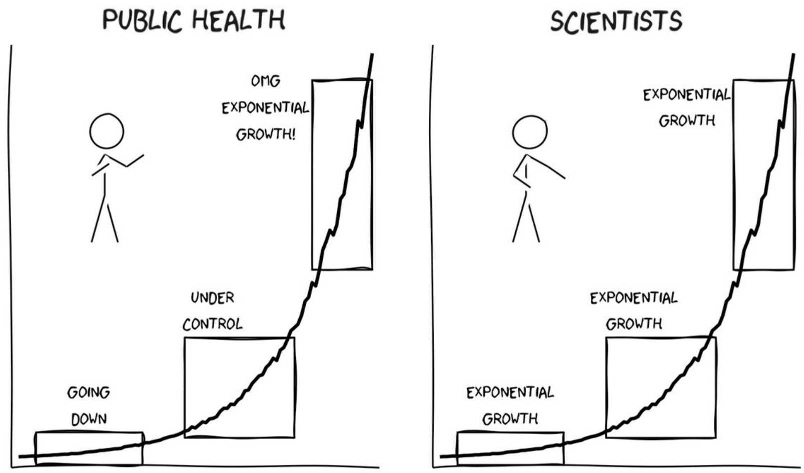
4 EXERCICES D'APPLICATION



@vb_jens

Exercice 17 (Comparaison du rendement d'actifs). On dispose d'une somme $A > 0$ que l'on souhaite faire fructifier. Une banque propose deux options :

- Un placement sur livret à intérêts composés rapportant 3% par an pendant $n \in \mathbb{N}^*$ années.
- L'achat pour une somme égale à $\frac{A}{3}$ du droit de placer la somme restante (c'est-à-dire $\frac{2A}{3}$) sur un livret à intérêts composés rapportant 6% par an pendant cette même période de n années.

À quelle condition sur n la deuxième option est-elle plus intéressante que la première ?

Exercice 18 (Approximation du temps de doublement). On donne les approximations $\ln(2) \approx 0,69$ et $\ln(1+x) \approx x$ lorsque $x \approx 0$.

On doit au mathématicien vénétien Luca Pacioli la « règle des 72 », qui s'énonce en termes actuels de la façon suivante :

Si x est un petit entier, le temps de doublement d'un capital placé à x%
sur un livret à intérêts composés est approximativement égal à $\frac{72}{x}$ années.

Justifier cette affirmation et son intérêt calculatoire (notamment par rapport à l'approximation plus précise qui affirmerait que le temps de doublement est de $\frac{69}{x}$ années).

Exercice 19 (Lecture sur une table de logarithmes). On sait que $\log(\pi) \approx 0,49715$ (où $\log = \log_{10}$ est le logarithme décimal), et on dispose de la table de logarithmes suivante :

n	9865	9866	9867	9868	9869	9870
$\log(n)$	$3,99410$	$3,99414$	$3,99419$	$3,99423$	$3,99427$	$3,99432$

Donner un encadrement de π^2 à 0,001 près.

Exercice 20 (Lecture sur une table de logarithmes II). On rappelle que $\log = \log_{10}$ est le logarithme décimal. On donne les valeurs approchées $\log(2) \approx 0,30103$ et $\log(3) \approx 0,47712$, ainsi que $\log(2449) \approx 3,38899$ et $\log(2550) \approx 3,38917$. Proposer un encadrement de $\sqrt{6}$ à $0,001$ près.

Exercice 21 (Nombre de bits nécessaires au codage d'un entier). En informatique, le caractère essentiellement binaire de nombreuses grandeurs rend pertinente l'utilisation du logarithme binaire $\log_2$. En effet, l'information est stockée sous la forme de *bits*, c'est-à-dire de 0 et de 1, si bien qu'à une suite de $n \in \mathbb{N}^*$ bits (en d'autres termes, une n-liste d'éléments de $\{0,1\}$) correspondent 2^n informations possibles. Il est alors fréquent de calculer combien de bits nécessite le stockage d'une information donnée en résolvant des inéquations du type $2^n > x$.

La représentation la plus courante des nombres entiers sur la mémoire d'un ordinateur est la forme binaire : on utilise l'écriture $a_0a_1 \dots a_n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0, \dots, a_n \in \{0,1\}$) pour représenter l'entier

$$x = \sum_{k=0}^{n} a_k 2^k.$$

On pourra consulter cet exemple issu du chapitre 1 pour une approche plus formelle.

