Intégration d'une fonction continue sur un segment

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 11.

(i) On reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$, ce qui permet d'écrire

$$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(1+e^t)\Big]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2) = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right).$$

(ii) En écrivant l'intégrande sous forme exponentielle, on a

$$\int_0^1 5^x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{x\ln(5)}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\ln(5)}e^{x\ln(5)}\right]_0^1 = \frac{e^{\ln(5)}-e^0}{\ln(5)} = \frac{4}{\ln(5)}.$$

(iii) On utilise la relation de Chasles pour découper l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 (1-|x-1|)^2\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^1 (1-(1-x))^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (1-(x-1))^2\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^1 x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (2-x)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^1 + \left[-\frac{(2-x)^3}{3}\right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{-8}{3}\right) - 0 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}.\end{aligned}$$

(iv) On reconnaît dans l'expression $\frac{1}{x\ln^2(x)} = \frac{1/x}{\ln^2(x)}$ une forme $\frac{u'}{u^2}$, d'où

$$\int_2^5 \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2(x)} = \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_2^5 = -\frac{1}{\ln(5)} + \frac{1}{\ln(2)} = \frac{\ln(5)-\ln(2)}{\ln(2)\ln(5)}.$$

(v) On reconnaît dans l'expression $\frac{1}{t(1+\ln^2(t))} = \frac{1/t}{1+\ln^2(t)}$ une forme $\frac{u'}{1+u^2}$, d'où

$$\int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t(1+\ln^2(t))} = \Big[\arctan(\ln(t))\Big]_1^e = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

(vi) On reconnaît dans l'expression $\frac{x}{(3+x^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{(3+x^2)^2}$ une forme $\frac{u'}{u^2}$ (au facteur $\frac{1}{2}$ près), d'où

$$\int_0^1 \frac{x}{(3+x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+x^2}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}.$$

(vii) On décompose l'intégrande en $\frac{3x+1}{1+x^2} = 3\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{3}{2}\frac{2x}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}$; le terme $\frac{2x}{1+x^2}$ étant de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{3x+1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{3}{2}\ln(1+x^2) + \arctan(x)\right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2}\ln(2) + \arctan(1) - \frac{3}{2}\ln(1) - \arctan(0) \\ &= \frac{3}{2}\ln(2) + \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

$(viii)$ Les deux intégrales formant la somme proposée ne se calculent pas séparément (en effet, les primitives de la fonction $x \mapsto e^{x^2}$ ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles) ; en revanche, elles sont bien définies puisque $x \mapsto e^{x^2}$ et $x \mapsto 2-e^{x^2}$ sont continues sur $[0,1]$, et on peut écrire par linéarité de l'intégrale que

$$\int_0^1 e^{x^2}\mathrm{d}x + \int_0^1 (2-e^{x^2})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(e^{x^2} + 2 - e^{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 2\,\mathrm{d}x = 2.$$

Correction de l'exercice 12. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}|\phi(x) - \phi(a)| &= \left|\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(at)\,\mathrm{d}t\right| \\ &= \left|\int_0^1 (f(xt) - f(at))\,\mathrm{d}t\right| \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &\leqslant \int_0^1 |f(xt) - f(at)|\,\mathrm{d}t \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \int_0^1 k\,|xt - at|\,\mathrm{d}t \quad \text{car } f \text{ est lipschitzienne} \\ &= k|x-a|\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \frac{k}{2}|x-a|.\end{aligned}$$

Or lorsque $x \to a$, on a $\frac{k}{2}|x-a| \to 0$, d'où $|\phi(x) - \phi(a)| \to 0$ par encadrement, soit $\phi(x) \to \phi(a)$. La fonction ϕ est donc continue en a ; comme a est quelconque, ϕ est bien continue sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 13.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ est continue sur le segment $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc l'intégrale définissant u_n existe.
2. On a
$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t}\mathrm{d}t = [\ln(2+t)]_0^1 = \ln(3) - \ln(2)$$
et
$$u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln(1+2t)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln(3).$$

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $t^{n+1} \leqslant t^n$, d'où

$$0 < 1 + t + t^{n+1} \leqslant 1 + t + t^n$$

et donc

$$\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t+t^{n+1}}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{n+1}}$$

d'où $u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a $1+t+t^n \geqslant 1+t > 0$ donc $\frac{1}{1+t+t^n} \leqslant \frac{1}{1+t}$. En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n} \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 = \ln(2).$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée par $\ln(2)$, or elle est croissante d'après la question précédente, donc elle converge.

4. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
\ln(2) - u_n &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^n} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}\right)\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(b) Si $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout $t \in [0,1]$ l'inégalité $(1+t)(1+t+t^n) \geqslant 1$, d'où

$$\begin{aligned}
\ln(2) - u_n &= \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{d}t \quad \text{par croissance de l'intégrale} \\
&= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

d'où le résultat attendu.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \ln(2) - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ d'après les questions 3b et 4b. Lorsque $n \to +\infty$, on a $\frac{1}{n+1} \to 0$, et le théorème des gendarmes donne alors $\ln(2) - u_n \to 0$. Ainsi, on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2).$$

Correction de l'exercice 14. En suivant l'indication, on écrit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\int_0^2 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x.$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en intégrant l'inégalité $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \leqslant x^n$ sur $[0,1]$, on obtient
$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}.$$
Si $n \geqslant 2$, en intégrant l'inégalité $\frac{x^n}{1+x^{2n}} \leqslant \frac{x^n}{x^{2n}} = \frac{1}{x^n}$ sur $[1,2]$ on obtient
$$\int_1^2 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x^n}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{x^{n-1}}\right]_1^2 = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$
Ainsi, pour tout $n \geqslant 2$ on a
$$0 \leqslant \int_0^2 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$
Or $\frac{1}{n+1} \to 0$ et $\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, donc $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Correction de l'exercice 15.

(*i*) Aucune intégration par parties n'est nécessaire ici : on reconnaît une forme $u'e^u$ (à un facteur près), ce qui donne
$$\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

(*ii*) On effectue une intégration par parties en dérivant la fonction $x \mapsto x^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue $x \mapsto xe^{x^2}$ (puisque $x^3e^x = x^2 \cdot xe^{x^2}$), ce qui donne
$$\int_0^1 x^3e^{x^2}\mathrm{d}x = \left[x^2\cdot\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 - \int_0^1 2x\cdot\frac{1}{2}e^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{e}{2} - \int_0^1 xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$$
soit, en utilisant le résultat de la question précédente :
$$\int_0^1 x^3e^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{e}{2} - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(*iii*) On peut écrire $t^2 = (t-1)(1+t)+1$, ce qui permet décomposer l'intégrande sous la forme
$$\frac{t^2}{1+t} = \frac{(t-1)(1+t)}{1+t} + \frac{1}{1+t} = t-1+\frac{1}{1+t}.$$
On en déduit
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{t^2}{2} - t + \ln(1+t)\right]_0^1 = \frac{1}{2} - 1 + \ln(2) = \ln(2) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(*iv*) On réalise une intégration par parties en dérivant la fonction $\ln^3$ de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction constante (et donc continue) $x \mapsto 1$, ce qui donne

$$\int_1^2 \ln^3(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln^3(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 x \cdot 3\ln^2(x) \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln^3(2) - 3\int_1^2 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

On calcule ensuite l'intégrale de $\ln^2$ par une nouvelle intégration par parties, en dérivant la fonction $\ln^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction constante (et donc continue $x \mapsto 1$), ce qui donne

$$\int_1^2 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln^2(x)\Big]_1^2 - \int_1^2 x \cdot 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2\ln^2(2) - 2\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

L'intégrale de ln se calcule enfin en utilisant une primitive de ln déterminée dans le cours (elle-même obtenue par intégration par parties !) :

$$\int_1^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x = [x\ln(x) - x]_1^2 = 2\ln(2) - 2 - (0-1) = 2\ln(2) - 1.$$

Ainsi, on a

$$\int_1^2 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln^2(2) - 2\,(2\ln(2) - 1) = 2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2$$

et enfin

$$\int_1^2 \ln^3(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln^3(2) - 3\Big(2\ln^2(2) - 4\ln(2) + 2\Big) = 2\ln^3(2) - 6\ln^2(2) + 12\ln(2) - 6.$$

(*v*) En écrivant $\ln(t^4) = 4\ln(t)$ (ce qui est licite lorsque $t > 0$) et en utilisant une primitive de ln déterminée dans le cours, on peut directement écrire

$$\begin{aligned}\int_1^2 \ln(t^4)\,\mathrm{d}t = 4\int_1^2 \ln(t)\,\mathrm{d}t &= 4\Big[t\ln(t) - t\Big]_1^2 \\ &= 4\,(2\ln(2) - 2 - (0-1))) = 8\ln(2) - 4.\end{aligned}$$

(*vi*) On réalise trois intégrations par parties successives, en dérivant trois fois la fonction $t \mapsto t^2$ de classe $\mathcal{C}^3$ et en primitivant trois fois la fonction continue cos, ce qui donne

$$\int_0^\pi t^2\cos(t)\,\mathrm{d}t = \Big[t^2\sin(t)\Big]_0^\pi - \Big[-2t\cos(t)\Big]_0^\pi + \Big[-2\sin(t)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 0\,\mathrm{d}t = -2\pi.$$

(*vii*) On réalise quatre intégrations par parties successives, en dérivant quatre fois la fonction $t \mapsto (2t-4)^3$ de classe $\mathcal{C}^4$ et en primitivant quatre fois la fonction continue $t \mapsto (t-3)^5$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_2^4 (t-3)^5(2t-4)^3\,\mathrm{d}t &= \Big[(2t-4)^3 \cdot \frac{1}{6}(t-3)^6\Big]_2^4 - \Big[6(2t-4)^2 \cdot \frac{1}{6\cdot 7}(t-3)^7\Big]_2^4 \\ &+ \Big[6\cdot 4(2t-4) \cdot \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8}(t-3)^8\Big]_2^4 - \Big[6\cdot 4\cdot 2 \cdot \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}(t-3)^9\Big]_2^4 + \int_2^4 0\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{32}{3} - \frac{16}{7} + \frac{2}{7} - \frac{1}{63} + \frac{1}{63} = \frac{544}{63}.\end{aligned}$$

(*viii*) On réalise une intégration par parties en dérivant la fonction ln de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue $u \mapsto \sqrt{u}$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{u}\ln(u)\,\mathrm{d}u &= \left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\ln(u)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{4\sqrt{2}}{3}\ln(2) - \left[\frac{4}{9}u^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3}\ln(2) - \left(\frac{8\sqrt{2}}{9} - \frac{4}{9}\right) = \frac{4 - 8\sqrt{2} + 12\sqrt{2}\ln(2)}{9}.\end{aligned}$$

(*ix*) On réalise une intégration par parties en dérivant la fonction arctan de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue $x \mapsto x$. On obtient alors [1]

$$\int_0^1 x\arctan(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(x^2+1)\arctan(x)\right]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2}(x^2+1)\frac{1}{1+x^2}}_{=\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

soit

$$\int_0^1 x\arctan(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(2\arctan(1) - \arctan(0)\right) - 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi-2}{4}.$$

Correction de l'exercice 16.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0,1]$, on a $\sin(\pi x) \in [0,1]$, d'où l'encadrement $0 \leqslant x^n \sin(\pi x) \leqslant x^n$ puisque $x^n \geqslant 0$. En intégrant cette inégalité sur $[0,1]$, on obtient

$$0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

ce qui est le résultat à démontrer.

   (b) On sait que $\frac{1}{n+1} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. D'après le théorème des gendarmes et l'encadrement démontré dans la question précédente, on a donc $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

2. On a tout d'abord

$$I_0 = \int_0^1 \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

Pour calculer I_1, on effectue une intégration par parties : on dérive la fonction $x \mapsto x$ de classe $\mathcal{C}^1$ et on primitive la fonction continue $x \mapsto \sin(\pi x)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}I_1 = \int_0^1 x\sin(\pi x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{-\cos(\pi x)}{\pi}x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{\pi}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} + \left[\frac{\sin(\pi x)}{\pi^2}\right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

1. On notera le choix astucieux de la primitive $x \mapsto \frac{1}{2}(x^2+1)$ plutôt que de $x \mapsto \frac{x^2}{2}$, qui n'aurait pas permis la même simplification avec la dérivée de arctan.

