Matrices et systèmes linéaires

Chapitre 18

Un problème millénaire et omniprésent en mathématiques est la résolution de systèmes d'équations linéaires à plusieurs inconnues, c'est-à-dire de systèmes de la forme

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n &= y_1 \\ a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,n}x_n &= y_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots & \quad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n &= y_m, \end{cases}$$

où les $a_{i,j}$ et les y_j sont des réels fixés et où les inconnues sont les variables $x_1, \ldots, x_n$. L'étude de ce problème est étroitement liée à celle du tableau de coefficients

$$A := \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix},$$

appelé *matrice du système*.

L'objet de ce chapitre est de présenter les opérations sur les matrices et les propriétés fondamentales qui en découlent, ainsi que des applications de la théorie des matrices à la résolution de systèmes linéaires.

Dans ce chapitre :

- Matrices : définitions et opérations. Manipulations formelles.
- Systèmes d'équations linéaires.
- Algorithme du pivot.
- Inversibilité et inversion d'une matrice carrée.

1 Matrices : définitions et opérations

Dans tout ce chapitre, on se donne deux entiers strictement positifs m et n.

1.1 Définitions générales

Définition 1 (Matrice). On appelle *matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels* tout tableau de nombres réels à m lignes et n colonnes.

Le coefficient présent à la ligne $i \in [\![1, m]\!]$ et à la colonne $j \in [\![1, n]\!]$ est souvent noté $M_{i,j}$ ou $a_{i,j}$. Dans ce deuxième cas, la matrice est alors notée

$$M = (a_{i,j})_{\substack{i \in [\![1,m]\!] \\ j \in [\![1,n]\!]}},$$

ou plus simplement $M = (a_{i,j})$ (qui se lit « matrice des $a_{i,j}$ ») s'il n'y a pas d'ambiguïté sur sa taille.

On dit que deux matrices sont *égales* si et seulement si elles ont la même taille et les mêmes coefficients.

L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Dans le cas où $m = n$, on note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Les matrices composant cet ensemble sont appelées *matrices carrées de taille n*.

Exemple. Définissons les coefficients $a_{i,j}$ par

$$\forall i, j \in [\![1, 5]\!], \quad a_{i,j} := |i - j|.$$

La matrice $M = (a_{i,j})$ est alors un élément de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ donné par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient situé à la première ligne et à la quatrième colonne de M, par exemple, est égal à $M_{1,4} = |1 - 4| = 3$.

Les lettres utilisées pour représenter des matrices sont systématiquement des majuscules. Lorsqu'aucune hypothèse n'est faite sur les propriétés de la matrice, on utilise de préférence les lettres A, B, M ou N.

Exemple. Les matrices

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont de tailles respectives 2×4 et 3×3 (donc N est carrée), si bien que $M \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a $M_{2,1} = 2$ et $N_{2,3} = 1$.

Définition 2 (Matrices lignes, matrices colonnes)**.** Une matrice de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est appelée *matrice ligne*, ou parfois *vecteur ligne*.

Une matrice de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ est appelée *matrice colonne*, ou parfois *vecteur colonne*.

Exemple. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne et $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

! $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}^n$

La tentation est grande de confondre un vecteur ligne de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ avec le vecteur de $\mathbb{R}^n$ formé des mêmes coordonnées, par exemple les vecteurs $\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$. On veillera toutefois à bien distinguer ces deux objets, ainsi que les ensembles $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, pour des raisons qui apparaitront clairement dans la suite du cours d'algèbre.

Définition 3 (Vecteurs lignes et vecteurs colonnes d'une matrice)**.** Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et soient $i \in [\![1, m]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$.

On appelle *i-ième vecteur ligne de M* le vecteur ligne

$$L_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,n} \end{pmatrix},$$

et *j-ième vecteur colonne de M* le vecteur colonne

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}.$$

Exemple. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Les vecteurs lignes de M sont donnés par

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix},$$

et ses vecteurs colonnes sont donnés par

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Définition 4 (Écriture par blocs)**.** Dans le cadre de la définition 3, on écrit parfois la matrice M *par blocs* :

$$M = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \cdots & C_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} L_1 \\ \hline \cdots \\ \hline L_m \end{array}\right)$$

ou simplement

$$M = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \cdots \\ L_m \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, on peut écrire M en écrivant les sous-matrices qui la composent comme s'il s'agissait de coefficients, par exemple sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où les blocs A, B, C et D vérifient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{m-p,q}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{m-p,n-q}(\mathbb{R})$ avec $p \in [\![1, m]\!]$ et $q \in [\![1, n]\!]$.

On ne donne pas la définition générale d'une écriture par blocs pour ne pas rebuter le lecteur en multipliant les indices, mais toute écriture par blocs est licite dès lors que les blocs en amont les uns des autres ont le même nombre de colonnes et que les blocs situés à la même hauteur ont le même nombre de lignes.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors la matrice définie par blocs par

$$M := \begin{pmatrix} A & B & B \\ A & B & B \end{pmatrix} \quad \text{est} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 5 (Diagonale d'une matrice carrée). Si $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *diagonale principale de* M, ou plus simplement *diagonale de* M, la diagonale contenant les termes $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$, c'est-à-dire la diagonale allant du coin supérieur gauche au coin inférieur droit de M.

La diagonale non principale de M ne présentant pas d'intérêt mathématique particulier, on s'autorise à parler de « la » diagonale de M pour désigner sa diagonale principale.

Exemple. La diagonale de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est celle contenant les nombres 3, 2 et 0.

Profitons-en pour introduire une quantité que nous retrouverons tout au long du cours d'algèbre :

Définition 6 (Trace d'une matrice carrée). Si $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *trace de* M, et on note $\mathrm{Tr}(M)$, la somme des coefficients diagonaux de M :

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Nous ne verrons l'intérêt de la trace que dans le cours de deuxième année, mais nous étudierons certaines de ses propriétés dès le présent chapitre (voir l'exercice 4).

Exemple. La trace de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

vaut $\mathrm{Tr}(M) = 3 + 3 - 1 = 5$.

1.2 Matrices de forme particulière

Certaines matrices de forme remarquable jouent un rôle particulier dans la théorie que nous allons développer.

Définition 7 (Matrice nulle, matrice identité, matrice scalaire)**.** On appelle *matrice nulle de taille $m \times n$* la matrice $0_{m,n} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ (plus simplement notée 0 lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur sa taille) définie par

$$0_{m,n} := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette notation signifie que $0_{m,n}$ est la matrice dont tous les coefficients valent 0.

La matrice nulle carrée $0_{n,n}$ est simplement notée 0_n, et parfois appelée *matrice nulle d'ordre n*.

On appelle *matrice identité d'ordre n* la matrice carrée $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cette notation signifie que I_n est la matrice dont tous les coefficients non-diagonaux valent 0 et dont tous les coefficients diagonaux valent 1.

On appelle *matrice scalaire d'ordre n* toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme

$$\lambda I_n := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

pour un $\lambda \in \mathbb{R}$.

On anticipe ici la notation λM utilisée pour désigner le produit d'une matrice M par un scalaire λ (voir section suivante).

Ainsi, une matrice carrée nulle et une matrice identité sont des matrices scalaires (avec λ respectivement égal à 0 et à 1).

Définition 8 (Matrice diagonale)**.** Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que M est *diagonale* lorsque tous ses termes situés hors de sa diagonale sont nuls, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Les $*$ dans la matrice représentent des réels quelconques.

Ainsi, M est diagonale si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, on note parfois $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice

$$\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Exemple. Une matrice scalaire est une matrice diagonale, mais la réciproque est fausse dès que $n \geqslant 2$: la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est par exemple diagonale mais non scalaire.

Définition 9 (Matrice triangulaire)**.** Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que M est *triangulaire supérieure* lorsque tous ses termes situés strictement en dessous de sa diagonale sont nuls, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

Comme pour toutes les notions faisant mention de la diagonale d'une matrice, on ne peut parler de matrice triangulaire que dans le cas des matrices carrées.

$$M = \begin{pmatrix} * & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Ainsi, M est une matrice triangulaire supérieure si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i > j$ (c'est-à-dire tel que l'indice de la ligne est strictement plus élevé que l'indice de la colonne).

On dit que M est *triangulaire inférieure* lorsque tous ses termes situés strictement au-dessus de sa diagonale sont nuls, c'est-à-dire qu'elle est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} * & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ * & * & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * & 0 \\ * & \cdots & \cdots & * & * \end{pmatrix}$$

Ainsi, M est une matrice triangulaire inférieure si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$.

On dit simplement que M est *triangulaire* si elle est triangulaire supérieure ou triangulaire inférieure.

Exemple. Considérons les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors A est triangulaire supérieure et B est triangulaire inférieure.

Les matrices triangulaires supérieures *et* inférieures à la fois sont exactement les matrices diagonales. Pour démontrer ce fait (par ailleurs graphiquement clair), il suffit d'écrire que si $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors M est simultanément triangulaire supérieure et inférieure si et seulement si $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$ ou $i > j$, c'est-à-dire tel que $i \neq j$, ce qui est en fait la définition d'une matrice diagonale.

1.3 Opérations sur les matrices

Comme l'ensemble des nombres réels, celui des nombres complexes ou l'ensemble $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des matrices peut être muni d'un certain nombre d'opérations permettant de combiner les matrices entre elles. Si l'addition et la multiplication externe (par un scalaire) rappellent les opérations correspondantes sur $\mathbb{R}^n$, le produit admet une définition plus exotique qui fait la difficulté et la richesse du cadre matriciel, ainsi que son utilité dans l'étude des systèmes linéaires.

1.3.1 Addition et multiplication externe

Définition 10 (Somme de matrices)**.** Pour toutes matrices de même taille $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}$, on définit $A + B$ comme la matrice

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}.$$

Définition 11 (Multiplication d'une matrice par un scalaire)**.** Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit λA (ou $\lambda \cdot A$) comme

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}.$$

Sur la signification du terme *scalaire*, voir page **??**.

Ainsi, la somme de deux matrices est la matrice de même taille obtenue en calculant la somme de leurs coefficients terme à terme, et le produit d'une matrice par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la matrice de même taille obtenue en multipliant tous les coefficients de la matrice par λ.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, alors

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+1 & 1+2 \\ 0+3 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A + 5B = \begin{pmatrix} 1+5 & 1+10 \\ 0+15 & 2-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, la somme des matrices A et B n'est pas définie car ces matrices A et B ne sont pas de même taille.

L'addition matricielle vérifie un certain nombre de propriétés raisonnables suivantes :

Le lecteur est invité à détailler la démonstration de ces propriétés suivantes en utilisant la même démarche que dans le cas de l'addition sur $\mathbb{R}^n$.

- Elle est associative :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

- Elle est commutative :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad A + B = B + A.$$

- La matrice nulle est l'élément neutre pour l'addition dans $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad A + 0_{m,n} = A.$$

Exemple. Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, il est aisé de montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ grâce à l'associativité de l'addition que

$$\underbrace{A + \cdots + A}_{k \text{ fois}} = kA,$$

où le terme de droite est à comprendre au sens de la multipication de A par le scalaire k.

On adopte des notations visant à permettre le calcul sur des matrices selon des règles qui rappellent le calcul dans $\mathbb{R}$:

Définition 12 (Opposé et différence de matrices).
L'opposé d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est défini comme son produit externe par -1, c'est-à-dire que $(-A) := (-1) \cdot A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. On a :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad A + (-A) = 0_{m,n}.$$

Si $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, on définit la différence $A-B$ comme la matrice $A - B := A + (-B)$.

La somme d'un nombre $p \geqslant 2$ de matrices $M_1, \ldots, M_p$ est comme d'habitude notée

$$\sum_{k=1}^{p} M_k := M_1 + \cdots + M_p,$$

et il est possible de manipuler les sommes de matrices comme les sommes de nombres réels ou complexes. En particulier, on peut utiliser la linéarité de la somme, réaliser des changements d'indices ou effectuer des télescopages dans les sommes de matrices.

Exemple. Si $M_1, \ldots, M_p$ sont des matrices de même taille avec $p \geqslant 2$, alors on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{p-1} (M_{k+1} - M_k) = M_p - M_1$$

en reconnaissant une somme télescopique.

1.3.2 Produit matriciel

Rien ne nous empêcherait *a priori* de définir une multiplication terme à terme entre deux matrices de même taille sur le modèle de l'addition. Pour des raisons qui apparaîtront bientôt, il est toutefois bien plus fécond de définir le produit matriciel d'une façon plus capillotractée.

Commençons par définir la multiplication d'un vecteur par une matrice.

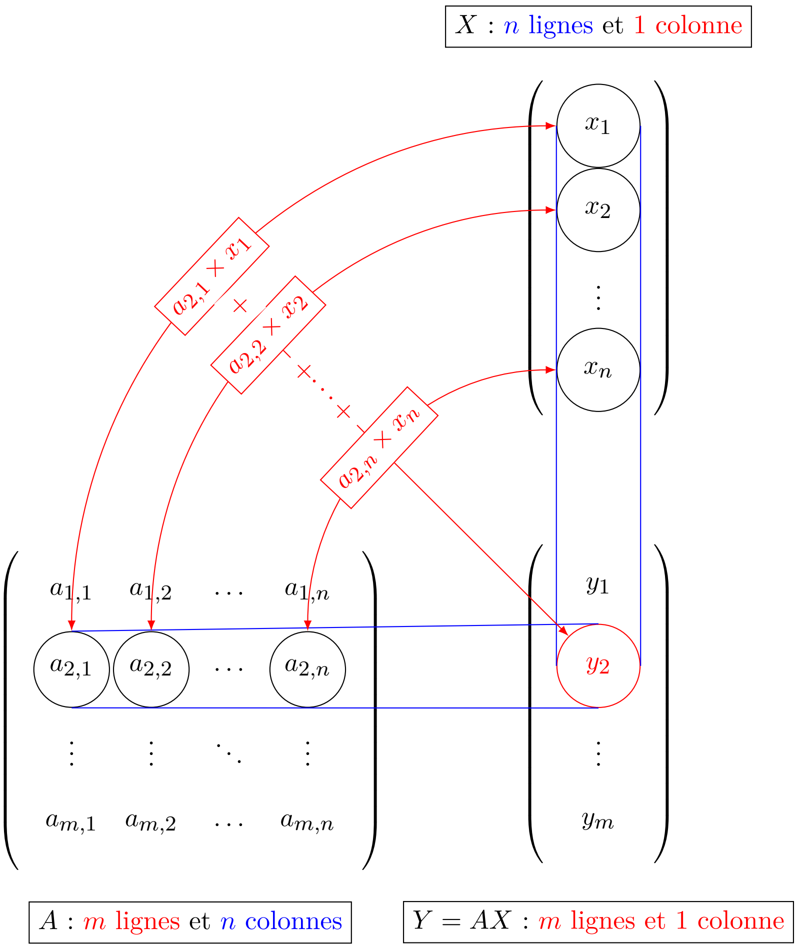
Définition 13 (Multiplication d'un vecteur colonne par une matrice). On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et un vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on note

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i \in [\![1,m]\!] \\ j \in [\![1,n]\!]}} \quad \text{et} \quad X = (x_i)_{i \in [\![1,n]\!]} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

On définit le *produit* AX comme le vecteur colonne de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1,m]\!], \quad (AX)_i := \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k.$$

On ne définit donc le produit AX que dans le cas où le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de X. Cette condition apparaît naturellement sur la figure suivante, qui indique comment calculer en pratique le produit AX :



Pour calculer le deuxième coefficient du vecteur $Y = AX$, on multiplie terme à terme les coefficients de la deuxième ligne de A et ceux de la colonne X (c'est-à-dire que l'on calcule les produits $a_{2,j}x_j$), puis on somme les n produits obtenus.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On remarque alors que l'on peut avoir $AX = 0$ sans que A ni X ne soient nuls. Nous reparlerons longuement de ce fait dans la section suivante.

