 + az + b) \text{ avec } a, b \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, en développant cette expression, on obtient :

$$P(z) = z^3 + (a - r)z^2 + (b - ar)z - br$$

Par identification polynomiale, on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} a - r = 0 \\ b - ar = 1 \\ -br = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = r \\ b = r^2 + 1 \\ \underbrace{r^3 + r + 1 = 0}_{(E_3)} \end{cases}$$

Par conséquent, les racines z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation quadratique

$$z^2 + rz + (r^2 + 1) = 0.$$

Enfin, par les propriétés des racines d'un polynôme du second degré, on obtient avec $r \neq 0$:

$$z_1 + z_2 = -r \text{ et } z_1 z_2 = r^2 + 1$$

Or $r^3 + r + 1 = 0$ avec $r \neq 0$, d'où $r^2 + 1 = -\frac{1}{r}$, soit $z_1 z_2 = -\frac{1}{r}$.

c) Puisque l'on a $r \in]-1, -\frac{1}{2}[$, il vient $\frac{1}{2} < |r| < 1$,

$$\text{i.e } \frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1 \text{ car } |r| = |z_1 + z_2|.$$

De même, on a $|z_1 z_2| = \frac{1}{|r|}$, ce qui donne

$$1 < |z_1 z_2| < 2.$$

d) Supposons que $|z_1| \geqslant 2$. Alors,

$$|z_1| + |z_2| \geqslant 2 + |z_2|$$

Or nous avions montré précédemment que $|z_1 + z_2| < 1$, donc on obtient

$$2 + |z_2| < 1 \Longrightarrow |z_2| < -1$$

ce qui est absurde car $|z_2| \geqslant 0$.

Nous concluons donc que

$$|z_1| < 2.$$

e) Le même raisonnemt (en échangeant les rôles de z_1 et de z_2) donne $|z_2| < 2$.

Ainsi, toutes les racines de l'équation (E_3) ont un module strictement inférieur à 2.

3) Cas général. Soit un entier $n \geqslant 2$.

a)

Considérons la fonction $\varphi : [2, +\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi : t \longmapsto t^n - t - 1$$

Déterminons ses limites aux bornes de son intervalle de définition :

$$\lim_{t \to 2} \varphi(t) = 2^n - 2 - 1 = 2^n - 3 \geqslant 1$$

et

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi(t) = +\infty$$

Remarquons ensuite que φ est continue et dérivable sur $[2, +\infty[$ puisque c'est une fonction polynomiale.

Ainsi, pour tout $t \in [2, +\infty[$, on a

$$\varphi'(t) = nt^{n-1} - 1 \geqslant 3 > 0 \text{ et donc } \varphi(t) \geqslant \varphi(2) \geqslant 3 > 0$$

ce qui montre que φ est strictement croissante sur $[2, +\infty[$.

On en déduit le tableau suivant :

t	2	$\pi(=4)$	$+\infty$
signe de φ'		$+$	
variation de φ	$2^n - 3$	$\nearrow$	$+\infty$
signe de φ		$+$	

b)

Soit $z \in \mathbb{C}$,

Si z est une racine de l'équation $z^n + z + 1 = 0$, alors $|z^n + z + 1| = 0$.

Or, par l'inégalité triangulaire inversée, on a

$$|z^n + z + 1| \geqslant |\, |z^n| - |z| - |1| \,| = |\, |z|^n - |z| - 1 \,|$$

Ainsi, pour que $|z^n + z + 1| = 0$, il faut et il suffit que $|\, |z|^n - |z| - 1 \,| = 0$, c'est-à-dire que $|z|^n - |z| - 1 = 0$. Cela signifie que $|z|$ est une racine de l'équation $t^n - t - 1 = 0$.

Or, d'après le tableau précédent, l'équation $t^n - t - 1 = 0$ n'admet pas de racine dans l'intervalle $[2, +\infty[$. On en déduit que pour toute racine z de l'équation (E_n), on a $|z| < 2$.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$(z^n + z + 1 = 0) \Longrightarrow (|z| < 2).$$

Problème 2 -

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On considère le polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

- a_n et a_{n-1} sont des réels avec $a_n \geqslant 1$ et $a_{n-1} > 0$
- Pour tout $k \in [\![0, n-2]\!]$, $a_k \in \mathbb{C}$

On note $M = \max\left\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-2}|\right\}$

1) Soit z une racine complexe de P de partie réelle strictement positive.

a) Sachant que d'une part $\mathrm{Re}(z) > 0$, et que :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{Re}(z) - \mathfrak{I}(z)}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathfrak{I}(z)^2}\right) = \underbrace{\frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathfrak{I}(z)^2}}_{>0}$$

Alors on obtient bien $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$.

b) On suppose que $|z| > 1$, prouvons les unes après les autres les inégalités suivantes :

$$1 \leqslant \mathrm{Re}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}\right) \leqslant M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n} \leqslant \frac{M}{|z|^2 - |z|}$$

i. Montrons que $1 \leqslant \mathrm{Re}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}\right)$.

