

Devoir maison n°13 : Calcul de $\zeta(2)$

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1) Puisque pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^2} > 0$, la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ est strictement croissante. De plus, $u_1 = 1 \leq v_1 = 1$ et pour tout $k \geq 2$, par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$:

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = v_n$$

2) La suite (v_n) est convergente. En effet, pour tout $n \geq 2$:

$$v_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$. Comme v_n converge, alors elle est majorée. (u_n) est donc alors également majorée, et croissante. Donc (u_n) converge par le théorème de la limite monotone.

Partie B - Analyse de (u_n)

1) a) Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n(0) = \sum_{k=1}^n \cos(0) = n$. De plus, pour tout $t \in]0; \pi]$:

$$\begin{aligned} C_n(t) &= \sum_{k=1}^n \Re(e^{ikt}) = \Re\left(\sum_{k=1}^n e^{ikt}\right) \\ &\stackrel{e^{it} \neq 1}{=} \Re\left(e^{it} \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1}\right) \\ &\stackrel{\text{Angle moitié}}{=} \Re\left(e^{it} \frac{e^{i\frac{n}{2}t} \cdot 2 \sin(\frac{nt}{2})}{e^{i\frac{t}{2}} \cdot 2 \sin(\frac{t}{2})}\right) \\ &= \frac{\sin(\frac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \Re\left(e^{\frac{i(n+1)}{2}t}\right) \\ &= \frac{\sin(\frac{nt}{2}) \cos(\frac{n+1}{2}t)}{\sin(\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in [0; \pi]$, C_n est une somme finie de fonctions continues sur $[0; \pi]$, et est donc continue sur $[0; \pi]$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in]0; \pi]$, on calcule avec des indentités trigonométriques :



$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) &= \sin\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) + \cos\left(\frac{n}{2}t\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \\
&= \sin\left(\frac{t}{2}\right)C_n(t) + \cos\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{n}{2}t\right) + \cos\left(\frac{n}{2}t\right)^2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{t}{2}\right)C_n(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \cos\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{n}{2}t\right) - \sin\left(\frac{n}{2}t\right)^2\sin\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \sin\left(\frac{t}{2}\right)C_n(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \sin\left(\frac{n}{2}t\right)\left[\cos\left(\frac{n}{2}t\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{n}{2}t\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right] \\
&= 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)C_n(t) + \sin\left(\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$D_n(t) = 2C_n(t) + 1 = \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0; \pi]$, $D_n(t) = 1 + 2C_n(t)$. Par continuité de C_n et opérations, D_n est également continue sur $[0; \pi]$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $t \mapsto \frac{t^2}{2\pi} - t$ et $t \mapsto C_n(t)$ sont de classe C^∞ par opérations (\cos est de classe C^∞). On peut donc calculer par intégration par parties :

TODO : d droit

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt &= \left[\frac{1}{n} \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \sin(nt) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt \\
&\stackrel{\sin(k\pi)=0}{=} -\frac{1}{n} \int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt
\end{aligned}$$

Ainsi que :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) \sin(nt) dt &= \left[\frac{1}{n} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) (-\cos(nt)) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n\pi} (-\cos(nt)) dt \\
&= \left[\frac{1}{n} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) (-\cos(nt)) \right]_0^\pi + \left[\frac{1}{n^2\pi} (-\sin(nt)) \right]_0^\pi
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{n} \left(\frac{t}{\pi} - 1 \right) (-\cos(nt)) \right]_0^\pi &= \left(0 - \frac{1}{n} (-1) (-\cos(0)) \right) = -\frac{1}{n} \text{ et} \\
\left[\frac{1}{n^2\pi} (-\sin(nt)) \right]_0^\pi &\stackrel{\sin(k\pi)=0}{=} 0
\end{aligned}$$

On en conclut donc que :



$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(nt) dt = -\frac{1}{n} \left(-\frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n^2}$$

Enfin, par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \cos(kt) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left(\sum_{k=1}^n \cos(kt) \right) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) C_n(t) dt \end{aligned}$$