La définition alambiquée du produit que nous venons de donner est justifiée par la proposition suivante, qui est le point de départ historique de la théorie des matrices :

Bien que le calcul matriciel sous sa forme actuelle n'ait été introduit qu'au milieu du XIX$^{\text{ème}}$ siècle par Arthur Cayley, l'utilisation de tableaux de nombres pour représenter et résoudre des systèmes d'équations linéaires du type de celui présenté ci-contre est attestée au moins depuis le II$^{\text{ème}}$ siècle avant notre ère : un problème à plusieurs inconnues est ainsi résolu dans le traité de mathématiques chinois Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique, *compilé entre le II$^{\text{ème}}$ et le I$^{\text{er}}$ siècle. La méthode présentée pour résoudre ce problème ne fut redécouverte en Europe qu'au XVI$^{\text{ème}}$ siècle, ce qui accrédite la thèse (encore controversée) d'un développement essentiellement indépendant des mathématiques chinoises et grecques jusqu'à l'époque moderne.*

Définition-Proposition 14 (Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires). Le système de m équations linéaires à n inconnues

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 & + \dots & + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 & + \dots & + a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ & \vdots & & & \\ a_{m,1}x_1 & + \dots & + a_{m,n}x_n & = & y_m, \end{cases} \qquad (\mathcal{S})$$

où les $a_{i,j}$ et les y_j sont des réels fixés et où les inconnues sont les variables $x_1, \dots, x_n$, s'écrit matriciellement sous la forme

$$AX = Y,$$

où $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ est appelée *matrice du système* $(\mathcal{S})$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est appelé *vecteur des inconnues* et où $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ est le *second membre du système.*

Exemple. Le système

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + 6z = 0 \end{cases}$$

se réécrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice du système est donc $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

On en dira davantage sur les systèmes linéaires dans la section suivante.

Le produit de deux matrices se définit en généralisant la définition 13 au cas de matrices à plusieurs colonnes.

Définition 15 (Multiplication de deux matrices)**.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit le *produit* de A et B comme la matrice $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall i \in [\![1, m]\!], \quad \forall j \in [\![1, p]\!], \quad (AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

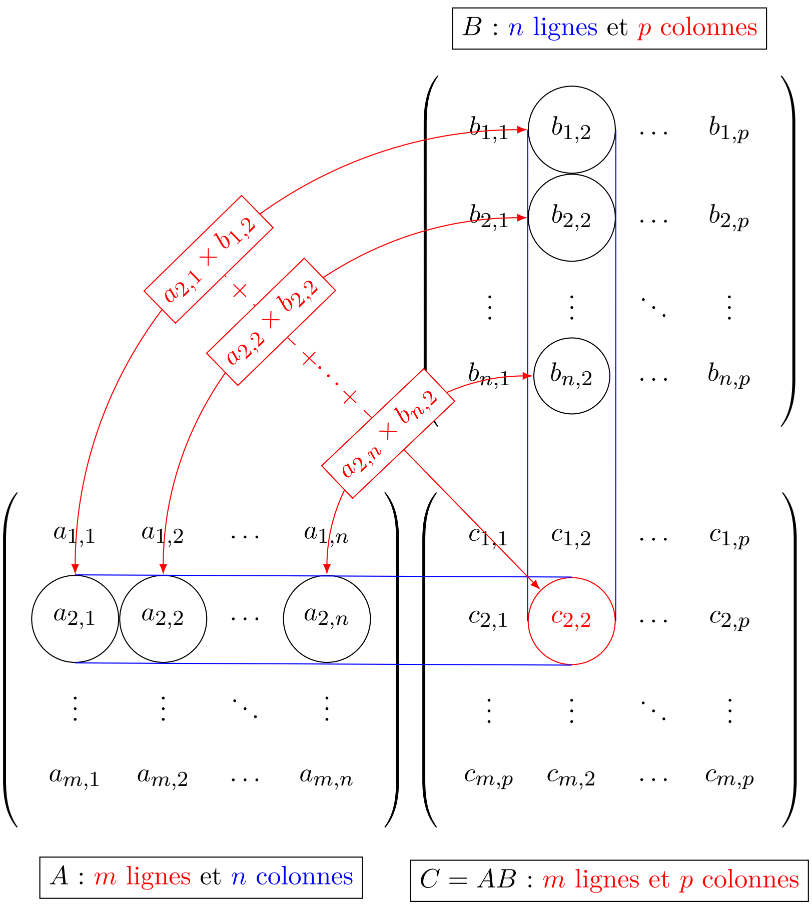
On ne définit donc le produit AB que dans le cas où le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. La matrice produit possède alors le nombre de lignes de A et le nombre de colonnes de B, comme l'illustre la figure page suivante.

Dans le cadre de la définition ci-dessus, la j-ième colonne de AB est le produit AC_j, où C_j est la j-ième colonne de B. En d'autres termes, si l'on écrit B sous la forme

$$B = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \cdots & C_n \end{array} \right),$$

où $C_1, \dots, C_n$ sont des vecteurs colonnes, alors

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c} AC_1 & \cdots & AC_n \end{array} \right).$$



Le coefficient $(AB)_{i,j}$ s'obtient en multipliant deux à deux les coefficients de la i-ième ligne de A et ceux de la j-ième colonne de B, puis en additionnant les produits ainsi calculés.

Insistons : en multipliant une matrice de taille $m \times n$ par une matrice de taille $n \times p$, on obtient une nouvelle matrice de taille $m \times p$. On peut retenir informellement que « $m \times n$ par $n \times p$ donne $m \times p$ ».

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 19 & 5 & 19 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le produit BA, en revanche, n'est pas défini puisque B possède 3 colonnes et A possède 2 lignes.

Ici, le produit d'une matrice de taille 2×2 par une matrice de taille 2×3 donne une matrice de taille 2×3.

Exemple 16 (Matrice identité et produit). Un calcul facile laissé au lecteur assure que la multiplication par une matrice identité a un effet neutre :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), \quad AI_n = A \quad \text{et} \quad I_m A = A.$$

Exemple 17 (Matrices diagonales et produit). Le produit de deux matrices diagonales de même taille est très facile à calculer, puisqu'il suffit dans ce cas de réaliser le produit terme à terme des coefficients des deux matrices. Formellement, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}.$$

Attention, cette astuce ne s'applique qu'aux matrices diagonales !

L'opération de produit matriciel que nous venons de définir satisfait un certain nombre de propriétés calculatoires :

Proposition 18 (Distributivité du produit matriciel par rapport à l'addition). Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- Pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a

$$(A + B)C = AC + BC.$$

- Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a

$$A(B + C) = AB + AC.$$

Démonstration de la proposition 18 — On démontre seulement le premier point ; le deuxième procède du même raisonnement et est laissé en exercice.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On remarque tout d'abord que les matrices $(A + B)C$ et $AC + BC$ sont bien définies et de même taille : en effet, la matrice $A + B$ est de taille $m \times n$ donc le produit $(A + B)C$ existe et est une matrice de taille $m \times p$, tandis que les produits AC et BC sont des matrices de taille $m \times p$, ce qui implique que leur somme existe et est elle aussi de taille $m \times p$.

On utilisera souvent cette démarche dans les démonstrations de cette section : pour établir une égalité entre des matrices, on vérifie tout d'abord que celles-ci ont la même taille, puis que leurs coefficients sont égaux.

Si $i \in [\![1, m]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$, on a alors

$$\begin{aligned}
\big((A+B)C\big)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} (A+B)_{i,k} C_{k,j} \quad \text{par définition du produit } (A+B)C \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(A_{i,k}C_{k,j} + B_{i,k}C_{k,j}\big) \quad \text{par définition de la somme } A+B \\
&= \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}C_{k,j} + \sum_{k=1}^{n} B_{i,k}C_{k,j} \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= (AC)_{i,j} + (BC)_{i,j} \quad \text{par définition des produits } AC \text{ et } BC \\
&= \big(AC+BC\big)_{i,j} \quad \text{par définition de la somme } AC+BC.
\end{aligned}$$

Ainsi, les matrices $(A+B)C$ et $AC+BC$ sont de même taille et leurs coefficients sont égaux deux à deux : elles sont donc bien égales. □

Proposition 19 (Associativité du produit matriciel)**.** Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a

$$(AB)C = A(BC).$$

Cette propriété s'avérera extrêmement pratique lors de calculs formels. Pour l'heure, on peut retenir qu'elle permet d'écrire un produit de la forme ABC sans se soucier de l'ordre dans lequel les produits matriciels sont effectués.

Démonstration de la proposition 19 — Soient A, B et C comme dans l'énoncé. On remarque tout d'abord que les matrices $(AB)C$ et $A(BC)$ sont bien définies et de même taille : AB est de taille $m \times p$ donc $(AB)C$ existe et est de taille $m \times q$, et BC est de taille $n \times q$ donc $A(BC)$ existe et est elle aussi de taille $m \times q$.

Si $i \in [\![1, m]\!]$ et $j \in [\![1, q]\!]$, on a alors

$$\begin{aligned}
\big((AB)C\big)_{i,j} &= \sum_{k=1}^{p} (AB)_{i,k} C_{k,j} \quad \text{par définition du produit } (AB)C \\
&= \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{\ell=1}^{n} A_{i,\ell} B_{\ell,k} \right) C_{k,j} \quad \text{par définition du produit } AB \\
&= \sum_{k=1}^{p} \sum_{\ell=1}^{n} A_{i,\ell} B_{\ell,k} C_{k,j} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} A_{i,\ell} B_{\ell,k} C_{k,j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\ell=1}^{n} A_{i,\ell} \left(\sum_{k=1}^{p} B_{\ell,k} C_{k,j} \right) \quad \text{car } A_{i,l} \text{ ne dépend pas de } k \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} A_{i,\ell} (BC)_{\ell,j} \quad \text{par définition du produit } BC \\
&= A(BC)_{i,j} \quad \text{par définition du produit } A(BC).
\end{aligned}$$

Ainsi, les matrices $(AB)C$ et $A(BC)$ sont de même taille et leurs coefficients sont égaux deux à deux : elles sont donc bien égales. □

En revanche, la propriété de commutativité fait défaut au produit de matrices :

!

Le produit matriciel n'est pas commutatif

Si A et B sont deux matrices, il est en général faux d'affirmer que $AB = BA$.

En effet, l'un des deux produits peut tout simplement ne pas avoir de sens : si A est de taille 2×3 et si B est de taille 3×5, le produit matriciel AB existe (et donne une matrice de taille 2×5) mais le produit matriciel BA n'est pas défini.

Par ailleurs, même lorsque AB et BA existent tous deux et sont de même taille (ce qui est le cas lorsque A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), rien ne garantit qu'ils sont égaux. Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mais

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

si bien que $AB \neq BA$.

Définition 20 (Matrices commutant)**.** Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A et B *commutent* lorsque $AB = BA$.

En considérant les tailles respectives de A, B, AB et BA, on comprend que la définition n'a de sens que pour des matrices carrées de même taille.

Exemple. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ commutent puisque

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exemple. Si $n = 1$, les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutent toutes deux à deux puisqu'elles s'assimilent alors à des réels :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ba \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \end{pmatrix}.$$

En revanche, dès que $n \geqslant 2$, il est possible de trouver des exemples de matrices ne commutant pas, comme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

qui vérifient

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

donc $AB \neq BA$.

Malgré le fait que deux matrices données ne commutent pas nécessairement, il est toujours possible de « faire commuter des matrices et des scalaires » lors d'un produit matriciel, au sens où pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et pour tout réel λ, on a

$$A(\lambda B) = \lambda AB = (\lambda A)B.$$

Cette relation, dont la démonstration est laissée au lecteur, est d'une grande aide dans les calculs puisqu'elle permet par exemple d'écrire $\left(\frac{1}{3}A\right)\left(\frac{1}{2}B\right) = \frac{1}{6}AB$.

Exemple. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, la matrice scalaire λI_n commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En effet, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors

$$(\lambda I_n)A = \lambda(I_n A) = \lambda A = \lambda(A I_n) = A \cdot (\lambda I_n).$$

La réciproque de ce dernier résultat est vraie :

Proposition 21 (Matrices commutant avec toutes les matrices). Les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les autres matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices scalaires, c'est-à-dire les matrices de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Démontrer cette proposition est une question classique au concours ; nous vous conseillons donc d'en mémoriser la preuve.

Démonstration de la proposition 21 — On a montré dans l'exemple qui précède la proposition que les matrices scalaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutent avec tout élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Réciproquement, considérons une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et supposons que A commute avec toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On va montrer que A est scalaire.

Soient $i, j \in [\![1, n]\!]$. On définit

$$E_{i,j} := \begin{array}{cc} \begin{array}{c} j^{\text{ème}}\text{ colonne} \\ \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix} & \leftarrow i^{\text{ème}}\text{ ligne} \end{array}$$

comme la matrice de taille $n \times n$ contenant un 1 au croisement de la i-ième ligne de la j-ième colonne et des 0 partout ailleurs.

Les matrices $E_{i,j}$ sont des outils classiques que nous rencontrerons à plusieurs reprises dans la suite du cours d'algèbre. Il est important de prendre le temps de se convaindre du bien-fondé des formulations données pour $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$, par exemple écrivant explicitement le produit dans le cas $n = 2$ ou $n = 3$.

On a alors

$$AE_{i,j} = \begin{array}{c} j^{\text{ème}}\text{ colonne} \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} & & a_{1,i} & & \\ & & \vdots & & \\ \cdots & 0 & a_{i,i} & 0 & \cdots \\ & & \vdots & & \\ & & a_{n,i} & & \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad E_{i,j}A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,j} & \cdots & a_{j,n} \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & & \end{pmatrix} & \leftarrow i^{\text{ème}}\text{ ligne} \end{array}$$

c'est-à-dire que $AE_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la j-ième colonne est la i-ième colonne de A et dont toutes les autres colonnes sont nulles, et que $E_{i,j}A$ est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont la i-ième ligne est la j-ième ligne de A et dont toutes les autres lignes sont nulles. Or A et $E_{i,j}$ commutent par hypothèse, donc les deux matrices ci-dessus sont égales. Ainsi :

- Les coefficients hors de la j-ième colonne de $AE_{i,j}$ sont nuls (puisque c'est le cas de ceux de $E_{i,j}A$), c'est-à-dire que $a_{j,k} = 0$ pour tout $k \neq j$: ainsi, la j-ième ligne de A est nulle à l'exception éventuelle de son coefficient diagonal $a_{j,j}$. Comme j est choisi de façon quelconque dans $[\![1, n]\!]$, on en déduit que A est diagonale.
- Le coefficient situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne de $AE_{i,j}$ est $a_{j,j}$ et celui situé à la même position dans $E_{i,j}A$ est $a_{i,i}$, donc on a $a_{i,i} = a_{j,j}$. Comme i et j sont choisis arbitrairement dans $[\![1, n]\!]$, tous les coefficients diagonaux de A sont égaux.

Ces deux informations permettent de conclure que A est une matrice scalaire, ce qui clôt la preuve. $\square$

Lorsque A et B sont deux matrices *carrées* de taille $n \times n$, on peut considérer leurs produits deux à deux dans un sens (AB) comme dans l'autre (BA), et ces produits sont eux-mêmes des matrices de taille $n \times n$. L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni des opérations d'addition et de multiplication est ainsi un *anneau*, c'est-à-dire un ensemble dans lequel on peut additionner, soustraire et multiplier des éléments entre eux (voir le point de cours sur les structures algébriques page **??**). La matrice identité I_n joue dans cet anneau le même rôle que l'élément 1 dans les anneaux $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, comme l'indique la proposition suivante.

Proposition 22 (Élément neutre pour le produit matriciel). La matrice identité I_n est l'élément neutre pour le produit matriciel dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad AI_n = I_nA = A.$$

Cette proposition est une réécriture de l'exemple 16 pour des matrices carrées.

Il est alors naturel de considérer qu'une matrice « multipliée 0 fois par elle-même » est égale à l'identité, ce qui conduit à une définition :

Définition 23 (Puissances itérées). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée et k un entier naturel. On définit A^k comme suit :

$$A^0 = I_n \quad \text{et} \quad \forall k \geqslant 1, \quad A^k = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{k \text{ fois.}}$$

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on obtient par le calcul

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Nous reparlerons des matrices dont l'une des puissances s'annule, que l'on nomme *nilpotentes*. Pour l'instant, remarquons qu'il est possible d'avoir $A^3 = 0$ tout en ayant $A \neq 0$, ce qui différencie le cadre matriciel de ceux étudiés jusqu'ici.

Exemple. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A et A^2 commutent : en effet, l'associativité du produit matriciel implique que

$$A \cdot A^2 = A(AA) = (AA)A = A^2 \cdot A.$$

Plus généralement, si $p, q \in \mathbb{N}$ alors A^p et A^q commutent puisque l'on peut écrire

$$A^pA^q = A^{p+q} = A^qA^p.$$

Définition 24 (Polynôme de matrice). Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle *polynôme en* A toute matrice de la forme

$$M = \sum_{k=0}^{p} a_kA^k = a_0I_n + a_1A + \ldots + a_pA^p,$$

avec $a_0, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$.

