

# מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20441 - מבוא למדעי המחשב ושפת Java

חומר הלימוד למטלה: יחידות 9-10 נושא המטלה: יעילות ורקורסיה

מספר השאלות: 4 משקל המטלה: 3 נקודות

סמסטר: 2025 מועד אחרון להגשה: 31.5.2025

**את התשובות לכל השאלות עליכם לכתוב במחלקה אחת בשם  
Ex13 (בדיוק).**

**שימו לב:**

מניסיוננו השאלות שבהן מתקשים סטודנטים במבחנים הן בעיקר שתי השאלות הראשונות בהן אתם נדרשים לכתוב קוד: שאלת רקורסיה ושאלת יעילות.

הממ"ן שלפניכם בנוי משאלות שהיו במבחנים בסמסטרים האחרונים. התמודדות עצמאית לחלוטין עם שאלות הממ"ן תהווה הכנה מצוינת למבחן עבורכם. כמובן שאין להסתפק בכך ויש לפתור עוד ועוד שאלות רקורסיה ויעילות לקראת המבחן.

שתי השאלות הראשונות עוסקות בנושא היעילות והשתיים האחרונות ברקורסיה.

**הערות לגבי שאלות 1 ו-2:**

- השיטה שתכתבו צריכה להיות יעילה ככל הניתן, גם מבחינת סיבוכיות הזמן וגם מבחינת סיבוכיות המקום. תשובה שאינה יעילה מספיק כלומר, שתהיה בסיבוכיות גדולה יותר מזו הנדרשת לפתרון הבעיה תקבל מעט נקודות בלבד.
- ניתן להשתמש בשיטות עזר ככל הנדרש. בחישוב הסיבוכיות צריך לחשב גם את הזמן והמקום של שיטות העזר.

## • בשתי השאלות סיבוכיות המקום צריכה להיות קבועה,

אחרת יורדו הרבה נקודות.

## • כתבו (באנגלית בלבד) כחלק מה- API של השאלה מה סיבוכיות הזמן

(Time complexity) וסיבוכיות המקום (Space complexity) של

השיטה שכתבתם. הסבירו תשובתכם.

## • אל תשכחו לתעד (באנגלית) את מה שכתבתם!

### שאלה 1 - 25 נקודות

נתון מערך חד-ממדי  $a$  המכיל מספרים שלמים. נגדיר את מערך הסכומים שלו  $b$  כך:

## • התא הראשון של המערך $b$ מכיל את הערך של התא הראשון במערך $a$ , כלומר:

$$b[0] = a[0]$$

## • לכל $i$ החל מ-1 ועד לתא האחרון במערך $b$ , התא $i$ מכיל את סכום התאים $a[0]$ עד

$$a[i]. \text{ כלומר, } b[i] = a[0] + a[1] + \dots + a[i]$$

**לדוגמא**, עבור המערך הבא:

```
int[] a = {4, -1, 5, 7, 2}
```

מערך הסכומים יהיה:

```
int[] b = {4, 3, 8, 15, 17}
```

### סעיף א (10 נקודות):

כתבו שיטה סטטית `get` המקבלת כפרמטרים מערך סכומים  $b$  ואינדקס  $k$  ומחזירה את  $a[k]$ . ניתן להניח שהמערך אינו ריק ואינו `null` וכן שהאינדקס  $k$  הוא חוקי ואינו חורג מגבולות המערך.

**חתימת השיטה היא:**

```
public static int get(int[] b, int k)
```

### סעיף ב (15 נקודות):

כתבו שיטה סטטית `find` המקבלת כפרמטרים מערך סכומים  $b$ , שהתקבל ממערך ממוין בסדר שאינו יורד  $a$ , וערך שלם  $x$ , ומחזירה את האינדקס במערך  $a$  שמכיל את הערך  $x$ ,

כלומר, השיטה צריכה להחזיר את  $k$  אם  $a[k] == x$ . אם הערך  $x$  אינו קיים במערך  $a$  השיטה תחזיר -1.

**חתימת השיטה היא:**

```
public static int find(int[] b , int x)
```

**שימו לב:**

בשאלה זו אסור לשנות את המערך, גם אם יוחזר לקדמותו בסוף השיטה. שתי השיטות שתכתבו צריכות להיות יעילות ככל הניתן, גם מבחינת סיבוכיות הזמן וגם מבחינת סיבוכיות המקום. תשובה שאינה יעילה מספיק כלומר, שתהיה בסיבוכיות גדולה יותר מזו הנדרשת לפתרון הבעיה תקבל מעט נקודות בלבד.

