

# K-THÉORIE ALGÈBRIQUE

PIERRE GODFARD

INTRODUCTION. [TBD]

## TABLE DES MATIÈRES

Remarque préliminaire	2
1. Les groupes $K_0$ , $K_1$ et $K_2$	2
1.1. Les groupes $K_0$ et $K'_0$ d'un anneau	2
1.2. Les groupes $K_0$ et $K'_0$ d'un schéma	6
1.3. Catégories exactes et leurs $K_0$	9
1.4. Le groupe $K_1$ d'un anneau	14
2. Définition de la $K$ -théorie supérieure	14
2.1. La construction $Q$ de Quillen	15
2.2. Les théorèmes A et B de Quillen	19
2.3. Premières propriétés et exemples	30
3. Construction $+$ de Quillen	34
3.1. La construction $+$ en topologie	34
3.2. La construction $+$ de la $K$ -théorie	41
4. Le théorème " $+$ = $Q$ "	43
4.1. Catégories monoïdales, actions et localisations	43
4.2. Calculs d'homologie de localisés	48
4.3. Action sur les fibres	51
4.4. Construction $S^{-1}S$ de la $K$ -théorie	53
4.5. Lien entre la construction $Q$ et $S^{-1}S$	55
5. Propriétés de la $K$ -théorie supérieure	59
Annexe A. Catégories modèles	59
A.1. Argument du petit objet, notations	59
A.2. Carrés homotopiquement cartésiens d'ensembles simpliciaux	60
A.3. Le lemme de collage	64
Annexe B. La correspondance de Dold-Kan	65
Annexe C. Topologie algébrique	70
C.1. Homologie et homologie à coefficients	70
C.2. Le théorème de Van Kampen	72
C.3. Obstruction et tours de Postnikov	73
C.4. le théorème de Hurewicz	76
C.5. Espaces d'Eilenberg Mac-Lane et tours de Postnikov de fibrations principales	78
Remerciements	81
Références	81

## REMARQUE PRÉLIMINAIRE

On suppose ici l'existence d'univers dans la théorie des ensembles (cardinaux fortement inaccessibles). On note  $\Omega$  le plus petit. Toutes les structures algébriques seront par défaut dans  $\Omega$ . Pour les ensembles et la catégorie, nous diront qu'ils ou elles sont petit(e)s quand ils ou elles sont dans  $\Omega$ .

1. LES GROUPES  $K_0$ ,  $K_1$  ET  $K_2$ 

Dans cette section, nous allons définir et étudier les groupes  $K_0$ ,  $K_1$  et  $K_2$  associés à un anneau. Nous définirons également le  $K_0$  d'une catégorie exacte.

**1.1. Les groupes  $K_0$  et  $K'_0$  d'un anneau.** Pour  $A$  un anneau, nous noterons  $P(A)$  la catégorie des modules projectifs de type fini sur  $A$  et  $\text{Modf}(A)$  la catégorie des modules de type fini sur  $A$ . Si  $A$  n'est pas commutatif, les modules sur  $A$  seront toujours par défaut des  $A$ -modules à gauche.

**Définition 1.1** ( $K_0$  et  $K'_0$ ). Le groupe abélien  $K_0(A)$  est le groupe de Grothendieck de  $P(A)$  : le quotient du groupe abélien libre  $\bigoplus_P \mathbb{Z} \cdot [P]$  engendré par les objets de  $P(A)$ , par les relations  $[R] = [P] + [Q]$  pour chaque suite exacte  $0 \rightarrow P \rightarrow R \rightarrow Q \rightarrow 0$ .

On définit de même le groupe  $K'_0(A)$  comme le groupe de Grothendieck de  $\text{Modf}(A)$ .

On appelle  $K_0(A)$  le groupe de  $K$ -théorie de  $A$  et  $K'_0(A)$  le groupe de  $K'$ -théorie de  $A$ . En général, pour utiliser  $K'_0(A)$ , on préfère se restreindre au cas où  $A$  est noethérien, de telle sorte que  $\text{Modf}(A)$  soit une catégorie abélienne.

*Remarque 1.2.* Les catégories  $P(A)$  et  $\text{Modf}(A)$  ont un ensemble dans  $\Omega$  de classes d'isomorphisme. Or si  $f : M \rightarrow M'$  est un isomorphisme, les suites exactes  $0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$  et  $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0 \rightarrow 0$ , induisent  $0 = [0]$  et  $[M] = [M']$  dans les groupes de Grothendieck. Donc les éléments des groupes  $K_0(A)$  et  $K'_0(A)$  forment des ensembles de  $\Omega$ .

Le foncteur  $P(A) \times P(A) \rightarrow P(A)$ ,  $(P, Q) \mapsto P \oplus Q$  induit un morphisme  $\oplus : K_0(A) \times K_0(A) \rightarrow K_0(A)$ . Or pour tout  $A$ -modules  $M$  et  $N$ , on a une suite exacte  $0 \rightarrow M \rightarrow M \oplus N \rightarrow N \rightarrow 0$ . Donc  $\oplus$  est l'addition. De même avec  $\text{Modf}(A)$  et  $K'_0$ .

Si  $A$  est commutatif, le foncteur  $P(A) \times P(A) \rightarrow P(A)$ ,  $(P, Q) \mapsto P \otimes Q$  passe également au quotient en un morphisme  $\otimes : K_0(A) \times K_0(A) \rightarrow K_0(A)$  (les modules projectifs sont plats).

De même,  $P(A) \times \text{Modf}(A) \rightarrow \text{Modf}(A)$ ,  $(P, M) \mapsto P \otimes M$  induit  $\otimes : K_0(A) \times K'_0(A) \rightarrow K'_0(A)$ . On vérifie aisément que :

**Proposition 1.3.** *Si  $A$  est commutatif, l'application  $\otimes : K_0(A) \times K_0(A) \rightarrow K_0(A)$  est bilinéaire et induit sur  $K_0(A)$  une structure d'anneau de neutre  $[0]$  et d'unité  $[A]$ .*

*Dans ce cas,  $\otimes : K_0(A) \times K'_0(A) \rightarrow K'_0(A)$  fait de  $K'_0(A)$  un  $K_0(A)$ -module.*

Ces définitions sont fonctorielles en  $A$ . En effet, si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme d'anneaux, le foncteur  $-\otimes_A B : P(A) \rightarrow P(B)$  induit un morphisme  $f^* : K_0(A) \rightarrow K_0(B)$ , et on a, si  $g : B \rightarrow C$ ,  $(gf)^* = g^* f^*$ . Le morphisme  $f^*$  est un morphisme d'anneau si  $A$  et  $B$  sont commutatifs. De même, si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme

plat,  $- \otimes_A B : \text{Modf}(A) \rightarrow \text{Modf}(B)$  induit un morphisme  $f^* : K'_0(A) \rightarrow K'_0(B)$  (de  $K_0(A)$ -modules si  $A$  et  $B$  sont commutatifs). La notation "contravariante"  $f^*$  s'explique par la définition de la  $K$ -théorie d'un schema.

Si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme projectif et fini (c'est-à-dire que  $B$  est un  $A$  module projectif de type fini), alors le foncteur d'oubli  $(-)_A : \text{P}(B) \rightarrow \text{P}(A), M \mapsto M$  induit un morphisme **de groupe**  $f_* : K_0(B) \rightarrow K_0(A)$ . De même, si  $f : A \rightarrow B$  est un morphisme fini, le foncteur d'oubli  $(-)_A : \text{Modf}(B) \rightarrow \text{Modf}(A)$  induit un morphisme **de groupe**  $f_* : K'_0(B) \rightarrow K'_0(A)$ .

Si  $f_*$  et  $f^*$  sont définis pour  $K_0$ , et si  $A$  et  $B$  sont commutatifs, l'isomorphisme entre les foncteurs  $(P, N) \mapsto (P \otimes_A N) \otimes B$  et  $(P, N) \mapsto P \otimes_B (N \otimes B)$  induit la formule de projection suivante. Pour tout  $a$  dans  $K_0(A)$  et  $b$  dans  $K_0(B)$  :

$$f_*(b \cdot f^*(a)) = f_*(b) \cdot a \text{ dans } K_0(A)$$

De même, si  $f_*$  est défini pour  $K_0$  et  $K'_0$ , et  $f^*$  est défini pour  $K'_0$ , alors pour tout  $a$  dans  $K'_0(A)$  et  $b$  dans  $K'_0(B)$  :

$$f_*(b \cdot f^*(a)) = f_*(b) \cdot a \text{ dans } K'_0(A)$$

On peut affaiblir les hypothèses sur  $f$  sous lesquelles  $f_*$  en  $K$ -théorie et  $f^*$  en  $K'$ -théorie sont définis. Pour les définitions de la dimension projective et de la Tor-dimension, voir le [Wei94, Chp.4].

**Définition 1.4.** Un morphisme d'anneau  $f : A \rightarrow B$  est dit de Tor-dimension finie si  $B$  est un  $A$ -module de Tor-dimension finie.

Pour étendre  $f^*$ , nous utilisons le résultat suivant.

**Proposition 1.5.** Soit  $f : A \rightarrow B$  de Tor-dimension finie avec  $A$  noethérien. Soit  $\mathcal{M}$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Modf}(A)$  des modules  $M$  tels que  $\text{Tor}_i^A(B, M) = 0$  pour tout  $i \geq 1$ . On note  $K'_0(\mathcal{M})$  son groupe de Grothendieck (cf. définition 1.25 si ce n'est pas clair). Alors l'inclusion  $\mathcal{M} \rightarrow \text{Modf}(A)$  induit un isomorphisme  $K'_0(\mathcal{M}) \rightarrow K'_0(A)$ .

*Démonstration.* Nous allons décrire un morphisme inverse  $K'_0(A) \rightarrow K'_0(\mathcal{M})$ . On note  $n < \infty$  la Tor-dimension de  $B$  sur  $A$ . Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini. On se donne  $P_* \rightarrow M$  une résolution projective de  $M$  par des  $A$ -modules de type fini (possible car  $A$  est noethérien). On pose  $\tilde{M} := \text{coker}(d : P_{n+1} \rightarrow P_n)$ . Par la suite exacte longue des foncteurs Tor,  $\tilde{M}$  est un objet de  $\mathcal{M}$ . On obtient donc une résolution finie  $0 \rightarrow \tilde{M} \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0$  de  $M$  par des objets de  $\mathcal{M}$ , que l'on note  $Q_* \rightarrow M$ . On pose alors :

$$u(M) := \sum_{i=0}^n (-1)^i [Q_i] \in K'_0(\mathcal{M})$$

Montrons que  $u(M)$  est indépendant de la résolution  $P_* \rightarrow M$ . Soit  $P'_* \rightarrow M$  une autre résolution. On montre facilement qu'il existe une troisième résolution  $P''_* \rightarrow M$  et deux morphismes  $a : P''_* \rightarrow P_*$  et  $a' : P''_* \rightarrow P'_*$  surjectifs en chaque degré, par exemple en prenant une résolution projective du complexe  $P \times_{M[0]} P'$  par des modules de type fini. Alors  $\ker(a)_* \rightarrow 0$  est une résolution de 0 par des objets de  $\mathcal{M}$ . On note  $\tilde{M} := \text{coker}(d : P_{n+1} \rightarrow P_n)$ ,  $\tilde{M}'' := \text{coker}(d : P''_{n+1} \rightarrow P''_n)$  et  $\tilde{K} := \text{coker}(d : \ker(a)_{n+1} \rightarrow \ker(a)_n)$ . Alors  $0 \rightarrow \tilde{K} \rightarrow \tilde{M}'' \rightarrow \tilde{M} \rightarrow 0$  est exacte. En effet la suite est exacte à droite par le lemme du serpent et exacte à gauche car

$\tilde{K}$  et  $\tilde{M}''$  s'injectent dans  $P''_{n-1}$ . Si on note  $Q'' \rightarrow M$  la résolution finie associée à  $P''$  et  $K_* \rightarrow 0$  celle associée à  $\ker(a)_* \rightarrow 0$ , on a :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i [Q_i] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [Q''_i] - \sum_{i=0}^n (-1)^i [K_i] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [Q''_i] \text{ dans } K'_0(\mathcal{M})$$

Montrons maintenant que si  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  est une suite exacte dans  $\text{Modf}(M)$ , alors  $u(M) = u(M'') + u(M')$ . Par le lemme du fer à cheval, on dispose de résolutions respectant la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P'_* & \longrightarrow & P_* & \longrightarrow & P''_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Par le même argument que ci-dessus  $0 \rightarrow \tilde{M}' \rightarrow \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}'' \rightarrow 0$  est exacte, et donc  $0 \rightarrow Q'_* \rightarrow Q_* \rightarrow Q''_* \rightarrow 0$  est exacte. Il est alors clair que  $u(M) = u(M'') + u(M')$ .

On vérifie immédiatement que  $u$  est inverse à droite et à gauche de  $K'_0(\mathcal{M}) \rightarrow K'_0(A)$ .  $\square$

Ainsi, avec les hypothèses et notations de la proposition, le foncteur  $- \otimes_A B : \mathcal{M} \rightarrow \text{Modf}(B)$  induit un morphisme  $K'_0(\mathcal{M}) \rightarrow K'_0(B)$  et donc un morphisme  $f^* : K'_0(A) \rightarrow K'_0(B)$ . Si  $B$  est plat sur  $A$ , on retrouve la définition plus haut.

Pour étendre  $f_*$ , on donne une formule explicite.

**Proposition - définition 1.6.** *Soit  $f : A \rightarrow B$  fini et de Tor-dimension finie avec  $A$  noethérien. Alors tout  $B$  module projectif  $P$  admet une  $A$ -résolution projective finie par des modules de type fini  $Q_* \rightarrow P$ . On pose :*

$$f_*([P]) := \sum_i (-1)^i [Q_i] \in K_0(A)$$

Alors  $f_* : K_0(B) \rightarrow K_0(A)$  est un morphisme de groupe.

On remarque que la définition ci-dessus étend la définition plus haut dans le cas où  $f$  est projectif de type fini.

*Démonstration.* Soit  $n$  la Tor-dimension de  $B$  sur  $A$ . Comme  $A$  est noethérien, pour tout module de type fini  $M$  sur  $A$ , sa dimension projective est égale à sa Tor-dimension. De plus, pour tout  $B$ -module projectif de type fini  $P$ ,  $\text{Tor dim}(P) = n$ . Donc tout tel module  $P$  admet une  $A$ -résolution projective finie par des modules de type fini  $Q_* \rightarrow P$ .

Montrons que  $\sum_i (-1)^i [Q_i]$  est indépendant de la résolution  $Q_* \rightarrow P$ . Comme dans la proposition 1.5, on peut supposer qu'il existe  $u : Q'_* \rightarrow Q_*$  surjection entre les deux résolutions considérées. Alors,  $K := \ker(u)_*$  est un complexe fini acyclique de modules projectifs de type fini. Donc :

$$\sum_i (-1)^i [Q'_i] = \sum_i (-1)^i [Q_i] + \sum_i (-1)^i [K_i] = \sum_i (-1)^i [Q_i]$$

Montrons maintenant que si  $0 \rightarrow P' \rightarrow P \rightarrow P'' \rightarrow 0$  est une suite exacte dans  $\text{P}(B)$ , alors  $f_*[P] = f_*[P''] + f_*[P']$ . Par le lemme du fer à cheval, on dispose de résolutions finies respectant la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & Q'_* & \longrightarrow & Q_* & \longrightarrow & Q''_* \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & P'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

On a alors clairement  $f_*[P] = f_*[P''] + f_*[P']$ .  $\square$

On peut maintenant étendre la formule de projection.

**Proposition 1.7** (formule de projection). *Soit  $f : A \rightarrow B$  fini et de Tor-dimension finie, avec  $A$  et  $B$  commutatifs et  $A$  noethérien. Alors pour tout  $a$  dans  $K'_0(A)$  et  $b$  dans  $K_0(B)$  :*

$$f_*(b \cdot f^*(a)) = f_*(b) \cdot a \text{ dans } K'_0(A)$$

De même, pour tout  $a$  dans  $K_0(A)$  et  $b$  dans  $K_0(B)$  :

$$f_*(b \cdot f^*(a)) = f_*(b) \cdot a \text{ dans } K_0(A)$$

*Démonstration.* On reprend les notations de la proposition 1.5. On démontre la première formule, la seconde se démontre de façon similaire. On se ramène au cas où  $a = [M]$  avec  $M$  dans  $\mathcal{M}$  et  $b = [P]$  avec  $P$  dans  $\mathcal{P}(B)$ . On se donne  $Q_* \rightarrow P$  une résolution finie de  $P$  par des  $A$ -modules projectifs de type fini. Or  $M \otimes_A Q_* \rightarrow M \otimes_A P$  est exacte car pour tout  $i > 0$ ,  $\text{Tor}_i^A(M, P) = 0$ . Donc :

$$\begin{aligned}
f_*(b \cdot f^*(a)) &= [P \otimes_B (B \otimes_A M)] \\
&= [P \otimes_A M] \\
&= \sum_i (-1)^i [Q_i \otimes_A M] \\
&= \left( \sum_i (-1)^i [Q_i] \right) \cdot [M] \\
&= f_*(b) \cdot a
\end{aligned}$$

$\square$

Nous allons maintenant nous intéresser au cas particulier des anneaux réguliers. Nous verrons que si  $A$  est régulier, alors  $K_0(A)$  et  $K'_0(A)$  coïncident.

**Définition 1.8.** Un anneau noethérien (à gauche)  $A$  est dit proj-régulier si tout  $A$ -module de type fini est de dimension projective finie.

Dans le cas commutatif, cette définition coïncide avec la définition usuelle d'anneau régulier (cf. le corollaire 1.10 ci-dessous).

**Théorème 1.9.** *Soit  $(A, \mathfrak{m})$  un anneau local commutatif noethérien. S'équivalent :*

- (i)  $A$  est de dimension projective finie ;
- (ii)  $A$  est local régulier ( $\text{Krull dim } A = \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ) ;
- (iii)  $k := A/\mathfrak{m}$  est de dimension projective finie sur  $A$ .

Et dans ce cas, la dimension projective de  $A$  est la dimension projective de  $k := A/\mathfrak{m}$  comme  $A$ -module.

Nous renvoyons au [Wei94, Chp.4] pour la démonstration et les différentes propriétés élémentaires de la dimension projective qui seront utilisées par la suite.

**Corollaire 1.10.** *Un anneau commutatif noethérien  $A$  est proj-régulier si et seulement si il est régulier (ie. pour tout  $\mathfrak{m}$  idéal maximal,  $\text{ht } \mathfrak{m} = \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ ).*

*Démonstration.* ( $\Leftarrow$ ) Soit  $P_* \rightarrow M$  une résolution projective par des modules de type fini d'un  $A$ -module de type fini  $M$ . On note  $Z_n := \text{coker}(d : P_n \rightarrow P_{n-1})$ . Comme pour tout  $\mathfrak{m}$  idéal maximal,  $M_{\mathfrak{m}}$  est de dimension projective finie, par le théorème 1.9, il existe  $n \geq 0$  tel que  $(Z_n)_{\mathfrak{m}}$  soit projectif. Mais, comme  $A$  est noethérien,  $Z_n$  est de présentation finie. Donc  $(Z_n)_{\mathfrak{m}}$  est un  $A_{\mathfrak{m}}$ -module libre de type fini. Donc, il existe  $f_{\mathfrak{m}} \in A \setminus \mathfrak{m}$  tel que  $(Z_n)_{f_{\mathfrak{m}}}$  soit libre, et donc projectif. Or si  $(Z_n)_{f_{\mathfrak{m}}}$  est projectif,  $(Z_m)_{f_{\mathfrak{m}}}$  est aussi projectif pour tout  $m \geq n$ . Donc, comme  $\text{Spec}(A)$  est quasi-compact, il existe  $n \geq 0$  et  $f_1, \dots, f_l$  tels que  $\text{Spec}(A) = \bigcup_i D(f_i)$  et  $(Z_n)_{f_i}$  soit projectif de type fini pour tout  $i$ . Alors  $Z_n$  est projectif, et  $M$  est de dimension projective finie sur  $A$ .

( $\Rightarrow$ ) Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal. Alors  $A/\mathfrak{m}$  est de dimension projective finie sur  $A$  et donc aussi sur  $A_{\mathfrak{m}}$ . Donc, d'après le théorème 1.9,  $A_{\mathfrak{m}}$  vérifie  $\text{Krull dim } A_{\mathfrak{m}} = \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ . On a donc bien  $\text{ht } \mathfrak{m} = \dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ .  $\square$

**Théorème 1.11.** *Soit  $A$  un anneau commutatif noethérien régulier. Alors le foncteur naturel  $P(A) \rightarrow \text{Modf}(A)$  induit un isomorphisme  $K_0(A) \rightarrow K'_0(A)$ .*

*Démonstration.* Nous allons décrire un inverse  $u : K'_0(A) \rightarrow K_0(A)$ . Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini, et soit  $P_* \rightarrow M$  une résolution finie par des  $A$ -modules projectifs. On pose  $u(M) := \sum_i (-1)^i [P_i]$ .

Montrons que  $u(M)$  ne dépend pas de la résolution. Comme dans la preuve de la proposition 1.5, il suffit de se restreindre au cas où il existe  $a : P'_* \rightarrow P_*$  surjection entre deux résolutions de  $M$ . Alors  $\ker(a)_* \rightarrow 0$  est une résolution projective. On a alors  $\sum_i (-1)^i [P_i] = \sum_i (-1)^i [P'_i] - \sum_i (-1)^i [\ker(a)_i] = \sum_i (-1)^i [P'_i]$ .

Montrons maintenant que si  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  est une suite exacte dans  $\text{Modf}(M)$ , alors  $u(M) = u(M'') + u(M')$ . Par le lemme du fer à cheval, on dispose de résolutions finies respectant la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & P'_* & \longrightarrow & P_* & \longrightarrow & P''_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

On a alors clairement  $u(M) = u(M'') + u(M')$ .  $\square$

On remarque que ce théorème ressemble beaucoup à la proposition 1.5. Ces deux résultats sont encore vraie en  $K$ -théorie supérieure, et sont des applications d'un même résultat (voir [lien vers plus loin]).

**1.2. Les groupes  $K_0$  et  $K'_0$  d'un schéma.** On peut étendre la définition des groupes de  $K$  et  $K'$ -théorie des anneaux commutatifs aux schémas. Pour  $X$  un schéma, nous noterons  $P(X)$  la catégorie des modules projectifs localement de type fini sur  $X$  et  $\text{Modf}(X)$  la catégorie des modules quasi-cohérents localement de type fini sur  $X$ .

**Définition 1.12** ( $K_0$  et  $K'_0$ ). Soit  $X$  un schéma. Le groupe abélien  $K_0(X)$  est le groupe de Grothendieck de  $P(X)$  : le quotient du groupe abélien libre  $\bigoplus_{\mathcal{P}} \mathbb{Z} \cdot [\mathcal{P}]$  engendré par les objets de  $P(X)$ , par les relation  $[\mathcal{R}] = [\mathcal{P}] + [\mathcal{Q}]$  pour chaque suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow 0$ .

On définit de même le groupe  $K'_0(X)$  comme le groupe de Grothendieck de  $\text{Modf}(X)$ .

De même que pour les anneaux, nous avons les propriétés suivantes :

- (i)  $(K_0(X), \oplus, \otimes)$  est un anneau et le produit tensoriel fait de  $K'_0(X)$  un  $K_0(X)$ -module ;
- (ii) Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme de schéma, le foncteur  $f^* : \text{P}(Y) \rightarrow \text{P}(X)$  induit un morphisme d'anneau :

$$f^* : K_0(Y) \longrightarrow K_0(X)$$

- (ii') Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme plat, le foncteur  $f^* : \text{Modf}(Y) \rightarrow \text{Modf}(X)$  induit un morphisme d'anneau :

$$f^* : K'_0(Y) \longrightarrow K'_0(X)$$

- (iii) Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme fini localement libre, le foncteur  $f_* : \text{P}(X) \rightarrow \text{P}(Y)$  induit un morphisme **de groupe** :

$$f_* : K_0(X) \longrightarrow K_0(Y)$$

Et on a la formule de projection, pour tout  $x$  dans  $K_0(X)$  et  $y$  dans  $K_0(Y)$  :

$$f_*(x \cdot f^*(y)) = f_*(x) \cdot y \text{ dans } K_0(Y)$$

- (iii') Si  $f : X \rightarrow Y$  est un morphisme fini, le foncteur  $f_* : \text{Modf}(X) \rightarrow \text{Modf}(Y)$  induit un morphisme :

$$f_* : K'_0(X) \longrightarrow K'_0(Y)$$

Et si  $f$  est localement libre, on a la formule de projection, pour tout  $x$  dans  $K_0(Y)$  et  $y$  dans  $K'_0(Y)$  :

$$f_*(x \cdot f^*(y)) = f_*(x) \cdot y \text{ dans } K'_0(Y)$$

[à terminer, ajouter les morphismes propres et les morphismes de Tor dimension finie]

Nous allons maintenant aborder le cas des schémas réguliers. Si les résultats sont assez similaires au cas des anneaux, les schémas posent le problème de l'existence de résolutions par des fibrés vectoriels.

**Définition 1.13.** Un schéma  $X$  est dit régulier si l'anneau local  $\mathcal{O}_{X,x}$  est régulier pour tout point  $x$  dans  $X$ .

*Remarque 1.14.* Un schéma, et même un anneau, dont les anneaux locaux sont réguliers n'est pas nécessairement noethérien. Par exemple, c'est le cas du localisé de  $k[X_1, X_2, X_3, \dots]$  par le complémentaire de l'union  $\bigcup_n (X_{n^2}, X_{n^2+1}, \dots, X_{(n+1)^2-1})$  (contre-exemple dû à Nagata).

**Lemme 1.15.** *Soit  $X$  un schéma noethérien, régulier et séparé. Alors tout faisceau cohérent sur  $X$  est quotient d'un fibré vectoriel.*

La démonstration ci-dessous utilise des propriétés des diviseurs de Cartier et de Weil. Pour plus d'information, voir [GW10, chp. 11].

*Démonstration.* (a) Si  $(A, \mathfrak{m})$  est local noethérien et normal, alors :

$$\dim(A) \leq 1 \Leftrightarrow \operatorname{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\} \text{ est affine}$$

En effet, si  $\dim(A) = 0$ , c'est clair. Si  $\dim(A) = 1$ , il existe  $f \in \mathfrak{m}$  qui évite les idéaux premiers minimaux de  $A$ . On a alors  $\operatorname{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\} = \operatorname{Spec}(A_f)$ . Si  $\dim(A) \geq 2$ , par le lemme de Hartogs ([GW10, 6.45]),

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(\operatorname{Spec}(A)) \rightarrow \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(A)}(\operatorname{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\})$$

est un isomorphisme, donc  $\operatorname{Spec}(A) \setminus \{\mathfrak{m}\}$  ne peut être affine.

- (b) Si  $X$  est localement noethérien et normal, et si  $U \hookrightarrow X$  est une immersion ouverte affine, alors toutes les composantes irréductibles de  $X \setminus U$  sont de codimension  $\leq 1$  dans  $X$ .

En effet, si  $\xi \in X \setminus U$  est le point générique d'une composante irréductible, on pose  $V = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\xi}) \setminus \{\mathfrak{m}_{X,\xi}\}$ . Par l'hypothèse, c'est un ouvert affine et  $\mathcal{O}_{X,\xi}$  est noethérien normal. Donc par (a),  $\dim(\mathcal{O}_{X,\xi}) \leq 1$ .

- (c) Soit  $U \subseteq X$  affine avec  $X$  noethérien, régulier et séparé. Alors il existe un fibré en droite  $\mathcal{L}$  et  $f \in \mathcal{L}(X)$  tels que  $U = D(f)$ .

Pour démontrer ce point nous pouvons supposer  $X$  intègre,  $X \neq U$  et  $U$  non vide. Comme  $X$  est séparé,  $U \hookrightarrow X$  est affine. Ainsi, d'après (b),  $X \setminus U$  est de codimension pure 1. Donc, par définition, il existe un diviseur de Weil effectif  $D$  tel que  $X \setminus U = \operatorname{Supp}(D)$ . Comme  $X$  est régulier, il existe un diviseur de Cartier effectif  $\tilde{D}$  dont le diviseur de Weil associé est  $D$ . Alors avec  $f := 1_{\tilde{D}} \in \mathcal{O}(\tilde{D})(X)$  la section associée à  $1 \in K(X)$  (corps des fractions de  $X$ ) et  $\mathcal{L} := \mathcal{O}(\tilde{D})(X)$ , on a  $U = D(f)$ .

- (d) Conclusion :

On pose  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  avec  $I$  fini et chaque  $U_i$  affine. Pour chaque  $i$ , à l'aide de (c), on se donne  $\mathcal{L}_i$  et  $f_i \in \mathcal{L}_i(X)$  tels que  $U_i = D(f_i)$ .

Soit  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$ . Pour chaque  $i \in I$ , on note  $a_{i1}, \dots, a_{in_i}$  une famille de générateurs de  $\mathcal{F}(U_i)$ . Il existe alors, pour chaque  $i$ , des entiers  $m_i \geq 0$  tel que pour tout  $j$ ,  $a_{ij} \otimes f_i^{m_i} = b_{ij|D(f_i)}$  avec  $b_{ij} \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m_i}(X)$ .

Les  $b_{ij}$  induisent des surjections  $\mathcal{O}_X^{n_i} \rightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes m_i}$  sur  $U_i$  et donc une surjection :

$$\phi : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X^{n_i} \otimes \mathcal{L}^{\otimes -m_i} \rightarrow \mathcal{F}$$

□

**Lemme 1.16.** *Soit  $X$  un schéma noethérien, régulier et séparé. Alors tout complexe fini de modules cohérents sur  $X$  admet une résolution finie par des fibrés vectoriels.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{F}_*$  un complexe de modules cohérents sur  $X$ , concentré en degrés  $\{k, \dots, l-1\}$ . Alors, d'après le lemme 1.15, ce complexe admet une résolution  $\mathcal{E}_* \rightarrow \mathcal{F}_*$  par des fibrés vectoriels. Soit  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$  un recouvrement fini par des ouverts affines. Alors, sur chaque ouvert  $U_i$ , on a une résolution  $\mathcal{E}(U_i)_* \rightarrow \mathcal{F}(U_i)_*$  du complexe de  $\mathcal{O}_X(U_i)$ -modules de type fini  $\mathcal{F}(U_i)_*$ . Or comme  $\mathcal{O}_X(U_i)$  est régulier,  $(\mathcal{E}(U_i)_{l+1} \rightarrow \mathcal{E}_l(U_i))$  est de dimension projective finie. Donc, il existe  $n_i \geq 0$  tel que pour tout  $m \geq n_i$ ,  $\operatorname{coker}(\mathcal{E}_{m+1}(U_i) \rightarrow \mathcal{E}_m(U_i))$  soit projectif. Si on choisit  $n \geq n_i$  pour tout  $i$ , alors  $\operatorname{coker}(\mathcal{E}_{n+1}(U_i) \rightarrow \mathcal{E}_n(U_i)) \rightarrow \mathcal{E}_{n-1}(U_i) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{E}_0(U_i) \rightarrow \mathcal{F}_*$  est une résolution finie de  $\mathcal{F}$  par des fibrés vectoriels. □



**Lemme 1.17.** *Soit  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  une suite exacte de modules cohérents sur un schéma  $X$  noethérien régulier séparé. Alors il existe des résolutions finies par des fibrés vectoriels respectant la suite exacte :*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{P}'_* & \longrightarrow & \mathcal{P}_* & \longrightarrow & \mathcal{P}''_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u' & & \downarrow u & & \downarrow u'' & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

*Démonstration.* Montrons d'abord le résultat suivante :

(\*) : Soit  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  une suite exacte de modules cohérents. Alors, on peut la compléter en un diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{P}' & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow u' & & \downarrow u & & \downarrow u'' & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les flèches verticales sont surjectives et les modules  $\mathcal{P}', \mathcal{P}$  et  $\mathcal{P}''$  sont des fibrés vectoriels.

Montrons l'existence d'un tel diagramme. D'après le lemme 1.15, il existe des surjections  $v : \mathcal{P}'' \rightarrow \mathcal{F}$  et  $u' : \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{F}'$  avec  $\mathcal{P}''$  et  $\mathcal{P}'$  fibré vectoriels. On pose alors  $\mathcal{P} := \mathcal{P}' \oplus \mathcal{P}''$  et on complète le diagramme de manière évidente avec  $0 \rightarrow \mathcal{P}' \rightarrow \mathcal{P}' \oplus \mathcal{P}'' \rightarrow \mathcal{P}'' \rightarrow 0$  induit par le scindage,  $u := u' \oplus v$  et  $u'' := (\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'') \circ v$ .

Maintenant, en appliquant (\*) successivement aux la suite exacte  $0 \rightarrow \ker(u') \rightarrow \ker(u) \rightarrow \ker(u'') \rightarrow 0$ , on obtient des résolutions respectant la suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ . D'après la preuve du lemme 1.16, nous pouvons tronquer ces résolutions à un rang  $n \geq 0$ . Il reste à montrer que la suite :

$$0 \rightarrow \operatorname{coker}(\mathcal{P}'_{n+1} \rightarrow \mathcal{P}'_n) \rightarrow \operatorname{coker}(\mathcal{P}_{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n) \rightarrow \operatorname{coker}(\mathcal{P}''_{n+1} \rightarrow \mathcal{P}''_n) \rightarrow 0$$

est exacte. Elle est exacte à droite par le lemme du serpent, et à gauche car les deux premiers termes s'injectent dans  $\mathcal{P}_{n-1}$ .  $\square$

**Théorème 1.18.** *Soit  $X$  un schéma noethérien, régulier et séparé. Alors le foncteur  $P(X) \rightarrow \operatorname{Modf}(X)$  induit un isomorphisme de groupes  $K_0(X) \simeq K'_0(X)$ .*

*Démonstration.* la preuve est essentiellement la même que pour le théorème 1.11. Il faut, pour appliquer la preuve de ce dernier, montrer deux lemmes dans le cadre des modules sur le schéma  $X$  : l'existence de résolutions finies pour les complexes finis de modules cohérents, c'est le lemme 1.16 ci-dessus ; l'existence de résolutions finies respectant les suites exactes, c'est le lemme 1.17 ci-dessus.  $\square$

**1.3. Catégories exactes et leurs  $K_0$ .** Dans les deux sous-sections précédentes, nous avons défini les groupes de Grothendieck de différentes catégories :  $P(A)$ ,  $\operatorname{Modf}(A)$ ,  $P(X)$ ,  $\operatorname{Modf}(X)$ , ou encore  $\mathcal{M}$  de la proposition 1.5. Ces catégories ont en commun d'être des sous-catégories stable par extension d'une catégorie abélienne.

**Définition 1.19.** Une catégorie exacte plongée est une sous-catégorie pleine  $\mathcal{M}$  stable par extension d'une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$ . C'est-à-dire, pour toute suite exacte  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{A}$  telle que  $M'$  et  $M''$  soient dans  $\mathcal{M}$ , il existe un objet  $\tilde{M}$  de  $\mathcal{M}$  isomorphe à  $M$ .

Soit  $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{A}$  une catégorie exacte plongée. On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble des suites  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  d'objets de  $\mathcal{M}$  qui sont exactes dans  $\mathcal{A}$ . On appelle monomorphisme admissible un morphisme  $M' \rightarrow M$  dans  $\mathcal{M}$  qui apparaît comme le premier morphisme d'un élément  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  de  $\mathcal{E}$ . On le notera alors  $M' \rightarrowtail M$ . On appelle épimorphisme admissible un morphisme  $M \rightarrow M''$  dans  $\mathcal{M}$  qui apparaît comme le second morphisme d'un élément  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  de  $\mathcal{E}$ . On le notera alors  $M \twoheadrightarrow M''$ . Alors  $\mathcal{M}$  est additive et  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{E}$  vérifient les propriétés suivantes.

- (a1) Si  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  est une suite dans  $\mathcal{M}$  isomorphe à une suite exacte de  $\mathcal{E}$ , alors  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  est dans  $\mathcal{E}$ .
- (a2) Pour tous  $M'$  et  $M''$  dans  $\mathcal{M}$ , la suite naturelle  $0 \rightarrow M' \rightarrow M' \oplus M'' \rightarrow M'' \rightarrow 0$  est dans  $\mathcal{E}$ .
- (a3) Pour tout  $0 \rightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M'' \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{E}$ ,  $i$  est le noyau de  $j$  dans  $\mathcal{M}$  et  $j$  est le conoyau de  $i$  dans  $\mathcal{M}$ .
- (b1) Les monomorphismes admissibles sont stables par poussé en avant par un morphisme quelconque de  $\mathcal{M}$ . Les épimorphismes admissibles sont stables par tiré en arrière par un morphisme quelconque de  $\mathcal{M}$ .
- (b2) Les monomorphismes admissibles sont stables par composition. Les épimorphismes admissibles sont stables par composition.