3. Soit $n \geqslant 2$. On réalise deux intégrations par parties successives, en dérivant deux fois la fonction $x \mapsto x^n$ de classe $\mathcal{C}^2$ et en primitivant la fonction continue $x \mapsto \sin(\pi x)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n \sin(\pi x) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{-\cos(\pi x)}{\pi} x^n \right]_0^1 + \left[\frac{n}{\pi} \frac{\sin(\pi x)}{\pi} x^{n-1} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{\pi} \frac{\sin(\pi x)}{\pi} (n-1) x^{n-2} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} - \frac{n(n-1)}{\pi^2} I_{n-2}. \end{aligned}$$

4. Démontrons la formule par récurrence. Elle est valable pour $p = 1$, puisque d'une part

$$I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} I_0 = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}$$

et d'autre part

$$(-1)^1 \frac{2!}{\pi^{2+1}} + (-1)^0 \frac{2!}{\pi^1 (2!)} + (-1)^1 \frac{2!}{\pi^{2+1}} = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}.$$

Supposons à présent que la formule soit vérifiée pour un certain entier $p \geqslant 1$. Alors, en vertu de la relation trouvée dans la question précédente :

$$I_{2(p+1)} = I_{2p+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(2p+2)(2p+1)}{\pi^2} I_{2p}$$

soit, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned} I_{2(p+1)} &= \frac{1}{\pi} - \frac{(2p+2)(2p+1)}{\pi^2} \left((-1)^p \frac{(2p)!}{\pi^{2p+1}} + \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \frac{(2p)!}{\pi^{2k+1}(2p-2k)!} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} + (-1)^{p+1} \frac{(2p+2)!}{\pi^{2p+3}} + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \frac{(2p+2)!}{\pi^{2k+3} \big(2p-2k\big)!} \\ &= \frac{1}{\pi} + (-1)^{p+1} \frac{\big(2(p+1)\big)!}{\pi^{2(p+1)+1}} + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \frac{\big(2(p+1)\big)!}{\pi^{2(k+1)+1} \big(2(p+1) - 2(k+1)\big)!}. \end{aligned}$$

En effectuant le changement d'indice $j = k + 1$, on obtient alors

$$\begin{aligned} I_{2(p+1)} &= \frac{1}{\pi} + (-1)^{p+1} \frac{\big(2(p+1)\big)!}{\pi^{2(p+1)+1}} + \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^j \frac{\big(2(p+1)\big)!}{\pi^{2j+1} \big(2(p+1) - 2j\big)!} \\ &= (-1)^{p+1} \frac{\big(2(p+1)\big)!}{\pi^{2(p+1)+1}} + \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \frac{\big(2(p+1)\big)!}{\pi^{2j+1} \big(2(p+1) - 2j\big)!}, \end{aligned}$$

d'où la formule au rang $p + 1$. Ainsi, la formule est vraie à tout rang $p \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 17.

1. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{\alpha}{2x} + \frac{\beta + \gamma x}{x^2+1} = \frac{\alpha(x^2+1) + 2x(\beta+\gamma x)}{2x(x^2+1)} = \frac{(\alpha+2\gamma)x^2 + 2\beta x + \alpha}{2x(x^2+1)},$$

donc la condition considérée est satisfaite dès lors que l'on a

$$(\alpha+2\gamma)x^2 + \beta x + \alpha = 1$$

pour tout $x \neq 0$. Il est donc suffisant que l'on ait $\alpha + 2\gamma = 0$, $\beta = 0$ et $\alpha = 1$, ce qui implique que $\gamma = -\frac{1}{2}$. On vérifie bien que l'on peut écrire :

$$\forall x \neq 0, \qquad \frac{1}{2x(x^2+1)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1}.$$

2. En dérivant la fonction ln de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+1)^2}$, on obtient par intégration par parties et en utilisant la question précédente

$$\begin{aligned}
I &= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot \ln(x)\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{10}\ln(2) + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{2x(x^2+1)} \\
&= -\frac{1}{10}\ln(2) + \int_1^2 \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{10}\ln(2) + \left[\frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)\right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{10}\ln(2) + \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(5) + \frac{1}{4}\ln(2) \\
&= \frac{13}{20}\ln(2) - \frac{1}{4}\ln(5).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 18. D'après le théorème fondamental de l'analyse, une primitive de f est la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \cos(t)e^t \mathrm{d}t$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut reformuler l'intégrale qui définit $F(x)$ grâce à une double intégration par parties, en dérivant deux fois la fonction cos de classe $\mathcal{C}^2$ et en primitivant deux fois la fonction continue exp :

$$F(x) = \int_0^x \cos(t)e^t \mathrm{d}t = \Big[\cos(t)e^t\Big]_0^x + \Big[\sin(t)e^t\Big]_0^x - \int_0^x \cos(t)e^t \mathrm{d}t,$$

d'où $F(x) = \cos(x)e^x - 1 + \sin(x)e^x - F(x)$, soit $2F(x) = \cos(x)e^x - 1 + \sin(x)e^x$. Ainsi, la fonction $F : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\Big((\cos(x) + \sin(x))e^x - 1\Big)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 19. Pour tout $n \geqslant 1$, une intégration par parties (en dérivant la fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue $t \mapsto \cos(nt)$) permet d'écrire

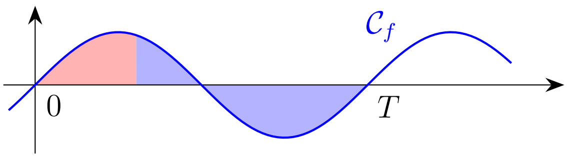
$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(nt) f(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{n}\sin(nt)f(t)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\sin(nt)f'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{n}\int_0^\pi \sin(nt)f'(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

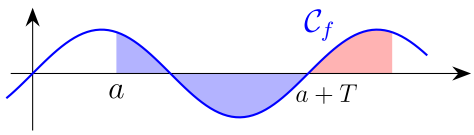
Or f' est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc elle y est bornée par un réel $M \geqslant 0$ d'après le théorème des bornes atteintes. Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\pi \cos(nt) f(t)\,\mathrm{d}t\right| &= \frac{1}{n}\left|\int_0^\pi \sin(nt)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\int_0^\pi |\sin(nt)| \cdot |f'(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &= \frac{1}{n}\int_0^\pi 1 \cdot M\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n}\pi M \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,\end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\int_0^\pi \cos(nt) f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ d'après le théorème des gendarmes.

Correction de l'exercice 20. La figure ci-dessous illustre la propriété démontrée : graphiquement, elle résulte du fait que les surfaces mesurées par l'intégrale de f sur n'importe quelle période sont semblables à une recomposition près.





On élabore une démonstration s'appuyant sur cette intuition graphique. Soit $a \in \mathbb{R}$; en utilisant la relation de Chasles, on peut écrire

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

mais le changement de variable $u = t - T$ et la T-périodicité de f donnent

$$\int_T^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(u+T)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u,$$

d'où

$$\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 21.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. En utilisant le changement de variable affine $u = xt$, qui donne $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$ et donc $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}u$, on peut écrire
$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u.$$
Or d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ puisque f est continue, donc c'est aussi le cas de la fonction $\varphi : x \mapsto \frac{1}{x}\Phi(x)$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Toujours d'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction Φ admet $f(0)$ pour nombre dérivé en 0, c'est-à-dire que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\Phi(x)-\Phi(0)}{x-0} = f(0), \quad \text{soit} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\Phi(x)}{x} = f(0).$$
Or cette relation se réécrit $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x) = f(0)$; mais $\varphi(0) = \displaystyle\int_0^1 f(0)\,\mathrm{d}t = f(0)$, donc $\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \varphi(0)$, c'est-à-dire que φ est continue en 0.
3. Dans le cas où f est la fonction valeur absolue, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \int_0^1 |xt|\,\mathrm{d}t = |x|\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{|x|}{2}.$$
Dans ce cas, la fonction φ n'est pas dérivable en 0, donc *a fortiori* pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 22. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le changement de variable affine $u = xt$, qui donne $\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t$, permet d'écrire
$$\varphi(x) = \int_{-x^2}^{x^2\cos(x)} e^u\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$
La fonction $f : u \mapsto e^u\sqrt{1+u^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme combinaison de fonctions continue ; en considérant une primitive F de f sur $\mathbb{R}$, on a donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = F(x^2\cos(x)) - F(-x^2).$$
Ainsi, φ apparaît comme une combinaison de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$: elle est donc elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 23. D'après le théorème fondamental de l'intégration, la fonction continue $x \mapsto \sin(\sqrt{x})$ admet la fonction $\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sin\left(\sqrt{t}\right)\mathrm{d}t$ pour primitive sur $\mathbb{R}_+$. Fixons $x \geqslant 0$ et calculons explicitement $\Phi(x)$: on réalise pour cela le changement de variable $t = u^2$ associé à la fonction $u \mapsto u^2$ de classe $\mathcal{C}^1$, qui donne
$$\begin{cases} t = 0 \text{ si } u = 0 \\ t = x \text{ si } u = \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}t = 2u\,\mathrm{d}u$$

et donc
$$\Phi(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin(u) 2u \,\mathrm{d}u.$$
On réalise à présent une intégration par parties en primitivant la fonction continue sin et en dérivant la fonction $u \mapsto u$ de classe $\mathcal{C}^1$, pour obtenir
$$\begin{aligned}\Phi(x) &= 2\Big[-\cos(u)u\Big]_0^{\sqrt{x}} + 2\int_0^{\sqrt{x}} \cos(u)\,\mathrm{d}u \\ &= -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\left[\sin(u)\right]_0^{\sqrt{x}} = -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x}).\end{aligned}$$
Ainsi, une primitive de $x \mapsto \sin(\sqrt{x})$ sur $\mathbb{R}_+$ est donnée par
$$\Phi : x \mapsto -2\sqrt{x}\cos(\sqrt{x}) + 2\sin(\sqrt{x}).$$
Notons que la dérivabilité à droite en 0 de cette fonction n'aurait pas été évidente si elle n'avait pas été donnée par le théorème fondamental de l'analyse, puisque la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. On aurait toutefois pu la retrouver à l'aide de développements limités à l'ordre 1 des fonctions cos et sin en 0 ; l'exercice est laissé au lecteur.

Correction de l'exercice 24.

(i) On réalise le changement de variable $t = \sqrt{e^x - 1}$, licite puisque la fonction $x \mapsto \sqrt{e^x - 1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\ln(2), 1]$; on obtient
$$\begin{cases} t = 1 & \text{si} \quad x = \ln(2) \\ t = \sqrt{e-1} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$
ainsi que $2 + e^x = 3 + (e^x - 1) = 3 + t^2$, donc
$$\begin{aligned}\int_{\ln(2)}^1 \frac{e^x}{(2+e^x)\sqrt{e^x - 1}}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\sqrt{e-1}} \frac{2\,\mathrm{d}t}{3+t^2} \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^{\sqrt{e-1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{e-1}}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{e-1}}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

(ii) On réalise le changement de variable $t = \sin(x)$, licite puisque sin est de classe $\mathcal{C}^1$: on obtient
$$\begin{cases} t = 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ t = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si} \quad x = \frac{\pi}{4} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}t = \cos(x)\,\mathrm{d}x,$$

d'où, en remarquant [2] que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - t^2$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{2-t^2} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+t} + \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-t} \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\ln\left(\sqrt{2}+t\right) - \ln\left(\sqrt{2}-t\right) \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\ln\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right) = \frac{\ln(3)}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

(*iii*) On réalise le changement de variable $t = \sqrt{e^x+1}$, qui est licite puisque $x \mapsto \sqrt{e^x+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$: on obtient

$$\begin{cases} t = \sqrt{2} & \text{si} \quad x = 0 \\ t = \sqrt{1+e} & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

et

$$x = \ln(t^2-1) \quad \text{donc} \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{2t}{t^2-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x = \frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} t \cdot \frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \frac{2t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \left(\frac{2(t^2-1)}{t^2-1} + \frac{2}{t^2-1} \right) \mathrm{d}t = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \left(2 + \frac{2}{t^2-1} \right) \mathrm{d}t \\
&= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \left(2 + \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) \mathrm{d}t \\
&= \Big[2t + \ln(t-1) - \ln(t+1) \Big]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e}} \\
&= 2(\sqrt{1+e} - \sqrt{2}) + \ln\left(\frac{\sqrt{1+e}-1}{\sqrt{1+e}+1} \right) + \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right).
\end{aligned}$$

(*iv*) On réalise le changement de variable $u = \sin(x)$, qui est licite car sin est de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient

$$\begin{cases} u = 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ u = \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = \frac{\pi}{6} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \quad \text{donc} \quad \mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)(1-\sin(x))} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x)(1-\sin(x))} \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u^2)(1-u)} \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)(1+u)(1-u)} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2(1+u)}.
\end{aligned}$$

2. La décomposition de $\frac{1}{2-t^2}$ est ensuite obtenue par la méthode classique reposant sur l'identification des coefficients du numérateur, comme dans la question 1 de l'exercice 17.

