Nombres complexes

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 32. Nous avons démontré la formule de Moivre grâce aux formules d'addition des cosinus et des sinus, qui donnent directement accès aux formules de duplication attendues. L'énoncé précise néanmoins qu'il nous faut utiliser la formule de Moivre pour répondre à la question posée ; on s'exécute donc sans se poser davantage de questions.
D'après la formule de Moivre, pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a

$$\cos(2a)+i\sin(2a) = e^{2ia} = (e^{ia})^2 = (\cos(a)+i\sin(a))^2 = \cos^2(a)+2i\cos(a)\sin(a)-\sin^2(a).$$

On a donc bien

$$\cos(2a) = \mathrm{Re}\left(e^{2ia}\right) = \cos^2(a) - \sin^2(a) \quad \text{et} \quad \sin(2a) = \mathrm{Im}\left(e^{2ia}\right) = 2\sin(a)\cos(a).$$

Correction de l'exercice 33. Le calcul est un cas particulier de celui effectué dans l'exemple 39 du cours, mais il se simplifie ici et permet de ne pas avoir à factoriser par la demi-somme des arguments :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k \quad \text{par la formule de Moivre} \\
&= \frac{1-\left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} \quad \text{car } e^{i\frac{2\pi}{n}} \neq 1 \text{ puisque } n \geqslant 2 \\
&= \frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{i\frac{2\pi}{n}}} \quad \text{par la formule de Moivre} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = 0.$$

Correction de l'exercice 34.

1. Il s'agit de la première formule d'Euler, qui se démontre en écrivant que si $x \in]0,\pi]$ et $k \in \mathbb{N}^*$ alors

$$\begin{aligned}
e^{ikx} + e^{-ikx} &= \cos(kx) + i\sin(kx) + \cos(-kx) + i\sin(-kx) \\
&= \cos(kx) + i\sin(kx) + \cos(kx) - i\sin(kx) = 2\cos(kx)
\end{aligned}$$

puisque cos est paire et sin est impaire.

2. Si $x \in]0, \pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned}
1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(kx) &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right) \quad \text{par la question précédente} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} \quad \text{car } 1 = e^{i0x} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} (e^{ix})^k \quad \text{par la formule de Moivre} \\
&= \frac{(e^{ix})^{-n} - (e^{ix})^{n+1}}{1 - e^{ix}} \quad \text{car } e^{ix} \neq 1 \text{ puisque } x \in]0, \pi] \\
&= \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \quad \text{d'après la formule de Moivre} \\
&= \frac{e^{i\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}} \cdot \frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x} - e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \quad \text{(on factorise par la demi-somme des arguments)} \\
&= \frac{-2i\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \quad \text{par la deuxième formule d'Euler} \\
&= \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)},
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait obtenir.

Correction de l'exercice 35.

1. Si j est multiple de k, on peut écrire $j = pk$ avec $p \in \mathbb{N}$, et on a alors

$$\omega^j = (\omega^k)^p = \left(e^{\frac{2i\pi}{k}\cdot k}\right)^p = \left(e^{2i\pi}\right)^p = 1^p = 1,$$

où la deuxième égalité est assurée par la formule de Moivre.

2. Si $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, on obtient grâce à la formule de Moivre et en factorisant par la demi-somme des arguments que

$$|1+\omega^\ell| = \left|1 + e^{\frac{2i\pi\ell}{k}}\right| = \left|e^{\frac{i\pi\ell}{k}} \cdot \left(e^{-\frac{i\pi\ell}{k}} + e^{\frac{i\pi\ell}{k}}\right)\right| = \left|e^{\frac{i\pi\ell}{k}}\right| \cdot \left|e^{-\frac{i\pi\ell}{k}} + e^{\frac{i\pi\ell}{k}}\right| = \left|e^{-\frac{i\pi\ell}{k}} + e^{\frac{i\pi\ell}{k}}\right|,$$

soit $|1+\omega^\ell| = 2\left|\cos\left(\dfrac{\pi\ell}{k}\right)\right|$ d'après la première formule d'Euler.

3. D'après la formule de Moivre, on a $\omega^{\ell j} = (\omega^j)^\ell$ pour tout $\ell \in [\![0, k-1]\!]$, donc la somme à calculer est une somme géométrique de raison ω^j. Si j est multiple de k, on a $\omega^j = 1$ d'après la question 1, donc la somme à calculer vaut k. Sinon, on a $\omega^j \neq 1$ (puisqu'alors $\omega^j = e^{\frac{2i\pi j}{k}}$ et $\frac{2i\pi j}{k} \not\equiv 0\,[2\pi]$), d'où

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(\omega^j\right)^\ell = \frac{1-(\omega^j)^k}{1-\omega^j} = \frac{1-\omega^{jk}}{1-\omega^j} = 0$$

puisque $\omega^{jk} = 1$ d'après la question 1 (car jk est un multiple de k).

