4 EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 20 (Triangulation).

1. On considère un triangle ABC sans angle plat, de côtés $a := BC$, $b := AC$ et $c := AB$. Démontrer la *loi des sinus* suivante :

$$\frac{a}{\sin\left(\widehat{BAC}\right)} = \frac{b}{\sin\left(\widehat{ABC}\right)} = \frac{c}{\sin\left(\widehat{ACB}\right)}.$$

   Indication : on pourra démontrer la première relation en mesurant de deux façons la hauteur du triangle issue de C.

2. Un randonneur perdu dans la montagne arrive à un point depuis lequel il aperçoit les clochers de deux villages A et B. La distance à vol d'oiseau entre ces deux clochers est indiquée sur sa carte et vaut $c = 10$ kilomètres. La boussole du promeneur indique que le clocher du village A est situé à un angle azimutal (c'est-à-dire par rapport au Nord) de $-20°$, et que le clocher du village B est situé à un angle azimutal de $40°$. En alignant sa carte avec le Nord indiqué sur la boussole, il s'aperçoit par ailleurs du fait que le chemin allant en ligne droite du village A au village B forme avec l'axe Sud-Nord un angle azimutal de $120°$.
   (a) Comment le randonneur, qui ne se déplace jamais sans une règle et un crayon, peut-il situer sa position sur sa carte ? De quelles données a-t-il besoin pour cela ?
   (b) Quelle est la distance à vol d'oiseau qui sépare le randonneur du clocher du village A ?

Exercice 21 (Vibration d'une corde). On considère un instrument de musique consistant en une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités, que l'on modélise par le segment horizontal $[0, L]$. Pour émettre un son, on imprime à la corde un déplacement vertical au temps $t = 0$. À partir de ce temps, une onde se propage le long de la corde. On note $u(x, t)$ le déplacement vertical (positif ou négatif) du point $x \in [0, L]$ au temps $t \geqslant 0$.

1. On suppose tout d'abord qu'à tout instant $t \geqslant 0$ la corde a un profil sinusoïdal, c'est-à-dire que la quantité $u(x, t)$ est de la forme $A(t)\sin(\alpha + \beta x)$, où $A(t) \in \mathbb{R}$ dépend de t et où α et β sont deux paramètres tels que $\alpha \in [0, \pi[$ et $\beta > 0$.
   (a) Déterminer des conditions sur α et β correspondant au fait que la corde est fixée à ses extrémités. On fera apparaître un paramètre entier $n \in \mathbb{N}^*$, qui correspond aux différents *modes* de vibration de la corde.
   (b) On suppose que A est de la forme $A : t \mapsto A_0 \cos(nbt)$ avec $A_0 \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. Calculer la fréquence de vibration de la corde, c'est-à-dire son nombre de vibrations par unité de temps.

(c) On peut montrer que $b = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, où T est un paramètre représentant la tension à laquelle la corde est soumise et où μ est un paramètre représentant sa masse.

i. Comment évolue le son émis par la corde lorsque celle-ci est raccourcie de moitié ?

ii. Comment évolue le son émis par la corde lorsque l'on augmente sa tension ?

iii. Comment évolue le son émis par la corde lorsque celle-ci est remplacée par une corde plus fine de même longueur, avec la même tension ?

2. La vibration qui parcourt la corde consiste en fait en une superposition d'ondes de la forme décrite dans la question précédente, pour différentes valeurs de n. Ces différents modes de vibration génèrent les différentes *harmoniques* du son produit.

   (a) Donner l'aspect de la corde en vibration à quelques instants successifs lorsque les harmoniques correspondant à $n = 1$ et $n = 2$ sont présentes, la seconde avec une amplitude inférieure à celle de la première.

   (b) Comment expliquer qu'il soit possible de reconnaître à l'oreille le *timbre* d'un instrument de musique lorsque celui-ci joue une note de hauteur donnée ?

Une expérience proposée par le physicien Franz Melde et accessible par ce lien met en évidence les modes de vibration d'une corde : en faisant varier la fréquence de vibration d'une corde fixée à ses deux extrémités, on réussit à observer les profils étudiés dans l'exercice.

En pratique, le déplacement imprimé par les doigts d'un musicien à une corde de guitare donne lieu à une onde rapidement amortie que l'on peut visualiser à l'aide d'une caméra possédant une vitesse d'obturation suffisante (voir la vidéo disponible via *ce lien).*

Exercice 22 (Superposition de signaux sonores). Un signal sonore peut être modélisé par une sinusoïde rendant compte de la pression de l'air en un point donné en fonction du temps (voir le Zoom à la fin du chapitre 5). Ainsi, un signal de fréquence ν (en hertz (Hz), donc ν oscillations par seconde) est représenté par la fonction

La lettre grecque ν se prononce « nu ».

$$\begin{aligned} s : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto A\sin(2\pi\nu t + \varphi), \end{aligned}$$

où $A \geqslant 0$ représente l'amplitude du signal, et où $\varphi \in \mathbb{R}$ représente sa *phase à l'origine*, qui est une constante intrinsèque au signal sans signification physique.

Le but de cet exercice est d'étudier la superposition de deux signaux sonores. Pour simplifier les calculs, on considère que les deux signaux sont de même amplitude $A = 1$.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Retrouver la formule

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

2. On se demande dans un premier temps quel est le son résultant de la superposition des signaux de même fréquence

$$\begin{aligned} s_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sin(2\pi\nu t + \varphi_1) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} s_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sin(2\pi\nu t + \varphi_2), \end{aligned}$$

où $\nu > 0$ et où φ_1 et φ_2 sont deux phases à l'origine possiblement différentes.

   (a) Exprimer $s_1 + s_2$ sous la forme d'un produit et décrire le signal sonore obtenu en termes d'amplitude et de fréquence.

   (b) À quelle condition sur les phases à l'origine φ_1 et φ_2 le son obtenu est-il d'amplitude maximale ?

   (c) Décrire le fonctionnement d'un casque anti-bruit permettant l'annulation du son perçu par la diffusion d'un son en *opposition de phase*.

   Remarque : on parle alors de réduction de bruit *active*, par opposition à la réduction de bruit *passive* qui consiste plus classiquement à isoler le tympan de l'environnement extérieur.

   (d) Pourquoi la réduction de bruit active d'un casque anti-bruit est-elle plus efficace dans les basses fréquences ?

3. On étudie ensuite le son résultant de la superposition des signaux

$$\begin{aligned} s_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sin(2\pi\nu_1 t + \varphi_1) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} s_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sin(2\pi\nu_2 t + \varphi_2), \end{aligned}$$

où ν_1 et ν_2 sont deux fréquences strictement positives supposées proches l'une de l'autre, et où φ_1 et φ_2 sont deux phases à l'origine.

   a) Exprimer $s_1 + s_2$ sous la forme d'un produit.

   b) Donner l'allure de la courbe représentative du signal $s_1 + s_2$ en fonction du temps.

   c) Donner un sens à la notion de « battements » du signal superposé et donner l'intervalle de temps séparant deux tels battements.

   d) Quelle est la période du battement perceptible à l'oreille lors de la superposition d'un *la* à 440 Hz et d'un signal sonore de même amplitude à 440,5 Hz ?

   e) Expliquer comment le phénomène de battements peut être utilisé pour accorder un instrument à cordes.