Nombres complexes

Chapitre 1

Les nombres complexes constituent une petite partie du programme de mathématiques de B/L, mais une curiosité majeure dans l'histoire de la pensée mathématique. Nés de la volonté de considérer des racines carrées de nombres négatifs pour résoudre des équations polynomiales, ces nombres d'abord appelés « impossibles », qui entretiennent un lien profond avec la trigonométrie, ont posé problème durant des siècles à des mathématiciens réticents à utiliser leur pouvoir calculatoire sans avoir la conviction de leur existence même. On les trouve aujourd'hui au fondement d'applications physiques allant de l'électromagnétisme au calcul quantique, mais aussi de théories mathématiques profondes sur les polynômes, les fonctions, les intégrales ou les surfaces.

L'objet de ce chapitre est de présenter les rudiments de la théorie des nombres complexes, ainsi que ses applications élémentaires à la résolution d'équations polynomiales et à la trigonométrie.

Dans ce chapitre :

- Définition et représentation des nombres complexes, notions de module et d'argument.
- Opérations sur les nombres complexes : interprétation algébrique et géométrique.
- Formes algébrique, trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe.
- Formules d'Euler et de Moivre, formule du binôme, application à des calculs trigonométriques.
- Résolution d'équations polynomiales du second degré à discriminant strictement négatif.
- Racines de l'unité, racines d'un nombre complexe.

1 Introduction historique

Dans le chapitre sur les nombres réels, nous avons vu des formules permettant de déterminer les solutions réelles d'équations du second degré, c'est-à-dire d'équations du type $ax^2 + bx + c = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Au XVI$^{\text{ème}}$ siècle, des mathématiciens tels que Jérôme Cardan se sont intéressés à la résolution d'équations du troisième degré. Dans son *Ars Magna* de 1547, Cardan montre ainsi qu'une solution de l'équation

$$x^3 = px + q \tag{1}$$

est donnée par la formule

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2}}, \tag{2}$$

dans le cas, bien sûr, où la quantité $q^2/4 - p^3/27$ est positive. Cependant, Cardan remarque que si l'on s'autorise à écrire et à manipuler la quantité fictive $\sqrt{-1}$ en suivant les règles de calcul habituelles, la formule (2) permet de déterminer une solution de l'équation (1) même dans le cas où $q^2/4 - p^3/27 < 0$! Par exemple, si $p = 51$ et $q = 104$, la formule (2) donne

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{\sqrt{-2209} + 52} - \sqrt[3]{\sqrt{-2209} - 52} \\ &= \sqrt[3]{\sqrt{-1}\sqrt{2209} + 52} - \sqrt[3]{\sqrt{-1}\sqrt{2209} - 52} \\ &= \sqrt[3]{47\sqrt{-1} + 52} - \sqrt[3]{47\sqrt{-1} - 52}. \end{aligned}$$

Mais on peut vérifier, toujours en étendant les règles de calcul habituelles à la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$, que

$$\begin{aligned} (4 + \sqrt{-1})^3 &= 4^3 + 3 \cdot 4^2\sqrt{-1} + 3 \cdot 4\sqrt{-1}^2 + \sqrt{-1}^3 \\ &= 64 + 48\sqrt{-1} - 12 - \sqrt{-1} \\ &= 52 + 47\sqrt{-1} \end{aligned}$$

et de même, que $(4-\sqrt{-1})^3 = 52-47\sqrt{-1}$, si bien que (2) peut se réécrire

$$x = \sqrt[3]{(4 + \sqrt{-1})^3} + \sqrt[3]{(4 - \sqrt{-1})^3} = 4 + \sqrt{-1} + 4 - \sqrt{-1} = 8.$$

À l'issue de ces calculs purement formels, on obtient donc le nombre réel $x = 8$, dont on vérifie facilement qu'il est effectivement solution de l'équation d'origine (1) lorsque $p = 51$ et $q = 104$.

Le mathématicien italien Gerolamo Cardano (1501 – 1576), dont l'autoportrait est présenté ci-dessus, fut aussi philosophe et médecin, ainsi qu'un inventeur et un astrologue féru de magie et de divination. Auteur prolifique, on lui doit entre autres un Traité des songes *qui lui valut d'être considéré par Sigmund Freud comme un pionnier de l'interprétation des rêves, ainsi que l'un des premiers exposés sur le calcul des probabilités, qu'il mêla à de longues considérations morales sur les jeux de hasard.*

L'intérêt de manipuler la quantité formelle $\sqrt{-1}$, ce « monstre du monde des idées » selon l'expression de Leibniz, apparut à de nombreux mathématiciens à la suite de Cardan. Les nombres de la forme $a+b\sqrt{-1}$, avec a et b réels, furent qualifiés de « sophistiqués », d'« impossibles » ou d'« inexplicables » jusqu'à ce que Descartes les appelle « imaginaires » en 1637. Ce dernier qualificatif resta en usage jusqu'en 1831, où Gauss leur donna leur nom définitif de nombres « complexes ».

Gottfried Wilhelm Leibniz (voir « Zoom » page **??***) écrit au sujet des racines de nombres négatifs : « Ainsi on trouve l'élégante et admirable issue dans ce miracle de l'analyse, monstre du monde des idées, presque amphibie entre l'être et le non-être, que nous appelons racine imaginaire » (*Specimen novum analyseos pro scientia infiniti circa summa et quadraturas*, 1702).*

Durant plusieurs siècles, les nombres complexes firent figure d'artifices calculatoires inexplicablement efficaces, dont l'utilisation n'était pas pleinement acceptée par la communauté mathématique mais seulement tolérée comme une simple facilité de notation. Ils acquirent enfin une légitimité mathématique au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, lorsque William Rowan Hamilton proposa une définition rigoureuse du nombre i (qui se substitue à la notation polémique $\sqrt{-1}$) et de l'ensemble des nombres complexes. Ces derniers n'avaient cependant pas attendu cette légitimation officielle pour permettre le développement de nombreux outils puissants, en mathématiques comme en physique.

2 Nombres complexes, représentation et manipulation

L'intégralité des définitions et des résultats de ce chapitre repose sur la téméraire initiative suivante :

On admet l'existence d'un nombre *imaginaire* i tel que $i^2 = -1$.

La notation $\sqrt{-1}$ utilisée dans l'introduction historique de ce chapitre n'est plus en usage de nos jours. Elle est donc à proscrire.

Plus précisément, on admet que l'on peut réaliser des calculs avec le nombre i en utilisant toutes les règles de calcul valables dans $\mathbb{R}$ qui ne mobilisent pas la relation d'ordre $\leqslant$ ou la notion de signe.

Comme dans le cas des réels étudié au chapitre **??**, on évitera pour l'instant de se demander ce que l'on entend par « nombre ». Ainsi que nous l'avons vu en introduction, cette interrogation tout sauf triviale a tourmenté les mathématiciens durant plusieurs siècles ; heureusement et contrairement à nombre d'entre eux, nous serons libérés de cet insupportable état de flou intellectuel grâce à la construction rigoureuse proposée par Hamilton et étudiée dans l'exercice 50 page 54.

On a vu que la terminologie et le folklore des nombres complexes est une œuvre collégiale des plus grands mathématiciens. La notation i pour désigner le nombre imaginaire $\sqrt{-1}$, quant à elle, fut introduite en 1777 par le Suisse Leonhard Euler (voir page 27).

Pour l'instant, contentons-nous de suivre le parcours historique et examinons quelques propriétés du nombre i.

2.1 Définition, écriture algébrique et représentation

Définition 1 (Nombres complexes)**.** On appelle *nombre complexe* tout nombre de la forme $a + ib$, avec a et b réels. L'ensemble des nombres complexes est noté

$$\mathbb{C} := \{a + ib \, : \, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi, les nombres $1 - 2i$, $3i$, $1 + 2\pi i$ et -2 sont des nombres complexes.

De la même façon qu'un nombre réel quelconque est généralement noté x, la lettre privilégiée pour noter un nombre complexe quelconque est z.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire $x = x + i \cdot 0$, donc $x \in \mathbb{C}$: ainsi, tout nombre réel est notamment un nombre complexe, ce qui se traduit par l'inclusion $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Comme $i \in \mathbb{C}$ et $i \notin \mathbb{R}$, cette inclusion est stricte : on a $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$.

On a admis qu'il est possible de réaliser avec i, et de façon plus générale avec tout nombre de la forme $a + ib$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, des additions, des soustractions, des multiplications et des divisions en utilisant les règles de calcul habituelles (commutativité et associativité de l'addition et de la multiplication, existence d'un opposé pour tout nombre complexe, existence d'un inverse de tout élément non nul pour la multiplication, distributivité de la multiplication sur l'addition) : en termes savants, on a admis que $\mathbb{C}$ est un *corps* (voir la définition **??** page **??**). Voici quelques exemples de calculs dans $\mathbb{C}$:

Il est traditionnel d'écrire un nombre complexe générique sous la forme $a+ib$ plutôt que $a+bi$, mais de préférer la deuxième forme dès lors que l'on donne à a et b des valeurs précises : ainsi, on écrira plutôt $3 + 5i$ que $3 + i5$.

Exemple. On a $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$.

Exemple. On a $(1 - i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$.

Exemple 2 (Puissances de i)**.** On a $i^3 = i^2 i = (-1)i = -i$, et $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$. Pour calculer i^{27}, on écrit

$$i^{27} = i^{24} i^3 = (i^4)^6 i^3 = 1^6 i^3 = i^3 = -i.$$

De façon plus générale, si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$i^n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \equiv 0 \ [4] \\ i & \text{si} \quad n \equiv 1 \ [4] \\ -1 & \text{si} \quad n \equiv 2 \ [4] \\ -i & \text{si} \quad n \equiv 3 \ [4]. \end{cases}$$

Une conséquence de ce fait est que tous les calculs réalisés dans le chapitre ?? restent valables :

Validité des résultats du chapitre ??

Toutes les définitions et toutes les formules du chapitre « Sommes et produits » sont valables pour des termes complexes.

C'est notamment le cas de la formule donnant la valeur d'une somme géométrique et de la formule du binôme, dont nous ferons usage fréquemment et que nous rappelons donc ci-dessous :

Théorème 3 (Somme de termes successifs d'une suite géométrique)**.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \begin{cases} n+1 & \text{si } z = 1 \\ \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1. \end{cases} \tag{3}$$

Plus généralement, si $m, n \in \mathbb{N}$ sont tels que $m \leqslant n$, alors

$$\sum_{k=m}^{n} z^k = z^m + z^{m+1} + \cdots + z^n = \begin{cases} n-m+1 & \text{si } z = 1 \\ \dfrac{z^m - z^{n+1}}{1-z} & \text{si } z \neq 1. \end{cases} \tag{4}$$

Exemple. On a

$$\sum_{k=0}^{19} i^k = \frac{1-i^{20}}{1-i} = 0$$

car $i^{20} = 1$ d'après le résultat donné dans l'exemple 2.

On peut retrouver (laborieusement) ce résultat en écrivant la somme en extension et en effectuant des simplifications après avoir réécrit les puissances de i grâce à l'exemple 2.

Théorème 4 (Formule du binôme de Newton)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous nombres complexes $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}.$$

Exemple. On a

$$(1+i)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{n}{k} i^{n-k}$$

soit, grâce au résultat de l'exemple 2 :

$$\begin{aligned}(1+i)^6 &= i^6 + 6i^5 + 15i^4 + 20i^3 + 15i^2 + 6i + 1\\ &= -1 + 6i + 15 - 20i - 15 + 6i + 1 = -8i.\end{aligned}$$

On ne peut cependant pas transposer toutes les techniques valables dans $\mathbb{R}$ au calcul des nombres complexes, du fait de l'absence de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$:

! Les nombres complexes n'ont pas de signe

On ne peut pas parler du *signe* d'un complexe non réel.
Plus généralement, on ne peut pas écrire de relation du type $z \leqslant z'$ entre deux nombres complexes, sauf si les deux nombres sont réels.

Comme on le verra dans l'exercice 49, on peut tenter de « mettre de l'ordre sur $\mathbb{C}$ », mais la relation d'ordre obtenue ne permet pas de généraliser les propriétés de calcul de $\mathbb{R}$.

Notons qu'il est tout à fait possible qu'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ ait pour carré un nombre réel strictement négatif ; c'est d'ailleurs la propriété qui définit le nombre i, dont le carré vaut -1. Ainsi, si $z \in \mathbb{C}$, dire que $z^2 \leqslant 0$ n'équivaut pas à dire que $z = 0$!

Définition 5 (Écriture algébrique d'un nombre complexe)**.** Si $z \in \mathbb{C}$, l'écriture $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, est appelée *écriture algébrique* du nombre complexe z.

L'écriture algébrique d'un nombre complexe est unique :

Proposition 6 (Unicité de l'écriture algébrique)**.** Si $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et si $z' \in \mathbb{C}$ s'écrit $a' + ib'$ avec $a', b' \in \mathbb{R}$, alors

$$z = z' \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

Démonstration de la proposition 6 — Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé. Il est clair que si $a = a'$ et $b = b'$, alors $a + ib = a' + ib'$.

On suppose réciproquement que $a + ib = a' + ib'$, et on souhaite montrer que $a = a'$ et $b = b'$. Pour ce faire, on écrit $a + ib = a' + ib'$ sous la forme $a - a' = i(b' - b)$. En élevant au carré les deux termes de cette égalité, on obtient $(a - a')^2 = -(b - b')^2$. Le terme (réel) de gauche étant positif et le terme (réel) de droite négatif, on en déduit que tous les deux sont nuls, si bien que $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$, d'où le résultat. □

Cette propriété d'unicité garantit que les définitions suivantes ont un sens :

Définition 7 (Partie réelle, partie imaginaire)**.** Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Le réel a est noté $\mathrm{Re}(z)$ et appelé la *partie réelle* de z.

Le réel b est noté $\mathrm{Im}(z)$ et appelé la *partie imaginaire* de z.

Exemple. Le nombre complexe $z = 3 + 5i$ vérifie $\mathrm{Re}(z) = 3$ et $\mathrm{Im}(z) = 5$.

Le nombre complexe i vérifie $\mathrm{Re}(i) = 0$ et $\mathrm{Im}(i) = 1$.

Définition 8 (Imaginaire pur)**.** Un nombre complexe de la forme ib, avec $b \in \mathbb{R}$, est appelé *imaginaire pur*.

Exemple. Les nombres i, $-\pi i$ et 0 sont des imaginaires purs.

Contrairement à ce que la terminologie pourrait laisser penser, la partie imaginaire d'un nombre complexe n'est pas un imaginaire pur mais un réel : par exemple, $\mathrm{Im}(3+5i)$ vaut 5 et non $5i$!

On peut caractériser les réels et les imaginaires purs grâce à une proposition simple, dont la démonstration est laissée au lecteur :

Proposition 9. Un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$, et on a alors $z = \mathrm{Re}(z)$. Il est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$, et on a alors $z = i\,\mathrm{Im}(z)$.

La partie réelle et la partie imaginaire possèdent une propriété de linéarité souvent utile dans les calculs :

Proposition 10 (Linéarité de Re et Im)**.** Si $z, z' \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z'),$$

$$\mathrm{Re}(z - z') = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z - z') = \mathrm{Im}(z) - \mathrm{Im}(z').$$

Plus généralement, si $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\mathrm{Re}(z+\lambda z') = \mathrm{Re}(z) + \lambda \mathrm{Re}(z') \;\text{ et }\; \mathrm{Im}(z+\lambda z') = \mathrm{Im}(z) + \lambda \mathrm{Im}(z').$$

On dit que les applications

$$\begin{aligned} \mathrm{Re} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \mathrm{Re}(z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{Im} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \mathrm{Im}(z) \end{aligned}$$

sont *linéaires*. Nous reparlerons de ce type d'applications dans le chapitre **??**.

Démonstration de la proposition 10 — On démontre directement la dernière égalité ; les deux premières en résultent en prenant $\lambda = 1$ et $\lambda = -1$.

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $z + \lambda z' = (a + ib) + \lambda(a' + ib') = (a + \lambda a') + i(b + \lambda b')$ donc

$$\mathrm{Re}(z + \lambda z') = a + \lambda a' \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z + \lambda z') = b + \lambda b'.$$

En d'autres termes, on a

$$\mathrm{Re}(z+\lambda z') = \mathrm{Re}(z) + \lambda \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z+\lambda z') = \mathrm{Im}(z) + \lambda \mathrm{Im}(z'),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

On peut montrer par récurrence que plus généralement, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et si $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, on peut écrire que

$$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,\mathrm{Re}\,(z_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \,\mathrm{Im}\,(z_k)\,.$$

Les applications Re et Im ne se comportent pas aussi bien avec le produit de nombres complexes, puisque si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} zz' &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + aib' + iba' + i^2 bb' = aa' - bb' + i(ab' + a'b) \end{aligned}$$

donc

$$\mathrm{Re}(zz') = aa' - bb' \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(zz') = ab' + a'b,$$

soit

$$\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z') \\ \text{et} \quad \mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Re}(z')\mathrm{Im}(z).$$

Ces formules ne sont pas à retenir par cœur, mais il est important (notamment pour les applications trigonométriques que nous verrons plus tard) de savoir les retrouver.

L'un des intérêts principaux des nombres complexes est la relation intime qu'ils entretiennent avec les points du plan :

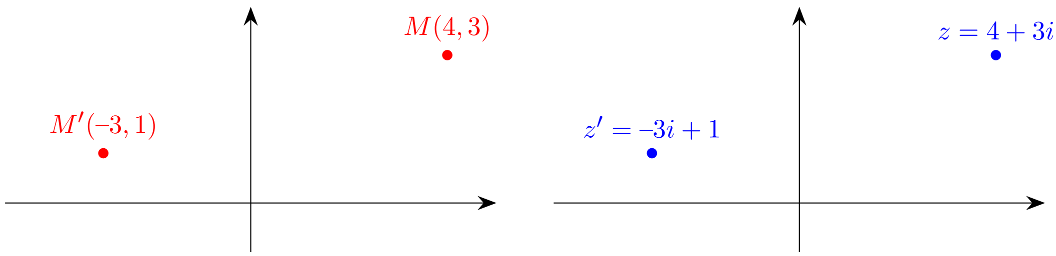
Définition 11 (Image, affixe). Si $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on appelle *image* du nombre complexe z le point du plan de coordonnées (a, b), c'est-à-dire d'abscisse a et d'ordonnée b.

Si M est un point du plan de coordonnées $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on appelle *affixe* de M le nombre complexe $z := a + ib$.

Le plan muni de cette correspondance est appelé *plan complexe*.

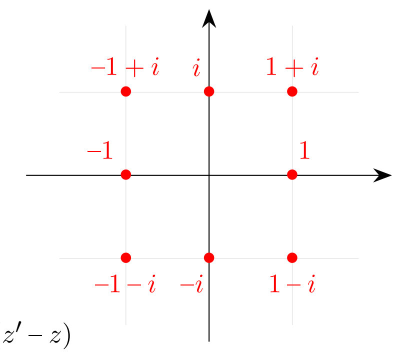
Ainsi, le point M est l'image du nombre z si et seulement si z est l'affixe de M.

Exemple. Si $z = 4 + 3i$ et $z' = -3 + i$, les images de z et z' sont respectivement les points $M(4, 3)$ et $M'(-3, 1)$.



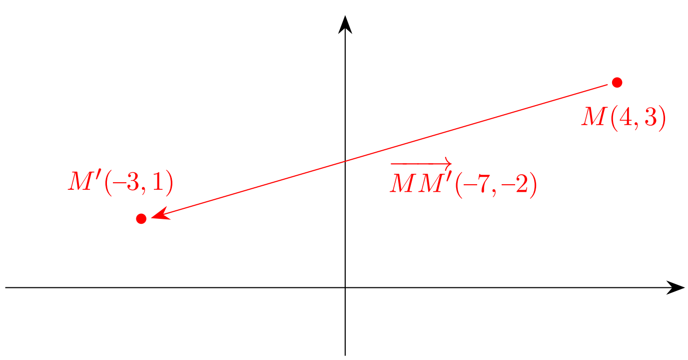
Il n'est pas rare que l'on note directement z le point d'affixe z, comme nous l'avons fait dans la figure de droite ci-desssus. Gardons toutefois en tête qu'il s'agit d'un abus de notation et que le point représenté est *stricto sensu* le point image de z.

Exemple 12 (Quelques nombres complexes d'usage fréquent)**.** On manipule très fréquemment les nombres complexes ± 1, $\pm i$ et $\pm 1 \pm i$. Les images de ces points sont représentées ci-contre.