4. D'après la question précédente, on peut écrire
$$\sum_{\substack{j=0\\ j \text{ est multiple de } k}}^{n} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{k-1} \omega^{\ell j}$$
puisque $\displaystyle\frac{1}{k}\sum_{\ell=0}^{k-1}\omega^{\ell j}$ vaut 1 si j est multiple de k et 0 sinon.
Ainsi on trouve, grâce à une interversion de sommes et à la formule du binôme :
$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j=0\\ j \text{ est multiple de } k}}^{n} \binom{n}{j} &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\omega^{\ell})^j = \sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{1}{k} \left(\omega^{\ell}+1\right)^n \\ &= \frac{1}{k}\left(\omega^0+1\right)^n + \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k-1}\left(\omega^{\ell}+1\right)^n = \frac{2^n}{k} + \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k-1}\left(1+\omega^{\ell}\right)^n,\end{aligned}$$
ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 36. Les points O, M et M' sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont de même direction (et ce, qu'ils soient de même sens ou de sens opposé). En notant $z = |z|e^{i\theta}$ et $z' = |z'|e^{i\theta'}$, cette condition équivaut au fait que les arguments θ et θ' sont égaux modulo π, c'est-à-dire que $\theta-\theta' \equiv 0\,[\pi]$. Comme $\arg(z\overline{z'}) \equiv \theta - \theta'\,[2\pi]$, on peut donc dire que les points O, M et M' sont alignés si et seulement si $\arg(z\overline{z'}) \equiv 0\,[\pi]$, c'est-à-dire si $z\overline{z'} \in \mathbb{R}$. En écrivant $\arg(\frac{z}{z'}) \equiv \theta-\theta'\,[2\pi]$, on remarque par ailleurs que cette condition est équivalente à $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 37.

1. Les points M, M' et M'' sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{M'M''}$ sont de même direction. Comme l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est $z'-z$ et celle de $\overrightarrow{M'M''}$ est $z''-z'$, on en déduit que M, M' et M'' sont alignés si et seulement si les nombres $z'-z$ et $z''-z'$ ont des arguments égaux modulo π. Or on a $\arg\left((z''-z')\overline{(z'-z)}\right) \equiv \arg(z''-z) - \arg(z'-z)\,[2\pi]$, donc les trois points sont alignés si et seulement si $\arg\left((z''-z')\overline{(z'-z)}\right) \equiv 0\,[\pi]$, c'est-à-dire si $(z''-z')\overline{(z'-z)} \in \mathbb{R}$.
2. On applique le critère obtenu dans la question précédente : les points considérés ayant pour affixes les nombres $1+i$, $4+2i$ et $-5-i$, il suffit de calculer
$$(-5-i-(4+2i)) \cdot \overline{(4+2i-(1+i))} = (-9-3i)(3-i) = -30 \in \mathbb{R}$$
pour conclure que les trois points considérés sont alignés.

Correction de l'exercice 38.

1. On sait que $\arg\left(\frac{z''-z}{z'-z}\right) \equiv \arg(z''-z) - \arg(z'-z)\,[2\pi]$. Or en termes d'angles orientés, on

$$\arg(z''-z) - \arg(z'-z) \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM''}) - (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MM'})\,[2\pi],$$

   où A est le point du plan d'affixe 1 (c'est-à-dire le point de coordonnées $(1,0)$). En utilisant la relation de Chasles pour les angles orientés (n'hésitez pas à faire un dessin !), on obtient donc

$$\arg(z''-z) - \arg(z'-z) \equiv (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''})\,[2\pi], \quad \text{soit} \quad \arg\left(\frac{z''-z}{z'-z}\right) \equiv \theta\,[2\pi].$$

2. Les points M, M' et M'' sont alignés si et seulement si $\theta \equiv 0\,[\pi]$, c'est-à-dire, d'après la question précédente, si et seulement si $\arg\left(\frac{z''-z}{z'-z}\right) \equiv 0\,[\pi]$, soit $\frac{z''-z}{z'-z} \in \mathbb{R}$.
3. Les droites (MM') et (MM'') sont perpendiculaires si et seulement si $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, ce qui équivaut d'après la question précédente à $\arg\left(\frac{z''-z}{z'-z}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, c'est-à-dire au fait que $\frac{z''-z}{z'-z}$ est imaginaire pur.
4. Supposons que $\frac{z''-z}{z'-z}$ soit imaginaire pur. D'après la question précédente, on a alors $(MM') \perp (MM'')$. Le triangle $MM'M''$ est donc rectangle en M, et le théorème de Pythagore donne l'égalité $(MM')^2 + (MM'')^2 = (M'M'')^2$, soit $|z'-z|^2 + |z''-z|^2 = |z''-z'|^2$, ce qu'il fallait démontrer.

   Notons que l'on pouvait aussi démontrer ce fait directement, en écrivant $\frac{z''-z}{z'-z} = \lambda i$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, puis en calculant

$$|z''-z|^2 + |z'-z|^2 = |(\lambda i)(z'-z)|^2 + |z'-z|^2 = (|\lambda i|^2+1)|z'-z|^2 = (\lambda^2+1)|z'-z|^2$$

   ainsi que

$$\begin{aligned} |z''-z'|^2 &= |(z''-z)-(z'-z)|^2 = |\lambda i(z'-z)-(z'-z)|^2 \\ &= |(\lambda i-1)(z'-z)|^2 = |\lambda i-1|^2 \cdot |z'-z|^2 = (\lambda^2+1)|z'-z|^2, \end{aligned}$$

   d'où l'égalité attendue.

Correction de l'exercice 39.

1. En reprenant le raisonnement de la question 1 de l'exercice 38, on trouve que l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est égal à $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right)$. On en déduit immédiatement que $(AB) \perp (CD)$ si et seulement si $\arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, c'est-à-dire si $\frac{d-c}{b-a}$ est imaginaire pur.

