

# Devoir maison n°13 : Calcul de $\zeta(2)$

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

TE1

## Partie A - Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1) Puisque pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{1}{k^2} > 0$ , la suite définie par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$  est strictement croissante. De plus,  $u_1 = 1 \leq v_1 = 1$  et pour tout  $k \geq 2$ , par décroissance de la fonction inverse,  $\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$ . Ainsi, pour tout  $n \geq 2$  :

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = v_n$$

2) La suite  $(v_n)$  est convergente. En effet, pour tout  $n \geq 2$  :

$$v_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$ . Comme  $v_n$  converge, alors elle est majorée.  $(u_n)$  est donc alors également majorée, et croissante. Donc  $(u_n)$  converge par le théorème de la limite monotone.

## Partie B - Analyse de $(u_n)$

1) a) Par définition, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $C_n(0) = \sum_{k=1}^n \cos(0) = n$ . De plus, pour tout  $t \in ]0; \pi]$  :

$$\begin{aligned} C_n(t) &= \sum_{k=1}^n \Re(e^{ikt}) = \Re\left(\sum_{k=1}^n e^{ikt}\right) \\ &\stackrel{e^{it} \neq 1}{=} \Re\left(e^{it} \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1}\right) \\ &\stackrel{\text{Angle moitié}}{=} \Re\left(e^{it} \frac{e^{i\frac{n}{2}t} \cdot 2 \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{e^{i\frac{t}{2}} \cdot 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \Re\left(e^{i\frac{(n+1)}{2}t}\right) \\ &= \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right) \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $t \in [0; \pi]$ ,  $C_n$  est une somme finie de fonctions continues sur  $[0; \pi]$ , et est donc continue sur  $[0; \pi]$ .

c) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $t \in ]0; \pi]$ , on calcule avec des identités trigonométriques :



$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) &= \sin\left(\frac{n}{2}t\right) \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{n}{2}t\right) \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \\
&= \sin\left(\frac{t}{2}\right) C_n(t) + \cos\left(\frac{n}{2}t\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{n}{2}t\right) + \cos\left(\frac{n}{2}t\right)^2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{t}{2}\right) C_n(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{n}{2}t\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{n}{2}t\right) - \sin\left(\frac{n}{2}t\right)^2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{t}{2}\right) C_n(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{n}{2}t\right) \left[ \cos\left(\frac{n}{2}t\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{n}{2}t\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right] \\
&= 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) C_n(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$D_n(t) = 2C_n(t) + 1 = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

**d)** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $t \in [0; \pi]$ ,  $D_n(t) = 1 + 2C_n(t)$ . Par continuité de  $C_n$  et opérations,  $D_n$  est également continue sur  $[0; \pi]$

**2)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les fonctions  $t \mapsto \frac{t^2}{2\pi} - t$  et  $t \mapsto C_n(t)$  sont de classe  $C^\infty$  par opérations (cos est de classe  $C^\infty$ ). On peut donc calculer par intégration par parties :

TODO :  $d$  droit

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt &= \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sin(nt) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n} \left( \frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt \\
&\stackrel{\sin(k\pi)=0}{=} -\frac{1}{n} \int_0^\pi \left( \frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt
\end{aligned}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left( \frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt &= \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{t}{\pi} - 1 \right) (-\cos(nt)) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n\pi} (-\cos(nt)) dt \\
&= \left[ \frac{1}{n} \left( \frac{t}{\pi} - 1 \right) (-\cos(nt)) \right]_0^\pi + \left[ \frac{1}{n^2\pi} (-\sin(nt)) \right]_0^\pi
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{1}{n} \left( \frac{t}{\pi} - 1 \right) (-\cos(nt)) \right]_0^\pi &= \left( 0 - \frac{1}{n} (-1) (-\cos(0)) \right) = -\frac{1}{n} \text{ et} \\
\left[ \frac{1}{n^2\pi} (-\sin(nt)) \right]_0^\pi &\stackrel{\sin(k\pi)=0}{=} 0
\end{aligned}$$

On en conclut donc que :



$$\int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = -\frac{1}{n} \left( -\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n^2}$$

Enfin, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt \\ &= \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left( \sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt \\ &= \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) C_n(t) dt \end{aligned}$$

