

Devoir maison n°1 : Fonctions contractantes, dilatantes et points fixes

Jules Charlier, Thomas Diot, Pierre Gallois, Jim Garnier
TE1

Problème 1 -

Partie A - Fonctions contractantes et rétrécissantes.

1) Soient $k \in \mathbb{R}_+^*$, et f une fonction k -lipschitzienne définie sur I . Montrons que cette fonction est continue.

Soit y dans I . Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$. Supposons $|x - y| < \alpha$, on obtient :

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{k} \iff k|x - y| < \varepsilon$$

Comme f est lipschitzienne, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| < \varepsilon$ donc $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Nous avons prouvé que quelque soit le point y que l'on choisit dans le domaine de définition de f , $|x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ie toute fonction lipschitzienne est continue.

2) Soit f une fonction contractante définie sur I , et $x, y \in I$. Il existe donc $k \in]0, 1[$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ (*).

Or,

$$\begin{aligned} k < 1 &\implies k|x - y| < |x - y| \\ &\implies |f(x) - f(y)| < |x - y| \text{ d'après (*)} \end{aligned}$$

f est donc rétrécissante.

De plus,

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \implies |f(x) - f(y)| \leq 1 \times |x - y|$$

f est donc 1-lipschitzienne.

3) Soient $a \in \mathbb{R}$, $I = [a, +\infty[$, et $f : x \mapsto x + \frac{1}{x-a+1}$ pour tous $x \in I$.

a) f est dérivable sur I . Pour tout $x \in I$, $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-a+1)^2}$. Or,



$$\begin{aligned}
 x \in I &\Rightarrow x \geq a \\
 &\Rightarrow x - a \geq 0 \\
 &\Rightarrow x - a + 1 \geq 1 \\
 &\Rightarrow (x - a + 1)^2 \geq 1 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{(x - a + 1)^2} \leq 1 \\
 &\Rightarrow 0 \leq f'(x).
 \end{aligned}$$

La dérivée de f est positive pour tout $x \in I$, donc f est bien croissante sur I .

Soit $x \in I$.

$$\begin{aligned}
 x \in I &\Rightarrow x \geq a \\
 &\Rightarrow x - a \geq 0 \\
 &\Rightarrow x - a + 1 > 0 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{x - a + 1} > 0.
 \end{aligned}$$

$x \geq a$, donc par somme d'inégalités, $x + \frac{1}{x-a+1} \geq a$ i.e. $f(x) \in I$.

b) Cherchons désormais à montrer que f est rétrécissante. Soient $x, y \in I$ tel que $x \neq y$. On suppose sans perte de généralité que $x < y$ et comme f est croissante sur I

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f(y)| &< |x - y| \Leftrightarrow f(y) - f(x) < y - x \\
 &\Leftrightarrow y - x + \frac{1}{y - a + 1} - \frac{1}{x - a + 1} < y - x \\
 &\Leftrightarrow y - a + 1 > x - a + 1 \\
 &\Leftrightarrow x < y
 \end{aligned}$$

Nous avons prouvé que f est rétrécissante.

c) Démontrons par l'absurde que f n'est pas contractante. On suppose f contractante ie f est k -lipschitzienne avec $k \in]0, 1[$.

Avec $t \in \mathbb{R}_+$, on s'intéresse aux réels $a + t$ et $a + t + 1$ qui sont compris dans $I = [a, +\infty[$. f doit vérifier en particulier :

$$\begin{aligned}
 |f(a + t + 1) - f(a + t)| &\leq k|a + t + 1 - a - t| \\
 \Leftrightarrow \left| \frac{(a + t + 1 - a - t)((a + t + 1 - a + 1)(a + t - a + 1) - 1)}{(a + t + 1 - a + 1)(a + t - a + 1)} \right| &\leq k \\
 \Leftrightarrow \left| \frac{(1)((t + 1)(t + 2) - 1)}{(t + 1)(t + 2)} \right| &\leq k \\
 \Leftrightarrow \left| 1 - \frac{1}{(t + 1)(t + 2)} \right| &\leq k
 \end{aligned}$$



Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t+1)(t+2) = +\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| 1 - \frac{1}{(t+1)(t+2)} \right| = 1$.

On en conclue que $|f(a+t+1) - f(a+t)|$ tendant vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$, il n'est pas possible de majorer cette expression dans tous les cas possibles par un réel k compris dans $]0, 1[$. Nous arrivons à une contradiction, f n'est donc pas contractante.

4) Soit la fonction $f \mapsto \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x + \frac{1}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ définie sur \mathbb{R} .

a) On cherche à prouver que f est croissante sur \mathbb{R} .

- Sur l'intervalle $] -\infty, 1]$, f est constante.
- Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, f est dérivable comme somme de fonctions dérivables.