Exemple 25 (Commutativité des polynômes en A). Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices $M := A^2 + A + 3I_n$ et $N := A^5 - 2A^2$ sont des polynômes en A, et elles commutent puisque

$$MN = (A^2+A+3I_n)(A^5-2A^2) = A^7-2A^4+A^6-2A^3+3A^5-6A^2$$

et d'autre part

$$NM = (A^5-2A^2)(A^2+A+3I_n) = A^7+A^6+3A^5-2A^4-2A^3-6A^2,$$

ce qui signifie que $MN = NM$.

Plus généralement, on peut retenir que deux matrices qui s'écrivent comme des polynômes en A commutent toujours.

! **Attention aux identités remarquables**

Les identités remarquables ne sont pas valables en général dans les matrices. Par exemple, si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2,$$

et cette matrice n'est égale à $A^2 + 2AB + B^2$ que si A et B commutent.

En revanche, lorsque A et B commutent, on peut utiliser deux formules très utiles :

Proposition 26 (Formule de Bernoulli, version matricielle). Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. Alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad A^N - B^N = (A-B)\sum_{k=0}^{N-1} A^k B^{N-1-k}.$$

Il est essentiel de préciser que A et B commutent lorsque l'on applique l'une de ces formules dans un cadre matriciel.

Théorème 27 (Formule du binôme, version matricielle). Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. Alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}.$$

La preuve de ces résultats est essentiellement la même que celle dans le cas réel ; on détaille celle de la formule du binôme dans l'exercice 16.

Exemple 28 (Utilisation de la formule du binôme pour calculer des puissances de matrices). La formule du binôme permet le calcul de certaines puissances de matrices. Considérons par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et cherchons à déterminer explicitement la puissance A^n pour un certain $n \geqslant 2$.

Pour ce faire, on écrit A sous la forme

$$A = 3I_2 + B \quad \text{avec} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on vérifie aisément que $B^2 = 0$, ce qui implique que $B^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. Comme $3I_2$ et B commutent (puisque la matrice scalaire $3I_2$ commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), on peut alors utiliser la formule du binôme pour écrire que si $n \geqslant 2$, alors

$$A^n = (3I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k (3I_2)^{n-k}$$

soit, comme $B^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$:

$$A^n = \binom{n}{0} B^0 (3I_2)^n + \binom{n}{1} B^1 (3I_2)^{n-1} = 3^n I_2 + n3^{n-1} B,$$

d'où enfin

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

1.3.3 Transposition

La transposition est une opération spécifique aux matrices. Elle est définie par l'interversion des lignes et des colonnes d'une matrice :

Définition 29 (Transposée d'une matrice). Si $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, la *matrice transposée de* M (ou plus simplement la *transposée de* M) est la matrice notée ${}^tM \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall j \in [\![1, m]\!], \quad \left({}^tM\right)_{i,j} = M_{j,i}.$$

Exemple. Considérons les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On trouve parfois la notation M^{T} pour la transposée d'une matrice M. Attention, la marque de la transposition est dans ce cas indiquée en exposant de M (donc en haut à droite de la lettre M et non en haut à gauche comme dans la notation que nous utilisons). Le sujet précise toujours explicitement la notation choisie.

Exemple. La transposée d'une matrice ligne est une matrice colonne et vice versa.

Exemple. La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure et vice versa.

Une matrice est bien sûr la transposée de sa transposée, comme l'indique la proposition suivante dont la démonstration rigoureuse est laissée au lecteur :

Proposition 30. Si $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors ${}^t({}^tM) = M$.

Certaines matrices vérifient des relations de symétrie particulières par rapport à leur diagonale, qui se traduisent par un lien entre ces matrices et leur transposée :

Définition 31 (Matrice symétrique, matrice antisymétrique)**.**
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que M est *symétrique* si ${}^tM = M$, c'est-à-dire si $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

On dit que M est *antisymétrique* si ${}^tM = -M$, c'est-à-dire si $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$.

Ces notions ne figurent pas au programme de la B/L. Elles sont cependant si utiles et si importantes en mathématiques que les sujets de concours les réintroduisent fréquemment ; nous les utiliserons donc dans les exemples et les exercices, en essayant toutefois de ne traiter aucun résultat sur ces matrices comme exigible.

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique.

Exemple. La matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique car

$$^tB = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -B.$$

L'opération de transposition interagit agréablement avec les opérations précédemment définies, et on dispose d'un certain nombre d'identités permettant de grandement faciliter les calculs.

Proposition 32 (Linéarité de la transposition).
Soient $M, N \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$^t(M + \lambda N) = {}^tM + \lambda{}^tN.$$

Démonstration de la proposition 32 — Remarquons tout d'abord que les matrices $^t(M + \lambda N)$ et $^tM + \lambda{}^tN$ sont toutes deux de taille $n \times m$.
Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ et tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned} \left({}^t(M + \lambda N)\right)_{i,j} &= (M + \lambda N)_{j,i} \quad \text{par définition de la transposée} \\ &= M_{j,i} + \lambda N_{j,i} \quad \text{par définition de } M + \lambda N \\ &= ({}^tM)_{i,j} + \lambda({}^tN)_{i,j} \quad \text{par définition de la transposée} \\ &= \left({}^tM + \lambda{}^tN\right)_{i,j} \quad \text{par définition de } {}^tM + \lambda{}^tN, \end{aligned}$$

donc tous les coefficients de $^t(M + \lambda N)$ et de $^tM + \lambda{}^tN$ sont égaux, si bien que ces deux matrices sont égales. $\square$

Exemple. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice $M + {}^tM$ est symétrique puisque

$$^t(M + {}^tM) = {}^tM + {}^t({}^tM) = {}^tM + M = M + {}^tM,$$

et la matrice $M - {}^tM$ est antisymétrique puisque

$$^t(M - {}^tM) = {}^tM - {}^t({}^tM) = {}^tM - M = -(M - {}^tM).$$

Bien qu'un réflexe fréquent pour montrer qu'une matrice est symétrique soit de considérer son écriture explicite à l'aide de ses coefficients, il est souvent plus économique de calculer sa transposée à l'aide des propriétés de calcul formel que nous sommes en train d'énumérer.

Proposition 33 (Transposée d'un produit). Soient deux matrices $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors

$$^t(MN) = {}^tN\,{}^tM.$$

On prendra le temps de remarquer que ce produit n'est pas ${}^tM\,{}^tN$ mais bien ${}^tN\,{}^tM$:

Démonstration de la proposition 33 — Notons tout d'abord que les dimensions des matrices ${}^t(MN)$ et ${}^tN\,{}^tM$ sont les mêmes car ces deux matrices sont de taille $p \times m$.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et tout $j \in [\![1, m]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
\left({}^t(MN)\right)_{i,j} &= (MN)_{j,i} \quad \text{par définition de la transposée}\\
&= \sum_{k=1}^{n} M_{j,k} N_{k,i} \quad \text{par définition de } MN\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left({}^tM\right)_{k,j} \left({}^tN\right)_{i,k} \quad \text{par définition de la transposée}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left({}^tN\right)_{i,k} \left({}^tM\right)_{k,j}\\
&= \left({}^tN\,{}^tM\right)_{i,j} \quad \text{par définition de } {}^tN{}^tM.
\end{aligned}$$

On utilise ici la commutativité du produit de réels, propriété évidente mais que les étudiants ont parfois du mal à citer pendant une colle...

Ainsi, les matrices ${}^t(MN)$ et ${}^tN{}^tM$ sont de même taille et ont les mêmes coefficients : elles sont donc bien égales. □

Exemple. Si $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors ${}^tMM$ (qui existe puisque ${}^tM$ possède autant de colonnes que M possède de lignes) est symétrique car

$${}^t({}^tMM) = {}^tM \cdot {}^t({}^tM) = {}^tMM.$$

Exemple. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont symétriques et commutent, alors AB est symétrique puisque l'on a dans ce cas

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA = BA = AB.$$

La proposition 33 se généralise à des produits de davantage de matrices. Par exemple, si A, B et C sont des matrices telles que le produit ABC existe, c'est-à-dire telles que le nombre de colonnes de A (resp. de B) soit le nombre de lignes de B (resp. de C), alors on a

$${}^t(ABC) = {}^tC\,{}^tB\,{}^tA.$$

2 Inversibilité et inversion

Nous n'avons pas défini dans la section précédente de notion de *division* matricielle ; il ne s'agit pas d'un hasard car le produit matriciel, décidément subtil, ne s'inverse pas de façon aussi systématique que le produit réel. On va étudier dans cette section des conditions pour qu'une matrice soit inversible, ainsi que des méthodes pour calculer son inverse le cas échéant.

2.1 Principe et premières propriétés

De la même façon que l'on définit l'inverse $x^{-1} = \frac{1}{x}$ d'un réel non nul comme l'unique réel y vérifiant $yx = 1$, on définit l'inverse d'une matrice carrée de la façon suivante :

Définition-Proposition 34 (Inversibilité et inverse d'une matrice carrée, groupe linéaire)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est *inversible* s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$AB = BA = I_n.$$

La matrice B est alors unique, appelée *inverse de* A et notée A^{-1}. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelé *groupe linéaire d'indice* n et noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

La notion d'inversibilité n'a de sens que pour une matrice carrée ; en effet, si A n'est pas carrée, l'égalité $AB = BA$ ne peut être vérifiée pour de simples raisons de format.

Démonstration de la proposition 34 — On veut montrer que s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA = I_n$, alors cette matrice est unique. Supposons donc que $B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont telles que $AB = BA = I_n$ et $AC = CA = I_n$. En multipliant la relation $AC = I_n$ à gauche par B, on obtient $B(AC) = BI_n$ soit, par associativité du produit, $(BA)C = B$, c'est-à-dire $I_nC = B$, soit encore $C = B$, ce qu'il fallait démontrer. □

Le produit matriciel n'étant pas commutatif, il est toujours important lorsque l'on multiplie une égalité par une matrice de préciser si la multiplication a lieu par la gauche ou par la droite.

Exemple. La matrice $3I_n$ est inversible et on a $(3I_n)^{-1} = \frac{1}{3}I_n$ puisque $(3I_n)\left(\frac{1}{3}I_n\right) = \left(\frac{1}{3}I_n\right)(3I_n) = I_n$.

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On remarque que

$$AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = I_2,$$

si bien que A est inversible et que $A^{-1} = A$.

La définition 34 requiert à la fois que $AB = I_n$ **et** $BA = I_n$ pour une certaine matrice carrée B pour pouvoir conclure que la matrice A est inversible. Il est en fait suffisant que l'une ou l'autre des deux relations soit vérifiée ; nous énonçons ici ce résultat, que nous démontrerons dans le chapitre sur les applications linéaires.

Proposition 35. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = I_n$ ou $BA = I_n$. On a dans ce cas $B = A^{-1}$.

Exemple. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on remarque que

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

On en déduit grâce à la proposition 35 et sans avoir à calculer le produit « dans l'autre sens » que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous verrons dans quelques pages comment l'expression de A^{-1}, ici « parachutée », a été déterminée.

La définition 34 semble suggérer que certaines matrices ne sont pas inversibles. C'est évidemment le cas de la matrice nulle $0_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, puisque $0_n \cdot B = 0_n \neq I_n$ quelle que soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, mais c'est aussi le cas de certaines matrices non nulles dès que $n \geqslant 2$. Par exemple, la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible car quelle que soit $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

si bien que AB (dont la deuxième ligne est nécessairement nulle) ne peut être égale à I_2.

Le fait qu'une matrice non nulle ne soit pas nécessairement inversible constitue une différence importante entre l'anneau des matrices carrées et ceux des réels ou des complexes.

On dispose d'un certain nombre de propriétés de calcul utiles sur les inverses :

Proposition 36 (Propriétés de calcul sur les inverses)**.**
Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors :

(i) $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(ii) ${}^tA \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

(iii) $AB \in GL_n(\mathbb{R})$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Comme A est la transposée de ${}^tA$, on déduit du point (ii) que A est inversible si et seulement si ${}^tA$ l'est.

Démonstration de la proposition 36 — On vérifie les différents points un par un. Les produits considérés ci-dessous existent puisque toutes les matrices mobilisées sont de taille $n \times n$.

(i) Par définition, $AA^{-1} = I_n$, ce qui montre que A^{-1} satisfait la proposition 35 avec $B = A$, et donc que A^{-1} est inversible et telle que $(A^{-1})^{-1} = A$.

(ii) On a ${}^tA\,{}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n = I_n$ puisque I_n est diagonale (donc symétrique), donc ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

(iii) En utilisant l'associativité du produit matriciel, on peut écrire

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n,$$

donc AB satisfait la définition de l'inversibilité et admet $B^{-1}A^{-1}$ pour inverse. □

Par une récurrence facile, on peut montrer à l'aide de la proposition 36 que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est inversible et on a $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$. On convient de noter A^{-k} cette matrice.

On peut encore une fois généraliser la propriété donnant l'inverse d'un produit au cas de davantage de termes. Par exemple, si $A, B, C \in GL_n(\mathbb{R})$, alors $(ABC) \in GL_n(\mathbb{R})$ et

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}\,B^{-1}\,A^{-1}.$$

Remarque — *On peut à présent revenir sur la dénomination de* groupe linéaire *utilisée pour désigner l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'aspect* linéaire *sera abordé en détail dans le tome de deuxième année, mais la présentation des structures algébriques donnée page* **??** *permet déjà de remarquer que $GL_n(\mathbb{R})$, muni du produit et uniquement de cette opération, est un* groupe*, au sens où :*

- *Il est stable par produit d'après la proposition 36 qui assure (entre autres) que pour toutes $A, B \in GL_n(\mathbb{R})$ on a $AB \in GL_n(\mathbb{R})$.*
- *Il contient l'élément neutre I_n pour le produit matriciel.*
- *Pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA = I_n$ (c'est-à-dire l'inverse A^{-1} de A).*

Le fait que toutes les matrices non nulles ne soient pas inversibles pose problème lorsque l'on cherche à simplifier des calculs matriciels. En effet, lorsque $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, on peut sans difficulté simplifier une égalité du type $AB = AC$ (avec B et C deux matrices à n lignes) en la multipliant à gauche par A^{-1}, ce qui donne

$$AB = AC \implies A^{-1}AB = A^{-1}AC \implies B = C,$$

mais ce n'est malheureusement plus possible lorsque A n'est pas inversible : on a déjà vu page 13 que l'on pouvait tout à fait avoir $AX = 0$ avec $A \neq 0$ sans pour autant pouvoir « diviser par A » et écrire que $X = 0$, et on peut à l'envi exhiber des contre-exemples plus élaborés, comme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

qui vérifient $AB = AC$ et $A \neq 0$ sans que $B = C$.

On retiendra donc l'avertissement suivant :

!

Ne pas simplifier une égalité par une matrice non inversible

Si A, B et C sont trois matrices, il est en général faux d'affirmer que

$$AB = AC \implies B = C,$$

même lorsque $A \neq 0$.

C'est par contre vrai si A est inversible ; dans ce cas, on détaille la simplification en multipliant l'égalité $AB = AC$ à gauche par A^{-1}.

Dans le cadre de l'étude d'un système de n équations linéaires à n inconnues admettant pour écriture matricielle $AX = Y$ sur le modèle de la proposition 14 (avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$), la connaissance éventuelle de A^{-1} permet de résoudre le système en écrivant

$$AX = Y \iff X = A^{-1}Y.$$

L'implication directe est obtenue par multiplication à gauche par A^{-1}, l'implication indirecte par multiplication à gauche par A.

Exemple 37 (Application à la résolution de systèmes d'équations linéaires)**.** Le système de deux équations linéaires à deux inconnues

$$\begin{cases} 7x - 6y = 2 \\ 2x - 2y = 5 \end{cases}$$

se réécrit $AX = Y$, avec $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Admettons que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Nous serons capables de trouver nous-mêmes ces résultats dès la section suivante. Vous pouvez pour l'instant vous contenter de vérifier que multiplier A par la matrice ci-contre redonne bien I_2.

On a donc

$$AX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad X = A^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ -\frac{31}{2} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que le couple $(x, y) = \left(-13, -\frac{31}{2}\right)$ est l'unique solution du système.

Notons que le fait de disposer de A^{-1} permet de résoudre le système très rapidement lorsque ses termes de droite changent : par exemple, le système

$$\begin{cases} 7x - 6y = 20 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}$$

qui est toujours associé à la matrice A, admet pour unique solution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = A^{-1} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Un système de n équations à n inconnues associé à une matrice inversible est appelé *système de Cramer* ; un tel système admet donc toujours une unique solution. On étudiera en deuxième année le cas des systèmes linéaires qui ne sont pas de Cramer.

