Dans la section 1.2, on a étudié le signe de f'' sur un intervalle pour en déduire l'allure globale de la courbe $\mathcal{C}_f$. Étudier le signe de f'' sur tout un intervalle peut néanmoins s'avérer fastidieux lorsque l'expression de f'' est compliquée. On va voir que le signe des premières dérivées de f en un point donné permet déjà de connaître l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de ce point.

3.1 Étude locale du graphe d'une fonction

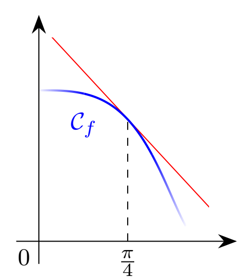
En démontrant la proposition A, on a établi un résultat *local* important :

Proposition E (Dérivée seconde et position locale de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes)**.** Soit $a \in I$. Si la fonction f est deux fois dérivable en a, alors :

- Si $f''(a) > 0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est ***localement*** *strictement au-dessus de sa tangente en a*, au sens où
$$\exists \varepsilon > 0 \ : \ \forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}, \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x-a).$$
- Si $f''(a) < 0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est ***localement*** *strictement en-dessous de sa tangente en a*, au sens où
$$\exists \varepsilon > 0 \ : \ \forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}, \quad f(x) < f(a) + f'(a)(x-a).$$

On notera les hypothèses et les conclusions renforcées de la présente proposition par rapport à la proposition A, plus globale. Remarquons que la proposition ci-contre ne permet pas de conclure sur la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en a dans le cas où $f''(a) = 0$; on verra dans la suite du cours comment traiter ce cas.

Exemple. On souhaite étudier la courbe représentative de la fonction f définie par
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = e^{x - \tan(x)}$$
au voisinage du point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$. Cette fonction est dérivable comme combinaison de fonctions dérivables, et on a
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f'(x) = -\tan^2(x) e^{x - \tan(x)}.$$
Ainsi, f' est elle-même dérivable pour la même raison, et pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a
$$f''(x) = \left(-2\tan(x) - 2\tan^3(x) + \tan^4(x)\right) e^{x - \tan(x)}.$$



Ainsi, on a $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3e^{\frac{\pi}{4}-1}$ puisque $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, et donc $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, si bien que $\mathcal{C}_f$ est localement strictement en-dessous de sa tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$, qui est la droite d'équation $y = e^{\frac{\pi}{4}-1} - e^{\frac{\pi}{4}-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. On en déduit l'allure de $\mathcal{C}_f$ donnée ci-contre.

Les dérivées d'ordre $n \geqslant 3$ ne possèdent pas, en général, d'interprétation graphique aussi directe que celle des dérivées première et seconde. Elles permettent en revanche de décrire l'allure locale de $\mathcal{C}_f$ au voisinage d'un point en lequel la dérivée seconde de f s'annule, comme l'indique la généralisation suivante de la proposition E :

Théorème F (Dérivées successives et allure locale de $\mathcal{C}_f$)**.**
Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable $n \geqslant 2$ fois en a et que l'un des nombres $f^{(k)}(a)$, pour $k \in [\![2, n]\!]$, n'est pas nul. Soit k le plus petit entier de $[\![2, n]\!]$ vérifiant cette propriété. Alors :

- $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en a en lequel elle croise sa tangente « par le bas » si k est impair et si $f^{(k)}(a) > 0$.
- $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en a en lequel elle croise sa tangente « par le haut » si k est impair et si $f^{(k)}(a) < 0$.
- $\mathcal{C}_f$ est localement strictement au-dessus de sa tangente en a si k est pair et si $f^{(k)}(a) > 0$.
- $\mathcal{C}_f$ est localement strictement en-dessous de sa tangente en a si k est pair et si $f^{(k)}(a) < 0$.

La position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en a est donc donnée par le premier nombre dérivé non nul d'ordre supérieur ou égal à 2 au point a.

Démonstration du théorème F — On démontre la proposition dans un unique cas de figure, en laissant au lecteur le soin de la compléter dans les autres cas.

