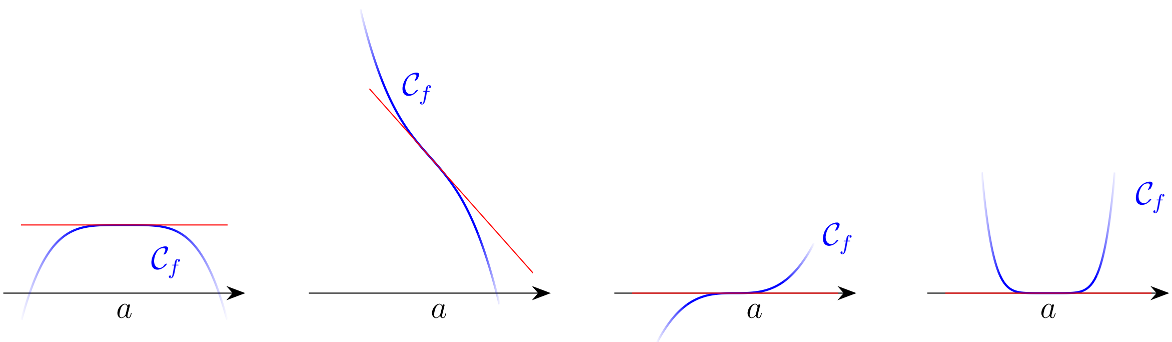
Dérivées d'ordre supérieur

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 10. On utilise les valeurs de $f(a)$ et $f'(a)$ pour déterminer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, puis la première dérivée d'ordre supérieur à 2 non nulle pour situer localement $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente.

On obtient les allures suivantes :



(i) (ii) (iii) (iv)

Notons que dans le point (iii), la donnée de $f^{(4)}(a)$ n'est pas utilisée puisque le premier nombre dérivé non nul de f en a d'ordre supérieur ou égal à 2 est $f^{(3)}(a)$.

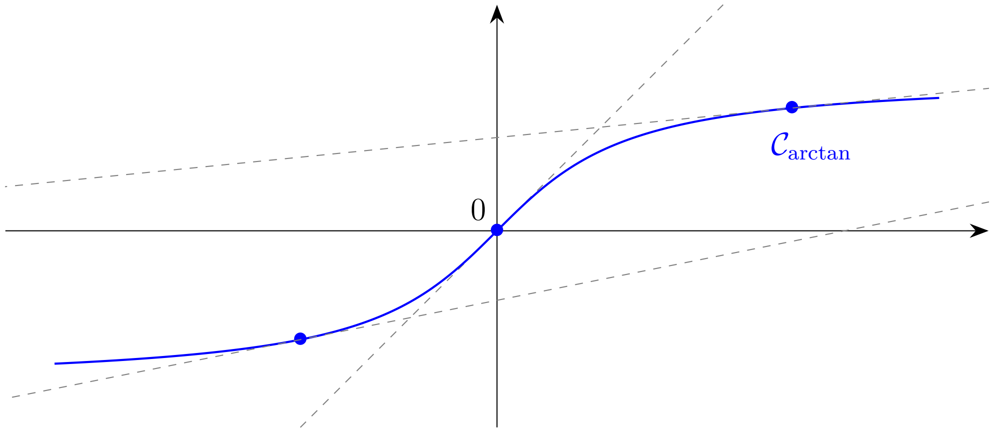
Correction de l'exercice 11. La fonction arctan est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

donc $\arctan''$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_{\arctan}$ est donc localement au-dessus de ses tangentes sur $\mathbb{R}_-^*$ et localement en-dessous de ses tangentes sur $\mathbb{R}_+^*$. En revanche, on a $\arctan''(0) = 0$; pour déterminer la position locale de la courbe par rapport à sa tangente en 0, qui est la droite d'équation $y = x$, on écrit donc

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan^{(3)}(x) &= \frac{-2 \cdot (1+x^2)^2 - (-2x) \cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}\end{aligned}$$

d'où $\arctan^{(3)}(0) = -2$, ce qui indique que $\mathcal{C}_{\arctan}$ admet un point d'inflexion à l'abscisse 0 et qu'elle traverse sa tangente « par le haut » en ce point (voir le graphique page suivante).



