## 4.4 Racines *n*-ièmes d'un nombre complexe

On peut à présent traiter le problème général et résoudre l'équation  $z^n=a$  d'inconnue  $z\in\mathbb{C}$  pour un nombre complexe a quelconque.

**Définition 44** (Racine n-ième d'un nombre complexe). Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $a \in \mathbb{C}$ . On appelle  $racine\ n$ -ième  $de\ a$  tout nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$  solution de l'équation  $z^n = a$ .

Tout d'abord, si a=0, il est clair que quel que soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , la seule racine n-ième de a est 0 (puisque si  $z \neq 0$  alors  $z^n \neq 0$ ).

On s'intéresse donc désormais au cas où  $a \neq 0$ .

**Proposition 45** (Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul). Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $a \in \mathbb{C}^*$ . On note  $\theta_0 \in \mathbb{R}$  un argument de a. Alors les racines n-ièmes de  $a \in \mathbb{C}^*$  sont au nombre de n: il s'agit des nombres complexes de la forme

$$|a|^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i\theta_0}{n}+\frac{2ik\pi}{n}}$$
 avec  $k \in [0, n-1]$ ,

c'est-à-dire, en notant  $\xi_0 := |a|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta_0}{n}},$  des nombres

$$\xi_0, \; \xi_0 e^{\frac{2i\pi}{n}}, \; \xi_0 e^{\frac{4i\pi}{n}}, \; \dots, \; \xi_0 e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}$$

La lettre  $\xi$  est un « xi » (prononcer « ksi ») minuscule. La majuscule correspondante est  $\Xi$ .

**Démonstration de la proposition 45** — Si  $z \in \mathbb{C}^*$  et si  $\theta \in \mathbb{R}$  est un argument de z, alors on a

$$z^n = a \iff \begin{cases} |z^n| = |a| \\ \arg(z^n) \equiv \theta_0 [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z|^n = |a| \\ n\theta \equiv \theta_0 [2\pi] \end{cases}$$

soit

$$z^n = a \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|a|} \\ \theta \equiv \frac{\theta_0}{n} \left[ \frac{2\pi}{n} \right]. \end{cases}$$

Ainsi, on a

$$z^n = a \iff \exists k \in \mathbb{Z} : z = \sqrt[n]{|a|} e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \xi_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Or on a vu dans la preuve de la proposition 43 que les valeurs deux à deux distinctes du nombre  $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$  sont celles que l'on obtient pour  $k \in [0, n-1]$ .

Rappelons que le passage à la racine n-ième dans l'équivalence  $|z|^n = |a| \Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|a|}$  est rendu possible par le fait que |z| est un réel positif.

On a done

$$z^n = a \iff \exists k \in [0, n-1] : z = \xi_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

d'où le résultat annoncé.

Les images des racines n-ièmes d'un nombre complexe  $a \in \mathbb{C}^*$  sont situées sur le cercle de centre O et de rayon  $\sqrt[n]{|a|}$ ; elles forment une fois encore un polygone régulier (qui n'admet plus le point d'affixe 1 pour sommet si  $a \neq 1$ ).

**Exemple.** Cherchons les racines troisièmes du nombre  $-2i=2e^{i\frac{3\pi}{2}}$ . Si  $z\in\mathbb{C}^*$ , on a

$$z^{3} = -2i \iff \begin{cases} |z^{3}| = 2 \\ \arg(z^{3}) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z|^{3} = 2 \\ 3\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{2} \\ \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$

On obtient les trois racines suivantes :

$$\sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{2}} = \sqrt[3]{2}i,$$

$$\sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{2i\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{\frac{7i\pi}{6}} = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

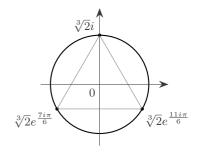
et

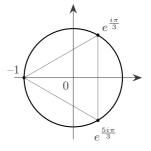
$$\sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{4i\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{\frac{11i\pi}{6}} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right).$$

**Exemple.** Les racines n-ièmes de -1 sont les nombres complexes  $e^{\frac{i\pi}{n}+\frac{2ik\pi}{n}}=e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}}$  avec  $k\in \llbracket 0,n-1 \rrbracket$ . On observe que parmi ces racines, aucune n'est réelle si n est pair, et seule -1 est réelle si n est impair (voir les schémas ci-contre).

Remarque — On retrouve ici l'idée selon laquelle la situation asymétrique observée sur  $\mathbb{R}$  (l'existence d'une unique racine n-ième pour un nombre réel quelconque si n est impair, et celle de deux racines n-ièmes pour les réels strictement positifs et aucune pour les réels strictement négatifs si n est pair) n'est que la trace sur  $\mathbb{R}$  d'une situation bien plus

La forme explicite des racines n'est pas à retenir par cœur. Il importe en revanche de savoir reproduire le raisonnement pour trouver explicitement les racines n-ièmes de nombres complexes dont un argument est connu, ainsi que de connaître le résultat théorique selon lequel un nombre  $a \in \mathbb{C}^*$  admet n racines n-ièmes distinctes dans  $\mathbb{C}$ .

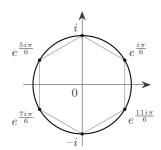




Racines troisièmes de -1

symétrique sur  $\mathbb C$  (l'existence de n racines n-ièmes distinctes pour tout nombre complexe non nul). Nous observerons un phénomène similaire dans le cours sur les polynômes, dans lequel nous effectuerons des incursions sur  $\mathbb C$  pour obtenir des résultats sur des polynômes à coefficients réels.

Une branche de l'analyse nommée analyse complexe exploite pleinement ce principe et permet, entre autres, d'expliquer de nombreuses propriétés des fonctions réelles à partir de leurs prolongements à  $\mathbb{C}$ , ce qui permet par exemple de réaliser certains calculs d'intégrales sur des intervalles réels à l'aide de détours inattendus et parfois spectaculaires par le plan complexe.



Racines sixièmes de -1