

Dans la [section 1.2](#), on a étudié le signe de f'' sur un intervalle pour en déduire l'allure globale de la courbe \mathcal{C}_f . Étudier le signe de f'' sur tout un intervalle peut néanmoins s'avérer fastidieux lorsque l'expression de f'' est compliquée. On va voir que le signe des premières dérivées de f en un point donné permet déjà de connaître l'allure de \mathcal{C}_f au voisinage de ce point.

3.1 Étude locale du graphe d'une fonction

En démontrant la proposition [A](#), on a établi un résultat *local* important :

Proposition E (Dérivée seconde et position locale de \mathcal{C}_f par rapport à ses tangentes). Soit $a \in I$. Si la fonction f est deux fois dérivable en a , alors :

- Si $f''(a) > 0$, alors la courbe \mathcal{C}_f est **localement strictement au-dessus de sa tangente** en a , au sens où

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \setminus \{a\}, \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x - a).$$

- Si $f''(a) < 0$, alors la courbe \mathcal{C}_f est **localement strictement en-dessous de sa tangente** en a , au sens où

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \setminus \{a\}, \quad f(x) < f(a) + f'(a)(x - a).$$

On notera les hypothèses et les conclusions renforcées de la présente proposition par rapport à la proposition [A](#), plus globale. Remarquons que la proposition ci-contre ne permet pas de conclure sur la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à sa tangente en a dans le cas où $f''(a) = 0$; on verra dans la suite du cours comment traiter ce cas.

Exemple. On souhaite étudier la courbe représentative de la fonction f définie par

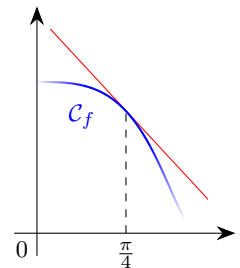
$$\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \quad f(x) = e^{x - \tan(x)}$$

au voisinage du point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$. Cette fonction est dérivable comme combinaison de fonctions dérivables, et on a

$$\forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[, \quad f'(x) = -\tan^2(x) e^{x - \tan(x)}.$$

Ainsi, f' est elle-même dérivable pour la même raison, et pour tout $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, on a

$$f''(x) = \left(-2 \tan(x) - 2 \tan^3(x) + \tan^4(x) \right) e^{x - \tan(x)}.$$



Ainsi, on a $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3e^{\frac{\pi}{4}-1}$ puisque $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, et donc $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, si bien que \mathcal{C}_f est localement strictement en-dessous de sa tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$, qui est la droite d'équation $y = e^{\frac{\pi}{4}-1} - e^{\frac{\pi}{4}-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. On en déduit l'allure de \mathcal{C}_f donnée ci-contre.

Les dérivées d'ordre $n \geq 3$ ne possèdent pas, en général, d'interprétation graphique aussi directe que celle des dérivées première et seconde. Elles permettent en revanche de décrire l'allure locale de \mathcal{C}_f au voisinage d'un point en lequel la dérivée seconde de f s'annule, comme l'indique la généralisation suivante de la proposition E :

Théorème F (Dérivées successives et allure locale de \mathcal{C}_f).

Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable $n \geq 2$ fois en a et que l'un des nombres $f^{(k)}(a)$, pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, n'est pas nul. Soit k le plus petit entier de $\llbracket 2, n \rrbracket$ vérifiant cette propriété. Alors \mathcal{C}_f :

- admet un point d'inflexion en a en lequel elle croise sa tangente « par le bas » si k est impair et si $f^{(k)}(a) > 0$.
- admet un point d'inflexion en a en lequel elle croise sa tangente « par le haut » si k est impair et si $f^{(k)}(a) < 0$.
- est localement strictement au-dessus de sa tangente en a si k est pair et si $f^{(k)}(a) > 0$.
- est localement strictement en-dessous de sa tangente en a si k est pair et si $f^{(k)}(a) < 0$.

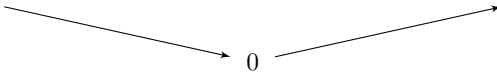
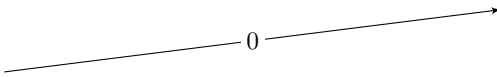
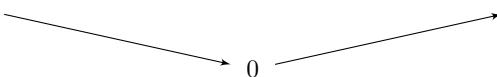
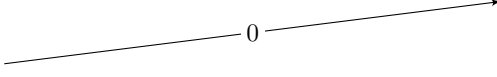
La position relative de \mathcal{C}_f par rapport à sa tangente en a est donc donnée par le premier nombre dérivé non nul d'ordre supérieur ou égal à 2 au point a .