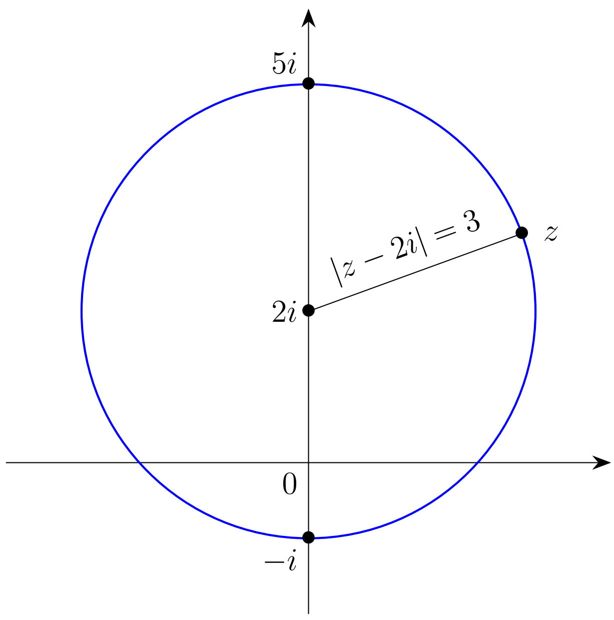
2. En utilisant le résultat de la question précédente et l'indication, on trouve

$$
\begin{aligned}
(AB)\perp(CD) \quad &\Longleftrightarrow \quad \overline{\left(\frac{d-c}{b-a}\right)} = -\frac{d-c}{b-a} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\overline{d-c}}{\overline{b-a}} = -\frac{d-c}{b-a}\\
&\Longleftrightarrow \quad \overline{d-c}\cdot(b-a) = -\overline{b-a}\cdot(d-c)\\
&\Longleftrightarrow \quad \overline{d}b-\overline{c}b-\overline{d}a+\overline{c}a = -\overline{b}d+\overline{a}d+\overline{b}c-\overline{a}c\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{b}{d}-\frac{b}{c}-\frac{a}{d}+\frac{a}{c} = -\frac{d}{b}+\frac{d}{a}+\frac{c}{b}-\frac{c}{a} \quad \text{car } a,b,c \text{ et } d \text{ sont de module 1}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{b(c-d)+a(d-c)}{dc} = \frac{d(b-a)+c(a-b)}{ab}\\
&\Longleftrightarrow \quad \frac{(b-a)(d-c)}{dc} = \frac{(b-a)(d-c)}{ab}\\
&\Longleftrightarrow \quad ab(b-a)(c-d) = dc(b-a)(d-c)\\
&\Longleftrightarrow \quad ab=-dc \quad \text{car} \quad b-a\neq 0 \text{ et } d-c\neq 0\\
&\Longleftrightarrow \quad ab+dc=0,
\end{aligned}
$$

d'où l'équivalence recherchée.

Correction de l'exercice 40.

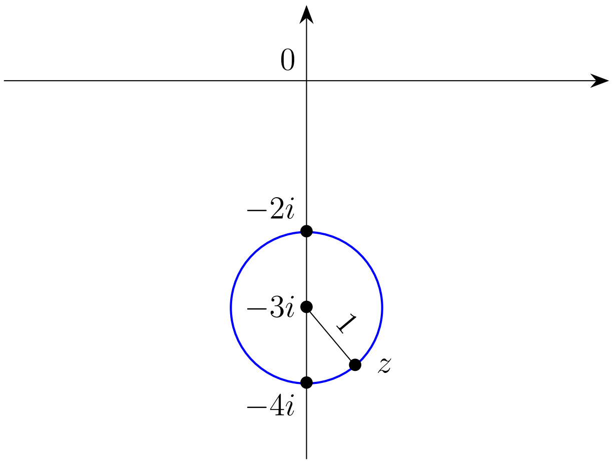
(i) Si M est un point du plan d'affixe $z\in\mathbb{C}$, dire que $|z-2i|=3$ signifie que la distance entre M et le point d'affixe $2i$ (c'est-à-dire le point de coordonnées $(0,2)$) vaut 3. Ainsi, l'ensemble des points du plan dont l'affixe vérifie $|z-2i|=3$ est le cercle de centre $(0,2)$ et de rayon 3.



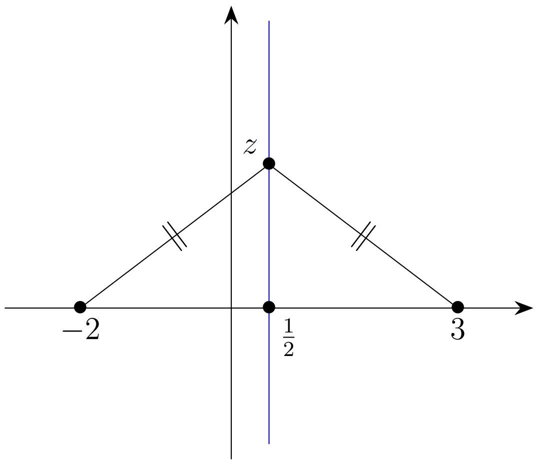
(ii) En écrivant

$$|iz-3| = \left|i(z-\frac{3}{i})\right| = |i|\cdot\left|z-\frac{3}{i}\right| = 1\cdot|z+3i| = |z-(-3i)|,$$

on remarque que l'ensemble des points satisfaisant la condition $|iz-3|=1$ est le cercle de centre $(0,-3)$ et de rayon 1.



