Primitives

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 6. La fonction inverse est à valeurs négatives sur $\mathbb{R}_-^*$ et positives sur $\mathbb{R}_+^*$: on cherche donc le graphe d'une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui exclut les graphes (ii) et (iii). Les graphes (i) et (iv), quant à eux, conviennent. En effet, une fonction F définie sur $\mathbb{R}^*$ est une primitive de la fonction inverse si et seulement s'il existe deux constantes $c, d \in \mathbb{R}$ telles que $F(x) = \ln(-x) + c$ pour tout $x < 0$ et $F(x) = \ln(x) + d$ pour tout $x > 0$; le graphe (iv) correspond au cas où $c = d$, tandis que le graphe (i), asymétrique, correspond au cas où $c < d$.

Correction de l'exercice 7. En écrivant $f(x) = e^{\ln(\alpha)x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on trouve que les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme

$$F : x \longmapsto \frac{1}{\ln(\alpha)} e^{\ln(\alpha)x} + c = \frac{x^\alpha}{\ln(\alpha)} + c$$

pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 8.

(i) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. En reconnaissant une forme « $\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ » (avec $u(x) = e^x$), on peut déterminer que $F : x \mapsto \arctan(e^x)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

(ii) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. En reconnaissant à une constante près une forme « $\frac{u'(x)}{1+u(x)}$ » (avec cette fois $u(x) = e^{2x}$), on peut déterminer que la fonction $G : x \mapsto \frac{1}{2}\ln(1 + e^{2x})$ est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

(iii) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$. En écrivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{\cos(x)}{2 - (1 - \sin^2(x))} = \frac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)}$$

et en reconnaissant une forme « $\frac{u'(x)}{1+u^2(x)}$ » (avec $u(x) = \sin(x)$), on peut déterminer que $H : x \mapsto \arctan(\sin(x))$ est une primitive de h sur $\mathbb{R}$.

(iv) La fonction i est définie sur $\mathbb{R}_+$. En écrivant :

$$\forall x \geqslant 0, \quad i(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1 + x^{\frac{3}{2}}},$$

on reconnaît (à un facteur près) une forme « $\frac{u'(x)}{1+u(x)}$ » (avec $u : x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ uniquement). On peut donc écrire que i admet la fonction

$I : x \mapsto \frac{2}{3}\ln(1+x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}\ln(1+x\sqrt{x})$ pour primitive sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme I admet un prolongement par continuité à droite en 0 (par $\widetilde{I}(0)=0$) et comme

$$\frac{\widetilde{I}(x)-\widetilde{I}(0)}{x-0} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{2}{3}\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x} = \frac{2}{3}\sqrt{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0,$$

ce prolongement est dérivable à droite en 0 et on a $\widetilde{I}'(0) = 0 = i(0)$, si bien que I est une primitive de i sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

(v) La fonction j est définie sur $\mathbb{R}$. On reconnaît, à un facteur près, une forme « $u'(x)u^{\frac{1}{2}}(x)$ » (avec $u(x) = 2+\cos(x)$) ; ainsi, la fonction $J : x \mapsto -\frac{2}{3}(2+\cos(x))^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de j sur $\mathbb{R}$.
Notons que la primitivation réalisée ici n'est aisée que parce que la fonction $y \mapsto y^{\frac{3}{2}}$ est dérivable sur l'ensemble des valeurs prises par la fonction $x \mapsto 2+\cos(x)$, c'est-à-dire sur l'intervalle $[1,3]$: pour primitiver la fonction $x \mapsto \sin(x)\sqrt{1+\cos(x)}$, on aurait dû vérifier (par exemple à l'aide d'un développement limité) que la fonction $x \mapsto -\frac{2}{3}(1+\cos(x))^{\frac{3}{2}}$ est bien dérivable aux points où $1+\cos$ s'annule, c'est-à-dire sur les points de la forme $(2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

(vi) La fonction k est définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$ (en effet, $k(x)$ existe si et seulement si $\ln(x)$ existe et est non nul). En écrivant $k(x) = \frac{1}{x}\cdot\ln(x)^{-1}$, on reconnaît une forme « $\frac{u'(x)}{u(x)}$ » (avec $u(x) = \ln(x)$), ce qui permet de dire qu'une primitive de k est la fonction $K : x \mapsto \ln(|\ln(x)|)$ définie sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Correction de l'exercice 9.

