Devoir maison n°13 : Ln, IAF et suites

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Problème 1 - Fonction logarithme népérien

1)

---

2)

---

3)

---

4)

---

5) a)

b)

c)

Problème 2 - Inégalité des accroissements finis et suites

Partie A

1) Supposons être dans les conditions de l'énoncé. Posons :

$$g(x) = f(x) - f(a) - M(x - a)$$
$$h(x) = f(x) - f(a) - m(x - a)$$

Alors, d'une part, $g(a) = h(a) = 0$. De plus, ces deux fonctions sont dérivables sur $]a; b[$ par sommes de fonctions dérivables et pour tout $x \in]a; b[$:

$$g'(x) = f'(x) - M \leq 0 \text{ par hypothèse}$$

Ainsi que :

$$h'(x) = f'(x) - m \geq 0 \text{ par hypothèse}$$

Donc g est décroissante sur $]a; b[$. Comme elle est continue sur $[a; b]$, on peut conclure que, comme $b \geq a$, $g(b) \leq g(a) = 0$, d'où :

$$f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Similairement, h est croissante sur $]a; b[$ et $h(b) \geq h(a) = 0$, d'où :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Partie B

On définit sur $\mathbb{R}_*$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right)$$

---

2) φ est paire : soit $x \in \mathbb{R}_*$. Alors $-x \in \mathbb{R}_*$ et :

$$\begin{aligned}\varphi(-x) &= \frac{1}{2}\left(-x - \frac{5}{x}\right) = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{x}\right) \\ &= \varphi(x)\end{aligned}$$

---

3)

- Quand $x \to +\infty$: $\frac{5}{x} \to 0$ et par somme :

$$\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$$

- Quand $x \to -\infty$: $\frac{5}{x} \to 0$ et par somme :

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$$

- Quand $x \to 0^-$: $\frac{5}{x} \to -\infty$ et par somme :

$$\lim_{x \to 0^-} \varphi(x) = -\infty$$

- Quand $x \to 0^+$: $\frac{5}{x} \to +\infty$ et par somme :

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = +\infty$$

---

4) TODO: Thomas ? dis moi si tu ne veux pas le faire :3

---

5)

---

6)

Partie C

1)

---

2)

3) **a)**

b)

4)

5)