L'ensemble $\mathbb{R}$

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 14.

(*i*) On écrit

$$5^{2^{2n}}\left(\frac{1}{5^{2^n-1}}\right)^{2^n+1}=5^{2^{2n}}\cdot\frac{1}{5^{(2^n-1)(2^n+1)}}=\frac{5^{2^{2n}}}{5^{(2^n)^2-1^2}}=\frac{5^{2^{2n}}}{5^{2^{2n}-1}}=5.$$

(*ii*) L'expression $\sqrt{1+x^2}$ ne se simplifie pas. Rappelons qu'il n'existe pas de formule permettant de séparer la racine carrée d'une somme en deux parties.

(*iii*) En faisant apparaître un facteur x^2 sous la racine carrée et en utilisant le fait que $\sqrt{x^2}=x$ (ce qui est vrai puisque $x\geqslant 0$), on peut écrire

$$\frac{\sqrt{x^3+x^5}}{x}=\frac{\sqrt{x^2(x+x^3)}}{x}=\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{x+x^3}}{x}=\sqrt{x+x^3}.$$

(*iv*) On a

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sqrt[n]{x}^k\right)^k=\prod_{k=1}^{n}x^{\frac{k^2}{n}}=x^{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}k^2}=x^{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}}.$$

(*v*) En remarquant que $\frac{n-1}{n^2-1}=\frac{n-1}{(n-1)(n+1)}=\frac{1}{n+1}$, on peut écrire

$$x^{\frac{n-1}{n^2-1}}(2x)^{-\frac{1}{n+1}}=x^{\frac{1}{n+1}}2^{-\frac{1}{n+1}}x^{-\frac{1}{n+1}}=2^{-\frac{1}{n+1}}.$$

(*vi*) On a $\left(\sqrt{x^7}\right)^{\frac{6}{7}}\sqrt[7]{x^{14}}=\left(\left(x^7\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{6}{7}}\left(x^{14}\right)^{\frac{1}{7}}=x^{7\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{7}}x^{14\cdot\frac{1}{7}}=x^3x^2=x^5.$

(*vii*) On a

$$\sqrt[n]{x^{n-3}}x^{-\frac{3}{n}}=\left(x^{n-3}\right)^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{3}{n}}=x^{1-\frac{3}{n}}x^{-\frac{3}{n}}=x^1=x.$$

(*viii*) En écrivant $2^{n+1}=2^n\cdot 2$ et $2^{-n}=2^{-(n+1)}\cdot 2$, on obtient

$$\frac{2^n+2^{n+1}}{2^{-(n+1)}+2^{-n}}=\frac{2^n(1+2)}{2^{-(n+1)}(1+2)}=\frac{2^n}{2^{-(n+1)}}=2^{2n+1}.$$

(*ix*) On a

$$x^{-\frac{n^2}{2}}\sqrt{x^n}\prod_{i=1}^{n}x^i=x^{-\frac{n^2}{2}}\left(x^n\right)^{\frac{1}{2}}x^{\sum\limits_{k=1}^{n}k}=x^{-\frac{n^2}{2}}x^{\frac{n}{2}}x^{\frac{n(n+1)}{2}}=x^n.$$

Correction de l'exercice 15.

(i) Si $x, y \in \mathbb{R}$, dire que $x + y = 30$ et $xy = 209$ revient à dire que $x = 30 - y$ et que $(30 - y)y = 209$, c'est-à-dire que $y^2 - 30y + 209 = 0$. Or cette dernière équation admet $y_1 = 11$ et $y_2 = 19$ pour solutions. Comme $x = 30 - y$, les valeurs correspondantes de x sont $x_1 = 19$ et $x_2 = 11$. Ainsi, deux réels dont la somme vaut 30 et le produit 209 sont 11 et 19.

(ii) Cherchons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 = 19$ et $a^2 b^2 = 30$. D'après le point précédent, il suffit pour cela que les réels a^2 et b^2 soient égaux à 11 pour l'un et 19 pour l'autre. On peut donc choisir $a = \pm\sqrt{11}$ et $b = \pm\sqrt{19}$ ou l'inverse.

Correction de l'exercice 16.

1. On écrit comme dans le cours que
$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$
Comme $a > 0$, la quantité $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ est toujours positive, et elle n'est nulle que lorsque $x = -\frac{b}{2a}$: ainsi, $f(x)$ est minimal pour cette valeur de x. Par ailleurs, comme $a > 0$, la quantité $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ peut être rendu arbitrairement grande lorsque x tend vers l'infini, donc f n'admet pas de maximum.
2. Lorsque $a < 0$, il suffit d'appliquer le résultat du point précédent à l'expression $-f(x) = -ax^2 - bx - c$. Comme $-a > 0$, l'expression $-f(x)$ admet un minimum atteint en $-\frac{-b}{2\cdot(-a)} = -\frac{b}{2a}$, et elle n'est pas majorée : ainsi, son opposé $f(x)$ admet un maximum atteint en $-\frac{b}{2a}$ et n'est pas minoré.

Correction de l'exercice 17.

(i) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, le discriminant de l'équation $xy^2 + (2 - x)y + 1 = 0$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}$ vaut $\Delta = (2 - x)^2 - 4 \cdot x \cdot 1 = x^2 - 8x + 4$. On cherche donc les valeurs de x telles que $x^2 - 8x + 4 > 0$. Or les racines de l'expression polynomiale $x^2 - 8x + 4$ sur $\mathbb{R}$ sont les réels $\frac{8-\sqrt{48}}{2} = 4 + 2\sqrt{3}$ et $4 - 2\sqrt{3}$, et le coefficient dominant de cette expression est strictement positif donc on a
$$x^2 - 8x + 4 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 4 - 2\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x > 4 + 2\sqrt{3}.$$
Ainsi, l'ensemble des réels satisfaisant la condition de l'énoncé est la réunion d'intervalles $]-\infty, 4 - 2\sqrt{3}[\cup]4 + 2\sqrt{3}, +\infty[$.

(ii) Considérons $x \in \mathbb{R}$ et posons $y = x^2$. Alors on a
$$\begin{aligned} 2x^4 - x^2 - 1 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2y^2 - y - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad y = 1 \quad \text{ou} \quad y = -\frac{1}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad y = 1 \quad \text{car} \quad y = x^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$
Ainsi, x est solution de l'équation $2x^4 - x^2 - 1$ si et seulement si $x^2 = 1$, c'est-à-dire si $x = -1$ ou $x = 1$.

(*iii*) Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose ici encore $y = x^2$. Alors on a

$$x^4 + 2x^2 - 3 > 0 \iff y^2 + 2y - 3 > 0.$$

Or l'expression polynomiale $y^2 + 2y - 3$ admet 1 et -3 pour racines et est de coefficient dominant strictement positif, si bien que

$$y^2 + 2y - 3 > 0 \iff y < -3 \quad \text{ou} \quad y > 1.$$

Or $y = x^2$ donc $y \geqslant 0$: on peut donc écrire

$$x^4 + 2x^2 - 3 > 0 \iff y^2 + 2y - 3 > 0 \iff y > 1 \iff |x| > 1.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $x^4 + 2x^2 - 3 > 0$ est $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

(*iv*) Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant $y = x^3$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
x^6 - 3x^3 + 1 = 0 &\iff y^2 - 3y + 1 = 0 \\
&\iff y = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad y = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\
&\iff x = \sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}.
\end{aligned}$$

Les solutions de l'équation $x^6 - 3x^3 + 1 = 0$ sont donc les réels $\sqrt[3]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ et $\sqrt[3]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$.

(*v*) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a [1]

$$\begin{aligned}
(x^2-2)(x^2-1) > (x^2-2)^2 &\iff (x^2-2)(x^2-1) - (x^2-2)^2 > 0 \\
&\iff (x^2-2)\Big((x^2-1) - (x^2-2)\Big) > 0 \\
&\iff (x^2-2) \cdot 1 > 0 \iff x^2 - 2 > 0 \\
&\iff x^2 > 2 \iff |x| > \sqrt{2} \\
&\iff x < -\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x > \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x^2-2)(x^2-1) > (x^2-2)^2$ est donc $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$.

(*vi*) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x - 1 < 0$, on a évidemment $x - 1 \leqslant \sqrt{x^2+2}$. Si $x - 1 \geqslant 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
x - 1 \leqslant \sqrt{x^2+2} &\iff (x-1)^2 \leqslant x^2 + 2 \quad \text{car} \quad x - 1 \geqslant 0 \\
&\iff x^2 - 2x + 1 \leqslant x^2 + 2 \iff 2x + 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Or cette dernière condition est toujours vérifiée si $x - 1 \geqslant 0$; ainsi, tous les réels sont solutions de l'inéquation $x - 1 \leqslant \sqrt{x^2+2}$.