Correction de l'exercice 12. La fonction $f : x \mapsto e^{\alpha \ln(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a vu dans le chapitre sur la dérivation que sa dérivée (qui se calcule simplement comme dérivée d'une fonction composée) est donnée par $f' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$. En réitérant cet argument, on obtient l'expression des dérivées successives de f :

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

et plus généralement

$$\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k} = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)\right)x^{\alpha-k}.$$

Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, ce résultat prend la forme plus simple suivante :

$$\forall x > 0, \quad \forall k \in [\![0, \alpha]\!], \quad f^{(k)}(x) = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!}x^{\alpha-k} \quad \text{et} \quad \forall k > \alpha, \quad f^{(k)}(x) = 0,$$

ces égalités restant alors valables pour tout x réel (non nécessairement positif).

Correction de l'exercice 13. La fonction étudiée est dérivable [1] comme combinaison de fonctions dérivables, de dérivée

$$\begin{array}{rccl} f' : & [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)). \end{array}$$

Cette dérivée est elle-même dérivable comme combinaison de fonctions dérivables, et sa dérivée est

$$\begin{array}{rccl} f'' : & [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{-x}(\cos(x)+\sin(x)) - e^{-x}(-\sin(x)+\cos(x)) = 2e^{-x}\sin(x). \end{array}$$

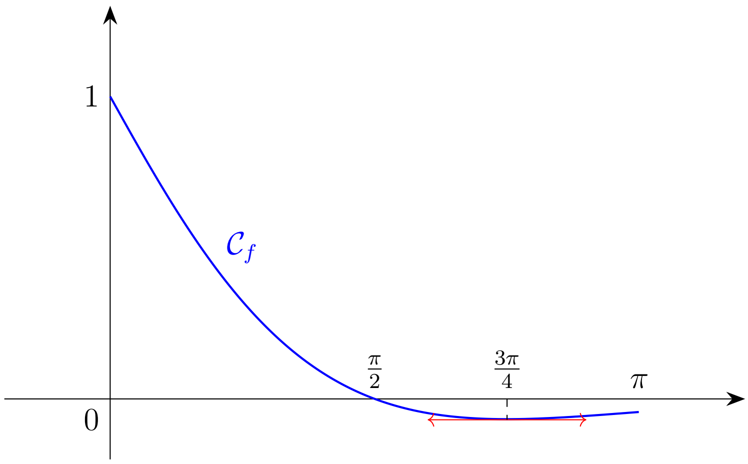
La fonction sin étant à valeurs strictement positives sur $]0,\pi[$, on a $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]0,\pi[$. La fonction f' est donc strictement croissante. Or si $x \in [0,\pi]$, l'équation $f'(x) = 0$ est équivalente à $\cos(x) + \sin(x) = 0$, soit $\sin(x) = -\cos(x)$, soit encore, en consultant le cercle trigonométrique, $x = \frac{3\pi}{4}$.

1. La dérivée est à comprendre au sens de la dérivée à droite en 0, de la dérivée classique sur $]0,\pi[$ et au sens de la dérivée à gauche en π.

On obtient donc le tableau de signes et de variations ci-dessous :

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f''(x)$		$+$		$+$	
f'	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e^{-\pi}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}}$	$\nearrow$	$-e^{-\pi}$

On en déduit l'allure du graphe de f :



Correction de l'exercice 14. La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

par somme de limites et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

par croissance comparée.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -e^{-x} - 2x \quad \text{et} \quad f''(x) = e^{-x} - 2,$$

si bien que $f''(x) > 0$ si et seulement si $-x > \ln(2)$, c'est-à-dire si et seulement si $x < -\ln(2)$. La fonction f' atteint donc son maximum en $-\ln(2)$, or on a $f'(-\ln(2)) = -2 + 2\ln(2) = 2(\ln(2) - 1) < 0$ (puisque $\ln(2) \in]0, 1[$), ce qui implique que f' est à valeurs strictement négatives et donc que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On peut alternativement présenter ces informations sur le tableau de signes et de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'		$\nearrow$	$2\ln(2)-2$	$\searrow$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

