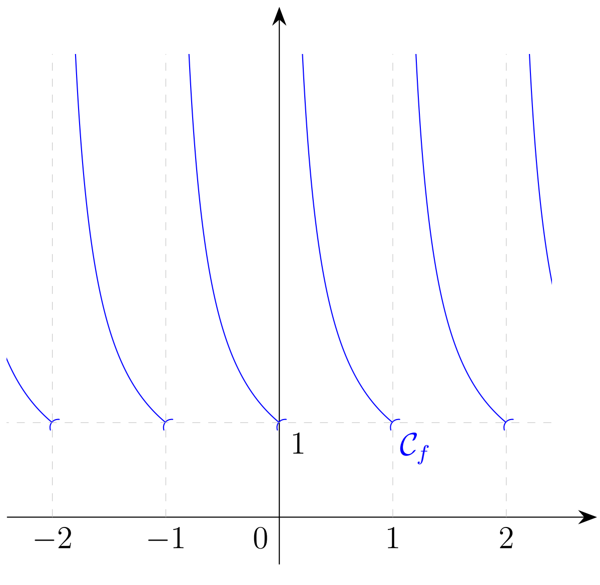
Limites et continuité

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 16. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$(x+1) - \lfloor x+1 \rfloor = x + 1 - (\lfloor x \rfloor + 1) = x - \lfloor x \rfloor.$$
Si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (ce qui assure que $x - \lfloor x \rfloor \neq 0$), on a donc
$$f(x+1) = \frac{1}{(x+1) - \lfloor x+1 \rfloor} = \frac{1}{x - \lfloor x \rfloor} = f(x),$$
ce qui montre que la fonction f est 1-périodique. Pour étudier ses limites et donner l'allure de son graphe, il suffit donc de la considérer sur l'une de ses périodes, par exemple sur l'intervalle $]0,1[$. Or pour tout $x \in]0,1[$, on a $f(x) = \frac{1}{x}$, donc
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = 1.$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a
$$\lim_{x \to n^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to n^-} f(x) = 1.$$
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ étant strictement décroissante sur $]0,1[$, on en déduit l'allure du graphe de f :



Correction de l'exercice 17. On reprend ici la stratégie de preuve utilisée pour établir le point (iii) du théorème 28 du chapitre 7, qui est l'analogue de cet exercice dans le cas des suites.

Plaçons-nous sous les hypothèses de l'énoncé et considérons $\varepsilon > 0$.

Comme g admet ℓ' pour limite en a, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in [a - \eta_1, a + \eta_1]$ on ait $|g(x) - \ell'| \leqslant 1$, et donc $|g(x)| \leqslant |\ell'| + |g(x) - \ell'| \leqslant |\ell'| + 1$ d'après l'inégalité

triangulaire (cette affirmation est à comparer avec l'affirmation selon laquelle toute suite convergente est bornée).
Or il existe aussi $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in [a-\eta_2, a+\eta_2]$ on ait $|f(x)-\ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\ell'|+1}$, et $\eta_3 > 0$ tel que pour tout $x \in [a-\eta_3, a+\eta_3]$ on ait $|g(x)-\ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)}$.
En posant $\eta := \min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, on a alors, pour tout $x \in [a-\eta, a+\eta]$:

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - \ell\ell'| &= |(f(x)-\ell)g(x) + \ell(g(x)-\ell')| \\
&\leqslant |f(x)-\ell| \cdot |g(x)| + |\ell| \cdot |g(x)-\ell'| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{|\ell'|+1} \cdot |g(x)| + |\ell| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|\ell|+1)} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{|\ell'|+1} \cdot (|\ell'|+1) + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{|\ell|}{2(|\ell|+1)} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon,
\end{aligned}$$

d'où la relation $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\ell'$.

Correction de l'exercice 18.

(*i*) La fonction considérée est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc on ne recherche des asymptotes à sa courbe qu'en $\pm\infty$. Or on a

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt[3]{x^4+x^2+x+1}}{\sqrt[3]{x^3}} = \sqrt[3]{x + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty,$$

donc la courbe de f n'admet pas d'asymptote en $\pm\infty$.

(*ii*) Si $x \in \mathbb{R}$, l'expression $g(x)$ n'existe que si $\sqrt{x}$ existe et $x^2 - 2x\sqrt{x} \geqslant 0$, c'est-à-dire si $x \geqslant 0$ et $x\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) \geqslant 0$, soit $x = 0$ ou $x \geqslant 4$. Comme g n'est pas définie au voisinage de 0, on ne s'intéresse qu'à une asymptote éventuelle en $+\infty$. Or

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2-2x\sqrt{x}}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{1 - \frac{2}{\sqrt{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1,$$

et

$$\begin{aligned}
g(x) - x = \sqrt{x^2-2x\sqrt{x}} - x &= \frac{\sqrt{x^2-2x\sqrt{x}}^{\,2} - x^2}{\sqrt{x^2-2x\sqrt{x}} + x} \\
&= \frac{-2x\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-2x\sqrt{x}} + x} = \frac{-2\sqrt{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{x}}} + 1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty,
\end{aligned}$$

donc la courbe représentative de g n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.

(*iii*) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle admet 0 pour limite en $\pm\infty$ puisque

$$|h(x)| \leqslant \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0,$$

donc la courbe représentative de h admet l'axe des abscisses pour asymptote horizontale en $\pm\infty$.

Par ailleurs, $|h|$ ne tend pas vers l'infini en 0 (puisque $h\left(\frac{1}{n\pi}\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par exemple) ; ainsi, la courbe de h n'admet pas d'asymptote verticale en 0.

Correction de l'exercice 19.

(i) Lorsque $x \to 0$, on a $\sin(x) \to 0$, donc $\tan(\sin(x)) \to 0$, d'où enfin $\cos(\tan(\sin(x))) \to 1$.

(ii) Lorsque $x \to 1^-$, on a $\frac{\pi}{2}x \to \frac{\pi}{2}^-$ donc $\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) \to +\infty$, d'où $\tan^3\left(\frac{\pi}{2}x\right) \to +\infty$.

(iii) La limite de la fonction arctan en $+\infty$ est égale à $\frac{\pi}{2}$. Or lorsque $x \to +\infty$, on a $x^2 \to +\infty$ donc $\arctan(x^2) \to \frac{\pi}{2}$. Ainsi, on a

$$\frac{\arctan(x)}{\arctan(x^2)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

(iv) Lorsque $x \to 0$, on a $x^2 \to 0^+$ donc $\sin(x^2) \to 0^+$, d'où l'on déduit que $\frac{1}{\sin(x^2)} \to +\infty$ et enfin que $\arctan\left(\frac{1}{\sin(x^2)}\right) \to \frac{\pi}{2}$.

(v) On a affaire à une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Pour faire apparaître une limite connue, on remarque que la variable $y := \pi - x$ tend vers 0 lorsque $x \to \pi$ et que $\sin(x) = \sin(\pi - y) = \sin(y)$, d'où

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin(x)}{\pi - x} = \lim_{y\to0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

(vi) On a une fois encore affaire à une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. En posant $y := \pi - 2x$ (et donc $x = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}$), on a $y \to 0$ lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$, ainsi que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\pi - 2x} = \lim_{y\to0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{y}{2}\right)}{y} = \lim_{y\to0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{y}{2}\right)}{\frac{y}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

(vii) Pour lever la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, on pose cette fois $y := x - 1$, et on écrit que $y \to 1$ lorsque $x \to 1$, pour obtenir

$$\frac{\sin(x^2-1)}{x-1} = \frac{\sin\big((x-1)(x+1)\big)}{x-1} = \frac{\sin\big(y(y+2)\big)}{y}$$

et donc

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1} &= \lim_{y\to0} \frac{\sin\big(y(y+2)\big)}{y} \\ &= \lim_{y\to0} \frac{\sin\big(y(y+2)\big)}{y(y+2)} \cdot (y+2) = 1 \cdot 2 = 2\end{aligned}$$

puisque $y(y+2) \to 0$ lorsque $y \to 0$.

