Dérivation

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 15.

(*i*) La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable en 0 en tant que composée de fonctions dérivables, et on a $f'(0) = \frac{1}{1+0} = 1$. Ainsi,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0) = 1.$$

(*ii*) Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{e^{5x+1}-e^{3x+1}}{2x} = e^{3x+1}\frac{e^{2x}-1}{2x}.$$

Or $e^{3x+1} \xrightarrow[x\to 0]{} e^{3\cdot 0+1}$ par continuité de exp en 0 et

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y} = \exp'(0) = 1.$$

Ainsi :

$$\frac{e^{5x+1}-e^{3x+1}}{2x} = e^{3x+1}\frac{e^{2x}-1}{2x} \xrightarrow[x\to 0]{} e\cdot\exp'(0) = e.$$

(*iii*) La fonction $f : x \mapsto \ln(3-2x)$ est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{-2}{3-2\cdot 1} = -2$. On a donc

$$\frac{\ln(3-2x)}{x-1} = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1]{} f'(1) = -2.$$

(*iv*) En posant $y = \frac{1}{x}$, on peut écrire

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right) = \lim_{y\to 0^+}\frac{1}{y}(e^{y}-1) \xrightarrow[x\to 1]{} \exp'(0) = 1.$$

(*v*) En posant $y = e^{x}$, on peut écrire

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos(e^{x})-1}{e^{x}} = \lim_{y\to 0^+}\frac{\cos(y)-1}{y} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0.$$

(*vi*) La fonction $f : x \mapsto \ln(1-x)$ est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{1-0} = -1$. On peut alors écrire

$$\ln(x)\ln(1-x) = \ln(x)f(x) = x\ln(x)\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0\cdot f'(0) = 0$$

puisque $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ par croissance comparée.

Correction de l'exercice 16. On rappelle tout d'abord que

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x\neq a}]{} f'(a).$$

Comme $f'(a)>0$, il existe par définition de la limite un $\varepsilon>0$ tel que f soit définie sur $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ et tel que l'on ait $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$ pour tout $x\in]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$ vérifiant $x\neq a$. Ainsi, si $x\in]a-\varepsilon,a[$ on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0 \quad \text{donc} \quad f(x)-f(a)<0 \ \text{ car } \ x-a<0,$$

et si $x\in]a,a+\varepsilon[$ on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0 \quad \text{donc} \quad f(x)-f(a)>0 \ \text{ car } \ x-a>0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 17.

1. Il suffit de faire apparaître deux taux d'accroissement de f autour de 0 :

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right) \xrightarrow[h\to 0^+]{} \frac{1}{2}(f'(a)+f'(a)) = f'(a).$$

2. La fonction valeur absolue, exemple classique de fonction non dérivable en 0, vérifie pourtant

$$\frac{|0+h|-|0-h|}{2h}=0 \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0.$$

Elle constitue donc un contre-exemple à la réciproque du résultat démontré dans la question précédente.

3. Supposons tout d'abord que f soit dérivable en a : on a donc

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[\substack{x\to a\\ x\neq a}]{} f'(a).$$

Posons à présent $\ell := f'(a)$ et considérons $\varepsilon>0$. Par définition de la limite, il existe $\delta>0$ tel que pour tout $x\in]a-\delta,a+\delta[$ vérifiant $x\neq a$, on ait

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-\ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Si $(h,k)\in]0,\delta[$, alors $a+h$ et $a-k$ sont des éléments $]a-\delta,a+\delta[$ différents de a, donc on peut écrire

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\ell\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|\frac{f(a-k)-f(a)}{-k}-\ell\right| \leqslant \varepsilon,$$

d'où, en appliquant une décomposition similaire à celle opérée dans la question 1 avec les pondérations $\frac{h}{h+k}$ et $\frac{k}{h+k}$ au lieu de $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(a+h)-f(a-k)}{h+k}-\ell\right| \\
&= \left|\frac{h}{h+k}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\ell\right)+\frac{k}{h+k}\left(\frac{f(a-k)-f(a)}{-k}-\ell\right)\right| \\
&\leqslant \frac{h}{h+k}\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\ell\right|+\frac{k}{h+k}\left|\frac{f(a-k)-f(a)}{-k}-\ell\right| \\
&\leqslant \frac{h}{h+k}\varepsilon+\frac{k}{h+k}\varepsilon=\varepsilon,
\end{aligned}$$

où la première majoration est donnée par l'inégalité triangulaire.

Ainsi, la condition donnée dans l'énoncé est bien vérifiée.

Réciproquement, supposons que cette condition soit vérifiée. Fixons $\varepsilon > 0$ et considérons δ comme dans la propriété. Fixons aussi $h \in]0, \delta[$. Alors pour tout $k \in]0, \delta[$ on a

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a-k)}{h+k}-\ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Or on a supposé f continue ; on peut donc passer à la limite dans l'inégalité ci-dessus lorsque $k \to 0$ et écrire

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-\ell\right| \leqslant \varepsilon.$$

Le réel h étant choisi arbitrairement dans $]0, \delta[$, on déduit de cette inégalité que f est dérivable à droite en a et que $f'_d(a) = \ell$.

Symétriquement, en fixant $k \in]0, \delta[$ et en réécrivant la propriété puis en faisant tendre h vers 0, on montre que f est dérivable à gauche en a et que $f'_g(a) = \ell$.

Ainsi, f est dérivable en a puisque ses dérivées à gauche et à droite en ce point sont égale, et $f'(a) = \ell$.

Correction de l'exercice 18. Supposons que f soit dérivable en a. Définissons la fonction h par $h(a) = 0$ et

$$h(x) = \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$$

pour tout $x \in V \setminus \{a\}$; on a alors $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 0$ par définition du nombre dérivé $f'(a)$, et un simple calcul assure que

$$f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)h(x)$$

pour tout $x \in V$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une fonction $h : V \to \mathbb{R}$ de limite nulle en a tels que l'on ait :

$$\forall x \in V, \quad f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)h(x).$$

On a alors
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lambda + h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda + 0 = \lambda,$$
donc f est dérivable en a et $f'(a) = \lambda$.

Correction de l'exercice 19.

1. Supposons que f soit paire, c'est-à-dire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(-x).$$
En dérivant cette égalité (ce qui est possible puisqu'elle est valable sur tout l'intervalle ouvert $\mathbb{R}$ et puisque f est dérivable), on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -f'(-x).$$
Cette relation signifie que f' est impaire.
2. Supposons que f soit impaire, c'est-à-dire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -f(-x).$$
En dérivant cette égalité, on obtient :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -(-f'(-x)) = f'(-x).$$
Cette relation signifie que f' est paire.

Correction de l'exercice 20.

1. Si $x \in \mathbb{R}$, on a $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
2. La relation rappelée dans la question précédente fait apparaître cos comme la composée de deux fonctions dérivables (la fonction affine $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ et la fonction sin). Ainsi, cos est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$\cos'(x) = \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot (-1) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin(x).$$

Correction de l'exercice 21. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} \\
&= \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x)\frac{\cos(h)^2-1}{(\cos(h)+1)h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\cos(x)\frac{\sin^2(h)}{(\cos(h)+1)h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\cos(x)\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1}\frac{\sin(h)}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&\xrightarrow[h\to 0]{} -\cos(x)\cdot\frac{0}{1+1}\cdot 1 - \sin(x)\cdot 1 = -\sin(x),
\end{aligned}$$
donc cos est dérivable en x et $\cos'(x) = -\sin(x)$. Ainsi, cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$.

Correction de l'exercice 22.

(i) La fonction f est dérivable en -1 en tant que fonction polynomiale, et on a $f'(-1) = 5\cdot(-1)^4+2 = 7$. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 est donc $y = f(-1) + f'(-1)(x-(-1)) = -3+7(x-(-1))$.

(ii) La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc en π, et $\sin'(\pi) = \cos(\pi) = -1$. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse π est donc $y = \sin(\pi) + \sin'(\pi)(x-\pi) = x-\pi$.

(iii) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$, donc $e^{x^2} \geqslant 1$, et donc $e^{x^2}-1 \geqslant 0$. Sa dérivabilité en 0 n'est pas immédiate puisque le terme sous la racine vaut 0 lorsque $x = 0$ et puisque la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. On souhaite donc examiner la limite éventuelle du taux d'accroissement de f en 0 ; or ce taux d'accroissement se réécrit de façon différente à gauche et à droite et 0. On peut écrire

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$$

puisque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1.$$

Ainsi, f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

Or f est paire, donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = -1$.

On en déduit que f est dérivable à gauche et à droite en 0, mais qu'elle n'est pas dérivable en 0 (puisque $f'_g(0) \neq f'_d(0)$). La demi-tangente à $\mathcal{C}_f$ à droite en 0 a pour équation

$$y = f(0) + f'_d(0)(x-0) = x \quad \text{et} \quad x \geqslant 0,$$

et sa demi-tangente à gauche en 0 est la symétrique de la demi-tangente à droite par rapport à l'axe des ordonnées, c'est-à-dire qu'il s'agit de la demi-droite d'équation

$$y = -x \quad \text{et} \quad x \leqslant 0.$$

(iv) La fonction f est dérivable en 1 comme quotient de fonctions dérivables, et

$$f'(1) = \frac{\frac{1}{1}\cdot\sqrt{1} - \ln(1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{1}}}{\sqrt{1}^2} = 1.$$

Ainsi, l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = f(1) + f'(1)(x-1) = x-1$.

(v) La fonction f est dérivable en 0 en tant que composée de fonctions dérivables, et on a $f'(0) = \frac{1}{1+0^4}\cdot 2\cdot 0 = 0$. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donc $y = f(0) + xf'(0) = 0$: cette tangente est confondue avec l'axe des abscisses.

(*vi*) La fonction f est bien définie au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ puisque $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, et elle est dérivable en $\frac{\pi}{2}$ en tant que composée de fonctions dérivables. On calcule par ailleurs $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}$, donc l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est

$$y = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

soit

$$y = -\frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Correction de l'exercice 23. La composée $f \circ g \circ h$ peut se réécrire sous la forme $f \circ (g \circ h)$. Comme g et h sont dérivables, $g \circ h$ l'est. Comme f l'est aussi, $f \circ (g \circ h)$ l'est. La formule de dérivation des fonctions composées donne alors

$$\forall x \in I, \quad (f \circ g \circ h)'(x) = f'((g \circ h)(x)) \cdot (g \circ h)'(x) = f'(g(h(x)) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x),$$

ce qu'il fallait démontrer. On retrouve le principe de « dérivation en chaîne » justifiant la dénomination anglo-saxonne de *chain rule* pour la formule de dérivation des fonctions composées.

Correction de l'exercice 24. On peut écrire fgh sous la forme du produit $f \cdot (gh)$. Or gh est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et f est dérivable donc $f \cdot (gh)$ l'est aussi. On a par ailleurs

$$(fgh)' = (f \cdot (gh))' = f' \cdot (gh) + f \cdot (gh)' = f'gh + f \cdot (g'h + gh') = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Correction de l'exercice 25.

1. Comme $g'(a) \neq 0$, le taux d'accroissement $\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$, qui tend vers $g'(a)$, est non nul pour tout x dans un certain voisinage épointé $V \setminus \{a\}$ de a ; or ce taux d'accroissement vaut $\frac{g(x)-0}{x-a} = \frac{g(x)}{x-a}$, donc g ne s'annule pas sur $V \setminus \{a\}$. On peut alors écrire, pour tout $x \in V \setminus \{a\}$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

et donc, en faisant tendre x vers a :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{f'(a)}{g'(a)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. D'après le point précédent appliqué en intervertissant les rôles de f et g, on a

$$\frac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{g'(a)}{f'(a)} = 0.$$

Comme g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a (et comme c'est aussi le cas pour f par le même raisonnement que dans la question précédente), on a $\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| > 0$ sur ce voisinage épointé, d'où $\lim_{x\to a}\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = 0^+$. On a alors $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right| = \dfrac{1}{\left|\frac{g(x)}{f(x)}\right|} \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

3. *(i)* Les fonctions $f = \arctan$ et $g : x \mapsto e^x - 1$ s'annulent en 0 et vérifient $f'(0) = 1$ et $g'(0) = 1$, donc la règle de l'Hôpital donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{e^x - 1} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

(ii) Les fonctions $f : x \mapsto e^x - e^{-x}$ et $g : x \mapsto 1 + \tan(x) - \cos(x)$ s'annulent en 0 et vérifient $f'(0) = 2$ et $g'(0) = 1$, donc la règle de l'Hôpital donne

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + \tan(x) - \cos(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{2}{1} = 2.$$

(iii) Les fonctions $f : x \mapsto 3x^2 - 2x - 1$ et $g : x \mapsto \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ s'annulent en 1 et vérifient $f'(1) = 4$ et $g'(1) = -\frac{\pi}{2}$, donc la règle de l'Hôpital donne

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{4}{-\frac{\pi}{2}} = -\frac{8}{\pi}.$$

(iv) On écrit tout d'abord que pour tout $x > 0$ on a

$$\frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)},$$

soit

$$\frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln(1+y)}{\sin(y)}$$

en posant $y = \frac{1}{x}$. Dire que x tend vers $+\infty$ revient à dire que y tend vers 0^+, si bien que le problème se ramène à étudier la limite lorsque $y \to 0^+$ de la quantité $\frac{\ln(1+y)}{\sin(y)}$.

On remarque ensuite que les fonctions $f : y \mapsto \ln(1+y)$ et $g = \sin$ s'annulent en 0 et vérifient $f'(0) = g'(0) = 1$, si bien que la règle de l'Hôpital donne

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{\sin(y)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1.$$

Correction de l'exercice 26.

1. Si $a \in \mathbb{R}$, la formule du binôme donne $(a+1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$.
2. La fonction $f : a \mapsto (a+1)^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables (la fonction affine $a \mapsto a+1$ et la fonction puissance $x \mapsto x^n$), et on a
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f'(a) = n(a+1)^{n-1}.$$
Or $f : a \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k$ est aussi dérivable en tant que fonction polynomiale, et on a
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad f'(a) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k a^{k-1}.$$
On a donc montré l'égalité suivante :
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad n(a+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k a^{k-1}.$$
En évaluant cette égalité en $a = 1$, on obtient
$$n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k},$$
d'où l'égalité à démontrer puisque l'on peut ajouter à la somme de droite le terme nul $0\binom{n}{0}$.
3. On aurait aussi pu démontrer cette égalité grâce à la « formule du capitaine » $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et à la formule du binôme comme dans l'exercice 24 du chapitre « Sommes et produits ».

Correction de l'exercice 27.

1. La fonction $f : x \mapsto e^{x\ln(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions dérivables. Pour tout $x > 0$, on a
$$f'(x) = e^{x\ln(x)} \cdot \left(1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln(x)+1).$$
2. On a $x\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$ par croissance comparée, donc $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \exp(0) = 1$ par continuité de exp en 0. Ainsi, f est prolongeable par continuité à droite en 0 en posant $\widetilde{f}(0) = 0$.
3. On a
$$\frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{x^x - 1}{x - 0} = \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x} = \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x\ln(x)} \cdot \ln(x)$$
pour tout $x > 0$ tel que $\ln(x) \neq 0$, or $\frac{e^{x\ln(x)}-1}{x\ln(x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$ en vertu du résultat de croissance comparée $x\ln(x) \to 0$ et du fait que $\frac{e^y-1}{y} \to 1$ lorsque $y \to 1$, donc
$$\frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{e^{x\ln(x)} - 1}{x\ln(x)} \cdot \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty.$$
Le prolongement par continuité $\widetilde{f}$ n'est donc pas dérivable à droite en 0.

Correction de l'exercice 28.

1. La fonction f est paire ; il suffit donc de montrer qu'elle admet une limite finie à droite en 0. Or sur un voisinage (épointé) à droite de 0, on peut écrire que

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \ln(\sin(x)) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{x}{\sin(x)} \cdot \sin(x) \ln(\sin(x)),$$

et on a par croissance comparée

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \to +\infty} y e^{-y} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} \sin(x) \ln(\sin(x)) = \lim_{y \to 0^+} y \ln(y) = 0$$

ainsi que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sin(x)} = 1,$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{x}{\sin(x)} \cdot \sin(x) \ln(\sin(x)) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Ainsi, f est prolongeable par continuité (à droite, et donc tout court par parité) en 0 par $\widetilde{f}(0) = 0$.

2. Si $x > 0$, alors

$$\frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{x}{\sin(x)} \cdot \sin(x) \ln(\sin(x)) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

par les mêmes arguments que plus haut (puisque $y^2 e^{-y} \to 0$ lorsque $y \to +\infty$ par croissance comparée), donc $\widetilde{f}$ est dérivable à droite en 0 et $\widetilde{f}'_d(0) = 0$. Comme $\widetilde{f}$ est paire, on en déduit qu'elle est aussi dérivable à gauche en 0 et que $\widetilde{f}'_g(0) = -\widetilde{f}'_d(0) = 0$, si bien que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0 et que $\widetilde{f}'(0) = 0$.

Correction de l'exercice 29.

(i) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et elle est dérivable sur cet intervalle en tant que combinaison (différence de produits) de fonctions dérivables. Pour tout $x > 0$, on a

$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

On peut d'ores et déjà retenir que $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une *primitive* de ln, c'est-à-dire une fonction admettant ln pour dérivée ; nous reverrons ce résultat dans le chapitre d'intégration.

(ii) La fonction $f : x \mapsto e^{x \ln(2)} - e^{x \ln(5)}$ est définie sur $\mathbb{R}$, et elle y est dérivable en tant que différence de composées de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \ln(2) e^{x \ln(2)} - \ln(5) e^{x \ln(5)} = \ln(2) 2^x - \ln(5) 5^x.$$

(iii) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et elle y est dérivable comme produit de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 1 \cdot \arctan(x) + x \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \arctan(x) + \frac{x}{1 + x^2}.$$

(iv) Pour tout $x > 0$, on a $e^x - 1 > 0$ donc $\frac{e^x-1}{x} > 0$. Pour tout $x < 0$, on a $e^x - 1 < 0$ donc $\frac{e^x-1}{x} > 0$. Ainsi, pour tout $x \neq 0$, on a $\frac{e^x-1}{x} > 0$, donc $f(x)$ existe. La fonction f est donc définie sur $\mathbb{R}^*$; elle y est dérivable en tant que combinaison de fonctions dérivables, et pour tout $x \neq 0$ on a

$$f'(x) = \frac{\frac{e^x \cdot x - (e^x+1)\cdot 1}{x^2}}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{xe^x - e^x - 1}{x(e^x - 1)}.$$

(v) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et elle y est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1}{1 + (e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}.$$

(vi) La fonction $f = \sin \circ \cos \circ \tan$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Elle est dérivable en tout point de cet ensemble en tant que composée de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin'(\cos \circ \tan(x)) \cdot (\cos \circ \tan)'(x) \\ &= \sin'(\cos \circ \tan(x)) \cos'(\tan(x)) \tan'(x) \\ &= -\cos(\cos(\tan(x)) \sin(\tan(x)))(1 + \tan^2(x)). \end{aligned}$$

(vii) La fonction $f = \exp \circ \exp$ est définie sur $\mathbb{R}$ et y est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \exp'(\exp(x)) \exp'(x) = e^{e^x} e^x = e^{e^x + x}.$$

$(viii)$ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Elle y est dérivable comme produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a (en utilisant éventuellement le résultat de l'exercice 24 pour un calcul plus rapide) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \sin(x) \cos(x) + x^2 \cos(x) \cos(x) - x^2 \sin(x) \sin(x) \\ &= x \sin(2x) - x^2 \cos(2x). \end{aligned}$$

(ix) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$. Si $x > 0$, on a $f(x) = \ln(x)$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = \frac{1}{x}$. Si $x < 0$, on a $f(x) = \ln(-x)$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et pour tout $x < 0$ on a $f'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Ainsi, f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, et pour tout $x \neq 0$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

On peut retenir ce résultat : une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est la fonction $x \mapsto \ln(|x|)$, qui coïncide avec $x \mapsto \ln(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais avec $x \mapsto \ln(-x)$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

(x) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Elle coïncide sur $\mathbb{R}_+$ avec la fonction $x \mapsto x\sin(x)$; ainsi, pour tout $x > 0$, f est dérivable en x et $f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$, mais cette formule est aussi valable pour la dérivée à droite en 0, et $f'_d(0) = 0+0 = 0$. De même, f coïncide sur $\mathbb{R}_-$ avec la fonction $x \mapsto -x\sin(x)$; pour tout $x < 0$, la fonction f est donc dérivable en x et $f'(x) = -\sin(x) - x\cos(x)$, et cette formule est aussi valable pour la dérivée à gauche en 0, et $f'_g(0) = -0 - 0 = 0$. Comme les dérivées à gauche et à droite de f en 0 sont toutes deux égales à 0, on en déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$. Le domaine de dérivabilité de f est donc égal à $\mathbb{R}$.

