4 EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 34 (Taux d'intérêt). Quel est le taux d'intérêt annuel que doit proposer une banque pour qu'un capital placé sur un compte à intérêts composés soit doublé en l'espace de 20 ans ?

Exercice 35 (Taux de croissance). Quel est le taux de croissance annuel moyen d'une population ayant augmenté de 50% en 10 ans ?

Exercice 36 (Gamme tempérée). Dans la gamme tempérée, le rapport des fréquences de deux notes successives (c'est-à-dire espacées d'un demi-ton, par exemple do et do$\sharp$, ou la et si$\flat$) est toujours égal à une même constante $a > 1$. Calculer a sachant qu'une octave ascendante correspond à un doublement de la fréquence de la note.

Exercice 37 (Dimensions d'un champ). Déterminer la longueur et la largeur d'un champ rectangulaire dont on sait que le périmètre vaut 40m et la surface 91m^2.

Exercice 38 (Microéconomie du producteur). On considère un producteur en situation de monopole possédant la fonction de coût

$$C(q) = 300 + 20q$$

où q est le nombre d'unités produites et $C(q)$ le coût de la production (en euros), et faisant face à la fonction de demande

$$D(p) = \max(0, 100 - p),$$

où p est le prix fixé par le producteur (en euros) et $D(p)$ la demande qui lui est adressée.

Déterminer le prix permettant au producteur de maximiser son profit et calculer la quantité de bien produite dans cette situation.

Exercice 39 (Emplacement de bivouac). Un randonneur projette de parcourir un chemin de 40 kilomètres et cherche un endroit où bivouaquer. Au milieu du chemin se trouve un village, et 6 kilomètres plus loin se trouve la grotte d'un ours. Peu rassuré, le randonneur souhaite que l'endroit où il plantera sa tente soit au moins deux fois plus proche du village que de la grotte. Il souhaite aussi camper à moins de 3 kilomètres de l'une des deux sources présentes sur le chemin, localisées à 15 et 30 kilomètres.

Déterminer la distance maximale que pourra parcourir le randonneur avant de bivouaquer.

5 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 40. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

Indication : commencer par montrer que la fonction $f : a \mapsto \frac{a}{1+a}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 41. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. On pose $B := \{|a-b| \; : \; a \in A, b \in A\}$. Montrer que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 42. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une application croissante. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Indication : on pourra dans un premier temps faire un dessin, et dans un second temps considérer la borne supérieure d'une partie bien choisie de $[0,1]$.

Exercice 43. Démontrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ sont irrationnels.

Exercice 44 (Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$). Soit $H \subset \mathbb{R}$ tel que :

(*i*) $0 \in H$.

(*ii*) Pour tout $x \in H$, on a $-x \in H$.

(*iii*) Pour tous $x, y \in H$, on a $x + y \in H$.

Ces trois conditions font de $(H, +)$ un groupe inclus dans le groupe $(\mathbb{R}, +)$ (on parle de *sous-groupe additif de* $\mathbb{R}$).

On suppose de plus que H n'est pas réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que $H \cap \mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure $a \in \mathbb{R}_+$.
2. Supposons que $a > 0$.
   (a) On suppose que $a \notin H$. Montrer qu'il existe $x, y \in H$ tels que $a < x < y < 2a$ et aboutir à une contradiction.
   (b) Montrer que $H = a\mathbb{Z}$, où $a\mathbb{Z} := \{na, \, n \in \mathbb{Z}\}$.
3. Montrer que si $a = 0$, alors H est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \quad \exists x \in A \; : \; y - \varepsilon < x < y + \varepsilon.$$

4. *Application* : montrer que l'ensemble $H := \{u + v\sqrt{2} \; : \; u, v \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 45 (Développement décimal d'un nombre réel). Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il existe un unique entier $m \in \mathbb{N}$ et une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $[\![0,9]\!]$ telle que l'on ait
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} \leqslant x < m + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$
Indication : construire la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par récurrence.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'entier a_k est appelé *la k-ième décimale de x*, et la donnée de m et de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est appelée le *développement décimal propre de x*.

Dans le cours sur les séries, on notera plus simplement
$$x = m + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k},$$
où la somme infinie est à comprendre en un sens que l'on précisera.

2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas stationnaire à 9, c'est-à-dire telle qu'il n'existe pas de rang à partir duquel on a toujours $a_n = 9$.
3. Quel sens peut-on donner à l'écriture $x = 0,9999999...$?
4. Déterminer une formule donnant l'expression de la k-ième décimale du réel x à l'aide de la fonction partie entière.
5. Si $p \geqslant 2$, définir le développement propre de x en base p.
6. Déterminer le développement propre en base 2 (aussi appelé *développement dyadique propre*) du réel $\frac{1}{3}$.

Exercice 46. On veut montrer qu'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire qu'il est constitué à partir d'un certain rang d'une séquence de chiffres qui se répète à l'infini (éventuellement une séquence de 0), comme dans les nombres
$$\frac{1}{11} = 0,090909... \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} = 0,500000...$$

1. (a) Réaliser la division de 191 par 7 jusqu'à obtenir 12 chiffres après la virgule.
   (b) Quelles sont les valeurs possibles du reste obtenu à chaque étape de la division d'un nombre entier par 7 ?
   (c) Montrer que lors de la division d'un entier par 7, il existe $p \in [\![1,7]\!]$ tel que les décimales obtenues se répètent toutes les p étapes.
   (d) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et tout $b \in \mathbb{N}^*$, le développement décimal propre du nombre $\frac{a}{b}$ est périodique à partir d'un certain rang.

2. (a) Donner l'écriture décimale des nombres $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$ et $\frac{1}{999}$.
   (b) Écrire le nombre $0,20202...$, le nombre $4,311311311...$ et le nombre $12,7234234...$ sous la forme de fractions d'entiers.
3. Montrer que tout nombre réel dont le développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang est rationnel.
4. Conclure.
5. *Application* : montrer que la constante de Champernowne $C := 0,12345678910111213...$, obtenue en concaténant les écritures décimales des entiers naturels, n'est pas rationnelle.