(*viii*) On a encore une fois affaire à une forme indéterminée $\frac{0}{0}$. Mais lorsque $x \to 0$, on a $\sin(x) \to 0$ donc $\dfrac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Ainsi, on a

$$\frac{\sin(\sin(x))}{x^2} = \frac{\sin(\sin(x))}{\sin(x)} \cdot \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

puisque $\frac{\sin(x)}{x} \to 1$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$ quand $x \to 0^+$.

(*ix*) Pour lever la forme indéterminée $\infty \times 0$, on écrit que $\frac{1}{x} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, d'où

$$x^3 \tan^2\left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)} \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty.$$

Correction de l'exercice 20.

(*i*) Lorsque $x \to +\infty$, on a $\sqrt{x} \to +\infty$ donc $\frac{1}{\sqrt{x}} \to 0^+$, et donc

$$\lim_{x\to+\infty} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{x}} \right\rfloor = \lim_{y\to 0^+} \lfloor y \rfloor = 0.$$

(*ii*) Lorsque $x \to +\infty$, on a $\arctan(x) \to \frac{\pi}{2}$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \lfloor \arctan(x) \rfloor = \lim_{y\to\frac{\pi}{2}} \lfloor y \rfloor = 1$$

puisque $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$, d'où

$$\lim_{x\to+\infty} \tan\left(\lfloor \arctan(x) \rfloor\right) = \lim_{z\to 1} \tan(z) = \tan(1).$$

(*iii*) L'expression dans la partie entière tend vers 0 lorsque $x \to -\infty$, mais il est nécessaire d'identifier son terme prépondérant et de la factoriser pour déterminer si elle prend des valeurs positives ou négatives : on écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{x^2+1}{x^4-5} &= \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{x^2}{x^4} \cdot \frac{1+x^{-2}}{1-5x^{-4}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1+x^{-2}}{1-5x^{-4}} \\ &= \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \left(1 + \frac{1}{x \cdot \sqrt[3]{x}^2} \cdot \frac{1+x^{-2}}{1-5x^{-4}}\right) \xrightarrow[x\to -\infty]{} 0^- \end{aligned}$$

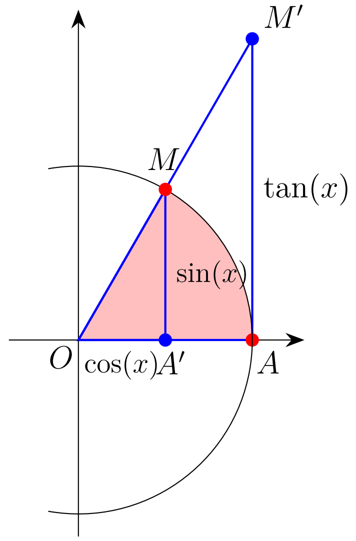
puisque lorsque $x \to -\infty$ on a $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \to 0^-$, $\frac{1}{x\cdot\sqrt[3]{x}^2} \to 0$ et $\frac{1+x^{-2}}{1-5x^{-4}} \to 1$. On obtient ainsi

$$\lim_{x\to-\infty} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{x^2+1}{x^4-5} \right\rfloor = \lim_{y\to 0^-} \lfloor y \rfloor = -1.$$

Correction de l'exercice 21.

1. (a) L'aire de $\mathcal{D}$ vaut π fois le carré du rayon de $\mathcal{D}$, qui vaut 1 : elle est donc égale à π. La surface $\mathcal{S}$ représente une fraction de $\mathcal{D}$ égale à $\frac{x}{2\pi}$, donc son aire vaut $\dfrac{x}{2\pi} \cdot \pi = \dfrac{x}{2}$.

   (b) Le triangle à étudier et celui de la question suivante sont représentés ci-dessous :



   L'aire de $OA'M$, qui est rectangle en A', est égale à

$$\frac{OA' \times A'M}{2} = \frac{\cos(x)\sin(x)}{2}.$$

   (c) L'aire de OAM', qui est rectangle en A, est égale à

$$\frac{OA \times AM'}{2} = \frac{\tan(x)}{2}.$$

   (d) Le triangle OAM' renferme la surface $\mathcal{S}$, qui contient elle-même le triangle $OA'M$: en comparant leurs aires obtenues dans les trois questions précédentes, on obtient donc

$$\frac{\cos(x)\sin(x)}{2} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{\tan(x)}{2}.$$

   En multipliant par la quantité strictement positive $\frac{2}{\sin(x)}$ les trois termes de l'inégalité ci-dessus, on trouve alors

$$\cos(x) \leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}, \quad \text{d'où} \quad \cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant \frac{1}{\cos(x)},$$

   en passant à l'inverse (car $\cos(x) > 0$), ce qu'il fallait démontrer.

2. La relation démontrée dans la question précédente est vérifiée pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Or $\cos(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$ donc $\frac{1}{\cos(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{1} = 1$; d'après le théorème des gendarmes, on a donc
$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1.$$
Pour montrer que la limite est aussi vérifiée en 0^-, on recourt au changement de variable $y := -x$ et on écrit
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(-y)}{-y} = \lim_{y\to 0^+} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$
Ainsi, la quantité $\frac{\sin(x)}{x}$ admet 1 pour limite à gauche et à droite en 0. On en déduit la relation attendue :
$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x\neq 0}]{} 1.$$

Correction de l'exercice 22. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison de fonctions continues (puisque $x \mapsto \sqrt{x}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$). Par ailleurs, on a
$$\left| x \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right| \leqslant |x| \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$
donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f(0)$ par le théorème des gendarmes, si bien que f est continue (à droite) en 0. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

Correction de l'exercice 23. La fonction f est continue sur $]0, 1[$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. On a par ailleurs
$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \cdot \frac{\pi}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \cdot \frac{\pi}{1} = \pi$$
et
$$f(x) = \frac{\sin(\pi - \pi x)}{x(1-x)} = \frac{\pi}{x} \cdot \frac{\sin(\pi(1-x))}{\pi(1-x)} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{\pi}{1} \cdot 1 = \pi$$
puisque $\pi(1-x) \to 0$ lorsque $x \to 1$. Ainsi, on peut prolonger f par continuité en 0 et en 1 en posant $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = \pi$.

Correction de l'exercice 24.

1. La fonction f est définie en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que $1 + x \neq 0$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on a
$$f(x) = \frac{1+x^5}{1+x} = \frac{1-(-x)^5}{1-(-x)} = 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 + (-x)^4$$
en reconnaissant une somme géométrique ou, ce qui revient au même, en uti-

lisant la formule de Bernoulli. Ainsi, on a

$$f(x) \xrightarrow[x\to -1]{} 1+1+1+1+1=5,$$

donc f peut être prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$ en posant $\widetilde{f}(-1)=5$.

Correction de l'exercice 25. Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe alors une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite d'irrationnels $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x (par exemple, on peut définir r_n comme l'approximation décimale de x par défaut à n chiffres après la virgule et i_n comme $r_n + \frac{\sqrt{2}}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$). On a alors

$$f(r_n) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad f(i_n) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc f ne peut admettre de limite en x. Ainsi, f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 26. Considérons la fonction $g : x \mapsto h^2(x) - \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Elle y est continue comme différence de fonctions continues, et vérifie par ailleurs $g(0) = -1$.

Réécrivons ensuite $g(x)$ sous la forme

$$g(x) = h^2(x) - \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = h^2(x) - \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On tire deux conclusions de cette reformulation.

Tout d'abord, g est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$: en effet, h est croissante et positive donc h^2 est croissante, et $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$ est strictement croissante puisque c'est l'opposée d'une fonction strictement décroissante.