1. Alternativement, on peut simplifier l'inégalité étudiée par $x^2 - 2$ après avoir discuté du signe de $x^2 - 2$ (strictement positif, nul ou strictement négatif). Une troisième méthode consiste à développer les deux termes et à comparer les grandeurs après simplification.

(vii) On remarque que les deux termes de l'inéquation sont des puissances quatrièmes :

$$(x-1)^4 \leqslant 16x^4 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-1)^4 \leqslant (2x)^4.$$

On peut alors écrire

$$(x-1)^4 \leqslant 16x^4 \quad \Longleftrightarrow \quad |x-1| \leqslant |2x|.$$

Pour résoudre cette inéquation, on la passe au carré :

$$\begin{aligned} |x-1| \leqslant |2x| \quad &\Longleftrightarrow \quad (x-1)^2 \leqslant (2x)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (2x)^2-(x-1)^2 \geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (2x+x-1)(2x-(x-1)) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (3x-1)(x+1) \geqslant 0. \end{aligned}$$

On dresse alors le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3x-1)(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, on a

$$(x-1)^4 \leqslant 16x^4 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \,]-\infty,-1] \cup [1/3,+\infty[\,.$$

$(viii)$ Soit $x>0$. En multipliant les membres de l'inégalité $x^2\sqrt{x}-4x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}<0$ par $\sqrt{x}>0$, on obtient

$$x^2\sqrt{x}-4x+\frac{1}{\sqrt{x}}<0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3-4x\sqrt{x}+1<0.$$

Or en posant $y=x\sqrt{x}$, on peut écrire

$$x^3-4x\sqrt{x}+1<0 \quad \Longleftrightarrow \quad y^2-4y+1<0,$$

mais l'expression polynomiale y^2-4y+1 admet $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$ pour racines, et son coefficient dominant est strictement positif donc on a

$$y^2-4y+1<0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2-\sqrt{3}<y<2+\sqrt{3}.$$

Ainsi, on peut écrire

$$\begin{aligned} x^2\sqrt{x}-4x+\frac{1}{\sqrt{x}}<0 \quad &\Longleftrightarrow \quad y^2-4y+1<0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2-\sqrt{3}<y<2+\sqrt{3} \quad \Longleftrightarrow \quad 2-\sqrt{3}<x^{\frac{3}{2}}<2+\sqrt{3} \\ &\Longleftrightarrow \quad (2-\sqrt{3})^2<x^3<(2+\sqrt{3}) \quad \text{car } 2-\sqrt{3}\geqslant 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (2-\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}<x<(2+\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions du système d'inéquations étudié est donc l'intervalle ouvert $\left](2-\sqrt{3})^{\frac{2}{3}},(2+\sqrt{3})^{\frac{2}{3}}\right[$.

Correction de l'exercice 18. On passe au carré pour se libérer de la valeur absolue : si $x, y \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}\big||x|-|y|\big| = |x-y| &\iff (|x|-|y|)^2 = (x-y)^2\\ &\iff |x|^2+|y|^2-2|x|\cdot|y| = x^2+y^2-2xy\\ &\iff x^2+y^2-2|xy| = x^2+y^2-2xy\\ &\iff |xy| = xy\\ &\iff xy \geqslant 0,\end{aligned}$$

donc $\big||x|-|y|\big| = |x-y|$ si et seulement si $xy \geqslant 0$, c'est-à-dire si x et y sont de même signe.

Correction de l'exercice 19.

(i) On passe au carré :

$$\begin{aligned}|x-2| < |x-1| &\iff (x-2)^2 < (x-1)^2\\ &\iff x^2-4x+4 < x^2-2x+1\\ &\iff -4x+4 < -2x+1\\ &\iff 3 < 2x\\ &\iff x > \frac{3}{2},\end{aligned}$$

donc l'ensemble des réels x vérifiant l'inégalité $|x-2| < |x-1|$ est $\left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

On pouvait aussi utiliser un argument plus géométrique : en effet, la condition $|x-2| < |x-1|$ signifie que x est strictement plus proche de 2 que de 1, ce qui revient bien à dire que $x > \frac{3}{2}$.

(ii) On raisonne en distinguant les cas selon le signe de x et de $x-1$:

- Si $x < 0$, alors $|x| = -x$ et $|x-1| = 1-x$ donc l'inéquation $|x|+|x-1| \leqslant 3$ se réécrit $1-2x \leqslant 3$, soit $x \geqslant -1$. Ainsi, tous les réels $x \in [-1, 0[$ sont solutions de l'inéquation.
- Si $x \in [0, 1[$, alors $|x| = x$ et $|x-1| = 1-x$ donc l'inéquation $|x|+|x-1| \leqslant 3$ se réécrit $1 \leqslant 3$: ainsi, tous les réels $x \in [0, 1[$ sont solutions.
- Si $x \geqslant 1$, alors $|x| = x$ et $|x-1| = x-1$ donc l'inéquation $|x|+|x-1| \leqslant 3$ se réécrit $2x-1 \leqslant 3$, soit $x \leqslant 2$. Ainsi, tous les réels $x \in [1, 2]$ sont solutions.

L'ensemble des solutions de l'inéquation s'obtient alors en concaténant les intervalles obtenus : il s'agit de l'intervalle $[-1, 2]$.

(iii) On passe au carré les deux termes de l'égalité :

$$\begin{aligned}|3x-2| < |x-1| &\iff (3x-2)^2 < (x-1)^2\\ &\iff 9x^2-12x+4 < x^2-2x+1\\ &\iff 8x^2-10x+3 < 0\\ &\iff x \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[,\end{aligned}$$

où la dernière ligne en résolvant l'équation $8x^2 - 10x + 3 = 0$, qui admet deux solutions égales à $\frac{10-\sqrt{4}}{16} = \frac{1}{2}$ et $\frac{10+\sqrt{4}}{16} = \frac{3}{4}$, et en remarquant que la fonction polynomiale $x \mapsto 8x^2 - 10x + 3$ est de coefficient dominant strictement positif. L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$.

(*iv*) La même méthode donne

$$\begin{aligned} |2x+3| \leqslant |3x+2| &\iff (2x+3)^2 \leqslant (3x+2)^2 \\ &\iff 4x^2 + 12x + 9 \leqslant 9x^2 + 12x + 4 \\ &\iff 5x^2 - 5 \geqslant 0 \\ &\iff x^2 \geqslant 1 \\ &\iff x \leqslant -1 \text{ ou } x \geqslant 1. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$.

(*v*) On raisonne une fois encore par disjonction de cas suivant le signe de $x - 1$ et celui de $3x + 1$:

- Si $x < -\frac{1}{3}$, alors $|x-1| = 1 - x$ et $|3x+1| = -3x - 1$ donc l'inéquation $|x-1| + |3x+1| \geqslant 8$ se réécrit $-4x \geqslant 8$: elle est vérifiée si et seulement si $x \leqslant -2$.
- Si $-\frac{1}{3} \leqslant x < 1$, alors $|x-1| = 1-x$ et $|3x+1| = 3x+1$, donc l'inéquation se réécrit $2+2x \geqslant 8$: or cette relation n'est jamais vérifiée puisque $x < 1$.
- Enfin, si $x \geqslant 1$, alors $|x-1| = x-1$ et $|3x+1| = 3x+1$, donc l'inéquation se réécrit $4x \geqslant 8$: elle est vérifiée dès lors que $x \geqslant 2$.

Ainsi, l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $|x-1| + |3x+1| \geqslant 8$ est $]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

(*vi*) Pour que l'inéquation ait un sens, il faut que $1 - x^2 \geqslant 0$; c'est le cas si et seulement si $x^2 \leqslant 1$, c'est-à-dire $x \in [-1, 1]$.

À présent, pour tout $x \in [-1, 1]$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2} > |3x+1| &\iff \sqrt{1-x^2}^2 > (3x+1)^2 \\ &\iff 1 - x^2 > 9x^2 + 6x + 1 \iff 10x^2 + 6x < 0. \end{aligned}$$

Or l'expression $10x^2 + 6x$ est strictement négative entre ses racines $-\frac{3}{5}$ et 0, c'est-à-dire que l'on a

$$10x^2 + 6x < 0 \iff x \in \left]-\frac{3}{5}, 0\right[.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{1-x^2} > |3x+1|$ sur $\mathbb{R}$ est l'intervalle $\left]-\frac{3}{5}, 0\right[$.