Le mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704 – 1752) est connu pour avoir fourni des solutions explicites aux systèmes qui portent son nom.

Dans les sections suivantes, on s'intéresse à la question de l'inversibilité des matrices carrées ainsi qu'à la détermination de leur inverse éventuel.

2.2 Le cas des matrices 2×2

Le problème de l'inversibilité et de l'inversion des matrices carrées de taille 2×2 est entièrement résolu par le théorème suivant :

Théorème 38 (Inversibilité et inversion des matrices 2×2).
Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

où a, b, c, d sont des réels. Alors la matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$, et dans ce cas son inverse A^{-1} s'écrit sous la forme

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

La quantité $ad - bc$ est appelée le *déterminant* de la matrice A et notée $\det(A)$.

Démonstration du théorème 38 — La preuve de ce théorème repose sur l'égalité parachutée

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0,$$

dont la démonstration, qui consiste en un calcul sans péripétie, est laissée au lecteur.

On a donc $(a + d)A - A^2 = (ad - bc)I_2$. En factorisant le terme de gauche de cette égalité par A, on obtient

$$A((a + d)I_2 - A) = (ad - bc)I_2. \tag{1}$$

- Supposons tout d'abord que $ad - bc \neq 0$. On peut alors diviser la relation (1) par $ad - bc$ et écrire

  $$A \cdot \frac{1}{ad - bc} ((a + d)I_2 - A) = I_2. \tag{2}$$

  En posant

  $$B := \frac{1}{ad - bc} ((a + d)I_2 - A) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

  on constate que (2) donne exactement $AB = I_2$, si bien que A est inversible et que $A^{-1} = B$ d'après la proposition 35.

Nous examinerons dans quelques pages des arguments moins artificiels. La présente démonstration a l'intérêt de mobiliser des manipulations matricielles hautement formatrices.

Remarquons que nous n'avons pas factorisé $(a+d)A - A^2$ par « $(a+d) - A$ » puisque ce terme, différence d'un réel et d'une matrice, n'aurait eu aucun sens. Dans les factorisations, on gardera constamment ce souci de mobiliser uniquement des expressions homogènes.

On appelle B la matrice candidate au statut d'inverse de A ; la noter d'emblée A^{-1} aurait été incorrect puisque l'on cherche précisément à prouver que A est inversible !

- Considérons à présent le cas où $ad - bc = 0$. L'égalité (1) se réécrit alors sous la forme

$$A((a+d)I_2 - A) = 0.$$

  On va prouver par l'absurde que A n'est pas inversible. Supposons donc que A est inversible et multiplions l'égalité ci-dessus à gauche par A^{-1} ; on obtient alors $(a+d)I_2 - A = 0$, c'est-à-dire que $A = (a+d)I_2$, soit encore

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}.$$

  En identifiant les coefficients, on trouve $a = b = c = d = 0$, soit $A = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse selon laquelle A est inversible. Ainsi, A n'est pas inversible, ce qui clôt la preuve. □

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible puisque son déterminant $\det(A) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3$ est non nul, et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible car son déterminant vaut $\det(A) = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0$.

On remarque que la condition $ad - bc = 0$ équivalente à la non-inversibilité de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ correspond au fait que les vecteurs lignes $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$ sont colinéaires (voir la proposition **??** du chapitre **??**)... mais aussi au fait que les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ le sont.

Nous donnerons dans la section suivante une généralisation de ce principe à des matrices carrées de taille quelconque.

2.3 Inversion des matrices carrées de taille quelconque

La situation se complique dans le cas de matrices carrées de taille 3×3 ou supérieure, pour lesquelles nous ne disposons pas de résultats aussi commodes que le théorème 38.

De tels résultats existent et sont au programme de certaines classes préparatoires scientifiques, mais ils impliquent des calculs lourds qui ne les rendent pas toujours utilisables en pratique.

2.3.1 Quelques critères

Commençons par donner quelques critères de non-inversibilité :

Proposition 39. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et tel que $AX = 0$, alors A n'est pas inversible.

On verra dans le tome de deuxième année que la condition donnée dans la proposition 39 est en fait une équivalence.

Démonstration de la proposition 39 — Supposons qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X \neq 0$ et tel que $AX = 0$. Si A était inversible, en multipliant l'égalité $AX = 0$ à gauche par A^{-1} on obtiendrait $X = 0$, ce qui est faux par hypothèse. Ainsi, A n'est pas inversible. □

Proposition 40 (Dépendance linéaire et non-inversibilité)**.**
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- Si l'une des lignes de A s'écrit comme combinaison linéaire des autres, alors A n'est pas inversible.
- Si l'une des colonnes de A s'écrit comme combinaison linéaire des autres, alors A n'est pas inversible.

On dit dans ce cas que les lignes de A entretiennent une relation de *dépendance linéaire* entre elles ; alternativement, on dit que les lignes forment une *famille liée.*

Démonstration de la proposition 40 — Écrivons A sous la forme

$$A = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \cdots & C_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} L_1 \\ \hline \cdots \\ \hline L_n \end{array}\right).$$

- Supposons qu'une colonne C_i s'exprime comme combinaison linéaire des autres, au sens où
$$C_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$$
avec $\lambda_j \in \mathbb{R}$ pour tout $j \neq i$.

Une fois encore, on verra dans le tome de deuxième année que la condition donnée est en fait une équivalence, et que A est inversible si et seulement si il n'existe aucune relation de dépendance linéaire entre ses lignes, ce qui équivaut à l'absence de relation de dépendance linéaire entre ses colonnes.

On a alors

$$A\begin{pmatrix}-\lambda_1\\ \vdots\\ -\lambda_{i-1}\\ 1\\ -\lambda_{i+1}\\ \vdots\\ -\lambda_n\end{pmatrix} = C_i - \sum_{j\neq i}\lambda_j C_j = 0;$$

en d'autres termes, le vecteur non nul

$$X := {}^t\begin{pmatrix}-\lambda_1 & \cdots & -\lambda_{i-1} & 1 & -\lambda_{i+1} & \cdots & -\lambda_n\end{pmatrix}$$

vérifie $AX = 0$. D'après la proposition 39, la matrice A n'est donc pas inversible.

- On pourrait raisonner de même dans le cas où les lignes de A entretiennent entre elles une relation de dépendance linéaire, en considérant le produit de A *à gauche* par un vecteur ligne non nul bien choisi et en adaptant la proposition 39 à un produit à gauche. Il est toutefois plus rapide et instructif de considérer la transposée de A. En effet, les lignes de A sont (après transposition) les colonnes de ${}^tA$, donc le fait qu'une ligne de A s'écrive comme combinaison linéaire des autres signifie qu'une colonne de ${}^tA$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres ; d'après le premier point, ${}^tA$ est alors non inversible, si bien que A l'est aussi d'après la proposition 36. □

Prenez un instant pour vérifier que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ on a

$$A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} x_j C_j.$$

On aura souvent recours à ce calcul par blocs très utile.

Le vecteur X est bien un vecteur colonne ; l'écriture transposée donnée ici a pour unique but d'économiser de l'espace.

Exemple. La matrice

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1 & 2\\ 2 & -3 & -1 & 5\\ 0 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

vérifie $C_3 = C_1 + C_2$, donc elle n'est pas inversible.

La relation de dépendance repérée se réécrit $C_1 + C_2 - C_3 = 0$, ce qui se traduit par le fait que

$$A\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = 0.$$

En particulier, une matrice carrée A possédant une ligne ou une colonne nulle (et qui s'écrit donc comme une combinaison linéaire à coefficients nuls des autres lignes ou colonnes) est non inversible.

> **Exemple.** La matrice
> $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
> possède une ligne nulle, donc elle n'est pas inversible.

Lorsque l'on se demande si une matrice est inversible, il est intéressant de passer quelques secondes à se demander s'il existe une relation de dépendance linéaire simple entre ses lignes ou ses colonnes. Il n'est cependant pas toujours aisé de repérer les relations existant au sein d'une matrice donnée : par exemple, il n'est pas tout à fait évident que la matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -5 & 1 & -2 \\ 4 & -19 & 3 \end{pmatrix}$$
vérifie les relations $L_3 = 7L_1 + 2L_2$ et $C_2 = 5C_1 - 13C_3$...

La proposition suivante fournit un critère plus positif :

Proposition 41 (Caractérisation de l'inversibilité)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous vecteurs colonnes $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on ait
$$AX = Y \iff X = BY.$$
Dans ce cas, on a $B = A^{-1}$.

Démonstration de la proposition 41 — On raisonne par double implication.

Supposons dans un premier temps que A soit inversible. Alors pour tous $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a
$$AX = Y \iff A = A^{-1}Y,$$
d'où la proposition avec $B = A^{-1}$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous vecteurs $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on ait l'équivalence
$$AX = Y \iff X = BY.$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

La famille des E_i est appelée la *base canonique de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et jouera un rôle prépondérant dans notre cours d'algèbre.

et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on note $C_i = BE_i$, si bien que $AC_i = E_i$ par hypothèse sur B.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on remarque en calculant le produit $C_i = BE_i$ que ce vecteur colonne est la i-ème colonne de B, si bien que

$$\begin{aligned} AB &= A\left(C_1 \middle| \; C_2 \middle| \cdots \middle| \; C_n\right) = \left(AC_1 \middle| \; AC_2 \middle| \cdots \middle| \; AC_n\right) \\ &= \left(E_1 \middle| \; E_2 \middle| \cdots \middle| \; E_n\right) = I_n. \end{aligned}$$

D'après la proposition 35, A est donc inversible et $A^{-1} = B$. □

La proposition 41 peut être reformulée en termes de systèmes d'équations linéaires :

Proposition 42 (Caractérisation de l'inversibilité).
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors A est inversible si et seulement s'il existe $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et tous $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ on ait

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = y_1 \\ a_{2,1}x_1 + \ldots + a_{2,n}x_n = y_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n = y_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = b_{1,1}y_1 + \ldots + b_{1,n}y_n \\ x_2 = b_{2,1}y_1 + \ldots + b_{2,n}y_n \\ \qquad\qquad \vdots \\ x_n = b_{n,1}y_1 + \ldots + b_{n,n}y_n. \end{cases}$$

Dans ce cas, on a $B = A^{-1}$.

Exemple. Cherchons à établir l'inversibilité et à calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour cela, on considère $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$ et on résout par substitution le système d'équations

$$\begin{cases} \qquad\qquad x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ \qquad x_2 + x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_2 - x_2 - x_3 \\ x_2 = y_3 - x_3 \\ x_3 = y_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = \qquad y_2 - y_3 \\ x_2 = -y_1 \qquad + y_3 \\ x_3 = \ \ y_1 \end{cases}$$

On en déduit que A est bien inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est toujours prudent de s'assurer du que l'expression de A^{-1} obtenue vérifie bien $A^{-1}A = I_3$. Nous vous recommandons fortement de consacrer quelques instants à ce calcul, y compris le jour du concours ; identifier et corriger une éventuelle erreur est généralement rapide, et donc rentable.

Notons que l'on a résolu le système « avec les moyens du bord » et en exploitant sa forme particulière propice à la substitution. On présentera bientôt une méthode de résolution plus systématique reposant sur la technique du pivot de Gauss.

Exemple. On souhaite établir l'inversibilité et calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On écrit pour cela que si $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ et $y_1, y_2, y_3 \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = y_1 \\ \qquad 2x_2 + x_3 = y_2 \\ \qquad\qquad - x_3 = y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 - 5x_2 - x_3 \\ 2x_2 = y_2 - x_3 \\ x_3 = -y_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{5}{2}(y_2 + y_3) + y_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = -y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{5}{2}y_2 - \frac{3}{2}y_3 \\ x_2 = \qquad \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 \\ x_3 = \qquad\qquad\quad - y_3 \end{cases}$$

donc A est bien inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

On n'affirme pas que les systèmes d'équations linéaires considérés sont vérifiés (ils n'ont aucune raison de l'être puisque les x_i et les y_j sont quelconques !), mais on ne fait que les *comparer* entre eux. L'utilisation du symbole d'équivalence logique $\Leftrightarrow$ est donc tout à fait adaptée ici.

2.3.2 Pivot de Gauss et inversibilité

La méthode que nous allons présenter dans cette section est sans doute la procédure calculatoire la plus importante de toute l'algèbre linéaire. Il s'agit d'un algorithme qui n'utilise que des opérations très simples (des permutations, des additions et des multiplications par des réels de lignes ou de colonnes) pour modifier des matrices sans changer certaines de leurs caractéristiques.

On a déjà croisé le « prince des mathématiciens » Karl Friedrich Gauss. Il n'est cependant pas l'inventeur de l'algorithme décrit ici, qui était déjà connu des mathématiciens chinois à l'origine des Neuf Chapitres sur l'art mathématique. *Gauss en a toutefois donné une formulation moderne, précisée par la suite par le géodésien allemand Wilhem Jordan.*

Définition 43 (Opérations élémentaires)**.** On appelle *opération élémentaire sur les lignes d'une matrice* une opération dont la forme est l'une des trois suivantes :

- *Permutation* : échange de deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$).
- *Dilatation* : multiplication d'une ligne par un scalaire non nul ($L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$).
- *Transvection* : addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, avec $j \neq i$).

On appelle *opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice* une opération dont la forme est l'une des trois suivantes :

- *Permutation* : échange de deux colonnes ($C_i \leftrightarrow C_j$).
- *Dilatation* : multiplication d'une colonne par un scalaire non nul ($C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$).
- *Transvection* : addition d'un multiple d'une colonne à une autre colonne ($C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, avec $j \neq i$).

Chacune des opérations élémentaires est réversible : ainsi, on peut annuler l'effet de la permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ en effectuant à nouveau cette opération, celui de la dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ en réalisant la dilatation $L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i$, et celui de la transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ en réalisant la transvection $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$. La formalisation matricielle de ce fait est la suivante :

Proposition 44 (Inversibilité des opérations élémentaires)**.** Toute opération élémentaire sur les lignes (resp. les colonnes) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se traduit par une multiplication à gauche (resp. à droite) par une matrice inversible de $GL_n(\mathbb{R})$.

Démonstration de la proposition 44 — La preuve de la proposition peut être trouvée en suivant le code ci-contre. On pourra remarquer à titre d'exemple que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} a-3c & b-3d \\ c & d \end{pmatrix}$$

est la matrice obtenue en appliquant à A la transvection $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2$. □

On en déduit la propriété suivante, qui est au fondement de l'algorithme du pivot :

Proposition 45 (Opérations élémentaires et inversibilité)**.** Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes préservent le caractère inversible ou non-inversible d'une matrice carrée.

Démonstration de la proposition 45 — D'après la proposition 44, il suffit de montrer que la multiplication à gauche ou à droite par une matrice inversible préserve l'inversibilité d'une matrice donnée, c'est-à-dire que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et si $P \in GL_n(\mathbb{R})$, alors il est équivalent de dire que A est inversible, que PA l'est et que AP l'est.

Donnons-nous donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$.

Si A est inversible, alors PA est inversible en tant que produit de matrices inversibles d'après la proposition 36. Réciproquement, si PA est inversible, alors $A = P^{-1}(PA)$ est inversible comme produit de matrices inversibles par cette même proposition. Ainsi, A est inversible si et seulement PA l'est.

En appliquant cette équivalence à la matrice PA et à la matrice inversible P^{-1}, on voit que PA est inversible si et seulement si $P^{-1}(PA)$ l'est, c'est-à-dire si A l'est, ce qui clôt la preuve. □

Notation 46 (Équivalence de matrices carrées)**.** Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on écrit $A \sim B$ (et on dit que A est *équivalente à* B) si l'on peut transformer A en B par un certain nombre d'opérations élémentaires successives sur les lignes ou les colonnes.

On spécifie souvent les opérations permettant de transformer A et B en-dessous du signe d'équivalence, en écrivant par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons à présent présenter l'algorithme du pivot, dont le principe est de transformer une matrice carrée en une matrice triangulaire par des opérations élémentaires afin d'en étudier l'inversibilité.

Méthode 47 (Algorithme du pivot de Gauss)**.**
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La philosophie générale de l'algorithme consiste à utiliser les termes non nuls d'une ligne pour « vider » les lignes suivantes sous la diagonale.