3) On calcule en primitivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt &= \frac{1}{2} \left( \left[ \frac{1}{6\pi} t^3 \right]_0^\pi - \left[ \frac{1}{2} t^2 \right]_0^\pi \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} \right) = -\frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\begin{aligned} u_n - \frac{\pi^2}{6} &= u_n + \frac{1}{2} \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt \\ &= \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left( C_n(t) + \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) D_n(t) dt \end{aligned}$$

## Partie C - Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

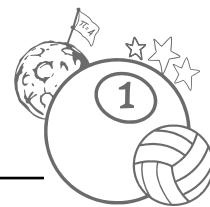
1)  $f$  est continue par opérations sur  $]0; \pi]$ . De plus, pour tout  $t \in ]0; \pi]$  :

$$f(t) = 2 \frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})} \left( 1 - \frac{t}{2\pi} \right)$$

En remarquant que le facteur du milieu est l'inverse d'un taux d'accroissement, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 2 = f(0)$$

Donc  $f$  est bien continue sur  $[0; \pi]$ . D'après le théorème des bornes atteintes, on dispose donc de  $M \in \mathbb{R}^+$  tel que  $|f| \leq M$  sur  $[0; \pi]$ .



2) a) Pour tout  $\alpha \in ]0; \pi[$ , on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\alpha f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| &\leq \int_0^\alpha |f(t)| \left| \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \right| dt \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\leq \int_0^\alpha |f(t)| dt \text{ car } |\sin| \leq 1 \\ &\leq \int_0^\alpha M dt = \alpha M \text{ car } |f| \leq M \end{aligned}$$

b)  $f$  est dérivable par opérations sur  $]0; \pi]$  : comme  $\alpha > 0$ , elle est a fortiori dérivable sur  $[\alpha; \pi]$ . De plus, pour tout  $t \in [\alpha; \pi]$  :

$$f'(t) = \frac{\left(1 - \frac{t}{\pi}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)^2}$$

Qui est continue par opérations sur  $[\alpha; \pi]$ . Encore par le théorème des bornes atteintes, on dispose donc de  $M' \in \mathbb{R}^+$  tel que  $|f'| \leq M'$  sur  $[\alpha; \pi]$ .

c) Comme  $f$  est de classe  $C^1$ , on peut calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_\alpha^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \\ &= \left[ -\frac{2}{2n+1} f(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \right]_\alpha^\pi - \int_\alpha^\pi -\frac{2}{2n+1} f'(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \\ &\stackrel{\cos((k+\frac{1}{2})\pi)=0}{=} \frac{2}{2n+1} f(\alpha) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) + \frac{2}{2n+1} \int_\alpha^\pi f'(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par l'inégalité triangulaire (sur la somme et l'intégrale):

$$\begin{aligned} |I_n| &\leq \left| \frac{2}{2n+1} f(\alpha) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) \right| + \frac{2}{2n+1} \int_\alpha^\pi |f'(t)| \left| \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \right| dt \\ &\leq \frac{2}{2n+1} \left| f(\alpha) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) \right| + \frac{2}{2n+1} (\pi - \alpha) M' \end{aligned}$$

Comme  $\alpha$  et  $M'$  sont fixés, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |I_n| = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :



$$\begin{aligned} \left| u_n - \frac{\pi^2}{6} \right| &= \left| \frac{1}{2} \int_0^\pi \left( \frac{t^2}{2\pi} - t \right) D_n(t) dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| \text{ par l'expression du B)1)c} \end{aligned}$$

Or, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour tout choix de  $0 < \alpha < \pi$ , par la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| &\leq \left| \int_0^\alpha f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| + \left| \int_\alpha^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| \\ &\leq \alpha M + |I_n| \end{aligned}$$

Où  $M$  ne dépend pas de  $\alpha$ . Ainsi :

$$\left| u_n - \frac{\pi^2}{6} \right| \leq \frac{1}{2} \alpha M + \frac{1}{2} |I_n|$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut alors choisir  $0 < \alpha < \pi$  tel que  $\frac{1}{2} \alpha M < \frac{\varepsilon}{2}$ . Pour ce  $\alpha$ , il existe un rang à partir duquel  $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$  et donc à partir duquel  $\left| u_n - \frac{\pi^2}{6} \right| < \varepsilon$ . Ainsi, on obtient enfin :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$$