Mathématiques : Devoir maison n° 5

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Partie A - Méthode de Cardan

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \tag{E_0}$$

1)

$$X = x + \frac{a}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = X - \frac{a}{3}$$

On remplace x dans (E_0).

$$\begin{aligned}
& \left(X - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(X - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X^3 - 3X^2\left(\frac{a}{3}\right) + 3X\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X^2 - 2X\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right) + bX - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X^3 - aX^2 + aX^2 + bX + \frac{a^2}{3}X - 2\left(\frac{a^2}{3}X\right) - \frac{a^3}{3^3} + \frac{a^3}{3^2} - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)X + \frac{2a^3}{3^3} - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X^3 + pX + q = 0 \qquad (E_1)
\end{aligned}$$

avec $p, q \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} p = b - \frac{a^2}{3} \\ q = \frac{2a^3}{3^3} - \frac{ab}{3} + c \end{cases}$

2)

a)

$$X = u + v \quad \text{avec} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

On remplace X dans (E_1).

$$\begin{aligned}
& (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & u^3 + v^3 + v(3uv + p) + u(3uv + p) + q = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0 \qquad (E_2)
\end{aligned}$$

b)

On impose $3uv + p = 0$ donc (E_2) devient :

$$u^3 + v^3 + q = 0 \tag{E_3}$$

c)

$$
\begin{aligned}
& & 3uv + p &= 0 & &\text{(relation imposée)} & \\
&\Leftrightarrow & uv &= \frac{-p}{3} & & & \\
&\Leftrightarrow & u^3v^3 &= \frac{-p^3}{3^3} & &\text{(on élève au cube)} & &(E_4)
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
& & u^3 + v^3 + q &= 0 & &\text{d'après } (E_3) & \\
&\Leftrightarrow & u^3 + \frac{u^3v^3}{u^3} + q &= 0 & & & &(*) \\
&\Leftrightarrow & u^3 + \frac{-p^3}{3^3u^3} + q &= 0 & &\text{d'après } (E_4) & \\
&\Leftrightarrow & u^6 - \frac{p^3}{3^3} + qu^3 &= 0 & &\text{(on multiplie par } u^3\text{)} &
\end{aligned}
$$

Avec $U = u^3$ on a :

$$
U^2 + qU - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \qquad (E_5)
$$

qui est une équation du second degré, u^3 est donc solution d'une équation du second degré.

À l'étape $(*)$ nous aurions pu multipler et diviser par v^3 sur u^3, nous aurions alors obtenu une équation similaire à (E_5) mais avec v à la place de u.

u^3 et v^3 sont donc solution d'une fonction du second degré.