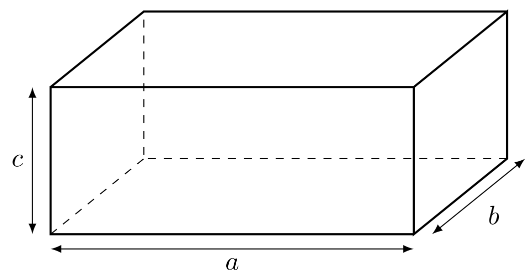
# 4 EXERCICES D'APPLICATION

**Exercice 60** (Emballage de cadeau). On cherche à emballer un cadeau en forme de parallélépipède de dimensions strictement positives $a$, $b$ et $c$ :




1. Exprimer en fonction de $a$, $b$ et $c$ la surface latérale $S$ du parallélépipède et son volume $V$.
2. À volume $V > 0$ donné, comment choisir $a$, $b$ et $c$ pour minimiser la surface latérale du cadeau ?
   *Indication* : on pourra tout d'abord considérer $a$ fixé puis choisir $b$ et $c$ de sorte à minimiser la surface du cadeau, puis choisir la valeur de $a$ permettant d'optimiser cette surface minimale.
3. À surface $S > 0$ donnée, comment choisir $a$, $b$ et $c$ de sorte à maximiser le volume du cadeau ?

   *Indication* : on pourra mettre en évidence un lien entre ce problème et le précédent.

**Exercice 61** (Interprétation mécanique des résultats du cours). On considère un solide en déplacement le long d'un axe gradué et orienté et dont on repère la position au temps $t \in \mathbb{R}$ par un réel noté $s(t)$. On suppose que la fonction $t \mapsto s(t)$ est dérivable et on note $v : t \mapsto s'(t)$ sa dérivée. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on appelle $v(t)$ la *vitesse instantanée du solide au temps $t$*.

1. Donner une approximation de la position du solide au temps $t = 1,01$ si $s(1) = 2$ et $v(1) = 4$.
2. Donner une fonction $s$ correspondant à une vitesse constante égale à 3. Une telle fonction est-elle unique ?
3. Donner une fonction $s$ associée à la fonction de vitesse instantanée $v : t \mapsto 2t$. Une telle fonction est-elle unique ?
4. Partant d'une ville $A$, je me déplace en voiture le long d'une route menant à une ville $B$ distante de 100 kilomètres. De quels résultats du cours les affirmations suivantes sont-elles des corollaires ?
   (a) Si j'atteins la ville $B$, il existera un instant où je me serai trouvé à 50 kilomètres de la ville $A$.
   (b) Si je rebrousse chemin et retourne dans la ville $A$, il existera un instant auquel ma vitesse par rapport à l'axe de la route sera nulle.

(c) Il existe un instant auquel mon compteur de vitesse affichera un nombre égal à ma vitesse *moyenne* sur le trajet.

(d) Si la vitesse affichée par le compteur est toujours inférieure à 50 km/h, il me faudra au minimum 2 heures pour atteindre la ville $B$.

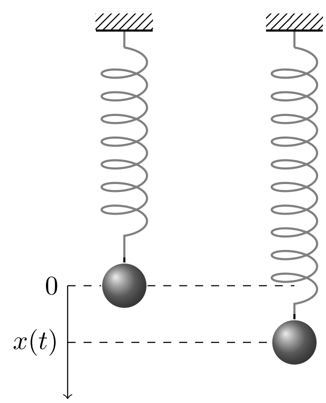
5. Imaginer un dispositif embarqué permettant d'évaluer la vitesse $v(t)$ d'une voiture à chaque instant $t \in \mathbb{R}$. Cette estimation est-elle exacte ?
6. Comment pourrait-on définir l'*accélération instantanée* $a(t)$ d'un solide au temps $t$ ?
7. Donner une fonction $s$ correspondant à une accélération constante égale à $-10$.
8. On considère une balle de tennis de masse $m = 0,06$ kilogrammes lancée verticalement à partir de l'altitude $s(0) = 1$ mètre, avec une vitesse initiale de $v(0) = 20$ mètres par seconde. On note $s(t)$ l'altitude de la balle (en mètres) au temps $t \geqslant 0$ (en secondes). La deuxième loi de Newton, ou *principe fondamental de la dynamique*, stipule que l'accélération $a(t)$ de la balle au temps $t$ vérifie approximativement l'égalité suivante (dont l'unité est le m.s$^{-2}$) :

$$a(t) \approx -10$$

tant que la balle n'a pas touché le sol.

Calculer l'altitude maximale atteinte par la balle et le temps auquel elle touchera le sol.

**Exercice 62** (Un exercice de mécanique). Une boule de masse $m > 0$ est accrochée à un ressort vertical dont l'extrémité haute est fixée (voir figure ci-contre). On appelle *position d'équilibre* de la boule la position de la boule lorsque le système est au repos. À l'instant $t = 0$, on tire la boule vers le bas sur une longueur $x_0 \geqslant 0$, puis on la relâche avec une vitesse nulle. À chaque instant $t \geqslant 0$, on note $x(t)$ le déplacement de la boule vers le bas par rapport à la position d'équilibre (on a donc $x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$).