Comme $a_n \geqslant 1$ et $a_{n-1} > 0$, il vient grâce au résultat de la question précédente $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$

$$\mathrm{Re}(a_n) = a_n \geqslant 1 \text{ et } \mathrm{Re}\left(a_{n-1}\frac{1}{z}\right) = a_{n-1}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$$

d'où par addition membre à membre,

$$\mathrm{Re}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Re}(a_n) + \mathrm{Re}\left(a_{n-1}\frac{1}{z}\right) \geqslant 1$$

ii. Montrons que $\mathrm{Re}\big(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}\big) \leqslant M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n}$.

z est une racine complexe de P donc $P(z) = 0$.

$$(*) \quad P(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{P(n)}{z^n} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}} = -\sum_{k=0}^{n-2} a_k \frac{z^k}{z^n}$$

$$\underbrace{\mathrm{Re}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}\right)}_{>0} \leqslant \left|\underbrace{a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}}\right| \overset{(*)}{=} \left|-\sum_{k=0}^{n-2} a_k \frac{z^k}{z^n}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-2} |a_k||z|^{k-n} \leqslant M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n}$$

On trouve que $\mathrm{Re}\big(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}\big) \leqslant M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n}$.

iii. Montrons que $M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n} \leqslant \frac{M}{|z|^2 - |z|}$.

$$M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n} = M \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|z|^k}{|z|^n} = \frac{M}{|z|^n} \sum_{k=0}^{n-2} |z|^k = \frac{M}{|z|^n} \cdot \frac{|z|^{n-1} - 1}{|z| - 1} = \underbrace{\frac{|z|^{n-1} - 1}{|z|^{n-1}}} \cdot \frac{M}{|z|^2 - |z|}$$

Or,

$$\frac{|z|^{n-1} - 1}{|z|^{n-1}} \leqslant 1 \Leftrightarrow |z|^{n-1} - 1 \leqslant |z|^{n-1} \Leftrightarrow \underbrace{-1 \leqslant 0}_{\text{vrai}}$$

Par successions d'équivalences $\frac{|z|^{n-1}-1}{|z|^{n-1}} \leqslant 1$, cela donne finalement $M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n} \leqslant \frac{M}{|z|^2 - |z|}$.

c) i. Si $|z| \leqslant 1$

$$\left||z| - \frac{1}{2}\right| \leqslant \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \overset{(*)}{\leqslant} \frac{\sqrt{1 + 4M}}{2}$$

$(*)$ Par croissance de la fonction racine carré sur $\mathbb{R}_+$ comme $M \geqslant 0$.

ii. Si $|z| > 1$, grâce à l'inégalité de la question précédente, $1 \leqslant \frac{M}{|z|^2 - |z|}$. Comme $|z| > 1$, $|z|^2 - |z| > 0$.

$$\begin{aligned} 1 \leqslant \frac{M}{|z|^2 - |z|} &\Leftrightarrow 4|z|^2 - 4|z| \leqslant 4M \\ &\Leftrightarrow 4\left(|z| - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 1 + 4M \\ &\Leftrightarrow 4\left||z| - \frac{1}{2}\right|^2 \leqslant 1 + 4M \\ &\underset{\text{positif}}{\overset{\text{tout est}}{\Leftrightarrow}} \left||z| - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{1 + 4M}}{2} \end{aligned}$$

iii. D'autre part,

$$\left||z| - \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{\sqrt{1+4M}}{2} \Rightarrow |z| - \frac{1}{2} \leqslant \frac{\sqrt{1+4M}}{2} \Leftrightarrow |z| \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$$

Notons que grâce à la disjonction de cas précédente, ce dernier résultat ne dépend plus de $|z| > 1$ ou $|z| \leqslant 1$.

---

2) Prenons z une racine complexe de P.

- Ou bien $\mathrm{Re}(z) \leqslant 0$
- Ou bien $\mathrm{Re}(z) > 0 \overset{Q1a}{\Rightarrow} \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$. On peut alors utiliser le résultat de la question $Q1b$ puis $Q1c$ ce qui donne $|z| \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2}$.

---

3) On considère le polynôme $Q(X) = X^3 + \frac{1}{2}X^2 - (7+4i)X - (5+10i)$

b) Le polynôme Q possède une racine réelle évidente $r = -\frac{5}{2}$. En divisant Q par $\left(X + \frac{5}{2}\right)$ on a un polynôme du second degré à coefficients complexes. Les racines de Q sont donc :

$$\left\{-\frac{5}{2}, -1-i, 3+i\right\}$$

a) **c)** Le polynôme Q peut s'écrire comme P avec, $n = 3$

$$\begin{aligned} a_n &= a_3 = 1 \geqslant 1 & \qquad a_{n-1} &= a_2 = \frac{1}{2} > 0 \\ a_1 &= -(7+4i) & a_0 &= -(5+10i) \end{aligned}$$

$$M = \max\left\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{n-2}|\right\} = |a_0| = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

D'après les propriétés des polynômes P (question $Q2$) les racines • de Q vérifient $\mathrm{Re}(z) \leqslant 0$ ou $|z| \leqslant \frac{1+\sqrt{1+4M}}{2} = \frac{1+\sqrt{1+20\sqrt{5}}}{2}$ (les bordures comprises puisqu'il s'agit d'inégalités larges).