Fonctions réelles d'une variable réelle

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 11. La réponse est non : par exemple, les fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x$ sont croissantes, mais $(fg) : x \mapsto x^2$ n'est pas croissante.

En revanche, le produit de deux fonctions croissantes et *positives* est une fonction croissante. En effet, considérons deux fonctions f et g définies sur le même ensemble I, croissantes et positives. Alors pour tous $x, y \in I$ tels que $x \leqslant y$ on a $f(x) \leqslant f(y)$ ainsi que $g(x) \leqslant g(y)$, d'où, en multipliant ces inégalités entre termes positifs,

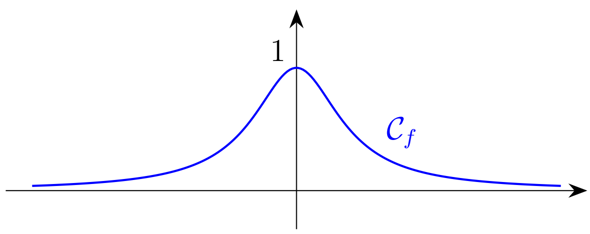
$$(fg)(x) = f(x)g(x) \leqslant f(y)g(y) = (fg)(y).$$

Ainsi, fg est croissante.

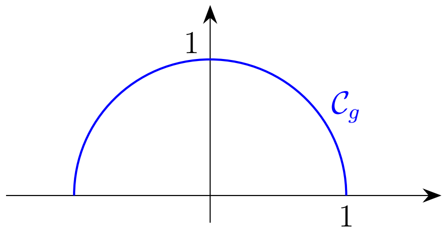
Correction de l'exercice 12. La réponse est oui si les fonctions ont la même monotonie, et non sinon. En effet, il n'est pas difficile de montrer que la somme de deux fonctions croissantes est croissante, et que la somme de deux fonctions décroissantes est décroissante. En revanche, la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante n'a aucune raison d'être monotone : par exemple, la fonction $f : x \mapsto x$ est croissante et la fonction $g : x \mapsto -x^3$ est décroissante, mais leur somme $(f+g) : x \mapsto x - x^3$ n'est pas monotone puisque $(f+g)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{8}$, $(f+g)(0) = 0$ et $(f+g)(2) = -6$.

Correction de l'exercice 13.

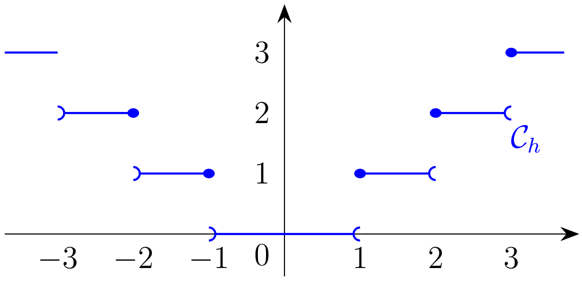
(i) La fonction f est positive et paire, prend la valeur 1 en 0 et décroît rapidement vers 0 à mesure que x s'éloigne de l'origine. Sa courbe possède donc l'allure ci-dessous :



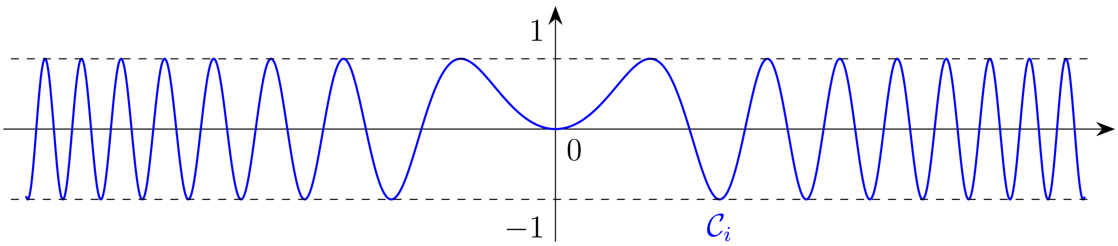
(ii) La fonction g est définie sur $[-1, 1]$, et pour tout $x \in [-1, 1]$ le point $(x, g(x))$ vérifie $x^2 + g^2(x) = 1$, donc il se situe sur le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 (en effet, l'équation de ce cercle est $x^2 + y^2 = 1$; voir aussi le chapitre sur les complexes). Comme $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [-1, 1]$, la courbe de g est le demi-cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1 situé au-dessus de l'axe des abscisses.