*Démonstration.* Les points (a1)-(a3) sont immédiats. Soit  $j : M \rightarrow M''$  un épimorphisme admissible et  $i : M' \rightarrow M$  son noyau. Soit  $f : N \rightarrow M''$  un morphisme. Alors on a le diagramme suivant avec des lignes exactes dans  $\mathcal{A}$  et le carré de droite est cartésien.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M \times_{M''} N & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' \longrightarrow 0
\end{array}$$

Or,  $N$  et  $M'$  sont des objets de  $\mathcal{M}$ . Donc il existe  $P$  dans  $\mathcal{M}$  isomorphe à  $M \times_{M''} N$ . Ceci démontre (b1).

Soit  $j : M \rightarrow M''$  et  $p : M'' \rightarrow M'''$  deux épimorphismes admissibles. On note  $i : N \rightarrow M''$  le noyau de  $p$ . On a alors à nouveau le diagramme ci-dessus. On vérifie immédiatement que  $M \times_{M''} N \rightarrow M$  est le noyau de  $p \circ j$ .  $\square$

**Définition 1.20** (catégorie exacte). Une catégorie exacte est une catégorie additive  $\mathcal{M}$  muni d'un ensemble  $\mathcal{E}$  de suites  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{M}$  vérifiant les axiomes (a1),(a2),(a3),(b1) et (b2). Un foncteur  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  entre catégories exactes est un foncteur additif préservant les suites exactes (ie.  $F$  envoie  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{E}'$ ).

**Exemple 1.21.** Les catégories suivantes sont exactes :

- une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  munie de ses suites exactes ;
- une catégorie additive  $\mathcal{N}$  munie des suites exactes scindées ;
- si  $\mathcal{M}$  est une catégorie exacte, la catégorie  $\mathcal{M}^{\text{op}}$  est exacte ;
- $\text{P}(A)$  ou  $\text{Modf}(A)$  pour  $A$  un anneau ;
- $\text{P}(X)$  ou  $\text{Modf}(X)$  pour  $X$  un schéma.

**Proposition 1.22.** Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie exacte et  $\mathcal{E}$  son ensemble de suites exactes. Alors :

- (c1) Si  $f : M \rightarrow M''$  a un noyau dans  $\mathcal{M}$  et si  $N \xrightarrow{u} M \xrightarrow{f} M''$  est un épimorphisme admissible, alors  $f$  est un épimorphisme admissible.
- (c2) Si  $f : M' \rightarrow M$  a un conoyau dans  $\mathcal{M}$  et si  $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{u} N$  est un monomorphisme admissible, alors  $f$  est un monomorphisme admissible.

Nous ne démontrons pas ici cette proposition. La démonstration est élémentaire et relativement courte. Elle est rédigée dans [Kel90, A.1].

**Théorème 1.23** (plongement). *Pour toute catégorie exacte  $\mathcal{M}$ , il existe une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  et un foncteur  $i : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{A}$  additif, exact et pleinement fidèle.*

Ce théorème sera admis ici, car sa démonstration a peu de rapport avec le reste du mémoire. Il permet d'utiliser les propriétés des catégories abéliennes quand on travaille avec des catégories exactes (lemme du serpent par exemple). Pour une démonstration, voir [Kel90, A.2].

Un autre exemple important de catégories exactes est le suivant.

**Proposition - définition 1.24.** *Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie exacte et  $\mathcal{E}$  l'ensemble de ses suites exactes. Alors  $\mathcal{E}$  a une structure naturelle de catégorie additive où les morphismes de  $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$  vers  $N' \rightarrowtail N \twoheadrightarrow N''$  sont les diagrammes commutatifs :*

$$\begin{array}{ccccc} M' & \rightarrowtail & M & \twoheadrightarrow & M'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ N' & \rightarrowtail & N & \twoheadrightarrow & N'' \end{array}$$

On a alors 3 foncteurs  $s, t, q : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  donnés par :

$$\begin{aligned} s : M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M'' &\mapsto M' \\ t : M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M'' &\mapsto M \\ q : M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M'' &\mapsto M'' \end{aligned}$$

On note  $\mathcal{F}$  l'ensemble des suites  $S = 0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{E}$  tels que  $s(S)$ ,  $t(S)$  et  $q(S)$  soient exactes.

Alors  $\mathcal{F}$  fait de  $\mathcal{E}$  une catégorie exacte et les foncteurs  $s, t, q : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  sont exactes.

*Démonstration.* Les propriétés (a1), (a2) et (a3) sont faciles à vérifier. Par le lemme "3x3" des catégories abéliennes et le théorème de plongement 1.23,  $i : E' \rightarrow E$  est un épimorphisme admissible dans  $\mathcal{E}$  si et seulement si  $s(i)$ ,  $t(i)$  et  $q(i)$  sont des épimorphismes admissibles dans  $\mathcal{M}$ . De même pour les monomorphismes admissibles. Or la composition, le tiré en arrière et le poussé en avant se calculent termes à termes. Ceci montre (b1) et (b2).  $\square$

Nous pouvons maintenant définir le  $K_0$  d'une catégorie exacte.

**Définition 1.25** ( $K_0$  d'une catégorie exacte). Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie exacte de suites exactes  $\mathcal{E}$ . On définit le groupe de  $K$ -théorie de  $\mathcal{M}$ ,  $K_0(\mathcal{M})$ , comme le quotient du groupe libre  $\bigoplus_{\mathcal{M}} \mathbb{Z} \cdot [M]$  sur les objets de  $\mathcal{M}$ , par les relations  $[M] = [M'] + [M'']$  pour chaque suite  $M' \rightarrowtail M \twoheadrightarrow M''$  dans  $\mathcal{E}$ .

*Remarque 1.26.* La définition ci-dessus fait de  $K_0$  un foncteur de la catégorie des catégories exactes et foncteurs exacts dans les groupes abéliens.

*Remarque 1.27.* La exacte  $0 \rightarrow 0 \rightarrow 0$  implique  $0 = [0]$  dans  $K_0(\mathcal{M})$ . Pour chaque isomorphisme  $\eta : M \rightarrow \tilde{M}$ , la suite  $0 \rightarrow M \xrightarrow{\eta} \tilde{M}$  est isomorphe à  $0 \rightarrow 0 \oplus M \xrightarrow{0 \oplus \text{id}} M$  qui est dans  $\mathcal{E}$ . Ceci montre que  $[M] = [\tilde{M}]$  dans  $K_0(\mathcal{M})$ . Ainsi, si les classes d'isomorphisme de  $\mathcal{M}$  forment un ensemble dans un certain univers,  $K_0(\mathcal{M})$  est un ensemble dans ce même univers.

**Proposition 1.28.** *Soit  $\mathcal{M}_{(-)} : I \rightarrow \text{CatEx}$ ,  $i \mapsto \mathcal{M}_i$  un foncteur d'une catégorie filtrante  $I$  dans la catégorie des petites catégories exactes et des foncteurs exactes. Alors la colimite  $\mathcal{M} := \text{colim}_i \mathcal{M}_i$  existe. La catégorie sous-jacente est la colimite dans la catégorie des catégories et l'ensemble  $\mathcal{E}$  des suites exactes est donnée par la colimite  $\text{colim}_i \mathcal{E}_i$ , où  $\mathcal{E}_i$  est l'ensemble des suites exactes dans  $\mathcal{M}_i$ . En d'autres termes  $M' \xrightarrow{k} M \xrightarrow{p} M''$  est dans  $\mathcal{E}$  si et seulement si pour un certain rang  $i$  dans  $\text{Ob } I$ , il existe  $M'_i, M_i, M''_i, k_i$  et  $p_i$  induisant respectivement  $M', M, M'', k$  et  $p$  dans  $\mathcal{M}$ , tels que  $M'_i \xrightarrow{k_i} M_i \xrightarrow{p_i} M''_i$  soit exacte dans  $\mathcal{M}_i$ .*

*Démonstration.* On pose  $\mathcal{M}$  la colimite de  $\mathcal{M}_{(-)}$  dans la catégorie des petites catégories. On pose  $\mathcal{E}$  la colimite  $\text{colim}_i \mathcal{E}_i$ . Montrons que  $\mathcal{M}$  est exacte. Il sera alors immédiat que  $\mathcal{M}$  est la colimite dans  $\text{CatEx}$ . Comme tout diagramme fini est réalisé à un rang  $i$  dans  $\text{Ob } I$ , les axiomes (a1), (a2) et (a3) passent à la colimite. L'axiome (b2) passe de même clairement à la colimite. L'axiome (b1) est vérifié par le lemme 1.29 suivant.  $\square$

**Lemme 1.29.** *Soit  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  un foncteur exact entre catégories exactes. Soit  $j : M \rightarrow M''$  un épimorphisme admissible dans  $\mathcal{M}$  et  $f : N \rightarrow M''$  un morphisme. Alors le carré :*

$$\begin{array}{ccc} F(M \times_{M''} N) & \longrightarrow & F(N) \\ \downarrow & & \downarrow F(f) \\ F(M) & \xrightarrow{F(j)} & F(M'') \end{array}$$

*est cartésien. En d'autres termes, les foncteurs exactes préservent les tirés en arrière des épimorphismes admissibles.*

*Démonstration.* On note  $i : M' \rightarrow M$  le noyau de  $j$ . On note  $\alpha : F(M \times_{M''} N) \rightarrow F(M) \times_{F(M'')} F(N)$  le morphisme canonique. Montrons que  $\alpha$  a noyau nul. Soit  $u : P \rightarrow F(M \times_{M''} N)$  tel que  $\alpha \circ u = 0$ . Alors comme  $F(M') \rightarrow F(M \times_{M''} N) \rightarrow F(N)$  est exacte,  $u$  se factorise en  $v : P \rightarrow F(M')$  par  $F(M') \rightarrow F(M \times_{M''} N)$ . Or,  $F(i) \circ v = 0$ , donc  $v = 0$  car  $F(i)$  est un noyau. Or la composition de  $\alpha$  avec  $F(M) \times_{F(M'')} F(N) \rightarrow F(N)$  est un épimorphisme admissible. Donc par (c1),  $\alpha$  est un épimorphisme admissible de noyau nul. Par (a3) c'est donc un isomorphisme.  $\square$

**Proposition 1.30.** *Soit  $\mathcal{M}_{(-)} : I \rightarrow \text{CatEx}$ ,  $i \mapsto \mathcal{M}_i$  un foncteur d'une catégorie filtrante  $I$  dans la catégorie des petites catégories exactes. On note  $\mathcal{M}$  sa colimite. Alors l'application induite  $\text{colim}_i K_0(\mathcal{M}_i) \rightarrow K_0(\mathcal{M})$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On a  $\bigoplus_{M \in \text{Ob } \mathcal{M}} \mathbb{Z} = \text{colim}_i \bigoplus_{M \in \text{Ob } \mathcal{M}_i} \mathbb{Z}$  et le sous-groupe  $< [M'] + [M''] - [M] >_{M' \rightarrow M \rightarrow M''}$  de  $\bigoplus_{M \in \text{Ob } \mathcal{M}} \mathbb{Z}$  est colimite des sous-groupes correspondants des  $\bigoplus_{M \in \text{Ob } \mathcal{M}_i} \mathbb{Z}$ .  $\square$

Nous allons maintenant appliquer ce résultat de colimite pour effectuer un calcul.

**Définition 1.31.** Soit  $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots$  un anneau gradué en degrés positifs. On note  $\text{Pgr}(A)$  la catégorie des  $A$ -modules  $\mathbb{Z}$ -gradués de type fini et projectifs (en tant que modules gradués<sup>1</sup>). C'est une catégorie exacte. On notera  $t : \text{Pgr}(A) \rightarrow \text{Pgr}(A)$ ,  $(P_n)_n \mapsto (P_{n-1})_n$  le foncteur exact de décalage. On notera également par  $t$  l'automorphisme induit sur  $K_0(\text{Pgr}(A))$ .

**Proposition 1.32.** Soit  $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots$  un anneau gradué en degrés positifs. L'automorphisme  $t$  fait de  $K_0(\text{Pgr}(A))$  un  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module. On a un isomorphisme de  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(A_0) &\rightarrow K_0(\text{Pgr}(A)) \\ 1 \otimes x &\mapsto (A \otimes_{A_0} -)_*(x) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Pour  $k$  dans  $\mathbb{Z}$ , on note  $F_k$  le foncteur  $\text{Pgr}(A) \rightarrow \text{Pgr}(A)$ ,  $P \mapsto < P_n >_{n \leq k}$ , où  $< P_n >_{n \leq k}$  est le sous-module de  $P$  engendré par les éléments homogènes de degrés  $n \leq k$ . Pour  $q \geq 0$ , on note  $\text{Pgr}(A)_q$  la sous-catégorie pleine de  $\text{Pgr}(A)$  des  $P$  tels que  $F_{-q-1}P = 0$  et  $F_qP = P$ . On définit le foncteur exact  $T : \text{Pgr}(A) \rightarrow \text{Pgr}(A_0)$ ,  $P \mapsto A_0 \otimes_A P$ . Pour tout  $P$  et tout  $n$ , nous allons vérifier que le morphisme canonique suivant est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} A[-n] \otimes_{A_0} T(P)_n &\rightarrow F_n P / F_{n-1} P \\ a_m \otimes b_n &\mapsto \overline{a_m \cdot b_n} \end{aligned}$$

pour  $a_m$  et  $b_n$  homogènes de degrés  $m$  et  $n$ . On dispose d'un épimorphisme naturel de  $A_0$ -modules gradués  $f : P \rightarrow T(P)$ . Or  $T(P)$  est un  $A_0$ -module gradué projectif. Soit  $g : T(P) \rightarrow P$  une section. On note  $h : T(P) \otimes_{A_0} A \rightarrow P$  le morphisme de  $A$ -modules gradués de type fini induit. Le morphisme  $T(h)$  s'identifie à  $\text{id}_{T(P)}$ . Donc  $T(\text{coker}(h))$  est nul. Or  $\text{coker}(h)$  est de type fini et donc inférieurement borné. Donc  $\text{coker}(h) = 0$ . Donc  $h$  est surjectif. Comme  $P$  est projectif, on a  $T(P) \otimes_{A_0} A \simeq \ker(h) \oplus P$ . Mais par cet isomorphisme,  $T(T(P) \otimes_{A_0} A)$  est isomorphe à  $T(P)$ . Donc  $T(\ker(h)) = 0$ . Or, comme quotient de  $P$ ,  $\ker(h)$  est de type fini et donc borné inférieurement. Donc  $\ker(h) = 0$ . Ainsi on a un isomorphisme non-canonique  $T(P) \otimes_{A_0} A \simeq P$ . Via cet isomorphisme,  $F_n P \simeq \bigoplus_{q \leq n} A[-q] \otimes_{A_0} T(P)_q$ . On a donc bien  $A[-n] \otimes_{A_0} T(P)_n \simeq F_n P / F_{n-1} P$ , et ce morphisme correspond à celui défini plus haut car  $h$  est induit par une section de  $P \rightarrow T(P)$ .

Nous pouvons maintenant calculer  $K_0(\text{Pgr}(A)_q)$ . Soit  $P$  un objet de  $\text{Pgr}(A)_q$ . On a une filtration de  $P$  :

$$0 = F_{-q-1}P \subseteq F_{-q} \subseteq \cdots \subseteq F_q P = P$$

Et donc, au vu de l'isomorphisme ci-dessus :

$$[P] = \sum_{n=-q}^q [F_n P / F_{n-1} P] = \sum_{n=-q}^q [A[-n] \otimes_{A_0} T(P)_n] = \sum_{n=-q}^q [\phi(t^n \otimes T(P)_n)]$$

Ainsi, si on pose  $\chi_q : K_0(\text{Pgr}(A)_q) \rightarrow \bigoplus_{n=-q}^q K_0(A_0)$ ,  $P \mapsto \bigoplus_n T(P)_n$ , on a que  $\phi_q$  et  $\chi_q$  sont réciproques, où  $\phi_q$  est la restriction de  $\phi$  à  $\bigoplus_{n=-q}^q \mathbb{Z} \cdot t^n \otimes K_0(A_0)$ . Donc  $\phi_q$  est un isomorphisme. Par la proposition 1.30,  $\phi$  est un isomorphisme.  $\square$

1. ce qui est équivalent à projectif en tant que  $A$ -module, voir [Bas68, pp.636-637]. Ce ne sera pas utile ici

**1.4. Le groupe  $K_1$  d'un anneau.** Dans cette section, nous fixons un anneau  $A$ .

On note  $\mathrm{GL}_n(A)$  le groupe des matrices  $n \times n$  inversibles à coefficients dans  $A$ . On fait de  $n \mapsto \mathrm{GL}_n(A)$  un foncteur  $(\mathbb{N}, \leq) \rightarrow \mathrm{Grp}$  via les inclusions :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(A) & \rightarrow & \mathrm{GL}_{n+1}(A) \\ M & \mapsto & \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

et on note  $\mathrm{GL}(A) := \mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{GL}_n(A)$ .

**Définition 1.33** ( $K_1$  d'un anneau). Pour  $A$  un anneau, on définit le 1<sup>er</sup> groupe de  $K$ -théorie de  $A$ ,  $K_1(A)$ , par :

$$K_1(A) := \mathrm{GL}(A)^{\mathrm{ab}}$$

Nous allons maintenant donner une description du groupe des commutateurs  $[\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}(A)]$ .

**Définition 1.34.** Pour  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$  et  $a \in A$ , on pose :

$$e_{ij}(a) := \mathrm{id} + aE_{ij} \in \mathrm{GL}_n(A)$$

On note  $E_n(A)$  le sous-groupe de  $\mathrm{GL}_n(A)$  engendré par les  $e_{ij}(a)$  pour  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $i \neq j$  et  $a \in A$ . On note  $E(A) := \bigcup_n E_n(A) \subset \mathrm{GL}(A)$ .

**Exemple 1.35.** (1) Toutes les matrices de permutation paires sont dans  $E(A)$  ;  
(2) Si  $M \in \mathrm{GL}_n(A)$ , alors :

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} \in E_{2n}(A)$$

En effet, on a la formule :

$$\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -M^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Proposition 1.36** (lemme de Whitehead). Pour  $A$  un anneau,  $E(A)$  est parfait, et on a l'égalité :

$$E(A) = [\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}(A)]$$

Et donc :

$$K_1(A) = \mathrm{GL}(A)/E(A)$$

*Démonstration.*  $\subseteq$  : on a  $e_{ij}(a) = [e_{ik}(a), e_{kj}(a)]$  pour  $i, j$  et  $k$  distincts. Ceci montre également que  $E(A)$  est parfait.

$\supseteq$  : Pour  $M, N \in \mathrm{GL}_n(A)$ , on a, dans  $\mathrm{GL}_{2n}(A)$  :

$$[M, N] = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & N^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (NM)^{-1} & 0 \\ 0 & NM \end{pmatrix} \in E_{2n}(A)$$

□

[ajouter lien avec  $K$ -théorie topologique]

## 2. DÉFINITION DE LA $K$ -THÉORIE SUPÉRIEURE

Cette section est dédiée à la construction  $Q$  de la  $K$ -théorie supérieure, due à Daniel Quillen. La référence principale est l'article original de Quillen [Qui73].

**2.1. La construction  $Q$  de Quillen.** Dans cette sous-section,  $\mathcal{M}$  désigne une petite catégorie exacte.

**Proposition - définition 2.1.** *Un diagramme dans  $\mathcal{M}$  de la forme :*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ \downarrow p' & & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{i'} & D \end{array}$$

*est cartésien si et seulement si il est cocartésien. Si c'est le cas,  $p$  et  $p'$  ont même noyau, et  $i$  et  $i'$  ont même conoyau.*

*On appellera un tel diagramme bicartésien.*

*De plus, tout diagramme cartésien de la forme (1) ci-dessous ou cocartésien de la forme (2) ci-dessous est bicartésien.*

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \cdot & & \cdot \end{array} \quad (1) \quad \begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & & \cdot \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{\quad} & \cdot \\ \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & \lrcorner & \cdot \end{array}$$

*Démonstration.* Supposons seulement que le diagramme soit cartésien, que  $i'$  soit un monomorphisme admissible et  $p$  un épimorphisme admissible (cas (1)). On note  $k : N \rightarrow B$  le noyau de  $p$ . Un morphisme  $u : P \rightarrow A$  qui vérifie  $(P \xrightarrow{u} A \rightarrow C) = 0$  s'identifie à un morphisme  $P \rightarrow B$  qui vérifie  $(P \rightarrow B \rightarrow D) = 0$ , c'est à dire un morphisme  $P \rightarrow N$ . Donc  $p$  et  $p'$  ont même noyau. De plus, par l'axiome (b1),  $p'$  est un épimorphisme admissible.

Maintenant, un couple de morphismes  $u : C \rightarrow P$ ,  $v : B \rightarrow P$  s'identifie à un morphisme  $v : B \rightarrow P$  tel que  $A \rightarrow B \rightarrow P$  se factorise par  $C$ . C'est-à-dire, comme  $p$  et  $p'$  ont même noyau, un morphisme  $w : D \rightarrow P$ . Ainsi, le diagramme est cocartésien.

Montrons que  $i$  est un monomorphisme admissible. Soit  $j' : D \rightarrow Q$  le conoyau de  $i'$ . Un morphisme  $u : P \rightarrow B$  vérifie  $j' \circ p \circ u = 0$  si et seulement si  $p \circ u$  se factorise par  $i' : C \rightarrow D$  si et seulement si  $u$  se factorise par  $i$ . Donc  $i$  est le noyau de  $j' \circ p$ , qui est un épimorphisme admissible. Donc  $i$  est un monomorphisme admissible.

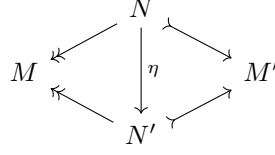
Les autres énoncés sont duaux de ceux démontrés.  $\square$

**Définition 2.2** (catégorie  $Q\mathcal{M}$ ). On définit la catégorie  $Q\mathcal{M}$  comme la catégorie dont :

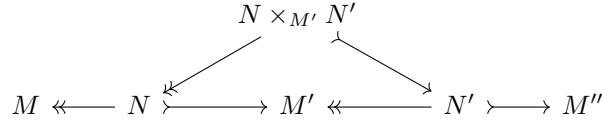
- (1) les objets sont les objets de  $\mathcal{M}$  ;
- (2) l'ensemble  $\text{Hom}_{Q\mathcal{M}}(M, M')$  est l'ensemble des diagrammes :

$$M \leftarrow N \rightarrow M'$$

à isomorphisme près, où un isomorphisme entre  $M \leftarrow N \rightarrow M'$  et  $M \leftarrow N' \rightarrow M'$  est la donnée d'un isomorphisme  $\eta : N \rightarrow N'$  dans  $\mathcal{M}$  faisant commuter le diagramme :



- (3) la composition de  $M \leftarrow N \rightarrow M'$  et  $M' \leftarrow N' \rightarrow M''$  est donnée par le diagramme :



*Remarque 2.3.* La composition dans  $Q\mathcal{M}$  est bien définie par fonctorialité des limites. L'associativité est facile à vérifier.

**Définition 2.4.** Pour  $i : M \rightarrowtail M'$ , on note  $i_! : M \rightarrow M'$  le morphisme associé dans  $Q\mathcal{M}$ . Un tel morphisme sera appelé une injection.

Pour  $j : M \twoheadrightarrow M''$ , on note  $j^! : M'' \rightarrow M$  le morphisme associé dans  $Q\mathcal{M}$ . Un tel morphisme sera appelé une surjection.

**Proposition 2.5.** *Tout morphisme  $u$  de  $Q\mathcal{M}$  se factorise en  $u = i_! j^!$  uniquement à unique isomorphisme près. De même,  $u$  se factorise uniquement sous la forme  $u = j^! i_!$  à unique isomorphisme près.*

*Un morphisme  $u$  est un isomorphisme si et seulement si c'est une injection et une surjection.*

*De plus, on a  $\text{Iso}_{Q\mathcal{M}}(M, M') \simeq \text{Iso}_{\mathcal{M}}(M, M')$ .*

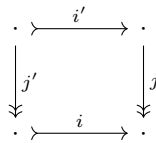
*Démonstration.* Le premier point est la définition. Le second point découle de la bijection entre factorisations  $u = j^! i_!$  et  $u = i_! j^!$  induite par les propriétés des carrés bicartésiens (proposition 2.1).

La caractérisation des isomorphismes est immédiate dès que l'on remarque : si  $u' = \tilde{i}_! \tilde{j}^!$  est inverse de  $u = i_! j^!$ , on pose  $a_! b^! = \tilde{j}^! i_!$ . Alors  $\text{id} = u' u = (\tilde{i} a)_! (b j)^!$ ; donc  $\tilde{i} a$  et  $b j$  sont des isomorphismes dans  $\mathcal{M}$ , donc  $\tilde{i}$  et  $j$  également.  $\square$

Une conséquence immédiate de la proposition ci-dessus et de la proposition 2.1 est la propriété universelle vérifiée par  $Q\mathcal{M}$  dans  $\text{Cat}$ .

**Proposition 2.6** (Propriété universelle de  $Q\mathcal{M}$ ). *La donnée d'un foncteur  $F : Q\mathcal{M} \rightarrow D$  avec  $D$  une petite catégorie est équivalente à la donnée :*

- (1) d'une application  $F : \text{Ob } \mathcal{M} \rightarrow \text{Ob } D$  ;
- (2) de morphismes  $F i_! : F M' \rightarrow F M$  pour chaque  $i : M \rightarrowtail M'$  ;
- (3) de morphismes  $F j^! : F M'' \rightarrow F M$  pour chaque  $j : M \twoheadrightarrow M''$  ;
- (4) tels que  $F(i i')_! = F i_! \circ F i'_!$  et  $F(j' j)^! = F j'^! \circ F j^!$  ;
- (5) et tels que pour chaque diagramme bicartésien :





$$\text{On a } Fj^! \circ Fi_! = Fi'_! \circ Fj'^!.$$

Nous allons maintenant donner une autre interprétation des morphismes.

**Proposition - définition 2.7.** *On appelle sous-objet de  $M \in \text{Ob } \mathcal{M}$  une classe d'isomorphisme de monomorphismes admissibles  $M' \rightarrowtail M$ , et quotient de  $M$  une classe d'isomorphisme d'épimorphismes admissibles  $M \twoheadrightarrow M''$ . Les sous-objets sont en bijection avec les quotients via les suites exactes.*

*On définit une relation d'ordre sur les sous-objets de  $M$  par  $M_0 \leq M_1$  si et seulement si il existe  $M_0 \rightarrowtail M_1$  monomorphisme admissible au-dessus de  $M$ .*

*L'ensemble partiellement ordonné des niveaux de  $M$  est définie par :*

- *Objets : couples  $(M_0, M_1)$  de sous objets avec  $M_0 \leq M_1$  ;*
  - *Morphismes :  $(M_0, M_1) \leq (M'_0, M'_1)$  si et seulement si  $M'_0 \leq M_0 \leq M_1 \leq M'_1$ .*
- On a une équivalence entre  $Q\mathcal{M} \downarrow M$  et la catégorie des niveaux donnée par :*

$$(M_0, M_1) \mapsto (M_1/M_0 \leftarrow M_1 \rightarrowtail M)$$

La démonstration est immédiate. Pour la notation  $Q\mathcal{M} \downarrow M$ , voir le début de la sous-section 2.2.

**Proposition 2.8.** *On a un isomorphisme naturel de catégories :*

$$\begin{array}{ccc} Q\mathcal{M}^{\text{op}} & \simeq & Q\mathcal{M} \\ M & \mapsto & M \\ M \xleftarrow{p} N \xrightarrow{i} M' & \mapsto & M \xrightarrow{p^{\text{op}}} N \xleftarrow{i^{\text{op}}} M' \end{array}$$

Nous pouvons maintenant donner une définition de la  $K$ -théorie supérieure. Pour cela, nous allons considérer la catégorie  $Q\mathcal{M}$  comme un ensemble simplicial. Pour des rappels sur ce point et sur les groupes d'homotopie des ensembles simpliciaux, voir le début de la sous-section suivante 2.2.

**Définition 2.9** ( $K$ -théorie supérieure). Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie exacte et  $O$  un objet nul de  $\mathcal{M}$ . On définit, pour  $n \geq 0$ , le  $n$ -ème groupe de  $K$ -théorie de  $\mathcal{M}$  comme :

$$K_n(\mathcal{M}) := \pi_n(Q\mathcal{M}, O)$$

où la catégorie  $Q\mathcal{M}$  est vu comme un ensemble simplicial via le foncteur nerf, voir la sous-section 2.2.

*Remarque 2.10.* Comme  $Q\mathcal{M}$  est connexe, la classe d'isomorphisme de  $K_n(\mathcal{M})$  est indépendante de  $O$ . On a même mieux : si  $O'$  est un autre élément nul dans  $\mathcal{M}$ , il existe un unique isomorphisme  $u : O \rightarrow O'$  dans  $\mathcal{M}$  ; ce dernier induit un isomorphisme  $u : O \rightarrow O'$  dans  $Q\mathcal{M}$ , et donc un isomorphisme canonique  $\pi_n(Q\mathcal{M}, O) \simeq \pi_n(Q\mathcal{M}, O')$ .

Il reste à vérifier que la nouvelle définition de  $K_0$  coïncide avec celle donnée dans la section 1. C'est l'objet du théorème ci-dessous.

Nous allons maintenant étudier le groupoïde associé à  $Q\mathcal{M}$ . Soit  $O \in \text{Ob } \mathcal{M}$  un objet nul.

Nous notons, pour  $M$  objet de  $Q\mathcal{M}$ ,  $i_M : O \rightarrowtail M$  et  $j_M : M \twoheadrightarrow O$  les uniques morphismes. La démonstration du théorème utilise la proposition 2.16.

**Théorème 2.11.** *L'application :*

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathcal{M}) & \rightarrow & \pi_1(Q\mathcal{M}, O) \\ [M] & \mapsto & [i_M!]^{-1} [j_M^!] \end{array}$$

*induit un isomorphisme de groupes.*

*Démonstration.* L'idée de la preuve est de montrer qu'on dispose d'une équivalence de catégorie :

$$[K_0(\mathcal{M}), \text{Isos}(\text{Ens})] \simeq [Q\mathcal{M}, \text{Isos}(\text{Ens})]$$

Où  $\text{Isos}(\text{Ens})$  est la catégorie des bijections entre ensembles. Pour cela, on remarque dans un premier temps que  $[Q\mathcal{M}, \text{Isos}(\text{Ens})]$  est équivalente à sa sous-catégorie pleine  $\mathcal{F}$ , formée des foncteurs  $F$  tels que :

$$\forall M, F(M) = F(O) \text{ et } F(i_{M!}) = \text{id}_{F(O)}$$

En effet, un foncteur réciproque à l'inclusion est donné par :

$$\gamma : F \mapsto (u : M \rightarrow M' \mapsto F(i_{M'!})^{-1} \circ F(u) \circ F(i_{M!}))$$

Étudions les éléments de  $\mathcal{F}$ . Si  $i : M \rightarrow M'$ ,  $i \circ i_{M'} = i_M$ , et donc  $F(i!) = \text{id}_{F(O)}$ .

Soit  $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M''$  une suite exacte. On a un carré bicartésien :

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow j'_M & & \downarrow j \\ 0 & \xrightarrow{i_{M''}} & M'' \end{array}$$

On a donc  $j^! i_{M''!} = i! j'_{M'}!$ , puis  $F(j^!) = F(j'_{M'}!)$ . De plus  $j_M^! = j^! j_{M''}^!$ . Donc  $F(j_M^!) = F(j_{M'}^!) F(j_{M''}^!)$ . Nous disposons donc d'un morphisme naturel en  $F$  :

$$\begin{array}{ccc} K_0(\mathcal{M}) & \rightarrow & \text{Aut}(F(O)) \\ [M] & \mapsto & F(j_M^!) \end{array}$$

Ainsi, nous avons un foncteur :

$$\alpha : \mathcal{F} \rightarrow [K_0(\mathcal{M}), \text{Ens}]$$

On remarque également que les éléments  $F$  de  $\mathcal{F}$  sont entièrement déterminés par  $F(O)$  et leurs valeurs sur les  $j_M^!$ . Nous allons maintenant décrire un morphisme réciproque.

Soit  $S$  un  $K_0(\mathcal{M})$ -ensemble. On pose :

$$\begin{array}{ccc} F_S : Q\mathcal{M} & \rightarrow & \text{Isos}(\text{Ens}) \\ M & \mapsto & S \\ i! & \mapsto & \text{id}_S \\ j^! & \mapsto & [\ker(j)] \cdot (-) \end{array}$$

Vérifions que  $F_S$  est un foncteur. Si  $\cdot \xrightarrow{j} \cdot \xrightarrow{j'} \cdot$ , la suite  $\ker(j) \rightarrow \ker(j'j) \xrightarrow{j} \ker(j')$  est exacte, donc  $F((jj')^!) = F(j^!) F(j'^!)$ . Si on a un carré bicartésien :

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \xrightarrow{i'} & \cdot \\ \downarrow j' & & \downarrow j \\ \cdot & \xrightarrow{i} & \cdot \end{array}$$

On a  $\ker(j) \simeq \ker(j')$  et donc  $F(i'_! j'^!) = F(j^! i_!)$ . Ainsi, par la propriété universelle de  $Q\mathcal{M}$  énoncée dans la proposition 2.6,  $F_S$  est un foncteur. On dispose donc d'un foncteur :

$$\beta : [K_0(\mathcal{M}), \text{Ens}] \rightarrow \mathcal{F}$$

Or on voit que  $\alpha$  et  $\beta$  sont réciproques. En effet, on a un isomorphisme naturel  $\alpha(\beta(S)) \simeq S$  induit par  $\ker(j_M) \simeq M$ . De même, on a un isomorphisme naturel  $\beta(\alpha(F)) \simeq F$  induit par les  $F(j^!) = F(j_{M'}^!)$  et  $\ker(j) \simeq M'$  pour  $M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{j} M''$  exacte.

On note  $\delta : [Q\mathcal{M}, \text{Isos}(\text{Ens})] \rightarrow [\pi_1(Q\mathcal{M}, O), \text{Ens}]$  l'équivalence naturelle. L'équivalence :

$$\delta \circ (\mathcal{F} \rightarrow [Q\mathcal{M}, \text{Isos}(\text{Ens})]) \circ \beta : [K_0(\mathcal{M}), \text{Ens}] \rightarrow [\pi_1(Q\mathcal{M}, O), \text{Ens}]$$

Est induite par un isomorphe de groupe  $\phi : \pi_1(Q\mathcal{M}, O) \rightarrow K_0(\mathcal{M})$  (résultat classique sur les actions de groupe). On vérifie, en appliquant l'équivalence au  $K_0(\mathcal{M})$ -ensemble  $K_0(\mathcal{M})$ , que  $\phi$  envoie  $[i_M!]^{-1}[j_M^!]$  sur  $[M]$ . Ce qui conclut.  $\square$

**2.2. Les théorèmes A et B de Quillen.** Comme la définition de la  $K$ -théorie supérieure repose sur de la topologie, cette section donne quelques rappels sans démonstrations et prouve 2 théorèmes (dits A et B) sur lesquels reposeront la majorité des résultats sur la construction  $Q$ .

On note, pour  $C$  une catégorie et  $x$  un objet de  $C$ ,  $C \downarrow x$  la catégorie au-dessus de  $x$  des couples  $(y, u : y \rightarrow x)$ . De même, on note  $C \uparrow x$  la catégorie au-dessous de  $x$  des couples  $(y, u : x \rightarrow y)$ .

Pour  $f : C \rightarrow D$  un foncteur et  $d$  un objet de  $D$ , on note  $f \downarrow d$  la catégorie des couples  $(c, u : fc \rightarrow d)$ . La catégorie  $f \downarrow d$  est le tiré en arrière de  $D \downarrow d$  par  $f$ . De même pour  $f \uparrow d$ . On note parfois  $C \downarrow d$  pour  $f \downarrow d$ , quand le foncteur  $f$  est évident, par exemple quand  $C$  est une sous-catégorie pleine de  $D$ .

Pour  $f : C \rightarrow D$  un foncteur et  $d$  un objet de  $D$ , on note  $f^{-1}d$  la sous-catégorie de  $C$  formée des objets  $c$  tels que  $fc = d$  et des morphismes  $u : c \rightarrow c'$  tels que  $fu = \text{id}_d$ .

**Proposition - définition 2.12.** *Le foncteur nerf  $N : \text{Cat} \rightarrow \hat{\Delta}$  est défini par*

$$NC_\bullet := \text{Hom}_{\text{Cat}}([\bullet], C)$$

où  $[\bullet]$  désigne la catégorie cosimpliciale  $\Delta \rightarrow \text{Cat}, [n] \mapsto (0 \rightarrow 1 \rightarrow \dots \rightarrow n)$ . Ce foncteur est pleinement fidèle et admet un adjoint à gauche  $\tau_{\leq 1} : \hat{\Delta} \rightarrow \text{Cat}$ .

Pour la démonstration, voir le [GJ09, chp. 1].

*Remarque 2.13.* Un fait classique est qu'un ensemble simplicial  $X$  est dans l'image essentielle du foncteur nerf si et seulement si il a la propriété d'unique relèvement le long des inclusions  $\Lambda_k^n \hookrightarrow \Delta^n$ , ie. pour tout  $u : \Lambda_k^n \rightarrow X$ , il existe un unique  $v : \Delta^n \rightarrow X$  qui l'étend.

