Devoir maison n°4 : Méthode de Newton

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Description de la méthode de Newton

1) D'une part on sait que la fonction f est dérivable donc continue sur $[a, b]$ et qu'elle y est strictement monotone car f' strictement négative. D'autre part, on dispose de $f(a) > 0$ et de $f(b) < 0$.

Ainsi, d'après le corollaire du Théorème des Valeurs Intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

---

2) a) Soit $u \in [a, b]$. On note τ_u la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse u.

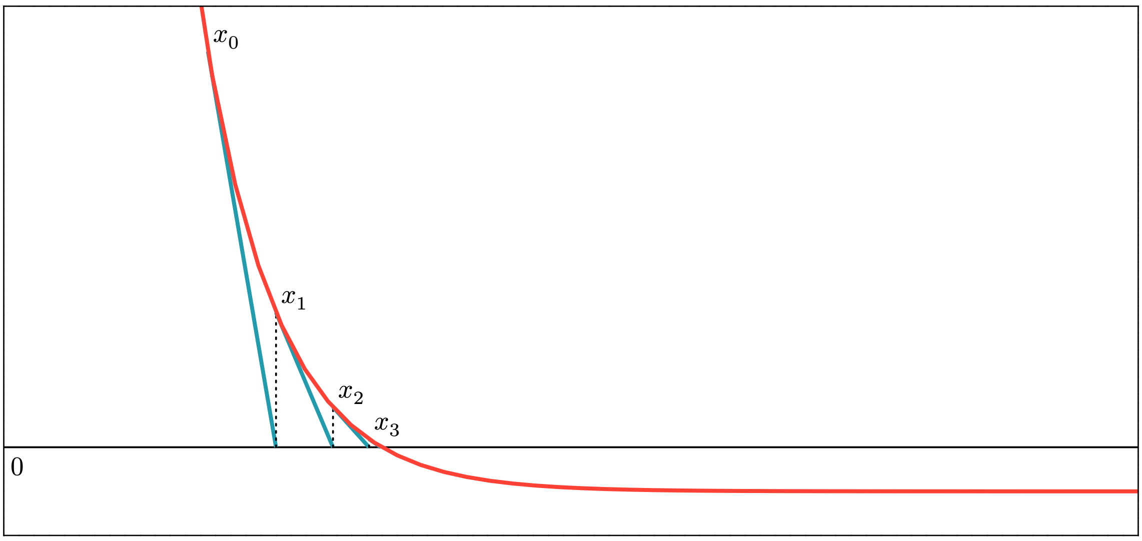
Ainsi, l'équation de τ_u est donnée par : $y = f'(u)(x - u) + f(u)$

Or $y = 0 \Leftrightarrow x = u - \frac{f(u)}{f'(u)}$.

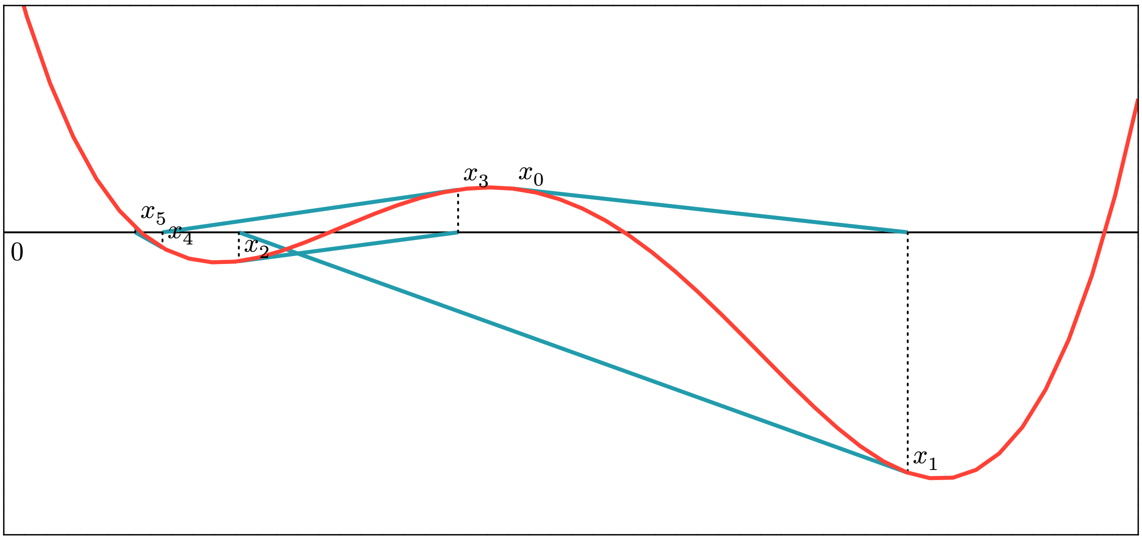
Par conséquent, τ_u coupe donc l'axe des abscisses au point d'abscisse $u - \frac{f(u)}{f'(u)}$.

