4 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 35. Soit $f : E \to F$ une application.

1. (a) Montrer que si A et A' sont des parties de E, alors
$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \qquad \text{et} \qquad f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A').$$
   (b) Donner un exemple d'application f et d'ensembles A et A' pour lesquels l'inclusion réciproque $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$ n'est **pas** vérifiée.
   (c) Montrer l'équivalence suivante :
$$\big(\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \quad f(A) \cap f(A') = f(A \cap A')\big) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est injective.}$$
2. (a) Montrer que si A est une partie de E, alors
$$f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A).$$
   (b) Donner un exemple d'application f et d'ensembles A et E pour lesquels l'inclusion réciproque $f(E \setminus A) \subset f(E) \setminus f(A)$ n'est **pas** vérifiée.
   (c) Montrer l'équivalence suivante :
$$(\forall A \subset E, \quad f(E) \setminus f(A) = f(E \setminus A)) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est injective.}$$
   (d) Montrer l'équivalence suivante :
$$(\forall A \subset E, \quad F \setminus f(A) = f(E \setminus A)) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ est bijective.}$$
3. Montrer que si B et B' sont des parties de F, alors on a toujours
$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \qquad \text{et} \qquad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B').$$
4. Montrer que si B est une partie de F, alors on a toujours
$$f^{-1}(F \setminus B) = f^{-1}(F) \setminus f^{-1}(B).$$

Exercice 36. Soit E un ensemble et soit A une partie de E. On considère les applications

$$\begin{array}{rccc} \Phi_A : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & X & \longmapsto & A \cap X \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \Psi_A : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & X & \longmapsto & A \cup X. \end{array}$$

1. Établir les équivalences suivantes :

$$\Phi_A \text{ est injective} \iff \Phi_A \text{ est surjective} \iff \Phi_A \text{ est bijective} \iff A = E.$$

2. Établir les équivalences suivantes :

$$\Psi_A \text{ est injective} \iff \Psi_A \text{ est surjective} \iff \Psi_A \text{ est bijective} \iff A = \varnothing.$$

Exercice 37. Soit $f : E \to F$ une application. On définit les applications auxiliaires

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(F) \\ & A & \longmapsto & f(A) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{P}(F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & B & \longmapsto & f^{-1}(B) \end{array}.$$

1. (a) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on a $A \subset f^{-1}(f(A))$, avec égalité si f est injective.
   (b) Montrer que pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$ on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$, avec égalité si f est surjective.
2. (a) Montrer que Φ est injective si et seulement si f l'est.
   (b) Montrer que Φ est surjective si et seulement si f l'est.
3. (a) Montrer que Ψ est injective si et seulement si f est surjective.
   (b) Montrer que Φ est surjective si et seulement si f est injective.
4. Expliciter la bijection réciproque de Φ et celle de Ψ dans le cas où f est bijective.

Exercice 38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ une application strictement croissante. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$.
2. Si $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, a-t-on nécessairement $g = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$?
3. Existe-t-il une application $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement décroissante ?

Exercice 39. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(f(n)) < f(n+1). \qquad (\,*\,)$$

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $C_p := \{n \in \mathbb{N} \,:\, n \geqslant p\}$. Montrer que si $p \in \mathbb{N}$ alors $f(C_p) \subset C_p$.
2. Montrer que f est strictement croissante.
3. Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 40 (Théorème de Cantor-Bernstein). L'objectif de cet exercice est de prouver le théorème de Cantor-Bernstein énoncé dans la section 3 du cours et dont on rappelle l'énoncé :

> *Si A et B sont des ensembles tels qu'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe une bijection de A dans B.*

1. Démontrer le théorème dans le cas où A et B sont finis.

Dans la suite, on ne suppose pas nécessairement que A et B sont finis.

On commence par démontrer le lemme suivant :

> *Si A est un ensemble et si $A' \subset A$ est tel qu'il existe une application injective $u : A \to A'$, alors il existe une bijection de A sur A'.*

Un *lemme* est un résultat intermédiaire dont l'intérêt intrinsèque est mineur mais qui s'avère souvent crucial pour la démonstration d'un théorème plus important.

Pour démontrer ce résultat, donnons-nous un ensemble A et une partie A' de A telle qu'il existe une application injective $u : A \to A'$. On cherche à construire une bijection de A sur A'.

