

Devoir maison n°8 : D'Hiver

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

Exercice 1 - La couleur des nombres

Pour alléger la syntaxe, nous établissons les notations suivantes : **nombre rouge**, **nombre bleu**.

Rappelons les règles sous une forme développée avec $x \in \mathbb{Q}_+^*$:

$$1 \quad (a)$$

$$\begin{cases} x \Leftrightarrow \frac{1}{x} \\ x \Leftrightarrow \frac{1}{x} \end{cases} \quad (b)$$

$$\begin{cases} x \Leftrightarrow x + 1 \\ x \Leftrightarrow x + 1 \end{cases} \quad (c)$$

1)

D'après (a), 1 est rouge et d'après (c), la couleur s'inverse à chaque ajout de 1. Par récurrence évidente, tous les nombres pairs sont donc bleus et tous les nombres impaires rouges.

Avec $x \in \mathbb{Q}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$ nous avons donc :

$$\begin{cases} x = 2k \Rightarrow x \\ x = 2k + 1 \Rightarrow x \end{cases} \quad (d)$$

Comme 2016 est pair, 2016 est **bleu**.

2) Soit $x \in \mathbb{Q}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$, d'après (c) la couleur s'inverse à chaque ajout de 1. Nous avons donc par récurrence évidente :

$$\begin{cases} x + 2k \Rightarrow x + 2k \\ x + 2k + 1 \Rightarrow x + 2k + 1 \\ x + 2k \Rightarrow x + 2k \\ x + 2k + 1 \Rightarrow x + 2k + 1 \end{cases} \quad (e)$$

Selon la couleur de x , si n est pair, $x + n$ aura la même couleur que x et si n est impaire $x + n$ sera de couleur opposée à x .

3)



$$\begin{aligned}\frac{2016}{2015} &= 1 + \frac{1}{2015} \text{ d'après (a) et (d)} \\ &= 1 + \frac{1}{2015} \text{ d'après (b)} \\ &= \frac{2016}{2015} \text{ d'après (c)}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{4}{13} &= \frac{1}{\frac{13}{4}} \\ &= \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} \text{ d'après (d)} \\ &= \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} \text{ d'après (b)} \\ &= \frac{1}{\frac{13}{4}} \text{ d'après (e)} \\ &= \frac{4}{13} \text{ d'après (b)}\end{aligned}$$

4)

TODO

5)

TODO

6)

7) Après implémentation de l'algorithme en typst, celui-ci donne :

$$\frac{1515}{1789}$$

Exercice 2 - Intercaler la somme

1)

$$E_4 = (1, 4, 6, 4, 1)$$

$$E_5 = (1, 5, 10, 10, 5, 1)$$

(bien entendu généré automatiquement, le script est dans le DM sur Github)