(xi) Pour ce point et le suivant, il est bon de se souvenir du fait que la fonction que nous rebaptisons $\varphi : x \mapsto \ln(|x|)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$, est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et vérifie $\varphi'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ (voir le point (ix)).

La fonction $f = \frac{1}{\varphi}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1, 0, 1\}$ (car $\ln(|x|)$ existe si et seulement si $x \neq 0$, et est non nul si et seulement si $|x| \neq 1$). En utilisant le point précédent, on conclut que f est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et qu'on a alors

$$f'(x) = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} = -\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2(|x|)} = -\frac{1}{x\ln^2(|x|)}.$$

(xii) En reprenant la notation φ introduite dans le point précédent, on peut écrire $f = \varphi \circ \cos$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ et est dérivable en tout point de cet ensemble en tant que composée de fonctions dérivables ; sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \qquad f'(x) = \varphi'(\cos(x))\cos'(x) = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x).$$

Correction de l'exercice 30.

1. (a) Les fonctions arccos et arcsin sont toutes deux continues sur $[-1, 1]$, et elles sont dérivables sur $]-1, 1[$. Elles vérifient (voir l'exemple 34 du cours pour la fonction arcsin et l'exercice 5 pour la fonction arccos) :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ainsi, la fonction $\arccos + \arcsin$ est dérivable sur $]-1, 1[$ en tant que somme de fonctions dérivables, et on a

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (\arccos + \arcsin)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Cette fonction est donc constante sur $]-1, 1[$; comme elle est continue sur $[-1, 1]$ (en tant que somme de fonctions continues), elle est constante sur $[-1, 1]$. Or sa valeur en 0 est $\arccos(0) + \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$, donc on a bien démontré que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

(b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$. Ainsi, si $x \in [-1, 1]$, on peut écrire

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \sin(\arcsin(x)) = x,$$

or $\arccos(x)$ est par définition l'unique antécédent de x par cos dans $[0, \pi]$, mais $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \in [0, \pi]$ puisque $\arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, si bien que l'on a

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x),$$

ce qui donne l'égalité attendue.

2. (a) La fonction $f : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ et est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ en tant que combinaison de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Ainsi, f est constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ (attention, elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}^*$ tout entier puisque $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle !).

Pour déterminer la valeur de f sur $\mathbb{R}_-^*$, on écrit que

$$f(-1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Pour déterminer sa valeur sur $\mathbb{R}_+^*$, on écrit que

$$f(1) = \arctan(1) + \arctan(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, on a bien établi les relations suivantes :

$$\forall x < 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

et

$$\forall x > 0, \quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

(b) Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, alors $\tan(\theta)$ existe et est non nul, et on a aussi $\frac{\pi}{2} - \theta \notin \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ donc $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ existe. On a par ailleurs la relation

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan(\theta)}.$$

Soit à présent $x \in \mathbb{R}_+^*$. Le réel $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est l'unique valeur θ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ vérifiant $\tan(\theta) = \frac{1}{x}$. Or $\arctan(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ puisque $x > 0$, donc $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et la relation que nous venons de démontrer (appliquée à $\theta = \arctan(x)$) donne

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \frac{1}{\tan(\arctan(x))} = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, on a $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

À présent, si $x < 0$, on a $-x > 0$, donc en appliquant l'égalité que nous venons de démontrer à $-x$ on obtient

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(-x) = \arctan\left(\frac{1}{-x}\right) \quad \text{soit} \quad \frac{\pi}{2} + \arctan(x) = -\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

par imparité de la fonction arctan, d'où

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 31. La fonction f est polynomiale, donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est impaire et vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^5 = +\infty.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 15x^4 + 15x^2 - 180 = 15(x^4 + x^2 - 12),$$

donc

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 \quad &\iff \quad x^4 + x^2 - 12 \geqslant 0 \\ &\iff \quad X^2 + X - 12 \geqslant 0 \quad \text{en posant } X = x^2 \\ &\iff \quad X \leqslant -4 \quad \text{ou} \quad X \geqslant 3 \end{aligned}$$

car l'expression polynomiale X^2+X-12 admet -4 et 3 pour racines et son coefficient dominant est positif, soit

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 \quad &\iff \quad x^2 \leqslant -4 \quad \text{ou} \quad x^2 \geqslant 3 \\ &\iff \quad x^2 \geqslant 3 \quad \text{car} \quad x^2 \geqslant 0 \\ &\iff \quad x \leqslant -\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x \geqslant \sqrt{3}. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant (après avoir calculé $f(\sqrt{3}) = -138\sqrt{3}$ et en avoir déduit $f(-\sqrt{3}) = 138\sqrt{3}$) :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$138\sqrt{3}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-138\sqrt{3}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Correction de l'exercice 32. La fonction $f : x \mapsto x - \sqrt{e^x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$ puisque $e^x + 1 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction $y \mapsto \sqrt{y}$ étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la quantité $e^x + 1$ étant strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}} = \frac{2\sqrt{e^x+1} - e^x}{2\sqrt{e^x+1}}.$$

Si $x \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) \geqslant 0 &\iff 2\sqrt{e^x+1} - e^x \geqslant 0 \quad \text{car} \quad 2\sqrt{e^x+1} > 0 \\
&\iff 2\sqrt{e^x+1} \geqslant e^x \\
&\iff 4(e^x+1) \geqslant (e^x)^2 \quad \text{car} \quad 2\sqrt{e^x+1} \geqslant 0 \text{ et } e^x \geqslant 0 \\
&\iff e^{2x} - 4e^x - 4 \leqslant 0 \\
&\iff X^2 - 4X - 4 \leqslant 0 \quad \text{en posant } X = e^x \\
&\iff 2 - 2\sqrt{2} \leqslant X \leqslant 2 + 2\sqrt{2} \\
&\iff X \leqslant 2 + \sqrt{2} \quad \text{car } X > 0 \text{ et } 2 - 2\sqrt{2} \leqslant 0 \\
&\iff e^x \leqslant 2 + 2\sqrt{2} \\
&\iff x \leqslant \ln(2 + 2\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

x	$-\infty$		$\ln(2+2\sqrt{2})$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\ln(2+2\sqrt{2}) - \sqrt{3+2\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\infty$

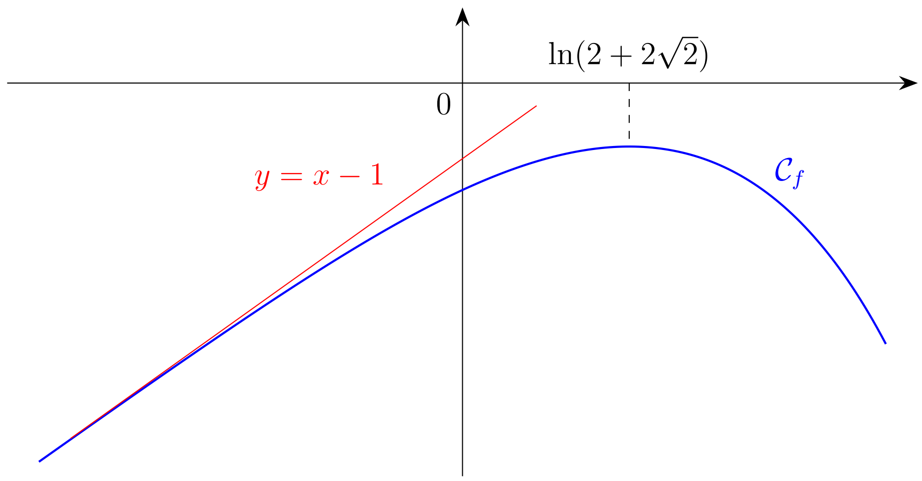
où la limite de f en $-\infty$ est obtenue par simple combinaison de limites et où sa limite en $+\infty$ résulte du principe du principe de croissance comparée, puisque

$$\begin{aligned}
x - \sqrt{e^x+1} &= x - \sqrt{e^x}\sqrt{1+e^{-x}} = x - e^{\frac{x}{2}}\sqrt{1+e^{-x}} \\
&= \underbrace{e^{\frac{x}{2}}}_{\to +\infty} \left(\underbrace{\frac{x}{e^{x/2}}}_{\to 0 \text{ (cc)}} - \underbrace{\sqrt{1+e^{-x}}}_{\to 1} \right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty.
\end{aligned}$$

Recherchons les asymptotes éventuelles à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et $+\infty$. La quantité $\sqrt{e^x+1}$ tendant vers 1 lorsque $x \to -\infty$, on peut conjecturer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote (oblique) à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$; on le montre en écrivant que

$$f(x) - (x-1) = (x - \sqrt{e^x+1}) - (x-1) = 1 - \sqrt{e^x+1} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0.$$

On a par ailleurs
$$\frac{f(x)}{x} = 1 - \sqrt{\frac{e^x+1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$
par croissance comparée, donc $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote en $+\infty$.
On obtient ainsi le graphe de f, après avoir conjecturé et démontré que $\ln(y) < \sqrt{y}$ pour tout $x > 0$ (la démonstration, en étudiant la fonction $y \mapsto \ln(y) - \sqrt{y}$ est laissée au lecteur), ce qui donne $\ln(2+2\sqrt{2}) - \sqrt{3+2\sqrt{2}} < \sqrt{2+2\sqrt{2}} - \sqrt{3+2\sqrt{2}} < 0$ et montre donc que le maximum de f est négatif :

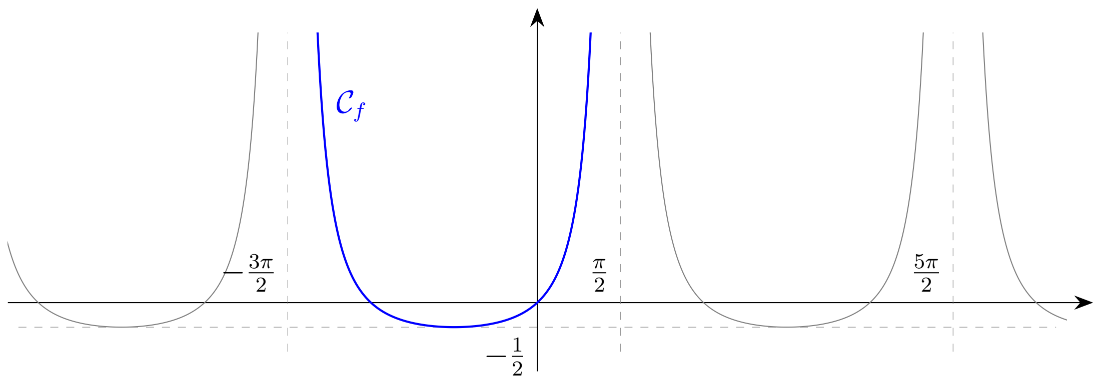


Correction de l'exercice 33. La fonction f est définie en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(x) \neq 1$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$. Elle est de plus 2π-périodique puisque sin l'est. Il suffit donc de l'étudier sur une période, par exemple $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
En tant que quotient de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et pour tout $x \in \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a
$$f'(x) = \frac{\cos(x)(1-\sin(x)) - \sin(x)(-\cos(x))}{(1-\sin(x))^2} = \frac{\cos(x)}{(1-\sin(x))^2},$$
donc
$$f'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$
puisque $(1-\sin(x))^2 > 0$.
Pour calculer les limites de f aux bornes de $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on écrit que
$$\sin(x) \xrightarrow[x\to\left(-\frac{3\pi}{2}\right)^+]{} 1 \quad \text{et} \quad 1-\sin(x) \xrightarrow[x\to\left(-\frac{3\pi}{2}\right)^+]{} 0^+ \quad \text{donc} \quad f(x) \xrightarrow[x\to\left(-\frac{3\pi}{2}\right)^+]{} +\infty,$$
et que
$$\sin(x) \xrightarrow[x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-]{} 1 \quad \text{et} \quad 1-\sin(x) \xrightarrow[x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-]{} 0^+ \quad \text{donc} \quad f(x) \xrightarrow[x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-]{} +\infty.$$

On obtient le tableau de signes et de variations suivant :

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
f	$\Vert\ +\infty$	$\searrow\ 0\ \searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow\ 0\ \nearrow$	$+\infty\ \Vert$

On en déduit l'allure de la courbe de f sur $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ puis, par 2π-périodicité de f, sur son ensemble de définition :



Remarquons que la symétrie des arches formées par $\mathcal{C}_f$, qui se traduit par exemple par le fait que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$, résulte quant à elle de la formule $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dont nous laissons au lecteur le soin de l'établir.

Correction de l'exercice 34. La fonction f est 2π-périodique ; il suffit donc d'en réaliser l'étude sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

Elle est aussi paire, ce qui permet de restreindre notre étude à l'intervalle $[0, \pi]$.

Par ailleurs, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = -2\sin(2x) + 2\sin(x) = 2(\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x)) = 2\sin(x)\left(1 - 2\cos(x)\right).$$

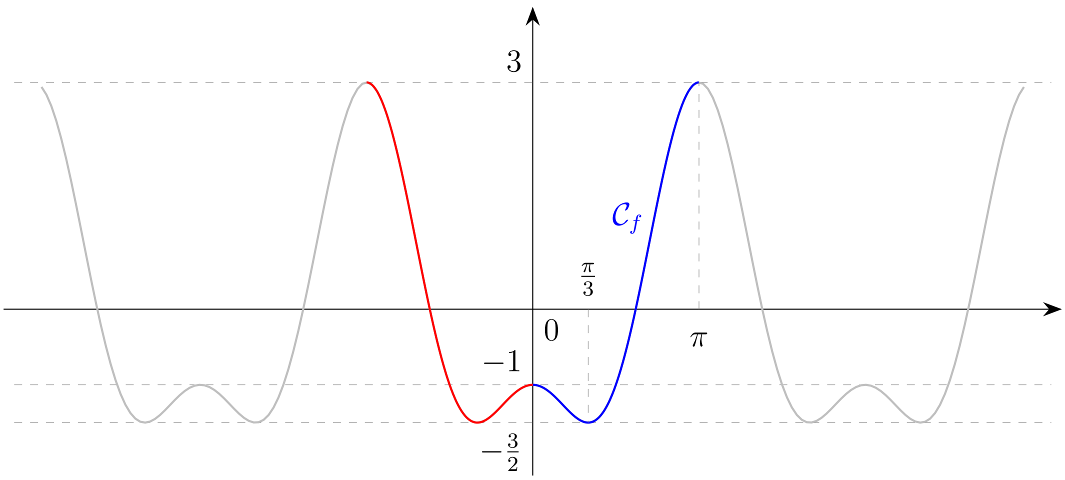
Or lorsque $x \in [0, \pi]$, on a

$$1 - 2\cos(x) \geqslant 0 \iff \cos(x) \leqslant \frac{1}{2} \iff x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right],$$

d'où le tableau de signes et de variations suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$1-2\cos(x)$		$-$	0	$+$	
$2\sin(x)$	0		$+$		0
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
f	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3

On en déduit l'allure de la courbe de f sur $[0,\pi]$ puis, par symétrie, sur $[-\pi,\pi]$ et enfin, par périodicité, sur $\mathbb{R}$:



Correction de l'exercice 35. Pour commencer, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$x^4 - 2x^2 + 2 > x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2 \geqslant 0,$$

et donc

$$x^4 - 2x^2 + 2 > 0.$$

Ainsi, f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables.

On pourrait étudier les variations de f en remarquant astucieusement que la fonction $f : x \mapsto \ln((x^2-1)^2+1)$ a les mêmes variations que $g : x \mapsto (x^2-1)^2$ puisque ln est strictement croissante, puis en dérivant g pour n'étudier que $g' : x \mapsto 4x(x^2-1)$. Alternativement, on peut s'atteler courageusement au calcul de f' et écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{4x^3-4x}{x^4-2x^2+2} = \frac{4x(x^2-1)}{x^4-2x^2+2},$$

ce qui revient une fois encore à étudier le signe de la quantité $g'(x) = 4x(x^2 - 1)$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$. D'une façon ou d'une autre, on obtient le tableau de signes et de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$4x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$4x(x^2 - 1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\ln(2)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Les limites en $\pm\infty$ s'obtiennent par simple composition. Comme on a par ailleurs

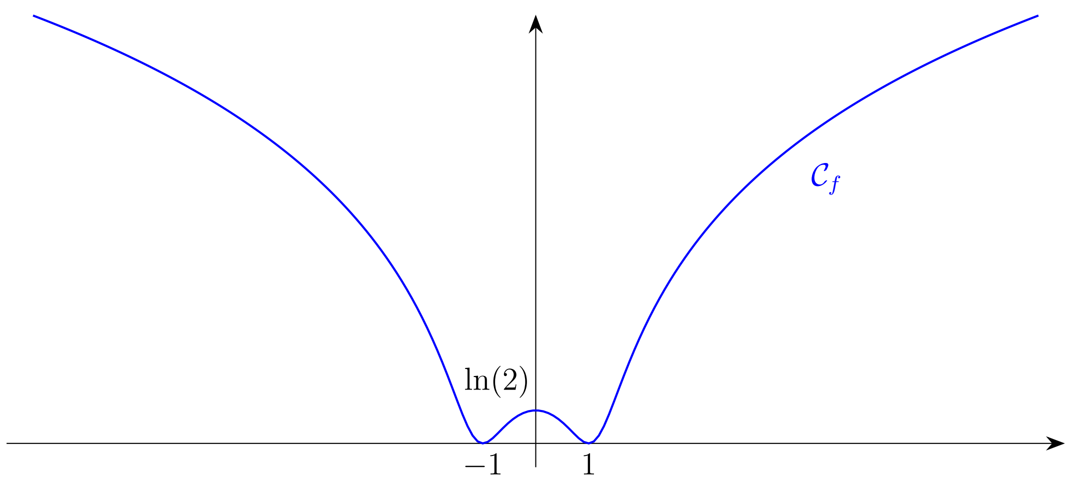
$$\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to x \to \pm\infty]{} 0$$

par croissance comparée et

$$f(x) - 0 \cdot x = f(x) \xrightarrow[x \to x \to \pm\infty]{} +\infty,$$

la courbe $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote en $-\infty$ ni en $+\infty$.