Si z et z' sont deux nombres complexes d'images respectives M et M', alors le nombre $z' - z$ est l'*affixe du vecteur* $\overrightarrow{MM'}$, au sens où ce vecteur admet $\mathrm{Re}(z' - z)$ pour abscisse et $\mathrm{Im}(z' - z)$ pour ordonnée.

Exemple. Si $z = 4 + 3i$ et $z' = -3 + i$, alors le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ allant du point $M(4, 3)$ au point $M'(-3, 1)$ est de coordonnées $(-7, -2)$ et est donc bien d'affixe $z' - z = -7 - 2i$.



2.2 Conjugué d'un nombre complexe

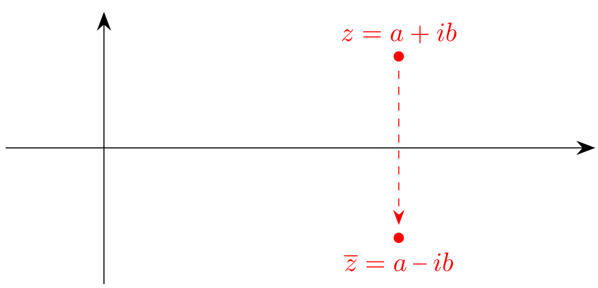
Définition 13 (Conjugué). Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on appelle *conjugué* de z le nombre complexe

$$\overline{z} = a - ib.$$

La notation $\overline{z}$ se lit « conjugué de z » ou « z barre ».

Exemple. On a $\overline{1+3i} = 1-3i$ et $\overline{-5-i} = -5+i$. On a de plus $\overline{2} = 2$ et $\overline{i} = -i$.

Si $z \in \mathbb{C}$, l'image du conjugué $\overline{z}$ est le symétrique de l'image de z par rapport à l'axe des abscisses.



On utilisera souvent la caractérisation suivante, dont la démonstration facile est laissée au lecteur :

Proposition 14 (Caractérisation des réels et des imaginaires purs par le conjugué). Un nombre $z \in \mathbb{C}$ est réel si et seulement si $\overline{z} = z$, et imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.

Avant d'illustrer l'utilisation de cette proposition, passons en revue les propriétés calculatoires de la conjugaison. Celles-ci sont extrêmement agréables :

Proposition 15 (Propriétés calculatoires du conjugué).
Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

(i) $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$.

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

(iii) $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

(iv) Si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \frac{1}{\overline{z_2}}$ et $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Comme d'habitude, ces propriétés se généralisent par récurrence au cas de sommes et de produits d'un nombre fini quelconque de complexes. Ainsi, si $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, on a

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}$$

Démonstration de la proposition 15 — Écrivons $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

(i) On a $\overline{z_1} = a_1 - ib_1$, donc $\overline{(\overline{z_1})} = a_1 + ib_1$, soit $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$.

(ii) En écrivant $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + i(b_1 + b_2)$, on trouve

$$\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - i(b_1 + b_2) = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

(iii) En écrivant $z_1 \times z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$, on obtient

$$\overline{z_1 \times z_2} = a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \times \overline{z_2} &= (a_1 - ib_1) \times (a_2 - ib_2) \\ &= a_1a_2 - ia_1b_2 - ib_1a_2 + i^2b_1b_2 \\ &= a_1a_2 - b_1b_2 - i(a_1b_2 + a_2b_1), \end{aligned}$$

donc on a bien $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

(iv) Supposons que $z_2 \neq 0$. D'après le point (iii) appliqué aux nombres z_2 et $\frac{1}{z_2}$, on a

$$\overline{z_2} \times \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_2 \times \frac{1}{z_2}} = \overline{1} = 1,$$

soit $\overline{\frac{1}{z_2}} = \frac{1}{\overline{z_2}}$. En appliquant à nouveau le point (iii) aux nombres z_1 et $\frac{1}{z_2}$, on trouve alors

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1 \times \frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \times \overline{\frac{1}{z_2}} = \overline{z_1} \times \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},$$

ce qui clôt la preuve. □

ainsi que

$$\overline{\prod_{k=1}^{n} z_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{z_k}.$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

La stratégie de preuve utilisée ici est intéressante : au lieu d'attaquer frontalement le quotient $\frac{z_1}{z_2}$ (dont nous ne connaissons pas encore la forme algébrique), on exploite le lien entre la multiplication et l'inversion pour démontrer successivement que la conjugaison « se comporte bien » par passage à l'inverse, puis par passage au quotient. On retrouvera ce type de raisonnement, entre autres, dans l'étude des propriétés calculatoires des matrices.

Exemple. Soit $z \in \mathbb{C}$. On souhaite montrer que le nombre $z^5 - \overline{z}^5$ est imaginaire pur. Pour cela, on écrit

$$\overline{z^5 - \overline{z}^5} = \overline{z^5} - \overline{\overline{z}^5} = \overline{z}^5 - (\overline{\overline{z}})^5 = \overline{z}^5 - z^5.$$

Ainsi, le nombre $z^5 - \overline{z}^5$ est l'opposé de son conjugué : il est donc imaginaire pur.

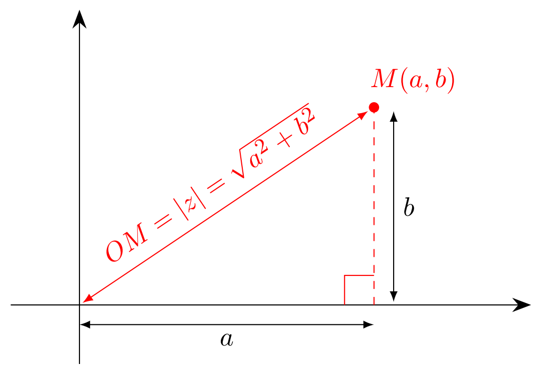
2.3 Module et argument d'un nombre complexe

2.3.1 Module d'un nombre complexe

Définition 16 (Module)**.** Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on nomme *module* du nombre complexe z la quantité

$$|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}.$$

D'après le théorème de Pythagore, si $z \in \mathbb{C}$, le module de z est la distance entre l'origine O du plan, d'affixe 0, et le point M d'affixe z.



Si $z \in \mathbb{R}$, le module de z est aussi sa valeur absolue : le module est donc une *extension* de la valeur absolue à $\mathbb{C}$, ce qui explique que l'on utilise une notation commune pour ces deux notions. On verra que la plupart des propriétés de la valeur absolue sont aussi vérifiées par le module.

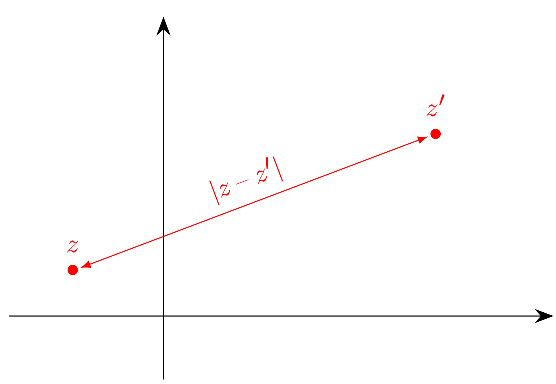
Exemple. On a $|3 + 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ et $|1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

Si $z \in \mathbb{C}$, alors $|z| = 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 0$. Comme $\mathrm{Re}(z)^2$ et $\mathrm{Im}(z)^2$ sont des réels positifs, cette condition équivaut au fait que $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0$, soit $z = 0$. On a donc l'équivalence suivante :

$$z = 0 \iff |z| = 0.$$

Ce résultat est par ailleurs évident graphiquement puisque $|z| = 0$ signifie que la distance entre l'origine du plan et l'image de z est nulle.

Comme dans le cas de la valeur absolue, si $z, z' \in \mathbb{C}$, le module $|z - z'|$ représente une distance : celle entre le point d'affixe z et le point d'affixe z', c'est-à-dire entre l'image de z et l'image de z' (voir schéma ci-contre).



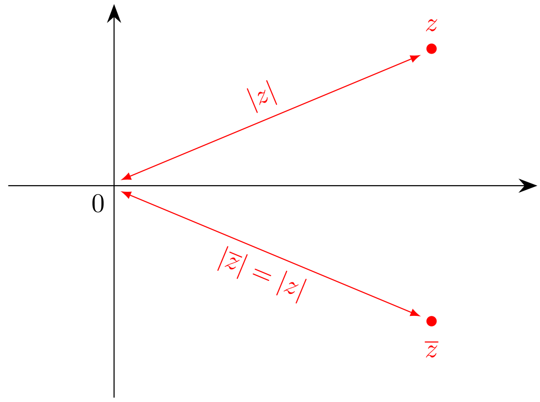
Exemple. Si $z = -\sqrt{2} + 3i$ et $z' = \sqrt{2} + 2i$, alors la distance entre le point d'affixe z et le point d'affixe z' est

$$|z - z'| = |-2\sqrt{2} + i| = \sqrt{(-2\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3.$$

Exemple. Si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\begin{aligned} |\overline{z}| &= |a - ib| \\ &= \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}, \end{aligned}$$

donc $|z| = |\overline{z}|$. Cette relation, qui signifie que les points d'affixes z et $\overline{z}$ sont à la même distance de l'origine, est cohérente avec l'interprétation géométrique du conjugué (voir schéma ci-contre).



Exemple 17 (Équation d'un cercle)**.** Soient $z_0 \in \mathbb{C}$ un nombre complexe d'image M et $r > 0$. L'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z - z_0| = r$ est l'ensemble des points N tels que $MN = r$: il s'agit du cercle de centre M et de rayon r.

Ainsi, l'équation dans le plan du cercle de rayon r dont le centre a pour coordonnées (x_0, y_0) est

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = r \quad \text{soit} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

La formule suivante nous sera très utile pour les calculs :

Proposition 18. Si $z \in \mathbb{C}$, alors

$$|z|^2 = z\overline{z}, \quad \text{c'est-à-dire que} \quad |z| = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Le réel $\sqrt{z\overline{z}}$ existe car $z\overline{z}$ est un réel positif d'après la proposition. En général, on ne peut **pas** écrire ce nombre sous la forme « $\sqrt{z}\sqrt{\overline{z}}$ » puisque z et $\overline{z}$ ne sont pas des réels positifs.

Démonstration de la proposition 18 — Soit $z \in \mathbb{C}$, et soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + ib$. Alors

$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 \\ &= a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Dans le cas où $z \in \mathbb{R}$, on a $\overline{z} = z$, et la proposition 18 redonne l'identité $\sqrt{z^2} = |z|$ déjà vue dans le chapitre sur la droite réelle.

Lors de calculs sur les nombres complexes, il est très commun de multiplier un nombre par son conjugué pour faire apparaître un nombre réel positif à l'aide de la proposition 18.

Exemple. Déterminons la forme algébrique du nombre $\frac{1}{2+i}$: en multipliant le dénominateur par son conjugué, on obtient

$$\frac{1}{2+i} = \frac{2-i}{(2+i)(2-i)} = \frac{2-i}{2^2+1^2} = \frac{2-i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i.$$

Cette méthode permet plus généralement de déterminer la forme algébrique du quotient de deux nombres complexes :

Méthode 19 (Écriture algébrique d'un quotient)**.** Si $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $z_2 \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} &= \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.\end{aligned}$$

Ce résultat n'est pas à apprendre par cœur, mais il faut savoir reproduire ce calcul en détaillant la multiplication par le conjugué.

Exemple. On a

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1^2+1^2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

ainsi que

$$\frac{2+i}{3+2i} = \frac{(2+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-4i+3i-2i^2}{3^2+2^2} = \frac{8-i}{13} = \frac{8}{13} - \frac{1}{13}i.$$

Cette manipulation permet de déterminer aisément l'inverse d'un nombre complexe donné. Il est cependant utile de retenir une formule générale :

Corollaire 20. Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.

En particulier, si $|z| = 1$, alors on a $\frac{1}{z} = \overline{z}$.

Démonstration du corollaire 20 — Il suffit de réarranger les termes de l'égalité $|z|^2 = z\overline{z}$. □

Exemple 21 (Inverse de i). On a notamment

$$\frac{1}{i} = \frac{\overline{i}}{|i|^2} = \frac{-i}{1} = -i.$$

La relation $\dfrac{1}{i} = -i$ est à retenir.

On déduit de la proposition 18 une règle calculatoire sur les modules :

Proposition 22 (Module et produit). Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, alors

$$|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2| \quad \text{et, si } z_2 \neq 0, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z^n| = |z|^n$.

Démonstration de la proposition 22 — Si $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, en utilisant de façon répétée la proposition 18 on trouve

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= \sqrt{(z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)}} = \sqrt{(z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2})} \\ &= \sqrt{z_1\overline{z_1}}\sqrt{z_2\overline{z_2}} \qquad \text{car } z_1\overline{z_1} \in \mathbb{R}_+ \text{ et } z_2\overline{z_2} \in \mathbb{R}_+ \\ &= |z_1| \times |z_2|. \end{aligned}$$

Cette démonstration n'est pas très difficile, mais il faut faire attention ne pas écrire d'expressions qui n'ont pas de sens (comme $\sqrt{z_1}$!).

Par ailleurs, si $z_2 \neq 0$ alors $|z_1| = \left|z_2 \times \dfrac{z_1}{z_2}\right| = |z_2| \times \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$; en divisant par $|z_2|$, on en déduit l'égalité

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|.$$

Comme dans le cas de la valeur absolue, on peut montrer avec la même démonstration que si $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, alors

$$\left|\prod_{k=1}^{n} z_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Enfin, si $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|z^n| = \sqrt{z^n\overline{z^n}} = \sqrt{z^n\overline{z}^n} = \sqrt{(z\overline{z})^n} = \sqrt{z\overline{z}}^n = |z|^n,$$

ce qui clôt la preuve. □

On déduit notamment de la proposition 22 que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, le nombre $\frac{z}{|z|}$, qui existe puisque $|z| > 0$, est de module 1. En effet, on a alors

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{\big||z|\big|} = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

puisque le module $\big||z|\big|$ du réel positif $|z|$ est égal à ce réel lui-même. Cette remarque sera d'un grand intérêt dans la section suivante.

2.3.2 Argument d'un nombre complexe

Démontrons à présent un petit lemme technique dont nous aurons besoin pour progresser.

Lemme 23. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors :

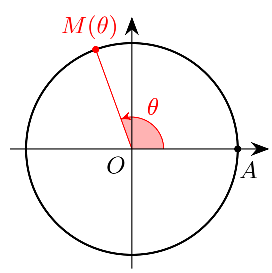
$$|z| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \theta \in \mathbb{R} \, : \, z = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Lorsque cette condition est réalisée, θ est unique modulo 2π : un autre angle $\theta' \in \mathbb{R}$ vérifie $z = \cos\big(\theta'\big) + i\sin\big(\theta'\big)$ si et seulement si $\theta' \equiv \theta \, [2\pi]$.

Démonstration du lemme 23 — Si z est de la forme $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$|z| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = 1$$

d'après la relation fondamentale de la trigonométrie.



Réciproquement, si z est de module 1, alors son image M est sur le cercle unité de $\mathbb{C}$, c'est-à-dire sur le cercle trigonométrique. Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$ mesurant l'angle orienté entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$, où A est le point d'affixe 1, on peut donc écrire $M = M(\theta)$ avec les notations du chapitre **??**, c'est-à-dire que M est le point de coordonnées $(\cos(\theta), \sin(\theta))$; on a donc $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, d'où l'équivalence annoncée.

Si les propositions équivalentes du lemme sont réalisées, un autre angle $\theta' \in \mathbb{R}$ vérifie $z = \cos\big(\theta'\big) + i\big(\theta'\big)$ si et seulement si $M(\theta) = M(\theta')$, ce qui équivaut bien à la relation $\theta' \equiv \theta \, [2\pi]$. □

Si $z \in \mathbb{C}^*$, on a vu plus haut que le nombre complexe $z' := \frac{z}{|z|}$ est de module 1. D'après la proposition 23, il existe donc un angle $\theta \in \mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que $z' = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. On a alors

$$z = |z| \, (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \, .$$

Cette écriture nous inspire les définitions suivantes :

Définition 24 (Argument)**.** Si $z \in \mathbb{C}^*$, on appelle *argument de z* tout nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Ce nombre est unique modulo 2π. On note alors $\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$.

On dit que « l'argument de z vaut θ modulo 2π », ou encore que « θ est un argument de z ». Répétons que $\arg(z)$ n'est défini que modulo 2π : ainsi, on n'écrira pas $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ mais bien $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Définition 25 (Écriture trigonométrique d'un nombre complexe)**.** Si $z \in \mathbb{C}^*$ et si $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z, l'écriture

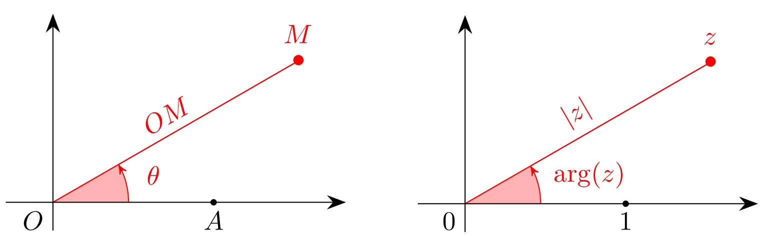
$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

est appelée *écriture trigonométrique* du nombre complexe z.

Le module d'un nombre complexe z représente, on l'a dit, la distance entre l'origine du plan complexe et le point M d'affixe z. L'argument de z, quant à lui, est une mesure (modulo 2π) de l'angle orienté entre le vecteur $\overrightarrow{OA}$ (où O est le point d'affixe 0 et A le point d'affixe 1) et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

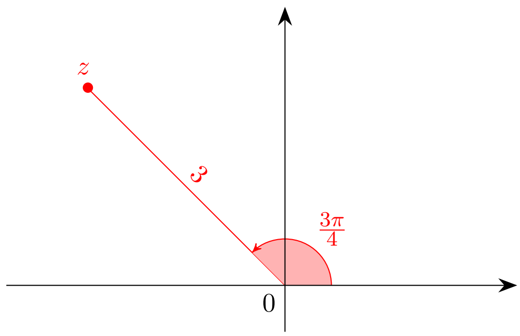
Il est clair en considérant cette interprétation géométrique que deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même module et même argument. On retrouve ce fait en considérant l'écriture trigonométrique des nombres considérés.

Donner le module et l'argument d'un nombre complexe au lieu de ses parties réelle et imaginaire revient en fait à adopter un autre système de repérage des points dans le plan que celui des coordonnées cartésiennes standard que sont l'abscisse et l'ordonnée : on parle de *coordonnées polaires*. On illustre ci-dessous la méthode de repérage d'un point dans le plan complexe en terminologie standard (à gauche) et en terminologie complexe (à droite) du repérage d'un nombre complexe z d'image M à l'aide de son module et de son argument.



Notons que l'interprétation de l'argument en termes d'angle ne permet pas de déterminer l'argument du nombre 0 (dont l'image est l'origine du repère) : pour cette raison, on ne cherchera pas à définir l'argument de 0.

Exemple. L'image du nombre complexe z dont un argument est $\frac{3\pi}{4}$ et dont le module vaut 3 est obtenue graphiquement en plaçant un point à une distance 3 de l'origine du plan dans l'alignement du point $M\left(\frac{3\pi}{4}\right)$:



Pour utiliser une métaphore balistique, on place le point « en visant selon un angle $\frac{3\pi}{4}$ et en tirant à une distance 3 ».

On peut déterminer l'écriture algébrique de z en écrivant

$$z = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = -\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}i.$$

Exemple 26 (Caractérisation des réels et des imaginaires purs par l'argument). Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors

$$z \in \mathbb{R}_+^* \iff \arg(z) \equiv 0\,[2\pi]$$

$$\text{et} \quad z \in \mathbb{R}_-^* \iff \arg(z) \equiv \pi\,[2\pi],$$

donc de façon générale

$$z \text{ est réel} \iff \arg(z) \equiv 0\,[\pi],$$

et de même

$$z \text{ est imaginaire pur} \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi].$$

Ces équivalences sont graphiquement évidentes. Pour les démontrer de façon algébrique, il suffit d'écrire z sous sa forme trigonométrique

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)),$$

avec θ un argument de z. On remarque alors que ce nombre est dans $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $\cos(\theta) > 0$ et $\sin(\theta) = 0$, c'est-à-dire si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$; les autres équivalences se démontrent de la même façon.

