

Devoir maison n°10 : Droites Tropicales

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

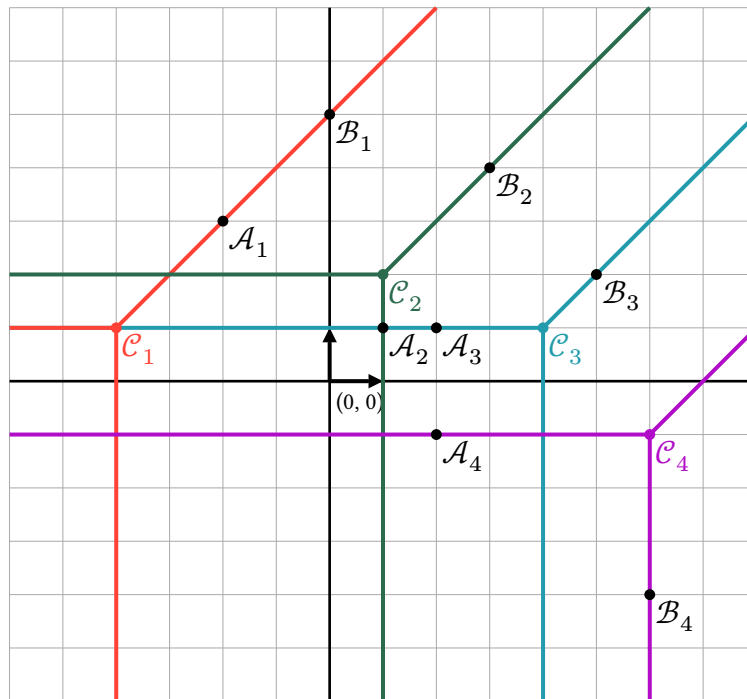
Partie A - Les droites tropicales

(\mathcal{A}') « Par deux points du plan passe une droite tropicale. »

(\mathcal{B}') « Par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale. »

(\mathcal{C}') « Deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point. »

1) a)



b) On cherche à prouver (\mathcal{A}'). Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux points quelconques du plan. Par une translation T on se ramène au cas où :

$$\mathcal{A}(0,0) \text{ et } \mathcal{B}(x,y) \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

Etudions d'abord des cas particuliers :

Si $x = 0$ et $y = 0$ alors $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, la droite tropicale de centre \mathcal{A} convient.

Si $y = 0$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\max(0, x), 0)$ convient.

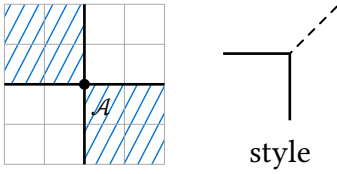
Si $x = 0$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(0, \max(0, y))$ convient.

Si $x = y$ alors la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\min(0, x), \min(0, y))$ convient.

Attaquons nous désormais aux cas généraux :



Si $x < 0$ et $y > 0$



Il existe $\mathcal{C}(0, y)$. Soient les demi-droites :

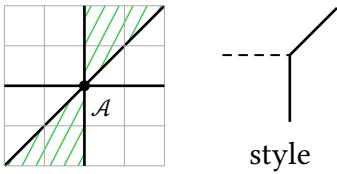
$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$ par construction, \mathcal{H} est parallèle à l'axe des abscisses.

$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$ par construction, \mathcal{V} est parallèle à l'axe des ordonnées.

Comme $x < 0$, \mathcal{H} est de direction $-\vec{i}$ et comme $y > 0$, \mathcal{V} est de direction $-\vec{j}$. Donc \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} .

En inversant les rôles de \mathcal{A} et \mathcal{B} , on obtient la deuxième partie rayée.

Si $x > 0$ et $y > 0$ et $y > x$



Soit \mathcal{D}' la droite parallèle à $y = x$ et passant par \mathcal{B} . On nomme \mathcal{C} l'intersection entre \mathcal{D}' et l'axe des ordonnées. Comme $y > x$, $y_{\mathcal{C}} > 0$. Soient les demi-droites :

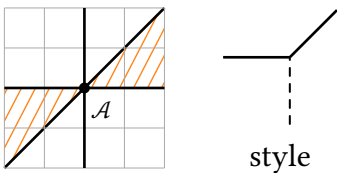
$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$ par construction, \mathcal{D} est de direction $\vec{i} + \vec{j}$

$\mathcal{V} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$ par construction, \mathcal{V} est de direction $-\vec{j}$

Donc \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} .