Dans la suite, comme  $N$  est pleinement fidèle, nous l'omettrons et noterons  $C$  pour l'ensemble simplicial associé à une catégorie  $C$ .

Nous admettrons les structures de modèles de Kan-Quillen sur  $\hat{\Delta}$  et  $\text{Top}$ .

Nous noterons  $|\bullet| : \hat{\Delta} \rightarrow \text{Top}$  le foncteur réalisation et  $\text{Sing} : \text{Top} \rightarrow \hat{\Delta}$  le foncteur complexe singulier. Pour simplifier des démonstrations, nous utiliserons l'équivalence de Quillen :

$$|\bullet| : \text{Ho}(\hat{\Delta}) \quad \perp \quad \text{Ho}(\text{Top}) : \text{Sing}$$

Pour  $X$  ensemble simplicial et  $x \in X_0$ , nous noterons  $\pi_n(X, x)$  pour  $\pi_n(|X|, x)$ . Nous utiliserons également les groupes d'homotopie simpliciaux sur les complexes de Kan.

Voir [GJ09, chp. 1] pour plus d'informations sur ces sujets.

Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés homotopiques des catégories.

**Proposition 2.14.** (1) *Une transformation naturelle  $\theta : f \Rightarrow g$  entre  $f$  et  $g : C \rightarrow D$  induit une homotopie :*

$$C \times \Delta^1 \rightarrow D$$

(2) *Si  $f : C \rightarrow D$  a un adjoint à droite ou à gauche, alors  $f$  est une équivalence d'homotopie ;*

(3) *Une catégorie  $C$  avec un objet initial ou final est contractile.*

*Démonstration.* (1)  $N : \text{Cat} \rightarrow \widehat{\Delta}$  préserve les produits et la donnée de  $\theta$  est équivalente à celle d'un foncteur  $C \times (0 \rightarrow 1) \rightarrow D$  ;

(2) On note  $f' : D \rightarrow C$  l'adjoint. On a alors par (1) des homotopies  $ff' \simeq \text{id}_D$  et  $f'f \simeq \text{id}_C$  ;

(3) Le foncteur  $C \rightarrow (*)$  a alors un adjoint à droite ou à gauche. □

**Proposition 2.15.** (1) *Si  $C_{(-)} : I \rightarrow \text{Cat}$  est un foncteur avec  $I$  petite catégorie filtrante et  $C$  sa colimite, l'application naturelle :*

$$\text{colim}_I NC_{(-)} \longrightarrow NC \text{ est un isomorphisme.}$$

(2) *Dans ce même contexte, si on se donne des objets compatibles  $(x_i \in C_i)_{i \in I}$  et  $x \in C$  associé, les applications naturelles :*

$$\text{colim}_{i \in I} \pi_n(C_i, x_i) \longrightarrow \pi_n(C, x) \text{ sont des isomorphismes.}$$

(3) *Une catégorie  $I$  filtrante est contractile.*

*Démonstration.* (1) Il suffit de montrer que  $\text{colim}_I NC_{(-)}$  est une catégorie, c'est-à-dire que cet ensemble simplicial a la propriété d'unique extension le long des  $\Lambda_k^n \rightarrow \Delta^n$ . Or, si  $f : \Lambda_k^n \rightarrow \text{colim}_I NC_{(-)}$  est une application, comme  $\Lambda_k^n$  est un objet compacte de  $\widehat{\Delta}$ ,  $f$  provient de  $f_i : \Lambda_k^n \rightarrow C_i$  pour un certain  $i \in \text{Ob } I$ . On peut alors l'étendre en  $g_i : \Delta^n \rightarrow C_i$ , lequel induit  $g : \Delta^n \rightarrow \text{colim}_I NC_{(-)}$ . Si  $g$  et  $g'$  conviennent, alors ils proviennent respectivement de  $g_j : \Delta^n \rightarrow C_j$  et  $g'_j : \Delta^n \rightarrow C_j$ , pour un même  $j$  car  $I$  est filtrante. Quitte à changer  $j$ , on peut supposer que  $g_j|_{\Lambda_k^n} = g'_j|_{\Lambda_k^n}$ . Or  $C_j$  est une catégorie, donc  $g_j = g'_j$  et  $g = g'$ .

(2) Le foncteur remplacement fibrant  $R : \widehat{\Delta} \rightarrow \widehat{\Delta}$  induit par l'application de l'argument du petit objet aux inclusions  $\Lambda_k^n \rightarrow \Delta^n$  commute aux colimites filtrantes. En effet, comme on l'a vu ci-dessus :

$$\text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Lambda_k^n, C) \simeq \text{colim}_i \text{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Lambda_k^n, C_i)$$

Donc, avec  $\mathcal{J} = \{\Lambda_k^n \rightarrow \Delta^n\}$ , et  $G^*$  la construction du petit objet, on a  $G^1(\mathcal{J}, C \rightarrow *) = \text{colim}_i G^1(\mathcal{J}, C_i \rightarrow *)$ , et donc par induction et passage à la colimite :  $RC = \text{colim}_i RC_i$ .

Nous nous sommes donc ramenés à montrer que les groupes d'homotopie simpliciaux commutent aux colimites filtrantes de complexes de Kan. Ce qui se montre de manière équivalente au (1).

- (3) On pose  $F$  le foncteur  $I \rightarrow \text{Cat}$ ,  $i \mapsto I \downarrow i$ . On a  $I = \text{colim}_I F$ . Or chaque  $I \downarrow i$  a un objet final et est donc contractile. Donc par (2),  $I$  est contractile.  $\square$

Il existe une autre manière de décrire le  $\pi_1$  d'une catégorie. On note  $\pi : \text{Cat} \rightarrow \text{Groupoïdes}$  l'adjoint à gauche de l'oubli.

**Proposition 2.16.** *Soit  $C$  une catégorie et  $\pi C$  le groupoïde engendré. Pour  $x$  un objet de  $C$ , on a un isomorphisme :*

$$\text{Aut}_{\pi C}(x) \simeq \pi_1(C, x)$$

*Démonstration.* On note  $X$  l'ensemble simplicial obtenu en ajoutant un 2-simplexe  $\sigma_a$  à  $C$  le long de chaque application  $(a, \text{id}, -) : \Delta_2^2 \rightarrow C$ , pour  $a$  morphisme de  $C$ . On a alors  $\tau_{\leq 1} X = \pi C$ . On utilise alors le résultat suivant :

(\*) Si  $X$  est un ensemble simplicial tel que  $\tau_{\leq 1} X$  est un groupoïde, si et  $f : \Delta_k^2 \rightarrow X$  une application, on note  $g : X \rightarrow Y$  le poussé en avant de  $\Delta_k^2 \rightarrow \Delta^2$  le long de  $f$ . Alors  $\tau_{\leq 1} g$  est un isomorphisme.

Par (\*), on dispose d'un remplacement fibrant  $K$  de  $X$ , et donc de  $C$ , tel que  $\tau_{\leq 1} K = \pi C$ . Or c'est un résultat classique sur les complexes de Kan que  $\tau_{\leq 1} K = \pi_{\leq 1} K$ . Donc, on a :

$$\pi_1(C, x) = \pi_1(K, x) = \text{Aut}_{\pi_{\leq 1} K}(x) = \text{Aut}_{\pi C}(x)$$

Il reste à montrer (\*). Pour cela, par exemple si  $k = 2$ , on note  $f = (a, b, -)$  et  $(a, b, c) : \Delta^2 \rightarrow Y$  l'extension. On a  $\tau_{\leq 1} Y = (\tau_{\leq 1} X)[c]/(ac = b)$ . Or, dans  $\tau_{\leq 1} Y$ ,  $[c] = [a]^{-1}[b] \in \tau_{\leq 1} X$ . Donc  $\tau_{\leq 1} Y = \tau_{\leq 1} X$ .  $\square$

Pour la suites, nous aurons besoin de deux résultats sur les ensembles bisimpliciaux.

**Définition 2.17.** Un ensemble bisimplicial est un foncteur :

$$\Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}} \longrightarrow \text{Ens}$$

Pour  $X_{\bullet\bullet}$  un ensemble bisimplicial, on appelle sa réalisation  $|X|$  le coégalisateur suivant dans  $\hat{\Delta}$  :

$$\bigsqcup_{\phi: [n] \rightarrow [m]} X_m \times \Delta^n \xrightarrow[\bigsqcup \phi^* \times \text{id}_{[n]}]{\bigsqcup \text{id} \times \phi_*} \bigsqcup_{[n]} X_n \times \Delta^n$$

Où  $X_n$  désigne l'ensemble simplicial  $X_{n,\bullet}$ .

Sa diagonale est l'ensemble simplicial  $d(X) : [n] \mapsto X_{n,n}$

**Proposition 2.18.** *Soit  $X$  un ensemble bisimplicial. Alors les applications :*

$$\alpha_n : X_n \times \Delta^n \rightarrow d(X), (x_m, \phi : [m] \rightarrow [n]) \mapsto (\phi \times \text{id}_{[m]})^*(x_m)$$

*induisent un isomorphisme  $|X| \rightarrow d(X)$ .*

*Démonstration.* Soit  $\phi : [n] \rightarrow [m]$  et  $(x, \chi : [r] \rightarrow [n]) \in X_{m,r} \times \Delta_r^n$ . Alors :

$$\alpha_n(\phi^* x, \chi) = ((\phi\chi) \times \text{id})^* x = \alpha_m(x, \phi\chi)$$

Donc les  $\alpha_n$  induisent bien une application  $|X| \rightarrow d(X)$ . Cette dernière est clairement fonctorielle en  $X$ . Or  $X \mapsto |X|$  et  $X \mapsto d(X)$  commutent aux colimites, et

dans la catégorie  $[\Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}}, \text{Ens}]$  des ensembles bisimpliciaux, tout ensemble  $X$  est colimite de  $\Delta \times \Delta \downarrow X$ , où l'inclusion  $\Delta \times \Delta \rightarrow [\Delta^{\text{op}} \times \Delta^{\text{op}}, \text{Ens}]$  est donnée par Yoneda. Donc, nous sommes ramenées à  $X_{\bullet_1 \bullet_2} = \Delta_{\bullet_1}^r \times \Delta_{\bullet_2}^s$ . Or :

$$d(\Delta_{\bullet_1}^r \times \Delta_{\bullet_2}^s) = \Delta^r \times \Delta^s$$

Et :

$$\begin{aligned} |\Delta_{\bullet_1}^r \times \Delta_{\bullet_2}^s|_l &= \text{coeq} \left( \bigsqcup_{\phi: [n] \rightarrow [m]} \Delta_m^r \times \Delta_l^s \times \Delta_l^n \xrightarrow[\sqcup \phi^* \times \text{id}]{\sqcup \text{id} \times \phi_*} \bigsqcup_{[n]} \Delta_n^r \times \Delta_l^s \times \Delta_l^n \right) \\ &= \text{coeq} \left( \bigsqcup_{\phi: [n] \rightarrow [m]} \Delta_m^r \times \Delta_l^n \xrightarrow[\sqcup \phi^* \times \text{id}]{\sqcup \text{id} \times \phi_*} \bigsqcup_{[n]} \Delta_n^r \times \Delta_l^n \right) \times \Delta_l^s \\ &= \text{coeq} \left( \bigsqcup_{\phi: [n] \rightarrow [m]} \Delta_m^r \times \Delta^n \xrightarrow[\sqcup \phi^* \times \text{id}]{\sqcup \text{id} \times \phi_*} \bigsqcup_{[n]} \Delta_n^r \times \Delta^n \right)_l \times \Delta_l^s \\ &= \Delta_l^r \times \Delta_l^s \end{aligned}$$

Où la dernière égalité est une égalité classique sur les extensions de Yoneda. Plus précisément, on utilise que si  $C$  est une petite catégorie et  $X$  un objet de  $[C^{\text{op}}, \text{Ens}]$ ,  $Y : C \rightarrow [C^{\text{op}}, \text{Ens}]$  le plongement de Yoneda, et  $\Pi : C \downarrow X \rightarrow C$  l'oubli, alors :

$$X = \text{colim}_C Y \circ \Pi = \text{coeq} \left( \bigsqcup_{\phi: c \rightarrow d} X(d) \times Y(c) \xrightarrow[\sqcup X(\phi) \times \text{id}]{\sqcup \text{id} \times Y(\phi)} \bigsqcup_c X(c) \times Y(c) \right)$$

On vérifie facilement que  $|\Delta_{\bullet_1}^r \times \Delta_{\bullet_2}^s| \rightarrow d(\Delta_{\bullet_1}^r \times \Delta_{\bullet_2}^s)$  est l'identité via ces deux identifications.  $\square$

**Lemme 2.19.** *Soit  $\phi : X_{\bullet\bullet} \rightarrow Y_{\bullet\bullet}$  un morphisme entre ensembles bisimpliciaux. Si pour tout  $n \geq 0$ ,  $\phi_n : X_{n\bullet} \rightarrow Y_{n\bullet}$  est une équivalence d'homotopie faible, alors  $d(\phi) : d(X) \rightarrow d(Y)$  est une équivalence d'homotopie faible.*

*Démonstration.* [GJ09, IV.1.7] Introduisons d'abord quelques notations. Soit  $Z$  un ensemble bisimplicial. Pour  $p \geq 0$  on note  $d(Z)^{(p)}$  l'image de  $\bigsqcup_{n \leq p} Z_n \times \Delta^n$  dans  $d(Z)$ . Pour  $r \geq 0$  et  $p \geq 0$ , on note  $s_{[r]} Z_p = \bigcup_{i \leq r} s_i(Z_p) \subset Z_{p+1}$ . On a alors les 3 diagrammes cocartésiens suivants :

$$\begin{array}{ccc}
s_{[r]}Z_{p-1} & \xrightarrow{s_{r+1}} & s_{[r]}Z_p \\
\downarrow & & \downarrow \\
Z_p & \xrightarrow{s_{r+1}} & s_{[r+1]}Z_p
\end{array}
\quad \begin{array}{c} (*) \\ \Gamma \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
(s_{[p]}Z_p \times \Delta^{p+1}) \cup (Z_{p+1} \times \partial\Delta^{p+1}) & \longrightarrow & d(Z)^{(p)} \\
\downarrow & & \downarrow \\
Z_{p+1} \times \Delta^{p+1} & \longrightarrow & d(Z)^{(p+1)}
\end{array}
\quad \begin{array}{c} (**) \\ \Gamma \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
s_{[p]}Z_p \times \partial\Delta^{p+1} & \longrightarrow & Z_{p+1} \times \partial\Delta^{p+1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
s_{[p]}Z_p \times \Delta^{p+1} & \longrightarrow & (s_{[p]}Z_p \times \Delta^{p+1}) \cup (Z_{p+1} \times \partial\Delta^{p+1})
\end{array}
\quad \begin{array}{c} (* *) \\ \Gamma \end{array}$$

Montrons par récurrence sur  $p$  que  $d(X)^{(p)} \rightarrow d(Y)^{(p)}$  est une équivalence d'homotopie faible. Cela conclura, car les  $d(X)^{(p)}$  filtrent  $d(X)$ .

Pour initialiser, on remarque que  $d(X)^{(p)} = d(\text{sk}_p X)$ , et en particulier,  $d(X)^{(0)} = X_0$ .

Soit  $p \geq 0$ , et supposons que  $d(X^{(i)}) \rightarrow d(Y^{(i)})$  soit une équivalence d'homotopie faible pour tout  $i \leq p$ .

(1) En appliquant successivement  $(*)$  et le lemme de collage A.11, on a que  $s_{[r]}X_p \rightarrow s_{[r]}Y_p$  est une équivalence d'homotopie faible pour tout  $r \leq p$ ;

(2) En utilisant  $(**)$  et le lemme de collage A.11, on a que :

$$(s_{[p]}X_p \times \Delta^{p+1}) \cup (X_{p+1} \times \partial\Delta^{p+1}) \rightarrow (s_{[p]}Y_p \times \Delta^{p+1}) \cup (Y_{p+1} \times \partial\Delta^{p+1})$$

est une équivalence faible ;

(3) Par  $(**)$  et le lemme de collage A.11,

$$d(X^{(p+1)}) \rightarrow d(Y^{(p+1)})$$

est une équivalence faible.

Ceci conclut la récurrence. □

Nous faisons ici quelques rappels sur les foncteurs (pré)(co)fibrés.

**Définition 2.20** (foncteur (pré)fibré). Un foncteur  $f : C \rightarrow D$  est préfibré si pour tout  $y$  objet de  $D$ , le foncteur pleinement fidèle :

$$f^{-1}(y) \rightarrow f \uparrow y, \quad x \mapsto (x, \text{id}_y)$$

admet un adjoint à droite, alors noté  $(x, v : y \rightarrow fx) \mapsto v^*x$ .

Alors, si  $v : y \rightarrow y'$ , on peut restreindre cet adjoint à  $f^{-1}(y')$ , et on obtient un foncteur :

$$v^* : f^{-1}(y') \longrightarrow f^{-1}(y)$$

que l'on appelle changement de base de  $y'$  à  $y$ .

Un foncteur  $f : C \rightarrow D$  est fibré s'il est préfibré, et si pour tout  $u$  et  $v$  composables dans  $D$ , l'application naturelle  $u^*v^* \rightarrow (vu)^*$  est un isomorphisme.

On ajoute ci-dessous la définition complètement duale de foncteur (pré)cofibré.

**Définition 2.21** (foncteur (pré)cofibré). Un foncteur  $f : C \rightarrow D$  est précofibré si pour tout  $y$  objet de  $D$ , le foncteur pleinement fidèle :

$$f^{-1}(y) \rightarrow f \downarrow y, x \mapsto (x, \text{id}_y)$$

admet un adjoint à gauche, alors noté  $(x, v : fx \rightarrow y) \mapsto v_*x$ .

Alors, si  $v : y' \rightarrow y$ , on peut restreindre cet adjoint à  $f^{-1}(y')$ , et on obtient un foncteur :

$$v_* : f^{-1}(y') \longrightarrow f^{-1}(y)$$

que l'on appelle changement de cobase de  $y'$  à  $y$ .

Un foncteur  $f : C \rightarrow D$  est cofibré s'il est précofibré, et si pour tout  $u$  et  $v$  composables dans  $D$ , l'application naturelle  $(vu)_* \rightarrow v_*u_*$  est un isomorphisme.

*Remarque 2.22.* Pour  $f : C \rightarrow D$  (pré)(co)cofibré, on dit souvent que  $C$  est une catégorie (pré)(co)cofibrée au-dessus de  $D$ .

*Remarque 2.23.* Les définitions ci-dessus sont celles de [Qui73, §1]. Ces définitions ont l'avantage de faire directement apparaître le résultat suivant (et son dual évident) :

(\*) Si  $f : C \rightarrow D$  est préfibré, alors pour tout  $y$  objet de  $D$ ,  $f^{-1}y \rightarrow f \uparrow y$  est une équivalence d'homotopie.

Pour comprendre l'existence des applications naturelles  $u^*v^* \rightarrow (vu)^*$ , il peut être commode de voir l'adjonction à l'aide des morphismes (pré)cartésiens. Soit  $f : C \rightarrow D$ .

Un morphisme  $\xi : \tilde{z} \rightarrow z$  dans  $C$  est  $f$ -précartésien si pour tout  $w : x \rightarrow z$  avec  $f(w) = f(\xi)$ , il existe un unique  $u : x \rightarrow \tilde{z}$  tel que  $w = \xi u$  et  $f(u) = \text{id}_{f\tilde{z}}$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & w & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ x & \overset{\exists! u}{\dashrightarrow} & \tilde{z} & \xrightarrow{\xi} & z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f\tilde{z} & \xrightarrow{\text{id}} & f\tilde{z} & \xrightarrow{f\xi} & fz \end{array}$$

Un morphisme  $\xi : \tilde{z} \rightarrow z$  dans  $C$  est  $f$ -cartésien si pour tout  $w : x \rightarrow z$  et  $a : fx \rightarrow f\tilde{z}$  avec  $f(w) = f(\xi)a$ , il existe un unique  $u : x \rightarrow \tilde{z}$  tel que  $w = \xi u$  et  $f(u) = a$ .

$$\begin{array}{ccccc} & & w & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ x & \overset{\exists! u}{\dashrightarrow} & \tilde{z} & \xrightarrow{\xi} & z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ fx & \xrightarrow{a} & f\tilde{z} & \xrightarrow{f\xi} & fz \end{array}$$



Soit maintenant  $y$  un objet de  $D$ . Alors  $f^{-1}(y) \rightarrow f \uparrow y$  admet un adjoint à droite si et seulement si pour tout  $z$  objet de  $C$  et  $v : y \rightarrow fz$ , il existe  $\xi : v^*z \rightarrow z$   $f$ -précartésien avec  $f(\xi) = v$ .

$$\begin{array}{ccc} \exists v^*z & \xrightarrow{\xi} & z \\ \downarrow & & \downarrow \\ y & \xrightarrow{v} & fz \end{array}$$

Il est maintenant aisé de vérifier que  $f$  est fibré si et seulement si pour tout  $y$  objet de  $D$ ,  $z$  objet de  $C$  et  $v : y \rightarrow fz$ , il existe  $\xi : v^*z \rightarrow z$   $f$ -cartésien avec  $f(\xi) = v$ .

**Proposition - définition 2.24** (catégorie (co)fibrée associée à un préfaisceau). *Soit  $p : C^{\text{op}} \rightarrow \text{Ens}$  un foncteur avec  $C$  une petite catégorie (souvent appelé préfaisceau sur  $C$ ). On définit la catégorie fibrée*

$$f : F(p) \rightarrow C$$

*dont les objets sont les couples  $(c, x)$  avec  $x \in p(C)$ , et les morphismes de  $(c, x)$  dans  $(d, y)$  sont les morphismes  $u : c \rightarrow d$  dans  $C$  tels que  $p(u)(y) = x$ .*

*On appelle  $f : F(p) \rightarrow C$  la catégorie fibrée associée à  $p$ .*

*De même, à partir d'un foncteur  $q : C \rightarrow \text{Ens}$ , on construit la catégorie cofibrée*

$$g : G(q) \rightarrow C$$

*dont les objets sont les couples  $(c, x)$  avec  $x \in q(C)$ , et les morphismes de  $(c, x)$  dans  $(d, y)$  sont les morphismes  $u : c \rightarrow d$  dans  $C$  tels que  $p(u)(x) = y$ .*

*On appelle  $g : G(q) \rightarrow C$  la catégorie cofibrée associée à  $q$ .*

Nous pouvons maintenant énoncer un premier résultat sur le type d'homotopie de catégories.

**Théorème 2.25** (Théorème A de Quillen). *Soit  $f : C \rightarrow D$  un foncteur entre petites catégories. Si pour tout objet  $y$  de  $D$ ,  $f \uparrow y$  est une catégorie contractile, alors  $f$  est une équivalence d'homotopie.*

*Démonstration.* On note  $S(f)$  la catégorie cofibrée au dessus de  $D^{\text{op}} \times C$  définie par le foncteur :

$$\begin{aligned} D^{\text{op}} \times C &\rightarrow \text{Ens} \\ (y, x) &\mapsto \text{Hom}_D(y, fx) \end{aligned}$$

On dispose de foncteurs :

$$D^{\text{op}} \xleftarrow{p_2} S(f) \xrightarrow{p_1} C$$

L'ensemble simplicial  $S(f)$  est la diagonale de l'ensemble bisimplicial  $T(f)$  défini par :

$$T(f)_{pq} := \{(y_p \rightarrow \cdots \rightarrow y_0 \rightarrow fx_0, x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_q)\}$$

On dispose d'un morphisme d'ensembles bisimpliciaux  $m : T(f)_{\bullet_1 \bullet_2} \rightarrow C_{\bullet_2}$ , où  $(C_{\bullet_2})_{pq} = NC_q$ . Alors,  $d(m)$  s'identifie à  $p_1 : S(f) \rightarrow C$ . Or, on a, pour  $q \geq 0$  :

$$m_{\bullet, q} : \bigsqcup_{x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_q} (D \downarrow f(x_0))^{\text{op}} \rightarrow \bigsqcup_{x_0 \rightarrow \cdots \rightarrow x_q} *$$

C'est une équivalence d'homotopie, car chaque  $(D \downarrow f(x_0))^{\text{op}}$  a un objet initial et est donc contractile. Ainsi, par le lemme 2.19,  $d(m) = p_1 : S(f) \rightarrow C$  est une équivalence d'homotopie.

De même, on dispose d'un morphisme d'ensembles bisimpliciaux  $n : T(f)_{\bullet_1 \bullet_2} \rightarrow D_{\bullet_1}^{\text{op}}$ . Et pour tout  $p \geq 0$  :

$$n_{p\bullet} : \bigsqcup_{y_p \rightarrow \cdots \rightarrow y_0} f \uparrow y_0 \rightarrow \bigsqcup_{y_p \rightarrow \cdots \rightarrow y_0} *$$

Or, par hypothèse, chaque  $f \uparrow y_0$  est contractile. Donc  $n_{p\bullet}$  est une équivalence faible. Donc, par le lemme 2.19,  $d(n) = p_2 : S(f) \rightarrow D^{\text{op}}$  est une équivalence d'homotopie.

Or, la factorisation :

$$D^{\text{op}} \times C \xrightarrow{\text{id} \times f} D^{\text{op}} \times D \xrightarrow{\text{Hom}_D(\_, -)} \text{Ens}$$

induit le diagramme commutatif suivant dans Cat :

$$\begin{array}{ccccc} D^{\text{op}} & \xleftarrow[p_2]{\sim} & S(f) & \xrightarrow[p_1]{\sim} & C \\ \parallel & & \downarrow f_* & & \downarrow f \\ D^{\text{op}} & \xleftarrow{\sim} & S(\text{id}_D) & \xrightarrow{\sim} & D \end{array}$$

Par les résultats ci-dessus, les flèches avec des  $\sim$  sont des équivalences d'homotopie faibles. Donc  $f$  également.  $\square$

*Remarque 2.26.* Le théorème A admet la forme duale suivante :

Si  $f : C \rightarrow D$  un foncteur entre petites catégories et si pour tout objet  $y$  de  $D$ ,  $f \downarrow y$  est une catégorie contractile, alors  $f$  est une équivalence d'homotopie.

**Corollaire 2.27.** *Si  $f : C \rightarrow D$  un foncteur pré(co)fibré entre petites catégories et si pour tout objet  $y$  de  $D$ ,  $f^{-1}(y)$  est une catégorie contractile, alors  $f$  est une équivalence d'homotopie.*

*Démonstration.* Dans ce cas  $f^{-1}(y) \rightarrow f \uparrow y$  ou  $f^{-1}(y) \rightarrow f \downarrow y$  est une équivalence faible d'homotopie. On peut donc utiliser le théorème 2.25.  $\square$

Pour énoncer le théorème B de Quillen, nous aurons besoin du formalisme des carrés homotopiquement cartésiens dans  $\hat{\Delta}$ . Nous avons fait le choix de le mettre dans l'annexe A.2.

**Définition 2.28.** Soit  $Z : I \rightarrow \hat{\Delta}$  un foncteur avec  $I$  petite catégorie. On définit l'ensemble bisimplicial :

$$\text{BE}_I Z_{m,n} := \bigsqcup_{i_0 \rightarrow \cdots \rightarrow i_m} Z(i_0)_n$$

Et on note sa diagonale :

$$\text{hocolim}_I Z := d(\text{BE}_I Z)$$

**Lemme 2.29.** *Soit  $X : I \rightarrow \hat{\Delta}$  un foncteur, avec  $I$  une petite catégorie, tel que pour tout  $\alpha : i \rightarrow j$  dans  $I$ ,  $X(\alpha) : X(i) \rightarrow X(j)$  soit une équivalence d'homotopie faible. Alors pour tout  $j$  objet de  $I$ , le diagramme cartésien :*

$$\begin{array}{ccc}
X(j) & \longrightarrow & \operatorname{hocolim}_I X \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi \\
* & \xrightarrow{j} & I
\end{array}
\quad (D)$$

est homotopiquement cartésien.

*Remarque 2.30.* Le diagramme (D) est la diagonale du diagramme cartésien suivant d'ensembles bisimpliciaux :

$$\begin{array}{ccc}
X(j)_n & \xrightarrow{j \rightarrow \cdots \rightarrow j} & \left( \bigsqcup_{i_0 \rightarrow \cdots \rightarrow i_n} X(i_0) \right)_n \\
\downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi \\
* & \xrightarrow{j \rightarrow \cdots \rightarrow j} & \left( \bigsqcup_{i_0 \rightarrow \cdots \rightarrow i_n} * \right)_n
\end{array}$$

*Démonstration.* [GJ09, IV.5.7]. On remarque d'abord le fait suivant :

(\*) le tiré en arrière par  $\pi$  commute aux colimites dans  $\widehat{\Delta} \downarrow I$ .

En effet, il suffit, pour montrer (\*), de vérifier que  $- \times_x y$  commute aux sommes disjointes et coégalisateurs dans  $\operatorname{Ens} \downarrow x$ , ce qui est facile.

On factorise  $j$  à l'aide de l'argument du petit objet appliqué à  $\mathcal{J} = \{\Lambda_k^n \rightarrow \Delta^n\}$  en  $* \xrightarrow{\sim} U \xrightarrow{p} I$ . Notre objectif est de montrer que l'application induite  $X(j) \rightarrow U \times_I \operatorname{hocolim}_I X$  est acyclique. Par la proposition A.6, ceci conclura.

Or  $i$  est construit comme un élément de  $\mathcal{J}$  – Cell colimite de poussés en avant de la forme :

$$\begin{array}{ccc}
\bigsqcup \Lambda_k^n & \longrightarrow & G^m(\mathcal{J}, j) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
\bigsqcup \Delta^n & \longrightarrow & G^{m+1}(\mathcal{J}, j)
\end{array}$$

Et donc, par (\*), en tirant en arrière par  $\pi$  :

$$\begin{array}{ccc}
\bigsqcup \Lambda_k^n \times_I \operatorname{hocolim}_I X & \longrightarrow & G^m(\mathcal{J}, j) \times_I \operatorname{hocolim}_I X \\
\downarrow u & & \downarrow v \\
\bigsqcup \Delta^n \times_I \operatorname{hocolim}_I X & \longrightarrow & G^{m+1}(\mathcal{J}, j) \times_I \operatorname{hocolim}_I X
\end{array}$$

Or, le produit fibré dans  $\operatorname{Ens}$ , et donc également dans  $\widehat{\Delta}$ , préserve les injections. Donc  $u$  est une cofibration. Il nous reste à montrer que  $u$  est acyclique. Car alors  $v$  sera également une cofibration acyclique, et par passage à la colimite,  $i_* : X(j) \rightarrow U \times_I \operatorname{hocolim}_I X$  également.

Nous sommes donc ramenés au problème suivant :

(\*\*) si  $\Lambda_n^k \xrightarrow{\sim} \Delta^n \xrightarrow{\sigma} I$  alors  $w_* : \Lambda_n^k \times_I \operatorname{hocolim}_I X \rightarrow \Delta^n \times_I \operatorname{hocolim}_I X$  est une cofibration acyclique.

Or  $\sigma : \Delta^n \rightarrow I$  correspond à un foncteur  $\sigma : [n] \rightarrow I$ . De plus, le carré cartésien suivant d'ensembles bisimpliciaux

$$\begin{array}{ccc} \left( \bigsqcup_{u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_n} X(\sigma(u_0)) \right)_n & \xrightarrow{\sigma} & \left( \bigsqcup_{i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_n} X(i_0) \right)_n \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi \\ \left( \bigsqcup_{u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_n} * \right)_n & \xrightarrow{\sigma} & \left( \bigsqcup_{i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_n} * \right)_n \end{array}$$

induit un isomorphisme  $\Delta^n \times_I \text{hocolim}_I X \simeq \text{hocolim}_{[n]} X \circ \sigma$ . On a alors le diagramme suivant d'ensembles bisimpliciaux

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_r \in \Lambda_k^n} X(\sigma(0)) & \xrightarrow{j} & \bigsqcup_{u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_r \in \Delta^n} X(\sigma(0)) \\ \downarrow \theta_* & & \downarrow \theta_* \\ \bigsqcup_{u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_r \in \Lambda_k^n} X(\sigma(u_0)) & \xrightarrow{w_*} & \bigsqcup_{u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_r \in \Delta^n} X(\sigma(u_0)) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \bigsqcup_{u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_r \in \Lambda_k^n} * & \xrightarrow{w} & \bigsqcup_{u_0 \rightarrow \dots \rightarrow u_r \in \Delta^n} * \end{array}$$

où  $\theta : X(\sigma(0)) \rightarrow X \circ \sigma$  est la transformation naturelle évidente. Alors  $\theta_*$  est une équivalence faible terme à terme par hypothèse. D'après le lemme 2.19,  $d(\theta_*)$  est une équivalence faible. Or  $d(j)$  s'identifie à  $\Lambda_k^n \times X(\sigma(0)) \rightarrow \Delta^n \times X(\sigma(0))$ , qui est une équivalence faible. Donc  $d(w_*)$  est une équivalence faible, ce qui conclut.  $\square$

**Théorème 2.31** (Théorème B de Quillen). *Soit  $f : C \rightarrow D$  un foncteur entre petites catégories. Si pour tout  $u : y \rightarrow y'$  dans  $D$ ,  $u^* : f \uparrow y' \rightarrow f \uparrow y$  est une équivalence faible d'homotopie, alors pour tout objet  $y$  de  $D$ , le diagramme cartésien :*

$$\begin{array}{ccc} f \uparrow y & \xrightarrow{j} & C \\ \downarrow f_* & \lrcorner & \downarrow f \\ D \uparrow y & \xrightarrow{j'} & D \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

En particulier, on dispose, pour tout  $x$  objet de  $f^{-1}(y)$ , d'une suite exacte :

$$\dots \rightarrow \pi_{i+1}(D, y) \rightarrow \pi_i(f \uparrow y, \bar{x}) \xrightarrow{j_*} \pi_i(C, x) \xrightarrow{f_*} \pi_i(D, y) \rightarrow \dots$$

où  $\bar{x} = (x, \text{id}_y)$ .

*Remarque 2.32.* Le théorème A découle du théorème B via la suite exacte. La suite exacte est une conséquence directe du diagramme homotopiquement cartésien car  $D \uparrow y$  est contractile.

*Démonstration.* On reprend le cadre de la démonstration du théorème 2.25 :  $S(f)$ ,  $T(f)$  et le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccccc} D^{\text{op}} & \xleftarrow{p_2} & S(f) & \xrightarrow[\sim]{p_1} & C \\ \parallel & & \downarrow f_* & & \downarrow f \\ D^{\text{op}} & \xleftarrow{\sim} & S(\text{id}_D) & \xrightarrow{\sim} & D \end{array}$$

On rappelle que  $p_2 = d(n : T(f) \rightarrow D^{\text{op}})$  où  $n$  est donné par :

$$n_{p\bullet} : \bigsqcup_{y_p \rightarrow \dots \rightarrow y_0} f \uparrow y_0 \rightarrow \bigsqcup_{y_p \rightarrow \dots \rightarrow y_0} *$$

Donc  $p_2 = \text{hocolim}_{D^{\text{op}}} N(f \uparrow -) \rightarrow D^{\text{op}}$ . Donc, par le lemme 2.29, le carré

$$\begin{array}{ccc} f \uparrow y & \longrightarrow & S(f) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow p_2 \\ * & \xrightarrow{y} & D^{\text{op}} \end{array}$$

est homotopiquement cartésien. Or, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} f \uparrow y & \longrightarrow & S(f) & \xrightarrow{\sim} & C \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow f_* & \lrcorner & \downarrow f \\ D \uparrow y & \longrightarrow & S(\text{id}_D) & \xrightarrow{\sim} & D \\ \downarrow \wr & \lrcorner & \downarrow \wr & & \\ * & \xrightarrow{y} & D^{\text{op}} & & \end{array} \quad \begin{array}{c} (1) \quad (2) \\ (3) \end{array}$$

où les flèches notées  $\sim$  sont des équivalences faibles. Le carré formé par (1) et (3) est homotopiquement cartésien, donc celui formé par (1) également, et donc celui formé par (1) et (2) aussi. C'est le résultat recherché.  $\square$

*Remarque 2.33.* Le théorème B admet la forme duale suivante :

Soit  $f : C \rightarrow D$  un foncteur entre petites catégories. Si pour tout  $u : y \rightarrow y'$  dans  $D$ ,  $u_* : f \downarrow y \rightarrow f \downarrow y'$  est une équivalence faible d'homotopie, alors pour tout objet  $y$  de  $D$ , le diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} f \downarrow y & \xrightarrow{j} & C \\ \downarrow f_* & \lrcorner & \downarrow f \\ D \downarrow y & \xrightarrow{j'} & D \end{array}$$

est homotopiquement cartésien.

