

Devoir maison n°3 :

Théorème de la corde universelle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Exemples

Dans les parties A et B, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Partie B - Généralisation

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Pour tout $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on pose $g(x) = f(x) - f(x + \frac{1}{n})$.

1) La fonction continue $x \mapsto x + \frac{1}{n}$ a son ensemble image inclus dans $[0, 1]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Or f est continue sur $[0, 1]$ donc g est continue sur $[0, 1]$ par opérations et composition de fonctions continues sur $[0, 1]$.

2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \\ &= f(0) - f(1) \quad \text{par télescopage} \\ &= 0 \quad \text{car } f(0) = f(1)\end{aligned}$$

3) On recherche s'il existe $\alpha \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}) = 0$,

- soit $g(\frac{k}{n})$ est égal à 0 pour tous $k \in [0, n-1]$ et l'on peut prendre n'importe quel k pour avoir $\alpha = \frac{k}{n}$ puisque $k \in [0, n-1]$ donc $\frac{k}{n} \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$.
- soit il existe k' tel que $g(\frac{k'}{n}) \neq 0$. Dans ce cas puisque la somme vaut 0, il existe nécessairement au moins un k'' tel que $g(\frac{k''}{n})$ soit de signe opposé à $g(\frac{k'}{n})$. Comme g est continue sur $[0, 1]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha \in [\frac{k'}{n} \leftrightarrow \frac{k''}{n}]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $[\frac{k'}{n} \leftrightarrow \frac{k''}{n}] \subseteq [0, 1 - \frac{1}{n}]$, on a bien $\alpha \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$.

Partie C - Généraliser encore ?

Soit $T \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{T} \notin \mathbb{Z}$, et f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. On considère $f : x \mapsto \sin^2(\frac{\pi x}{T}) - x \sin^2(\frac{\pi}{T})$ d'inconnue $x \in [0, 1 - T]$.

1) Comme la fonction sinus est continue sur \mathbb{R} et que $T \neq 0$, f est continue sur $[0, 1]$ par opérations et composition de fonctions continues.



$$f(0) = \sin^2(0) - 0 = 0$$

$$f(1) = \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0$$

Donc on a bien $f(0) = f(1)$.

2)

$$\begin{aligned} f(x) - f(x+T) &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - x \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi(x+T)}{T}\right) + (x+T) \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{T} + \pi\right) + T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \left(\sin\left(\frac{\pi x}{T}\right) \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \cos\left(\frac{\pi x}{T}\right) \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \right)^2 + T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\ &= T \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \end{aligned}$$

Or $T \neq 0$ et comme $\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{T} = 0$ ou $\frac{\pi}{T} = \pi$ et $T \neq 1$, on a que pour tout x dans $[0, 1 - T]$, $f(x) - f(x+T) > 0$

3) On a que $f(x) - f(x+T) > 0$ ie $f(x) > f(x+T)$ donc $f(x) \neq f(x+T)$ pour tout x dans $[0, 1 - T]$.

Nous avons trouvé un contre-exemple donc $f(x+T) = f(x)$ est impossible pour tout x dans $[0, 1 - T]$.