Démonstration du théorème F — On démontre la proposition dans un unique cas de figure, en laissant au lecteur le soin de la compléter dans les autres cas.

Supposons que k est impair et que $f^{(k)}(a) > 0$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \setminus \{a\}$ on ait

$$\frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(a)}{x - a} > 0, \quad \text{soit} \quad \frac{f^{(k-1)}(x)}{x - a} > 0$$

puisque $f^{(k-1)}(a) = 0$. Ainsi, la quantité $f^{(k-1)}(x)$ est du signe de $x - a$ pour tout $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \setminus \{a\}$. On en déduit le tableau de signes et de variations donné à la page suivante, dans lequel les signes et les variations sont à comprendre au sens strict.

x	$a - \varepsilon$	a	$a + \varepsilon$
$f^{(k-1)}(x)$	-	0	+
$f^{(k-2)}$			
$f^{(k-3)}$			
$f^{(k-4)}$			
\dots	\dots		
f''			

On remarque que les cellules constituant la colonne de droite de ce tableau sont alternées. Comme l'entier k est impair, $k-1$ est pair, si bien que les variations de f'' sont les mêmes que celles de $f^{(k-1)}$.

Ainsi, f'' est bien strictement négative sur $[a - \varepsilon[$ et strictement positive sur $]a + \varepsilon]$, ce qui montre que a est un point d'inflexion de \mathcal{C}_f et implique d'après la proposition C que \mathcal{C}_f croise sa tangente en a « par le bas ». \square

On retient la méthode suivante :

Méthode G (Étude locale de \mathcal{C}_f au voisinage d'un point). Pour étudier l'allure de la courbe \mathcal{C}_f de f au voisinage d'un point $a \in I$, on calcule les dérivées successives de f en a jusqu'au premier rang $k \geq 2$ tel que $f^{(k)}(a) \neq 0$. Alors :

- Les valeurs de $f(a)$ et $f'(a)$ donnent l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f en a , qui est

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

- La parité de k et le signe de $f^{(k)}(a)$ donnent la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à sa tangente en a grâce au théorème F.

Lorsque le rang k est supérieur à 3, la courbe de f est « aplatie » contre sa tangente au voisinage du point considéré (voir les exemples ci-après).

Exemple. Étudions l'allure de la courbe de $f : x \mapsto \sin(x) + \frac{x^3}{6}$ au voisinage de 0.

En tant que somme de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ , la fonction f est elle-même de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . On a $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x) + \frac{x^2}{2}$ donc $f'(0) = 1$; ainsi, \mathcal{C}_f admet la droite d'équation $y = x$ pour tangente au point d'abscisse 0.

On détermine ensuite que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

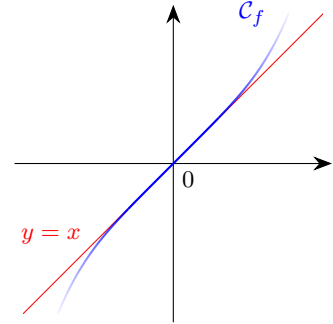
$$f''(x) = -\sin(x) + x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos(x) + 1,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad f^{(5)}(x) = \cos(x)$$

donc

$$f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(5)}(0) = 1 > 0,$$

ce qui montre que \mathcal{C}_f admet un point d'inflexion en 0, où elle traverse sa tangente « par le bas » (voir ci-contre).



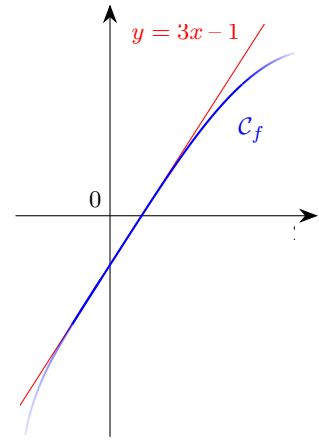
La courbe \mathcal{C}_f présente un aspect très aplati au voisinage de 0 en raison de l'annulation de ses dérivées d'ordre 2, 3 et 4 en 0.

Exemple. Étudions l'allure au voisinage de 0 de la courbe de la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) - \cos(x) + 2\sin(x)$ au voisinage de 0.

En tant que somme de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ , la fonction f est elle-même de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . On a $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$, donc la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = 3x - 1$. Le calcul des dérivées successives de f en 0 donne

$$f''(0) = f^{(3)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(4)}(0) = -7 < 0,$$

ce qui montre que \mathcal{C}_f est localement strictement en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0 (voir ci-contre).



La courbe \mathcal{C}_f présente une fois encore un aspect très aplati au voisinage de 0 en raison de l'annulation de ses dérivées d'ordre 2 et 3 en 0.