Fonctions réelles d'une variable réelle

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 20.

1. Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{P}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors
$$f(x+T_1+T_2) = f(x+T_1) = f(x),$$
où la première égalité résulte du fait que T_1 est une période de f, et la deuxième du fait que T_2 en est une aussi. Ainsi, $T_1 + T_2$ est une période de f, donc $T_1 + T_2 \in \mathcal{P}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est donc bien stable par somme.
2. Comme f est périodique, $\mathcal{P}$ est non vide ; il existe donc $T \in \mathcal{P}$. Mais alors $2T = T + T \in \mathcal{P}$ d'après la question précédente, ce qui implique ensuite que $3T = 2T+T \in \mathcal{P}$, puis que $4T = 3T+T \in \mathcal{P}$, et ainsi de suite. Ainsi, $\mathcal{P}$ contient tous les réels kT pour $k \in \mathbb{N}$ (ce que l'on pourrait prouver rigoureusement par récurrence sur k) : cet ensemble est donc infini.
3. Il n'est pas systématique que f admette une plus petite période, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ admette un minimum.

   Par exemple, si f est constante, alors f est T-périodique pour tout $T > 0$, ce qui signifie que $\mathcal{P} = \mathbb{R}_+^*$, donc $\mathcal{P}$ n'admet pas de minimum.

   Un exemple moins trivial est fourni par la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, qui est T-périodique pour tout $T \in \mathbb{Q}_+^*$ (en effet, si $T \in \mathbb{Q}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a alors $x + T \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x+T) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$) ; il n'est pas difficile de voir que dans ce cas, P est exactement l'ensemble $\mathbb{Q}_+^*$, qui n'admet pas non plus de minimum.

Correction de l'exercice 21.

(i) Il suffit de sommer les fonctions indicatrices des différents intervalles affectées de coefficients adaptés : une écriture de la fonction en question est par exemple $5\mathbb{1}_{]-\infty,1]} - 2\mathbb{1}_{[2,+\infty[}$.

(ii) Par définition de la partie entière, la fonction recherchée est $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

(iii) La fonction recherchée est appelée *partie entière supérieure* ; on la note parfois sous la forme $x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} \,:\, n \geqslant x\}$, mais il est possible de l'exprimer à l'aide de la fonction partie entière classique en écrivant que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ (en effet, si $x \in \mathbb{R}$ alors $\lfloor -x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $-x$, soit l'opposé de l'entier recherché). Notons que $\lceil x \rceil$ n'est pas simplement égal à $\lfloor x \rfloor + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque $\lceil n \rceil = \lfloor n \rfloor = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(*iv*) Si $k \in \mathbb{Z}$ et si $x \in [2k, 2k+2[$, alors $k = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, donc $3k = 3\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$. Ainsi, la fonction recherchée est $x \mapsto 3\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$.

(*v*) Il faut faire un dessin ! On voit alors que la fonction recherchée est *affine par morceaux*, c'est-à-dire définie par des expressions affines différentes sur différents intervalles : elle transforme x en $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ si $x \in]-\infty, 1]$, et en $-x + 2$ si $x \in]1, +\infty[$ (on rappelle que le coefficient directeur d'une droite passant par des points (x_1, y_1) et (x_2, y_2), avec $x_1 \neq x_2$, est donné par le quotient $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$). Il s'agit donc de la fonction

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ -x + 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} = \mathbb{1}_{]-\infty,1]}(x) \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \right) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)(-x + 2).$$

Correction de l'exercice 22. La courbe $\mathcal{C}_1$ rappelle celle de la fonction partie entière ; son caractère décroissant et le fait qu'elle ne croise pas l'axe des abscisses pousse à considérer que la courbe représente la fonction $f : x \mapsto -\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$.

La fonction représentée par la courbe $\mathcal{C}_2$ prend la valeur -1 sur $\mathbb{R}_-^*$. Sur $\mathbb{R}_+$, la courbe a l'aspect de celle de la racine carrée ; pour qu'elle passe par le point $(2, 1)$, on considère la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}}$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_2$ a l'allure de celle de la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

La courbe $\mathcal{C}_3$ rappelle la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Son orientation et sa position par rapport aux axes pousse à considérer qu'elle représente la fonction

$$h : x \longmapsto -\frac{1}{(1+x)^2} + 1 = 1 - \frac{1}{(1+x)^2}.$$

Correction de l'exercice 23.