Supposons que k est impair et que $f^{(k)}(a) > 0$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}$ on ait

$$\frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(a)}{x-a} > 0, \quad \text{soit} \quad \frac{f^{(k-1)}(x)}{x-a} > 0$$

puisque $f^{(k-1)}(a) = 0$. Ainsi, la quantité $f^{(k-1)}(x)$ est du signe de $x - a$ pour tout $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}$. On en déduit le tableau de signes et de variations donné à la page suivante, dans lequel les signes et les variations sont à comprendre au sens strict.

x	$a-\varepsilon$		a		$a+\varepsilon$
$f^{(k-1)}(x)$		$-$	0	$+$	
$f^{(k-2)}$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$f^{(k-3)}$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f^{(k-4)}$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$\dots$			$\dots$		
f''		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On remarque que les cellules constituant la colonne de droite de ce tableau sont alternées. Comme l'entier k est impair, $k-1$ est pair, si bien que les variations de f'' sont les mêmes que celles de $f^{(k-1)}$.

Ainsi, f'' est bien strictement négative sur $[a-\varepsilon[$ et strictement positive sur $]a+\varepsilon]$, ce qui montre que a est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ et implique d'après la proposition C que $\mathcal{C}_f$ croise sa tangente en a « par le bas ». $\square$

On retient la méthode suivante :

Méthode G (Étude locale de $\mathcal{C}_f$ au voisinage d'un point). Pour étudier l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f au voisinage d'un point $a \in I$, on calcule les dérivées successives de f en a jusqu'au premier rang $k \geqslant 2$ tel que $f^{(k)}(a) \neq 0$. Alors :

- Les valeurs de $f(a)$ et $f'(a)$ donnent l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a, qui est

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

- La parité de k et le signe de $f^{(k)}(a)$ donnent la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en a grâce au théorème F.

Lorsque le rang k est supérieur à 3, la courbe de f est « aplatie » contre sa tangente au voisinage du point considéré (voir les exemples ci-après).

Exemple. Étudions l'allure de la courbe de $f : x \mapsto \sin(x) + \frac{x^3}{6}$ au voisinage de 0.

En tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction f est elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x) + \frac{x^2}{2}$ donc $f'(0) = 1$; ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = x$ pour tangente au point d'abscisse 0.

On détermine ensuite que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

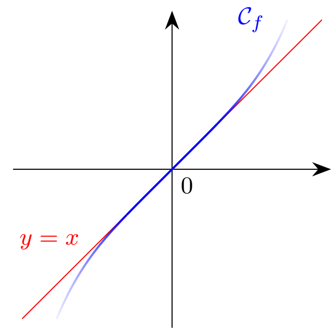
$$f''(x) = -\sin(x) + x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos(x) + 1,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad f^{(5)}(x) = \cos(x)$$

donc

$$f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(5)}(0) = 1 > 0,$$

ce qui montre que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en 0, où elle traverse sa tangente « par le bas » (voir ci-contre).



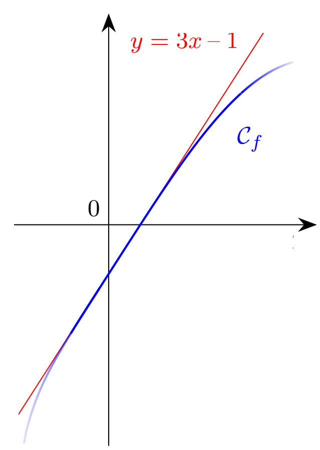
La courbe $\mathcal{C}_f$ présente un aspect très aplati au voisinage de 0 en raison de l'annulation de ses dérivées d'ordre $2, 3$ et 4 en 0.

Exemple. Étudions l'allure au voisinage de 0 de la courbe de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x) - \cos(x) + 2\sin(x)$ au voisinage de 0.

En tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction f est elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$, donc la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = 3x - 1$. Le calcul des dérivées successives de f en 0 donne

$$f''(0) = f^{(3)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(4)}(0) = -7 < 0,$$

ce qui montre que $\mathcal{C}_f$ est localement strictement en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0 (voir ci-contre).



La courbe $\mathcal{C}_f$ présente une fois encore un aspect très aplati au voisinage de 0 en raison de l'annulation de ses dérivées d'ordre 2 et 3 en 0.

3.2 Optimisation d'une fonction d'une variable réelle

Les résultats que nous venons de présenter peuvent être appliqués à l'optimisation de fonctions définies sur des intervalles de $\mathbb{R}$.

