Tutorat confinement

Pierre Marion

Version du 14 avril

1 Séance du 10 avril

1.1 Contrôle Physique-Chimie n°3 - Exercice 1

$L_1 = 50dB$ pour $d_1 = 1m$

Question : quelle est la distance minimale pour une intensité sonore de $L_2 = 60dB$? On dispose de 2 relations

(1) : $L = 10\log(\frac{I}{I_0})$

(2) $I = \frac{k}{d^2}$

En inversant la relation (2), on obtient $d_2 = \sqrt{\frac{k}{I_2}}$

Pour trouver k, on écrit que $k = I_1 * d_1^2$ d'où finalement

(3) $d_2 = \sqrt{\frac{I_1 * d_1^2}{I_2}}$

Or $\frac{I_1}{I_0} = 10^{L_1/10}$ et $\frac{I_2}{I_0} = 10^{L_2/10}$ (en inversant (1))

Donc $\frac{I_1}{I_2} = 10^{(L_1-L_2)/10}$

donc on obtient en reprenant (3)

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 * 10^{(L_1-L_2)/10}}$$

1.2 Controle de la qualité du lait

Question 1.1 : comme le pH du lait est toujours supérieur au pKa du couple acide lactique - ions lactate, la base prédomine donc il y a beaucoup d'ions lactate dans le lait.

Question 1.2 : $C_3H_6O_3 + HO^- -> C_3H_5O_3^- + H_20$

Question 1.5 :

On écrit les informations connues sur les deux réactifs :

Acide lactique : volume $V_A = 10mL$, concentration inconnue C_A

HO^- : volume à l'équivalence $V_{eq} = 2,1mL$, concentration molaire $C_B = 0.111mol.L^{-1}$

A l'équivalence, chaque réactif a été introduit dans les memes quantites (car le coefficient stoechiometrique vaut 1), donc

$$C_A = \frac{V_{eq}}{V_A} * C_B$$

En utilisant la relation entre concentration massique et molaire $C_M(A) = C_A * M_A$ donc

$$C_M(A) = \frac{V_{eq}}{V_A} * C_B * M_A$$

AN : $C_M(A) = 2,1g.L^{-1}$, donc le degré Dornic vaut 21, donc le lait n'est pas frais.

Question 1.6 : la valeur particulière de la concentration en soude dans la soude Dornic facilite les calculs car il suffit de changer d'unité pour passer du volume à l'équivalence à la concentration massique en acide lactique (pas de changement de valeur numérique).

1.3 De la brocante à l'orfèvrerie

Les équations dont on a besoin s'écrivent

$$Q = I * \Delta t \tag{1}$$

$$n_{e-} = Q/Q_{mol} \tag{2}$$

$$n_{Ag} = n_{e-} \tag{3}$$

car la réaction d'électrolyse s'écrit $Ag^+ + e^- - > Ag$ (mêmes coefficients stochiométriques pour e^- et Ag).

$$m_{Ag} = M(Ag) * n_{Ag} \tag{4}$$

$$V_{Ag} = m_{Ag}/\rho(Ag) \tag{5}$$

$$ep_{Ag} = V_{Ag}/S \tag{6}$$

Si on met tout bout à bout,

$$ep_{Ag} = \frac{M(Ag) * I * \Delta t}{\rho(Ag) * S * Q_{mol}} \tag{7}$$

Puis application numérique à faire.