Dans le cadre de cette définition, le nombre est écrit en utilisant $n+1$ caractères binaires, et on dit que *l'information est stockée sur $n+1$ bits*.
Ainsi, les entiers de 0 à 9 peuvent s'écrire en binaire de la façon suivante :

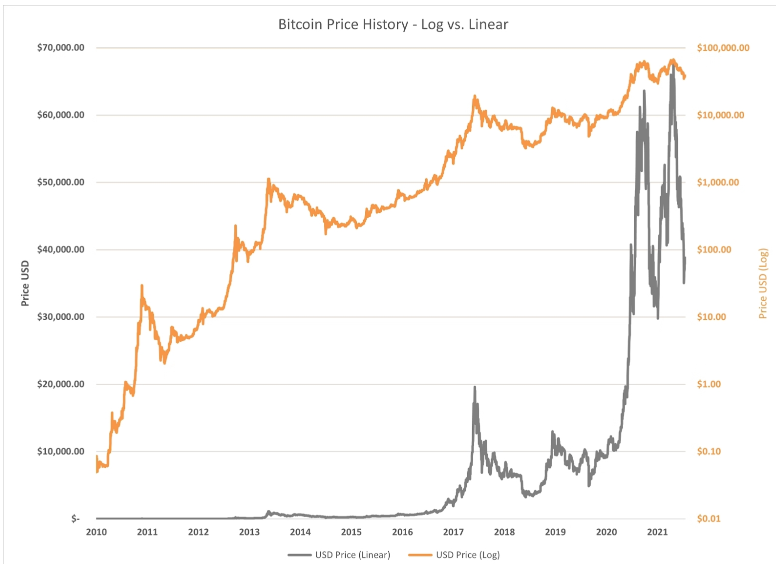
Écriture décimale	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Écriture binaire	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001

Le codage d'un entier entre 0 et 9 nécessite donc au maximum 4 bits de mémoire.

Notons que comme dans le cas de l'écriture décimale, on évite de faire commencer l'écriture binaire d'un entier par le chiffre 0 (sauf lorsque l'entier est 0 lui-même).

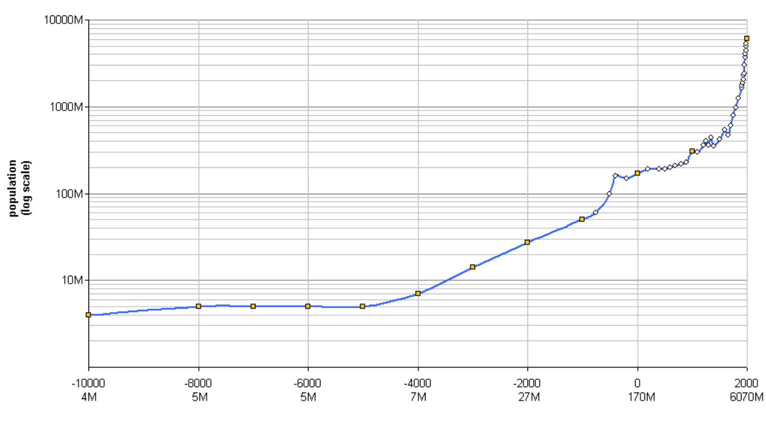
1. Donner l'écriture en binaire des entiers 5, 15 et 26.
2. Quels sont les nombres entiers pouvant être écrits en binaire :
   (a) en utilisant 6 bits au plus ?
   (b) en utilisant au plus un octet, c'est-à-dire 8 bits ?
   (c) en utilisant 32 bits au plus ?
3. Combien de bits faut-il prévoir pour être certain de pouvoir y stocker un nombre entier entre 0 et 9999 ?
4. Si $n \geqslant 1$, déterminer une formule explicite donnant le nombre de bits qui constituent l'écriture en binaire de n.

Exercice 22 (Échelle logarithmique). Lorsque l'on cherche à représenter sur un graphique des valeurs s'étendant sur des plages très étendues et exhibant un phénomène de croissance ou de décroissance exponentielle, il est commun de recourir à une *échelle logarithmique* pour rendre le schéma plus lisible. Dans une telle échelle, une unité de graduation ne correspond plus à un accroissement fixe de la variable représentée mais à une multiplication par un facteur fixe, typiquement 10. On peut alors visualiser plus aisément les variations relatives des petites valeurs, et les comparer à des variations relatives de même ampleur des valeurs élevées.