On a alors $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$x > 1 \Leftrightarrow x^2 > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} > -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$$

f est croissante sur $]1, +\infty[$

- Prouvons que f est continue en 1.

$$f(1) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + \frac{1}{x} = 2$$

Comme $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, f est continue en 1.

f est continue en 1, elle ne peut donc pas faire un saut au niveau de la disjonction des cas. Or à gauche de 1 f est constante et croissante à droite. On en conclue que f est donc croissante sur \mathbb{R} .

b) Cherchons à prouver que f est rétrécissante. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$. Dans la définition d'une fonction rétrécissante, x et y sont interchangeable, on suppose donc sans perte de généralité que $x < y$.

- Si $x < y \leq 1$,

$$|f(x) - f(y)| < |x - y| \Leftrightarrow |2 - 2| < |x - y| \Leftrightarrow 0 < |x - y|$$

Ce qui est toujours vrai puisque $x \neq y$.

- Si $x \leq 1 < y$,

$$x \leq 1 \Leftrightarrow y - 1 \leq y - x \Leftrightarrow (y - 1)^2 \leq (y - 1)(y - x)$$

car $y - 1 > 0$. Comme $(y - 1)^2 \leq (y - 1)(y - x)$, alors $(y - 1)^2 < y(y - x)$. On a alors :

$$\begin{aligned} (y - 1)^2 < y(y - x) &\Leftrightarrow \left| -\frac{(y - 1)^2}{y} \right| < |x - y| \\ &\Leftrightarrow \left| 2 - \left(y + \frac{1}{y} \right) \right| < |x - y| \\ &\Leftrightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y| \end{aligned}$$



- Si $1 < x < y$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| < |x - y| &\Leftrightarrow \left| (x - y) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right| < y - x \\ &\Leftrightarrow \left| (y - x) + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right| < y - x \end{aligned}$$

Or $y - x > 0$ et par croissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+ , $x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{y} - \frac{1}{x} > 0$.
L'intérieur de la valeur absolue est donc positif soit :

$$\begin{aligned} \left| (y - x) + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right| < y - x &\Leftrightarrow (y - x) + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) < y - x \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x} \\ &\Leftrightarrow x < y \end{aligned}$$

Nous avons prouvé dans les trois cas distincts que f est rétrécissante.

c) Démontrons par l'absurde que f n'est pas contractante. On suppose f contractante ie f est k -lipschitzienne avec $k \in]0, 1[$.

On considère cette propriété pour les réels t et $t + 1$. f doit vérifier en particulier :

$$|f(t + 1) - f(t)| \leq k|t + 1 - t| \Leftrightarrow |f(t + 1) - f(t)| \leq k$$

En particulier, on pose $1 < t < t + 1$.

$$|f(t + 1) - f(t)| = \left| t + 1 + \frac{1}{t + 1} - t - \frac{1}{t} \right| = \left| 1 - \frac{1}{t(t + 1)} \right|$$

Or $\lim_{t \rightarrow +\infty} t(t + 1) = +\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left| 1 - \frac{1}{t(t + 1)} \right| = 1$.

On en conclue que $|f(t + 1) - f(t)|$ tendant vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$, il n'est pas possible de majorer cette expression dans tous les cas possibles par un réel k compris dans $]0, 1[$. Nous arrivons à une contradiction, f n'est donc pas contractante.

Partie B - Fonctions rétrécissantes et point fixe.

1) a) Posons $g : x \mapsto f(x) - x$. Comme I est stable par f , $f(a), f(b) \in I$. Comme $I = [a; b]$, on en déduit que $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$, c'est à dire que $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$.

Comme g est continue et change de signe, par corollaire du TVI, g s'annule en $x_o \in I$, qui est donc un point fixe de f .

b) Supposons que $\alpha, \beta \in I$ soient des points fixes distincts de f . Alors :

$$|f(\alpha) - f(\beta)| = |\alpha - \beta| \overset{\text{rétrécissante}}{<} |\alpha - \beta|$$

Ce qui est impossible. Donc $\alpha = \beta$ et le point fixe de f est fixe.



2) Comme I n'est pas borné en haut, on peut prendre $f : x \mapsto x + 1$ qui laisse bien I fixe : si $x \in I$ i.e $x \geq a$, alors $f(x) = x + 1 \geq a$, donc $f(x) \in I$. Clairement, f n'a pas de point fixe.

Partie C - Fonctions dilatantes.

On fixe $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dilatante.

