7.2 La construction de $\mathbb{R}$

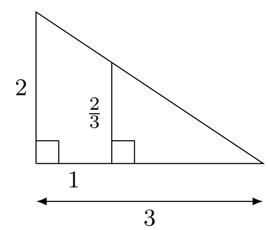
Section hors-programme

Cette section est présentée à titre purement culturel et ne figure pas au programme de B/L.

Nous avons démontré dans la section précédente un résultat de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ établissant le fait que des nombres rationnels peuvent être trouvés dans n'importe quel intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. Toutefois, c'est par l'approche intellectuelle inverse que l'on peut définir rigoureusement $\mathbb{R}$, qui est construit comme un *complété* de $\mathbb{Q}$.

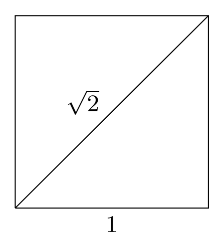
7.2.1 Pourquoi compléter $\mathbb{Q}$?

Le besoin de représenter des grandeurs mesurables a conduit dès l'Antiquité à considérer des fractions de nombres entiers. Néanmoins, il apparut rapidement que certaines grandeurs élémentaires issues de la géométrie, comme le rapport entre la diagonale d'un carré et son côté, ne peuvent pas être exprimées sous la forme de fractions d'entiers : ainsi, même en ne définissant la notion de nombre que par l'idée restrictive de « grandeur mesurable », il ne fit aucun doute que l'ensemble des nombres existants ne se limite pas à $\mathbb{Q}$.



Le théorème de Thalès justifie l'apparition du rationnel $\frac{2}{3}$ dans une figure créée à partir de valeurs entières.

Au premier millénaire de notre ère, le développement de l'usage du 0 et de la notation décimale fit apparaître un autre problème : celui du sens à donner à des nombres décrits non plus comme le résultat de constructions géométriques, mais directement à partir d'un développement décimal. Quel sens, par exemple, donner au nombre $0,12345678910111213...$ obtenu en concaténant les écritures décimales des entiers naturels, dont on peut montrer qu'il n'est pas rationnel (voir l'exercice 46), mais aussi qu'il ne résulte d'aucune construction géométrique à la règle et au compas ?



Le théorème de Pythagore montre que la diagonale d'un carré de côté 1 est de longueur $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

L'analyse moderne née du calcul infinitésimal mit en avant une autre insuffisance de l'ensemble $\mathbb{Q}$. Une série de résultats majeurs et hautement intuitifs comme le théorème des valeurs intermédiaires ou le théorème de Rolle (voir chapitres 8 et 10) reposent en effet sur l'idée de *continuité*, qui traduit le principe leibnizien « *natura non facit saltus* » (« la nature ne fait pas de sauts »). Pour ne citer qu'un exemple accessible à ce stade du cours, l'existence de la racine cubique d'un nombre quelconque résulte de l'idée très raisonnable selon laquelle la quantité x^3 balaie continûment l'ensemble des nombres entre $-\infty$ et $+\infty$ lorsque x varie. Or un tel raisonnement n'est pas vrai si l'on considère uniquement des nombres x parcourant l'ensemble $\mathbb{Q}$, et il n'existe pas, par exemple, de nombre rationnel dont le cube vaut 2. Outre la question purement formelle de l'existence de certains nombres, la nécessité de compléter $\mathbb{Q}$ provient donc de la volonté de disposer d'un ensemble de nombres *continu*, c'est-à-dire « sans trous », que l'on pourrait représenter naturellement par une droite.

Cette affirmation revient à dire que le réel $\sqrt[3]{2}$ n'est pas rationnel ; exercez-vous à le montrer en vous inspirant de la preuve du fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$!

7.2.2 Comment compléter $\mathbb{Q}$?

Le problème de la complétion de $\mathbb{Q}$ en un ensemble continu ne fut résolu que dans les années 1870, de plusieurs façons distinctes mais équivalentes. On présente ici les grandes lignes de l'un des procédés de construction de $\mathbb{R}$, qui repose sur la notion de *coupures de Dedekind*.

Dedekind remarque qu'en supposant la notion de nombre réel correctement définie, alors tout nombre $x \in \mathbb{R}$ coupe $\mathbb{Q}$ en deux ensembles : celui des rationnels strictement inférieurs à x, et celui des rationnels supérieurs ou égaux à x. Il remarque aussi qu'en notant $A_x := \{a \in \mathbb{Q} : a < x\}$ le premier de ces deux ensembles, alors l'application $x \mapsto A_x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ est injective : en effet, si $x, y \in \mathbb{R}$ et si par exemple $x < y$, alors pour tout rationnel $a \in \mathbb{Q}$ vérifiant $x < a < y$ on a $a \in A_y$, mais $a \notin A_x$ donc $A_x \neq A_y$.

Richard Dedekind (1831–1916) est l'une des grandes figures de la théorie des nombres. S'opposant à la conception de Kronecker qui envisage les nombres entiers comme des phénomènes *que les mathématiques se doivent d'étudier comme le ferait une science naturelle (« Dieu créa les nombres, le reste est l'œuvre de l'homme »), Dedekind défend la thèse selon laquelle les nombres sont « des créations libres de l'esprit humain »... ce qu'illustre très bien le procédé de construction de $\mathbb{R}$ décrit ci-contre !*

En ne supposant plus que $\mathbb{R}$ est construit, on peut donc envisager de définir un réel x en utilisant la coupure A_x qui est une partie de $\mathbb{Q}$... pour peu, toutefois, que l'on parvienne à définir A_x sans faire de référence circulaire au réel x, qui n'est pas encore bien défini à ce stade ! Par exemple, au lieu d'écrire la coupure $A_{\sqrt{2}}$ sous la forme $\{a \in \mathbb{Q} : a < \sqrt{2}\}$, qui n'a pas de sens si $\sqrt{2}$ n'est pas bien défini, on peut la présenter sous une forme qui ne fait référence qu'à $\mathbb{Q}$ en l'écrivant $\{a \in \mathbb{Q} : a \leqslant 0 \text{ ou } a^2 < 2\}$.