Exemple. En situant les points d'affixes 1, -1, i et $-i$ dans le plan complexe, on constate que

$$\arg(1) \equiv 0\,[2\pi], \qquad \arg(-1) \equiv \pi\,[2\pi]$$

$$\arg(i) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \qquad \text{et} \quad \arg(-i) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi].$$

On vérifie que l'on a bien les écritures trigonométriques

$$1 = \cos(0) + i\sin(0), \quad -1 = \cos(\pi) + i\sin(\pi),$$
$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad -i = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Méthode 27 (Détermination d'un argument d'un nombre complexe non nul)**.** Pour déterminer un argument d'un nombre complexe non nul z, on commence par calculer son module $|z|$. On écrit alors le quotient $\frac{z}{|z|}$ sous la forme $a + ib$, avec a et b réels. On essaie ensuite de trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

Alternativement, on peut directement chercher à écrire z sous la forme

$$z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)),$$

avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a automatiquement $\rho = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$.

Déterminer θ est facile dès lors que a et b sont parmi les valeurs remarquables données sur la figure page **??** !

Exemple. On cherche à déterminer un argument de $1 + i$. On a $|1 + i| = \sqrt{2}$, donc

$$\frac{1+i}{|1+i|} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

si bien que $\arg(1+i) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

Exemple. Le nombre $z = -1 + i\sqrt{3}$ s'écrit

$$z = 2\left(-\frac{1}{2} + i\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

donc $|z| = 2$ et un argument de z est $\frac{2\pi}{3}$.

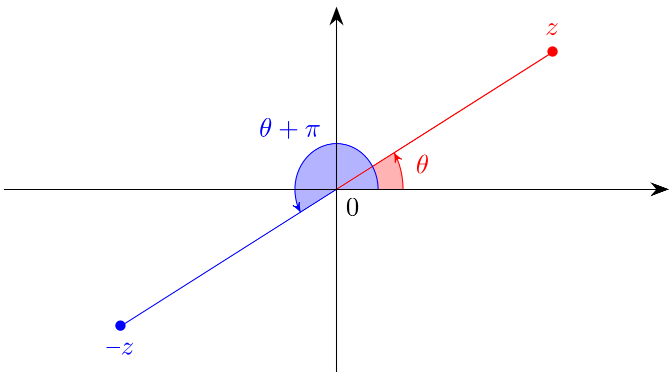
Exemple. On cherche à déterminer un argument de $3 - 3\sqrt{3}i$. On a $|3 - 3\sqrt{3}i| = \sqrt{9 + 9 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6$, donc

$$\frac{3 - 3\sqrt{3}i}{|3 - 3\sqrt{3}i|} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right),$$

d'où $\arg(3 - 3\sqrt{3}i) \equiv -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Entraînez-vous à placer les points correspondants à ces exemples dans le plan complexe et à vérifier que les résultats obtenus sont cohérents avec l'interprétation graphique de l'argument !

Exemple (Argument de l'opposé). Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il est graphiquement clair que $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$.



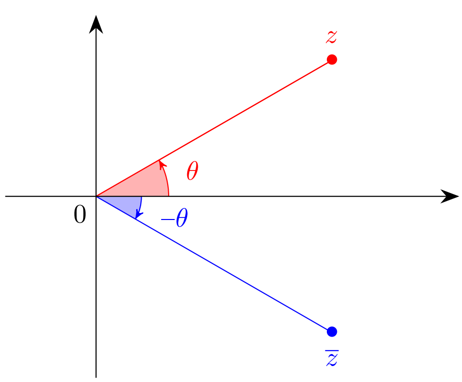
Pour démontrer ce fait rigoureusement, on écrit z sous sa forme trigonométrique $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, avec $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$. On a alors

$$\begin{aligned} -z &= -|z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ &= |z|(-\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = |z|(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)). \end{aligned}$$

L'argument de $-z$ n'est donc pas égal à $-\arg(z)$ mais à $\arg(z) + \pi$ modulo 2π !

On a donc $|-z| = |z|$ (ce que l'on savait déjà) et $\arg(-z) \equiv \theta + \pi\ [2\pi]$, soit $\arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi\ [2\pi]$.

Exemple (Argument du conjugué). Si $z \in \mathbb{C}^*$, il est encore une fois graphiquement clair que $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$ puisque l'image de $\overline{z}$ est symétrique de celle de z par rapport à l'axe des abscisses.



Pour démontrer cette propriété rigoureusement, on peut écrire, en notant $\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$:

$$\begin{aligned}\overline{z} &= \overline{|z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))} \\ &= |z|(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = |z|(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))\end{aligned}$$

et donc $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\,[2\pi]$.

L'argument possède une propriété calculatoire importante aux riches conséquences géométriques :

Proposition 28 (Argument d'un produit)**.** Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$. Alors :

(*i*) $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$.

(*ii*) $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]$.

On peut montrer par récurrence que si $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$, alors

$$\arg\left(\prod_{i=1}^{n} z_i\right) \equiv \sum_{i=1}^{n} \arg(z_i)\,[2\pi].$$

En particulier, si $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\,[2\pi].$$

Les propriétés calculatoires de l'argument rappellent celle du logarithme ; c'est tout sauf un hasard (voir l'exercice **??** page **??**)...

Démonstration de la proposition 28 — Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\arg(z_1) \equiv \theta_1\,[2\pi]$ et $\arg(z_2) \equiv \theta_2\,[2\pi]$.

(*i*) En utilisant les formes trigonométriques

$$z_1 = |z_1|(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \quad \text{et} \quad z_2 = |z_2|(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)),$$

on obtient

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= |z_1||z_2|(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \\ &= |z_1||z_2|\big((\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) \\ &\qquad\qquad + i(\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))\big) \\ &= |z_1||z_2|\big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\big),\end{aligned}$$

d'où $\arg(z_1 z_2) \equiv \theta_1 + \theta_2\,[2\pi]$, soit $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)\ [2\pi]$.

(*ii*) Le nombre $\frac{z_1}{z_2}$ est non nul, donc il admet bien un argument. À l'aide du point (*i*), on peut écrire

$$\arg(z_1) \equiv \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \arg(z_2)\ [2\pi]$$

puisque $z_1 = \frac{z_1}{z_2} \times z_2$, d'où

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)\ [2\pi]. \qquad \square$$

Si le fait de « faire passer un terme de l'autre côté » dans une relation de congruence (c'est-à-dire d'écrire que si $a \equiv b + c\,[d]$ alors $a - b \equiv c\,[d]$) ne vous semble pas tout à fait évident, démontrez-le en revenant à la définition !

Exemple. Si $z \in \mathbb{C}^*$, le conjugué $\overline{z}$ et l'inverse $z^{-1} = \frac{1}{z}$ de z ont le même argument :

$$\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$$

et

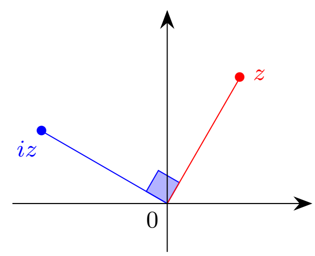
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \arg(1) - \arg(z) \equiv -\arg(z)\ [2\pi].$$

En revanche, les modules de $\overline{z}$ et de $\frac{1}{z}$ ne sont égaux que lorsque $|z| = 1$; on a alors $\overline{z} = \frac{1}{z}$, ce que nous avions déjà vu page 15.

Exemple (Effet d'une multiplication par i). Si $z \in \mathbb{C}^*$, le nombre iz est d'argument

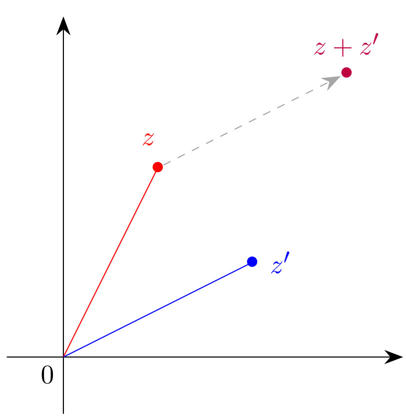
$$\arg(iz) \equiv \arg(i) + \arg(z)\ [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} + \arg(z)\ [2\pi].$$

Comme son module est égal à celui de z (car $|iz| = |i| \cdot |z| = |z|$), l'image de iz est le point obtenu à partir de l'image de z par une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.



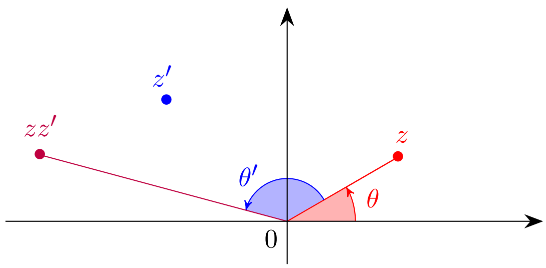
On peut généraliser l'exemple précédent et interpréter géométriquement les opérations effectuées sur les nombres complexes vus comme points du plan :

- L'addition de deux nombres complexes traduit l'addition de deux vecteurs du plan. Si $z, z' \in \mathbb{C}$ ont pour images respectives les points du plan M et M', la somme $z + z'$ a pour image le point M'' tel que $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.



- La multiplication de deux nombres complexes, quant à elle, correspond à une opération sophistiquée sur les points du plan. Le produit des nombres complexes z et z' est le nombre obtenu en multipliant les modules de z et z' et en additionnant leurs arguments. Si l'on note M et M' les images respectives de z et z', l'image de zz' est donc le point M'' du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ tel que $OM'' = OM \times OM'$ et tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{OM''})$ soit égal à $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{OM'})$.

On obtient donc M'' en construisant tout d'abord un point N tel que $\overrightarrow{ON} = OM' \cdot \overrightarrow{OM}$, puis en imprimant à N une rotation de centre O et d'angle θ'. La transformation $M \mapsto N$ est appelée *homothétie de centre O et de rapport OM'*. L'opération $M \mapsto M''$ est donc la composée de cette homothétie par une rotation : on l'appelle *similitude de centre O, de rapport OM' et d'angle θ'*.



2.4 Écriture exponentielle d'un nombre complexe

Prenons une nouvelle initiative audacieuse :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on choisit de noter $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, le nombre complexe $e^{i\theta}$ est l'affixe du point $M(\theta)$ défini dans le chapitre de trigonométrie. Le lemme 23 se réécrit alors en disant qu'un nombre complexe est de module 1 si et seulement s'il est de la forme $e^{i\theta}$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$, et que dans ce cas θ est unique modulo 2π.

L'intérêt de cette nouvelle notation réside dans les règles de calcul suivantes, qui rappellent celles sur les puissances et sur les exponentielles :

Les propriétés calculatoires de l'exponentielle réelle, connues depuis le lycée, sont rappelées dans le chapitre **??**.

Proposition 29 (Règles de calcul sur les exponentielles complexes)**.** Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors :

(i) $e^{i0} = 1$.

(ii) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

(iii) $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$.

(iv) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

Démonstration de la proposition 29 — On peut démontrer les différents points par un calcul direct, mais on présente ici un raisonnement utilisant la proposition 28.

Détailler la preuve calculatoire est un bon exercice de manipulation des complexes et des formules trigonométriques !

(i) Le nombre e^{i0} est le nombre complexe de module 1 et d'argument 0 : c'est donc 1.

(ii) On a $\left|e^{i\theta}e^{i\theta'}\right| = \left|e^{i\theta}\right| \cdot \left|e^{i\theta'}\right| = 1 \cdot 1 = 1$ ainsi que

$$\arg\left(e^{i\theta}e^{i\theta'}\right) \equiv \arg\left(e^{i\theta}\right) + \arg\left(e^{i\theta'}\right) \equiv \theta + \theta' \ [2\pi].$$

Ainsi, le produit $e^{i\theta}e^{i\theta'}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta + \theta'$: c'est donc $e^{i(\theta+\theta')}$.

(iii) On a $\left|\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}\right| = \dfrac{\left|e^{i\theta}\right|}{\left|e^{i\theta'}\right|} = \dfrac{1}{1} = 1$ ainsi que

$$\arg\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}\right) \equiv \arg\left(e^{i\theta}\right) - \arg\left(e^{i\theta'}\right) \equiv \theta - \theta' \ [2\pi].$$

Ainsi, le quotient $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta - \theta'$: c'est donc $e^{i(\theta-\theta')}$.

(iv) D'après le point précédent, on a $e^{-i\theta} = e^{i(0-\theta)} = \frac{e^{i0}}{e^{i\theta}} = \frac{1}{e^{i\theta}}$. Par ailleurs, $\overline{e^{i\theta}}$ est de même module que $e^{i\theta}$, donc de module 1, et son argument est opposé à celui de $e^{i\theta}$ donc vaut $-\theta$ modulo 2π : ainsi, on a bien $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$. □

Exemple. Il est important de connaître les valeurs suivantes :

$$1 = e^{i0}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

On retrouve bien le fait que $\frac{1}{i} = -i$ en écrivant

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i.$$

Malgré ces propriétés de calcul agréables, il est nécessaire de prendre quelques précautions :

$e^{i\theta}$ n'est pas une exponentielle réelle

On peut voir $e^{i\theta}$ comme une simple notation dont l'usage est justifié par les propriétés calculatoires présentées plus haut, et à laquelle on veillera à ne pas appliquer sans discernement les propriétés de l'exponentielle réelle. En particulier :

- Le nombre $e^{i\theta}$ n'a aucune raison d'être un nombre réel strictement positif. Par exemple, $e^{i\pi} = -1$ et $e^{i\frac{\pi}{2}} = i \notin \mathbb{R}$.
- On peut avoir $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ sans que θ et θ' ne soient égaux. Plus précisément, si $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$ alors $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement si $\theta \equiv \theta' \,[2\pi]$. En particulier, on a $e^{i\theta} = 1$ si et seulement si $\theta \equiv 0 \,[2\pi]$.
- La fonction logarithme népérien ln ne s'applique pas aux nombres complexes de la forme $e^{i\theta}$.

En réalité, $e^{i\theta}$ n'est pas qu'une « simple notation » : les quantités e^x et $e^{i\theta}$ sont des valeurs particulières de l'*exponentielle complexe* $z \mapsto e^z$ que nous définirons dans un exercice du chapitre sur les séries (voir l'exercice **??** page **??**).

Définition 30 (Écriture exponentielle d'un nombre complexe)**.** Si $z \in \mathbb{C}^*$ et si $\theta \in \mathbb{R}$ est tel que $\arg(z) \equiv \theta \,[2\pi]$, l'écriture

$$z = |z|e^{i\theta}$$

est appelée l'*écriture exponentielle* du nombre complexe z.

Cette écriture, qui est une version condensée de l'écriture trigonométrique, est particulièrement agréable puisqu'elle permet de visualiser simultanément le module et l'argument d'un nombre complexe donné.

Exemple. Le module de $1-i$ est égal à $\sqrt{2}$ et l'un de ses arguments vaut $-\frac{\pi}{4}$, donc on a $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Exemple 31 (Écriture complexe d'une rotation)**.** D'après l'interprétation du produit donnée page 23, la multiplication d'un nombre complexe par $e^{i\theta}$ équivaut à une rotation de centre O et d'angle θ dans le plan complexe. Pour cette raison, l'application

$$\begin{aligned} r_\theta : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{i\theta} z \end{aligned}$$

est appelée *écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle θ*.

On verra en exercice l'écriture complexe de plusieurs autres transformations géométriques.

Son effet sur un nombre complexe z est très clair en écrivant z sous forme exponentielle : si $z = |z|e^{i\theta'}$ avec $\theta' \in \mathbb{R}$, alors

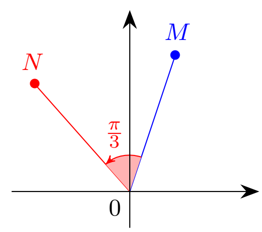
$$r_\theta(z) = e^{i\theta}|z|e^{i\theta'} = |z|e^{i(\theta+\theta')},$$

ce qui signifie que r_θ a pour effet *d'ajouter θ à l'argument de z.*

Exemple. L'image du point $M(1,3)$ d'affixe $1+3i$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ est le point N dont l'affixe vaut

$$e^{i\frac{\pi}{3}}(1+3i) = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1+3i) = \frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i,$$

c'est-à-dire le point $N\left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



L'écriture exponentielle d'un nombre complexe permet de réaliser un certain nombre de calculs sans avoir à revenir à la forme algébrique.

Exemple. Cherchons à calculer le nombre complexe $(2+2i)^{20}$. Pour ce faire, on écrit $2+2i$ sous forme exponentielle : comme $|2+2i| = 2\sqrt{2}$, on peut écrire

$$2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(2+2i)^{20} &= \left(2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{20} = \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{20} e^{i\frac{20\pi}{4}} \\ &= 2^{30}e^{i5\pi} = -2^{30}.\end{aligned}$$

Il est bien sûr possible de calculer $(2+2i)^{20}$ à l'aide de la formule du binôme, mais cela est pour le moins fastidieux...

On utilise ici la relation $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ valable pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, qui se déduit facilement de la proposition 29.

Ces facilités de calcul sur les nombres complexes vont nous permettre de déterminer un certain nombre d'identités trigonométriques grâce à plusieurs formules qui font l'objet de la section suivante.

3 Formules d'Euler et de Moivre

3.1 Formules d'Euler

Commençons par énoncer deux relations très simples et d'une grande utilité calculatoire :

Proposition 32 (Formules d'Euler)**.** Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}.$$

Démonstration de la proposition 32 — Il suffit d'écrire

$$z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) \quad \text{et} \quad \overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z) :$$

on a alors

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) + \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)}{2} = \frac{2\mathrm{Re}(z)}{2} = \mathrm{Re}(z)$$

et

$$\frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) - (\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z))}{2i} = \frac{2i\mathrm{Im}(z)}{2i} = \mathrm{Im}(z),$$

d'où les relations attendues. □

Dans le cas où $z = e^{i\theta}$, les formules d'Euler s'écrivent sous la forme suivante :

Corollaire 33 (Formules d'Euler, version exponentielle)**.** Si $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

On utilise souvent ces relations pour reformuler certaines sommes de termes exponentiels.

Exemple. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Cherchons à calculer le module de $1+e^{i\theta}$, ainsi qu'un argument de ce nombre lorsqu'il est non nul. On écrit pour cela

$$1 + e^{i\theta} = e^{i0} + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Leonhart Euler (1707 – 1783), mathématicien et physicien suisse ayant passé l'essentiel de sa vie en Allemagne et dans l'Empire russe, fut à l'origine de résultats fondamentaux dans des domaines aussi variés que la géométrie, la théorie des graphes, l'analyse réelle et les séries numériques.
C'est à Euler que l'on doit la notion de fonction, ainsi que les notations $f(x)$, $\sum u_k$, e et i utilisées en mathématiques modernes.

Attention à ne pas oublier le i au dénominateur de la deuxième formule d'Euler ! C'est une erreur commune qui mène invariablement à un résultat imaginaire pur là où une quantité réelle est attendue.

en vertu de la première formule d'Euler. On trouve alors le module

$$\left|1+e^{i\theta}\right| = 2\left|e^{i\frac{\theta}{2}}\right| \cdot \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|.$$

Déterminons à présent un argument de $1+e^{i\theta}$. Si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, l'écriture

$$1+e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$$

est l'écriture exponentielle de $1+e^{i\theta}$, donc $\arg(1+e^{i\theta}) \equiv \frac{\theta}{2}\ [2\pi]$. Si $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0$, on obtient l'écriture exponentielle de $1+e^{i\theta}$ en écrivant

$$1+e^{i\theta} = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left(-e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = \underbrace{-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{>0} e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)},$$

ce qui montre que $\arg(1+e^{i\theta}) \equiv \frac{\theta}{2}+\pi\ [2\pi]$.

L'astuce est de factoriser par $e^{i\frac{\theta}{2}}$ pour faire apparaître une somme de deux termes exponentiels conjugués rappelant une formule d'Euler.

Plus généralement, on a la méthode suivante :

Méthode 34 (Factorisation par la demi-somme des arguments). Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

Pour reformuler la quantité $e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2} &= e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}+e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}\right) \\ &= 2e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) \end{aligned}$$

grâce à la première formule d'Euler.

Pour reformuler la quantité $e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2} &= e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}-e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}}\right) \\ &= 2ie^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) \end{aligned}$$

grâce à la deuxième formule d'Euler.

Le terme $\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$ qui apparaît dans la factorisation est appelée *demi-somme des arguments*. On trouve aussi parfois les expressions « angle moitié » ou « arc moitié ».