**Corollaire 2.34.** Si  $f : C \rightarrow D$  un foncteur préfibré (respectivement précofibré) entre petites catégories et si pour tout  $u : y \rightarrow y'$  dans  $D$ ,  $u^* : f^{-1}y' \rightarrow f^{-1}y$  (respectivement  $u_* : f^{-1}y \rightarrow f^{-1}y'$ ) est une équivalence faible d'homotopie, alors

pour tout objet  $y$  de  $D$ ,  $f^{-1}(y)$  est la fibre homotopique de  $f$  au dessus de  $y$ . On a alors, pour tout  $x$  objet de  $f^{-1}(y)$ , une suite exacte :

$$\cdots \rightarrow \pi_{i+1}(D, y) \rightarrow \pi_i(f^{-1}y, x) \xrightarrow{j_*} \pi_i(C, x) \xrightarrow{f_*} \pi_i(D, y) \rightarrow \cdots$$

*Démonstration.* Dans ce cas  $f^{-1}(y) \rightarrow f \uparrow y$  ou  $f^{-1}(y) \rightarrow f \downarrow y$  est une équivalence faible d'homotopie. Plaçons nous dans le premier cas, le second est similaire. On a un carré :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}y' & \xrightarrow{\sim} & f \uparrow y' \\ \downarrow u^* & & \downarrow u^* \\ f^{-1}y & \xrightarrow{\sim} & f \uparrow y \end{array}$$

Les deux foncteurs induits de  $f^{-1}y'$  dans  $f \uparrow y$  sont :

$$\begin{aligned} F : x' &\mapsto (x', u : y \rightarrow y' = fx) \\ G : x' &\mapsto (u^*x', \text{id}_y) \end{aligned}$$

Or on dispose d'une transformation naturelle  $G \Rightarrow F$ ,  $u^*x' \rightarrow x'$  induite par l'adjonction. Donc le carré commute à homotopie près. Donc  $u^* : f \uparrow y' \rightarrow f \uparrow y$  est une équivalence d'homotopie. On peut maintenant appliquer le théorème B.  $\square$

**2.3. Premières propriétés et exemples.** Dans cette sous-section, nous étudions la fonctorialité de la construction  $Q$ , certaines propriétés élémentaires, sa commutation aux colimites filtrantes et le comportement relativement aux filtrations et suites exactes de foncteurs exacts. Nous terminons par la définition de la  $K$ -théorie supérieure des anneaux et une version supérieure de la proposition 1.32 sur la  $K$ -théorie des modules projectifs gradués de type fini sur un anneau gradué.

**Proposition - définition 2.35** (fonctorialité). *Un foncteur exact  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  entre deux catégories exactes induit un morphisme en  $K$ -théorie pour tout  $i \geq 0$  :*

$$f_* : K_i\mathcal{M} \rightarrow K_i\mathcal{M}'$$

*Ce morphisme ne dépend que de la classe d'isomorphisme du foncteur  $f$ , et coïncide avec le morphisme défini dans la remarque 1.26 pour  $i = 0$ .*

*Démonstration.* En effet,  $f$  induit un foncteur  $f : Q\mathcal{M} \rightarrow Q\mathcal{M}'$ , et donc  $f_* : K_i\mathcal{M} \rightarrow K_i\mathcal{M}'$ . Si  $f \simeq g$  est un isomorphisme, il induit également un isomorphisme entre les foncteurs  $f, g : Q\mathcal{M} \rightarrow Q\mathcal{M}'$ , et donc  $f_* = g_*$ . La coïncidence dans le cas  $i = 0$  découle immédiatement de la formule de l'isomorphisme donné dans le théorème 2.11.  $\square$

**Proposition 2.36.** *Por tout  $i \geq 0$ , on dispose d'un isomorphisme naturel en  $\mathcal{M}$  catégorie exacte :*

$$K_i\mathcal{M} \simeq K_i\mathcal{M}^{\text{op}}$$

*Démonstration.* On a un isomorphisme naturel  $Q\mathcal{M} \simeq Q\mathcal{M}^{\text{op}}$ .  $\square$

**Proposition 2.37.** *L'isomorphisme naturel  $Q(\mathcal{M} \times \mathcal{M}') \simeq Q\mathcal{M} \times Q\mathcal{M}'$  induit, pour tout  $i \geq 0$ , un isomorphisme naturel :*

$$\begin{aligned} K_i(\mathcal{M} \times \mathcal{M}') &\simeq K_i(\mathcal{M}) \oplus K_i(\mathcal{M}') \\ x &\mapsto \text{pr}_{1*}x + \text{pr}_{2*}x \end{aligned}$$

Le foncteur :

$$\oplus : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow M$$

est exact et induit un morphisme fonctoriel :

$$\oplus : K_i(\mathcal{M}) \oplus K_i(\mathcal{M}) \simeq K_i(\mathcal{M} \times \mathcal{M}) \longrightarrow K_i\mathcal{M}$$

Ce morphisme coïncide avec l'addition.

*Démonstration.* Pour montrer la coïncidence avec l'addition, on remarque que pour tout  $a, b, c$  et  $d$  dans  $K_i\mathcal{M}$  :

$$(a + b) \oplus (c + d) = (a \oplus c) + (d \oplus d)$$

On a donc, pour  $a$  et  $b$  dans  $K_i\mathcal{M}$  :

$$a \oplus b = (a + 0) \oplus (0 + b) = a \oplus 0 + 0 \oplus b$$

Or, les foncteurs  $\text{id}_{\mathcal{M}}, M \mapsto 0 \oplus M$  et  $M \mapsto M \oplus 0$  sont isomorphes. Donc  $a \oplus b = a + b$ .  $\square$

Nous allons maintenant étudier la commutation aux colimites filtrantes. Il s'agit essentiellement d'étendre la proposition 1.30.

**Proposition 2.38.** *Soit  $\mathcal{M}_{(-)} : I \rightarrow \text{CatEx}$ ,  $i \mapsto \mathcal{M}_i$  un foncteur d'une catégorie filtrante  $I$  dans la catégorie des petites catégories exactes. On note  $\mathcal{M}$  sa colimite. Alors, pour tout  $n \geq 0$ , l'application induite  $\text{colim}_i K_n(\mathcal{M}_i) \rightarrow K_n(\mathcal{M})$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* On utilise la démonstration de la proposition 1.30. On a que  $\mathcal{E} = \text{colim}_i \mathcal{E}_i$ , et donc que  $Q\mathcal{M} = \text{colim}_i Q\mathcal{M}_i$ , ce qui conclut par la proposition 2.15.  $\square$

Nous utilisons ci-dessous la construction de la catégorie des suites exactes  $\mathcal{E}$  d'une catégorie exacte  $\mathcal{M}$  de la proposition-définition 1.24.

**Théorème 2.39.** *Soit  $\mathcal{M}$  une catégorie exacte et  $\mathcal{E}$  sa catégorie exacte des suites exactes. On note  $s, q : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$  comme dans la proposition-définition 1.24. Alors le foncteur induit :*

$$(s, q) : Q\mathcal{E} \longrightarrow Q\mathcal{M} \times Q\mathcal{M}$$

*est une équivalence d'homotopie.*

*Démonstration.* Par le théorème A 2.25, il suffit de montrer que pour tout  $M, N$  dans  $\mathcal{M}$ ,  $(s, q) \uparrow (M, N)$  est contractile. On note  $\mathcal{C} := (s, q) \uparrow (M, N)$ . Les objets de  $\mathcal{C}$  sont les  $(E, u, v)$  avec  $E$  objet de  $\mathcal{E}$ ,  $u : sE \rightarrow M$  et  $v : qE \rightarrow N$ .

On note  $\mathcal{C}'$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  formée des  $(E, u, v)$  avec  $u$  une surjection.

On note  $\mathcal{C}''$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{C}$  formée des  $(E, u, v)$  avec  $u$  une surjection et  $v$  une injection.

(A) L'inclusion  $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  a un adjoint à gauche. Soit  $X = (E, u, v)$ . Alors  $u$  de la forme :

$$u : sE \xrightarrow{i} M' \xleftarrow{j} M$$

On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} E : & 0 & \longrightarrow & sE & \longrightarrow & tE & \longrightarrow & qE & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow i & & \downarrow & & \parallel & & \\ i_*E : & 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\quad} & T & \longrightarrow & qE & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Et on pose  $\overline{X} := (i_*E, j^!, v)$ . On dispose de  $X \rightarrow \overline{X}$ .

Soit maintenant  $X' = (E', j'^!, v')$  dans  $\mathcal{C}'$ , et  $X \rightarrow X'$  un morphisme représenté par :

$$E \rightarrowtail E_0 \leftarrow E'$$

On a alors :

$$u : sE \rightarrowtail sE_0 \leftarrow sE' \xleftarrow{j'} M$$

On donc, à isomorphisme  $sE_0 \simeq M'$  près,  $i = sE \rightarrowtail sE_0$  et  $j = M \twoheadrightarrow sE_0$ . Alors,  $E \rightarrowtail E_0$  se factorise en  $E \rightarrowtail i_*E \rightarrowtail E_0$ . Nous avons donc une factorisation :

$$X \longrightarrow \overline{X} \longrightarrow X'$$

Il reste à montrer l'unicité de  $\overline{X} \rightarrow X'$ . Pour cela, on remarque que  $\mathcal{C} \downarrow X' = Q\mathcal{E} \downarrow E'$  est équivalente à la catégorie des couches admissibles de  $E'$ . Ainsi, une factorisation  $X \rightarrow X'' \rightarrow X'$  avec  $X''$  dans  $\mathcal{C}'$  correspond à une couche  $(E''_0, E''_1) \geq (E_0, E_1)$  telle que  $sE''_1 = sE'$ , où  $(E_0, E_1)$  est la couche de  $X \rightarrow X'$ . Parmi ces couches  $(E''_0, E''_1)$ , il en existe une minimale telle que  $tE''_0 = tE_0$  et  $tE''_1 = sE' + tE_1$ . Cette couche correspond à  $\overline{X} \rightarrow X'$ . Ce qui conclut.

(B) L'inclusion  $\mathcal{C}'' \rightarrow \mathcal{C}'$  admet un adjoint à gauche. On procède comme pour (A), mais de façon duale (ie. dans  $\mathcal{M}^{\text{op}}$ ).

(C) L'objet  $(0, j_M^!, i_{N!})$  est initial dans  $\mathcal{C}''$ . En effet, soit  $(E, j^!, i_!)$  un objet de  $\mathcal{C}''$ . Alors l'unique morphisme de  $(0, j_M^!, i_{N!})$  dans  $(E, j^!, i_!)$  est donné par le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & qE & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \longrightarrow & sE & \longrightarrow & tE & \longrightarrow & qE \longrightarrow 0 \\ & & \uparrow & & & & \downarrow \\ & & M & & & & N \end{array}$$

□

**Corollaire 2.40.** Soit  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}'$  deux catégories exactes, et :

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de foncteurs (exacts) de  $\mathcal{M}'$  dans  $\mathcal{M}$ . Alors, pour tout  $i \geq 0$  :

$$F_* = F'_* + F''_* : K_i\mathcal{M}' \rightarrow K_i\mathcal{M}$$

*Démonstration.* La suite exacte de foncteurs induit un foncteur  $\tilde{F} : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{E}$ . Il suffit donc de traiter le cas où  $\mathcal{M}' = \mathcal{E}$ , et de la suite de foncteurs :

$$0 \longrightarrow s \longrightarrow t \longrightarrow q \longrightarrow 0$$

On pose :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathcal{M} \times \mathcal{M} & \rightarrow & \mathcal{E} \\ (M', M'') & \mapsto & M' \rightarrowtail M' \oplus M'' \twoheadrightarrow M'' \end{array}$$



Alors,  $tf$  est isomorphe à  $\oplus(s, q)f$ , donc :

$$t_*f_* = (s_* + q_*)f_* : K_i\mathcal{M} \times K_i\mathcal{M} \rightarrow K_i\mathcal{M}$$

mais,  $(s, q)f$  est isomorphe à l'identité, et  $(s, q)$  est une équivalence d'homotopie. Donc  $f$  est une équivalence d'homotopie. Donc :

$$t_* = s_* + q_*$$

□

**Définition 2.41.** Soit  $F : C \rightarrow \mathcal{M}$  un foncteur avec  $\mathcal{M}$  une catégorie exacte. Une filtration .

$$0 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = F$$

de  $F$  est la donnée de transformations naturelles :

$$0 = F_0 \xrightarrow{u_1} F_1 \dashrightarrow F_{n-1} \xrightarrow{u_n} F_n = F$$

où les  $u_i$  sont des monomorphismes admissibles en chaque point.

*Remarque 2.42.* Dans ce cas, on peut définir les quotients  $F_p/F_q : C \rightarrow \mathcal{M}$  pour  $q \leq p$ , et si  $C$  est une catégorie exacte et les  $F_i$  sont exacts, alors les quotients  $F_p/F_q : C \rightarrow \mathcal{M}$  sont également exacts, par le lemme du serpent.

On peut ainsi étendre le corollaire ci-dessus par récurrence. On obtient les deux corollaires suivants.

**Corollaire 2.43** (additivité pour les filtrations caractéristiques). *Soit  $F : \mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$  foncteur exact et  $0 = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = F$  filtration admissible de foncteurs exacts. Alors :*

$$F_* = \sum_{p=1}^n (F_p/F_{p-1})_* : K_i\mathcal{M}' \rightarrow K_i\mathcal{M}$$

**Corollaire 2.44** (additivité pour les suites exactes caractéristiques). *Si  $0 \rightarrow F_0 \rightarrow \cdots \rightarrow F_n \rightarrow 0$  est une suite exacte de foncteurs exacts  $\mathcal{M}' \rightarrow \mathcal{M}$ , alors :*

$$\sum_{p=0}^n (F_p)_* = 0 : K_i\mathcal{M}' \rightarrow K_i\mathcal{M}$$

Nous allons maintenant définir la  $K$ -théorie supérieure des anneaux et des schémas.

**Définition 2.45.** Pour  $A$  un anneau et  $i \geq 0$ . On définit le  $i$ -ème groupe de  $K$ -théorie de  $A$  comme :

$$K_i(A) := K_i(P(A))$$

Pour  $f : A \rightarrow A'$  un morphisme d'anneaux, le foncteur exact  $A' \otimes_A - : P(A) \rightarrow P(A')$  induit un morphisme :

$$f^* : K_i(A) \rightarrow K_i(A')$$

**Définition 2.46.** Pour  $X$  un schéma et  $i \geq 0$ . On définit le  $i$ -ème groupe de  $K$ -théorie de  $X$  comme :

$$K_i(X) := K_i(P(X))$$

Pour  $f : X' \rightarrow X$  un morphisme de schémas, le foncteur exact  $f^* - : P(X) \rightarrow P(X')$  induit un morphisme :

$$f^* : K_i(X) \rightarrow K_i(X')$$

On reprend maintenant le cadre de la proposition 1.32.

**Proposition 2.47.** *Soit  $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \cdots$  un anneau gradué en degrés positifs et  $i \geq 0$  un entier. L'automorphisme de translation  $t$  fait de  $K_i(\text{Pgr}(A))$  un  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module. On a un isomorphisme de  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -modules :*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \otimes_{\mathbb{Z}} K_i(A_0) &\rightarrow K_i(\text{Pgr}(A)) \\ 1 \otimes x &\mapsto (A \otimes_{A_0} -)_*(x) \end{aligned}$$

*Démonstration.* On reprend les notations de la preuve de la proposition 1.32.

On dispose d'une filtration de l'identité sur  $\text{Pgr}(A)_q$ , donnée pour  $P$  dans  $\text{Pgr}(A)_q$  par :

$$0 = F_{-q-1}P \subseteq F_{-q} \subseteq \cdots \subseteq F_q P = P$$

Et donc, par le corollaire 2.43 :

$$\text{id}_{K_i \text{Pgr}(A)_q} = \sum_{n=-q}^q (F_n/F_{n-1})_* = \sum_{n=-q}^q (A[-n] \otimes_{A_0} T(-)_n)_* = \sum_{n=-q}^q (\phi(t^n \otimes T(-)_n))_*$$

Ainsi, si on pose  $\chi_q : K_i(\text{Pgr}(A)_q) \rightarrow \bigoplus_{n=-q}^q K_i(A_0)$  induit par  $P \mapsto \bigoplus_n T(P)_n$ , on a que  $\phi_q$  et  $\chi_q$  sont réciproques, où  $\phi_q$  est la restriction de  $\phi$  à  $\bigoplus_{n=-q}^q \mathbb{Z} \cdot t^n \otimes K_i(A_0)$ . Donc  $\phi_q$  est un isomorphisme. Par la proposition 2.38,  $\phi$  est un isomorphisme.  $\square$

### 3. CONSTRUCTION + DE QUILLEN

**3.1. La construction + en topologie.** Dans cette section, nous définissons une construction + en topologie. Nous utilisons un certain nombre de résultats de topologie, notamment l'homologie à coefficients et les tours de Postnikov. Voir l'annexe C pour plus d'information.

**Définition 3.1.** Soit  $X$  connexe dans  $\widehat{\Delta}$ ,  $x \in X_0$ , et  $P \triangleleft \pi_1(X, x)$  un sous-groupe normal parfait. Un morphisme  $f : X \rightarrow X^+$  est une construction + pour  $P$  si :

- (1)  $0 \rightarrow P \rightarrow \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X^+, fx) \rightarrow 0$  est exacte ;
- (2) Pour tout  $L$  système de coefficients sur  $X^+$ , l'application  $H_*(X, f^*L) \rightarrow H_*(X^+, L)$  est un isomorphisme.

*Remarque 3.2.* Comme  $X$  est supposé connexe, le point (1) ne dépend pas de  $x \in X_0$ .

**Proposition 3.3.** *Soit  $X$  connexe dans  $\widehat{\Delta}$  et  $x \in X_0$  tels que  $\pi_1(X, x)$  soit un groupe parfait. Alors une construction + existe pour  $\pi_1(X, x)$ .*

*Démonstration.* Quitte à changer  $X$ , on peut supposer que  $X$  est un complexe de Kan. On se donne  $I$  un ensemble de générateurs de  $\pi_1(X, x)$ . On définit  $Y$  comme la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{\gamma \in I} \partial \Delta^2 & \xrightarrow{\vee(\gamma, *, *)} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigvee_{\gamma \in I} \Delta^2 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & Y \end{array}$$

Alors, par le lemme d'extension C.15  $\pi_1(Y) = 0$ . Maintenant, comme  $\bigvee_{\gamma \in I} \Delta^2$  est contractile,  $\bigvee_{\gamma \in I} \partial \Delta^2 \rightarrow X \rightarrow Y$  est une suite cofibre. On a donc les suites exactes suivantes en homologie sur  $\mathbb{Z}$  :

$$0 \rightarrow H_i(X) \rightarrow H_i(Y) \rightarrow 0 \text{ pour } i \geq 3$$

$$H_2(\bigvee_{\gamma \in I} \partial \Delta^2) \rightarrow H_2(X) \rightarrow H_2(Y) \rightarrow H_1(\bigvee_{\gamma \in I} \partial \Delta^2) \rightarrow H_1(X)$$

Or, par le théorème de Hurewicz C.23,  $H_1(X) = 0$ . De plus  $H_2(\bigvee_{\gamma \in I} \partial \Delta^2) = 0$  et  $H_1(\bigvee_{\gamma \in I} \partial \Delta^2)$  est  $\mathbb{Z}$ -libre. Donc, la suite se scinde et on peut choisir un isomorphisme :

$$H_2(Y) \simeq H_2(X) \oplus \bigoplus_{\gamma \in I} \mathbb{Z} \cdot [\gamma]$$

Or,  $\pi_0(Y) = *$  et  $\pi_1(Y) = 0$ , donc par le théorème de Hurewicz C.24, on a l'isomorphisme de Hurewicz  $\mathcal{H}_2 : \pi_2(Y, fx) \simeq H_2(Y)$ . On se donne  $\tilde{Y}$  complexe de Kan équivalent à  $Y$  et, pour chaque  $\gamma \in I$ ,  $[s_\gamma] \in \pi_2(\tilde{Y}, fx)$  tel que  $\mathcal{H}_2([s_\gamma]) = [\gamma]$ . On définit alors  $X^+$  comme la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{\gamma \in I} \partial \Delta^3 & \xrightarrow{\vee(s_\gamma, *, *, *)} & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigvee_{\gamma \in I} \Delta^3 & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & X^+ \end{array}$$

Par le lemme d'extension C.15,  $\pi_1(X^+) = 0$ . Or la suite  $\bigvee_{\gamma \in I} \partial \Delta^3 \rightarrow \tilde{Y} \rightarrow X^+$  est une suite cofibre. Comme  $H_i(\bigvee_{\gamma \in I} \partial \Delta^3) = 0$  pour  $i \geq 3$ , et  $H_2(\bigvee_{\gamma \in I} \partial \Delta^3) \hookrightarrow H_2(\tilde{Y})$  est une injection, on a  $H_i(\tilde{Y}) \simeq H_i(X^+)$  et donc  $H_i(X) \simeq H_i(X^+)$  pour  $i \geq 3$ . C'est également clair pour  $H_1$  et  $H_0$ . Pour  $H_2$ , on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & H_1(\bigvee_I \partial \Delta^2) & & \\ & \nearrow \sim & \uparrow & & \\ H_2(\bigvee_I \partial \Delta^3) & \hookrightarrow & H_2(\tilde{Y}) & \twoheadrightarrow & H_2(X^+) \\ & & \uparrow & \nearrow & \\ & & H_2(X) & & \end{array}$$

La flèche  $H_2(\bigvee_I \partial \Delta^3) \rightarrow H_1(\bigvee_I \partial \Delta^2)$  est un isomorphisme par construction de  $\bigvee_I \partial \Delta^3 \rightarrow \tilde{Y}$ . Comme la ligne et la colonne sont exactes, ceci implique que la flèche  $H_2(X) \rightarrow H_2(X^+)$  est aussi un isomorphisme.

On a donc que  $H_*(-; \mathbb{Z})$  envoie  $X \rightarrow X^+$  sur un isomorphisme. Ainsi, par le théorème des coefficients universels C.1,  $H_*(-; M)$  envoie  $X \rightarrow X^+$  sur un isomorphisme pour tout  $M$   $\mathbb{Z}$ -module. Or, comme  $\pi_1(X^+) = 0$ , un système de coefficients sur  $X^+$  n'est autre qu'un  $\mathbb{Z}$ -module. Donc  $X \rightarrow X^+$  est une construction  $+$  pour  $\pi_1(X, x)$ .  $\square$

**Proposition 3.4.** *Soit  $X$  connexe dans  $\hat{\Delta}$ ,  $x \in X_0$  et  $P \triangleleft \pi_1(X, x)$  sous-groupe normal parfait. Alors une construction  $+$  pour  $P$  existe.*

*Démonstration.* On note  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  le revêtement connexe correspondant à  $\pi_1(X, x)/P$ . On se donne  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  au-dessus de  $x$ . On a alors  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) = P$ .

On pose  $\tilde{f} : \tilde{X} \hookrightarrow \tilde{X}^+$  une construction  $+$  pour  $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})$  qui soit une cofibration. On définit  $X^+$  comme la somme amalgamée suivante :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{X}^+ \\ \downarrow p & & \downarrow p' \\ X & \xrightarrow{f} & X^+ \end{array} \quad \lrcorner$$

Comme tous les objets de  $\hat{\Delta}$  sont cofibrants, par le dual de la proposition A.7,  $\hat{\Delta}$  est propre à gauche. Ainsi, par le dual de la proposition A.6, le carré ci-dessus est homotopiquement cocartésien. Par le théorème de Van-Kampen C.14, la suite :

$$0 \rightarrow P \rightarrow \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1(X^+, fx) \rightarrow 0 \text{ est exacte}$$

Comme le carré est homotopiquement cocartésien, et comme  $\tilde{X} \hookrightarrow \tilde{X} \times \Delta^1 \sqcup_X X \xrightarrow{\sim} X$ , on a le diagramme commutatif suivant à carrés cocartésiens :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\quad} & \tilde{X}^+ \\ \downarrow & & \downarrow p'' \\ \tilde{X} \times \Delta^1 \sqcup_X X & \xrightarrow{\quad} & X'^+ \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ X & \xrightarrow{\quad} & X^+ \end{array} \quad \lrcorner$$

Où les applications marquées de  $\sim$  sont des équivalences. Maintenant, soit  $L$  un système de coefficients locaux sur  $X^+$ . Comme on peut identifier  $\tilde{X}^+ \setminus \tilde{X}$  et  $X'^+ \setminus \tilde{X} \times \Delta^1 \sqcup_X X$ , on a :

$$C_*(\tilde{X}^+, \tilde{X}; p''^* L) \simeq C_*(X'^+, \tilde{X} \times \Delta^1 \sqcup_X X; L)$$

Et donc :

$$H_*(\tilde{X}^+, \tilde{X}; p'^* L) \longrightarrow H_*(X^+, X; L)$$

est un isomorphisme. Or, comme  $H_*(\tilde{X}; \tilde{f}^* p'^* L) \rightarrow H_*(\tilde{X}^+; p'^* L)$  est un isomorphisme,  $H_*(\tilde{X}^+, \tilde{X}; p'^* L) = 0$ . Donc  $H_*(X; f^* L) \rightarrow H_*(X^+; L)$  est un isomorphisme.  $\square$

Nous énonçons ici une propriété de stabilité par produit qui sera utiles par la suite. La démonstration utilise la suite spectrale d'une filtration, voir [Wei94, 5.3].

**Proposition 3.5.** *Soit  $X$  connexe dans  $\hat{\Delta}$ ,  $x \in X_0$  et  $P \triangleleft \pi_1(X, x)$  sous-groupe normal parfait. Soit  $X \hookrightarrow X^+$  la construction  $+$  pour  $P$  comme donné par la construction précédente.*

*Soit  $Z$  un ensemble simplicial connexe. Alors  $X \times Z \hookrightarrow X^+ \times Z$  est une construction  $+$  pour  $P \times \{1\}$ .*

*Démonstration.* La propriété souhaitée sur les groupes fondamentaux est immédiate. Il s'agit donc de vérifier l'isomorphisme en homologie.

En reprenant la construction de la proposition précédente, on voit qu'il suffit de montrer que :

$$\tilde{X} \times Z \hookrightarrow \tilde{X}^+ \times Z$$

est un isomorphisme en homologie pour tout système de coefficients locaux. Or  $\tilde{X}^+$  est simplement connexe. Donc tout système de coefficients locaux sur  $\tilde{X}^+ \times Z$  est induit par un système dur  $Z$ . Soit  $L$  un tel système sur  $Z$ . Par le morphisme d'Eilenberg-Zilber (voir [GJ09, IV.2.5]), il existe un isomorphisme en homologie fonctoriel en  $W$  ensemble simplicial :

$$C_*(W; \mathbb{Z}) \otimes C_*(Z; L) \longrightarrow C_*(X \times Z; L)$$

De plus, si on filtre  $C_*(W; \mathbb{Z})$  par degrés, on obtient une filtration fonctorielle en  $W$  du complexe  $C_*(W; \mathbb{Z}) \otimes C_*(Z; L)$ , dont la suite spectrale associée  $E_{pq}^r(W)$  vérifie :

$$\begin{aligned} E_{pq}^0 &= C_p(W; \mathbb{Z}) \otimes C_q(Z; L) \\ E_{pq}^1 &= C_p(W; H_q(Z; L)) \\ E_{pq}^2 &= H_p(W; H_q(Z; L)) \end{aligned}$$

Ainsi, comme le morphisme :

$$H_p(\tilde{X}; H_q(Z; L)) \longrightarrow H_p(\tilde{X}^+; H_q(Z; L))$$

est un isomorphisme pour tout  $p$  et tout  $q$ , le morphisme de suites spectrales :

$$E_{pq}^r(\tilde{X}) \rightarrow E_{pq}^r(\tilde{X}^+)$$

induit un isomorphisme entre les limites. Donc  $H_*(\tilde{X} \times Z; L) \rightarrow H_*(\tilde{X}^+ \times Z; L)$  est un isomorphisme.  $\square$

Nous allons maintenant énoncer un résultat d'unicité.

**Proposition 3.6.** *Soit  $X$  connexe dans  $\hat{\Delta}$ ,  $x \in X_0$  et  $P \triangleleft \pi_1(X, x)$  un sous-groupe normal parfait. Soit  $f : X \hookrightarrow X^+$  une construction  $+$  pour  $P$ . Alors pour tout  $g : X \rightarrow Y$  avec  $P \subseteq \ker(\pi_1(g, x))$  et  $Y$  complexe de Kan, il existe  $h : X^+ \rightarrow Y$  tel que  $h \circ f = g$ .*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ & \searrow f & \nearrow \exists h \\ & X^+ & \end{array}$$

De plus, tout autre  $h'$  a le même type d'homotopie que  $h$  dans  $\text{Ho}(\hat{\Delta} \uparrow X)$ .

*Remarque 3.7.* La dernière affirmation est équivalente à :  $h'$  est homotope à  $h$  relativement à  $X$ .

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on peut supposer que  $Y$  est connexe. On se donne  $\tilde{X} \rightarrow X$  revêtement associé à  $\pi_1(X, x)/P$  et  $\tilde{Y} \rightarrow Y$  revêtement universels. Alors :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\exists \tilde{g}} & \tilde{Y} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Maintenant,  $\tilde{Y}$  est simplement connexe et par le théorème C.36, il dispose donc d'une tour de Postnikov de fibrations principales.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{Y}(n) & & \\
 & \nearrow & \downarrow & & \\
 \tilde{Y} & \longrightarrow & \tilde{Y}(n-1) & \xrightarrow{u_{n-1}} & K(n+1, \pi_n(\tilde{Y})) \\
 & \searrow & \vdots & & \\
 & & \tilde{Y}(2) & \xrightarrow{u_2} & K(4, \pi_3(\tilde{Y})) \\
 & \searrow & \downarrow & & \\
 & & \tilde{Y}(1) \simeq * & \xrightarrow{u_1} & K(3, \pi_2(\tilde{Y}))
 \end{array}$$

On choisit des espaces d'Eilenberg-MacLane qui soient fibrants. Supposons que l'on ait défini des applications compatibles  $\tilde{h}(i) : \tilde{X}^+ \rightarrow \tilde{Y}(i)$ , pour  $1 \leq i \leq n-1$ , tels que pour chaque  $i$ , le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{X} & \xrightarrow{\tilde{g}} & \tilde{Y} & \longrightarrow & \tilde{Y}(i) \\
 & \searrow & \nearrow \tilde{h}(i) & & \\
 & & \tilde{X}^+ & & 
 \end{array}$$

On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{Y}(n) & \xrightarrow{\sim} & F(u_{n-1}) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \tilde{X}^+ & \xrightarrow{\tilde{h}(n-1)} & \tilde{Y}(n-1) & \xrightarrow{\sim} & \text{Path}(u_{n-1}) & \xrightarrow{p} & K(n+1, \pi_n(\tilde{Y}))
 \end{array}$$

Où  $\text{Path}(u_{n-1}) = \tilde{Y}(n-1) \times_{K(n+1, \pi_n(\tilde{Y}))} K(n+1, \pi_n(\tilde{Y}))^{\Delta^1}$  et  $F(u_{n-1})$  est la fibre de  $p$ . Comme le L à droite est une suite fibre, ce diagramme nous donne un morphisme  $\tilde{X}^+ \cup C\tilde{X} \rightarrow K(n+1, \pi_n(\tilde{Y}))$  où  $C\tilde{X} := \tilde{X} \times \Delta^1 / \tilde{X} \times \{1\}$  est le cône de  $\tilde{X}$ . La classe d'homotopie de ce morphisme correspond, par le théorème C.33, à un élément de  $H^{n+1}(\tilde{X}^+ \cup C\tilde{X}; \pi_2(\tilde{Y})) = H^{n+1}(\tilde{X}^+, \tilde{X}; \pi_2(\tilde{Y})) = 0$  (par le théorème C.2). Donc  $\tilde{X}^+ \cup C\tilde{X} \rightarrow K(n+1, \pi_n(\tilde{Y}))$  est homotope à une application constante et on peut l'étendre en  $C(\tilde{X}^+) \rightarrow K(n+1, \pi_n(\tilde{Y}))$ , c'est-à-dire prolonger  $\tilde{X} \rightarrow F(u_{n-1})$  à  $\tilde{X}^+$ . On peut donc trouver  $\tilde{h}(n) : \tilde{X}^+ \rightarrow \tilde{Y}(n)$  qui complète le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{Y}(n) \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{h}(n) & \downarrow \\
 \tilde{X}^+ & \xrightarrow{\tilde{h}(n-1)} & \tilde{Y}(n-1)
 \end{array}$$

Ainsi, nous avons construit des applications compatibles  $\tilde{h}(i) : \tilde{X}^+ \rightarrow \tilde{Y}(i)$ , pour  $i \geq 1$ . Or par le corollaire C.21  $\lim_{i \in \mathbb{N}} \tilde{Y}(i) = \tilde{Y}$ . Donc, on a construit  $\tilde{h} : \tilde{X}^+ \rightarrow \tilde{Y}$ . Donc, par le diagramme suivant, on a construit  $h$  :

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{X}^+ & \xrightarrow{\tilde{h}} & \tilde{Y} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X & \longrightarrow & X^+ & \xrightarrow{\exists h} & Y \\
& \searrow g & & & 
\end{array}$$

Montrons maintenant l'unicité à homotopie près. Soit  $h'$  une autre telle application. Par propriété de relèvement le long des revêtements, on peut trouver  $\tilde{h}$  et  $\tilde{h}'$  qui complètent le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{X} & \longrightarrow & \tilde{X}^+ & \xrightarrow[\tilde{h}']{\tilde{h}} & \tilde{Y} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
X & \longrightarrow & X^+ & \xrightarrow[h']{h} & Y
\end{array}$$

Il suffit donc de montrer que  $\tilde{h}$  et  $\tilde{h}'$  sont homotopes relativement à  $\tilde{X}$ . Pour cela, on se donne une homotopie :

$$H(1) : \tilde{h}(1) \Rightarrow \tilde{h}'(1) : \tilde{X}^+ \times \Delta^1 \rightarrow \tilde{Y}(1)$$

C'est toujours possible car  $\tilde{Y}(1)$  est contractile. Or, on remarque que

$$\tilde{X} \times \Delta^1 \cup \tilde{X}^+ \times \partial\Delta^1 \hookrightarrow \tilde{X}^+ \times \Delta^1$$

est une équivalence en homologie, et donc aussi en cohomologie. En effet, la suite exacte de complexes :

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow C_*(\tilde{X} \times \Delta^1) \rightarrow C_*(\tilde{X} \times \Delta^1 \cup \tilde{X}^+ \times \{0\}) \oplus C_*(\tilde{X} \times \Delta^1 \cup \tilde{X}^+ \times \{1\}) \\
\searrow \\
C_*(\tilde{X} \times \Delta^1 \cup \tilde{X}^+ \times \partial\Delta^1) \rightarrow 0
\end{array}$$

induit, car  $\tilde{X} \times \Delta^1 \cup \tilde{X}^+ \times \{-\} \simeq \tilde{X}^+$ , des suites exactes :

$$H_n(\tilde{X}^+) \xrightarrow{(1, -1)} H_n(\tilde{X}^+) \oplus H_n(\tilde{X}^+) \twoheadrightarrow H_n(\tilde{X} \times \Delta^1 \cup \tilde{X}^+ \times \partial\Delta^1)$$

Donc  $\tilde{X}^+ \rightarrow \tilde{X} \times \Delta^1 \cup \tilde{X}^+ \times \partial\Delta^1$  est un isomorphisme en homologie. Or  $\tilde{X}^+ \simeq \tilde{X}^+ \times \Delta^1$ . Donc  $\tilde{X} \times \Delta^1 \cup \tilde{X}^+ \times \partial\Delta^1 \hookrightarrow \tilde{X}^+ \times \Delta^1$  également. Ainsi, on peut, comme ci-dessus, relever successivement l'homotopie à chaque  $\tilde{Y}(n)$ , et en passant à la limite, à  $\tilde{Y}$ .  $\square$

On a directement le corollaire suivant.

**Corollaire 3.8.** *Soit  $X$  connexe dans  $\hat{\Delta}$ ,  $x \in X_0$  et  $P \triangleleft \pi_1(X, x)$  un sous-groupe normal parfait. Alors une construction  $+$  pour  $P$  est unique à équivalence d'homotopie sous  $X$  près.*

Plus loin, nous aurons besoin d'une version améliorée de ces résultats. On rappelle qu'un espace  $X$  est simple si en chaque point  $x \in X_0$  et chaque  $n \geq 1$ ,  $\pi_1(X, x)$  agit trivialement sur  $\pi_n(X, x)$ . En particulier,  $\pi_1(X, x)$  est abélien pour tout  $x \in X_0$ .

**Lemme 3.9.** *Soit  $X$  connexe dans  $\widehat{\Delta}$  et  $x \in X_0$  tels que le sous-groupe  $C := [\pi_1(X, x), \pi_1(X, x)]$  soit parfait. Soit  $f : X \rightarrow X^+$  une construction + pour  $C$  telle que  $X^+$  soit simple. Si  $g : X \rightarrow Y$  vérifie :*

- (1)  $Y$  est simple et connexe ;
- (2)  $g_* : H_*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(Y, \mathbb{Z})$  est un isomorphisme ;

*alors  $g$  est aussi une construction + pour  $C$ . En particulier  $Y$  et  $X$  sont équivalents relativement à  $X$ .*

*Remarque 3.10.* La preuve de ce lemme repose sur le théorème C.36, lequel admet la version générale du théorème de Hurewicz pour les paires. Voir la référence donnée dans la preuve de cette proposition pour plus d'information.