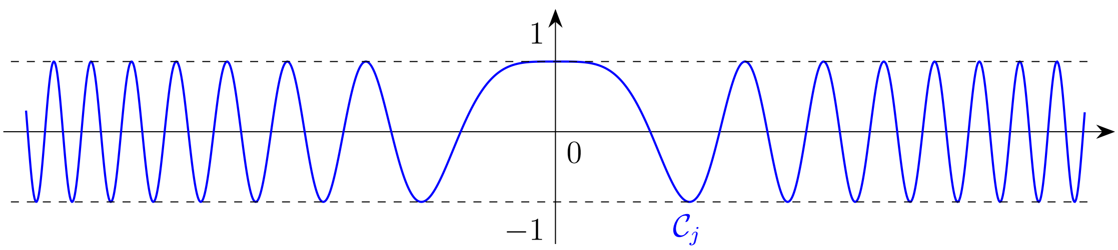
(iii) La fonction h coïncide avec la fonction partie entière sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle est paire du fait de la présence de la valeur absolue dans son expression, on obtient sa courbe par symétrie.



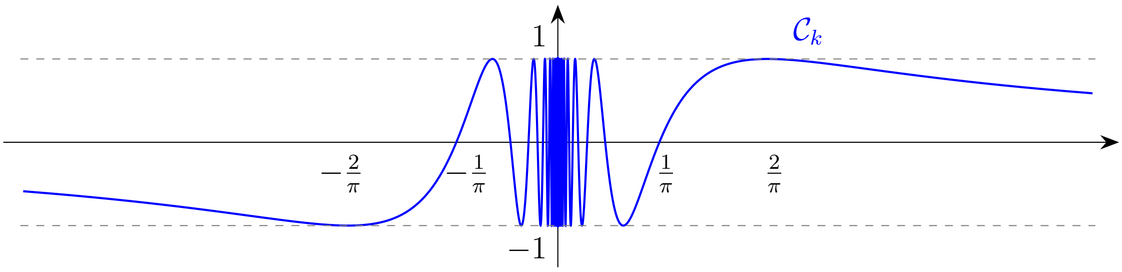
(iv) On s'attend à trouver une courbe sinusoïdale oscillant entre -1 et 1, mais la présence du terme x^2 dans le sinus rend la fonction paire et implique que la courbe obtenue ressemble à celle de la fonction sinus « lue lentement dans un premier temps, puis de plus en plus vite ». En plaçant quelques points, on obtient la courbe suivante, où les points d'annulation sont situés aux abscisses $\pm\sqrt{k\pi}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, les maxima aux abscisses $\pm\sqrt{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ et les minima aux abscisses $\pm\sqrt{2k\pi - \frac{\pi}{2}}$.



