Devoir maison n°2 : Autour de la continuité

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Bornitude et continuité

1) Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. Il existe ainsi $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $m \leqslant g(x) \leqslant M$.

D'une part, $f(x) \in \mathbb{R}$ donc puisque g est bornée, $m \leqslant g(f(x)) \leqslant M$ i.e. $g \circ f$ est bornée.

D'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \in [m, M]$. f est continue donc d'après le TVI, l'image du segment $[m, M]$ par f est aussi un segment $[m', M']$ $(m', M' \in \mathbb{R})$.
Donc $f(g(x)) \in [m', M']$ i.e. $f \circ g$ est bornée.

Partie B - Injectivité et continuité

1) Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Pour tout x et y tel que $x < y$, soit $f(x) < f(y)$ soit $f(x) > f(y)$ donc $f(x) \neq f(y)$. Il n'existe pas deux antécédants qui donnent la même image donc f est injective.

Prenons la fonction :

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ f &: x \quad \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

f est une bijection puique $-1 \notin \mathbb{R}_+$ donc f est injective. Or $f(1) < f(0) < f(2)$ donc f n'est pas monotone. La réciproque est fausse.

Partie C - Surjectivité et continuité

1) Soit $f : \mathbb{R}^+ \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ et montrons par l'absurde que tout $k \in \mathbb{R}$ a une infinité d'antécédants. Posons $g(x) = f(x) - k$ et supposons que g n'ait qu'un nombre fini de racines - il y a donc une racine maximale x_0 parmi elles.

D'une part, $g(x) \neq 0$ pour $x > x_0$. Comme g est continue, g reste du même signe après x_0 : supposons sans perte de généralité que g est négative sur $[x_0; +\infty]$. D'autre part, d'après le théorème des bornes atteintes, $m \leqslant g \leqslant M$ sur $[0; x_0]$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \leqslant \max(0, M)$ d'où $f(x) \leqslant \max(0, M) + k$. Donc f ne peut être surjective, ce qui est une contradiction.

---

2) Supposons que $f : [a; b] \to [f(a); f(b)]$ soit croissante et surjective, mais pas continue sur $[a; b]$. Soit $z \in [a; b]$.

Comme f est croissante, par le théorème de la limite monotone, on a l'existence des limites de f à gauche et à droite en z. De plus,

$$\ell_g = \lim_{x \to z^-} f(x) \leqslant f(z) \leqslant \lim_{x \to x^+} f(x) = \ell_d$$

(Pour $z = a$ ou b, l'une de ces limites est juste $f(z)$). Supposons que l'une de ces inégalités soit stricte.

Si $\lim_{x \to z^-} f(x) \neq f(z)$, par la remarque précédente, $z \neq a$. D'une part, si $x \in [z; b]$, par croissance, $f(x) \notin]\ell_g, f(z)[$. D'autre part, pour tout $x \in [a; z[$:

$$f(a) \leqslant f(x) \leqslant \ell_g < f(z)$$

Donc $f(x) \notin]\ell_g; f(z)[$. Ainsi, f n'atteint pas les valeurs de $]\ell_g; f(z)[\subset [a; b]$, ce qui est une contradiction. Donc $\ell_g = f(z)$

On procède similairement pour $\ell_g = f(z)$.

Partie D - Equation fonctionnelle

1) **a)** Si f est involutive, elle admet une réciproque (elle même) et est donc bijective. A fortiori, elle est donc injective. Enfin, comme f est continue, par le B.2, elle doit être strictement monotone.

b) Supposons que f est strictement croissante. Si pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x$, alors par croissance $f(f(x)) = x < f(x)$, ce qui est une contradiction. Similairement, si $f(x) > x$, on arrive aussi à une contradiction. Donc $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est à dire $f = \mathrm{Id}$

---

2)

$$f(x^2 + f(y)) = f(x)^2 + y \qquad (\star)$$

a) **i.** En posant $x = 0$ dans $(\star)$, on a que pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(y)) = (f \circ f)(y) = f(0) + y$$

Donc $f \circ f$ est une fonction affine, qui est donc injective. Ainsi, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$f(a) = f(b) \overset{f}{\Longrightarrow} f(f(a)) = f(f(b)) \overset{\text{Injectivité}}{\Longrightarrow} a = b$$

Ce qui montre que f est également injective.

ii. En posant $x = y = 0$, on trouve que $f(f(0)) = f(0)$. Par injectivité de f, $f(0) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, en posant $y = 0$, on a :

$$f(x^2) = f(x)^2$$

Ainsi, on trouve en substituant $-x$ pour x :

$$f(-x)^2 = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x)^2$$

Donc $f(-x) \in \{f(x), -f(x)\}$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $-x \neq x$ d'ou par injectivité de f que $f(-x) \neq f(x)$. Comme $f(-0) = 0 = -f(0)$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on doit avoir $f(-x) = -f(x)$, f est impaire.

iii. Comme $f(0) = 0$, en réutilisant l'expression précédente, on trouve que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(f(y)) = y$, c'est à dire $f \circ f = \mathrm{Id}$.

De plus, comme f est continue et injective, on sait que f est strictement monotone. Par l'absurde, supposons que f est strictement décroissante. Alors $f(-2) > f(-1) > f(0) = 0$. Comme $x \mapsto x^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, $f(-2)^2 = f(4) > f(-1)^2 = f(1)$, ce qui est une contradiction. Donc f est strictement croissante.

iv. En appliquant le 1), on en déduit que $f = \mathrm{Id}$

b) Une solution est égale à l'identité, et on vérifie facilement que l'identité est solution de $(\star)$. Donc $S = \{\mathrm{Id}\}$.