Exemple 35 (Deux formules classiques de trigonométrie). Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On se propose de trouver une expression des quantités $\cos(a)+\cos(b)$ et $\sin(a)+\sin(b)$ sous la forme de produits. Pour ce faire, on écrit que

$$\cos(a)+\cos(b) = \mathrm{Re}(e^{ia}+e^{ib}) \quad \text{et} \quad \sin(a)+\sin(b) = \mathrm{Im}(e^{ia}+e^{ib})$$

par linéarité de Re et Im ; or on a

$$\begin{aligned} e^{ia}+e^{ib} &= e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{i\frac{b-a}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{a+b}{2}} \cdot 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \quad \text{par la première formule d'Euler} \\ &= 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) + 2i\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right), \end{aligned}$$

donc

$$\cos(a)+\cos(b) = \mathrm{Re}(e^{ia}+e^{ib}) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

et

$$\sin(a)+\sin(b) = \mathrm{Im}(e^{ia}+e^{ib}) = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Ces résultats connus sous le nom de *formules de Simpson* ont été démontrés directement dans l'exercice **??** page **??**. La preuve ci-contre est cependant plus facile à retenir et permet de retrouver rapidement les différentes formules.

On peut utiliser les formules d'Euler pour prouver un résultat fondamental sur les modules, qui étend à $\mathbb{C}$ une inégalité déjà démontrée dans le cas réel :

Théorème 36 (Inégalité triangulaire). Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

$$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|,$$

et $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ si et seulement si l'un des nombres z_1 et z_2 est nul ou si z_1 et z_2 ont le même argument.

Démonstration du théorème 36 — Si z_1 ou z_2 est nul, il est clair que $|z_1+z_2|$ et $|z_1|+|z_2|$ sont égaux. On suppose désormais que ni z_1 ni z_2 n'est nul; ceci implique notamment que z_1 et z_2 admettent un argument et que $|z_1|$ et $|z_2|$ sont strictement positifs.

Écrivons $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ et $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ avec $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + |z_1||z_2|e^{i(\theta_1-\theta_2)} + |z_1||z_2|e^{i(\theta_2-\theta_1)} + |z_2|^2 \\
&= |z_1|^2 + 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2) + |z_2|^2 \qquad (5)
\end{aligned}$$

d'après la première formule d'Euler. Par ailleurs, on a

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2. \qquad (6)$$

Or $\cos(\theta_1 - \theta_2) \leqslant 1$, donc les égalités (5) et (6) montrent que

$$|z_1 + z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2$$

soit, comme $|z_1 + z_2|$ et $|z_1| + |z_2|$ sont positifs,

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

ce qui établit l'inégalité triangulaire.

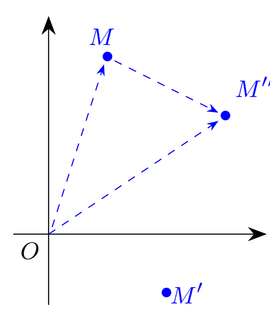
Pour identifier le cas d'égalité, il suffit de remonter le long de la démonstration : on a $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2|$ lorsque $|z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$, ce qui équivaut au fait que $|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2) = |z_1||z_2|$. Comme $|z_1|$ et $|z_2|$ sont strictement positifs, cette égalité est réalisée si et seulement si $\cos(\theta_1 - \theta_2) = 1$, soit $\theta_1 - \theta_2 \equiv 0\,[2\pi]$, c'est-à-dire si z_1 et z_2 ont même argument, ce qu'il fallait démontrer. □

Le recours à la formule d'Euler et à la forme exponentielle n'est pas nécessaire pour démontrer le théorème 36, et le lecteur est invité à en proposer une preuve n'utilisant que la forme algébrique de z_1 et z_2.

Remarque — *On peut à présent comprendre pourquoi l'inégalité triangulaire porte ce nom. Si $z, z' \in \mathbb{C}$ sont d'images respectives M et M' et si M'' est l'image de $z + z'$, alors $|z + z'|$ est la distance OM'', tandis que $|z| = OM$ et $|z'| = MM''$. L'inégalité triangulaire signifie donc que*

$$OM'' \leqslant OM + MM'',$$

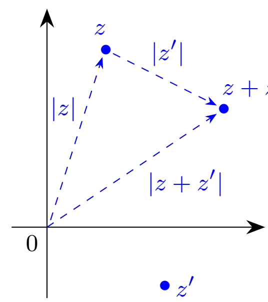
c'est-à-dire qu'il est plus court d'aller en ligne droite du point O au point M'' que de faire un détour par le point M. Le cas d'égalité est celui où M est sur le chemin entre O et M''.



L'inégalité triangulaire possède une généralisation que nous démontrerons en exercice : si $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, alors

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|,$$

*avec égalité si et seulement si les z_k non nuls ont tous même argument. Cette généralisation admet la même interprétation automobiliste que celle présentée dans le cas réel (voir page **??**), à ceci près que l'on considère une voiture capable de se déplacer en ligne droite dans n'importe quelle direction du plan.*



3.2 Formule de Moivre

Par une récurrence facile utilisant la proposition 29, on obtient le résultat suivant, déjà utilisé page 26 :

Proposition 37 (Formule de Moivre)**.** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$, c'est-à-dire que

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Le mathématicien français Abraham de Moivre (1667–1754) est principalement connu pour cette formule, pour la première version d'un résultat fondamental de probabilités (le théorème de Moivre-Laplace*) et pour une légende selon laquelle il aurait calculé le jour de sa mort en déterminant à quel instant la durée de ses nuits de sommeil, qui augmentait de manière arithmétique, atteindrait 24 heures.*
On parle indifféremment de formule de De Moivre *ou de* formule de Moivre*.*

Une application importante de la formule de Moivre réside dans la *linéarisation de polynômes trigonométriques*, qui s'avèrera utile dans le cours d'intégration.

Méthode 38 (Linéarisation de $\cos^n(\theta)$ et $\sin^n(\theta)$)**.**
Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On cherche à exprimer la quantité $\cos^n(\theta)$ comme une somme d'expressions de la forme $\lambda\cos(k\theta)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Pour ce faire, on écrit

$$\begin{aligned}\cos^n(\theta) &= (\cos(\theta))^n \\ &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n \quad \text{d'après la première formule d'Euler} \\ &= \frac{1}{2^n}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^n,\end{aligned}$$

puis on développe cette expression grâce à la formule du binôme et on utilise la formule de Moivre pour obtenir une somme d'exponentielles complexes. À ce stade du calcul, on voit apparaître un schéma symétrique dans la somme écrite en extension, qui permet de rassembler les termes deux par deux (sauf le terme intermédiaire si n est pair) et d'appliquer la première formule d'Euler pour se ramener à des termes réels.

Pour linéariser une expression de la forme $\sin^n(\theta)$, on applique un raisonnement similaire en utilisant la deuxième formule d'Euler.

Exemple. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéarisons l'expression $\cos^3(\theta)$: on a

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \quad \text{d'après la première formule d'Euler}\\
&= \frac{1}{2^3}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^3\\
&= \frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3\left(e^{-i\theta}\right)^0+3\left(e^{i\theta}\right)^2\left(e^{-i\theta}\right)^1+3\left(e^{i\theta}\right)^1\left(e^{-i\theta}\right)^2+\left(e^{i\theta}\right)^0\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)
\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme, soit, en utilisant la formule de Moivre :

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta) &= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}e^{-i0}+3e^{2i\theta}e^{-i\theta}+3e^{i\theta}e^{-2i\theta}+e^{i0}e^{-3i\theta}\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)\\
&= \frac{1}{8}\big(2\cos(3\theta)+3\cdot 2\cos(\theta)\big) \quad \text{par la première formule d'Euler}\\
&= \frac{1}{4}\big(\cos(3\theta)+3\cos(\theta)\big).
\end{aligned}$$

Exemple. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéarisons l'expression $\sin^5(\theta)$: on a

$$\begin{aligned}
\sin^5(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5 \quad \text{d'après la deuxième formule d'Euler}\\
&= \frac{1}{2^5 i^5}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^5\\
&= \frac{1}{32i}\left(\left(e^{i\theta}\right)^5\left(-e^{-i\theta}\right)^0+5\left(e^{i\theta}\right)^4\left(-e^{-i\theta}\right)^1+10\left(e^{i\theta}\right)^3\left(-e^{-i\theta}\right)^2\right.\\
&\qquad \left.+10\left(e^{i\theta}\right)^2\left(-e^{-i\theta}\right)^3+5\left(e^{i\theta}\right)^1\left(-e^{-i\theta}\right)^4+\left(e^{i\theta}\right)^0\left(-e^{-i\theta}\right)^5\right)
\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme.
En utilisant la formule de Moivre, on obtient donc

$$\begin{aligned}
\sin^5(\theta) &= \frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta}e^{0} - 5e^{4\theta}e^{-i\theta} + 10e^{3i\theta}e^{-2i\theta} - 10e^{2i\theta}e^{-3i\theta} + 5e^{i\theta}e^{-4i\theta} - e^{0}e^{-5i\theta}\right)\\
&= \frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta} - e^{-5i\theta} - 5(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) + 10(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\right)\\
&= \frac{1}{32i}\big(2i\sin(5\theta) - 5\cdot 2i\sin(3\theta) + 10\cdot 2i\sin(\theta)\big) \quad \text{par la deuxième formule d'Euler}\\
&= \frac{1}{16}\big(\sin(5\theta) - 5\sin(3\theta) + 10\sin(\theta)\big).
\end{aligned}$$

Inversement, on peut utiliser la formule de Moivre pour exprimer certaines quantités de la forme $\cos(k\theta)$ ou $\sin(k\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ uniquement :

Exemple. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On souhaite calculer $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. On écrit pour cela

$$\begin{aligned}
\sin(4\theta) &= \operatorname{Im}\left(e^{4i\theta}\right)\\
&= \operatorname{Im}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4\right) \quad \text{d'après la formule de Moivre}\\
&= \operatorname{Im}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4\right)\\
&= \operatorname{Im}\Big(\cos^4(\theta) + 4\cos^3(\theta)i\sin(\theta) + 6\cos^2(\theta)i^2\sin^2(\theta)\\
&\qquad\qquad + 4\cos(\theta)i^3\sin^3(\theta) + i^4\sin^4(\theta)\Big) \quad \text{d'après la formule du binôme}\\
&= 4\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 4\cos(\theta)\sin^3(\theta).
\end{aligned}$$

Cette technique se substitue à une application répétée de la formule donnant $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ en fonction de $\sin(a)$, $\sin(b)$, $\cos(a)$ et $\cos(b)$. On pourra calculer $\sin(4\theta)$ à l'aide de cette dernière méthode pour mesurer le gain de temps réalisé.

La formule de Moivre permet aussi de calculer certaines sommes trigonométriques, en les ramenant de façon inattendue à des sommes géométriques.

Exemple 39 (Calcul de sommes trigonométriques)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \not\equiv 0\,[2\pi]$, et soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer les sommes

$$C := \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad I := \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

On remarque que

$$C = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)$$

et que

$$I = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Im}\left(e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)$$

par linéarité des applications partie réelle et partie imaginaire. Or on a, d'après la formule de Moivre :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k = \frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}}$$

car $e^{i\theta} \neq 1$ (puisque $\theta \not\equiv 0\,[2\pi]$). En faisant apparaître la demi-somme des arguments, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{1-e^{i\theta(n+1)}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \cdot \frac{e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} - e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\ &= e^{i\frac{n\theta}{2}} \cdot \frac{2i\sin\left(-\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{2i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{par la deuxième formule d'Euler} \\ &= e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},\end{aligned}$$

si bien que

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = e^{i\frac{n\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

En passant à la partie réelle et à la partie imaginaire, on obtient alors les valeurs des deux sommes que l'on cherchait à calculer :

$$C = \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

On notera la démarche commune à tous les exemples de cette section, qui consiste à voir le nombre réel à calculer comme la partie émergée d'un iceberg complexe sur lequel il est aisé d'effectuer des calculs avant de se ramener à des égalités entre réels par l'application de Re, de Im ou d'une formule d'Euler.

4 Racines d'un nombre complexe

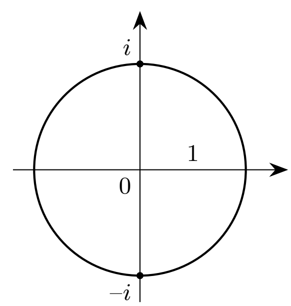
Dans cette section, on s'intéresse à la résolution des équations de la forme $z^n = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$.

4.1 Introduction : les racines deuxièmes des réels négatifs

Le nombre complexe i a été défini comme une quantité imaginaire dont le carré vaut -1. Il en est bien sûr de même pour le nombre $-i$, puisque $(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$. Une question légitime est de savoir s'il s'agit des seuls nombres complexes de carré égal à -1. Pour y répondre, considérons $z \in \mathbb{C}$ solution de l'équation $z^2 = -1$.

On a bien sûr $z \neq 0$, si bien que z admet un argument $\theta \in \mathbb{R}$. Comme -1 est le seul nombre complexe de module 1 et d'argument π modulo 2π, l'équation $z^2 = -1$ se réécrit sous la forme

$$\begin{cases} |z^2| = 1 \\ \arg(z^2) \equiv \pi\ [2\pi] \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} |z|^2 = 1 \\ 2\theta \equiv \pi\ [2\pi] \end{cases} \quad \text{soit encore} \quad \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]. \end{cases}$$



Modulo 2π, les seules valeurs que peut prendre θ sont donc $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ (c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2}$). Comme z est de surcroît de module 1, on en déduit que $z = i$ ou $z = -i$. Le nombre -1, de façon similaire à ce que l'on savait déjà sur les réels positifs, admet donc deux « racines deuxièmes » (qui sont quant à elles des nombres complexes).

De même, si a est un réel strictement négatif, on peut écrire qu'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ non nul vérifie $z^2 = a$ si et seulement si

$$\begin{cases} |z^2| = |a| \\ \arg(z^2) \equiv \pi\ [2\pi] \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} |z|^2 = -a \\ 2\theta \equiv \pi\ [2\pi] \end{cases} \quad \text{soit encore} \quad \begin{cases} |z| = \sqrt{-a} \\ \theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \end{cases}$$

On parle de « racine deuxième » et de « racine carrée » pour ne pas susciter de confusion avec la racine carrée d'un réel positif x, qui est définie comme l'unique racine deuxième positive du nombre x.

donc $z^2 = a$ si et seulement si $z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$.

Ainsi, on voit que tout réel admet deux racines deuxièmes (éventuellement confondues si le réel vaut 0), et ce, quel que soit son signe. On va montrer dans la section 4.4 que cette situation agréablement symétrique peut être généralisée à tous les nombres complexes et à des racines de n'importe quel ordre ; pour l'instant, examinons une conséquence importante pour la résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré à coefficients réels.

4.2 Résolution des équations du second degré à coefficients réels

Comme on l'a vu dans l'introduction historique de ce chapitre, l'utilisation des nombres complexes permet d'instaurer une symétrie dans la résolution des équations polynomiales, en dispensant de se soucier outre mesure de la positivité de certaines quantités. Un bon exemple réside dans la résolution des équations polynomiales du second degré à coefficients réels :

Théorème 40 (Solution des équations polynomiales du second degré à coefficients réels)**.** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

et on pose $\Delta := b^2 - 4ac$. Alors :

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution réelle

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions complexes distinctes et conjuguées

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration du théorème 40 — Le théorème **??** page **??** traite des cas $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$. On suppose à présent que $\Delta < 0$, et on écrit comme à la page **??** que

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

Or on a vu page 35 que Δ admet deux racines deuxièmes imaginaires pures données par $-i\sqrt{-\Delta}$ et $i\sqrt{-\Delta}$, donc $\frac{\Delta}{4a^2}$ admet deux racines deuxièmes imaginaires pures données par $-i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$. On peut donc écrire l'équivalence

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x + \frac{b}{2a} = -i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} = i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a},$$

donc l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions données par

$$x_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \overline{x_1} = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a},$$

ce qu'il fallait démontrer. □

On établit comme dans le cas réel la proposition suivante :

Proposition 41 (Factorisation des polynômes du second degré à coefficients réels.)**.** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$. On appelle x_1 et x_2 les deux racines (éventuellement confondues) données par le théorème 40.

Alors
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$
et
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exemple. L'équation du second degré $x^2 + x + 1 = 0$ admet pour discriminant -3 et pour solutions complexes

$$x_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

On note souvent $j := e^{i\frac{2\pi}{3}}$; on a alors $x_1 = j^2 = \overline{j}$ et $x_2 = j$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $x^2 + x + 1 = (x - x_1)(x - x_2) = (x - \overline{j})(x - j)$.

Exemple. L'équation du second degré $5x^2 + 2x + 1 = 0$, de discriminant -16, admet pour solutions complexes conjuguées

$$x_1 = \frac{-2 - 4i}{10} = -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 + 4i}{10} = -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$5x^2 + 2x + 1 = 5(x - x_1)(x - x_2) = 5\left(x + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right)\left(x + \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right).$$

Remarque — *La résolution des équations du second degré à coefficients complexes de la forme $az^2+bz+c=0$, avec $a,b,c\in\mathbb{C}$ et $a\neq 0$, n'est pas au programme. Toutefois, elle repose exactement sur le même raisonnement que celui qui préside à la résolution des équations à coefficients réels, à ceci près que le discriminant Δ est un nombre complexe dont on doit déterminer une racine deuxième δ pour obtenir les solutions*

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}.$$

Par exemple, l'équation du second degré $z^2-(4-3i)z+1-7i=0$, de discriminant $\Delta = 3+4i = (2+i)^2$, admet pour solutions

$$z_1 = \frac{4-3i-2-i}{2} = 1-2i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{4-3i+2+i}{2} = 3-i.$$

Notons que les solutions d'une équation du second degré à coefficients complexes ne sont plus nécessairement conjuguées.

On verra en exercice comment déterminer explicitement les racines deuxièmes d'un nombre complexe donné.

4.3 Racines n-ièmes de l'unité

Revenons à l'étude d'équations de la forme $z^n = a$. On traite tout d'abord le cas $a = 1$.

Définition 42 (Racine n-ième de l'unité)**.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle *racine n-ième de l'unité* tout nombre complexe $z\in\mathbb{C}$ solution de l'équation $z^n=1$.

Exemple. La seule racine 1-ième de l'unité est 1, tandis que ses racines deuxièmes sont -1 et 1. Le nombre i est une racine quatrième de l'unité puisque $i^4=1$.

En utilisant la méthode esquissée page 35, on peut déterminer toutes les racines n-ièmes de l'unité :

Proposition 43 (Racines n-ièmes de l'unité)**.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Les racines n-ièmes de l'unité sont au nombre de n. Il s'agit des nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k\in[\![0,n-1]\!]$, c'est-à-dire des nombres

$$1,\ e^{\frac{2i\pi}{n}},\ e^{\frac{4i\pi}{n}},\dots,\ e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}},$$

soit encore

$$\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^0, \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^1, \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^2, \dots, \left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^{n-1}.$$

Démonstration de la proposition 43 — Les racines de l'unité sont évidemment non nulles. On considère donc $z \in \mathbb{C}^*$, et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]$. Alors

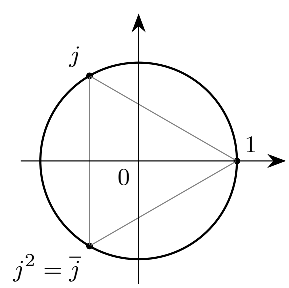
$$z^n = 1 \iff \begin{cases} |z^n| = 1 \\ \arg(z^n) \equiv 0\,[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z|^n = 1 \\ n\theta \equiv 0\,[2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \theta \equiv 0\left[\frac{2\pi}{n}\right] \end{cases}.$$

On a donc

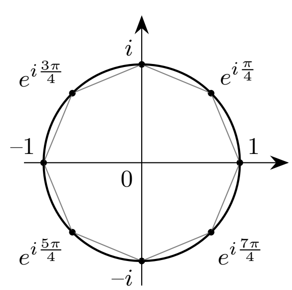
$$z^n = 1 \iff \begin{cases} |z| = 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z} \,:\, \theta = \frac{2k\pi}{n} \end{cases} \iff \exists k \in \mathbb{Z} \,:\, z = e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est donc $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \,:\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Mais cet ensemble contient exactement n éléments distincts, qui sont $1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \ldots, e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$ (en effet, on a $e^{\frac{2in\pi}{n}} = e^{2i\pi} = 1$ donc en énumérant les nombres complexes $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on obtient une séquence de nombres n-périodique), d'où le résultat annoncé. □

Les racines n-ièmes de l'unité sont les affixes des sommets du polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité et dont un sommet est le point d'affixe 1.



> **Exemple.** Les racines troisièmes de l'unité sont les nombres
>
> $$1, \quad j := e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{et} \quad e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2 = \bar{j} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$
>
> Leurs images forment un triangle équilatéral.