On cherche à présent des coefficients $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ vérifiant la décomposition $\frac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{\alpha}{1-u} + \frac{\beta}{1+u} + \frac{\gamma}{(1-u)^2}$ pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: on doit pour cela avoir

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-u)^2(1+u)} &= \frac{\alpha(1+u)(1-u) + \beta(1-u)^2 + \gamma(1+u)}{(1-u)^2(1+u)} \\ &= \frac{(\beta-\alpha)u^2 + (\gamma - 2\beta)u + \alpha + \beta + \gamma}{(1-u)^2(1+u)}\end{aligned}$$

pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, ce qui est le cas lorsque

$$\left\{\begin{array}{rcl} \beta - \alpha &=& 0 \\ \gamma - 2\beta &=& 0 \\ \alpha + \beta + \gamma &=& 1 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& \beta \\ \gamma &=& 2\beta \\ 4\beta &=& 1 \end{array}\right. \quad \text{soit encore} \quad \alpha = \beta = \frac{1}{4} \text{ et } \gamma = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, on peut écrire

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad \frac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{1}{4(1-u)} + \frac{1}{4(1+u)} + \frac{1}{2(1-u)^2},$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos(x)(1-\sin(x))} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2(1+u)} \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{4(1-u)} + \frac{1}{4(1+u)} + \frac{1}{2(1-u)^2} \right) \mathrm{d}u \\ &= \left[-\frac{1}{4}\ln(1-u) + \frac{1}{4}\ln(1+u) + \frac{1}{2(1-u)} \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right) + 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ln(3) + \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 25.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par linéarité de l'intégrale

   $$P(\lambda) = \int_a^b \left(f^2 + 2\lambda f g + \lambda^2 g^2\right) = \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \lambda^2 \int_a^b g^2 = A\lambda^2 + B\lambda + C$$

   avec $A := \int_a^b g^2$, $B := 2\int_a^b fg$ et $C := \int_a^b f^2$. La fonction P est donc bien une fonction polynomiale de degré au plus 2.

2. En tant qu'intégrale d'une fonction positive sur un segment dont les bornes sont « dans le bon sens », $P(\lambda)$ est positif quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Si $A = 0$, c'est-à-dire si $\int_a^b g^2 = 0$, la fonction continue et positive g^2 est nulle sur $[a, b]$, c'est-à-dire que g l'est ; l'inégalité de Cauchy-Schwarz est alors vraie puisqu'elle stipule que $0 \leqslant 0$, et elle donne même une égalité.

   Supposons à présent que $A > 0$: la fonction P est alors polynomiale de degré 2. Le fait que P ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$ se traduit en disant que son discriminant est négatif ou nul (en effet, s'il était strictement positif, P admettrait deux racines réelles, donc changerait strictement de signe sur $\mathbb{R}$) : ainsi, on a $B^2 - 4AC \leqslant 0$, soit

$$\left(2\int_a^b fg\right)^2 - 4\left(\int_a^b g^2\right)\left(\int_a^b f^2\right) \leqslant 0, \text{ d'où } 4\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant 4\left(\int_a^b g^2\right)\left(\int_a^b f^2\right).$$

En divisant les deux termes de cette dernière inégalité par 4 et en passant à la racine carrée, on obtient bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. On a vu que l'inégalité de Cauchy-Schwarz était une égalité dans le cas où g est nulle sur $[a, b]$. Supposons désormais que ce ne soit pas le cas : d'après la réponse à la question précédente, l'inégalité est alors une égalité si et seulement si le discriminant de P est nul. Cette condition équivaut à l'existence d'une racine réelle de P, c'est-à-dire à l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $\displaystyle\int_a^b (f + \lambda g)^2 = 0$. Or $(f + \lambda g)^2$ est continue et positive quel que soit λ, donc on a $\displaystyle\int_a^b (f + \lambda g)^2 = 0$ si et seulement si $(f + \lambda g)^2$ est nulle sur $[a, b]$, c'est-à-dire si $f + \lambda g$ l'est.

   Ainsi, on a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si g est nulle sur $[a, b]$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = -\lambda g$: en d'autres termes, l'égalité est réalisée si et seulement si les fonctions f et g sont proportionnelles (sur $[a, b]$).

Correction de l'exercice 26.

1. On a $W_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
2. Soit $n \geqslant 2$. On écrit

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

   puis on réalise une intégration par parties en dérivant la fonction $\sin^{n-1}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue sin pour obtenir

$$\begin{aligned} W_n &= \left[-\cos(t)\sin^{n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(t))\sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{par l'égalité fondamentale de la trigonométrie} \\ &= (n-1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t\right) \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= (n-1)\left(W_{n-2} - W_n\right). \end{aligned}$$

   Ainsi, on a $nW_n = (n-1)W_{n-2}$, soit $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$.
3. La propriété à démontrer peut s'établir par récurrence grâce au résultat de la

question précédente, ou plus informellement en écrivant que si $k \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned} W_{2k} &= \frac{2k-1}{2k} W_{2k-2} = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} W_{2k-4} \\ &= \cdots = \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdots \frac{1}{2} W_0 \\ &= \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2i} \right) \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

et

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2i} = \frac{\prod_{j=1}^{2k} j}{\left(\prod_{i=1}^{k} 2i \right)^2} = \frac{(2k)!}{\left(2^k \prod_{i=1}^{k} i \right)^2} = \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2},$$

et de même pour le calcul de W_{2k+1}.

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire par linéarité de l'intégrale que

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n+1}(t) - \sin^n(t) \right) \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) - 1) \sin^n(t) \, \mathrm{d}t$$

d'où, comme $\sin \leqslant 1$ et comme $\sin^n(t) \geqslant 0$ pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'inégalité $W_{n+1} - W_n \leqslant 0$. Ainsi, $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien décroissante.

(b) La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive en tant que suite d'intégrales de fonctions continues positives non nulles. Comme elle est décroissante, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'encadrement

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1, \quad \text{soit} \quad \frac{n+1}{n+2} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1$$

d'après le résultat de la question 2. Or $\frac{n+1}{n+2} \to 1$ lorsque $n \to +\infty$, donc $\frac{W_{n+1}}{W_n} \to 1$ par le théorème des gendarmes : ainsi, on a bien $W_{n+1} \sim W_n$ lorsque $n \to +\infty$.

(c) Si $n \in \mathbb{N}$ est pair, on écrit $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$, et on a alors

$$\begin{aligned} W_n W_{n+1} = W_{2k} W_{2k+1} &= \frac{\pi}{2} \frac{(2k)!}{(2^k k!)^2} \cdot \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2k)!}{(2k+1)!} = \frac{\pi}{2(2k+1)} = \frac{\pi}{2(n+1)} \end{aligned}$$

d'après la question 3.

Si $n \in \mathbb{N}$ est impair, on écrit $n = 2k+1$ avec $k \in \mathbb{N}$, et on a alors, toujours d'après la question 3 :

$$\begin{aligned} W_n W_{n+1} = W_{2k+1} W_{2k+2} &= \frac{(2^k k!)^2}{(2k+1)!} \cdot \frac{\pi}{2} \frac{(2k+2)!}{(2^{k+1}(k+1)!)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2k+2}{(2(k+1))^2} = \frac{\pi}{2(2k+2)} = \frac{\pi}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$. Or en utilisant la question précédente, on trouve

$$W_n W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n^2 \quad \text{donc} \quad W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}.$$

En composant cet équivalent par la fonction racine carrée (ce qui est toujours licite !), on a donc $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 27. La fonction f étant continue sur $[a, b]$, elle y admet un minimum m et un maximum M d'après le théorème des bornes atteintes. D'après l'inégalité de la moyenne, le réel $y := \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est donc un élément de $[m, M]$; or l'image $f([a, b])$ est égale à $[m, M]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$, d'où le résultat à démontrer.

On peut proposer une démonstration alternative à l'aide du théorème des accroissements finis : d'après le théorème fondamental de l'analyse, comme f est continue sur $[a, b]$, la fonction

$$F : z \longmapsto \int_a^z f(x)\,\mathrm{d}x$$

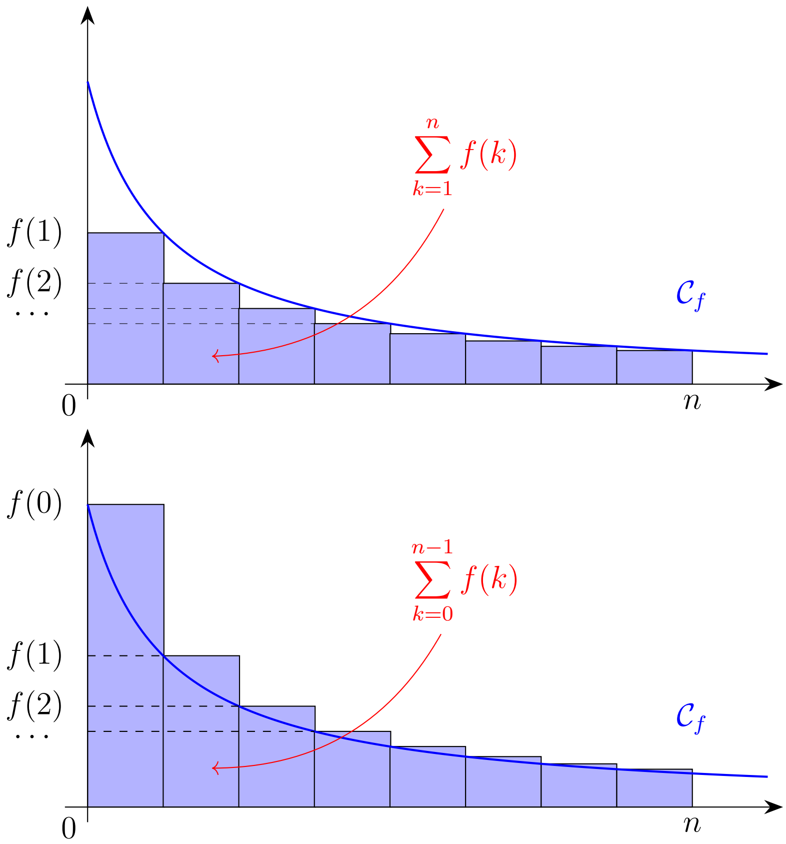
est dérivable sur $[a, b]$ (au sens de la dérivabilité à droite en a et de la dérivabilité à gauche en 0), de dérivée f. Elle est donc continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$; en lui appliquant le théorème des accroissements finis, on obtient l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que $F(b) - F(a) = F'(c)(b-a)$, soit $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a)$. On obtient le résultat en divisant cette égalité par la quantité $b - a \neq 0$.

Correction de l'exercice 28.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme f est décroissante, pour tout $t \in [k, k+1]$ on a l'encadrement $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$. En intégrant cette double inégalité sur $[k, k+1]$, on obtient
$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t,$$
soit
$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k).$$

2. En sommant la double inégalité démontrée dans la question précédente pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$
En réécrivant la somme de gauche grâce à un changement d'indice et la quantité centrale grâce à la relation de Chasles, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k),$$
ce qu'il fallait démontrer.

3. L'inégalité établie exprime le fait que l'intégrale de f sur $[0, n]$ peut être encadrée par l'aire totale de rectangles situés sous la courbe de f et celle de rectangles recouvrant cette courbe définis, comme sur la figure suivante :



Correction de l'exercice 29.

