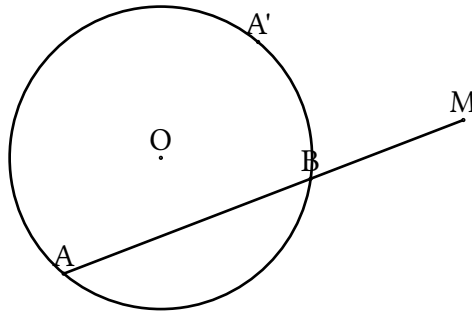


# Devoir maison n°14 : Puissance d'un point par rapport à un cercle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier  
1E1

## Problème 1 -

### Partie A - Définition



1) a) Comme  $[AA']$  forme un diamètre de  $\Gamma$ , les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{A'B}$  sont orthogonaux. Comme  $\overrightarrow{MA}$  et  $\overrightarrow{MB}$  sont colinéaires,  $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{A'B}$  et :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{A'B} \\ &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}\end{aligned}$$

b) Comme  $[AA']$  est un diamètre de  $\Gamma$ , en appliquant la formule de la médiane,

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} = OM^2 - R^2$$

---

2) a) TODO

b) Notons  $H$  l'un des points  $T$  ou  $S$  : la preuve est la même pour les deux. Par définition des tangentes, le triangle  $MHO$  est rectangle en  $H$ , et par Pythagore :

$$\begin{aligned}MH^2 + OH^2 &= OM^2 \\ \Leftrightarrow P_{\Gamma}(M) &= OM^2 - OH^2 = MH^2\end{aligned}$$

Ce qui prouve l'égalité.

---

3)

- $\mathcal{E}_1$  : Pour un point  $M$  n'appartenant pas à  $\Gamma$ ,  $OM \neq R$  et  $OM^2 \neq R^2$ , d'où  $P_{\Gamma}(M) \neq 0$ .  
Donc  $\mathcal{E}_1 = \emptyset$ . (Alternativement, en étendant la définition de  $P_{\Gamma}$ ,  $\mathcal{E}_1 = \Gamma$ )
- $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_3$  : Soit  $M \in \mathcal{P} \setminus \Gamma$ . Alors :



$$\begin{aligned} P_{\Gamma}(M) < 0 &\Leftrightarrow OM^2 < R^2 \\ &\Leftrightarrow OM < R \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{E}_2$  est l'intérieur de  $\Gamma$  et  $\mathcal{E}_3$  est l'extérieur de  $\Gamma$ .

**4) a)** C'est un cercle (montrer que comme  $P_{\Gamma}$  est cste,  $OM$  est constant)

$$M \in \mathcal{F}_k \Leftrightarrow OM^2 = R^2 + k$$

Comme  $R$  et  $k$  sont des constantes,  $\mathcal{F}_k$  est l'ensemble des points à une certaine distance du centre  $O$ . Ainsi :

- Si  $k \geq -R^2$ ,  $\mathcal{F}_k$  est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{R^2 + k}$
- Si  $k < -R^2$ ,  $\mathcal{F}_k = \emptyset$

**b)** :3:3

Partie B - Critère de cocyclicité

**1)** Notons  $\Gamma$  le cercle tel que  $A, B, C, D \in \Gamma$ . Comme  $A, B, C, D$  sont distincts,  $M$  n'appartient pas à  $\Gamma$ . Ainsi, le résultat du 1)b) d'unicité de la puissance d'un point s'applique et comme  $[AB]$  et  $[CD]$  sont des cordes de  $\Gamma$  :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = P_{\Gamma}(M) = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$$

Ce qui donne l'égalité cherchée.

**2)** Supposons que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$$

Par définition,  $D, E \in (MC)$ . On a donc dans un premier temps  $\overrightarrow{DE}$  et  $\overrightarrow{MC}$  colinéaires. De plus, comme  $A, B, C, E$  sont sur un même cercle  $\Gamma$ , par unicité de la puissance d'un point, on obtient :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = P_{\Gamma}(M) = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{ME}$$

En faisant la différence des deux expressions de  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MC} \cdot (\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MD}) &= \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DE} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$

Donc  $\overrightarrow{DE} \perp \overrightarrow{MC}$ . Comme  $\overrightarrow{DE}$  et  $\overrightarrow{MC}$  sont à la fois perpendiculaires et colinéaires, et que  $\overrightarrow{MC} \neq \vec{0}$ ,  $\overrightarrow{DE} = \vec{0}$  et  $E = D$ . Donc  $A, B, C, D$  sont bien cocycliques.

**3)** Notons  $\Gamma$  le cercle circonscrit à  $ABT$  et  $O$  son centre. Soit  $M \in (AB)$ . Comme  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = P_{\Gamma}(M) = OM^2 - R^2$ , on trouve que :

$$OM^2 - R^2 = MT^2 \Leftrightarrow OM^2 = OT^2 + MT^2$$



Par le théorème de Pythagore, le triangle  $OTM$  est rectangle en  $T$  et  $(MT)$  est bien tangente à  $\Gamma$

Partie C - Quelques applications

**1)** Notons  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Donc  $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$ . Calculons  $\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DB}$  pour montrer que  $(IM) \perp (BD)$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{MB} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DM} + \underbrace{(AM) \cdot \overrightarrow{DM}}_{=0} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{MB} + \underbrace{(AM) \cdot \overrightarrow{MB}}_{=0} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MB}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DM} \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc  $(IM) \perp (DB)$  : comme  $M \in (IM)$ ,  $(IM)$  est bien la hauteur issue de  $M$  dans  $MDB$ .

**2) a)**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KH}) \cdot (\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}) \\ &= \underbrace{\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AK}}_{=0} + \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{AK} + \underbrace{\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{KC}}_{=0} \\ &= \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{AK}\end{aligned}$$

De plus,  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{KC} = -\overrightarrow{KB} \cdot \overrightarrow{KC} = -P_T(K)$

Et  $\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{KH} \cdot \overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KA_1} \cdot \overrightarrow{KA} = P_T(K)$

Donc  $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ , et  $H$  appartient à la hauteur issue de  $B$ .

**b)**

**3)**