Tutorat confinement

Pierre Marion

Version du 14 avril

1 Séance du 10 avril

1.1 Contrôle Physique-Chimie n°3 - Exercice 1

$L_1 = 50dB$ pour $d_1 = 1m$

Question : quelle est la distance minimale pour une intensité sonore de $L_2 = 60dB$? On dispose de 2 relations

(1) : $L = 10\log(\frac{I}{I_0})$

(2) $I = \frac{k}{d^2}$

En inversant la relation (2), on obtient $d_2 = \sqrt{\frac{k}{I_2}}$

Pour trouver k, on écrit que $k = I_1 * d_1^2$ d'où finalement

(3) $d_2 = \sqrt{\frac{I_1 * d_1^2}{I_2}}$

Or $\frac{I_1}{I_0} = 10^{L_1/10}$ et $\frac{I_2}{I_0} = 10^{L_2/10}$ (en inversant (1))

Donc $\frac{I_1}{I_2} = 10^{(L_1-L_2)/10}$

donc on obtient en reprenant (3)

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 * 10^{(L_1-L_2)/10}}$$

1.2 Controle de la qualité du lait

Question 1.1 : comme le pH du lait est toujours supérieur au pKa du couple acide lactique - ions lactate, la base prédomine donc il y a beaucoup d'ions lactate dans le lait.

Question 1.2 : $C_3H_6O_3 + HO^- -> C_3H_5O_3^- + H_20$

Question 1.5 :

On écrit les informations connues sur les deux réactifs :

Acide lactique : volume $V_A = 10mL$, concentration inconnue C_A

HO^- : volume à l'équivalence $V_{eq} = 2,1mL$, concentration molaire $C_B = 0.111 mol.L^{-1}$

A l'équivalence, chaque réactif a été introduit dans les memes quantites (car le coefficient stoechiometrique vaut 1), donc

$$C_A = \frac{V_{eq}}{V_A} * C_B$$

En utilisant la relation entre concentration massique et molaire $C_M(A) = C_A * M_A$ donc

$$C_M(A) = \frac{V_{eq}}{V_A} * C_B * M_A$$

AN : $C_M(A) = 2,1g.L^{-1}$, donc le degré Dornic vaut 21, donc le lait n'est pas frais.

Question 1.6 : la valeur particulière de la concentration en soude dans la soude Dornic facilite les calculs car il suffit de changer d'unité pour passer du volume à l'équivalence à la concentration massique en acide lactique (pas de changement de valeur numérique).

1.3 De la brocante à l'orfèvrerie

Les équations dont on a besoin s'écrivent

$$Q = I * \Delta t \tag{1}$$

$$n_{e-} = Q/Q_{mol} \tag{2}$$

$$n_{Ag} = n_{e-} \tag{3}$$

car la réaction d'électrolyse s'écrit $Ag^+ + e^- - > Ag$ (mêmes coefficients stochiométriques pour e^- et Ag).

$$m_{Ag} = M(Ag) * n_{Ag} \tag{4}$$

$$V_{Ag} = m_{Ag}/\rho(Ag) \tag{5}$$

$$ep_{Ag} = V_{Ag}/S \tag{6}$$

Si on met tout bout à bout,

$$ep_{Ag} = \frac{M(Ag) * I * \Delta t}{\rho(Ag) * S * Q_{mol}} \tag{7}$$

Puis application numérique à faire.