2 Séance du 13 avril

2.1 Dessalement de l'eau de mer

1. La concentration massique de $NaCl$ vaut $c_M = 35,6g.kg^{-1}$, et sa masse molaire vaut $M(NaCl) = M(Na+) + M(Cl-) = 58,5g.mol^{-1}$. D'où la concentration molaire en $NaCl$ par kilogramme d'eau vaut :

$$c = \frac{c_M}{M(NaCl)}$$

L'équation de dissolution de $NaCl$ dans l'eau $NaCl \to Na^+ + Cl^-$. Comme les coeffs de $NaCl$ et de Cl^- sont égaux, la concentration molaire en Cl^- est égale à celle en $NaCl$. Don finalement la concentration molaire par litre d'eau en Cl^- s'écrit

$$c_{Cl-} = \frac{c_M}{\rho M(NaCl)}$$

AN : $c_{Cl-} = 0,592 \; mol.L^{-1}$

2.2 Récurrence (feuilles d'exos LLG)

2.2.1 Exercice 1

L'hérédité est basée sur le calcul :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

2.2.2 Exercice 2

Attention à la rédaction : dans (P_n), il faut bien mettre le $\forall x$. L'hypothèse de récurrence s'écrit (P_n) : $\forall x, |\sin(nx)| \leq n|\sin x|$

Initialisation : $\forall x, |\sin(0x)| = 0$ et $0|\sin x| = 0$ donc (P_0) est vraie
Hérédité : On aura besoin de deux propriétés :
— l'inégalité triangulaire ($|a + b| \leq |a| + |b|$)
— l'égalité remarquable sur les sinus : $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

Supposons que (P_n) soit vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si on applique la deuxième formule, on obtient : $\sin((n + 1)x) = \sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)$
donc

$$\begin{aligned}
|\sin((n+1)x)| &\leq |\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)| \quad \text{(égalité sur les sinus)} \\
&\leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\sin(x)\cos(nx)| \quad \text{(inég triang)} \\
&\leq |\sin(nx)||\cos(x)| + |\sin(x)||\cos(nx)| \\
&\leq |\sin(nx)| + |\sin(x)| \quad \text{(voir ci dessous)} \\
&\leq n|\sin(x)| + |\sin(x)| \quad \text{(hyp de recurrence)} \\
&\leq (n+1)|\sin(x)|
\end{aligned}$$

'Disparition des cosinus' : $\forall x, \cos(x)$ est entre -1 et 1 donc $|\cos(x)| \leq 1$. Or $|\sin(nx)| \geq 0$, donc $|\sin(nx)||\cos(x)| \leq |\sin(nx)|$.
On en déduit finalement que (P_{n+1}) est vraie.

2.2.3 Exercice 3

Attention : $a^{bc} = (a^b)^c \neq a^{b^c}$. Par exemple : $(2^3)^3 = 2^{3*3} = 512$ alors que $2^{3^3} = 2^{27} = 134217728$.

On conjecture que (P_n) : $u_n = u_0^{2^n}$. Prouvons-le :

Initialisation : $u_0^{2^0} = u_0^1 = u_0$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n^2 \text{ par la formule de récurrence sur } u_n \\
&= (u_0^{2^n})^2 \text{ par l'hypothèse de récurrence au rang } n \\
&= (u_0^{2^n * 2})
\end{aligned}$$

car $(a^b)^c = (a^{bc})$.
donc finalement $u_{n+1} = u_0^{2^{(n+1)}}$.

3 Séance du 15 avril

3.1 Exercice 4

a. On prouve que $u_n = u_0 + nb$ (par récurrence).
b. On trouve que $l = \frac{b}{1-a}$ (en isolant x).
c. Pour montrer que v_n est une suite géométrique, on écrit

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = au_n + b - (al + b) = a(u_n - l) = av_n$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison a. Donc $v_n = v_0 a^n$ donc

$$u_n = v_n + l = v_0 a^n + l = (u_0 - l)a^n + l$$

d. u_n diverge dans le cas général sauf dans deux cas particuliers où la suite est constante : $a = 0$ (et dans ce cas, $u_n = u_0$ pour tout n) ou $u_0 = l$ (et dans ce cas, $u_n = l$ pour tout n).