En inversant les rôles de \mathcal{A} et \mathcal{B} , on obtient que pour $0 > x$ et $0 > y$ et $x > y$, \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} , soit la deuxième zone rayée.

Si $x > 0$ et $y > 0$ et $y < x$

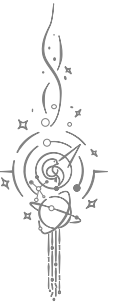


Doit \mathcal{D}' la droite parallèle à $y = x$ et passant par \mathcal{B} . On nomme \mathcal{C} l'intersection entre \mathcal{D}' et l'axe des abscisses. Comme $y < x$, $x_{\mathcal{C}} > 0$. Soient les demi-droites :

$\mathcal{D} : [\mathcal{C}, \mathcal{B})$ par construction, \mathcal{D} est de direction $\vec{i} + \vec{j}$

$\mathcal{H} : [\mathcal{C}, \mathcal{A})$ par construction, \mathcal{H} est de direction $-\vec{i}$

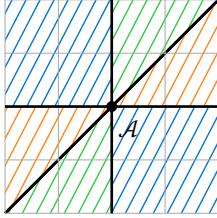
Donc \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} .



En inversant les rôles de \mathcal{A} et \mathcal{B} , on obtient que pour $0 > x$ et $0 > y$ et $x < y$, \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la droite tropicale de centre \mathcal{C} , soit la deuxième zone rayée.

Conclusion

En combinant les différentes disjonctions de cas démontrées plus haut on obtient :



Le cas des lignes noires est couvert par les cas particuliers. Nous avons donc prouvé que pour tout point quelconque \mathcal{B} , il existe une droite tropicale passant par \mathcal{B} et par l'origine \mathcal{A} . Nous pouvons revenir au cas général avec deux points quelconques par la translation inverse de T .

Nous avons donc démontré (\mathcal{A}') : par deux points du plan passe une droite tropicale.

2) a) La propriété (\mathcal{B}) n'est pas vraie pour les droites tropicales dans le cas de deux points dépendants.

Contre-exemple : Prenons les points $\mathcal{A}(0, 0)$ et $\mathcal{B}(1, 0)$, qui sont dépendants. La droite tropicale de point central $\mathcal{C}_1(2, 0)$ passe par \mathcal{A} et par \mathcal{B} , mais celle de point central $\mathcal{C}_2(3, 0)$ aussi. Il y a même une infinité de droites tropicales passant par ces deux points : toutes celles dont le point central est d'ordonnée nulle et d'abscisse supérieure à 1.

b) On cherche à prouver (\mathcal{B}') : « Par deux points quelconques indépendants du plan passe une et une seule droite tropicale. »

Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} deux points indépendants du plan. Par une translation T on fait en sorte que $\mathcal{A}(0, 0)$ et $\mathcal{B}(x, y)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Comme \mathcal{A} et \mathcal{B} sont indépendants, $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $x \neq y$.

D'après (\mathcal{A}') , il existe une droite tropicale de centre $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ passant par \mathcal{A} et \mathcal{B} . On nomme respectivement \mathcal{H} , \mathcal{V} et \mathcal{D} les demi-droites de direction $-\vec{i}$, $-\vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ formant cette droite tropicale.

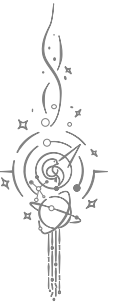
On considère toutes les combinaisons de demi-droites auxquelles pourraient appartenir \mathcal{A} et \mathcal{B} afin de déterminer $\mathcal{C}(\alpha, \beta)$.

Cas impossibles :

Si \mathcal{A} et \mathcal{B} appartiennent à la même demi-droite, alors ils sont dépendants ce qui n'est pas possible donc on peut éliminer les cas $(\mathcal{A} \in \mathcal{H} \text{ et } \mathcal{B} \in \mathcal{H})$, $(\mathcal{A} \in \mathcal{V} \text{ et } \mathcal{B} \in \mathcal{V})$ et $(\mathcal{A} \in \mathcal{D} \text{ et } \mathcal{B} \in \mathcal{D})$.

Cas génériques :

Si $\mathcal{A} \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{H}$ alors les contraintes sur \mathcal{C} sont $\mathcal{A} \in \mathcal{V} \Rightarrow \alpha = 0$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{H} \Rightarrow \beta = y$. Cela donne $\mathcal{C}(0, y)$.



