Mathématiques : Devoir maison n° 5

Thomas Diot, Jim Garnier, Jules Charlier, Pierre Gallois
1E1

Partie A - Méthode de Cardan

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad (E_0)$$

1)

$$X = x + \frac{a}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = X - \frac{a}{3}$$

On remplace x dans (E_0).

$$\begin{aligned}
& \left(X - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(X - \frac{a}{3}\right) + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X^3 - 3X^2\left(\frac{a}{3}\right) + 3X\left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X^2 - 2X\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{a}{3}\right)^2\right) + bX - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X^3 - aX^2 + aX^2 + bX + \frac{a^2}{3}X - 2\left(\frac{a^2}{3}X\right) - \frac{a^3}{3^3} + \frac{a^3}{3^2} - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)X + \frac{2a^3}{3^3} - \frac{ab}{3} + c = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & X^3 + pX + q = 0 \qquad (E_1)
\end{aligned}$$

avec $p, q \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} p = b - \frac{a^2}{3} \\ q = \frac{2a^3}{3^3} - \frac{ab}{3} + c \end{cases}$

2)

a)

$$X = u + v \quad \text{avec} \quad u, v \in \mathbb{R}$$

On remplace X dans (E_1).

$$\begin{aligned}
& (u+v)^3 + p(u+v) + q = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & u^3 + v^3 + v(3uv + p) + u(3uv + p) + q = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & u^3 + v^3 + (u+v)(3uv + p) + q = 0 \qquad (E_2)
\end{aligned}$$

b) On impose $3uv + p = 0$ donc (E_2) devient :

$$u^3 + v^3 + q = 0 \qquad (E_3)$$

c)

$$\begin{aligned}
& 3uv + p = 0 && \text{(relation imposée)} \\
\Leftrightarrow \quad & uv = \frac{-p}{3} \\
\Leftrightarrow \quad & u^3v^3 = \frac{-p^3}{3^3} && \text{(on élève au cube)} \qquad (E_4)
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{array}{llr}
 & u^3+v^3+q=0 & \text{d'après } (E_3) \\
\Leftrightarrow & u^3+\dfrac{u^3v^3}{u^3}+q=0 & (*) \\
\Leftrightarrow & u^3+\dfrac{-p^3}{3^3u^3}+q=0 & \text{d'après } (E_4) \\
\Leftrightarrow & u^6-\dfrac{p^3}{3^3}+qu^3=0 & \text{(on multiplie par } u^3\text{)}
\end{array}$$

Avec $U=u^3$ on a :

$$U^2+qU-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0 \tag{E_5}$$

qui est une équation du second degré, u^3 est donc solution d'une équation du second degré.

À l'étape $(*)$ nous aurions pu multiplier et diviser par v^3 sur u^3, nous aurions alors obtenu une équation similaire à (E_5) mais avec v à la place de u.

u^3 et v^3 sont donc racines d'un polynôme du second degré.

Partie B - Exemples

1)

2)

$$\begin{aligned}
&2x^3+5x^2-24x-63=0 \\
\Longleftrightarrow\ & x^3+\frac{5}{2}x^2-12x-\frac{63}{2}=0
\end{aligned}$$

Posons $X=x+\frac{5}{6} \iff x=X-\frac{5}{6}$.

On obtient :

$$X^3-\frac{169}{12}X-\frac{4394}{216}=0$$

Posons ensuite $X=u+v$, avec $u,v\in\mathbb{R}$ et $3uv-\frac{169}{12}=0$. On obtient :

$$\begin{cases} uv=\frac{169}{36} \\ u^3+v^3=\frac{4394}{216} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u^3v^3=(\frac{169}{36})^3 \\ u^3+v^3=\frac{4394}{216} \end{cases}$$

D'où, avec $U=u^3$, on a :

$$U^2-\frac{4394}{216}U+\left(\frac{169}{36}\right)^3=0$$
$$\Delta=0 \text{ donc } U=\frac{4394}{216}\times\frac{1}{2}=\frac{2197}{216}$$
$$\text{d'où } u^3=v^3=\frac{2197}{216}$$

$$\begin{aligned}
\text{donc } X &= u+v \\
&= 2\sqrt[3]{\frac{2197}{216}} \\
&= \frac{13}{3} \\
\text{d'où } x_1 &= \frac{13}{3} - \frac{5}{6} \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Nous obtenons une première solution. On peut ainsi factoriser le polynôme par $(x - \frac{7}{2})$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
(E') &\iff \left(x - \frac{7}{2}\right)(2x^2 + 12x + 18) = 0 \\
&\iff 2\left(x - \frac{7}{2}\right)(x+3)^2 = 0 \\
&\iff x - \frac{7}{2} = 0 \text{ ou } (x+3)^2 = 0 \\
&\iff x = \frac{7}{2} \text{ ou } x = -3
\end{aligned}$$

Les solutions de (E') sont donc bien au nombre de deux.

$$S = \left\{-3; \frac{7}{2}\right\}$$

Partie C - Formules

3)

Notons P le polynôme de l'équation (E_1). On sait qu'il existe une racine $X_0 \in \mathbb{R}$ de P si et seulement si il existe u, v tels que u^3, v^3 sont les racines du polynôme $D(x) = x^2 + qx - \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Ce polynôme a pour discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= q^2 + 4\left(\frac{p}{3}\right)^3 \\
&= \frac{27q^2 + 4p^3}{27}
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\Delta > 0$, le polynôme a deux racines distinctes $U, V = \frac{-q}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, qui donnent le choix unique de :

$$u, v = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}}$$

Et enfin le choix unique de :

$$X_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{27q^2 + 4p^3}{108}}}$$

Qui est donc la seule racine réelle de P.[1]

4)

1. Nous avons conscience que cet argument n'est pas très rigoureux, mais la méthode de l'exercice suivant n'a pas porté ses fruits sur celui-ci pour prouver l'unicité de X_1...

Si $\Delta = 0$, D a une racine double $U = -\frac{q}{2}$. On doit donc poser $u = v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$. Donc $X_1 = 2u$ est une racine de (E_1).

En faisant la division euclidienne de P par $x - X_1$, on trouve $P(x) = (x - X_1)Q(x)$ avec un deuxième facteur quadratique $Q(x) = x^2 + X_1 x + (X_1^2 + p)$ dont le discriminant Δ' est :

$$\Delta' = -3X_0^2 - 4p$$

On trouve enfin que :

$$\begin{aligned} \Delta' = 0 &\iff -12u^2 = 4p \\ &\iff -u^2 = \frac{p}{3} \\ &\iff -(\sqrt[3]{-\frac{q}{2}})^2 = \frac{p}{3} \\ &\iff -\frac{q^2}{4} = (\frac{p}{3})^3 \\ &\iff \Delta = 0 \end{aligned}$$

Comme $\Delta = 0$, $\Delta' = 0$ et Q a une racine double $X_2 = -\frac{X_1}{2}$. Ainsi, si $\Delta = 0$, les seules racines de P sont :

$$X_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \qquad X_2 = \sqrt[3]{\frac{q}{2}}$$