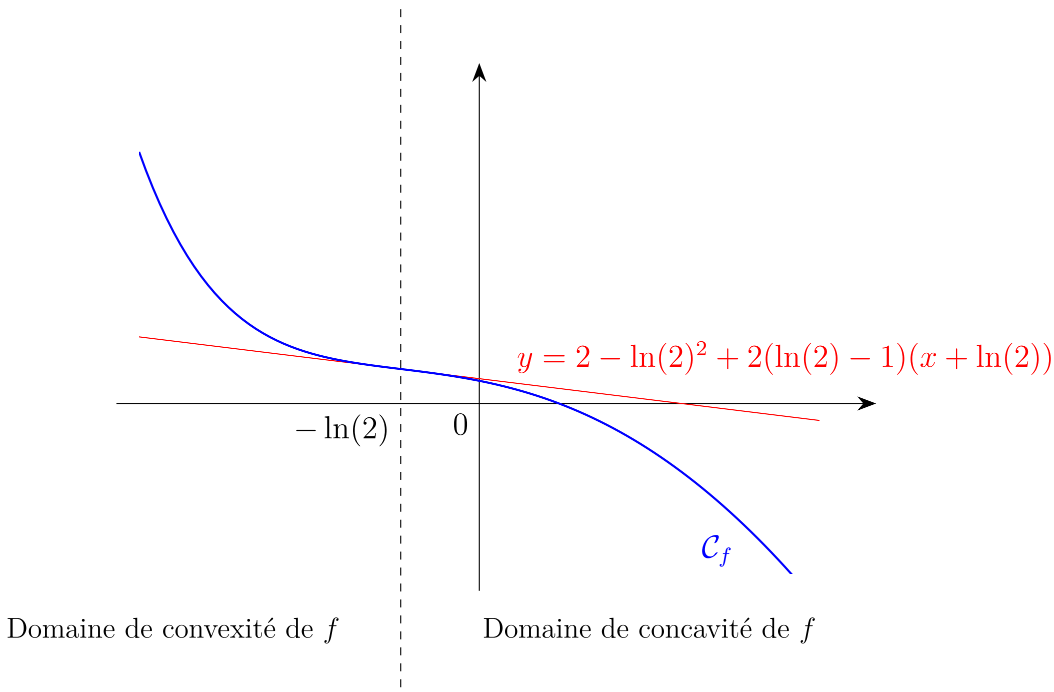
Pour représenter finement la courbe $\mathcal{C}_f$ de f, on utilise le fait f'' change de signe en $-\ln(2)$, ce qui implique que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion à l'abscisse $-\ln(2)$, dont les coordonnées sont

$$\Big(-\ln(2), f(-\ln(2))\Big) = \Big(-\ln(2), 2-\ln(2)^2\Big).$$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point est

$$y = f(-\ln(2)) + f'(-\ln(2))(x+\ln(2)) = 2-\ln(2)^2 + 2(\ln(2)-1)(x+\ln(2)),$$

d'où l'allure de $\mathcal{C}_f$:



Correction de l'exercice 15. On a tout d'abord $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

Étudions à présent le sens de variation de f. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que fonction polynomiale, et on a