ציינו מהי סיבוכיות זמן הריצה ומהי סיבוכיות המקום של כל שיטה שכתבתם. הסבירו תשובתכם.

**אל תשכחו לתעד את מה שכתבתם!**

## שאלה 2 - 25 נקודות

להזכרכם, מספר טבעי הוא מספר שלם חיובי (לא כולל 0).

**נסמן** סדרת מספרים טבעיים באורך  $n$  כך:  $\langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \rangle$ .

**נגדיר:** סדרת מספרים טבעיים נקראת **סופר-עולה** (super-ascending) אם כל איבר בסדרה גדול **מסכום** האיברים שקדמו לו.

כלומר, לכל  $1 \leq i < n$  מתקיים  $a_{i+1} > a_1 + a_2 + \dots + a_i$ .

בהינתן סדרה **סופר-עולה**  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  ומספר  $k$ , ברצוננו לדעת האם קיימת תת קבוצה של האיברים  $\{a_1, \dots, a_n\}$  שסכום איבריה הוא **בדיוק**  $k$ .

שימו לב, התת-קבוצה יכולה לכלול איברים כלשהם, לאו דווקא איברים רצופים בסדרה. כל איבר בסדרה יכול להופיע בתת-הקבוצה פעם אחת בלבד.

## דוגמא:

הסדרה  $< 2, 3, 8, 27 >$  היא סדרה **סופר-עולה**. עבור  $k = 30$  יש תת קבוצה העונה על הדרישות והיא  $\{3, 27\}$ .

עבור  $k = 7$  אין תת קבוצה העונה על הדרישות כיון ש-  $\{2, 2, 3\}$  אינו פתרון חוקי.

**כתבו שיטה סטטית בוליאנית** המקבלת כפרמטרים מערך חד-ממדי `arr` המלא במספרים שלמים המהווים סדרה **סופר-עולה**, ומספר שלם  $k$ . השיטה צריכה להחזיר `true` אם קיימת במערך תת-קבוצה שסכום איבריה הוא בדיוק  $k$ , ו-`false` אחרת.

**אפשר להניח שבמערך יש סדרה סופר-עולה, ואין צורך לבדוק זאת.**

**חתימת השיטה היא:**

```
public static boolean superInc (int [] arr, int k)
```

**שימו לב:**

השיטה שתכתבו צריכה להיות יעילה ככל הניתן, גם מבחינת סיבוכיות הזמן וגם מבחינת סיבוכיות המקום. תשובה שאינה יעילה מספיק כלומר, שתהיה בסיבוכיות גדולה יותר מזו הנדרשת לפתרון הבעיה תקבל מעט נקודות בלבד. ציינו מהי סיבוכיות זמן הריצה ומהי סיבוכיות המקום של השיטה שכתבתם. הסבירו תשובתכם.

**אל תשכחו לתעד את מה שכתבתם!**

**שימו לב:**

- בשאלה זו מותר לשנות את המערך במהלך השיטה, ואין צורך להחזיר אותו למצבו המקורי בסיומה.

### הערות לגבי שאלות 3 ו-4:

- אסור להשתמש בלולאות בכלל בשאלות אלו! גם לא בשיטות עזר (אם תכתבו כאלו).
- מותר להשתמש בהעמסת-יתר (Overloading)
- אסור להשתמש במשתנים סטטיים (גלובליים)!
- מותר להשתמש בשיטות Math.max ו-Math.min מהמחלקה Math וכן בקבועים Integer.MIN\_VALUE, Integer.MAX\_VALUE מהמחלקה Integer.
- אין צורך לדאוג ליעילות השיטה! אבל כמובן שצריך לשים לב לא לעשות קריאות רקורסיביות מיותרות!
- אל תשכחו לתעד את מה שכתבתם!

### שאלה 3 - 25 נקודות

תזכורת מתמטית:

- א. גודל (size) של קבוצה (set) הוא מספר האיברים שיש בה. למשל, בקבוצה  $\{-5, 3, 2, 6\}$  יש ארבעה איברים, ולכן גודלה הוא 4.
- ב. קבוצות זרות ומשלימות (disjoint and complementary sets) של המערך הן קבוצות שאין להן איבר משותף, והאיחוד שלהן הוא כל איברי המערך. במילים אחרות, כל איבר במערך נמצא בדיוק באחת משתי הקבוצות.