Son allure est la suivante :



Correction de l'exercice 36. Dans chacun des trois cas, on laisse le soin au lecteur de tracer la courbe de la fonction f pour se convaincre qu'il n'existe pas de $c \in]a, b[$ vérifiant $f'(c) = 0$.

1. Lever l'hypothèse de continuité permet à f de ne pas avoir à « rebrousser chemin ». On peut par exemple prendre la fonction $f := \mathrm{Id}_{[0,1]} \cdot \mathbb{1}_{[0,1[}$ sur $[0, 1]$, c'est-à-dire la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = x$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 0$.
2. La fonction valeur absolue est continue sur $[-1, 1]$ et vérifie $|-1| = |1|$, mais elle n'est pas dérivable sur $]-1, 1[$ tout entier et sa dérivée, là où elle existe, ne s'annule pas.
3. La fonction $\mathrm{Id}_{[0,1]}$ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$. Sa dérivée est constante égale à 1 et ne s'annule donc pas.

Correction de l'exercice 37. L'idée est à chaque fois de se ramener au théorème de Rolle classique. On laisse le lecteur représenter la situation ainsi que les points considérés – c'est un bon exercice de visualisation !

1. (a) Les hypothèses impliquent que l'on peut prolonger la fonction f par continuité sur $[a, b]$ en une fonction $\widetilde{f}$ vérifiant $\widetilde{f}(a) = \widetilde{f}(b)$. Ce prolongement par continuité étant (par définition) continue sur $[a, b]$ et est dérivable sur $]a, b[$, on peut lui appliquer le théorème de Rolle pour trouver un $c \in]a, b[$ tel que $\widetilde{f}'(c) = 0$, c'est-à-dire, puisque c est intérieur à $]a, b[$, que $f'(c) = 0$.

   (b) Comme f tend vers $+\infty$ en a^+ et b^-, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon < b - \varepsilon$ et tel que $f(x) \geqslant 0$ si $x \in]a, a+\varepsilon[$ ou $x \in]b-\varepsilon, b[$. La fonction f étant continue sur le segment $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, elle y admet un minimum $m \in \mathbb{R}$ par le théorème des bornes atteintes, en un point $\alpha \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Comme α peut être l'une des bornes de $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, on ne peut conclure que $f'(\alpha)$ est nul. Par contre, le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f sur $]a, \alpha]$ et sur $[\alpha, b[$ (intervalles sur lesquels f est continue) donne l'existence d'un $a' \in]a, \alpha[$ et d'un $b' \in]\alpha, b[$ tels que $f(a') = m + 1 = f(b')$. En appliquant le théorème de Rolle à f entre a' et b', on obtient cette fois un point $c \in]a', b'[\subset]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

2. (a) Si f est constante sur $[a, +\infty[$, sa dérivée est nulle donc s'annule. À présent, si ce n'est pas le cas, elle prend au moins une valeur $y \neq f(a)$ sur $[a, +\infty[$, en un point que nous noterons b. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre a et b, puis entre b et $+\infty$, on obtient deux points a', b' tels que $a < a' < b < b'$ et tels que $f(a') = f(b') = \frac{f(a)+f(b)}{2}$ (puisque ce réel est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$ d'une part, et entre $f(b)$ et $\lim_{+\infty} f = f(a)$ d'autre part). En appliquant le théorème de Rolle à f entre a' et b', on obtient un point $c \in]a', b'[\subset]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

   (b) On raisonne comme dans le point précédent : si f est constante, la propriété est évidente, et sinon il existe un point $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b)$ ne soit pas égal à $\ell := \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à f entre les bornes $-\infty$ et b, puis entre b et $+\infty$, on obtient deux points a', b' tels que $a < a' < b < b'$ et tels que $f(a') = f(b') = \frac{\ell+f(b)}{2}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Rolle à f sur $[a', b'] \subset]a, b[$ pour conclure.

Correction de l'exercice 38. Pour tout $\lambda \in]a, b[$, la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse λ est d'équation $y = f(\lambda) + f'(\lambda)(x - \lambda)$. Cette tangente rencontre l'axe des ordonnées en un point $(x, 0)$ si et seulement si $f(\lambda) + f'(\lambda)(x - \lambda) = 0$. La question posée se réécrit donc de la façon suivante : montrer que tout $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) + f'(c)(x - c) = 0$.

Fixons donc $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$ et introduisons la fonction $g : t \mapsto \frac{f(t)}{x-t}$. Comme $t \mapsto x - t$ définit une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur $t \in [a, b]$, la fonction g est définie sur $[a, b]$, continue sur cet intervalle et dérivable sur $]a, b[$. Pour tout $t \in]a, b[$, on a alors

$$g'(t) = \frac{f'(t)(x-t) - f(t) \cdot (-1)}{(x-t)^2} = \frac{f'(t)(x-t) + f(t)}{(x-t)^2}.$$

On a par ailleurs $g(a) = g(b) = 0$ puisque $f(a) = f(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle appliqué à g sur $[a, b]$, il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$, soit $\frac{f'(c)(x-c)+f(c)}{(x-c)^2} = 0$, et donc $f'(c)(x - c) + f(c) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 39. On introduit la fonction g comme dans l'indication. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et elle vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = -\frac{x^2}{1+x^2}.$$

Ainsi, g' est strictement négative sauf en 0, donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a en outre

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty.$$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection dans $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; en particulier, elle admet un unique point d'annulation sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\arctan + 1$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 40. La fonction $g : x \mapsto \cos(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables. Elle vérifie de plus

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -\sin(x) - 1,$$

donc g' est strictement négative hors des points isolés de $-\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$, ce qui implique qu'elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a par ailleurs

$$g(x) = x\left(\frac{\cos(x)}{x} - 1\right) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad g(x) = x\left(\frac{\cos(x)}{x} - 1\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

puisque $\frac{\cos(x)}{x} \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$ car cos est bornée.

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, g réalise une bijection dans $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; en particulier, elle admet un unique point d'annulation sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que cos admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 41. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $y \neq x$, on a a alors

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leqslant |x-y|$$

par hypothèse, or $|x-y| \xrightarrow[y\to x]{} 0$ donc

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \xrightarrow[y\to x]{} 0$$

par encadrement, ce qui montre que f est dérivable en x et que $f'(x)=0$.
Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée nulle : elle est donc constante.

Correction de l'exercice 42.

1. Pour tout $x>0$, la fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$, donc la théorème des accroissements finis donne l'existence d'un $c_x \in]x, x+1[$ tel que l'on ait

$$f(x+1)-f(x) = f'(c_x) = -\frac{1}{c_x^2}\exp\left(\frac{1}{c_x}\right),$$

d'où le résultat attendu.

2. Pour tout $x>0$, en définissant c_x pour tout x comme dans la question précédente, on peut écrire

$$x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right)-\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = x^2(f(x)-f(x+1)) = x^2\cdot\frac{1}{c_x^2}\exp\left(\frac{1}{c_x}\right).$$

Or pour tout $x>0$ on a

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} \leqslant x^2\cdot\frac{1}{c_x^2} \leqslant \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

et

$$\frac{x^2}{(x+1)^2} = \left(1-\frac{1}{x+1}\right)^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

donc $x^2\cdot\frac{1}{c_x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ d'après le théorème des gendarmes.

Par ailleurs, comme $c_x \geqslant x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, on a $\exp\left(\frac{1}{c_x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^0 = 1$ par continuité de exp en 0, d'où

$$x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right)-\exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right) = x^2\cdot\frac{1}{c_x}\exp\left(\frac{1}{c_x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1\cdot 1 = 1.$$

Correction de l'exercice 43.

1. Si on avait $g(b) = g(a)$, alors g' s'annulerait sur $]a, b[$ d'après le théorème de Rolle, ce qui est contraire à l'hypothèse.
2. On considère la fonction Φ introduite dans l'énoncé. Elle est bien définie sur $[a, b]$ puisque $g(b) - g(a) \neq 0$ d'après la question précédente. En outre, elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ comme combinaison de telles fonctions, et on a $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$, si bien que Φ' s'annule sur $]a, b[$ d'après le théorème de Rolle. Or $\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(x)$ pour tout $x \in]a, b[$, donc il existe $c \in]a, b[$ vérifiant
$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$
soit, comme g' ne s'annule pas,
$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$
ce qu'il fallait démontrer.
3. Le théorème des accroissements finis « classique » correspond au cas où $g = \mathrm{Id}_{[a,b]}$, c'est-à-dire où $g(x) = x$ pour tout $x \in [a, b]$.

Correction de l'exercice 44.

1. D'après le cours et comme $u_0 \in I$, il suffit de montrer que I est stable par la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3 - x}$, c'est-à-dire que $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$. Or si $x \in I$, on a $1 \leqslant x \leqslant 2$, donc $3 - 2 \leqslant 3 - x \leqslant 3 - 1$ soit $1 \leqslant 3 - x \leqslant 2$, d'où, par croissance de la fonction racine carrée, $1 \leqslant \sqrt{3 - x} \leqslant \sqrt{2}$, or $\sqrt{2} \leqslant 2$ donc $f(x) \in I$, ce qu'il fallait démontrer.

   Rappelons qu'il est possible de démontrer la proposition « le terme u_n existe et est dans I » par récurrence sur $n \geqslant 0$, ce qui repose globalement sur les mêmes arguments que la preuve ci-dessus.
2. Soit $x \in I$. On a
$$f(x) = x \quad \iff \quad \sqrt{3 - x} = x \quad \iff \quad 3 - x = x^2,$$
où la dernière équivalence (et plus exactement l'implication $\Leftarrow$) provient du fait que $x \geqslant 0$, or l'équation $3 - x = x^2$ admet $\alpha := \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ pour unique solution positive, et on a
$$1 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} \leqslant \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \leqslant \frac{-1 + \sqrt{16}}{2} = \frac{3}{2}$$
donc $\alpha \in I$, d'où le résultat attendu.
3. Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis après avoir remarqué que f est dérivable sur I et que
$$\forall x \in I, \quad |f'(x)| = \left| \frac{-1}{2\sqrt{3 - x}} \right| = \frac{1}{2\sqrt{3 - x}} \leqslant \frac{1}{2}$$
puisque $\sqrt{3 - x} \geqslant 1$ pour tout $x \in I = [1, 2]$.

4. On montre la propriété par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« } |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| \text{ ».}$$

La propriété $\mathcal{P}_0$ est évidemment vraie. Fixons à présent $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors, comme $f(\alpha) = \alpha$ et comme u_n et α sont dans I, le résultat de la question précédente permet d'écrire que

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|,$$

d'où

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha| = \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \alpha|$$

d'après $\mathcal{P}_n$, ce qui démontre la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ et clôt la preuve d'après le principe de récurrence.

Il suffit alors de faire tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité

$$0 \leqslant |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour obtenir la convergence attendue.

Correction de l'exercice 45.

1. La limite en 0^+ est une forme indéterminée. On lève l'indétermination en écrivant que

$$f(x) = \frac{2}{x}\left(1 + \frac{x\ln(x)}{2}\right) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

par croissance comparée. On a par ailleurs $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ par simple combinaison de limites. La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-2}{x^2},$$

si bien que $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \geqslant 2$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$1+\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f est donc décroissante sur I, si bien que pour tout $x \in I$ on a

$$f(2) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{3}{2}\right)$$

soit

$$1 + \ln(2) \leqslant f(x) \leqslant \frac{4}{3} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3} + \ln(3) - \ln(2)$$

et donc

$$1,68 \leqslant f(x) \leqslant \frac{4}{3} + 1,11 - 0,68 = \frac{4}{3} + 0,43 \approx 1,76$$

d'où

$$\frac{3}{2} \leqslant f(x) \leqslant 2$$

soit $f(x) \in I$. L'intervalle I est donc bien stable par f.

2. On a $u_0 \in I$ et on sait que I est stable par f, donc une récurrence facile assure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans I.
3. La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est strictement décroissante sur I puisque f et $x \mapsto -x$ y sont strictement décroissantes. Par ailleurs, g est continue comme différence de fonctions continues, et $g\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} \geqslant 0$ (puisque $f\left(\frac{3}{2}\right) \in I$) et $g(2) = f(2) - 2 \leqslant 0$ (puisque $f(2) \leqslant 0$). D'après le théorème de la bijection, g s'annule donc en un unique point sur I, c'est-à-dire qu'il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) - \alpha = 0$, c'est-à-dire un unique point fixe de f sur I.
4. Pour tout $x \in I$, on a

$$|f'(x)| = \left|\frac{2-x}{x^2}\right| = \frac{|2-x|}{x^2} \leqslant \frac{1/2}{(3/2)^2} = \frac{2}{9}.$$

Ainsi, si $x, y \in I$ on a

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{2}{9}|x - y|$$

d'après l'inégalité des accroissements finis. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - \alpha|,$$

d'où

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

par une récurrence facile[1], et enfin, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$,

$$|u_n - \alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{soit} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha.$$

1. Voir la question 4 de l'exercice précédent.

Correction de l'exercice 46.

1. La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$g'(x) = \frac{\sin(x)}{2} - 1 < 0,$$
donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle vérifie par ailleurs
$$g(x) = x\left(-\frac{\cos(x)}{2x} - 1\right) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$$
puisque $\frac{\cos(x)}{2x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$ (car cos est bornée), et
$$g(x) = x\left(-\frac{\cos(x)}{2x} - 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$
pour la même raison. Comme g est continue, elle s'annule donc en un unique point de $\mathbb{R}$ d'après le théorème de la bijection, c'est-à-dire que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $|f'(t)| = \left|\frac{\sin(t)}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}$. Le résultat à démontrer découle donc directement de l'inégalité des accroissements finis appliquée entre les points x et y.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|.$$
On démontre alors comme dans les deux exercices précédents que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|,$$
d'où, en passant à la limite, $|u_n - \alpha| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ soit $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

Correction de l'exercice 47. La fonction $g : x \mapsto e^{-x}f(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a
$$g'(x) = -e^{-x}f(x) + e^{-x}f'(x) = e^{-x}(f'(x) - f(x)) \geqslant 0.$$
Ainsi, g est croissante sur $\mathbb{R}_+$; or sa valeur en 0 est $g(0) = f(0) \geqslant 0$, donc g est positive sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$ on a $e^{-x}f(x) \geqslant 0$, soit $f(x) \geqslant 0$ puisque $e^{-x} > 0$. La fonction f est donc bien à valeurs positives.

Correction de l'exercice 48.

1. L'équation se réécrit
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = b.$$
Les fonctions de dérivée constante croissant à un rythme constant, il est intuitif que les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions affines de la forme $f : x \mapsto bx + c$ avec $c \in \mathbb{R}$. Pour démontrer ce fait, on peut tout d'abord remarquer que ces fonctions sont *effectivement* de dérivée constante et égale à b. On peut ensuite écrire que si f est une solution de l'équation, alors $g : x \mapsto f(x) - bx$ est une fonction dérivable en tant que différence de fonctions dérivables, et qu'elle vérifie
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f'(x) - b = 0,$$
si bien que g est constante, d'où $f(x) = bx + g(x) = bx + g(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: ainsi, f est bien une fonction de la forme $f : x \mapsto bx + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

   On a donc démontré que les solutions de (1) sont exactement les fonctions de la forme $f : x \mapsto bx + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

2. (a) La fonction g est dérivable en tant que différence de fonctions dérivables, et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = ae^{ax} \quad \text{et} \quad ag(x) + b = ae^{ax} - b + b = ae^{ax}$$
donc g vérifie bien l'équation différentielle (1).

   (b) Soit f une solution de (1). La fonction $h : x \mapsto e^{-ax}(f(x) - g(x))$ est dérivable en tant que combinaison de fonctions dérivables, et on a :
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) &= -ae^{-ax}(f(x) - g(x)) + e^{-ax}(f'(x) - g'(x)) \\ &= e^{-ax}\left(-af(x) + ag(x) + af(x) + b - (ag(x) + b)\right) \\ &= e^{-ax} \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$
Ainsi, h est de dérivée nulle, donc constante sur $\mathbb{R}$.

   (c) On vient de voir que si f est solution de (1), alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait
$$e^{-ax}(f(x) - g(x)) = c, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) = e^{ax}c + g(x) = (1+c)e^{ax} - \frac{b}{a},$$
soit, en posant $\lambda := 1 - c$:
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}.$$
Réciproquement, si f est une fonction définie par $f : x \mapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = a\lambda e^{ax} = a\left(\lambda e^{ax} - \frac{b}{a}\right) + b = af(x) + b,$$
donc f vérifie l'équation (1).

   Ainsi, les solutions de (1) sont exactement les fonctions de la forme $f : x \mapsto \lambda e^{ax} - \frac{b}{a}$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 49.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xg(x) + g'(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-x) + \lambda x e^{-\frac{x^2}{2}} = 0.$$

Ainsi, g est solution de (2).

2. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = f'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + f(x)e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x = e^{\frac{x^2}{2}} \left(f'(x) + xf(x)\right) = e^{\frac{x^2}{2}} \cdot 0 = 0.$$

Ainsi, h est constante sur $\mathbb{R}$.

3. On vient de voir que si f vérifie (2), alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)e^{\frac{x^2}{2}} = \lambda$, c'est-à-dire $f(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme réciproquement, les fonctions de la forme $f : x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$ sont toutes solutions de (2) d'après la question 1, on en déduit que les solutions de (2) sont exactement les fonctions de cette forme.

Correction de l'exercice 50.

1. (a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{t^{\alpha-1}}$ est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$, donc on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis pour trouver $c \in]k, k+1[$ tel que

$$\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} = f(k+1) - f(k) = f'(c) = -\frac{\alpha-1}{c^{\alpha}},$$

donc

$$\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} = \frac{\alpha-1}{c^{\alpha}} \geqslant \frac{\alpha-1}{(k+1)^{\alpha}}$$

puisque $\alpha - 1 \geqslant 0$, puisque $c \leqslant k+1$ et puisque f est décroissante.

(b) Montrons que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée, ce qui établira qu'elle converge. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \geqslant 0$, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est bien croissante.

Si $n \geqslant 1$, en sommant les inégalités démontrées dans la question précédente pour $k \in [\![1, n]\!]$ et en reconnaissant une somme télescopique, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha-1}{(k+1)^{\alpha}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant 1,$$

d'où

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^{\alpha}} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}$$

puisque $\alpha - 1 > 0$, et donc

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^{\alpha}} = 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^{\alpha}} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Ainsi, $(u_n)_{n\geqslant 1}$, dont on a déjà montré qu'elle était croissante, est de plus majorée (par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$). Ainsi, elle converge.

2. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : x \mapsto x^{1-\alpha}$ est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$, donc on peut lui appliquer le théorème des accroissements finis pour trouver $c \in]k, k+1[$ tel que

$$(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} = f(k+1) - f(k) = f'(c) = \frac{1-\alpha}{c^\alpha} \leqslant \frac{1-\alpha}{k^\alpha},$$

où l'inégalité résulte du fait que $c \geqslant k$, de la croissance de f et du fait que $1-\alpha > 0$.