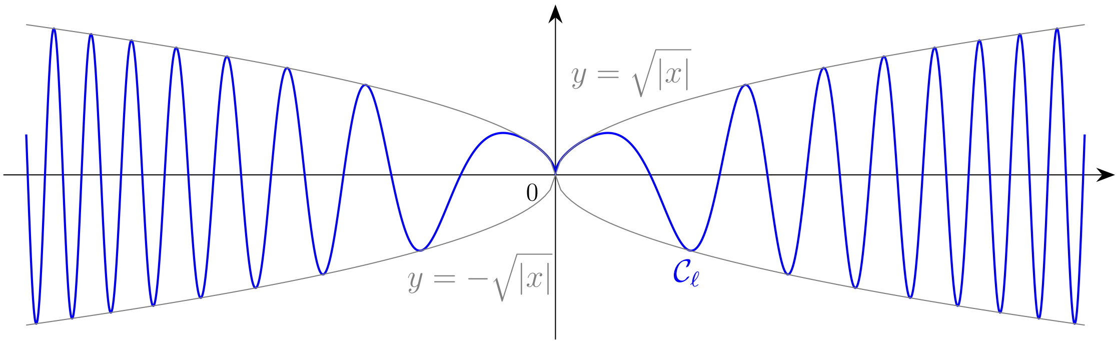
(v) La courbe rappelle celle de la fonction j, mais avec une valeur en 0 égale à 1, ainsi que des points d'annulation et des extrema légèrement décalés :



(*vi*) La courbe de k présente des oscillations entre -1 et 1. Comme k est impaire, cette courbe est symétrique par rapport à l'origine. Lorsque x s'éloigne de l'origine, la quantité $\frac{1}{x}$ tend vers 0 donc $k(x) = \sin(\frac{1}{x})$ tend vers 0. Lorsque x se rapproche de 0, la quantité $\frac{1}{x}$ s'échappe vers l'infini, et $\sin(\frac{1}{x})$ oscille entre -1 et 1 de plus en plus rapidement. La courbe de k ressemble donc à une version de celle de sin contractée au voisinage de 0, point en lequel k n'est pas définie.



(*vii*) La composante $\cos(x^2)$ induit des oscillations de plus en plus rapides de la courbe de ℓ (sur le modèle des fonctions i et j) entre les courbes « enveloppes » de $x \mapsto \sqrt{|x|}$ et $x \mapsto -\sqrt{|x|}$ (sur le modèle de l'exemple 9 du cours) :



Correction de l'exercice 14.

(*i*) Soit f une fonction paire définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\forall x \in A, \quad (-f)(-x) = -f(-x) = -f(x) = (-f)(x),$$

si bien que $-f$ est paire.

(*ii*) Soit f une fonction impaire définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\forall x \in A, \quad (-f)(-x) = -f(-x) = f(x) = -(-f)(x),$$

si bien que $-f$ est impaire.

(*iii*) Soient f et g deux fonctions paires définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\forall x \in A, \quad (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x),$$

si bien que $f+g$ est paire.

(*iv*) Soient f et g deux fonctions impaires définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\forall x \in A, \quad (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f+g)(x),$$

si bien que $f+g$ est impaire.

(*v*) Soient f et g deux fonctions paires définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\forall x \in A, \quad (fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x),$$

si bien que fg est paire.

(*vi*) Soient f et g deux fonctions impaires définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\forall x \in A, \quad (fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (fg)(x),$$

si bien que fg est paire.

(*vii*) Soient f une fonction paire et g une fonction impaire, toutes deux définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\forall x \in A, \quad (fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -(fg)(x),$$

si bien que fg est impaire.

(*viii*) Soient f et g deux fonctions paires telles que $f \circ g$ existe et soit définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\forall x \in A, \quad (f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x),$$

si bien que $f \circ g$ est paire.

(*ix*) Soient f et g deux fonctions impaires telles que $f \circ g$ existe et soit définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\forall x \in A, \quad (f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x)) = -(f \circ g)(x),$$

si bien que $f \circ g$ est impaire.

(*x*) Soient f une fonction paire et g une fonction impaire telles que $f \circ g$ existe et soit définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\forall x \in A, \quad (f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x),$$

si bien que $f \circ g$ est paire.

À présent, si f est impaire et g paire, on a

$$\forall x \in A, \quad (f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x),$$

si bien que $f \circ g$ est encore paire.

(*xi*) Soient f une fonction paire et φ une fonction quelconque telles que $\varphi \circ f$ existe et soit définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\forall x \in A, \quad (\varphi \circ f)(-x) = \varphi(f(-x)) = \varphi(f(x)) = (\varphi \circ f)(x),$$

si bien que $\varphi \circ f$ est paire.

