


## 4 PLUS LOIN, PLUS FORT

 **Exercice 36.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

1. (a) Montrer que si  $A$  et  $A'$  sont des parties de  $E$ , alors

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \quad \text{et} \quad f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A').$$

- (b) Donner un exemple d'application  $f$  et d'ensembles  $A$  et  $A'$  pour lesquels l'inclusion réciproque  $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$  n'est **pas** vérifiée.

- (c) Montrer l'équivalence suivante :

$$(\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \quad f(A) \cap f(A') = f(A \cap A')) \iff f \text{ est injective.}$$

2. (a) Montrer que si  $A$  est une partie de  $E$ , alors

$$f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A).$$

- (b) Donner un exemple d'application  $f$  et d'ensembles  $A$  et  $E$  pour lesquels l'inclusion réciproque  $f(E \setminus A) \subset f(E) \setminus f(A)$  n'est **pas** vérifiée.

- (c) Montrer l'équivalence suivante :

$$(\forall A \subset E, \quad f(E) \setminus f(A) = f(E \setminus A)) \iff f \text{ est injective.}$$

- (d) Montrer l'équivalence suivante :

$$(\forall A \subset E, \quad f(E) \setminus f(A) = f(E \setminus A)) \iff f \text{ est bijective.}$$

3. Montrer que si  $B$  et  $B'$  sont des parties de  $F$ , alors on a toujours

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \quad \text{et} \quad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B').$$

4. Montrer que si  $B$  est une partie de  $F$ , alors on a toujours

$$f^{-1}(F \setminus B) = f^{-1}(F) \setminus f^{-1}(B).$$

**Exercice 37.** Soit  $E$  un ensemble et soit  $A$  une partie de  $E$ . On considère les applications

$$\begin{array}{ccc} \Phi_A : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) & & \Psi_A : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \longmapsto A \cap X & \text{et} & X \longmapsto A \cup X. \end{array}$$

1. Établir les équivalences suivantes :

$$\Phi_A \text{ est injective} \iff \Phi_A \text{ est surjective} \iff \Phi_A \text{ est bijective} \iff A = E.$$

2. Établir les équivalences suivantes :

$$\Psi_A \text{ est injective} \iff \Psi_A \text{ est surjective} \iff \Psi_A \text{ est bijective} \iff A = \emptyset.$$

**Exercice 38.** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. On définit les applications auxiliaires

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(F) & & \Psi : \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A \longmapsto f(A) & \text{et} & B \longmapsto f^{-1}(B). \end{array}$$

1. (a) Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{P}(E)$  on a  $A \subset f^{-1}(f(A))$ , avec égalité si  $f$  est injective.  
 (b) Montrer que pour tout  $B \in \mathcal{P}(F)$  on a  $f(f^{-1}(B)) \subset B$ , avec égalité si  $f$  est surjective.
2. (a) Montrer que  $\Phi$  est injective si et seulement si  $f$  l'est.  
 (b) Montrer que  $\Phi$  est surjective si et seulement si  $f$  l'est.
3. (a) Montrer que  $\Psi$  est injective si et seulement si  $f$  est surjective.  
 (b) Montrer que  $\Psi$  est surjective si et seulement si  $f$  est injective.
4. Expliciter la bijection réciproque de  $\Phi$  et celle de  $\Psi$  dans le cas où  $f$  est bijective.


**Exercice 39.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ .

1. Soit  $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  une application strictement croissante. Montrer que  $f = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ .
2. Si  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une application strictement croissante, a-t-on nécessairement  $g = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ ?
3. Existe-t-il une application  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement décroissante?

**Exercice 40.** Soit  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une application vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(f(n)) < f(n+1). \quad (*)$$

1. Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on pose  $C_p := \{n \in \mathbb{N} : n \geq p\}$ . Montrer que si  $p \in \mathbb{N}$  alors  $f(C_p) \subset C_p$ .
2. Montrer que  $f$  est strictement croissante.
3. Montrer que  $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ .

 **Exercice 41** (Théorème de Cantor-Bernstein). L'objectif de cet exercice est de prouver le théorème de Cantor-Bernstein énoncé dans la [section 3](#) du cours et dont on rappelle l'énoncé :

*Si  $A$  et  $B$  sont des ensembles tels qu'il existe une injection de  $A$  dans  $B$  et une injection de  $B$  dans  $A$ , alors il existe une bijection de  $A$  dans  $B$ .*

1. Démontrer le théorème dans le cas où  $A$  et  $B$  sont finis.

Dans la suite, on ne suppose pas nécessairement que  $A$  et  $B$  sont finis.

On commence par démontrer le lemme suivant :

*Si  $A$  est un ensemble et si  $A' \subset A$  est tel qu'il existe une application injective  $u : A \rightarrow A'$ , alors il existe une bijection de  $A$  sur  $A'$ .*

Un *lemme* est un résultat intermédiaire dont l'intérêt intrinsèque est mineur mais qui s'avère souvent crucial pour la démonstration d'un théorème plus important.