(b) Si $n \geqslant 1$, en sommant les inégalités démontrées dans la question précédente pour $k \in [\![1, n]\!]$ et en reconnaissant une somme télescopique, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \left((k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\alpha}{k^\alpha} \quad \text{soit} \quad (n+1)^{1-\alpha} - 1 \leqslant (1-\alpha)u_n,$$

d'où, comme $1-\alpha > 0$:

$$u_n \geqslant \frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

donc la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.

3. Dans le cas $\alpha = 1$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge encore une fois : on le démontre en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction ln pour obtenir

$$\forall k \geqslant 1, \quad \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k},$$

puis en sommant les inégalités obtenues en reconnaissant une nouvelle somme télescopique :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty,$$

d'où le résultat.

Correction de l'exercice 51.

1. On a

$$S(1) = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a

$$P(q) = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

3. La fonction $P : q \mapsto \sum_{k=0}^{n} q^k$ est polynomiale donc dérivable. Par ailleurs, on a par linéarité de la dérivation [2]

$$\forall q \in \mathbb{R}, \quad P'(q) = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = S(q).$$

4. Comme S est la dérivée de P, on peut dériver la forme fractionnelle de $P(q)$ donnée dans la question 2 (et qui définit bien une fonction dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$) pour obtenir

$$\begin{aligned} \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad S(q) = P'(q) &= \frac{-(n+1)q^n(1-q) - (1-q^{n+1}) \cdot (-1)}{(1-q)^2} \\ &= \frac{1 + nq^{n+1} - (n+1)q^n}{(1-q)^2}. \end{aligned}$$

5. On se ramène tout d'abord à une forme proche de celle étudiée ci-dessus en écrivant

$$A = \sum_{k=0}^{100} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{100} k \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{100} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}.$$

On peut alors utiliser la formule donnée par la question 4 :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + 100\left(\frac{1}{2}\right)^{101} - 101\left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{101}(100 - 101 \cdot 2)}{\frac{1}{4}} \\ &= 2\left(1 - 102\left(\frac{1}{2}\right)^{101}\right) \\ &= 2 - \frac{102}{2^{100}}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 52.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x + e^{-x} > 0$, donc $\operatorname{th}(x)$ est bien défini. Ainsi, la fonction th est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x),$$

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -\frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh}(x)$$

2. Notons que le terme d'indice 0 de la somme est constant et que sa dérivée vaut 0, ce qui explique que la somme écrite pour donner $P'(q)$ commence à la borne $k = 1$. Faire commencer la somme au terme d'indice 0, c'est-à-dire $0q^{-1}$, semble sans conséquence mais poserait en fait un problème de définition pour $q = 0$.

et

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = \frac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = -\operatorname{th}(x),$$

donc ch est paire, et sh et th sont impaires.

3. Si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

4. Les fonctions ch, sh et th sont dérivables comme combinaisons de fonctions dérivables, et si $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x),$$

$$\operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x)$$

et

$$\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{sh}'(x)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)},$$

cette quantité pouvant se réécrire $1 - \frac{\operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = 1 - \operatorname{th}^2(x)$, ou alternativement $\frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$ grâce à la question 3, ce qu'il fallait démontrer.

5. Il est clair que ch est strictement positive et que si $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{th}(x)$ sont du signe de $e^x - e^{-x}$, c'est-à-dire strictement négatifs si $x < 0$, nuls si $x = 0$ et strictement positifs si $x > 0$.

   En étudiant séparément les limites de e^x et e^{-x} en $-\infty$ et $+\infty$, on trouve que

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{ch}(x) = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty.$$

Par ailleurs, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{th}(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{e^x}(1 - e^{-2x})}{\cancel{e^x}(1 + e^{-2x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1,$$

et donc, comme th est impaire,

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{th}(x) = -1.$$

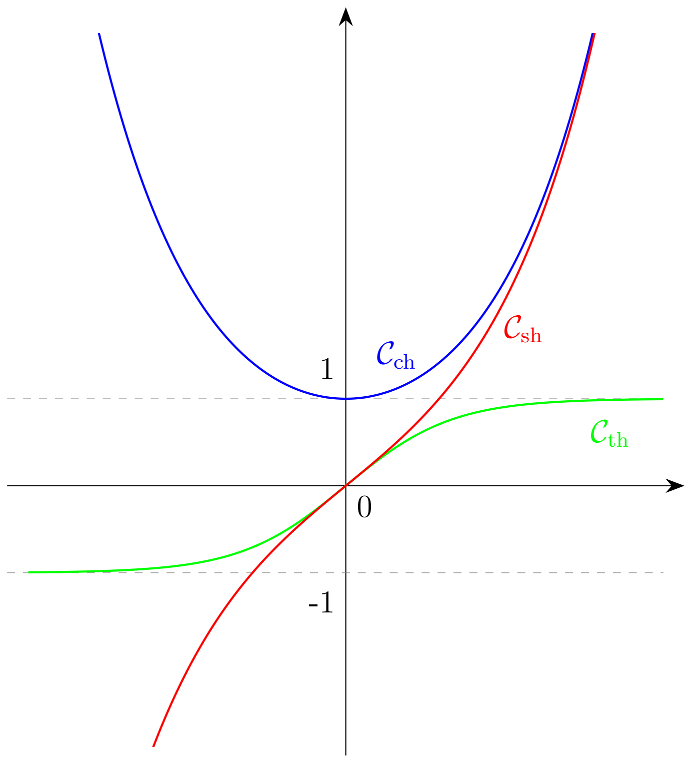
On en déduit les tableaux de variations suivants :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

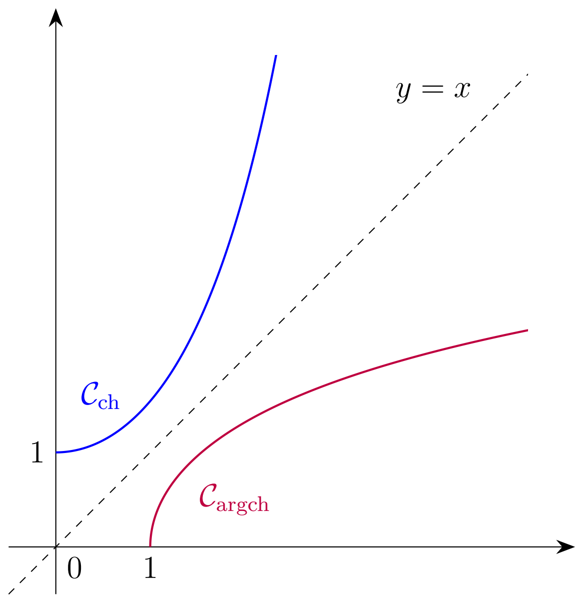
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$			$+$		
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$			$+$		
th	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

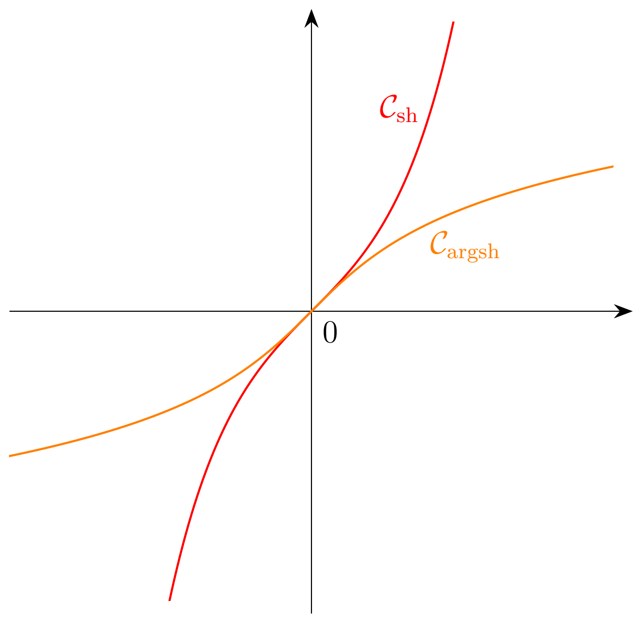
La figure suivante représente les graphes des fonctions ch , sh et th :



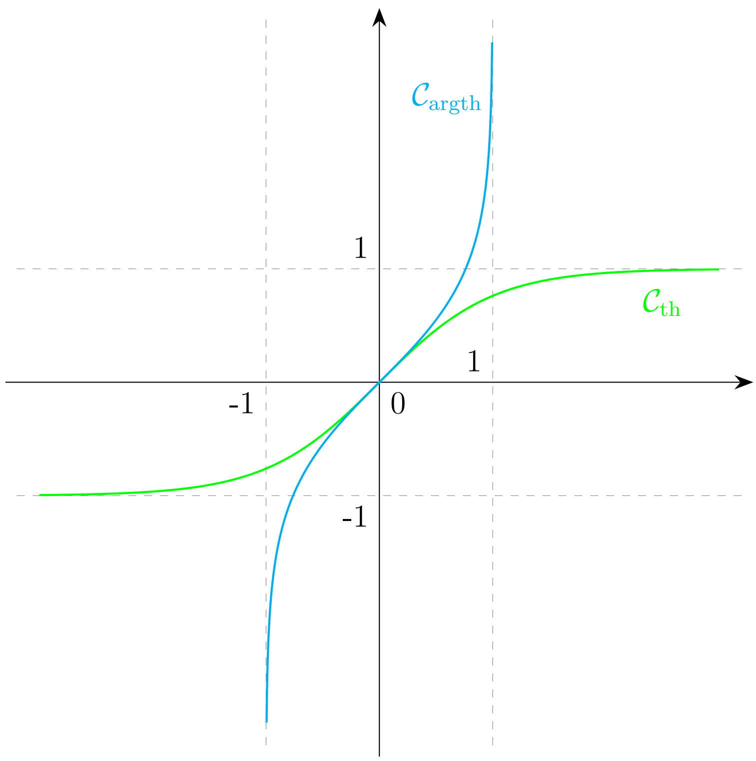
6. (a) La fonction ch est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et elle vérifie $\text{ch}(0) = 1$ ainsi que $\lim_{x\to+\infty} \text{ch}(x) = +\infty$. Elle induit donc bien une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$ d'après le théorème de la bijection.



(b) La fonction sh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et elle vérifie $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ ainsi que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$. Elle induit donc bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ d'après le théorème de la bijection.



(c) La fonction th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1$ ainsi que $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$. Elle induit donc bien une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$ d'après le théorème de la bijection.



7. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(y) = \mathrm{sh}(y)$ est non nul si et seulement si $y \neq 0$. La fonction réciproque argch est dérivable en tout point $x \in [1, +\infty[$ tel que $\mathrm{ch}'(\mathrm{argch}(x)) \neq 0$, c'est-à-dire tel que $\mathrm{argch}(x) \neq 0$, c'est-à-dire en tout point $x > 1$. On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x > 1, \quad \mathrm{argch}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{argch}(x))}\\ &= \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(\mathrm{argch}(x)) - 1}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la relation $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ (soit $\mathrm{ch}^2 - 1 = \mathrm{sh}^2$) démontrée dans la question 3, ainsi que le fait que $\mathrm{sh}(\mathrm{argch}(x)) \geqslant 0$ puisque $\mathrm{argch}(x) \geqslant 0$ et sh est positive sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(y) = \mathrm{ch}(y) > 0$, donc la fonction réciproque argsh est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{argsh}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{argsh}(x))}\\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x))}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{sh}^2(\mathrm{argsh}(x))}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la relation $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$ (soit $\mathrm{ch}^2 = 1 + \mathrm{sh}^2$) démontré dans la question 3, ainsi que le fait que $\mathrm{ch}(\mathrm{argsh}(x)) \geqslant 0$ puisque $\mathrm{ch} > 0$.

Enfin, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(y) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(y)} > 0$, donc la fonction réciproque argth est dérivable en tout point $x \in]-1, 1[$ et on a

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1, 1[, \quad \mathrm{argth}'(x) &= \frac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{argth}(x))}\\ &= \frac{1}{1 - \mathrm{th}^2(\mathrm{argth}(x))}\\ &= \frac{1}{1 - x^2}.\end{aligned}$$

8. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in [1, +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}
y = \mathrm{ch}(x) &\iff y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
&\iff 2y = e^x + e^{-x} \\
&\iff 2ye^x = e^{2x} + 1 && \text{en multipliant par } e^x \neq 0 \\
&\iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0 \\
&\iff X^2 - 2yX + 1 = 0 && \text{en posant } X = e^x \\
&\iff X = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.
\end{aligned}$$

On va montrer que seule la solution $X = y + \sqrt{y^2 - 1}$ est à retenir. Tout d'abord, notons que si $y = 1$, alors les deux solutions coïncident et valent 0. Supposons à présent que $y > 1$. On va montrer que $y - \sqrt{y^2 - 1} < 1$, ce qui permettra de conclure que $X = e^x$ ne peut pas prendre cette valeur puisque $x \geqslant 0$. On écrit pour cela

$$\begin{aligned}
y - \sqrt{y^2 - 1} &= \frac{(y - \sqrt{y^2 - 1})(y + \sqrt{y^2 - 1})}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \\
&= \frac{y^2 - \sqrt{y^2 - 1}^2}{y + \sqrt{y^2 - 1}} \\
&= \frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}},
\end{aligned}$$

d'où $y - \sqrt{y^2 - 1} \leqslant \frac{1}{y} < 1$ puisque $y > 1$. L'égalité $X = y - \sqrt{y^2 - 1}$ est donc bien impossible si $y > 1$. Dans tous les cas, on a donc

$$\begin{aligned}
y = \mathrm{ch}\,(x) &\iff X = y + \sqrt{y^2 - 1} \\
&\iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1}),
\end{aligned}$$

si bien que $\mathrm{argch}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$.

Soient à présent $x, y \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\begin{aligned}
y = \mathrm{sh}(x) &\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
&\iff 2y = e^x - e^{-x} \\
&\iff 2ye^x = e^{2x} - 1 && \text{en multipliant par } e^x \neq 0 \\
&\iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \\
&\iff X^2 - 2yX - 1 = 0 && \text{en posant } X = e^x \\
&\iff X = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Or $y - \sqrt{y^2 + 1} < 0$ car $\sqrt{y^2 + 1} > \sqrt{y^2} = y$ et $X = e^x \geqslant 0$, si bien que l'égalité $X = y - \sqrt{y^2 + 1}$ est impossible. On a donc

$$y = \mathrm{sh}(x) \iff X = y + \sqrt{y^2 + 1} \iff x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

d'où $\mathrm{argsh}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$.

Enfin, si $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}
y = \operatorname{th}(x) \quad &\iff \quad y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&\iff \quad \left(e^x + e^{-x}\right) y = e^x - e^{-x} \\
&\iff \quad e^x(1-y) = e^{-x}(1+y) \qquad \text{en multipliant par } e^x \neq 0 \\
&\iff \quad e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \\
&\iff \quad e^x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \qquad \text{car} \quad \frac{1+y}{1-y} > 0 \\
&\iff \quad x = \ln\left(\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right),
\end{aligned}$$

si bien que $\operatorname{argth}(y) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

Correction de l'exercice 53.

1. Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme suggéré dans l'énoncé, on introduit la fonction $f : y \mapsto x^\lambda y^{1-\lambda} - (\lambda x + (1-\lambda)y)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que combinaison de fonctions dérivables, et pour tout $y > 0$ on a

$$f'(y) = (1-\lambda)x^\lambda y^{-\lambda} - (1-\lambda) = (1-\lambda)\left(\left(\frac{x}{y}\right)^\lambda - 1\right),$$

   or $1 - \lambda > 0$ donc

$$f'(y) > 0 \quad \iff \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\lambda > 1 \quad \iff \quad \frac{x}{y} > 1 \quad \iff \quad x > y,$$

   où l'équivalence centrale procède du fait que $\frac{x}{y} > 0$ et de la stricte croissance de la fonction $a \mapsto a^\lambda$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque $\lambda > 0$), et la dernière du fait que $y > 0$.

   Ainsi, f est strictement croissante sur $]0, x]$ et strictement décroissante sur $[x, +\infty[$; elle admet donc un maximum qu'elle n'atteint qu'en x et qui vaut $f(x) = x - x = 0$.

   On a donc montré que pour tout $y > 0$ on a $x^\lambda y^{1-\lambda} - (\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant 0$, avec égalité si et seulement si $y = x$, ce qui est le résultat à démontrer.

2. La propriété est évidemment vraie si $n = 1$ puisqu'elle revient alors à dire que $x_1 \leqslant x_1$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons-la vraie pour une valeur donnée de $n \geqslant 1$, et donnons-nous $n+1$ réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_{n+1}$. On a alors

$$\sqrt[n+1]{\prod_{k=1}^{n+1} x_k} = \left(\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}\right)^{\frac{n}{n+1}} x_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n+1}} x_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} \tag{1}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Or le résultat de la question précédente appliqué à $\lambda = \frac{n}{n+1}$, à $x = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ et à $y = x_{n+1}$ donne

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{n}{n+1}} x_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n+1} \cdot x_{n+1} \tag{2}$$

soit

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{n}{n+1}} x_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k.$$

Ainsi, on obtient l'inégalité attendue :

$$\sqrt[n+1]{\prod_{k=1}^{n+1} x_k} \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k.$$

L'égalité n'est assurée que si l'on a égalité dans (2) et dans (1) ; or l'hypothèse de récurrence assure que l'égalité a lieu dans (1) uniquement quand les $x_1, \ldots, x_n$ sont égaux entre eux, et dans ce cas, le résultat de la question précédente montre que l'égalité est réalisée dans (2) uniquement lorsque $x_{n+1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$, c'est-à-dire lorsque x_{n+1} est égal à tous les x_i : ainsi, l'inégalité au rang $n+1$ n'est une égalité que dans le cas où tous les x_i sont égaux, ce qui achève bien de démontrer la propriété à établir.

On en déduit que la propriété à démontrer est vraie à tout rang $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 54.

1. On a $f(1) = 1 \cdot 0 - 1 = -1$ et $f(2) = 2\ln(2) - 2 = 2(\ln(2) - 1)$. On note que $f(2) < 0$ puisque $\ln(2) < 1$.
2. On a
$$x\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$
par croissance comparée, donc
$$f(x) = x\ln(x) - x \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0,$$
et
$$f(x) = x\,(\ln(x) - 1) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$
puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x = \lim\limits_{x \to +\infty} (\ln(x) - 1) = +\infty$.
3. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que combinaison de fonctions dérivables, et pour tout $x > 0$ on a
$$f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x) = \ln(x)$	$\|$	$-$	0	$+$		$+$	
f	$\|$ 0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

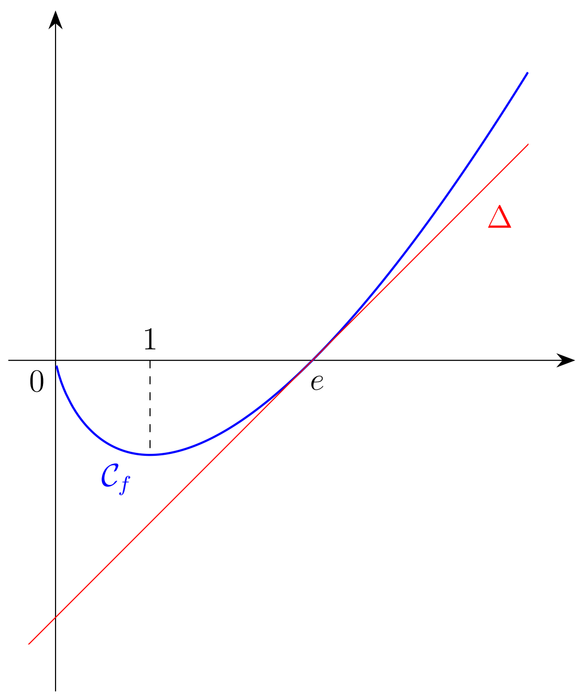
après avoir résolu l'équation $f(x) = 0$ en écrivant que si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x\,(\ln(x) - 1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \ln(x) - 1 = 0 \quad \text{car } x > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = e. \end{aligned}$$

4. L'équation de Δ est

$$y = f(e) + f'(e)(x - e) = 0 + \ln(e)(x - e) = x - e.$$

5. La figure suivante donne l'allure de $\mathcal{C}_f$ ainsi qu'une représentation de la tangente Δ :



Correction de l'exercice 55.

