# 2 ENTRAÎNEMENT

**Exercice 16.** Étudier les limites de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x-\lfloor x \rfloor}$ puis donner l'allure de son graphe.
*Indication* : on remarquera utilement que $f$ est 1-périodique, puis on restreindra l'étude de $f$ à un intervalle bien choisi.

**Exercice 17.** Démontrer sans avoir recours à la caractérisation séquentielle de la limite que si $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et si $f$ et $g$ sont deux fonctions définies sur un voisinage de $a$ admettant $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ pour limites respectives en $a$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'$.

**Exercice 18.** Dire si les courbes représentatives des fonctions suivantes admettent des asymptotes :

$(i)$ $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^4+x^2+x+1}$ $\quad(ii)$ $g : x \mapsto \sqrt{x^2-2x\sqrt{x}}$ $\quad(iii)$ $h : x \mapsto \cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

**Exercice 19.** Déterminer les limites suivantes :

$(i)$ $\lim\limits_{x\to 0} \cos(\tan(\sin(x)))$ $\quad(iv)$ $\lim\limits_{x\to 0} \arctan\left(\dfrac{1}{\sin(x^2)}\right)$ $\quad(vii)$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin\left(x^2-1\right)}{x-1}$

$(ii)$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \tan^3\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$ $\quad(v)$ $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(x)}{\pi-x}$ $\quad(viii)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(\sin(x))}{x^2}$

$(iii)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\arctan(x)}{\arctan(x^2)}$ $\quad(vi)$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(x)}{\pi-2x}$ $\quad(ix)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3\tan^2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

**Exercice 20.** Déterminer les limites suivantes :

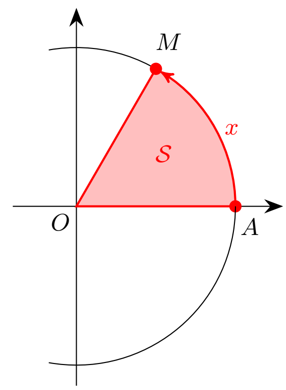
$(i)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor$ $\quad(ii)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \tan\left(\lfloor \arctan(x) \rfloor\right)$ $\quad(iii)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} \left\lfloor \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} + \dfrac{x^2+1}{x^4-5} \right\rfloor$

**Exercice 21.** Le but de cet exercice est de démontrer la relation

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On note $\mathcal{D}$ le disque délimité par le cercle trigonométrique, on place les points $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ et $M = (\cos(x), \sin(x))$ du plan et on considère la portion $\mathcal{S}$ de $\mathcal{D}$ délimitée par les segments $[OA]$ et $[OM]$ ainsi que par l'arc du cercle trigonométrique allant de $A$ à $M$ dans le sens positif (voir figure page suivante).

1. (a) Rappeler l'aire de $\mathcal{D}$, puis calculer celle de $\mathcal{S}$.
   (b) Représenter le triangle de sommets $O$, $A' = (\cos(x), 0)$ et $M$ puis calculer son aire.
   (c) Représenter le triangle de sommets $O$, $A$ et $M' = (1, \tan(x))$ puis calculer son aire.
   (d) En comparant les trois aires déterminées dans les questions précédentes, établir la relation
$$\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}.$$
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, puis que $\displaystyle\lim_{x\to 0-} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ et conclure.




**Exercice 22.** Montrer que la fonction définie par
$$\forall x \geqslant 0, \quad f(x) = \begin{cases} x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
est continue sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 23.** Montrer que la fonction $f$ définie par
$$\forall x \in ]0,1[, \quad f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{x(1-x)}$$
admet un prolongement par continuité sur $[0,1]$ (c'est-à-dire en 0 et en 1).

**Exercice 24.** On considère la fonction
$$f : x \longmapsto \frac{1+x^5}{1+x}.$$
1. Donner l'ensemble de définition de $f$.
2. Montrer que $f$ admet un prolongement par continuité à l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier.

**Exercice 25.** Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, définie par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$
est discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.

**Exercice 26.** Soit $h$ une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, continue et strictement croissante, telle que $h(0) = 0$. Montrer que l'équation $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = h^2(x)$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$.

**Exercice 27** (Minimalité des hypothèses du théorème de la bijection). Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application injective et continue. On souhaite montrer que $f$ est strictement monotone.

1. Montrer que pour tous $x, y \in I$, la fonction $\Phi : \lambda \longmapsto \lambda x + (1-\lambda)y$ est une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ et vérifie $\Phi(0) = y$ et $\Phi(1) = x$.

2. Supposons qu'il existe $a, b, c, d \in I$ tels que $a < b$ et $f(a) < f(b)$ ainsi que $c < d$ et $f(c) > f(d)$. Montrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que la fonction

$$\varphi : \lambda \longmapsto f(\lambda a + (1-\lambda)c) - f(\lambda b + (1-\lambda)d)$$

s'annule sur $]0, 1[$, puis arriver à une contradiction et conclure.

**Exercice 28.** Montrer qu'une fonction continue par morceaux sur un segment y est bornée. Atteint-elle nécessairement sa borne inférieure et sa borne supérieure sur ce segment ?

**Exercice 29.** Montrer qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ admet un minimum sur $\mathbb{R}$.