Si $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{H}$ alors les contraintes sur \mathcal{C} sont $\mathcal{A} \in \mathcal{D} \Rightarrow \alpha = \beta$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{H} \Rightarrow \beta = y$.
 Cela donne $\mathcal{C}(y, y)$;
Si $\mathcal{A} \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{V}$ alors les contraintes sur \mathcal{C} sont $\mathcal{A} \in \mathcal{D} \Rightarrow \alpha = \beta$ et $\mathcal{B} \in \mathcal{V} \Rightarrow \alpha = x$.
 Cela donne $\mathcal{C}(x, x)$;

En inversant les rôles de \mathcal{A} et \mathcal{B} on obtient également les contraintes suivantes : TODO

On remarque qu'à moins que $x = 0, y = 0$ ou $x = y$ ce qui n'est pas possible puisque \mathcal{A} et \mathcal{B} sont indépendants, il n'est pas possible que plusieurs droites donne le même centre.
 (ce qui n'est pas ce que l'on cherche à démontrer)

3) On cherche à prouver (\mathcal{C}') : « Deux droites tropicales dont les points centraux sont indépendants se coupent toujours en un unique point. »

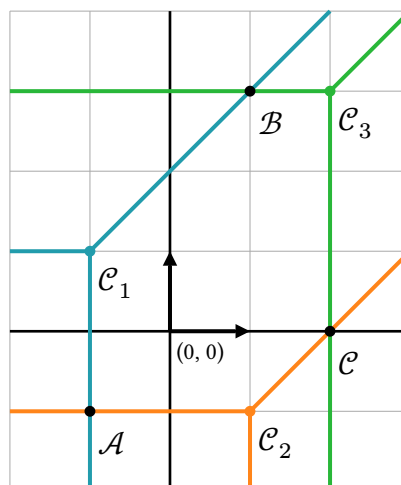
Soient \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux centres de droites tropicales, indépendants. Par une translation T , on se ramène à $\mathcal{C}(0, 0)$ et $\mathcal{C}'(x, y)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. Comme \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont indépendants, $x \neq 0, y \neq 0, x \neq y$.

On nomme respectivement \mathcal{H}, \mathcal{V} et \mathcal{D} les demi-droites de direction $-\vec{i}, -\vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ continuant la droite tropicale \mathcal{C} . On fait de même pour \mathcal{C}' avec $\mathcal{H}', \mathcal{V}'$ et \mathcal{D}' .

Si $y > 0$ et $x < 0$ alors \mathcal{V}' coupe \mathcal{H} en I .
Si $y > 0$ et $x > 0$ et $y > x$ alors \mathcal{V}' coupe \mathcal{D} en I .
Si $y < 0$ et $x < 0$ et $y > x$ alors \mathcal{D}' coupe \mathcal{H} en I .
Si $y < 0$ et $x < 0$ et $y < x$ alors \mathcal{D}' coupe \mathcal{V} en I .
Si $y > 0$ et $x > 0$ et $y < x$ alors \mathcal{H}' coupe \mathcal{D} en I .
Si $y < 0$ et $x > 0$ alors \mathcal{H}' coupe \mathcal{V} en I .

Il n'y a aucune intersection autre que I entre les demi-droites pour chacun des cas, donc I est bien l'unique intersection de deux droites tropicales.

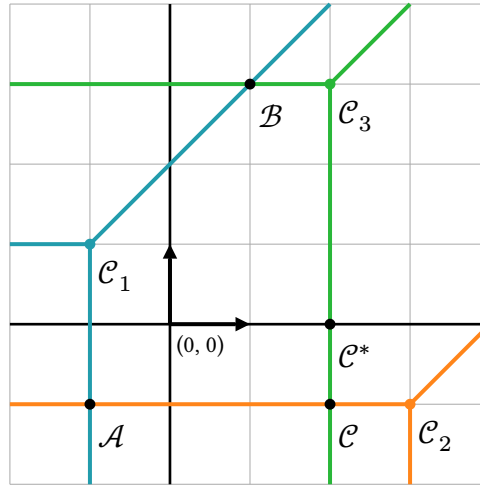
4) Voici l'exemple donné de triangle tropical :



Il est spécifié que dans cet exemple, $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{C}} = 360^\circ$.

a) On considère le triangle tropicale suivant :

$$\pi = 4$$



On a repris la figure de l'exemple, sur laquelle on a rajouté 2 à l'abscisse de \mathcal{C}_2 .