> **Exemple.** Les racines 8-ièmes de l'unité sont les nombres
>
> $$1, \quad e^{\frac{2i\pi}{8}} = e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad e^{\frac{2i\pi}{4}} = i, \quad e^{\frac{3i\pi}{4}}, \quad e^{\frac{4i\pi}{4}} = -1,$$
> $$e^{\frac{5i\pi}{4}}, \quad e^{\frac{6i\pi}{4}} = -i \quad \text{et} \quad e^{\frac{7i\pi}{4}}.$$
>
> Leurs images forment un octogone régulier.

Il est clair graphiquement que le point d'affixe -1 est un sommet du polygone formé par les racines n-ièmes de l'unité si et seulement si n est pair. Cette remarque explique pourquoi les solutions *réelles* de l'équation $z^n = 1$ sont -1 et 1 lorsque n est pair, et seulement 1 lorsque n est impair.

Exemple. Si $n \geqslant 2$, la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle. En effet, elle est égale à

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k &= \frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} \quad \text{car } e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1 \\ &= \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}} \quad \text{par la formule de Moivre} \\ &= 0 \quad \text{car } e^{2i\pi} = 1.\end{aligned}$$

Le centre de gravité du polygone formé par les images des racines n-ièmes de l'unité a pour affixe

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k.$$

La relation ci-contre montre qu'il s'agit du point O, ce qui n'est guère surprenant géométriquement.

4.4 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

On peut à présent traiter le problème général et résoudre l'équation $z^n = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ pour un nombre complexe a quelconque.

Définition 44 (Racine n-ième d'un nombre complexe)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. On appelle *racine n-ième de a* tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ solution de l'équation $z^n = a$.

Tout d'abord, si $a = 0$, il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, la seule racine n-ième de a est 0 (puisque si $z \neq 0$ alors $z^n \neq 0$).

On s'intéresse donc désormais au cas où $a \neq 0$.

Proposition 45 (Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in \mathbb{C}^*$. On note $\theta_0 \in \mathbb{R}$ un argument de a. Alors les racines n-ièmes de $a \in \mathbb{C}^*$ sont au nombre de n : il s'agit des nombres complexes de la forme

$$|a|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta_0}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k \in [\![0, n-1]\!],$$

c'est-à-dire, en notant $\xi_0 := |a|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta_0}{n}}$, des nombres

$$\xi_0,\ \xi_0 e^{\frac{2i\pi}{n}},\ \xi_0 e^{\frac{4i\pi}{n}},\ \ldots,\ \xi_0 e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}.$$

La lettre ξ est un « xi » (prononcer « ksi ») minuscule. La majuscule correspondante est Ξ.

Démonstration de la proposition 45 — Si $z \in \mathbb{C}^*$ et si $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z, alors on a

$$z^n = a \iff \begin{cases} |z^n| = |a| \\ \arg(z^n) \equiv \theta_0\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z|^n = |a| \\ n\theta \equiv \theta_0\ [2\pi] \end{cases}$$

soit

$$z^n = a \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|a|} \\ \theta \equiv \frac{\theta_0}{n} \left[\frac{2\pi}{n}\right]. \end{cases}$$

Rappelons que le passage à la racine n-ième dans l'équivalence $|z|^n = |a| \Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|a|}$ est rendu possible par le fait que $|z|$ est un réel positif.

Ainsi, on a

$$z^n = a \iff \exists k \in \mathbb{Z} \,:\, z = \sqrt[n]{|a|}e^{i\left(\frac{\theta_0}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} = \xi_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Or on a vu dans la preuve de la proposition 43 que les valeurs de $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ distinctes sont celles que l'on obtient pour $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a donc

$$z^n = a \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \,:\, z = \xi_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}},$$

d'où le résultat annoncé. □

La forme explicite des racines n'est pas à retenir par cœur. Il importe en revanche de savoir reproduire le raisonnement pour trouver explicitement les racines n-ièmes de nombres complexes dont un argument est connu, ainsi que de connaître le résultat théorique selon lequel un nombre $a \in \mathbb{C}^*$ admet n racines n-ièmes distinctes dans $\mathbb{C}$.

Les images des racines n-ièmes d'un nombre complexe $a \in \mathbb{C}^*$ sont situées sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|a|}$; elles forment une fois encore un polygone régulier (qui n'admet plus le point d'affixe 1 pour sommet si $a \neq 1$).

Exemple. Cherchons les racines troisièmes du nombre $-2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Si $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$z^3 = -2i \iff \begin{cases} |z^3| = 2 \\ \arg(z^3) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z|^3 = 2 \\ 3\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{2} \\ \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$

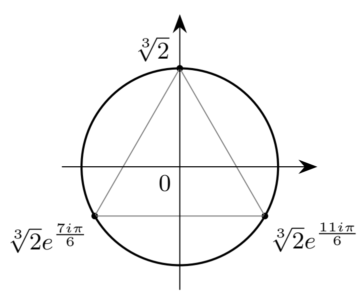
On obtient les trois racines suivantes :

$$\sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{2}} = \sqrt[3]{2}i,$$

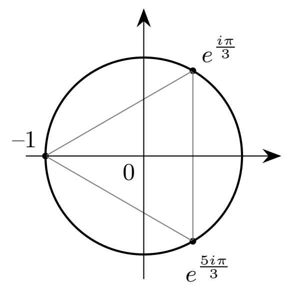
$$\sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{2i\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{\frac{7i\pi}{6}} = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

et

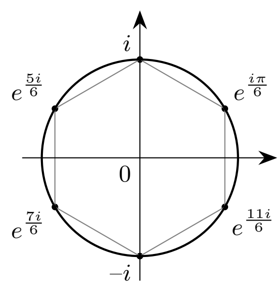
$$\sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{4i\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{\frac{11i\pi}{6}} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right).$$



Exemple. Les racines n-ièmes de -1 sont les nombres complexes $e^{\frac{i\pi}{n}+\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. On observe que parmi ces racines, aucune n'est réelle si n est pair, et seule -1 est réelle si n est impair (voir les schémas ci-contre).



Racines troisièmes de -1



Racines sixièmes de -1

Remarque — *On retrouve ici l'idée selon laquelle la situation asymétrique observée sur $\mathbb{R}$ (l'existence d'une unique racine n-ième pour un nombre réel quelconque si n est pair, existence de deux racines n-ièmes pour les réels strictement positifs et aucune pour les réels strictement négatifs si n est impair) n'est que la trace sur $\mathbb{R}$ d'une situation bien plus symétrique sur $\mathbb{C}$ (l'existence de n racines n-ièmes distinctes pour tout nombre complexe non nul). Nous observerons un phénomène similaire dans le cours sur les polynômes, dans lequel nous effectuerons des incursions sur $\mathbb{C}$ pour obtenir des résultats sur des polynômes à coefficients réels.*
Il est intéressant de noter qu'une branche de l'analyse nommée analyse complexe *exploite pleinement ce principe et permet, entre autres, d'expliquer de nombreuses propriétés des fonctions réelles à partir de leurs prolongements à $\mathbb{C}$, ce qui permet par exemple de réaliser certains calculs d'intégrales sur des intervalles réels à l'aide de détours inattendus et parfois spectaculaires par le plan complexe.*

L'identité d'Euler

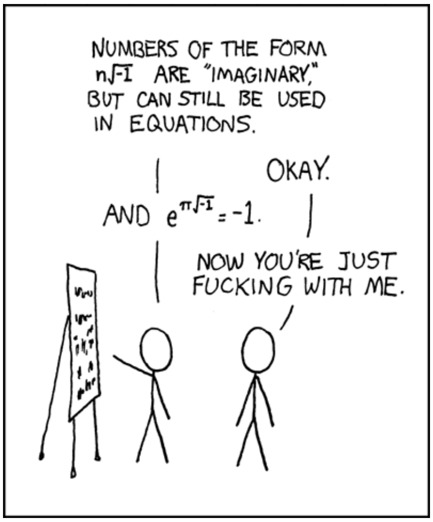
On appelle *identité d'Euler* l'égalité

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Cette équation d'une redoutable simplicité est fréquemment citée comme l'une des plus belles formules des mathématiques, car elle relie cinq constantes fondamentales issues de domaines différents (e, base de l'analyse, i, base de l'algèbre, π, base de la géométrie, et les deux éléments neutres 0 et 1) par le biais de trois opérations fondamentales de l'arithmétique (l'addition, la multiplication et l'exponentiation).

Ayant introduit la notation $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ comme une simple facilité d'écriture, nous ne sommes pas encore en mesure de nous rendre compte du véritable rôle de la constante e et de l'exponentiation dans l'identité d'Euler : tout sera cependant révélé dans l'exercice **??** page **??**.

Exercices du chapitre 1



Solutions des exercices page 56.

1 Compréhension du cours

Exercice 1 (Placer des images dans le plan complexe). Placer les images des nombres complexes suivants dans le plan complexe :

- (i) 2
- (ii) $-i$
- (iii) $1+i$
- (iv) $-1+2i$
- (v) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
- (vi) $1-\sqrt{3}i$

Exercice 2 (Interpréter géométriquement les opérations de $\mathbb{C}$). On pose $z=1+i$. Représenter dans le plan les images des nombres suivants :

- (i) z
- (ii) $2z$
- (iii) $z+1-2i$
- (iv) $-z$
- (v) $\overline{z}$
- (vi) iz
- (vii) $e^{-i\frac{3\pi}{4}}z$
- $(viii)$ z^2
- (ix) z^{-2}

Exercice 3 (Manipuler des formes exponentielles). On pose $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Calculer les nombres suivants et représenter leurs images dans le plan complexe :

(i) z
(ii) $-z$
(iii) $\overline{z}$
(iv) iz
(v) $e^{i\frac{\pi}{3}}z$
(vi) z^2
(vii) z^{-1}
$(viii)$ $\overline{z^2}$

Exercice 4 (Calculer un module). Donner le module des nombres complexes suivants :

(i) -3
(ii) $i\sqrt{2}$
(iii) $3-4i$
(iv) $2-i$
(v) $2+i$
(vi) $1+i\sqrt{2}$
(vii) $\frac{1}{1+i\sqrt{2}}$
$(viii)$ $\frac{1+i}{1-i}$

Exercice 5 (Déterminer un argument). Donner un argument et l'écriture exponentielle des nombres suivants :

(i) -2
(ii) $5i$
(iii) $2+2i$
(iv) $2-2\sqrt{3}i$
(v) $(2+2i)\left(2-2\sqrt{3}i\right)$
(vi) $\frac{i}{i-1}$

Exercice 6 (Déterminer une écriture algébrique). Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

(i) $(2-i)(3+8i)$
(ii) $(i-1)\overline{(3+i)}$
(iii) $(1+2i)^4$
(iv) $\dfrac{1}{2-3i}$
(v) $\dfrac{1}{i-1}$
(vi) $\dfrac{1+2i}{1-2i}$
(vii) $ie^{i\frac{5\pi}{3}}$
$(viii)$ $e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{9}}\right)^3$
(ix) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^5}$

Exercice 7 (Manipuler des arguments). Déterminer un argument de $(1+i)^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$, et en déduire une condition sur n pour que $(1+i)^n$ soit un réel négatif.

Exercice 8 (Linéariser des expressions de la forme $\cos^k(\theta)$ et $\sin^k(\theta)$). Linéariser les expressions suivantes :

(i) $\sin^2(\theta)$
(ii) $\sin^3(\theta)$
(iii) $\cos^4(\theta)$

Exercice 9 (« Délinéariser » des expressions de la forme $\cos(k\theta)$ ou $\sin(k\theta)$). Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$:

(i) $\cos(3\theta)$ (ii) $\sin(3\theta)$ (iii) $\cos(4\theta)$

Exercice 10 (Résoudre des équations polynomiales du second degré dans $\mathbb{C}$).
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations polynomiales suivantes :

(i) $z^2 + 4 = 0$

(ii) $3z^2 + 3z + 1 = 0$

(iii) $2z^2 + 6z + 5 = 0$

(iv) $-z^2 + 2z - 26 = 0$

Exercice 11 (Situer les racines n-ièmes de l'unité).
Donner l'expression des racines cinquièmes de l'unité et représenter leurs images dans le plan complexe.

Exercice 12 (Manipuler les racines n-ièmes de l'unité).
Soit $n \geqslant 1$. Calculer le produit des racines n-ièmes de l'unité.

Exercice 13 (Utiliser les racines de l'unité).
Grâce à la formule donnant la valeur des sommes géométriques, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$.

2 ENTRAÎNEMENT

Exercice 14. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et que $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

Exercice 15. Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants (où $\theta \in \mathbb{R}$) :

(i) $-\sqrt{3} + i$

(ii) $i\sqrt{3} - 1$

(iii) $-2e^{-i\frac{23\pi}{3}}$

(iv) $(1 + i)^7$

(v) $i(1 + i)^5(1 - i)^3$

(vi) $\sin(\theta) + i\cos(\theta)$

(vii) $\dfrac{4e^{i\frac{\pi}{7}}}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{5}}\right)^2}$

$(viii)$ $\dfrac{-i\sqrt{2}}{1+i}$

(ix) $\dfrac{i}{\sqrt{3}+i} \cdot \dfrac{1+i}{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$

(x) $\dfrac{\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)}{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}$

Exercice 16. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

(i) $4e^{-i\frac{29\pi}{3}}$

(ii) $-3ie^{i\frac{5\pi}{3}}$

(iii) $\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{19}$

(iv) $\overline{(2 + 2i)^6}$

(v) $\dfrac{(1+i)^{1000}}{(i-\sqrt{3})^{3000}}$

(vi) $(1 - 2i)^{300} \cdot \overline{(1 - 2i)}^{301}$

Exercice 17. On pose $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Donner l'écriture algébrique de z_1 et de z_2.
2. Donner l'écriture algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 18. Soit $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Calculer z^2 et donner sa forme exponentielle.
2. En déduire le module et l'argument de z.
3. Déterminer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 19. Donner un ensemble A tel que l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & A & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & (\rho,\theta) & \longmapsto & \rho e^{i\theta} \end{array}$$

soit bijective.

Exercice 20. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ le nombre complexe $(1+i\sqrt{3})^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 21. Quels sont les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ ont le même module ?

Exercice 22. Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\theta_1 \not\equiv \pi\ [2\pi]$ et $\theta_2 \not\equiv \theta_1 + \pi\ [2\pi]$. Donner le module de chacun des nombres complexes suivants :

(i) $1 - e^{i\theta_1}$

(ii) $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$

(iii) $\dfrac{1+e^{i\theta_1}}{1+e^{i\theta_2}}$

(iv) $\dfrac{e^{i\theta_1} - e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}}$

Exercice 23. Linéariser les expressions suivantes :

(i) $\sin^5(\theta)$

(ii) $\cos^6(\theta)$

(iii) $\sin^7(\theta)$

(iv) $\sin^8(\theta)$

(v) $\cos(\theta)\sin^2(\theta)$

(vi) $\cos^3(\theta)\sin^3(\theta)$

Exercice 24. Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$:

(i) $\cos(6\theta)$

(ii) $\sin(6\theta)$

(iii) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 6\theta\right)$

Exercice 25. Si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les quantités suivantes :

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \sin(k\theta)$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(2k\theta)$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)\theta)$

Exercice 26. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que les suites

$$(C_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sont bornées.

Exercice 27. Démontrer la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 8\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)\sin(4x) = 1 - \cos(6x) - \cos(8x) + \cos(10x).$$

Exercice 28 (Inégalité triangulaire généralisée). Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$. En considérant la quantité

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \overline{\sum_{k=1}^{n} z_k}$$

et en s'inspirant de la démonstration de l'inégalité triangulaire proposée dans le cours, montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|,$$

avec égalité si et seulement si tous les z_k ont même argument.

Exercice 29. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ de module 1, tels que $zz' \neq -1$. On pose $z'' = \dfrac{z+z'}{zz'+1}$. Montrer que l'on a $z'' \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

Exercice 31. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

(i) $z^3 = 2$	(iv) $z^4 = 1 + i$
(ii) $z^3 = i$	(v) $z^5 = 32$
(iii) $z^4 = -1$	(vi) $z^6 = -i$

3 EXERCICES CLASSIQUES ET D'ANNALES

Exercice 32 (Ulm 2010). À l'aide de la formule de Moivre, montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \quad \text{et} \quad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

Exercice 33. Soit $n \geqslant 2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$.

Exercice 34 (ENS Lyon 2021).

1. Justifier que pour tout $x \in]0,\pi]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2\cos(kx) = e^{ikx} + e^{-ikx}$.
2. En déduire que pour tout $x \in]0,\pi]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Exercice 35 (Ulm 2018). Soit $k \geqslant 2$ un entier et soit $\omega := e^{\frac{2i\pi}{k}}$.

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Si j est un multiple de k, que vaut ω^j ?
2. Pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, montrer que

$$|1+\omega^\ell| = 2\left|\cos\left(\frac{\pi\ell}{k}\right)\right|.$$

3. Soit $j \in \mathbb{N}$. Calculer la quantité $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j}$ selon que j est un multiple de k ou non.
4. Montrer que si n est un entier strictement supérieur à k, alors

$$\sum_{\substack{j=0 \\ j \text{ est multiple de } k}}^{n} \binom{n}{j} = \frac{2^n}{k} + \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k-1}\left(1+\omega^\ell\right)^n.$$

4 Quelques applications géométriques

Il est conseillé de traiter les exercices de cette section à la suite les uns des autres.

Exercice 36. Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et distincts, admettant pour images respectives les points M et M'. En mettant z et z' sous forme exponentielle, montrer que O, M et M' sont alignés si et seulement si $z\overline{z'} \in \mathbb{R}$, et que cette condition est équivalente à $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}$.

Exercice 37. Soient z, z' et z'' trois nombres complexes distincts deux à deux, admettant pour images respectives les points M, M' et M''.

1. Montrer que M, M' et M'' sont alignés si et seulement si $(z'' - z')\overline{(z' - z)} \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que les points $(1, 1)$, $(4, 2)$ et $(-5, -1)$ sont alignés.

Exercice 38. Soient z, z' et z'' trois nombres complexes d'images respectives M, M' et M''. On suppose que $z \neq z'$ et $z \neq z''$, et on note $\theta \in \mathbb{R}$ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''})$.

1. Montrer que $\arg\left(\dfrac{z'' - z}{z' - z}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le quotient $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$ pour que M, M' et M'' soient alignés.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le quotient $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$ pour que (MM') et (MM'') soient perpendiculaires.
4. Montrer que si $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$ est imaginaire pur, alors $|z' - z|^2 + |z'' - z|^2 = |z'' - z'|^2$.

Exercice 39. Soient a, b, c, d quatre nombres complexes d'images respectives A, B, C et D. On suppose que $a \neq b$ et $c \neq d$.

1. Montrer que
$$(AB) \perp (CD) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d-c}{b-a} \text{ est imaginaire pur.}$$
2. On suppose que a, b, c et d sont de module 1. Déduire de la question précédente que
$$(AB) \perp (CD) \quad \Longleftrightarrow \quad ab + cd = 0.$$
Indication : on pourra utiliser le fait qu'un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement s'il est opposé à son conjugué.

Exercice 40. Déterminer géométriquement l'ensemble des points du plan dont l'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifie :

(i) $|z-2i|=3$.

(ii) $|iz-3|=1$.

(iii) $\left|\dfrac{z-3}{z+2}\right|=1$.

(iv) $|\overline{z}-3+i|=|z-5|$.

(v) $\dfrac{z-i}{z+1-i} \in \mathbb{R}$.

(vi) $\dfrac{z-i}{z+1-i}$ est imaginaire pur.

Pour simplifier les notations, dans les cinq exercices qui suivent, on assimile le plan euclidien standard à l'ensemble $\mathbb{R}^2$: un point M du plan de coordonnées $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pourra donc être directement noté (a,b), et si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de coordonnées (a',b') on note $M+\overrightarrow{u}$ le point M' tel que $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire le point $(a+a',b+b')$.

Exercice 41 (Translations). Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan, d'affixe $z_0 \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que l'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$

$$T_{\overrightarrow{u}} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ M & \longmapsto & M+\overrightarrow{u} \end{array}$$

   est

$$t_{z_0} : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+z_0, \end{array}$$

   c'est-à-dire que si M est le point d'affixe z, alors $T_{\overrightarrow{u}}(M)$ est le point d'affixe $z+z_0$.

2. Montrer que la translation $T_{\overrightarrow{u}}$ est bijective et donner sa réciproque.

Dans l'énoncé ci-contre, on fait figurer une flèche sur le vecteur pour rappeler les notations utilisées au lycée et marquer la nature profondément géométrique de l'opération de translation.