*Démonstration.* Soit  $h : X \rightarrow Z$  avec  $Z$  simple. Alors par le théorème C.36,  $Z$  admet une tour de Postnikov de fibrations principales :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z(n) & & \\
 & \nearrow & \downarrow & & \\
 Z & \longrightarrow & Z(n-1) & \xrightarrow{u_{n-1}} & K(n+1, \pi_n(Z)) \\
 & \searrow & \vdots & & \\
 & & Z(1) & \xrightarrow{u_1} & K(3, \pi_2(Z)) \\
 & \searrow & \downarrow & & \\
 & & Z(0) \simeq * & \xrightarrow{u_0} & K(2, \pi_1(Z))
 \end{array}$$

Comme  $g_* : H_*(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(Y, \mathbb{Z})$  est un isomorphisme, c'est également le cas de  $g^* : H^*(Y, M) \rightarrow H^*(X, M)$  pour tout  $M$   $\mathbb{Z}$ -module par le théorème C.2. Donc, comme dans la preuve de la proposition 3.6, on dispose de  $h_Y : Y \rightarrow Z$  qui complète le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{h} & Z \\
 & \searrow g & \nearrow h_Y \\
 & & Y
 \end{array}$$

Comme  $X \rightarrow X^+$  vérifie également (1) et (2), on a également un morphisme  $h_{X^+} : X^+ \rightarrow Z$  qui complète le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{h} & Z \\
 & \searrow f & \nearrow h_{X^+} \\
 & & X^+
 \end{array}$$

Maintenant, on pose  $h = f$ ,  $Z = X^+$  pour obtenir un morphisme  $f_Y : Y \rightarrow X^+$ , et  $h = g$ ,  $Z = Y$  pour obtenir un morphisme  $g_{X^+} : X^+ \rightarrow Y$ . Alors,  $g_{X^+} \circ f_Y$  et  $\text{id}_{X^+}$  sont tout deux des morphismes  $X^+ \rightarrow X^+$  dans  $\widehat{\Delta} \uparrow X$ . Or,  $X^+$  étant simple, il admet une tour de Postnikov de fibrations principales. Donc, comme dans la preuve de l'unicité de la proposition 3.6,  $g_{X^+} \circ f_Y$  et  $\text{id}_{X^+}$  sont homotopes sous



$X$ . De même pour  $f_Y \circ g_{X^+}$  et  $\text{id}_Y$ . Ainsi,  $X^+$  et  $Y$  sont homotopes sous  $X$ , et  $g : X \rightarrow Y$  est une construction  $+$  pour  $C$ .  $\square$

**3.2. La construction  $+$  de la  $K$ -théorie.** Dans cette section, nous verrons certains groupes comme des ensembles simpliciaux via le foncteur  $\text{nerf}$  2.12.

**Définition 3.11.** Soit  $A$  un anneau. On note  $f_A : \text{GL}(A) \rightarrow \text{GL}(A)^+$  une construction  $+$  pour  $E(A)$  (définition 3.1). Pour  $n \geq 1$ , on pose :

$$K_n(A) := \pi_n(\text{GL}(A), f_A^*)$$

où  $*$   $\in \text{GL}(A)_0$  est l'unique point.

Si  $u : A \rightarrow B$  est un morphisme d'anneau, par la proposition 3.6, il existe  $u^*$  complétant le carré :

$$\begin{array}{ccc} \text{GL}(A) & \xrightarrow{\text{GL}(u)} & \text{GL}(B) \\ f_A \downarrow & & \downarrow f_B \\ \text{GL}(A)^+ & \xrightarrow{u^*} & \text{GL}(B)^+ \end{array}$$

qui induit des morphismes de groupe  $u^* : K_n(A) \rightarrow K_n(B)$  pour  $n \geq 1$ .

*Remarque 3.12.* Cette définition définit les groupes  $K_n(A)$ , et pas seulement à conjugaison près. En effet, l'unicité de la construction  $+$  donnée par le corollaire 3.8 est à homotopie sous  $\text{GL}(A)$  près. De même pour les morphismes  $u^*$ .

Nous aurons besoin, pour démontrer le théorème  $+=Q$  4.38, de montrer que  $\text{GL}(A)^+$  est un espace simple. C'est l'objet de la fin de cette sous-section.

**Lemme 3.13.** Soit  $G$  un groupe tel que  $[G, G]$  soit parfait. On note  $f : G \hookrightarrow G^+$  une construction  $+$  pour  $G$  telle que  $G^+$  soit un complexe de Kan. On choisit  $\gamma \in [G, G]$ , et on note  $c_\gamma$  la conjugaison par  $\gamma$  dans  $G$ . Alors il existe une homotopie pointée  $H : G \times \Delta^1 \rightarrow G^+$  entre  $f$  et  $f \circ c_\gamma$ .

*Démonstration.* On remarque d'abord que  $\gamma$  induit une transformation naturelle entre  $\text{id}_G$  et  $c_\gamma$  :

$$h : G \times (0 \rightarrow 1) \rightarrow G, * \xrightarrow{\gamma} *$$

Mais  $h$  n'est pas pointée (cela fera toute la différence dans la proposition 3.14). Comme  $f_*[\gamma] = 0$ , on dispose de  $\tau : \Delta^2 \rightarrow G^+$  tel que :

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ s_0(*) \nearrow & \tau & \searrow s_0(*) \\ 0 & \xrightarrow{\gamma} & 2 \end{array}$$

Maintenant, on peut compléter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} G \times \Lambda_0^2 \cup \{*\} \times \Delta^2 & \xrightarrow{(-, f \circ h, s_0(f)) \cup \tau} & G^+ \\ \downarrow & \nearrow \exists \theta & \\ G \times \Delta^2 & & \end{array}$$

Alors  $H := \theta \circ (\text{id}_G \times d^0)$  convient.  $\square$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ s_0(f) \nearrow & \exists \theta & \searrow H \\ 0 & \xrightarrow{f \circ h} & 2 \end{array}$$

**Proposition 3.14.** Soit  $A$  un anneau. Alors  $\text{GL}(A)^+$  est simple.

*Démonstration.* (A) On commence par construire une application :

$$\mu^+ : \mathrm{GL}(A)^+ \times \mathrm{GL}(A)^+ \rightarrow \mathrm{GL}(A)^+$$

Pour cela, on pose  $\mu : \mathrm{GL}(A) \times \mathrm{GL}(A) \rightarrow \mathrm{GL}(A)$  l'application  $(M, N) \mapsto P$ , avec  $P_{2n+1, 2m+1} = M_{n, m}$ ,  $P_{2n, 2m} = N_{n, m}$  et  $P_{i, j} = 0$  sinon. Or, en utilisant [ref homologie du produit], on remarque que :

$$\mathrm{GL}(A) \times \mathrm{GL}(A) \rightarrow \mathrm{GL}(A)^+ \times \mathrm{GL}(A)^+$$

est une construction  $+$ . On peut donc étendre  $\mu$  en  $\mu^+ : \mathrm{GL}(A)^+ \times \mathrm{GL}(A)^+ \rightarrow \mathrm{GL}(A)^+$ , comme souhaité.

(B) De la chaîne de cofibrations :

$$\mathrm{GL}_1(A) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(A) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(A) \hookrightarrow \dots$$

On peut déduire, par la proposition 3.6, une chaîne de cofibrations entre complexes de Kan :

$$\mathrm{GL}_1(A)^+ \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(A)^+ \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(A)^+ \hookrightarrow \dots$$

On note  $G$  sa colimite. Alors par fonctorialité des colimites, on a une application  $u : \mathrm{GL}(A) \rightarrow G$ . De plus :

$$\pi_1(\mathrm{GL}(A)) \rightarrow \pi_1(G) = \mathrm{GL}(A) \rightarrow \mathrm{colim}_n \pi_1(\mathrm{GL}_n(A)^+)$$

Et :

$$H_*(\mathrm{GL}(A), u^*L) \rightarrow H_*(G, L) = \mathrm{colim}_n (H_*(\mathrm{GL}_n(A), u^*L) \rightarrow H_*(\mathrm{GL}_n(A)^+, L))$$

Donc  $u : \mathrm{GL}(A) \rightarrow G$  est une construction  $+$  pour  $[\mathrm{GL}(A), \mathrm{GL}(A)]$ . Ainsi, on peut supposer que :

$$\mathrm{GL}(A)^+ = \bigcup_n \mathrm{GL}_n(A)^+$$

(C) Fixons  $n \geq 1$ . On note  $\mu_n : \mathrm{GL}_n(A) \times \mathrm{GL}_n(A) \rightarrow \mathrm{GL}(A)^+$  la restriction de  $\mu$ , et  $i_n : \mathrm{GL}_n(A) \rightarrow \mathrm{GL}(A)^+$  l'application naturelle. Alors,  $\mu_n(*, -)$  et  $i_n$  sont conjugués par une permutation  $\gamma \in E_{2n}(A)$ . Ainsi, on dispose, par le lemme 3.13, d'une homotopie pointée  $h : \mathrm{GL}(A) \times \Delta^1 \rightarrow \mathrm{GL}(A)^+$ , telle que sa restriction  $H : \mathrm{GL}_n(A) \times \Delta^1 \rightarrow \mathrm{GL}(A)^+$  soit une homotopie pointée entre  $\mu_n(*, -)$  et  $i_n$ . Or, l'application :

$$\mathrm{GL}_n(A) \times \Delta^1 \cup \mathrm{GL}_n(A)^+ \times \partial\Delta^1 \rightarrow \mathrm{GL}_n(A)^+ \times \Delta^1$$

est un isomorphisme sur tous les groupes d'homologie (voir la fin de la démonstration de la proposition 3.6). Donc on peut étendre  $H$  en :

$$H_n^+ : \mathrm{GL}_n(A)^+ \times \Delta^1 \rightarrow \mathrm{GL}(A)^+$$

homotopie entre  $\mu_n^+(*, -)$  et  $i_n^+$  (extensions données par la proposition 3.6).

On pourrait faire de même avec  $\mu_n^+(-, *)$  et  $i_n^+$ .

(D) Maintenant, nous fixons  $m \geq 1$ ,  $\eta \in \pi_1(\mathrm{GL}(A)^+, *)$  et  $\delta \in \pi_m(\mathrm{GL}(A)^+, *)$ .

Par (B), il existe  $n \geq 1$  tel que  $\delta$  et  $\eta$  soient supportés dans  $\mathrm{GL}_n(A)^+$ . Alors :

$$\mu^+(\eta, \delta) : \Delta^1 \times \Delta^m \rightarrow \mathrm{GL}(A)^+, \mu^+(*, -) \simeq i_n^+ \text{ rel } * \text{ et } \mu^+(-, *) \simeq i_n^+ \text{ rel } * \quad (\text{C})$$

induisent une homotopie entre  $\eta \cdot \delta$  (action) et  $\mu(\eta(1), \delta) = \mu(*, \delta)$ . Or,  $\mu(*, \delta) \simeq \delta \text{ rel } *$ . Donc  $[\eta \cdot \delta] = [\delta]$ .

□

4. LE THÉORÈME " $+ = Q$ "

Cette section reprend la démonstration du théorème  $+ = Q$  donnée dans [Gra76].

**4.1. Catégories monoïdales, actions et localisations.** Dans cette sous-section, nous introduisons la notion de catégorie monoïdale, et d'action sur une catégorie.

**Définition 4.1.** Une catégorie monoïdale symétrique est une catégorie  $S$  munie d'un foncteur :

$$+ : S \times S \longrightarrow S$$

ainsi que d'un objet  $0$ , et d'isomorphismes naturels :

(**associateur**)  $\alpha_{A,B,C} : A + (B + C) \simeq (A + B) + C$ ;

(**identités**)  $\eta_A : A + 0 \simeq A$  et  $\epsilon_A : 0 + A \simeq A$ ;

(**tressage**)  $\beta_{A,B} : A + B \simeq B + A$  tel que  $\beta_{A,B}\beta_{B,A} = \text{id}_{B+A}$ ;

tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 A + (B + (C + D)) & \xrightarrow{\sim} & A + ((B + C) + D) \xrightarrow{\sim} (A + (B + C)) + D \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 (A + B) + (C + D) & \xrightarrow{\sim} & ((A + B) + C) + D \\
 & \searrow \sim & \swarrow \sim \\
 & A + (0 + B) & \xrightarrow{\sim} (A + 0) + B \\
 & \searrow \sim & \swarrow \sim \\
 & & A + B \\
 (A + B) + C & \xrightarrow{\sim} & C + (A + B) \xrightarrow{\sim} (C + A) + B \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 (B + A) + C & \xrightarrow{\sim} & B + (A + C) \xrightarrow{\sim} B + (C + A)
 \end{array}$$

*Remarque 4.2.* Les diagrammes commutatifs de la définition permettent de montrer une forme d'unicité à unique isomorphisme près sur les formules formelles composées de  $+$ ,  $()$  et  $0$  : le théorème de cohérence pour les catégories monoïdales. Pour un énoncé précis et une démonstration, voir [Lan13, Chp. VII].

**Définition 4.3.** Un foncteur monoïdal  $f : S \longrightarrow T$  entre deux catégories monoïdales symétriques est la donnée d'un foncteur :

$$f : S \longrightarrow T$$

ainsi que d'un isomorphisme naturel  $f(A + B) \simeq fA + fB$  et d'un isomorphisme  $f0 \sim 0$  tels que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
 f((A + B) + C) & \xrightarrow{\sim} & f(A + B) + fC \xrightarrow{\sim} (fA + fB) + fC \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 f(A + (B + C)) & \xrightarrow{\sim} & fA + f(B + C) \xrightarrow{\sim} fA + (fB + fC) \\
 & \searrow \sim & \swarrow \sim \\
 & f(0 + A) & \xrightarrow{\sim} f0 + fA \\
 & \downarrow \wr & \downarrow \wr \\
 & fA & \xrightarrow{\sim} 0 + fA
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
f(A + B) & \xrightarrow{\sim} & f(B + A) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
fA + fB & \xrightarrow{\sim} & fB + fA
\end{array}$$

**Définition 4.4.** Une action à gauche d'une catégorie monoïdale symétrique  $S$  sur une catégorie  $X$  est la donnée d'un foncteur :

$$+ : S \times X \rightarrow X$$

et de deux isomorphismes naturels  $A + (B + F) \simeq (A + B) + F$  et  $0 + F \simeq F$  (pour  $A, B$  dans  $S$  et  $F$  dans  $X$ ), tels que les diagrammes suivants commutent (avec  $F$  dans  $X$ , les autres dans  $S$ ) :

$$\begin{array}{ccc}
A + (B + (C + F)) & \xrightarrow{\sim} & A + ((B + C) + F) \xrightarrow{\sim} (A + (B + C)) + F \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
(A + B) + (C + F) & \xrightarrow{\sim} & ((A + B) + C) + F \\
& \searrow \sim & \swarrow \sim \\
& A + F &
\end{array}$$

**Exemple 4.5.** Par exemple,  $+ : S \times S \rightarrow S$  induit une action naturelle de  $S$  sur  $S$ .

**Définition 4.6.** Un foncteur  $g : X \rightarrow Y$  entre deux catégories munies d'une  $S$ -action préserve l'action s'il existe un isomorphisme naturel  $A + gF \simeq g(A + F)$  tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{array}{ccc}
(A + B) + gF & \xrightarrow{\sim} & g((A + B) + F) \xrightarrow{\sim} g(A + (B + F)) \\
\downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
A + (B + gF) & \xrightarrow{\sim} & A + g(B + F) \\
& \searrow \sim & \swarrow \sim \\
& gF &
\end{array}$$

Nous allons maintenant introduire la notion d'action inversible et de localisation par une action. Mais avant de la donner dans le cadre des catégories, voyons ce que sont ces définitions dans le cadre des actions de monoïdes symétriques sur des ensemble.

Ce cas est inclus dans celui des catégories. En effet, on peut voir un ensemble comme une catégorie discrète (ie. les seuls morphismes sont les identités). Une structure de catégorie monoïdale sur un ensemble est alors équivalente à une structure de monoïde.

**Proposition - définition 4.7.** Soit  $S$  un monoïde symétrique agissant sur un ensemble  $X$ . On note  $S^{-1}X$  le quotient de  $S \times X$  par l'action de  $S$  sur les deux coordonnées :

$$S^{-1}X = S \times X / (t, x) \sim (s + t, s + x)$$

L'ensemble  $S^{-1}X$  admet une  $S$ -action donnée par  $s + (t, x) = (t, s + x)$ , et on a un morphisme de  $S$ -ensembles :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S^{-1}X \\ x & \mapsto & (0, x) \end{array}$$

L'action d'un monoïde commutatif  $T$  sur un ensemble  $Y$  est dite inversible si  $s + (-) : Y \rightarrow Y$  est un isomorphisme pour tout  $s$  dans  $T$ .

Alors l'action de  $S$  sur  $S^{-1}X$  est inversible et l'action de  $S$  sur  $X$  est inversible si et seulement si  $X \rightarrow S^{-1}X$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* L'action de  $S$  sur la deuxième coordonnée de  $S \times X$  passe au quotient car  $u + (s + t, s + x) = (s + t, s + (u + x))$ . Un inverse à  $s + (-)$  dans  $S^{-1}X$  est donné par  $(t, x) \mapsto (s + t, x)$ . La dernière affirmation est immédiate.  $\square$

**Définition 4.8.** Soit  $S$  une catégorie monoïdale symétrique agissant sur un ensemble  $X$ . On dit que l'action est inversible si pour tout  $A$  dans  $S$ , le foncteur :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ F & \mapsto & A + F \end{array}$$

est une équivalence d'homotopie (où la catégorie  $X$  est vue comme un ensemble simplicial via le foncteur  $\text{nerf}$  2.12).

**Définition 4.9.** Soit  $S$  catégorie symétrique monoïdale agissant sur une catégorie  $X$ . On définit  $\langle S, X \rangle$  comme la catégorie dont les :

- objets sont les objets de  $X$  ;
- morphismes de  $F$  dans  $G$  sont les quadruplets  $(F, G, A, A + F \rightarrow G)$  avec  $A$  dans  $S$ , à isomorphismes près. Un isomorphisme entre  $(F, G, A, A + F \rightarrow G)$  et  $(F, G, B, B + F \rightarrow G)$  est la donnée d'un isomorphisme  $\phi : A \simeq B$  tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} A + F & \xrightarrow[\sim]{\phi + \text{id}_F} & B + F \\ & \searrow & \swarrow \\ & G & \end{array}$$

soit commutatif.

- les compositions sont comme suit. La composée de  $(F, G, A, A + F \rightarrow G)$  et  $(G, H, B, B + G \rightarrow H)$  est  $(F, H, B + A, B + A + F \rightarrow B + G \rightarrow H)$ .

*Remarque 4.10.* Dans la suite on notera parfois  $(A, A + F \rightarrow G)$  pour  $(F, G, A, A + F \rightarrow G)$ .

**Proposition - définition 4.11.** Soit  $S$  une catégorie symétrique monoïdale agissant sur une catégorie  $X$ . On pose  $S^{-1}X := \langle S, S \times X \rangle$ , où  $S$  agit sur les deux facteurs de  $S \times X$ .

Alors  $S$  agit sur  $S^{-1}X$  par  $A + (B, F) := (B, A + F)$ , l'action est inversible et on dispose d'un foncteur préservant l'action :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S^{-1}X \\ F & \mapsto & (0, F) \end{array}$$

*Démonstration.* L'action de  $S$  sur les morphismes est donnée comme suit. Soit  $u : \alpha \rightarrow \beta$  morphisme dans  $S$  et  $v = ((A, F), (B, G), C, (C + A, C + F) \rightarrow (B, G))$  morphisme dans  $S^{-1}X$ . Alors :

$$u + v := ((\alpha + A, \alpha + F), (\beta + B, \beta + G), C, \\ (\alpha + C + A, \alpha + C + F) \rightarrow (\beta + C + A, \beta + C + F) \rightarrow (\beta + B, \beta + G))$$

On vérifie facilement que les bons diagrammes commutent.

Un inverse à homotopie près à  $s_A : A + (-)$  dans  $S^{-1}X$  est donné par  $i_A : (B, F) \rightarrow (A + B, F)$ . En effet la collection de morphismes :

$$((B, F), (A + B, A + F), A, (A + B, A + F) \xrightarrow{\sim} (A + B, A + F))$$

induit une transformation naturelle entre  $\text{id}_{S^{-1}X}$  et  $i_A \circ s_A = s_A \circ i_A$ .  $\square$

On voit que le quotient par  $S$  dans le cas des ensembles est ici remplacé par la construction  $< S, (-) >$ . Montrons par un petit calcul que ces deux construction coïncident à homotopie près dans le cas des ensembles. Dans ce calcul, on notera  $S^{-1}X$  pour le quotient.

Dans ce cadre, les morphismes dans  $< S, S \times X >$  sont comme suit. Un morphisme  $(t, x) \rightarrow (s, y)$  est la donnée d'un  $u \in S$  tel que  $(u + t, u + x) = (s, y)$ . On peut donc identifier naturellement  $\pi_0(< S, S \times X >)$  à  $S^{-1}X$ . On a donc un foncteur naturel  $p_X : < S, S \times X > \rightarrow S^{-1}X$ . On vérifie aisément qu'il préserve l'action de  $S$ .

Montrons maintenant que  $p_X$  est une équivalence d'homotopie. Pour cela, soit  $(t, x)$  dans  $S \times X$ , on note  $[(t, x)]$  sa classe dans  $S^{-1}X$ . On a alors  $< S, S \times X > \downarrow [(t, x)] = p_X^{-1}[(t, x)]$ . D'après le théorème A 2.25, il suffit de montrer que  $p_X^{-1}[(t, x)]$  est contractile. Pour cela nous allons montrer que c'est une catégorie filtrante. En effet, si  $u, v : (s, y) \rightarrow (r, z)$  on a  $s + u = s + v : (s, y) \rightarrow (s + r, s + z)$ ; si  $(s, y)$  et  $(r, z)$  sont dans  $p_X^{-1}[(t, x)]$  on a  $(s, y) \sim \dots \sim (r, z)$ , où  $\sim$  est induit par l'action de  $S$ ; alors si on note  $\sigma$  la somme de toutes les premières coordonnées qui apparaissent dans la chaîne, on a  $\sigma + s = \sigma + r$  et  $\sigma + y = \sigma + z$ .

Revenons maintenant au cadre des catégories. Dans la majorité de la suite, nous nous restreindrons au cas où  $S$  est un groupoïde.

**Proposition 4.12.** *Soit  $S$  une catégorie monoïdale symétrique. Si  $S$  est un groupoïde, alors 0 est initial dans  $< S, S >$ , et en particulier,  $< S, S >$  est contractile.*

*Démonstration.* Soit  $A$  dans  $S$ . Un morphisme  $0 \rightarrow A$  dans  $< S, S >$  est un  $B$  et un isomorphisme  $B + 0 \simeq A$ , à isomorphisme près. Or, si  $C, C + 0 \simeq A$  induit aussi un morphisme, il existe un unique isomorphisme  $C \simeq B$ . Donc il existe au plus un unique morphisme  $0 \rightarrow A$ . Or  $A + 0 \simeq A$  en induit un.  $\square$

**Définition 4.13.** Soit  $S$  une catégorie monoïdale symétrique agissant sur  $X$  catégorie. On définit la première projection :

$$\begin{array}{lll} \rho : & S^{-1}X & \rightarrow < S, S > \\ & (B, F) & \mapsto B \\ & (A, (A + B, A + F) \rightarrow (B', F')) & \mapsto (A, A + B \rightarrow B') \end{array}$$

**Lemme 4.14.** *Soit  $S$  une catégorie monoïdale symétrique agissant sur  $X$  catégorie. Alors, sous les deux conditions suivantes  $\rho$  est cofibrée :*

- (1) *tous les morphismes de  $S$  sont des monomorphismes ;*

(2) les foncteurs de translation  $A + (-) : S \rightarrow S$  sont fidèles.

*Démonstration.* On se donne un morphisme  $(C, C + B \rightarrow B'', C + F \rightarrow F'')$  dans  $S^{-1}X$  et une factorisation de la première coordonnée en  $(A, A + B \rightarrow B')$  et  $(A', A' + B' \rightarrow B'')$ . On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (C, C+B \rightarrow B'', C+F \rightarrow F'') & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 (B, F) & \xrightarrow{(A, A+B \rightarrow B', \text{id}_{A+F})} & (B', A+F) & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & (B'', F'') \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 B & \xrightarrow{(A, A+B \rightarrow B')} & B' & \xrightarrow{(A', A'+B' \rightarrow B'')} & B''
 \end{array}$$

On cherche à trouver une flèche en pointillés qui fasse commuter le diagramme et à montrer son unicité. On dispose d'au moins un triangle commutatif dans  $S$  :

$$\begin{array}{ccc}
 A' + A + B & \xrightarrow{\sim} & C + B \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & B'' &
 \end{array}$$

Donc, comme tous les morphismes sont des monomorphismes et les translations sont fidèles, il existe un unique isomorphisme  $C \simeq A' + A$  qui induise celui du diagramme. Ainsi, le morphisme  $A' + A + F \simeq C + F \rightarrow F''$  est la flèche en pointillés recherchée. L'unicité suit immédiatement.  $\square$

**Théorème 4.15.** Soit  $S$  un groupoïde symétrique monoïdal agissant sur une catégorie  $X$ . On suppose que les translations  $A + (-) : S \rightarrow S$  sont fidèles. Alors s'équivalent :

- (1)  $X \longrightarrow S^{-1}X$  est une équivalence d'homotopie ;
- (2) L'action de  $S$  sur  $X$  est inversible.

*Démonstration.* On a, pour chaque  $B$ , un isomorphisme naturel :

$$\begin{array}{ccc}
 X & \simeq & \rho^{-1}B \\
 F & \mapsto & (B, F)
 \end{array}$$

Et alors le changement de cobase  $\rho^{-1}B \longrightarrow \rho^{-1}B'$  induit par  $(A, A + B \rightarrow B')$  s'identifie à la translation par  $A + (-)$  (voir la démonstration du lemme 4.14 ci-dessus). Ainsi, si l'action est inversible, le théorème B 2.31 implique que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 X = \rho^{-1}0 & \longrightarrow & S^{-1}X \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 * & \xrightarrow{0} & \langle S, S \rangle
 \end{array}$$

est homotopiquement cartésien. Or, comme  $S$  est un groupoïde, par la proposition 4.12,  $\langle S, S \rangle$  est contractile. Donc  $X \longrightarrow S^{-1}X$  est une équivalence d'homotopie.

Réciproquement, si  $X \longrightarrow S^{-1}X$  est une équivalence d'homotopie, alors les translations sur  $X$  s'identifient à homotopie près à celles sur  $S^{-1}X$ . Or, l'action de  $S$  sur  $S^{-1}X$  est inversible. Cela conclut.  $\square$

**4.2. Calculs d'homologie de localisés.** Le but de cette sous-section est de calculer  $H_*(S^{-1}X)$  en fonction de  $H_*(X)$  sous certaines hypothèses sur l'action de  $S$  sur  $X$ .

On se fixe, dans cette sous-section, une catégorie monoïdale symétrique  $S$  agissant sur une catégorie  $X$ .

Si  $u : s \rightarrow s'$  est un morphisme dans  $S$ , il induit une transformation naturelle  $s + (-) \Rightarrow s' + (-) : X \times \Delta^1 \rightarrow X$ , et donc une équivalence d'homotopie entre  $s + (-)$  et  $s' + (-)$ . Ainsi, on a une action naturelle de  $\pi_0(S)$  sur  $X$  vu comme objet de  $\text{Ho}(\widehat{\Delta})$ . L'ensemble  $\pi_0(S)$  est naturellement un monoïde symétrique via  $+$ .

En particulier,  $\pi_0(S)$  agit sur  $H_*(X)$ . De même,  $\pi_0(S)$  agit sur  $H_*(S^{-1}X)$ , et comme l'action de  $S$  y est inversible,  $\pi_0(S)$  agit sur  $H_*(S^{-1}X)$  par automorphisme.

Donc, le morphisme  $X \rightarrow S^{-1}X$  induit un morphisme :

$$\pi_0(S)^{-1}H_*(X) \longrightarrow H_*(S^{-1}X)$$

La localisation désigne ici la localisation du  $\mathbb{Z}[\pi_0(S)]$ -module  $H_*(X)$  par la partie multiplicative  $\pi_0(S)$ .

On peut maintenant énoncer le résultat principale de la sous-section.

**Théorème 4.16.** *Soit  $S$  une groupoïde monoïdal symétrique agissant sur une catégorie  $X$ , tels que les translations  $A + (-)$  soient fidèles pour tout  $A$  dans  $S$ . Alors le morphisme construit ci-dessus :*

$$\pi_0(S)^{-1}H_*(X) \longrightarrow H_*(S^{-1}X)$$

*est un isomorphisme.*

**Définition 4.17.** Si  $M$  est un  $\mathbb{Z}[\pi_0(S)]$ -module, on pose :

$$\begin{array}{lll} \overline{M} : & \langle S, S \rangle & \rightarrow \text{Ab} \\ & B & \mapsto M \\ & (A, A + B \rightarrow B') & \mapsto [A] + (-) \end{array}$$

*Démonstration du théorème.* D'après le lemme 4.14 et la démonstration du théorème 4.15 :

- (i)  $\rho : S^{-1}X \rightarrow \langle S, S \rangle$  est cofibrée ;
- (ii) on a une identification naturelle  $\rho^{-1}B \simeq X$  ;
- (iii) via cette identification, les changements de cobase d'identifient aux translations.

On considère l'ensemble bisimplicial  $T_{\bullet, \bullet}$  définit par :

$$\begin{aligned} T_{pq} := \{ & ((A_0, F_0) \rightarrow \cdots \rightarrow (A_q, F_q), A_q \rightarrow B_0, B_0 \rightarrow \cdots \rightarrow B_p) \\ & | B_i \in \langle S, S \rangle, (A_j, F_j) \in S^{-1}X \} \end{aligned}$$

et le bicomplexe de chaîne associé :

$$C_{pq} := \mathbb{Z}T_{pq}$$

On a une action naturelle de  $S$  sur  $T_{pq}$  par :

$$\begin{aligned} U + ((A_0, F_0) \rightarrow \cdots \rightarrow (A_q, F_q), A_q \rightarrow B_0, B_0 \rightarrow \cdots \rightarrow B_p) \\ := ((A_0, U + F_0) \rightarrow \cdots \rightarrow (A_q, U + F_q), A_q \rightarrow B_0, B_0 \rightarrow \cdots \rightarrow B_p) \end{aligned}$$

Cette action passe naturellement à  $C_{\bullet, \bullet}$ .



On filtre  $\text{Tot}(C)$  par la seconde coordonnée :

$$F_q \text{Tot}(C)_n := \bigoplus_{i+j=n, j \leq q} C_{ij}$$

On note  $E_{pq}^r$  la suite spectrale de cette filtration, voir [Wei94, 5.4] (attention, les indices sont transposés ici). On a :

$$E_{pq}^0 = C_{pq} = \bigoplus_{(A_0, F_0) \rightarrow \dots \rightarrow (A_q, F_q)} \mathbb{Z}N(< S, S > \uparrow A_q)_p$$

Et  $\partial^0 : E_{pq}^0 \rightarrow E_{(p-1)q}^0$  s'identifie sur chaque coordonnée à la différentielle de  $\mathbb{Z}N(< S, S > \uparrow B_q)$ . Donc, on a immédiatement :

$$E_{pq}^1 = \bigoplus_{(A_0, F_0) \rightarrow \dots \rightarrow (A_q, F_q)} H_p(< S, S > \uparrow A_q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ \mathbb{Z}N(S^{-1}X)_p & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que l'action  $S$  induit ici une structure de bicomplexe de  $\mathbb{Z}[\pi_0(S)]$ -modules sur  $E_{\bullet\bullet}^1$ . Du calcul de  $E_{pq}^1$  on déduit :

$$E_{pq}^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } q > 0 \\ H_p(S^{-1}X) & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc un isomorphisme  $H_p(\text{Tot}(C)) \simeq H_p(S^{-1}X)$ . L'action induite de  $\pi_0(S)$  sur  $H_p(S^{-1}X)$  est alors celle décrite au début de la sous-section.

On filtre maintenant  $\text{Tot}(C)$  par la première coordonnée :

$$F'_p \text{Tot}(C)_n := \bigoplus_{i+j=n, i \leq p} C_{ij}$$

On note  $E_{pq}'^r$  la suite spectrale associée. On a :

$$E_{pq}'^0 = C_{pq} = \bigoplus_{B_0 \rightarrow \dots \rightarrow B_p} \mathbb{Z}N(\rho \downarrow B_0)_q$$

Et  $\partial'^0 : E_{pq}'^0 \rightarrow E_{p(q-1)}'^0$  s'identifie sur chaque coordonnée à la différentielle de  $\mathbb{Z}N(\rho \downarrow B_0)$ . Donc, on a immédiatement :

$$E_{pq}'^1 = \bigoplus_{B_0 \rightarrow \dots \rightarrow B_p} H_q(\rho \downarrow B_0) \simeq \bigoplus_{B_0 \rightarrow \dots \rightarrow B_p} H_q(X)$$

En effet, comme  $\rho$  est cofibrée et par le point (iii) ci-dessus,  $\rho \downarrow B \rightarrow \rho^{-1}B \rightarrow X$  est une chaîne fonctorielle d'équivalences faibles. On remarque ici aussi que l'action  $S$  induit une structure de bicomplexe de  $\mathbb{Z}[\pi_0(S)]$ -modules sur  $E_{\bullet\bullet}'^1$ . On en déduit :

$$E_{pq}'^2 = H_p(< S, S >; \overline{H_q(X)})$$

où  $\overline{H_q(X)}$  est donné par la construction de la définition 4.17. L'action de  $\pi_0(S)$  sur  $E_{pq}'^2$  est induite par l'action par translation sur  $H_q(X)$ . Comme l'action de  $\pi_0(S)$  sur  $E_{\bullet\bullet}'^1$  et l'action sur  $E_{\bullet\bullet}'^1$  proviennent d'une même action de  $S$  sur  $C$ , on a convergence d'une suite spectrale de  $\mathbb{Z}[\pi_0(S)]$ -modules :

$$H_p(< S, S >; \overline{H_q(X)}) \implies H_p(S^{-1}X)$$

Or, l'action de  $\pi_0(S)$  sur  $H_p(S^{-1}X)$  est inversible, et la localisation est exacte, et de plus :

$$\pi_0(S)^{-1}E'_{pq} = \bigoplus_{B_0 \rightarrow \dots \rightarrow B_p} \pi_0(S)^{-1}H_q(X)$$

Donc, on a également convergence de la suite spectrale :

$$H_p(< S, S >; \overline{\pi_0(S)^{-1}H_q(X)}) \implies H_p(S^{-1}X)$$

Or, l'action de  $< S, S >$  sur  $\overline{\pi_0(S)^{-1}H_q(X)}$  est inversible, et  $< S, S >$  est contractile. Donc  $H_p(< S, S >; \overline{\pi_0(S)^{-1}H_q(X)})$  est une homologie à coefficients d'un espace contractile. Donc :

$$H_p(< S, S >; \overline{\pi_0(S)^{-1}H_q(X)}) = \begin{cases} \pi_0(S)^{-1}H_q(X) & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc un isomorphisme pour  $p \geq 0$  :

$$v : \pi_0(S)^{-1}H_p(X) \simeq H_p(S^{-1}X)$$

Il reste à montrer que cet isomorphisme est induit par le morphisme :

$$\pi_0(S)^{-1}H_p(X) \rightarrow H_p(S^{-1}X)$$

construit plus haut. Pour cela, on remarque que la suite  $X \rightarrow S^{-1}X \rightarrow < S, S >$  est fonctorielle en  $S$ . Or on a un morphisme de catégories monoïdales symétriques  $* \rightarrow S$ . On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} X & \xlongequal{\quad} & X & \xrightarrow{g} & * \\ \parallel & & \downarrow i & & \downarrow 0 \\ X & \longrightarrow & S^{-1}X & \xrightarrow{f} & < S, S > \end{array}$$

Ce diagramme induit un morphisme d'ensemble bisimpliciaux  $T(g) \rightarrow T(f)$ , et donc un morphisme entre les suites spectrales. Nous disposons donc du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & \xrightarrow{\quad} & & \\ & & \text{---} & & \\ H_q(X) = H_0(*; \overline{H_q(X)}) & \xrightarrow{\sim} & H_q(\text{Tot}(\mathbb{Z}T(g))) & \xleftarrow{\sim} & H_q(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow H_q(i) \\ H_0(< S, S >; \overline{H_q(X)}) & \longrightarrow & H_q(\text{Tot}(\mathbb{Z}T(f))) & \xleftarrow{\sim} & H_q(S^{-1}X) \\ \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ \pi_0(S)^{-1}H_q(X) & \xrightarrow{\sim} & H_q(\text{Tot}(\mathbb{Z}T(f))) & \xleftarrow{\sim} & H_q(S^{-1}X) \\ & & \xrightarrow{\quad} & & \\ & & \text{---} & & \end{array}$$

$\xrightarrow{\quad} \quad \quad \quad \xrightarrow{\quad}$

où  $u$  est la localisation et  $v$  est l'isomorphisme induit par la suite spectrale. On voit que  $v$  est induit par  $H_q(i)$ , ce qui conclut.  $\square$

### 4.3. Action sur les fibres.

*Remarque 4.18.* On se donne  $S$  une catégorie monoïdale symétrique agissant trivialement sur une catégorie  $Y$ , ie.  $S \times Y \rightarrow Y = \text{pr}_2$ . Alors  $S^{-1}Y = \langle S, Y \times S \rangle = Y \times \langle S, S \rangle$ . On dispose donc d'un foncteur :

$$S^{-1}Y \rightarrow Y$$

qui est une équivalence d'homotopie si  $S$  est un groupoïde.

