

Devoir maison n°8 : D'Hiver

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

Exercice 1 - La couleur des nombres

Notons $x \sim y$ la relation d'équivalence sur \mathbb{Q}_+^* : « x et y sont de même couleur ». Les propriétés d'équivalence sont évidentes. On colore enfin en **bleu** les nombres bleus et en **rouge** les nombres rouges.

Les deux premières règles deviennent :

$$\textcolor{red}{1} \quad (a)$$

$$x \sim \frac{1}{x} \quad (b)$$

Enfin, comme il n'y a que deux couleurs, si x et y sont de couleurs différentes, alors x et y sont de couleurs opposées. La 3e règle devient donc :

$$x + 1 \approx x \quad (c)$$

1)

D'après (a), 1 est rouge et d'après (c), la couleur s'inverse à chaque ajout de 1. Par récurrence évidente, tous les nombres pairs sont donc bleus et tous les nombres impairs rouges.

Ainsi, comme 2016 est pair, 2016 est **bleu**.

2) Soit $x \in \mathbb{Q}_+^*$ et $k \in \mathbb{N}$. D'après (c) appliquée deux fois, $x + 2 \sim x$. Par une récurrence évidente, $x + 2k \sim x$.

Ainsi, si $n \in \mathbb{N}$ est pair, alors $x + n \sim x$, et si n est impair :

$$\begin{aligned} x + n &\sim x + (n - 1) + 1 \\ &\sim x + 1 && \text{par (b)} \\ &\approx x && \text{par (c)} \end{aligned}$$

Ainsi, selon la couleur de x , si n est pair, $x + n$ aura la même couleur que x et si n est impair $x + n$ sera de couleur opposée à x .

3)

$$\begin{aligned} \frac{2016}{2015} &\sim \textcolor{red}{1} + \frac{1}{2015} \\ &\sim \textcolor{red}{1} + \textcolor{red}{2015} \\ &\sim \textcolor{blue}{2016} \end{aligned}$$



Donc $\frac{2016}{2015}$ est **bleu**.

D'autre part,

$$\begin{aligned}\frac{4}{13} &\sim \frac{13}{4} \\ &\sim 3 + \frac{1}{4} \\ &\sim 3 + 4 \\ &\sim 7\end{aligned}$$

Donc $\frac{4}{13}$ est **rouge**.

4)

TODO

5)

TODO

6)

7) Après implémentation de l'algorithme en typst, celui-ci donne :

$$\frac{1515}{1789}$$

Exercice 2 - Intercaler la somme

1)

$$E_4 = (1, 4, 6, 4, 1)$$

$$E_5 = (1, 5, 10, 10, 5, 1)$$

(bien entendu généré automatiquement, le script est dans le DM sur Github)

2) a) E_{11} a 12 éléments.

b) La somme 2048

c) 462

3) a) Notons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = N_n - 1$. Les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont :

$$u_1 = 1 \quad u_2 = 2 \quad u_3 = 4 \quad u_4 = 8$$

On conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n-1}$.



Preuve : Notons E'_n la liste E_n dans laquelle on omet le dernier 1, et on considère u_n comme le nombre d'éléments de E'_n . Pour construire E'_{n+1} à partir de E'_n , on rajoute un nombre à droite de chaque élément de E'_n . On a donc :

$$\begin{aligned} |E'_{n+1}| &= |E'_n| + |E'_n| \\ \Leftrightarrow u_{n+1} &= 2u_n \end{aligned}$$

Par une récurrence immédiate, on a bien $u_n = 2^{n-1}$.