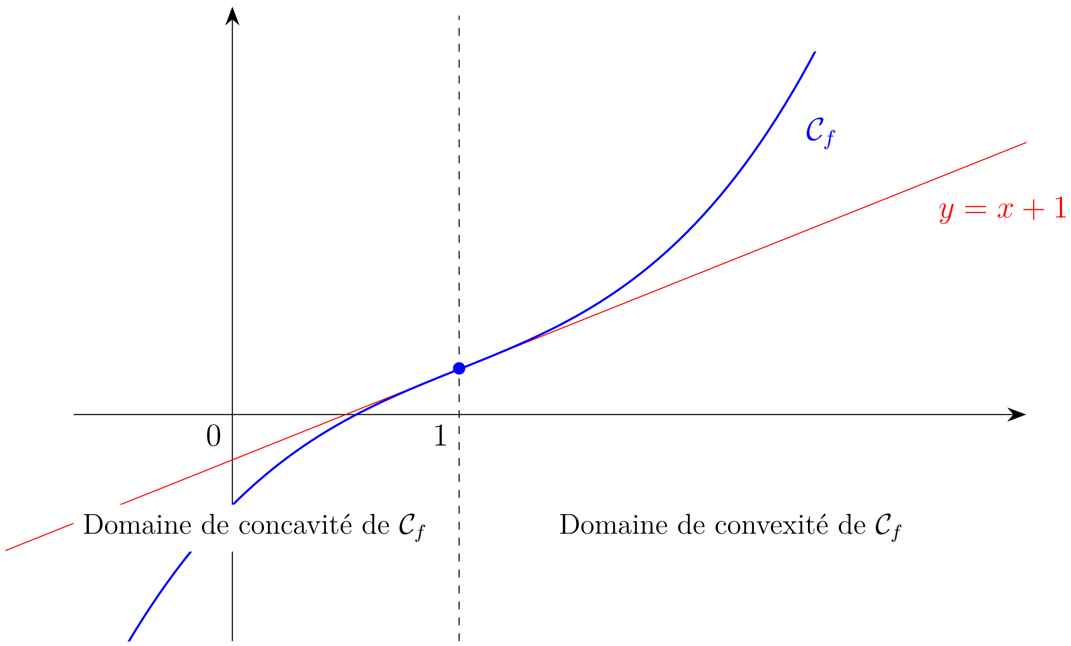
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 5.$$

Or le calcul du discriminant de cette expression montre que $3x^2 - 6x + 5 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f' est strictement positive, si bien que f est strictement croissante.

On a par ailleurs :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 6x - 6,$$

donc f'' est strictement négative sur $]-\infty, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$, ce qui implique que 1 est l'abscisse d'un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$, qui traverse en ce point sa tangente d'équation $y = 2 + (x-1) = x+1$. On obtient donc l'allure de $\mathcal{C}_f$:



Correction de l'exercice 16. En calculant la limite en 0 de f, on se heurte à une forme indéterminée que l'on lève en écrivant que

$$\ln(x) + \frac{1}{x} = \frac{x\ln(x) + 1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty,$$

où l'équivalent est obtenu par croissance comparée, si bien que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, on trouve facilement que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

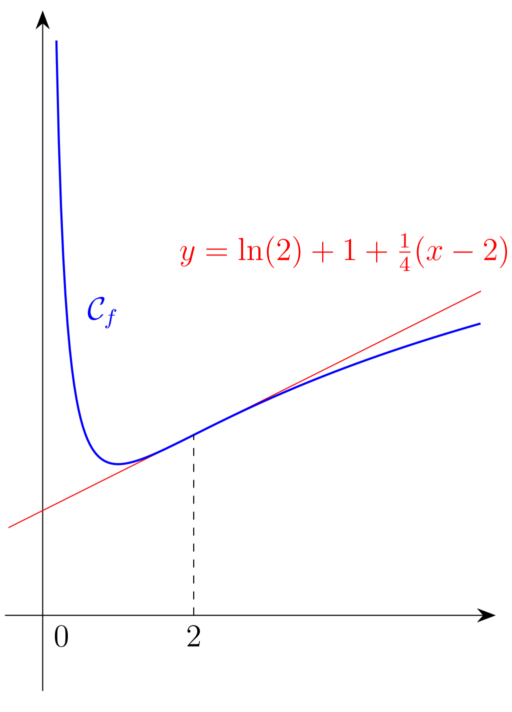
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Cherchons à présent à caractériser la convexité ou la concavité de $\mathcal{C}_f$: on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = \frac{2-x}{x^3},$$

si bien que f'' s'annule en 2, est strictement positive sur $]0,2[$ et est strictement négative sur $]2,+\infty[$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc un point d'inflexion à l'abscisse 2, qui est le lieu du passage d'un régime convexe à un régime concave. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ croise sa tangente au point d'abscisse 2, c'est-à-dire la droite d'équation $y = \ln(2) + 1 + \frac{1}{4}(x-2)$.