Par ailleurs, comme h est positive et strictement croissante, elle admet une limite strictement positive (éventuellement infinie) en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone ; c'est donc aussi le cas de h^2. Or, comme $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, la fonction g admet la même limite que h^2 en $+\infty$, donc une limite strictement positive.

Le théorème de la bijection stipule donc que la fonction g induit une bijection de $[0,+\infty[= \mathbb{R}_+$ vers l'intervalle $[-1, \lim_{+\infty} g[$, qui contient 0 puisque $\lim\limits_{+\infty} g > 0$. Ainsi, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $g(x) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 27.

1. Soient $x, y \in I$. La fonction $\Phi : \lambda \mapsto \lambda x + (1-\lambda)y = y + \lambda(x-y)$ est une fonction affine, donc continue sur son ensemble de définition $\mathbb{R}$. Elle est notamment définie et continue sur $[0,1]$, et vérifie $\Phi(0) = 0\cdot x + 1 \cdot y = y$ ainsi que $\Phi(1) = 1\cdot x + 0\cdot y = x$.
2. D'après la question précédente, la fonction φ est continue sur $[0,1]$ comme différence de composées de fonctions continues, et elle vérifie $\varphi(0) = f(c) - f(d) > 0$ ainsi que $\varphi(1) = f(a) - f(b) < 0$. Ainsi, elle s'annule sur $]0,1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires : il existe donc $\lambda \in]0,1[$ tel que $\varphi(\lambda) = 0$, soit

$f(\lambda a + (1-\lambda)c) = f(\lambda b + (1-\lambda)d)$, donc $\lambda a + (1-\lambda)c = \lambda b + (1-\lambda)d$ puisque f est injective. Or $a < b$ et $c < d$ et $\lambda \in]0,1[$, donc $\lambda a < \lambda b$ et $(1-\lambda)c < (1-\lambda)d$, ce qui n'est pas compatible avec cette dernière égalité : on aboutit à une contradiction.

Ainsi, soit il n'existe pas de couple (a,b) vérifiant $a < b$ et $f(a) < f(b)$ (et dans ce cas, f est décroissante, donc strictement décroissante puisqu'elle est injective), soit il n'existe pas de couple (c,d) vérifiant $c < d$ et $f(c) > f(d)$ (et dans ce cas, f est croissante, et donc strictement croissante car injective). Dans les deux cas, f est strictement monotone, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 28. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Il existe alors $x_0, ..., x_n \in [a,b]$ avec

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

tels que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit prolongeable par continuité sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$.
D'après le théorème des bornes atteintes, pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, le prolongement par continuité ainsi obtenu est borné ; c'est donc aussi le cas de $f_{|]x_i,x_{i+1}[}$ elle-même ; on note $M_i > 0$ un réel tel que $|f(x)| \leqslant M_i$ pour tout $x \in]x_i, x_{i+1}[$. Les M_i étant en nombre fini, de même que les valeurs $f(x_i)$, on a alors

$$|f(x)| \leqslant \max(M_0, \ldots, M_{n-1}, |f(x_0)|, \ldots, |f(x_n)|)$$

pour tout $x \in [a,b]$. Ainsi, f est bien bornée sur $[a,b]$.

Contrairement à ce que le théorème des bornes atteintes permet de dire dans le cas d'une fonction continue, f n'atteint pas forcément ses bornes inférieure et supérieure : par exemple, la fonction continue par morceaux sur $[0,1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

vérifie $\inf_{[0,1]} f = 0$ et $\sup_{[0,1]} f = 1$ mais ne prend ni la valeur 0, ni la valeur 1 sur $[0,1]$ (donc 0 n'est pas le minimum de f, et 1 n'est pas son maximum).

Correction de l'exercice 29. L'idée de la preuve, née d'une intuition graphique, est de remarquer que f ne prend des valeurs « basses » (en un sens à définir) que sur un segment, puis d'appliquer le théorème des bornes atteintes sur ce segment.

Comme f tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant f(0)$ si $|x| > A$. Or la fonction f est continue sur le segment $[-A, A]$, donc elle y admet donc un minimum d'après le théorème des bornes atteintes. Si l'on note a un point en lequel f atteint ce minimum, on a $f(x) \geqslant f(a)$ pour tout $x \in [-A, A]$, et donc notamment $f(0) \geqslant f(a)$. Si $x \in \mathbb{R} \setminus [-A, A]$, on a par ailleurs $f(x) \geqslant f(0) \geqslant f(a)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \geqslant f(a)$: ainsi, $f(a)$ est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 30.

1. Supposons que f soit k-lipschitzienne et donnons-nous $a \in I$. Alors
$$|f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a| \xrightarrow[x \to a]{} 0$$
donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, ce qui montre que f est continue en a. Comme a est quelconque dans I, la fonction f est continue sur I.
2. La propriété à démontrer est exactement ce qu'affirme le second volet de l'inégalité triangulaire :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad ||x| - |y|| \leqslant |x - y|.$$
3. (a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a
$$\begin{aligned} e^{ix} - e^{iy} &= e^{i\frac{x+y}{2}} \left(e^{i\frac{x-y}{2}} - e^{i\frac{y-x}{2}}\right) \\ &= e^{i\frac{x+y}{2}} \cdot 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \quad \text{d'après la deuxième formule d'Euler} \\ &= \left(\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) + i \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \cdot 2i \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{aligned}$$
soit
$$e^{ix} - e^{iy} = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) + 2i\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$
d'où, en considérant les parties réelle et imaginaire des termes de l'égalité :
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
et
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$
ce qu'il fallait démontrer.

(b) Si $x, y \in \mathbb{R}$, on a d'après la question précédente
$$\begin{aligned} |\cos(x) - \cos(y)| &= |-2| \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|}_{\leqslant \left|\frac{x-y}{2}\right|} \\ &\leqslant 2 \cdot 1 \cdot \left|\frac{x-y}{2}\right| = |x - y| \end{aligned}$$
ainsi que
$$\begin{aligned} |\sin(x) - \sin(y)| &= 2 \cdot \underbrace{\left|\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|}_{\leqslant 1} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right|}_{\leqslant \left|\frac{x-y}{2}\right|} \\ &\leqslant 2 \cdot 1 \cdot \left|\frac{x-y}{2}\right| = |x - y|, \end{aligned}$$
d'où le résultat attendu.

4. (a) Soit $\alpha > 0$. Pour tous $x, y \in [\alpha, +\infty[$, on a

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| = \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leqslant \frac{|x-y|}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha}} = \frac{|x-y|}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Ainsi, la fonction racine carrée est $\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$-lipschitzienne sur $[\alpha, +\infty[$.

(b) Supposons que la fonction racine carrée soit k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ pour un certain $k \geqslant 0$. Pour tout $x > 0$, on aurait alors

$$\sqrt{x} = \sqrt{x} - \sqrt{0} \leqslant k|x-0| = kx,$$

d'où, en divisant par $x > 0$, l'inégalité $\frac{\sqrt{x}}{x} \leqslant k$, soit $\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant k$. Or cela est incompatible avec le fait que $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$, donc la fonction racine carrée n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$.

Correction de l'exercice 31.

1. La fonction $F : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $[a, b]$ comme différence de deux fonctions continues. Elle vérifie par ailleurs $F(a) = f(a) - a \leqslant 0$ et $F(b) = f(b) - b \geqslant 0$, donc il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires un point $c \in [a, b]$ tel que $F(c) = 0$, soit $f(c) = c$, ce qu'il fallait démontrer.
2. La fonction $h := f - g$, continue sur $[a, b]$ comme différence de deux fonctions continues, vérifie $h(a) = f(a) - g(a) \leqslant 0$ et $h(b) = f(b) - g(b) \geqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe alors $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = 0$, c'est-à-dire tel que $f(c) = g(c)$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 32.

