

# Devoir maison n°6 : Localisation de racines

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier  
TE1

## Problème 1 -

Considérons, pour tout entier  $n \geq 2$ , l'équation  $(E_n)$  d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :

$$z^n + z + 1 = 0$$

### 1) Cas $n = 2$ .

On considère l'équation  $(E_2)$  à résoudre dans  $\mathbb{C}$

$$z^2 + z + 1 = 0,$$

Puisqu'il s'agit d'une équation quadratique, calculons le discriminant :  $\Delta = 1 - 4 = -3$

Les solutions sont donc

$$z = -\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} \text{ ou } z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

Et le module de chacune de ces racines est

$$|z| = \frac{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$$

ce qui est inférieur à 2.

---

### 2) Cas $n = 3$

a)

Soit  $f : t \mapsto t^3 + t + 1$ , définie sur  $\mathbb{R}$ .

Remarquons d'abord que  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  puisque c'est une fonction polynomiale.

De plus, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a

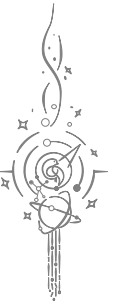
$$f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$$

ce qui montre que  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, comme  $f(-1) = -1 < 0$  et  $f(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8} > 0$ , le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires garantit que  $f$  admet une unique racine  $r \in ]-1, -\frac{1}{2}[$ . Celle-ci constitue donc la seule solution réelle de  $(E_3)$ .

b)

Notons  $z_1$  et  $z_2$  les deux autres solutions complexes de  $(E_3)$ .



Puisque  $r$  est une racine de  $(E_3)$ , le polynôme  $P(z) = z^3 + z + 1$  se factorise sous la forme

$$P(z) = (z - r)(z^2 + az + b) \text{ avec } a, b \in \mathbb{C}.$$

Ainsi, en développant cette expression, on obtient :

$$P(z) = z^3 + (a - r)z^2 + (b - ar)z - br$$

Par identification polynomiale, on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} a - r = 0 \\ b - ar = 1 \\ -br = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = r \\ b = r^2 + 1 \\ \underbrace{r^3 + r + 1 = 0}_{(E_3)} \end{cases}$$

Par conséquent, les racines  $z_1$  et  $z_2$  sont les solutions de l'équation quadratique

$$z^2 + rz + (r^2 + 1) = 0.$$

Enfin, par les propriétés des racines d'un polynôme du second degré, on obtient avec  $r \neq 0$  :

$$z_1 + z_2 = -r \text{ et } z_1 z_2 = r^2 + 1$$

Or  $r^3 + r + 1 = 0$  avec  $r \neq 0$ , d'où  $r^2 + 1 = -\frac{1}{r}$ , soit  $z_1 z_2 = -\frac{1}{r}$ .

c)

Puisque l'on a  $r \in ]-1, -\frac{1}{2}[$ , il vient  $\frac{1}{2} < |r| < 1$ ,

$$\text{i.e } \frac{1}{2} < |z_1 + z_2| < 1 \text{ car } |r| = |z_1 + z_2|.$$

De même, on a  $|z_1 z_2| = \frac{1}{|r|}$ , ce qui donne

$$1 < |z_1 z_2| < 2.$$

d)

Supposons que  $|z_1| \geq 2$ . Alors,

$$|z_1| + |z_2| \geq 2 + |z_2|$$

Or nous avons montré précédemment que  $|z_1 + z_2| < 1$ , donc on obtient

$$2 + |z_2| < 1 \implies |z_2| < -1$$

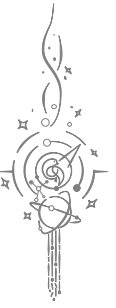
ce qui est absurde car  $|z_2| \geq 0$ .

Nous concluons donc que

$$|z_1| < 2.$$

e)

Le même raisonnement (en échangeant les rôles de  $z_1$  et de  $z_2$ ) donne  $|z_2| < 2$ .



Ainsi, toutes les racines de l'équation  $(E_3)$  ont un module strictement inférieur à 2.

### 3) Cas général. Soit un entier $n \geq 2$ .

a)

Considérons la fonction  $\varphi : [2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\varphi : t \mapsto t^n - t - 1$$

Déterminons ses limites aux bornes de son intervalle de définition :

$$\lim_{t \rightarrow 2} \varphi(t) = 2^n - 2 - 1 = 2^n - 3 \geq 1$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = +\infty$$

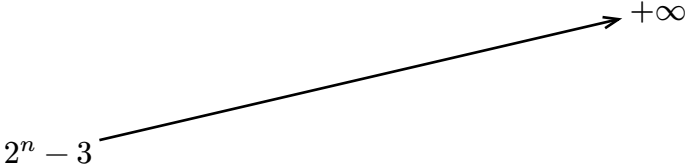
Remarquons ensuite que  $\varphi$  est continue et dérivable sur  $[2, +\infty[$  puisque c'est une fonction polynomiale.

Ainsi, pour tout  $t \in [2, +\infty[$ , on a

$$\varphi'(t) = nt^{n-1} - 1 \geq 3 > 0 \text{ et donc } \varphi(t) \geq \varphi(2) \geq 3 > 0$$

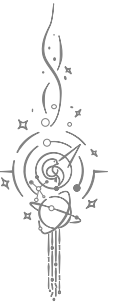
ce qui montre que  $\varphi$  est strictement croissante sur  $[2, +\infty[$ .

On en déduit le tableau suivant :

$t$	2	$\pi(= 4)$	$+\infty$
signe de $\varphi'$	+		
variation de $\varphi$			
signe de $\varphi$	+		

b)

Soit  $z \in \mathbb{C}$ ,



Si  $z$  est une racine de l'équation  $z^n + z + 1 = 0$ , alors  $|z^n + z + 1| = 0$ .