3.2 Exercice 5

La composée de f et g est la fonction $f \circ g$ définie comme $f \circ g(x) = f(g(x))$
On conjecture et on prouve par récurrence que

$$f^{(n)}(x) = f \circ \cdots \circ f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 + ncx^2}}$$

Dans la preuve, on utilise $f^{(n+1)} = f^{(n)} \circ f = f \circ f^{(n)}$.

3.3 Exercice 6

On pose $(P_n) : u_n = 2^n + 3^n$.
Initialisation : on prouve la propriété pour $n = 0$ et $n = 1$.
Hérédité : on suppose que la propriété est vraie aux rang n et $n + 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Prouvons que la propriété est vraie au rang $n + 2$: par définition de (u_n),

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

On remplace u_{n+1} et u_n par leurs valeurs en utilisant l'hyp de réc :

$$u_{n+2} = 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) = 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 3 * 2^{n+1} - 2 * 3^{n+1}$$

d'où

$$u_{n+2} = 2 * 2^{n+1} + 3 * 3^{n+1}$$

donc la propriété est vraie au rang $n + 2$.

3.4 Exercice 7

On conjecture que $u_n = 2^n$, et on le prouve par une récurrence à deux termes.
L'hérédité est basée sur le calcul

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}} = \frac{(2^n)^2}{2^{n-1}} = 2^{2n-(n-1)} = 2^{n+1}$$

3.5 Exercice 8

Soit A vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

a. On montre par récurrence simple la propriété : $(P_m) : 2^m \in A$
Initialisation : on montre que (P_0) est vraie car $1 \in A$.
Hérédité : supposons que (P_m) est vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Montrons que (P_{m+1}) est vraie. D'après (P_m), $2^m \in A$ donc d'après (i), $2^{m+1} \in A$ donc (P_{m+1}) est vraie.

b. Montrons d'abord par récurrence descendente que si $N \in A$ alors $\forall n \in \{1, \cdots, N\}, n \in A$ (c'est une reformulation de la propriété (ii)). Pour cela, notons (P_n) la propriété $n \in A$.
Initialisation $(n = N)$: (P_N) est vraie par hypothèse
Hérédité : soit $n \in \{2, \cdots, N\}$ tel que $n \in A$. Alors $n - 1 \in A$ d'après (ii).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut maintenant montrer que $n \in A$. Comme la suite des (2^m) diverge vers $+\infty$, on sait qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq 2^m$. D'après (i), $2^m \in A$ donc $n \in A$ d'après la récurrence ci-dessus.

4 Séance du 17 avril

4.1 Exercice 9

a. On veut montrer que $\Delta_n = (-1)^{n+1}$.

Il suffit de montrer que $\forall n, \Delta_n = -\Delta_{n-1}$. Donc Δ_n est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme -1 donc $\Delta_n = (-1)^{n+1}$.

Pour montrer cela,

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 \\
&= F_n(F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}^2 \\
&= -(F_{n+1}^2 - F_n F_{n+1} - F_n^2) \\
&= -(F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) - F_n^2) \\
&= -(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2) \\
&= -\Delta_{n-1}
\end{aligned}$$

b. On fait le calcul et on remplace α et β à la toute fin (en utilisant $\alpha\beta = -1$).

c. Définition de la divisibilité : soit $a, b \in \mathbb{Z}$. on note que $a|b$ et on dit que a divise b s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$.

Règles de calcul générales : Si $a|b$ et $a|c$ alors $a|b+c$, car $b = ka$, $c = k'a$, donc $b + c = (k + k')a$ donc $a|b + c$.

Si $a|b$ alors $a|nb$.

Si $a|b$ alors $a|(-b)$.

Soit d un diviseur commun de F_n et F_{n+1}. Alors d'après les règles de calcul ci-dessus, $d|F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2$ soit $d|\Delta_n$. Comme Δ_n vaut 1 ou -1, $d|1$ donc $d = 1$.

4.2 Exercice 10

a. On montre par récurrence forte la propriété (P_n) : $u_n \geq n + 1$.