Exercice 42 (Homothéties). Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit A un point du plan d'affixe $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle *homothétie de centre A et de rapport λ* l'application

$$H_{A,\lambda} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ M & \longmapsto & A+\lambda\overrightarrow{AM}. \end{array}$$

1. Montrer que l'écriture complexe de l'homothétie de centre A et de rapport λ est

$$h_{z_0,\lambda} : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z_0+\lambda(z-z_0), \end{array}$$

   c'est-à-dire que si M est le point du plan d'affixe z, alors $H_{A,\lambda}(M)$ est le point d'affixe $h_{z_0,\lambda}(z)$.

2. Montrer que $H_{A,\lambda}$ est bijective et que sa réciproque est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
3. Montrer que la composée de deux homothéties est une translation ou une homothétie.

Exercice 43 (Rotations). Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $A \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle *rotation de centre A et d'angle θ* la transformation géométrique de $\mathbb{R}^2$ dont l'écriture complexe est

$$\begin{aligned} r_{z_0,\theta} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0). \end{aligned}$$

1. Donner l'écriture explicite de $R_{A,\theta}$ en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   Indication : on notera $A = (x_0, y_0)$ (et donc $z_0 = x_0 + iy_0$), puis pour tout $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z = x + iy$ on donnera l'écriture algébrique de $r_{z_0,\theta}(z)$ en fonction de x et y.
2. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.
3. Montrer que la rotation $R_{A,\theta}$ est bijective et donner sa bijection réciproque.

Exercice 44 (Symétries). Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la transformation géométrique S_θ de $\mathbb{R}^2$ dont l'écriture complexe est

$$\begin{aligned} s_\theta : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{i\theta}\overline{z}. \end{aligned}$$

1. Montrer que si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, alors S_θ est la symétrie orthogonale par rapport à un certain axe.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $s_\theta(z) = e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \overline{e^{-i\frac{\theta}{2}}z}$.
3. En déduire que S_θ est une symétrie orthogonale par rapport à un axe que l'on précisera.
4. Calculer $s_\theta \circ s_\theta$, puis montrer que s_θ est bijective et donner s_θ^{-1}.
5. Si $\theta' \in \mathbb{R}$, que vaut $S_{\theta'} \circ S_\theta$?

Exercice 45 (Similitudes directes). Soient $\lambda > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle *similitude directe de centre A, d'angle θ et de rapport λ* la transformation $S_{A,\theta,\lambda}$ du plan $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout point M, le point $M' := S_{A,\theta,\lambda}(M)$ est l'unique point du plan vérifiant les deux conditions

$$AM' = \lambda AM \quad \text{et} \quad \text{si } A \neq M, \text{ alors } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \theta\,[2\pi].$$

1. Illustrer graphiquement l'action de $S_{A,\theta,\lambda}$ sur un point du plan.
2. À quelle condition (sur λ et θ) $S_{A,\theta,\lambda}$ est-elle l'identité ? une homothétie ? une rotation ?
3. (a) Donner l'écriture complexe de $S_{A,\theta,\lambda}$.
   (b) Montrer qu'une similitude directe est la composée d'une rotation par une homothétie.
   (c) Montrer qu'une application $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une similitude directe si et seulement s'il existe $(a, b) \in (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \setminus (\{1\} \times \mathbb{C}^*)$ tel que l'écriture complexe de S soit $s : z \mapsto az + b$. Donner le centre, l'angle et le rapport d'une telle similitude.

4. Montrer que la composée de deux similitudes directes est une similitude directe ou une translation.
5. Montrer que $S_{A,\theta,\lambda}$ préserve les angles orientés, au sens où si B, C et D sont trois points du plan distincts, alors, en notant $B' = S_{A,\theta,\lambda}(B), C' = S_{A,\theta,\lambda}(C)$ et $D' = S_{A,\theta,\lambda}(D)$ on a :
$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \equiv (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'D'}) \ [2\pi].$$

5 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 46. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $j := e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer les sommes $A := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $B := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k$ et $C := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $1 + j^k + j^{2k} = 3$ si k est multiple de 3, et $1 + j^k + j^{2k} = 0$ sinon.
3. En déduire la valeur de la somme
$$S := \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ est multiple} \\ \text{de } 3}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Exercice 47. Soit $n \in \mathbb{N}$. En s'inspirant de l'exercice 46, proposer une méthode de calcul de
$$S := \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ est multiple} \\ \text{de } 4}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Exercice 48 (Détermination des racines deuxièmes d'un nombre complexe). On présente dans cet exercice une méthode de détermination des racines deuxièmes d'un nombre complexe qui ne suppose pas de connaître un argument de ce dernier.

1. On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 = 4 + 3i.$$
Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

L'argument de $4 + 3i$ n'est pas « simple » (c'est-à-dire n'est pas l'un des angles de cosinus et sinus connus avec lesquels nous avons l'habitude de travailler) ; on ne peut donc pas appliquer directement la proposition 45.

(a) Montrer que

$$z^2 = 4 + 3i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 2ab = 3 \end{cases}$$

(b) En utilisant le module de $4 + 3i$, montrer que si $z^2 = 4 + 3i$, alors $a^2 = \frac{9}{2}$ et $b^2 = \frac{1}{2}$.

(c) Déterminer les deux solutions de l'équation $z^2 = 4 + 3i$ dans $\mathbb{C}$.

2. Déterminer par la même méthode les racines deuxièmes des nombres suivants :

(i) $1 + 2i$ (ii) $5 - 12i$ (iii) $21 - 20i$

3. En adaptant la méthode de résolution des équations polynomiales du second degré à coefficients réels, résoudre l'équation $z^2 + (4 + i)z + 5 - i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

4. En utilisant l'écriture algébrique $z = a + ib$ comme dans la question 1, résoudre l'équation $z^2 + 2\overline{z} + 5 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 49. (Une tentative de mettre de l'ordre dans $\mathbb{C}$)

On appelle *relation d'ordre sur* $\mathbb{C}$ une relation $\preceq$ entre les éléments de $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Réflexivité : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \preceq z$.

(ii) Antisymétrie : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \big(z \preceq z' \text{ et } z' \preceq z\big) \iff z = z'$.

(iii) Transitivité : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, \quad \big(z \preceq z' \text{ et } z' \preceq z''\big) \iff z \preceq z''$.

On définit *l'ordre lexicographique* sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall a, b, a', b' \in \mathbb{R}, \quad a + ib \preceq a' + ib' \iff \big(a < a' \text{ ou } (a = a' \text{ et } b \leqslant b')\big).$$

1. Remplacer les pointillés par le signe $\preceq$ ou $\succeq$:

(i) $1 + i \ldots 2 - i$. (iii) $-3 + 5i \ldots -3 - 2i$. (v) $0 \ldots 5$.

(ii) $3 + 5i \ldots 3 - 2i$. (iv) $-i \ldots 1$. (vi) $0 \ldots i$.

2. Vérifier que $\preceq$ est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.
3. Vérifier que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $z \preceq z'$ ou $z' \preceq z$ (on parle de relation *d'ordre total sur* $\mathbb{C}$).
4. Représenter graphiquement l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $1 - i \preceq z$.

5. Expliquer pourquoi « l'ordre lexicographique » porte ce nom.
6. (a) Peut-on affirmer que si $z_1 \preceq z'_1$ et $z_2 \preceq z'_2$ alors $z_1 + z_2 \preceq z'_1 + z'_2$?
   (b) Peut-on affirmer que si $0 \preceq z$ et $0 \preceq z'$ alors $0 \preceq z \times z'$?

Exercice 50. (Une construction de $\mathbb{C}$)

On se propose dans cet exercice de donner (enfin !) un sens concret au nombre i dont on a admis l'existence dans le cours, et plus généralement au corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ des nombres complexes.

La construction présentée ici fut élaborée par William R. Hamilton à partir de 1833 (voir « Zoom » ci-après). Elle consiste à assimiler $\mathbb{C}$ au plan $\mathbb{R}^2$ (paradigme dans lequel images et affixes sont les mêmes objets !) et à définir les opérations sur les points du plan de façon à retrouver les relations

$$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b') \quad \text{et} \quad (a+ib)\times(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+a'b)$$

obtenues page 8.

On se place donc dans le plan $\mathbb{R}^2$, **que l'on choisit de noter** $\mathbb{C}$. On définit l'addition de deux éléments de ce plan par

$$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)+(a',b') := (a+a', b+b') \tag{7}$$

et leur produit par

$$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)\times(a',b') := (aa'-bb', ab'+a'b). \tag{8}$$

On choisit ensuite de simplement noter 1 **le couple** $(1,0)$, et plus généralement de noter x le couple $(x,0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On choisit par ailleurs de noter $i = (0,1)$. Tout nombre $z = (a,b)$ de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire de $\mathbb{C}$, s'écrit donc bel et bien sous la forme $a + ib$.

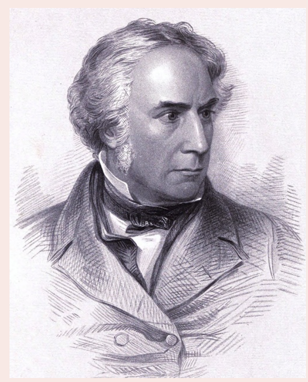
Une fois ces définitions données, il reste à vérifier que les opérations ainsi introduites possèdent les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{R}$, ainsi qu'on l'avait admis au début du cours.

Voilà donc la clé du mystère : l'unité imaginaire i n'est autre que le couple $(0,1)$, élément de l'ensemble $\mathbb{R}^2$ que l'on a muni d'une addition plutôt standard et d'une multiplication plus exotique.

1. Vérifier que $i \times i = -1$.
2. (a) (Commutativité de l'addition) Vérifier que si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $z + z' = z' + z$.
   (b) (Associativité de l'addition) Vérifier que si $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, alors $(z+z')+z'' = z+(z'+z'')$.
   (c) (Élément neutre pour l'addition) Vérifier que si $z \in \mathbb{C}$, alors $z + 0 = 0 + z = z$.
   (d) (Existence d'un opposé) Vérifier que si $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z + z' = 0$. On note ce nombre $-z$.

3. (a) (Commutativité du produit) Vérifier que si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $z \times z' = z' \times z$.
   (b) (Associativité du produit) Vérifier que si $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, alors $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$.
   (c) (Distributivité) Vérifier que si $z, z' \in \mathbb{C}$, $z'' \in \mathbb{C}$, alors $(z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$.
   (d) (Existence d'un inverse) Vérifier que si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $z \neq 0$, alors il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z \times z' = 1$. On note ce nombre z^{-1} ou $\frac{1}{z}$, et si $z'' \in \mathbb{C}$ on définit le quotient $\frac{z''}{z}$ comme le produit $z'' \times \frac{1}{z}$.
   (e) (Intégrité de $\mathbb{C}$) Montrer que si $z, z' \in \mathbb{C}$ sont différents de 0, alors $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.

Hamilton et les corps de nombres



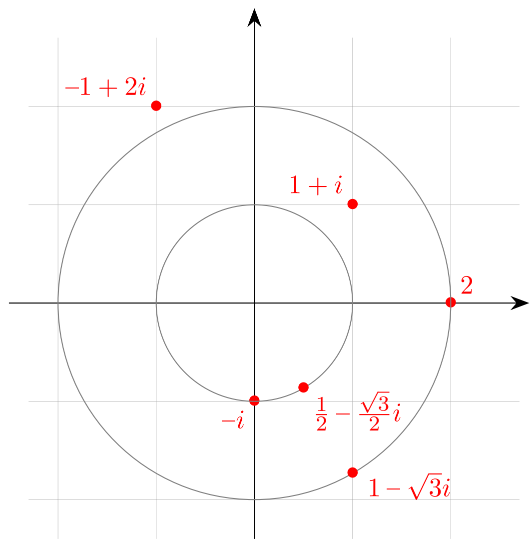
Non content d'avoir étendu le corps $\mathbb{R}$ au corps « à deux dimensions » qu'est $\mathbb{C}$, le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805 – 1865) chercha à prolonger cette structure à la dimension 3, sans succès (on a montré depuis que cette entreprise était impossible). Il y parvint par contre en dimension 4, donnant ainsi naissance à la théorie des *quaternions* : le corps des quaternions, noté $\mathbb{H}$ en l'honneur de Hamilton, est l'ensemble $\{a + ib + cj + dk \,:\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, où i est l'unité imaginaire définie dans ce chapitre, j est un élément « étranger à $\mathbb{C}$ » et k en est un autre, et où les règles de calcul sont définies en généralisant celles de $\mathbb{R}$ (à l'exception de la commutativité de la multiplication) et en imposant les relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

On raconte que c'est le 16 octobre 1843 que Hamilton, au cours d'une promenade avec son épouse le long du Royal Canal à Dublin, eut l'idée de ces relations, qu'il s'empressa alors de graver sur une pierre du Brougham Bridge. L'Université Nationale d'Irlande organise depuis 1989 des pélerinages de mathématiciens jusqu'à la plaque commémorative qui remplace aujourd'hui l'inscription effacée par le temps (voir ci-contre).

Solutions des exercices du chapitre 1

1 Compréhension du cours

Solution de l'exercice 1. Les points considérés sont représentés sur la figure ci-contre.
Pour placer les deux derniers, on a remarqué que $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ s'écrit $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (c'est-à-dire $e^{-i\frac{\pi}{3}}$) et que $1-\sqrt{3}i$ est le double de ce nombre.



Solution de l'exercice 2. Il est possible de calculer explicitement les nombres complexes avant de placer leurs images, mais il est intéressant d'identifier autant que possible les transformations géométriques auxquelles correspondent les opérations considérées.

Les images sont placées sur la figure ci-contre.

(i) Placer l'image de z est facile : il s'agit du point de coordonnées $(1,1)$.

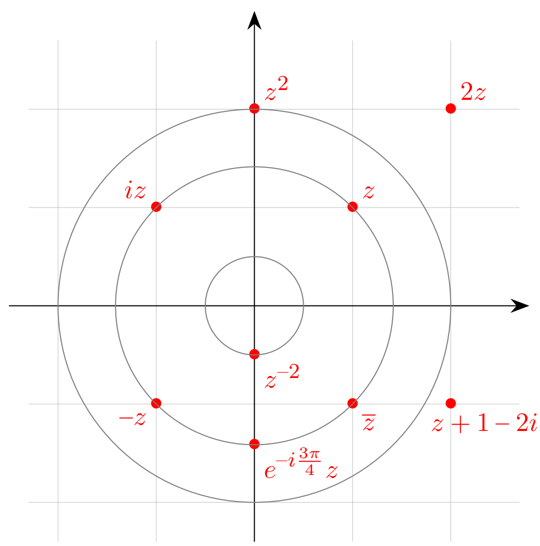
(ii) Le nombre $2z = 2+2i$ s'obtient en multipliant par 2 le module de 2 et en conservant son argument.

(iii) L'image de $z+1-2i = 2-i$ s'obtient en translatant l'image de z d'une unité vers la droite en abscisse et de 2 unités vers le bas en ordonnée.

(iv) L'image de $-z = -1-i$ est le symétrique de l'image de z par rapport à l'origine.

(v) L'image de $\overline{z}$ est le symétrique de l'image de z par rapport à l'axe des abscisses.

(vi) On peut calculer $iz = -1+i$. Alternativement, comme $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$, on remarque que iz est obtenu à partir de z en conservant son module et en ajoutant $\frac{\pi}{2}$ à son argument : son image est donc obtenue à partir de celle de z par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

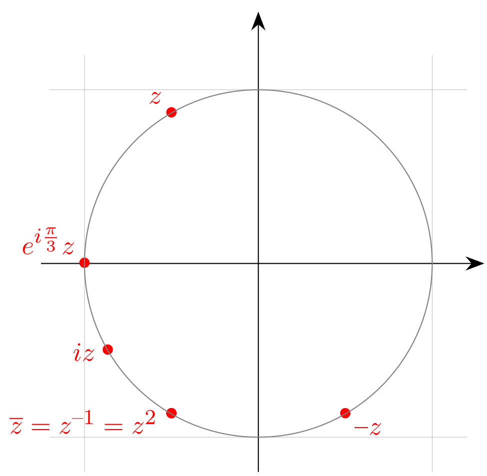


(vii) On peut encore une fois calculer directement $e^{-i\frac{3\pi}{4}}z = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)(1+i) = -\sqrt{2}i$, mais on peut aussi remarquer que l'image de $e^{-i\frac{3\pi}{4}}z$ est obtenue à partir de celle de z par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$: il s'agit donc du point de coordonnées $(0, -\sqrt{2})$.

$(viii)$ Le nombre $z^2 = 2i$ a pour module le carré du module de z, c'est-à-dire 2, et pour argument le double de l'argument de z, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

(ix) Le nombre $z^{-2} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$ est l'inverse du nombre z^2 : son module est donc l'inverse de celui de z^2, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$, et son argument est l'opposé de celui de z^2, c'est-à-dire $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

Solution de l'exercice 3. Tous les nombres considérés sont de module 1. Les transformations géométriques permettant d'obtenir les images de ces nombres à partir de celle de z se lisent directement sur les égalités entre les formes exponentielles :



(i) On place l'image de $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ en considérant le point d'abscisse $-\frac{1}{2}$ sur le cercle trigonométrique.

(ii) On a $-z = e^{i\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{3}}$, soit encore $-z = e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

(iii) On a $\overline{z} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

(iv) On peut écrire $iz = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

(v) On a $e^{i\frac{\pi}{3}}z = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\pi}$, soit $e^{i\frac{\pi}{3}}z = -1$.

(vi) On a $z^2 = e^{2 \cdot i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

(vii) On a $z^{-1} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \overline{z}$ (rappelons que l'égalité $z^{-1} = \overline{z}$ est valide pour tout $z \in \mathbb{C}$ de module 1).

$(viii)$ On a enfin $\overline{z^2} = \overline{e^{-i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = z$.

Solution de l'exercice 4. On peut toujours calculer les modules en revenant à la définition (c'est-à-dire en écrivant que $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$), mais il est parfois plus rapide d'utiliser les propriétés calculatoires du module.

(i) Le module et la valeur absolue coïncident sur $\mathbb{R}$; on a donc $|-3| = 3$.

(ii) Comme i est de module 1, on peut écrire que $|i\sqrt{2}| = |i| \cdot |\sqrt{2}| = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

(iii) On utilise la définition du module : $|3-4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$.

(iv) On utilise la définition du module : $|2-i| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$.

(v) Comme $2+i$ est le conjugué de $2-i$, ces deux nombres ont même module : $|2+i| = |2-i| = \sqrt{5}$.

(vi) En utilisant la définition du module, on trouve $|1+i\sqrt{2}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{3}$.

(vii) En utilisant les propriétés du module, on obtient $\left|\frac{1}{1+i\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{|1+i\sqrt{2}|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$(viii)$ Les propriétés du module donnent $\left|\frac{1+i}{1-i}\right| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = 1$, où la dernière égalité provient d'un calcul direct donnant $|1+i| = |1-i| = \sqrt{2}$, ou du fait que $1+i$ et $1-i$ sont conjugués et ont donc même module.

Solution de l'exercice 5. Dans les cas où cela est aisé, on détermine systématiquement un argument du nombre considéré en se représentant son image dans le plan complexe. Dans les autres cas, on factorise le nombre par son module pour reconnaître une forme $\cos(\theta)+i\sin(\theta)$, on utilise les propriétés de calcul de l'argument ou on raisonne directement sur les formes exponentielles (ces deux dernières méthodes étant essentiellement équivalentes).

(i) L'image de -3 se situe sur l'axe des abscisses, à gauche de 0 : on a donc $\arg(-3) \equiv \pi\ [2\pi]$, ce qui se vérifie grâce à l'écriture exponentielle $-3 = 3e^{i\pi}$.

(ii) L'image de $5i$ se situe sur l'axe des ordonnées, au-dessus de 0 : on a donc $\arg(5i) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, ce qui est cohérent avec l'écriture exponentielle $5i = 5e^{i\frac{\pi}{2}}$.