**Lemme 4.19.** *Soit  $f : X \rightarrow Y$  un foncteur. On se donne une action de  $S$  groupoïde symétrique monoïdal sur  $X$  tel que, naturellement en  $A$  dans  $S$  et  $F$  dans  $X$ , on ait  $f(A + F) = fF$ . Alors  $S$  agit naturellement sur les fibres de  $f$ . On suppose de plus que :*

- $f$  est cofibré ;
- pour tout morphisme  $v$  dans  $Y$ , le foncteur changement de cobase  $v_*$  est compatible à l'action de  $S$  sur les fibres.

Alors le foncteur  $S^{-1}f : S^{-1}X \rightarrow Y$  donné par  $S^{-1}X \rightarrow S^{-1}Y \rightarrow Y$  est cofibré, et la fibre au-dessus de  $G$  s'identifie naturellement à  $S^{-1}(f^{-1}G)$ .

*Démonstration.* Montrons que  $S^{-1}f$  est cofibré. On se donne un morphisme  $(C, C + B \rightarrow B'', C + F \rightarrow F'')$  entre  $(B, F)$  et  $(B'', F'')$ , et une factorisation  $v \circ u$  de  $w : fF \rightarrow fF''$  associé. On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (C, C+B \rightarrow B'', C+F \rightarrow F'') & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 (B, F) & \xrightarrow{(0, 0+B \rightarrow B, 0+F \rightarrow u_*F)} & (B, u_*F) & \xrightarrow{\exists!} & (B'', F'') \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 fF & \xrightarrow{u} & G' & \xrightarrow{v} & fF'' \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 & & w & & 
 \end{array}$$

Il reste à justifier l'existence et l'unicité de la flèche en pointillés. Pour l'existence il suffit de choisir :

$$(C, C + B \rightarrow B'', C + u_*F \simeq u_*(C + F) \rightarrow F'')$$

Pour l'unicité, on suppose que  $(C', C' + B \rightarrow B'', C' + u_*F \rightarrow F'')$  convient également. Alors il existe un isomorphisme  $\eta : C' \simeq C$  qui fasse commuter le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 C + F & \xrightarrow{\eta + F} & C' + F \\
 & \searrow \quad \swarrow & \\
 & F'' & 
 \end{array}$$

Alors, on peut appliquer l'adjonction de  $u_*$ . Comme  $u_*$  est compatible à l'action de  $f$ , on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 C + u_*F & \xrightarrow{\sim} & C' + u_*F \\
 \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\
 u_*(C + F) & \xrightarrow{\sim} & u_*(C' + F) \\
 & \searrow \quad \swarrow & \\
 & F'' & 
 \end{array}$$

On en déduit que  $(C', C' + B \rightarrow B'', C' + u_* F \rightarrow F'')$  est le même morphisme que  $(C, C + B \rightarrow B'', C + u_* F \rightarrow F'')$ .

L'identification des fibres est immédiate.  $\square$

Dans la suite de cette sous-section, nous fixons  $S$  un groupoïde symétrique monoïdal agissant sur une catégorie  $X$ , tel que :

- (1) toutes les flèches de  $X$  sont des monomorphismes ;
- (2) pour tout  $F$  dans  $X$ , le foncteur  $S \rightarrow X$ ,  $B \mapsto B + F$  est fidèle ;
- (3) les translations  $A + (-) : S \rightarrow S$  sont fidèles.

Alors, on peut en déduire, par une preuve similaire à celle du lemme 4.14, que la projection sur le second facteur :

$$q : S^{-1}X \rightarrow \langle S, X \rangle$$

est cofibrée. De plus, la fibre en  $F$  s'identifie naturellement à  $S$  par  $B \mapsto (B, F)$ , et via ces identifications, le changement de cobase par  $(A, A + F \rightarrow F')$  est la translation par  $A$ .

Nous faisons agir  $S$  sur  $S^{-1}X$  par la première coordonnée, et nous notons  $S^{-1}S^{-1}X$  la localisation associée. Cette action est, à homotopie près, l'inverse de l'action canonique (ie. sur la deuxième coordonnée). Ainsi, par le théorème 4.15, le morphisme naturel :

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}X & \rightarrow & S^{-1}S^{-1}X \\ (B, F) & \mapsto & (0, (B, F)) \end{array}$$

est une équivalence d'homotopie.

Maintenant, le lemme 4.19 s'applique à  $q$ . Ainsi, le foncteur :

$$S^{-1}S^{-1}X \longrightarrow \langle S, X \rangle$$

est fibré, les fibres s'identifient à  $S^{-1}S$ , et les changements de cobase aux translations. Or, ces translations sont des équivalences d'homotopie. Donc, par le théorème B 2.31, pour tout  $F$  dans  $X$ , le diagramme commutatif suivant est homotopiquement cartésien :

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}S \xrightarrow{(A, B) \mapsto (A, (B, F))} S^{-1}S^{-1}X \\ \text{pr}_1 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ \langle S, S \rangle \xrightarrow{A \mapsto F} \langle S, X \rangle \end{array}$$

Considérons maintenant le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}S \xrightarrow{(A, B) \mapsto (A, B + F)} S^{-1}X \\ s_W \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ S^{-1}S \longrightarrow S^{-1}S^{-1}X \end{array}$$

où :

$$s_W : (A, B) \mapsto (B, A)$$

et les  $\sim$  désignent des équivalences d'homotopie. Ce carré commute à homotopie près, comme le montrent les 2 transformations naturelles suivantes :

$$(0, (A, B + F)) \rightarrow (B, (B + A, B + F)) \leftarrow (B, (A, F))$$

Donc, si  $\langle S, X \rangle$  est contractile,  $S^{-1}S \rightarrow S^{-1}S^{-1}X$  est une équivalence d'homotopie, et donc  $S^{-1}S \rightarrow S^{-1}X$  également. Nous avons démontré le théorème suivant.

**Théorème 4.20.** *Soit  $S$  un groupoïde symétrique monoïdal agissant sur une catégorie  $X$  tels que :*

- (1) *toutes les flèches de  $X$  sont des monomorphismes ;*
- (2) *pour tout  $F$  dans  $X$ , le foncteur  $S \rightarrow X$ ,  $B \mapsto B + F$  est fidèle ;*
- (3) *les translations  $A + (-) : S \rightarrow S$  sont fidèles ;*
- (4) *la catégorie  $\langle S, X \rangle$  est contractile.*

*Alors pour tout  $F$  objet de  $X$ , le foncteur :*

$$\begin{aligned} S^{-1}S &\rightarrow S^{-1}X \\ (A, B) &\mapsto (A, B + F) \end{aligned}$$

*est une équivalence d'homotopie.*

**4.4. Construction  $S^{-1}S$  de la  $K$ -théorie.** Nous allons ici démontrer un premier pas important vers la démonstration de  $+$  =  $Q$ . Nous allons montrer que pour  $A$  un anneau,  $\mathrm{GL}(A)^+$  peut se réaliser comme un  $S^{-1}S$  pour un certain groupoïde monoïdal symétrique  $S$ .

**Exemple 4.21.** Soit  $P$  une catégorie exacte où toutes les suites exactes soient scindées. On pose  $S := \mathrm{Isos}(P)$  la catégorie des isomorphismes de  $P$ . La somme directe  $\oplus$  fait de  $S$  un groupoïdes monoïdal symétrique. Nous avons alors une structure de  $H$ -espace sur  $S^{-1}S$ , donnée par le foncteur :

$$\begin{aligned} S^{-1}S \times S^{-1}S &\rightarrow S^{-1}S \\ ((A, B), (C, D)) &\mapsto (A \oplus C, B \oplus D) \end{aligned}$$

*Remarque 4.22.* Ici, un  $H$ -espace désigne un ensemble simplicial pointé  $(X, e)$  muni d'une application :

$$\mu : X \times X \longrightarrow X$$

telle que l'on ai les homotopies pointées suivantes :

$$\mu(-, e) \simeq \mathrm{id}_X \text{ rel } e \quad \mu(e, -) \simeq \mathrm{id}_X \text{ rel } e$$

Dans le cas de  $S^{-1}S$  ci-dessus, il faut choisir  $\oplus$  tel que  $0 \oplus 0 = 0$ . C'est toujours possible car  $0 \oplus 0 \simeq 0$ .

Nous utiliserons plus loin un résultat classique : un  $H$ -espace est un espace simple. On peut résumer la démonstration de ce fait ainsi. Soit  $(X, e)$  un  $H$ -espace,  $\gamma : (\Delta^1, \partial\Delta^1) \rightarrow (X, e)$ , et  $\sigma : (\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow (X, e)$ . Alors on remarque que  $\gamma \cdot \sigma$  est homotope à  $\mu(\gamma, \sigma) \circ (d^0 \times \mathrm{id}_{\Delta^n})$ . Or ce dernier simplexe est  $\mu(e, \sigma)$  qui est homotope à  $\sigma$ .

Dans la suite de cette sous-section, nous fixons un anneau  $A$ , et nous posons  $S := \mathrm{Isos}(\mathrm{P}(A))$ . Pour rappel,  $\mathrm{P}(A)$  est la catégorie exacte des  $A$ -modules projectifs de type fini.

**Lemme 4.23.** *On a une identification compatible à l'action de  $\pi_0(S)$  :*

$$\begin{aligned} \pi_0(S^{-1}S) &\simeq K_0(A) \\ (M, N) &\mapsto [N] - [M] \end{aligned}$$

*Démonstration.* L'ensemble  $\pi_0(S^{-1}S)$  est un monoïde via  $\oplus$ . C'est même un groupe car  $s_W : (A, B) \rightarrow (B, A)$  est un inverse à homotopie près. Les seules relations sur  $K_0(A)$  sont les  $[U] + [V] = [U \oplus V]$ . On peut donc définir un inverse par  $[N] \mapsto (0, N)$ .  $\square$

Nous noterons  $(S^{-1}S)_0$  la composante connexe de 0. On a un isomorphisme  $S^{-1}S \simeq K_0(A) \times (S^{-1}S)_0$ .

On note  $S_n$  la composante connexe de  $A^n$  dans  $S_n$ . C'est un groupoïde équivalent à  $\mathrm{GL}_n(A)$ .

**Définition 4.24.** On définit une catégorie  $L$  dont les :

- objets sont les couples  $(n, N)$  avec  $n \geq 0$  et  $N$  dans  $S_n$  ;
- morphismes de  $(n, N)$  dans  $(n+m, M)$  sont les isomorphismes  $A^m \oplus N \simeq M$ .

On notera  $L_n$  la sous-catégorie pleine de  $L$  des  $(M, m)$  pour  $m \leq n$ .

Comme le montre la proposition suivante,  $L$  est un "alias" de  $\mathrm{GL}(A)$ .

**Proposition 4.25.** *Pour chaque  $n \geq 0$ , on se donne une équivalence  $\eta_n : S_n \rightarrow \mathrm{GL}_n(A)$ , telles que ces équivalences soient compatibles aux foncteurs :*

$$\begin{array}{ccc} S_n & \rightarrow & S_{n+m} \\ M & \mapsto & A^m \oplus M \end{array}$$

On définit alors un foncteur  $F$  par :

$$\begin{array}{ccc} L & \rightarrow & \mathrm{GL}(A) \\ (n, N) & \mapsto & * \\ \alpha : A^m \oplus N \simeq M & \mapsto & \eta_{n+m}(M) \circ \alpha \circ \eta_{n+m}(A^m \oplus N)^{-1} \end{array}$$

Le foncteur  $F$  est bien défini et induit une équivalence d'homotopie.

*Démonstration.* Le foncteur est bien défini par la compatibilité entre les  $\eta_n$ . Par le théorème A 2.25, il suffit de montrer que  $F \downarrow *$  est contractile. Pour cela, il suffit de montrer que  $F \downarrow *$  est filtrante. Or, on remarque que les  $\mathrm{Hom}_{F \downarrow *}(x, y)$  sont soit  $\{*\}$ , soit  $\emptyset$ , et que tout objet  $(N, u)$  admet un morphisme dans un  $(R^m, \mathrm{id})$  pour  $m$  assez grand. Donc la catégorie  $F \downarrow *$  est filtrante.  $\square$

Nous allons maintenant faire le lien entre  $L$  et  $S^{-1}S$ .

**Théorème 4.26.** *Soit  $\psi$  le foncteur :*

$$\begin{array}{ccc} L & \rightarrow & (S^{-1}S)_0 \\ (n, B) & \mapsto & (R^n, B) \\ \alpha : R^m \oplus N \simeq N & \mapsto & (R^m, R^m \oplus R^n = R^{m+n}, \alpha : R^m \oplus N \simeq M) \end{array}$$

Alors  $\psi$  est un isomorphisme en homologie.

*Remarque 4.27.* On remarque que les inclusions  $S_n \rightarrow L_n$  ont des adjoints à gauche, ce sont donc des équivalences d'homotopie. En particulier, si on note  $i_n$  le foncteur :

$$\begin{array}{ccc} S_n & \rightarrow & S_{n+1} \\ M & \mapsto & A \oplus M \end{array}$$

On en déduit un diagramme  $\mathbb{N} \rightarrow \mathrm{Cat}, n \mapsto S_n$ , lequel induit un isomorphisme :

$$\mathrm{colim}_{\mathbb{N}} H_*(S_n) \simeq H_*(L)$$

*Démonstration du théorème.* Il s'agit, par la remarque ci-dessus, de montrer que le morphisme induit :

$$\operatorname{colim}_{\mathbb{N}} H_*(S_n) \longrightarrow H_*((S^{-1}S)_0)$$

est un isomorphisme. On note  $e$  la classe de  $A$  dans  $\pi_0(S)$ . Comme  $\langle e \rangle$  est cofinal dans le monoïde  $\pi_0(S)$ , le théorème 4.16 montre que  $S \rightarrow S^{-1}S$  induit un isomorphismes :

$$H_*(S)_e \simeq H_*(S^{-1}S)$$

Le morphisme  $H_*(S_n) \rightarrow H_*((S^{-1}S)_0)$  considéré plus haut se décompose en :

$$H_*(S_n) \longrightarrow H_*((S^{-1}S)_n) \xrightarrow{1/e^n} H_*((S^{-1}S)_0)$$

où  $(S^{-1}S)_n$  désigne la composante connexe de  $A^n$  et la première flèche est induite par l'inclusion naturelle.

Soit  $(M, N)$  un objet de  $(S^{-1}S)_0$ . Quitte à appliquer un foncteur  $(U, V) \mapsto (P \oplus U, P \oplus V)$ , qui est homotope à l'identité, on peut remplacer  $(M, N)$  par un objet de la forme  $(A^n, N')$ . Maintenant, il existe  $k \geq 0$  tel que  $A^k \oplus N' \simeq A^{n+k}$ . Ainsi, dans  $H_0(S^{-1}S)$ ,  $(M, N)$  est de la forme  $[x]/e^k$ , pour  $[x]$  dans  $H_0(S_k)$ , ie.  $(M, N)$  est dans l'image d'un  $S_k$ . On peut appliquer le même raisonnement à des sommes de simplexes dans  $H_p((S^{-1}S)_0)$ , en redressant les morphismes sur la première coordonnée.

Donc le morphisme :

$$\operatorname{colim}_{\mathbb{N}} H_*(S_n) \longrightarrow H_*((S^{-1}S)_0)$$

est surjectif.

Soit maintenant  $[x]/e^k$  dans le noyau de  $H_p(S_k) \rightarrow H_p((S^{-1}S)_0)$ . Alors, comme  $H_*(S)_e \simeq H_*(S^{-1}S)$ , il existe  $n \geq 0$  tel que  $e^n \cdot [x] = 0$ . Donc  $[x] = 0$  dans  $H_p(S_{k+n})$ .

Donc le morphisme :

$$\operatorname{colim}_{\mathbb{N}} H_*(S_n) \longrightarrow H_*((S^{-1}S)_0)$$

est injectif. □

**Théorème 4.28.** *On a une équivalence d'homotopie  $\operatorname{GL}(A)^+ \simeq (S^{-1}S)_0$ .*

*Démonstration.* On peut remplacer  $\operatorname{GL}(A)$  par  $L$ , qui lui est homotope. Or, on a construit  $\psi : L \rightarrow (S^{-1}S)_0$  tel que :

- $\psi$  est un isomorphisme en homologie sur  $\mathbb{Z}$ ;
- $(S^{-1}S)_0$  est un espace simple.

Ainsi, par le lemme 3.9 et la proposition 3.14,  $\psi$  est une construction  $+$  pour  $E(A)$ . □

**4.5. Lien entre la construction  $Q$  et  $S^{-1}S$ .** Dans cette sous-section, on se place dans le cadre de l'exemple 4.21 : on fixe une catégorie exacte  $P$  où toutes les suites exactes sont scindées, et on pose  $S := \operatorname{Isos}(P)$ .

**Définition 4.29.** Pour  $C$  dans  $P$ , on note  $E_C$  la catégorie dont les :

- objets sont les suites exactes  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  de  $P$  ( $C$  est fixé) ;
- les morphismes de  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  dans  $0 \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow 0$  sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \parallel \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C \longrightarrow 0
\end{array}$$

où les morphismes  $\sim$  sont des isomorphismes.

On remarque que :

$$\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & E_0 \\
A & \mapsto & 0 \rightarrow A \rightarrow A \rightarrow 0 \rightarrow 0
\end{array}$$

est une équivalence de catégorie. Dans la suite on identifiera parfois  $E_0$  à  $S$

**Définition 4.30.** On définit la catégorie  $E$  dont les :

- objets sont les suites exactes  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  de  $P$  ( $C$  n'est pas fixé) ;
- les morphismes de  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  dans  $0 \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow 0$  sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\
& & \uparrow & & \parallel & & \uparrow \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C_1 \longrightarrow 0 \\
& & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0
\end{array}$$

à isomorphisme près.

*Remarque 4.31.* On dispose donc d'un foncteur :

$$\begin{array}{rcl}
E & \rightarrow & QP \\
0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 & \mapsto & C
\end{array}$$

Alors  $E_C$  est la fibre de  $E \rightarrow QP$  au-dessus de  $C$ .

La définition suivante éclaire un peu la catégorie  $E$ .

**Définition 4.32.** Soit  $X$  une catégorie. On définit  $\text{Sub}(X)$  comme la catégorie dont les objets sont les morphismes de  $X$ , et les morphismes de  $f$  dans  $g$  sont les paires de morphismes  $h, k$  dans  $X$  tels que  $g = hfk$ .

La catégorie  $E$  est alors équivalente à la catégorie  $\text{Sub}(X)$ , où  $X$  est la sous-catégorie des monomorphismes de  $P$ . Le foncteur  $E \rightarrow QP$  devient alors :

$$\text{coker} : \text{Sub}(X) \rightarrow QP$$

Nous allons maintenant montrer que  $E \rightarrow QP$  est fibré et que tous les morphismes sont cartésiens. Pour cela nous utilisons le lemme suivant.

**Lemme 4.33.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un foncteur tel que :

- (1) pour tout  $u : y \rightarrow y'$  dans  $Y$  et  $x$  dans  $X$  tel que  $fx = y$ , il existe  $a : x \rightarrow x'$  dans  $X$  tel que  $f(a) = u$  ;
- (2) pour tout  $a : x \rightarrow x'$  et  $b : x \rightarrow x'$  morphismes dans  $X$  tels que  $f(a) = f(b)$ , il existe un unique isomorphisme  $\eta$  tel que  $b = \eta a$  et  $f(\eta)$  soit une identité.

Alors  $f$  est fibré et tous les morphismes de  $X$  sont cartésiens.



*Démonstration.* On se donne un morphisme  $w$  dans  $Y$  se factorisant en  $w = vu$  et  $a$  un morphisme de  $X$  tel que  $f(a) = w$ . On a alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a & & & \\
 x_1 & \overset{\sim}{\dashrightarrow} & x_2 & \dashrightarrow & x_3 & \overset{\sim}{\dashrightarrow} & x_3 \\
 \downarrow & \exists b & \downarrow & \exists c & \downarrow & \exists \eta & \downarrow \\
 y_1 & \xrightarrow{u} & y_2 & \xrightarrow{v} & y_3 & \xrightarrow{w} & y_3 \\
 & & & w & & & 
 \end{array}$$

L'existence de  $b$  et de  $c$  est garantie par (1), l'existence de  $\eta$  par (2). L'unicité de  $\eta c$  est garantie par l'unicité dans (2). Tous les morphismes sont cartésiens car l'on peut choisir  $b$  quelconque.  $\square$

Nous allons maintenant appliquer le lemme à  $E \rightarrow QP$ . Le point (1) est facile : il suffit de traiter le cas d'une injection et le cas d'une surjection, tous deux faciles. Montrons (2) dans le cas d'une surjection  $C \leftarrow C'$ . Dans ce cas, les morphismes de  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  dans  $0 \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C' \rightarrow 0$  sont juste les isomorphismes  $B \simeq B'$  compatibles à  $C \leftarrow C'$ , et (2) est vérifié.

Maintenant, si on considère une injection  $C \rightarrow C'$ . Les morphismes possibles sont cette fois définis par le choix d'un morphisme compatible  $B \rightarrow B'$ . Or tous les tels morphismes  $B' \rightarrow B$  sont des monomorphismes et ont la même image, donc (2) est vérifié.

Dans le cas général, on considère  $C \rightarrow C_1 \leftarrow C'$ . On déduit alors (2) des deux cas particuliers (ce n'est pas complètement immédiat, il faut écrire le diagramme).

**Définition 4.34.** Nous munissons  $E$  d'une action de  $S$  donnée par :

$$A' + (0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0) := 0 \rightarrow A' \oplus A \rightarrow A' \oplus B \rightarrow C \rightarrow 0$$

Alors, d'après le dual du lemme 4.19, le foncteur :

$$S^{-1}E \rightarrow QP$$

est fibré et la fibre au-dessus de  $C$  s'identifie à  $S^{-1}E_C$ .

**Théorème 4.35.** Pour tout  $C$  dans  $P$ ,  $\langle S, E_C \rangle$  est contractile.

*Démonstration.* (i)  $\langle S, E_C \rangle$  est connexe.

On pose, pour  $F_i = 0 \rightarrow A_i \rightarrow B_i \rightarrow C \rightarrow 0$  :

$$F_1 \star F_2 := (0 \rightarrow A_1 \oplus A_2 \rightarrow B_1 \times_C B_2 \rightarrow C \rightarrow 0)$$

Nous avons ainsi défini un foncteur :

$$\star : \langle S, E_C \rangle \times \langle S, E_C \rangle \longrightarrow \langle S, E_C \rangle$$

Maintenant, les projections  $F_1 \star F_2 \rightarrow F_i$  sont scindées. On a donc des isomorphismes  $A_1 + F_2 \simeq F_1 \star F_2$  et  $A_2 + F_1 \simeq F_1 \star F_2$ . Nous venons de connecter  $F_1$  et  $F_2$ .

(ii)  $\langle S, E_C \rangle$  est un  $H$ -espace et admet un inverse homotopique.

Le produit est donné par  $\star$ . L'élément  $0 \rightarrow 0 \rightarrow C \rightarrow C \rightarrow 0$  est neutre pour  $\star$ . Pour l'inverse, on montre que tout  $H$ -espace connexe  $M$  admet un inverse homotopique. Considérons le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
M & \xrightarrow{x \mapsto (x,e)} & M \times M & \xrightarrow{\text{pr}_2} & M \\
\parallel & & \downarrow f & & \parallel \\
M & \xrightarrow{x \mapsto (x,e)} & M \times M & \xrightarrow{\text{pr}_2} & M
\end{array}$$

$(x,y)$  above the first  $\downarrow f$ ,  $(xy,x)$  above the second  $\downarrow f$ .

Alors les lignes sont des fibrations. Donc par la suite exacte longue,  $f$  est une équivalence d'homotopie et admet un inverse homotopique  $h$  (quitte à remplacer  $M$  par un complexe de Kan). L'inverse est donné par  $x \mapsto \text{pr}_1(h(e, x))$ .

(iii) Le morphisme  $x \mapsto x \star x$  est homotope à l'identité.

En effet, on dispose d'une transformation naturelle  $F \rightarrow F \star F$  induite par  $F \oplus F \simeq F \star F$ .

(iv)  $\langle S, E_C \rangle$  est contractile.

On considère les endomorphismes de  $\langle S, E_C \rangle$  dans  $\text{Ho}(\widehat{\Delta})$ . L'ensemble  $[\langle S, E_C \rangle, \langle S, E_C \rangle]$  est un groupe car  $\langle S, E_C \rangle$  est un  $H$ -espace admettant un inverse homotopique. Et tout élément de ce groupe est idempotent par (iii). Donc  $[\langle S, E_C \rangle, \langle S, E_C \rangle] = *$ . Donc  $\langle S, E_C \rangle$  est contractile.  $\square$

**Théorème 4.36.** *Le diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
S^{-1}S & \longrightarrow & S^{-1}E \\
\downarrow & & \downarrow \\
* & \longrightarrow & QP
\end{array}$$

est homotopiquement cartésien. La flèche  $S^{-1}S \rightarrow S^{-1}E$  est donnée par l'équivalence  $S \simeq E_0$ .

*Démonstration.* Pour appliquer le théorème B 2.31, nous allons montrer que les changements de base sont des équivalences faibles. Il suffit de le faire pour les changements de base par  $j : 0 \leftarrow C$  et  $i : 0 \rightarrow C$ .

On pose :

$$\begin{array}{lcl}
f : & E_0 & \rightarrow E_C \\
& A & \mapsto 0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus C \rightarrow C \rightarrow 0
\end{array}$$

Comme, d'après le théorème 4.35,  $\langle S, E_C \rangle$  est contractile, d'après le théorème 4.20,  $S^{-1}f$  est une équivalence d'homotopie.

Considérons le cas de  $j$ . Nous avons :

$$\begin{array}{lcl}
j^* : & E_C & \rightarrow E_0 \\
& 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 & \mapsto B
\end{array}$$

Alors on a :

$$\begin{array}{lcl}
j^* \circ S^{-1}f : & S^{-1}E_0 & \rightarrow S^{-1}E_0 \\
& (A', A) & \mapsto (A', A \oplus C)
\end{array}$$

Ce morphisme est une équivalence d'homotopie. Donc  $j^*$  également.

Considérons le cas de  $i$ . Nous avons :

$$\begin{array}{lcl}
i^* : & E_C & \rightarrow E_0 \\
& 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 & \mapsto A
\end{array}$$

Alors on a :

$$\begin{array}{lcl}
i^* \circ S^{-1}f : & S^{-1}E_0 & \rightarrow S^{-1}E_0 \\
& (A', A) & \mapsto (A', A)
\end{array}$$

Ce morphisme est une équivalence d'homotopie. Donc  $i^*$  également.  $\square$

**Théorème 4.37.**  $S^{-1}E$  est contractile.

*Démonstration.* On note  $X$  la sous-catégorie des monomorphismes de  $P$ . On pose :

$$\begin{array}{ccc} \text{Sub}(X) & \rightarrow & X \\ f : x \rightarrow y & \mapsto & y \end{array}$$

Comme  $X$  admet un objet initial, ie. 0, ce foncteur a un adjoint à droite donné par  $x \mapsto 0 \rightarrow x$ . Donc  $\text{Sub}(X)$  est homotope à  $X$ . Or, comme  $X$  a un objet initial, il est contractile. Donc  $\text{Sub}(X)$  est contractile. Donc  $E$ , qui lui est équivalente, est également contractile.

Ainsi, l'action de  $S$  sur  $E$  est inversible. Donc, d'après le théorème 4.15,  $E \rightarrow S^{-1}E$  est une équivalence faible. Donc  $S^{-1}E$  est contractile.  $\square$

**Théorème 4.38** (Théorème  $+ = Q$ ).  $\Omega QP$  est homotope à  $K_0(A) \times \text{GL}(A)^+$ . En particulier,  $\pi_{n+1}(QP) \simeq \pi_n(\text{GL}(A)^+)$ , et les construction  $+$  et  $Q$  de la  $K$ -théorie coïncident. Ici,  $\Omega$  désigne l'espace des lacets.

*Démonstration.* D'après le théorème 4.28, il suffit de montrer que  $\Omega QP$  est homotope à  $S^{-1}S$ . Or, d'après le théorème 4.36 et le théorème 4.37,  $S^{-1}S$  est la limite homotopique de  $* \rightrightarrows QP$ . Or  $\Omega QP$  est aussi une limite homotopique de  $* \rightrightarrows QP$ .  $\square$

## 5. PROPRIÉTÉS DE LA $K$ -THÉORIE SUPÉRIEURE

### ANNEXE A. CATÉGORIES MODÈLES

**A.1. Argument du petit objet, notations.** Nous ne démontrons pas ici en détail l'argument du petit objet, voir [GJ09, Chp.1] pour cela. La raison d'être de cette sous-section est de fixer des notations.

Soit  $C$  une catégorie cocomplète et  $\mathcal{J} = \{u_i : A_i \rightarrow B_i \mid i \in I\}$  un ensemble, dans  $\Omega$ , de morphismes dans  $C$  tels que chaque  $A_i$  soit  $\mathbb{N}$ -petit. Pour rappel,  $X$  est  $\mathbb{N}$ -petit si pour tout foncteur  $F : \mathbb{N} \rightarrow C$ , on a que  $\text{Hom}_C(\text{colim}_{\mathbb{N}} F, C) \rightarrow \text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_C(F(n), C)$  est une bijection.

On note  $\mathcal{J}\text{-Cell}$  le plus petit ensemble de morphismes contenant  $\mathcal{J}$  et stable par coproduits, colimites, et poussés en avant. On note  $\mathcal{J}^\square$  l'ensemble des morphismes qui ont la propriété de relèvement à droite par rapport à tous les morphismes de  $\mathcal{J}$ .

Soit  $h : X \rightarrow Y$  un morphisme dans  $C$ . Nous noterons  $G^1(\mathcal{J}, h)$  la colimite :

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_D A_{i_D} & \xrightarrow{f_D} & X \\ \downarrow u_{i_D} & & \downarrow h_1 \\ \bigsqcup_D B_{i_D} & \longrightarrow & G^1(\mathcal{J}, h) \end{array}$$

où l'union porte sur l'ensemble des diagrammes commutatifs  $D$  de la forme :

$$\begin{array}{ccc}
A_{i_D} & \xrightarrow{f_D} & X \\
\downarrow u_{i_D} & & \downarrow h \\
B_{i_D} & \xrightarrow{g_D} & Y
\end{array}$$

Les  $g_D$  induisent un morphisme  $p_1 : G^1(\mathcal{J}, h) \rightarrow Y$ .

On pose alors successivement :

$$G^{n+1}(\mathcal{J}, h) = G^1(\mathcal{J}, p_n);$$

$$h_{n+1} : X \rightarrow G^{n+1}(\mathcal{J}, h);$$

$$p_{n+1} : G^{n+1}(\mathcal{J}, h) \rightarrow Y.$$

On note :

$$G^\infty(\mathcal{J}, h) := \text{colim}_n G^n(\mathcal{J}, h);$$

$$h_\infty : X \rightarrow G^\infty(\mathcal{J}, h);$$

$$p_\infty : G^\infty(\mathcal{J}, h) \rightarrow Y.$$

On a alors  $h = p_\infty \circ h_\infty$  avec  $h_\infty$  dans  $\mathcal{J} - \text{Cell}$  et  $p_\infty$  dans  $\mathcal{J}^\square$ .

Chaque  $G^n(\mathcal{J}, -)$  et  $G^\infty(\mathcal{J}, -)$  sont des foncteurs  $C^{0 \rightarrow 1} \rightarrow C$  et les  $h_\infty$  et  $p_\infty$  s'assemblent en des transformations naturelles ( $p_0 : C^{0 \rightarrow 1} \rightarrow C$ )  $\Rightarrow$   $G^\infty(\mathcal{J}, -)$  et  $G^\infty(\mathcal{J}, -) \Rightarrow (p_1 : C^{0 \rightarrow 1} \rightarrow C)$ .

**A.2. Carrés homotopiquement cartésiens d'ensembles simpliciaux.** Le but de cette sous-section est d'introduire la notion de carré homotopiquement cartésien. Seront admis les notions d'adjonction de Quillen, voir [Idr21, 1.6].

Nous commençons cependant par des remarques valables dans des catégories modèles générales. Puis nous traiterons le cas particulier de la catégorie des ensembles simpliciaux.

**Proposition A.1** (structure de Reedy). *Soit  $C$  une catégorie modèle. On note  $I$  la catégorie à 3 objets et 2 morphismes :*

$$\begin{array}{ccc}
& & 1 \\
& & \downarrow \\
2 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Alors il existe une structure de modèle sur  $C^I$  telle que :

(W) les équivalences faibles se vérifient objet par objet ;

(C) les équivalences faibles se vérifient objet par objet ;

(F) un morphisme  $X \rightarrow Y$  est une fibration si et seulement si  $X(0) \rightarrow Y(0)$ ,  $X(1) \rightarrow X(0) \times_{Y(0)} Y(1)$  et  $X(2) \rightarrow X(0) \times_{Y(0)} Y(2)$  sont des fibrations dans  $C$ .

On appelle cette structure la structure de modèle de Reedy.

La démonstration est omise, car assez facile. La définition est faite pour que ça marche. On a immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire A.2.** *Soit  $C$  une catégorie modèle et  $I$  la catégorie définie comme ci-dessus. Alors la structure de modèle de Reedy sur  $C^I$  induit une adjonction de Quillen :*

$$\text{cst}_I : C \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \perp \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \quad C^I : \lim_I$$

Et donc une adjonction entre les catégories homotopiques :

$$\mathbb{L} \text{cst}_I : C \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \perp \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \quad \text{Ho}(C^I) : \mathbb{R} \lim_I$$

On remarque que si  $A$  est un objet de  $C$ , et  $QA \rightarrow A$  un remplacement cofibrant, alors  $\text{cst}_I QA \rightarrow \text{cst}_I A$  est une équivalence. Or  $\mathbb{L} \text{cst}_I A \simeq \text{cst}_I QA$ . Donc  $\mathbb{L} \text{cst}_I(A) \simeq \text{cst}_I A$ . Ceci justifie la définition suivante.

**Définition A.3.** Soit  $C$  une catégorie modèle et soit :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_2 & \longrightarrow & Y_0 \end{array}$$

un carré commutatif dans  $C$ . On dit que ce carré est homotopiquement cartésien si le morphisme dans  $\text{Ho}(C)$  :

$$X \rightarrow \mathbb{R} \lim_I Y$$

adjoint à  $\mathbb{L} \text{cst}_I(X) = \text{cst}_I(X) \rightarrow Y$ , est un isomorphisme (dans  $\text{Ho}(C)$ ).

**Proposition A.4.** Soit  $C$  une catégorie modèle et soit :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y_1 \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \\ Y_2 & \longrightarrow & Y_0 \end{array}$$

un carré commutatif cartésien dans  $C$  avec  $Y_0$  fibrant, et  $Y_1 \twoheadrightarrow Y_0$ ,  $Y_2 \twoheadrightarrow Y_0$  des cofibrations. Alors ce carré est homotopiquement cartésien.

*Démonstration.* Dans ce cas, le diagramme  $Y$  est fibrant dans  $C^I$ , et donc  $\lim_I Y \simeq \mathbb{R} \lim_I Y$ .  $\square$

Nous allons maintenant nous intéresser à des catégories modèles particulières, dites propres à droite.

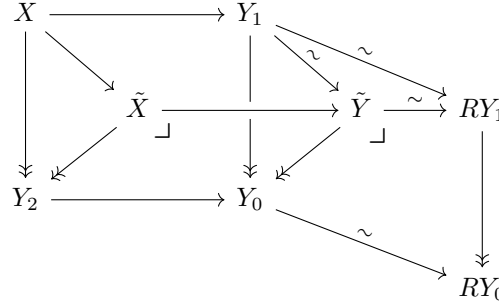
**Définition A.5.** Soit  $C$  une catégorie modèle. On dit que  $C$  est propre à droite si le tiré en arrière d'une équivalence le long d'une fibration est une équivalence.