2 Séance du 13 avril

2.1 Dessalement de l'eau de mer

1. La concentration massique de $NaCl$ vaut $c_M = 35,6g.kg^{-1}$, et sa masse molaire vaut $M(NaCl) = M(Na+) + M(Cl-) = 58,5g.mol^{-1}$. D'où la concentration molaire en $NaCl$ par kilogramme d'eau vaut :

$$c = \frac{c_M}{M(NaCl)}$$

L'équation de dissolution de $NaCl$ dans l'eau $NaCl \to Na^+ + Cl^-$. Comme les coeffs de $NaCl$ et de Cl^- sont égaux, la concentration molaire en Cl^- est égale à celle en $NaCl$. Don finalement la concentration molaire par litre d'eau en Cl^- s'écrit

$$c_{Cl-} = \frac{c_M}{\rho M(NaCl)}$$

AN : $c_{Cl-} = 0,592\ mol.L^{-1}$

2.2 Récurrence (feuilles d'exos LLG)

2.2.1 Exercice 1

L'hérédité est basée sur le calcul :

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

2.2.2 Exercice 2

Attention à la rédaction : dans (P_n), il faut bien mettre le $\forall x$. L'hypothèse de récurrence s'écrit (P_n) : $\forall x, |\sin(nx)| \leq n|\sin x|$

Initialisation : $\forall x, |\sin(0x)| = 0$ et $0|\sin x| = 0$ donc (P_0) est vraie
Hérédité : On aura besoin de deux propriétés :
— l'inégalité triangulaire ($|a+b| \leq |a| + |b|$)
— l'égalité remarquable sur les sinus : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

Supposons que (P_n) soit vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si on applique la deuxième formule, on obtient : $\sin((n+1)x) = \sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)$
donc

$$\begin{aligned}
|\sin((n+1)x)| &\leq |\sin(nx)\cos(x) + \sin(x)\cos(nx)| \quad \text{(égalité sur les sinus)}\\
&\leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\sin(x)\cos(nx)| \quad \text{(inég triang)}\\
&\leq |\sin(nx)||\cos(x)| + |\sin(x)||\cos(nx)|\\
&\leq |\sin(nx)| + |\sin(x)| \quad \text{(voir ci dessous)}\\
&\leq n|\sin(x)| + |\sin(x)| \quad \text{(hyp de recurrence)}\\
&\leq (n+1)|\sin(x)|
\end{aligned}$$

'Disparition des cosinus' : $\forall x, \cos(x)$ est entre -1 et 1 donc $|\cos(x)| \leq 1$. Or $|\sin(nx)| \geq 0$, donc $|\sin(nx)||\cos(x)| \leq |\sin(nx)|$.
On en déduit finalement que (P_{n+1}) est vraie.

2.2.3 Exercice 3

Attention : $a^{bc} = (a^b)^c \neq a^{b^c}$. Par exemple : $(2^3)^3 = 2^{3*3} = 512$ alors que $2^{3^3} = 2^{27} = 134217728$.

On conjecture que (P_n) : $u_n = u_0^{2^n}$. Prouvons-le :

Initialisation : $u_0^{2^0} = u_0^1 = u_0$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n^2 \text{ par la formule de récurrence sur } u_n\\
&= (u_0^{2^n})^2 \text{ par l'hypothèse de récurrence au rang } n\\
&= (u_0^{2^n * 2})
\end{aligned}$$

car $(a^b)^c = (a^{bc})$.
donc finalement $u_{n+1} = u_0^{2^{(n+1)}}$.

3 Séance du 15 avril

3.1 Exercice 4

a. On prouve que $u_n = u_0 + nb$ (par récurrence).
b. On trouve que $l = \frac{b}{1-a}$ (en isolant x).
c. Pour montrer que v_n est une suite géométrique, on écrit

$$v_{n+1} = u_{n+1} - l = au_n + b - (al + b) = a(u_n - l) = av_n$$

donc (v_n) est une suite géométrique de raison a. Donc $v_n = v_0 a^n$ donc

$$u_n = v_n + l = v_0 a^n + l = (u_0 - l)a^n + l$$

d. u_n diverge dans le cas général sauf dans deux cas particuliers où la suite est constante : $a = 0$ (et dans ce cas, $u_n = u_0$ pour tout n) ou $u_0 = l$ (et dans ce cas, $u_n = l$ pour tout n).