(iii) L'image de $2+2i$ se situe sur la droite d'équation $y = x$, dans le quart supérieur droit du plan : on a donc $\arg(2+2i) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Pour s'en rendre compte sans intuition graphique, on pouvait d'abord calculer le module $|2+2i| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, puis écrire $2+2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et reconnaître la forme exponentielle $2+2i = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

(iv) On calcule d'abord $|2-2\sqrt{3}i| = \sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2} = 4$, d'où la forme exponentielle

$$2-2\sqrt{3}i = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

On en déduit que $\arg(2-2\sqrt{3}i) \equiv -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

(v) En utilisant les deux questions précédentes, on trouve

$$\arg\left((2+2i)(2-2\sqrt{3}i)\right) \equiv \arg(2+2i) + \arg(2-2\sqrt{3}i) \equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} \equiv -\frac{\pi}{12}\ [2\pi].$$

Ce fait est cohérent avec l'écriture exponentielle

$$(2+2i)(2-2\sqrt{3}i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 4e^{-i\frac{\pi}{3}} = 8\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}.$$

(vi) En écrivant $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $i-1 = -1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ (ce qui s'obtient par factorisation ou par simple considération graphique), on a

$$\frac{i}{i-1} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Ce calcul montre que $\arg\left(\frac{i}{i-1}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Solution de l'exercice 6. (i) On a $(2-i)(3+8i) = 6+16i-3i-8i^2 = 14+13i$.
(ii) On a $(i-1)\overline{(3+i)} = (i-1)(3-i) = 3i-i^2-3+i = -2+4i$.
(iii) Grâce à la formule du binôme et au fait que $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$, on peut écrire

$$\begin{aligned}(1+2i)^4 &= 1+4\cdot 2i+6\cdot(2i)^2+4\cdot(2i)^3+(2i)^4\\ &= 1+8i+24i^2+32i^3+16i^4 = -7-24i.\end{aligned}$$

(iv) En utilisant la méthode 19 page 14, on obtient

$$\frac{1}{2-3i} = \frac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+3i}{2^2+3^2} = \frac{2+3i}{13} = \frac{2}{13}+\frac{3}{13}i.$$

(v) Par la même méthode, on obtient

$$\frac{1}{i-1} = -\frac{1}{1-i} = -\frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = -\frac{1+i}{1^2+1^2} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$$

(vi) On écrit

$$\frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1+4i+4i^2}{1^2+2^2} = \frac{-3+4i}{5} = -\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i.$$

(vii) On a $ie^{i\frac{5\pi}{3}} = ie^{-i\frac{\pi}{3}} = i\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$.
$(viii)$ Les propriétés de calcul de l'exponentielle complexe donnent

$$e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{9}}\right)^3 = e^{i\frac{\pi}{12}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

(ix) On pourrait bien sûr développer numérateur et dénominateur pour en trouver l'écriture algébrique, mais il est plus rapide d'écrire les formes exponentielles $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$: on trouve alors

$$\frac{(1+i)^5}{(1-i)^5} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5}{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^5} = \frac{\sqrt{2}^5e^{i\frac{5\pi}{4}}}{\sqrt{2}^5e^{i\frac{-5\pi}{4}}} = \frac{e^{i\frac{5\pi}{4}}}{e^{i\frac{-5\pi}{4}}} = e^{i\frac{10\pi}{4}} = e^{i\frac{5}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$$

Solution de l'exercice 7. Un argument de $1+i$ est $\frac{\pi}{4}$. Si $n\in\mathbb{N}$, on a donc

$$\arg\left((1+i)^n\right) \equiv n\arg(1+i) \equiv \frac{n\pi}{4}\,[2\pi].$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a

$$(1+i)^n \in \mathbb{R}_- \iff \arg\left((1+i)^n\right) \equiv \pi\,[2\pi] \iff \frac{n\pi}{4} \equiv \pi\,[2\pi] \iff n \equiv 4\,[8].$$

Le nombre $(1+i)^n$ est donc un réel négatif si et seulement si n est congru à 4 modulo 8, c'est-à-dire est de la forme $8k+4$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 8. (i) Si $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\sin^2(\theta) = \left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2$ d'après la deuxième formule d'Euler, soit

$$\sin^2(\theta) = \frac{e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}}{4i^2} = \frac{(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - 2e^0}{4 \cdot (-1)} = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

par la première formule d'Euler. Notons que l'on peut retrouver cette formule en écrivant que

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = (1 - \sin^2(\theta)) - \sin^2(\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$$

d'après la relation fondamentale de la trigonométrie, d'où la relation $\sin^2(\theta) = \dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}$.

(ii) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\sin^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 && \text{d'après la deuxième formule d'Euler}\\
&= \frac{1}{8i^3}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^3\\
&= -\frac{1}{8i}\left(-e^0e^{-3i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + e^{3i\theta}e^0\right) && \text{d'après la formule du binôme}\\
&= -\frac{1}{8i}\left((e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\right)\\
&= -\frac{1}{8i}\left(2i\sin(3\theta) - 6i\sin(\theta)\right) && \text{d'après la deuxième formule d'Euler}\\
&= \frac{3\sin(\theta) - \sin(3\theta)}{4}.
\end{aligned}$$

(iii) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\cos^4(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^4 && \text{d'après la première formule d'Euler}\\
&= \frac{1}{16}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^4\\
&= \frac{1}{16}\left(e^0e^{-4i\theta} + 4e^{i\theta}e^{-3i\theta} + 6e^{2i\theta}e^{-2i\theta} + 4e^{3i\theta}e^{-i\theta} + e^{4i\theta}e^0\right) && \text{d'après la formule du binôme}\\
&= \frac{1}{16}\left(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} + 4(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 6e^0\right)\\
&= \frac{1}{16}\left(2\cos(4\theta) + 8\cos(2\theta) + 6\right) && \text{d'après la première formule d'Euler}\\
&= \frac{\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 3}{8}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 9. (i) On a

$$\begin{aligned}
\cos(3\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{3i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3\right) \quad \text{d'après la formule de Moivre}\\
&= \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3\right)\\
&= \mathrm{Re}\Big(\cos^3(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\sin(\theta)\\
&\qquad +3i^2\cos(\theta)\sin^2(\theta) + i^3\sin^3(\theta)\Big) \quad \text{d'après la formule du binôme}\\
&= \mathrm{Re}\left(\cos^3(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - i\sin^3(\theta)\right)\\
&= \cos^3(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta).
\end{aligned}$$

(ii) En reprenant le calcul effectué précédemment, on obtient

$$\begin{aligned}
\sin(3\theta) &= \mathrm{Im}\left(e^{3i\theta}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\cos^3(\theta) + 3i\cos^2(\theta)\sin(\theta) - 3\cos(\theta)\sin^2(\theta) - i\sin^3(\theta)\right)\\
&= 3\cos^2(\theta)\sin(\theta) - \sin^3(\theta).
\end{aligned}$$

On peut obtenir une expression ne dépendant que de $\sin(\theta)$, en écrivant grâce à l'identité fondamentale de la trigonométrie que

$$\sin(3\theta) = 3(1-\sin^2(\theta))\sin(\theta) - \sin^3(\theta) = 3\sin(\theta) - 4\sin^3(\theta).$$

(iii) On a

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{4i\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4\right) \quad \text{d'après la formule de Moivre}\\
&= \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^4\right)\\
&= \mathrm{Re}\Big(\cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) + 6i^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\\
&\qquad +4i^3\cos(\theta)\sin^3(\theta) + i^4\sin^4(\theta)\Big) \quad \text{d'après la formule du binôme}\\
&= \mathrm{Re}\left(\cos^4(\theta) + 4i\cos^3(\theta)\sin(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - 4i\cos(\theta)\sin^3(\theta) + \sin^4(\theta)\right)\\
&= \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) + \sin^4(\theta).
\end{aligned}$$

On peut une fois encore obtenir une expression ne dépendant que de $\cos(\theta)$ en écrivant

$$\cos(4\theta) = \cos^4(\theta) - 6\cos^2(\theta)(1-\cos^2(\theta)) + (1-\cos^2(\theta))^2 = 8\cos^4(\theta) - 8\cos^2(\theta) + 1.$$

Solution de l'exercice 10. (i) Il n'est pas nécessaire de calculer le discriminant de l'équation polynomiale : on peut directement écrire que si $z \in \mathbb{C}$, alors $z^2 + 4 = 0$ si et seulement si $z^2 = -4$, ce qui signifie que $z = 2i$ ou $z = -2i$.

(ii) Le discriminant de l'équation vaut $3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -3 < 0$. Ainsi, l'équation admet pour solutions les deux nombres complexes conjugués

$$z_1 = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{6} = -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(iii) Le discriminant de l'équation vaut $6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5 = -4 < 0$. L'équation admet donc pour solutions les deux nombres complexes conjugués

$$z_1 = \frac{-6 - 2i}{4} = \frac{-3}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = \frac{-6 + 2i}{4} = \frac{-3}{2} + \frac{1}{2}i.$$

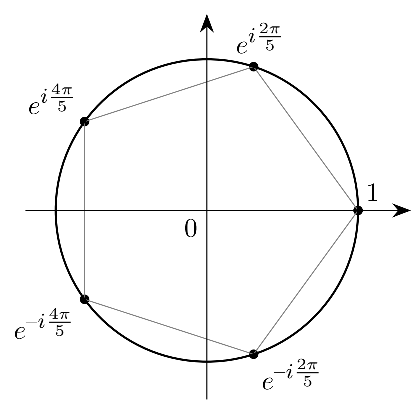
(iv) Le discriminant de l'équation vaut $2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-26) = -100 < 0$. L'équation admet donc pour solutions les deux nombres complexes conjugués

$$z_1 = \frac{-2 - 10i}{-2} = 1 + 5i \quad \text{et} \quad z_2 = \overline{z_1} = 1 - 5i.$$

Solution de l'exercice 11. Les racines cinquièmes de l'unité sont

$$1, \quad e^{i\frac{2\pi}{5}}, \quad e^{i\frac{4\pi}{5}}, \quad e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{-i\frac{4\pi}{5}} \quad \text{et} \quad e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{-i\frac{2\pi}{5}}.$$

Leurs images dans le plan complexe sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit dans le cercle unité (voir ci-contre).



Solution de l'exercice 12. Les racines n-ièmes de l'unité sont les nombres $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. En utilisant à répétition la formule de Moivre (dans toutes les égalités marquées d'une $*$), on peut donc écrire que leur produit vaut

$$\prod_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} \overset{*}{=} \prod_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{\sum_{k=0}^{n-1} k} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{\frac{(n-1)n}{2}}$$
$$\overset{*}{=} e^{i\frac{2\pi}{n}\cdot\frac{(n-1)n}{2}} = e^{i(n-1)\pi} \overset{*}{=} \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}.$$

Solution de l'exercice 13. On remarque tout d'abord que 1 n'est pas solution de l'équation. Considérons donc $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$; on a alors

$$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \sum_{k=0}^{5} z^k = \frac{1 - z^6}{1 - z},$$

donc

$$z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \iff z^6 = 1.$$

Ainsi, z est solution de l'équation proposée si et seulement si c'est une racine sixième de l'unité ; comme z est différent de 1, les solutions de l'équation sont donc les cinq racines sixièmes de l'unité différentes de 1, c'est-à-dire

$$e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{4i\frac{\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

2 ENTRAÎNEMENT

Solution de l'exercice 14. On écrit $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$. Comme $\mathrm{Re}(z)^2$ et $\mathrm{Im}(z)^2$ sont positifs, on a alors

$$|z| \geqslant \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2} = |\mathrm{Re}(z)| \quad \text{et} \quad |z| \geqslant \sqrt{\mathrm{Im}(z)^2} = |\mathrm{Im}(z)|,$$

d'où le résultat.

Solution de l'exercice 15. (i) On a $-\sqrt{3} + i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

(ii) On a $i\sqrt{3} - 1 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

(iii) On écrit $-2e^{-i\frac{23\pi}{3}} = 2e^{i\pi}e^{-i\frac{23\pi}{3}} = 2e^{i\left(1-\frac{23}{3}\right)\pi} = 2e^{-i\frac{20\pi}{3}} = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, la dernière étape résultant de la décomposition $-\frac{20\pi}{3} = -6\pi - \frac{2\pi}{3}$.

(iv) En écrivant $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, on trouve $(1+i)^7 = \sqrt{2}^7 e^{i\frac{7\pi}{4}} = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

(v) On a

$$\begin{aligned} i(1+i)^5(1-i)^3 &= e^{i\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^5\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^3 \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}^5 e^{i\frac{5\pi}{4}}\sqrt{2}^3 e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}^8 e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)} = 16e^{i\pi} = -16. \end{aligned}$$

(vi) Contrairement aux apparences, le nombre à étudier n'est pas sous forme trigonométrique (le $\cos$ et le $\sin$ sont inversés) : on écrit donc

$$\sin(\theta) + i\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}.$$

(vii) Les règles de calcul sur les exponentielles complexes donnent

$$\frac{4e^{i\frac{\pi}{7}}}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{5}}\right)^2} = \frac{4e^{i\frac{\pi}{7}}}{2e^{i\frac{6\pi}{5}}} = 2e^{i\pi\left(\frac{1}{7}-\frac{6}{5}\right)} = 2e^{-i\frac{37\pi}{35}} = 2e^{i\frac{33\pi}{35}}.$$

$(viii)$ On fait apparaître les formes exponentielles des différents termes pour écrire

$$\frac{-i\sqrt{2}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{3\pi}{4}}.$$

(ix) Par la même méthode, on trouve

$$\frac{i}{\sqrt{3}+i} \cdot \frac{1+i}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} \cdot \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

(x) On écrit

$$\frac{\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)}{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \frac{\cos(-2\theta) + i\sin(-2\theta)}{\cos(\theta) + i\sin(\theta)} = \frac{e^{-2i\theta}}{e^{i\theta}} = e^{-3i\theta}.$$

Solution de l'exercice 16. Dans tous les points sauf le dernier, on fait les calculs en forme exponentielle avant de repasser à l'écriture algébrique :

(i) Comme $-\frac{29\pi}{3} = -10\pi + \frac{\pi}{3}$, on peut écrire $4e^{-i\frac{29\pi}{3}} = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i$.

(ii) On a $e^{i\frac{5\pi}{3}} = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $-3ie^{i\frac{5\pi}{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

(iii) Grâce à la formule de Moivre, on trouve

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{19} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{19} = e^{i\frac{19\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

puisque $\frac{19\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3}$.

(iv) En écrivant $2 + 2i = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$, on trouve

$$\overline{(2+2i)^6} = \left(2e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^6 = 2^6e^{-i\frac{6\pi}{4}} = 64e^{-i\frac{3\pi}{2}} = 64e^{i\frac{\pi}{2}} = 64i.$$

(v) En écrivant $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $i - \sqrt{3} = -\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$, on obtient

$$\frac{(1+i)^{1000}}{(i-\sqrt{3})^{3000}} = \frac{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{1000}}{\left(2e^{i\frac{5\pi}{6}}\right)^{3000}} = \frac{2^{500}e^{i\frac{1000\pi}{4}}}{2^{3000}e^{i\frac{15000\pi}{6}}} = \frac{2^{500}\cdot 1}{2^{3000}\cdot 1} = \frac{1}{2^{2500}}.$$

(vi) On utilise ici le fait que $(1-2i)\cdot\overline{(1-2i)} = |1-2i|^2 = 5$, ce qui donne

$$(1-2i)^{300}\cdot\overline{(1-2i)}^{301} = \left((1-2i)\cdot\overline{(1-2i)}\right)^{300}\cdot\overline{(1-2i)} = 5^{300}\cdot(1+2i) = 5^{300} + 2\cdot 5^{300} i.$$

Solution de l'exercice 17. 1. Par définition, on a

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left|\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2}\\ &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}} - i\frac{1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - i^2\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}{1} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

3. On remarque que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$. Ainsi, on peut écrire

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

Solution de l'exercice 18. 1. On a

$$\begin{aligned} z^2 &= \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 = 2+\sqrt{2} - 2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}} - (2-\sqrt{2})\\ &= 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2} = 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4e^{-i\frac{\pi}{4}}.\end{aligned}$$

2. On sait que $|z^2| = |z|^2$ et $\arg(z^2) \equiv 2\arg(z)\ [2\pi]$. Comme $|z^2| = 4$ et $\arg(z^2) \equiv -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ d'après la question précédente, on en déduit d'une part que $|z| = 2$ et d'autre part que $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{8}\ [\pi]$. L'argument de z est donc égal à $-\frac{\pi}{8}$ ou à $\frac{7\pi}{8}$ modulo 2π ; or $\operatorname{Re}(z) < 0$, donc $\arg(z) \equiv \frac{7\pi}{8}\ [2\pi]$.

3. D'après la question précédente, on a $z = 2e^{i\frac{7\pi}{8}}$, d'où les relations

$$2\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\sqrt{2+\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad 2\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

On en déduit que

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Solution de l'exercice 19. On sait que tout nombre complexe non nul z admet une forme exponentielle $z = \rho e^{i\theta}$, pour un certain $\rho > 0$ et un certain $\theta \in [0, 2\pi[$.

On a nécessairement $|z| = \rho|e^{i\theta}| = \rho$, donc ρ est uniquement déterminé. Par ailleurs, si $\theta' \in [0, 2\pi[$ est tel que $z = \rho e^{i\theta'}$, alors $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$, donc $\theta \equiv \theta' \, [2\pi]$, d'où $\theta = \theta'$ puisque θ et θ' sont dans $[0, 2\pi[$.

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ il existe un unique couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ tel que $z = \rho e^{i\theta}$. L'application Φ est donc bijective si l'on choisit de poser $A = \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$.

Notons que l'on aurait pu remplacer l'intervalle $[0, 2\pi[$ par n'importe quel intervalle semi-ouvert de longueur 2π : par exemple, les choix

$$A = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi]$$

ou

$$A = \mathbb{R}_+^* \times [-\pi, \pi[$$

conviennent.

Solution de l'exercice 20. Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\arg\left((1 + i\sqrt{3})\right)^n \equiv n \arg(1 + \sqrt{3}) \equiv n \arg\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \frac{n\pi}{3} \, [2\pi].$$

Ainsi, on a

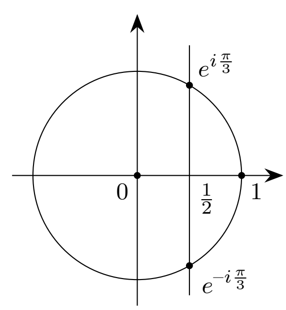
$$(1 + i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R}_+ \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{n\pi}{3} \equiv 0 \, [2\pi] \quad \Longleftrightarrow \quad n \equiv 0 \, [6],$$

c'est-à-dire que $(1 + i\sqrt{3})^n$ est un réel positif si et seulement si n est multiple de 6.

Solution de l'exercice 21. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, donc $\frac{1}{z}$ et z ont même module si et seulement si $\frac{1}{|z|} = |z|$, c'est-à-dire, comme $|z| > 0$, si $|z| = 1$.

Par ailleurs, on a $|z| = |1 - z|$ si et seulement si l'image de z est à la même distance du point d'affixe 0 et du point d'affixe 1, c'est-à-dire si elle appartient à la médiatrice du segment entre ces deux points, qui est la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$. On peut retrouver ce fait en écrivant $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et en remarquant que $|z| = |1 - z|$ si et seulement si $a^2 + b^2 = (1 - a)^2 + b^2$, c'est-à-dire que $a = \frac{1}{2}$.

Ainsi, les modules de z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ sont égaux si et seulement si l'image de z est un point du cercle unité d'abscisse $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire si $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $z = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Solution de l'exercice 22. (i) Utilisons la méthode de factorisation par la demi-somme des arguments (l'un des deux arguments étant nul) :

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\theta_1} &= e^{i\frac{\theta_1}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta_1}{2}} - e^{i\frac{\theta_1}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{\theta_1}{2}} \cdot 2i \sin\left(-\frac{\theta_1}{2}\right) \text{ d'après la deuxième formule d'Euler,} \end{aligned}$$

d'où

$$\left|1 - e^{i\theta_1}\right| = \left|e^{i\frac{\theta_1}{2}}\right| \cdot |-2i| \cdot \left|\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right|.$$

(ii) Toujours grâce à la méthode de factorisation par la demi-somme des arguments, on trouve

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} &= e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{i\frac{\theta_2-\theta_1}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \left(e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} + e^{-i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}} \right) \\ &= e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}} \cdot 2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) \text{ d'après la formule d'Euler,} \end{aligned}$$

d'où

$$\left|e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}\right| = \left|e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}\right| \cdot \left|2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\right| = 2\left|\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\right|.$$

(iii) Le dénominateur $1 + e^{i\theta_2}$ est bien non nul puisque $\theta_2 \not\equiv \pi\ [2\pi]$. On trouve cette fois

$$\begin{aligned} \frac{1+e^{i\theta_1}}{1+e^{i\theta_2}} &= \frac{e^{i\frac{\theta_1}{2}}}{e^{i\frac{\theta_2}{2}}} \frac{e^{-i\frac{\theta_1}{2}} + e^{i\frac{\theta_1}{2}}}{e^{-i\frac{\theta_2}{2}} + e^{i\frac{\theta_2}{2}}} = \frac{e^{i\frac{\theta_1}{2}}}{e^{i\frac{\theta_2}{2}}} \frac{2\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)} \text{ d'après la première formule d'Euler} \\ &= \frac{e^{i\frac{\theta_1}{2}}}{e^{i\frac{\theta_2}{2}}} \frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\left|\frac{1+e^{i\theta_1}}{1+e^{i\theta_2}}\right| = \left|\frac{e^{i\frac{\theta_1}{2}}}{e^{i\frac{\theta_2}{2}}}\right| \cdot \left|\frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right| = \left|\frac{\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)}\right|.$$

(iv) Le dénominateur $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$ est bien non nul puisqu'il est égal à $e^{i\theta_1}\left(1 + e^{i(\theta_2-\theta_1)}\right)$ et puisque $\theta_2 - \theta_1 \not\equiv \pi\ [2\pi]$ (ce qui implique que $1 + e^{i(\theta_2-\theta_1)} \neq 0$).