1. Supposons que $[a, b] \subset f([a, b])$, c'est-à-dire que pour tout $y \in [a, b]$ il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$. Il existe alors $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = a$, et $\beta \in [a, b]$ tel que $f(\beta) = b$. L'application $g : x \mapsto f(x) - x$, continue sur $[a, b]$ en tant que différence de deux fonctions continues, vérifie $g(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = a - \alpha \leqslant 0$ et $g(\beta) = f(\beta) - \beta = b - \beta \geqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors l'existence d'un c situé entre α et β (et donc dans $[a, b]$) tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = c$.
2. Supposons que $f([a, b]) \subset [a, b]$, c'est-à-dire que pour tout $x \in [a, b]$ on a $f(x) \in [a, b]$. La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, continue sur $[a, b]$ comme différence de deux fonctions continues, vérifie alors $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors l'existence d'un $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = c$.
3. La fonction définie par

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0,1] \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}, \quad f(x) = 1 - x$$

vérifie $f([0, 1]) = [0, 1]$ mais n'admet pas de point fixe sur $[0, 1]$ (il suffit de tracer la courbe de f pour s'en convaincre !). Ainsi, elle constitue un contre-exemple aux deux résultats précédents dans le cas où l'hypothèse de continuité n'est plus imposée.

Correction de l'exercice 33.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire
$$\sum_{k=0}^{n-1} g_n\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = f\left(\frac{n}{n}\right) - f\left(\frac{0}{n}\right) = f(1) - f(0) = 0$$
en reconnaissant une somme télescopique.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, il existe deux indices $k, k' \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $g_n\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant 0$ et $g_n\left(\frac{k'}{n}\right) \geqslant 0$. Or g_n est continue sur $\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$ comme différence de fonctions continues, donc en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k'}{n}$ on obtient l'existence d'un point c_n entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k'}{n}$, et donc dans $\left[0, 1-\frac{1}{n}\right]$, tel que $g_n(c_n) = 0$. En d'autres termes :
$$\exists\, c_n \in \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] \;:\; f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{n}\right).$$
3. Soit $\alpha\,]0,1[$ tel que $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{Z}$. Considérons la fonction donnée dans l'énoncé et définie par
$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right).$$
Cette fonction est continue sur $[0,1]$ comme combinaison de fonctions continues. On a par ailleurs $f(0) = \cos(0) - 0 = 1$ et $f(1) = \cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - \left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha} - 1\right)\right) = 1$ donc $f(0) = f(1)$. Si l'on avait $f(c) = f\,(c+\alpha)$ pour un certain $c \in [0, 1-\alpha]$, on aurait
$$\cos\left(\frac{2\pi c}{\alpha}\right) - c\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right) = \cos\left(\frac{2\pi(c+\alpha)}{\alpha}\right) - (c+\alpha)\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right),$$
soit, comme $\frac{2\pi(c+\alpha)}{\alpha} = \frac{2\pi c}{\alpha} + 2\pi$ et comme cos est 2π-périodique :
$$\cos\left(\frac{2\pi c}{\alpha}\right) - c\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right) = \cos\left(\frac{2\pi c}{\alpha}\right) - c\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right) - \alpha\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right),$$
soit enfin
$$\alpha\left(\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right) = 0,$$
ce qui, comme $\alpha \neq 0$, ne peut être vrai que si $\frac{2\pi}{\alpha} \in 2\pi\mathbb{Z}$, soit $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$. Or on a choisi α de sorte que cette dernière relation ne soit pas vérifiée, donc il n'existe pas de $c \in [0, 1-\alpha]$ tel que $f(c) = f\,(c+\alpha)$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 34.

1. En écrivant
$$\forall x > 0, \quad h(x) = -1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \frac{1}{x^{n-k}} = -1 + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| \frac{1}{x^{n-k}} + |a_0| \frac{1}{x^n},$$
on s'aperçoit du fait que h est la somme de la fonction $x \mapsto -1 + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| \frac{1}{x^{n-k}}$ qui est décroissante (car les $|a_k|$ sont positifs) et de la fonction strictement décroissante $x \mapsto |a_0| \frac{1}{x^n}$ (car $|a_0| > 0$). Ainsi, elle est elle-même strictement décroissante.

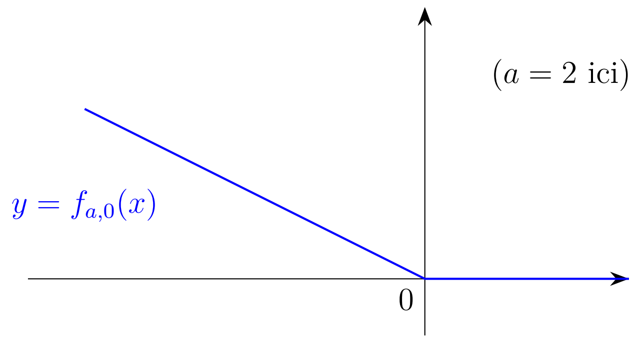
2. On a
$$h(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} |a_0|\frac{1}{x^n} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$
car $n-k<n$ pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, et
$$h(x) = -1 + \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\frac{1}{x^{n-k}} \xrightarrow[x\to +\infty]{} -1$$
car $n-k>0$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
3. La fonction h est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après l'étude de limites effectuée dans la question précédente, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-1, +\infty[$ d'après le théorème de la bijection ; elle prend donc notamment une unique fois la valeur 0 sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, H prend elle aussi une unique fois la valeur 0 sur $\mathbb{R}_+^*$; comme elle vaut $-|a_0| \neq 0$ en 0, elle s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}_+$.
4. La relation $p(x_0) = 0$ peut se réécrire
$$x_0^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_0^k.$$
On a donc
$$|x_0^n| = \left|\sum_{k=0}^{n-1} a_k x_0^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |x_0|^k$$
d'après l'inégalité triangulaire, soit
$$|x_0^n| \leqslant |x_0|^n - H(|x_0|), \quad \text{d'où} \quad 0 \leqslant -H(|x_0|).$$
Ainsi, on a $H(|x_0|) \leqslant 0$. Comme $p(0) = a_0 \neq 0$, on a forcément $x_0 \neq 0$ donc $|x_0| > 0$, ce qui permet de réécrire la relation $H(|x_0|) \leqslant 0$ comme $h(|x_0|) \geqslant 0$. Or la fonction h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et s'annule uniquement en α, donc $|x_0| \leqslant \alpha$, ce qu'il fallait démontrer.
5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, on a
$$H(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| x^k \geqslant x^n - \sum_{k=0}^{n-1} A x^k$$
puisque les x^k sont positifs et puisque $A \geqslant |a_k|$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, d'où, comme $x \neq 1$:
$$H(x) \geqslant x^n - A\sum_{k=0}^{n-1} x^k = x^n - A\frac{1-x^n}{1-x} = x^n - A\frac{x^n-1}{x-1}.$$
6. On sait que α est le point d'annulation sur $\mathbb{R}_+^*$ de h, qui est strictement décroissante. Comme $A+1>0$, pour montrer que $\alpha \leqslant A+1$, il suffit donc de montrer que $h(A+1) < 0$, c'est-à-dire que $H(A+1) > 0$. Or la question précédente permet d'écrire que
$$H(A+1) \geqslant (A+1)^n - A\frac{(A+1)^n - 1}{A+1-1} = (A+1)^n - (A+1)^n + 1 = 1$$
, d'où $H(A+1) > 0$, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 35.

