

Devoir maison n°1 : Fonctions contractantes, dilatantes et points fixes

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1 | TE1

Partie A - Fonctions contractantes et rétrécissantes.

1) Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$, et f une fonction définie sur I telle que pour tous $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

2) Soit f une fonction contractante définie sur I , et $x, y \in I$. Il existe donc $k \in]0, 1[$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ (*).

Or,

$$\begin{aligned} k < 1 &\implies k|x - y| < |x - y| \\ &\implies |f(x) - f(y)| < |x - y| \text{ d'après (*)} \end{aligned}$$

f est donc rétrécissante.

De plus,

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \implies |f(x) - f(y)| \leq 1 \times |x - y|$$

f est donc 1-lipschitzienne.

3) Soient $a \in \mathbb{R}$, $I = [a, +\infty[$, et $f : x \mapsto x + \frac{1}{x-a+1}$ pour tous $x \in I$.

a) f est dérivable sur I . Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-a+1)^2}$. Or,

$$\begin{aligned} x \in I &\implies x \geq a \\ &\implies x - a \geq 0 \end{aligned}$$

Partie B - Fonctions rétrécissantes et point fixe.

Partie C - Fonctions dilatantes.