En factorisant par la demi-somme des arguments, on obtient cette fois

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}} &= \frac{e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}}{e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}}}\frac{e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}-e^{-i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}}{e^{i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}+e^{-i\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}} \\
&= \frac{2i\sin\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)} \quad \text{d'après les formules d'Euler} \\
&= i\tan\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left|\frac{e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}}\right| = |i|\cdot\left|\tan\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\right| = \left|\tan\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)\right|.$$

Solution de l'exercice 23. On passe sous silence une partie des calculs, dont le détail est le même que dans l'exercice 8.

(i) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\sin^5(\theta) &= \frac{1}{32i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^5 \\
&= \frac{1}{32i}\left(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}-5(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta})+10(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right) \\
&= \frac{\sin(5\theta)-5\sin(3\theta)+10\sin(\theta)}{16}.
\end{aligned}$$

(ii) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\cos^6(\theta) &= \frac{1}{64}\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)^6 \\
&= \frac{1}{64}\left(e^{6i\theta}+e^{-6i\theta}+6(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta})+15(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta})+20e^{i0}\right) \\
&= \frac{\cos(6\theta)+6\cos(4\theta)+15\cos(2\theta)+10}{32}.
\end{aligned}$$

(iii) Si $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\sin^7(\theta) &= \frac{1}{-128i}\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)^7 \\
&= \frac{1}{-128i}\left(e^{7i\theta}-e^{-7i\theta}-7(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta})+21(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta})-35(e^{i\theta}-e^{-i\theta})\right) \\
&= \frac{-\sin(7\theta)+7\sin(5\theta)-21\sin(3\theta)+35\sin(\theta)}{64}.
\end{aligned}$$

(iv) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\sin^8(\theta) &= \frac{1}{256}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^8 \\
&= \frac{1}{256}\left(e^{8i\theta} + e^{-8i\theta} - 8(e^{6i\theta} + e^{-6i\theta}) + 28(e^{4i\theta} + e^{-4i\theta}) - 56(e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) + 70e^{i0}\right) \\
&= \frac{\cos(8\theta) - 8\cos(6\theta) + 28\cos(4\theta) - 56\cos(2\theta) + 35}{128}.
\end{aligned}$$

(v) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(\theta)\sin^2(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \cdot \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^2 \quad \text{d'après les formules d'Euler} \\
&= -\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\left(e^{2i\theta} - 2e^0 + e^{-2i\theta}\right)\right) \quad \text{par la formule de Moivre} \\
&= -\frac{1}{8}\left(e^{3i\theta} - e^{i\theta} + e^{-i\theta} + e^{i\theta} - e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{8}\left(2\cos(3\theta) - 2\cos(\theta)\right) = \frac{\cos(\theta) - \cos(3\theta)}{4} \quad \text{grâce à la deuxième formule d'Euler.}
\end{aligned}$$

Notons que l'on aurait aussi pu écrire $\cos(\theta)\sin^2(\theta) = \cos(\theta)(1 - \cos^2(\theta)) = \cos(\theta) - \cos^3(\theta)$ et linéariser $\cos^3(\theta)$ pour obtenir le résultat.

(vi) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\cos^3(\theta)\sin^3(\theta) &= \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \quad \text{d'après les formules d'Euler} \\
&= \left(\frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})(e^{i\theta} - e^{-i\theta})}{4i}\right)^3 \\
&= \left(\frac{(e^{i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^2}{4i}\right)^3 \\
&= \left(\frac{e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{4i}\right)^3 \quad \text{par la formule de Moivre} \\
&= \left(\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)^3 \quad \text{par la deuxième formule d'Euler} \\
&= \frac{1}{8}\sin^3(2\theta) = \frac{3\sin(2\theta) - \sin(6\theta)}{32},
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de la relation de $\sin^3(x) = \frac{3\sin(x) - \sin(3x)}{4}$ établie dans l'exercice 8.

Solution de l'exercice 24. (i) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On cherche à exprimer $e^{i6\theta}$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$: on écrit pour cela

$$\begin{aligned} e^{i6\theta} &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^6 \quad \text{par la formule de Moivre} \\ &= \cos^6(\theta) + 6i\cos^5(\theta)\sin(\theta) - 15\cos^4(\theta)\sin^2(\theta) - 20i\cos^3(\theta)\sin^3(\theta) \\ &\qquad + 15\cos^2(\theta)\sin^4(\theta) + 6i\cos(\theta)\sin^5(\theta) - \sin^6(\theta). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \cos(6\theta) = \mathrm{Re}(e^{i6\theta}) &= \cos^6(\theta) - 15\cos^4(\theta)\sin^2(\theta) + 15\cos^2(\theta)\sin^4(\theta) - \sin^6(\theta) \\ &= 32\cos^6(\theta) - 48\cos^4(\theta) + 18\cos^2(\theta) - 1, \end{aligned}$$

où la dernière égalité est obtenue après calculs grâce à la relation fondamentale de la trigonométrie.

(ii) Si $\theta \in \mathbb{R}$, en utilisant la formule donnant $e^{i6\theta}$ déterminée dans la question précédente on obtient

$$\sin(6\theta) = \mathrm{Im}(e^{i6\theta}) = 6\cos^5(\theta)\sin(\theta) - 20\cos^3(\theta)\sin^3(\theta) + 6\cos(\theta)\sin^5(\theta).$$

(iii) D'après les deux questions précédentes, si $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{3} + 6\theta\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(6\theta) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin(6\theta) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(6\theta) + \frac{1}{2}\sin(6\theta) \\ &= 16\sqrt{3}\cos^6(x) - 24\sqrt{3}\cos^4(x) + 9\sqrt{3}\cos^2(x) - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\qquad + 3\cos^5(\theta)\sin(\theta) - 10\cos^3(\theta)\sin^3(\theta) + 3\cos(\theta)\sin^5(\theta). \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 25. On remarque tout d'abord que tous les termes considérés sont nuls lorsque l'on a $\theta \equiv 0\,[\pi]$; les trois sommes à calculer valent donc 0 dans ce cas. On suppose donc désormais que $\theta \not\equiv 0\,[\pi]$.

(i) Par linéarité de la partie imaginaire, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{2n} \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{2n} \mathrm{Im}\left(e^{ik\theta}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{2n} e^{ik\theta}\right).$$

En utilisant la formule de Moivre et le fait que $e^{i\theta} \neq 1$ (puique $\theta \not\equiv 0\,[2\pi]$), on trouve

$$\sum_{k=0}^{2n} \sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{2n} \left(e^{i\theta}\right)^k\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1 - e^{i\theta(2n+1)}}{1 - e^{i\theta}}\right).$$

Or on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\frac{1-e^{i\theta(2n+1)}}{1-e^{i\theta}} &= \frac{e^{i\frac{(2n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \cdot \frac{e^{-i\frac{(2n+1)\theta}{2}}-e^{i\frac{(2n+1)\theta}{2}}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}} \\
&= e^{in\theta} \cdot \frac{2i\sin\left(-\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{2i\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{par la deuxième formule d'Euler} \\
&= e^{in\theta}\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\sum_{k=0}^{2n}\sin(k\theta) = \operatorname{Im}(e^{in\theta})\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{\sin(n\theta)\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
$$

(ii) En remplaçant $2n$ par n et θ par 2θ dans le calcul précédent, on trouve

$$
\sum_{k=0}^{n}\sin(2k\theta) = \frac{\sin(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}.
$$

(iii) On remarque que la somme à étudier, qui est la somme des $\sin(j\theta)$ pour j impair dans l'intervalle entier $[\![0,2n]\!]$, est égale à la différence des deux sommes calculées dans les points précédents :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k+1)\theta) &= \sum_{\substack{j=0\\ j\text{ impair}}}^{2n}\sin(j\theta) \\
&= \sum_{j=0}^{2n}\sin(j\theta) - \sum_{\substack{j=0\\ j\text{ pair}}}^{2n}\sin(j\theta) = \sum_{k=0}^{2n}\sin(k\theta) - \sum_{k=0}^{n}\sin(2k\theta) \\
&= \frac{\sin(n\theta)\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{\sin(n\theta)\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \\
&= \sin(n\theta)\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\right).
\end{aligned}
$$

Solution de l'exercice 26. En reproduisant le raisonnement donné page 33, on trouve que quel que soit $n \in \mathbb{N}$ on a

$$C_n = \frac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad S_n = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Ainsi, si $n \in \mathbb{N}$ alors

$$|C_n| \leqslant \frac{\left|\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right| \cdot \left|\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \quad \text{et} \quad |S_n| \leqslant \frac{\left|\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right| \cdot \left|\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}.$$

Ainsi, les suites $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées par $\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$.

Solution de l'exercice 27. On réécrit le terme de gauche grâce à la deuxième formule d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
8\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)\sin(4x) &= 8\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\cdot\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}\cdot\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}}{2i} \\
&= \frac{8}{16i^4}\left((e^{ix}-e^{-ix})(e^{2ix}-e^{-2ix})(e^{3ix}-e^{-3ix})(e^{4ix}-e^{-4ix})\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((e^{3ix}-e^{-ix}-e^{ix}+e^{-3ix})(e^{7ix}-e^{-ix}-e^{ix}+e^{-7ix})\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(e^{10ix}-e^{2ix}-\cancel{e^{4ix}}+\cancel{e^{-4ix}}-e^{6ix}+e^{-2ix}+1-e^{-8ix} \\
&\qquad -e^{8ix}+1+e^{2ix}-e^{-6ix}+\cancel{e^{4ix}}-\cancel{e^{-4ix}}-e^{-2ix}+e^{-10ix}\Big) \\
&= 1-\cos(2x)-\cos(6x)+\cos(10x),
\end{aligned}$$

où la dernière égalité est due à la première formule d'Euler.

Solution de l'exercice 28. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on écrit z_k sous la forme $z_k = |z_k|e^{i\theta_k}$ avec $\theta_k \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 &= \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \overline{\sum_{k=1}^{n} z_k} = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \sum_{k=1}^{n} \overline{z_k} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} z_k\overline{z_\ell} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} |z_k|\cdot|z_\ell|e^{i(\theta_k-\theta_\ell)}.
\end{aligned}$$

En séparant cette dernière somme en trois parties correspondant aux configurations $k < \ell$, $k = \ell$ et $\ell < k$, on obtient

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} |z_k|\cdot|z_\ell|e^{i(\theta_k-\theta_\ell)} + \sum_{k=1}^{n}|z_k|^2 + \sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n} |z_k|\cdot|z_\ell|e^{i(\theta_k-\theta_\ell)}. \tag{9}$$

En échangeant les indices dans la dernière somme, on obtient

$$\sum_{1\leqslant \ell<k\leqslant n} |z_k|\cdot|z_\ell|e^{i(\theta_k-\theta_\ell)} = \sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} |z_\ell|\cdot|z_k|e^{i(\theta_\ell-\theta_k)},$$

donc (9) se réécrit

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 &= \sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} |z_k|\cdot|z_\ell|e^{i(\theta_k-\theta_\ell)} + \sum_{k=1}^{n}|z_k|^2 + \sum_{1\leqslant \ell<k<n} |z_k|\cdot|z_\ell|e^{i(\theta_k-\theta_\ell)}\\
&= \sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} |z_k|\cdot|z_\ell|\left(e^{i(\theta_k-\theta_\ell)}+e^{i(\theta_\ell-\theta_k)}\right) + \sum_{k=1}^{n}|z_k|^2\\
&= \sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} |z_k|\cdot|z_\ell|\cdot 2\cos(\theta_\ell-\theta_k) + \sum_{k=1}^{n}|z_k|^2.
\end{aligned}$$

Comme $\cos(\theta_\ell - \theta_k) \leqslant 1$ pour tous $\ell, k \in [\![1, n]\!]$, on a alors

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 \leqslant 2\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} |z_k|\cdot|z_\ell| + \sum_{k=1}^{n}|z_k|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2.$$

On a donc

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2,$$

d'où l'inégalité triangulaire en passant à la racine.

Le cas d'égalité est réalisé si et seulement si on a $|z_k|\cdot|z_\ell|\cdot 2\cos(\theta_\ell-\theta_k) = |z_k|\cdot|z_\ell|\cdot 2$ pour tous indices $k, \ell \in [\![1, n]\!]$ tels que $k < \ell$, c'est-à-dire, comme les z_k sont non nuls, que pour de tels k et ℓ on a

$$\cos(\theta_\ell - \theta_k) = 1, \quad \text{soit} \quad \theta_\ell \equiv \theta_k\ [2\pi].$$

On a donc égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si tous les z_k non nuls sont de même argument.

Solution de l'exercice 29. On rappelle que $z'' \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\overline{z''} = z''$. Or les propriétés du conjugué donnent

$$\begin{aligned}
\overline{z''} &= \overline{\left(\frac{z+z'}{1+zz'}\right)} \\
&= \frac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{z}\,\overline{z'}} \\
&= \frac{z\overline{z}+z\overline{z'}}{z+z\overline{z}\,\overline{z'}} && \text{en multipliant par } z \\
&= \frac{1+z\overline{z'}}{z+\overline{z'}} && \text{car } z\overline{z} = |z|^2 = 1 \\
&= \frac{z'+zz'\overline{z'}}{zz'+z'\overline{z'}} && \text{en multipliant par } z' \\
&= \frac{z'+z}{zz'+1} && \text{car } z'\overline{z'} = |z'|^2 = 1 \\
&= z''.
\end{aligned}$$

Ainsi, z'' est égal à son conjugué : il est donc bien réel.

Solution de l'exercice 30. Si $z \in \mathbb{C}$, on a

$$z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 = \sum_{k=0}^{4} z^{2k} = \sum_{k=0}^{4} (z^2)^k.$$

Si $z^2 = 1$, on a $z^8+z^6+z^4+z^2+1 = 5 \neq 0$, donc z n'est pas solution de l'équation considérée. Soit à présent $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 \neq 1$ (c'est-à-dire tel que $z \neq -1$ et $z \neq 1$) : on a alors

$$z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 = \frac{1-(z^2)^5}{1-z^2} = \frac{1-z^{10}}{1-z^2}.$$

Ainsi, z est solution de l'équation étudiée si et seulement si z est une racine 10-ième de l'unité différente de -1 et 1. L'équation admet donc 8 solutions données par

$$e^{i\frac{\pi}{5}},\quad e^{i\frac{2\pi}{5}},\quad e^{i\frac{3\pi}{5}},\quad e^{i\frac{4\pi}{5}},\quad e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{-i\frac{4\pi}{5}},$$

$$e^{i\frac{7\pi}{5}} = e^{-i\frac{3\pi}{5}},\quad e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{-i\frac{2\pi}{5}} \quad \text{et} \quad e^{i\frac{9\pi}{5}} = e^{-i\frac{\pi}{5}}.$$

Solution de l'exercice 31. On peut à chaque fois raisonner sur le module et l'argument de z ou bien, lorsque cela est facile, trouver une solution particulière et en déduire les autres en utilisant la proposition 45. Par pur goût pour la variété, on alterne entre ces deux méthodes dans la résolution des différents points ci-dessous.

(i) Une solution évidente est $\sqrt[3]{2}$. On sait alors d'après la proposition 45 que l'équation $z^3 = 2$ admet trois solutions qui sont les nombres $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\sqrt[3]{2}e^{\frac{4i\pi}{3}}$.

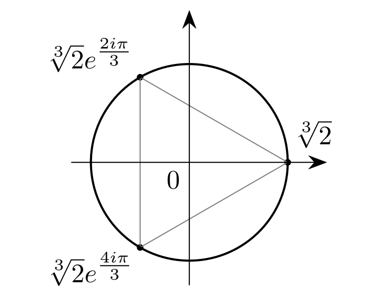
(ii) Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors on a $z^3 = i$ si et seulement si $|z|^3 = 1$ et $3\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, soit $|z| = 1$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{6}\,\left[\frac{2\pi}{3}\right]$. On en déduit que l'équation $z^3 = i$ admet trois solutions : les nombres $e^{i\frac{\pi}{6}}$, $e^{\frac{5i\pi}{6}}$ et $e^{\frac{9i\pi}{6}} = -i$.

(iii) Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors on a $z^4 = -1$ si et seulement si $|z|^4 = 1$ et $4\arg(z) \equiv \pi\,[2\pi]$, soit $|z| = 1$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}\,\left[\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, l'équation $z^4 = -1$ admet pour solutions les nombres $e^{\frac{i\pi}{4}}$, $e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $e^{\frac{5i\pi}{4}}$ et $e^{\frac{7i\pi}{4}}$.

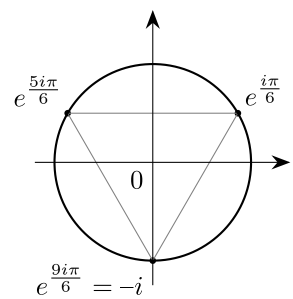
(iv) Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors on a $z^4 = 1+i$ si et seulement si $|z|^4 = \sqrt{2}$ et $4\arg(z) \equiv \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$, soit $|z| = \sqrt[8]{2}$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{16}\,\left[\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, l'équation $z^4 = 1+i$ admet pour solutions les nombres $\sqrt[8]{2}e^{\frac{i\pi}{16}}$, $\sqrt[8]{2}e^{\frac{9i\pi}{16}}$, $\sqrt[8]{2}e^{\frac{17i\pi}{16}}$ et $\sqrt[8]{2}e^{\frac{25i\pi}{16}}$.

(iv) Le réel 2 est une solution simple de l'équation $z^5 = 32$. D'après la proposition 45, cette équation admet donc 5 solutions données par $2, 2e^{\frac{2i\pi}{5}}, 2e^{\frac{4i\pi}{5}}, 2e^{\frac{6i\pi}{5}}$ et $2e^{\frac{8i\pi}{5}}$.

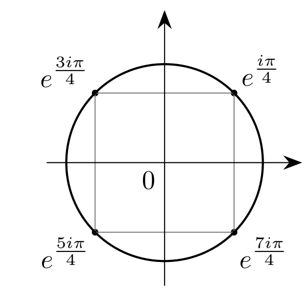
(v) Si $z \in \mathbb{C}^*$, alors on a $z^6 = -i$ si et seulement si $|z|^6 = 1$ et $6\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, soit $|z| = 1$ et $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{12}\,\left[\frac{\pi}{3}\right]$. Ainsi, l'équation $z^6 = -i$ admet pour solutions les six nombres $e^{-i\frac{\pi}{12}}, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{12}}, e^{\frac{11i\pi}{12}}, e^{\frac{15i\pi}{12}}$ et $e^{\frac{19i\pi}{12}}$.



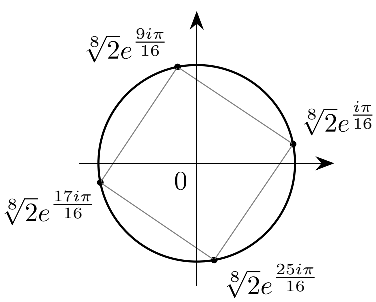
Solutions de l'équation $z^3 = 2$



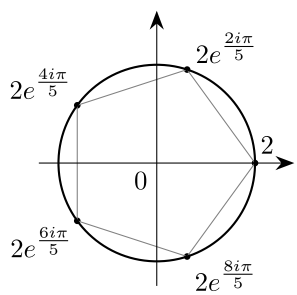
Solutions de l'équation $z^3 = i$



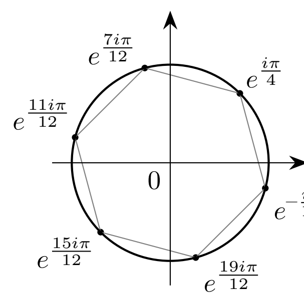
Solutions de l'équation $z^4 = -1$



Solutions de l'équation $z^4 = 1 + i$



Solutions de l'équation $z^5 = 32$



Solutions de l'équation $z^6 = -i$

3-4-5 ANNALES – GÉOMÉTRIE – PLUS LOIN, PLUS FORT

Les solutions des exercices 32 à 50 peuvent être trouvées en scannant le code ci-contre.