1. On se ramène, à l'aide de permutations de lignes, au cas où $a_{1,1} \neq 0$. Si ce n'est pas possible, c'est que la première colonne est nulle : on passe alors directement à l'étape 4.
2. On multiplie la première ligne par $\frac{1}{a_{1,1}}$. On obtient alors une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$
On appelle *pivot* le coefficient 1 en position $(1,1)$ de cette matrice.
3. À l'aide de transvections, on « vide » la première colonne en dessous du pivot : par exemple, pour supprimer le terme $a_{2,1}$ on effectue l'opération $L_2 \longleftarrow L_2 - a_{2,1}L_1$, ce qui aboutit à
$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$
puis on continue jusqu'à obtenir une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & * & \ldots & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & * \cdots * \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix},$$
où la matrice A' est de taille $(n-1) \times (n-1)$.

Une fois l'étape 2 effectuée, la première ligne n'est plus modifiée, et on l'utilise dans l'étape 3 pour transformer les autres lignes, d'où l'idée de « pivot » immobile autour duquel le système change.

À l'issue des trois premières étapes, on a donc obtenu une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \delta_1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$
où δ_1 vaut 0 (si la première colonne de A était nulle) ou 1 (sinon).

4. On retourne à l'étape 1, en cherchant cette fois à agir sur la matrice A' par des opérations qui portent exclusivement sur les lignes de A autres que la ligne 1, pour « vider » la deuxième colonne de la matrice obtenue. À l'issue de cette étape, on obtient une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} \delta_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \delta_2 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & A'' & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix},$$
où $\delta_1, \delta_2 \in \{0, 1\}$ et où A'' est de taille $(n-2) \times (n-2)$.

Insistons : on ne peut plus utiliser la ligne 1 dans la suite de l'algorithme, sous peine de changer la première colonne de la matrice en cours de modification. On vide donc la deuxième colonne sous la diagonale en utilisant le pivot situé sur la deuxième ligne.

5. On réitère cette opération jusqu'à obtenir une matrice triangulaire supérieure de la forme
$$\begin{pmatrix} \delta_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \delta_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \delta_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \delta_n \end{pmatrix},$$
avec $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \{0, 1\}$.

Pour vider la troisième colonne sous la diagonale, on utilise le pivot situé sur la troisième ligne, et ainsi de suite.

6. La matrice triangulaire ci-dessus, obtenue à partir de A par des opérations élémentaires sur les lignes, est inversible si et seulement si A l'est.

Pour pouvoir pleinement exploiter la méthode du pivot, on doit pouvoir statuer aisément sur l'inversibilité de la matrice obtenue au terme de l'algorithme. On dispose pour cela d'un critère très simple :

Proposition 48 (Inversibilité des matrices triangulaires). Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.

La preuve ci-dessous peut être sautée en première lecture ; nous vous conseillons de vous familiariser avec le mécanisme du pivot grâce à la lecture des exemples donnés dans cette section avant de lire cette démonstration.

Démonstration de la proposition 48 — Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire. On suppose que A est triangulaire *inférieure* ; si A est triangulaire supérieure, il suffit de considérer ${}^tA$, qui est triangulaire inférieure et a les mêmes coefficients diagonaux que A, et de se souvenir du fait que A et ${}^tA$ ont la même inversibilité.

Supposons tout d'abord que tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls et appliquons à A l'algorithme du pivot. On remarque qu'à chaque étape, les transvections appliquées suffisent à vider la colonne concernée en-dessous de la diagonale tout en laissant inchangés tous les autres coefficients de la matrice, et qu'aucune permutation de lignes n'est nécessaire : ainsi, la matrice obtenue au terme de l'algorithme est elle aussi triangulaire inférieure (en plus d'être triangulaire supérieure). On remarque aussi que tous les termes diagonaux de la matrice sont transformés en 1. Au terme de l'algorithme, on a donc montré que

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n,$$

or I_n est inversible donc A l'est elle-même d'après la proposition 45.

Supposons à présent qu'un coefficient diagonal de A est nul et notons i_0 le plus petit entier $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{i_0,i_0} = 0$. Exécutons l'algorithme du pivot jusqu'à tomber sur un coefficient diagonal nul : les $i_0 - 1$ premières colonnes peuvent être vidées sous la diagonale comme précédemment par des dilatations et des transvections. Le i_0-ième coefficient diagonal étant

Appliquez l'algorithme du pivot à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

pour vous convaincre du bien-fondé de ces affirmations !

nul, on interrompt alors l'algorithme, ce qui nous permet de montrer que

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} i_0^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ \downarrow \end{array} & \\ A \sim & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & * \end{pmatrix} & \leftarrow i_0^{\text{ème}} \text{ ligne} \end{array}$$

Appliquez cette fois l'algorithme du pivot à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

pour vous en convaincre.

où la matrice de droite est triangulaire inférieure (c'est-à-dire que les coefficients non représentés au-dessus de sa diagonale sont nuls). Comme cette dernière matrice contient une ligne nulle, elle n'est pas inversible, donc A ne l'est pas non plus d'après la proposition 45, ce qui clôt la preuve. $\square$

Exemple. Les matrices triangulaires

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & -\pi & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

sont inversibles puisque leurs coefficients diagonaux sont tous non nuls. Les matrices triangulaires

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ne sont quant à elles pas inversibles puisqu'elles possèdent (au moins) un coefficient diagonal nul.

Astuce réservée aux matrices triangulaires

La proposition 48 ne traite que du cas des matrices triangulaires ! Il est tout à fait possible pour une matrice carrée non triangulaire d'être inversible en ayant un ou plusieurs coefficients diagonaux nuls.

C'est par exemple le cas de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, qui est sa propre inverse.

L'intérêt de la méthode du pivot apparaît alors dans toute sa clarté : après avoir transformé une matrice A en une matrice triangulaire par des opérations élémentaires, on peut directement lire l'inversibilité de A sur les coefficients diagonaux de ladite matrice.

Exemple 49 (Étude de l'inversibilité d'une matrice par la méthode du pivot)**.** On souhaite savoir si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible.

Le coefficient d'indice $(1, 1)$ étant nul, on permute les lignes L_1 et L_2 :

$$A \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On aurait pu permuter les lignes L_1 et L_3, mais il aurait alors fallu multiplier la première ligne par $\frac{1}{4}$ à l'étape suivante pour avoir un pivot égal à 1, ce qui aurait été plus long.

On « vide » ensuite la première colonne. Seul le coefficient d'indice $(3, 1)$ est à supprimer ; on réalise donc l'opération $L_3 \longleftarrow L_3 - 4L_1$, qui donne

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Le terme d'indice $(2, 2)$ de la matrice obtenue est non nul ; on ramène ce pivot à 1 en multipliant la deuxième ligne par $\frac{1}{6}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{6} L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Par les opérations successives $L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2$ et $L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3$, on aboutit enfin à

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 6L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a ainsi

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice triangulaire ci-dessus est inversible puisque tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc A l'est aussi.

En pratique, on écrit seulement les chaînes d'équivalences en faisant figurer les opérations élémentaires réalisées :

Exemple. Cherchons à statuer sur l'inversibilité de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

On peut écrire

$$A \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or la matrice triangulaire obtenue au terme de l'algorithme est non inversible puisqu'elle possède un coefficient diagonal nul, si bien que A n'est pas inversible.

Il est important d'expliciter **toutes** les opérations élémentaires effectuées sur la matrice lors de la réalisation d'un pivot de Gauss. Un tel scrupule facilite la lecture du raisonnement par un éventuel correcteur ainsi que votre propre relecture, et il vous permet de revenir sur vos pas sans avoir à repartir à zéro si vous constatez une erreur – ce qui sera sans doute le cas bien souvent dans les premiers temps !

L'algorithme présenté dans la méthode 47 est rigide et conduit à obtenir une matrice triangulaire supérieure d'un type bien précis (dont la diagonale est composée de 0 et de 1), ce qui n'est pas nécessaire pour lire son inversibilité. L'existence de certains raccourcis n'aura pas échappé au lecteur attentif, qui est encouragé à en faire usage uniquement après en avoir bien compris les limites de validité :

- Il n'est pas nécessaire de transformer en 1 le dernier coefficient diagonal de la matrice triangulaire obtenue au terme de l'algorithme puisque ce coefficient n'a pas vocation à servir de pivot.

- De façon générale, il n'est pas obligatoire de transformer en 1 les pivots successifs utilisés lors de l'algorithme. Il s'agit même d'une opération contre-productive lorsqu'un pivot est en amont d'un coefficient qui lui est égal ou opposé : par exemple, lors de l'étude de la matrice
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$
l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ est bien plus pertinente que les opérations successives $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ qui font apparaître des fractions indésirables.

- On peut arrêter l'algorithme dès lors qu'il est impossible, à une étape donnée, d'obtenir un pivot non nul (ce qui correspond au fait que la sous-matrice que l'on manipule possède une première colonne nulle) : en effet, on sait alors que l'un des coefficients diagonaux de la matrice triangulaire obtenue au terme de l'algorithme sera nul, et donc que la matrice de départ est non inversible. Par exemple, l'algorithme appliqué à la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
dont la première colonne est déjà « vidée », amène à considérer directement la sous-matrice
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
dont la première colonne est nulle. On ne peut donc pas obtenir de deuxième pivot non nul, ce qui implique que A est non inversible.

On pouvait aussi remarquer directement sur la matrice A la relation de dépendance linéaire $C_2 = 2C_1$, qui implique que A n'est pas inversible.

- La proposition 45 implique qu'il est tout à fait possible de réaliser des opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice lorsque celles-ci permettent de raccourcir l'algorithme. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ peut se réduire très rapidement à une matrice triangulaire en écrivant

$$A \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Il est possible de faire figurer simultanément plusieurs opérations élémentaires sous un même signe d'équivalence pour ne pas avoir à écrire trop d'étapes différentes. Par exemple, on peut réaliser en une seule étape toutes les transvections permettant de « vider » une colonne donnée. Ainsi, on peut par exemple écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi effectuer en une seule étape des opérations portant sur des ensembles disjoints de lignes, comme la permutation $L_1 \leftrightarrow L_2$ et la transvection $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$.

On s'interdira par contre de réaliser simultanément une opération transformant une ligne et une transvection utilisant cette ligne, comme par exemple $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ (qui change L_1) et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ (qui utilise L_1 sous sa nouvelle forme sans que cette dernière soit présente sous nos yeux). On s'abstiendra aussi de manipuler en une seule étape les lignes et les colonnes.

- Lorsque $\mu \neq 0$, il est possible de réaliser une opération du type $L_i \leftarrow \mu L_i + \lambda L_j$, qui est la combinaison de la dilatation $L_i \leftarrow \mu L_i$ et de la transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. Il est néanmoins nécessaire de s'assurer du fait que μ est bien non nul, sous peine de compromettre la validité de la méthode. Par exemple, on peut soumettre

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aux opérations élémentaires $L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_1$ pour « vider » sa première colonne sans avoir à se ramener à un pivot égal à 1 : on écrit alors

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

En revanche, la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

ne peut être réduite à l'aide de l'opération $L_2 \leftarrow aL_2 - L_1$ que lorsque $a \neq 0$. Il importe alors de distinguer explicitement les deux cas $a \neq 0$ et $a = 0$ lors de l'étude de cette matrice, ou bien de se ramener à un pivot non nul par l'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$ pour mener à bien l'algorithme classique.

De fait, si $a = 0$ on peut vérifier que la matrice est inversible, mais que l'opération illicite $L_2 \leftarrow aL_2 - L_1$ la transforme en une matrice non inversible.

- Lorsque cela est possible, il est avantageux de recourir à des permutations de lignes ou de colonnes pour se ramener à une forme « plus triangulaire » sans avoir à faire de calcul. Par exemple, on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'exemple suivant combine plusieurs des raccourcis que nous venons de décrire :

Exemple. Étudions l'inversibilité de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 - 2L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire obtenue étant tous non nuls, elle est inversible, donc A l'est aussi.

Insistons cependant sur le fait qu'un algorithme du pivot correctement mené, même s'il mobilise de nombreuses étapes, ne sera jamais pénalisé, et qu'il importe bien davantage de savoir réaliser un pivot sans erreur que de savoir le faire en peu d'étapes. En d'autres termes : ne cherchez pas à gagner de temps avant d'être parfaitement à l'aise avec la méthode du pivot !

2.3.3 Inversion par la méthode de Gauss-Jordan

On sait à présent déterminer si une matrice donnée est inversible. Une question naturelle est celle du calcul de son inverse le cas échéant ; là encore, la réponse réside dans une application de l'algorithme du pivot de Gauss, sous une forme cependant plus poussée et légèrement plus rigide que précédemment : la *méthode d'élimination de Gauss-Jordan*.

La terminologie n'est pas unique, et certains auteurs appellent *méthode d'élimination de Gauss-Jordan* la méthode du pivot présentée dans la section précédente... ainsi que celle présentée ici. Pour fixer les idées dans le cadre du cours, on réservera l'appellation *méthode de Gauss-Jordan* aux méthodes utilisant une matrice augmentée.

Méthode 50 (Méthode d'élimination de Gauss-Jordan).
Soit $A = (a_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{R})$. Pour calculer A^{-1}, on suit le protocole ci-dessous :

1. On forme la matrice augmentée

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccc|cccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. On effectue sur cette matrice augmentée des opérations élémentaires **uniquement sur les lignes** pour transformer la partie gauche de la matrice en une matrice triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale (ce qui est toujours possible puisque A est inversible). La partie droite de la matrice subit aussi les transformations réalisées, et la matrice augmentée obtenue à l'issue de cette étape est de la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & * & \cdots & * & * & \cdots\cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots\cdots & * \end{array}\right).$$

3. On effectue ensuite des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée pour « vider » toutes les colonnes de la matrice de gauche au-dessus de sa diagonale, jusqu'à transformer cette matrice en I_n. On entreprend pour cela de « vider » par des transvections la dernière colonne de la matrice de gauche à l'aide de sa dernière ligne, puis de

« vider » la colonne $n-1$ à l'aide de la ligne $n-1$, et ainsi de suite. La partie droite de la matrice subit une fois encore les transformations réalisées, et la matrice augmentée obtenue à l'issue de cette étape est de la forme

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & * & \cdots & * & * & \cdots\cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots\cdots & * \end{array}\right).$$

L'inverse A^{-1} de A est alors le bloc de droite dans la matrice augmentée ci-dessus.

Insistons : l'ordre dans lequel on s'intéresse aux colonnes de la matrice de gauche dans cette troisième étape est l'ordre inverse de celui adopté dans la deuxième étape.

Il peut sembler miraculeux que la matrice obtenue grâce à la méthode relativement simple décrite ici soit exactement A^{-1}. L'explication heuristique de ce fait est pourtant simple : on a réalisé sur les lignes de A des opérations permettant de transformer A en la matrice neutre I_n, c'est-à-dire de « neutraliser » (c'est-à-dire de « défaire ») la matrice A. En appliquant ces même opérations à la matrice neutre I_n, on obtient alors l'inverse de la matrice A, c'est-à-dire A^{-1}.

Plus formellement, on rappelle que les opérations élémentaires sur les lignes se traduisent par une multiplication à gauche par des matrices inversibles (c'est le résultat de la proposition 44). En notant $P_1, ..., P_r$ les matrices des opérations élémentaires successives sur les lignes utilisées pour transformer A en l'identité, on obtient donc

$$P_r P_{r-1} \cdots P_1 A = \mathrm{I}_n, \quad \text{soit} \quad (P_r P_{r-1} \cdots P_1)\, A = \mathrm{I}_n.$$

La proposition 35 montre alors que $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et que son inverse est $A^{-1} = P_r P_{r-1} \cdots P_1$. Or la matrice obtenue en appliquant les mêmes opérations élémentaires aux lignes de I_n est

$$P_r P_{r-1} \cdots P_1 I_n = P_r P_{r-1} \cdots P_1 = A^{-1},$$

d'où le résultat.

Un raisonnement similaire (avec des multiplications à droite) montre que l'on peut adapter la méthode présentée ici à des opérations sur les colonnes de A, pour peu que l'on forme la matrice augmentée en « empilant verticalement » les matrices A et I_n, mais il n'aboutit pas si l'on panache les opérations sur les lignes et sur les colonnes. Dans la suite, nous nous bornerons à appliquer la méthode présentée ici et nous restreindrons donc à des opérations sur les lignes.

Avant d'illustrer la méthode 50 sur des exemples, notons qu'elle a pour point de départ une matrice $A \in GL_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire une matrice dont on sait *a priori* qu'elle est inversible. De fait, la méthode n'aboutit que lorsque A est effectivement inversible, puisqu'elle suppose de transformer A en une matrice triangulaire inversible par des opérations élémentaires : on peut donc faire d'une pierre deux coups et obtenir simultanément l'inversibilité de A et l'expression de A^{-1} au fil des manipulations sur la matrice augmentée.