La représentation en échelle logarithmique a notamment un intérêt dans le cas des indices boursiers, dont les fluctuations relatives sont d'un plus grand intérêt pour les analystes que les fluctuations absolues.
La figure ci-contre représente l'évolution du prix du Bitcoin en fonction du temps, en valeur absolue (échelle linéaire, courbe du bas) et en valeur relative (échelle logarithmique, courbe du haut).

Les graduations de l'axe correspondant à l'échelle logarithmique présentent alors un espacement fixe correspondant à des valeurs exponentiellement distribuées, comme dans la figure ci-dessus, et sont parfois superposées à des graduations à espacement variable correspondant à des valeurs linéairement distribuées mais graphiquement de plus en plus proches, comme dans la figure ci-dessous :

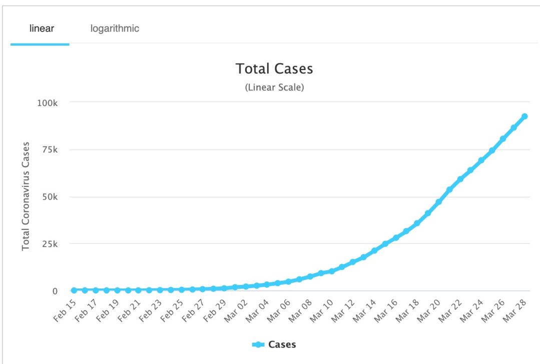


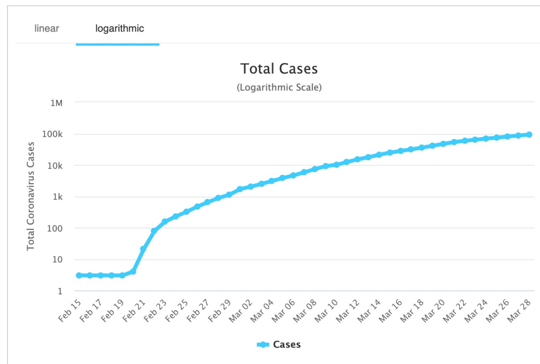
Cette figure représente l'évolution de la population mondiale (en échelle logarithmique) au fil du temps (en échelle linéaire). Les graduations grisées en ordonnée correspondent à des graduations linéaires inégalement espacées : par exemple, les graduations entre 10M et 100M sont placées à 20M, 30M, 40M, etc.

1. On suppose qu'une échelle logarithmique est adoptée pour représenter les ordonnées, et que l'échelle linéaire standard est utilisée pour représentée les abscisses (on dit que l'on est en présence d'une échelle *semi-logarithmique*).

   (a) Quelle est l'allure de la courbe d'une fonction linéaire dans un tel repère ?

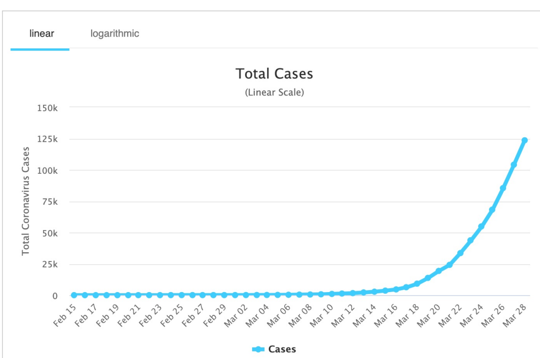
   Indication : on pourra obtenir une intuition du résultat à démontrer en examinant la courbe ci-dessous, qui représente le nombre de cas cumulés de la maladie Covid-19 en Italie au début de l'année 2020 (en échelle linéaire à gauche, logarithmique à droite).

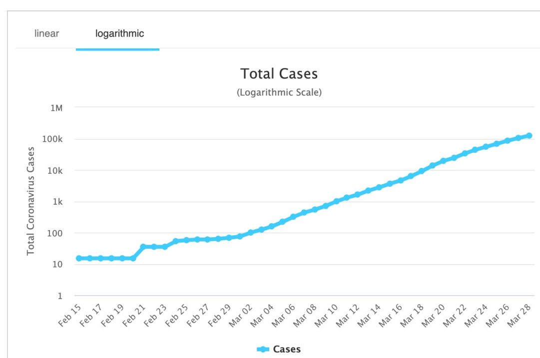




   (b) À quelle condition la courbe représentative de f dans un tel repère est-elle une droite ?