(*vii*) On remarque que le terme de gauche est le carré de celui de droite, donc en posant $y = |x+1|$ (qui est positif) on peut réécrire l'inégalité comme $y^2 \leqslant y$. Or les nombres positifs y vérifiant $y^2 \leqslant y$ sont exactement les nombres positifs inférieurs ou égaux à 1, si bien que l'on peut écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 \leqslant |x+1| &\iff 0 \leqslant |x+1| \leqslant 1 \\ &\iff 0 \leqslant |x-(-1)| \leqslant 1 \iff x \in [-2, 0]. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x+1)^2 \leqslant |x+1|$ est donc $[-2, 0]$.

(viii) La fraction $\dfrac{|x+1|}{|x-1|}$ n'existe que si $x \neq 1$. Considérons donc $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Comme $|x-1| > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} < \frac{|x+1|}{|x-1|} \leqslant 1 \quad &\iff \quad \frac{|x-1|}{2} < |x+1| \leqslant |x-1| \\
&\iff \quad \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 < (x+1)^2 \leqslant (x-1)^2 \\
&\iff \quad \frac{x^2-2x+1}{4} < x^2+2x+1 \leqslant x^2-2x+1 \\
&\iff \quad x^2-2x+1 < 4x^2+8x+4 \leqslant 4x^2-8x+4 \\
&\iff \quad x^2-2x+1 < 4x^2+8x+4 \quad \text{et} \quad 4x^2+8x+4 \leqslant 4x^2-8x+4 \\
&\iff \quad 3x^2+10x+3 > 0 \quad \text{et} \quad 8x \leqslant -8x \\
&\iff \quad 3x^2+10x+3 > 0 \quad \text{et} \quad x \leqslant 0.
\end{aligned}$$

Or la fonction polynomiale $x \mapsto 3x^2+10x+3$ admet -3 et $-\frac{1}{3}$ pour racines, donc on a

$$3x^2+10x+3 > 0 \quad \iff \quad x < -3 \quad \text{ou} \quad x > -\frac{1}{3}.$$

On trouve ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} < \frac{|x+1|}{|x-1|} \leqslant 1 \quad &\iff \quad \left(x < -3 \quad \text{ou} \quad x > -\frac{1}{3}\right) \quad \text{et} \quad x \leqslant 0 \\
&\iff \quad x \in \left]-\infty, -3\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, 0\right].
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{2} < \frac{|x+1|}{|x-1|} \leqslant 1$ est donc $\left]-\infty, -3\right[\cup \left]-\frac{1}{3}, 0\right]$.

Correction de l'exercice 20. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On va établir les inégalités

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor,$$

ce qui permettra de conclure.
On démontre l'inégalité de gauche à partir [2] de la relation $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx$, que l'on divise par n (qui est strictement positif) pour obtenir $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$. En composant cette inégalité par la fonction croissante partie entière, on obtient bien

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor.$$

---

2. La très grande majorité des manipulations sur la partie entière utilisent l'inégalité fondamentale définissant la partie entière d'un nombre x, à savoir

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1,$$

qui équivaut à l'encadrement

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$

Pour établir l'inégalité de droite, on part de la relation $\lfloor x \rfloor \leqslant x$, qui donne $n\lfloor x \rfloor \leqslant nx$ après multiplication par $n > 0$. La fonction partie entière étant croissante, on peut alors écrire que $\lfloor n\lfloor x \rfloor \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$. Mais $n\lfloor x \rfloor$ est un entier, donc il est égal à sa partie entière, si bien que cette inégalité se réécrit simplement $n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor$. En divisant cette dernière relation par n puis en composant une nouvelle fois par la fonction partie entière qui est croissante, on obtient

$$\lfloor \lfloor x \rfloor \rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \quad \text{soit} \quad \lfloor x \rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor,$$

ce qui est la deuxième inégalité attendue.

Correction de l'exercice 21.

1. La formule du binôme donne

$$\begin{aligned} S =& (3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k \sqrt{7}^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k (-\sqrt{7})^{n-k} \\ =& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k \left(\sqrt{7}^{n-k} + (-\sqrt{7})^{n-k} \right) \quad \text{par linéarité de la somme.} \end{aligned}$$

Or pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, si $n-k$ est impair on a $\sqrt{7}^{n-k} = -(-\sqrt{7})^{n-k}$ donc $\sqrt{7}^{n-k} + \sqrt{7}^{n-k} = 0$. Par ailleurs, si $n-k$ est pair et s'écrit $n-k = 2p$, on a $\sqrt{7}^{n-k} + \sqrt{7}^{n-k} = 2 \cdot \sqrt{7}^{2p} = 2 \cdot 7^p$, donc $\sqrt{7}^{n-k} + \sqrt{7}^{n-k}$ est un entier pair. Ainsi, on peut écrire que

$$S = (3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n = \sum_{\substack{k=0 \\ n-k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 3^k \underbrace{\left(\sqrt{7}^{n-k} + (-\sqrt{7})^{n-k} \right)}_{\text{entier pair}}$$

est une somme d'entiers pairs, donc est elle-même un entier pair.

2. On sait que $\sqrt{7}$ est strictement compris entre $2 = \sqrt{4}$ et $3 = \sqrt{9}$, ce qui donne l'encadrement

$$0 < 3 - \sqrt{7} < 1, \quad \text{d'où} \quad 0 < (3-\sqrt{7})^n < 1.$$

Mais on a vu dans la question précédente que $S = (3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n$ est un entier pair. En écrivant

$$(3+\sqrt{7})^n = S - \underbrace{(3-\sqrt{7})^n}_{\in]0,1[},$$

on voit alors que l'on a $S-1 < (3+\sqrt{7})^n < S$, d'où l'on déduit que $\lfloor (3+\sqrt{7})^n \rfloor$ vaut $S-1$, donc est impair.

Correction de l'exercice 22. On a $0 \leqslant x_k \leqslant A$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. En multipliant entre elles ces inégalités entre des termes positifs, on obtient donc

$$\prod_{k=1}^{n} 0 \leqslant \prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant \prod_{k=1}^{n} A \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant \prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant A^n.$$

On peut alors composer cette inégalité entre termes positifs par la fonction croissante racine n-ième pour obtenir

$$\sqrt[n]{0^n} \leqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \sqrt[n]{A^n}, \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant G \leqslant A,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 23. Si n est pair, la plus grande valeur prise par le produit est atteinte lorsque $x_k = -2$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et vaut $(-2)^n = 2^n$. Sa plus petite valeur est atteinte lorsque tous les x_k valent -2 sauf l'un d'entre eux qui vaut 1 ; le produit vaut alors $(-2)^{n-1} = -2^{n-1}$. Ainsi, si n est pair on a

$$-2^{n-1} \leqslant \prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant 2^n.$$

Si n est impair, la plus petite valeur prise par le produit est atteinte lorsque tous les x_k valent -2 et est égale à $(-2)^n = -2^n$. Sa plus grande valeur est atteinte lorsque tous les x_k valent -2 sauf l'un d'entre eux qui vaut 1 : le produit vaut alors $(-2)^{n-1} = 2^{n-1}$. Ainsi, si n est impair on a

$$-2^n \leqslant \prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant 2^{n-1}.$$

Notons qu'il est possible et plus rapide [3] de majorer le produit en valeur absolue si l'on accepte une petite perte de précision : en effet, quelle que soit la valeur de n on a

$$\left| \prod_{k=1}^{n} x_k \right| = \prod_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant \prod_{k=1}^{n} 2 = 2^n,$$

ce qui donne l'encadrement

$$-2^n \leqslant \prod_{k=1}^{n} x_k \leqslant 2^n.$$

3. Raisonner en valeur absolue permet d'obtenir des inégalités entre quantités positives (en l'occurrence $|x_k| \leqslant 2$), qui peuvent être multipliées entre elles.

Correction de l'exercice 24.

1. Si $k \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)},$$
or on peut écrire $k(k+1) \leqslant (k+1)^2$ donc, en passant à l'inverse dans cette inégalité entre termes strictement positifs :
$$\frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k(k+1)},$$
d'où le résultat attendu.
2. En sommant les inégalités démontrées dans la question précédente pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$
car la somme de droite est télescopique. En effectuant le changement d'indice $j = k+1$, on peut donc écrire
$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^2} \leqslant 1 - \frac{1}{n}$$
d'où le résultat attendu en ajoutant 1 aux deux membres de l'inégalité.

Correction de l'exercice 25.