1. Si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{\frac{b}{a}},\sqrt{\frac{b}{a}}\right\}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{x-\sqrt{\frac{b}{a}}}+\frac{\beta}{x+\sqrt{\frac{b}{a}}} &= \frac{\alpha\left(x+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)+\beta\left(x-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)}{\left(x-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)\sqrt{\frac{b}{a}}}{x^2-\frac{b}{a}} = \frac{a(\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)\sqrt{ab}}{ax^2-b},\end{aligned}$$

donc l'égalité attendue est réalisée si $a(\alpha+\beta) = 0$ et $\alpha-\beta\sqrt{ab} = 1$, c'est-à-dire, comme $a \neq 0$, si on a

$$\left\{\begin{array}{rcl}\alpha+\beta &=& 0\\ \alpha-\beta &=& \frac{1}{\sqrt{ab}}\end{array}\right. \quad\text{soit}\quad \left\{\begin{array}{rcl}\beta &=& -\alpha\\ 2\alpha &=& \frac{1}{\sqrt{ab}}\end{array}\right.$$

et donc $\alpha = \frac{1}{2\sqrt{ab}}$ et $\beta = -\frac{1}{2\sqrt{ab}}$. Ainsi, on peut écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{\frac{b}{a}},\sqrt{\frac{b}{a}}\right\},\quad f(x) = \frac{1}{ax^2-b} = \frac{1}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{1}{x-\sqrt{\frac{b}{a}}}-\frac{1}{2\sqrt{ab}}\cdot\frac{1}{x+\sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

Une primitive de f sur les intervalles composant $\mathbb{R}\setminus\left\{-\sqrt{\frac{b}{a}},\sqrt{\frac{b}{a}}\right\}$ est donc la fonction

$$F : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left(\left|x-\sqrt{\frac{b}{a}}\right|\right)-\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left(\left|x+\sqrt{\frac{b}{a}}\right|\right).$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$g(x) = \frac{1}{b+ax^2} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+\frac{a}{b}x^2} = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right)^2}.$$

Ainsi, une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est donnée par

$$G : x \longmapsto \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \cdot \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right) = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b}}x\right).$$

Correction de l'exercice 10.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2x^2+2x-4 = 2(x-1)(x+2)$. On cherche donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, ce qui donne, après des calculs du même acabit que dans l'exercice précédent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,1\}, \quad f(x) = \frac{1}{2x^2+2x-4} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

Ainsi, une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ est donnée par

$$F : x \mapsto \frac{1}{6} \ln(|x-1|) - \frac{1}{6} \ln(|x+2|).$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $4x^2+4x+1 = 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$, donc on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \quad g(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Ainsi, une primitive de g sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ est donnée par

$$G : x \longmapsto -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4x+2}.$$

3. Le trinôme au dénominateur est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$. On le met sous sa forme canonique, ce qui donne

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{7}{4}} \cdot \frac{1}{\frac{4}{7}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} \\ &= \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{7}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{7}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2} = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{7}}x+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2}.\end{aligned}$$

Une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction

$$H : x \longmapsto \frac{2}{7} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2}{\sqrt{7}}x + \frac{1}{\sqrt{7}}\right).$$

Correction de l'exercice 11.

1. Le trinôme au dénominateur admet 1 pour racine double, donc la fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. On cherche à éliminer le terme en x au numérateur en faisant apparaître l'expression $\frac{2x-2}{x^2-2x+1}$ dont on sait calculer une primitive. On écrit donc :
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-2}{x^2-2x+1} + \frac{2}{x^2-2x+1}.$$
Pour étudier la deuxième partie de cette expression, on factorise le polynôme au dénominateur, ce qui donne
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-2}{x^2-2x+1} + \frac{2}{(x-1)^2}.$$
Ainsi, f admet pour primitive sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ la fonction
$$F : x \longmapsto \frac{1}{2} \ln\left(|x^2-2x+1|\right) - \frac{2}{x-1} = \ln(|x-1|) - \frac{2}{x-1}.$$
2. Le trinôme au dénominateur conserve un signe strictement positif sur $\mathbb{R}$, donc g est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. On cherche une fois encore à décomposer $g(x)$ comme somme d'expressions primitivables. Pour cela, on écrit :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = 2 \cdot \frac{2x}{x^2+5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}.$$
Ainsi, g admet donc la fonction
$$G : x \longmapsto 2\ln\left(|x^2+5|\right) - \frac{3}{5}\sqrt{5}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) = 2\ln(x^2+5) - \frac{3}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)$$
pour primitive sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 12.