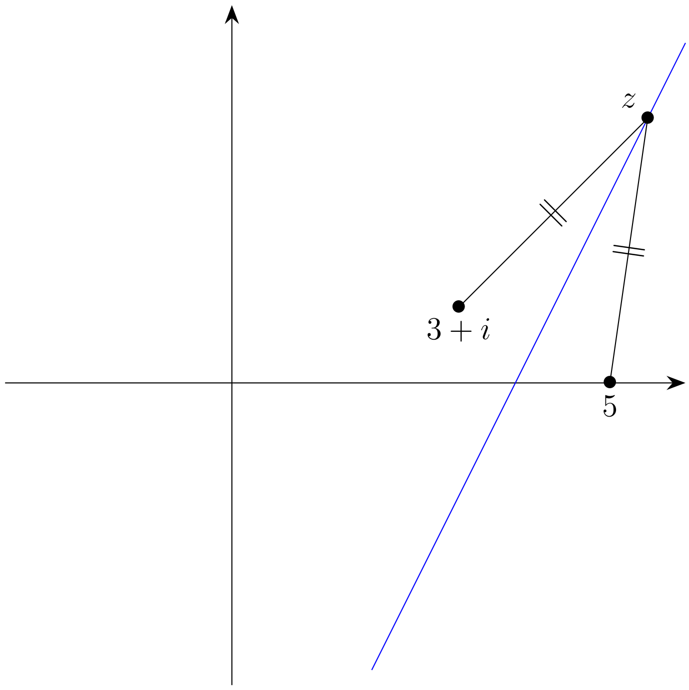
(iii) On peut réécrire l'équation proposée sous la forme $|z-3| = |z+2|$, soit $|z-3| = |z-(-2)|$: elle signifie que le point M d'affixe z est à égale distance du point d'affixe 3 et du point d'affixe -2. Ainsi, l'ensemble des points recherchés est la médiatrice du segment passant par les points d'affixe 3 et -2, c'est-à-dire la droite d'équation $x=\frac{1}{2}$.



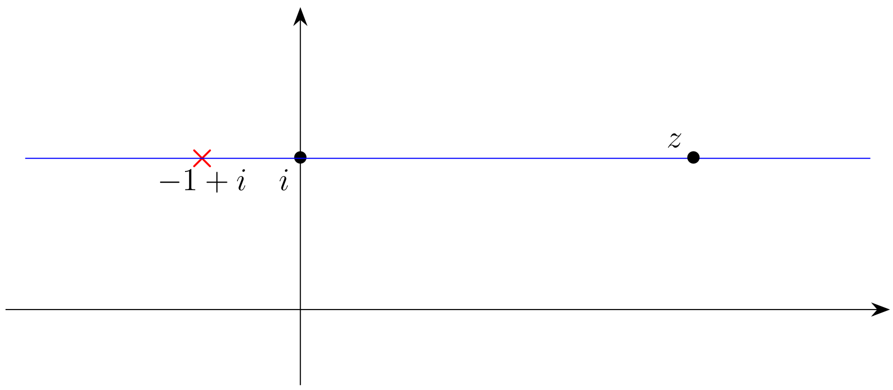
(iv) En écrivant $|\overline{z}-3+i| = \left|\overline{\overline{z}-3+i}\right| = |z-3-i| = |z-(3+i)|$, on voit que l'ensemble des points recherchés est la médiatrice du segment passant par les points d'affixe $3+i$ et 5. Pour déterminer l'équation de cette droite dans le plan, on peut mettre z sous sa forme algébrique $z=x+iy$ avec $x,y\in\mathbb{R}$, puis écrire

$$\begin{aligned}
|\overline{z}-3+i| = |z-5| \quad &\iff \quad |x-3+i(1-y)| = |x-5+iy| \\
&\iff \quad |x-3+i(1-y)|^2 = |x-5+iy|^2 \\
&\iff \quad (x-3)^2+(1-y)^2 = (x-5)^2+y^2 \\
&\iff \quad x^2-6x+9+1-2b+y^2 = x^2-10x+25+y^2 \\
&\iff \quad 4x-2y = 15 \quad \iff \quad y = 2x-\frac{15}{2}.
\end{aligned}$$

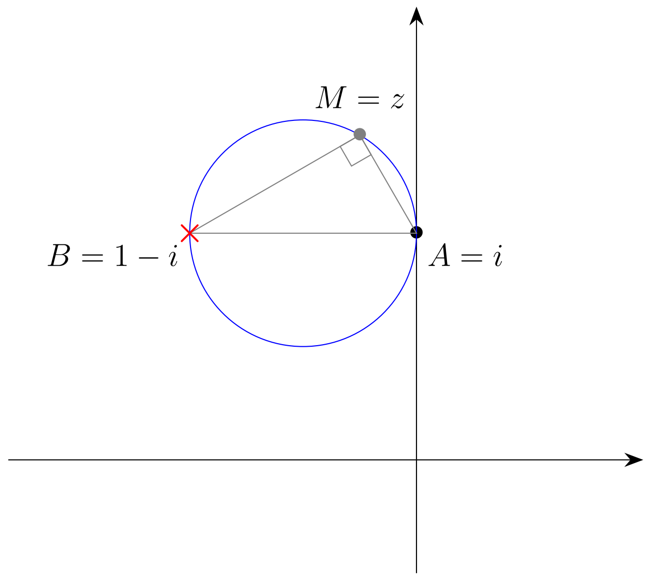
L'équation de la droite étudiée est donc $y = 2x - \frac{15}{2}$.



(v) D'après l'exercice 38, dire que $\frac{z-i}{z+1-i} \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\frac{i-z}{-1+i-z} \in \mathbb{R}$, signifie que les points d'affixe z, i et $-1+i$ sont alignés. Ainsi, l'ensemble des points vérifiant $\frac{z-i}{z+1-i} \in \mathbb{R}$ est la droite passant par les points d'affixe i et $-1+i$, c'est-à-dire les points $(0,1)$ et $(-1,1)$, à laquelle on a enlevé le point $(-1,1)$ (sans quoi le dénominateur $z+1-i$ serait nul) : il s'agit donc de la droite du plan d'équation $y = 1$, privée de $(-1,1)$.