Exemple 51 (Inversion d'une matrice par la méthode de Gauss-Jordan)**.** On désire établir l'inversibilité de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

et calculer A^{-1}. Pour cela, on forme la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

et on lui applique la transvection $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ pour obtenir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

puis l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ pour trouver

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

On a ainsi transformé A en une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls par des opérations élémentaires, ce qui implique que A est inversible. On poursuit alors la réduction de la matrice augmentée en réalisant l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$, ce qui donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right).$$

On a donc trouvé l'expression de A^{-1} :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On prend comme d'habitude le temps de vérifier que

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

pour valider le calcul effectué.

Remarquons que la méthode de Gauss-Jordan est moins permissive que l'algorithme du pivot :

- Elle ne permet que de faire des opérations sur les lignes (voir la note page 52).
- La méthode n'aboutit qu'après la transformation complète de la matrice de départ en la matrice identité, ce qui demande davantage d'opérations que la méthode du pivot étudiée dans la section précédente. Cela impose notamment d'obtenir des pivots égaux à 1, ce qui implique fréquemment de diviser par des facteurs rendant les coefficients de la matrice de droite plus difficiles à manipuler.

De façon générale, la complexité des calculs effectués sur la matrice de droite a tendance à augmenter à mesure que la matrice de gauche prend une forme plus simple.

En revanche, il est encore possible d'opérer des échanges de lignes bien choisis pour réduire le nombre d'étapes nécessaires à l'obtention de I_n dans la partie gauche de la matrice.

Contrairement à l'algorithme du pivot, la méthode de Gauss-Jordan ne peut être rédigée à l'aide de symboles d'équivalence. On propose dans l'exemple suivant un modèle de rédaction peu élégant mais tout à fait acceptable.

En effet, s'il n'est pas erroné d'utiliser des symboles d'équivalences pour passer d'une matrice augmentée à la suivante au fil de la méthode, on ne peut en toute rigueur déduire de la suite d'équivalences (qui pourrait tout aussi bien être obtenue par des opérations sur les colonnes) que le bloc de droite dans la matrice augmentée finale est l'inverse de la matrice initiale. Ce scrupule, qui relève du pinaillage, peut ne pas être partagé par votre professeur, dont nous vous invitons à adopter les notations.

Exemple. On cherche à établir l'inversibilité de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et à calculer son inverse.

On utilise pour cela la méthode de Gauss-Jordan, qui consiste à transformer

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \underset{L_1 \leftarrow \frac{L_1}{3}}{\text{en}} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

puis en $\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 3 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$, en $L_2 \leftarrow \frac{3}{2}L_2$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$,

en $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$, en $L_3 \leftarrow -L_3$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$,

en $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{9}{2}L_3$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ et enfin en $L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3}L_2$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$,

ce qui montre que A est inversible et que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La plupart des exemples traités dans cette section portent sur des matrices de taille 3×3 ; la méthode de Gauss-Jordan permet cependant d'inverser des matrices carrées de n'importe quelle taille, comme nous le verrons en exercice. Rappelons toutefois que pour des matrices de taille 2×2, un critère et une formule explicite sont fournis par le théorème 38.

2.4 Pivot de Gauss et systèmes linéaires

On l'a vu, connaître l'inverse d'une matrice carrée A donnée permet de résoudre aisément tout système linéaire $AX = Y$ de vecteur des inconnues X, dont l'unique solution est alors le vecteur $X = A^{-1}Y$. Cependant, calculer A^{-1} par la méthode de Gauss-Jordan nécessite un nombre d'opérations relativement élevé, et il est possible de gagner du temps en remarquant qu'un système d'équations linéaires de forme triangulaire se résout aisément de proche en proche :

Exemple. Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ \phantom{2x + {}} y + z = 1 \\ \phantom{2x + y + {}} z = 1 \end{cases}$$

se résout en lisant les informations depuis la dernière ligne : il équivaut au fait que $z = 1$, que $y = 1 - z = 0$ et que $x = \frac{1}{2}(2 - y - z) = \frac{1}{2}$.

Remarque — *On aurait d'ailleurs pu démontrer qu'une matrice triangulaire à coefficients diagonaux non nuls est inversible en utilisant la proposition 42 et en remarquant que le système linéaire associé à une telle matrice peut toujours se résoudre de proche en proche pour amener une unique solution.*

La méthode du pivot nous fournit alors une technique générale de résolution des systèmes de Cramer :

Rappelons qu'un système de Cramer est un système de n équations à n inconnues associé à une matrice inversible.

Méthode 52 (Résolution d'un système de Cramer par le pivot de Gauss)**.** Supposons la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. On cherche à résoudre le système $AX = Y$, où

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \text{est fixé et où} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

est le vecteur des inconnues. Pour ce faire :

1. On transforme le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & y_2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,n}x_n & = & y_n, \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S})$$

en un système triangulaire de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} b_{1,1}x_1 + \dots + & b_{1,n-1}x_{n-1} & + & b_{1,n}x_n & = & z_1 \\ & \cdots & & & & \\ & b_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & b_{n-1,n}x_n & = & z_{n-1} \\ & & & b_{n,n}x_n & = & z_n \end{array} \right. \qquad (\mathcal{T})$$

par les mêmes opérations élémentaires sur les lignes que celles utilisées pour transformer la matrice A en une matrice triangulaire dans l'algorithme du pivot de Gauss « classique » (ce qui transforme aussi les termes de droite du système).

2. On résout le système $(\mathcal{T})$ de proche en proche en partant de la dernière ligne.

La validité de la méthode provient du fait que tout opération élémentaire sur les lignes d'un système le transforme bien en un système équivalent (au sens logique) puisque cette opération, comme on l'a vu, est inversible, c'est-à-dire réversible.

Exemple. On cherche à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0. \end{cases} \qquad (\mathcal{S})$$

Il suffit pour cela d'écrire

$$(\mathcal{S}) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ y - z = -1 \\ y + z = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} 2x + y + 2z = 1 \\ y - z = -1 \\ 2z = 1. \end{cases}$$

Le système triangulaire obtenu se résout de proche en proche : on obtient $z = \frac{1}{2}$, puis $y = -\frac{1}{2}$, et enfin $x = \frac{1}{4}$. L'unique solution du système $(\mathcal{S})$ est donc le vecteur

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Remarque — *Nous verrons en deuxième année que dans le cas où A n'est pas inversible (notamment lorsqu'elle n'est pas carrée, c'est-à-dire lorsque le nombre d'équations n'est pas égal au nombre d'inconnues), il n'est pas possible de transformer le système en un système triangulaire résoluble de proche en proche. Il est alors possible que le système n'admette pas de solution, ou bien qu'il en admette une infinité.*

Terminons cette section par deux remarques :

- Comme dans la méthode de Gauss-Jordan, seules les opérations sur les lignes sont autorisées lors de la manipulation d'un système d'équations linéaires, puisqu'elles seules préservent les égalités exprimées par le système.
- Afin de limiter des calculs laborieux, il est bon de savoir articuler astucieusement l'algorithme du pivot à des méthodes moins rigides et parfois plus efficaces, comme la substitution ou la combinaison d'équations dans un ordre qui n'est pas celui donné par le pivot.

Exemple. Le système

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

se résout presque instantanément et sans recours au pivot en remarquant que sa première ligne donne $y = 2x$ et que sa deuxième ligne, compte tenu de cette information, devient $3x = 1$. Ainsi :

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x \\ 3x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Exemple. Cherchons à résoudre le système

$$\begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \\ 5x + y + 2z = 4. \end{cases} \qquad (\mathcal{S})$$

La première étape du pivot de Gauss donne

$$(\mathcal{S}) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} 3x - 2y - z = 0 \\ 4y + 4z = 0 \\ 5x + y + 2z = 4. \end{cases}$$

Plutôt que de réaliser la transvection antipathique $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{5}{3}L_1$, on peut alors procéder par substitution en remarquant que la deuxième ligne du système obtenu donne $y = -z$, si bien que

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} 3x + 2z - z = 0 \\ y = -z \\ 5x - z + 2z = 4. \end{cases}$$

En substituant $-z$ à y, on peut réécrire la première ligne du système ci-dessus comme $z = -3x$, et sa troisième ligne comme $z = 4 - 5x$, d'où

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} z = -3x \\ y = -z \\ z = 4 - 5x. \end{cases}$$

Attention, il s'agit bien de *combiner* les deux méthodes et non de se reposer uniquement sur la méthode de substitution : malgré le (léger) coût d'apprentissage qu'elle implique, la méthode du pivot s'avère bien plus puissante que la substitution pour résoudre des systèmes imposants.

Or l'équation $-3x = 4-5x$ admet $x = 2$ pour unique solution, d'où

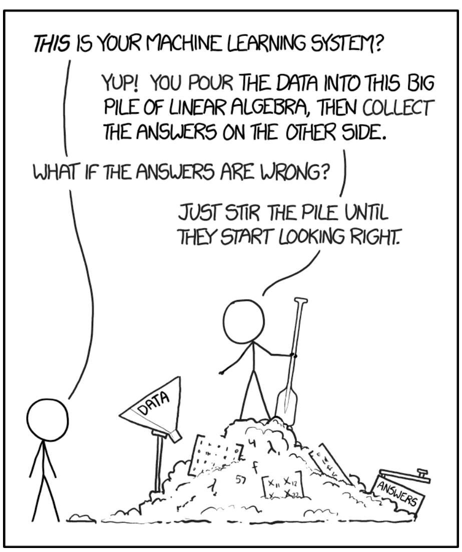
$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \\ z = -6. \end{cases}$$

2.5 Récapitulatif : les variantes de la méthode du pivot

Le tableau ci-dessous résume les différentes méthodes utilisées pour traiter les problèmes évoqués dans cette section : la détermination de l'inversibilité d'une matrice, le calcul de son inverse et la résolution d'un système linéaire.

	Inversibilité	Inversion	Systèmes linéaires
Algorithme	Pivot	Gauss-Jordan	Pivot
Opérations sur les lignes	✓	✓	✓
Opérations sur les colonnes	✓	✗	✗
Connecteur utilisé	$\sim$	Verbal	$\iff$

Attention, en particulier, à ne pas relier deux matrices par le signe $\iff$ qui marque une équivalence *logique* – pas davantage, d'ailleurs, que par le signe $=$ si les deux matrices ne sont pas *égales* mais simplement *équivalentes* !



L'apprentissage automatique, ou machine learning*, est un domaine de l'intelligence artificielle qui étudie la façon dont on peut pousser un programme à « tirer des enseignements des données » sans être explicitement guidé par un utilisateur humain. L'un de ses outils principaux, le* réseau de neurones artificiel*, repose sur la calibration d'une matrice de transformation selon le principe décrit dans la vidéo ci-dessous :*

Exercices du chapitre 18

The Matrix is a system, Neo. That system is our enemy.

— *Morpheus,* The Matrix

Solutions des exercices page 73.

1 Compréhension du cours

Exercice 1 (Calculer des sommes et des produits de matrices). Pour chacun des couples de matrices suivantes, dire si la somme $A+B$, le produit AB et le produit BA existent, et les calculer le cas échéant.

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(iii) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(iv) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = A$.

(v) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(vi) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (Donner le format de matrices). Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donner le format des matrices suivantes :

(i) ${}^tA$

(ii) ${}^tAA$

(iii) $A\,{}^tA$

(iv) AY

(v) ${}^tXA$

(vi) ${}^tXAY$

Exercice 3 (Raisonner sur des coefficients). Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A et B sont triangulaires supérieures, alors $A+B$ et AB le sont.

   Indication : on rappelle qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si et seulement si $M_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i > j$.

2. Montrer que si A et B sont triangulaires inférieures, alors $A+B$ et AB le sont.

Exercice 4 (Réaliser des calculs sur les coefficients). Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer les propositions suivantes :

(i) $\mathrm{Tr}\left({}^tA\right) = \mathrm{Tr}(A)$.

(ii) $\mathrm{Tr}(A + \lambda B) = \mathrm{Tr}(A) + \lambda\,\mathrm{Tr}(B)$ (propriété de *linéarité* de la trace).

(iii) $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Exercice 5 (Résoudre un système d'équations linéaires). Déterminer explicitement les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commutant avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (Exhiber deux matrices vérifiant une propriété). Donner deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Exercice 7 (Utiliser la formule du binôme). Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -9 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = A + I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 9 & -9 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. En déduire l'expression de A^k pour tout $k \geqslant 0$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du binôme, exprimer B^n en fonction de I_3, A et A^2, puis en donner une expression explicite.

Exercice 8 (Inverser des matrices de taille 2×2). Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles, et calculer leur inverse le cas échéant :

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(ii) $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(iii) $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(iv) $D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

(v) $M = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(vi) $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 (Utiliser une relation polynomiale pour inverser une matrice). Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^3 - A$.
2. En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1} comme un polynôme en A, puis son expression explicite.

Exercice 10 (Utiliser une relation polynomiale pour calculer des puissances matricielles). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A = 0$.

1. Montrer que soit A n'est pas inversible, soit $A = -2I_n$.
2. Montrer que $A^k = (-2)^{k-1}A$ pour tout $k \geqslant 1$.

Exercice 11 (Déterminer l'inversibilité d'une matrice). Étudier l'inversibilité des matrices suivantes (il n'est pas demandé de calculer leur inverse éventuel) :

$(i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad(iv)\ D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad(vii)\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(ii)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad(v)\ M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad(viii)\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$(iii)\ C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ $\quad(vi)\ N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 12 \\ -5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad(ix)\ R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 12 (Calculer l'inverse d'une matrice). Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$(i)\ 3I_5$

$(ii)\ A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad(v)\ D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad(viii)\ P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(iii)\ B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ $\quad(vi)\ M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad(ix)\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$(iv)\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad(vii)\ N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$

Exercice 13 (Résoudre des systèmes de Cramer). Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(i)\ \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 5x - 2y = -3 \end{cases} \qquad (v)\ \begin{cases} 3x + z = 5 \\ 2y + z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases}$$

$$(ii)\ \begin{cases} x + 3y = 2 \\ 5x - 2y = -7 \end{cases} \qquad (vi)\ \begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y + 9z = 5 \end{cases}$$

$$(iii)\ \begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$(iv)\ \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ -3x + 4y + z = 14 \end{cases} \qquad (vii)\ \begin{cases} x + y + z + t = -1 \\ x + t = 2 \\ x + z + t = 2 \\ x + 3z + 2t = -1 \end{cases}$$

2 ENTRAÎNEMENT

Exercice 14. Calculer les produits deux à deux des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivantes, y compris les carrés de ces matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Calculer les puissances successives des matrices suivantes (on pourra calculer leurs premières puissances puis formuler une conjecture et la démontrer par récurrence) :

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad (ii)\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (iii)\ C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (iv)\ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 (Formule du binôme). Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices qui commutent. Établir la formule suivante :

$$\forall N \geqslant 0, \quad (A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k}.$$

Exercice 17. Calculer les puissances successives des matrices suivantes :

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *(ii)* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *(iii)* $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Indication : on pourra par exemple écrire $A = I_2 + M$ avec $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, calculer les puissances successives de M et utiliser la formule du binôme pour en déduire les puissances successives de A. La même technique peut être adaptée aux deux autres matrices.

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a
$$A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix},$$
où $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites vérifiant une relation de récurrence « croisée » que l'on précisera (c'est-à-dire que a_{k+1} s'écrit en fonction de a_k et b_k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et qu'il en est de même pour b_{k+1}).
2. Montrer que $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(a_k - b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites géométriques dont on précisera le premier terme et la raison.
3. En déduire la forme explicite de A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 19. Montrer que les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices scalaires.

Indication : il s'agit de réécrire dans le cas $n = 2$ la preuve de la proposition 21, qui mobilise notamment les matrices

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible et que

$$(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k.$$

Exercice 21. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$.

1. Montrer par l'absurde qu'une matrice nilpotente n'est pas inversible.
2. Montrer que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont nilpotentes et commutent, alors $A + B$ et AB sont nilpotentes.
3. Exhiber deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ nilpotentes telles que ni $A + B$ ni AB ne soient nilpotentes.

Étymologiquement, le terme nilpotente*, qui vient du latin* nil *(zéro) et* potens *(puissant) signifie « qui a une puissance nulle ». Les propriétés des matrices nilpotentes ne figurent pas au programme de B/L, mais on demande fréquemment de les redémontrer, comme dans cet exercice et le précédent.*

Exercice 22. On souhaite donner une preuve alternative de la proposition 48 du cours, selon laquelle pour tout $n \geqslant 1$ une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

1. Montrer que l'on peut se contenter de démontrer la proposition pour les matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $n \geqslant 1$, si $p \in [\![1, n]\!]$ et si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$, alors la matrice par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si A et C le sont (le bloc 0 étant ici la matrice nulle de taille $(n-p) \times p$).
3. Démontrer le résultat attendu par récurrence sur $n \geqslant 1$.