On définit la suite d'ensembles $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $C_0 = A \setminus A'$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = u(C_n)$, et on pose

$$C = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n.$$

2. Montrer que pour tout $x \in C$, on a $u(x) \in C$ (on dit que C est *stable par u*).

On considère à présent l'application

$$\begin{aligned} v : A &\longrightarrow A' \\ x &\longmapsto \begin{cases} u(x) \text{ si } x \in C \\ x \text{ sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Montrer que v est bien définie, puis qu'elle est bijective.
4. En déduire le lemme.

On démontre enfin le théorème de Cantor-Bernstein. Supposons que A et B sont deux ensembles tels qu'il existe une injection $f : A \to B$ et une injection $g : B \to A$. On pose $A' = g(B)$.

5. Montrer que
$$\begin{aligned} h : B &\longrightarrow A' \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$
est une bijection.
6. Montrer que $u := h \circ f$ est une injection de A dans A'.

D'après le lemme, il existe donc une bijection $v : A \to A'$.

7. Montrer que $h^{-1} \circ v$ est bijective et conclure.

Les exercices ci-après font référence aux notions développées dans la section 3 du présent chapitre, disponible en suivant ce lien. Ils sont donc tous hors-programme.

Exercice 41 ($\leqslant$ est une relation d'ordre.). Soient A, B et C trois ensembles. Montrer les trois propriétés suivantes :

(*i*) $|A| \leqslant |A|$ (réflexivité).

(*ii*) Si $|A| \leqslant |B|$ et $|B| \leqslant |C|$, alors $|A| \leqslant |C|$ (transitivité).

(*iii*) Si $|A| \leqslant |B|$ et $|B| \leqslant |A|$, alors $|A| = |B|$ (antisymétrie).

Ces trois propriétés font de la relation $\leqslant$ entre cardinaux ce que l'on appelle une *relation d'ordre*.

Exercice 42. Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse :

(*i*) $|\mathbb{D}| = |\mathbb{R}|$

(*ii*) $|\mathbb{R}| \leqslant |\mathbb{R}^2|$

(*iii*) $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^*|$

(*iv*) $|\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$

(*v*) $\mathbb{Q}_- \cup [1, 2]$ est dénombrable.

(*vi*) L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.

Exercice 43. Montrer que si A, B et C sont trois ensembles tels que $|A| \leqslant |B|$ et $|B| < |C|$, alors on a $|A| < |C|$.

Exercice 44. Soit A un ensemble infini tel que l'on puisse écrire

$$A = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\},$$

où les x_n sont des éléments de A non nécessairement distincts deux à deux.

Montrer que A est dénombrable.

Exercice 45. Montrer les points suivants :

1. Une union finie d'ensembles dénombrables est dénombrable.
2. Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
3. Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 46. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (a, b) &\longmapsto 2^a(2b+1) \end{aligned}$$

est bijective.

Exercice 47. Expliciter une bijection entre $\mathbb{N}^3$ et $\mathbb{N}$.

Indication : on proposera un protocole de numérotation des éléments de $\mathbb{N}^3$ sur le modèle donné dans la preuve du théorème 9 de la section 3, puis on cherchera une définition explicite.

Dans les exercices qui suivent, on pourra utiliser le résultat suivant : tout réel admet un unique développement décimal propre*, c'est-à-dire une unique écriture sous la forme d'un entier suivi d'une virgule et d'un nombre infini de décimales éventuellement nulles mais qui ne sont pas toutes égales à* 9 *à partir d'un certain rang – cette précision étant importante puisque le nombre* $1 = 1,0000\dots$ *s'écrit aussi sous la forme* $0,9999\dots$ *(voir l'exercice 34 du chapitre 15).*

Exercice 48. Montrer que $[0,1]$ et $[0,1]^2$ sont en bijection.

Exercice 49. Montrer que $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.

Indication : on pourra expliciter puis utiliser une injection $i : [\![0,9]\!] \to \{0,1\}^4$.

Exercice 50 (Égalité $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$). Montrer que les ensembles $[0,1[$ et $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ sont équipotents, puis en déduire que $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ le sont.

Indication : on pourra utiliser l'écriture décimale d'un nombre $x \in [0,1[$.