1. (a) Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a

$$f_{a,0}(b) = \frac{-b + \sqrt{b^2}}{2a} = \frac{-b + |b|}{2a},$$

soit $f_{a,0}(b) = 0$ si $b \geqslant 0$ et $f_{a,0}(b) = -\frac{b}{a}$ si $b < 0$. Ainsi, $f_{a,0}$ admet le graphe donné ci-dessous :



(b) On étudie tout d'abord la limite de $f_{a,c}$ en $+\infty$, en faisant apparaître une quantité conjuguée pour lever la forme indéterminée au numérateur :

$$\begin{aligned} f_{a,c}(b) &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{(b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(b + \sqrt{b^2 - 4ac})} = -\frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \xrightarrow[b \to +\infty]{} 0, \end{aligned}$$

donc la courbe de $f_{a,c}$ admet la droite d'équation $y = 0$ pour asymptote horizontale en $+\infty$.

En considérant à présent les valeurs de b au voisinage de $-\infty$ (donc négatives), on a

$$\frac{f_{a,c}(b)}{b} = \frac{-b - b\sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}}{2ab} = -\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}}{2a} \xrightarrow[b \to -\infty]{} -\frac{1}{a},$$

et, en faisant à nouveau appel à une quantité conjuguée pour lever une forme indéterminée :

$$\begin{aligned} f_{a,c}(b) - \left(-\frac{1}{a}\right) \cdot b &= \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(b + \sqrt{b^2 - 4ac})(b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(b - \sqrt{b^2 - 4ac})} \\ &= \frac{4ac}{2a(b - \sqrt{b^2 - 4ac})} \xrightarrow[b \to -\infty]{} 0 \end{aligned}$$

puisque $b - \sqrt{b^2 - 4ac} \xrightarrow[b \to -\infty]{} -\infty$. Ainsi, la courbe de $f_{a,c}$ admet la droite d'équation $y = -\frac{1}{a}x$ pour asymptote oblique en $-\infty$.

On note que l'on retrouve bien les résultats du cas $c = 0$ (où la courbe est alors confondue avec son asymptote au voisinage de $\pm\infty$).

2. La fonction $g_{b,c}$ est définie en tout $a \neq 0$ tel que $b^2 - 4ac \geqslant 0$, c'est-à-dire tel que $4ac \leqslant b^2$. On distingue alors deux cas : si $c > 0$, le domaine de définition de $g_{b,c}$ est donc $\left]-\infty, \frac{b^2}{4c}\right] \setminus \{0\}$, et si $c < 0$, son domaine de définition est $\left[\frac{b^2}{4c}, +\infty\right[\setminus \{0\}$.
3. On est en présence d'une forme indéterminée, que l'on résout comme dans la question 1(b) en écrivant que

$$g_{b,c}(a) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{2c}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \underset{a \to 0}{\longrightarrow} -\frac{2c}{b + \sqrt{b^2}} = -\frac{c}{b}.$$

4. Lorsque P admet une racine réelle (donc lorsque $b^2 - 4ac \geqslant 0$), on a montré à la question précédente que la racine $g_{b,c}(a)$ de la fonction P se rapproche de $-\frac{c}{b}$ à mesure que $a \to 0$. Cela n'est guère surprenant puisque le cas limite (de $a \to 0$) est celui où $P : x \mapsto bx + c$, et que l'unique racine de P dans ce cas est exactement $-\frac{c}{b}$. En ce sens, on peut dire informellement que lorsque $a \to 0$, « la limite d'une racine de P est la racine de la limite de P ».

Correction de l'exercice 36.

1. Supposons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soit continue et injective[1].

   On commence par démontrer le résultat donné dans l'indication. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a < b < c$. Comme f est injective, on a $f(a) \neq f(c)$.

   Supposons tout d'abord que $f(a) < f(c)$. Si l'on avait $f(b) \leqslant f(a)$, alors $f(a)$ serait une valeur intermédiaire entre $f(b)$ et $f(c)$, et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre b et c on obtiendrait $x \in [b, c]$ (donc $x \neq a$) tel que $f(x) = f(a)$, ce qui contredirait l'injectivité de f. De la même façon, si l'on avait $f(b) \geqslant f(c)$, alors $f(c)$ serait une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$, et en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre a et b on obtiendrait $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = f(c)$, d'où une nouvelle contradiction. Ainsi, on a nécessairement $f(a) < f(b) < f(c)$.

   On montre de même que si $f(a) > f(c)$, alors $f(a) > f(b) > f(c)$, ce qui achève d'établir le résultat donné dans l'indication.

   Démontrons à présent que f est strictement monotone. Supposons que $f(0) < f(1)$; on va montrer que f est strictement croissante. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. Si $x < 0$, le fait que $x < 0 < 1$ et que $f(0) < f(1)$ donne nécessairement, d'après le résultat de l'indication, que $f(x) < f(0) < f(1)$ et donc que $f(x) < f(0)$. Si $x > 0$, on a soit $0 < x < 1$, soit $x = 1$, soit $0 < 1 < x$; dans tous les cas, comme $f(0) < f(1)$, le résultat de l'indication donne $f(0) < f(x)$.

1. Cette question introductive est la plus difficile de l'exercice. Les sujets d'oraux sont généralement plus progressifs dans leur niveau de difficulté. Il est toutefois bon de savoir sauter de telles questions au bout de quelques minutes pour pouvoir traiter les suivantes et avoir matière à briller devant le jury. Ce dernier a conscience de la difficulté des sujets posés et n'attend pas nécessairement que toutes les questions soient traitées parfaitement ; signaler les pistes explorées sans succès et rebondir sur les indications données par la suite peuvent suffire à assurer la note maximale.

On a donc démontré le résultat suivant : si $x < 0$, alors $f(x) < f(0)$, et si $x > 0$, alors $f(x) > f(0)$.

Soient à présent $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère quatre cas possibles :

- Si a ou b vaut 0, alors $f(a) < f(b)$ d'après ce que nous venons de montrer.
- Si $a < b < 0$, alors comme $f(a) < f(0)$, on a nécessairement $f(a) < f(b) < f(0)$ d'après le résultat de l'indication, donc notamment $f(a) < f(b)$.
- Si $a < 0 < b$, alors $f(a) < f(0)$ et donc $f(a) < f(0) < f(b)$ d'après ce que nous venons de montrer.
- Si $0 < a < b$, alors comme $f(0) < f(a)$, on a nécessairement $f(0) < f(a) < f(b)$ d'après le résultat de l'indication, donc notamment $f(a) < f(b)$.

Dans tous les cas, on a donc $f(a) < f(b)$, ce qui montre que f est strictement croissante.

La même démonstration permet de conclure que f est strictement décroissante dans le cas où $f(0) > f(1)$.

2. Considérons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = g(y)$.
On a alors $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(g(y)) = (g \circ g)(y)$, donc

$$x = -(g \circ g)(x) + 2g(x) = -(g \circ g)(y) + 2g(y) = y.$$

Ainsi, g est injective. Comme on l'a supposée continue, elle est strictement monotone d'après la question précédente. Ainsi, $g \circ g$ est strictement croissante (comme composée de deux fonctions strictement croissantes ou de deux fonctions strictement décroissantes). En écrivant $g(x) = \frac{1}{2}\left((g \circ g)(x) + x\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on remarque donc que g est strictement croissante comme somme de deux fonctions strictement croissantes.

D'après le théorème de la limite monotone, comme g est (strictement) croissante, elle admet une limite en $+\infty$, finie ou égale à $+\infty$. Si cette limite était finie et notée $\ell \in \mathbb{R}$, on aurait $(g \circ g)(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} g(\ell)$ par continuité de g ; en passant à la limite dans la relation $g(x) = \frac{1}{2}\left((g \circ g)(x) + x\right)$, on obtiendrait donc $\ell = +\infty$, ce qui est contradictoire. Ainsi, la limite de g en $+\infty$ est nécessairement égale à $+\infty$. On montre par le même argument que g admet $-\infty$ pour limite en $-\infty$.