Notons que l'on ne peut rien dire si la composition a lieu dans l'autre sens : on ne peut rien conclure sur la parité de $\varphi \circ f$ si φ est supposée paire mais si f est quelconque, puisqu'alors on ne dispose d'aucune information sur le lien entre $f(-x)$ et $f(x)$.

(*xii*) Soient f une fonction impaire et φ une fonction quelconque telles que $\varphi \circ f$ existe et soit définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. On a alors :

$$\forall x \in A, \quad (\varphi \circ f)(-x) = \varphi(f(-x)) = \varphi(-f(x)),$$

mais il est impossible d'aller plus loin faute de disposer d'une relation entre $\varphi(-f(x))$ et $\varphi(f(x))$.

On ne peut rien dire non plus si la composition a lieu dans l'autre sens.

(*xiii*) Soit f une bijection impaire entre deux parties A et B de $\mathbb{R}$, avec A symétrique par rapport à 0. Pour tout $y \in B$ il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$; mais alors $-y = -f(x) = f(-x)$ puisque f est impaire, donc $-y \in B$, ce qui montre que B est symétrique par rapport à 0. Par ailleurs, pour tout $y \in B$, on peut réécrire l'égalité $-y = f(f^{-1}(-y))$ sous la forme $-f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(-y))$ soit, comme f est impaire, $f(-f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(-y))$; en utilisant l'injectivité de f, on obtient alors $-f^{-1}(y) = f^{-1}(-y)$, ce qui montre que f^{-1} est impaire.

Correction de l'exercice 15.

1. Supposons que la fonction f est paire. Si $x, y \in \mathbb{R}_-$ vérifient $x \leqslant y$, alors on a $0 \leqslant -y \leqslant -x$, d'où $f(-y) \leqslant f(-x)$; comme f est paire, cette inégalité se réécrit $f(y) \leqslant f(x)$: ainsi, f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
2. Supposons f impaire. Si $x, y \in \mathbb{R}_-$ sont tels que $x \leqslant y$, on a à nouveau $0 \leqslant -y \leqslant -x$ donc $f(-y) \leqslant f(-x)$; comme f est impaire, cette inégalité se réécrit $-f(y) \leqslant -f(x)$, soit $f(y) \geqslant f(x)$. Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_-$.

   Pour montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$, on considère $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant y$ et on souhaite établir que $f(x) \leqslant f(y)$. D'après ce qui précède, c'est bien le cas si x et y sont négatifs ou s'ils sont positifs. Considérons à présent le cas où $x \leqslant 0 \leqslant y$: comme f est croissante sur $\mathbb{R}_-$, alors $f(x) \leqslant f(0)$, et comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, alors $f(0) \leqslant f(y)$. On en déduit que $f(x) \leqslant f(y)$, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 16. Si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$(f+g)(x+mn) = f(x+mn) + g(x+mn),$$

or f est m-périodique donc

$$f(x+mn) = f(x+n\times m) = f(x)$$

car $n \in \mathbb{Z}$, et g est n-périodique donc

$$g(x+mn) = g(x+m\times n) = g(x)$$

car $m \in \mathbb{Z}$: ainsi, on a

$$(f+g)(x+mn) = (f+g)(x),$$

donc $f+g$ est mn-périodique.

Correction de l'exercice 17. Par hypothèse, il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$, soit $nA = mB$; notons $\alpha > 0$ cette valeur commune. Or f est A-périodique et g est B-périodique, donc si $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}(f+g)(x+\alpha) &= f(x+\alpha) + g(x+\alpha)\\ &= f(x+nA) + g(x+mB) = f(x) + g(x) = (f+g)(x),\end{aligned}$$

ce qui montre que $f+g$ est α-périodique.