1. L'ensemble $A \cap B$ est majoré (car il est inclus dans A) et non vide par hypothèse, donc il admet bien une borne supérieure. Cette borne $\sup(A \cap B)$ est le plus petit majorant de $A \cap B$. Or $\sup(A)$ majore A donc $A \cap B$ (qui est inclus dans A), et $\sup(B)$ majore B donc $A \cap B$ (qui est inclus dans B). Ainsi, $\min(\sup(A), \sup(B))$ est un majorant de $A \cap B$, ce qui donne l'inégalité $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$.
2. Il n'y a pas nécessairement égalité dans l'inégalité précédente : par exemple, si $A = \{0, 1\}$ et $B = \{0, 2\}$, on a $\sup(A) = 1$, $\sup(B) = 2$ et $\sup(A \cap B) = 0$.
3. L'ensemble $A \cup B$ est majoré (par le maximum d'un majorant de A et d'un majorant de B), et il est non vide puisqu'il contient $A \cap B \neq \varnothing$. Ainsi, $A \cup B$ admet une borne supérieure. Cette borne supérieure est un majorant de $A \cup B$, donc un majorant de A et de B : elle est donc supérieure ou égale à la fois à $\sup(A)$ et à $\sup(B)$, d'où $\sup(A \cup B) \geqslant \max(\sup(A), \sup(B))$. Par ailleurs, $\max(\sup(A), \sup(B))$ est un majorant à la fois de A (car il est supérieur à $\sup(A)$) et de B (car il est supérieur à $\sup(B)$) : c'est donc un majorant de $A \cup B$, ce qui montre que $\max(\sup(A), \sup(B)) \geqslant \sup(A \cup B)$. Ainsi, on a bien $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
4. Supposons que $\mathbb{R} \setminus A$ soit non vide et minoré. Il admet alors une borne inférieure. La borne supérieure $\sup(A)$ étant un majorant de A, on sait que pour tout $x > \sup(A)$ on a $x \in \mathbb{R} \setminus A$. Si l'on avait $\inf(\mathbb{R} \setminus A) > \sup(A)$, il existerait $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sup(A) < x < \inf(\mathbb{R} \setminus A)$: mais alors on aurait $x \in \mathbb{R} \setminus A$, donc x serait un élément de $\mathbb{R} \setminus A$ strictement inférieur à $\inf(\mathbb{R} \setminus A)$, ce qui est absurde. Ainsi, on a bien $\inf(\mathbb{R} \setminus A) \leqslant \sup(A)$.

5. Il n'y a pas forcément égalité dans l'inégalité précédente : par exemple, si $A = \mathbb{R}_- \cup \{1\}$, alors $\sup(A) = 1$ mais $\inf(\mathbb{R} \setminus A) = 0$. On peut montrer qu'il n'y a égalité que lorsque A est un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$; ce point est laissé en exercice au lecteur.

Correction de l'exercice 26.

1. Dans ce premier cas, $A + B$ est l'ensemble des éléments s'écrivant comme la somme d'un réel entre -1 et 1 (au sens large) et d'un réel entre 0 et 3 (au sens large) : il s'agit donc de l'intervalle $[-1, 4]$.
2. Dans ce deuxième cas, $A + B$ est l'ensemble des réels s'écrivant comme la somme d'un entier et d'un nombre dans $[0, 1[$: comme tout $x \in \mathbb{R}$ s'écrit sous la forme $x = \lfloor x \rfloor + x - \lfloor x \rfloor$ avec $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$, on a $A + B = \mathbb{R}$.
3. Supposons que les parties A et B sont majorées : or elles sont non vides, donc elles admettent une borne supérieure. On va maintenant vérifier que $\sup(A) + \sup(B)$ satisfait les conditions définissant la borne supérieure de l'ensemble $A + B$.

   Tout d'abord, si $x \in A$ et $y \in B$, alors $x \leqslant \sup(A)$ et $y \leqslant \sup(B)$ donc $x + y \leqslant \sup(A) + \sup(B)$. Ainsi, $A + B$ est majorée par $\sup(A) + \sup(B)$.

   Soit à présent $\varepsilon > 0$. Il existe par définition de $\sup(A)$ et $\sup(B)$ un $x \in A$ et un $y \in B$ tels que l'on ait $x > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ et $y > \sup(B) - \frac{\varepsilon}{2}$. En sommant ces inégalités, on obtient $x + y > \sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$, ce qui montre qu'il existe un élément de $A + B$ strictement supérieur à $\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon$.

   Ainsi, $\sup(A) + \sup(B)$ est bien la borne supérieure de $A + B$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 27. Un moment de réflexion donne l'intuition du résultat suivant :

$$\sup(B) = \begin{cases} \beta & \text{si} \quad \alpha = 0 \\ \alpha \sup(A) + \beta & \text{si} \quad \alpha > 0 \\ \alpha \inf(A) + \beta & \text{si} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

Le cas $\alpha = 0$ est facile puisqu'alors on a $B = \{\beta\}$, donc évidemment $\sup(B) = \beta$.

Considérons à présent le cas $\alpha > 0$. Pour tout $x \in A$ on a $\alpha x + \beta \leqslant \alpha \sup(A) + \beta$ puisque $x \leqslant \sup(A)$ et $\alpha > 0$. Ainsi, $\alpha \sup(A) + \beta$ est un majorant de B. Soit à présent $\varepsilon > 0$. Par définition de $\sup(A)$, il existe $x \in A$ tel que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{\alpha} < x$, d'où, en multipliant par $\alpha > 0$:

$$\alpha \sup(A) - \varepsilon < \alpha x \quad \text{et donc} \quad \alpha \sup(A) + \beta - \varepsilon < \alpha x + \beta.$$

Ainsi, il existe un élément de B strictement supérieur à $\alpha \sup(A) + \beta - \varepsilon$. Ce fait étant vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\alpha \sup(A) + \beta$ est la borne supérieure de B.

Considérons maintenant le cas $\alpha < 0$. Pour tout $x \in A$ on a $\alpha x + \beta \geqslant \alpha \inf(A) + \beta$ puisque $x \leqslant \inf(A)$ et $\alpha < 0$. Ainsi, $\alpha \inf(A) + \beta$ est un majorant de B.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\inf(A)$, il existe $x \in A$ tel que $\inf(A) - \frac{\varepsilon}{\alpha} > x$ (puisque l'on a $\frac{\varepsilon}{\alpha} < 0$), d'où, en multipliant par $\alpha < 0$,

$$\alpha \sup(A) - \varepsilon < \alpha x \quad \text{et donc} \quad \alpha \sup(A) + \beta - \varepsilon < \alpha x + \beta.$$

Ainsi, il existe un élément de B strictement supérieur à $\alpha \sup(A) + \beta - \varepsilon$. Ce fait étant vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\alpha \sup(A) + \beta$ est la borne supérieure de B.

Correction de l'exercice 28.

1. Comme f est majorée par $\sup_A f$ et comme g est majorée par $\sup_A g$, pour tout $x \in A$ on a

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leqslant \sup_A f + \sup_A g,$$

si bien que $f + g$ est majorée par $\sup_A f + \sup_A g$.

Par l'axiome de la borne supérieure, $\sup_A(f+g)$ existe et est le plus petit des majorants de $f+g$. Il est donc *a fortiori* plus petit que le majorant $\sup_A f + \sup_A g$, d'où l'on déduit que $\sup_A(f+g) \leqslant \sup_A f + \sup_A g$.

2. Pour construire l'exemple attendu, il suffit de prendre $f := \cos$ et $g := -\cos$. On a bien sûr $f + g = 0$ et donc $\sup_{\mathbb{R}}(f+g) = 0$, mais $\sup_{\mathbb{R}} f = \sup_{\mathbb{R}} g = 1$ donc $\sup_{\mathbb{R}} f + \sup_{\mathbb{R}} g = 1 + 1 = 2$.

Correction de l'exercice 29.

1. Soit $n \geqslant 1$. Cherchons le signe de la différence $\left(n^3 - (n-1)^3\right) - n^2$. On écrit tout d'abord

$$\left(n^3 - (n-1)^3\right) - n^2 = n^3 - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1) - n^2 = 2n^2 - 3n + 1.$$

Or l'expression polynomiale $2x^2 - 3x + 1$ admet $\frac{1}{2}$ et 1 pour racines ; comme son coefficient dominant est strictement positif, on a $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$ dès lors que $x \geqslant 1$. Ainsi, on a $2n^2 - 3n + 1 \geqslant 0$ puisque $n \geqslant 1$, d'où $n^3 - (n-1)^3 \geqslant n^2$.

2. Pour tout $n \geqslant 1$, en sommant les inégalités $i^2 \leqslant i^3 - (i-1)^3$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et en reconnaissant une somme télescopique on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} (i^3 - (i-1)^3) = n^3 - 0^3 = n^3,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 30.