L'optimisation d'une fonction est l'étude des valeurs réalisant le minimum ou le maximum de cette fonction, qui inclut une discussion sur l'existence et l'unicité de telles valeurs ainsi que l'élaboration de techniques pour les localiser. Cette démarche se retrouve dans de très nombreux cadres applicatifs (voir Zooms pages 8 et 9), et l'optimisation de certaines fonctions avec ou sans contraintes ainsi que l'approximation algorithmique des points optimaux constituent des champs de recherche féconds et toujours actifs en mathématiques.

L'optimisation *sous contrainte* d'une fonction est la recherche d'une valeur de x maximisant la quantité $f(x)$ tout en satisfaisant une contrainte qui peut par exemple être de la forme $g(x) = \alpha$ ou $g(x) \geqslant \alpha$. Cette question cruciale en économie échappe hélas au programme de mathématiques de B/L ; tout au plus pourra-t-on dans certains cas *incorporer la contrainte* pour se ramener à un problème d'optimisation sans contrainte (voir par exemple l'exercice 63 du chapitre 10).

Nous présentons dans cette section les rudiments de l'optimisation sans contrainte des fonctions dérivables d'une variable réelle.

3.2.1 Extrema globaux, extrema locaux

Fixons tout d'abord quelques définitions.

Définition H (Extremum global). On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un *maximum global* (resp. un *minimum global*) en un point $a \in I$ si et seulement si on a

$$\forall x \in I, \quad f(a) \geqslant f(x) \quad \text{(resp. } f(a) \leqslant f(x)\text{)}.$$

Cette condition est équivalente au fait que f admette un maximum (resp. un minimum) sur I, au sens donné dans le chapitre 3, et que $\max_I f = f(a)$ (resp. $\min_I f = f(a)$).
On dit que f admet un *extremum global* en $a \in I$ lorsque f admet un maximum global ou un minimum global en a.

On dit que f admet un *maximum global strict* (resp. un *minimum global strict*) en $a \in I$ si et seulement si on a

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad f(a) > f(x) \quad \text{(resp. } f(a) < f(x)\text{)}.$$

Cette condition est équivalente au fait que f admette un maximum (resp. un minimum) sur I et que ce maximum (resp. ce minimum) soit atteint uniquement en a.

L'unique intérêt d'ajouter « global » au terme *maximum* déjà défini au chapitre 3 est de différencier cette notion de celle de maximum *local* qui sera donnée dans quelques lignes.

Exemple. La fonction $x \mapsto \cos(x)$ admet un minimum global en tout point de $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$ (et ce minimum vaut -1). Il ne s'agit donc pas d'un minimum global strict. De même, elle admet en tout point de $2\pi\mathbb{Z}$ un maximum global (valant 1), qui n'est donc pas un maximum global strict.

Exemple. La fonction $x \mapsto x^2$ admet un minimum global strict en 0, qui vaut 0. Elle n'admet pas de maximum global.

!

a est le lieu de l'extremum $f(a)$

Bien qu'on lise parfois dans certains cours ou articles l'expression « a est un extremum de f », le réel a n'est, dans le cadre de la définition H, que *le point où l'extremum de f est atteint* (on parle aussi de *lieu* de l'extremum), et l'extremum à proprement parler est le réel $f(a)$.

Définition I (Extremum local). On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ admet un *maximum local* (resp. un *minimum local*) en un point $a \in I$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap I, \quad f(a) \geqslant f(x) \quad (\text{resp. } f(a) \leqslant f(x)).$$

On dit que f admet un *extremum local* en $a \in I$ lorsque f admet un maximum local ou un minimum local en a.

On dit que f admet un *maximum local strict* (resp. un *minimum local strict*) en $a \in I$ si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap I \setminus \{a\}, \quad f(a) > f(x) \quad (\text{resp. } f(a) < f(x)).$$

Il est clair compte tenu des définitions qu'un maximum (resp. minimum) global est nécessairement un maximum (resp. minimum) local.

Comme son nom l'indique, un extremum local de f n'est une valeur extrême de f que *localement* : pour parler de façon imagée, un maximum local est tout simplement un sommet de la courbe, sans que l'on puisse dire s'il s'agit du sommet d'une colline ou de celui de l'Everest (qui est, quant à lui, un extremum global).

