Devoir maison n°3 :
Théorème de la corde universelle

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Exemples

Dans les parties A et B, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

Partie B - Généralisation

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Pour tout $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, on pose $g(x) = f(x) - f\left(x + \frac{1}{n}\right)$.

1) La fonction continue $x \mapsto x + \frac{1}{n}$ a son ensemble image inclus dans $[0, 1]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Or f est continue sur $[0, 1]$ donc g est continue sur $[0, 1]$ par opérations et composition de fonctions continues sur $[0, 1]$.

---

2)

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k+1}{n}\right) \\ &= f(0) - f(1) \quad \text{par télescopage} \\ &= 0 \text{ car } f(0) = f(1)\end{aligned}$$

---

3) On recherche s'il existe $\alpha \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = 0$,
- soit $g\left(\frac{k}{n}\right)$ est égal à 0 pour tous $k \in [0, n - 1]$ et l'on peut prendre n'importe quel k pour avoir $\alpha = \frac{k}{n}$ puisque $k \in [\![0, n - 1]\!]$ donc $\frac{k}{n} \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.
- soit il existe k' tel que $g\left(\frac{k'}{n}\right) \neq 0$. Dans ce cas puisque la somme vaut 0, il existe nécessairement au moins un k'' tel que $g\left(\frac{k''}{n}\right)$ soit de signe opposé à $g\left(\frac{k'}{n}\right)$. Comme g est continue sur $[0, 1]$, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires[1] $\alpha \in \left[\frac{k'}{n} \leftrightarrow \frac{k''}{n}\right]$ tel que $g(\alpha) = 0$. Comme $\left[\frac{k'}{n} \leftrightarrow \frac{k''}{n}\right] \subseteq \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, on a bien $\alpha \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$.

Partie C - Généraliser encore ?

Soit $T \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{T} \notin \mathbb{Z}$, et f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$. On considére $f : x \mapsto \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - x \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)$ d'inconnue $x \in [0, 1 - T]$.

---

[1] Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $[a \leftrightarrow b] = \begin{cases} [a,b] \text{ si } a \leq b \\ [b,a] \text{ si } b < a \end{cases}$

1) Comme la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ et que $T \neq 0$, f est continue sur $[0,1]$ par opérations et composition de fonctions continues.

$$f(0) = \sin^2(0) - 0 = 0$$
$$f(1) = \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0$$

Donc on a bien $f(0) = f(1)$.

---

2)

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x+T) &= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right)\underline{-x\sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} - \sin^2\left(\frac{\pi(x+T)}{T}\right) + (\underline{x} + T)\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\
&= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi x}{T} + \pi\right) + T\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\
&= \sin^2\left(\frac{\pi x}{T}\right) - \left(\sin\left(\frac{\pi x}{T}\right)\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \cos\left(\frac{\pi x}{T}\right)\underbrace{\sin(\pi)}_{=0}\right)^2 + T\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) \\
&= T\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right)
\end{aligned}$$

Or $T \neq 0$ et comme $\sin^2\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{T}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{T} = 0$ ou $\frac{\pi}{T} = \pi$ et $T \neq 1$, on a que pour tout x dans $[0, 1-T]$, $f(x) - f(x+T) > 0$

---

3) On a que $f(x) - f(x+T) > 0$ ie $f(x) > f(x+T)$ donc $f(x) \neq f(x+T)$ pour tout x dans $[0, 1-T]$.

Nous avons trouvé un contre-exemple donc $f(x+T) = f(x)$ est impossible pour tout x dans $[0, 1-T]$.