

Devoir maison n°3 : Théorème de la corde universelle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Exemples.

Dans les parties A et B, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1) Soient $f : x \mapsto 1 - |2x - 1|$ définie sur $[0, 1]$, et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

On a $f\left(x + \frac{1}{n}\right) = 1 - \left|2x + \frac{2}{n} - 1\right|$.

De plus, $n \geq 2 \implies 1 \geq \frac{2}{n} \implies \frac{1}{2} \geq \frac{1}{n} \implies \frac{1}{2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \geq 0$.

| x | 0 | $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
|--|-------------------------|-----------------------------|---------------|-------------------------|
| $ 2x - 1 $ | $-2x + 1$ | $-2x + 1$ | 0 | $2x - 1$ |
| $f(x)$ | $2x$ | $2x$ | 0 | $-2x + 2$ |
| $ 2x - 1 + \frac{2}{n} $ | $-2x + 1 - \frac{2}{n}$ | $2x - 1 + \frac{2}{n}$ | 0 | $2x - 1 + \frac{2}{n}$ |
| $f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ | $2x + \frac{2}{n}$ | $-2x + 2 - \frac{2}{n}$ | 0 | $-2x + 2 - \frac{2}{n}$ |
| $f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ | $-\frac{2}{n}$ | $4x - 2 + \frac{2}{n}$ | 0 | $\frac{2}{n}$ |

L'équation $f(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ équivaut à $f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) = 0$ qui n'a pas de solutions sur $\left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right]$ d'après les tableau d'expressions.

Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right) = 0 &\iff 4x - 2 + \frac{2}{n} = 0 \\ &\iff x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

Et :

$$n \geq 2 \implies n > 0 \implies \begin{cases} 2n > n \\ \frac{1}{2n} > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{2n} < 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} > \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Notre solution est donc acceptable.

$$S = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right\}.$$

2) Soit $f : x \mapsto 16x^2(1 - x)^2$ définie sur $[0, 1]$. Pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$,



$$\begin{aligned}
f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x) &\Leftrightarrow f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow 16\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 - x - \frac{1}{n}\right)^2 - 16x^2(1-x)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\left(x + \frac{1}{n}\right)\left(1 - x - \frac{1}{n}\right)\right)^2 - (x(1-x))^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(x - x^2 - \frac{x}{n} + \frac{1}{n} - \frac{x}{n} - \frac{1}{n^2}\right)^2 - (x - x^2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(-x^2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2}\right)^2 - (x - x^2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(-x^2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2} + x - x^2\right)\left(-x^2 + \left(1 - \frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2} - x + x^2\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(-2x^2 + \left(2 - \frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(-\frac{2}{n}x + \frac{n-1}{n^2}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow -2x^2 + \left(2 - \frac{2}{n}\right)x + \frac{n-1}{n^2} = 0 \vee -\frac{2}{n}x + \frac{n-1}{n^2} = 0 \\
&\Leftrightarrow -2x^2 + \frac{2n-2}{n}x + \frac{n-1}{n^2} = 0 \vee x = \frac{n-1}{2n}
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
0 \leq \frac{n-1}{2n} \leq 1 - \frac{1}{n} &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq n-1 \\ n-1 \leq 2n-2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq n \\ 0 \leq n-1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow n \geq 1
\end{aligned}$$

Vrai car $n \geq 2$, donc par équivalence, $\frac{n-1}{2n} \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Cette solution est donc acceptable, et ainsi l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ admet au moins cette solution sur $[0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Partie B - Généralisation.

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Pour tout $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on pose $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$.

1) La fonction continue $x \mapsto x + \frac{1}{n}$ a son ensemble image inclus dans $[0, 1]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Or f est continue sur $[0, 1]$ donc g est continue sur $[0, 1]$ par opérations et composition de fonctions continues sur $[0, 1]$.

2)



$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \\ &= f(0) - f(1) \quad \text{par télescopage} \\ &= 0 \quad \text{car } f(0) = f(1)\end{aligned}$$

- 3)** On recherche s'il existe $\alpha \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$,
- soit $g(\frac{k}{n})$ est égal à 0 pour tous $k \in [0, n-1]$ et l'on peut prendre n'importe quel k pour avoir $\alpha = \frac{k}{n}$ puisque $k \in [0, n-1]$ donc $\frac{k}{n} \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$.
 - soit il existe k' tel que $g(\frac{k'}{n}) \neq 0$. Dans ce cas puisque la somme vaut 0, il existe nécessairement au moins un k'' tel que $g(\frac{k''}{n})$ soit de signe opposé à $g(\frac{k'}{n})$. Comme g est continue sur $[0, 1]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires¹ $\alpha \in [\frac{k'}{n} \leftrightarrow \frac{k''}{n}]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $[\frac{k'}{n} \leftrightarrow \frac{k''}{n}] \subseteq [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on a bien $\alpha \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Partie C - Généraliser encore ?

Soit $T \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{T} \notin \mathbb{Z}$, et f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. On considère $f : x \mapsto \sin^2(\frac{\pi x}{T}) - x \sin^2(\frac{\pi}{T})$ d'inconnue $x \in [0, 1 - T]$.

1) Comme la fonction sinus est continue sur \mathbb{R} et que $T \neq 0$, f est continue sur $[0, 1]$ par opérations et composition de fonctions continues.

$$\begin{aligned}f(0) &= \sin^2(0) - 0 = 0 \\ f(1) &= \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0\end{aligned}$$

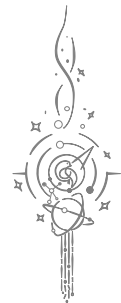
Donc on a bien $f(0) = f(1)$.

2)

$$\begin{aligned}f(x) - f(x+T) &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \underline{x \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)} - \sin^2\left(\frac{\pi(x+T)}{T}\right) + (x+T) \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{T} + \pi\right) + T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \left(\sin\left(\frac{\pi x}{T}\right) \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \cos\left(\frac{\pi x}{T}\right) \underbrace{\sin(\pi)}_{=0}\right)^2 + T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\ &= T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)\end{aligned}$$

Or $T \neq 0$ et comme $\sin^2(\frac{\pi}{T}) = 0 \Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{T}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{T} = 0$ ou $\frac{\pi}{T} = \pi$ et $T \neq 1$, on a que pour tout x dans $[0, 1 - T]$, $f(x) - f(x+T) > 0$

¹ Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $[a \leftrightarrow b] = \begin{cases} [a, b] & \text{si } a \leq b \\ [b, a] & \text{si } b < a \end{cases}$



3) On a que $f(x) - f(x + T) > 0$ ie $f(x) > f(x + T)$ donc $f(x) \neq f(x + T)$ pour tout x dans $[0, 1 - T]$.

$f(x + T) = f(x)$ est impossible pour tout x dans $[0, 1 - T]$.