Exercice 23. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *stochastique* si ses coefficients sont tous positifs et si la somme des coefficients de chaque colonne de A vaut 1, c'est-à-dire que

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

On dit que A est *bistochastique* si cette propriété est aussi valable pour les lignes de A, ce qui revient à dire que A et ${}^tA$ sont stochastiques.

1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique.
2. Montrer que le produit de deux matrices bistochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice bistochastique.

Exercice 24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls. En utilisant la méthode d'inversion par système linéaire, la méthode de Gauss-Jordan ou une récurrence sur $n \geqslant 1$ inspirée de l'exercice 22, montrer que A^{-1} est triangulaire supérieure.

Exercice 25. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les coefficients diagonaux de $A\,^tA$ sont positifs.
2. Établir l'équivalence suivante : $A\,^tA = 0 \iff A = 0$.

Exercice 26. Donner deux matrices inversibles $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A+B$ ne soit pas inversible.

Exercice 27. On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *triangulaire supérieure stricte* lorsqu'elle est triangulaire et possède uniquement des 0 sur sa diagonale.

1. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures strictes est une matrice triangulaire supérieure stricte.
2. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure stricte, alors $A^n = 0$.

Exercice 28. Soit $n \geqslant 1$. On souhaite étudier les propriétés de stabilité de l'ensemble des matrices symétriques et de celui des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Montrer qu'une combinaison linéaire de deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Le produit de deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-il nécessairement une matrice symétrique ?
   (c) Montrer que le produit de deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent est une matrice symétrique.
   (d) Montrer que l'inverse d'une matrice symétrique inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est aussi une matrice symétrique.
2. (a) Montrer qu'une combinaison linéaire de deux matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que le produit de deux matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent est une matrice symétrique.
   (c) Montrer que l'inverse d'une matrice antisymétrique inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est aussi une matrice antisymétrique.
3. Que dire d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la fois symétrique et antisymétrique ?

Exercice 29. Montrer par analyse-synthèse que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique comme somme d'une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3 EXERCICES CLASSIQUES ET D'ANNALES

Exercice 30 (ENSAI 2019). Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on note

$$M(a,b) := \begin{pmatrix} a & b & \cdots & \cdots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \cdots & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

la matrice de taille $n \times n$ qui a des a sur la diagonale et des b partout ailleurs.

1. Calculer $M(a,b)^p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

   Indication : on pourra écrire $M(a,b)$ comme la somme de deux matrices simples.
2. (a) Utiliser le résultat précédent pour calculer $M(a,b)^2$.

   (b) Déterminer une condition suffisante pour que $M(a,b)$ soit inversible et calculer son inverse lorsque cette condition est réalisée.

   (c) Cette condition est-elle nécessaire ?

Exercice 31 (Ulm 2022). On définit l'application φ sur l'ensemble des couples de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$\varphi(A,B) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{ij} b_{ij}$$

où l'on a utilisé les notations $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$.

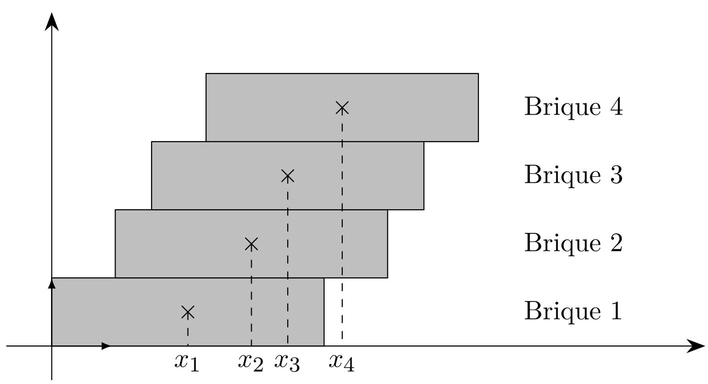
1. Montrer que $\varphi(A,A) = 0$ si et seulement si la matrice A est nulle.
2. Soient $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}), P \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$. Montrer que $\varphi(AP, Q) = \varphi\left(P, {}^tAQ\right)$.
3. Pour $A, B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, montrer que $\varphi(A,B) = \mathrm{Tr}\left(A\,{}^tB\right) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$.
4. En déduire une nouvelle démonstration, moins calculatoire, du résultat de la question 2.

Exercice 32 (ENSAE 2018). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que la relation $A^2 = \alpha A + \beta I_n$ soit vérifiée.

1. Montrer que si $\beta \neq 0$, alors A est inversible, et exprimer A^{-1} comme une combinaison linéaire de A et de I_n dans ce cas.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la matrice A^p est une combinaison linéaire de A et de I_n.
3. Utiliser ce qui précède pour calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A^2 s'exprime comme une combinaison linéaire de A et de I_2, et s'en servir pour retrouver la formule donnant l'inverse de A lorsque celle-ci est inversible.

4 Exercices d'application

Exercice 33 (Le plongeoir le plus long). On dispose de $n \geqslant 1$ briques parallélépipédiques de mêmes dimensions et de même composition homogène. On cherche à déterminer la longueur maximale d'un plongeoir constructible en empilant ces n briques les unes sur les autres selon le profil suivant :

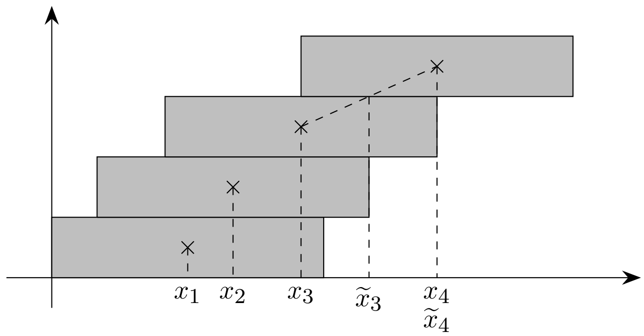


On numérote les briques constituant le plongeoir de 1 à n par ordre d'altitude croissant et on note $x_1, \ldots, x_n$ les abscisses des centres de gravité des différentes briques dans le plan $(O, \vec{x}, \vec{z})$. On a donc

$$0 < \frac{\ell}{2} = x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n,$$

où ℓ est la longueur commune des briques.

On dit que le plongeoir est *stable* s'il tient en équilibre sans aucune fixation sous l'effet du champ gravitationnel terrestre. On peut montrer qu'il existe parmi les plongeoirs stables un unique plongeoir de longueur maximale, caractérisé par le fait que le centre de gravité de chaque sous-système de k briques supérieures (pour $k \in [\![1, n-1]\!]$) est parfaitement aligné avec le bord de la brique $n-k$ soutenant ce système, comme sur la figure ci-dessous. On appelle *plongeoir optimal* cette configuration.



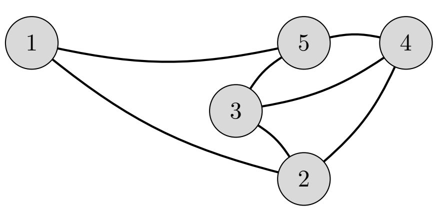
Plongeoir optimal : le centre de gravité de chaque sous-système est aligné avec le bord de la brique qui le soutient. Sur la figure, on a $n = 4$; $\widetilde{x}_4$ est l'abscisse du centre de gravité de la brique numéro 4 et $\widetilde{x}_3$ est celle du centre de gravité du système constitué par les briques 3 et 4.

On introduit les *avancées successives* y_i définies par $y_1 = x_1$ et

$$\forall k \in [\![2, n]\!], \quad y_k = x_k - x_{k-1}.$$

Écrire la condition reliant les y_k entre eux dans le cas du plongeoir optimal sous la forme d'un système d'équations linéaires, puis résoudre ce système et en déduire les valeurs des x_k.

Exercice 34 (Matrice d'adjacence d'un graphe). On considère un graphe G constitué de n sommets numérotés de 1 à n et reliés (ou non) par des arêtes, comme sur la figure ci-dessous :



Un graphe (c'est-à-dire un ensemble de sommets et d'arêtes, à ne pas confondre avec la notion de graphe d'une fonction !) est un moyen commode de représentation des connexions qui existent entre les éléments d'un ensemble donné. On utilise ainsi des graphes pour représenter des réseaux routiers, des réseaux sociaux, des circuits électroniques…

On appelle *matrice d'ajacence du graphe G* la matrice symétrique $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

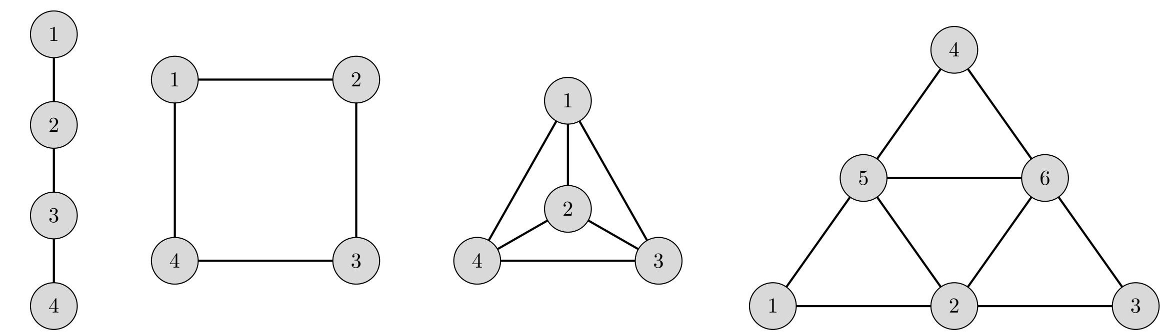
$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ est relié à } j \text{ par une arête} \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Par exemple, la matrice d'ajacence du graphe représenté à la page précédente est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La théorie des graphes est une branche des mathématiques à part entière, qui se nourrit de considérations combinatoires, algébriques et probabilistes, comme nous le verrons dans le tome de deuxième année à travers l'étude de l'algorithme Page-Rank de Google. L'importance que revêt l'aspect algorithmique de la manipulation des graphes en fait aussi un domaine de recherche très actif en informatique.

1. Donner les matrices d'adjacence des graphes ci-dessous :



Graphe G_1 Graphe G_2 Graphe G_3 Graphe G_4

2. Considérons que $n \geqslant 2$. Rappeler l'expression du coefficient $(A^2)_{1,2}$ puis montrer que $(A^2)_{1,2}$ est le nombre de chemins de longueur 2 le long des arêtes du graphe G menant de 1 à 2. Plus généralement, que représentent les coefficients de la matrice A^2 ?
3. Que représentent les coefficients de la matrice A^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$?
4. Pour chacun des quatre graphes représentés plus haut, donner le nombre de chemins de longueur 8 reliant les sommets 1 et 3.
5. On dit que le graphe est *connexe* si quels que soient $i, j \in [\![1, n]\!]$, il existe un chemin de i à j en suivant les arêtes du graphe. Donner un exemple de graphe non connexe, puis montrer que G est connexe si et seulement si la matrice $A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.

5 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 35 (Matrices de Vandermonde). Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On considère la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),$$

appelée *matrice de Vandermonde associée aux coefficients* $x_1, \dots, x_n$.

1. Écrire explicitement la matrice de Vandermonde lorsque $n = 3$ et $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et $x_3 = 3$.

On revient à présent au cas général (sans supposer que $n = 3$).

2. Montrer que si deux des x_i sont égaux entre eux, alors M est non inversible.

On suppose à présent que les x_i sont deux à deux distincts. On se propose de montrer que M est inversible.

3. Donner la matrice M' obtenue à partir de la matrice M en appliquant les opérations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - x_1 C_{j-1}$ pour $j = n$, $j = n-1$, $j = n-2$ et jusqu'à $j = 2$, puis $L_i \leftarrow \frac{1}{x_i - x_1} L_i$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$.
4. En reconnaissant au sein de M' une nouvelle matrice de Vandermonde, expliquer comment montrer récursivement que M' est inversible.

Exercice 36 (Un exemple de décomposition LU).

La lettre L est l'initiale de *lower* et la lettre U celle de *upper*, en référence à la forme des matrices triangulaires utilisées.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. En appliquant partiellement la méthode d'élimination de Gauss-Jordan, factoriser A sous la forme $A = LU$ avec $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure et $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure.
2. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pose $X' := UX$. Montrer que l'on a

$$AX = Y \iff LX' = Y.$$

3. En résolvant d'abord l'équation $LX' = Y$ puis l'équation $UX = X'$, résoudre le système d'équations linéaires admettant pour écriture matricielle $AX = Y$ dans les trois cas suivants :

   (a) $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $Y = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (c) $Y = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

4. Quel est l'intérêt pour la résolution de systèmes d'équations linéaires de disposer d'une décomposition de A sous la forme LU ?

Exercice 37 (Matrices et suites récurrentes).

1. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$u_0 = v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{3}u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n + \sqrt{3}v_n \end{cases}.$$

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

   (a) Exhiber une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (c) En déduire l'expression explicite de u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

2. On considère dans cette question une *suite récurrente linéaire d'ordre* 3 vérifiant

$$u_0 = 2, \; u_1 = 0 \; \text{ et } \; u_2 = 0, \quad \text{ainsi que} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = -3u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n.$$

   On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 3-2\sqrt{2} & 3+2\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}.$$

   (a) Montrer que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{28}\begin{pmatrix} 8 & 16 & 4 \\ -2-4\sqrt{2} & -4-\sqrt{2} & 6+5\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-4 & 6-5\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

   (c) Calculer $D := P^{-1}AP$.

   (d) Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (e) En déduire l'expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solutions des exercices du chapitre 18

1 Compréhension du cours

Solution de l'exercice 1. (i) Comme A et B sont de même taille, la somme $A+B$ existe. Le nombre de colonnes de A étant égal au nombre de lignes de B, le produit AB existe. De la même façon, le nombre de colonnes de B étant égal au nombre de lignes de A, le produit BA existe. On a

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Comme A et B ne sont pas de même taille, la somme de A et B n'est pas définie. Le nombre de colonnes de A n'étant pas égal au nombre de lignes de B, le produit AB n'existe pas non plus. En revanche, comme le nombre de colonnes de B est égal au nombre de lignes de A, le produit BA existe. Il vaut

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans les points suivants, nous statuerons sans justification sur l'existence des sommes et des produits considérés.

(iii) Pour des raisons de format, ni $A+B$, ni AB, ni BA n'existent.

(iv) Les matrices $A+B$, AB et BA existent, et on a

$$A+B = A+A = 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AB = BA = A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A.$$

(v) Les matrices $A+B$, AB et BA existent, et on a

$$A+B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ainsi que} \quad AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 13 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que la somme et le produit des deux matrices triangulaires supérieures considérées sont aussi des matrices triangulaires supérieures ; il s'agit d'un fait général que nous démontrerons dans l'exercice 3.

(vi) Les matrices $A+B$ et AB n'existent pas. Par contre, BA existe et on a

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 2. (i) Comme A est de taille $m \times n$, sa transposée ${}^tA$ est de taille $n \times m$.

(ii) Comme ${}^tA$ est de taille $n \times m$ et A de taille $m \times n$, leur produit ${}^tAA$ est de taille $n \times n$.

(iii) Comme A de taille $m \times n$ et ${}^tA$ est de taille $n \times m$, leur produit $A\,{}^tA$ est de taille $m \times m$.

(iv) Comme A est de taille $m \times n$ et Y de taille $n \times 1$, le produit AY est de taille $m \times 1$.

(v) Comme X est de taille $m \times 1$, sa transposée ${}^tX$ est de taille $1 \times m$; la matrice A étant de taille $m \times n$, le produit ${}^tXA$ est de taille $1 \times n$.

(vi) On vient de voir que ${}^tXA$ est de taille $1 \times n$; or Y est de taille $n \times 1$, donc ${}^tXAY$ est de taille 1×1, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une matrice composée d'un seul coefficient. On assimile fréquemment une telle matrice à un nombre réel.

Solution de l'exercice 3. 1. On note $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

Supposons A et B triangulaires supérieures, c'est-à-dire que $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ vérifiant $i > j$.

Si $i, j \in [\![1, n]\!]$ sont tels que $i > j$, on a alors

$$(A + B)_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} = 0 + 0 = 0,$$

ce qui signifie que $A + B$ est une matrice triangulaire supérieure.