1) a) La fonction $g : x \mapsto x + e^x$ est continue sur \mathbb{R} comme somme de fonctions continues. De plus, si $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &= |(x - y) + (e^x - e^y)| \stackrel{\text{Triangulaire}}{\geq} |x - y| + |e^x - e^y| \\ &\geq |x - y| \end{aligned}$$

Donc g est bien dilatante.

b) La fonction g_λ est continue sur $] -\infty; \lambda[$ et sur $]\lambda; +\infty[$ car ses restrictions à ces intervalles sont continues. Montrons que g_λ est continue en λ . D'une part,

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \lambda^-} -x = -\lambda$$

et d'autre part,

$$\lim_{x \rightarrow \lambda^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \lambda^+} \lambda - 2x = \lambda - 2\lambda = -\lambda$$

Comme les limites de g (qui existent par continuité avant et après λ) en λ coïncident avec $g(\lambda) = -\lambda$, on en déduit que g est continue en λ et donc sur tout \mathbb{R} . Montrons maintenant que g est dilatante. On distingue trois cas :

- $x, y < \lambda : |g(x) - g(y)| = |y - x| = |x - y| \geq |x - y|$
- $x, y \geq \lambda : |g(x) - g(y)| = |2y - 2x| = 2|x - y| \geq |x - y|$
- $x < \lambda$ et $y \geq \lambda : |g(x) - g(y)| = |2y - \lambda - x| = |(y - \lambda) + (y - x)| \stackrel{\text{Triangulaire}}{\geq} |x - y|$

Ce qui montre que g est bien dilatante.

2) a) Soit $\lambda \in]f(a_1); f(a_2)[\cap]f(a_3); f(a_2)[$. Cette intersection n'est pas vide, car elle contient au moins $]\max(f(a_1), f(a_3)); f(a_2)[$. Alors en posant $g : x \mapsto f(x) - \lambda$, qui est continue par somme, comme $g(a_1), g(a_3) < 0$ et $g(a_2) > 0$, on obtient en appliquant TVI un $b \in]a_1; a_2[$ et un $c \in]a_2; a_3[$ tels que $g(b) = g(c) = 0$, c'est à dire $f(b) = f(c) = \lambda$.

b) Comme f est dilatante,

$$|f(b) - f(c)| = 0 \geq |b - c| \geq 0$$

On en déduit que $|b - c| = 0$, donc $b = c$. Donc f dilatante implique f injective.

c) Supposons que f ne soit pas strictement monotone, i.e f n'est ni strictement croissante ni strictement décroissante. Comme f n'est pas strictement décroissante, il existe $a_1 < a_2$ tels que $f(a_1) \leq f(a_2)$; a fortiori, comme f est injective, $f(a_1) < f(a_2)$.



De même, comme f n'est pas strictement croissante, il existe $a_3 < a_4$ tels que $f(a_3) > f(a_4)$.

Si $a_3 = a_2$, alors appliquer le 1) avec a_1, a_2 et a_4 contredit l'injectivité de f .

Si $a_3 > a_2$, supposons d'abord que $f(a_3) > f(a_2)$. Alors le 1) avec a_1, a_3, a_4 contredit l'injectivité de f .

Les autres cas, suivant la position relative de a_3 à a_2 et a_1 ainsi que la position relative de $f(a_3)$ avec $f(a_2)$ se gèrent de manière analogue, en exhibant une configuration de manière à contredire via le 1) l'injectivité de f .¹

3) On sait que f est continue et strictement monotone. Quitte à travailler avec $-f$ au lieu de f , supposons que f est strictement croissante.

Soit $x \geq 0$. Alors $|f(x) - f(0)| \geq |x|$, c'est à dire que $f(x) \geq x + f(0)$. Comme la fonction $x \mapsto x + f(0)$ n'est pas majorée sur \mathbb{R}^+ , a fortiori, f n'est pas majorée sur \mathbb{R}^+ et donc sur \mathbb{R} .

Similairement, soit $x \leq 0$. Alors $|f(x) - f(0)| = f(0) - f(x) \geq |x| = -x$, et on obtient $x + f(0) \geq f(x)$. On en déduit donc que f n'est pas minorée sur \mathbb{R}^- et donc sur \mathbb{R} .

Donc f n'est pas bornée.

4) a) Soient $x \geq y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned} h(x) - h(y) &= f(x) - f(y) + y - x \geq 0 \\ \Leftrightarrow f(x) - f(y) &\stackrel{\text{croissance}}{=} |f(x) - f(y)| \geq x - y = |x - y| \end{aligned}$$

Où cette dernière inégalité est vraie car f est dilatante. Donc h est bien croissante.

b) La fonction $h : x \mapsto f(x) - x$ est strictement négative, mais est croissante. Par le théorème de la limite monotone, on déduit l'existence de $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) \leq 0$. Ainsi, par quotient de limites :

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

c) La fonction $h : x \mapsto f(x) - x$ est strictement positive et croissante. En particulier, la fonction décroissante $x \mapsto h(-x)$ est strictement positive et on déduit du théorème de la limite monotone l'existence de

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) \geq 0$$

Ainsi, encore par quotient de limites,

$$\frac{h(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

¹Désolé, mais il y avait trop de cas et je n'ai pas trouvé de manière simple de les unifier...

D'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

d) Si a, b sont des points fixes de f , alors $h(a) = h(b) = 0$. Comme h est croissante, pour tous $c \in [a; b]$,

$$h(a) = 0 \leq h(c) \leq h(b) = 0$$

D'où $h(c) = 0$. Donc c est un point fixe de f , et $[a; b] \subseteq F$.