1. La division euclidienne du polynôme $4X^3+9X^2+8X$ par le polynôme X^2+2X+1 donne $4X^3+9X^2+8X = (4X+1)(X^2+2X+1) + 2X - 1$, donc :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(x) &= \frac{(4x+1)(x^2+2x+1)+2x-1}{x^2+2x+1} \\ &= 4x+1+\frac{2x-1}{x^2+2x+1} \\ &= 4x+1+\frac{2x+2}{x^2+2x+1} - \frac{3}{x^2+2x+1} \\ &= 4x+1+\frac{2x+2}{x^2+2x+1} - \frac{3}{(x+1)^2}.\end{aligned}$$
On en déduit que la fonction
$$F : x \longmapsto 2x^2+x+\ln(x^2+2x+1) + \frac{3}{x+1} = 2x^2+x+2\ln(|x+1|) + \frac{3}{x+1}$$
est une primitive de f sur les deux intervalles constituant $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

2. La division euclidienne du polynôme $3X^4+6X^3-8X^2-3$ par le polynôme $2X^2+4X-6$ donne $3X^4+6X^3-8X^2-3=\left(\frac{3}{2}X^2+\frac{1}{2}\right)(2X^2+4X-6)-2X$, donc :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,1\},\quad g(x)&=\frac{\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x-6)-2x}{2x^2+4x-6}\\&=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}-\frac{x}{x^2+2x-3}.\end{aligned}$$

En écrivant le terme $\frac{x}{x^2+2x-3}=\frac{x}{(x+3)(x-1)}$ sous la forme $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+3}$, on en déduit que la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3,1\}$ par

$$G: x\longmapsto \frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\ln(|x-1|)-\frac{3}{4}\ln(|x+3|)$$

est une primitive de g sur $\mathbb{R}\setminus\{-3,1\}$.

3. (a) Les solutions complexes de l'équation $1+z^4=0$, c'est-à-dire $z^4=-1$ vérifient

$$\left\{\begin{array}{ccc}|z^4| & = & 1\\ \arg(z^4) & \equiv & \pi\,[2\pi]\end{array}\right.\quad\text{soit}\quad\left\{\begin{array}{ccc}|z|^4 & = & 1\\ 4\arg(z) & \equiv & \pi\,[2\pi]\end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{ccc}|z| & = & 1\\ \arg(z) & \equiv & \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right.$$

et sont donc les quatre nombres complexes $e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$. On peut donc factoriser le polynôme $1+X^4$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}1+X^4&=\left(X-e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X-e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)\left(X+e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)\left(X+ie^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)\quad(\text{factorisation dans }\mathbb{C}[X])\\&=\left(X^2-\left(e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)X+1\right)\left(X^2-\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}+e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)X+1\right)\\&=\left(X^2-\sqrt{2}X+1\right)\left(X^2+\sqrt{2}X+1\right)\quad(\text{factorisation dans }\mathbb{R}[X]).\end{aligned}$$

On obtient bien la factorisation recherchée, avec $P: x\mapsto x^2-\sqrt{2}x+1$ et $Q: x\mapsto x^2+\sqrt{2}x+1$.

(b) On cherche $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ tels que l'on ait :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \frac{1}{1+x^4}=\frac{\alpha x+\beta}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\gamma x+\delta}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

soit :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \frac{1}{1+x^4}=\frac{(x^2+\sqrt{2}x+1)(\alpha x+\beta)+(x^2-\sqrt{2}x+1)(\gamma x+\delta)}{\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)}.$$

ou encore, après arrangement du numérateur obtenu par degrés décroissants :

$$\frac{1}{1+x^4}=\frac{(\alpha+\gamma)x^3+(\sqrt{2}(\alpha-\gamma)+\beta+\delta)x^2+(\alpha+\gamma+\sqrt{2}(\beta-\delta))x+\beta+\delta}{1+x^4}.$$

Ainsi, on cherche $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ vérifiant le système

$$\left\{\begin{array}{ccc} \alpha+\gamma & = & 0 \\ \sqrt{2}(\alpha-\gamma)+\beta+\delta & = & 0 \\ \alpha+\gamma+\sqrt{2}(\beta-\delta) & = & 0 \\ \beta+\delta & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{ccc} \gamma & = & -\alpha \\ 2\sqrt{2}\alpha & = & 0 \\ \sqrt{2}(\beta-\delta) & = & 0 \\ \beta+\delta & = & 1 \end{array}\right.$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{ccc} \gamma & = & -\alpha \\ 2\sqrt{2}\alpha & = & -1 \\ \beta & = & \delta \\ 2\beta & = & 1 \end{array}\right.$$

ce qui est vrai si et seulement si $\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\beta = \delta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. On peut donc écrire la décomposition suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^4} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}. \tag{1}$$

On décompose ensuite chacune des deux fractions rationnelles obtenues en éléments primitivables, en écrivant :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}x-1\right)^2} \end{aligned}$$

et de la même façon

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} = \frac{1}{2} \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{\sqrt{2}}{1+\left(\sqrt{2}x+1\right)^2}.$$

De ces écritures et de la décomposition (1), on déduit alors qu'une primitive de la fonction h sur $\mathbb{R}$ est la fonction H définie par

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad H(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2+\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\sqrt{2}x+1\right) \\ - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\left(\sqrt{2}x-1\right). \end{aligned}$$