1. La fonction g est continue sur le segment $[0,1]$ en tant que produit de fonctions continues. Elle y admet donc un maximum d'après le théorème des bornes atteintes.
2. Comme f est décroissante et vérifie $f(0)=1$ et $f(1)=0$, elle est à valeurs dans $[0,1]$. C'est aussi le cas de la fonction $x \mapsto x$ (sur $[0,1]$), donc de g : on a donc bien $0 \leqslant M(f) \leqslant 1$.

   Supposons que f soit une fonction vérifiant $M(f)=1$. Il existe alors $x \in [0,1]$ tel que $g(x)=1$, soit $xf(x)=1$. Mais $x \in [0,1]$ et $f(x) \in [0,1]$, donc on a nécessairement $x=1$ et $f(x)=1$; or $f(1)=0$, ce qui amène une contradiction. Ainsi, il n'existe pas de fonction f vérifiant $M(f)=1$.
3. La fonction f_p satisfait bien les conditions sur f données dans l'énoncé : elle est de classe $\mathcal{C}^1$, est décroissante sur $[0,1]$ et vérifie $f(1)=0$ et $f(0)=1$. Elle est associée à la fonction $g_p : x \mapsto xf_p(x) = x - x^{p+1}$, qui est dérivable sur $[0,1]$ et telle que :

$$\forall x \in [0,1], \quad g_p'(x) = 1-(p+1)x^p.$$

   Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$g_p'(x) \geqslant 0 \quad \iff \quad 1 \geqslant (p+1)x^p \quad \iff \quad \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant x$$

   puisque $p>0$. La fonction g_p admet donc un maximum en $\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}$, et ce maximum vaut

$$\begin{aligned} M(f_p) = g_p\left(\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}\right) &= \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} - \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{p+1}{p}} \\ &= \left(1-\frac{1}{p+1}\right)\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p+1}\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

   Or $\left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} = e^{-\frac{1}{p}\ln(p+1)} \xrightarrow[p\to+\infty]{} e^0 = 1$ par croissance comparée, donc

$$M(f_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1 \cdot 1 = 1.$$

4. (a) Soient $a,b,c \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ est dérivable en tant que fonction polynomiale. Elle vérifie $f(0)=1$ et $f(1)=0$ si et seulement si $c=1$ et $a+b+c=0$, soit $c=1$ et $a+b=-1$. Enfin, elle est décroissante sur $[0,1]$ si et seulement si sa dérivée $f' : x \mapsto 2ax+b$ est négative sur $[0,1]$, c'est-à-dire que b et $2a+b$ (les deux valeurs extrêmes de f' sur $[0,1]$) sont négatifs. Ainsi, f vérifie les conditions de l'énoncé si et seulement si

$$c=1, \quad a+b=-1, \quad b \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 2a+b \leqslant 0$$

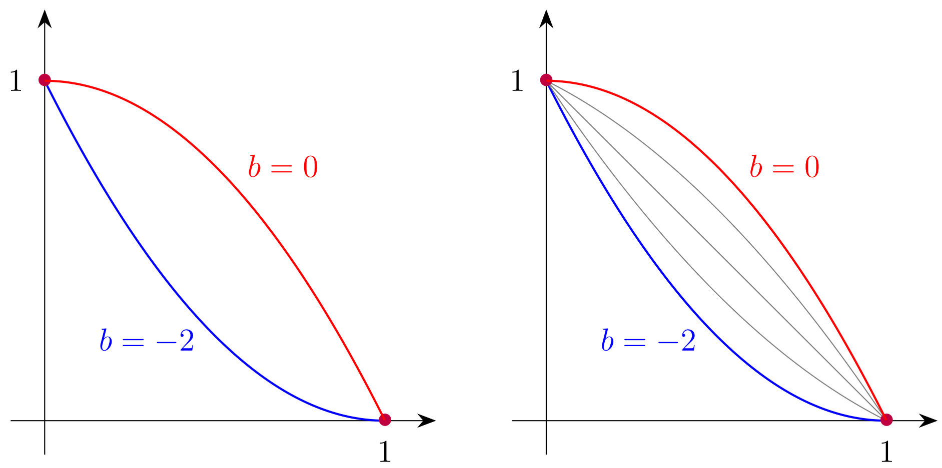
soit, en remarquant la relation $a + b = -1$ transforme la condition $2a + b \leqslant 0$ en $-2 - b \leqslant 0$, soit $b \geqslant -2$:

$$c = 1, \quad a = -1 - b \quad \text{et} \quad -2 \leqslant b \leqslant 0.$$

Les fonctions polynomiales qui satisfont les conditions de l'énoncé sont donc exactement les fonctions de la forme

$$f : x \mapsto (-1 - b)x^2 + bx + 1 \quad \text{avec} \quad b \in [-2, 0].$$

(b) En prenant $b = -2$ dans la question précédente, on obtient la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$. En prenant $b = 0$, on obtient la fonction $f : x \mapsto -x^2 + 1$. Ces deux fonctions sont représentées ci-dessous (à gauche).



Le paramètre b agissant sur le degré de concavité de la fonction (c'est-à-dire sur la décroissance plus ou moins rapide de f'), il est légitime de penser que « le graphe de f dépend continûment de b et balaie l'espace entre les deux courbes tracées ci-dessus à mesure que b parcourt l'intervalle $[-2, 0]$ ». On a représenté ci-dessus (à droite et en gris) les graphes correspondant aux choix $b = -1,5$, $b = -1$ et $b = -0,5$.

Considérons donc l'ensemble

$$A := \{(x, (-1 - b)x^2 + bx + 1) \; : \; x \in [0, 1], \, b \in [-2, 0]\}$$

des courbes des fonctions polynomiales de degré au plus 2 (restreintes à $[0, 1]$) vérifiant les hypothèses de l'énoncé, et

$$A' := \{(x, y) \in [0, 1] \; : \; x^2 - 2x + 1 \leqslant y \leqslant -x^2 + 1\}$$

des points du plan d'abscisse $[0, 1]$ et situés entre les courbes des fonctions $x \mapsto x^2 - 2x + 1$ et $x \mapsto -x^2 + 1$. On va montrer que $A = A'$.

Si $x \in [0, 1]$ est fixé, alors la fonction affine

$$h : b \longmapsto (-1 - b)x^2 + bx + 1 = -x^2 + b(x - x^2) + 1$$

est continue[3] et croissante sur $[-2,0]$ puisque $x - x^2 \geqslant 0$. Elle prend donc toutes les valeurs situées entre $h(-2) = x^2 - 2x + 1$ et $h(0) = -x^2 + 1$ et uniquement celles-ci, ce qui implique deux choses :

- Les points de A d'abscisse x sont nécessairement compris entre les courbes des fonctions $x \mapsto x^2 - 2x + 1$ et $x \mapsto -x^2 + 1$, donc sont dans A'. Ainsi, on a $A \subset A'$.
- Tous les points de A' d'abscisse x sont sur le graphe de l'une des fonctions $x \mapsto (-1-b)x^2 + bx + 1$ pour $b \in [-2,0]$: on en déduit que $A' \subset A$.

Il résulte de ce raisonnement que $A = A'$, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 56.

1. La fonction $|h'|$ est continue sur $[-1,1]$ en tant que composée de fonctions continues (la fonction h', puisque h est supposée de dérivée continue, et la fonction valeur absolue). Ainsi, elle admet un maximum sur le segment $[-1,1]$ d'après le théorème des bornes atteintes, c'est-à-dire qu'il existe $y_0 \in [-1,1]$ tel que $|h'(y_0)| = \max\limits_{y \in [-1,1]} |h'(y)|$.
2. La propriété est évidemment vraie si $x = 0$ puisqu'elle stipule alors que $0 = 0$. Supposons à présent que $x \in]0,1]$. La fonction h est continue sur $[-x,x]$ et dérivable sur $]-x,x[$; sa dérivée est par ailleurs majorée en valeur absolue par $\max_{y \in [-x,x]} |h'(y)|$ (qui existe par le même argument que dans la question précédente), donc l'inégalité des accroissements finis appliquée à h sur $[-x,x]$ donne le résultat recherché, à savoir
$$|h(x) - h(-x)| \leqslant |x - (-x)| \max_{y \in [-x,x]} |h'(y)| = 2x \max_{y \in [-x,x]} |h'(y)|.$$
3. Pour tout $x > 0$ on a
$$\frac{h(x) - h(-x)}{x} = 2 \cdot \frac{h(x) - h(-x)}{2x} = 2h'(c_x)$$
pour un certain $c_x \in]-x,x[$ d'après le théorème des accroissements finis appliqué à h entre $-x$ et x. Or l'encadrement $-x \leqslant c_x \leqslant x$ montre que $c_x \to 0$ lorsque $x \to 0$, et donc $h'(c_x) \to h'(0)$ puisque h' est continue en 0. Ainsi, on a
$$\frac{h(x) - h(-x)}{x} = 2h'(c_x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 2h'(0).$$
La fonction $x \mapsto \frac{h(x)-h(-x)}{x}$ étant paire, on a alors aussi
$$\frac{h(x) - h(-x)}{x} \xrightarrow[x \to 0^-]{} 2h'(0),$$
d'où
$$\frac{h(x) - h(-x)}{x} = 2h'(c_x) \xrightarrow[x \to 0]{} 2h'(0),$$
ce qu'il fallait démontrer.

3. Le fait de considérer la « fonction partielle h » nous permet de traduire rigoureusement le fait intuitif selon lequel « le graphe de f dépend continûment de b ».

Correction de l'exercice 57. Le lecteur est invité à représenter la situation graphiquement pour obtenir l'intuition du résultat et comprendre la preuve qui suit.

La fonction $g : x \mapsto f(x)-x$ est continue sur $[0,1]$ en tant que différence de fonctions continues, et dérivable sur $]0,1[$ en tant que différence de fonctions dérivables. Elle vérifie $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 < 0$, donc elle s'annule sur $[0,1]$ par le théorème des valeurs intermédiaires : ce point d'annulation est un point fixe de f, c'est-à-dire une solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[0,1]$.

Montrons que cette solution est unique, c'est-à-dire que g s'annule une seule fois sur $[0,1]$. On raisonne par l'absurde et on suppose l'existence de deux points $x, y \in [0,1]$ vérifiant $x < y$ et $g(x) = g(y) = 0$.

Comme g est continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$, le théorème de Rolle donne l'existence d'un point $c \in]x,y[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g' = f' - 1$ est croissante, donc g' est négative sur $]0,c]$ et positive sur $[c,1[$, ce qui signifie que g est décroissante sur $[0,c]$ et croissante sur $[c,1]$. En particulier, g est croissante sur $[y,1]$; mais $g(y) = 0$ et $g(1) = f(1) - 1 < 0$, ce qui induit une contradiction. Ainsi, g s'annule bien une unique fois sur $[0,1]$, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 58.

1. L'épreuve orale de mathématiques à HEC s'ouvre sur une question de cours qui vise à faire rappeler des résultats dont la suite du sujet fait usage. Il suffit ici de citer les résultats suivants :

   Soient $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ (théorème des accroissements finis). Si de plus il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ pour tout $x \in]a,b[$, alors on a $m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$ (inégalité des accroissements finis). *A fortiori*, s'il existe $M \geqslant \mathbb{R}$ vérifiant $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a,b[$, alors on a $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$.

2. (a) Les fonctions sin et cos sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leurs dérivées (respectivement cos et $-\sin$) sont majorées en valeur absolue par 1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, l'inégalité des accroissements finis appliquée à sin entre x et y donne donc

   $$|\sin(y) - \sin(x)| \leqslant 1 \cdot |x-y| = |x-y|.$$

   (b) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la fonction racine carrée vérifie L_k sur $[0,1]$. On a alors :

   $$\forall x, y \in [0,1], \quad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leqslant k|x-y|$$

   et *a fortiori*, en prenant $y = 0$:

   $$\forall x \in [0,1], \quad \sqrt{x} \leqslant kx$$

   d'où, en divisant par x lorsque $x > 0$:

   $$\forall x \in]0,1], \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant k.$$

   Or $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$, ce qui induit une contradiction et établit le résultat attendu.

(c) Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f vérifie la propriété L_k sur I et donnons-nous $a \in I$. On a alors

$$|f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a| \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

donc $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, ce qui signifie que f est continue en a. Ainsi, f est continue sur I tout entier.

Correction de l'exercice 59.

1. La surface S est la somme des surfaces de chacune des faces du parallélépipède, donc $S = 2ab+2ac+2bc$. Le volume V est égal au produit des trois dimensions : $V = abc$.
2. Supposons $V > 0$ fixé, et considérons dans un premier temps que $a > 0$ l'est aussi (comme $V = abc > 0$, on a nécessairement a, b et c non nuls). On peut écrire $b = \frac{V}{ac}$, donc le choix de c détermine entièrement b, et la surface latérale du parallélépipède vaut alors

$$S = 2ab + 2ac + 2bc = 2\left(\frac{V}{c} + 2ac + \frac{V}{a}\right).$$

On cherche donc à minimiser la fonction s définie de la façon suivante :

$$\forall c > 0, \quad s(c) = 2\left(\frac{V}{c} + 2ac + \frac{V}{a}\right).$$

Or s est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall c > 0, \quad s'(c) = -\frac{2V}{c^2} + 2a = \frac{2}{c^2}\left(ac^2 - V\right).$$

Ainsi, s est décroissante jusqu'à $\sqrt{\frac{V}{a}}$ et croissante ensuite : elle admet donc un minimum en $\sqrt{\frac{V}{a}}$, c'est-à-dire que pour V et a fixés, la valeur de c minimisant la surface latérale du parallélépipède est c^* : $\sqrt{\frac{V}{a}}$. La valeur de b associée est $b^* = \frac{V}{ac} = \sqrt{\frac{V}{a}} = c^*$, ce qui donne une aire latérale égale à

$$S = 2ab^* + 2ac^* + 2b^*c^* = 2\sqrt{Va} + 2\sqrt{Va} + \frac{2}{a} = 2\left(2\sqrt{Va} + \frac{1}{a}\right).$$

Cherchons à présent la valeur de $a > 0$ pour laquelle cette aire est minimale. Pour ce faire, on étudie la fonction définie par

$$\forall a > 0, \quad f(a) = 2\left(2\sqrt{Va} + \frac{1}{a}\right).$$

Une fois encore, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall a > 0, \quad f'(a) = 2\left(\sqrt{\frac{V}{a}} - \frac{1}{a^2}\right) = \frac{2}{\sqrt{a}}\left(\sqrt{V} - \frac{1}{a^{3/2}}\right),$$

donc f est décroissante jusqu'à $\frac{1}{\sqrt[3]{V}}$ et croissante ensuite. Ainsi, f admet un minimum en $\frac{1}{\sqrt[3]{V}}$, c'est-à-dire que pour un volume V fixé, le choix de dimensions minimisant la surface latérale du parallélépipède est $a^* = \frac{1}{\sqrt[3]{V}}$, $c^* = \sqrt{\frac{V}{a}} = \frac{1}{\sqrt[3]{V}}$ et $b^* = c^*$. Le parallélépipède de volume donné dont la surface est minimale est donc un cube.

3. On pourrait dans cette question tenter de reproduire la démarche adoptée dans la question précédente : pour S et a fixés, on obtient un choix optimal $c^* = \left(\frac{\sqrt{4a^2+2S}}{2} - a\right)$ et $b^* = \frac{S-2ac^*}{2a+2c^*} = \frac{S-2a^2}{\sqrt{4a^2+2S}} - a$, mais le volume correspondant s'écrit
$$V = ab^*c^* = a \cdot \left(\frac{S-2a^2}{\sqrt{4a^2+2S}} - a\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{4a^2+2S}}{2} - a\right)$$
et il n'est pas aisé de trouver la valeur de a qui le maximise.

   On va ici adopter une approche différente et utiliser une astuce courante en optimisation : on a résolu dans la question précédente le *problème dual* de celui considéré ici, c'est-à-dire le problème qui consiste à trouver, à volume donné, la configuration qui minimise la surface latérale du parallélépipède (qui était la situation où le parallélépipède est un cube, c'est-à-dire que $a = b = c$), et on va montrer que cette configuration est ici encore optimale, et que c'est la seule à l'être.

   Fixons donc la surface latérale $S > 0$, et supposons que le parallélépipède ne soit pas un cube. On note V son volume. D'après la question précédente, il est possible de changer les dimensions du cadeau tout en conservant son volume et en diminuant strictement sa surface latérale pour la transformer en $S' < S$ (par exemple en le transformant en cube de volume V). Ainsi, le volume V peut être atteint pour un cadeau de surface latérale S' ; il est alors graphiquement clair (par exemple en augmentant mentalement l'une des dimensions du cadeau uniquement) qu'en se donnant une surface latérale S, qui est strictement supérieure à S', on doit nécessairement pouvoir atteindre un volume $V' > V$. On a donc montré qu'un cadeau non cubique ne maximise pas le volume à surface latérale donnée, c'est-à-dire que la configuration optimale, si elle existe, est celle d'un cube.

   Démontrons à présent que la configuration cubique résout bel et bien notre problème d'optimisation : toujours en fixant $S > 0$, considérons le cube C_1 de surface latérale S, dont on note le volume V (on peut montrer par un calcul facile que $V = \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}$). S'il était possible de changer les dimensions du cadeau à surface latérale constante pour obtenir un parallélépipède non cubique de volume $V' > V$ (et donc toujours de surface S), alors le cube C_2 de volume V' aurait une surface latérale S' strictement inférieure à S d'après la question précédente, c'est-à-dire que ce cube serait de volume strictement supérieur au cube C_1 mais de surface latérale strictement inférieure, ce qui est absurde. Ainsi, le cube C_1 est bien le parallélépipède de volume maximal pour une surface latérale S donnée, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 60.

