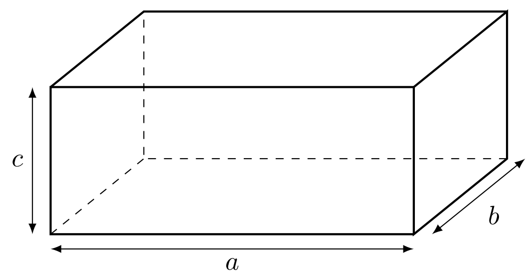
# 4 EXERCICES D'APPLICATION

**Exercice 59** (Emballage de cadeau). On cherche à emballer un cadeau en forme de parallélépipède de dimensions strictement positives $a$, $b$ et $c$ :




1. Exprimer en fonction de $a$, $b$ et $c$ la surface latérale $S$ du parallélépipède et son volume $V$.
2. À volume $V > 0$ donné, comment choisir $a$, $b$ et $c$ pour minimiser la surface latérale du cadeau ?
   *Indication* : on pourra tout d'abord considérer $a$ fixé puis choisir $b$ et $c$ de sorte à minimiser la surface du cadeau, puis choisir la valeur de $a$ permettant d'optimiser cette surface minimale.
3. À surface $S > 0$ donnée, comment choisir $a$, $b$ et $c$ de sorte à maximiser le volume du cadeau ?

   *Indication* : on pourra mettre en évidence un lien entre ce problème et le précédent.

**Exercice 60** (Interprétation mécanique des résultats du cours). On considère un solide en déplacement le long d'un axe gradué et orienté et dont on repère la position au temps $t \in \mathbb{R}$ par un réel noté $s(t)$. On suppose que la fonction $t \mapsto s(t)$ est dérivable et on note $v : t \mapsto s'(t)$ sa dérivée. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on appelle $v(t)$ la *vitesse instantanée du solide au temps $t$*.

1. Donner une approximation de la position du solide au temps $t = 1,01$ si $s(1) = 2$ et $v(1) = 4$.
2. Donner une fonction $s$ correspondant à une vitesse constante égale à 3. Une telle fonction est-elle unique ?
3. Donner une fonction $s$ associée à la fonction de vitesse instantanée $v : t \mapsto 2t$. Une telle fonction est-elle unique ?
4. Partant d'une ville $A$, je me déplace en voiture le long d'une route menant à une ville $B$ distante de 100 kilomètres. De quels résultats du cours les affirmations suivantes sont-elles des corollaires ?
   (a) Si j'atteins la ville $B$, il existera un instant où je me serai trouvé à 50 kilomètres de la ville $A$.
   (b) Si je rebrousse chemin et retourne dans la ville $A$, il existera un instant auquel ma vitesse par rapport à l'axe de la route sera nulle.

   (c) Il existe un instant auquel mon compteur de vitesse affichera un nombre égal à ma vitesse *moyenne* sur le trajet.

   (d) Si la vitesse affichée par le compteur est toujours inférieure à 50 km/h, il me faudra au minimum 2 heures pour atteindre la ville $B$.

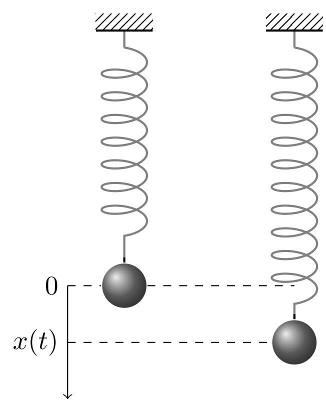
5. Imaginer un dispositif embarqué permettant d'évaluer la vitesse $v(t)$ d'une voiture à chaque instant $t \in \mathbb{R}$. Cette estimation est-elle exacte ?
6. Comment pourrait-on définir l'*accélération instantanée* $a(t)$ d'un solide au temps $t$ ?
7. Donner une fonction $s$ correspondant à une accélération constante égale à $-10$.
8. On considère une balle de tennis de masse $m = 0,06$ kilogrammes lancée verticalement à partir de l'altitude $s(0) = 1$ mètre, avec une vitesse initiale de $v(0) = 20$ mètres par seconde. On note $s(t)$ l'altitude de la balle (en mètres) au temps $t \geqslant 0$ (en secondes). La deuxième loi de Newton, ou *principe fondamental de la dynamique*, stipule que l'accélération $a(t)$ de la balle au temps $t$ vérifie approximativement l'égalité suivante (dont l'unité est le m.s$^{-2}$) :

$$a(t) \approx -10$$

   tant que la balle n'a pas touché le sol.