Plus généralement, on définit une coupure de $\mathbb{Q}$ de la façon suivante :

Définition 1 (Coupure de $\mathbb{Q}$)**.** On appelle *coupure de* $\mathbb{Q}$ toute partie $A \subset \mathbb{Q}$ telle que

- $A \neq \varnothing$ et $A \neq \mathbb{Q}$.
- Pour tout $a \in A$ et tout $a' \in \mathbb{Q}$, si $a' < a$ alors $a' \in A$.
- A ne possède pas de plus grand élément.

Il n'est pas difficile de vérifier que l'ensemble $\{a \in \mathbb{Q} : a \leqslant 0 \text{ ou } a^2 < 2\}$ évoqué plus haut satisfait bien à cette définition, et que c'est aussi le cas des ensembles $A_x := \{a \in \mathbb{Q} : a < x\}$ pour $x \in \mathbb{Q}$ (la définition de tels A_x ne pose pas problème puisque $x \in \mathbb{Q}$).

On prend alors l'initiative audacieuse consistant à assimiler le nombre rationnel x à la coupure A_x, et à simplement appeler $\sqrt{2}$ la coupure $\{a \in \mathbb{Q} : a \leqslant 0 \text{ ou } a^2 < 2\}$. Plus généralement :

Définition 2 (Nombres réels, ordre sur $\mathbb{R}$)**.** On appelle *nombre réel* toute coupure de $\mathbb{Q}$, que l'on note généralement x plutôt que A.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

Si $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que $x \leqslant y$ lorsque la coupure x est incluse dans la coupure y.

Un autre procédé de construction de $\mathbb{R}$ repose sur la notion de *suite de Cauchy* et est présenté de manière informelle sur cette page.

On pourra aussi lire le Zoom sur la notion de complétude accompagnant les derniers exercices du chapitre 7.

Avec cette définition, on peut vérifier que l'on a bien $1 \leqslant \sqrt{2}$: en effet, la coupure 1 vaut $\{a \in \mathbb{Q} : a < 1\}$ et elle est incluse dans la coupure $\sqrt{2}$ qui vaut $\{a \in \mathbb{Q},\ a \leqslant 0 \text{ ou } a^2 < 2\}$.

Il reste encore à doter l'ensemble $\mathbb{R}$ ainsi créé d'opérations $+$ et $\times$ prolongeant les opérations déjà définies sur $\mathbb{Q}$. Pour cela, on définit la somme de deux coupures A et B comme

$$A + B := \{a + b,\ a \in A \text{ et } b \in B\}$$

et leur produit, lorsque ces deux coupures sont positives, comme

$$A \times B := \{c \in \mathbb{Q} : \exists a \in A, \exists b \in B : c \leqslant ab\}.$$

On peut proposer des définitions adaptées lorsque les coupures ne sont pas positives.

On peut alors vérifier que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps (voir définition **??**) et qu'il présente l'immense avantage par rapport à $\mathbb{Q}$ de vérifier le *principe de la borne supérieure* (qui, dans ce cadre, n'est plus un axiome !) : toute partie de $\mathbb{R}$ majorée et non vide possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas le principe de la borne supérieure : la partie $]-\infty, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$ est majorée et non vide, mais elle ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Il est désormais possible de donner un sens précis à des nombres réels comme $0,12345678910011...$: il s'agit de l'union infinie des coupures croissantes

$$0, \quad 0{,}1, \quad 0{,}12, \quad 0{,}123, \quad 0{,}1234, \quad \text{etc.}$$

Insistons : dans la construction de $\mathbb{R}$ présentée ici, un réel x est donc défini comme une coupure, c'est-à-dire comme un *ensemble* de nombres rationnels... Ce principe s'applique aussi aux nombres rationnels, qui sont au passage redéfinis comme les coupures qui leur correspondent.

Cette démarche de redéfinition n'est pas rare en mathématiques. On avait d'ailleurs utilisé un procédé similaire pour définir formellement $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$ dans le cadre de la théorie des ensembles : un *rationnel* $x \in \mathbb{Q}$ est en réalité la partie de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ constituée de tous les couples (a, b) tels que $x = \frac{a}{b}$, et dans ce cadre, le rationnel noté 3 est en fait l'ensemble $\{(3, 1), (-3, -1), (6, 2), (-6, -2), \ldots\}$. À chaque nouvelle étape de construction des ensembles de nombres, on redéfinit donc les objets introduits précédemment d'une façon plus complexe, mais qui permet de définir un ensemble plus riche.

Pas de panique cependant : en pratique, on oublie sans le moindre scrupule que $\mathbb{Q}$, et donc $\mathbb{R}$, sont définis de façon si compliquée, et on considère un réel comme une quantité sans se poser davantage de questions.

On dit que le rationnel 3 est la *classe d'équivalence* de $(3, 1)$ pour la relation d'équivalence $(a, b)\mathcal{R}(a', b') \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ sur l'ensemble $\mathbb{Z}^2$; voir le Zoom qui clôt le chapitre de trigonométrie.

La définition formelle des ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ n'est pas non plus d'une extrême évidence ; on pourra consulter cette page pour s'en convaincre !