2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 10. Soit A un événement.

1. Montrer que A est indépendant des événements $\varnothing$ et Ω.
2. À quelle condition A est-il indépendant de A ?

Exercice 11. Soient A, B et C trois événements mutuellement indépendants. Montrer que $A \cup B$ et C sont indépendants.

Exercice 12. On lance deux dés à six faces équilibrés.

1. Justifier que l'on modélise l'expérience par une situation d'équiprobabilité sur l'ensemble $\Omega := [\![1, 6]\!]^2$.
2. Pour tout $k \in [\![2, 12]\!]$, écrire explicitement l'événement S_k : « la somme des scores des deux dés vaut k » comme une partie de Ω et calculer sa probabilité.

Exercice 13. On lance simultanément deux dés équilibrés à six faces, l'un rouge et l'autre bleu. Modéliser la situation par un ensemble des possibles Ω explicite, puis calculer la probabilité des événements suivants (en les écrivant explicitement lorsque cela est nécessaire) :

(i) A : « le résultat du dé rouge est pair ».

(ii) B : « les deux dés amènent le même résultat ».

(iii) C : « les deux dés amènent un résultat différent ».

(iv) D : « l'un des dés amène un résultat pair et l'autre un résultat impair ».

(v) E : « on obtient au moins un 1 ».

(vi) F : « le résultat du dé rouge est strictement supérieur au résultat du dé bleu ».

Exercice 14 (Un peu de poker). On tire une main de 5 cartes parmi un jeu de 52 cartes. Donner (sous la forme d'une fraction) la probabilité d'obtenir :

(i) Une quinte flush royale, c'est-à-dire le 10, le valet, la dame, le roi et l'as d'une même couleur.

(ii) Une quinte flush (non royale), c'est-à-dire cinq cartes d'une même couleur dont les valeurs se suivent (l'as pouvant compter comme un 1) et ne forment pas une quinte flush royale.

On rappelle encore une fois que dans les jeux de cartes, le mot « couleur » désigne les symboles ♣, ♠, ♥ et ♦ et non les couleurs « rouge » et « noir ».

(iii) Une quinte (non flush), c'est-à-dire cinq cartes dont les valeurs se suivent mais qui ne sont pas toutes de la même couleur (l'as pouvant compter comme un 1).

Le niveau de difficulté des questions qui suivent est au-delà de ce qui est exigible en B/L.

(*iv*) Cinq cartes de hauteurs différentes.

(*v*) Un full, c'est-à-dire trois cartes de même hauteur et deux cartes d'une même (autre) hauteur.

(*vi*) Un brelan, c'est-à-dire trois cartes de même hauteur, mais pas un carré ni un full.

(*vii*) Deux paires, mais pas un full.

On pourra trouver sur cette page Wikipédia une liste complète des probabilités des différentes mains pour des jeux de 32 et de 52 cartes.

La fin de l'article aborde une question plus difficile mais très pertinente : compte tenu du fait que l'on possède une main donnée, quelle est la probabilité qu'un adversaire ait tiré une main strictement supérieure ?

Nous vous invitons à vous poser ce type de questions (et à tâcher d'y répondre) dans le cadre de votre jeu de hasard préféré – certains jeux de société reposant sur des lancers de cinq dés se prêtent particulièrement bien à ces considérations !

Exercice 15. Une colleuse en mathématiques travaille avec deux classes préparatoires ; la classe A est composée de 20 filles et 10 garçons, tandis que la classe B est composée de 15 filles et 15 garçons. Les groupes de colle de chaque classe sont constitués de trinômes tirés uniformément dans la classe.

1. Quelle est la probabilité qu'un groupe de colle de la classe A soit constitué de 3 filles ?
2. Quelle est la probabilité qu'un groupe de colle de la classe B soit constitué de 3 filles ?
3. Un soir, la colleuse doit interroger successivement un trinôme de chaque classe, mais elle ne se souvient plus par quelle classe elle doit commencer. Sachant que le trinôme qui se présente à l'entrée de la salle de colle est intégralement féminin, quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'élèves de la classe A ?