3.2 Exercice 5

La composée de f et g est la fonction $f \circ g$ définie comme $f \circ g(x) = f(g(x))$
On conjecture et on prouve par récurrence que

$$f^{(n)}(x) = f \circ \cdots \circ f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+ncx^2}}$$

Dans la preuve, on utilise $f^{(n+1)} = f^{(n)} \circ f = f \circ f^{(n)}$.

3.3 Exercice 6

On pose $(P_n) : u_n = 2^n + 3^n$.
Initialisation : on prouve la propriété pour $n = 0$ et $n = 1$.
Hérédité : on suppose que la propriété est vraie aux rang n et $n+1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Prouvons que la propriété est vraie au rang $n+2$: par définition de (u_n),

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

On remplace u_{n+1} et u_n par leurs valeurs en utilisant l'hyp de réc :

$$u_{n+2} = 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 6(2^n + 3^n) = 5(2^{n+1} + 3^{n+1}) - 3 * 2^{n+1} - 2 * 3^{n+1}$$

d'où

$$u_{n+2} = 2 * 2^{n+1} + 3 * 3^{n+1}$$

donc la propriété est vraie au rang $n+2$.

3.4 Exercice 7

On conjecture que $u_n = 2^n$, et on le prouve par une récurrence à deux termes.
L'hérédité est basée sur le calcul

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}} = \frac{(2^n)^2}{2^{n-1}} = 2^{2n-(n-1)} = 2^{n+1}$$

3.5 Exercice 8

Soit A vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

a. On montre par récurrence simple la propriété : $(P_m) : 2^m \in A$
Initialisation : on montre que (P_0) est vraie car $1 \in A$.
Hérédité : supposons que (P_m) est vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Montrons que (P_{m+1}) est vraie. D'après (P_m), $2^m \in A$ donc d'après (i), $2^{m+1} \in A$ donc (P_{m+1}) est vraie.

b. Montrons d'abord par récurrence descendente que si $N \in A$ alors $\forall n \in \{1, \cdots, N\}, n \in A$ (c'est une reformulation de la propriété (ii)). Pour cela, notons (P_n) la propriété $n \in A$.
Initialisation $(n = N)$: (P_N) est vraie par hypothèse
Hérédité : soit $n \in \{2, \cdots, N\}$ tel que $n \in A$. Alors $n - 1 \in A$ d'après (ii).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On veut maintenant montrer que $n \in A$. Comme la suite des (2^m) diverge vers $+\infty$, on sait qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq 2^m$. D'après (i), $2^m \in A$ donc $n \in A$ d'après la récurrence ci-dessus.

4 Séance du 17 avril

4.1 Exercice 9

a. On veut montrer que $\Delta_n = (-1)^{n+1}$.

Il suffit de montrer que $\forall n, \Delta_n = -\Delta_{n-1}$. Donc Δ_n est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme -1 donc $\Delta_n = (-1)^{n+1}$.

Pour montrer cela,

$$\begin{aligned}
\Delta_n &= F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2 \\
&= F_n(F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}^2 \\
&= -(F_{n+1}^2 - F_nF_{n+1} - F_n^2) \\
&= -(F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) - F_n^2) \\
&= -(F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2) \\
&= -\Delta_{n-1}
\end{aligned}$$

b. On fait le calcul et on remplace α et β à la toute fin (en utilisant $\alpha\beta = -1$).

c. Définition de la divisibilité : soit $a, b \in \mathbb{Z}$. on note que $a|b$ et on dit que a divise b s'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$.

Règles de calcul générales : Si $a|b$ et $a|c$ alors $a|b+c$, car $b = ka$, $c = k'a$, donc $b + c = (k + k')a$ donc $a|b + c$.

Si $a|b$ alors $a|nb$.

Si $a|b$ alors $a|(-b)$.

Soit d un diviseur commun de F_n et F_{n+1}. Alors d'après les règles de calcul ci-dessus, $d|F_nF_{n+2} - F_{n+1}^2$ soit $d|\Delta_n$. Comme Δ_n vaut 1 ou -1, $d|1$ donc $d = 1$.