   Indication : on pourra obtenir une intuition du résultat à démontrer en examinant la courbe ci-dessous, qui représente le nombre de cas cumulés de la maladie Covid-19 aux États-Unis au début de l'année 2020.



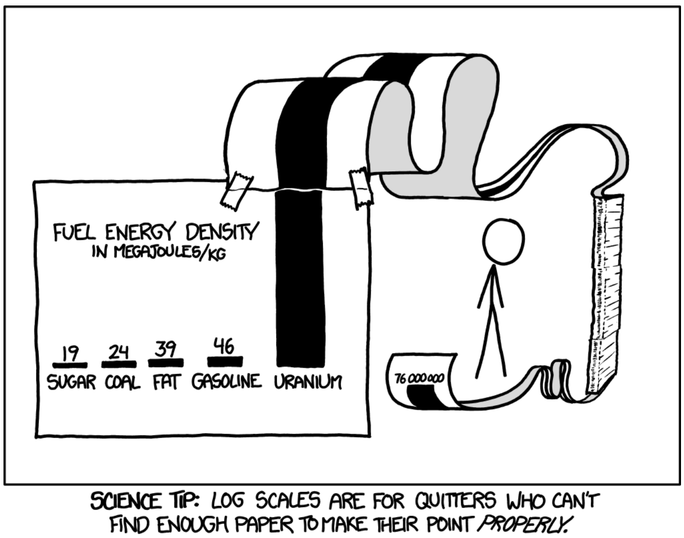


2. On suppose maintenant que les abscisses sont représentées de façon logarithmique, tandis que les ordonnées sont représentées de façon linéaire.

   (a) Quelle est l'allure de la courbe d'une fonction linéaire dans un tel repère ?

   (b) À quelle condition la courbe représentative de f dans un tel repère est-elle une droite ?

3. On suppose enfin qu'une échelle logarithmique est adoptée pour représenter à la fois les abscisses et les ordonnées (on dit que l'on est en présence d'une échelle *log-log*).
   (a) Quelle est l'allure de la courbe d'une fonction linéaire dans un tel repère ?
   (b) À quelle condition la courbe représentative de f dans un tel repère est-elle une droite ?
4. Expliquer comment le choix d'une échelle de représentation de données chiffrées peut permettre d'amplifier ou de minimiser l'importance d'une tendance donnée.



© xkcd.com

Exercice 23 (Décibels). L'intensité ressentie x (en décibels, dB) d'un signal sonore de puissance donnée P_1 (en $\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$, c'est-à-dire en Watts par m^2) est donnée par la formule

$$x = 10 \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_0}\right),$$

où $P_0 := 10^{-12} \mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2}$ est la plus petite puissance sonore correspondant au domaine de l'audible pour l'être humain.

1. Quel est l'accroissement de l'intensité sonore consécutif à un doublement de la puissance d'un signal ?
2. Une fusée au décollage produit un son d'environ 190 dB, tandis que l'intensité sonore d'une conversation à voix basse est d'environ 10 dB. Calculer le rapport des puissances sonores correspondantes.

La loi empirique de Weber-Fechner décrit la relation entre l'intensité ressentie d'un stimulus et la puissance objective de celui-ci comme étant approximativement logarithmique. Cette loi repose sur la mise en évidence expérimentale du fait que la plus petite variation d'un stimulus initial remarquée par un sujet est proportionnelle à l'intensité dudit stimulus (par exemple, si un sujet remarque le changement du poids d'un objet d'un kilogramme uniquement à partir d'une variation de 10 grammes,

3. Quelle est l'intensité du son résultant de la superposition de pleurs de bébé d'intensité 110 dB et du bruit d'un marteau-piqueur d'intensité 100 dB ?
4. Combien de marteaux-piqueurs doit-on utiliser simultanément pour égaler l'intensité sonore d'un cri de bébé ?

il reconnaîtra le changement de poids d'un objet de 10 kilogrammes uniquement à partir d'une variation de 100 grammes). L'accroissement de la sensation de n unités sensorielles correspond donc à n multiplications successives du stimulus par ledit rapport de proportionnalité (dans notre exemple, il s'agit de 1,1), d'où la relation logarithmique annoncée.