Correction de l'exercice 18. Le domaine de définition de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sin(\pi x) \neq 0$, soit $\pi x \not\equiv 0[\pi]$, soit encore $x \not\equiv 0[1]$: c'est donc l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a $-x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et on peut alors écrire

$$f(-x) = \frac{\pi\cos(-\pi x)}{\sin(-\pi x)} = \frac{\pi\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)} = -\frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = -f(x)$$

car cos est paire et sin est impaire : ainsi, f est impaire.

Enfin, si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ alors $x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, et on peut écrire

$$\begin{aligned}f(x+1) &= \frac{\pi\cos(\pi(x+1))}{\sin(\pi(x+1))}\\ &= \frac{\pi\cos(\pi x+\pi)}{\sin(\pi x+\pi)}\\ &= \frac{-\pi\cos(\pi x)}{-\sin(\pi x)}\\ &= \frac{\pi\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = f(x).\end{aligned}$$

La fonction f est donc 1-périodique.

Correction de l'exercice 19.

1. Soient $x, x' \in [0,1]$ tels que $x \leqslant x'$. Étudions le signe de la différence $f_y(x') - f_y(x)$. On a

$$\begin{aligned} f_y(x') - f_y(x) &= \frac{x'+y}{1+x'y} - \frac{x+y}{1+xy} \\ &= \frac{(x'+y)(1+xy)-(x+y)(1+x'y)}{(1+x'y)(1+xy)} \\ &= \frac{x'-x+xy^2-x'y^2}{(1+x'y)(1+xy)} \\ &= \frac{(x'-x)(1-y^2)}{(1+x'y)(1+xy)}. \end{aligned}$$

   Or $x'-x \geqslant 0$ et $1-y^2 \geqslant 0$, donc $f_y(x')-f_y(x) \geqslant 0$. La fonction f_y est donc bien croissante.

2. Soit $x \in [0,1]$. Comme f_y est croissante, on a $f_y(0) \leqslant f_y(x) \leqslant f_y(1)$, soit $y \leqslant f_y(x) \leqslant 1$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 20.

1. Soient $T_1, T_2 \in \mathcal{P}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$f(x+T_1+T_2) = f(x+T_1) = f(x),$$

   où la première égalité résulte du fait que T_1 est une période de f, et la deuxième du fait que T_2 en est une aussi. Ainsi, T_1+T_2 est une période de f, donc $T_1+T_2 \in \mathcal{P}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est donc bien stable par somme.

2. Comme f est périodique, $\mathcal{P}$ est non vide ; il existe donc $T \in \mathcal{P}$. Mais alors $2T = T+T \in \mathcal{P}$ d'après la question précédente, ce qui implique ensuite que $3T = 2T+T \in \mathcal{P}$, puis que $4T = 3T+T \in \mathcal{P}$, et ainsi de suite. Ainsi, $\mathcal{P}$ contient tous les réels kT pour $k \in \mathbb{N}$ (ce que l'on pourrait prouver rigoureusement par récurrence sur k) : cet ensemble est donc infini.

3. Il n'est pas systématique que f admette une plus petite période, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ admette un minimum.

   Par exemple, si f est constante, alors f est T-périodique pour tout $T > 0$, ce qui signifie que $\mathcal{P} = \mathbb{R}_+^*$, donc $\mathcal{P}$ n'admet pas de minimum.

   Un exemple moins trivial est fourni par la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, qui est T-périodique pour tout $T \in \mathbb{Q}_+^*$ (en effet, si $T \in \mathbb{Q}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a alors $x+T \in \mathbb{Q}$ si et seulement si $x \in \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x+T) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$) ; il n'est pas difficile de voir que dans ce cas, P est exactement l'ensemble $\mathbb{Q}_+^*$, qui n'admet pas non plus de minimum.

Correction de l'exercice 21.

(i) Il suffit de sommer les fonctions indicatrices des différents intervalles affectées de coefficients adaptés : une écriture de la fonction en question est par exemple $5\mathbb{1}_{]-\infty,1]} - 2\mathbb{1}_{[2,+\infty[}$.