Exercice 16 (Paradoxe des anniversaires). On considère que les dates d'anniversaire sont réparties de façon équiprobable sur une année de 365 jours.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves dans une classe de n (avec $n \in \mathbb{N}^*$) aient leur anniversaire le même jour ?

   Indication : considérer l'événement A_k : « le k-ième élève sur la liste d'appel n'a pas la même date d'anniversaire que l'un des $k-1$ élèves précédents » pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (l'événement A_1 sera alors l'événement certain).
2. Pour quelles valeurs de n cette probabilité dépasse-t-elle 0,5 ? Commenter.

   Indication : on pourra utiliser WolframAlpha pour le calcul numérique.

Exercice 17. Soit $n \geqslant 2$. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des bijections de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ dans lui-même (appelées *permutations de* $[\![1, n]\!]$).

$\mathfrak{S}$ est un S gothique, qui se lit simplement « S ».

1. Donner le cardinal $|\mathfrak{S}_n|$.
2. Dénombrer les permutations de $[\![1, n]\!]$ fixant 1, c'est-à-dire les $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tels que $\sigma(1) = 1$.
3. Dénombrer les permutations de $[\![1, n]\!]$ vérifiant $\sigma(1) = 2$.
4. Les 7 nains sont invités par Blanche-Neige à un dîner entre amis. En parfaits gentlemen, ils déposent leurs bonnets à l'entrée du château. À l'issue d'une soirée riche en émotions, ils s'éclipsent en choisissant chacun un bonnet au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité que Joyeux reparte avec son propre bonnet ?
   (b) Quelle est la probabilité que Grincheux reparte avec le bonnet de Prof ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'Atchoum reparte avec le bonnet de Simplet, de Prof ou de Joyeux ?
   (d) Quelle est la probabilité que Grincheux reparte avec le bonnet de Prof et que Simplet reparte avec celui de Joyeux ?
   (e) Sachant que Dormeur repart avec son propre bonnet, quelle est la probabilité que Timide reparte avec le bonnet de Simplet ?
   (f) Quelle est la probabilité que tous les nains repartent avec leur propre bonnet ?
   (g) Quelle est la probabilité qu'exactement 5 nains repartent avec leur propre bonnet ?

Exercice 18. Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise 3 boules de cette urne.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans le tirage ?
2. Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

Exercice 19. Un article publié en 2010 dans *The American Economic Review* met en évidence le fait que lors d'une séance de tirs au but qui clôt certains matchs de football, l'équipe désignée par le tirage au sort pour tirer en premier a statistiquement environ 60% de chances de l'emporter. On considère deux équipes 1 et 2 de caractéristiques comparables, s'affrontant au cours d'une séance de tirs au but, et on souhaite calculer la probabilité que l'équipe 1 gagne la partie.

1. Quelle est la probabilité que l'équipe 1 gagne le match ?
2. On suppose que le tirage au sort a lieu et que l'équipe 1 gagne le match. Quelle est la probabilité que le tirage au sort ait désigné l'équipe 1 ?

Exercice 20. Écrire la formule des probabilités composées à l'aide des opérateurs $\prod$ et $\bigcap$.

Exercice 21. Soit A un événement de probabilité non nulle. Montrer que l'application $B \mapsto \mathbb{P}(B \mid A)$ est une fonction de probabilité, c'est-à-dire qu'elle vérifie les trois axiomes de Kolmogorov.

Exercice 22. Soit A un événement de probabilité non nulle. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\,\cdot \mid A)$ soit égale à $\mathbb{P}$, au sens où $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$ pour tout $B \in \mathcal{A}$.

Exercice 23. Lors d'une partie de jeu de société, on lance deux dés équilibrés à six faces, un dé rouge et un dé bleu, dans le but d'obtenir un résultat total supérieur ou égal à 10.