Exercice 24 (Potentiel hydrogène (pH)). Le *potentiel hydrogène*, ou pH, est une mesure de l'acidité d'une solution. On définit le pH d'une solution diluée S par

$$\mathrm{pH_S} = -\log_{10}([\mathrm{H_3O^+}]_S),$$

où $[\mathrm{H_3O^+}]_S$ désigne la concentration de la solution en ions hydronium $\mathrm{H_3O^+}$ de la solution S (exprimée en moles par litres). Le pH de référence est celui de l'eau pure, c'est-à-dire 7. Une solution S est dite *acide*, *neutre* ou *basique* respectivement lorsque $\mathrm{pH_S} < 7$, $\mathrm{pH_S} = 7$ et $\mathrm{pH_S} > 7$.

1. À quelle variation de la concentration d'ions $\mathrm{H_3O^+}$ une augmentation d'un point de pH correspond-elle ?
2. Le jus d'orange a un pH environ égal à 3,5. Donner une approximation de la quantité d'ions $\mathrm{H_3O^+}$ présents dans un demi-litre de jus d'orange.
3. On souhaite déterminer le pH d'un mélange.
   (a) On dispose de deux solutions A et B de pH respectifs $\mathrm{pH_A}$ et $\mathrm{pH_B}$. Donner le pH d'un mélange constitué par un volume $V_A > 0$ de la solution A et un volume $V_B > 0$ de la solution B (on suppose qu'aucun ion $\mathrm{H_3O^+}$ n'est créé ou détruit par réaction entre les deux solutions, c'est-à-dire que l'on néglige le phénomène de *réaction acido-basique*).
   (b) Mélanger un litre de solution acide de pH égal à 6 avec un litre de solution basique de pH égal à 8 permet-il d'obtenir une solution neutre ? Si non, combien de litres de solution basique faut-il pour obtenir ce résultat ?
   (c) Donner le pH du mélange d'un demi-litre de jus d'orange et d'un demi-litre d'eau pure (on néglige encore le phénomène de réaction acido-basique).

Une mole d'ions est un ensemble de $6,022\cdot 10^{23}$ ions. Ce nombre colossal, dit nombre d'Avogadro*, a été choisi pour exprimer des quantités d'atomes, d'ions ou de molécules en des unités adaptées à des échelles macroscopiques qui sont généralement le cadre des études en laboratoire ; il correspond ainsi au nombre d'atomes de carbone présents dans* 12 *grammes de carbone* 12*. On utilise parfois à son sujet une comparaison qui rend songeur : le même nombre de grains de pop-corn permettrait de recouvrir la surface des États-Unis d'une couche uniforme d'une épaisseur d'environ 14 km…*

5 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 25 (Irrationalité de e). Le but de cet exercice est de montrer que le nombre $e := \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est irrationnel. Pour ce faire, on raisonne par l'absurde en supposant que $e = \frac{a}{b}$, avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, et on pose $x := b!\left(e - \sum\limits_{k=0}^{b} \frac{1}{k!}\right)$.

1. Montrer que $x \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que $x = \lim\limits_{n\to+\infty} b! \sum\limits_{k=b+1}^{n} \frac{1}{k!}$.
3. Montrer que pour tout $n > b$ on a
$$b! \sum_{k=b+1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=b+1}^{n} \frac{1}{(b+1)^{k-b}} = \sum_{k=1}^{n-b} \frac{1}{(b+1)^k}.$$
4. En déduire que $x \leqslant \frac{1}{b}$ puis que $x < 1$.
5. Conclure.

On propose dans les deux exercices qui suivent des démonstrations de la proposition 1 du cours, qui reviennent à construire la fonction exponentielle. On s'abstiendra donc d'utiliser les fonctions exp *et* ln *pour répondre aux questions posées !*

Exercice 26 (Existence et unicité de la fonction exponentielle). Soit $a > 0$. On souhaite montrer qu'il existe une unique fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(1) = a$ et « transformant les sommes en produit », c'est-à-dire vérifiant la propriété de morphisme suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y). \tag{1}$$

1. Montrer qu'une fonction vérifiant l'équation (1) s'annule si et seulement si elle est nulle.
2. On suppose dans cette question que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant (1) et $f(1) = a$, si bien que f ne s'annule pas.
   (a) Montrer que $f(0) = 1$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$, et que f est strictement positive.
   (c) Montrer que $f(\alpha) = a^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$.
   (d) Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant (1) et si $g(1) = a$, alors $g = f$.

L'unicité de f est donc établie sous réserve de son existence. On va à présent construire une fonction continue f satisfaisant les conditions de l'énoncé.

3. Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tels que $\alpha \leqslant \beta$, on a

$$a^\alpha \geqslant a^\beta \quad \text{si} \quad 0 < a \leqslant 1 \quad \text{et} \quad a^\alpha \leqslant a^\beta \quad \text{si} \quad a \geqslant 1.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour toute suite croissante de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x, la suite $(a^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et que sa limite ne dépend pas du choix de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais seulement de x. On note sa limite $f(x)$.

   Indication : on pourra considérer deux suites croissantes de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x et montrer que $(a^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a^{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite.

On vient donc d'associer à x un unique réel $f(x)$, ce qui définit bien une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

5. On vérifie à présent que f possède les propriétés attendues.
   (a) Montrer que f est monotone.
   (b) Montrer que $f(1) = a$ et plus généralement que $f(\alpha) = a^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$.
   (c) Montrer que f est continue.

   Indication : si $x \in \mathbb{R}$, on pourra encadrer x par deux suites de rationnels et utiliser la croissance de f pour vérifier la définition de la limite.

   (d) Montrer que f satisfait l'équation (1).
   (e) Montrer que f est strictement monotone si $a \neq 1$.
6. Conclure.

Exercice 27 (Une autre construction de la fonction exponentielle). Le but de cet exercice est de montrer que la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

est bien définie, qu'elle vérifie la propriété de morphisme $f(x+y) = f(x)f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, qu'elle est continue et enfin que $f(1) = e$. On aura ainsi démontré la partie « existence » de la proposition 1 du cours ; l'unicité de la fonction exp se démontre ensuite comme dans la deuxième question de l'exercice précédent.

1. Démontrer l'inégalité suivante, dite *de Bernoulli* :

$$\forall x > -1, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad (1+x)^k \geqslant 1 + kx.$$

2. Dans cette question, on fixe $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n > |x|$, on pose $u_n := \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ et $v_n := \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$.
   (a) Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n > |x|$.
   (b) En utilisant l'inégalité de Bernoulli, montrer que $(u_n)_{n>|x|}$ est croissante.
   (c) Montrer que $(v_n)_{n>|x|}$ est décroissante.
   (d) Montrer que pour tout $n > |x|$, on a
   $$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant x^2 \frac{v_n}{n}.$$
   (e) En déduire que $(u_n)_{n>|x|}$ converge.
   (f) En déduire que f est bien définie.

On va maintenant étudier les propriétés de f.

3. Montrer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
4. On souhaite démontrer la propriété de morphisme de f, c'est-à-dire l'identité suivante :
   $$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) \geqslant 1 + x$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $f(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$.
   (c) Montrer que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite nulle, alors $\left(1 + \frac{w_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
   (d) En déduire la propriété de morphisme attendue.
5. Montrer que f est strictement croissante.
6. Montrer que f est continue en 0, puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
7. On rappelle que $e := \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   $$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
   Indication : pour établir l'inégalité de droite, on pourra utiliser l'*inégalité de Bernoulli généralisée*, que l'on démontrera, qui stipule que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall a_1, \dots, a_n \in [0, 1[, \quad \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i.$$
   (b) En déduire que $f(1) = e$.

Notre objectif est donc atteint : la partie « existence » de la proposition 1 est établie, et on note exp la fonction f. Profitons de l'occasion pour donner une interprétation du nombre e et démontrer une propriété différentielle fondamentale de la fonction exp.

8. On rappelle que l'on vient d'établir l'égalité suivante, que nous retrouverons au chapitre 11 :

$$e = f(1) = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

   On suppose à présent que l'on investit un capital rémunéré annuellement à 100%.

   (a) Par combien le capital aura-t-il été multiplié au terme d'une année ?

   (b) On suppose à présent que les intérêts sont touchés, et donc composés, tous les mois : au terme de chaque mois, le capital présent sur le compte est augmenté de $\frac{100}{12}$%. Par combien le capital aura-t-il été multiplié au terme d'une année ?

   (c) On suppose désormais que les intérêts sont touchés, et donc composés, à chaque minute : à chacune des 525600 minutes de l'année, le capital présent sur le compte est augmenté de $\frac{100}{525600}$%. Par combien, approximativement, le capital aura-t-il été multiplié au terme d'une année ?

La dernière question de cet exercice demande de connaître les notions de nombre dérivé et de fonction dérivée abordées dans le prochain chapitre.

9. (a) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$, on a

$$\left|\frac{f(x)-1}{x}-1\right| \leqslant \frac{|x|}{1-x}.$$

   (b) En déduire que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.

   (c) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.