לדוגמא: אם המערך a הוא:

	0	1	2	3	4
a =	1	2	0	3	-1

אז יש הרבה קבוצות זרות ומשלימות במערך זה. הנה כמה מהן:

- |    |                  |               |
|----|------------------|---------------|
| 1. | {1, 2, 0, 3}     | {-1}          |
| 2. | {1, 2, -1}       | {0, 3}        |
| 3. | {0, 3}           | {1, 2, -1}    |
| 4. | {1, 2, 0, 3, -1} | {}            |
| 5. | {1, 3}           | {2, 0, -1}    |
| 6. | {2, 0, -1}       | {1, 3}        |
| 7. | {1}              | {2, 0, 3, -1} |

שימו לב, גם קבוצה ריקה היא קבוצה.

כתבו שיטה סטטית רקורסיבית המקבלת מערך של מספרים שונים זה מזה, שלמים (חיוביים, שליליים ואפסים) arr, ומשתנה diff שלם אי-שלילי. השיטה צריכה לבדוק האם ניתן לחלק את המערך לשתי קבוצות זרות ומשלימות של איברים כך שיתקיים התנאי הבא : ההפרש בין הסכומים של שתי הקבוצות יהיה בדיוק ההפרש בין הגדלים שלהן (בערך מוחלט), והפרש זה יהיה הפרמטר diff.

אם ניתן לחלק לפי התנאי לעיל, השיטה תדפיס את כל החלוקות האפשריות : בכל חלוקה יודפסו האיברים בכל אחת משתי הקבוצות, וכן הסכום ומספר האיברים בכל אחת מהקבוצות. כמו כן, השיטה תחזיר את מספר החלוקות העומדות בתנאי.

אם אין אפשרות לחלק את המערך לשתי קבוצות זרות ומשלימות שמקיימות את התנאי, לא יודפס כלום ויוחזר הערך 0.

#### לדוגמא:

במערך a, החלוקות 2, 3, 4, 7 שצינו לעיל מקיימות את התנאי שההפרש בין הסכומים של שתי הקבוצות הוא בדיוק ההפרש בין הגדלים שלהן.

#### בחלוקה 2 לעיל:

$$A = \{1, 2, -1\} \quad B = \{0, 3\}$$

בקבוצה A גודל הקבוצה הוא 3 סכום האיברים 2  
 בקבוצה B גודל הקבוצה הוא 2 סכום האיברים הוא 3  
 ואכן ההפרש בין הסכומים של שתי הקבוצות הוא 1 ( $3-2=1$ ), וגם ההפרש בין מספר האיברים של שתי הקבוצות הוא 1 ( $2-3=-1$ ) בערך מוחלט זה 1).

#### בחלוקה 3 לעיל:

$$A = \{0, 3\} \quad B = \{1, 2, -1\}$$

בקבוצה A גודל הקבוצה הוא 2 סכום האיברים 3  
 בקבוצה B גודל הקבוצה הוא 3 סכום האיברים הוא 2  
 ההפרש בין הסכומים הוא 1 וההפרש בין הגדלים הוא 1.

#### בחלוקה 4 לעיל:

$$A = \{1, 2, 3, 0, -1\} \quad B = \{\}$$

בקבוצה A גודל הקבוצה הוא 5 סכום האיברים 5  
 בקבוצה B גודל הקבוצה הוא 0 סכום האיברים הוא 0  
 ההפרש בין הסכומים הוא 5 וההפרש בין הגדלים הוא 5.

## בחלוקה 7 לעיל:

$$A = \{1\}$$

$$B = \{2, 0, 3, -1\}$$

בקבוצה A גודל הקבוצה הוא 1 סכום האיברים 1

בקבוצה B גודל הקבוצה הוא 4 סכום האיברים הוא 4

ההפרש בין הסכומים הוא 3 וההפרש בין הגדלים הוא 3.

כפי שאפשר לראות, החלוקות 2 ו- 3 לעיל הן בעצם אותה חלוקה, אלא שהקבוצות A ו- B התחלפו. אנחנו נספור את שתי החלוקות האלו כשונות. כלומר, כשמוצאים חלוקה מסוימת, אין צורך לבדוק שהיא לא נספרה כבר קודם בהחלפת הקבוצות. אבל, הסדר בין האיברים בקבוצה אינו משנה, ולכן הקבוצה  $\{1, 2, 3\}$  זהה למשל לקבוצה  $\{2, 1, 3\}$ . מבחינתנו זו קבוצה אחת.