   Calculer l'altitude maximale atteinte par la balle et le temps auquel elle touchera le sol.

**Exercice 61** (Un exercice de mécanique). Une boule de masse $m > 0$ est accrochée à un ressort vertical dont l'extrémité haute est fixée (voir figure ci-contre). On appelle *position d'équilibre* de la boule la position de la boule lorsque le système est au repos. À l'instant $t = 0$, on tire la boule vers le bas sur une longueur $x_0 \geqslant 0$, puis on la relâche avec une vitesse nulle. À chaque instant $t \geqslant 0$, on note $x(t)$ le déplacement de la boule vers le bas par rapport à la position d'équilibre (on a donc $x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$).




En négligeant les frottements, des considérations physiques permettent d'établir que $x$ est dérivable, que $x'$ l'est aussi et que l'on a l'équation du mouvement suivante :

$$mx''(t) = -kx(t),$$

où $k$ est une constante positive (appelée *constante de raideur du ressort*).

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $y : t \mapsto \lambda \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ vérifie $y(0) = x_0$ et $y'(0) = 0$.

2. Montrer que la fonction $y$ ainsi définie vérifie $(y-x)'' = -\frac{k}{m}(y-x)$.
3. Que vaut la dérivée de la fonction $((y-x)')^2 + \frac{k}{m}(y-x)^2$ ?
4. En déduire que $x(t) = y(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.
5. Les variations asymptotiques de $x$ en fonction de $t$ vous semblent-elles crédibles ?

**Exercice 62** (Microéconomie du producteur). Une entreprise en situation de monopole vend un bien sur un marché en fixant librement son prix $p \geqslant 0$. L'entreprise dispose d'une fonction de demande $D$, c'est-à-dire qu'elle est capable de prédire la demande $D(p)$ (non nécessairement entière) qui lui est adressée en fonction du prix $p$ pratiqué.

1. On considère tout d'abord que le coût marginal de production d'une unité de bien supplémentaire est nul.
   (a) Donner des exemples de situations concrètes correspondant à ce choix de modélisation.
   (b) Calculer le prix maximisant le profit pour l'entreprise dans les cas suivants :
   - $(i)$ $D(p) = \max(100-p, 0)$
   - $(ii)$ $D(p) = \max(100-4p, 0)$
   - $(iii)$ $D(p) = \max(200-p, 0)$
   - $(iv)$ $D(p) = \max(100-p^2, 0)$
   - $(v)$ $D(p) = \dfrac{100}{100+p^2}$

   (c) Commenter les différences entre les résultats obtenus dans les trois premiers cas.
2. On considère à présent que le coût marginal de production d'une unité de bien supplémentaire est égal à 10 €.
   (a) Donner des exemples de situations concrètes correspondant au choix d'un coût marginal constant.
   (b) Calculer le prix maximisant le profit pour l'entreprise dans les cas suivants :
   - $(i)$ $D(p) = \max(100-p, 0)$
   - $(ii)$ $D(p) = \max(100-4p, 0)$
   - $(iii)$ $D(p) = \max(200-p, 0)$
   - $(iv)$ $D(p) = \max(500-p^2, 0)$
   - $(v)$ $D(p) = \dfrac{100}{100+p^2}$
3. On suppose à présent que l'entreprise fait face à un coût marginal croissant, et que le coût total de production d'une quantité $q \geqslant 0$ de bien est $C(q) = q^2$.
4. Vérifier que le coût marginal $C'$ associé à la fonction de coût est bien croissant.
   (a) Donner des exemples de situations concrètes correspondant à un coût marginal croissant.
   (b) Vérifier que le coût marginal $C'$ associé à la fonction de coût est bien croissant.

(c) Déterminer le prix maximisant le profit du producteur et la quantité échangée associée lorsque $D(p) = \max(100 - p, 0)$.