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors

$$\begin{aligned}
g_n(x) &= \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{x+k} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x-j} + \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x+k} \quad \text{en posant } j=-k \\
&= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x-k} + \frac{1}{x+k} \right) \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{x+k+x-k}{(x-k)(x+k)} \\
&= \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2}.
\end{aligned}$$

2. Si $x \in]-1,1[$ et $k \geqslant 2$, on a $x^2 - k^2 < 0$ donc $\left|\frac{2}{x^2-k^2}\right| = \frac{2}{k^2-x^2}$. Cherchons le signe de la différence $\frac{8}{3k^2} - \left|\frac{2}{x^2-k^2}\right|$: on a

$$\begin{aligned}
\frac{8}{3k^2} - \left|\frac{2}{x^2-k^2}\right| &= \frac{8}{3k^2} - \frac{2}{k^2-x^2} \\
&= \frac{8(k^2-x^2) - 6k^2}{3k^2(k^2-x^2)} = \frac{2k^2 - 8x^2}{3k^2(k^2-x^2)},
\end{aligned}$$

or $2k^2 \geqslant 8$ et $8x^2 \leqslant 8$ donc $2k^2 - 8x^2 \geqslant 0$, et $3k^2(k^2-x^2) > 0$ donc

$$\frac{8}{3k^2} - \left|\frac{2}{x^2-k^2}\right| \geqslant 0,$$

d'où l'inégalité attendue.

3. Soit $x \in]-1,0[\cup]0,1[$. Alors

$$\begin{aligned}
\left|g_n(x) - \frac{1}{x}\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{2x}{x^2-k^2}\right| \quad \text{d'après la question 1} \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{2x}{x^2-k^2}\right| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&= \left|\frac{2x}{x^2-1}\right| + \sum_{k=2}^{n} \left|\frac{2x}{x^2-k^2}\right| = |x|\frac{2}{1-x^2} + |x| \sum_{k=2}^{n} \left|\frac{2}{x^2-k^2}\right| \\
&\leqslant |x|\frac{2}{1-x^2} + |x| \sum_{k=2}^{n} \frac{8}{3k^2} \quad \text{d'après la question 2} \\
&= |x| \left(\frac{2}{1-x^2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{8}{3k^2} \right),
\end{aligned}$$

d'où la majoration attendue.

Correction de l'exercice 31. Une démonstration directe du résultat est possible en écrivant, grâce à la positivité des coefficients binomiaux et à la formule du binôme :

$$\binom{2n}{n} \leqslant \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} 1^k 1^{2n-k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

On pouvait aussi démontrer l'inégalité attendue par récurrence, comme on le détaille ci-après.
Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $\mathcal{P}_n$: « $\binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$ ».
Initialisation :
On a $\binom{2}{1} = 2$ et $2^{2\cdot 1} = 2^2 = 4$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \geqslant 1$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie. On veut montrer que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, c'est-à-dire que $\binom{2(n+1)}{n+1} \leqslant 2^{2(n+1)}$. Or on a

$$\begin{aligned}
\binom{2(n+1)}{n+1} &= \binom{2n+2}{n+1} \\
&= \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \frac{(2n)!}{n!n!} \\
&= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n} \\
&\leqslant \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} 2^{2n} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n.
\end{aligned}$$

Pour conclure que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, il suffit de montrer que l'on a $\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} 2^{2n} \leqslant 2^{2(n+1)}$, c'est-à-dire que $\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \leqslant 4$, ce qui équivaut à $(2n+2)(2n+1) \leqslant 4(n+1)^2$ puisque $(n+1)^2 > 0$. Or on a

$$\begin{aligned}
(2n+2)(2n+1) - 4(n+1)^2 &= 4n^2 + 6n + 2 - 4n^2 - 8n - 4 \\
&= -2 - 2n \leqslant 0
\end{aligned}$$

donc $(2n+2)(2n+1) \leqslant 4(n+1)^2$, ce qu'il fallait démontrer.
Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
Conclusion :
La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 32.

1. On sait que $n \leqslant u\sqrt{d} \leqslant n+1$. En divisant cette inégalité par $u > 0$, on obtient $\frac{n}{u} \leqslant \sqrt{d} \leqslant \frac{n+1}{u}$. Comme tous les termes de cet encadrement sont positifs, on peut les passer au carré pour obtenir

$$\left(\frac{n}{u}\right)^2 \leqslant \sqrt{d}^2 \leqslant \left(\frac{n+1}{u}\right)^2 \quad \text{soit} \quad \frac{n^2}{u^2} \leqslant d \leqslant \frac{(n+1)^2}{u^2}.$$

2. En passant à l'inverse dans l'inégalité entre termes strictement positifs démontrée dans la question précédente, on obtient
$$\frac{u^2}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{d} \leqslant \frac{u^2}{n^2}$$
donc, en multipliant les termes de cet encadrement par $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} > 0$:
$$\frac{u^2}{(n+1)^2}\frac{n(n+1)}{2} \leqslant \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} i \leqslant \frac{u^2}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}$$
soit
$$\frac{nu^2}{2(n+1)} \leqslant \frac{1}{d}\sum_{i=1}^{n} i \leqslant \frac{(n+1)u^2}{2n}.$$

Correction de l'exercice 33.

1. Par linéarité de la somme, on a :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) &= \sum_{k=1}^{n}(x^2 - 2xy_k + y_k^2)\\ &= \sum_{k=1}^{n} x^2 - 2x\sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=1}^{n} y_k^2\\ &= nx^2 - 2\sum_{k=1}^{n} y_k x + \sum_{k=1}^{n} y_k^2,\end{aligned}$$
donc p est bien une fonction polynomiale du second degré puisque $n \neq 0$.
2. Si $x \in \mathbb{R}$, le réel $p(x)$ est une somme de carrés donc il est positif.
3. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $p(x) = 0$ si et seulement s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $(x - y_k)^2 = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (puisque tous les termes $(x - y_k)^2$ sont positifs) ; c'est le cas si et seulement si tous les y_k sont égaux.
4. Comme p ne change pas de signe, son discriminant est négatif ou nul, si bien que
$$\left(-2\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2 - 4n\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leqslant 0.$$
En d'autres termes, on a
$$4\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2 - 4n\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \leqslant 0 \quad \text{soit} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)^2 \leqslant n\sum_{k=1}^{n} y_k^2,$$
d'où l'inégalité attendue en divisant par $n^2 > 0$.
5. D'après le raisonnement suivi dans la question précédente, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement le discriminant associé à p est nul, c'est-à-dire qu'il existe une racine de p. On a vu dans la question 3 que cette condition était équivalente au fait que tous les y_k sont égaux.

Correction de l'exercice 34. Un capital placé sur un compte à intérêts composés au taux d'intérêt annuel $r \geqslant 0$ est multiplié par $(1+r)^{20}$ en 20 ans. On cherche donc $r \geqslant 0$ tel que $(1+r)^{20} = 2$: comme $1 + r \geqslant 0$, cette condition est réalisée si et seulement si $1 + r = \sqrt[20]{2}$, soit $r = \sqrt[20]{2} - 1 \approx 3,5\%$.

Correction de l'exercice 35. Les taux de croissance successifs n'étant pas appliqués à une population constante, il ne suffit pas de diviser 50% par 10 pour trouver la réponse : en effet, une croissance annuelle de 5% correspond à une croissance d'environ 62, 9% en 10 ans. Le problème est en fait le même que dans l'exercice précédent : on cherche $r \geqslant 0$ tel que $(1+r)^{10} = 1,5$, et on trouve alors $r = \sqrt[10]{1,5} - 1 \approx 4,1\%$.

Correction de l'exercice 36. Une octave contient 12 demi-tons. Ainsi, on a $a^{12} = 2$, soit $a = \sqrt[12]{2}$.

Correction de l'exercice 37. On note L la longueur du champ et ℓ sa largeur, toutes deux exprimées en mètres. On sait que $2(L+\ell) = 40$, si bien que $L = 20 - \ell$. On sait par ailleurs que $\ell \times L = 91$, soit $\ell(20-\ell) = 91$, soit encore $20\ell - \ell^2 = 91$, donc $\ell^2 - 20\ell + 91 = 0$. Le discriminant de cette équation du second degré est $\Delta = 20^2 - 4 \cdot 91 = 36 > 0$, donc l'équation admet deux solutions

$$x_1 = \frac{20 - \sqrt{36}}{2} = 7 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{20 + \sqrt{36}}{2} = 13.$$

La relation $L = 20 - \ell$ indique alors que si $\ell = 7$, on a $L = 13$, et si $\ell = 13$, alors $L = 7$. L'un des côtés du champ mesure donc 7m, et l'autre 13m.