Pour démontrer ce résultat, donnons-nous un ensemble  $A$  et une partie

$A'$  de  $A$  telle qu'il existe une application injective  $u : A \rightarrow A'$ . On cherche à construire une bijection de  $A$  sur  $A'$ .

On définit la suite d'ensembles  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $C_0 = A \setminus A'$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $C_{n+1} = u(C_n)$ , et on pose

$$C = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n.$$

2. Montrer que pour tout  $x \in C$ , on a  $u(x) \in C$  (on dit que  $C$  est *stable par  $u$* ).

On considère à présent l'application

$$v : A \longrightarrow A' \\ x \longmapsto \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in C \\ x & \text{sinon.} \end{cases}$$

3. Montrer que  $v$  est bien définie, puis qu'elle est bijective.
4. En déduire le lemme.

On démontre enfin le théorème de Cantor-Bernstein. Supposons que  $A$  et  $B$  sont deux ensembles tels qu'il existe une injection  $f : A \rightarrow B$  et une injection  $g : B \rightarrow A$ . On pose  $A' = g(B)$ .

5. Montrer que

$$h : B \longrightarrow A' \\ x \longmapsto g(x)$$

est une bijection.

6. Montrer que  $u := h \circ f$  est une injection de  $A$  dans  $A'$ .

D'après le lemme, il existe donc une bijection  $v : A \rightarrow A'$ .

7. Montrer que  $h^{-1} \circ v$  est bijective et conclure.

Les exercices ci-après font référence aux notions développées dans la section 3 du présent chapitre, disponible en suivant [ce lien](#). Ils sont donc tous hors-programme.

▣ **Exercice 42** ( $\leq$  est une relation d'ordre.). Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois ensembles. Montrer les trois propriétés suivantes :

- (i)  $|A| \leq |A|$  (réflexivité).
- (ii) Si  $|A| \leq |B|$  et  $|B| \leq |C|$ , alors  $|A| \leq |C|$  (transitivité).
- (iii) Si  $|A| \leq |B|$  et  $|B| \leq |A|$ , alors  $|A| = |B|$  (antisymétrie).

Ces trois propriétés font de la relation  $\leq$  entre cardinaux ce que l'on appelle une *relation d'ordre*.

▣ **Exercice 43.** Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse :

- (i)  $|\mathbb{D}| = |\mathbb{R}|$
- (iii)  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^*|$
- (v)  $\mathbb{Q}_- \cup [1, 2]$  est dénombrable.
- (ii)  $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}^2|$
- (iv)  $|\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$
- (vi) L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.

▣ **Exercice 44.** Montrer que si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois ensembles tels que  $|A| \leq |B|$  et  $|B| < |C|$ , alors on a  $|A| < |C|$ .

▣ **Exercice 45.** Soit  $A$  un ensemble infini tel que l'on puisse écrire

$$A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\},$$

où les  $x_n$  sont des éléments de  $A$  non nécessairement distincts deux à deux.

Montrer que  $A$  est dénombrable.

▣ **Exercice 46.** Montrer les points suivants :

1. Une union finie d'ensembles dénombrables est dénombrable.
2. Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
3. Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

▣ **Exercice 47.** Montrer que l'application


$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (a, b) &\longmapsto 2^a(2b + 1) \end{aligned}$$

est bijective.

▣ **Exercice 48.** Expliciter une bijection entre  $\mathbb{N}^3$  et  $\mathbb{N}$ .


*Indication* : on proposera un protocole de numérotation des éléments de  $\mathbb{N}^3$  sur le modèle donné dans la preuve du théorème 9 de la section 3, puis on cherchera une définition explicite.

Dans les exercices qui suivent, on pourra utiliser le résultat suivant : tout réel admet un unique développement décimal propre, c'est-à-dire une unique écriture sous la forme d'un entier suivi d'une virgule et d'un nombre infini de décimales éventuellement nulles mais qui ne sont pas toutes égales à 9 à partir d'un certain rang – cette précision étant importante puisque le nombre  $1 = 1,0000\dots$  s'écrit aussi sous la forme  $0,9999\dots$  (voir l'exercice 34 du chapitre 15).

 **Exercice 49.** Montrer que  $[0, 1]$  et  $[0, 1]^2$  sont en bijection.

 **Exercice 50.** Montrer que  $\llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbb{N}}$  et  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  sont équipotents.

*Indication* : on pourra expliciter puis utiliser une injection  $i : \llbracket 0, 9 \rrbracket \rightarrow \{0, 1\}^4$ .

 **Exercice 51** (Égalité  $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ ). Montrer que les ensembles  $[0, 1[$  et  $\llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbb{N}}$  sont équipotents, puis en déduire que  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  le sont.

*Indication* : on pourra utiliser l'écriture décimale d'un nombre  $x \in [0, 1[$ .