\mathcal{C}^* représente l'emplacement de \mathcal{C} sur l'ancienne figure. $\hat{\mathcal{A}}$ et $\hat{\mathcal{B}}$ ne sont pas impactés par le changement, par contre alors que $\hat{\mathcal{C}}^*$ était obtus, $\hat{\mathcal{C}}$ est droit. Donc $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{C}} < 360$.

L'égalité $\hat{\mathcal{A}} + \hat{\mathcal{B}} + \hat{\mathcal{C}} = 360$ n'est pas vrai pour tous les triangles tropicaux.

b)

Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ trois points indépendants du plan, centres de trois droites tropicales et sommets d'un triangle tropical.

D'après (\mathcal{C}') , les trois intersections $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ des trois droites tropicales doivent exister.

Il existe deux intersections sur une demi-droite de direction $-\vec{i}, -\vec{j}$ ou $\vec{i} + \vec{j}$ **si et seulement si** les deux intersections sont dépendantes.

Or on suppose $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ indépendants donc chaque demi-droite possède *au plus* une intersection.

Nous savons donc que chaque droite tropicale possède deux intersections qui sont répartis entre ses trois demi-droites. Donc l'unique cas de figure possible est que chacune des trois intersections soit entre deux demi-droites dont la combinaison de leur direction est inédite.¹

Or, l'intersection entre une demi-droite de direction $-\vec{i}$ et $-\vec{j}$ donne un angle de 90° . $\vec{i} + \vec{j}$ et $-\vec{i}$ donne $90^\circ + 45^\circ$. $\vec{i} + \vec{j}$ et $-\vec{j}$ donne $90^\circ + 45^\circ$.

La somme des angles d'un triangle tropical dont les sommets sont indépendants donne donc $4 \times 90^\circ = 360^\circ$.

Partie B - Addition et Multiplication tropicales

On définit sur \mathbb{R} l'addition tropicale et la multiplication tropicale tel que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

¹En effet, soient deux directions, pour avoir deux fois une intersection entre des demi-droites ayant ces directions, comme cela arrive à la figure de la question 4) a), il est nécessaire que la troisième demi-droite formant les intersections (appartenant à \mathcal{C}_2 dans l'exemple) possède deux intersections, ce qui est contraire à la conclusion que chaque demi-droite possède *au plus* une intersection.



$$a \oplus b = \max(a, b) \quad \text{et} \quad a \otimes b = a + b$$

1) On a donc : $3 \oplus 7 = 7$ $-5 \oplus 2 = 2$ $3 \otimes 7 = 10$ $-5 \otimes 2 = -3$

2) \oplus est associatif et commutatif car \max est associatif et commutatif.

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Supposons sans perte de généralité que $b \leq c$ car \oplus est commutatif.

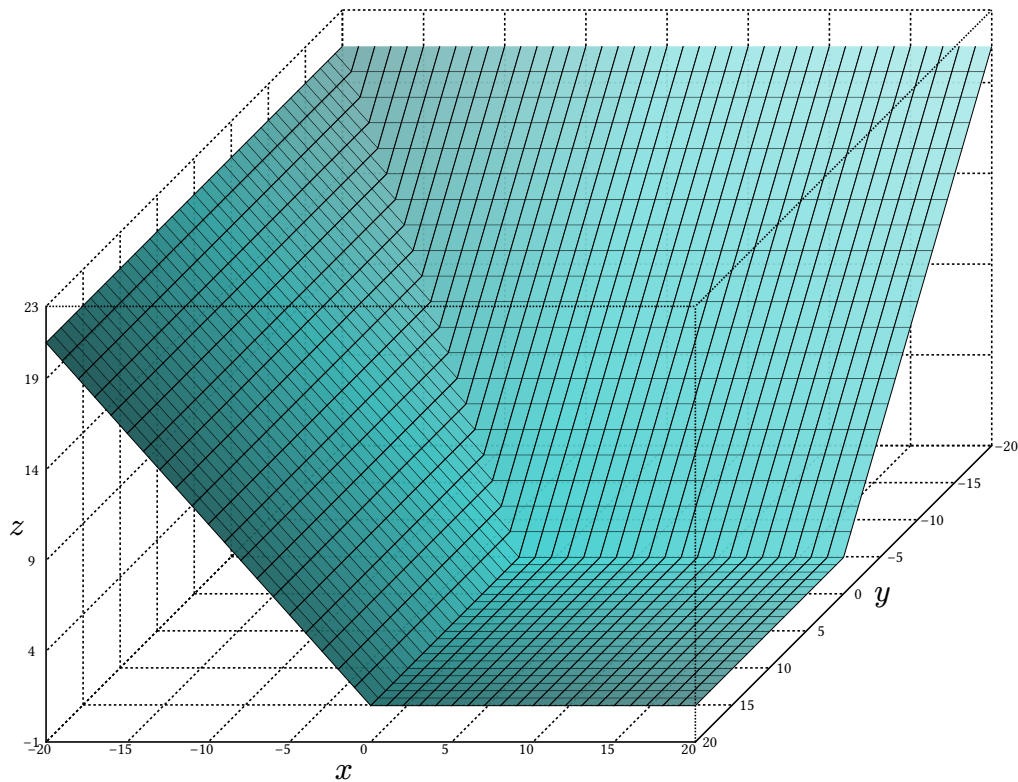
On a $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes c = a \otimes b \oplus a \otimes c$ puisque $a \otimes b \leq a \otimes c$.

3) Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ les paramètres du polynôme de premier degré et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ représentant les points du plan.

Visualisation graphique

Voici à quoi ressemble une fonction tropicale² de degré 1 : $a \otimes x \oplus b \otimes y \oplus c$:

$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$

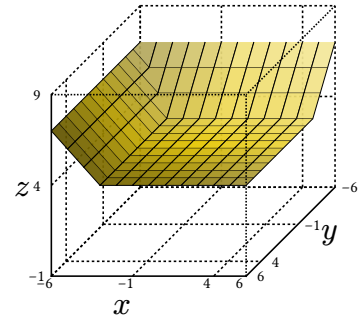
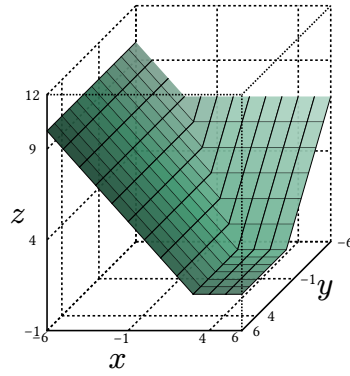
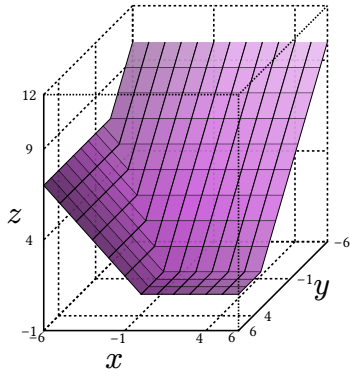
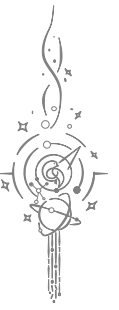


$$1 \otimes x \oplus 5 \otimes y \oplus 1$$

$$5 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 1$$

$$1 \otimes x \oplus 1 \otimes y \oplus 5$$

²Pour des raisons esthétiques, nous utilisons dans les graphiques l'opposé des valeurs de x et y .



On remarque que modifier les valeurs a , b et c « décale » l'un des « bords ».

Démonstration

On recherche le lieu (les droites) qui permettent d'atteindre deux fois le maximum dans $P_T = \max(a+x, b+y, c)$, ce qui est vrai si et seulement si :

$$\begin{aligned} a+x=c &\Leftrightarrow x=c-a &\rightarrow \text{parallèle à l'ordonnée} \\ b+y=c &\Leftrightarrow y=c-b &\rightarrow \text{parallèle à l'abscisse} \\ a+x=b+y &\Leftrightarrow x-y=b-a &\rightarrow \text{parallèle à } x=y \end{aligned}$$

Nous avons donc bien trois droites habituelles avec les bonnes directions qui permettraient de former une droite tropicale si ces trois droites se coupaient au même point.³

Or $x-y = (c-a) - (c-b) = b-a$, donc le point $\mathcal{C}(c-a, c-b)$ appartient aux trois droites et est le centre de la droite tropicale.⁴

Par ailleurs, remplacer x et y par $c-a$ et $c-b$ dans $\max(a+x, b+y, c)$ permet bien d'atteindre trois fois le maximum.

Le lieu des coins de P_T est une droite tropicale de centre $\mathcal{C}(c-a, c-b)$.

4) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ représentant les points du plan.