Correction de l'exercice 38. Lorsque le producteur fixe un prix $p \geqslant 0$, il doit faire face à une demande $D(p)$ qui occasionne une recette totale $pD(p)$ et un coût $C(D(p))$, donc un profit égal à

$$\pi(p) = pD(p) - C(D(p)) = \max\left(0, 100p - p^2\right) - 300 - 20\max\left(0, 100 - p\right).$$

Lorsque $p > 100$, on a $D(p) = 0$ et donc $\pi(p) < 0$.

Étudions à présent les variations de la quantité $\pi(p)$ lorsque $p \in [0, 100]$: sur cet intervalle, on a

$$\pi(p) = 100p - p^2 - 300 - 20\left(100 - p\right) = -p^2 + 120p - 2300.$$

Cette quantité est une fonction polynomiale du second degré en p ; comme son coefficient dominant vaut $-1 < 0$, elle admet un maximum en $-\frac{120}{2\times(-1)} = 60$.

Comme $\pi(60) = -3600 + 7200 - 2300 = 1300 > 0$, le prix permettant au producteur de maximiser son profit est égal à 60€. La quantité produite associée est $D(60) = 40$ unités.

Correction de l'exercice 39. On repère la position du randonneur et des différents points sur le trajet par la distance (en kilomètres) qui les sépare du début du chemin, qui est un réel entre 0 et 40. Ainsi, le village se trouve au point 20, la grotte au point 26 et les deux sources aux points 15 et 30.

Les positions auxquelles le randonneur pourra bivouaquer sont repérées par les réels $x \in [0,40]$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{cases} 2|x-20| \leqslant |x-26| \\ |x-15| \leqslant 3 \quad \text{ou} \quad |x-30| \leqslant 3 \end{cases} \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \begin{cases} 2|x-20| \leqslant |x-26| \\ 12 \leqslant x \leqslant 18 \quad \text{ou} \quad 27 \leqslant x \leqslant 33. \end{cases}$$

Or si $x \in [0,40]$, on peut écrire

$$\begin{aligned} 2|x-20| \leqslant |x-26| \quad &\iff \quad 4(x-20)^2 \leqslant (x-26)^2 \\ &\iff \quad 4(x-20)^2 - (x-26)^2 \leqslant 0 \\ &\iff \quad \big(2(x-20)-(x-26)\big)\big(2(x-20)+(x-26)\big) \leqslant 0 \\ &\iff \quad (x-14)(3x-66) \leqslant 0 \\ &\iff \quad \big(x-14 \leqslant 0 \text{ et } 3x-66 \geqslant 0\big) \text{ ou } \big(x-14 \geqslant 0 \text{ et } 3x-66 \leqslant 0\big) \\ &\iff \quad \big(x \leqslant 14 \text{ et } x \geqslant 22\big) \text{ ou } \big(x \geqslant 14 \text{ et } x \leqslant 22\big) \\ &\iff \quad 14 \leqslant x \leqslant 22. \end{aligned}$$

Ainsi, les conditions imposées au randonneur se réécrivent

$$\begin{cases} 14 \leqslant x \leqslant 22 \\ 12 \leqslant x \leqslant 18 \quad \text{ou} \quad 27 \leqslant x \leqslant 33. \end{cases} \qquad \text{soit} \quad 14 \leqslant x \leqslant 18.$$

Les positions de bivouac possibles sont donc les points situés entre les kilomètres 14 et 18 : le randonneur peut ainsi parcourir au plus 18 kilomètres avant de camper.

Correction de l'exercice 40. Démontrons que la fonction $f : a \mapsto \frac{a}{1+a}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a \leqslant b$. On écrit

$$f(a) = \frac{1+a-1}{1+a} = \frac{1+a}{1+a} - \frac{1}{1+a} = 1 - \frac{1}{1+a} \quad \text{et de même} \quad f(b) = 1 - \frac{1}{1+b}.$$

Or $1+a \leqslant 1+b$, donc, en passant à l'inverse dans cette inégalité entre termes strictement positifs, $\frac{1}{1+b} \leqslant \frac{1}{1+a}$. En passant à l'opposé et en ajoutant 1, on trouve alors

$$1 - \frac{1}{1+a} \leqslant 1 - \frac{1}{1+b} \quad \text{soit} \quad f(a) \leqslant f(b).$$

La fonction f est donc bien croissante sur $\mathbb{R}_+$.

On rappelle à présent que $|x-y| \leqslant |x|+|y|$ d'après l'inégalité triangulaire ; en composant cette inégalité par la fonction f (qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$ comme on vient de le voir), on obtient

$$f(|x-y|) \leqslant f(|x|+|y|) \quad \text{soit} \quad \frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leqslant \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|}.$$

Or on a $1+|x|+|y| \geqslant 1+|x|$ puisque $|y| \geqslant 0$, et $1+|x|+|y| \geqslant 1+|y|$ puisque $|x| \geqslant 0$. En passant à l'inverse dans ces inégalités entre nombres strictement positifs, on obtient

$$\frac{1}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{1}{1+|x|} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{1}{1+|y|},$$

d'où

$$\frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$

On en déduit bien l'inégalité attendue.

Correction de l'exercice 41. Montrons pour commencer que $\sup(A) - \inf(A)$ majore B. Pour tous $a, b \in A$, on a

$$\inf(A) \leqslant a \leqslant \sup(A) \quad \text{et} \quad \inf(A) \leqslant b \leqslant \sup(A) \quad \text{soit} \quad -\sup(A) \leqslant -b \leqslant -\inf(A)$$

donc, par sommation,

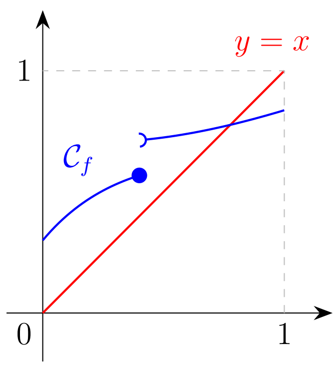
$$\inf(A) - \sup(A) \leqslant a - b \leqslant \sup(A) - \inf(A).$$

Cet encadrement signifie que $|a-b| \leqslant \sup(A) - \inf(A)$, donc B est bien majorée par $\sup(A) - \inf(A)$.
Soit à présent $\varepsilon > 0$. Par définition de $\inf(A)$ et de $\sup(A)$, il existe $a \in A$ tel que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < a$ et $b \in A$ tel que $b < \inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors

$$a - b > \sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} - (\inf(A) + \frac{\varepsilon}{2}) = \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon,$$

donc $|a-b| \geqslant a - b \geqslant \sup(A) - \inf(A) - \varepsilon$. Il existe donc un élément de B strictement supérieur à $\sup(A) - \inf(A) - \varepsilon$. Les deux conditions permettant de dire que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$ sont donc bien réunies, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 42. Si $f(0) = 0$, le problème est réglé et 0 est un point fixe de f. Il en va de même si $f(1) = 1$ (le réel 1 est alors point fixe de f). Si $f(0) > 0$ et $f(1) < 1$, un dessin représentant la courbe de f et le segment de droite d'équation $y = x$ pour $x \in [0,1]$ suggère que « $f(x)$ reste au-dessus de x jusqu'à un point qui est nécessairement un point fixe de f » :



Considérons donc la partie $A = \{x \in [0,1] \ : \ f(x) \geqslant x\}$. Comme $f(0) \geqslant 0$, on a $0 \in A$, donc A est non vide. Par ailleurs, il s'agit d'une partie majorée par 1 ; elle admet donc une borne supérieure $\alpha \in [0,1]$. On va montrer que α est un point fixe de f.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon < x \leqslant \alpha$; par croissance de f, on a alors $f(\alpha) \geqslant f(x) \geqslant x > \alpha - \varepsilon$. AInsi, $f(\alpha)$ est supérieur à $\alpha - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $f(\alpha) \geqslant \alpha$.

Si $\alpha = 1$, la relation $f(\alpha) \geqslant \alpha$ donne $f(1) = 1$ puisque f est à valeurs dans $[0,1]$, donc α est bien un point fixe de f. Supposons à présent que $\alpha < 1$. Dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\alpha+\varepsilon \notin A$, donc si ε est assez petit pour que $\alpha+\varepsilon \leqslant 1$, on peut écrire $f(\alpha+\varepsilon) < \alpha+\varepsilon$. Comme f est croissante, on a donc $f(\alpha) \leqslant f(\alpha+\varepsilon) < \alpha+\varepsilon$: ainsi, $f(\alpha)$ est inférieur à $\alpha+\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, ce qui signifie que $f(\alpha) \leqslant \alpha$.