1. Le domaine de définition de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2 + 2x + 1 \neq 0$, c'est-à-dire tels que $(x+1)^2 \neq 0$: il s'agit donc de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. Dire que la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de la courbe représentative de f signifie que l'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe de f décalée d'une unité vers la droite, c'est-à-dire de $g : x \mapsto f(x-1)$: en d'autres termes, cela signifie que la fonction g est paire. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$g(x) = f(x-1) = \frac{\cos(\pi(x-1))}{(x-1+1)^2} = \frac{\cos(\pi x - \pi)}{x^2} = -\frac{\cos(\pi x)}{x^2},$$

ce qui définit bien une fonction paire. Ainsi, la droite d'équation $x = -1$ est bien un axe de symétrie de la courbe de f.

Correction de l'exercice 24. Soit f une fonction périodique définie sur une partie A de $\mathbb{R}$; on note $T > 0$ une période de f. Supposons f non constante : il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) < f(b)$. Comme f est T-périodique, on a $f(a+k_1T) = f(a)$ et $f(b+k_2T) = f(b)$ pour tous $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Or il est possible de trouver $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $a + k_1T < b + k_2T$: le fait que $f(a+k_1T) = f(a) < f(b) = f(b+k_2T)$ montre alors que f n'est pas décroissante. Il est aussi possible de trouver $k_1', k_2' \in \mathbb{Z}$ tels que $a+k_1'T > b+k_2'T$: le fait que $f(a+k_1T) = f(a) < f(b) = f(b+k_2T)$ montre alors que f n'est pas croissante. Ainsi, la fonction f n'est pas monotone.

On a donc montré qu'une fonction périodique non constante ne peut être monotone : par conséquent, une fonction périodique monotone est nécessairement constante.

Correction de l'exercice 25.

1. Comme cos est 2π-périodique, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos\left(\sqrt{2}(x+\sqrt{2}\pi)\right) = \cos\left(\sqrt{2}x + 2\pi\right) = \cos\left(\sqrt{2}x\right),$$
donc la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$ est $\sqrt{2}\pi$-périodique.
2. (a) On a $f(0) = \cos(0)+\cos(0) = 2$ et, comme la fonction f est T-périodique, $f(T) = f(0) = 2$.

   Or $f(T) = \cos(T)+\cos(\sqrt{2}T)$ et on sait que $\cos(T) \leqslant 1$ et $\cos(\sqrt{2}T) \leqslant 1$, si bien que l'on a nécessairement $\cos(T) = \cos(\sqrt{2}T) = 1$.

   (b) Comme $\cos(T) = \cos(\sqrt{2}T) = 1$, les propriétés de la fonction cos (ou un simple regard sur le cercle trigonométrique) assurent que $T \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}T \in 2\pi\mathbb{Z}$.

   Il existe donc $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $T = 2m\pi$ et $\sqrt{2}T \in 2n\pi$, et on a nécessairement $m \neq 0$ puisque $T > 0$. On peut donc écrire
$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}T}{T} = \frac{2n\pi}{2m\pi} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}.$$
3. On sait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, donc l'hypothèse de périodicité de f engendre une absurdité : ainsi, f n'est pas périodique.

   La fonction f s'écrit donc comme la somme de la fonction 2π-périodique cos et de la fonction $\sqrt{2}\pi$-périodique $x \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$, mais elle n'est pas elle-même périodique : on a bien construit le contre-exemple recherché.

Correction de l'exercice 26. La réponse est encore une fois négative.

Pour démontrer ce fait, considérons à nouveau la fonction f de l'exercice précédent. Les fonctions [1] $g : x \mapsto e^{\cos(x)}$ et $h : x \mapsto e^{\cos(\sqrt{2}x)}$ sont respectivement 2π-périodiques et $\sqrt{2}\pi$-périodiques, mais leur produit
$$gh : x \mapsto e^{\cos(x)}e^{\cos(\sqrt{2}x)} = e^{\cos(x)+\cos(\sqrt{2}x)} = e^{f(x)}$$
n'est pas périodique, sans quoi $f = \ln \circ (gh)$ le serait.

1. Notons qu'il est fréquent d'utiliser l'exponentielle et le logarithme pour transposer au cas de produits des résultats démontrés dans le cas de sommes et réciproquement.

Alternativement, on aurait pu écrire directement que la fonction [2]

$$f : x \longmapsto \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}x\right)\cos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}x\right),$$

qui n'est pas périodique d'après l'exercice 25, est pourtant le produit des fonctions périodiques $x \mapsto \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}x\right)$ et $x \mapsto \cos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}x\right)$, qui ont pour périodes respectives $\frac{4\pi}{1+\sqrt{2}}$ et $\frac{4\pi}{\sqrt{2}-1}$.

2. On a utilisé la formule $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ démontrée dans les exercices accompagnant le chapitre de trigonométrie.