## Devoir maison n°11 : Équation de Pell-Fermat

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier 1E1

### Partie A - Premières propriétés

$$(E): x^2 - 5y^2 = 1$$

1) Symétries: Les variables x et y sont mises au carré dans (E) et donc toujours positives. Donner un nombre négatif présent dans  $\mathbb{Z}$  est équivalent à donner son opposé qui est dans  $\mathbb{N}$ . Il suffit donc de chercher toutes les solutions (x,y) positives qui sont dans  $\mathbb{N}^2$  pour obtenir toutes les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$  de (E).

### 2) Nombre de solutions

а) Soient  $a,b\in\mathbb{N}$ . L'identité de Вканмадирта est équivalente à :

$$(a^2 + 5b^2)^2 - (a^2 - 5b^2)^2 = 5(2ab)^2$$

En factorisant le côté gauche de l'équation, on trouve :

$$\begin{aligned} \left(a^2 + 5b^2\right)^2 - \left(a^2 - 5b^2\right)^2 &= \left(a^2 + a^2 + 5b^2 - 5b^2\right) \left(a^2 - a^2 + 5b^2 + 5b^2\right) \\ &= \left(2a^2\right) \left(2 \cdot 5b^2\right) \\ &= 5(2ab)^2 \end{aligned}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

**b)** Soit  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ , tel que  $(x, y) \neq (1, 0)$  et (x, y) solution de  $(E) : x^2 - 5y^2 = 1$ .

l'identité de Brahmagupta assure que :

$$1 = \left(a^2 + 5b^2\right) - 5(2ab)^2$$

Autrement dit,  $(a^2 + 5b^2, 2ab)$  est également une solution de (E). Comme  $a^2 + 5b^2 > a$  et 2ab > b, cette solution est également différente de (a,b) et de tout autre solution (x,y) où x < a, y < b. Il existe donc, en itérant ce procédé, une infinité de solutions de (E) dans  $\mathbb{N}^2$ .

c)  $(a,b) \in \mathbb{N}^2$  est solution de (E) si et seulement si  $a^2 = 1 + 5b^2$ . Comme  $b^2 \ge 0$  et  $a \ge 0$ , on trouve que (a,b) est solution si et seulement si  $a = \sqrt{1+5b^2}$ . On pose donc  $f(b) = \sqrt{1+5b^2}$ .

TODO: script

**d)** Supposons que (a,b) et (a',b) soient solutions. Alors a=f(b)=a' et a=a'. On peut donc bien choisir un « couple minimal » comme le couple avec le b minimal.

1

**e)** Soit (a, b) une solution de (E) avec  $a, b \in \mathbb{N}^*$ . On a donc :



$$(E): a^2 - 5b^2 = 1$$
  

$$\Leftrightarrow a^2 = 1 + 5b^2$$
  

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{1 + 5b^2}$$

 $\operatorname{car} a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N} \operatorname{donc} a \geq 0, 1 + 5b^2 \geq 0.$ 

Une telle fonction est donc

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$$
$$b \mapsto \sqrt{1 + 5b^2}$$

La solution est valide si et seulement si  $f(b) \in \mathbb{N}$ .

Voici un script Haskell qui détermine des couples solution :

```
f :: Double -> Double
f b = sqrt (1 + 5 * b^2)

test_to :: Double -> [Double]
test_to n = filter (isNat . f) [1..n]
```

#### On obtient:

[4, 72, 1292, 23184, 416020, 7465176, 16692641, 24157817, 31622993, 48315634, 55780810, 63245986, 79938627, 87403803, 94868979, 111561620, 119026796, 126491972, 133957148, ..., 3077073806,3077489826, 3078836095, ...]

Partie B - L'ensemble 
$$\mathbb{Z}\big[\sqrt{5}\big] = \big\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\big\}$$

**1)** L'existence de cette écriture est assurée par la définition de  $\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$ . Supposons que  $x=a+b\sqrt{5}=c+d\sqrt{5}$  pour  $(a,b),(c,d)\in\mathbb{Z}^2$ . Si  $b\neq d$ , alors :

$$a + b\sqrt{5} = c + d\sqrt{5}$$
$$\iff \sqrt{5} = \frac{c - a}{b - d}$$

Ce qui contredit l'irrationalité de  $\sqrt{5}$ . Donc b=d, et  $a+b\sqrt{5}=c+b\sqrt{5}$ , d'où a=c. Donc l'écriture  $x=a+b\sqrt{5}$  de chaque  $x\in\mathbb{Z}\left[\sqrt{5}\right]$  est unique.

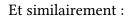
2) Posons  $x=a+b\sqrt{5},y=c+d\sqrt{5}.$  Alors :

$$\overline{x+y} = \overline{(a+c) + (b+d)\sqrt{5}}$$

$$= (a+c) - (b+d)\sqrt{5}$$

$$= (a-b\sqrt{5}) + (c-d\sqrt{5})$$

$$= \overline{x} + \overline{y}$$



$$\overline{xy} = \overline{(ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}}$$

$$= ac + 5bd - (ad + bc)\sqrt{5}$$

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = (a - b\sqrt{5}) \cdot (c - d\sqrt{5})$$

$$= (ac + 5bd) - (ad + bc)\sqrt{5}$$

D'où  $\overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ .

# Partie C - Détermination d'un élément générateur de $\mathbb{U}.$