4.2 Exercice 10

a. On montre par récurrence forte la propriété (P_n) : $u_n \geq n + 1$.

Initialisation : $n = 0$ et 1.

La règle de calcul sur les parties entières dont on a besoin est que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

Pour l'hérédité : on veut montrer P_n donc on suppose la propriété vraie pour $k \in \{1, \cdots, n-1\}$.

$$u_n = u_{\lfloor n/2 \rfloor} + u_{\lfloor n/3 \rfloor} + u_{\lfloor n/6 \rfloor}$$

Si $n \geq 2$, en faisant le calcul, on montre que $n/2, n/3, n/6 \leq n-1$ donc $\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/3 \rfloor, \lfloor n/6 \rfloor \leq n-1$ donc on peut appliquer l'hyp de récurrence aux trois termes du membre de droite et

$$\begin{aligned}
u_n &\geq \lfloor n/2 \rfloor + 1 + \lfloor n/3 \rfloor + 1 \lfloor n/6 \rfloor + 1 \\
&> (n/2 - 1) + 1 + (n/3 - 1) + 1 + (n/6 - 1) + 1 \\
&> n
\end{aligned}$$

Le dernier argument est que u_n est à valeurs entières (à prouver par récurrence aussi). Donc $u_n \geq n + 1$.

b. Même genre de raisonnement mais en plus difficile.

4.3 Exercice 11

a. En réduisant au même dénominateur, on trouve le résultat avec $m' = m - r$ et $n' = n(q + 1)$. Comme $r \in \{1, \cdots, m-1\}$, $m' \in \{1, \cdots, m-1\}$.

b et c. L'idée est d'itérer l'algorithme de division euclidienne et de soustraction de $1/(q+1)$, jusqu'à ce que le numérateur vaille 1, sur le modèle $x = \frac{m}{n} = \frac{1}{q+1} + \frac{m'}{n'} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q'+1} + \frac{m''}{n''} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{q'+1} + \frac{1}{q''+1} + \frac{m'''}{n'''}$. Ca fonctionne car le numérateur décroit (ce qui assure que l'algorithme termine en un nombre fini d'étapes) et le dénominateur croit (ce qui assure que les quotients q soient tous différents).

Par exemple, pour $x = 5/17$, on trouve :
$17 = 3 \times 5 + 2$ puis $5/17 = 1/4 + 3/68$
$68 = 3 \times 22 + 2$ puis $3/68 = 1/23 + 1/1564$
On s'arrête comme $1/1564$ a un 1 au numérateur. Finalement, $5/17 = 1/4 + 1/23 + 1/1564$.

L'hypothèse de récurrence exacte est un peu délicate à écrire (et à prouver).

4.4 Exercice 12

On veut montrer que $a = c$ et $b = d$. La négation de cette proposition est $a \neq c$ ou $b \neq d$. On suppose donc (par l'absurde) que $a \neq c$ ou $b \neq d$. Comme

$$\frac{a-c}{\sqrt{2}} = d - b$$

,

$a \neq c$ et $b \neq d$. Comme $a - c \neq 0$, $\frac{a-c}{\sqrt{2}}$ est irrationnel, mais $d - b$ est rationnel.
Contradiction donc l'hypothèse est fausse. Donc $a = c$ et $b = d$.

4.5 Exercice 13

L'étape délicate est $3|p^2 \Rightarrow 3|p$. Un argument possible est basé sur l'existence et l'unicité de la décomposition en nombres premiers : la décomposition de p^2 fait intervenir les mêmes nombres premiers que celle de p (mais en doublant leur puissance). $3|p^2$ implique que 3 (qui est premier) fait partie de la décomposition de p^2, donc de celle de p donc $3|p$.
Généralisation de cette étape : si a premier, alors $a|p^2 \Rightarrow a|p$.
Attention, c'est faux si a n'est pas premier. Par exemple, $12|36$ mais 12 ne divise pas 6.