Initialisation : $n = 0$ et 1.

La règle de calcul sur les parties entières dont on a besoin est que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

Pour l'hérédité : on veut montrer P_n donc on suppose la propriété vraie pour $k \in \{1, \cdots, n-1\}$.

$$u_n = u_{\lfloor n/2 \rfloor} + u_{\lfloor n/3 \rfloor} + u_{\lfloor n/6 \rfloor}$$

Si $n \geq 2$, en faisant le calcul, on montre que $n/2, n/3, n/6 \leq n-1$ donc $\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/3 \rfloor, \lfloor n/6 \rfloor \leq n - 1$ donc on peut appliquer l'hyp de récurrence aux trois termes du membre de droite et

$$\begin{aligned}
u_n &\geq \lfloor n/2 \rfloor + 1 + \lfloor n/3 \rfloor + 1 \lfloor n/6 \rfloor + 1 \\
&> (n/2 - 1) + 1 + (n/3 - 1) + 1 + (n/6 - 1) + 1 \\
&> n
\end{aligned}$$

Le dernier argument est que u_n est à valeurs entières (à prouver par récurrence aussi). Donc $u_n \geq n + 1$.

b. Même genre de raisonnement mais en plus difficile.

4.3 Exercice 11

a. En réduisant au même dénominateur, on trouve le résultat avec $m' = m - r$ et $n' = n(q + 1)$. Comme $r \in \{1, \cdots, m - 1\}$, $m' \in \{1, \cdots, m - 1\}$.

b et c. L'idée est d'itérer l'algorithme de division euclidienne et de soustraction de $1/(q+1)$, jusqu'à ce que le numérateur vaille 1, sur le modèle $x = \frac{m}{n} = \frac{1}{q+1} + \frac{m'}{n'} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q'+1} + \frac{m''}{n''} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q'+1} + \frac{1}{q''+1} + \frac{m'''}{n'''}$. Ca fonctionne car le numérateur décroit (ce qui assure que l'algorithme termine en un nombre fini d'étapes) et le dénominateur croit (ce qui assure que les quotients q soient tous différents).

Par exemple, pour $x = 5/17$, on trouve :
$17 = 3 \times 5 + 2$ puis $5/17 = 1/4 + 3/68$
$68 = 3 \times 22 + 2$ puis $3/68 = 1/23 + 1/1564$
On s'arrête comme $1/1564$ a un 1 au numérateur. Finalement, $5/17 = 1/4 + 1/23 + 1/1564$.

L'hypothèse de récurrence exacte est un peu délicate à écrire (et à prouver).

4.4 Exercice 12

On veut montrer que $a = c$ et $b = d$. La négation de cette proposition est $a \neq c$ ou $b \neq d$. On suppose donc (par l'absurde) que $a \neq c$ ou $b \neq d$. Comme

$$\frac{a-c}{\sqrt{2}} = d - b$$

,

$a \neq c$ et $b \neq d$. Comme $a - c \neq 0$, $\frac{a-c}{\sqrt{2}}$ est irrationnel, mais $d - b$ est rationnel.
Contradiction donc l'hypothèse est fausse. Donc $a = c$ et $b = d$.

4.5 Exercice 13

L'étape délicate est $3|p^2 \Rightarrow 3|p$. Un argument possible est basé sur l'existence et l'unicité de la décomposition en nombres premiers : la décomposition de p^2 fait intervenir les mêmes nombres premiers que celle de p (mais en doublant leur puissance). $3|p^2$ implique que 3 (qui est premier) fait partie de la décomposition de p^2, donc de celle de p donc $3|p$.
Généralisation de cette étape : si a premier, alors $a|p^2 \Rightarrow a|p$.
Attention, c'est faux si a n'est pas premier. Par exemple, $12|36$ mais 12 ne divise pas 6.