Exemple. Considérons la fonction $f : x \mapsto 2\cos(x) + \cos(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est dérivable en tant que combinaison de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

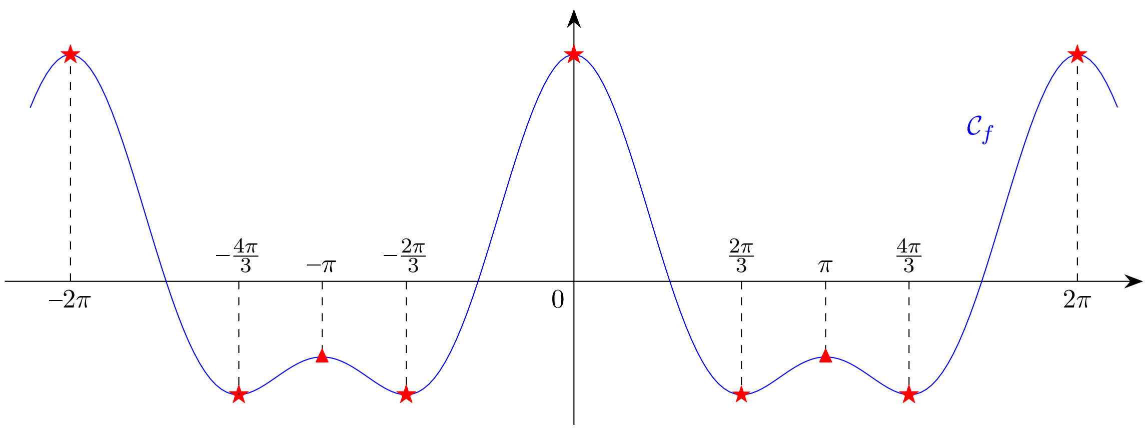
$$f'(x) = -2\sin(x) - 2\sin(2x) = -4\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Comme f est 2π-périodique, on peut se contenter d'étudier ses variations sur un intervalle de longueur 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$. En réalisant un tableau de signes et de variations (laissé au lecteur), on obtient l'allure du graphe de f :

On utilise ici la relation

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ (voir l'exemple 35 du chapitre sur les nombres complexes).

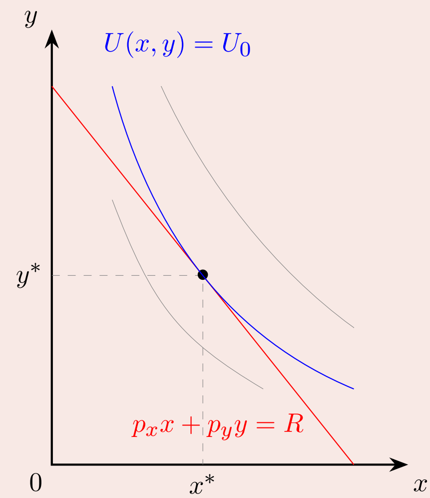


Ainsi, f admet des extrema locaux aux points congrus à 0, $\frac{2\pi}{3}$, π et $\frac{4\pi}{3}$ modulo 2π.
Les extrema indiqués par une étoile sont aussi des extrema globaux, tandis que les extrema indiqués par un triangle sont des extrema locaux mais non globaux.

Les deux formes maximums *et* maxima *sont admises au pluriel, de même que* minimums *et* minima*, ainsi qu'*extremums *et* extrema.

L'optimisation en économie...

L'optimisation, c'est-à-dire la preuve de l'existence et la localisation de points réalisant le maximum ou le minimum d'une fonction, est sans aucun doute l'un des problèmes mathématiques les plus fréquents en économie, discipline dont la plupart des définitions (« science qui étudie comment des ressources rares sont employées pour la satisfaction des besoins des hommes vivant en société » d'après Edmond Malinvaud, s'il ne fallait en choisir qu'une) évoquent l'optimisation d'une fonction objectif sous des contraintes de ressources. On retrouve ainsi en sciences économiques, entre bien d'autres exemples, les problèmes d'optimisation suivants :