**Proposition A.6.** Soit  $C$  une catégorie modèle propre à droite. Alors tout carré commutatifs cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y_1 \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \\ Y_2 & \longrightarrow & Y_0 \end{array}$$

avec  $Y_1 \rightarrow Y_0$  fibrant, est homotopiquement cartésien.

*Démonstration.* On peut choisir un remplacement fibrant  $RY_0$  de  $Y_0$  puis factoriser  $Y_1 \twoheadrightarrow Y_0 \xrightarrow{\sim} RY_0$  en  $Y_1 \xrightarrow{\sim} RY_1 \twoheadrightarrow RY_0$ . On a alors le diagramme suivant :



où  $\tilde{Y}$  et  $\tilde{X}$  complètent les carrés cartésiens notés par  $\lrcorner$ . Le morphisme  $\tilde{Y} \rightarrow RY_1$  est acyclique car  $C$  est propre à droite. Or, dans la catégorie modèle restreinte  $C \downarrow Y_0$ , par le lemme de Brown ([Idr21, 1.6.6]),  $Y_2 \times_{Y_0} -$  préserve les équivalences faibles entre objets fibrants. Donc, comme  $Y_1 \rightarrow \tilde{Y}$  est une telle équivalence,  $X \rightarrow \tilde{X}$  aussi.

Nous nous sommes donc ramenés au cas où  $X = \tilde{X}$ , c'est à dire au cas où le carré :

$$\begin{array}{ccc} Y_1 & \longrightarrow & RY_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_0 & \longrightarrow & RY_0 \end{array}$$

est cartésien.

Mais dans ce cas, on a le diagramme commutatif à carrés cartésiens suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \twoheadrightarrow & Y_2 \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \wr \\ X' & \twoheadrightarrow & RY_2 \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \\ RY_1 & \twoheadrightarrow & RY_0 \end{array}$$

où  $Y_2 \xrightarrow{\sim} RY_2 \twoheadrightarrow RY_0$  est une factorisation de  $Y_2 \rightarrow Y_0 \xrightarrow{\sim} RY_0$ . Comme les flèches horizontales sont des fibrations et  $Y_2 \rightarrow RY_2$  est acyclique,  $X \rightarrow X'$  l'est aussi. Or, par la proposition A.4, le carré du bas est homotopiquement cartésien, et comme les diagrammes  $Y$  et  $RY$  sont équivalents dans  $C^I$ ,  $X$  est la limite homotopique de  $Y$ .  $\square$

**Proposition A.7.** *Soit  $C$  une catégorie modèles et soit :*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y_1 \\ \downarrow \lrcorner & & \downarrow \\ Y_2 & \xrightarrow{\sim} & Y_0 \\ & \searrow & \swarrow \\ & * & \end{array}$$

*un carré cartésien dans  $C$  avec  $Y_1 \rightarrow Y_0$  une fibration,  $Y_2 \rightarrow Y_0$  acyclique, et  $Y_0, Y_2$  fibrants.*

*Alors  $X \rightarrow Y_1$  est aussi acyclique.*

En d'autres termes, le tiré en arrière d'une équivalence entre objets fibrants le long d'une fibration est une équivalence.

*Remarque A.8.* Il existe évidemment une version duale (prendre  $C^{\text{op}}$ ) : le poussé en avant d'une équivalence entre objets cofibrants le long d'une cofibration est une équivalence.

La preuve de cette proposition est omise, voir [Hir09, 13.1.2].

**Proposition A.9.** *La catégorie des ensembles simpliciaux  $\widehat{\Delta}$  est propre à droite.*

*Démonstration.* La catégorie  $\text{Top}$  des espaces topologiques avec la structure de Quillen est propre à droite. En effet, comme tous les objets de  $\text{Top}$  sont fibrants, c'est une conséquence de la proposition A.7.

Or le foncteur réalisation  $|\bullet| : \widehat{\Delta} \rightarrow \text{Top}$  préserve les limites finies et les fibrations, et reflète les équivalences (voir [GJ09, Chp.1]). Donc on en déduit que  $\widehat{\Delta}$  est également propre à droite.  $\square$

Voici une caractérisation plus concrète des diagrammes homotopiquement cartésiens dans  $\widehat{\Delta}$ .

**Proposition A.10.** *On se donne un carré commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_2 & \longrightarrow & Y_0 \end{array}$$

Alors ce carré est homotopiquement cartésien si et seulement si le morphisme induit :

$$X \rightarrow Y_1 \times_{Y_0} Y_0^{\Delta^1} \times_{Y_0} Y_2$$

est une équivalence faible.

*Démonstration.* On dispose d'une factorisation :

$$Y_1 \xrightarrow{\sim} Y_1 \times_{Y_0} Y_0^{\Delta^1} \xrightarrow{\text{ev}_1} Y_0$$

On a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ Y_1 \times_{Y_0} Y_0^{\Delta^1} \times_{Y_0} Y_2 & \longrightarrow & Y_1 \times_{Y_0} Y_0^{\Delta^1} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ Y_2 & \longrightarrow & Y_0 \end{array}$$

Le carré du bas est cartésien et homotopiquement cartésien par la proposition A.6. On note  $Y'$  l'élément de  $C^I$  associé au carré du bas. Le morphisme  $X \rightarrow Y_1 \times_{Y_0} Y_0^{\Delta^1} \times_{Y_0} Y_2$  dans  $C$  induit dans  $\text{Ho}(C^I)$  le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{L} \text{cst}_I X & \longrightarrow & \mathbb{L} \text{cst}_I Y_1 \times_{Y_0} Y_0^{\Delta^1} \times_{Y_0} Y_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{\sim} & Y' \end{array}$$

et, en passant à l'adjoint  $\mathbb{R} \lim_I$ , le diagramme commutatif dans  $\text{Ho}(C)$  :

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y_1 \times_{Y_0} Y_0^{\Delta^1} \times_{Y_0} Y_2 \\ \downarrow & & \downarrow \wr \\ \mathbb{R} \lim_I Y & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{R} \lim_I Y' \end{array}$$

On a donc bien  $X \simeq \mathbb{R} \lim_I Y$  si et seulement si  $X \simeq Y_1 \times_{Y_0} Y_0^{\Delta^1} \times_{Y_0} Y_2$ .  $\square$

**A.3. Le lemme de collage.** On se place ici dans une catégorie modèle  $C$ .

**Lemme A.11** (lemme de collage). *On se donne le diagramme suivant dans  $C$  :*

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & \xrightarrow{j_1} & B_1 & & \\ \downarrow f_A & \searrow i_1 & \downarrow & \searrow & \\ & C_1 & \xrightarrow{\quad} & D_1 & \\ & \downarrow f_C & \downarrow f_B & & \\ A_2 & \xrightarrow{j_2} & B_2 & & \\ & \searrow i_2 & \downarrow & \searrow & \\ & C_2 & \xrightarrow{\quad} & D_2 & \end{array}$$

où tous les objets sont cofibrants,  $i_1$  et  $i_2$  sont des cofibrations, les faces supérieure et inférieure sont cocartésiennes et  $f_A$ ,  $f_B$  et  $f_C$  sont acycliques.

Alors  $f_D$  est acyclique.

*Démonstration.* On factorise de façon fonctorielle  $j_1 = q_1 \circ j'_1$  et  $j_2 = q_2 \circ j'_2$  où  $j'_1$  et  $j'_2$  sont des cofibrations et  $q_1$  et  $q_2$  sont des fibrations acycliques. En coupant le cube en deux, On est alors ramené aux deux cas particuliers suivants :  $j_1$  et  $j_2$  sont acycliques ;  $j_1$  et  $j_2$  sont des cofibrations.

Le premier cas est une conséquence de la proposition A.7. Nous allons maintenant traiter le second cas. On note  $B'$  (respectivement  $D'$ ) le poussé en avant de  $j_1$  et  $f_A$  (respectivement  $C_1 \rightarrow C_2$  et  $C_1 \rightarrow D_1$ ). On a alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & \xrightarrow{j_1} & B_1 & & & & \\ \downarrow \wr & \searrow i_1 & \downarrow & \searrow & & & \\ & C_1 & \xrightarrow{\quad} & D_1 & & & \\ & \downarrow \wr & \downarrow & & & & \\ & & B' & \xrightarrow{\theta} & D' & & \\ & \swarrow & \downarrow n_B & \wr & \downarrow n_D & & \\ A_2 & \xrightarrow{j_2} & B_2 & & D_2 & & \\ & \searrow i_2 & \downarrow & \searrow & & & \\ & C_2 & \xrightarrow{\quad} & D_2 & & & \end{array}$$

Par la proposition A.7,  $B_1 \rightarrow B'$  et  $D_1 \rightarrow D'$  sont des équivalences faibles, donc  $n_B$  est acyclique. Il reste à montrer que  $n_D$  est aussi acyclique. Or  $\theta$  est le poussé



en avant de  $i_2$  le long de  $A_2 \rightarrow B'$ , c'est donc une cofibration. Comme  $n_D$  est le poussé en avant de  $n_B$  le long de  $\theta$ , par la proposition A.7,  $n_D$  est acyclique.  $\square$

## ANNEXE B. LA CORRESPONDANCE DE DOLD-KAN

Cette sous-section est consacrée à la correspondance de Dold-Kan et à certaines conséquences en homotopie. Certaines démonstrations sont omises. Des références sont données.

**Définition B.1.** On note  $\text{Ch}_+$  la catégorie des complexes de groupes abéliens concentrés en degrés positifs pour la notation homologique. On note  $\Delta\text{Ab}$  la catégorie des groupes abéliens simpliciaux, ie. des foncteurs  $\Delta \rightarrow \text{Ab}$ .

L'objet de la correspondance de Dold-Kan est d'établir une équivalence de catégories abéliennes entre  $\text{Ch}_+$  et  $\Delta\text{Ab}$ .

*Remarque B.2.* On peut également voir  $\Delta\text{Ab}$  comme la catégorie des groupes abéliens dans la catégorie des ensembles simpliciaux  $\hat{\Delta}$ .

**Proposition - définition B.3.** Soit  $A$  un objet de  $\Delta\text{Ab}$ . Le complexe normalisé  $(NA_*, \partial_*)$  de  $A$  est le complexe de chaîne de  $\text{Ch}_+$  suivant :

$$NA_n := \bigcap_{m=0}^{n-1} \ker(d_m) \mid \partial_n = (-1)^n d_n : NA_n \rightarrow NA_{n-1}$$

C'est un sous-complexe du complexe  $(CA_*, \partial_*)$  défini par :

$$CA_n := A_n; \partial_n = \sum_{m=0}^n (-1)^m d_m : CA_n \rightarrow CA_{n-1}$$

Le complexe des dégénérescences  $DA_*$  de  $A$  est le sous complexe de  $CA$  défini par :

$$DA_n := \sum_{m=0}^{n-1} s_m(A_{n-1})$$

*Démonstration.* Le calcul pour vérifier que  $CA_*$  est un complexe est classique. Vérifions que  $NA_*$  et  $DA_*$  sont des sous-complexes. Pour  $0 \leq i \leq n-2$ ,  $d_i d_n = d_{n-1} d_i$  annule  $NA_n$ . Donc  $NA_*$  est un sous-complexe. Pour  $0 \leq i \leq n-1$  :

$$\partial_n s_i = \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m d_m s_i = \sum_{m=0}^{i-1} s_{i-1} d_m + (-1)^i \text{id} + (-1)^{i+1} \text{id} + \sum_{m=i+2}^n s_i d_{m+1}$$

Donc  $\partial_n s_i(a) \in DA_{n-1}$  pour  $a \in DA_n$ .  $\square$

*Remarque B.4.* Ces constructions étant fonctorielles, on a donc construit 3 foncteurs  $N$ ,  $C$  et  $D$  de  $\Delta\text{Ab}$  dans  $\text{Ch}_+$ .

**Lemme B.5.** L'inclusion naturelle  $N \oplus D \rightarrow C$  est un isomorphisme naturel. Donc les foncteurs  $N$  et  $C/D$  coïncident. En particulier, le foncteur  $N$  est exact.

Nous admettons ici ce lemme, qui se démontre par récurrence. Pour plus de détails, voir [GJ09, III.2.1]

*Remarque B.6.* On voit ici deux façons de penser au complexe normalisé  $NA$  : la définition avec les noyaux donnée dans la définition B.3, ou le quotient  $CA/DA$ .

**Proposition - définition B.7.** Soit  $C$  un complexe de chaîne dans  $\text{Ch}_+$ . On note  $\Gamma C$  le groupe abélien simplicial défini par :

$$\Gamma C_n := \bigoplus_{\phi: [n] \twoheadrightarrow [r]} C_r$$

Pour  $\chi: [m] \rightarrow [n]$ , le morphisme  $\chi^*: \Gamma C_n \rightarrow \Gamma C_m$  est construit comme suit. Soit  $\phi: [n] \twoheadrightarrow [r]$ . Alors  $\phi \circ \chi$  se factorise uniquement en :

$$[m] \xrightarrow{\psi} [s] \xrightarrow{\mu} [r]$$

Alors  $\chi_*$  est donné sur la coordonnée en  $\phi$  par le morphisme  $C_r \xrightarrow{\mu^*} C_s \xrightarrow{\psi} \Gamma C_m$ , où  $\mu^* = 0$  sauf si  $\mu = d^r$ , auquel cas  $\mu^* = (-1)^r \partial_r$ .

*Remarque B.8.* la définition ci-dessus est plus clair si on voit  $C$  comme un ensemble pré-simplicial. Un ensemble pré-simplicial est un préfaisceau sur la catégorie  $\Delta'$  des injections  $[u] \hookrightarrow [v]$  de  $\Delta$ . La structure d'ensemble pré-simplicial est celle décrite dans la définition. La construction de  $\Gamma$  est alors basée sur celle, classique, de l'adjoint à gauche de l'oubli  $[\Delta, \text{Ab}] \rightarrow [\Delta', \text{Ab}]$ . C'est ce qui est fait dans la démonstration ci-dessous.

*Démonstration.* Au vu de la remarque ci-dessus, il suffit de montrer que si  $C$  est un ensemble pré-simplicial, alors la construction de  $\Gamma C$  est correcte. Il s'agit de vérifier la compatibilité de la construction avec les compositions dans  $\Delta$ . Soit  $\chi: [m] \rightarrow [n]$  et  $\rho: [l] \rightarrow [m]$ . Pour  $\phi: [n] \twoheadrightarrow [r]$ , on a le diagramme commutatif suivant dans  $\Delta$  :

$$\begin{array}{ccccc} [l] & \xrightarrow{\rho} & [m] & \xrightarrow{\chi} & [n] \\ \downarrow \theta & & \downarrow \psi & & \downarrow \phi \\ [l] & \xrightarrow{\nu} & [s] & \xrightarrow{\mu} & [r] \end{array}$$

On a donc que sur la coordonnée en  $\phi$ ,  $\rho^* \chi^*$  est donné par  $\nu^* \mu^*$  et  $(\chi \rho)^*$  est donné par  $(\mu \nu)^*$ . Or  $\nu^* \mu^* = (\mu \nu)^*$  car  $C$  est pré-simplicial.  $\square$

**Théorème B.9** (équivalence de Dold-Kan). Les foncteurs  $\Gamma: \text{Ch}_+ \rightarrow \Delta \text{Ab}$  et  $N: \Delta \text{Ab} \rightarrow \text{Ch}_+$  sont inverses et exactes. Ils induisent une équivalence de catégories abéliennes  $\text{Ch}_+ \simeq \Delta \text{Ab}$ , appelée équivalence de Dold-Kan.

*Démonstration.* Soit  $C$  un complexe dans  $\text{Ch}_+$ . On cherche à identifier  $(N\Gamma C)_n$  comme sous-groupe de :

$$\Gamma C_n = \bigoplus_{\phi: [n] \twoheadrightarrow [r]} C_r$$

Or, un calcul direct montre que  $C_n \subseteq (N\Gamma C)_n$  et  $\bigoplus_{[n] \twoheadrightarrow [r], r < n} C_r \subseteq (D\Gamma C)_n$ . Donc, par le lemme B.5,  $C_n = (N\Gamma C)_n$ . On a l'isomorphisme souhaité.

Soit  $A$  un groupe abélien simplicial. On a un morphisme naturel de groupes pré-simpliciaux  $NA \rightarrow A$ , et donc un morphisme naturel de groupes simpliciaux  $\Gamma NA \rightarrow A$ . Soit  $n \geq 0$ . Par récurrence, on suppose que  $(\Gamma NA)_m \rightarrow A_m$  est un isomorphisme pour  $m < n$ . Alors l'image de  $(\Gamma NA)_n \rightarrow A_n$  contient  $NA_n$  et  $DA_n$ . Donc par le lemme B.5, l'application est surjective. Maintenant, soit  $x = \sum_{\phi} a_{\phi}$  dans le noyau. Soit  $r$  maximal tel qu'il existe  $\phi: [n] \twoheadrightarrow [r]$  tel que  $a_{\phi} \neq 0$ . Soit  $\phi: [n] \twoheadrightarrow [r]$  maximal pour l'ordre lexicographique tel que  $a_{\phi} \neq 0$ . Soit  $\mu: [r] \hookrightarrow [n]$  une section de  $\phi$ , minimale pour l'ordre lexicographique. Alors  $\psi \circ \mu$  n'est pas injectif

pour tout  $\psi : [n] \rightarrow [r]$  différent de  $\phi$  tel que  $a_\psi \neq 0$ . Donc tous les termes de  $\mu^*x$  sont de degré  $\leq r$  et le seul terme de degré  $r$  est  $\mu^*a_\phi = a_\phi \in NA_r \xrightarrow{\text{id}_{[r]}} (\Gamma NA)_r$ . Or,  $NA_r \hookrightarrow A_r$ . Donc  $a_\phi = 0$ . On a donc nécessairement  $x = 0$ . Donc  $(\Gamma NA)_n \rightarrow A_n$  est un isomorphisme.  $\square$

Nous allons maintenant nous intéresser à une structure de catégorie modèle sur  $\Delta\text{Ab}$ , et la structure correspondante dans  $\text{Ch}_+$ . Nous reprenons [GJ09, III.2]. Introduisons d'abord les équivalences faibles.

**Lemme B.10.** *Soit  $A$  un groupe abélien simplicial. Alors  $DA$  est un complexe acyclique, ie.  $H_*(DA) = 0$ . En particulier,  $NA \hookrightarrow CA$  et  $A \rightarrow CA/DA$  sont des isomorphismes en homologie.*

Nous admettons ici le lemme, il s'agit de construire par récurrence une homotopie entre  $\text{id}_{DA}$  et 0. Une autre approche équivalente est donnée dans [GJ09, II.2.4].

**Proposition B.11.** *Soit  $n \geq 0$ . Il existe un isomorphisme naturel de groupes pour  $A$  dans  $\Delta\text{Ab}$  :*

$$\pi_n(A, 0) \simeq H_n(NA)$$

*De même, pour  $n \geq 1$ , il existe un isomorphisme naturel pour  $A \subset B$  paire dans  $\Delta\text{Ab}$  :*

$$\pi_n(B, A, 0) \simeq H_n(NB/NA)$$

*Et ces isomorphismes sont compatibles aux suites exactes longues des paires, ie. le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{n+1}(B, A, 0) & \xrightarrow{(-1)^{n+1}\partial_\pi} & \pi_n(A, 0) & \longrightarrow & \pi_n(B, 0) & \longrightarrow & \pi_n(B, A, 0) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ H_{n+1}(B/A) & \xrightarrow{\partial_H} & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(B) & \longrightarrow & H_n(B/A) \end{array}$$

*Démonstration.* On utilise ici extensivement que les éléments de  $\Delta\text{Ab}$  sont des complexes de Kan, voir [GJ09, I.3.4]. Soit  $A$  dans  $\Delta\text{Ab}$ . On remarque tout d'abord que l'addition sur  $A$  induit, par Eckmann–Hilton, la structure de groupe sur  $\pi_n(A, 0)$ . Alors, les simplexes  $\sigma \in A_n$  qui représentent les éléments de  $\pi_n(A, 0)$  sont les éléments de  $Z_n(NA)$ . Et un simplexe  $\sigma$  représente 0 si et seulement si il existe  $\tau \in NA_{n+1}$  tel que  $d_n\tau = \sigma$ . On a donc bien l'isomorphisme naturel souhaité.

Soit  $A \subseteq B$  paire dans  $\Delta\text{Ab}$ . Alors, les simplexes  $\sigma \in NB_n$  qui représentent les éléments de  $\pi_n(B, A, 0)$  sont les éléments dont l'image est dans  $Z_n(NB/NA)$ . On remarque également que les éléments  $\sigma \in A_n$  qui représentent 0 dans  $\pi_n(B, A, 0)$  sont dans  $NA_n$ . Maintenant, les éléments  $\sigma \in NB_n$  qui représentent 0 dans  $\pi_n(B, A, 0)$  sont ceux tels qu'il existe  $\tau \in B_n$  tel que  $\partial\tau = (0, \dots, 0, \sigma, \mu)$  avec  $\mu$  dans  $NA_n$ . Ceci induit l'isomorphisme souhaité entre  $\pi_n(B, A, 0)$  et  $H_n(NB/NA)$ .

Pour la suite exacte, il suffit de remarquer que si  $\sigma \in NB_{n+1}$  représente un élément de  $\pi_{n+1}(B, A, 0)$ , alors  $\partial_\pi\sigma = [d_{n+1}(\sigma)] = (-1)^{n+1}\partial_H\sigma$ .  $\square$

Introduisons maintenant la structure de modèle sur  $\Delta\text{Ab}$ .

**Proposition B.12.** *Il existe une structure de catégorie modèle sur  $\Delta\text{Ab}$  telle que :*

(W) *les équivalences faibles soient les applications qui induisent des isomorphismes sur tous les groupes d'homotopie ;*

(F) les fibrations soient les applications dont l'application sous-jacente entre ensembles simpliciaux soit une fibration de Kan.

Cette structure est cofibrement engendré par les cofibrations :

$$\mathcal{I} := \{\mathbb{Z}\partial\Delta^n \rightarrow \mathbb{Z}\Delta^n \mid n \geq 0\}$$

et les cofibrations acycliques :

$$\mathcal{J} := \{\mathbb{Z}\Lambda_k^n \rightarrow \mathbb{Z}\Delta^n \mid n \geq 1, 0 \leq k \leq n\}$$

*Démonstration.* On vérifie aisément que les morphismes de  $\mathcal{J}^\square$  sont les fibrations de Kan, et les morphismes de  $\mathcal{I}^\square$  les fibrations de Kan acycliques. On a alors immédiatement que  $\mathcal{I} \subset \square(\mathcal{J}^\square)$  et que  $\mathcal{J}^\square \cap W = \mathcal{I}^\square$ . Il reste donc à montrer que  $\mathcal{J} \subset W$ . Soit  $n \geq 1$  et  $0 \leq k \leq n$ . On dispose d'une application  $\Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow \Delta^n$  homotopie entre  $\text{id}_{\Delta^n}$  et  $n$  définie par :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \cdots & k-1 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & k+1 & \cdots & n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ n & \cdots & n & \longrightarrow & n & \longrightarrow & n & \cdots & n \end{array}$$

Si  $k \neq n$ , cette homotopie se restreint en  $\Lambda_k^n \times \Delta^1 \rightarrow \Lambda_k^n$ . On dispose également d'une homotopie entre 0 et  $\text{id}_{\Delta^n}$  donnée par :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \cdots & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \cdots & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \cdots & k-1 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & k+1 & \cdots & n \end{array}$$

Si  $k \neq 0$ , cette homotopie se restreint en  $\Lambda_k^n \times \Delta^1 \rightarrow \Lambda_k^n$ . Maintenant, en passant au foncteur groupe abélien libre, on obtient deux applications  $\mathbb{Z}\Delta^n \otimes \mathbb{Z}\Delta^1 \rightarrow \mathbb{Z}\Delta^n$  et  $\mathbb{Z}\Lambda_k^n \otimes \mathbb{Z}\Delta^1 \rightarrow \mathbb{Z}\Lambda_k^n$ . Pour conclure, il suffit de montrer que si  $X$  est un ensemble simplicial, alors on a le cône suivant dans  $\hat{\Delta}$  :

$$\mathbb{Z}X \sqcup \mathbb{Z}X \longrightarrow \mathbb{Z}X \otimes \mathbb{Z}\Delta^1 \xrightarrow[\sim]{\text{pr}_1} \mathbb{Z}X$$

En effet, on aura alors que  $\text{id}_{\mathbb{Z}\Delta^n}$  et  $\text{id}_{\mathbb{Z}\Lambda_k^n}$  sont homotopes à des applications constantes. On utilise la proposition B.11 et le lemme B.10. On omettra  $C$  dans la notation du foncteur  $C : \Delta\text{Ab} \rightarrow \text{Ch}_+$ . On se ramène alors à montrer que  $\text{pr}_1$  est un isomorphisme en homologie. Tout d'abord,  $H_*(\mathbb{Z}\Delta^1) = H_*(N\mathbb{Z}\Delta^1)$ . Or  $N\mathbb{Z}\Delta^1$  est le complexe :

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xleftarrow{(1, -1)} \mathbb{Z} \longleftarrow 0 \longleftarrow \cdots$$

Donc,  $H_*(\mathbb{Z}\Delta^1)$  est  $\mathbb{Z}$  concentré en degré 0. Or,  $\mathbb{Z}\Delta^1$  est un complexe de projectifs. Donc  $\mathbb{Z}\Delta^1 \rightarrow \mathbb{Z}$  est une résolution projective de  $\mathbb{Z}$ . Donc il existe  $u : \mathbb{Z}\Delta^1 \rightarrow \mathbb{Z}[0]$ ,  $v : \mathbb{Z}[0] \rightarrow \mathbb{Z}\Delta^1$  et des homotopies  $u \circ v \Rightarrow \text{id}_{\mathbb{Z}[0]}$  et  $v \circ u \Rightarrow \text{id}_{\mathbb{Z}\Delta^1}$ . Tout cela induit une équivalence d'homotopie entre  $\mathbb{Z}X \otimes \mathbb{Z}\Delta^1$  et  $\mathbb{Z}X$ .  $\square$

**Lemme B.13.** Soit  $f : A \rightarrow B$  une application dans  $\Delta\text{Ab}$ . Alors :

- (1) Si  $f$  est surjective, alors  $f$  est une fibration ;
- (2)  $f$  est surjective si et seulement si  $Nf : NA \rightarrow NB$  est surjective ;

- (3)  $f$  est une fibration si et seulement si  $Nf_n : NA_n \rightarrow NB_n$  est surjective pour tout  $n \geq 1$ .

*Démonstration.* (1) Soit  $u : \Delta^n \rightarrow A$  et  $v : \Delta^n \rightarrow B$ . Comme  $f$  est surjective, il existe  $w : \Delta^n \rightarrow A$  relevant  $v$ . On note  $u - \partial_k w : \Delta^n \rightarrow \ker(f)$ . Or,  $\ker(f)$  est un complexe de Kan ([GJ09, I.3.4]). Donc il existe  $s : \Delta^n \rightarrow \ker(f)$  tel que  $\partial_k s = u - \partial_k w$ . Alors  $w + s$  convient.

- (2) Ceci découle du fait que la correspondance de Dold-Kan est exacte et  $f = \Gamma Nf$ .

- (3) Pour l'implication  $(\Rightarrow)$ , on se donne, pour  $u \in NB_n$ , le carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{0} & A \\ \downarrow \wr & \nearrow \exists v & \downarrow \\ \Delta^n & \xrightarrow{u} & B \end{array}$$

Pour l'implication  $(\Leftarrow)$ , on regarde le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & \\ \theta \searrow & & f \searrow & & \\ \pi_0(A) \times_{\pi_0(B)} B & \xrightarrow{p_2} & B & & \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & & \\ \pi_0(A) & \twoheadrightarrow & \pi_0(B) & & \end{array}$$

L'application  $\pi_0(A) \rightarrow \pi_0(B)$  est une fibration (comme toute application d'un complexe de Kan dans un groupoïde). Comme le carré est cartésien,  $p_2$  est aussi une fibration. Or un calcul rapide montre que  $N\theta$  est surjective. Donc d'après (2),  $\theta$  est surjective, et c'est donc une fibration par (1). Donc  $f = p_2 \circ \theta$  est une fibration.

□

**Corollaire B.14.** *Il existe une structure de catégorie modèle sur  $\mathbf{Ch}_+$  telle que :*

- (W) les équivalences faibles soient les applications qui induisent des isomorphismes en homologie ;
- (F) les fibrations soient les applications  $f : C \rightarrow D$  telles que  $f_n : C_n \rightarrow D_n$  soit surjectif pour tout  $n \geq 1$  ;
- (C) les cofibrations soient les monomorphismes  $f : C \hookrightarrow D$  dont le conoyau  $\text{coker}(f)$  soit un complexe de  $\mathbb{Z}$ -modules projectifs.

Cette structure est celle induite par la correspondance de Dold-Kan et la structure de modèle sur  $\mathbf{\Delta Ab}$ .

*Démonstration.* Par l'équivalence de Dold-Kan, le lemme B.13 et la proposition B.11, l'existence de la structure vérifiant (W) et (F) est claire. Il s'agit donc de montrer (C).

Montrons d'abord que les cofibrations sont des monomorphismes. Soit  $f : C \rightarrow D$  une cofibration. Pour  $M$  un  $\mathbb{Z}$ -module et  $n \geq 0$ , on note  $D^n(M)$  le complexe formé de  $M$  en degrés  $n$  et  $n+1$ , 0 ailleurs et  $d_{n+1} = \text{id}_M$ . Alors pour  $n \geq 0$ ,  $D^n(C) \rightarrow 0$  est une fibration acyclique. Donc elle a la propriété de relèvement à droite par rapport à  $f$ . On voit tout de suite que cela implique que  $C_n \rightarrow D_n$  a une rétraction.

Soit  $f : C \rightarrow D$  une cofibration,  $n \geq 0$ ,  $u : M \twoheadrightarrow N$  une surjection entre  $\mathbb{Z}$ -modules et  $v : \text{coker}(f)_n \rightarrow N$  un morphisme. Le morphisme  $u$  induit alors une fibration acyclique  $D^n(u) : D^n(M) \rightarrow D^n(N)$ . On se donne un morphisme  $f \Rightarrow u$  induit par  $0 : C_n \rightarrow M$  et  $D_n \rightarrow \text{coker}(f)_n \rightarrow N$ . Comme  $f \square u$ , il existe un relèvement  $D \rightarrow D^n(M)$ , ce qui est équivalent à l'existence d'un relèvement  $\text{coker}(f)_n \rightarrow M$  à  $v$ . Donc  $\text{coker}(f)_n$  est projectif.

Soit  $f : C \hookrightarrow D$  tel que son conoyau  $\text{coker}(f)$  soit un complexe de  $\mathbb{Z}$ -modules projectifs. Soit  $u : E \rightarrow F$  une cofibration acyclique, et  $a, b : f \Rightarrow u$  un morphisme. Montrons, par récurrence sur  $n \geq 0$ , qu'il existe un relèvement  $c : D \rightarrow E$  défini en degrés  $m \leq n$  et compatible aux différentielles. On voit rapidement que  $u_0$  est nécessairement une surjection (car  $u$  est acyclique). Ainsi, pour compléter cette récurrence, il suffit de traiter le cas  $n = 1$  sachant que  $c_0$  existe ( $d^2 = 0$ ). On note  $K := \ker(u)$  et  $N := \text{coker}(f)$ . Comme  $N_1$  est projectif, on dispose d'un isomorphisme  $N_1 \oplus C_1 \simeq D_1$ . On en déduit un morphisme  $N_1 \rightarrow F_1$  que l'on relève en  $N_1 \rightarrow E_1$ . On en déduit ainsi un morphisme  $\alpha : D_1 \rightarrow E_1$  tel que  $b_1 = u_1 \alpha$  et  $a_1 = \alpha f_1$ . Maintenant,  $d\alpha - \alpha d$  est nul sur  $A$  et est à image dans  $K_0$ . Il induit donc un morphisme  $\beta : N_1 \rightarrow K_0$ . Comme  $K$  est acyclique,  $K_1 \rightarrow K_0$  est une surjection. Donc  $\beta$  admet un relèvement  $N_1 \rightarrow K_1$ , qui induit  $\gamma : D_1 \rightarrow E_1$ . Alors  $c_1 := \beta - \gamma$  convient.  $\square$

## ANNEXE C. TOPOLOGIE ALGÈBRIQUE

Cette section couvre les notions de topologie utilisées dans le mémoire. Certains points seront admis.

**C.1. Homologie et homologie à coefficients.** Dans ce mémoire, nous déduisons les propriétés élémentaires de l'homologie et de la cohomologie des structures de catégorie modèle sur  $\widehat{\Delta}$ ,  $\Delta\text{Ab}$  et  $\text{Ch}_+$ , suivant [GJ09, III.2] (que nous citons pour les démonstrations). Pour une introduction classique à l'homologie et la cohomologie, voir [HPoM02].

Nous commençons par le théorème des coefficients universels (admis, voir [Wei94, 3.6]).

**Théorème C.1** (Coefficients universels). *Soit  $C_*$  un complexe de chaînes de  $\mathbb{Z}$ -modules libres en notations homologiques, et soit  $M$  un groupe abélien. Alors on a une suite exacte fonctorielle en  $C_*$  :*

$$0 \rightarrow H_i(C) \otimes M \rightarrow H_i(C \otimes M) \rightarrow \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{i-1}(C), M) \rightarrow 0$$

**Théorème C.2.** *Soit  $C_*$  un complexe de chaînes de  $\mathbb{Z}$ -modules libres en notations homologiques, et soit  $M$  un groupe abélien. Alors on a une suite exacte fonctorielle en  $C_*$  :*

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(H_{i-1}(C), M) \rightarrow H^i(\text{Hom}(C, M)) \rightarrow \text{Hom}(H_i(C), M) \rightarrow 0$$

**Définition C.3** (homologie et cohomologie). Soit  $X$  un ensemble simplicial et  $n \geq 0$ . On appelle  $n$ -ième groupe d'homologie de  $X$  le groupe abélien :

$$H_n(X) := H_n(\mathbb{Z}X) = H_n(NX) = \pi_n(NX)$$

Soit  $M$  un  $\mathbb{Z}$ -module. On appelle  $n$ -ième groupe d'homologie de  $X$  à coefficients dans  $M$  le groupe abélien :

$$H_n(X; M) := H_n(\mathbb{Z}X \otimes M) = H_n(NX \otimes M)$$

On appelle  $n$ -ième groupe de cohomologie de  $X$  à coefficients dans  $M$  le groupe abélien :

$$H^n(X; M) := H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}X, M)) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(NX, M))$$

Les groupes  $H_n(X)$ ,  $H_n(X; M)$  et  $H^n(X; M)$  sont fonctorielles en  $X$  (de façon contravariante pour le dernier).

*Remarque C.4.* Les égalités  $H_n(\mathbb{Z}X \otimes M) = H_n(NX \otimes M)$  et  $H_n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}X, M)) = H_n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(NX, M))$  découlent du théorème des coefficients universels.

*Remarque C.5.* Dans la suite, on notera  $H_*(X)$ ,  $H_*(X; M)$  et  $H^*(X; M)$  pour les groupes abéliens  $\mathbb{N}$ -gradués formés de respectivement  $H_n(X)$ ,  $H_n(X; M)$  et  $H^n(X; M)$  en degré  $n$ .

**Proposition C.6** (invariance par homotopie). *Le foncteur d'homologie  $H_* : \widehat{\Delta} \rightarrow \mathrm{Ab}^{\mathbb{N}}$  se factorise par  $\mathrm{Ho}(\widehat{\Delta})$ . En d'autres termes, l'homologie est invariante par homotopie.*

Pour la démonstration, voir [GJ09, III.2.14]. On a immédiatement, par le théorème des coefficients universels, le corollaire suivant.

**Corollaire C.7.** *Pour  $M$  un groupe abélien, les foncteurs  $H_*(-; M)$  et  $H^*(-; M)$  se factorisent également par  $\mathrm{Ho}(\widehat{\Delta})$ .*

**Définition C.8** (homologie et cohomologie des paires). Soit  $A \subset X$  une paire d'ensembles simpliciaux. On définit son homologie par :

$$H_*(X, A) := H_*(\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}A)$$

Pour  $M$  un groupe abélien, on définit l'homologie à coefficients dans  $M$  :

$$H_*(X, A; M) := H_*(\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}A \otimes M)$$

et sa cohomologie à coefficients dans  $M$  :

$$H^*(X, A; M) := H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}A, M))$$

*Remarque C.9.* On déduit facilement des définitions les suites exactes longues des paires.

Le reste de cette sous-section est consacrée à la définition de l'homologie à coefficients locaux pour les ensembles simpliciaux et les paires d'ensembles simpliciaux.

