Devoir maison n°9 : Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Problème 1 - Bac 1974

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

Soit Δ le discriminant de l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1)

$$\begin{aligned} u_2 &= au_1 + bu_0 \\ u_3 &= au_2 + bu_1 = a(au_1 + bu_0) + bu_1 = (a^2 + b)u_1 + bu_0 \\ u_4 &= au_3 + bu_2 = a((a^2 + b)u_1 + bu_0) + b(au_1 + bu_0) = (a^3 + 2ab)u_1 + (ab + b^2)u_0 \\ u_5 &= au_4 + bu_3 = (a^4 + 2a^2b)u_1 + (a^2b + ab^2)u_0 + (a^2b + b^2)u_1 + b^2u_0 \\ &= (a^4 + 3a^2b + b^2)u_1 + (a^2b + ab^2 + b^2)u_0 \\ u_6 &= au_5 + bu_4 = (a^5 + 3a^3b + ab^2)u_1 + (a^3b + a^2b^2 + ab^2)u_0 + (a^3b + 2ab^2)u_1 + (ab^2 + b^3)u_0 \\ &= (a^5 + 4a^3b + 3ab^2)u_1 + (a^3b + a^2b^2 + 2ab^2 + b^3)u_0 \end{aligned}$$

---

2) On suppose $\Delta > 0$. On note α et β les solutions de l'équation caractéristique.

a) D'après les relations coefficients-racines d'un polynôme du second degré, on a :

$\alpha + \beta = -\frac{-a}{1} = a$ et $\alpha\beta = \frac{-b}{1} = -b$.

Ainsi, la relation (1) peut se réécrire comme suit :

$$u_{n+2} = (\alpha + \beta)u_{n+1} - \alpha\beta u_n$$
$$\text{i.e. } u_{n+2} - \alpha u_{n+1} = \beta(u_{n+1} - \alpha u_n).$$

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - \alpha u_n$ et $w_n = u_{n+1} - \beta u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part, $v_{n+1} = u_{n+2} - \alpha u_{n+1}$ soit d'après la relation précédente, $v_{n+1} = \beta(u_{n+1} - \alpha u_n) = \beta v_n$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison β.

D'autre part,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+2} - \beta u_{n+1} \\ &= (\alpha+\beta)u_{n+1} - \alpha\beta u_n - \beta u_{n+1} \\ &= \alpha u_{n+1} - \alpha\beta u_n \\ &= \alpha w_n. \end{aligned}$$

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison α.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_n &= v_0\beta^n = (u_1 - \alpha u_0)\beta^n \\ w_n &= w_0\alpha^n = (u_1 - \beta u_0)\alpha^n \end{aligned}$$

d) D'après la question ci-dessus et d'après les définitions respectives de (v_n) et (w_n),

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \alpha u_n &= (u_1 - \alpha u_0)\beta^n \\ u_{n+1} - \beta u_n &= (u_1 - \beta u_0)\alpha^n \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient : $(\alpha - \beta)u_n = (u_1 - \beta u_0)\alpha^n - (u_1 - \alpha u_0)\beta^n$. Puisque $\Delta > 0$, $\alpha \neq \beta$ et $\alpha - \beta \neq 0$. Ce qui permet d'écrire :

$$u_n = \frac{u_1 - \beta u_0}{\alpha - \beta}\alpha^n - \frac{u_1 - \alpha u_0}{\alpha - \beta}\beta^n$$

$$\text{ou encore } u_n = A\alpha^n - B\beta^n$$

$$\text{avec } A = \frac{u_1 - \beta u_0}{\alpha - \beta} \text{ et } B = \frac{u_1 - \alpha u_0}{\alpha - \beta}.$$

---

3) On suppose $\Delta = 0$. On note α la solution de l'équation caractéristique.

a) En reprenant la question 2.a. en remplaçant β par α, dans la mesure où α est ici une racine double, on trouve : $u_{n+2} - \alpha u_{n+1} = \alpha(u_{n+1} - \alpha u_n)$.

b) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha^n s_n$. La relation (1) devient alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \alpha^{n+2}s_{n+2} - \alpha\alpha^{n+1}s_{n+1} &= \alpha(\alpha^{n+1}s_{n+1} - \alpha\alpha^n s_n) \\ \alpha^{n+2}s_{n+2} - \alpha^{n+2}s_{n+1} &= \alpha^{n+2}s_{n+1} - \alpha^{n+2}s_n \\ s_{n+2} - s_{n+1} &= s_{n+1} - s_n. \end{aligned}$$

La différence entre deux termes consécutifs de (s_n) demeure constatnte. On en déduit que la suite (s_n) est arithmétique ; on note R sa raison.

c) La suite (s_n) étant arithmétique de raison R et de premier terme s_0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} s_n &= s_0 + nR \\ \frac{u_n}{\alpha^n} &= \frac{u_0}{\alpha^0} + n(s_1 - s_0) \\ u_n &= \alpha^n\left(u_0 + n\left(\frac{u_1}{\alpha} - u_0\right)\right) \end{aligned}$$

Alors, en posant $A = u_0$ et $B = \frac{u_1}{\alpha} - u_0$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha^n (A + nB).$$

d) hæc quæstio perficienda est

---

4) **a)** Les solutions complexes $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de l'équation caractéristique sont deux complexes conjugués. On peut donc poser $\alpha = re^{i\theta}, \beta = re^{-i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in]0, \pi[$.

Les relations coefficients-racines étant toujours valables, la relation (1) peut toujours s'écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+2} - \alpha u_{n+1} &= \beta(u_{n+1} - \alpha u_n) \\
u_{n+2} - re^{i\theta} u_{n+1} &= re^{-i\theta}\left(u_{n+1} - re^{i\theta} u_n\right) \\
u_{n+2} - re^{i\theta} u_{n+1} &= re^{-i\theta} u_{n+1} - r^2 u_n \\
u_{n+2} &= \left(re^{i\theta} + re^{-i\theta}\right) u_{n+1} - r^2 u_n \\
u_{n+2} &= 2r\cos(\theta) u_{n+1} - r^2 u_n.
\end{aligned}$$