

# Devoir maison n°12 : Suites récurrentes d'ordre 2 non linéaires

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier  
TE1

## Partie A -

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

1)

a)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrons que  $u_n \geq 1$  :

D'une part,  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1$  sont clairement supérieurs ou égaux à 1. D'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $u_n \geq 1$  et  $u_{n+1} \geq 1$ . Alors, en utilisant la relation de récurrence, il vient :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}} \geq \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \geq 1$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ .

b)

Supposons que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite  $l \in \mathbb{R}$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . En utilisant la relation de récurrence, on a :

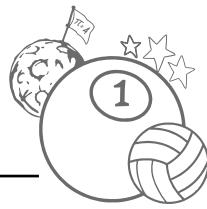
$$l = \sqrt{l} + \sqrt{l} = 2\sqrt{l} \text{ d'où } l = 4 \text{ ou } l = 0$$

Or pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ . On en déduit que la seule limite possible de la suite  $u_n$  est  $l = 4$ .

c) Le script python suivant calcule la valeur de  $u_n$  suivant la valeur de  $n$  fournie.

```
def u(n):
    if n == 0 or n == 1:
        return 1
    i = 1
    a, b = 1, 1
    while i < n:
        i += 1
        c = a**0.5 + b**0.5
        b, a = c, b
    return c

print(u(50)) # u_50 = 3.99999998476622
```



2)

Considérons la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$ .

a)

Supposons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ .

Ainsi, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  à partir duquel, pour tout  $n \geq N$  :

$$|v_n - 0| < \varepsilon \text{ soit } \left| \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1 \right| < \varepsilon \text{ soit } |\sqrt{u_n} - 2| < 2\varepsilon$$

Ainsi, en posant  $\delta = 2\varepsilon$ , pour tout  $n \geq N$ ,  $|\sqrt{u_n} - 2| < \delta$ . Ainsi,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{u_n} = 2$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$  par continuité de la fonction  $x \rightarrow x^2$  et car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1 > 0$ .

b)

c)

d)

e)

f)

## Partie B -

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}$$

1)

a)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrons que  $u_n \geq 1$  :

D'une part,  $u_0 = 1$  et  $u_1 = 1$  sont clairement supérieurs ou égaux à 1. D'autre part, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $u_n \geq 1$  et  $u_{n+1} \geq 1$ . Alors, en utilisant la relation de récurrence, il vient :

$$u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2 \geq 1$$

Ainsi, par récurrence immédiate, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 1$ .

b)

c)

2)

a)



- b)
- c)
- d)
- e)

Fin du DM12 - J'ai perdu.