5 Séance du 21 avril

5.1 Exercice 15

a. On raisonne par l'absure. Si la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel était rationnelle, on pourrait écrire

$$x + \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

avec x irrationnel, $a, c \in \mathbb{Z}$ et $b, d \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$x = \frac{cb - ad}{bd}$$

avec $cb - ad \in \mathbb{Z}$ et $bd \in \mathbb{N}^*$. Donc $x \in \mathbb{Q}$. Contradiction.

b. Même chose (on a le droit d'isoler l'irrationnel car le nombre rationnel est non nul).

c. $\pi + (1 - \pi) = 1$, $\pi + 4\pi = 5\pi$, $\pi \frac{1}{\pi} = 1$, $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ (voir plus bas pourquoi $\sqrt{6}$ est irrationnel).

5.2 Exercice 16

Définitions et règles générales :

Si $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$. En effet, $a|b$ veut dire que $b = na$, $b|c$ veut dire que $c = mb$ donc $c = mna$ donc $a|c$.

$PPCM(a, b)$ est plus petit commun multiple de a et b est le nombre le plus petit divisible par a et par b. Exemples : $PPCM(2, 3) = 6, PPCM(4, 6) = 12$.

$PGCD(a, b)$ est plus grand commun diviseur de a et b est le nombre le plus grand qui divise à la fois a et b. Exemples : $PGCD(12, 8) = 4$.

2ème règle : Si $a|c$ et $b|c$ alors $PPCM(a, b)|c$. Si $a|b$ et $a|c$ alors $a|PGCD(b, c)$.

Solution de l'exercice :

Si $(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ était rationnel, son carré le serait aussi, donc $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ est rationnel. Or $5 + 2\sqrt{6}$ est irrationel donc on arrive à une contradiction.

Pour montrer que $5+2\sqrt{6}$ est irrationel, il suffit de montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel. Pour cela, il faut reprendre le raisonnement avec $\sqrt{2}$. Le seul bout qui diffère est pour montrer que $6|p^2 \Rightarrow 6|p$. Supposons que $6|p^2$. On sait que $3|6$ donc $3|p^2$. D'après l'exercice 13, on en déduit que $3|p$. De même, on trouve que $2|p^2$ donc $2|p$. En utilisant la règle sur le PPCM, on trouve que $6|p$.

5.3 Exercice 17

Définition d'une fraction irréductible : $\frac{p}{q}$ est irréductible si $PGCD(p, q) = 1$.

a. On fait une étude de la fonction $f : x \longmapsto x^5 + x - 1$.

b. On remplace x par $\frac{p}{q}$:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^5 + \frac{p}{q} - 1 = 0$$

donc

$$p^5 = q^5 - pq^4 = q(q^4 - pq^3)$$

Or $q^4 - pq^3 \in \mathbb{Z}$ donc $q|p^5$. Or $PGCD(p, q) = 1$ donc $PGCD(p^5, q) = 1$ (voir raisonnement par l'absurde en dessous). Comme $q|p^5$, alors $q|PGCD(p^5, q) = 1$ donc $q = \pm 1$. Or $q > 0$ donc $q = 1$.

Montrons que si $PGCD(p, q) = 1$ alors $PGCD(p^n, q^m) = 1$: supposons par l'absurde qu'il existe un diviseur d commun à p^n et q^m, avec $d > 1$. On peut toujours supposer d premier. Par le même raisonnement que précédemment, $d|p^n \Rightarrow d|p$ et de même $d|q^m \Rightarrow d|q$. Donc $d|PGCD(p, q)$ donc $d = \pm 1$. Contradiction avec $d > 1$.

On obtient donc l'équation

$$p(p^4 + 1) = 1$$

Comme $p^4 + 1 \in \mathbb{Z}$, $p|1$ donc $p = \pm 1$. A ce stade, on sait que $q = 1$ et $p = \pm 1$, soit $x = \pm 1$. Or en testant avec $x = 1$ et $x = -1$ dans l'équation, ces deux valeurs ne sont pas solutions. D'où une contradiction.