3) On calcule en primitivant :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt &= \frac{1}{2} \left(\left[\frac{1}{6\pi} t^3 \right]_0^\pi - \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^\pi \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{2} \right) = -\frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_n - \frac{\pi^2}{6} &= u_n + \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) dt \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) \left(C_n(t) + \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) D_n(t) dt \end{aligned}$$

Partie C - Calcul de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

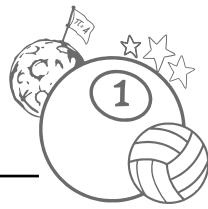
1) f est continue par opérations sur $[0; \pi]$. De plus, pour tout $t \in [0; \pi]$:

$$f(t) = 2 \frac{\frac{t}{2}}{\sin(\frac{t}{2})} \left(1 - \frac{t}{2\pi} \right)$$

En remarquant que le facteur du milieu est l'inverse d'un taux d'accroissement, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = 2 = f(0)$$

Donc f est bien continue sur $[0; \pi]$. D'après le théorème des bornes atteintes, on dispose donc de $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f| \leq M$ sur $[0; \pi]$.



2) a) Pour tout $\alpha \in]0; \pi[$, on a les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^\alpha f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| &\leq \int_0^\alpha |f(t)| \left| \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \right| dt \text{ par inégalité triangulaire} \\
 &\leq \int_0^\alpha |f(t)| dt \text{ car } |\sin| \leq 1 \\
 &\leq \int_0^\alpha M dt = \alpha M \text{ car } |f| \leq M
 \end{aligned}$$

b) f est dérivable par opérations sur $]0; \pi]$: comme $\alpha > 0$, elle est a fortiori dérivable sur $[\alpha; \pi]$. De plus, pour tout $t \in [\alpha; \pi]$:

$$f'(t) = \frac{\left(1 - \frac{t}{\pi}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Qui est continue par opérations sur $[\alpha; \pi]$. Encore par le théorème des bornes atteintes, on dispose donc de $M' \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f'| \leq M'$ sur $[\alpha; \pi]$.

c) Comme f est de classe C^1 , on peut calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_\alpha^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \\
 &= \left[-\frac{2}{2n+1} f(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \right]_\alpha^\pi - \int_\alpha^\pi -\frac{2}{2n+1} f'(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \\
 &\stackrel{\cos((k+\frac{1}{2})\pi)=0}{=} \frac{2}{2n+1} f(\alpha) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) + \frac{2}{2n+1} \int_\alpha^\pi f'(t) \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt
 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par l'inégalité triangulaire (sur la somme et l'intégrale) :

$$\begin{aligned}
 |I_n| &\leq \left| \frac{2}{2n+1} f(\alpha) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) \right| + \frac{2}{2n+1} \int_\alpha^\pi |f'(t)| \left| \cos\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \right| dt \\
 &\leq \frac{2}{2n+1} \left| f(\alpha) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\alpha\right) \right| + \frac{2}{2n+1} (\pi - \alpha) M'
 \end{aligned}$$

Comme α et M' sont fixés, par le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |I_n| = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:



$$\begin{aligned}
\left| u_n - \frac{\pi^2}{6} \right| &= \left| \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t \right) D_n(t) dt \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| \text{ par l'expression du B)1)c}
\end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout choix de $0 < \alpha < \pi$, par la relation de Chasles et l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| &\leq \left| \int_0^\alpha f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| + \left| \int_\alpha^\pi f(t) \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) dt \right| \\
&\leq \alpha M + |I_n|
\end{aligned}$$

Où M ne dépend pas de α . Ainsi :

$$\left| u_n - \frac{\pi^2}{6} \right| \leq \frac{1}{2}\alpha M + \frac{1}{2}|I_n|$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut alors choisir $0 < \alpha < \pi$ tel que $\frac{1}{2}\alpha M < \frac{\varepsilon}{2}$. Pour ce α , il existe un rang à partir duquel $|I_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ et donc à partir duquel $\left| u_n - \frac{\pi^2}{6} \right| < \varepsilon$. Ainsi, on obtient enfin :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{\pi^2}{6}$$