5. On considère enfin que l'entreprise produit des biens de luxe dont le coût marginal de production est égal à $9\,000$ €, et que sa fonction de demande est définie par $D(p) = \max\left(5p - \frac{p^2}{3000}, 0\right)$.

   (a) Comment interpréter l'allure de la courbe de demande ?

   (b) Calculer le prix maximisant le profit du producteur.

**Exercice 63** (Microéconomie du consommateur). Un consommateur peut consommer deux biens 1 et 2 en quantités respectives $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Il en retire alors un niveau de satisfaction (ou d'*utilité*) $u(x, y)$, où la fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est la *fonction d'utilité de Cobb-Douglas* donnée par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad u(x, y) = x^\alpha y^\beta$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, en convenant du fait que $0^\alpha = 0^\beta = 0$.

Si $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on définit l'*utilité marginale du bien 1* (au point $(x, y)$), que l'on note $u_{m,1}(x, y)$, comme le nombre dérivé de la fonction $t \mapsto u(t, y)$ en $x$, et on définit l'utilité marginale du bien 2 (au point $(x, y)$), notée $u_{m,2}(x, y)$, comme le nombre dérivé de la fonction $t \mapsto u(x, t)$ en $y$.

1. Interpréter les utilités marginales en termes économiques, puis les calculer.
2. À quelle condition sur $\alpha$ (resp. $\beta$) peut-on dire que l'utilité marginale de $x$ (resp. $y$) est décroissante ? Comment interpréter cette propriété en termes économiques ?

On considère que le prix du bien 1 est $p_1 > 0$, que le prix du bien 2 est $p_2 > 0$ et que le consommateur dispose d'un revenu $R > 0$, si bien qu'il fait face à la *contrainte de budget* suivante :

$$p_1 x + p_2 y \leqslant R.$$

Le problème du consommateur revient alors à choisir le panier de biens $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ qui maximise son utilité $u(x, y)$ tout en satisfaisant la contrainte de budget.

3. Montrer que le consommateur a intérêt à saturer la contrainte de budget, c'est-à-dire à choisir un panier de biens $(x, y)$ tel que $p_1 x + p_2 y = R$.
4. En exprimant $y$ en fonction de $x$ grâce à la contrainte de budget saturée, reformuler le problème comme la maximisation d'une fonction d'une variable.
5. Déterminer le panier de biens $(x^*, y^*)$ répondant au problème du consommateur.
6. Commenter la formule donnant $x^*$ en fonction des paramètres du modèle. On montrera notamment que la part du revenu allouée à la consommation du bien 1 à l'optimum ne dépend pas de $p_1$.

**Exercice 64** (Un modèle épidémiologique). On souhaite étudier la propagation d'une épidémie au sein d'une population de $N > 0$ individus ($N$ étant un nombre non nécessairement entier), composée au temps $t \geqslant 0$ d'un nombre $S(t)$ d'individus sains (aussi dits *susceptibles*) et d'un nombre $I(t) := N - S(t)$ d'individus infectés.

On modélise cette situation par des fonctions dérivables $S : \mathbb{R} \to [0, N]$ et $I := N - S$ vérifiant l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S'(t) = \gamma I(t) - \frac{\beta I(t)S(t)}{N}, \qquad (*)$$

où $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$. On admet que de telles fonctions existent.

On modélise ici la population de façon *continue* plutôt que discrète, au sens où le nombre d'individus qui composent les différentes sous-populations évolue dans $\mathbb{R}$ plutôt que dans $\mathbb{N}$. Ce choix de modélisation, outre qu'il permet l'utilisation des dérivées, a du sens si l'on considère par exemple que la population considérée est comptée en milliards d'individus.

1. On interprète le paramètre $\beta$ comme le taux de contact infectieux entrepris par un individu infecté et le paramètre $\gamma$ comme le taux instantané de rémission d'un individu infecté. Interpréter l'équation ($*$).
2. On suppose tout d'abord que $\beta < \gamma$.
   (a) Montrer que $S$ est croissante.
   (b) Montrer que $S'(t)$ ne peut pas admettre une limite strictement positive lorsque $t \to +\infty$.