Ainsi, le théorème de la bijection permet de dire que la fonction g (qui est, rappelons-le, supposée continue) réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Montrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« } \forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) - x = n(g(x) - x) \quad \text{et} \quad g_{-n}(x) - x = -n(g(x) - x) \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La proposition est vraie pour $n = 0$ puisque $g_0(x) - x = x - x = 0 \cdot (g(x) - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et établissons $\mathcal{P}_{n+1}$. Si $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$g_{n+1}(x) - x = g_n(g(x)) - x = g_n(g(x)) - g(x) + g(x) - x$$

d'où, en appliquant la première partie de l'hypothèse de récurrence au point $g(x)$:

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) - x &= n(g(g(x)) - g(x)) + g(x) - x \\ &= n(2g(x) - x - g(x)) + g(x) - x = (n+1)(g(x) - x). \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$g_{-(n+1)}(x) - x = g_{-n}(g^{-1}(x)) - x = g_{-n}(g^{-1}(x)) - g^{-1}(x) + g^{-1}(x) - x$$

d'où, en appliquant la deuxième partie de l'hypothèse de récurrence au point $g^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned} g_{-(n+1)}(x) - x &= -n\Big(g(g^{-1}(x)) - g^{-1}(x)\Big) + g^{-1}(x) - x \\ &= -n(x - g^{-1}(x)) + g^{-1}(x) - x = -(n+1)(x - g^{-1}(x)). \end{aligned}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc bien vérifiée.

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence, ce qui clôt la preuve.

4. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{g_n(x)}{n} = g(x) - x + \frac{x}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} g(x) - x,$$

donc $G(x) = g(x) - x$. Par ailleurs les g_n sont croissantes comme composées de fonctions croissantes. Ainsi, si $a, b \in \mathbb{R}$ sont tels que $a \leqslant b$, on a $g_n(a) \leqslant g_n(b)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; en divisant par $n \in \mathbb{N}^*$ et en passant à la limite dans l'inégalité obtenue lorsque $n \to +\infty$, on obtient alors $G(a) \leqslant G(b)$, ce qui montre que G est croissante.

5. En utilisant le résultat de la question 3, on trouve que

$$H(x) = -(g(x) - x) = -G(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ avec la même méthode que dans la question précédente. Mais les fonctions g_{-n} sont croissantes, donc le même raisonnement que dans la question précédente montre que H est croissante ; comme $H = -G$, on en déduit que G est décroissante.

6. La fonction G est à la fois croissante et décroissante : elle est donc constante, ce qui signifie qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ vérifiant $g(x) - x = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: les applications continues vérifiant la relation donnée au début de l'énoncé sont donc toutes de la forme $g : x \mapsto x + c$ avec $x \in \mathbb{R}$. Réciproquement, si $c \in \mathbb{R}$ et si l'on définit g par $g : x \mapsto x + c$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (g \circ g)(x) - 2g(x) + x = x + c + c - 2(x + c) + x = 0,$$

donc g vérifie bien la relation en question.

Ainsi, les applications vérifiant cette relation sont exactement les applications de la forme $g : x \mapsto x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 37. On applique directement l'indication. Supposons que $f : [0, 30] \to \mathbb{R}_+$ soit une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et $f(30) = 50$ ($f(t)$ représente la distance parcourue par le RER au temps t).

On considère la fonction $g : t \mapsto f(t + 15) - f(t)$ définie sur $[0, 15]$. Comme f est continue, la composée de fonctions $t \mapsto f(t + 15)$ l'est aussi, donc g est continue comme différence de fonctions continues. Or on a $g(0) = f(15) - f(0) = f(15)$ et $g(15) = f(30) - f(15) = 50 - f(15)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g prend donc toutes les valeurs comprises en $f(15)$ et $50 - f(15)$ sur l'intervalle $[0, 15]$. Or $f(15)$ et $50 - f(15)$ sont de part et d'autre de 25 : en effet, si $f(15) \leqslant 25$ alors $50 - f(15) \geqslant 25$, et si $f(15) \geqslant 25$ alors $50 - f(15) \leqslant 25$.

Ainsi, il existe bien $t \in [0, 15]$ tel que $g(t) = 25$, c'est-à-dire tel que $f(t + 15) - f(t) = 25$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 38. On emploie ici la deuxième méthode suggérée. Assimilons le chemin à une courbe et repérons la position du randonneur par sa distance au point de départ de la randonnée en suivant le chemin. On note $S > 0$ la distance entre le début du chemin et le sommet de la montagne.

En notant respectivement $f(t)$ et $g(t)$ les positions du randonneur à l'heure $t \in [9, 17]$ le premier et le deuxième jour, on remarque que les fonctions f et g sont continues sur $[9, 17]$ (le randonneur ne se téléporte pas), que $f(9) \leqslant S = g(9)$ et que $f(17) \geqslant 0 = g(17)$. Les courbes des fonctions f et g se croisent donc entre l'abscisse 9 et l'abscisse 17 (voir l'exercice 31). Pour le montrer rigoureusement, il suffit de considérer la fonction $h := f - g$, qui est continue sur $[9, 17]$ comme différence de fonctions continues et qui vérifie $h(9) = f(9) - g(9) \leqslant 0$ ainsi que $h(17) = f(17) - g(17) \geqslant 0$: le théorème des valeurs intermédiaires donne donc l'existence d'un $t \in [9, 17]$ tel que $h(t) = 0$, soit $f(t) = g(t)$. Les positions du randonneur à l'heure t le premier et le deuxième jour sont donc les mêmes.

Correction de l'exercice 39. Pour tout $r \geqslant 0$, notons $f(r)$ la VAN associée au taux r. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ comme somme des fonctions rationnelles $r \mapsto \frac{V_k}{(1+r)^k}$. Comme les V_k, pour $k > 0$, sont positifs et qu'au moins l'un d'entre eux est non nul, f est somme de fonctions décroissantes sur $\mathbb{R}_+$ dont au moins l'une est strictement décroissante : elle est donc elle-même strictement décroissante. On a par ailleurs

$$f(0) = \sum_{k=0}^{N} V_k > 0$$

et

$$f(r) = V_0 + \sum_{k=1}^{N} \frac{V_k}{(1+r)^k} \xrightarrow[r \to +\infty]{} V_0 < 0.$$

D'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique $r \in [0, +\infty[$ tel que $f(r) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Pour un investisseur raisonnant en termes de rendements actualisés (voir l'exercice 31 du chapitre 2), le taux r est le taux d'intérêt bancaire égalisant la rentabilité d'un placement et de l'investissement considéré. En-deçà de ce taux, il est rentable d'emprunter un capital pour pouvoir l'investir ; au-delà, il est plus intéressant de placer un capital (ou, ce qui est équivalent, de ne pas emprunter de capital) que de réaliser l'investissement.

Correction de l'exercice 40.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Pour tous $x, y \in [a, b]$, on a
$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}$$
d'après la formule de Bernoulli, d'où
$$|x^n - y^n| = |x - y| \cdot \left| \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1} \right| \leqslant |x - y| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |x|^k |y|^{n-k-1}$$
par l'inégalité triangulaire. Or pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, la quantité $|x|^k |y|^{n-k-1}$ est le produit de $n-1$ termes positifs inférieurs ou égaux à $\max(|x|, |y|)$ et donc à $\max(|a|, |b|)$, si bien qu'elle est inférieure à $\max(|a|, |b|)^{n-1}$; ainsi, on a
$$|x^n - y^n| \leqslant |x - y| \cdot n \max(|a|, |b|)^{n-1},$$
ce qui montre que f est $(n \max(|a|, |b|)^{n-1})$-lipschitzienne sur $[a, b]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après l'exercice 30 et la question précédente, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ la fonction puissance $x \mapsto x^n$ est continue sur $[a, b]$. Ainsi, elle est continue en tout point de $\mathbb{R}$, donc en $\mathbb{R}$ tout entier.

Correction de l'exercice 41.

