Devoir maison n°12 : Première fois. Stabilité géométrique

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
1E1

Problème 1 - Première fois.

- Partie A : Une fonction agissant sur les nombres entiers naturels.

Soit une fonction $\Delta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ possédant les propriétés :
(1) $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$
(2) Pour tout entier premier p, $\Delta(p) = 1$
(3) Pour tous entiers a et b : $\Delta(a \times b) = b\Delta(a) + a\Delta(b)$

1) Soit p un nombre premier, n un entier naturel. On cherche à prouver que $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.

Initialisation :

Pour $n = 0$, $\Delta(p^0) = \Delta(1) = 0$ d'après (1). Ce qui correspond à la formule.

Pour $n = 1$, $\Delta(p^1) = \Delta(p) = 1$ d'après (2). Or avec la formule on obtient $p^0 = 1$, ce qui est donc correct.

Hérédité :

On suppose que $\Delta(p^n) = np^{n-1}$, cherchons à prouver que $\Delta(p^{n+1}) = (n+1)p^n$.

$$\Delta(p^{n+1}) = \Delta(p \times p^n) = p^n\Delta(p) + p\Delta(p^n) = p^n + pnp^{n-1} = (n+1)p^n$$

Par principe de récurrence, $\Delta(p^n) = np^{n-1}$.

---

2) **a)** Soit p et q des nombres premiers distincts, m et n des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1. $\Delta(p^m \times q^n) = q^n\Delta(p^m) + p^m\Delta(q^n)$ D'après la question précédente, on a alors : $mq^np^{m-1} + np^mq^{n-1} = (p^{m-1}q^{n-1})(mq + np)$

b) $\Delta(10^n) = \Delta(2^n \times 5^n)$ Comme 2 et 5 sont premiers et distincts, n supérieur ou égal à 1, on a d'après la question précédente : $\Delta(2^n \times 5^n) = 7n(2^{n-1} \times 5^{n-1})$ $\Delta(10^n)$ est donc un multiple de 7 avec $n \geq 1$.

---

3) **a)**

- Partie B : Étude de quelques images d'entiers par la fonction Δ.

---

4) **a)**