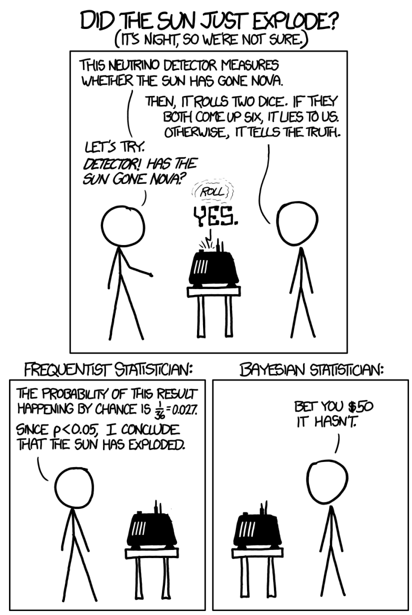
Le dé bleu tombe au sol et roule sous un meuble, si bien que l'on n'observe pas le résultat associé, et le dé rouge est récupéré par un enfant facétieux qui déclare « le résultat du dé est pair » avant de s'enfuir avec.

Calculer la probabilité que la somme des résultats des deux dés soit supérieure ou égale à 10.

Exercice 24. On lance une pièce 10 fois de suite et on obtient pile à chaque lancer. Expliquer précautionneusement quel sens il est possible de donner à l'affirmation suivante :

> « On peut affirmer avec une certitude de $1 - \frac{1}{2^{10}} \approx 99{,}9\%$ que la pièce est biaisée en faveur des piles ».

Exercice 25. Expliquer la vignette suivante :



©xkcd.com

Indication : on pourra utiliser la formule de Bayes et le fait que la probabilité que le soleil explose est très faible.

Exercice 26. Lors d'un entraînement de basket, on réalise 5 lancers successifs et indépendants pour tenter de marquer un panier. La probabilité de succès de chaque lancer est égale à $\frac{3}{4}$. Calculer les probabilités suivantes :

(i) Obtenir 3 succès suivis de 2 échecs.

(ii) Obtenir 2 échecs suivis de 3 succès.

(iii) Obtenir exactement 3 succès sur les 5 tentatives.

Exercice 27. Nestor jubile : il ne lui manque plus qu'une vignette pour compléter sa collection de 500 autocollants à l'effigie d'Andreï Kolmogorov. Conscient du fait que la probabilité d'obtenir la vignette qui lui manque en achetant un autocollant au hasard est de $\frac{1}{500}$, il décide de commander 500 nouvelles vignettes, dont chacune est choisie de manière équiprobable et indépendante des autres parmi l'ensemble des vignettes existantes par l'entreprise qui les fabrique.

1. Donner la probabilité que cette commande permette à Nestor de compléter sa collection.
2. À l'aide d'un développement limité, donner une approximation de la probabilité ainsi calculée.

Exercice 28. On dispose d'une pièce de monnaie non équilibrée dont la probabilité de tomber sur face à l'issue d'un lancer est égale à $\frac{2}{3}$. On réalise avec cette pièce une série de lancers ; si l'on obtient face deux fois de suite, on dit que l'on a obtenu un *doublé*.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement A_n : « on obtient un doublé pour la première fois aux n-ième et $(n+1)$-ième lancers », et on note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Calculer p_1, p_2 et p_3.
2. On désigne par B l'événement « le premier lancer donne pile » et par C l'événement « le premier lancer donne face et le deuxième lancer donne pile ».
   (a) Expliquer pourquoi les relations suivantes sont vérifiées :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(A_{n+2} \mid B) = \mathbb{P}(A_{n+1}) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A_{n+2} \mid C) = \mathbb{P}(A_n).$$
   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_{n+2} = \dfrac{1}{3}\, p_{n+1} + \dfrac{2}{9}\, p_n$.
   (c) Donner une expression explicite de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n l'événement : « on obtient au moins un doublé au cours des $n+1$ premiers lancers ». Calculer la probabilité de D_n et commenter.