Choix d'un panier de bien optimal en microéconomie du consommateur

- La maximisation de l'utilité $u(x_1, \dots, x_n)$ d'un consommateur constituant une combinaison optimale (ou *panier*) de n biens de prix respectifs $p_1, \dots, p_n$ et soumis à la contrainte de revenu $p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n = R$ (voir l'exercice 63 du chapitre 10 et l'exercice 38 du présent chapitre).
- La maximisation intertemporelle de l'utilité par un consommateur répartissant un revenu donné entre consommation immédiate et épargne en vue d'une consommation future.
- La maximisation du profit $\pi(p) = pQ(p) - C(Q(p))$ par un producteur en situation de monopole libre de fixer le prix unitaire p du bien qu'il produit et connaissant la fonction de demande $Q : p \mapsto Q(p)$ de l'économie ainsi que sa fonction de coût $q \mapsto C(q)$ (voir l'exercice 62 du chapitre 10).
- La minimisation du coût $rK + wL$ pour une entreprise cherchant à produire une quantité de biens donnée Q à l'aide d'une *combinaison productive* de facteurs de production K et L de coûts respectifs r et w, sous une contrainte de production de la forme $Q = F(K, L)$ (voir l'exercice 37 de ce chapitre).
- En théorie des jeux, le choix d'une stratégie optimale x^* par un joueur connaissant la *fonction de meilleure réponse* $x \mapsto R(x)$ des autres joueurs et le niveau d'utilité $u(x, R(x))$ associé pour le joueur aux choix qui en résultent.
- La maximisation de la recette fiscale $\tau Y(\tau)$ par un État libre de choisir un taux d'imposition $\tau \in [0, 1]$ et connaissant la réponse $Y : \tau \mapsto Y(\tau)$ de la production à ce niveau d'imposition.

... et ailleurs

On rencontre des problèmes d'optimisation dans bien d'autres domaines :

- En biologie, où l'organisation interne ou sociale de certains êtres vivants (spirales des pommes de pin ou des escargots, graines dans une fleur de tournesol, colonies de fourmis, bancs de poissons, nuées d'oiseaux) exhibe des structures minimisant ou maximisant certaines fonctions.
- En physique, où certains phénomènes mécaniques peuvent être décrits par l'idée selon laquelle un point d'équilibre (typiquement la position d'un solide) minimise une énergie potentielle.
- En conception de produit, où la forme et la structure interne d'un objet peuvent être optimisées pour répondre au mieux à certaines contraintes, par exemple dans le cas du matériel de travaux ou de l'équipement sportif.
- En ingénierie, notamment lors de la conception de véhicules économes et performants. L'optimisation est particulièrement pratiquée dans le cas de l'ingénierie spatiale, qui doit tenir compte des contraintes thermiques, électroniques, électromagnétiques et aérodynamiques pour rendre possible la propulsion et le contrôle de la trajectoire d'un objet tout en minimisant les risques associés. On trouve aussi des problèmes d'électromagnétisme liés à la minimisation de la trace sur un radar d'un engin que l'on souhaite rendre indétectable.

La disposition en spirales concentriques des étamines dans une fleur de tournesol maximise l'espace offert à chaque nouvelle graine lors de son apparition. Un corollaire frappant de ce résultat est que le nombre de ces spirales orientées dans le sens positif et le nombre de celles orientées dans le sens indirect sont fréquemment deux termes successifs de la suite de Fibonacci (généralement 21, 34, 55 ou 89) ! On retrouve un phénomène similaire en observant les écailles des ananas ou des pommes de pin.

- En logistique, où l'enjeu est de réduire les coûts de transport et de stockage des marchandises tout en assurant une continuité dans leur approvisionnement pour répondre à des exigences de production.
- Dans la gestion d'infrastructures ferroviaires, de réseaux routiers ou de réseaux d'approvisionnement, qui requièrent des investissements lourds précédés d'études méticuleuses pour connaître le tracé optimal du réseau, le volume d'échanges qu'il peut supporter et, dans le cas des réseaux de transports, les fréquences et les horaires de desserte.
- Dans l'ajustement d'une droite à un nuage de points du plan, pour décrire des relations entre une variable explicative et une variable expliquée et pour réaliser des prédictions. C'est le principe de la *régression linéaire*, très utilisé en sciences appliquées en général ; on l'abordera dans le chapitre sur les fonctions de deux variables traités en deuxième année.

3.2.2 Détermination du lieu d'un extremum

On s'intéresse au problème d'optimisation consistant à localiser les points x réalisant les extrema d'une fonction f sur un intervalle I.

La première idée qui vient à l'esprit est de réaliser le tableau de variations de f et de lire directement sur ce tableau le lieu des extrema locaux de f, puis de comparer ces extrema entre eux pour déterminer lesquels sont globaux. Il s'agit bien sûr d'une solution directe et efficace, à privilégier lorsque l'étude des variations de f est aisée. Toutefois, il arrive fréquemment que f présente des variations multiples ou que le signe de sa dérivée sur l'ensemble de l'intervalle I soit difficile à déterminer. On dispose dans ce cas de critères purement analytiques permettant de déterminer sans la moindre considération graphique les extrema éventuels de f.