1. La fonction f étant croissante, un raisonnement similaire à celui développé dans l'exercice 28 (encadrement de f sur les intervalles $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$, intégration de l'inégalité obtenue sur $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ puis sommation des inégalités résultantes pour $k \in [\![0, n-1]\!]$) permet d'écrire l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

que l'on peut réécrire à l'aide de la relation $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + f(1) - f(0)$ sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{f(1) - f(0)}{n}.$$

On obtient alors la limite attendue grâce au théorème des gendarmes.

2. Supposons f décroissante. En appliquant le résultat précédent à la fonction croissante $g := -f$, on obtient

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

donc le résultat reste valable pour f.

3. (a) En écrivant $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ pour tout $n \geqslant 1$, on peut appliquer le résultat de la question précédente à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ (continue et décroissante sur $[0,1]$) pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \Big[\arctan(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

(b) En écrivant $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}}$ pour tout $n \geqslant 1$, en appliquant le résultat de la question précédente à la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ (continue sur $[0,1]$ et croissante sur cet intervalle comme produit des fonctions positives et croissantes $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$) et en reconnaissant une forme $\frac{u'}{\sqrt{u}} = u'u^{-\frac{1}{2}}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x = \Big[-\sqrt{4-x^2}\Big]_0^1 = 2-\sqrt{3}.$$

(c) En écrivant $\ln(w_n) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$ pour tout $n \geqslant 1$, on peut appliquer le résultat de la question précédente à la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ (continue et croissante sur $[0,1]$) pour obtenir

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x.$$

On calcule cette intégrale par intégration par parties, en dérivant la fonction $x \mapsto \ln(1+x^2)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue $x \mapsto 1$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \ln(2) - \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \ln(2) - \Big[2x - 2\arctan(x)\Big]_0^1 \\
&= \ln(2) - 2 + 2\arctan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $w_n = \exp(\ln(w_n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}\right) = 2e^{-2+\frac{\pi}{2}}$ par continuité de la fonction exponentielle.

Correction de l'exercice 30.

1. La fonction g étant continue sur $[a,b]$, elle y admet un minimum et un maximum d'après le théorème des bornes atteintes ; on note respectivement m et M ces bornes. Comme f est positive, on a $mf(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mf(t)$ pour tout $t \in [a,b]$. En intégrant cet encadrement sur $[a,b]$, on obtient
$$m\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$
Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, comme f est continue et positive sur $[a,b]$, elle nulle sur cet intervalle ; l'égalité recherchée est alors vraie quel que soit $c \in [a,b]$ puisque toutes les intégrales considérées sont nulles.
Supposons à présent que l'on ait $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$. L'encadrement (1) donne alors
$$m \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t} \leqslant M, \quad \text{soit} \quad y := \frac{\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t} \in [m,M].$$
Or $g([a,b]) = [m,M]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires puisque g est continue ; ainsi, il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = y$, ce qui donne l'égalité attendue.
2. Supposons g positive et décroissante ; pour tout $t \in [a,b]$, on a alors l'encadrement $0 \leqslant g(t) \leqslant g(a)$, et donc $g(t)f(t) \leqslant g(a)f(t)$. En intégrant cette inégalité sur $[a,b]$, on obtient
$$0 \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant g(a)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Le réel $z := \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est donc un élément de l'intervalle $\left[0, g(a)\int_a^b f\right]$. Considérons à présent la fonction $\psi : x \mapsto g(a)\int_a^x f$; d'après le théorème fondamental de l'analyse, ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et vérifie $\psi' = f \geqslant 0$. Elle prend par ailleurs la valeur 0 en 0 et la valeur $g(a)\int_a^b f$ en b. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle visite donc sur $[a,b]$ toutes les valeurs de l'intervalle $\left[0, g(a)\int_a^b f\right]$. C'est le cas notamment pour la valeur z. En d'autres termes :
$$\exists d \in [a,b] \ : \ \underbrace{g(a)\int_a^d f(t)\,\mathrm{d}t}_{\psi(d)} = \underbrace{\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t,}_{z}$$
ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 31.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On réalise une intégration par parties en dérivant la fonction $t \mapsto y - t$ de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue h'' pour obtenir
$$\int_x^y (y-t)h''(t)\mathrm{d}t = [(y-t)h'(t)]_x^y - \int_x^y (-h'(t))\mathrm{d}t = -(y-x)h'(x) + h(y) - h(x),$$
ce qui, après réarrangement des termes, donne l'égalité à démontrer.

2. Par hypothèse, on a $h''(x) > 0$. La fonction h'' étant continue, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [x-\alpha, x+\alpha]$ on ait $h''(t) > \frac{h''(x)}{2}$. Pour tout $y \in]x, x+\alpha]$, on a alors, en utilisant la croissance de l'intégrale et le fait que $y - t \geqslant 0$ pour tout $t \in [x, y]$:

$$\int_x^y (y-t)h''(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_x^y (y-t)\frac{h''(x)}{2}\mathrm{d}t = \frac{h''(x)}{2}\left[-\frac{(y-t)^2}{2}\right]_x^y = \frac{h''(x)}{4}(y-x)^2 > 0.$$

Pour tout $y \in [x-\alpha, x[$, on a de même

$$\begin{aligned}\int_x^y (y-t)h''(t)\,\mathrm{d}t &= \int_y^x (t-y)h''(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_y^x (t-y)\frac{h''(x)}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{h''(x)}{2}\left[\frac{(t-y)^2}{2}\right]_x^y = \frac{h''(x)}{4}(x-y)^2 > 0,\end{aligned}$$

toujours par croissance de l'intégrale (après avoir remis les bornes de l'intégrale dans l'ordre croissant !) et car $t - y \geqslant 0$ pour tout $t \in [y, x]$. Ainsi, on a bien :

$$\forall y \in [x-\alpha, x+\alpha] \ : y \neq x, \quad \int_x^y (y-t)h''(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

3. On démontre l'équivalence attendue par double implication.

Si h est une fonction affine, il existe $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tels que $h(y) = \gamma y + \delta$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, si $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} h(y)\mathrm{d}y = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}(\gamma y + \delta)\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2a}\left[\gamma\frac{y^2}{2} + \delta y\right]_{x-a}^{x+a} \\ &= \frac{1}{2a}\left(\gamma\frac{(x+a)^2}{2} + \delta(x+a) - \gamma\frac{(x-a)^2}{2} - \delta(x-a)\right) \\ &= \frac{1}{2a}\left(2a\gamma x + 2a\delta\right) = \gamma x + \delta = h(x).\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que h vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall a > 0, \quad h(x) = \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} h(y)\,\mathrm{d}y.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la question 1 et par linéarité de l'intégrale, on peut écrire que pour tout $a > 0$ on a

$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}\left(h(x) + (y-x)h'(x) + \int_x^y (y-t)h''(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} h(x)\mathrm{d}y + \frac{1}{2a}h'(x)\int_{x-a}^{x+a}(y-x)\mathrm{d}y + \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}\left(\int_x^y (y-t)h''(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2a}\cdot 2ah(x) + \frac{1}{2a}h'(x)\cdot 0 + \frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}\left(\int_x^y (y-t)h''(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

d'où, après élimination des termes $h(x)$ des deux côtés de l'équation :

$$\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a}\left(\int_x^y (y-t)h''(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y = 0. \tag{2}$$

Supposons à présent que $h''(x) > 0$. Il existe d'après la question précédente une valeur de $\alpha > 0$ telle que la quantité $p(y) := \int_x^y (y-t)h''(t)\mathrm{d}t$ soit strictement positive pour tout $y \in [x-\alpha, x+\alpha]$. Or $p : y \mapsto p(y)$ définit une fonction continue d'après le théorème fondamental de l'analyse, donc l'intégrale de p sur $[x-\alpha, x+\alpha]$ est strictement positive, ce qui contredit la relation (2) censée être valable pour tout $a > 0$ (et donc pour $a = \alpha$).

Si $h''(x) < 0$, on montre comme dans la question 2 que pour un certain $\alpha > 0$ on a $p(y) < 0$ pour tout $y \in [x-\alpha, x+\alpha]$, d'où l'on déduit par le même argument que ci-dessus que l'intégrale de p sur $[x-\alpha, x+\alpha]$ est strictement négative, ce qui contredit à nouveau (2).

Ainsi, on a $h''(x) = 0$. Comme nous avons considéré x quelconque dans $\mathbb{R}$, on a $h'' = 0$: comme $\mathbb{R}$ est un intervalle on en déduit que la fonction h' est constante, puis que h est une fonction affine, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 32.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, on a les inégalités $|\cos(n\theta)| \leqslant 1$ et $5 + 4\cos(\theta) \geqslant 5 - 4 = 1$ donc $\frac{|\cos(n\theta)|}{|5-4\cos(\theta)|} \leqslant \frac{1}{1} = 1$. Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned}|I_n| &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\cos(n\theta)}{5+4\cos(\theta)}\right| \mathrm{d}\theta \quad \text{par l'inégalité triangulaire}\\ &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi} 1 \,\mathrm{d}\theta \quad \text{par croissance de l'intégrale}\\ &= 2\pi,\end{aligned}$$

d'où la majoration attendue.

2. Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned}I_1 + \frac{5}{4}I_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta + \frac{5}{4}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(\theta)+\frac{5}{4}}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

3. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$, on a

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) + \cos((n+2)\theta) &= \cos(n\theta) + \cos(n\theta)\cos(2\theta) - \sin(n\theta)\sin(2\theta)\\ &= \cos(n\theta) + \cos(n\theta)\left(2\cos^2(\theta) - 1\right) - \sin(n\theta)2\sin(\theta)\cos(\theta)\\ &= 2\cos(\theta)\left(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)\right)\\ &= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta).\end{aligned}$$

Par linéarité de l'intégrale, on a donc

$$\begin{aligned}I_n + I_{n+2} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((n+2)\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\theta)+\cos((n+2)\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\left(\frac{1}{2}(5+4\cos(\theta)) - \frac{5}{2}\right)\cos((n+1)\theta)}{5+4\cos(\theta)} \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+1)\theta)\,\mathrm{d}\theta - \frac{5}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos((n+1)\theta)}{5+4\cos(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((n+1)\theta)}{n+1}\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{5}{2}I_{n+1} = -\frac{5}{2}I_{n+1},
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence linéaire double $I_{n+2} = -\frac{5}{2}I_{n+1} - I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la question précédente. L'équation caractéristique associée $x^2 = -\frac{5}{2}x - 1$ admettant -2 et $-\frac{1}{2}$ pour solutions, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \alpha\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \beta(-2)^n.$$

Comme $\left|-\frac{1}{2}\right| < 1$, on a $\left(-\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc si $\beta \neq 0$, on peut écrire que $|I_n| \sim |\beta| \cdot 2^n \longrightarrow +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Or cela est impossible d'après la question 1, donc $\beta = 0$. La relation $I_1 + \frac{5}{4}I_0 = \frac{\pi}{2}$ déterminée dans la question 2 donne

$$-\frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{4}\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{3}{4}\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$

Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{2\pi}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Correction de l'exercice 33.

1. Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $[x, 3x]$, donc $f(x)$ est bien défini. Ainsi, f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. En notant F une primitive de la fonction continue $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$, on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = F(3x) - F(x).$$

Ainsi, f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que combinaison de fonctions dérivables, et on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) &= 3F'(3x) - F'(x) = 3f(3x) - f(x) \\
&= 3\frac{e^{-3x}}{3x} - \frac{e^{-x}}{x} = \frac{e^{-3x} - e^{-x}}{x}.
\end{aligned}$$

3. Soit $x > 0$. Pour tout $t \in [x, 3x]$, on peut écrire $\frac{e^{-3x}}{t} \leqslant \frac{e^{-t}}{t} \leqslant \frac{e^{-x}}{t}$ puisque la fonction $t \mapsto e^{-t}$ est décroissante sur $[x, 3x]$. En intégrant cette inégalité sur $[x, 3x]$, on obtient

$$\int_x^{3x} \frac{e^{-3x}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_x^{3x} \frac{e^{-x}}{t}\,\mathrm{d}t, \quad \text{soit} \quad e^{-3x}\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Or $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \Big[\ln(t)\Big]_x^{3x} = \ln(3x) - \ln(x) = \ln(3)$, donc on a

$$e^{-3x}\ln(3) \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}\ln(3).$$

Cet encadrement étant valable pour tout $x > 0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln(3)$ d'après le théorème des gendarmes, si bien que f est prolongeable par continuité en 0, en une fonction

$$\begin{array}{rccl} \widetilde{f}: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ \ln(3) & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Pour étudier la dérivabilité de ce prolongement en 0, on écrit que pour tout $x > 0$, la fonction $\widetilde{f}$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, donc il existe d'après le théorème des accroissements finis un $c_x \in\,]0, x[$ tel que

$$\frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} = \widetilde{f}'(c_x) = f'(c_x) = \frac{e^{-3c_x} - e^{-c_x}}{c_x}.$$

Lorsque $x \to 0^+$, on a $c_x \to 0^+$ puisque c_x est un élément de $]0, x[$ quel que soit x ; on peut alors écrire, grâce au développement limité d'ordre 1 de la fonction exponentielle en 0, que lorsque $x \to 0$ on a [3]

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} &= \frac{e^{-3c_x} - e^{-c_x}}{c_x} = \frac{1 - 3c_x + o(c_x) - (1 - c_x + o(c_x))}{c_x} \\ &= \frac{-2c_x + o(c_x)}{c_x} = -2 + o(1) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -2. \end{aligned}$$

Ainsi, le taux d'accroissement de $\widetilde{f}$ en 0 admet une limite finie égale à -2 : la fonction $\widetilde{f}$ est donc dérivable à droite en 0 et vérifie $\widetilde{f}'(0) = -2$.

4. Si $x > 0$, on peut réaliser une intégration par parties en dérivant la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue $t \mapsto e^{-t}$ pour obtenir

$$f(x) = \left[\frac{1}{t}\cdot(-e^{-t})\right]_x^{3x} - \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-3x}}{x} - \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or la croissance de l'intégrale permet d'écrire

$$0 \leqslant \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x^2}\left[-e^{-t}\right]_x^{3x} = \frac{1}{x^2}\left(e^{-x} - e^{-3x}\right)$$

pour tout $x > 0$, mais lorsque $x \to +\infty$ on a

$$\frac{1}{x^2}\left(e^{-x} - e^{-3x}\right) \sim \frac{e^{-x}}{x^2} = o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right)$$

3. La stratégie consistant à évaluer la limite d'un taux d'accroissement difficile à étudier à l'aide du théorème des accroissements finis a déjà été utilisée dans la démonstration du théorème de la limite de la dérivée (exercice 71 du chapitre sur la dérivation).

donc

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-3x}}{x} - \int_x^{3x} \frac{e^{-t}}{t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x} - o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) - o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right) \sim \frac{e^{-x}}{x},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 34.

1. La fonction g est dérivable sur $[0,1]$ en tant que produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in [0,1]$ on a $g'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = e^{-x}(f'(x) - f(x))$, et donc $f'(x) - f(x) = e^x g'(x)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche des coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que la fonction polynomiale $g_n : x \mapsto ax^2 + bx + c$ vérifie

$$g_n(0) = 0, \quad g_n(1) = e^{-1} \quad \text{et} \quad g_n\left(\frac{1}{2}\right) = ne^{-1}.$$

Ces trois conditions se réécrivent

$$\left\{\begin{array}{ccc} c & = & 0 \\ a+b+c & = & e^{-1} \\ \frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c & = & ne^{-1} \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{ccc} c & = & 0 \\ a+b & = & e^{-1} \\ a+2b & = & 4ne^{-1} \end{array}\right.$$

soit encore, grâce à l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\left\{\begin{array}{ccc} c & = & 0 \\ a+b & = & e^{-1} \\ b & = & (4n-1)e^{-1}, \end{array}\right. \quad \text{et donc} \quad \left\{\begin{array}{ccc} a & = & (2-4n)e^{-1} \\ b & = & (4n-1)e^{-1} \\ c & = & 0. \end{array}\right.$$

La fonction polynomiale g_n recherchée est ainsi

$$g_n : x \longmapsto (2-4n)e^{-1}x^2 + (4n-1)e^{-1}x.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est associée à la fonction f_n (au sens donné dans l'énoncé), donc

$$\int_0^1 |f_n - f_n'| = \int_0^1 |f_n'(x) - f_n(x)| \,\mathrm{d}x = \int_0^1 |e^x g_n'(x)| \,\mathrm{d}x$$

d'après la question [4] 1, d'où

$$\int_0^1 |f_n - f_n'| = \int_0^1 e^x |g_n'(x)| \,\mathrm{d}x.$$

En minorant [5] la quantité e^x par 1 pour tout $x \in [0,1]$, on peut écrire par croissance de l'intégrale :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 |f_n - f_n'| \geqslant \int_0^1 |g_n'(x)| \,\mathrm{d}x.$$

4. Notons qu'il n'était pas nécessaire de voir que g_n était associé à f_n et qu'un calcul direct aurait suffi à retrouver le résultat démontré ici.

5. On pourrait aussi calculer l'intégrale de $|f_n - f_n'|$ explicitement, en la découpant en deux grâce à la relation de Chasles pour faire disparaître la valeur absolue, puis en réalisant une intégration par parties.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'étude du signe de la quantité

$$g_n'(x) = \Big((4-8n)x + 4n - 1\Big)e^{-1}$$

montre que celle-ci est positive si $x \leqslant \frac{4n-1}{8n-4}$ et négative si $x \geqslant \frac{4n-1}{8n-4}$, si bien que

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f_n - f_n'| &\geqslant \int_0^{\frac{4n-1}{8n-4}} g_n'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{4n-1}{8n-4}}^1 (-g_n'(x))\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_{\frac{4n-1}{8n-4}}^1 (-g_n'(x))\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_{\frac{1}{2}}^1 (-g_n'(x))\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du fait que $-g_n'(x) \geqslant 0$ sur l'intervalle d'intégration et du fait que $\frac{4n-1}{8n-4} \leqslant \frac{1}{2}$ (donc restreindre l'intervalle d'intégration diminue la valeur de l'intégrale). On trouve alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 |f_n - f_n'| \geqslant [-g_n(x)]_{\frac{1}{2}}^1 = g_n\left(\frac{1}{2}\right) - g_n(1) = (n-1)e^{-1},$$

d'où $\displaystyle\int_0^1 |f_n - f_n'| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par comparaison.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n \in E$ puisque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et puisque $f_n(0) = g_n(0)e^0 = 0$ et $f_n(1) = e^1 g_n(1) = 1$. On en déduit que l'ensemble I, qui contient notamment tous les réels $\int_0^1 |f_n - f_n'|$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, n'est pas majoré.

4. Soit $f \in E$ et soit g la fonction associée. On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f - f'| &= \int_0^1 e^x |g'(x)| \mathrm{d}x \quad \text{comme dans la question précédente} \\ &\geqslant \int_0^1 |g'(x)| \mathrm{d}x \quad \text{par croissance de l'intégrale} \\ &\geqslant \left|\int_0^1 g'(x)\mathrm{d}x\right| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &= \left|\Big[g(x)\Big]_0^1\right| = |g(1) - g(0)| = |f(1)e^{-1} - f(0)e^0| = e^{-1},\end{aligned}$$

donc I est bien minoré par e^{-1}.

5. Soit $t \in]0,1[$. La fonction f_t est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,t[$ et sur $]t,1]$ comme combinaison de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Il reste à montrer qu'elle est dérivable en t et que sa dérivée y est continue.

Pour tout $x \in [0,t]$, le nombre dérivé en x de la fonction f_t est donné par

$$\begin{aligned}f_t'(x) &= \frac{-xe^{x-1} + (2t-x)e^{x-1} + (2t-x)xe^{x-1}}{t^2} \\ &= \frac{(-x + 2t - x + 2tx - x^2)e^{x-1}}{t^2}.\end{aligned}$$

Cette formule s'applique aussi à la dérivée à gauche de f_t en t :

$$(f_t')_g(t) = \frac{(-t+2t-t+2t^2-t^2)e^{t-1}}{t^2} = e^{t-1}. \tag{3}$$

Par ailleurs, l'égalité $f_t(x) = e^{x-1}$ valable pour $x \in]t,1]$ est aussi valable pour $x = t$ car $f_t(t) = e^{t-1}$, si bien que f_t coïncide sur $[t,1]$ avec la fonction de classe $\mathcal{C}^1$ donnée par $x \mapsto e^{x-1}$. Elle admet donc une dérivée sur $[t,1]$ donnée par :

$$\forall x \in]t,1], \quad f_t'(x) = e^{x-1}$$

ainsi qu'une dérivée à droite en t donnée par

$$(f_t')_d(t) = e^{t-1}. \tag{4}$$

Les relations (3) et (4) indiquent que f_t est dérivable en t et que $f_t'(t) = e^{t-1}$. Comme on sait déjà que f_t' est continue sur $[0,t[$ et continue à gauche en t (puisque f_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,t]$) et qu'elle est continue à droite en t et continue sur $]t,1]$ (puisque f_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[t,1]$), on en déduit que f_t' est continue sur $[0,1]$, donc f_t est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Il est par ailleurs clair que $f_t(0) = 0$ et $f_t(1) = 1$, donc on a bien $f_t \in E$.

6. Soit $t \in]0,1[$. On a d'après la relation de Chasles

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_t - f_t'| &= \int_0^t \left| \frac{(2t-x)xe^{x-1}}{t^2} - \frac{(-x+2t-x+2tx-x^2)e^{x-1}}{t^2} \right| \mathrm{d}x + \int_t^1 \left| e^{x-1} - e^{x-1} \right| \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{t^2} \int_0^t \left| (2t-x)x - (-x+2t-x+2tx-x^2) \right| e^{x-1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{t^2} \int_0^t |2t-2x| e^{x-1} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{t^2} \int_0^t 2(t-x) e^{x-1} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

On réalise le calcul de cette dernière intégrale grâce à une intégration par parties, en dérivant la fonction $x \mapsto 2(t-x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue $x \mapsto e^{x-1}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^t 2(t-x)e^{x-1}\mathrm{d}x &= \left[2(t-x)e^{x-1} \right]_0^t + \int_0^t 2e^{x-1}\mathrm{d}x \\
&= -2te^{-1} + \left[2e^{x-1} \right]_0^t = 2e^{-1}\left(e^t - 1 - t \right).
\end{aligned}$$

On trouve finalement

$$\int_0^1 |f_t - f_t'| = 2e^{-1} \frac{e^t - 1 - t}{t^2}.$$

La limite de cette quantité lorsque $t \to 0^+$ est obtenue en réalisant un développement limité de exp à l'ordre 2 en 0 :

$$\begin{aligned}
2e^{-1} \frac{e^t - 1 - t}{t^2} &= 2e^{-1} \frac{1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) - 1 - t}{t^2} \\
&= 2e^{-1} \left(\frac{1}{2} + o(1) \right) \underset{\substack{t \to 0 \\ t > 0}}{\longrightarrow} 2e^{-1} \frac{1}{2} = e^{-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \int_0^1 |f_t - f_t'| = e^{-1}.$$

7. L'ensemble I est minoré (par 0 trivialement, et par e^{-1} d'après la question 4) et non vide ; il admet donc une borne inférieure. On sait d'après la question 4 que $\inf(I) \geqslant e^{-1}$. Or on a montré dans la question 6 que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \int_0^1 |f_t - f_t'| = e^{-1},$$

et la question 5 donne $f_t \in E$ pour tout $t \in [0,1]$, si bien que $\inf(I)$ ne peut être strictement supérieur à e^{-1}. On a donc $\inf(I) = e^{-1}$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 35.

1. Il s'agit de donner un sens à la notion de « revenu instantané ». Le revenu étant un flux qui contribue à l'augmentation d'un stock (la richesse), parler de revenu instantané revient à partir de la vitesse instantanée d'augmentation du stock : le revenu instantané au temps t est donc la vitesse d'augmentation de la richesse d'un agent calculée sur un intervalle de temps infinitésimal. Mathématiquement, il s'agit donc de la dérivée de la richesse de l'individu vue comme fonction du temps.

   Adopter l'idée d'un revenu instantané consiste à considérer que l'actif détenu par l'agent génère des rendements en continu, et non par à-coups comme le ferait un compte en banque dont les intérêts sont touchés au terme de chaque année civile.