On a bien établi que $f(\alpha) \geqslant \alpha$ et que $f(\alpha) \leqslant \alpha$, et donc que $f(\alpha) = \alpha$, c'est-à-dire que α est un point fixe de f.

Correction de l'exercice 43. Supposons que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ soit rationnel et écrivons-le sous la forme $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On a alors $\sqrt{3} = \frac{a}{b} - \sqrt{2}$ soit, en passant au carré, $3 = \frac{a^2}{b^2} - \frac{2a}{b}\sqrt{2} + 2$. On en déduit que $\sqrt{2} = \frac{a}{2b} - \frac{b}{2a}$, ce qui montre que $\sqrt{2}$ est rationnel : or cela est absurde, donc $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

Supposons à présent que $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ soit rationnel. On a alors $(\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3})^2 \in \mathbb{Q}$ soit

$$6+2+3-2\sqrt{6}\sqrt{2}-2\sqrt{6}\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}, \text{ soit encore } 11-4\sqrt{3}-6\sqrt{2}+2\sqrt{6} \in \mathbb{Q}.$$

En soustrayant le nombre $11 - 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$ et le nombre $2(\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3})$, rationnel par hypothèse, on obtient alors

$$11 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \quad \text{d'où} \quad 4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}.$$

On peut alors écrire $4\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, d'où $\sqrt{3} = \frac{a}{2b} - 2\sqrt{2}$ et donc, en passant au carré, $3 = \frac{a^2}{4b^2} + 8 - \frac{2a}{b}\sqrt{2}$. Ceci donne $\sqrt{2} = \frac{a}{8b} + \frac{5b}{2a} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. On en déduit que $\sqrt{6} - \sqrt{3} - \sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Correction de l'exercice 44.

1. Comme H n'est pas réduit à 0, il existe $x \in H$ tel que $x \neq 0$. Si x est négatif, on a $-x \in H$ d'après la condition (ii), donc dans tous les cas l'ensemble $H \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide. Il est par ailleurs minoré par 0, donc $H \cap \mathbb{R}_+^*$ admet bien une borne inférieure $a \in \mathbb{R}_+$.
2. (a) Comme a est la borne inférieure de $H \cap \mathbb{R}_+^*$ et comme $a > 0$, il existe $y \in H \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $y < a + a$, c'est-à-dire tel que $y < 2a$ (on a appliqué la définition de la borne inférieure avec $\varepsilon = a$). Mais on a supposé que $a \notin H$, donc $a \neq y$; comme a est un minorant de H et $y \in H$, on a $a < y$. Ainsi, on a $a < y < 2a$. En appliquant la définition de la borne inférieure avec $\varepsilon = y - a > 0$, le même argument montre qu'il existe $x \in]a, y[$ tel que $x \in H \cap \mathbb{R}_+^*$. On a alors bien $a < x < y < 2a$ avec $x, y \in H$.

   En combinant les hypothèses (ii) et (iii) sur H, on voit alors que $y - x \in H$; mais on a $y < 2a$ et $x > a$ donc $y - x < a$, et aussi $y - x > 0$, si bien que $y - x$ est un élément de $H \cap \mathbb{R}_+^*$ strictement inférieur à a, ce qui est impossible par définition de a.

Ainsi, supposer que $a \notin H$ mène à une contradiction ; on a donc $a \in H$.

(b) En utilisant les propriétés (i), (ii) et (iii) et un raisonnement par récurrence, on peut montrer que $na \in H$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si bien que $H \subset a\mathbb{Z}$.

Montrons à présent l'inclusion réciproque. Pour cela, on choisit $x \in H$ et on considère $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leqslant x < (n+1)a$ (ce qui est possible car $a > 0$). Alors $x - na$ est la différence de deux éléments de H, donc encore un élément de H. Par ailleurs, on a $0 \leqslant x - na < a$; comme H ne contient pas d'élément strictement positif strictement inférieur à a, on a donc $x = na$, soit $x \in a\mathbb{Z}$. Ainsi, on a $H \subset a\mathbb{Z}$.

On en déduit l'égalité $H = a\mathbb{Z}$.

3. Supposons que $a = 0$ et fixons $\varepsilon > 0$. Par définition de $a := \inf(H \cap \mathbb{R}_+^*)$, il existe $b \in H \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que l'on ait $0 < b < \varepsilon$. Comme $b \in H$, on a $b\mathbb{Z} \subset H$ par le même raisonnement que dans la question 2.(b). Or les éléments de $b\mathbb{Z}$ forment un maillage dont le pas vaut $b < \varepsilon$; ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'un des éléments de $b\mathbb{Z}$ se situe nécessairement dans l'intervalle $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ qui est de longueur 2ε. En d'autres termes, pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe $x \in b\mathbb{Z}$ (et donc $x \in H$) tel que $x \in]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$. Ainsi, H est bien dense dans $\mathbb{R}$.
4. Il n'est pas difficile de voir que l'ensemble proposé satisfait bien les hypothèses de l'énoncé, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Cet ensemble n'étant pas réduit à $\{0\}$, on a vu qu'il est nécessairement dense dans $\mathbb{R}$ ou de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un $a > 0$. Supposons par l'absurde que nous soyons dans ce dernier cas. Comme $1 \in H$ et $\sqrt{2} \in H$, on peut écrire $1 = am$ et $\sqrt{2} = an$ avec $m, n \in \mathbb{Z}^*$. Mais alors on a $a = \frac{1}{m}$ et donc $\sqrt{2} = \frac{1}{m}n = \frac{n}{m}$, ce qui montre que $\sqrt{2}$ est rationnel. Ce fait étant notoirement faux, l'ensemble H est bien dense dans $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 45.

1. La propriété attendue est vraie au rang $n = 0$ si et seulement si $m \leqslant x < m+1$, c'est-à-dire si l'entier m est égal à $\lfloor x \rfloor$, ce que l'on supposera désormais.

   À présent, la propriété est vraie au rang $n = 1$ si et seulement si

   $$m + \frac{a_1}{10} \leqslant x < m + \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}$$

   soit, en retirant $m = \lfloor x \rfloor$ à chacun des termes de l'inégalité,

   $$\frac{a_1}{10} \leqslant x - \lfloor x \rfloor < \frac{a_1 + 1}{10}, \quad \text{soit encore} \quad a_1 \leqslant 10(x - \lfloor x \rfloor) < a_1 + 1.$$

   Or on a $x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[$ donc $10(x - \lfloor x \rfloor) \in [0, 10[$, ce qui montre qu'il existe bien un unique $a_1 \in [\![0, 9]\!]$ tel que $a_1 \leqslant 10(x - \lfloor x \rfloor) < a_1 + 1$: c'est la partie entière de $10(x - \lfloor x \rfloor)$.

On procède de même pour définir les a_n par récurrence. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $m \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_n \in [\![0,9]\!]$ sont définis de façon à vérifier

$$m + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leqslant x < m + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

Alors pour que l'inégalité

$$m + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} \leqslant x < m + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

soit vérifiée pour un certain entier $a_{n+1} \in [\![0,9]\!]$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \leqslant x - m + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} < \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

soit, en multipliant par 10^{n+1},

$$a_{n+1} \leqslant 10^{n+1} \left(x - m + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} \right) < a_{n+1} + 1.$$

Or $x - \left(m + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} \right) < \frac{1}{10^n}$ par hypothèse, ce qui implique que

$$10^{n+1} \left(x - m + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} \right) \in [0, 10[,$$

donc la condition

$$a_{n+1} \leqslant 10^{n+1} \left(x - m + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} \right) < a_{n+1} + 1$$

est réalisée si et seulement si

$$a_{n+1} = \left\lfloor 10^{n+1} \left(x - m + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} \right) \right\rfloor \in [\![0,9]\!].$$

Ainsi, le réel a_{n+1} est défini de manière unique.

Les réels a_n sont donc tous définis de façon unique par récurrence, ce qui clôt la preuve.