(*vi*) D'après l'exercice 38, dire que $\frac{z-i}{z+1-i}$ est imaginaire pur, c'est-à-dire que $\frac{i-z}{-1+i-z}$ l'est, signifie que si l'on note A le point d'affixe i (donc $A = (0,1)$), B le point d'affixe $-1+i$ (donc $B = (-1,1)$), et M le point d'affixe z, alors on a $M \neq B$ et, si $M \neq A$, alors $(AM) \perp (BM)$. L'ensemble des points M vérifiant la condition proposée est donc l'ensemble formé par A et par les points M différents de B tels que le triangle AMB soit rectangle en M : c'est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de B.



Correction de l'exercice 41. On laisse au lecteur le soin de réaliser les schémas correspondant à cet exercice.

1. Il suffit de remarquer que si $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ est d'affixe $z = x + iy$ et si $\overrightarrow{u} = (x_0, y_0)$, alors $T_{\overrightarrow{u}}(M) = M + \overrightarrow{u} = (x + x_0, y + y_0)$ par définition de la somme d'un point du plan et d'un vecteur, donc $T_{\overrightarrow{u}}(M)$ est d'affixe $x + x_0 + i(y + y_0) = z + z_0$, soit $t_{z_0}(z)$.
2. L'effet d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ pouvant être compensé par une translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$, il semblerait raisonnable que $T_{\overrightarrow{u}}$ admette pour réciproque $T_{-\overrightarrow{u}}$. Or pour tout $M \in \mathbb{R}^2$, on a

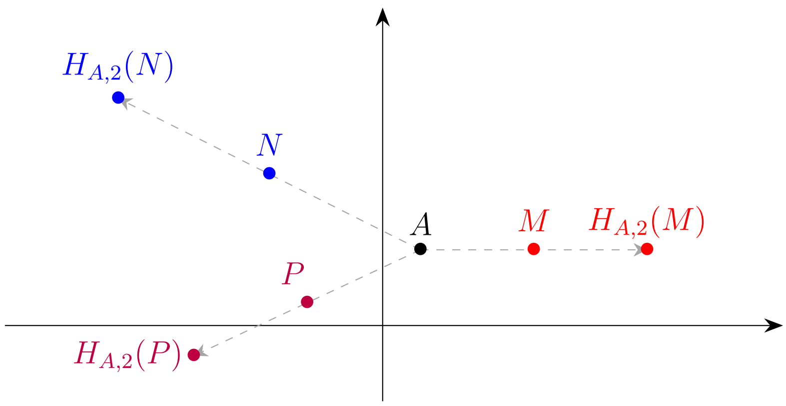
$$\left(T_{\overrightarrow{u}} \circ T_{-\overrightarrow{u}}\right)(M) = \left(T_{-\overrightarrow{u}}(M)\right) + \overrightarrow{u} = M - \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} = M$$

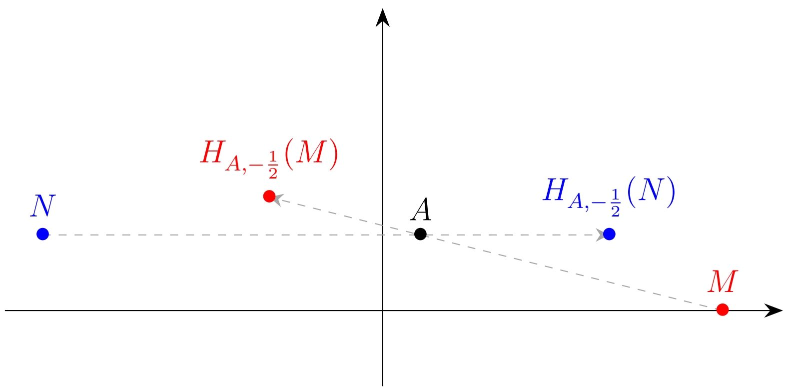
et

$$\left(T_{-\overrightarrow{u}} \circ T_{\overrightarrow{u}}\right)(M) = \left(T_{\overrightarrow{u}}(M)\right) - \overrightarrow{u} = M + \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u} = M,$$

donc $T_{\overrightarrow{u}}$ est bien bijective et de réciproque $T_{-\overrightarrow{u}}$.

Correction de l'exercice 42. Avant de répondre à la question posée, il importe de bien comprendre la transformation géométrique réalisée par une homothétie. On a représenté ci-dessous l'effet de l'homothétie de centre A et de rapport $\lambda = 2$ sur quelques points du plan (figure supérieure), ainsi que celui de l'homothétie de centre A de rapport $\lambda = -\frac{1}{2}$ (figure inférieure).





1. Si $M \in \mathbb{R}^2$ est d'affixe $z \in \mathbb{C}$, alors le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est d'affixe $z - z_0$, donc l'affixe du point du plan $H_{A,\lambda}(M) = A + \lambda\overrightarrow{AM}$ est bien $z_0 + \lambda(z - z_0)$, c'est-à-dire $h_{z_0,\lambda}(z)$.
2. On va directement raisonner sur l'application $h_{z_0,\lambda}$, montrer qu'elle est bijective et exhiber sa bijection réciproque. Considérons $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors on a

$$z' = h_{z_0,\lambda}(z) \iff z' = z_0 + \lambda(z - z_0) \iff z' - z_0 = \lambda(z - z_0).$$

Comme $\lambda \neq 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} z' = h_{z_0,\lambda}(z) &\iff z' - z_0 = \lambda(z - z_0) \iff z - z_0 = \frac{1}{\lambda}(z' - z_0) \\ &\iff z = z_0 + \frac{1}{\lambda}(z' - z_0). \end{aligned}$$

On a donc l'équivalence

$$z' = h_{z_0,\lambda}(z) \iff z = h_{z_0,\frac{1}{\lambda}}(z'),$$

ce qui montre que $h_{z_0,\lambda}$ est bijective et que sa bijection réciproque est $h_{z_0,\frac{1}{\lambda}}$.