En négligeant les frottements, des considérations physiques permettent d'établir que $x$ est dérivable, que $x'$ l'est aussi et que l'on a l'équation du mouvement suivante :

$$mx''(t) = -kx(t),$$

où $k$ est une constante positive (appelée *constante de raideur du ressort*).

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $y : t \mapsto \lambda \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ vérifie $y(0) = x_0$ et $y'(0) = 0$.

2. Montrer que la fonction $y$ ainsi définie vérifie $(y-x)'' = -\frac{k}{m}(y-x)$.
3. Que vaut la dérivée de la fonction $((y-x)')^2 + \frac{k}{m}(y-x)^2$ ?
4. En déduire que $x(t) = y(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.
5. Les variations asymptotiques de $x$ en fonction de $t$ vous semblent-elles crédibles ?

**Exercice 63** (Microéconomie du producteur). Une entreprise en situation de monopole vend un bien sur un marché en fixant librement son prix $p \geqslant 0$. L'entreprise dispose d'une fonction de demande $D$, c'est-à-dire qu'elle est capable de prédire la demande $D(p)$ (non nécessairement entière) qui lui est adressée en fonction du prix $p$ pratiqué.

1. On considère tout d'abord que le coût marginal de production d'une unité de bien supplémentaire est nul.
   (a) Donner des exemples de situations concrètes correspondant à ce choix de modélisation.
   (b) Calculer le prix maximisant le profit pour l'entreprise dans les cas suivants :

   $(i)$ $D(p) = \max(100-p, 0)$
   $(ii)$ $D(p) = \max(100-4p, 0)$
   $(iii)$ $D(p) = \max(200-p, 0)$
   $(iv)$ $D(p) = \max(100-p^2, 0)$
   $(v)$ $D(p) = \dfrac{100}{100+p^2}$

   (c) Commenter les différences entre les résultats obtenus dans les trois premiers cas.
2. On considère à présent que le coût marginal de production d'une unité de bien supplémentaire est égal à 10 €.
   (a) Donner des exemples de situations concrètes correspondant au choix d'un coût marginal constant.
   (b) Calculer le prix maximisant le profit pour l'entreprise dans les cas suivants :

   $(i)$ $D(p) = \max(100-p, 0)$
   $(ii)$ $D(p) = \max(100-4p, 0)$
   $(iii)$ $D(p) = \max(200-p, 0)$
   $(iv)$ $D(p) = \max(500-p^2, 0)$
   $(v)$ $D(p) = \dfrac{100}{100+p^2}$

3. On suppose à présent que l'entreprise fait face à un coût marginal croissant, et que le coût total de production d'une quantité $q \geqslant 0$ de bien est $C(q) = q^2$.
4. Vérifier que le coût marginal $C'$ associé à la fonction de coût est bien croissant.
   (a) Donner des exemples de situations concrètes correspondant à un coût marginal croissant.
   (b) Vérifier que le coût marginal $C'$ associé à la fonction de coût est bien croissant.

   (c) Déterminer le prix maximisant le profit du producteur et la quantité échangée associée lorsque $D(p) = \max(100 - p, 0)$.

5. On considère enfin que l'entreprise produit des biens de luxe dont le coût marginal de production est égal à 9 000 €, et que sa fonction de demande est définie par $D(p) = \max\left(5p - \frac{p^2}{3000}, 0\right)$.

   (a) Comment interpréter l'allure de la courbe de demande ?

   (b) Calculer le prix maximisant le profit du producteur.

**Exercice 64** (Microéconomie du consommateur). Un consommateur peut consommer deux biens 1 et 2 en quantités respectives $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Il en retire alors un niveau de satisfaction (ou d'*utilité*) $u(x, y)$, où la fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est la *fonction d'utilité de Cobb-Douglas* donnée par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad u(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, en convenant du fait que $0^\alpha = 0^\beta = 0$.

Si $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on définit l'*utilité marginale du bien 1* (au point $(x, y)$), que l'on note $u_{m,1}(x, y)$, comme le nombre dérivé de la fonction $t \mapsto u(t, y)$ en $x$, et on définit l'utilité marginale du bien 2 (au point $(x, y)$), notée $u_{m,2}(x, y)$, comme le nombre dérivé de la fonction $t \mapsto u(x, t)$ en $y$.

1. Interpréter les utilités marginales en termes économiques, puis les calculer.
2. À quelle condition sur $\alpha$ (resp. $\beta$) peut-on dire que l'utilité marginale de $x$ (resp. $y$) est décroissante ? Comment interpréter cette propriété en termes économiques ?

On considère que le prix du bien 1 est $p_1 > 0$, que le prix du bien 2 est $p_2 > 0$ et que le consommateur dispose d'un revenu $R > 0$, si bien qu'il fait face à la *contrainte de budget* suivante :

$$p_1 x + p_2 y \leqslant R.$$

Le problème du consommateur revient alors à choisir le panier de biens $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ qui maximise son utilité $u(x, y)$ tout en satisfaisant la contrainte de budget.