2. Supposons qu'il existe $n_0 \geqslant 1$ tel que l'on ait $a_n = 9$ pour tout $n \geqslant n_0 + 1$. Pour tout $n \geqslant n_0 + 1$, on peut alors écrire

$$m + \sum_{k=1}^{n_0} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{9}{10^k} \leqslant x < m + \sum_{k=1}^{n_0} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{9}{10^k} + \frac{1}{10^n}. \quad (1)$$

Or l'expression de droite se simplifie en écrivant

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0+1}^{n} \frac{9}{10^k} + \frac{1}{10^n} &= \frac{9}{10^{n_0+1}} + \cdots + \frac{9}{10^{n-2}} + \frac{9}{10^{n-1}} + \frac{9}{10^n} + \frac{1}{10^n} \\ &= \frac{9}{10^{n_0+1}} + \cdots + \frac{9}{10^{n-2}} + \frac{9}{10^{n-1}} + \frac{1}{10^{n-1}} = \cdots = \frac{1}{10^{n_0}},\end{aligned}$$

donc l'encadrement (1) se réécrit

$$m+\sum_{k=1}^{n_0}\frac{a_k}{10^k}+\frac{1}{10^{n_0}}-\frac{1}{10^n}\leqslant x<m+\sum_{k=1}^{n_0}\frac{a_k}{10^k}+\frac{1}{10^{n_0}}.$$

En notant $y:=m+\sum_{k=1}^{n_0}\frac{a_k}{10^k}+\frac{1}{10^{n_0}}$, on obtient donc :

$$\forall n\geqslant n_0,\quad y-\frac{1}{10^n}\leqslant x<y.$$

Ainsi, x est un nombre strictement inférieur à y mais supérieur à tous les $y-\frac{1}{10^n}$ pour $n\geqslant n_0$: c'est absurde puisque $\frac{1}{10^n}$ peut être rendu arbitrairement petit lorsque n est assez grand. Ainsi, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut être stationnaire à 9.

3. L'écriture $0,9999999...$ ne correspond pas à un développement décimal propre au sens donné ci-dessus. On peut par contre lui donner un sens en tant que *développement décimal impropre*, en disant qu'elle décrit l'unique nombre x tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on ait

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}\leqslant x\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}+\frac{1}{10^n}.$$

Un simple calcul montre que le terme de droite vaut 1 et que celui de gauche vaut $1-\frac{1}{10^n}$: le nombre x désigné par l'écriture $0,9999999...$ vaut donc 1. Ainsi, le nombre 1 admet un développement décimal propre correspondant à l'écriture décimale $1,0000000...$, mais aussi un développement décimal impropre $1=0,9999999...$

4. Soit $k\in\mathbb{N}$. L'entier $\lfloor 10^k(x-\lfloor x\rfloor)\rfloor$ est obtenu en concaténant les k premières décimales de x : son écriture décimale est $a_1a_2\dots a_k$. De la même façon, l'entier $10\lfloor 10^{k-1}(x-\lfloor x\rfloor)\rfloor$ est obtenu en concaténant les $k-1$ premières décimales de x et en les faisant suivre d'un 0 : son écriture décimale est $a_1a_2\dots a_{k-1}0$. Ainsi, on obtient la décimale a_k en soustrayant ces deux nombres :

$$a_k=\lfloor 10^k(x-\lfloor x\rfloor)\rfloor-10\lfloor 10^{k-1}(x-\lfloor x\rfloor)\rfloor.$$

5. Soit $p\geqslant 2$. En copiant la définition du développement décimal propre, on peut définir le développement propre de x en base p comme la donnée d'un entier m et d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers à valeurs dans $[\![0,p-1]\!]$ telle que l'on ait

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad m+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{p^k}\leqslant x<m+\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{p^k}+\frac{1}{p^n}.$$

On peut montrer comme dans le cas de la base 10 qu'il existe un unique développement propre du réel x en base p.

6. Le réel $\frac{1}{3}$ a une partie entière égale à 0. Pour déterminer la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $[\![0,1]\!]$ correspondant à son développement dyadique propre, on raisonne de la façon suivante :
   - Comme $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, on a $a_1 = 0$.
   - Comme $\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$, on a $a_2 = 1$. On poursuit alors le raisonnement avec le reste $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.
   - Comme $\frac{1}{12} < \frac{1}{8}$, on a $a_3 = 0$.
   - Comme $\frac{1}{16} < \frac{1}{12}$, on a $a_4 = 1$. On poursuit alors le raisonnement avec le reste $\frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48}$.
   - On procède de la sorte pour trouver $a_n = 0$ lorsque n est impair, et $a_n = 1$ lorsque n est pair. Le caractère périodique du développement obtenu tient au fait que le reste considéré est divisé par 4 toutes les deux étapes.

   On en déduit que l'écriture de $\frac{1}{3}$ en binaire est $0,0101010101...$

Correction de l'exercice 46.

1. (a) En posant la division, on trouve $\frac{191}{7} = 27,285714285714...$ On remarque que les décimales obtenues se répètent à l'infini selon la séquence 285714 : on parle de *développement décimal propre périodique de période* 6. L'apparition des périodes au cours de la division s'observe à partir de la seconde occurrence du reste 2, qui correspond à la décimale 2 amorçant la séquence.

   (b) Le reste de la division d'un entier par 7 est par définition un entier de $[\![0,6]\!]$.

   (c) En vertu de la question précédente, au cours des 8 premières étapes suivant l'introduction de la virgule dans la division d'un entier par 7, un même reste apparaîtra nécessairement deux fois (c'est le principe des tiroirs). Notons r_1 et r_2 les rangs d'apparition de ce reste, avec $r_1, r_2 \in [\![1,8]\!]$ et $r_1 < r_2$. Les suites de restes et de quotients (c'est-à-dire de décimales) obtenus à la suite de l'étape r_1 et de l'étape r_2 sont les mêmes, ce qui donne lieu à un développement décimal propre périodique à partir de la r_1-ième décimale, et dont la période, égale à $r_2 - r_1$, est inférieure ou égale à 7.

   (d) Par le même raisonnement, on voit que si $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$, les décimales de $\frac{a}{b}$ se répètent à partir d'un certain rang, selon des séquences périodiques de longueur au plus égale à $b - 1$.

2. (a) On a
$$\frac{1}{9} = 0,111111..., \quad \frac{1}{99} = 0,010101... \quad \text{et} \quad \frac{1}{999} = 0,001001001...$$

   (b) En utilisant les résultats de la question précédente, on peut écrire
$$0,202020... = 10 \times 2 \times \frac{1}{99} = \frac{20}{99}, \quad 4,311311311... = 4 + 311 \times \frac{1}{999} = \frac{4307}{999}$$
   et
$$12,7234234... = 12,7 + 0,0234234... = \frac{127}{10} + 234 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{999} = \frac{14123}{1110}.$$

3. Sur le modèle du nombre $12,7234234...$ dans l'exemple précédent, tout nombre dont le développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang peut être décomposé en la somme d'un nombre décimal et d'un nombre de $[0,1[$ dont les décimales sont nulles jusqu'à un certain rang et périodiques à partir de ce rang, donc de la forme

$$0,\underbrace{000...0}_{p \text{ zéros}}s_1s_2...s_ks_1s_2...s_ks_1s_2...s_k...$$

avec $p \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $s_1,\dots,s_k \in [\![0,9]\!]$. Chacun de ces deux nombres peut s'écrire comme un quotient d'entiers : le nombre décimal s'écrit comme un nombre entier divisé par une puissance de 10 bien choisie, tandis que le deuxième nombre s'écrit comme le quotient d'un entier (celui dont l'écriture décimale est $s_1s_2...s_k$) par 10^p et par l'entier à k chiffres 999...9. Ainsi, le nombre x s'écrit comme la somme de deux nombres rationnels : il est donc bien rationnel.

4. On a montré dans la question 1. que tout nombre rationnel admet un développement décimal propre périodique à partir d'un certain rang, et on a établi la réciproque dans la question 4. On peut donc affirmer qu'un nombre réel est rationnel si et seulement si son écriture décimale propre est périodique à partir d'un certain rang.

5. Il suffit d'après ce qui précède de montrer que la suite des décimales de C n'est pas périodique à partir d'un certain rang. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, une séquence $(a_1,\dots,a_{n_0}) \in [\![0,9]\!]^{n_0}$, un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et une séquence $s = (s_1,\dots,s_k) \in [\![0,9]\!]^k$ tels que le développement décimal de C s'écrive

$$C = 0,a_1\cdots a_{n_0}\underbrace{s_1s_2\cdots s_k}_{s}\underbrace{s_1s_2\cdots s_k}_{s}\underbrace{s_1s_2\cdots s_k}_{s}... \qquad (2)$$

Considérons à présent une séquence de $n_0 + k$ chiffres qui ne contient pas la séquence s. Par construction de la constante C, cette séquence apparaît dans le développement décimal de C une infinité de fois, et donc à des rangs arbitrairement grands ; la forme (2) montre alors que cette séquence contient nécessairement la séquence s, ce qui est contradictoire.

Ainsi, la constante C n'est pas rationnelle.