   *Indication* : raisonner par l'absurde, justifier l'existence d'un $A \in \mathbb{R}$ et d'un $\varepsilon > 0$ tels que $S'(x) \geqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant A$, puis utiliser le théorème des accroissements finis entre $A$ et $x$.

   (c) Montrer que $S(t)$ tend vers $N$ lorsque $t \to +\infty$.

   *Indication* : on justifiera d'abord l'existence d'une limite pour $S$ en $+\infty$, puis on montrera que cette limite vaut $N$ en raisonnant par l'absurde à l'aide de l'équation ($*$).

   (d) Quelle est l'évolution à long terme du nombre d'individus infectés dans la population ?
3. On suppose à présent que $\beta > \gamma$. On suppose aussi que $S(0) \in \left]\frac{\gamma}{\beta}N, N\right[$ et on définit la fonction $G$ de la façon suivante :

$$\forall x \in \left]\frac{\gamma}{\beta}N, N\right[, \quad G(x) = \frac{1}{\beta - \gamma}\left(\ln(N - x) - \ln\left(x - \frac{\gamma}{\beta}N\right)\right).$$

   (a) On admet que $G \circ S$ est bien définie, c'est-à-dire que $S$ prend ses valeurs dans $\left]\frac{\gamma}{\beta}N, N\right[$. Montrer que $G \circ S$ est dérivable et que $(G \circ S)' = 1$.
   (b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(G \circ S)(t) = t + \alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis déterminer $\alpha$ en fonction de $S(0)$.
   (c) En déduire la forme explicite de $S(t)$ en fonction de $t$, puis la limite de $S(t)$ quand $t \to +\infty$.
   (d) Quelle est l'évolution à long terme du nombre d'individus infectés dans la population ?

4. À partir des deux cas considérés ci-dessus, expliquer le rôle du facteur $R_0 := \frac{\beta}{\gamma}$, appelé *nombre de reproduction de base*, dans la dynamique à long terme d'une épidémie.

5. On suppose dans un troisième temps que $\beta > \gamma$ mais que l'on parvient à vacciner une fraction $p \in [0,1]$ de la population, ce qui conduit à rendre une proportion $p$ des individus non atteignables par l'épidémie.

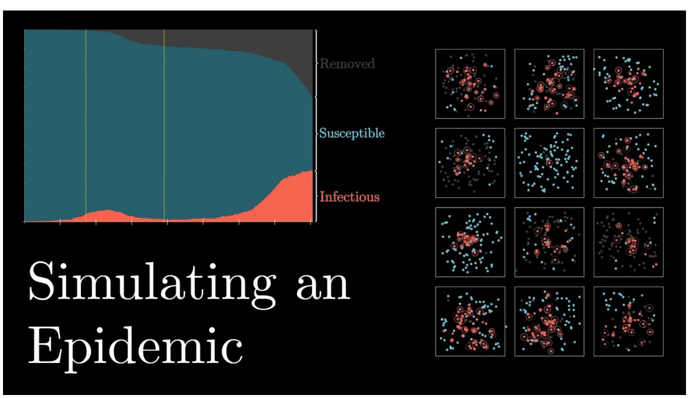
   (a) Justifier que l'équation différentielle suivie par $S$ est à présent
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S'(t) = \gamma I(t) - \frac{\beta(1-p)I(t)S(t)}{N} = I(t)\left(\gamma - \beta(1-p)\frac{S(t)}{N}\right). \qquad (**)$$

   (b) Montrer que la proportion de la population qu'il est nécessaire de vacciner pour que l'épidémie s'éteigne d'elle-même dans le cadre du modèle considéré vaut
   $$p^* = 1 - \frac{1}{R_0}.$$

   (c) Dans le cas de l'épidémie de COVID-19, le paramètre $R_0$ a parfois été estimé à 2,5. Que vaut $p^*$ dans ce cas ?

   (d) Le modèle considéré est-il adapté pour décrire l'évolution de l'épidémie de COVID-19 ?