Exercice 29 (Ruine du joueur). Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Un joueur disposant d'une certaine somme d'argent initiale joue à pile ou face avec une pièce tombant sur pile avec probabilité $p \in]0,1[$ et sur face avec probabilité $q = 1-p$. Il gagne 1€ à chaque fois que la pièce tombe sur pile et perd 1€ à chaque fois qu'elle tombe sur face, et réalise des lancers successifs indépendants jusqu'à ce qu'il soit ruiné ou que sa fortune atteigne N ; le jeu s'arrête immédiatement lorsque l'une de ces bornes est atteinte. Pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, on note r_i la probabilité que le jeu se termine par une ruine du joueur si sa fortune de départ est égale à i euros.

1. Donner r_0 et r_N.
2. Montrer que $r_i = q r_{i-1} + p r_{i+1}$ pour tout $i \in [\![1, N-1]\!]$.
3. À l'aide du cours sur les suites récurrentes linéaires doubles, en déduire r_i pour tout $i \in [\![0, N]\!]$.

Exercice 30. Alice et Bruno lancent à tour de rôle un même dé équilibré à six faces, en commençant par Alice. Le premier joueur à obtenir un 6 est déclaré gagnant et la partie s'arrête.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_k \;:\; \text{« le } k\text{-ième lancer a lieu et donne un 6 ».}$$

On introduit par ailleurs

$$A \;:\; \text{« Alice gagne la partie »}, \quad B \;:\; \text{« Bruno gagne la partie »} \quad \text{et} \quad C \;:\; \text{« Il n'y a pas de gagnant »}.$$

1. Exprimer l'événement C à l'aide des événements S_k.
2. À l'aide du théorème de la limite monotone, montrer que $\mathbb{P}(C) = 0$.
3. Exprimer les événements A et B à l'aide des événements S_k.
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de S_k.
5. En déduire $\mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B)$, puis retrouver le résultat selon lequel $\mathbb{P}(C) = 0$.

Exercice 31. La veille d'un examen important, un étudiant soucieux de ne rien laisser au hasard s'entoure de $N \geqslant 1$ réveils. Chaque réveil a une probabilité $p \in [0, 1]$ de se détraquer pendant la nuit, indépendamment des autres réveils ; s'il se détraque, il sonne avec 10 minutes de retard avec probabilité $\frac{1}{2}$, et ne sonne pas du tout sinon, ces événements étant encore une fois indépendants d'un réveil à l'autre. Confiant, l'étudiant s'endort et ne se réveillera que lorsqu'un réveil sonnera.

1. Quelle est la probabilité que l'étudiant soit réveillé à l'heure ?
2. Quelle est la probabilité que l'étudiant ne soit pas réveillé du tout ?
3. Quelle est la probabilité que l'étudiant soit réveillé en retard ?

Exercice 32. Soit $p \in \,]0, 1[$. On considère une particule qui se déplace aléatoirement sur l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. Partant de 0 à l'instant $n = 0$, elle saute à chaque unité de temps sur l'entier immédiatement supérieur (« vers la droite ») avec probabilité p, et sur l'entier immédiatement inférieur (« vers la gauche ») avec probabilité $1 - p$. On suppose les sauts indépendants les uns des autres.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'événement D_n : « le n-ème saut est un saut vers la droite ».

1. Calculer la probabilité que la séquence des six premiers sauts de la particule soit « gauche – droite – droite – droite – gauche – droite ».
2. Si $n \in \mathbb{N}$, calculer la probabilité de $A_{0,n}$: « la particule se situe en 0 à l'instant n ».
3. (*Question difficile*) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer l'événement $A_{k,n}$: « la particule se trouve en k à l'instant n » en fonction des événements $D_1, \ldots, D_n$, puis donner $\mathbb{P}(A_{k,n})$.