3. Montrer que le consommateur a intérêt à saturer la contrainte de budget, c'est-à-dire à choisir un panier de biens $(x, y)$ tel que $p_1 x + p_2 y = R$.
4. En exprimant $y$ en fonction de $x$ grâce à la contrainte de budget saturée, reformuler le problème comme la maximisation d'une fonction d'une variable.
5. Déterminer le panier de biens $(x^*, y^*)$ répondant au problème du consommateur.
6. Commenter la formule donnant $x^*$ en fonction des paramètres du modèle. On montrera notamment que la part du revenu allouée à la consommation du bien 1 à l'optimum ne dépend pas de $p_1$.

**Exercice 65** (Un modèle épidémiologique). On souhaite étudier la propagation d'une épidémie au sein d'une population de $N > 0$ individus ($N$ étant un nombre non nécessairement entier), composée au temps $t \geqslant 0$ d'un nombre $S(t)$ d'individus sains (aussi dits *susceptibles*) et d'un nombre $I(t) := N - S(t)$ d'individus infectés.

On modélise cette situation par des fonctions dérivables $S : \mathbb{R} \to [0, N]$ et $I := N - S$ vérifiant l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S'(t) = \gamma I(t) - \frac{\beta I(t) S(t)}{N}, \tag{$*$}$$

où $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$. On admet que de telles fonctions existent.

On modélise ici la population de façon *continue* plutôt que discrète, au sens où le nombre d'individus qui composent les différentes sous-populations évolue dans $\mathbb{R}$ plutôt que dans $\mathbb{N}$. Ce choix de modélisation, outre qu'il permet l'utilisation des dérivées, a du sens si l'on considère par exemple que la population considérée est comptée en milliards d'individus.

1. On interprète le paramètre $\beta$ comme le taux de contact infectieux entrepris par un individu infecté et le paramètre $\gamma$ comme le taux instantané de rémission d'un individu infecté. Interpréter l'équation ($*$).
2. On suppose tout d'abord que $\beta < \gamma$.
   (a) Montrer que $S$ est croissante.
   (b) Montrer que $S'(t)$ ne peut pas admettre une limite strictement positive lorsque $t \to +\infty$.
   *Indication* : raisonner par l'absurde, justifier l'existence d'un $A \in \mathbb{R}$ et d'un $\varepsilon > 0$ tels que $S'(x) \geqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant A$, puis utiliser le théorème des accroissements finis entre $A$ et $x$.
   (c) Montrer que $S(t)$ tend vers $N$ lorsque $t \to +\infty$.
   *Indication* : on justifiera d'abord l'existence d'une limite pour $S$ en $+\infty$, puis on montrera que cette limite vaut $N$ en raisonnant par l'absurde à l'aide de l'équation ($*$).
   (d) Quelle est l'évolution à long terme du nombre d'individus infectés dans la population ?
3. On suppose à présent que $\beta > \gamma$. On suppose aussi que $S(0) \in \left]\frac{\gamma}{\beta}N, N\right[$ et on définit la fonction $G$ de la façon suivante :

$$\forall x \in \left]\frac{\gamma}{\beta}N, N\right[, \quad G(x) = \frac{1}{\beta - \gamma}\left(\ln(N - x) - \ln\left(x - \frac{\gamma}{\beta}N\right)\right).$$

   (a) On admet que $G \circ S$ est bien définie, c'est-à-dire que $S$ prend ses valeurs dans $\left]\frac{\gamma}{\beta}N, N\right[$. Montrer que $G \circ S$ est dérivable et que $(G \circ S)' = 1$.
   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(G \circ S)(t) = t + \alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis déterminer $\alpha$ en fonction de $S(0)$.
   (c) En déduire la forme explicite de $S(t)$ en fonction de $t$, puis la limite de $S(t)$ quand $t \to +\infty$.
   (d) Quelle est l'évolution à long terme du nombre d'individus infectés dans la population ?

4. À partir des deux cas considérés ci-dessus, expliquer le rôle du facteur $R_0 := \frac{\beta}{\gamma}$, appelé *nombre de reproduction de base*, dans la dynamique à long terme d'une épidémie.

5. On suppose dans un troisième temps que $\beta < \gamma$ mais que l'on parvient à vacciner une fraction $p \in [0,1]$ de la population, ce qui conduit à rendre une proportion $p$ des individus non atteignables par l'épidémie.

   (a) Justifier que l'équation différentielle suivie par $S$ est à présent

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S'(t) = \gamma I(t) - \frac{\beta(1-p)I(t)S(t)}{N} = I(t)\left(\gamma - \beta(1-p)\frac{S(t)}{N}\right). \qquad (**)$$

   (b) Montrer que la proportion de la population qu'il est nécessaire de vacciner pour que l'épidémie s'éteigne d'elle-même dans le cadre du modèle considéré vaut

$$p^* = 1 - \frac{1}{R_0}.$$

   (c) Dans le cas de l'épidémie de COVID-19, le paramètre $R_0$ a parfois été estimé à $2,5$. Que vaut $p$ dans ce cas ?

   (d) Le modèle considéré est-il adapté pour décrire l'évolution de l'épidémie de COVID-19 ?