2. (a) On a vu dans l'exercice 27 du chapitre 9 qu'une somme placée à un taux annuel r et dont les intérêts sont composés un grand nombre de fois chaque année (c'est-à-dire qu'un taux de $\frac{r}{n}$ est appliqué n fois dans l'année, avec n grand) croît à un taux annuel proche de e^r. On peut de même considérer qu'une somme donnée, placée au temps 0 à un taux r et récupérée au temps $t \geqslant 0$ après avoir généré des intérêts composés de façon continue est multipliée par e^{rt}.

   Ainsi, la *valeur actualisée* (au sens donné dans l'exercice 31 du chapitre 2) de la somme $R(t)$ qui sera touchée au temps t est égale à $R(t)e^{-rt}$: une somme $R(t)$ touchée au temps t a la même valeur, pour un agent qui prend ses décisions au temps 0, qu'une somme $R(t)e^{-rt}$ touchée dès le temps 0. Le facteur e^{-rt} joue donc, dans le cadre d'une actualisation en continu, le rôle tenu par $\frac{1}{(1+r)^t}$ dans celui d'une actualisation discrète.

   La valeur $V(r)$ est donc égale à la somme des revenus générés par l'actif au fil du temps, pondérés par le facteur d'actualisation qui rend compte du fait qu'un revenu touché précocement est préférable à un revenu touché tardivement (puisqu'il peut être placé). Ainsi, $V(r)$ est bien la valeur « aujourd'hui » de l'intégralité des rendements générés par l'actif, d'où la dénomination choisie.

(b) On pourrait définir comme dans l'exercice 31 du chapitre 2 la notion de *valeur actuelle nette* de l'investissement comme la quantité $\mathrm{VAN}(r) := V(r) - C$. L'investissement est alors rentable si et seulement si $\mathrm{VAN}(r) \geqslant 0$.

Le *taux de rendement interne* de l'investissement serait alors la valeur de r, si elle existe, vérifiant $\mathrm{VAN}(r) = 0$ et représentant le taux d'actualisation au-delà duquel l'investissement n'est pas rentable, et en-deçà duquel il l'est.

Pour la beauté du geste, montrons qu'un tel taux existe et est unique dès lors que R est une fonction positive et non nulle [6] telle que $\int_0^T R(t)\,\mathrm{d}t \geqslant C$. On suppose désormais que cette condition est vérifiée.

- On a tout d'abord
$$\mathrm{VAN}(0) = \int_0^T R(t)\,\mathrm{d}t - C \geqslant 0.$$
- Par ailleurs, comme R est continue sur $[0, T]$, elle y est bornée par une constante $M \geqslant 0$, donc la croissance de l'intégrale donne
$$0 \leqslant V(r) \leqslant \int_0^T Me^{-rt}\,\mathrm{d}t = M\left[-\frac{1}{r}e^{-rt}\right]_0^T = M\frac{1-e^{-rT}}{r}$$
pour tout $r > 0$, or $\frac{1-e^{-rT}}{r} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$ donc $V(r) \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$ par le théorème des gendarmes, si bien que
$$\lim_{r\to+\infty} \mathrm{VAN}(r) = -C \leqslant 0.$$
- La fonction $\mathrm{VAN} : r \mapsto \mathrm{VAN}(r)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. En effet, si $r \geqslant 0$ et si $h \in [-1, 1]$ alors
$$\begin{aligned}|\mathrm{VAN}(r+h) - \mathrm{VAN}(r)| &= \left|\int_0^T (e^{-(r+h)t} - e^{rt})R(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^T |e^{-(r+h)t} - e^{-rt}|M\,\mathrm{d}t \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire.}\end{aligned}$$
Or pour tout $t \in [0, T]$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à exp entre $-(r+h)t$ et $-rt$ (qui, puisque $h \geqslant -1$, sont tous deux dans l'intervalle $]-\infty, T]$ sur lequel $\exp' = \exp$ est bornée par e^T) donne $|e^{-(r+h)t} - e^{-rt}| \leqslant e^T \cdot |(-r+h)t - (-rt)| = e^T|h|t$; ainsi, on peut écrire
$$|\mathrm{VAN}(r+h) - \mathrm{VAN}(r)| \leqslant M\int_0^T e^T \cdot |h|t\,\mathrm{d}t = Me^T|h|\frac{t^2}{2},$$
d'où
$$|\mathrm{VAN}(r+h) - \mathrm{VAN}(r)| \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$
d'après le théorème des gendarmes, ce qui montre que VAN est continue en r, donc sur $\mathbb{R}_+$.

6. Si R est nulle, alors la valeur actuelle nette de l'investissement est nulle indépendamment de la valeur de r, donc son taux de rendement interne est mal défini.

- Enfin, si $x, y \in \mathbb{R}_+$ sont tels que $y > x$, alors
$$\mathrm{VAN}(y) - \mathrm{VAN}(x) = \int_0^T (e^{-yt} - e^{-xt}) R(t) \, \mathrm{d}t$$
est l'intégrale d'une fonction continue, négative (puisque $y > x$) et non nulle (puisque R admet une valeur non nulle en un t non nul, en lequel on a aussi $e^{-yt} - e^{-xt} < 0$), donc elle est strictement négative, c'est-à-dire que $\mathrm{VAN}(y) < \mathrm{VAN}(x)$. Ainsi, la fonction VAN est strictement décroissante.

Les quatre points que nous venons de vérifier impliquent d'après le théorème de la bijection que la fonction VAN s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire que le taux de rendement interne de l'investissement est bien défini.

Correction de l'exercice 36.

1. Lorsque $a = b$, l'équation de l'ellipse se réécrit $x^2 + y^2 = a^2$: il s'agit alors du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon a.
2. Il est graphiquement clair[7] que l'aire de la surface délimitée par l'ellipse est égale à quatre fois l'aire de la partie de cette surface située dans la quart supérieur droit du plan. Or la partie de l'ellipse située dans ce quart supérieur est l'ensemble des points (x, y) vérifiant les relations
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad x \in [0, a], \quad y \geqslant 0,$$
soit
$$\frac{y}{b} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad x \in [0, a],$$
soit encore
$$y = b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}, \quad x \in [0, a].$$
Ainsi, ce quart d'ellipse est la courbe de la fonction $x \mapsto b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ sur $[0, a]$, et l'aide de la surface délimitée par l'ellipse dans le quart supérieur droit du plan est l'intégrale sur $[0, a]$ de cette fonction. Par conséquent, l'aire de la surface totale délimitée par $\mathcal{E}$ est bien égale à
$$4 \cdot \int_0^a b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \, \mathrm{d}x = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \, \mathrm{d}x.$$
3. Le changement de variable $u = \frac{x}{a}$ (qui est licite puisqu'affine) donne $\mathrm{d}x = a\mathrm{d}u$ et donc
$$\int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} \, a\mathrm{d}u = a \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} \, \mathrm{d}u.$$

7. Pour le justifier plus formellement, on peut invoquer la symétrie de l'ellipse (et donc de la surface qu'elle renferme) par rapport aux axes des abscisses et des ordonnées : si $(x, y) \in \mathcal{E}$, alors $(-x, y) \in \mathcal{E}$ et $(x, -y) \in \mathcal{E}$.

Or $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u$ est l'aire du quart du disque de centre $(0,0)$ et de rayon 1 (voir la question 2 avec $a=b=1$, cas qui correspond à celui du disque décrit d'après la question 1) ; elle vaut donc $\frac{\pi}{4}$. Ainsi, d'après la question 2, l'aire de la surface délimitée par l'ellipse $\mathcal{E}$ vaut

$$4b\int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = 4ba\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u = 4ba\cdot\frac{\pi}{4} = \pi ab.$$

Correction de l'exercice 37. Pour tout $z \in [0,h]$, le rayon du disque hachuré sur la figure proposée vaut $r - z\frac{r}{h}$: en effet, ce rayon décroît de façon affine et vaut r si $z=0$, et 0 si $z=h$. Ainsi, pour tout $z\in[0,h]$ on a $A(z) = \pi\left(r - z\frac{r}{h}\right)^2$.
D'après la relation admise, on a donc

$$V = \int_0^h \pi\left(r - z\frac{r}{h}\right)^2\,\mathrm{d}z = \left[\pi\left(-\frac{h}{r}\right)\frac{1}{3}\left(r - z\frac{r}{h}\right)^3\right]_0^h = \frac{\pi}{3}\frac{h}{r}\cdot r^3 = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

À titre de curiosité, on peut remarquer qu'il s'agit du tiers du volume d'un cylindre de rayon r et de hauteur h.

Correction de l'exercice 38.

1. La fonction C possède deux composantes périodiques : la fonction $t\mapsto a\cos(2\pi T_1 t)$, de période T_1 égale à un jour, qui rend compte des variations de consommation électrique au fil d'une journée (typiquement pour modéliser le fait que la consommation électrique est moins forte la nuit que le jour), et la fonction $t\mapsto b\cos(2\pi T_2 t)$, de période T_2 égale à un an, qui rend compte des variations de consommation électrique au fil des saisons. Le point de référence correspond à un moment où la composante saisonnière de la consommation est maximale (puisque $b>0$), ce qui a probablement lieu en hiver (saison en laquelle la consommation d'électricité à des fins de chauffage est élevée, du moins dans l'hémisphère Nord). Enfin, la fonction C possède une composante affine $t\mapsto C_0 + At$, qui croît uniformément avec le temps et modélise le développement continu de l'usage des sources électriques indépendamment des cycles journalier et saisonnier.
2. Si $n\in\mathbb{N}$, la consommation totale de la ville entre les années n et $n+1$ s'exprime comme l'intégrale entre n et $n+1$ de la consommation instantanée $C(t)$, donc comme

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} C(t)\,\mathrm{d}t &= \int_n^{n+1} \left(C_0 + At + a\cos(2\pi T_1 t) + b\cos(2\pi T_2 t)\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[C_0 t + A\frac{t^2}{2} + \frac{a}{2\pi T_1}\sin(2\pi T_1 t) + \frac{b}{2\pi T_2}\sin(2\pi T_2 t)\right]_n^{n+1} \\
&= C_0(n+1) + A\frac{(n+1)^2}{2} + 0 + 0 - C_0 n + A\frac{n^2}{2} \\
&= C_0 + \left(n + \frac{1}{2}\right)A.
\end{aligned}$$

Remarquons que l'intégrale des deux composantes périodiques s'annule puisque ces composantes sont sinusoïdales et que l'intégrale porte sur un nombre entier de périodes.

La consommation instantanée $C(t)$ s'exprime en MW et l'unité de temps infinitésimale $\mathrm{d}t$ s'exprime en ans (conformément aux unités choisies pour les constantes qui apparaissent dans le problème), donc la consommation totale est une intégrale (donc une somme) de MW·an : elle s'exprime donc en MWan (« mégawatt-an »), ce qui peut se convertir en GWh (gigawatt-heure, une unité plus courante) *via* une multiplication par $\frac{1}{1000} \cdot 365 \cdot 24$. Par exemple, la consommation totale de la ville lors de la première année d'observation est

$$C_0 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) A = 20 + \frac{3}{2} \cdot 1 = 21,5\,\mathrm{MWan} = 188,340\,\mathrm{GWh}.$$

Correction de l'exercice 39. Supposons que $n = 2$. En dérivant la fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue v'', la formule d'intégration par parties classique donne

$$\int_a^b u(x)v''(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v'(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x.$$

On réalise à présent une nouvelle intégration par parties sur l'intégrale de la fonction $u'v'$ pour obtenir (en dérivant la fonction u' de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue v') :

$$\int_a^b u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u'(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

En combinant ces deux relations, on obtient

$$\int_a^b u(x)v''(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v'(x)]_a^b - [u'(x)v(x)]_a^b + \int_a^b u''(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

On obtient, en traitant si besoin le cas $n = 3$, l'intuition de la formule suivante pour une valeur de $n \geqslant 1$ quelconque :

$$\int_a^b u(x)v^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}[u^{(k)}(x)v^{(n-k-1)}(x)]_a^b + (-1)^n \int_a^b u^{(n)}(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démontrons cette relation par récurrence sur $n \geqslant 1$. Elle est vraie si $n = 1$ puisqu'elle se réécrit alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui est exactement la formule d'intégration par parties. Supposons-la vérifiée pour une valeur donnée de $n \geqslant 1$ et pour toutes fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^n$, et supposons à présent que u et v deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. On réalise une intégration par parties en dérivant la fonction u qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue $v^{(n+1)}$ ce qui donne

$$\int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v^{(n)}(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence aux fonctions u' et v de classe $\mathcal{C}^n$ sur $[a,b]$, on obtient

$$\int_a^b u'(x)v^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}[u^{(k+1)}(x)v^{(n-k-1)}(x)]_a^b + (-1)^n\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\,\mathrm{d}x,$$

d'où

$$\begin{aligned}\int_a^b u(x)v^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x &= [u(x)v^{(n)}(x)]_a^b - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}[u^{(k+1)}(x)v^{(n-k-1)}(x)]_a^b \\ &\qquad - (-1)^n\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}[u^{(k+1)}(x)v^{(n-k-1)}(x)]_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}(x)v(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

d'où la proposition au rang $n+1$.