1. Lorsque l'on considère des points d'abscisse proche de 1, la courbe de s est proche de sa tangente en 1 : on a donc
$$s(1,01) \approx s(1) + (1,01-1)s'(1) = s(1) + 0,01v(1) = 2 + 0,04 = 2,04.$$
2. La fonction $s : t \mapsto 3t$ convient, mais la fonction $s : t \mapsto t + \pi$ aussi. Si s_1 et s_2 sont deux fonctions répondant au problème donné, alors $(s_1 - s_2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables et on a
$$(s_1 - s_2)' = s_1' - s_2' = 3 - 3 = 0,$$
donc $s_1 - s_2$ est constante : ainsi, les fonctions qui conviennent, dites *primitives de la fonction* $t \mapsto 3$ *sur* $\mathbb{R}$, sont toutes égales à une constante additive près, c'est-à-dire que les fonctions s qui répondent au problème sont exactement les fonctions de la forme $s : t \mapsto 3t + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. La fonction $s : t \mapsto t^2$ convient, mais ce n'est pas la seule : on montre comme dans la question précédente que les solutions au problème posé, appelées *primitives de la fonction* $t \mapsto 2t$ *sur* $\mathbb{R}$, sont exactement les fonctions de la forme $s : t \mapsto t^2 + \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Plaçons l'origine des temps $t = 0$ au moment du départ de la ville A, et l'origine des distances en A, c'est-à-dire que $s(0) = 0$. La distance à A au temps $t \geqslant 0$ est notée $s(t)$.
   (a) On énonce ici le fait que si $s(0) = 0$ et $s(T) = 100$ pour un certain $T > 0$, alors il existe $t \in [0, T]$ tel que $s(t) = 50$: cette affirmation est justifiée par le fait que la fonction s est continue et par le théorème des valeurs intermédiaires.
   (b) L'énoncé est celui du théorème de Rolle : comme s est dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut affirmer que si $s(0) = s(T) = 0$ pour un certain $T > 0$, alors il existe $c \in]0, T[$ tel que $v(c) = s'(c) = 0$.
   (c) Il s'agit cette fois du théorème des accroissements finis : ma vitesse moyenne entre le début du trajet (au temps $t = 0$) et la fin du trajet (au temps $t = T > 0$) vaut $\frac{s(T)-s(0)}{T-0}$, et comme s est supposée dérivable, le théorème stipule bien qu'il existe $c \in]0, T[$ tel que $v(c) = s'(c) = \frac{s(T)-s(0)}{T-0}$.
   (d) On illustre ici l'inégalité des accroissements finis : si pour tout $t \geqslant 0$ on a $|v(t)| \leqslant 50$, c'est-à-dire $|s'(t)| \leqslant 50$, alors $|s(T) - s(0)| \leqslant 50 \cdot |T - 0|$ soit $|s(T)| \leqslant 50t$ quel que soit $T \geqslant 0$, donc on doit nécessairement avoir $T \geqslant 2$ pour que $s(T) = 100$.
5. L'estimation de la vitesse $v(t)$ peut être effectuée grâce à un dispositif GPS qui évalue les positions de la voiture sur l'intervalle de temps entre $t - h$ et t, avec $h > 0$ petit, et approche la vitesse instantanée $v(t)$ par la vitesse moyenne sur le petit intervalle $[t - h, t]$, c'est-à-dire par $\frac{s(t)-s(t-h)}{h}$ (qui est bien proche de $v(t)$ par définition du nombre dérivé de s en t).

   On peut aussi compter le nombre de tours de roue réalisés par la voiture sur un petit intervalle de temps pour estimer la distance parcourue et réaliser la même approximation.

   Dans les deux cas, il s'agit d'une estimation approchée.

6. Il est naturel de définir l'accélération instantanée $a(t)$ comme la *vitesse instantanée de croissance de la vitesse* $v(t)$, c'est-à-dire comme $v'(t)$ lorsque ce nombre dérivé existe. On a alors $a(t) = s''(t)$, et on dit que a est la *dérivée seconde de* s (voir le chapitre suivant).
7. Une fonction s donnant $s'' = -10$ est par exemple $s : t \mapsto -5t^2$, mais cette solution n'est pas unique : on peut montrer (en adaptant la démarche adoptée dans la note de bas de page de la question suivante) que les fonctions qui conviennent sont exactement les fonctions de la forme $s : t \mapsto \alpha t + \beta - 5t^2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
8. L'accélération (en m.s^{-2}) est constante pendant la trajectoire de la balle dans l'air et vaut $a = -10$. La vitesse de la balle pendant la trajectoire, en m.s^{-1}, vérifie donc $v(0) = 20$ et $v' = -10$, donc [4]

$$v(t) = 20 - 10t$$

pour tout t positif avant le temps auquel la balle touche le sol. La balle atteint son altitude maximale au moment où $v(t)$ change de signe, c'est-à-dire en $t = 2$. Sa position vérifie $s(0) = 1$ et $s(t) = 20 - 10t$ pendant toute la trajectoire, donc

$$s(t) = 1 + 20t - 5t^2$$

tant qu'elle n'a pas touché le sol ; son altitude maximale est donc égale à $s(2) = 1 + 40 - 5 \cdot 4 = 21$ mètres, et le temps $t > 0$ auquel elle touche le sol vérifie $1 + 20t - 5t^2 = 0$ soit $t = 2 + \sqrt{\frac{21}{5}} \approx 4,05$ secondes.

Correction de l'exercice 61.

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction y définie dans l'énoncé vérifie

$$y(0) = \lambda \quad \text{et} \quad y'(0) = 0,$$

donc il suffit de prendre $\lambda = x_0$, c'est-à-dire que

$$y : t \longmapsto x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right),$$

pour avoir $y(0) = x_0$ et $y'(0) = 0$.

2. En dérivant deux fois y (ce qui est possible puisque y est une somme de fonctions deux fois dérivables), on obtient $y'' = -\frac{k}{m}y$, donc [5]

$$(y - x)'' = y'' - x'' = -\frac{k}{m}y + \frac{k}{m}x = -\frac{k}{m}(y - x),$$

4. On utilise dans cette question l'idée selon laquelle si l'accélération en tout temps, la vitesse initiale et la position initiale de la balle sont connues, alors sa trajectoire est uniquement déterminée, c'est-à-dire qu'il existe une unique fonction s et une unique fonction v qui décrivent le mouvement de la balle. Ce principe assez intuitif peut être justifié mathématiquement en écrivant que si s_1 et s_2 sont deux fonctions telles que $s_1'' = s_2''$ et telles que $s_1(0) = s_2(0)$ et $s_1'(0) = s_2'(0)$, alors $(s_1 - s_2)'$ est une fonction de dérivée nulle et est nulle en 0 donc elle est nulle partout, ce qui implique que $s_1' = s_2'$, donc $(s_1 - s_2)$ elle-même est de dérivée nulle et est nulle en 0, d'où $s_1 - s_2 = 0$, soit $s_1 = s_2$.

5. On utilise ici la linéarité de la dérivée seconde, qui provient tout simplement de celle de la dérivation simple puisque $(y - x)'' = ((y - x)')' = (y' - x')' = y'' - x''$.

ce qu'il fallait démontrer.

3. La fonction $((y-x)')^2 + \frac{k}{m}(y-x)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme de fonctions dérivables, et sa dérivée vaut

$$2(y-x)''(y-x)' + 2\frac{k}{m}(y-x)'(y-x) = 2(y-x)'\left((y-x)'' + \frac{k}{m}(y-x)\right) = 0$$

d'après la question précédente.

4. Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle et comme $((y-x)')^2+\frac{k}{m}(y-x)^2$ est de dérivée nulle sur cet intervalle d'après la question précédente, cette fonction est constante. Or sa valeur en 0 est

$$(y'(0) - x'(0))^2 + \frac{k}{m}(y(0) - x(0)) = (0-0)^2 + \frac{k}{m}(x_0 - x_0)^2 = 0,$$

donc la fonction est nulle. Or $k \geqslant 0$, donc pour tout $t \geqslant 0$ on a :

$$0 \leqslant ((y'(t) - x'(t))^2 \leqslant ((y'(t) - x'(t))^2 + \frac{k}{m}(y(t) - x(t))^2 = 0$$

d'où $((y'(t) - x'(t))^2 = 0$, soit $y'(t) - x'(t) = 0$. La fonction $y - x$ est donc de dérivée nulle sur $\mathbb{R}_+$, donc constante [6] ; or sa valeur en 0 est $x_0 - x_0 = 0$, donc elle est nulle, c'est-à-dire que $x(t) = y(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

5. On a démontré que $x(t) = y(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ pour tout $t \geqslant 0$, ce qui signifie que la boule effectue à l'infini des oscillations d'amplitude x_0. Ces variations ne sont pas crédibles : en pratique, les oscillations du systèmes sont peu à peu amorties et d'amplitude décroissante du fait des frottements de l'air que nous avons négligés ici.

Correction de l'exercice 62.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. On a

$$u_{m,1}(x, y) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x + h, y) - u(x, y)}{h}$$

ou, en adoptant une notation moins rigoureuse mais plus parlante [7],

$$u_{m,1}(x, y) = \frac{u(x + \mathrm{d}x, y) - u(x, y)}{\mathrm{d}x},$$

où $\mathrm{d}x$ est un *accroissement infinitésimal de x*, c'est-à-dire une quantité « infiniment petite » de bien 1. En supposant le bien 1 quantifié en une unité très

6. Alternativement, on pouvait déduire de la question précédente que $\frac{k}{m}(y(t) - x(t))^2 = 0$ par une majoration similaire. Si l'on fait l'hypothèse raisonnable selon laquelle $k > 0$ (c'est-à-dire que le ressort exerce bel et bien une force de rappel), on obtient alors directement $y(t) = x(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

7. On note d'ailleurs souvent $\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)$ (« d rond u sur d rond x en (x, y) ») l'utilité marginale $u_{m,1}(x, y)$. Il s'agit d'un cas particulier de la notion de *dérivée partielle* que nous aborderons dans le cours de deuxième année ; les ∂ (d rond) sont une traduction typographique de ce caractère partiel.

petite, on peut interpréter l'utilité marginale [8] du bien 1 au point (x, y) comme étant approximativement égale à l'accroissement d'utilité apporté la consommation d'une unité supplémentaire de bien 1 à partir du point (x, y) : c'est par exemple le surcroît d'utilité apporté par la consommation d'un centilitres de jus d'orange supplémentaire lors du petit déjeuner, ou par une minute de communication supplémentaire sur un forfait téléphonique.

Il en va bien sûr de même pour $u_{m,2}(x, y)$, qui représente approximativement l'utilité additionnelle tirée de la consommation d'une unité supplémentaire du bien 2 à partir du panier de biens (x, y).

Calculons ces utilités marginales dans le cas de la fonction d'utilité proposée : pour tous $x, y, \in \mathbb{R}_+^*$, on a [9]

$$u_{m,1}(x, y) = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} \quad \text{et} \quad u_{m,2}(x, y) = \beta x^{\alpha} y^{\beta-1}.$$

Notons que l'unique raison pour laquelle l'énoncé ne définit pas les utilités marginales lorsque $x = 0$ ou $y = 0$ est la non-dérivabilité des fonctions d'utilité partielles considérées en ces points ; la notion économique d'utilité marginale reste cependant tout à fait pertinente dans ce cas, et on peut donner un sens à l'idée selon laquelle « l'utilité marginale de la première unité de bien x est infiniment élevée ».

2. On a vu que l'utilité marginale du bien 1 est donnée par $u_{m,1}(x, y) = \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}$; on peut dire qu'elle est décroissante lorsque $x \mapsto x^{\alpha-1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire lorsque $\alpha - 1 > 0$, soit $\alpha > 1$. La notion d'utilité marginale décroissante, importante en économie, signifie que la consommation d'un bien donné apporte de moins en moins de satisfaction lorsque la quantité consommée augmente. Elle modélise un phénomène de lassitude du consommateur. Bien que la fonction d'utilité choisie pour représenter le comportement d'un consommateur dépende de la situation à modéliser, il est courant de définir des fonctions d'utilité telles que le consommateur soit insatiable mais soumis à cet effet de lassitude (c'est-à-dire telles que les utilités marginales soient toujours strictement positives qu'elles soient aussi décroissantes). Notons qu'il est tout à fait possible de choisir des fonctions d'utilité pour lesquelles l'utilité marginale est croissante jusqu'à un certain point, puis décroissante ; c'est notamment le cas lorsque l'on cherche à modéliser le comportement d'un agent jouant à des jeux de hasard (voir l'exercice sur l'inégalité de Jensen et l'aversion au risque dans le chapitre sur les variables aléatoires en deuxième année).

   De même, l'utilité marginale du bien 2 est décroissante lorsque $\beta > 1$.

3. Comme $u(x, 0) = u(0, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ et comme $u(x, y) > 0$ dès que $x > 0$ et $y > 0$, il est clair que le consommateur a toujours intérêt à choisir un panier contenant une quantité strictement positive des deux biens (pour lequel la notion d'utilité marginale est donc bien définie). S'il consomme

8. Cette idée est bien traduite par le terme « marginale », qui signifie « à la marge » ou « additionnelle ».

9. Pour calculer l'utilité marginale $u_{m,1}(x, y)$, il suffit de « dériver $x^{\alpha} y^{\beta}$ par rapport à x en tenant y pour constante », et inversement pour l'autre utilité marginale.

un tel panier de biens de coût total strictement inférieur à R, il peut toujours utiliser le revenu restant pour acheter une quantité de bien 1 ou de bien 2 supplémentaire, qui lui apportera une utilité marginale strictement positive. Ainsi, le consommateur a intérêt à dépenser l'intégralité de son revenu dans la consommation des biens 1 et 2, c'est-à-dire à saturer sa contrainte de budget.

Notons que le fait pour le consommateur de disposer d'un reliquat de revenu ne lui procure pas d'utilité dans ce modèle : on considère que son unique source de satisfaction soit la consommation du bien 1 et du bien 2 et qu'il n'opère pas d'arbitrage intertemporel lui permettant de consommer plus tard.

4. La contrainte de budget saturée donne
$$y = \frac{R - p_1 x}{p_2}.$$
Le consommateur cherche donc à maximiser la quantité
$$f(x) := u\left(x, \frac{R - p_1 x}{p_2}\right) = x^\alpha \left(\frac{R - p_1 x}{p_2}\right)^\beta = \frac{1}{p_2^\beta} \cdot x^\alpha (R - p_1 x)^\beta,$$
pour x allant de sa valeur minimale 0 à sa valeur maximale $\frac{R}{p_1}$ (quantité de bien 1 consommée lorsque tout le revenu est dévolu à la consommation de ce bien).

5. La fonction f est continue sur $\left[0, \frac{R}{p_1}\right]$ en tant que produit de fonctions continues. Elle admet donc un maximum sur cet intervalle d'après le théorème des bornes atteintes [10], c'est-à-dire qu'il existe une valeur optimale de x, notée x^* (et donc une valeur optimale de y associée, notée $y^* = \frac{R - p_1 x^*}{p_2}$). Elle vérifie par ailleurs $f(0) = f\left(\frac{R}{p_1}\right) = 0$ (puisque ces deux valeurs correspondent aux utilités tirées de la consommation de paniers ne contenant qu'un bien) et $f(x) > 0$ si $x \in \left]0, \frac{R}{p_1}\right[$, donc $x^* \in \left]0, \frac{R}{p_1}\right[$. Or f est dérivable sur $\left]0, \frac{R}{p_1}\right[$ en tant que produit de fonctions dérivables, donc x^*, qui est un point intérieur lieu d'un maximum de f, vérifie $f'(x^*) = 0$ (c'est ce que l'on appellera dans le chapitre suivant un *point critique de* f). Or on a
$$\begin{aligned}\forall x \in \left]0, \frac{R}{p_1}\right[, \quad f'(x) &= \frac{1}{p_2^\beta}\left(\alpha x^{\alpha-1}(R - p_1 x)^\beta - \beta p_1 x^{\alpha-1}(R - p_1 x)^{\beta-1}\right) \\ &= \frac{1}{p_2^\beta} x^{\alpha-1}(R - p_1 x)^{\beta-1}\left(\alpha(R - p_1 x) - \beta p_1 x\right),\end{aligned}$$
donc
$$0 = f'(x^*) = \frac{1}{p_2^\beta}(x^*)^{\alpha-1}(R - p_1 x^*)^{\beta-1}\left(\alpha(R - p_1 x^*) - \beta p_1 x^*\right).$$
Comme $x^* \neq 0$ et $x^* \neq \frac{R}{p_1}$, on en déduit que
$$\alpha(R - p_1 x^*) - \beta p_1 x^* = 0, \quad \text{soit} \quad \alpha R - p_1 x^*(\alpha + \beta) = 0,$$

10. On justifie ici l'existence de x^* par un argument théorique, mais on pourrait tout à fait se contenter d'étudier le signe de $f'(x)$ sur $\left[0, \frac{R}{p_1}\right]$ pour en connaître les variations.

et donc
$$x^* = \frac{1}{p_1}\frac{\alpha}{\alpha+\beta}R.$$
La contrainte de budget donne alors l'expression symétrique
$$y^* = \frac{1}{p_2}\frac{\beta}{\alpha+\beta}R.$$

6. La formule donnant x^* fait apparaître le rôle des différents paramètres sur la quantité de bien 1 dans le panier optimal du consommateur :
   - Cette quantité est inversement proportionnelle au prix du bien 1.
   - Elle est indépendante du prix du bien 2 : l'effet de revenu et l'effet de substitution associés à une variation de p_2 se compensent [11]. Insistons sur le fait que ce phénomène est une spécificité de la fonction d'utilité de Cobb-Douglas et n'est pas vérifié en général.
   - Les paramètres α et β déterminent entièrement la proportion du revenu alloué à la consommation du bien 1 : en effet, on a
   $$p_1 x^* = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}R,$$
   si bien qu'une fraction $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ du revenu est dédiée à la consommation du bien 1, et la fraction restante $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$ à celle du bien 2. Le fait que cette fraction soit indépendante des prix p_1 et p_2 est ici encore une spécificité de la fonction d'utilité de Cobb-Douglas.

Correction de l'exercice 63.

1. On considère que chacun des $I(t)$ individus infectés de la population entreprend un contact infectieux avec un autre individu choisi au hasard dans la population (qui est donc saint avec probabilité $\frac{S(t)}{N}$) à un taux temporel β, ce qui occasionne entre les temps t et $t+\mathrm{d}t$ un nombre d'interactions infectieuses entre des individus infectés et des individus sains proportionnel à $\beta I(t)\frac{S(t)}{N}\mathrm{d}t$. Dans cette équation, le facteur β incorpore des informations sur la fréquence des contacts entrepris entre les individus, mais aussi sur la proportion (déterministe ou statistique) des contacts entre individus sains et individus infectés qui donne lieu à l'infection de nouveaux individus. Par ailleurs, la guérison des individus infectieux intervient à taux temporel γ : une fraction $\gamma\mathrm{d}t$ des $I(t)$ individus infectés au temps t redevient saine en une unité de temps infinitésimale $\mathrm{d}t$, ce que traduit la présence du terme $\gamma I(t)$ dans l'expression de $S'(t)$. On peut d'ailleurs réécrire l'équation $(*)$ de façon plus symétrique sous la forme
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} S'(t) = \gamma I(t) - \beta\,\frac{I(t)S(t)}{N} \\ I'(t) = \beta\,\frac{I(t)S(t)}{N} - \gamma I(t), \end{cases} \tag{3}$$

11. On distingue généralement deux composantes dans la réponse de x^* à une hausse de p_2. L'effet de *revenu* consiste en une diminution de x^* suite à une diminution du pouvoir d'achat global du consommateur, tandis que l'effet de *substitution* correspond à une hausse de x^* suite à la substitution du bien 1, devenu relativement meilleur marché, à des unités de bien 2

dans laquelle les deux lignes sont bien sûr équivalentes puisque $I := N - S$.