1. Il existe 9 cas à considérer selon que la borne inférieure de I n'existe pas, existe mais n'est pas dans I ou est le minimum de I, et selon que sa borne supérieure n'existe pas, existe mais n'est pas dans I ou est le maximum de I.

   Supposons que I est minorée par un réel $m \in \mathbb{R}$. Comme I est non vide, elle admet une borne inférieure $a \geqslant m$.

   Supposons tout d'abord que $a \in I$ et que I n'est pas majorée ; on va montrer que $I = [a, +\infty[$. Comme I est minorée par a, on a $I \subset [a, +\infty[$. À présent, soit $x \in [a, +\infty[$. Comme I n'est pas majorée, il existe $y > x$ tel que $y \in I$; on a alors $a, y \in I$ et $a < y$ donc $[a, y] \subset I$ par hypothèse sur I, donc x, qui est dans $[a, y]$, appartient à I. Ainsi, on a $[a, +\infty[\subset I$, ce qui montre que $I = [a, +\infty[$ par double inclusion.

   Supposons à présent que $a \notin I$ et que I n'est pas majorée ; on va montrer que $I =]a, +\infty[$. Comme I est minorée par a et ne contient pas a, on a $I \subset]a, +\infty[$. À présent, soit $x \in]a, +\infty[$. On a alors $x > a$; comme $a = \inf I$, il existe $a' \in I$ tel que $a < a' < x$. Or I n'est pas majorée, donc il existe $y > x$ tel que $y \in I$; on a alors $a', y \in I$ et $a' < y$ donc $[a', y] \subset I$ par hypothèse sur I, donc x, qui est dans $[a', y]$, appartient à I. Ainsi, on a $]a, +\infty[\subset I$, ce qui montre que $I =]a, +\infty[$ par double inclusion.

   On traite de même les sept cas restants, en montrant par exemple que si I n'est ni majorée ni minorée, alors $I =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$, que si I admet un minimum a

et une borne supérieure b qui n'est pas un maximum alors $I = [a, b[$, et ainsi de suite. Dans tous les cas, I est un intervalle.

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si I est vide, alors $f(I)$ l'est aussi, donc est un intervalle. Supposons à présent que I n'est pas vide et montrons que $f(I)$ est un intervalle. D'après la question 1, il suffit de montrer que si $x, y \in f(I)$ sont tels que $x < y$, alors $[x, y] \subset f(I)$. Soient donc $x, y \in f(I)$ tels que $x < y$; il existe alors $a, b \in I$ tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f sur l'intervalle ayant pour bornes les points a et b (qui est inclus dans I puisque I est un intervalle), la fonction f prend entre a et b, et donc sur I, toutes les valeurs comprises entre $f(a) = x$ et $f(b) = y$, c'est-à-dire que $[x, y] \subset f(I)$. Ainsi, $f(I)$ est un intervalle d'après la question 1, ce qu'il fallait démontrer.
3. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue n'est pas nécessairement un intervalle ouvert : si $f = \cos$ (qui est bien continue), on a par exemple $f(]0, \pi[) =]-1, 1[$ (intervalle ouvert), $f(]0, 2\pi[) = [-1, 1[$ (intervalle semi-ouvert) et $f(]0, 3\pi[) = [-1, 1]$ (intervalle fermé).

Correction de l'exercice 42.

1. On trouve la démonstration recherchée dans l'exemple 25 du cours. La voici dans les grandes lignes : si $x \in \mathbb{R}$, la longueur $|\sin(x)|$ est la valeur absolue de l'ordonnée du point $M(x)$ défini dans le cours de trigonométrie. Or cette ordonnée est nécessairement inférieure à la longueur de l'arc reliant le point $A := M(0)$ au point $M(x)$ en suivant le cercle trigonométrique dans un sens donné par le signe de x ; cette longueur vaut $|x|$, d'où $|\sin(x)| \leqslant |x|$. La comparaison ainsi obtenue est stricte si $x \neq 0$ (le chemin en ligne droite est alors strictement plus court que le chemin circulaire), et on a $\sin(0) = 0$ donc l'équation $\sin(x) = x$ admet 0 pour unique solution réelle.
2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$f(u_{n+1}) = f(\sin(u_n)) = f(u_n)$$
d'après l'hypothèse sur f, donc $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est bien constante.

   (b) Remarquons pour commencer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[-1, 1]$: en effet, $u_0 \in [-1, 1]$ par hypothèse, et pour tout $n \geqslant 1$ on a $u_n = \sin(u_{n-1}) \in [-1, 1]$ puisque sin est à valeurs dans $[-1, 1]$. On rappelle par ailleurs que la fonction sin est croissante sur $[-1, 1]$ puisqu'elle l'est sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Si $u_0 \leqslant u_1$, en composant par sin cette inégalité entre deux éléments de $[-1, 1]$, on obtient $u_1 \leqslant u_2$; une nouvelle composition par sin donne alors $u_2 \leqslant u_3$, et ainsi de suite[2] pour montrer que $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, si $u_0 \leqslant u_1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   De même, si $u_0 \geqslant u_1$, en composant par sin on obtient $u_1 \geqslant u_2$, puis $u_2 \geqslant u_3$, et ainsi de suite pour montrer que $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, si $u_0 \geqslant u_1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   On a montré dans tous les cas que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

2. Une récurrence (très facile) permettrait de démontrer ce fait rigoureusement.

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone d'après la question 2(b) ; on a aussi montré dans cette question que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (par 1). Ainsi, elle converge vers une limite $\ell \in [-1, 1]$ d'après le théorème de la limite monotone. Par continuité de la fonction sin, on peut passer à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = \sin(u_n)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour obtenir $\ell = \sin(\ell)$, ce qui, d'après la question 1, donne $\ell = 0$.

3. On a montré dans la question 2 que quel que soit $u_0 \in [-1, 1]$, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, donc égale à $f(u_0)$. Or f est continue et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$; ainsi, on a nécessairement $f(u_0) = f(0)$ (et ce, rappelons-le, quelle que soit la valeur de $u_0 \in [-1, 1]$ initialement choisie). La fonction f ne prend donc que la valeur $f(0)$ sur $[-1, 1]$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin(x) \in [-1, 1]$, donc $f(x) = f(\sin(x)) = f(0)$: ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 43.

1. Pour tous $x, y \in I$ tels que $x \neq y$, on a
$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| < |x - y|$$
puisque $k \in [0, 1[$ et $|x - y| > 0$. Ainsi, la distance entre $f(x)$ et $f(y)$ est strictement plus petite que celle entre x et y : appliquer f « contracte » les intervalles.
2. La preuve est donnée dans la première question de l'exercice 30 : si $a \in I$, alors pour tout $x \in I$ on a
$$|f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a|,$$
or[3] $k|x - a| \xrightarrow[x\to a]{} 0$, donc on obtient par le théorème des gendarmes
$$|f(x) - f(a)| \xrightarrow[x\to a]{} 0 \quad \text{soit} \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a),$$
si bien que f est continue en a. Comme $a \in I$ est quelconque, f est continue sur I tout entier.
3. Supposons que $x, y \in I$ soient deux points fixes de f sur I, c'est-à-dire que $f(x) = x$ et $f(y) = y$. On a alors
$$|x - y| = |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$
puisque f est k-lipschitzienne, or $k \in [0, 1[$ donc la relation $|x - y| \leqslant k|x - y|$ implique que $|x - y| = 0$, c'est-à-dire que $x = y$. Ainsi, f admet au plus un point fixe sur I.

   L'existence du point fixe en question n'est pas nécessairement vérifiée : par exemple, si $I =]0, 1]$ et si f est l'application $f : x \mapsto \frac{x}{2}$, on vérifie facilement que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne donc contractante mais que f n'admet pas de point fixe sur I.

3. Les limites sont entendues au sens de la limite à droite si a est le minimum de I, de la limite à gauche si a est le maximum de I, et de la limite « tout court » si a est intérieur à I.