b) Considérons maintenant la fonction g définie sur $[a, b]$ par $g : x \longmapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = a$ et $x_{n+1} = g(x_n)$.

Cette suite se construit donc de la manière suivante : on part du point d'abscisse x_n sur la courbe représentative de f, on trace la tangente à cette courbe en ce point, puis on reporte l'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses pour obtenir le point d'abscisse x_{n+1}.[1]



[1] Schémas générés automatiquement pour n'importe quelle fonction. (programme dans le code source du DM, cf Github).



---

3) a) La fonction g est dérivable sur $[a, b]$ par composition de fonctions dérivables, dont f' qui ne s'y annule pas, et pour tout $x \in [a, b]$, on a : $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$

Ainsi, g' de même signe que f sur $[a, b]$ et donc g est strictement croissante sur $[a, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, b]$.

b) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant x_n \leqslant \alpha$ en procédant par récurrence :

- Initialisation : $x_0 = a$ donc $a \leqslant x_0 \leqslant \alpha$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $a \leqslant x_n \leqslant \alpha$. Comme $\alpha \leqslant b$, $x_n \in [a; b]$ et $g(x_n)$ est bien défini. Par croissance de g sur $[a, \alpha]$, on a $g(a) \leqslant g(x_n) \leqslant g(\alpha) = \alpha$. Or $a \leqslant g(a)$, donc $a \leqslant x_{n+1} \leqslant \alpha$.

Par conséquent, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant x_n \leqslant \alpha$.

---

4) a) Montrons que (x_n) est croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} - x_n = g(x_n) - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Comme $x_n \in [a; \alpha]$, $f(x_n) \geqslant 0$. De plus, f' est strictement négative sur $[a; b]$. Ainsi, on a $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$ et (x_n) est bien croissante.

b) La suite (x_n) est croissante et bornée par α : par le théorème de la limite monotone, la suite (x_n) tend vers une limite $\ell \in [a; \alpha]$; $g(\ell)$ est donc bien définie. De plus, par continuité de g et unicité de la limite :

$$g(\ell) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \ell$$

Donc ℓ est un point fixe de g : le seul point fixe de g sur $[a; \alpha]$ étant α, on déduit que $(x_n) \to \alpha$.

Partie B - Vitesse de convergence

1) $\varphi : x \mapsto f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}(f(b) - f(a) - (b-a)f'(a))$, définie sur $[a;b]$, est dérivable sur $[a;b]$ par opérations. Sa dérivée est pour tout $x \in [a;b]$:

$$\varphi'(x) = (b-x)\left(\frac{2((a-b)f'(a) - f(a) + f(b))}{(b-a)^2} - f''(x)\right)$$

De plus, on vérifie que $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Le théorème de Rolle donne l'existence de $c \in]a:b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est à dire :

$$f''(c) = \frac{2(f(b) - f(a) - (b-a)f'(a))}{(b-a)^2}$$

$$\Leftrightarrow f(b) - f(a) = (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(c)$$

Ce qu'il fallait démontrer.

---

2) f' est dérivable donc continue sur $[a;b]$. Le théorème des bornes atteintes donne donc un $m \in \mathbb{R}$ tel que $f' \leqslant m$. De plus, f' atteint m : comme $f' < 0$, $m < 0$ et pour tout $x \in [a;b]$, $|f'(x)| \geqslant |m| > 0$.

De même, f'' est continue sur $[a;b]$, donc bornée sur $[a;b]$: il existe donc $M \geqslant 0$ tel que $|f''(x)| \leqslant M$. Comme $f'' > 0$, $M > 0$ et on a ce que l'on voulait démontrer.