Visualisation graphique

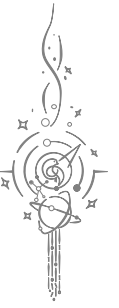
Voici à quoi ressemble la fonction tropicale du second degré⁵ :

$$Q_T(x, y) = 1 \oplus (-1) \otimes x \oplus 0 \otimes y \oplus (-5) \otimes x^2$$

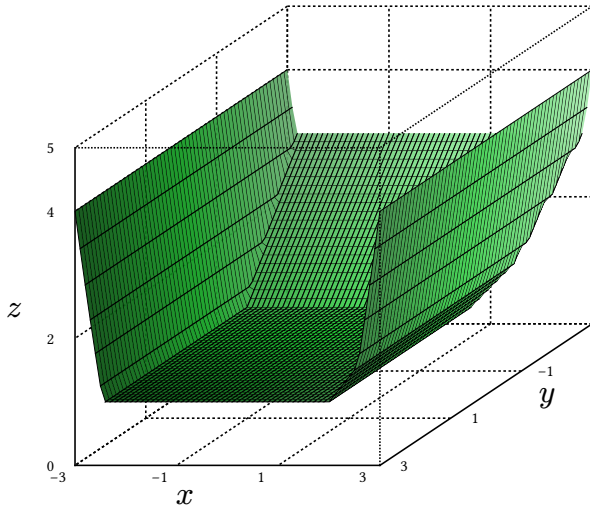
³En effet, trois droites parallèles à l'abscisse, l'ordonnée et $x=y$ qui se croisent en un point \mathcal{C} permettent de former trois demi-droites partant de \mathcal{C} dans les directions $-\vec{i}, -\vec{j}$ et $\vec{i} + \vec{j}$ et donc de former une droite tropicale de centre \mathcal{C} .

⁴Dans l'espace, le point $\mathcal{C}(c-a, c-b, c)$ est bien l'intersection des trois droites.

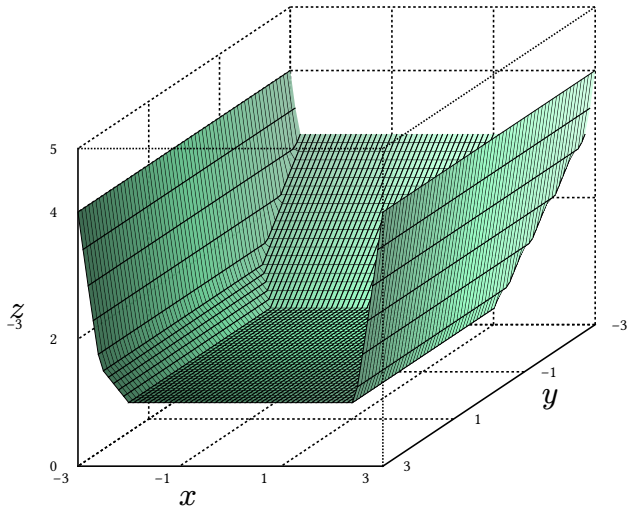
⁵On prend l'opposé pour l'axe y



D'un côté :



De l'autre en prenant l'opposé pour l'axe x :



Démonstration

De manière similaire à ce que nous avons réalisé pour le polynôme de premier degré, recherchons les ensembles de points permettant d'atteindre deux fois le maximum $Q_T(x, y) = \max(1, x-1, y, x^2-5)$:

$$\begin{aligned}
 1 = x - 1 &\Leftrightarrow x = 2 && \rightarrow \text{parallèle à l'ordonnée} \\
 x - 1 = y &\Leftrightarrow x - y = 1 && \rightarrow \text{parallèle à } x = y \\
 y = 1 &\Leftrightarrow y = 1 && \rightarrow \text{parallèle à l'abscisse} \\
 x^2 - 5 = 1 &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6} && \rightarrow \text{parallèle à l'ordonnée} \\
 x^2 - 5 = x - 1 &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} && \rightarrow \text{parallèle à l'ordonnée} \\
 x^2 - 5 = y &\Leftrightarrow x^2 - y = 5 && \rightarrow \text{n'est pas une droite}
 \end{aligned}$$

Pour réaliser une droite tropicale, nous avons besoin d'une droite parallèle à l'abscisse et d'une parallèle à $x = y$, nous devons donc nécessairement utiliser $y = 1$ et $x - y = 1$ et nous ne pourrions construire qu'une seule droite tropicale. En combinant ces deux équations nous obtenons $x = 2$ comme point de croisement. La droite $x = 2$ que nous avons précédemment déterminée passe par ce point et convient donc.

Le lieu des coins de Q_T est la droite tropicale de centre $\mathcal{C}(2, 1)$