## אפשר לראות כי בחלוקה 1 לעיל:

$$A = \{1, 2, 0, 3\}$$

$$B = \{-1\}$$

בקבוצה A גודל הקבוצה הוא 4 סכום האיברים 6

בקבוצה B גודל הקבוצה הוא 1 סכום האיברים הוא -1

ההפרש בין הסכומים הוא 7 וההפרש בין הגדלים הוא 3.

לכן החלוקה הזו לא מקיימת את התנאי, ולכן היא לא תודפס ולא תיספר.

שימו לב שיש עוד קבוצות זרות ומשלימות שמתאימות למערך זה, ואשר מקיימות את התנאי שההפרש בין הסכומים של שתי הקבוצות הוא בדיוק ההפרש בין הגדלים שלהן. למעשה יש 12 חלוקות כאלו, כאשר:

- ב- 8 מתוכן ההפרש בין הסכומים שווה להפרש בין הגדלים שווה ל- 1.
- ב- 2 מתוכן ההפרש בין הסכומים שווה להפרש בין הגדלים שווה ל- 3.
- ב- 2 מתוכן ההפרש בין הסכומים שווה להפרש בין הגדלים שווה ל- 5.

לכן, בהינתן לשיטה הפרמטרים: המערך a לעיל והערך  $\text{diff} = 3$ , השיטה תחזיר 2

וההדפסה צריכה להיראות כך:

$$\{1\} \quad \text{sum} = 1 \quad \text{count} = 1$$

$$\{2 \ 0 \ 3 \ -1\} \quad \text{sum} = 4 \quad \text{count} = 4$$

$$\{2 \ 0 \ 3 \ -1\} \quad \text{sum} = 4 \quad \text{count} = 4$$

$$\{1\} \quad \text{sum} = 1 \quad \text{count} = 1$$

בהינתן לשיטה הפרמטרים: המערך a לעיל והערך  $\text{diff} = 5$ , השיטה תחזיר 2

וההדפסה צריכה להראות כך:

{1 2 0 3 -1 } sum = 5 count = 5

{ } sum = 0 count = 0

{ } sum = 0 count = 0

{1 2 0 3 -1 } sum = 5 count = 5

בהינתן לשיטה הפרמטרים: המערך a לעיל והערך  $\text{diff} = 1$ , השיטה תחזיר 8

וההדפסה צריכה להראות כך:

{1 2 0 } sum = 3 count = 3

{3 -1 } sum = 2 count = 2

{1 2 -1 } sum = 2 count = 3

{0 3 } sum = 3 count = 2

{1 2 } sum = 3 count = 2

{0 3 -1 } sum = 2 count = 3

{1 3 -1 } sum = 3 count = 3

{2 0 } sum = 2 count = 2

{2 0 } sum = 2 count = 2

{1 3 -1 } sum = 3 count = 3

{0 3 -1 } sum = 2 count = 3

{1 2 } sum = 3 count = 2

{0 3 } sum = 3 count = 2

{1 2 -1 } sum = 2 count = 3

{3 -1 } sum = 2 count = 2

{1 2 0 } sum = 3 count = 3

**סדר הדפסת החלוקות לא משנה!**



אם המערך b הוא:

	0	1	2	3	4
b =	1	2	0	4	-1

אין אפשרות לחלק את המערך לשתי קבוצות זרות ומשלימות שהפרש הסכומים שלהן שווה להפרש הגדלים שלהן, ולכן השיטה תחזיר 0 ולא תדפיס כלום.

חתימת השיטה היא:

```
public static int countEqualDiff (int [] arr, int diff)
```

השיטה צריכה להיות רקורסיבית ללא שימוש בלולאות כלל. כך גם כל שיטות העזר שתכתבו (אם תכתבו) לא יכולות להכיל לולאות.

שימו לב,

- אם השיטה שתכתבו רק תחזיר את מספר החלוקות, אבל לא תדפיס אותן, התשובה תקבל לכל היותר 20 נקודות.
- אסור לשנות את המערך במהלך השיטה!