Ces informations permettent de donner l'allure précise de $\mathcal{C}_f$:



Correction de l'exercice 17. Tout d'abord, f est dérivable en tant que fonction polynomiale et sa dérivée, elle aussi polynomiale, est donnée par $f' : x \mapsto 4x^3 - 12x + 1$. La fonction f est donc deux fois dérivable et de dérivée seconde $f'' : x \mapsto 12x^2 - 12$.

L'étude du signe de f'' ne présente pas de problème et donne le tableau de signes et de variations ci-dessous, dans lequel l'existence des réels α, β et γ, uniques points d'annulation de f' sur $\mathbb{R}$, est une conséquence du théorème de la bijection :

x	$-\infty$		α		-1		β		1		γ		$+\infty$
$f''(x)$		$+$			0			$-$	0			$-$	
$f'(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	9	↘	0	↘	-7	↗	0	↗	$+\infty$

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

x	$-\infty$		α		-1		β		1		γ		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$			0			$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘		↗	-6	↗		↘	-4	↘		↗	$+\infty$

Une simple lecture du tableau (que l'on peut formaliser grâce au théorème de la bijection) montre que f admet une unique racine dans $]-\infty, \alpha[$ et une unique racine dans $]\gamma, +\infty[$. Par ailleurs, 0 est évidemment une racine de f, et on a $f'(0) = 1 > 0$, si bien que $0 < \beta$ et $f(0) < \beta$ d'après le tableau de variations ci-dessus. On peut donc affiner ce tableau sur $[-1, 1]$:

x	-1		0		β		1
f	-6	↗	0	↗	$f(\beta) > 0$	↘	-4

La fonction f s'annule donc une et une seule fois sur $]-1, \beta[$ (en 0), et une et une seule fois sur $]\beta, 1[$. Ainsi, f admet exactement 4 racines a, b, c, d vérifiant

$$a < -1 < b = 0 < c < 1 < d.$$

Correction de l'exercice 18. Traitons tout d'abord le cas de arcsin. L'argument le plus direct revient à dire que la fonction sin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que sa dérivée cos ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, ce qui implique que la restriction de arcsin à $]-1, 1[$, en tant que bijection réciproque de la restriction de sin à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par théorème.

On peut aussi avoir recours à un argument plus explicite en rappelant que comme on l'a vu dans le chapitre sur la dérivation, la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et vérifie

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or la fonction $x \mapsto 1-x^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et elle y prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction racine carrée est elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$; ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et elle ne s'y annule pas, donc $\arcsin' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, ce qui implique que arcsin l'est aussi.

Le raisonnement est semblable pour arccos, en remarquant que la dérivée de cos, qui vaut $-\sin$, ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, ou bien en montrant que $\arccos' : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Correction de l'exercice 19. La fonction f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, et elle vérifie $f(0) = f(1)$; le théorème de Rolle donne donc l'existence d'un point $c_1 \in]0,1[$ tel que $f'(c_1) = 0$. En appliquant le même argument entre 1 et 2, on obtient l'existence d'un point $c_2 \in]1,2[$ tel que $f'(c_2) = 0$. Comme $c_1 < 1$ et $1 < c_2$, on a $c_1 < c_2$; or la fonction f' est continue sur $[c_1, c_2]$, est dérivable sur $]c_1, c_2[$ et vérifie $f'(c_1) = f'(c_2)$, donc on peut lui appliquer le théorème de Rolle pour trouver un point $\alpha \in]c_1, c_2[$ tel que $f''(\alpha) = 0$. Comme $\alpha \in]c_1, c_2[\subset]0,2[$, on a bien établi le résultat attendu.

