Il existe un théorème de transfert pour la loi jointe d'un couple de variables aléatoires :

Théorème A (Théorème de transfert pour la loi jointe)**.** Soient X et Y deux VARD et soit $f : X(\Omega) \times Y(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Si X et Y prennent un nombre fini de valeurs, alors la VARD $f(X,Y)$ prend un nombre fini de valeurs et

$$\mathbb{E}(f(X,Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} f(x,y)\, \mathbb{P}\big((X = x) \cap (Y = y)\big).$$

- Si X et Y prennent un nombre infini de valeurs, on écrit $X(\Omega) = \{x_i\,,\, i \in \mathbb{N}\}$ (avec les x_i deux à deux distincts) et $Y(\Omega) = \{y_j\,,\, j \in \mathbb{N}\}$ (avec les y_j deux à deux distincts). Alors $f(X,Y)$ admet une espérance si et seulement si la somme double

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} |f(x_i, y_j)|\, \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big)$$

prend une valeur finie, et dans ce cas on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(f(X,Y)) &= \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} f(x_i, y_j)\, \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} f(x_i, y_j)\, \mathbb{P}\big((X = x_i) \cap (Y = y_j)\big).\end{aligned}$$

- Une propriété similaire est vraie si X prend un nombre fini de valeurs de Y un nombre infini de valeurs, sous réserve de convergence absolue des séries concernées.

Ce résultat est admis, mais sa démonstration est essentiellement similaire à celle du théorème de transfert « classique ».

Cette somme double infinie de termes positifs a toujours un sens mais désigne une quantité potentiellement égale à $+\infty$.

Exemple. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{P}(1)$. On veut montrer que la variable aléatoire X^Y admet une espérance. D'après le théorème de transfert, il suffit pour cela de montrer que la somme

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} i^j \mathbb{P}\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} i^j \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)$$

est finie. Or cette somme vaut

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} i^j \frac{e^{-1}}{i!}\frac{e^{-1}}{j!} &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{e^{-2}}{i!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{i^j}{j!} \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty}\frac{e^{-2}}{i!}e^i = e^{-2}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{e^i}{i!} \\ &= e^{-2}e^e = e^{e-2},\end{aligned}$$

donc le théorème de transfert assure que X^Y admet bien une espérance et que $\mathbb{E}(X^Y) = e^{e-2}$.

Un cas particulier important est celui où $f(x,y) = xy$. Le théorème de transfert stipule alors que la VARD XY admet une espérance si et seulement si la somme double des $|xy|\,\mathbb{P}\big((X=x)\cap(Y=y)\big)$ prend une valeur finie, et que l'on a dans ce cas

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}\big((X=x)\cap(Y=y)\big) \\ &= \sum_{y\in Y(\Omega)}\sum_{x\in X(\Omega)} xy\,\mathbb{P}\big((X=x)\cap(Y=y)\big),\end{aligned}$$

ces sommes étant éventuellement des sommes de séries. C'est cette propriété qui permet de démontrer la proposition suivante donnée dans le cours :

Proposition 57 (Espérance d'un produit de VARD indépendantes). Si X et Y sont des VARD indépendantes admettant chacune une espérance, alors XY admet une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration de la proposition 57 — La somme

$$
\begin{aligned}
\sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} & |xy|\,\mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y)) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} |x|\cdot|y|\,\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y) \quad \text{par indépendance} \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \left[|x|\mathbb{P}(X=x) \sum_{y\in Y(\Omega)} |y|\,\mathbb{P}(Y=y) \right] \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} |x|\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{E}(|Y|) \\
&= \mathbb{E}(|Y|) \sum_{x\in X(\Omega)} |x|\,\mathbb{P}(X=x) \\
&= \mathbb{E}(|X|)\mathbb{E}(|Y|)
\end{aligned}
$$

Cette discussion préliminaire ayant pour but d'établir l'existence de $\mathbb{E}(XY)$ n'a bien sûr aucun intérêt si X ou Y ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs !

La linéarité citée ici est celle de la somme des séries convergentes.

est une quantité finie puisque X et Y admettent une espérance (ce qui signifie que $|X|$ et $|Y|$ en admettent une). D'après le théorème de transfert pour la loi jointe, XY admet donc une espérance, et on peut écrire

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y)) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\,\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y) \quad \text{par indépendance} \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \left[x\,\mathbb{P}(X=x) \sum_{y\in Y(\Omega)} y\,\mathbb{P}(Y=y) \right] \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x)\,\mathbb{E}(Y) \\
&= \mathbb{E}(Y) \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x) \\
&= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y),
\end{aligned}
$$

d'où le résultat annoncé. □