## שאלה 4 - 25 נקודות

נתון מערך דו-ממדי mat המכיל מספרים שלמים (חיובים, שליליים ואפסים), ומספר שלם number. אנחנו מעוניינים לעבור במסלול במערך שמתחיל בתא האחרון שהוא התא (mat.length-1, mat[0].length-1) עד לתא הראשון (0,0), כאשר אפשר לעבור מתא (i, j) אך ורק שורה אחת למעלה או עמודה אחת שמאלה, כלומר לתא (i-1, j) או לתא (i, j-1). בכל ביקור בתא, המספר שנמצא בתא מתווסף (בין אם המספר הוא חיובי או שלילי) למספר number. אפשר לבקר בתא רק אם המספר number הוא חיובי ממש (לפני ואחרי שהתא מתווסף למספר). שימו לב, בכל ביקור בתא - כולל בתאים הראשון והאחרון.

כתבו שיטה סטטית רקורסיבית המקבלת מערך דו-ממדי mat המלא במספרים שלמים, ומחזירה את ערכו של המספר המינימלי שצריך להיות בהתחלה ב-number כדי להצליח לעבור מהתא האחרון לתא הראשון במערך.

לדוגמא, אם המערך הוא:

	0	1	2
0	-2	-3	3
1	-5	-10	1
2	10	30	-5

אז המספר המינימלי ההתחלתי של number צריך להיות 6. שכן, אז אפשר ללכת במסלול הזה:

$$(2,2) \rightarrow (2,1) \rightarrow (2,0) \rightarrow (1,0) \rightarrow (0,0)$$

אם בהתחלה  $number = 6$ , לאחר ביקור בתא  $(2,2)$  ערכו של number יהיה 1, לאחר ביקור בתא  $(2,1)$  ערכו יהיה 31, לאחר ביקור בתא  $(2,0)$  ערכו יהיה 41, לאחר ביקור בתא  $(1,0)$  ערכו יהיה 36 ולאחר ביקור בתא  $(0,0)$  ערכו יהיה 34. כלומר, הערך של number היה חיובי לכל אורך המסלול.

שימו לב, אם היינו הולכים במסלול אחר  $(0,0) \rightarrow (0,1) \rightarrow (0,2) \rightarrow (1,2) \rightarrow (2,2)$ , היינו צריכים ערך של לפחות 7 כדי ש-number תמיד יהיה חיובי.

**חתימת השיטה היא:**

```
public static int minPoints(int [][] m)
```

**השיטה צריכה להיות רקורסיבית ללא שימוש בלולאות כלל. כך גם כל שיטות העזר שתכתבו (אם תכתבו) לא יכולות להכיל לולאות.**

- מותר לשנות את המטריצה במהלך השיטה, אבל המטריצה צריכה לחזור לקדמותה לאחר ביצוע השיטה.
- המטריצה לא בהכרח ריבועית. כלומר, מספר השורות אינו שווה בהכרח למספר העמודות (אבל מספר העמודות זהה בכל שורה).

## שימו לב:

- בכל השאלות - אל תשכחו לתעד (באנגלית בלבד) את מה שכתבתם!
- שמנו טסטר למחלקה Ex13 באתר הקורס. חובה שהטסטר ירוץ ללא שגיאות קומפילציה עם המחלקה שלכם. אם יש שיטה שלא כתבתם, כתבו חתימה והחזירו ערך סתמי כדי שהטסטרים ירוצו עם המחלקות ללא שגיאות קומפילציה. אם הטסטר לא ירוץ בגלל שגיאות קומפילציה, הציון במטלה יהיה אפס **ללא** אפשרות ערעור.
- אם הוספתם הדפסות שלא ביקשנו בשיטות שכתבתם, כדי להיעזר בהן בפתרון השאלה, עליכם למחוק הדפסות אלו לפני ההגשה. הדפסות מיותרות כאלו יורידו בניקוד.

## הגשה

1. הגשת הממ"ן נעשית בצורה אלקטרונית בלבד, דרך מערכת שליחת המטלות.
2. הקפידו ששמות השיטות יהיו **בדיוק** כפי שמוגדר בממ"ן.
3. עליכם לתעד (**באנגלית בלבד**) את כל השיטות שאתם כותבים בתיעוד API ובתיעוד פנימי המסביר מה עשיתם בשיטה. בתיעוד ה-API כתבו גם מה הסיבוכיות של השיטות (בשאלות 1 ו-2), והסבירו את תשובותיכם.
4. את התשובות לכל השאלות עליכם לכתוב במחלקה אחת בשם Ex13 (**בדיוק**). ארזו את הקובץ בתוך קובץ zip. אין לשלוח קבצים נוספים.