En repassant à l'écriture non complexe des homothéties [1], on peut donc énoncer le résultat suivant : $H_{A,\lambda}$ est bijective et sa réciproque est l'homothétie $H_{A,\frac{1}{\lambda}}$ de centre A et de rapport $\frac{1}{\lambda}$. Notons que ce résultat n'a rien d'étonnant compte tenu de l'action géométrique de l'homothétie $H_{A,\lambda}$: tout point de $\mathbb{R}^2$ admet un unique antécédent, aligné avec ce point et le point A.

3. Soient $z_0, z_0' \in \mathbb{C}$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^*$. Étudions la composée $h := h_{z_0',\lambda'} \circ h_{z_0,\lambda}$: pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a

$$\begin{aligned} h(z) &= h_{z_0',\lambda'}(z_0 + \lambda(z - z_0)) \\ &= z_0' + \lambda'\Big(z_0 + \lambda(z - z_0) - z_0'\Big) = z_0' + \lambda' z_0 - \lambda' z_0' - \lambda'\lambda z_0 + \lambda'\lambda z. \end{aligned}$$

On remarque tout d'abord que si $\lambda'\lambda = 1$, alors

$$h : z \longmapsto z_0' + \lambda' z_0 - \lambda' z_0' - \lambda'\lambda z_0 + z$$

est l'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$, où $\overrightarrow{u}$ a pour affixe le nombre $z_0' + \lambda' z_0 - \lambda' z_0' - \lambda'\lambda z_0$.

Supposons à présent que $\lambda'\lambda \neq 1$. On cherche à montrer que h est une homothétie, et donc à écrire l'expression $z_0' + \lambda' z_0 - \lambda' z_0' - \lambda'\lambda z_0 + \lambda'\lambda z$ sous la forme $z_0'' + \lambda''(z - z_0'')$ pour un certain $z_0'' \in \mathbb{C}$ et un certain $\lambda'' \in \mathbb{R}$. Comme la relation doit être valable pour tout z (notamment $z = 0$ et $z = 1$), on doit nécessairement avoir $\lambda'' = \lambda'\lambda$ ainsi que $z_0' + \lambda' z_0 - \lambda' z_0' - \lambda'\lambda z_0 = z_0'' - \lambda'' z_0''$. Comme $\lambda'\lambda \neq 1$, on peut poser

$$\lambda'' = \lambda'\lambda \quad \text{et} \quad z_0'' = \frac{z_0' + \lambda' z_0 - \lambda' z_0' - \lambda'\lambda z_0}{1 - \lambda\lambda'}.$$

On vérifie que l'on a alors bien $h(z) = z_0'' + \lambda''(z - z_0'')$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que h est l'écriture complexe de l'homothétie ayant pour centre l'image de z_0'' et pour rapport λ''.

En repassant aux applications géométriques, on obtient le résultat suivant : la composée de deux homothéties est une translation si le produit de leurs rapports vaut 1, et une homothétie sinon. Dans ce deuxième cas, le rapport de l'homothétie obtenue est le produit des rapports des homothéties considérées.

Correction de l'exercice 43. On laisse le soin au lecteur de réaliser les schémas associés à cet exercice.

1. Avec les notations de l'indication, on a pour tout point $M = (x, y)$ d'affixe $z = x + iy$:

$$\begin{aligned} r_{z_0,\theta}(z) &= z_0 + e^{i\theta}(z - z_0) = x_0 + iy_0 + (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(x - x_0 + i(y - y_0) \\ &= x_0 + \cos(\theta)(x - x_0) - \sin(\theta)(y - y_0) + i\left(y_0 + \cos(\theta)(y - y_0) + \sin(\theta)(x - x_0)\right), \end{aligned}$$

1. Dans cette question et la suivante, on utilise l'idée selon laquelle la composition des applications complexes correspond à celle des applications géométriques associées (c'est-à-dire que si f et g sont les écritures complexes de F et G, alors $f \circ g$ est celle de $F \circ G$ et f^{-1} celle de F^{-1}). La démonstration de ce fait est laissée au lecteur.

d'où, en repassant à l'écriture de $R_{A,\theta}(M)$ dans le plan :

$$R_{A,\theta}(M) = (x_0 + \cos(\theta)(x - x_0) - \sin(\theta)(y - y_0), y_0 + \cos(\theta)(y - y_0) + \sin(\theta)(x - x_0)) .$$

2. La démarche à suivre est la même que dans la dernière question de l'exercice 42 ; on remarquera d'ailleurs une forte similitude entre les deux cadres considérés, puisqu'il suffit de remplacer λ par $e^{i\theta}$ dans la définition d'une homothétie pour obtenir celle d'une rotation.

