Devoir maison n°8 : Chemins sur un quadrillage

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Partie A - Retrouver des formules bien connues

1) Un chemin entre O et $M(p, q)$ équivaut à une somme ordonnée de p vecteurs $\vec{\imath}$ et de q vecteurs $\vec{\jmath}$. Une telle somme est composée de $p + q$ termes, et est déterminée uniquement par la position des p vecteurs $\vec{\imath}$ parmi les $p + q$ termes, en complétant tous les autres termes par des $\vec{\jmath}$. Ainsi, comme l'ordre des $\vec{\imath}$ n'importe pas, il y a $\binom{p+q}{p}$ telles sommes.

On en déduit que le nombre de chemins entre O et $M(p, q)$ est de $\binom{p+q}{p} = \binom{p+q}{q}$ (par symétrie).

---

2) Un chemin de longueur n partant d'un point consiste en une somme ordonnée de n vecteurs parmi $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$, assimilable à une n-liste de cet ensemble à deux éléments. On en déduit qu'il y a 2^n chemins de longueur n partant de tout point (et en particulier de l'origine).

---

3) **a)** Par translation de vecteur $\overrightarrow{PO} = \binom{0}{-1}$, un chemin joignant $P(0, 1)$ à $B_k(n - k, k)$ équivaut à un chemin joignant l'origine et $B'_k(n - k, k - 1)$. Ceux ci sont donc au nombre de $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$.

Similairement, un chemin entre Q et $B_k(n - k, k)$ équivaut à un chemin entre l'origine et $B''_k(n - k - 1, k)$. Ils sont donc au nombre de $\binom{n-k-1+k}{k} = \binom{n-1}{k}$.

b) On double compte les chemins de O à B_k. D'une part, ceux-ci sont au nombre de $\binom{n}{k}$ par le 1). D'autre part, un tel chemin doit passer soit par $Q(1, 0)$, soit par $P(0, 1)$ en fonction du premier vecteur du chemin. Ainsi, un chemin entre O et B_k est soit un chemin de Q à B_k, soit un chemin de P à B_k. On en déduit :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$