*On trouvera à cette adresse une vidéo de la chaîne 3Blue1Brown présentant le fonctionnement d'un modèle SIR reposant non pas sur des équations différentielle mais sur des processus aléatoires. On pourra noter les similarités et les différences de ce modèle avec celui étudié dans l'exercice ci-dessus. L'étude de la grande famille des modèles compartimentaux constitue de nos jours un champ actif de la recherche en épidémiologie.*



# 5 PLUS LOIN, PLUS FORT

**Exercice 65.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Montrer que s'il existe $k < 1$ tel que $|f'| \leqslant k$, alors $f$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que si $|f'| < 1$ et si $f$ admet un point fixe sur $\mathbb{R}$, alors celui-ci est unique.
   (b) Donner un exemple de fonction $f$ tel que $|f'| < 1$ qui n'admette pas de point fixe sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 66.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \alpha$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$. La courbe représentative de $f$ admet-elle nécessairement une asymptote en $+\infty$ dans ce cas ?
2. Supposons que $f$ admette une limite finie en $+\infty$. A-t-on nécessairement $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ ?

**Exercice 67** (Une réciproque partielle du théorème des accroissements finis). Soit $I$ un intervalle ouvert et soit $f$ une fonction dérivable sur $I$.

1. Est-il vrai que pour tout $c \in I$ il existe $a, b \in I$ tels que $a < c < b$ et tels que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ?

   *Indication* : on pourra chercher un contre-exemple avec $f = \sin$ ou $f : x \mapsto x^3$ et s'aider d'un raisonnement graphique.
2. On cherche à présent à établir une réciproque partielle du théorème des accroissements finis, qui s'énonce comme suit :

   *Si $c \in I$ est tel que $f'(c) \neq \min_I f'$ et tel que $f'(c) \neq \max_I f'$, alors il existe $a, b \in I$ tels que $a < b$ et*

   $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

   *Cette réciproque a été démontrée en 1997 (donc très récemment !) par J. Tong et P. Braza. La preuve que nous présentons a été proposée en 2014 par C. Mortici dans un article intitulé* A converse of the Mean Value Theorem made easy.

   Fixons donc $c \in I$ et définissons la fonction $h$ sur $I$ par

   $$\forall x \in I, \quad h(x) = f(x) - x f'(c).$$

   (a) Justifier que $h$ est dérivable et calculer sa dérivée.
   (b) Supposons que $h$ soit injective. Montrer que la dérivée de $h$ est de signe constant sur $I$, puis que $f'(c)$ est un extremum (c'est-à-dire un minimum ou un maximum) de $f'$ sur $I$.

(c) Montrer que si $f'(c)$ n'est pas un extremum de $f'$ sur $I$, alors $h$ n'est pas injective, puis en déduire qu'il existe bien $a, b \in I$ tels que $a < b$ et

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3. On cherche maintenant à montrer que sous une condition légèrement plus forte, on peut trouver $a$ et $b$ *de part et d'autre de* $c$ vérifiant l'égalité attendue. Le résultat est le suivant :

   *Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[ \subset I$, que $f'(c)$ ne soit pas un extremum de $f'$ sur $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, et que pour tout $x \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[ \setminus \{c\}$ on ait $f'(x) \neq f'(c)$.*

   *Alors il existe $a, b \in I$ tels que $a < c < b$ et $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

   On se place donc sous les hypothèses de cette proposition.

   (a) Déduire de la question 2 qu'il existe $a, b \in ]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ tels que $a < b$ et $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

   (b) En appliquant le théorème des accroissements finis entre $a$ et $b$, montrer que $a < c < b$.

**Exercice 68.** Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de l'équation fonctionnelle

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y). \qquad \text{(M)}$$

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue n'est pas une variable mais une fonction.

1. Déterminer toutes les fonctions dérivables vérifiant (M).

   *Indication* : si $f$ est une telle fonction, on pourra montrer que $f(0) = 0$, montrer que $f'$ est constante et égale à $f'(0)$, puis dériver la fonction $x \mapsto f(x) - f'(0)x$ et conclure.

2. Déterminer toutes les fonctions continues vérifiant (M).

   *Indication* : on pourra montrer successivement que $f$ est impaire, que $f(nx) = nf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ et enfin que $f(a) = af(1)$ pour tout $a \in \mathbb{Q}$, puis conclure par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Déduire de la question précédente une nouvelle démonstration du fait que les seules fonctions continues $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $g(x+y) = g(x)g(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ sont nulles ou de la forme $g : x \mapsto a^x$ avec $a > 0$.