Correction de l'exercice 20. Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé. Comme $f'' > 0$, la fonction f' est strictement croissante ; or $f'(0) = 0$ donc on a, par exemple, $f'(1) > 0$. À présent, si $x > 1$, la fonction f est continue sur $[1,x]$ et dérivable sur $]1,x[$, et elle vérifie $f'(t) \geqslant f'(1)$ pour tout $t \in]1,x[$, donc l'inégalité des accroissements finis permet d'écrire

$$f(x) - f(1) \geqslant f'(1) \cdot (x-1) \quad \text{d'où} \quad f(x) \geqslant xf'(1) + f(1) - f'(1).$$

Comme $f'(1) > 0$, on a $xf'(1) + f(1) - f'(1) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, donc l'inégalité que nous venons d'établir implique que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 21.

1. Cette équivalence a déjà été établie dans le cours sur la dérivation ; démontrons-la à nouveau.

   Si f est constante sur $\mathbb{R}$, alors $f' = 0$. Réciproquement, supposons que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f' = 0$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, le théorème des accroissements finis appliquée à f, qui est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, implique qu'il existe $c \in]a,b[$ vérifiant $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$, d'où $f(b) - f(a) = 0$ puisque $f' = 0$; ainsi, $f(a) = f(b)$, ce qui implique que f est constante sur $\mathbb{R}$ et clôt la preuve.

2. Supposons que f est deux fois dérivable. Il est clair que si f est affine, alors f' est constante et f'' est nulle. Réciproquement, supposons que f'' est nulle. Alors f' est constante d'après le point précédent ; il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On introduit alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - cx$; cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables, et on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f'(x) - c = 0,$$
donc $g' = 0$, ce qui signifie que g est constante d'après la question 1. Il existe donc $d \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = d$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $f(x) = cx + d$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction f est donc bien affine, ce qui établit l'équivalence attendue.

3. Démontrons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$: « si f est n fois dérivable, alors $f^{(n)} = 0$ si et seulement si f est une fonction polynomiale de degré au plus $n - 1$ », où l'on rappelle qu'une *fonction polynomiale de degré au plus* $n - 1$ est une fonction de la forme
$$f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$
avec $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

   La proposition $\mathcal{P}_0$ signifie que si $f^{(0)} = 0$ alors $f = 0$, ce qui est évident puisque $f^{(0)} = f$ par définition. La proposition $\mathcal{P}_1$ a été établie dans la question 1, et la proposition $\mathcal{P}_2$ dans la question 2. Supposons à présent la proposition vraie à un rang $n \geqslant 0$ donné, et supposons que f est $n + 1$ fois dérivable.

   Il est clair que si f est une fonction polynomiale de degré au plus n, alors $f^{(n+1)} = 0$. Réciproquement, supposons que $f^{(n+1)} = 0$. Alors $(f')^{(n)} = 0$, donc d'après $\mathcal{P}_n$ il existe $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k.$$
   Définissons à présent la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$
   En tant que différence d'une fonction $n + 1$ fois dérivable et d'une fonction polynomiale (donc elle aussi $n + 1$ fois dérivable), g est $n + 1$ fois dérivable, donc dérivable, et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$$
   par linéarité de la dérivation, soit $g' = 0$. Ainsi, g est constante d'après la question 1 : il existe donc un réel que nous choisissons de note a_0 tel que

$g(x) = a_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En posant $a_k := \frac{b_{k-1}}{k}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^{k+1}}{k+1} = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

ce qui montre que f est une fonction polynomiale de degré au plus $n+1$ et établit $\mathcal{P}_{n+1}$.

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 22. Lalala
Correction de l'exercice 23. Lalala
Correction de l'exercice 24. Lalala
Correction de l'exercice 25. Lalala
Correction de l'exercice 26. Lalala
Correction de l'exercice 27. Lalala
Correction de l'exercice 28. Lalala
Correction de l'exercice 29. Lalala
Correction de l'exercice 30. Lalala
Correction de l'exercice 31. Lalala
Correction de l'exercice 32. Lalala
Correction de l'exercice 33. Lalala
Correction de l'exercice 34. Lalala
Correction de l'exercice 35. Lalala
Correction de l'exercice 36. Lalala
Correction de l'exercice 37. Lalala
Correction de l'exercice 38. Lalala
Correction de l'exercice 39. Lalala
Correction de l'exercice 40. Lalala
Correction de l'exercice 41. Lalala