**Définition C.10.** Soit  $X$  un ensemble simplicial. Un système de coefficients locaux est un foncteur :

$$L : \tau_{\leq 1}X \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

Un tel système  $L$  est dit inversible si  $L$  se factorise par  $\tau_{\leq 1}X \longrightarrow \pi_{\leq 1}X$ . Soit  $f : Y \rightarrow X$  un morphisme d'ensembles simpliciaux et  $L$  un système de coefficients locaux sur  $X$ . On note  $f^*L$  le système de coefficients locaux sur  $Y$  défini par :

$$f^*L : \tau_{\leq 1}Y \longrightarrow \tau_{\leq 1}X \longrightarrow \mathrm{Ab}$$

**Définition C.11.** Soit  $X$  un ensemble simplicial et  $L$  un système de coefficients locaux. On définit l'homologie de  $X$  dans  $L$  comme l'homologie du complexe  $C_*(X; L)$  défini par :

$$C_n(X; L) := \bigoplus_{x \in X_n} L(x(0)) \cdot x$$

et tel que  $\partial_n$  envoie  $l \cdot x$  sur :

$$\partial_n l \cdot x = L(x(0) \rightarrow x(1))(l) \cdot d_0(x) + \sum_{i=1}^n l \cdot (-1)^i d_i(x)$$

On notera  $H_*(X; L)$  pour l'homologie.

Cette définition est fonctorielle en  $(X, L)$  au sens suivant. Si  $f : Y \rightarrow X$  est une application et  $M \rightarrow f^*L$  est un morphisme (transformation naturelle) entre systèmes de coefficients locaux sur  $Y$ . Alors le morphisme :

$$C_*(Y; M) \longrightarrow C_*(Y; f^*L) \longrightarrow C_*(X; L)$$

induit un morphisme :

$$H_*(Y; M) \longrightarrow H_*(X; L)$$

*Remarque C.12.* En général, on inclut l'hypothèse inversible dans la définition de système de coefficients locaux. Nous choisissons d'étendre la définition pour prendre en compte le cas étudié dans la sous-section 4.2.

**Définition C.13.** Soit  $i : A \subset X$  une paire d'ensembles simpliciaux, et  $L$  un système de coefficients locaux strict sur  $X$ . Alors  $C_*(A; i^*L)$  est un sous-complexe de  $C_*(X; L)$ . On définit l'homologie de la paire  $(X, A)$  à coefficients dans  $L$  comme l'homologie du complexe quotient :

$$H_*(X, A; L) := H_*(C_*(X; L)/C_*(A; i^*L))$$

Cette définition est fonctorielle en  $(X, A, L)$  au sens suivant. Si  $f : (Y, B) \rightarrow (X, A)$  est une application entre paires et  $M \rightarrow f^*L$  est un morphisme entre systèmes de coefficients locaux sur  $Y$ . Alors le morphisme :

$$C_*(Y, B; M) \longrightarrow C_*(Y, B; f^*L) \longrightarrow C_*(X, A; L)$$

induit un morphisme :

$$H_*(Y, B; M) \longrightarrow H_*(X, A; L)$$

## C.2. Le théorème de Van Kampen.

**Théorème C.14** (Van Kampen). *On se donne le carré cocartésien suivant dans  $\widehat{\Delta}$  :*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{j} & X \\ \downarrow i & \lrcorner & \downarrow \\ B & \longrightarrow & Y \end{array}$$

*où  $i$  est une cofibration. Alors le carré induit sur les groupoïdes fondamentaux est cocartésien (dans la catégorie des petits groupoïdes) :*

$$\begin{array}{ccc} \pi_{\leq 1} A & \xrightarrow{j_*} & \pi_{\leq 1} X \\ \downarrow i_* & \lrcorner & \downarrow \\ \pi_{\leq 1} B & \longrightarrow & \pi_{\leq 1} Y \end{array}$$

*Si de plus  $A$ ,  $B$  et  $X$  sont connexes, alors pour tout  $x \in A_0$ , le carré :*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(A, x) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(X, x) \\ \downarrow i_* & \lrcorner & \downarrow \\ \pi_1(B, x) & \longrightarrow & \pi_1(Y, x) \end{array}$$



est cocartésien dans la catégorie des groupes.

*Démonstration.* Pour le premier point, on remarque que les foncteurs  $\tau_{\leq 1} : \hat{\Delta} \rightarrow \text{Cat}$  et  $\text{Cat} \rightarrow \text{Groupoides}$  on des adjoints à gauche (respectivement le nerf  $N$  et l'oubli). Donc leur composition,  $\pi_{\leq 1} : \hat{\Delta} \rightarrow \text{Groupoides}$ , commute aux colimites. Pour le second point, par le lemme de collage A.11, on peut supposer que  $j$  est également une cofibration. Alors, en choisissant pour chaque  $y \in A_0$  (respectivement  $B_0 \setminus A_0$ , respectivement  $X_0 \setminus A_0$ ) un chemin de  $y$  à  $x$ ,  $\gamma_y \in \text{Hom}_{\pi_{\leq 1}A}(y, x)$  (respectivement  $\text{Hom}_{\pi_{\leq 1}B}(y, x)$ , respectivement  $\text{Hom}_{\pi_{\leq 1}X}(y, x)$ ), on obtient une rétraction  $r$  entre les carrés suivants :

$$\begin{array}{ccccc}
 \pi_1(A, x) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(X, x) & & \\
 \downarrow & \swarrow r & \downarrow & \nwarrow r & \\
 & \pi_{\leq 1}A & \xrightarrow{j_*} & \pi_{\leq 1}X & \\
 & \downarrow i_* & \lrcorner & \downarrow & \\
 & \pi_{\leq 1}B & \longrightarrow & \pi_{\leq 1}Y & \\
 \downarrow & \swarrow r & \downarrow & \nwarrow r & \\
 \pi_1(B, x) & \xrightarrow{\quad} & \pi_1(Y, x) & & 
 \end{array}$$

Or, les rétractions préservent les colimites. Donc le carré des  $\pi_1(-, x)$  est cocartésien.  $\square$

### C.3. Obstruction et tours de Postnikov.

**Lemme C.15** (Lemme d'extension). *Soit  $A$  un ensemble simplicial,  $a \in A$ ,  $n \geq 1$  et  $(\gamma_i)_{i \in I}$  une famille de chemins  $\gamma_i : (\Delta^n, \partial\Delta^n) \rightarrow (A, a)$ . On se donne le carré cocartésien :*

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_I \partial\Delta^{n+1} & \xrightarrow{\sqcup_i(a, \dots, a, \gamma_i)} & A \\
 \downarrow & & \downarrow j \\
 \bigsqcup_I \Delta^{n+1} & \xrightarrow{\quad} & X
 \end{array}$$

Alors :

- (a)  $\pi_m(j) : \pi_m(A, a) \rightarrow \pi_m(X, a)$  est un isomorphisme pour  $m < n$  ;
- (b)  $\pi_n(j) : \pi_n(A, a) \rightarrow \pi_n(X, a)$  est surjective.

Soit  $f : A \rightarrow Y$  avec  $Y$  fibrant. Alors s'équivalent :

- (i) Il existe  $g : X \rightarrow Y$  tel que  $f = g \circ j$  ;
- (ii) Pour tout  $i \in I$ ,  $f_*[\gamma_i] = 0$  dans  $\pi_n(Y, f(a))$ .

*Démonstration.* L'équivalence entre (i) et (ii) est immédiate. Montrons les points

(a) et (b). Si  $A \xrightarrow{\sim} \tilde{A} \twoheadrightarrow *$ , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \bigsqcup_I \partial\Delta^{n+1} & \xrightarrow{\sqcup_i(a, \dots, a, \gamma_i)} & A & \xrightarrow{\sim} & \tilde{A} \\
 \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow \\
 \bigsqcup_I \Delta^{n+1} & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\sim} & \tilde{X}
 \end{array}$$

Donc on peut supposer sans perte de généralités que  $A$  est un complexe de Kan. Or  $X$  vérifie alors la propriété d'extension relativement aux inclusions  $\Lambda_k^m \hookrightarrow \Delta^m$  pour  $m \leq n$ . En effet  $X_m = A_m$  pour  $m \leq n$ . Donc,  $X' := G^\infty(\{\Lambda_k^l \hookrightarrow \Delta^l \mid l > n\}, X \twoheadrightarrow *)$  est un remplacement fibrant de  $X$ . Or,  $X'_m = A_m$  pour  $m \leq n$ , donc sur les groupes d'homotopie simpliciaux,  $\pi_m(A, a) \rightarrow \pi_m(X', a)$  est un isomorphisme pour  $m < n$  et une surjection pour  $m = n$ .  $\square$

**Définition C.16** (tour de Postnikov). Soit  $X$  une ensemble simplicial. Une tour de Postnikov est un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & X(n) & & \\
 & \nearrow i_n & \downarrow q_n & & \\
 X & \xrightarrow{i_{n-1}} & X(n-1) & & \\
 & \searrow i_1 & \vdots & & \\
 & \searrow i_0 & X(1) & & \\
 & & \downarrow q_1 & & \\
 & & X(0) & & 
 \end{array}$$

tel que pour tout  $v \in X_0$ ,  $\pi_j(X(n), v) = 0$  pour  $j > n$  et  $(i_n)_* : \pi_j(X, v) \rightarrow \pi_j(X(n), v)$  est un isomorphisme pour  $j \leq n$ .

**Proposition C.17.** *Tout ensemble simplicial  $X$  admet une tour de Postnikov.*

*Démonstration.* On peut supposer sans perte de généralités que  $X$  est connexe. Fixons  $n \geq 0$ . Soit  $X \xrightarrow{\sim} \tilde{X}$  un remplacement fibrant. On pose  $X(n, n) = X$  et  $\tilde{X}(n, n) = \tilde{X}$ . On définit  $X(n, n+1)$  comme la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc}
 \bigsqcup_I \partial \Delta^{n+2} & \xrightarrow{f} & \tilde{X}(n, n) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \bigsqcup_I \Delta^{n+2} & \longrightarrow & \tilde{X}(n, n+1)
 \end{array}$$

où  $f$  est induit par un ensemble  $I$  de générateurs de  $\pi_{n+1}(\tilde{X}(n, n), v)$ . Soit  $X(n, n+1) \xrightarrow{\sim} \tilde{X}(n, n+1)$  un remplacement fibrant. On définit  $X(n, n+2)$  de façon similaire à partir de  $\tilde{X}(n, n+1)$  avec  $I$  un ensemble de générateurs de  $\pi_{n+2}(\tilde{X}(n, n+1), v)$ . On a alors une suite de cofibrations :

$$X = X(n, n) \xrightarrow{\sim} \tilde{X}(n, n) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X(n, n+k) \xrightarrow{\sim} \tilde{X}(n, n+k)$$

On définit  $X(n)$  comme la colimite de cette suite. On dispose de  $i_n : X \rightarrow X(n)$ . On remarque également que  $X(n)$  est un complexe de Kan. On a également les propriétés souhaitée sur  $\pi_m(i_n)$  et les  $\pi_m(X(n))$ .

Il reste à construire les  $q_n$ . Pour cela, il suffit de construire  $q_n : X(n) \rightarrow X(n-1)$  tel que  $i_{n-1} = q_n \circ i_n$ . Or, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{\sim} & \tilde{X} & \cdots \cdots \cdots & X(n, n+k) & \xrightarrow{\sim} & \tilde{X}(n, n+k) \longrightarrow X(n, n+k+1) \\
& \searrow i_{n-1} & \downarrow \exists \tilde{q}_{n,n} & & \swarrow \exists q_{n,n+k} & & \swarrow \exists \tilde{q}_{n,n+k} \\
& & X(n-1) & & & & \swarrow \exists q_{n,n+k+1}
\end{array}$$

où l'existence des  $\tilde{q}_{n,n+k}$  est garantie car  $X(n-1)$  est un complexe de Kan, et l'existence des  $q_{n,n+k}$  est garantie par le lemme d'extension C.15. En passant à la colimite, on obtient l'application  $q_n : X(n) \rightarrow X(n-1)$  souhaitée.  $\square$

*Remarque C.18.* Si  $X$  dispose d'une tour de Postnikov, on peut successivement remplacer  $X(0)$  par un complexe de Kan, et les  $q_n$  par des fibrations, On obtient ainsi une tour de Postnikov où tous les  $q_n$  sont des fibrations. On appelle une telle tour une tour de Postnikov de fibrations.

**Lemme C.19.** Soit  $n \geq 0$  et  $p : X \twoheadrightarrow Y$  une fibration de Kan entre complexes de Kan. Soit  $x \in X_0$ . On suppose que  $\pi_{n+1}(X, x) \rightarrow \pi_{n+1}(Y, px)$  est surjectif. Soit :

$$\begin{array}{ccc}
\gamma : (\Delta^n, \partial\Delta^n) & \rightarrow & (X, x) \\
\sigma : \Delta^{n+1} & \rightarrow & Y
\end{array}$$

tels que  $[\gamma] = *$  et  $\partial\sigma = (px, \dots, px, p\gamma)$ .

Alors il existe  $\tau : \Delta^{n+1} \rightarrow Y$  tel que  $\partial\tau = (x, \dots, x, \gamma)$  et  $f\tau = \sigma$ .

*Démonstration.* Soit  $h : \Delta^n \times \Delta^1 \rightarrow X$  homotopie entre  $\gamma$  et  $*$ , on a alors :

$$\begin{array}{ccc}
\partial\Delta^{n+1} \times \Delta^1 & \xrightarrow{(px, \dots, px, ph)} & Y \\
\downarrow & \searrow \exists \theta & \downarrow \\
\Delta^{n+1} \times \Delta^1 & \longrightarrow & *
\end{array}$$

Maintenant,  $\tilde{\sigma} := \theta \circ (id \times d^0)$  représente un élément de  $\pi_{n+1}(Y, px)$ . Soit  $\tilde{\tau}$  représentant un élément de  $\pi_{n+1}(X, x)$  tel que  $p_*[\tilde{\tau}] = [\tilde{\sigma}]$ . On se donne  $g : \Delta^{n+1} \times \Delta^1 \rightarrow Y$  homotopie rel  $\partial\Delta^{n+1}$  entre  $\tilde{\sigma}$  et  $p\tilde{\tau}$ . On dispose alors de  $\beta : \Delta^{n+1} \times \Delta^2 \rightarrow Y$  On a alors :

$$\begin{array}{ccc}
\partial\Delta^{n+1} \times \Lambda_1^2 \cup \Delta^{n+1} \times \{2\} & \xrightarrow{(x, -, (x, \dots, x, f)) \cup \tilde{\tau}} & X \\
\downarrow & \searrow \exists H & \downarrow \\
\Delta^{n+1} \times \Lambda_1^2 & \xrightarrow{(g, -, h)} & Y
\end{array}$$

Alors,  $\tau := H \circ (id \times (d^1 \circ d^2))$  convient.  $\square$

**Proposition C.20.** Soit une suite de fibrations :

$$\cdots \twoheadrightarrow X_n \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow X_1 \twoheadrightarrow X_0 \twoheadrightarrow *$$

dans  $\hat{\Delta}$ . Soit  $i \geq 0$  et  $x \in (\lim_n X_n)_0$ . Alors :

$$\lambda : \pi_i(\lim_n X_n, x) \rightarrow \lim_n \pi_i(X_n, x)$$

est surjectif. Si de plus  $\pi_{i+1}(X_n) \rightarrow \pi_{i+1}(X_{n-1})$  est surjectif pour  $n$  assez grand,  $\lambda$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Soient  $f_n : (\Delta^i, \partial\Delta^i) \rightarrow (X_n, *)$  tels que  $[f_{n+1}] \mapsto [f_n]$ . Alors, par relèvement des homotopie (ie. relativement à  $\partial\Delta^i \times \Delta^1 \cup \Delta^i \times 0 \rightarrow \Delta^i \times \Delta^1$ ), on peut successivement construire  $f'_n : (\Delta^i, \partial\Delta^i) \rightarrow (X_n, *)$  tels que  $[f'_n] = [f_n]$  et  $f'_n \mapsto f'_{n+1}$ . On a construit  $f' \in \pi_i(\lim_n X_n, x)$  tel que  $f' \mapsto (f_n)_n$ .

Supposons maintenant que  $\pi_{i+1}(X_n) \rightarrow \pi_{i+1}(X_{n-1})$  est surjectif pour  $n$  assez grand. On peut, sans perte de généralité, supposer que  $\pi_{i+1}(X_n) \rightarrow \pi_{i+1}(X_{n-1})$  est surjectif pour tout  $n$ . Soit  $f$  un représentant d'un élément dans le noyau de  $\lambda$ , et  $f_n$  l'image dans  $X_n$ . Alors par le lemme C.19, on peut construire successivement des  $\sigma_n : \Delta^{i+1} \rightarrow X_n$  tels que  $\partial\sigma = (*, \dots, *, f_n)$  et  $\tau_n \mapsto \tau_{n-1}$ . Ces  $(\tau_n)_{n \geq 0}$  forment donc un  $\tau : \Delta^{i+1} \rightarrow \lim_n X_n$  tel que  $\partial\tau = (*, \dots, *, f)$ . Donc  $[f] = *$ .  $\square$

**Corollaire C.21.** Soit  $X$  un ensemble simplicial et  $(X(n), i_n, q_n)_n$  une tour de Postnikov de fibrations pour  $X$ . Alors l'application :

$$X \rightarrow \lim_{n \in \mathbb{N}} X(n)$$

est une équivalence d'homotopie faible.

*Démonstration.* D'après la proposition C.20, pour chaque  $i \geq 0$  et  $x \in X_0$ , on a un isomorphisme :

$$\pi_i(X, x) \xrightarrow{\sim} \pi_i(\lim_{n \in \mathbb{N}} X(n), x)$$

Donc c'est une équivalence d'homotopie faible.  $\square$

**C.4. le théorème de Hurewicz.** Nous allons admettre les démonstrations des différentes versions du théorème de Hurewicz, car elles utilisent des outils que nous n'avons pas introduit (Suite spectrale de Serre ou théorème d'excision en homotopie, voir les remarques).

**Définition C.22** (morphisme de Hurewicz). Soit  $X$  un ensemble simplicial,  $n \geq 1$  et  $x \in X_0$ . L'application naturelle  $X \rightarrow \mathbb{Z}X$  induit le diagramme suivant :

$$\pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n(\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}x, 0) \longleftarrow \pi_n(\mathbb{Z}X, 0)$$

Or, d'après la proposition B.11, pour  $A$  groupe abélien simplicial, on a un isomorphe fonctoriel :

$$\pi_n(A, 0) \simeq H_n(A)$$

Or  $H_n(\mathbb{Z}x) = 0$ . Donc  $\pi_n(\mathbb{Z}X, 0) \rightarrow \pi_n(\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}x, 0)$  est un isomorphisme, et donc on dispose d'un morphisme :

$$\mathcal{H}_n(X, x) : \pi_n(X, x) \rightarrow H_n(X)$$

On appelle ce morphisme le morphisme de Hurewicz. Il est clairement fonctoriel en  $X$ .

**Théorème C.23** (Hurewicz pour le  $\pi_1$ ). Soit  $X$  ensemble simplicial connexe et  $x \in X_0$ . Alors  $\mathcal{H}_1(X, x)$  induit un isomorphisme :

$$\pi_1(X, x)^{\text{ab}} \longrightarrow H_1(X)$$

*Démonstration.* On peut supposer que  $X$  est un complexe de Kan. Pour  $y \in X_0$ , on se donne un chemin  $\gamma_y : \Delta^1 \rightarrow X$  de  $x$  à  $y$ . Une réciproque est alors donnée par :

$$\sum_i [\delta_i] \mapsto \prod_i [\gamma_{\delta(1)}]^{-1} [\delta_i] [\gamma_{\delta(0)}]$$

□

**Théorème C.24** (Hurewicz pour  $\pi_n$ ,  $n \geq 2$ ). *Soit  $X$  un ensemble simplicial connexe,  $x \in X_0$  et  $n \geq 2$ . Si  $\pi_m(X, x) = 0$  pour tout  $1 \leq m < n$ , alors l'application de Hurewicz :*

$$\mathcal{H}_n(X, x) : \pi_n(X, x) \rightarrow H_n(X)$$

*est un isomorphisme.*

Nous ne démontrons pas ici ce théorème. Une première preuve qui se base sur la suite spectrale de Serre est donnée dans [GJ09, III.3.7]. En examinant la preuve, on remarque que l'existence d'un isomorphisme entre  $\pi_n(X, x)$  et  $H_n(X)$  est une conséquence immédiate de la suite spectrale. Il est plus difficile d'identifier cet isomorphisme avec  $\mathcal{H}_n(X, x)$ . Une seconde preuve qui se base sur le théorème d'excision en homotopie est donnée dans [HPoM02, 4.37] (prendre  $A = x$ ).

**Définition C.25** (morphisme de Hurewicz pour les paires). Soit  $X$  un ensemble simplicial,  $A$  un sous-ensemble simplicial de  $X$ , et  $x \in A_0$ . Soit  $n \geq 1$ . Le morphisme naturel  $(X, A) \rightarrow (\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}x, \mathbb{Z}A/\mathbb{Z}x)$  induit :

$$\pi_n(X, A, x) \longrightarrow \pi_n(\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}x, \mathbb{Z}A/\mathbb{Z}x, 0) \longleftarrow \pi_n(\mathbb{Z}X, \mathbb{Z}A, 0)$$

Or, d'après proposition B.11, pour  $(U, V)$  paire des groupe abélien simplicial, on a un isomorphe fonctoriel :

$$\pi_n(U, V, 0) \simeq H_n(U/V)$$

Donc  $\pi_n(\mathbb{Z}X, \mathbb{Z}A, 0) \rightarrow \pi_n(\mathbb{Z}X/\mathbb{Z}x, \mathbb{Z}A/\mathbb{Z}x, 0)$  est un isomorphisme, et donc on dispose d'un morphisme :

$$\mathcal{H}_n(X, A, x) : \pi_n(X, A, x) \rightarrow H_n(X, A)$$

On appelle ce morphisme le morphisme de Hurewicz pour les paires. Il est clairement fonctoriel en  $(X, A)$ .

*Remarque C.26.* De la compatibilité aux suites exactes longues énoncée dans la proposition B.11, on déduit que les morphismes de Hurewicz sont compatibles aux suites exactes longues des paires. Plus précisément, si  $x \in A \subseteq X$ , alors le diagramme suivant commute pour  $n \geq 1$  :

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_{n+1}(X, A, x) & \xrightarrow{\partial} & \pi_n(A, x) & \longrightarrow & \pi_n(X, x) & \longrightarrow & \pi_n(X, A, x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{H}_{n+1}(X, A, x) & & \mathcal{H}_n(A, x) & & \mathcal{H}_n(X, x) & & \mathcal{H}_n(X, A, x) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{n+1}(X, A) & \xrightarrow{\partial} & H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) \end{array}$$

**Théorème C.27** (Hurewicz pour les paires). *Soit  $n \geq 2$  et  $(X, A)$  une paire d'ensembles simpliciaux tels que  $\pi_1(A, x)$  agisse trivialement sur  $\pi_n(X, A, x)$ . Alors le morphisme de Hurewicz :*

$$\mathcal{H}_n(X, A, x) : \pi_n(X, A, x) \rightarrow H_n(X, A)$$

*est un isomorphisme.*

Nous ne démontrons pas ici ce théorème. Voir [HPoM02, 4.37] pour une preuve.

**C.5. Espaces d'Eilenberg Mac-Lane et tours de Postnikov de fibrations principales.** La première partie de cette sous-section est consacrée à la définition des espaces d'Eilenberg-MacLane et la seconde aux tours de Postnikov de fibrations principales. La première utilise beaucoup la correspondance de Dold-Kan énoncée dans la sous-section B. La seconde utilise le théorème de Hurewicz pour les paires pour démontrer l'existence de tours de Postnikov de fibrations principales pour les espaces simples. Ce résultat est central pour l'unicité de la construction  $+$ .

**Définition C.28.** Soit  $n \geq 1$  et  $\Pi$  un groupe qui soit abélien si  $n \geq 2$ . Un espace d'Eilenberg-MacLane pour  $n$  et  $\Pi$  est un ensemble simplicial connexe  $K(\Pi, n)$  tel que :

$$\pi_m(K(\Pi, n)) = \begin{cases} \Pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

*Remarque C.29.* La donnée de  $K(\Pi, n)$  comprend un isomorphisme  $\pi_m(K(\Pi, n)) \simeq \Pi$ . Si  $n = 1$  et  $\Pi$  n'est pas abélien, il faut choisir un point base pour  $K(\Pi, n)$ . En pratique, on se restreint ici aux espaces simples.

*Remarque C.30.* Dans la suite de la section et le reste du mémoire,  $K(\Pi, n)$  désigne toujours un espace d'Eilenberg-MacLane pour  $n$  et  $\Pi$ .

**Proposition C.31.** Soit  $n \geq 1$  et  $\Pi$  un groupe qui soit abélien si  $n \geq 2$ . Alors il existe un espace d'Eilenberg-MacLane pour  $n$  et  $\Pi$ . Plus précisément, on peut utiliser les deux constructions suivantes.

Si  $n = 1$ ,  $N\Pi$  est un espace d'Eilenberg-MacLane pour  $n$  et  $\Pi$ .

Si  $n \geq 1$  et  $\Pi$  est abélien,  $C_*$  le complexe de chaîne défini par :

$$C_n = \begin{cases} \Pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On note  $\Gamma C_*$  le groupe abélien simplicial associé (voir le théorème B). Alors  $\Gamma C_*$  est un espace d'Eilenberg-MacLane pour  $n$  et  $\Pi$ .

*Démonstration.* Si  $n = 1$ ,  $N\Pi$  convient. On se place maintenant dans le second cas. Par le théorème B, on a pour  $m \geq 0$  :

$$\pi_m(\Gamma C_*, 0) = H_n(C_*) = \begin{cases} \Pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

□

Ci-dessous, on ne démontre l'unicité que dans le cas abélien, pour éviter de devoir passer par les espaces pointés.

**Proposition C.32.** Soit  $n \geq 1$ ,  $\Pi$  un groupe abélien, et  $K(\Pi, n)$  un complexe de Kan et un espace d'Eilenberg-MacLane pour  $n$  et  $\Pi$ . Si  $K'$  en est un autre, alors il existe une équivalence d'homotopie faible  $\theta : K(\Pi, n) \rightarrow K'$  telle que  $\pi_n(\theta)$  d'identifie à  $\text{id}_\Pi$ .

*Démonstration.* Soit  $I$  un ensemble de générateurs de  $\Pi$ ,  $X_{n-1} := \bigvee_I \Delta^n / \partial \Delta^n$  et  $\theta_{n-1} : X_{n-1} \rightarrow K'$  le morphisme associé à l'inclusion  $I \rightarrow \pi_n(K, *)$ . Soit  $J_n$  un ensemble de générateurs du noyau de  $\mathbb{Z}^{(I)} \rightarrow \Pi$ . On définit  $X_n$  comme la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc}
\sqcup_{J_n} \partial \Delta^{n+1} & \xrightarrow{\sqcup_j (a, \dots, a, \gamma_j)} & X_{n-1} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sqcup_{J_n} \Delta^{n+1} & \xrightarrow{\quad \quad \quad \Gamma \quad} & X_n
\end{array}$$

On a alors, par le lemme d'extension C.15, une factorisation  $\theta_n : X_n \rightarrow K'$  de  $\theta_{n-1}$ . De plus, on a maintenant nécessairement que  $\pi_n(\theta_n)$  est un isomorphisme. Nous pouvons maintenant définir par récurrence  $X_m$  pour  $m \geq n$  de la façon suivante. Soit  $J_m$  un ensemble de générateurs de  $\pi_m(X_m)$ . On définit alors  $X_{m+1}$  comme la somme amalgamée :

$$\begin{array}{ccc}
\sqcup_{J_m} \partial \Delta^{n+1} & \xrightarrow{\sqcup_j (a, \dots, a, \gamma_j)} & X_m \\
\downarrow & & \downarrow \\
\sqcup_{J_m} \Delta^{n+1} & \xrightarrow{\quad \quad \quad \Gamma \quad} & X_{m+1}
\end{array}$$

Maintenant, par le lemme d'extension C.15, on peut étendre  $\theta_n$  en  $\theta_m : X_m \rightarrow K'$  pour chaque  $m \geq 0$ . Quitte à le faire dans l'ordre, on peut choisir une famille compatible de  $(\theta_m)_m$ . Alors on dispose d'un morphisme :

$$\theta : X := \operatorname{colim}_m X_m \rightarrow K'$$

qui est un isomorphisme sur chaque  $\pi_m$ , et donc une équivalence faible.

Cependant, on remarque que la construction de  $X$  est indépendante de  $K'$ , en effet elle ne dépend que du choix de  $I$  et des  $J_m$  pour  $m \geq n$ . Donc chaque espace d'Eilenberg-MacLane pour  $n$  et  $\Pi$  est homotopiquement équivalent à  $X$ . Ce qui conclut.  $\square$

**Théorème C.33.** *Soit  $n \geq 1$  et  $\Pi$  un groupe abélien. Alors, si on note  $[-, -]$  pour  $\operatorname{Hom}_{\operatorname{Ho}(\widehat{\Delta})}(-, -)$ , on a, pour  $K(\Pi, n)$  un espace d'Eilenberg-MacLane pour  $n$  et  $\Pi$ , un isomorphisme de foncteurs :*

$$[-, K(\Pi, n)] \simeq H^n(-; \Pi)$$

*Démonstration.* Il suffit de le montrer pour une construction. On choisit donc  $K(\Pi, n) := \Gamma C_*$ , avec  $C_*$  le complexe de chaîne défini par :

$$C_n = \begin{cases} \Pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On utilise maintenant les structures de modèles sur  $\widehat{\Delta}$  et  $\Delta\mathbf{Ab}$ . Dans  $\widehat{\Delta}$ , on a le cône fonctoriel en  $X$  suivant :

$$X \sqcup X \hookrightarrow X \times \Delta^1 \xrightarrow{\sim} X$$

Dans  $\Delta\mathbf{Ab}$ , on a le cône fonctoriel en  $X \in \widehat{\Delta}$  suivant :

$$\mathbb{Z}X \oplus \mathbb{Z}X \hookrightarrow \mathbb{Z}X \otimes \mathbb{Z}\Delta^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}X$$

Or, pour  $A$  un groupe abélien simplicial, les morphismes dans  $\widehat{\Delta}$  de  $X \times \Delta^1$  dans  $A$  s'identifient aux morphismes dans  $\Delta\text{Ab}$  de  $\mathbb{Z}X \otimes \mathbb{Z}\Delta^1$  dans  $A$ . Or, comme les groupes abéliens dans  $\widehat{\Delta}$  sont fibrants, on a :

$$[X, A]_{\widehat{\Delta}} \simeq [\mathbb{Z}X, A]_{\Delta\text{Ab}} \simeq [N\mathbb{Z}X, NA]_{\text{Ch}_+}$$

Or,  $N\mathbb{Z}X \rightarrow \mathbb{Z}X$  est une équivalence en homologie d'après le théorème B. Et comme  $\mathbb{Z}X$  est cofibrant, on a donc un isomorphisme fonctoriel :

$$[X, K(\Pi, n)]_{\widehat{\Delta}} \simeq [\mathbb{Z}X, C_*]_{\text{Ch}_+} \simeq \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^n(\mathbb{Z}X, \Pi) \simeq H^n(X; \Pi)$$

□

Nous introduisons maintenant une structure supplémentaire sur certaines tours de Postnikov.

**Définition C.34.** Soit  $X$  un ensemble simplicial simple. Une tour de Postnikov de fibrations principales pour  $X$  est un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} & & X(n) & & \\ & \nearrow i_n & \downarrow q_n & & \\ X & \xrightarrow{i_{n-1}} & X(n-1) & \xrightarrow{u_{n-1}} & K(n+1, \pi_n(X)) \\ & \searrow i_1 & \vdots & & \\ & \searrow i_0 & X(1) & \xrightarrow{u_1} & K(3, \pi_2(X)) \\ & & \downarrow q_1 & & \\ & & X(0) \simeq * & \xrightarrow{u_0} & K(2, \pi_1(X)) \end{array}$$

Où les  $X(n)$ ,  $i_n$  et  $q_n$  forment une tour de Postnikov, et tels que les suites :

$$X(n) \longrightarrow X(n-1) \longrightarrow K(n+1, \pi_n(X))$$

soient des suites fibres pour tout  $n \geq 1$ .

**Lemme C.35.** Soit  $A \subset X$  une paire d'ensembles simpliciaux connexes. Soit  $n \geq 1$  et  $x \in A$ . On suppose que :

$$\pi_m(X, A, x) = \begin{cases} \Pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\Pi$  un groupe abélien. Alors, si  $\pi_1(A, x)$  agit trivialement sur  $\pi_n(X, A, x)$ , il existe  $\theta : X \rightarrow K(\Pi, n)$  tel que la suite :

$$A \longrightarrow X \longrightarrow K(\Pi, n)$$

soit une suite fibre.

*Démonstration.* Par le théorème de Hurewicz pour les paires C.25, on a un isomorphisme :

$$\mathcal{H}_n(X, A, x) : \pi_n(X, A, x) \simeq H_n(X, A)$$

De plus, comme  $\pi_m(X, A, x) = 0$  pour  $m < n$ ,  $\pi_m(A) \rightarrow \pi_m(X)$  est une surjection pour  $m < n$ . Donc on peut supposer sans perte de généralité que  $A_m = X_m$  pour  $m < n$ . Ainsi,  $\pi_m(X/A, A/A) = 0$  pour  $m < n$ . Donc, par le théorème de Hurewicz C.24, on a également un isomorphisme :

$$\mathcal{H}_n(X/A, A/A, A/A) : \pi_n(X/A, A/A, A/A) \rightarrow H_n(X/A, A/A)$$



Or le morphisme naturel  $(X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$  induit un isomorphisme en homologie. Donc, par fonctorialité du morphisme de Hurewicz  $\mathcal{H}_n$ ,  $\pi_n(X, A, x) \rightarrow \pi_n(X/A, A/A)$  est un isomorphisme. À l'aide du lemme d'extension C.15, nous pouvons construire un morphisme :

$$u : X/A \rightarrow K(\Pi, n)$$

qui soit un isomorphisme sur les  $\pi_m$  pour  $m \leq n$ . On note  $F \rightarrow X$  la fibre homotopique du morphisme induit  $\theta : X \rightarrow K(\Pi, n)$ . Comme  $A \rightarrow K(\Pi, n)$  est contractile, on a un morphisme de paires  $(A, X) \rightarrow (F, X)$ . C'est un isomorphisme sur les groupes d'homotopie des paires pour tout  $m \geq 1$ . Donc, par la suite exacte longue en homotopie,  $A \rightarrow F$  est une équivalence d'homotopie. Donc la suite :

$$A \longrightarrow X \longrightarrow K(\Pi, n)$$

est une suite fibre.  $\square$

**Théorème C.36.** *Soit  $X$  un ensemble simplicial simple. Alors il existe une tour de Postnikov de fibrations principales pour  $X$ .*

*Démonstration.* On se donne des  $X(n)$ ,  $i_n : X \rightarrow X(n)$  et  $q_n : X(n) \rightarrow X(n-1)$  qui forment une tour de Postnikov pour  $X$ . Alors, la paire  $(X(n), X(n-1))$  vérifie les hypothèses du lemme C.35. En effet,  $\pi_1(X(n-1), x) = \pi_1(X, x)$  agit trivialement sur les  $\pi_m(X(n), x)$  et les  $\pi_m(X(n-1), x)$ , donc également sur les groupes  $\pi_m(X(n), X(n-1), x)$  par la suite exacte longue en homotopie. Ceci conclut.  $\square$

#### REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier mon directeur de stage Frédéric Déglise pour ses explications et le temps qu'il m'a accordé.

#### RÉFÉRENCES

- [Bas68] Hyman Bass. *Algebraic K-theory*. W.A. Benjamin, inc., 1968.
- [GJ09] P.G. Goerss and J. Jardine. *Simplicial Homotopy Theory*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Basel, 2009.
- [Gra76] Daniel Grayson. Higher algebraic k-theory : Ii. In Michael R. Stein, editor, *Algebraic K-Theory*, pages 217–240, Berlin, Heidelberg, 1976. Springer Berlin Heidelberg.
- [GW10] U. Görtz and T. Wedhorn. *Algebraic Geometry : Part I : Schemes. With Examples and Exercises*. Advanced Lectures in Mathematics. Vieweg+Teubner Verlag, 2010.
- [Hir09] P.S. Hirschhorn. *Model Categories and Their Localizations*. Mathematical surveys and monographs. American Mathematical Society, 2009.
- [HPoM02] A. Hatcher, Cambridge University Press, and Cornell University. Department of Mathematics. *Algebraic Topology*. Algebraic Topology. Cambridge University Press, 2002.
- [Idr21] Najib Idrissi. Introduction à la théorie de l'homotopie. accessible sur <https://idrissi.eu/class>, 2021.
- [Kel90] Bernhard Keller. Chain complexes and stable categories. *manuscripta mathematica*, 67(1) :379–417, Dec 1990.
- [Lan13] S.M. Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.
- [Qui73] Daniel Quillen. Higher algebraic k-theory : I. In H. Bass, editor, *Higher K-Theories*, pages 85–147, Berlin, Heidelberg, 1973. Springer Berlin Heidelberg.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1994.