De même, si $i, j \in [\![1, n]\!]$ sont tels que $i > j$, on a alors

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j},$$

mais pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ l'une des conditions $i > k$ et $k > j$ au moins est vérifiée puisque $i > j$, si bien que

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0.$$

On en déduit que AB est une matrice triangulaire supérieure.

2. La démonstration précédente se transpose au cas triangulaire inférieur en considérant les couples (i, j) tels que $i < j$.

On peut aussi raisonner de façon plus élégante en écrivant que si A et B sont triangulaires inférieures, alors ${}^tA$ et ${}^tB$ sont triangulaires supérieures. Cette dernière propriété implique d'après le point précédent que ${}^tA + {}^tB$ et ${}^tB^tA$ sont triangulaires supérieures, et donc, comme ces matrices valent respectivement ${}^t(A + B)$ et ${}^t(AB)$, que $A + B = {}^t({}^t(A + B))$ et $AB = {}^t({}^t(AB))$ sont triangulaires inférieures.

Solution de l'exercice 4. Notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

(i) La propriété provient du fait que A et ${}^tA$ ont les mêmes coefficients diagonaux : formellement,

$$\mathrm{Tr}\left({}^tA\right) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tA)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \mathrm{Tr}(A).$$

(ii) On écrit

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(A + \lambda B) &= \sum_{i=1}^{n} (A + \lambda B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} (a_{i,i} + \lambda b_{i,i}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \mathrm{Tr}(A) + \lambda\, \mathrm{Tr}(B).
\end{aligned}$$

(iii) En utilisant l'expression explicite des coefficients d'un produit de matrices, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} \quad \text{en intervertissant les sommes} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (BA)_{k,k} = \mathrm{Tr}(BA),
\end{aligned}$$

d'où le résultat attendu.

Solution de l'exercice 5. La relation $AB = BA$ n'a de sens que pour des matrices B de taille 2×2. On considère donc $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et on écrit

$$\begin{aligned}
AB = BA \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ -a - c & -b - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & 2a - b \\ c - d & 2c - d \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} a + 2c = a - b \\ b + 2d = 2a - b \\ -a - c = c - d \\ -b - d = 2c - d \end{cases} \iff \begin{cases} b = -2c \\ b = a - d \\ 2c = d - a \\ -b = 2c \end{cases} \iff \begin{cases} b = -2c \\ a = -2c + d \end{cases}
\end{aligned}$$

où la dernière équivalence procède du fait que l'avant-dernier système contient deux équations redondantes qui peuvent se réécrire comme des relations donnant a et b en fonction de c et d.

Ainsi, B commute avec A si et seulement si B est de la forme

$$B = \begin{pmatrix} -2c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + dI_2,$$

avec $c, d \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si B est combinaison linéaire des matrices $M = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I_2.

En choisissant différemment les deux variables « libres » parmi a, b, c et d pour exprimer les deux autres variables, il est possible que vous ayez obtenu des solutions d'une autre forme. Vous pouvez cependant vérifier que ces solutions sont en réalité des combinaisons linéaires des matrices M et I_2.

Solution de l'exercice 6. Comme d'habitude lorsque l'on cherche à exhiber un (contre-)exemple, il est bon de s'intéresser à des matrices de forme aussi simple que possible. On souhaite cependant éviter que A et B commutent, ce qui pousse à choisir des matrices différentes de 0_2 et I_2. On peut par exemple considérer

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

qui vérifient

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_2 \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

comme attendu.

Solution de l'exercice 7. 1. On trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & 18 & -18 \\ 6 & 18 & -18 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = 0.$$

2. On connaît déjà $A^0 = I_3$, ainsi que A, A^2 et A^3. Il reste à calculer A^k pour tout entier $k > 3$; pour un tel k, on a $A^k = A^3A^{k-3} = 0 \cdot A^{k-3} = 0$.

3. Les matrices A et I_3 commutent ; on peut donc utiliser la formule du binôme qui affirme que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$B^n = (A + I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k I_3^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k.$$

Dès lors que $n \geqslant 3$, les termes de cette somme à partir de l'indice 3 sont nuls d'après la question précédente. On en déduit :

$$\forall n \geqslant 3, \quad B^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} A^k = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2.$$

On remarque par ailleurs que cette formule est aussi valable lorsque $n \in \{0,1,2\}$ puisque

$$B^0 = I_3, \quad B^1 = A + I_3 \quad \text{et} \quad B^2 = A^2 + 2A + I_3.$$

Ainsi :

$$\forall n \geqslant 0, \quad B^n = I_3 + nA + \frac{n(n-1)}{2}A^2 = \begin{pmatrix} 1+3n & 9n & -9n \\ 2n+3n(n-1) & 1+9n(n-1) & -9n(n-1) \\ 3n+3n(n-1) & 3n+9n(n-1) & 1-3n-9n(n-1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3n+1 & 9n & -9n \\ 3n^2-n & 9n^2-9n+1 & -9n^2+9n \\ 3n^2 & 9n^2-6n & -9n^2+6n+1 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 8. (i) On a $\det(A) = 1 \cdot 6 - 2 \cdot 3 = 0$, donc A n'est pas inversible. Alternativement, on aurait pu remarquer une relation de proportionnalité entre les lignes ou les colonnes de A, par exemple $L_2 = 3L_1$ ou $C_2 = 2C_1$.

(ii) En calculant $\det(B) = 0$ ou en remarquant la relation $L_2 = -2L_1$, on conclut une fois encore que B n'est pas inversible.

(iii) On a $\det(C) = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4 \neq 0$, donc C est inversible. Son inverse est donné par

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iv) On a $\det(D) = 5 \cdot 1 - 1 \cdot 4 = 1 \neq 0$, donc D est inversible, et

$$D^{-1} = \frac{1}{\det(D)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(v) On a $\det(M) = -3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 = -6 \neq 0$, donc M est inversible. Son inverse est donné par

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

(vi) On a $\det(R_\theta) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$ d'après la relation fondamentale de la trigonométrie, donc R_θ est inversible, et

$$(R_\theta)^{-1} = \frac{1}{\det(R_\theta)}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = R_{-\theta}.$$

On retrouvera la matrice R_θ, appelée *matrice de rotation*, dans le chapitre sur les applications linéaires en deuxième année, où l'on interprètera la relation $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$.

Solution de l'exercice 9. 1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ puis $A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, donc

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I_3.$$

2. L'égalité $A^3 - A = -4I_3$ peut se réécrire sous la forme $A(A^2 - I_3) = -4I_3$ puis sous la forme $A\left(-\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}I_3\right) = I_3$, ce qui montre que A est inversible et que $A^{-1} = -\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}I_3$, d'où

$$A^{-1} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 10. 1. On a $A(A + 2I_n) = 0$. Si A est inversible, en multipliant cette égalité par A^{-1} à gauche, on obtient $A + 2I_n = A^{-1} \cdot 0 = 0$, donc $A = -2I_n$. Ainsi, soit $A = -2I_n$, soit A n'est pas inversible.

2. Démontrons la propriété attendue par récurrence. Elle est évidemment vraie pour $k = 1$ puisque $A^1 = A$ et $(-2)^{1-1}A = A$. Supposons à présent qu'elle soit vraie pour un $k \geqslant 1$ donné. On a alors, en utilisant cette hypothèse et le fait que $A^2 = -2A$:

$$A^{k+1} = A^k A = (-2)^{k-1}A \cdot A = (-2)^{k-1}A^2 = (-2)^{k-1} \cdot (-2)A = (-2)^k A,$$

d'où la proposition au rang $k + 1$. Ainsi, la relation à démontrer est vraie à tout rang $k \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

Solution de l'exercice 11. (i) Les lignes de A vérifient la relation de dépendance linéaire $L_1 + L_2 = L_3$ (ou ses colonnes vérifient la relation $C_1 = C_3$), donc A n'est pas inversible. On pouvait arriver à cette conclusion grâce à l'algorithme du pivot puisque réaliser les transvections $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ transforme A en une matrice triangulaire avec un coefficient diagonal nul, en une matrice non inversible.

(ii) La matrice B est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, donc elle est inversible.

(iii) La matrice C est triangulaire (inférieure) avec un coefficient diagonal nul, donc elle n'est pas inversible.

(iv) On peut exploiter les similitudes entre les colonnes 1 et 3 de D pour écrire

$$D \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{\sim} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

or cette dernière matrice est triangulaire à coefficients diagonaux non nuls, donc elle est inversible ; ainsi, D est inversible.

(v) On a

$$M \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

or cette dernière matrice est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont tous non nuls, donc elle est inversible ; ainsi, M est inversible.

(vi) La matrice N possède une colonne nulle, donc elle n'est pas inversible.

(vii) On a

$$P \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

or cette dernière matrice possède deux lignes égales donc elle n'est pas inversible ; ainsi, P n'est pas inversible.

$(viii)$ On remarque que les lignes de Q vérifient $L_1 = L_2 + L_3$: ainsi, Q n'est pas inversible.

(ix) En cherchant une relation de dépendance linéaire éventuelle entre les lignes de R, on remarque que $L_1 + L_2 + L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, ce qui ne permet pas de retrouver L_4 mais suggère une opération rapide pour réduire R :

$$R \underset{L_4 \leftarrow L_4 - (L_1 + L_2 + L_3)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Or cette dernière matrice est triangulaire et ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc elle est inversible ; ainsi, R est inversible.

Solution de l'exercice 12. (i) La matrice $3I_5$ est inversible puisque I_5 l'est et puisque $3 \neq 0$, et on a $(3I_5)^{-1} = \frac{1}{3} I_5^{-1} = \frac{1}{3} I_5$.

(ii) La matrice A est inversible puisqu'elle est diagonale et à coefficients diagonaux non nuls, et son inverse se calcule par simple inversion des coefficients diagonaux :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Notons que cette astuce n'est valable que pour les matrices diagonales !

(iii) En appliquant la méthode de Gauss-Jordan à B, on obtient

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1}{\text{puis}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\text{puis}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\text{puis}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{5}L_3}}{\text{et enfin}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right),$$

d'où l'on déduit que B est inversible (ce que l'on aurait pu dire directement puisqu'elle est triangulaire et à coefficients diagonaux non nuls) et que

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & -15 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que l'inverse de la matrice triangulaire inférieure B est elle-même triangulaire inférieure, et que ses coefficients diagonaux sont obtenus par inversion des coefficients diagonaux de B (ce qui n'est pas le cas pour les coefficients des autres positions) ; c'est un fait général valable pour les matrices triangulaires inférieures (voir l'exercice 24).

(iv) Pour des raisons de concision, on se contente désormais de signaler les suites d'opérations élémentaires effectuées lors de la méthode de Gauss-Jordan ; l'écriture des matrices augmentées successives est laissée au lecteur.

On transforme C en la matrice I_3 à l'aide des opérations élémentaires successives sur les lignes $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, $L_2 \leftrightarrow L_3$, $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ puis simultanément $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_3$. On obtient alors que C est inversible et que

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(v) On transforme D en I_3 à l'aide des opérations successives $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow 2L_3 + 9L_2$, $L_3 \leftarrow \frac{1}{23}L_3$, puis simultanément $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$, puis $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$, et enfin $L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2$. On obtient alors que D est inversible et que

$$D^{-1} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 13 \\ 6 & -2 & -3 \\ -4 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

(vi) On transforme M en I_3 à l'aide des opérations élémentaires successives $L_1 \leftrightarrow L_3$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2$, $L_3 \leftarrow -\frac{1}{10}L_3$, puis simultanément $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 4L_3$, et enfin $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. On obtient que M est inversible et que

$$M^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 11 \\ 4 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(vii) On peut transformer N en I_3 à l'aide des opérations suivantes : les transvections simultanées $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, puis simultanément $L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3$ et $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ et enfin $L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1$. On obtient alors que N est inversible et que

$$N^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$(viii)$ On peut transformer P en la matrice I_4 en faisant passer sa première ligne en quatrième position, ce qui correspond à l'application des opérations élémentaires successives $L_1 \leftrightarrow L_2$, $L_2 \leftrightarrow L_3$ et $L_3 \leftrightarrow L_4$. Ainsi, P est inversible et son inverse s'obtient en appliquant les mêmes opérations sur les lignes à la matrice identité, ce qui donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ix) On peut transformer Q en I_4 grâce aux opérations élémentaires successives $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$ (ces trois transvections pouvant être réalisées simultanément), puis $L_2 \leftarrow -\frac{1}{3}L_2$, puis simultanément à $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_2$, puis $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$, puis $L_3 \leftarrow -L_3$ et $L_4 \leftarrow -L_4$, puis aux trois transvections simultanées $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4$, $L_2 \leftarrow L_2 - L_4$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$, et enfin à $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 - L_3$. On obtient alors que Q est inversible et que

$$Q^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -3 \\ -1 & -4 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Solution de l'exercice 13. (i) Les trois premiers systèmes ayant la même matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, il est intéressant d'inverser A pour les résoudre efficacement. On a $\det(A) = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 = -17 \neq 0$, donc A est inversible, ce qui montre que les systèmes considérés sont de Cramer, et on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

Utilisons cette matrice pour résoudre le premier système :

$$\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 5x - 2y = -3 \end{cases} \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \end{pmatrix} \iff x = -\frac{7}{17} \text{ et } y = \frac{8}{17}.$$

(ii) On a cette fois

$$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 5x - 2y = -7 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \iff x = -1 \text{ et } y = 1.$$

(iii) On a cette fois

$$\begin{cases} x + 3y = 11 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} \iff x = \frac{25}{17} \text{ et } y = \frac{54}{17}.$$

(iv) L'inversion de la matrice de taille 3×3 associée au système est ici inutilement coûteuse puisque nous n'étudions pas plusieurs systèmes associés à la même matrice. Nous utilisons donc l'algorithme du pivot pour nous ramener à un système triangulaire :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 5 \\ -3x + 4y + z = 14 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\iff} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 4y - z = 5 \\ y + 4z = 14 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 4L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y + 4z = 14 \\ 17z = 51 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

où la dernière étape procède d'une résolution de proche en proche en partant de l'équation $17z = 51$, qui donne $z = 3$, puis d'une substitution dans la deuxième équation, qui donne $y = 14 - 12$ donc $y = 2$, et d'une nouvelle substitution dans la première équation, qui donne $x - 2 + 3 = 0$ soit $x = -1$.

(v) La deuxième équation donne $z = -2y$, tandis que la troisième permet d'écrire que $x = z$. On peut donc opérer une résolution par substitution, mais il est important de ne pas commettre d'erreur par excès d'enthousiasme : les relations $z = -2y$ et $x = z$ doivent toujours figurer dans le système pour que les équivalences logiques soient vérifiées. Ainsi, on peut écrire

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & & + & z & = 5 \\ & 2y & + & z & = 0 \\ -2x & & + & 2z & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -6y - 2y & = & 5 \\ z & = & -2y \\ x & = & z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -\frac{5}{8} \\ z & = & \frac{5}{4} \\ x & = & \frac{5}{4}. \end{array}\right.$$

Notons que la substitution peut avoir lieu entre d'autres variables que celles choisies ci-dessus (par exemple en écrivant $z = x$ puis $y = -\frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}x$) ; l'idée est dans tous les cas de réécrire l'une des équations en ne faisant apparaître qu'une seule variable, ce qui permet d'amorcer la résolution de proche en proche. La solution trouvée, bien entendu, est la même quel que soit le cheminement logique adopté.

(vi) On résout le système par l'algorithme du pivot :

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = -1 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y + 9z = 5 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L1}}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x + y + z = -1 \\ \quad y + 3z = 4 \\ \quad 2y + 8z = 6 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x + y + z = -1 \\ \quad y + 3z = 4 \\ \quad\quad 2z = -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -7 \\ y = 7 \\ z = -1. \end{array}\right.$$

(vii) Une combinaison astucieuse des lignes peut permettre une résolution en moins d'étapes que par l'algorithme du pivot « classique » :

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z + t = -1 \\ x + t = 2 \\ x + z + t = 2 \\ x + 3z + 2t = -1 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x + y + t = -1 \\ x + t = 2 \\ z = 0 \\ x + 2t = -1 \end{array}\right.$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{l} x + y - 3 = -1 \\ x - 3 = 2 \\ z = 0 \\ t = -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = -3 \\ x = 5 \\ z = 0 \\ t = -3. \end{array}\right.$$

2-5 ENTRAÎNEMENT – ANNALES – APPLICATIONS – PLUS

Les solutions des exercices 14 à 37 peuvent être trouvées en scannant le code ci-contre.