   *Indication* : on pourra montrer qu'une telle fonction $g$, si elle est non nulle, est strictement positive, puis considérer $\ln \circ g$.

**Exercice 69** (Théorème de Darboux). Soit $I$ un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de démontrer le *théorème de Darboux*, qui stipule qu'une fonction dérivée « vérifie la propriété des valeurs intermédiaires » :

*Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.*

1. Démontrer le théorème dans le cas où $f'$ est continue.
2. Supposons $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, et fixons $a, b \in I$ tels que $a < b$. On veut montrer que $f'$ prend sur $[a, b]$ toutes les valeurs comprises entre $f'(a)$ et $f'(b)$.
   (a) Traiter le cas $f'(a) = f'(b)$. On supposera par la suite que $f'(a) \neq f'(b)$.
   (b) En considérant $-f$, montrer que l'on peut supposer que $f'(a) < f'(b)$, ce que l'on fera par la suite.
   (c) Soit $y \in ]f'(a), f'(b)[$. En considérant la fonction $x \mapsto f(x) - yx$, montrer que l'on peut supposer que $f'(a) > 0 > f'(b)$, ce que l'on fera par la suite, et qu'il suffit de montrer qu'il existe $c \in ]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
   (d) Montrer que $f$ admet son maximum sur $[a, b]$ en un point $c \in ]a, b[$ puis conclure.
3. Donner un intervalle $I$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ tels que $f$ soit dérivable sur $I$ mais que $f'$ ne soit pas continue sur $I$.
4. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f'$ soit la fonction partie entière ?

**Exercice 70.** Dans un cours de mathématiques sur la dérivation, un professeur démontre que si $I$ est un intervalle ouvert non vide et si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable dont la dérivée est positive, alors $f$ est croissante sur $I$. Il demande ensuite à ses étudiants de prouver le théorème suivant :

> *Soit $I$ un intervalle ouvert non vide et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'$ soit strictement positive sur $I$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors $f$ est strictement croissante sur $I$.*

Un étudiant fournit la preuve ci-après :

> Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème. Comme $f'$ est positive, on sait que $f$ est croissante sur $I$. Supposons qu'elle n'y soit pas strictement croissante : il existe alors $a, b \in I$ tels que $a < b$ et tels que $f(a) \geqslant f(b)$. Comme $f$ est croissante sur $I$, on a aussi $f(a) \leqslant f(b)$, d'où $f(a) = f(b)$, et par suite $f(x) = f(a) = f(b)$ pour tout $x \in [a, b]$. La fonction $f$ est donc constante sur $[a, b]$, si bien que sa dérivée est nulle sur $[a, b]$ ; or $[a, b]$ contient une infinité de points, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $f'$ prend des valeurs strictement positives hors d'un nombre fini de points.

1. Commenter la preuve proposée par l'étudiant.
2. En utilisant le théorème de Darboux démontré dans l'exercice 69, compléter la preuve en une démonstration correcte.
3. Montrer que si $I$ un intervalle ouvert non vide et si $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f'$ ne s'annule pas, alors $f$ est strictement monotone sur $I$.

**Exercice 71** (Théorème de la limite de la dérivée). Cet exercice utilise des résultats sur les valeurs d'adhérence et les suites de Cauchy démontrés dans les exercices hors-programme du chapitre 7.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit $f$ une fonction continue sur $[a, b[$ et dérivable sur $]a, b[$. On souhaite établir le résultat suivant, connu sous le nom de *théorème de la limite de la dérivée* :

*Si $f'$ admet une limite réelle (finie) $\ell$ en $a$, alors $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = \ell$.*

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]a, b[$ convergeant vers $a$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait
   $$a < c_n < x_n \quad \text{et} \quad f'(c_n) = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$
   (b) Montrer que
   $$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$
2. Conclure.
3. Soit $g : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $g$ et $g'$ soient lipschitziennes. Montrer que $g$ admet un prolongement par continuité dérivable en 0.

   *Indication* : montrer que $g$ et $g'$ admettent une limite en 0 en utilisant les suites de Cauchy.