Devoir maison n°7 : Autour de Farey

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier

1E1

Partie A - Somme des cancres dans $\mathbb{Q}_+$.

Soient $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}, z = \frac{e}{f},$ avec $a, c, e \in \mathbb{N},$ et $b, d, f \in \mathbb{N}^*$.

1)

$$x \oplus x = \frac{a}{b} \oplus \frac{a}{b} = \frac{2a}{2b} = \frac{a}{b}$$

Donc $x \oplus x = x$.

---

2)

$$x \oplus y = \frac{a+c}{b+d} \quad \text{et} \quad y \oplus x = \frac{c+a}{d+b} = \frac{a+c}{b+d}$$

$x \oplus y = y \oplus x$ donc l'opération est commutative.

---

3) D'une part :

$$(x \oplus y) \oplus z = \left(\frac{a+c}{b+d}\right) \oplus \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Et d'autre part :

$$x \oplus (y \oplus z) = \frac{a}{b} \oplus \left(\frac{c+e}{d+f}\right) = \frac{a+c+e}{b+d+f}$$

$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$ donc l'opération est associative.

Partie B - B

Partie C - C

Partie D - Cercles de Ford

1) Tangents à l'axe des abscisses.

Prouvons que tout cercle de Ford est tangent à l'axe des abscisses. Soit $\frac{a}{b}$ une fraction irréductible. Son cercle de Ford associé est de centre $\left(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{2b^2}$. Comme le rayon du cercle et son ordonnée sont égaux, tout cercle Ford est bien tangent à l'axe des abscisses.

---

2) Tangents entre eux quand consécutifs.

Soient α et β deux fractions consécutives de F_n tel que

$$\alpha = \frac{m}{a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{n}{b}$$

avec $m, n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha < \beta$.

Les deux cercles de Ford associés à α et β sont tangents à l'axe des abscisses d'après la propriété