Définition J (Point critique)**.** Si f est dérivable, on appelle *point critique de f* tout point $x \in I$ tel que $f'(x) = 0$.

Exemple. Les points critiques de la fonction $x \mapsto 2x^5 - 5x^2$ sont les points d'annulation de sa dérivée $x \mapsto 10(x^4 - x) = 10x(x^3 - 1)$, c'est-à-dire 0 et 1.

On a démontré le résultat suivant sous la forme d'un lemme dans le cadre de la preuve du théorème de Rolle (lemme 37 du chapitre 10) :

Proposition K (Condition nécessaire de premier ordre pour l'existence d'un extremum local)**.** Si f admet un extremum local en $a \in I$ et si a est un point intérieur de I, alors a est un point critique de f.

La précision « de premier ordre » fait référence au fait que la condition implique la dérivée première de f, c'est-à-dire f'.

Exemple. Les lieux des extrema locaux possibles sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ sont nécessairement des points d'annulation de sa dérivée $f' : x \mapsto 3x^2 - 3$, c'est-à-dire que f ne peut admettre d'extremum local en un point autre que -1 ou 1.

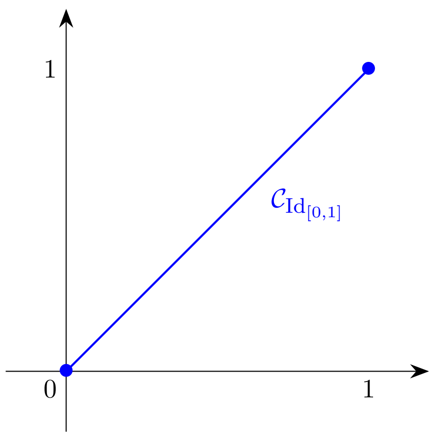
Notons qu'en l'état actuel des choses, la proposition K ne nous permet pas de dire si f atteint bien des extrema locaux en ces points.

Il est important de garder à l'esprit que la proposition K ne s'applique pas dans le cas où l'extremum de f sur I est réalisé en une borne de I (c'est-à-dire en un point non intérieur à I) :

Exemple L (Un contre-exemple important)**.** La fonction identité

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Id}_{[0,1]} : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

admet un minimum global en 0 et un maximum global en 1, mais ni 0 ni 1 ne sont des points critiques de $\mathrm{Id}_{[0,1]}$ dont la dérivée vaut constamment 1 :

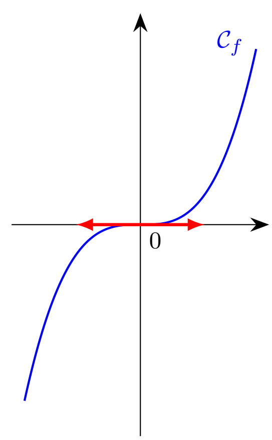


Une démonstration « à l'économiste » de la proposition K consiste à dire que si l'on suit un chemin de crête jusqu'au sommet d'une colline, la pente de ce chemin à l'emplacement exact du sommet ne peut être strictement positive (sinon il serait possible de monter encore plus haut en suivant le chemin) ni strictement négative (sinon il serait possible de monter encore plus haut en rebroussant chemin) et doit donc être nulle. Ce raisonnement, qui tombe en défaut si le point considéré n'est pas intérieur à l'intervalle (puisque l'un des deux mouvements le long du chemin est alors impossible !), nous permettra de comprendre aisément les résultats équivalents pour les fonctions de deux variables que nous énoncerons en deuxième année.