Or, par l'inégalité triangulaire inversée, on a

$$|z^n + z + 1| \geq ||z^n| - |z| - |1|| = ||z|^n - |z| - 1|$$

Ainsi, pour que  $|z^n + z + 1| = 0$ , il faut et il suffit que  $||z|^n - |z| - 1| = 0$ , c'est-à-dire que  $|z|^n - |z| - 1 = 0$ . Cela signifie que  $|z|$  est une racine de l'équation  $t^n - t - 1 = 0$ .

Or, d'après le tableau précédent, l'équation  $t^n - t - 1 = 0$  n'admet pas de racine dans l'intervalle  $[2, +\infty[$ . On en déduit que pour toute racine  $z$  de l'équation  $(E_n)$ , on a  $|z| < 2$ .

Ainsi, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$(z^n + z + 1 = 0) \implies (|z| < 2).$$

## Problème 2 -

Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . On considère le polynôme

$$P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

- $a_n$  et  $a_{n-1}$  sont des réels avec  $a_n \geq 1$  et  $a_{n-1} > 0$
- Pour tout  $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ,  $a_k \in \mathbb{C}$

On note  $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-2}|\}$

**1)** Soit  $z$  une racine complexe de  $P$  de partie réelle strictement positive.

**a)** Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  tel que  $z = x + iy$ .

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - yi}{x^2 + y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2 + y^2}}_{\text{partie réelle}} + i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

D'où,  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ . Lorsque  $\operatorname{Re}(z) = x > 0$ , on obtient bien  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$ .

**b)** On suppose que  $|z| > 1$ , prouvons les unes après les autres les inégalités suivantes :

$$1 \leq \operatorname{Re}\left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{z}\right) \leq M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n} \leq \frac{M}{|z|^2 - |z|}$$

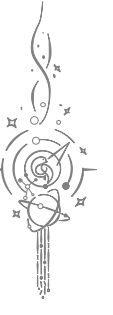
**i.** Montrons que  $1 \leq \operatorname{Re}\left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{z}\right)$ .

Comme  $a_n \geq 1$  et  $a_{n-1} > 0$ , il vient grâce au résultat de la question précédente  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$

$$\operatorname{Re}(a_n) = a_n \geq 1 \text{ et } \operatorname{Re}\left(a_{n-1} \frac{1}{z}\right) = a_{n-1} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > 0$$

d'où par addition membre à membre,

$$\operatorname{Re}\left(a_n + a_{n-1} \frac{1}{z}\right) = \operatorname{Re}(a_n) + \operatorname{Re}\left(a_{n-1} \frac{1}{z}\right) \geq 1$$



ii. Montrons que  $\operatorname{Re}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}\right) \leq M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n}$ .

$z$  est une racine complexe de  $P$  donc  $P(z) = 0$ .

$$(*) \quad P(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{P(n)}{z^n} = 0 \Leftrightarrow \underbrace{a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}} = - \sum_{k=0}^{n-2} a_k \frac{z^k}{z^n}$$

$$\underbrace{\operatorname{Re}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}\right)}_{>0} \leq \left| \underbrace{a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}} \right| \stackrel{(*)}{=} \left| - \sum_{k=0}^{n-2} a_k \frac{z^k}{z^n} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-2} |a_k| |z|^{k-n} \leq M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n}$$

On trouve que  $\operatorname{Re}\left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{z}\right) \leq M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n}$ .

iii. Montrons que  $M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n} \leq \frac{M}{|z|^2 - |z|}$ .

$$M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n} = M \sum_{k=0}^{n-2} \frac{|z|^k}{|z|^n} = \frac{M}{|z|^n} \sum_{k=0}^{n-2} |z|^k = \frac{M}{|z|^n} \cdot \frac{|z|^{n-3} - 1}{|z| - 1} = \underbrace{\frac{|z|^{n-3} - 1}{|z|^{n-1}}}_{>1} \cdot \frac{M}{|z|^2 - |z|}$$

Or,

$$\frac{|z|^{n-3} - 1}{|z|^{n-1}} \leq 1 \Leftrightarrow |z|^{n-3} - 1 \leq |z|^{n-1} \Leftrightarrow \underbrace{|z|^{n-3}}_{>1} \left( \underbrace{1 - |z|^2}_{>1} \right) \leq 1$$

Grâce à la supposition  $|z| > 1$ , on a que  $|z|^{n-3}(1 - |z|^2) < 0 \leq 1$ . Par successions d'équivalences  $\frac{|z|^{n-3}-1}{|z|^{n-1}} \leq 1$ . Ce qui donne finalement  $M \sum_{k=0}^{n-2} |z|^{k-n} \leq \frac{M}{|z|^2 - |z|}$ .

c) Grâce à l'inégalité de la question précédente,  $1 \leq \frac{M}{|z|^2 - |z|}$ . Comme  $|z| > 1$ ,  $|z|^2 - |z| > 0$ .

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{M}{|z|^2 - |z|} \Leftrightarrow 4|z|^2 - 4|z| \leq 4M \\ &\Leftrightarrow 4\left(|z| - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1 + 4M \\ &\Leftrightarrow 4\left| |z| - \frac{1}{2} \right|^2 \leq 1 + 4M \\ &\stackrel{\substack{\text{tout est} \\ \Leftrightarrow \\ \text{positif}}}{\Leftrightarrow} \left| |z| - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\sqrt{1 + 4M}}{2} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\left| |z| - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{\sqrt{1 + 4M}}{2} \Rightarrow |z| - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{1 + 4M}}{2} \Leftrightarrow |z| \leq \frac{1 + \sqrt{1 + 4M}}{2}$$