Ainsi, la relation annoncée est vraie pour tout $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 40.

1. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par la formule donnée dans l'énoncé. Les fonctions ψ et $\psi\varphi$ étant continues, le théorème fondamental de l'intégration montre que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que combinaison de fonctions dérivables et que

$$\begin{aligned}\forall t \geqslant 0, \quad f'(t) &= \psi(t)\varphi(t)\exp\left(-\int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\right) \\ &\qquad + \left(K + \int_0^t \psi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)\exp\left(-\int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\right)(-\psi(t)) \\ &= \psi(t)\left(\varphi(t) - K - \int_0^t \psi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)\exp\left(-\int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

   Or $\psi \geqslant 0$, exp est positive et $\varphi(t) - K - \int_0^t \psi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \leqslant 0$ pour tout $t \geqslant 0$ par hypothèse, donc f' est négative, ce qui implique que f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$ on a $f(t) \leqslant f(0) = K$, soit

$$\left(K + \int_0^t \psi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)\exp\left(-\int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\right) \leqslant K,$$

   donc, comme une exponentielle est positive,

$$K + \int_0^t \psi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \exp\left(\int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\right)K.$$

   Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$ on a, en utilisant l'inégalité donnée au début de l'énoncé :

$$\varphi(t) \leqslant K + \int_0^t \psi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \exp\left(\int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\right)K,$$

   d'où le résultat à démontrer (appelé *lemme de Grönwall*).

2. Soit $t \geqslant 0$. On a

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_0^t (\varphi_1'(s) - \varphi_2'(s))\,\mathrm{d}s + \varphi_1(0) - \varphi_2(0)$$

donc, d'après l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &\leqslant \int_0^t |\varphi_1'(s) - \varphi_2'(s)|\,\mathrm{d}s + |\varphi_1(0) - \varphi_2(0)| \\ &= \int_0^t |F(\varphi_1(s)) - F(\varphi_2(s))|\mathrm{d}s + |\varphi_1(0) - \varphi_2(0)| \\ &\leqslant \int_0^t A|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\,\mathrm{d}s + |\varphi_1(0) - \varphi_2(0)|.\end{aligned}$$

On est dans le cadre d'application du lemme de Grönwall, avec $\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2|$, $\psi = A$ et $K = |\varphi_1(0) - \varphi_2(0)|$. Le résultat de la question 1 nous donne alors :

$$\forall t \geqslant 0, \quad |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leqslant |\varphi_1(0) - \varphi_2(0)| \exp\left(\int_0^t A\,\mathrm{d}s\right) = |\varphi_1(0) - \varphi_2(0)|e^{At}.$$

L'inégalité obtenue permet de majorer la différence entre deux solutions φ_1 et φ_2 de l'équation différentielle $y' = F(y)$, avec F lipschitzienne, en tenant compte de leur décalage initial $|\varphi_1(0) - \varphi_2(0)$. La borne obtenue croît exponentiellement avec t du fait de l'« effet papillon » : une différence même minime dans les conditions initiales de deux systèmes peut donner lieu à une forte divergence entre ces systèmes à mesure que le temps passe.

3. Lorsque $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, l'inégalité démontrée dans la question précédente donne directement la relation

$$\forall t \geqslant 0, \quad |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| = 0,$$

soit $\varphi_1 = \varphi_2$.

On a utilisé le lemme de Grönwall pour montrer que si F est une fonction lipschitzienne, deux solutions de l'équation différentielle $y' = F(y)$ qui coïncident en un point sont nécessairement égales sur leur intervalle de définition. Ce fait, très intuitif dans la mesure où il stipule que deux fonctions partageant un même point de départ et une même règle d'évolution sont identiques, est pourtant mis en défaut lorsque F n'est plus supposée lipschitzienne : par exemple, les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \textit{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \textit{si } x < 1 \\ (x-1)^2 & \textit{si } x \geqslant 1 \end{cases} \end{array}$$

sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{\sqrt{y}}{2}$ qui coïncident en 0 mais ne sont pas égales.

Correction de l'exercice 41.

1. Supposons que l'inégalité de Hölder soit vérifiée pour toutes les fonctions f et g vérifiant $\displaystyle\int_a^b |f|^p = \int_a^b |g|^q = 1$, c'est-à-dire que dans ce cas on ait $\int_a^b |fg| \leqslant 1$.

   Revenons au cas général et considérons seulement que f et g sont continues sur $[a, b]$.

   On introduit les notations
   $$I_f := \int_a^b |f|^p \quad \text{et} \quad I_g := \int_a^b |g|^q.$$
   Si $a = b$, toutes les intégrales sur $[a, b]$ sont nulles, donc l'inégalité de Hölder est vérifiée. Supposons à présent que $a < b$. Si I_f est nulle, comme la fonction $|f|^p$ est continue et positive et comme $a < b$, on a $|f|^p = 0$, donc $|f| = 0$; dans ce cas, les deux termes de l'inégalité de Hölder sont nuls, donc l'inégalité est vérifiée. Il en va de même si I_g est nulle.

   Supposons à présent que I_f et I_g sont non nulles (donc strictement positives), et posons
   $$u := \frac{|f|}{I_f^{1/p}} \quad \text{et} \quad v := \frac{|g|}{I_g^{1/q}}.$$
   Les fonctions u et v sont alors continues sur $[a, b]$, et on a
   $$\int_a^b |u|^p = \int_a^b \frac{|f|^p}{I_f} = \frac{1}{I_f} \int_a^b |f|^p = 1$$
   ainsi que
   $$\int_a^b |v|^q = \int_a^b \frac{|g|^q}{I_q} = \frac{1}{I_q} \int_a^b |q|^q = 1.$$
   On peut donc appliquer le cas particulier de l'inégalité de Hölder dont nous avons supposé la validité aux fonctions u et v, ce qui donne
   $$\int_a^b |uv| \leqslant 1, \quad \text{soit} \quad \frac{1}{I_f^{1/p} I_g^{1/q}} \int_a^b |fg| \leqslant 1,$$
   d'où
   $$\int_a^b |fg| \leqslant I_f^{1/p} I_g^{1/q},$$
   ce qui est exactement l'inégalité de Hölder pour f et g.

   Il nous suffit donc bien de démontrer que l'inégalité est valide dans le cas où $I_f = I_g = 1$ pour conclure qu'elle est vraie en général.

2. (a) Fixons $y \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in [0, 1]$, puis considérons la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
   $$\forall x > 0, \quad \varphi(x) = \ln(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda \ln(x) - (1 - \lambda) \ln(y).$$
   En tant que combinaison de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et on a
   $$\forall x > 0, \quad \varphi'(x) = \frac{\lambda}{\lambda x + (1 - \lambda)y} - \frac{\lambda}{x} = \lambda \frac{(1 - \lambda)(y - x)}{x(\lambda x + (1 - \lambda)y)}.$$

Comme $1-\lambda \geqslant 0$ et $x(\lambda x+(1-\lambda)y) > 0$ pour tout $x>0$, la quantité $\varphi'(x)$ est du signe de $x-y$; ainsi, φ est décroissante sur $]0,y]$ et croissante sur $[y,+\infty[$. Elle admet donc son minimum en y, qui vaut

$$\varphi(y) = \ln(y) - \lambda \ln(y) - (1-\lambda)\ln(y) = 0.$$

Ainsi, $\varphi \geqslant 0$, ce qui donne l'inégalité attendue.

(b) Soient $u, v \in \mathbb{R}_+$. Si u ou v est nul, alors $uv = 0$ donc l'inégalité $uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^p}{p}$ est vérifiée. Supposons à présent que u et v sont strictement positifs. En utilisant l'inégalité de la question précédente avec $\lambda = \frac{1}{p}$ et donc $1-\lambda = 1-\frac{1}{p} = \frac{1}{q}$, $x = u^p$ et $y := v^q$, on obtient

$$\ln\left(\frac{1}{p}u^p + \frac{1}{q}v^q\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(u^p) + \frac{1}{q}\ln(v^q) = \ln(u) + \ln(v) = \ln(uv),$$

d'où, en composant par la fonction croissante exp :

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

(c) On souhaite montrer que $\int_a^b |fg| \leqslant 1$. On utilise pour cela la question précédente, qui assure que pour tout $x \in [a,b]$ on a

$$|fg|(x) = |f(x)| \cdot |g(x)| \leqslant \frac{|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{q},$$

d'où

$$\int_a^b |fg|(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{p}\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x + \frac{1}{q}\int_a^b |g(x)|^q\,\mathrm{d}x$$

par linéarité de l'intégrale. D'après l'hypothèse faite sur les valeurs de I_f et I_g, on obtient donc

$$\int_a^b |fg|(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

ce qui clôt la preuve de l'inégalité de Hölder.

3. Lorsque $p = q = 2$, on a bien $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et l'inégalité de Hölder spécifie alors que pour toutes fonctions f et g continues sur $[a,b]$, on a

$$\int_a^b |fg| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a donc

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2},$$

ce qui est l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* démontrée dans l'exercice 25.

4. L'inégalité est triviale si $\displaystyle\int_a^b |f+g|^p = 0$. Supposons à présent que $\displaystyle\int_a^b |f+g|^p > 0$.
L'inégalité triangulaire permet d'écrire que $|f+g| \leqslant |f| + |g|$; en multipliant les deux termes de cette relation par $|f+g|^{p-1}$ (qui existe puisque $p-1 \geqslant 0$ et qui est positive), on obtient

$$|f+g|^p \leqslant |f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| \cdot |f+g|^{p-1}.$$

En intégrant cette inégalité sur $[a,b]$, on obtient

$$\int_a^b |f+g|^p \leqslant \int_a^b |f| \cdot |f+g|^{p-1} + \int_a^b |g| \cdot |f+g|^{p-1}. \tag{5}$$

Or l'inégalité de Hölder appliquée aux fonctions continues $|f|$ et $|f+g|^{p-1}$ donne

$$\int_a^b |f| \cdot |f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f+g|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

soit, comme $q = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{p}{p-1}$:

$$\int_a^b |f| \cdot |f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

On trouve de même

$$\int_a^b |g| \cdot |f+g|^{p-1} \leqslant \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}},$$

d'où, en sommant ces deux dernières inégalités et en utilisant (5) :

$$\int_a^b |f+g|^p \leqslant \left(\left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right) \left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En divisant les deux membres de cette inégalité par $\left(\displaystyle\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{q}}$ (qui est strictement positif), on obtient alors

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

d'où

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 42.