Par ailleurs, la condition *nécessaire* à l'existence d'un extremum en a donnée par la proposition K n'est pas *suffisante*, comme l'illustre l'exemple canonique suivant :

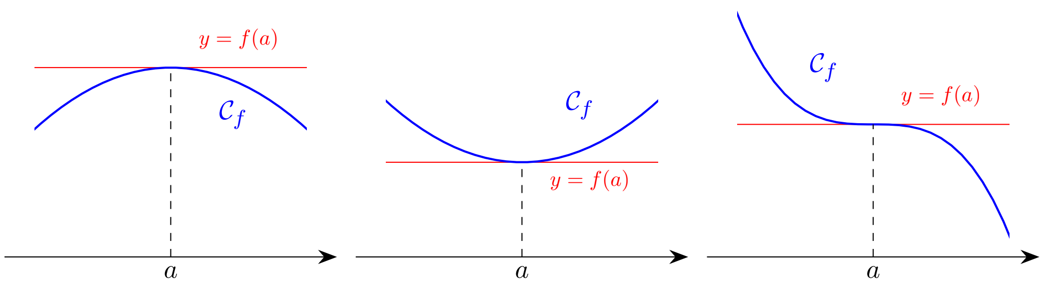
Exemple M (Un autre contre-exemple canonique)**.** La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ admet un point critique en 0, mais ce point n'est ni le lieu d'un maximum local ni celui d'un minimum local.

Un tel point est appelé *point col*, ou encore *point selle* – cette terminologie étonnante deviendra limpide dans le cadre de l'optimisation des fonctions à deux variables que nous étudierons en deuxième année.



Ainsi, résoudre l'équation $f'(x) = 0$ pour identifier les points critiques de f permet d'identifier les points intérieurs à I *candidats* pour être le lieu d'un extremum de f, mais il est nécessaire de mener une étude plus poussée pour s'assurer du fait que ces points réalisent bien un extremum de f, et le cas échéant pour connaître la nature de cet extremum (minimum ou maximum).

Heureusement, il n'est pas nécessaire pour cela de connaître finement les variations de f. En effet, si a est un point intérieur de I et un point critique de f, alors f admet en a une tangente horizontale d'équation $y = f(a)$, et la question de l'optimalité du point a peut alors être reformulée en termes de position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente :



Maximum local strict | Minimum local strict | Point col

La proposition E donne alors directement le résultat suivant :

> **Proposition N** (Condition suffisante de second ordre pour l'existence d'un extremum local)**.** Soit a un point intérieur à I.
>
> Si f est deux fois dérivable en a, si a est un point critique de f et si $f''(a) \neq 0$, alors f admet un extremum local strict en a. Il s'agit dans ce cas d'un maximum local strict si $f''(a) < 0$ et d'un minimum local strict si $f''(a) > 0$.

L'utilisation conjointe de la condition nécessaire de premier ordre (pour identifier les points candidats) et de la condition suffisante de deuxième ordre (pour vérifier si chacun de ces points est le lieu d'un extremum) est généralement suffisante pour déterminer les extrema locaux de f.

Exemple. On cherche à étudier les minima et maxima locaux de la fonction polynomiale du cinquième degré $f : x \mapsto x^5 + 20x^2 - 10$.

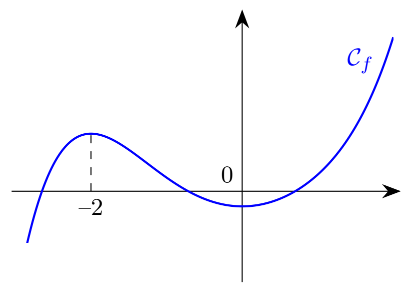
Pour cela, on commence par chercher les points critiques de f, c'est-à-dire les solutions de l'équation $f'(x) = 0$, soit $5x^4 + 40x = 0$, soit encore $5x(x^3 + 8) = 0$: ces solutions sont les réels -2 et 0, qui sont donc les seuls candidats pour être le lieu d'un extremum local de f.

On calcule alors les valeurs prises par la fonction $f'' : x \mapsto 20x^3 + 40$ en -2 et en 0 : on obtient

$$f''(-2) = -120 < 0 \quad \text{et} \quad f''(0) = 40 > 0,$$

donc f admet un maximum local strict en -2 et un minimum local strict en 0 (voir ci-contre).

Notons que ces extrema sont locaux mais non globaux puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



Toutefois, la proposition que nous venons d'appliquer ne permet pas de traiter le cas où a est un point critique mais $f''(a) = 0$. On utilise dans ce cas le théorème F :

Théorème O (Condition suffisante pour l'existence d'un extremum local)**.** Soit a un point intérieur à I.

On suppose que f est dérivable $n \geqslant 2$ fois en a, que a est un point critique de f et que l'un des nombres $f^{(k)}(a)$, pour $k \in [\![2, n]\!]$, n'est pas nul. Soit k le plus petit entier de $[\![2, n]\!]$ vérifiant cette propriété.