4. Supposons que f admette un point fixe $\ell \in I$. On montre la propriété attendue par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On a évidemment $|u_0 - \ell| = k^0|u_0 - \ell|$, donc la propriété est vraie au rang 0. Supposons à présent qu'elle le soit à un rang $n \in \mathbb{N}$ donné ; on a alors

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)|$$

puisque ℓ est un point fixe de f, d'où

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ell| &\leqslant k|u_n - \ell| \quad \text{puisque } f \text{ est } k\text{-lipschitzienne} \\ &\leqslant k \cdot k^n|u_0 - \ell| \quad \text{par l'hypothèse de récurrence} \\ &= k^{n+1}|u_0 - \ell|, \end{aligned}$$

ce qui montre que la propriété est vraie au rang $n+1$. Ainsi, elle est vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

Or $k^n|u_0 - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque $k \in]-1, 1[$, donc $|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème des gendarmes, c'est-à-dire que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

5. (a) On démontre la propriété attendue par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$. Elle est évidemment vraie si $i = 0$ puisqu'il s'agit alors d'une égalité. Supposons-la vraie pour un $i \in \mathbb{N}$ donné ; on a alors

$$|u_{i+1} - u_{i+2}| = |f(u_i) - f(u_{i+1})| \leqslant k|u_i - u_{i+1}|$$

puisque f est k-lipschitzienne, d'où

$$|u_{i+1} - u_{i+2}| \leqslant k \cdot k^i|u_0 - u_1|$$

par l'hypothèse de récurrence, soit

$$|u_{i+1} - u_{i+2}| \leqslant k^{i+1}|u_0 - u_1|,$$

c'est-à-dire que la propriété à démontrer est vraie au rang $i+1$. Ainsi, elle l'est à tout rang $i \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geqslant q$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} |u_p - u_q| &= \left|\sum_{i=q}^{p-1}(u_{i+1} - u_i)\right| \quad \text{en faisant apparaître une somme télescopique} \\ &\leqslant \sum_{i=q}^{p-1}|u_{i+1} - u_i| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \sum_{i=q}^{p-1}k^i|u_0 - u_1| \quad \text{par la question précédente} \\ &= \frac{k^q - k^p}{1-k}|u_0 - u_1| \quad \text{puisque } k \neq 1 \\ &\leqslant \frac{k^q}{1-k}|u_0 - u_1| \quad \text{car } k^p \geqslant 0, 1-k > 0 \text{ et } |u_0 - u_1| \geqslant 0. \end{aligned}$$

Considérons à présent N tel que pour tout $q \geqslant N$ on ait $\frac{k^q}{1-k}|u_0 - u_1| \leqslant \varepsilon$, ce qui est possible puisque $\frac{k^q}{1-k}|u_0 - u_1| \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$ (car $k \in [0,1[$). On peut alors écrire :

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \,:\, p \geqslant q \geqslant N, \quad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

(c) On a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$ donc $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} c$; or f est continue d'après la question 2, donc $u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(c)$. Ainsi, on a $c = f(c)$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 44.

1. Supposons que f n'est pas majorée sur $[a,b]$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un élément $x_n \in [a,b]$ tel que $f(x_n) \geqslant n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à valeurs dans $[a,b]$ (donc bornée), il existe d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) qui converge vers un élément $\ell \in [a,b]$. Comme f est continue sur $[a,b]$, on a alors $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a[4] $f(x_{\varphi(n)}) \geqslant \varphi(n) \geqslant n$, donc $f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par comparaison, ce qui induit une contradiction.

   Ainsi, f est nécessairement majorée sur $[a,b]$.

2. Par définition de la borne supérieure, pour tout $n \geqslant 1$ il existe un élément $y_n \in [a,b]$ tel que $M - \frac{1}{n} \leqslant f(y_n) \leqslant M$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à valeurs dans le segment $[a,b]$, on peut d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass trouver une suite extraite $(y_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) qui converge vers un élément $\ell' \in [a,b]$. Par continuité de f, on a alors $f(y_{\psi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell')$. Mais on a aussi
$$M - \frac{1}{\psi(n)} \leqslant f(y_{\psi(n)}) \leqslant M$$
   pour tout $n \in \mathbb{N}$; comme $\psi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (puisque $\psi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ comme on l'a vu dans la question précédente), on obtient alors $f(y_{\psi(n)}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$ d'après le théorème des gendarmes. On en déduit que $f(\ell') = M$, donc la borne supérieure M est atteinte par f sur $[a,b]$, ce qu'il fallait établir.

Correction de l'exercice 45.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $M_n := \sup\limits_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|$; l'hypothèse assure l'existence des M_n et le fait que $M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Soit $x \in I$ et soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geqslant 0$ tel que $M_N \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. La fonction f_N étant continue sur I, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in I$ vérifiant $|y - x| \leqslant \eta$ on

---

4. La relation $\varphi(n) \geqslant n$ valable pour toute application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a déjà été croisée dans les exercices du chapitre précédent ; elle se démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

ait $|f_N(y) - f_N(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Pour tout $y \in I$, on peut écrire

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= |f(y) - f_N(y) + f_N(y) - f_N(x) + f_N(x) - f(x)| \\ &\leqslant |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \end{aligned}$$

par l'inégalité triangulaire, d'où, si $|y - x| \leqslant \eta$:

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

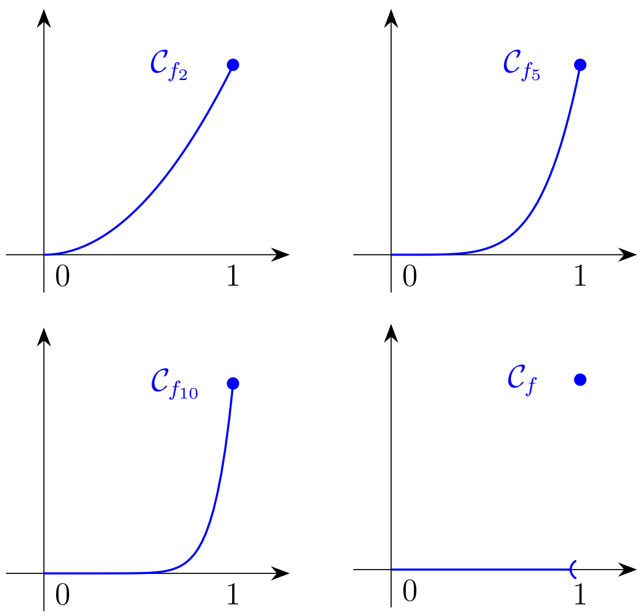
ce qui montre que f est continue en x. Comme $x \in I$ est quelconque, f est continue sur I tout entier.

2. Sur $[0,1]$, on peut définir les fonctions

$$f_n : x \longmapsto x^n \quad \text{et} \quad f : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

On a alors $f_n(x) = x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 = f(x)$ pour tout $x \in [0,1[$, ainsi que $f_n(x) = 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 = f(x)$ si $x = 1$; la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc simplement vers f. Par contre, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue, mais la fonction f ne l'est pas.

La convergence des f_n vers f est illustrée sur la figure ci-dessous :



On comprend graphiquement que la convergence n'est pas uniforme en remarquant que la courbe de f_n ne peut pas être rendue « uniformément proche » de celle de f. Plus rigoureusement, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver des points de $[0,1]$ (très proches de 1) en lesquels la quantité $f_n(x) - f(x)$ est arbitrairement proche de 1, ce que traduit la relation

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

Un autre exemple, sur $\mathbb{R}$ cette fois, est fourni par les fonctions

$$f_n : x \longmapsto \arctan(nx) \quad \text{et} \quad f : x \longmapsto \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x < 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

La convergence est illustrée sur la figure ci-dessous.