

# Devoir maison n°5 : Existence de la fonction exponentielle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier  
TE1

## Partie A - Inégalité de Bernoulli

Soit  $\alpha > -1$ . On prouve l'inégalité de Bernoulli par récurrence sur  $n$ .

Initialisation :  $(1 + \alpha)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot \alpha = 1$ . (On remarque que la convention  $0^0 = 1$  n'est pas nécessaire car  $\alpha \neq -1$ )

Hérédité : Supposons que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha$ . Alors :

$$\begin{aligned}(1 + \alpha)^{n+1} &\geq (1 + \alpha)(1 + n\alpha) = 1 + \alpha + n\alpha + n\alpha^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)\alpha \quad \text{car } n \geq 0 \text{ et } \alpha^2 \geq 0\end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, l'inégalité de Bernoulli est bien vraie pour tout  $\alpha > -1$  et tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## Partie B - Convergence de deux suites

1) a) On calcule :

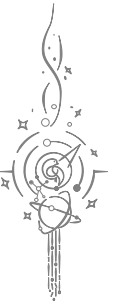
$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right) &= \left(\frac{n+x}{n}\right) \left(\frac{(n+1)(n+x) - x}{(n+1)(n+x)}\right) \\ &= \frac{n(n+x) + n}{n(n+1)} \\ &= \frac{n+x+1}{n+1} = 1 + \frac{x}{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}u_{n+1}(x) &= \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

b) Pour tout  $x$  fixé, la suite  $\left(-\frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 par quotient, car  $n + a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . Par définition de la convergence, il existe donc un rang  $n_0$  pour lequel, avec  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , on a pour tout  $n \geq n_0$  que :

$$-1 < -\frac{1}{2} < -\frac{x}{(n+1)(n+x)} < \frac{1}{2}$$



Similairement,  $1 + \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$  et on obtient un rang  $n_1$  de la même manière.

c) Posons  $n_2 = \max(n_0, n_1)$ . Ainsi, pour tout  $n \geq n_2$ ,  $n \geq n_0$  permet d'appliquer l'inégalité de Bernoulli à  $\left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^{n+1}$  et  $n \geq n_1$  permet d'avoir  $n+x \neq 0$ . On a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x) &\stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) \\ &\geq u_n(x) \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n+x}\right) = u_n(x) \frac{n+x}{n} \frac{n}{n+x} \\ &\geq u_n(x) \end{aligned}$$

Donc la suite  $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante au moins à partir du rang  $n_2$ .

2) On remarque que  $w_n(x) = u_n(-x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Or, la suite  $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante à partir d'un certain rang pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . Donc  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante à partir d'un certain rang.

De plus,  $w_n$  n'est nul que pour au plus un rang, et est non nul pour tous les autres termes. On a donc  $v_n = w_n^{-1}$  au moins à partir d'un certain rang, et, par croissance de  $(w_n)$  et décroissance de la fonction inverse, la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante à partir d'un certain rang.

3) a) Soit  $n > |x|$ . Alors  $v_n \neq 0$  et :

$$\frac{u_n}{v_n} = \left( \frac{1 + \frac{x}{n}}{\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-1}} \right)^n = \left( 1 - \frac{x^2}{n^2} \right)^n$$

Or,  $\frac{x^2}{n^2} < 1$ . Donc  $1 \geq \frac{u_n}{v_n}$ , et on peut également appliquer l'inégalité de Bernoulli pour obtenir :

$$\frac{u_n}{v_n} \geq 1 - \frac{x^2}{n}$$

b) On obtient l'inégalité suivante :

$$\frac{x^2}{n} \geq \frac{v_n - u_n}{v_n} \geq 0$$

Or, la suite  $(v_n)$  est strictement positive à partir d'un certain rang  $N$  et décroissante à partir d'un certain rang  $M$ . Ainsi, pour tout  $n \geq k := \max(N, M, \lfloor |x| \rfloor + 1) > |x|$ , on a :

$$v_k \frac{x^2}{n} \geq v_n \frac{x^2}{n} \geq v_n - u_n \geq 0$$

c) Comme  $x^2$  et  $v_k(x)$  sont fixés,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_k \frac{x^2}{n} = 0$ . D'après le théorème d'encadrement, on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) - u_n(x) = 0$$

<sup>1</sup>On note temporairement  $u_n = u_n(x)$  et  $v_n = v_n(x)$ , tant que  $x$  est fixé.



Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les suites  $(u_n(x))$  et  $(v_n(x))$  sont adjacentes, en compilant les résultats du 1)c), du 2), et du 3)b). Ces deux suites admettent donc une limite finie commune.

## Partie C - Existence

1) La suite  $(u_n(0))$  est constante, égale à 1 et tend donc vers 1. Donc  $f(0) = 1$ .

2) a) On a :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{h}{n+x}\right) &= \frac{n+x}{n} \cdot \frac{n+x+h}{n+x} \\ &= \frac{n+x+h}{n} = \left(1 + \frac{x+h}{n}\right) \end{aligned}$$

D'où l'égalité recherchée en passant à la puissance  $n$ .

b) Soient  $|h| < 1$  et  $n > |x| + 1$ . On a donc  $n+x \geq 1$  et  $\left|\frac{h}{n+x}\right| < 1$ , et l'inégalité de Bernoulli s'applique car on a au moins  $\frac{h}{n+x} > -1$ . On a :

$$\left(1 + \frac{x+h}{n}\right)^n \stackrel{\text{Bernoulli}}{\geq} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{nh}{n+x}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 + \frac{h}{1 + \frac{x}{n}}\right)$$

c) En passant à la limite l'inégalité précédente, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{n} = 1$ , pour tout  $|h| < 1$  :

$$f(x+h) \geq f(x)(1+h)$$

En particulier,  $|-h| < 1$  quand  $|h| < 1$  et en appliquant l'inégalité précédente à  $x \leftarrow x+h$  :

$$f(x+h-h) = f(x) \geq f(x+h)(1-h) \iff \frac{f(x)}{1-h} \geq f(x+h)$$

d) Fixons  $x \in \mathbb{R}$  et  $|h| < 1$  non nul. On a donc les inégalités suivantes :

$$f(x)(1+h) \leq f(x+h) \leq \frac{f(x)}{1-h} \iff hf(x) \leq f(x+h) - f(x) \leq \frac{hf(x)}{1-h}$$

Ainsi, en fonction du signe de  $h$  :

$$f(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq \frac{f(x)}{1-h} \text{ ou } f(x) \geq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq \frac{f(x)}{1-h}$$

e) En passant à la limite l'inégalité quand  $h \rightarrow 0$ , on obtient par le théorème d'encadrement que :

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f$  est dérivable en  $x$  et  $f'(x) = f(x)$ . Donc la fonction  $f$  satisfait bien l'équation différentielle définissant la fonction exponentielle.