Alors la fonction f :

- admet un point col en a si k est impair.
- admet un maximum local strict en a si k est pair et $f^{(k)}(a) < 0$.
- admet un minimum local strict en a si k est pair et $f^{(k)}(a) > 0$.

On retiendra la méthode suivante :

Méthode P (Détermination des extrema locaux de f)**.** Pour déterminer les extrema locaux d'une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ dont on ne dispose pas d'un tableau de variations :

- Si I contient l'une ou l'autre de ses bornes, on étudie le comportement de f au voisinage de ces points pour déterminer s'ils sont ou non le lieu d'un extremum.
- On localise les points critiques de f sur l'intérieur de I en résolvant l'équation $f'(x) = 0$. Pour chaque point critique a :
  - On calcule les dérivées successives de f en a jusqu'au premier rang $k \geqslant 2$ tel que $f^{(k)}(a) \neq 0$.
  - On statue sur la nature du point critique a grâce à la parité de k et au signe de $f^{(k)}(a)$ en utilisant le théorème O.

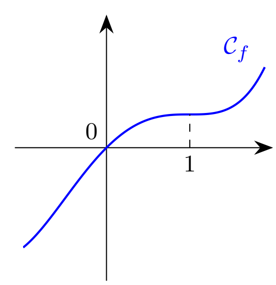
Exemple. L'étude de la fonction $f : x \mapsto x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x$ et de sa dérivée $f' : x \mapsto 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$ indiquent que 1 est un point critique de f. On calcule ensuite

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 12x^2 - 6x - 6 \quad \text{donc} \quad f''(1) = 0$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(3)}(x) = 24x - 6 \quad \text{donc} \quad f^{(3)}(1) = 18 \neq 0,$$

donc f admet un point col en 1.



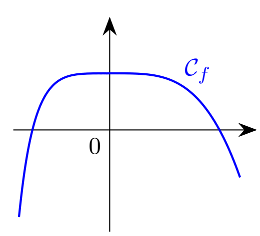
Exemple. L'étude de la fonction

$$f : x \longmapsto 1 + \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

indique que 0 est un point critique de f. On obtient alors par le calcul (vérifiez-le !) :

$$f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(4)}(0) = -6 < 0,$$

si bien que f admet un maximum local strict en 0.



Les critères que nous venons de voir permettent de déterminer les extrema locaux de f, ce qui n'est pas suffisant en tant que tel pour déterminer ses extrema globaux. On dispose toutefois d'une variété d'outils pour étudier l'existence de ces derniers et pour les localiser le cas échéant :

- La situation idéale est bien entendu celle dans laquelle on dispose d'un tableau de variations (même grossier) de f. Dans ce cas, l'exploitation directe du tableau est susceptible de fournir les informations attendues.
- Si I ne contient pas l'une ou l'autre de ses bornes, on peut étudier la limite éventuelle de f en cette borne. Si cette limite existe et vaut $+\infty$ (resp. $-\infty$), alors f n'admet pas de maximum (resp. pas de minimum) sur I.
- Si I est un segment et si f est continue, le théorème des bornes atteintes donne l'existence d'un minimum et d'un maximum pour f sur I.
- Si I est un intervalle ouvert et si f est continue et admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour limite en les deux bornes de I, on peut restreindre l'analyse de f à un segment pour appliquer le théorème des bornes atteintes et obtenir l'existence d'un minimum global (resp. d'un maximum global) pour f.
- Une fois établie l'existence d'un extremum global hors des bornes de I, on utilise le fait qu'un tel extremum est en particulier un extremum local : on détermine alors les extrema locaux de f, puis on compare entre elles les valeurs de ces extrema.
- Le réflexe fondamental consiste bien entendu à s'adapter à la situation rencontrée, à se représenter autant que possible le comportement de la fonction f sur I et, dans le cadre d'un sujet de concours, à utiliser autant que possible les questions déjà traitées et les indications du sujet.

Ces divers points seront illustrés dans les exercices accompagnant ce chapitre.

Ainsi, si f est continue sur $\mathbb{R}$ et si $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = -\infty$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ tels que l'on ait $f(x) \leqslant f(0)$ dès que $x \notin [a, b]$, si bien que f est majorée sur $\mathbb{R}$ par $\max\limits_{[a,b]} f$, qui existe d'après le théorème des bornes atteintes. Ce réel est donc le maximum global de f.