5.4 Exercice 18

Vocabulaire : on dit que p et q sont *premiers entre eux* si $PGCD(p, q) = 1$ (aussi équivalent à dire que p/q est irréductible).

Soit un polynôme à coefficients entiers

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

On résout $P(\frac{p}{q}) = 0$ avec p/q irréductible.

En isolant $a_n(p/q)^n$ et en multipliant par q^n, on obtient

$$a_n p^n = -a_{n-1}p^{n-1}q - ... - a_1 pq^{n-1} - a_0 q^n$$

soit

$$a_n p^n = -q(a_{n-1}p^{n-1} - ... - a_1 pq^{n-2} - a_0 q^{n-1})$$

donc $q|a_n p^n$. Comme q et p sont premiers entre eux, on en déduit que $q|a_n$.
De même, en isolant a_0 et en multipliant par q^n, on trouve que $p|a_0$.

Conclusion : si p/q est une racine de P alors $p|a_0$ et $q|a_n$. Concrètement, étant donné un polynôme, on trouve tous les diviseurs de a_0 et a_n et on teste si chaque possibilité est une racine du polynôme.

Exemple : est ce que $P(x) = 4x^4 - 4x^3 + x^2 - 10x + 5$ admet une racine rationnelle ? Ici $a_0 = 5$ et $a_n = 4$. Donc les valeurs possibles pour p sont 1, -1, 5 et -5, et les valeurs possibles pour q sont 1, 2, 4. Donc les valeurs possibles pour les racines de P sont 1, -1, 1/2, -1/2, 1/4, -1/4, 5, -5, 5/2, -5/2, 5/4, -5/4. On teste en calculant les valeurs de P : $P(1) = -4, P(-1) = 24, P(1/2) = 0, P(-1/2) = 11, P(1/4) = 2,51625, P(-1/4) = 7,640625, P(5) = 1980, P(-5) = 3080$, etc. En testant toutes les valeurs, on trouve que seule la valeur 1/2 est racine de P, donc c'est la seule racine rationnelle de P.

5.5 Exercice supplémentaire

Pour quelles valeurs de n est-ce que $\sqrt{n}$ est irrationnelle ?
Indice : on peut partir de la décomposition de n en facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$$

et trouver une condition sur les $\alpha_1 \dots \alpha_k$.
Commencer par des exemples avec n petit !

6 Séance du 25 avril

6.1 Exercice 19

Analyse : soit f qui vérifie l'égalité demandée.
On calcule $f(1) = 0$.
A y fixé, on dérive par rapport à x :

$$\forall x, y > 0,\ yf'(xy) = f'(x)$$

On choisit $y = 1/x$. On obtient

$$\forall x > 0,\ f'(x) = f'(1)/x$$

donc en intégrant entre 1 et x :

$$f(x) - f(1) = \int_1^x f'(t)dt$$

Comme $f(1) = 0$,

$$f(x) = \int_1^x \frac{f'(1)}{t}dt$$

d'où

$$f(x) = f'(1)(\ln(x) - \ln(1))$$

donc

$$f(x) = f'(1)\ln(x)$$

Synthèse : pour $C \in \mathbb{R}$, on prend f de la forme

$$f(x) = C\ln(x)$$

.

En dérivant, $f'(x) = C/x$ donc $f'(1) = C$.
Alors pour $x, y > 0$,

$$f(xy) = C\ln(xy) = C\ln(x) + C\ln(y) = f(x) + f(y)$$

Conclusion : L'ensemble des fonctions qui vérifient l'égalité demandée est

$$\{f : x \longmapsto C\ln(x), C \in \mathbb{R}\}$$

6.2 Exercice 20

Analyse : soit f deux fois dérivable qui vérifie l'égalité demandée.