Le modèle introduit ici, nommé SIS (pour « Susceptibles – Infectés – Susceptibles ») est l'un des modèles mécanistes élémentaires les plus communs en épidémiologie. Il rend compte de la dynamique épidémiologique au sein de la population par le passage des individus d'un statut sanitaire à l'autre, représenté comme un « déplacement entre deux compartiments », ce qui lui vaut le nom de *modèle compartimental*. La dynamique modélisée est schématisée sur la figure ci-dessous :

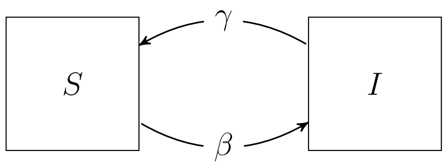


FIGURE 1 – Représentation schématique du modèle compartimental SIS. Les nombres apparaissant sur les flèches sont les taux instantanés de passage d'un compartiment à l'autre par individu.

2. (a) Comme $\beta < \gamma$ et comme S et I sont à valeurs dans $[0, N]$, l'équation $(*)$ donne

$$S' = \gamma I - \beta \frac{SI}{N} \geqslant \gamma I - \gamma \frac{SI}{N} = \gamma I \left(1 - \frac{S}{N}\right) \geqslant 0.$$

Ainsi, $S' \geqslant 0$, donc S est croissante.

(b) Supposons que S' admette une limite $\ell > 0$ en $+\infty$. Il existe alors $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant A$ on ait $S'(x) \geqslant \frac{\ell}{2}$ (on prend donc $\varepsilon := \frac{\ell}{2}$ dans l'indication de l'énoncé). Si $x \geqslant A$, le théorème des accroissements finis donne alors

$$S(x) - S(A) = S'(c)(x - A)$$

pour un $c \in]A, x[$ d'où, comme $S'(c) \geqslant \frac{\ell}{2}$:

$$S(x) = S(A) + S'(c)(x - A) \geqslant S(A) + \frac{\ell}{2}(x - A).$$

Cette minoration étant valable pour tout $x \geqslant A$, en faisant tendre x vers $+\infty$ on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} S(x) = +\infty$ par comparaison, ce qui est impossible puisque l'on a admis que S est à valeurs dans $[0, N]$.

Ainsi, S' ne peut admettre une limite strictement positive.

(c) On a vu que S est croissante. Étant majorée par N par hypothèse, elle tend vers une limite $\ell' \in [0, N]$ d'après le théorème de la limite monotone. Alors $I := N - S$ admet $N - \ell'$ pour limite en $+\infty$, et on peut passer à la limite dans l'équation $(*)$ pour obtenir

$$\lim_{t \to +\infty} S'(t) = \gamma(N - \ell') + \beta \frac{\ell'(N - \ell')}{N}.$$

Comme $\ell' \in [0, N]$, la limite ci-dessus est positive ; or on sait d'après la question précédente qu'elle ne peut être strictement positive, si bien qu'elle est nulle. On a donc

$$\gamma(N - \ell') + \beta \frac{\ell'(N - \ell')}{N} = 0,$$

mais $\gamma(N - \ell') \geqslant 0$ et $\beta \frac{\ell'(N-\ell')}{N} \geqslant 0$ donc

$$\gamma(N - \ell') = \beta \frac{\ell'(N - \ell')}{N} = 0.$$

Comme $\gamma > 0$, on en déduit que $\ell' = N$, ce qu'il fallait démontrer.

(d) L'épidémie s'éteint à long terme : le taux de contact infectieux est plus faible que celui de rémission, ce qui empêche l'épidémie de se fixer dans la population et conduit le nombre d'individus infectieux à tendre vers 0.

3. (a) La fonction $G \circ S$ est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables, et pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
(G \circ S)'(t) &= G'(S(t))S'(t) \\
&= \frac{1}{\beta - \gamma} \left(-\frac{1}{N - S(t)} - \frac{1}{S(t) - \frac{\gamma}{\beta}N} \right) \left(\gamma I(t) - \beta \, \frac{I(t)S(t)}{N} \right) \\
&= \frac{1}{\beta - \gamma} \left(-\frac{1}{I(t)} - \frac{1}{S(t) - \frac{\gamma}{\beta}N} \right) \left(\gamma I(t) - \beta \, \frac{I(t)S(t)}{N} \right) \\
&= \frac{1}{\beta - \gamma} \left(-\frac{S(t) - \frac{\gamma}{\beta}N + I(t)}{I(t)\left(S(t) - \frac{\gamma}{\beta}N\right)} \right) \left(\gamma I(t) - \beta \, \frac{I(t)S(t)}{N} \right) \\
&= \frac{1}{\beta - \gamma} \left(-\frac{(\beta - \gamma)N}{\beta I(t)S(t) - \gamma I(t)N} \right) \left(\gamma I(t) - \beta \, \frac{I(t)S(t)}{N} \right) \\
&= \frac{1}{\beta - \gamma} \frac{(\beta - \gamma)N}{\left(\gamma I(t) - \frac{\beta I(t)S(t)}{N}\right) N} \left(\gamma I(t) - \beta \, \frac{I(t)S(t)}{N} \right) \\
&= 1,
\end{aligned}$$

où la deuxième égalité résulte de l'équation $(*)$ et la cinquième du fait que $S + I = N$.

(b) Comme $(G \circ S)' = 1$, la fonction $t \mapsto (G \circ S)(t) - t$ est de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$ donc elle y est constante : il existe ainsi $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(G \circ S)(t) = t + \alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On a alors $(G \circ S)(0) = \alpha$, soit $G(S(0)) = \alpha$, soit encore

$$\alpha = \frac{1}{\beta - \gamma} \left(\ln(N - S(0)) - \ln\left(S(0) - \frac{\gamma}{\beta}N \right) \right).$$

(c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $G(S(t)) = t + \alpha$ avec la valeur de α déterminée précédemment, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{\beta - \gamma} \left(\ln(N - S(t)) - \ln\left(S(t) - \frac{\gamma}{\beta}N \right) \right) = t + \alpha,$$

soit

$$\frac{1}{\beta-\gamma}\ln\left[\frac{N-S(t)}{S(t)-\frac{\gamma}{\beta}N}\right]=t+\alpha,$$

d'où

$$\frac{N-S(t)}{S(t)-\frac{\gamma}{\beta}N}=e^{(\beta-\gamma)(t+\alpha)}.$$

Une résolution facile donne alors

$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R}_+,\quad S(t)&=\frac{1-\frac{\gamma}{\beta}e^{(\beta-\gamma)(t+\alpha)}}{1-e^{(\beta-\gamma)(t+\alpha)}}N\\&=\frac{\gamma N-\beta S(0)-\gamma(N-S(0))e^{(\beta-\gamma)t}}{\gamma N-\beta S(0)-\beta(N-S(0))e^{(\beta-\gamma)t}}N.\end{aligned}$$

Comme $\beta-\gamma>0$, en passant à la limite dans l'égalité précédente on obtient

$$\begin{aligned}S(t)&=\frac{\gamma N-\beta S(0)-\gamma(N-S(0))e^{(\beta-\gamma)t}}{\gamma N-\beta S(0)-\beta(N-S(0))e^{(\beta-\gamma)t}}N\\&\underset{t\to+\infty}{\sim}\frac{-\gamma(N-S(0))e^{(\beta-\gamma)t}}{-\beta(N-S(0))e^{(\beta-\gamma)t}}N=\frac{\gamma}{\beta}N,\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t\to+\infty}S(t)=\frac{\gamma}{\beta}N.$$

(d) D'après la question précédente, on a

$$\lim_{t\to+\infty}I(t)=N-\frac{\gamma}{\beta}N=\left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)N.$$

À long terme, l'épidémie rejoint donc un niveau d'équilibre non nul (dit *endémique*) et persiste dans la population.

4. La position relative du facteur R_0 par rapport à 1 détermine si l'épidémie s'éteint d'elle-même à long terme (cas où $R_0<1$, c'est-à-dire $\beta<\gamma$; on peut montrer que c'est aussi vrai si $R_0=1$ pour peu que $S(0)>0$) ou si elle rejoint un niveau endémique (cas où $R_0>1$, c'est-à-dire $\beta>\gamma$). Dans le deuxième cas, le rapport R_0 détermine aussi le niveau de prévalence asymptotique du statut « Infecté » dans la population : lorsque $t\to+\infty$, une fraction $1-\frac{\gamma}{\beta}=1-R_0$ de la population environ est infectée par le pathogène considéré.

5. (a) Lorsqu'un individu infecté réalise un contact avec un autre individu choisi uniformément dans la population, celui-ci possède une probabilité $\frac{S(t)}{N}$ d'être susceptible mais seulement une probabilité $\frac{(1-p)S(t)}{N}$ d'être contaminable, d'où l'équation $(**)$.

   (b) Passer de la dynamique décrite par l'équation $(*)$ à celle décrite par l'équation $(**)$ revient à transformer le paramètre β en $\beta(1-p)$. Pour que l'épidémie s'éteigne d'elle-même, on a vu qu'il était nécessaire et suffisant que le ratio $R_0' := \frac{\beta(1-p)}{\gamma}$ soit inférieur à 1. La proportion p^* recherchée est donc

$$p^* = \sup\left\{p \in [0,1] \ : \ \frac{\beta(1-p)}{\gamma} \leqslant 1\right\},$$

soit, en écrivant

$$\frac{\beta(1-p)}{\gamma} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad p \leqslant 1 - \frac{\gamma}{\beta} = 1 - \frac{1}{R_0},$$

l'égalité attendue :

$$p^* = 1 - \frac{\gamma}{\beta} = 1 - \frac{1}{R_0}.$$

(c) Il suffit d'appliquer la formule donnée dans la question précédente en écrivant $2,5 = \frac{5}{2}$: on a alors

$$p^* = 1 - \frac{1}{\frac{5}{2}} = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 60\%,$$

ce qui signifie qu'il est nécessaire d'atteindre un taux de vaccination de 60% de la population pour que l'épidémie ne parvienne pas à se propager et s'éteigne d'elle-même.

(d) Le modèle étudié présente deux défauts majeurs qui le rendent peu adapté pour décrire l'épidémie de COVID-19 :

- Les individus infectés par le COVID-19 développent des anticorps qui leur assurent une immunité pendant un temps plus ou moins long en cas de rémission. Il n'est donc pas pertinent de considérer qu'un individu quittant le compartiment I retourne immédiatement dans le compartiment S, mais plutôt qu'il rejoint un compartiment R (peuplé par les individus « Rétablis » qui ne peuvent redevenir infectés dans l'immédiat) qu'il quittera au bout d'un temps plus ou moins long pour rejoindre à nouveau le compartiment S. Le modèle obtenu, appelé SIRS, fait lui aussi partie des modèles d'épidémiologique les plus classiques.
- Par ailleurs, l'hypothèse de mélange homogène de la population qui explique l'apparition du terme $\frac{I(t)S(t)}{N}$ dans les équations différentielles ($*) et ($**$) est hautement contestable dans la mesure où chaque individu de la population mondiale n'est pas en contact de façon uniforme avec tous les autres individus : l'évidente hétérogénéité des contacts entre individus (pour de simples raisons sociales et géographiques) est à par exemple à l'origine de l'existence de clusters ou de politiques de confinement ciblé. L'hypothèse de mélange homogène conserve toutefois une certaine pertinence dans le cadre de zones urbaines ou de réseaux de sociabilité denses, même si l'échelle réduite des populations ainsi décrites appelle davantage à une modélisation par des processus discrets (notamment aléatoires) que par des équations différentielles.

On pourrait par ailleurs raffiner le modèle de bien des façons en vue de modéliser l'épidémie de COVID-19, par exemple en prenant en compte le renouvellement de la population (avec une possible létalité du pathogène et un taux de mortalité indépendant, les naissances générant quant à elles de nouveaux individus susceptibles de contracter l'infection), en divisant la population en groupes décrits par leur situation géographique et/ou leur vulnérabilité au pathogène, en tenant compte de l'effet de mesures de distanciation sociale, en utilisant des variables aléatoires pour modéliser les contaminations plutôt que des processus déterministes, etc.

Il n'en reste pas moins que le phénomène de seuil observé ici, c'est-à-dire la différence drastique dans le comportement de l'épidémie à long terme selon la valeur de R_0, se retrouve dans de nombreuses spécifications plus complexes et explique, au moins en partie, l'accent mis dans le débat public sur la réduction de ce paramètre par des stratégies aussi diverses que les gestes barrières ou la vaccination.

Correction de l'exercice 64.

1. Supposons qu'il existe $k < 1$ tel que $|f'| \leqslant k$ (on a alors nécessairement $k \geqslant 0$). La fonction $g : x \mapsto f(x) - x$, dérivable en tant que différence de deux fonctions dérivables, vérifie alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f'(x) - 1 \leqslant k - 1 < 0,$$

donc l'inégalité des accroissements finis donne :

$$\forall x > 0, \quad g(x) - g(0) \leqslant (k-1)(x-0) = (k-1)x.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient alors $g(x) - g(0) \underset{x\to[}{\longrightarrow} x \to +\infty] - \infty$, soit $g(x) \underset{x\to[}{\longrightarrow} x \to +\infty] - \infty$.

Par ailleurs, en appliquant l'inégalité des accroissements finis entre $x < 0$ et 0, on obtient [12]

$$\forall x < 0, \quad g(x) - g(0) \geqslant (k-1)x,$$

d'où en faisant tendre x vers $-\infty$, la limite $g(x) - g(0) \underset{x\to[}{\longrightarrow} x \to -\infty] + \infty$, soit $g(x) \underset{x\to[}{\longrightarrow} x \to -\infty] + \infty$.

Ainsi, la fonction g est continue, tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et tend vers $-\infty$ en $+\infty$. Comme $g' < 0$, elle est de plus strictement décroissante ; d'après le théorème de la bijection, elle s'annule donc une unique fois sur $\mathbb{R}$, ce qui signifie que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Supposons que $|f'| < 1$ et que f admette deux points fixes distincts x_1 et x_2. Le théorème des accroissements finis appliquée entre x_1 et x_2 donne alors l'existence d'un réel c entre x_1 et x_2 tel que

$$|x_1 - x_2| = |f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)(x_1 - x_2)| = |f'(c)| \cdot |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2|,$$

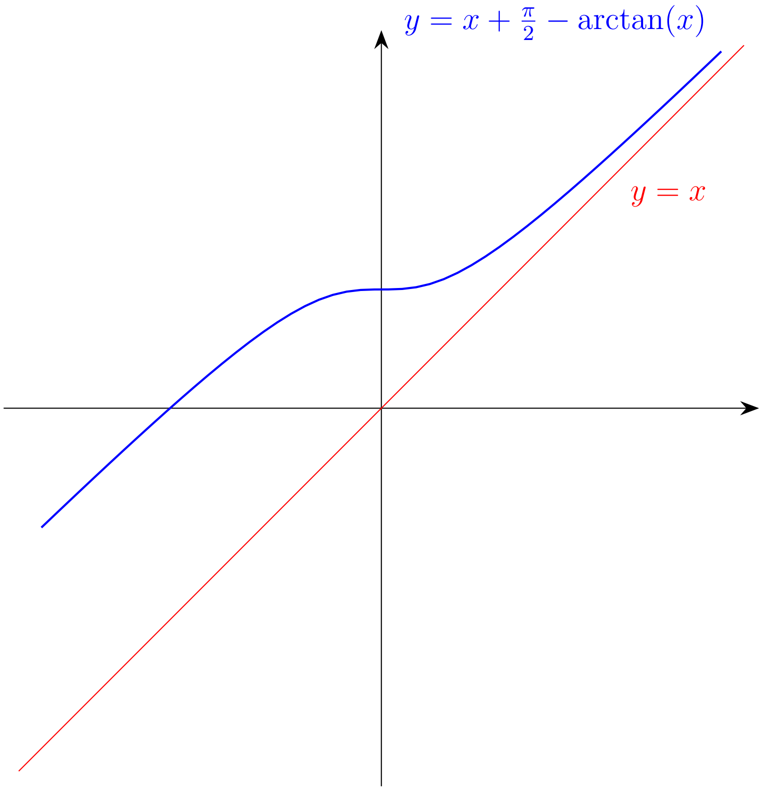
12. Pour y voir plus clair, on peut revenir au théorème des accroissements finis et écrire que si $x < 0$ alors $g(0) - g(x) = g'(c)(0 - x)$ pour un certain $c \in]x, 0[$, or $g'(c) \leqslant k - 1$ et $(0 - x) \geqslant 0$ donc $g(0) - g(x) \leqslant (k-1)(0-x)$, ce qui donne bien $g(x) - g(0) \geqslant (k-1)x$.

ce qui est contradictoire. Ainsi, si $|f'| < 1$ et si f admet un point fixe, celui-ci est nécessairement unique.

(b) La fonction $f : x \mapsto x + \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| = \left|1 - \frac{1}{1+x^2}\right| = \frac{x^2}{1+x^2} < 1,$$

mais elle n'admet pas de point fixe sur $\mathbb{R}$ puisque $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le graphe de f est donné ci-dessous ; l'intuition derrière le choix de cet exemple réside dans le fait d'ajouter à x une quantité strictement positive (pour éviter l'existence d'un point fixe) qui « ralentit » sa croissance (donc une quantité décroissante) tout en n'induisant pas de variations trop fortes (donc avec une dérivée bornée, par exemple par 1).



Correction de l'exercice 65.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \geqslant A$ on ait $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$. Pour tout $x \geqslant A$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction dérivable f entre A et x, on obtient

$$\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x-a) \leqslant f(x) - f(a) \leqslant \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x-a)$$

d'où

$$f(a) + \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x-a) \leqslant f(x) \leqslant f(a) + \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x-a),$$

et donc, si $x > 0$,

$$\frac{f(a)}{x} + \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{x-a}{x} \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(a)}{x} + \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{x-a}{x}. \tag{4}$$

Or
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(a)}{x}+\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{x-a}{x}\right)=\alpha-\frac{\varepsilon}{2}$$
donc, comme $\alpha-\varepsilon<\alpha-\frac{\varepsilon}{2}$, il existe $A_1>0$ tel que pour tout $x\geqslant A_1$ on ait $\left(\frac{f(a)}{x}+\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{x-a}{x}\right)\geqslant\alpha-\varepsilon$, et
$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\leqslant\frac{f(a)}{x}+\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{x-a}{x}\right)=\alpha+\frac{\varepsilon}{2},$$
donc, comme $\alpha+\varepsilon>\alpha+\frac{\varepsilon}{2}$, il existe $A_2>0$ tel que pour tout $x\geqslant A_2$ on ait $\left(\frac{f(a)}{x}+\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{x-a}{x}\right)\leqslant\alpha+\varepsilon$.

