Devoir maison n°12 : Première fois. Stabilité géométrique

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Problème 1 - Première fois.

- Partie A : Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels.

Soit une fonction $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ possédant les propriétés :
(1) $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$
(2) Pour tout entier premier p, $\Delta(p) = 1$
(3) Pour tous entiers a et b : $\Delta(a \times b) = b\Delta(a) + a\Delta(b)$

1) Soit p un nombre premier, n un entier naturel. On cherche à prouver que $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, $\Delta(p^0) = \Delta(1) = 0$ d'après (1). Ce qui correspond à la formule.

Pour $n = 1$, $\Delta(p^1) = \Delta(p) = 1$ d'après (2). Or avec la formule on obtient $p^0 = 1$, ce qui est donc correct.

Hérédité :

On suppose que $\Delta(p^n) = np^{n-1}$, cherchons à prouver que $\Delta(p^{n+1}) = (n+1)p^n$.

$$\Delta(p^{n+1}) = \Delta(p \times p^n) = p^n\Delta(p) + p\Delta(p^n) = p^n + pnp^{n-1} = (n+1)p^n$$

Par principe de récurrence, $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.

---

2) a) Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. $\Delta(p^m \times q^n) = q^n\Delta(p^m) + p^m\Delta(q^n)$ D'après la question précédente, on a alors : $mq^np^{m-1} + np^mq^{n-1} = (p^{m-1}q^{n-1})(mq + np)$

b) $\Delta(10^n) = \Delta(2^n \times 5^n)$ Comme 2 et 5 sont premiers et distincts, n supérieur ou égal à 1, on a d'après la question précédente : $\Delta(2^n \times 5^n) = 7n(2^{n-1} \times 5^{n-1})$. $\Delta(10^n)$ est donc un multiple de 7 quand $n \geq 1$.

---

3) a) On cherche à montrer que si $n \geq 2$ alors $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_k q_k$ avec $q_{1\ldots k} = \frac{n}{p_{1\ldots k}}$.

Soit $n \geq 2$, On a donc, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ avec $p_{1\ldots k}$ premier et $\alpha_{1\ldots k} \in \mathbb{N}^*$.

Initialisations :

On suppose que $k = 1$, que $n = p_1^{\alpha_1}$, alors $\Delta(n) = \alpha_1 p_1^{\alpha_1 - 1}$ Or $q_1 = \frac{n}{p_1} = p_1^{\alpha_1 - 1}$.

Donc $\Delta(n) = \alpha_1 q_1$

On suppose que $k=2$, que $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$, alors d'après 2)a), $\Delta(n) = p_2^{\alpha_2}\alpha_1 p_1^{\alpha_1-1} + p_1^{\alpha_1}\alpha_2 p_2^{\alpha_2-1} = (p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2})\left(\frac{\alpha_1}{p_1} + \frac{\alpha_2}{p_2}\right) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2$.

Hérédité :

On suppose que $\Delta(m) = \alpha'_1 q'_1 + \alpha'_2 q'_2 + \ldots + \alpha'_k q'_k$ pour m pouvant s'écrire $m = p_1'^{\alpha'_1} \times p_2'^{\alpha'_2} \times \ldots \times p_k'^{\alpha_k}$.

On cherche à prouver que $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}$ pour n pouvant s'écrire sous la forme $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k} \times p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}$.

$$\begin{aligned}\Delta(n) &= \Delta(p_1^{\alpha_1})\left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}\right) + p_1^{\alpha_1}\Delta\left(\frac{n}{p_1^{\alpha_1}}\right) \text{ d'après 2)a)} \\ &= \alpha_1\left(n\frac{p_1^{\alpha_1-1}}{p_1^{\alpha_1}}\right) + p_1^{\alpha_1}\Delta\left(\underbrace{p_2^{\alpha_2} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k} \times p_{k+1}^{\alpha_{k+1}}}_{\text{est un nombre comme } m}\right)\end{aligned}$$

En faisant correspondre $m = \frac{n}{p_1^{\alpha_1}}$, $p'_1 = p_2, \ldots, p'_k = p_{k+1}$ et $\alpha'_1 = \alpha_2, \ldots, \alpha'_k = \alpha_{k+1}$, on a

$$\begin{aligned}\Delta(n) &= \alpha_1 q_1 + p_1^{\alpha_1}\left(\alpha_2\frac{m}{p_2} + \ldots + \alpha_k\frac{m}{p_k} + \alpha_{k+1}\frac{m}{p_{k+1}}\right) \\ &= \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + \ldots + \alpha_k q_k + \alpha_{k+1} q_{k+1}\end{aligned}$$

Par principe de récurrence, nous avons prouvé que quelque soit $k \in \mathbb{N}^*$ et par conséquent quelque soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$, $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_k q_k$.

b) Vérifions que $\Delta(n) = \alpha_1 q_1 + \ldots + \alpha_k q_k$ satisfait les propriétés (2) et (3) :

Pour p premier, $p = p^1$: $\Delta(p) = 1 \times \frac{p}{p} = 1$. Cela correspond bien à la propriété (1).

Pour a et b des entiers naturels : $a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$ $\quad b = p_1'^{\alpha'_1} \ldots p_{k'}'^{\alpha'_{k'}}$ D'une part, $\Delta(a \times b) = \Delta(a) \times b + a \times \Delta(b) = b\alpha_1\frac{a}{p_1} + \ldots + b\alpha_k\frac{a}{p_k} + a\alpha'_1\frac{b}{p'_1} + \ldots + a\alpha'_{k'}\frac{b}{p'_{k'}} = \alpha_1\frac{a \times b}{p_1} + \ldots + \alpha_k\frac{a \times b}{p_k} + \alpha'_1\frac{a \times b}{p'_1} + \ldots + \alpha'_{k'}\frac{a \times b}{p'_{k'}}$

...

- Partie B : Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ.

---

4) a)

Calculons $\Delta(12)$. On a $12 = 2^2 \times 3$

Donc d'après la formule, $\Delta(12) = 2\frac{12}{2} + \frac{12}{3} = 16$

Calculons $\Delta(56)$. On a $56 = 2^3 \times 7$

Donc d'après la formule, $\Delta(56) = 3\frac{56}{2} + \frac{56}{7} = 92$

Calculons $\Delta(1001)$. On a $1001 = 7 \times 11 \times 13$

Donc d'après la formule, $\Delta(1001) = \frac{1001}{7} + \frac{1001}{11} + \frac{1001}{13} = 311$

Preuves générés automatiquement (le script est sur Github).[1][2]

[1]Par exemple : Calculons $\Delta(987654321)$. On a $987654321 = 3^2 \times 17^2 \times 379721$

Donc d'après la formule, $\Delta(987654321) = 2^{\frac{987654321}{3}} + 2^{\frac{987654321}{17}} + \frac{987654321}{379721} = 774633441$

[2](Pourquoi écrire les preuves à la main alors qu'on peut passer 5 fois plus de temps à coder le script qui le fait automatiquement ?)