a) On prend $y = 0$ dans l'égalité. On trouve $2f(x) = 2f(x) + 2f(0)$ donc $f(0) = 0$.
Ensuite on prend $x = 0$ dans l'égalité. On trouve $f(y) + f(-y) = 2f(0) + 2f(y)$ donc $f(-y) = f(y)$.

b) A y fixé, on dérive 2 fois par rapport à x :

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(x)$$

A x fixé, on dérive 2 fois par rapport à y :

$$f'(x+y) - f'(x-y) = 2f'(y)$$

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2f''(y)$$

donc $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, f''(x) = f''(y)$, donc (en prenant $y = 0$), $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = f''(0)$ donc f'' est constante.

c) f'' est constante donc f' est une fonction affine donc f est un polynôme de degré 2 qui s'écrit $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Or $f(0) = 0$ donc $c = 0$ donc $f(x) = ax^2 + bx$.
Or f est paire donc $f(-x) = a(-x)^2 + b(-x) = ax^2 - bx$
Donc $b = 0$ donc $f(x) = ax^2$.

Synthèse : vérifier que $f(x) = ax^2$ est solution : c'est une fonction deux fois dérivables, elle vérifie l'égalité demandée.

$$f(x+y)+f(x-y) = a(x+y)^2+a(x-y)^2 = a(2x^2+2y^2) = 2(ax^2+ay^2) = 2(f(x)+f(y))$$

Conclusion : L'ensemble des fonctions qui vérifient l'égalité demandée est

$$\{f : x \longmapsto ax^2, a \in \mathbb{R}\}$$

Remarque : contre-exemple pour $f(2x) = f(x) \Rightarrow f$ constante : $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, 0 sinon.

6.3 Exercice 21

On applique la formule de factorisation au-dessus, car $2n+1$ est impair : $7^{2n+1}+6^{2n+1} = 13k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $13 | 7^{2n+1} + 6^{2n+1}$.

6.4 Exercice 22

On peut raisonner par récurrence.

Autrement, si on veut utiliser la formule de sommation d'une suite géométrique

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} = 1 + a + \cdots + a^{n-1}$$

Chaque terme de la somme s'écrit a^k pour $k \in \{0, \cdots n-1\}$. La somme s'écrit $\sum_{k=0}^{n-1} a^k$. Comme $a > 1$ et $k \leq n-1$, $a^k \leq a^{n-1}$.

Comme il y a n termes dans la somme, on obtient que $\sum_{k=0}^{n-1} a^k \leq \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1}$.

7 Séance du 29 avril

7.1 Exercice 23

a. On utilise la formule

$$a^n - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})$$

Comme $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} \in \mathbb{N}$, cette formule notre que $a - 1 | a^n - 1$. Comme $a^n - 1$ est premier, on en déduit que $a - 1 = 1$ ou $a - 1 = a^n - 1$.

Or $a - 1 < a^n - 1$ car $1 + a + \cdots + a^{n-1} > 1$. Donc on ne peut pas avoir $a - 1 = a^n - 1$ donc $a = 2$.

b. On suppose par l'absurde que n n'est pas premier, donc on peut l'écrire $n = pk$ avec $p \geq 2$, et $p < n$. Donc

$$2^n - 1 = (2^p)^k - 1^k = (2^p - 1)(1 + 2^p + 2^{2p} + ... + 2^{p(k-1)})$$

Or $p \geq 2$ donc $2^p - 1 \geq 2$ et $2^p - 1 < 2^n - 1$, donc $2^n - 1$ est divisible par un entier qui n'est ni 1, ni lui-même, donc $2^n - 1$ n'est pas premier. Contradiction avec l'hypothèse. Donc on en déduit que n est premier.

7.2 Exercice 24

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= 2\sum_{k=1}^{n} k - n \\
&= n(n+1) - n \\
&= n^2
\end{aligned}$$

7.3 Exercice 25

On utilise la formule du cours

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Comme $|r| < 1$, $r^{n+1} \to 0$ donc

$$S_n \to \frac{1}{1 - r}$$

7.4 Exercice 26

Soit A l'événement 'obtenir au moins un 6 parmi n lancer'.