(ii) Par définition de la partie entière, la fonction recherchée est $x \mapsto \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

(iii) La fonction recherchée est appelée *partie entière supérieure* ; on la note parfois sous la forme $x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{n \in \mathbb{Z} : n \geqslant x\}$, mais il est possible de l'exprimer à l'aide de la fonction partie entière classique en écrivant que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ (en effet, si $x \in \mathbb{R}$ alors $\lfloor -x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $-x$, soit l'opposé de l'entier recherché). Notons que $\lceil x \rceil$ n'est pas simplement égal à $\lfloor x \rfloor + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puisque $\lceil n \rceil = \lfloor n \rfloor = n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Si $k \in \mathbb{Z}$ et si $x \in [2k, 2k+2[$, alors $k = \lfloor \frac{x}{2} \rfloor$, donc $3k = 3\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$. Ainsi, la fonction recherchée est $x \mapsto 3\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$.

(v) Il faut faire un dessin ! On voit alors que la fonction recherchée est *affine par morceaux*, c'est-à-dire définie par des expressions affines différentes sur différents intervalles : elle transforme x en $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ si $x \in]-\infty, 1]$, et en $-x+2$ si $x \in]1, +\infty[$ (on rappelle que le coefficient directeur d'une droite passant par des points (x_1, y_1) et (x_2, y_2), avec $x_1 \neq x_2$, est donné par le quotient $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$). Il s'agit donc de la fonction

$$x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad x \leqslant 1 \\ -x + 2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases} = \mathbb{1}_{]-\infty,1]}(x)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right) + \mathbb{1}_{]1,+\infty[}(x)(-x+2).$$

Correction de l'exercice 22. La courbe $\mathcal{C}_1$ rappelle celle de la fonction partie entière ; son caractère décroissant et le fait qu'elle ne croise pas l'axe des abscisses pousse à considérer que la courbe représente la fonction $f : x \mapsto -\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$.

La fonction représentée par la courbe $\mathcal{C}_2$ prend la valeur -1 sur $\mathbb{R}_-^*$. Sur $\mathbb{R}_+$, la courbe a l'aspect de celle de la racine carrée ; pour qu'elle passe par le point $(2, 1)$, on considère la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{x}{2}}$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_2$ a l'allure de celle de la fonction

$$g : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ \sqrt{\frac{x}{2}} & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases}$$

La courbe $\mathcal{C}_3$ rappelle la courbe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Son orientation et sa position par rapport aux axes pousse à considérer qu'elle représente la fonction

$$h : x \longmapsto -\frac{1}{(x-1)^2} + 1 = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Correction de l'exercice 23.

1. Le domaine de définition de f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels que $x^2+2x+1 \neq 0$, c'est-à-dire tels que $(x+1)^2 \neq 0$: il s'agit donc de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. Dire que la droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de la courbe représentative de f signifie que l'axe des ordonnées est axe de symétrie de la courbe de f décalée d'une unité vers la droite, c'est-à-dire de $g : x \mapsto f(x-1)$: en d'autres termes, cela signifie que la fonction g est paire. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$g(x) = f(x-1) = \frac{\cos(\pi(x-1))}{(x-1+1)^2} = \frac{\cos(\pi x - \pi)}{x^2} = -\frac{\cos(\pi x)}{x^2},$$
ce qui définit bien une fonction paire. Ainsi, la droite d'équation $x = -1$ est bien un axe de symétrie de la courbe de f.