---

3) La formule de Taylor-Lagrange appliquée à f sur $[x;\alpha]$ donne $c \in]x;\alpha[$ tel que :

$$f(\alpha) - f(x) - (\alpha - x)f'(x) = \frac{(\alpha-x)^2}{2}f''(c)$$

En passant à la valeur absolue et en utilisant $f'' \leqslant M$, on obtient :

$$|f(\alpha) - f(x) - (\alpha-x)f'(x)| \leqslant \frac{(\alpha-x)^2}{2}M$$

$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{f(x)}{f'(x)} - \left(f(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{f'(x)}\right)\right| \leqslant \frac{(\alpha-x)^2 M}{2f'(x)}$$

En remarquant que $f(\alpha) = 0$, on a $\frac{f(\alpha)}{f'(x)} = \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$. En utilisant cette réécriture et le fait que $f' \geqslant m$, on a enfin :

$$|g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| \leqslant \frac{(\alpha-x)^2 M}{2m}$$

---

4) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{M}{2m}|x_n - \alpha|$. D'après le 4)$b$) de la partie A, on sait que $(x_n) \to \alpha$. Donc $(u_n) \to 0$ par continuité de $|\cdot|$ et produit, et il existe donc par définition un $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \frac{M}{2m}|x_N - \alpha| < 1$.

5) D'après le 3), $u_{n+1} \leqslant u_n^2$. Montrons d'abord par récurrence que pour tout $n \geqslant N, u_n \leqslant u_N^{2^{n-N}}$.

Initialisation : $u_N \leqslant u_N^1$.

Hérédité : Si pour $n \geqslant N, u_n \leqslant u_N^{2^{n-N}}$, alors :

$$u_{n+1} \leqslant u_n^2 \leqslant u_N^{2 \cdot 2^{n-N}} = u_N^{2^{(n+1)-N}}$$

Ce qui conclut la récurrence.

Ainsi, pour tout $n \geqslant N$:

$$\begin{aligned} u_n \leqslant u_N^{2^{n-N}} &\Leftrightarrow \frac{M}{2m}|x_n - \alpha| \leqslant \left(u_N^{2^{-N}}\right)^{2^n} \\ &\Leftrightarrow |x_n - \alpha| \leqslant \frac{2m}{M}\left(u_N^{2^{-N}}\right)^{2^n} \end{aligned}$$

On obtient le résultat voulu avec $C = \frac{2m}{M} > 0$ et $k = u_N^{2^{-N}}$, où $k < 1$ car $u_N < 1$ et $x^a < 1$ pour tout $a \in \mathbb{R}_*^+$ quand $x < 1$.

Partie C - Algorithmes

1) Pour $f(x) = x^2 - a$, $f'(x) = 2x$ et on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - a}{2u_n} = \frac{u_n^2 + a}{2u_n}$$

Qui tend pour tout $a \in \mathbb{R}_*^+$ vers $\sqrt{a}$, car f satisfait les conditions de l'énoncé sur $[0; X]$ pour tout $X > \sqrt{a}$: pour $a > 1$, on peut prendre $X = a$ sans avoir à calculer $\sqrt{a}$.

---

2) Pour $f(x) = x^3 - 2$, $f'(x) = 3x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3 - 2}{3u_n} = \frac{3u_n^2 - u_n^3 + 2}{3u_n}$$

Qui tend vers $\sqrt[3]{2}$ car f satisfait les conditions de l'énoncé sur $[0; 3]$, car $3 > \sqrt[3]{2}$ et f est strictement croissante.

---

3)

Tentons maintenant de simplifier et d'optimiser ce code :

```
f = lambda x: x**3 - 2

def newton(f, x, h=1e-4, epsilon=1e-6):
    while abs(y := f(x)) > epsilon:
```

```
        derivee = (f(x + h) - f(x - h)) / (2 * h)
        x -= (y / derivee)
    return x
```

Pour aller encore plus loin dans la simplification, changeons de language pour Haskell :

```haskell
f :: (Num r) => r -> r
f x = x^3 - 2

derivee f x h = (f (x + h) - f (x - h)) / (2*h)

newton f h e x =
    if (abs . f) x > e
    then newton f h e (x - (f(x) / (derivee f x h)))
    else x


main :: IO ()
main = do
    let initialGuess = 1.0  -- Initial guess for the root
        h = 1e-4            -- Small step for derivative approximation
        e = 1e-6            -- Tolerance level for convergence
        root = newton f h e initialGuess
    putStrLn $ "Root found: " ++ show root
```