Version simple sans somme (intersection d'événements indépendants) : L'événement complémentaire de A est 'ne pas obtenir de 6 parmi n lancers', soit l'intersection des événements B_k : 'ne pas obtenir de 6 au lancer k', pour $k = 1 \dots n$. La probabilité de l'événement complémentaire est $(5/6)^n$, car les B_k sont indépendants, et $\mathbb{P}(B_k) = 5/6$.
Donc la proba de A vaut $1 - (5/6)^n$ qui tend vers 1 quand $n \to \infty$.

Version plus compliquée (union d'événements disjoints) : soit A_k l'événement : « on obtient un 6 au k-ième lancer et pas aux $k-1$ lancers précédents ». Et

$$P(A_k) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$$

Comme A est l'union disjointe des A_k,

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n}$$

7.5 Exercice 27

On a

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et

$$u_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Donc

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{n(2n+2) + n(2n+1) - (2n+1)(2n+2)}{(2n+1)(2n+2)n} \\
&= \frac{-3n-2}{(2n+1)(2n+2)n} \\
&\leq 0
\end{aligned}$$

Si on veut éviter les calculs, on remarque que $\frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{2n+2} \leq \frac{1}{2n}$ et donc $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \leq \frac{1}{n}$

8 Séance du 3 mai

8.1 Exercice 28

On raisonne par récurrence.

Initialisation : $H_1 = 1$ et $2H_2 - 2 = 1$.

Hérédité :

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = \sum_{k=1}^{n-1} H_k + H_n = nH_n - n + H_n = (n+1)H_n - n$$

Or $H_n = H_{n+1} - \frac{1}{n+1}$
donc

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_{n+1} - (n+1)$$

8.2 Exercice 29

Pour $x \neq 1$, on part de la relation

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

On dérive par rapport à x :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{d}{dx} x^k \\
&= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{n} x^k \\
&= \frac{d}{dx} \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1} \\
&= \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)(1)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}
\end{aligned}$$

En multipliant par x :

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = x\frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

Pour $x = 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Lorsque $|x| < 1$, $nx^n \to 0$. Donc, à x fixé, quand $n \to +\infty$,

$$\sum_{k=0}^{n} kx^k \to \frac{x}{(1-x)^2}$$

8.3 Exercice 30

On a

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} kp(1-p)^{k-1}$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n} kx^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

(même relation que dans l'exercice précédent)
Donc en remplaçant x par $1 - p$:

$$E(X) = \frac{1-(n+1)(1-p)^n + n(1-p)^{n+1}}{p}$$

Quand $n \to \infty$,

$$E(X) \to \frac{1}{p} = 6$$

8.4 Exemples de sommes téléscopiques

$$\sum_{k=0}^{4}(2k+1) = \sum_{k=0}^{4}(k+1)^2-k^2 = (1-0)+(4-1)+(9-4)+(16-9)+(25-16) = 25-0 = 25 = 5^2$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}$$

8.5 Exercice 31

a. On utilise

$$\ln(1+\frac{1}{k}) = \ln(k+1) - \ln(k)$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k}) = \ln(n+1)$$

b. On utilise

$$\ln(1-\frac{1}{k^2}) = \ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k)$$

Astuce :

$$\ln(k+1) + \ln(k-1) - 2\ln(k) = \ln(k+1) - \ln(k) - (\ln(k) - \ln(k-1))$$

On téléscope :

$$\sum_{k=2}^{n}(\ln(k+1)-\ln(k))-(\ln(k)-\ln(k-1)) = (\ln(n+1)-\ln(n))-(\ln(2)-\ln(1)) = -\ln(2)+\ln(1+\frac{1}{n})$$

Donc la limite est $-\ln(2)$.