Correction de l'exercice 24. Soit f une fonction périodique définie sur une partie A de $\mathbb{R}$; on note $T > 0$ une période de f. Supposons f non constante : il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) < f(b)$. Comme f est T-périodique, on a $f(a+k_1T) = f(a)$ et $f(b+k_2T) = f(b)$ pour tous $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Or il est possible de trouver $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $a + k_1T < b + k_2T$: le fait que $f(a+k_1T) = f(a) < f(b) = f(b+k_2T)$ montre alors que f n'est pas décroissante. Il est aussi possible de trouver $k_1', k_2' \in \mathbb{Z}$ tels que $a + k_1'T > b + k_2'T$: le fait que $f(a+k_1T) = f(a) < f(b) = f(b+k_2T)$ montre alors que f n'est pas croissante. Ainsi, la fonction f n'est pas monotone.

On a donc montré qu'une fonction périodique non constante ne peut être monotone : par conséquent, une fonction périodique monotone est nécessairement constante.

Correction de l'exercice 25.

1. Comme cos est 2π-périodique, on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos\left(\sqrt{2}(x+\sqrt{2}\pi)\right) = \cos\left(\sqrt{2}x + 2\pi\right) = \cos\left(\sqrt{2}x\right),$$
donc la fonction $x \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$ est $\sqrt{2}\pi$-périodique.
2. (a) On a $f(0) = \cos(0)+\cos(0) = 2$ et, comme la fonction f est T-périodique, $f(T) = f(0) = 2$.

   Or $f(T) = \cos(T)+\cos(\sqrt{2}T)$ et on sait que $\cos(T) \leqslant 1$ et $\cos(\sqrt{2}T) \leqslant 1$; ainsi, la relation $f(T) = 2$ implique que $\cos(T) = \cos(\sqrt{2}T) = 1$.

   (b) Comme $\cos(T) = \cos(\sqrt{2}T) = 1$, les propriétés de la fonction cos (ou un simple regard sur le cercle trigonométrique) assurent que $T \in 2\pi\mathbb{Z}$ et $\sqrt{2}T \in 2\pi\mathbb{Z}$.

   Il existe donc $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $T = 2m\pi$ et $\sqrt{2}T = 2n\pi$, et on a nécessairement $m \neq 0$ puisque $T > 0$. On peut donc écrire
$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}T}{T} = \frac{2n\pi}{2m\pi} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}.$$

3. On sait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, donc l'hypothèse de périodicité de f engendre une absurdité : ainsi, f n'est pas périodique.

   La fonction f s'écrit donc comme la somme de la fonction 2π-périodique cos et de la fonction $\sqrt{2}\pi$-périodique $x \mapsto \cos(\sqrt{2}x)$, mais elle n'est pas elle-même périodique : on a bien construit le contre-exemple recherché.

Correction de l'exercice 26. La réponse est encore une fois négative.

Pour démontrer ce fait, considérons à nouveau la fonction f de l'exercice précédent. Les fonctions [1] $g : x \mapsto e^{\cos(x)}$ et $h : x \mapsto e^{\cos(\sqrt{2}x)}$ sont respectivement 2π-périodiques et $\sqrt{2}\pi$-périodiques, mais leur produit

$$gh : x \mapsto e^{\cos(x)}e^{\cos(\sqrt{2}x)} = e^{\cos(x)+\cos(\sqrt{2}x)} = e^{f(x)}$$

n'est pas périodique, sans quoi $f = \ln \circ (gh)$ le serait.

Alternativement, on aurait pu écrire directement que la fonction [2]

$$f : x \longmapsto \cos(x) + \cos(\sqrt{2}x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}x\right)\cos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}x\right),$$

qui n'est pas périodique d'après l'exercice 25, est pourtant le produit des fonctions périodiques $x \mapsto \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}x\right)$ et $x \mapsto \cos\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}x\right)$, qui ont pour périodes respectives $\frac{4\pi}{1+\sqrt{2}}$ et $\frac{4\pi}{\sqrt{2}-1}$.

---

1. Notons qu'il est fréquent d'utiliser l'exponentielle et le logarithme pour transposer au cas de produits des résultats démontrés dans le cas de sommes et réciproquement.

2. On a utilisé la formule $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$ démontrée dans les exercices accompagnant le chapitre de trigonométrie.