1. Si $u \in \mathbb{R}$, alors[8]
$$1+u^3 = 1^3 - (-u)^3 = (1+u)(1-u+u^2)$$
d'après la formule de Bernoulli ; la fonction polynomiale Q recherchée est donc $Q : u \mapsto u^2 - u + 1$.
À présent, si $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ on a
$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{1+u} + \frac{\beta+\gamma u}{1-u+u^2} &= \frac{\alpha(1-u+u^2) + (\beta+\gamma u)(1+u)}{(1+u)(1-u+u^2)} \\ &= \frac{(\alpha+\gamma)u^2 + (\gamma+\beta-\alpha)u + \alpha+\beta}{1+u^3},\end{aligned}$$
et cette expression vaut $\frac{1}{1+u^3}$ dès lors que
$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\gamma &=& 0 \\ \gamma+\beta-\alpha &=& 0 \\ \alpha+\beta &=& 1 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \gamma &=& -\alpha \\ \beta-2\alpha &=& 0 \\ \alpha+\beta &=& 1 \end{array}\right. \quad \textit{i.e.} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \gamma &=& -\alpha \\ \beta &=& 2\alpha \\ 3\alpha &=& 1, \end{array}\right.$$
donc le choix $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{2}{3}$ et $\gamma = -\frac{1}{3}$ convient. Ainsi, on peut écrire :
$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \qquad \frac{1}{1+u^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+u} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2-u}{1-u+u^2}.$$

2. On réalise le changement de variable $u = \sqrt{t}$, licite puisque la fonction racine carrée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1,4]$, pour obtenir $t^2 = u$ donc $\mathrm{d}t = 2u\mathrm{d}u$ et donc
$$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+t^2} = \int_1^2 \frac{2u\mathrm{d}u}{u+u^4} = \int_1^2 \frac{2}{1+u^3}\mathrm{d}u.$$
On va calculer cette dernière intégrale en utilisant les méthodes évoquées dans les exercices avancés du chapitre précédent. Par linéarité et grâce au résultat de la question précédente, on peut la réécrire :
$$\int_1^2 \frac{2}{1+u^3}\mathrm{d}u = \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{\mathrm{d}u}{1+u} + \frac{2}{3}\int_1^2 \frac{2-u}{1-u+u^2}\mathrm{d}u.$$
On peut ensuite décomposer le dernier intégrande pour faire apparaître une forme remarquable $\frac{v'}{v}$, en écrivant que pour tout $u \neq -1$ on a
$$\frac{2-u}{1-u+u^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2u-1}{1-u+u^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-u+u^2}.$$
On met ensuite le dénominateur de la dernière fraction rationnelle sous forme canonique, ce qui donne
$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-u+u^2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{2}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

8. On aurait aussi pu raisonner par analyse-synthèse en cherchant $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $1+u^3 = (1+u)(au^2+bu+c)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, ou bien effectuer la factorisation de X^3+1 par $X+1$ selon la méthode que nous étudierons dans le chapitre sur les polynômes dans le tome de deuxième année.

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{2-u}{1-u+u^2}\mathrm{d}u &= -\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2u-1}{1-u+u^2}\mathrm{d}u + \int_1^2 \frac{2}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\left[\ln(1-u+u^2)\right]_1^2 + \left[\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{2}\ln(3) + \sqrt{3}\arctan(\sqrt{3}) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\ln(3) + \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3} - \sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6} \\
&= -\frac{1}{2}\ln(3) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \frac{2}{1+u^3}\mathrm{d}u &= \frac{2}{3}\left[\ln(1+u)\right]_1^2 + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\ln(3) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{2}{3}(\ln(3)-\ln(2)) - \frac{1}{3}\ln(3) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\
&= \frac{\ln(3)-2\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}},
\end{aligned}$$

soit

$$\int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+t^2} = \frac{\ln(3)-2\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Correction de l'exercice 43. Le changement de variable $x=\sin(t)$, licite puisque sin est de classe $\mathcal{C}^1$, donne $\mathrm{d}x=\cos(t)\,\mathrm{d}t$ et donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arctan\left(\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan\left(\sqrt{1-\sin^2(t)}\right)\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant la relation fondamentale de la trigonométrie et le fait que sin est positive sur $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan\left(\sqrt{1-\sin^2(t)}\right)\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\cos(t))\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

On réalise à présent une intégration par parties, en dérivant la fonction $t\mapsto\arctan(\cos(t))$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et en primitivant la fonction continue cos :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\cos(t))\cos(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\arctan(\cos(t))\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\sin(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 0 + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2(t)}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos^2(t)}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos^2(t)}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\pi}{6} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t,$$

d'où la première relation à démontrer.
À présent, on peut poser le changement de variable $u = \tan(t)$, qui est licite puisque tan est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$. Lorsque $t = 0$, on a $u = 0$, et lorsque $t = \frac{\pi}{6}$ on a $u = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On a par ailleurs $t = \arctan(u)$ donc $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$, et

$$1 + \cos^2(t) = 1 + \frac{1}{1+\tan^2(t)} = 1 + \frac{1}{1+u^2}$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{1+\cos^2(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{1+\frac{1}{1+u^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$
$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{2}{2+u^2}\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= \left[\sqrt{2}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$= \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Ainsi, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan(\cos(t))\cos(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

d'où la valeur de l'intégrale à calculer :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \arctan\left(\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\pi}{6} + \sqrt{2}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Correction de l'exercice 44.

1. On remarque tout d'abord que le changement de variable est licite dès lors qu'il est effectué dans une intégrale sur un segment inclus dans $]-\pi, \pi[$ puisque $t \mapsto \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ (et donc sur tout segment inclus dans cet intervalle).

   Les deux premières relations à démontrer font l'objet de l'exercice 13 du chapitre 5. En voici une preuve rapide :

$$\frac{1-u^2}{1+u^2} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\cos\left(2\cdot\frac{t}{2}\right)}{1} = \cos(t)$$

où la deuxième égalité résulte d'une multiplication du numérateur et du dénominateur par $\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$, et

$$\frac{2u}{1+u^2} = \frac{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{\sin\left(2\cdot\frac{t}{2}\right)}{1} = \sin(t)$$

grâce à la même manipulation.

Enfin, en écrivant $t = 2\arctan(u)$ (ce qui est valide puisque $\frac{t}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\frac{t}{2}\right) = u$), on obtient

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \frac{2}{1+u^2} \quad \text{soit} \quad \mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

2. (a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{2+\sin(t)}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$\varphi : x \longmapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(t)}$$

d'après le théorème fondamental de l'intégration.

Explicitons φ. On fixe $x \in]-\pi, \pi[$; on peut appliquer le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ étudié dans la question 1 puisque le segment entre 0 et x est inclus dans $]-\pi, \pi[$, et on obtient alors

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{1}{2+\frac{2u}{1+u^2}} \cdot \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u+u^2} \\
&= \int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{\mathrm{d}u}{\frac{3}{4}+\left(u+\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \\
&= \frac{4}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2\pi}{9}.
\end{aligned}$$

On peut se débarrasser de la constante additive inutile pour obtenir que la fonction

$$F : x \longmapsto \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\tan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

est une primitive de f sur $]-\pi, \pi[$.

(b) Étudions tout d'abord le cas $\lambda = 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+\cos(t)}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas, donc l'intégrale étudiée est bien définie. Le changement de variable étudié dans la question 1 donne alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\cos(t)} = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}u}{2} = \int_0^1 \mathrm{d}u = 1.$$

Supposons à présent que $|\lambda| < 1$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+\lambda\cos(t)}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas, et le changement de variable étudié dans la question 1 donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\lambda\cos(t)} &= \int_0^1 \frac{1}{1+\lambda\frac{1-u^2}{1+u^2}} \cdot \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} \\
&= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+\lambda+(1-\lambda)u^2} \\
&= \frac{1}{1+\lambda}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+\frac{1-\lambda}{1+\lambda}u^2} \\
&= \frac{1}{1+\lambda}\left[\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}u\right)\right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{(1+\lambda)(1-\lambda)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\right).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 45.

1. La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, elle est dérivable et f' est continue sur $[a, b]$, donc bornée sur $[a, b]$ d'après le théorème des bornes atteintes. Ainsi, il existe $\alpha \geqslant 0$ tel que l'on ait $|f'(x)| \leqslant k$ pour tout $x \in [a, b]$. L'inégalité des accroissements finis donne alors :

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \alpha|x - y|,$$

donc f est bien (α-)lipschitzienne sur $[a, b]$.

2. La quantité u_n est la somme des aires $\frac{b-a}{n} \cdot f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ des n rectangles construits sur la courbe de f entre les abscisses a et b dans le cadre d'une approximation de $\int_a^b f$ par une méthode de quadrature.

Pour se représenter graphiquement u_n, on peut considérer la figure en haut de la page 663 de l'ouvrage, remplacer le graphe de la fonction carré par celui de n'importe quelle fonction positive f (pas nécessairement croissante), l'intervalle $[0, 1]$ par un intervalle $[a, b]$ quelconque et tracer les rectangles correspondants. Il est intuitivement clair que lorsque $n \to +\infty$, l'aire u_n se rapproche de l'aire sous la courbe de f entre les points d'abscisses a et b, c'est-à-dire de l'intégrale $\int_a^b f$; la suite de l'exercice a pour objectif de démontrer ce point.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1, n]\!]$. Pour tout $x \in \left[a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}\right]$, on a

$$\left|f(x) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \alpha \left|x - \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right|$$

d'après la question 1 ; comme x est à une distance de $a+k\frac{b-a}{n}$ inférieure à $\frac{b-a}{n}$, on peut écrire

$$\left|f(x) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \alpha \frac{b-a}{n}. \tag{6}$$

À présent, on peut écrire

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \\
&\qquad = \left|\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\qquad \leqslant \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \left|f(x) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire. Par croissance de l'intégrale et grâce à la majoration (6), on obtient

$$\left|\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \alpha\frac{b-a}{n}\mathrm{d}x = \alpha\frac{(b-a)^2}{n^2}.$$

4. En utilisant la relation de Chasles puis l'inégalité triangulaire et le résultat de la question précédente, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - u_n\right| &\leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{n} \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \left(f(x) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \left(f(x) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left|\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha\frac{(b-a)^2}{n} = \frac{(b-a)^2}{n}.
\end{aligned}$$

Or $\frac{(b-a)^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; l'inégalité que nous venons d'établir et le théorème des gendarmes impliquent alors que

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - u_n\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0, \quad \text{soit} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

5. En appliquant le résultat démontré à la fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$) entre les points $a = 0$ et $b = 1$, on obtient que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sin(2\pi x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{\cos(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^1 = 0.$$

Correction de l'exercice 46.

1. Supposons que f ne soit pas uniformément continue sur $[a, b]$. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$ on puisse trouver $x, y \in [a, b]$ tels que $|x-y| \leqslant \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$. En choisissant les $\frac{1}{n}$ pour valeurs successives de η, on obtient donc l'existence de suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $[a, b]$ telles que l'on ait :

$$\forall n \geqslant 1, \quad |x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Or le théorème de Bolzano-Weierstrass donne l'existence d'une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément $\ell \in [a, b]$. On peut aussi extraire de la suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous-suite $(y_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$, avec $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante, telle que $(y_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un élément $\ell' \in [a, b]$. Ainsi, les suites $(x_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent respectivement vers ℓ et ℓ'. Mais pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\left|x_{\varphi\circ\psi(n)} - y_{\varphi\circ\psi(n)}\right| \leqslant \frac{1}{\varphi\circ\psi(n)},$$

donc en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient $|\ell-\ell'| \leqslant 0$, soit $\ell = \ell'$. On a donc

$$\left|f(x_{\varphi\circ\psi(n)}) - f(y_{\varphi\circ\psi(n)})\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell - \ell| = 0$$

puisque f est continue ; mais cela contredit le fait que $\left|f(x_{\varphi\circ\psi(n)}) - f(y_{\varphi\circ\psi(n)})\right| > \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, f est uniformément continue sur $[a, b]$, ce qui établit le théorème de Heine.

2. On reprend toutes les notations de l'exercice précédent. Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons η tel qu'il est donné dans la définition de l'uniforme continuité de f. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $\frac{b-a}{N} \leqslant \eta$. On peut alors réécrire l'inégalité obtenue dans la question 4 de l'exercice précédent :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - u_n\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left|\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \left(f(x) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right)\mathrm{d}x\right|$$

d'où, par l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - u_n\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \left|f(x) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right|\mathrm{d}x,$$

mais pour tout $x \in \left[a + (k-1)\frac{b-a}{n}, a + k\frac{b-a}{n}\right]$ on a $\left|x - \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \eta$ donc $\left|f(x) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \varepsilon$, d'où

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - u_n\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} \varepsilon \, \mathrm{d}x = \int_a^b \varepsilon \mathrm{d}x = (b-a)\varepsilon.$$

Ainsi, quel que soit $\varepsilon > 0$ on a $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - u_n\right| \leqslant (b-a)\varepsilon$ à partir d'un certain rang : on en déduit que

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

ce qui clôt la preuve.