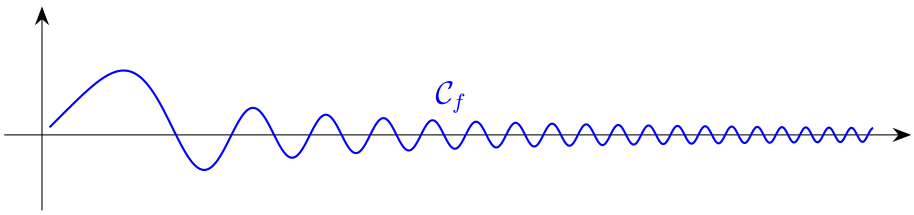
Ainsi, si $x\geqslant\max(A,A_1,A_2)$, on déduit de l'encadrement (4) que
$$\alpha-\varepsilon\leqslant\frac{f(x)}{x}\leqslant\alpha+\varepsilon,$$
ce qui montre que $\frac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\alpha$.

Il est cependant possible que $\mathcal{C}_f$ n'admette pas d'asymptote en $+\infty$: par exemple, si $f(x)=\ln(x)$ au voisinage[13] de $+\infty$, on a $f'(x)=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ mais $\mathcal{C}_f$ n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$ puisque $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.

2. La dérivée de f ne tend pas nécessairement vers 0 en $+\infty$: il est possible que la courbe de f opère des oscillations de plus en plus petites mais de plus en plus resserrées autour de sa limite. Par exemple, la fonction $f:x\mapsto\frac{\sin(x^2)}{x}$, qui tend vers 0 en $+\infty$ en tant que quotient d'une fonction tendant vers 0 et d'une fonction tendant vers $+\infty$, vérifie
$$\forall x>0,\quad f'(x)=\frac{2x^2\cos(x^2)-\sin(x^2)}{x^2}=2\cos(x^2)-\frac{\sin(x^2)}{x^2},$$
or $\frac{\sin(x^2)}{x^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ et la quantité $\cos(x^2)$ n'admet pas de limite lorsque $x\to+\infty$, donc c'est aussi le cas de $f'(x)$.

13. Le fait que l'on suppose f définie sur $\mathbb{R}$ tout entier dans l'énoncé ne doit pas nous déranger : on peut considérer n'importe quelle fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui coïncide avec ln à partir d'un certain seuil, par exemple la fonction f définie par $f(x)=x-1$ si $x<1$ et $f(x)=\ln(x)$ si $x\geqslant 1$.

La courbe de f est tracée ci-dessous :



Correction de l'exercice 66.

1. Le contre-exemple le plus simple est celui de $f : x \mapsto x^3$. On a $f'(0) = 0$, mais il n'existe pas $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $a < b$ et $0 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ puisque si $a < b$ on a nécessairement $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 0$ par stricte croissance de f.

   On laisse le lecteur se convaincre graphiquement du fait qu'aucune sécante à la courbe de la fonction cube n'est de coefficient directeur 0, et détailler un contre-exemple construit sur la fonction sin et sa dérivée en 0.

2. (a) La fonction h est dérivable comme différence de la fonction dérivable f et de la fonction linéaire (donc dérivable) $x \mapsto xf'(c)$. Pour tout $x \in I$, on a $h'(x) = f'(x) - f'(c)$.

   (b) Comme h est continue et injective sur I, elle y est strictement monotone (voir l'exercice 27 du chapitre « Limites et continuité »). Ainsi, la dérivée de h est de signe constant. D'après la question précédente, on a donc $f'(x) - f'(c) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ ou $f'(x) - f'(c) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, c'est-à-dire que $f'(c)$ est un minimum (dans le premier cas) ou un maximum (dans le deuxième) de f' sur I.

   (c) Par contraposée de la question précédente, si $f'(c)$ n'est ni un maximum ni un minimum de f' sur I, alors h n'est pas injective, c'est-à-dire qu'il existe $a, b \in I$ tels que $a < b$ et $h(a) = h(b)$, soit $f(a) - af'(c) = f(b) - bf'(c)$, soit encore $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qu'il fallait démontrer.

3. (a) La question 2 appliquée à f sur l'intervalle ouvert $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ (sur lequel f est bien définie puisqu'il est inclus dans I, et sur lequel f' n'atteint ni son maximum ni son minimum en c) donne l'existence de $a, b \in]c - \varepsilon, c + \varepsilon[$ tels que $a < b$ et tels que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

   (b) Supposons que $a < b \leqslant c$. Le théorème des accroissements finis appliqué à f entre a et b donne alors l'existence de $x \in]a, b[$ tel que $f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, soit $f'(x) = f'(c)$. Mais $x \in]a, b[\subset]c - \varepsilon, c[$, ce qui contredit l'hypothèse additionnelle faite dans l'énoncé.

   On écarte de la même façon le cas $c \leqslant a < b$, ce qui démontre que l'on a bien $a < c < b$.

'

Correction de l'exercice 67.

1. Soit $f : R \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant (M). On a tout d'abord

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0) \quad \text{soit} \quad f(0) = 2f(0), \quad \text{donc} \quad f(0) = 0.$$

Supposons de plus f dérivable. On peut alors écrire que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $h \neq 0$ on a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(a)+f(h)-f(a)}{h} = \frac{f(h)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h},$$

donc

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = f'(0),$$

c'est-à-dire que f' est constante et égale à $f'(0)$. La fonction $g : x \mapsto f(x) - f'(0)x$ est dérivable en tant que différence de fonctions dérivables, et sa dérivée est $g' : x \mapsto f'(x) - f'(0) = 0$: ainsi, g est constante, or $g(0) = f(0) - 0 = 0$ donc g est nulle, c'est-à-dire que $f(x) = f'(0)x$ pour tout x. Ainsi, f est une fonction linéaire.

Il est aisé de vérifier que réciproquement, les fonctions linéaires, c'est-à-dire les fonctions de la forme $f : x \mapsto \alpha x$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$, sont dérivables et vérifient l'équation fonctionnelle (M).

Ainsi, les fonctions dérivables vérifiant (M) sont exactement les fonctions linéaires.

2. Soit f une fonction vérifiant (M). On montre comme dans la question précédente que $f(0) = 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$0 = f(0) = f(-x+x) = f(-x) + f(x), \quad \text{d'où} \quad f(-x) = -f(x).$$

La fonction f est donc impaire.

Si $x \in \mathbb{R}$, on a ensuite

$$f(2x) = f(x+x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$$

, puis

$$f(3x) = f(2x+x) = f(2x) + f(x) = 2f(x) + f(x) = 3f(x),$$

et plus généralement $f(nx) = nf(x)$ quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$ (ce qui peut se démontrer rigoureusement par récurrence sur n). Ce résultat est aussi valable si n est un entier strictement négatif puisque f est impaire. Comme $f(0) = 0$, le résultat est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.

Soit à présent $a \in \mathbb{Q}$; on écrit $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. On a alors $f(a) = f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = pf\left(\frac{1}{q}\right)$ d'après le point que nous venons de démontrer. Mais on a aussi $qf\left(\frac{1}{q}\right) = f\left(q \cdot \frac{1}{q}\right) = f(1)$, donc $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}f(1)$, si bien que $f(a) = \frac{p}{q}f(1) = af(1)$.

Supposons désormais f continue et donnons-nous $x \in \mathbb{R}$. On va montrer que l'on a $f(x) = xf(1)$. On se donne pour cela une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels convergeant vers x (une telle suite existe par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, voir le chapitre sur l'ensemble $\mathbb{R}$). La continuité de f et l'identité $f(a_n) = a_n f(1)$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la question précédente permettent alors d'écrire que

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n f(1) = xf(1).$$

Ainsi, f est une fonction linéaire. Or on a déjà vu que toutes les fonctions linéaires satisfont (M), donc les fonctions continues vérifiant (M) sont exactement les fonctions linéaires.

3. Si $a > 0$, la fonction $g : x \mapsto a^x = e^{x \ln(a)}$ est continue et vérifie la relation $g(x+y) = g(x)g(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, comme nous l'avons évoqué dans le chapitre « Exponentielle et logarithme », et c'est évidemment aussi le cas de la fonction nulle.

   Réciproquement, considérons une fonction continue $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x+y) = g(x)g(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons g non nulle. Il existe alors $c \in \mathbb{R}$ tel que $g(c) \neq 0$; en écrivant $g(c) = g(c+0) = g(c)g(0)$ et en divisant cette égalité par $g(c) \neq 0$, on obtient alors $g(0) = 1$.

   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = g\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$, donc g est positive.

   Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 0$. On démontre par une récurrence facile que $g(x) = g\left(\frac{x}{n}\right)^n$ pour tout $n \geqslant 1$; ainsi, on a nécessairement $g\left(\frac{x}{n}\right) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. En utilisant la continuité de g en 0, on obtient donc

   $$g(0) = \lim_{n \to +\infty} g\left(\frac{x}{n}\right) = 0,$$

   ce qui contredit le fait que $g(0) = 1$. Ainsi, il n'existe pas de $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 0$, ce qui montre que g est strictement positive.

   On peut donc considérer la fonction $\ln \circ g$, qui est continue en tant que composée de fonctions continues et qui vérifie

   $$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (\ln \circ g)(x+y) &= \ln(g(x+y)) = \ln(g(x)g(y)) \\ &= \ln(g(x)) + \ln(g(y)) = (\ln \circ g)(x) + (\ln \circ g)(y), \end{aligned}$$

   c'est-à-dire que $\ln \circ g$ est solution de (M). D'après la question précédente, $\ln \circ g$ est donc une fonction linéaire. Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $\ln(g(x)) = \alpha x$, soit $g(x) = e^{\alpha x}$. En posant $a := e^{\alpha}$, on a donc $g(x) = a^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 68. On utilisera la caractérisation suivante : une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $x, y \in A$, tout réel z compris entre x et y est aussi dans A. Ainsi, le théorème de Darboux prend la forme suivante : si f est dérivable, alors pour tous $a, b \in I$ et tout z compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = z$.

1. Si f' est continue, le théorème est une simple reformulation du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f sur I.
2. (a) Lorsque $f'(a) = f'(b)$, il est clair que f' prend sur $[a, b]$ l'unique valeur de $[f'(a), f'(b)] = \{f'(a)\}$ (par exemple en a ou en b), donc la conclusion du théorème est valide. On suppose désormais que $f'(a) \neq f'(b)$.
   (b) Supposons la proposition démontrée[14] dans le cas où $f'(a) < f'(b)$, et plaçons-nous dans le cas où $f'(a) > f'(b)$: en appliquant la proposition à

14. On détaille ici longuement un passage souvent résumé dans les démonstrations de bon niveau

la fonction $-f$ dont la dérivée $(-f)' = -f'$ vérifie $(-f)'(a) < (-f')(b)$, on voit que $-f'$ prend sur $[a, b]$ toutes les valeurs entre $-f'(a)$ et $-f'(b)$, c'est-à-dire que f' prend sur $[a, b]$ toutes les valeurs entre $f'(a)$ et $f'(b)$, donc la proposition est vraie aussi. Ainsi, il suffit de démontrer la proposition dans le cas où $f'(a) < f'(b)$ pour pouvoir conclure. On se place dorénavant dans ce cas.

(c) La fonction $g : x \mapsto f(x) - yx$ est dérivable sur $[a, b]$ en tant que différence de fonctions dérivables, et pour tout $x \in [a, b]$ on a $g'(x) = f'(x) - y$. On a par ailleurs $g'(a) = f'(a) - y < 0$ et $g'(b) = f'(b) - y > 0$ puisque $y \in]f'(a), f'(b)[$. Si l'on réussit à démontrer la proposition pour toute fonction dérivable h vérifiant $h'(a) < 0 < h'(b)$, on peut alors l'appliquer à g, et il suffit en fait de montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ vérifiant $g'(c) = 0$ pour arriver à la conclusion que $f'(c) = y$. On a donc réussi à se ramener à un problème plus simple : en supposant [15] que $f'(a) > 0 > f'(b)$, on souhaite montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(d) La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$, donc elle y admet un maximum d'après le théorème des bornes atteintes. Comme $f'(a) > 0$, f prend des valeurs strictement supérieures à $f(a)$ dans un voisinage épointé à droite de a et comme $f'(b) < 0$, elle prend vers valeurs strictement supérieures à $f(b)$ dans un voisinage épointé à gauche de b : ainsi, son maximum sur $[a, b]$ n'est atteint ni en a ni en b, c'est-à-dire qu'il est atteint en un point $c \in]a, b[$. Or on sait qu'un tel point c (point intérieur lieu d'un extremum local d'une fonction dérivable) est nécessairement un point critique de f, c'est-à-dire que $f'(c) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

3. La fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme combinaison de fonctions dérivables. Par ailleurs, elle est dérivable en 0 puisque

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

car cos est bornée. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée y est donnée par

$$\begin{array}{rccl} f' : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array}$$

par « quitte à considérer la fonction $-f$, on peut supposer que $f'(a) < f'(b)$ ». Cette cascade un peu technique permet d'économiser du temps et de l'espace dans l'écriture d'une preuve, mais il n'est pas recommandé de l'utiliser à la légère, et il est important de bien comprendre son sens lorsque l'on en fait usage.

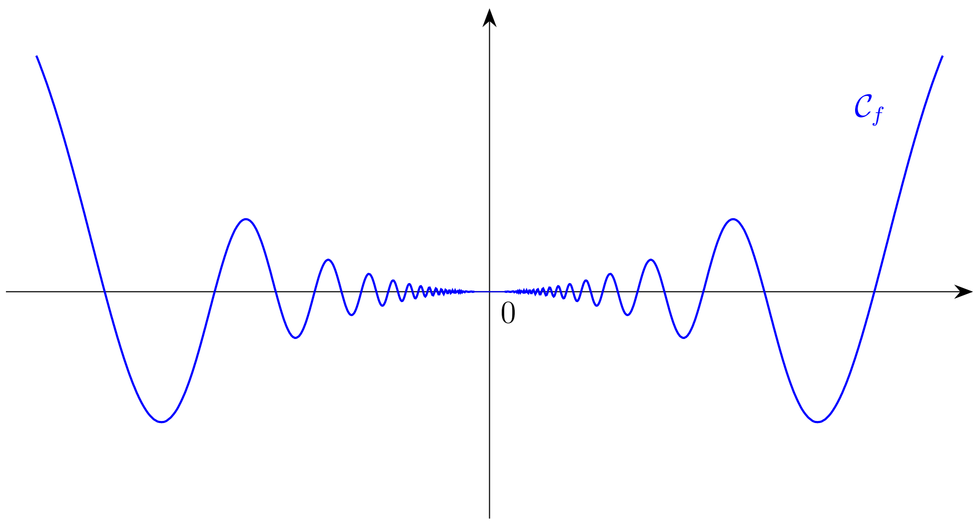
15. On détaille ici le fait que « quitte à considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - yx$, on peut supposer que $f'(a) > 0 > f'(b)$ et montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$ ».

La fonction f' n'est par contre pas continue en 0 puisque la quantité

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'admet pas de limite lorsque x tend vers 0 : en effet, le terme $2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 puisque cos est bornée, mais le terme $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite.

L'aspect de $\mathcal{C}_f$ est donné ci-dessous. On remarque que la courbe n'a pas une apparence parfaitement *lisse* au voisinage de 0 :



4. La fonction partie entière ne vérifiant pas la propriété des valeurs intermédiaires (par exemple parce que l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par cette fonction est l'ensemble $\{0, 1\}$ qui n'est pas un intervalle), elle n'est la dérivée d'aucune fonction.

Correction de l'exercice 69.

1. La preuve est incorrecte en l'état puisqu'elle fait usage de la positivité de f', qui n'a pas été supposée dans l'énoncé.
2. On va démontrer l'affirmation tenue pour évidente par l'étudiant selon laquelle f' est positive. D'après le théorème de Darboux, si f' prenait une valeur strictement négative $\alpha < 0$ sur $[a, b]$, comme f' prend aussi une valeur strictement positive $\beta > 0$ alors f' devrait prendre toutes les valeurs de l'intervalle $[\alpha, \beta]$, et notamment l'infinité de valeurs strictement négatives de $[\alpha, 0[$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite dans l'énoncé.

   Ainsi, les points (en nombre fini) en lesquels f' n'est pas strictement positive sont nécessairement des points d'annulation de f', et non des points où elle prend des valeurs strictement négatives ; on a donc bien $f' \geqslant 0$, et le reste de la preuve proposée par l'étudiant est correct.
3. D'après le théorème de Darboux, si f' changeait de signe sur l'intervalle I alors elle s'y annulerait ; ainsi, f' est strictement positive ou strictement négative sur I, ce qui implique (comme I est un intervalle) que f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Correction de l'exercice 70.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence de c_n résulte du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction f, continue sur $[a, x_n]$ et dérivable sur $]a, x_n[$.

   (b) Comme $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, on a $c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ par le théorème des gendarmes, d'où $f'(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ par hypothèse sur f'. Ainsi, on a

$$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(c_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

2. On a montré que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement supérieurs à a et convergeant vers a, on a $\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. D'après la caractérisation séquentielle de la limite, on a donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a+]{} \ell$. Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

3. Comme g est lipschitzienne [16], il existe $k, k' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que l'on ait :

$$\forall x, y \in]a, b], \quad |g(x) - g(y)| \leqslant k|x - y| \quad \text{et} \quad |g'(x) - g'(y)| \leqslant k'|x - y|.$$

   Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]a, b]$ convergeant vers a. On va montrer que $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en montrant qu'elle est de Cauchy.

   Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il s'agit d'une suite de Cauchy, donc on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$ et $p \geqslant 0$ alors $|x_n - x_{n+p}| \leqslant \frac{\varepsilon}{k}$. Le caractère lipschitzien de g permet alors d'écrire que si $n \geqslant N$ et $p \geqslant 0$, on a aussi

$$|g(x_n) - g(x_{n+p})| \leqslant k|x_n - x_{n+p}| \leqslant k \cdot \frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon,$$

   donc $(g_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Ainsi, elle converge bien vers une limite finie que l'on choisit de noter ℓ_1.

   On ne peut pas tout de suite décréter que g admet ℓ_1 pour limite en a^+ puisque rien ne nous garantit encore que la limite ℓ_1 ne dépende pas du choix de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On se donne donc une deuxième suite d'éléments de $]a, b[$, notée $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge vers a, et on crée une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en intercalant des termes x_n et y_n, c'est-à-dire que l'on définit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_{2n} = x_n \quad \text{et} \quad z_{2n+1} = y_n.$$

   La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers a, donc en lui appliquant le même raisonnement que pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on montre que $g(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$ pour un certain $\ell_2 \in \mathbb{R}$. Mais alors $g(x_n) = g(z_{2n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, donc $\ell_1 = \ell_2$, et $g(y_n) = g(z_{2n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, donc $(g(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ a la même limite que $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$. La caractérisation séquentielle

16. Notons que l'on pouvait faire l'économie de l'hypothèse sur g et se contenter de celle sur g' : le caractère lipschitzien de g' implique en fait que g' est bornée sur $]a, b]$, ce qui permet de montrer grâce à l'inégalité des accroissements finis que g est lipschitzienne. Le lecteur est invité à détailler ces arguments.

de la limite permet cette fois de dire que la fonction g tend vers ℓ_1 en a^+, c'est-à-dire qu'elle est prolongeable par continuité en a, par $\widetilde{g}(a) := \ell_1$.

En appliquant le même raisonnement à la fonction g', elle aussi lipschitzienne, on obtient que g' admet une limite finie en a^+, que l'on note ℓ. Le théorème de la limite de la dérivée appliqué à la fonction prolongée $\widetilde{g}$ sur $[a, b[$ montre alors que $\widetilde{g}$ est dérivable en a et que $\widetilde{g}'(a) = \ell$.