   On considère deux nombres $z_0, z_0' \in \mathbb{C}$ ainsi que deux angles $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, et on cherche à étudier l'application $r := r_{z_0',\theta'} \circ r_{z_0,\theta}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} r(z) &= r_{z_0',\theta'}(z_0 + e^{i\theta}(z - z_0)) \\ &= z_0' + e^{i\theta'}(z_0 + e^{i\theta}(z - z_0) - z_0') \\ &= z_0' + e^{i\theta'}(z_0 - z_0') - e^{i(\theta+\theta')}z_0 + e^{i(\theta+\theta')}z. \end{aligned}$$

   Si $e^{i(\theta+\theta')} = 1$, l'application r est donc l'écriture complexe de la translation dont le vecteur a pour affixe $z_0' + e^{i\theta'}(z_0 - z_0') - z_0$.
   Supposons à présent que $e^{i(\theta+\theta')} \neq 1$; on va montrer que r est l'écriture complexe d'une rotation. Pour cela, on cherche $z_0'' \in \mathbb{C}$ et $\theta'' \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait

$$z_0' + e^{i\theta'}(z_0 - z_0') - e^{i(\theta+\theta')}z_0 + e^{i(\theta+\theta')}z = z_0'' + e^{i\theta''}(z - z_0'')$$

   pour tout $z \in \mathbb{C}$. En identifiant le coefficient intervenant devant z dans cette égalité (ce qui est possible par exemple en prenant $z = 0$ puis $z = 1$ et en comparant les deux égalités obtenues), on constate que l'on doit avoir $e^{i\theta''} = e^{i(\theta+\theta')}$, donc le choix $\theta'' = \theta + \theta'$ convient. En identifiant cette fois les termes constants, on trouve alors

$$z_0' + e^{i\theta'}(z_0 - z_0') - e^{i(\theta+\theta')}z_0 = z_0'' - e^{i(\theta+\theta')}z_0'',$$

   d'où l'on déduit que

$$z_0'' = \frac{z_0' + e^{i\theta'}(z_0 - z_0') - e^{i(\theta+\theta')}z_0}{1 - e^{i(\theta+\theta')}}.$$

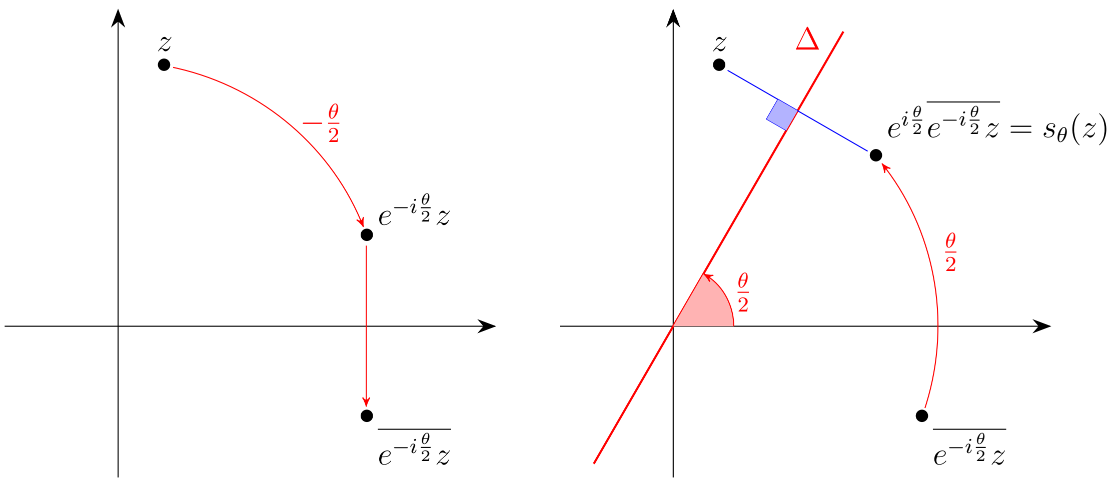
   On vérifie réciproquement qu'en définissant les valeurs de θ'' et z_0'' comme ci-dessus, on obtient bien la relation $r(z) = z_0'' + e^{i\theta''}(z - z_0'')$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire que r est l'écriture complexe de la rotation ayant pour centre l'image de z_0'' et pour angle θ''.
   En repassant aux applications géométriques, on obtient le résultat suivant : la composée de deux rotations est soit une translation (si les deux angles de rotation sont opposés modulo 2π), soit une rotation (si ce n'est pas le cas). Dans ce deuxième cas de figure, l'angle de la rotation obtenue est la somme des angles des rotations composées.
   On remarque en particulier que si $z_0 = z_0'$ (cas de la composée de deux rotations de même centre), alors $z_0'' = z_0$ et la composée $r_{z_0,\theta'} \circ r_{z_0,\theta}$ est tout simplement la rotation $r_{z_0,\theta+\theta'}$.

3. Il est géométriquement raisonnable d'imaginer que l'effet d'une rotation peut être compensé par une rotation de même centre et d'angle opposé. On peut le démontrer en écrivant que $r_{z_0,-\theta} \circ r_{z_0,\theta} = r_{z_0,\theta-\theta} = r_{z_0,0} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ d'après la question précédente, et que l'on a $r_{z_0,\theta} \circ r_{z_0,-\theta} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$ pour les mêmes raisons. Ainsi, $r_{z_0,\theta}$ est bijective, de réciproque $r_{z_0,-\theta}$; on en déduit bien que $R_{A,\theta}$ est bijective et de réciproque $R_{A,-\theta}$.

Correction de l'exercice 44.

1. Si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, alors $s_\theta : z \mapsto \overline{z}$ est l'application de conjugaison, or on sait que cette application est l'écriture complexe de la symétrie orthogonale S_θ par rapport à l'axe des abscisses.
2. Si $z \in \mathbb{C}$, alors $s_\theta(z) = e^{i\frac{\theta}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}} \overline{z} = e^{i\frac{\theta}{2}} \overline{e^{-i\frac{\theta}{2}} z}$, ce qu'il fallait démontrer.
3. L'effet de S_θ sur un point M se décompose en trois transformations successives :
   - Une rotation de centre O et d'angle $-\frac{\theta}{2}$ (l'écriture complexe d'une telle transformation est l'application $z \mapsto e^{-i\frac{\theta}{2}} z$).
   - Une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses (qui correspond, comme on l'a vu dans la question 1, à la conjugaison $z \mapsto \overline{z}$).
   - Une rotation de centre O et d'angle $\frac{\theta}{2}$ (qui correspond à la multiplication finale par $e^{i\frac{\theta}{2}}$).

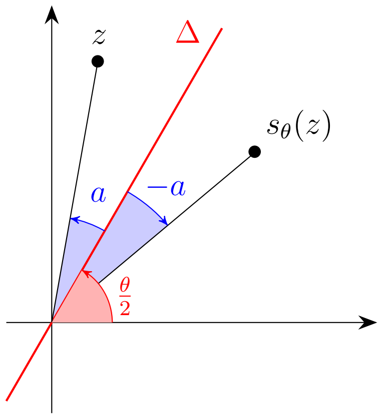
   On verra en deuxième année la définition rigoureuse d'une symétrie orthogonale d'axe quelconque. Pour l'instant, il suffit de faire un schéma pour comprendre que l'effet de S_θ sur M est celui de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe Δ passant par l'origine et le point $\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$. On a représenté ci-après les trois transformations permettant d'obtenir $s_\theta(z)$ à partir de z (les deux premières sur la figure de gauche et la troisième sur celle de droite).



Notons qu'une autre façon de se représenter l'effet de S_θ sur un point M est d'écrire l'affixe de M sous la forme $z = |z| e^{i\left(\frac{\theta}{2}+a\right)}$, avec $a \in \mathbb{R}$. On a alors

$$s_\theta(z) = e^{i\theta} |z| e^{-i\left(\frac{\theta}{2}+a\right)} = |z| e^{i\left(\frac{\theta}{2}-a\right)}.$$

Ainsi, $s_\theta(z)$ est obtenu à partir de z en conservant son module et en considérant le symétrique de son argument par rapport à $\frac{\theta}{2}$, comme on l'illustre sur la figure ci-dessous :



4. Si $z \in \mathbb{C}$, alors

$$s_\theta \circ s_\theta(z) = s_\theta\left(e^{i\theta}\overline{z}\right) = e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}\overline{z}} = e^{i\theta}e^{-i\theta}z = z,$$

donc $s_\theta \circ s_\theta = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}}$. On en déduit que s_θ est bijective et que $s_\theta^{-1} = s_\theta$. Remarquons que cette relation est tout à fait raisonnable compte tenu du résultat de la question précédente : en appliquant deux fois une symétrie donnée à un point du plan, on retombe sur ce même point.

5. Soit $\theta' \in \mathbb{R}$. Si $z \in \mathbb{C}$, alors

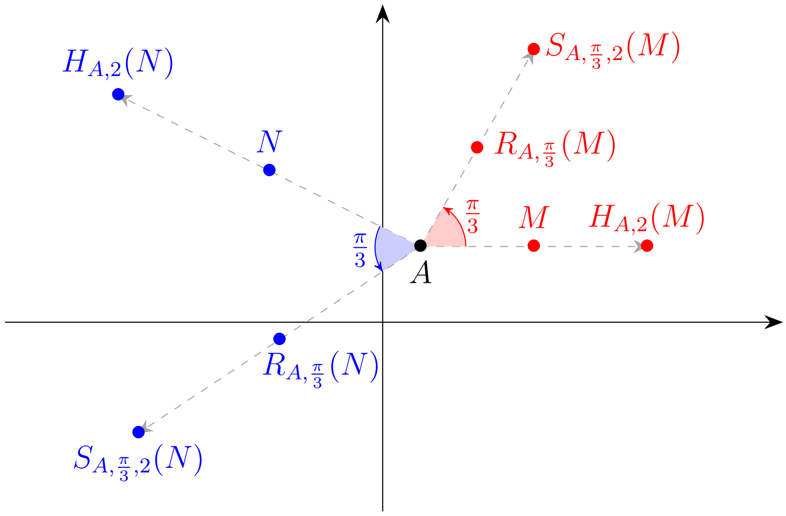
$$\begin{aligned} s_{\theta'} \circ s_\theta(z) &= e^{i\theta'}\overline{s_\theta(z)} = e^{i\theta'}\overline{e^{i\theta}\overline{z}} \\ &= e^{i\theta'}e^{-i\theta}z = e^{i(\theta'-\theta)}z. \end{aligned}$$

La composée de $s_{\theta'}$ et s_θ est donc l'écriture complexe de la rotation de centre 0 et d'angle $\theta' - \theta$. En repassant aux applications géométriques associées, ce résultat se reformule en disant que composée des symétries $S_{\theta'}$ et S_θ est la rotation de centre O et d'angle $\theta' - \theta$.

Correction de l'exercice 45.

1. On représente à la page suivante l'effet de la similitude directe de centre $A = (1, 2)$, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2 sur deux points M et N. Pour annoncer le résultat de la question 3(b), on fait apparaître sur cette figure les images de M et N par l'homothétie de centre A et de rapport 2 (déjà données dans la correction de l'exercice 42), ainsi que les images de M et N par les rotations de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

   Notons d'ores et déjà que l'image du point M par la similitude peut être obtenue à partir du point M en appliquant dans n'importe quel ordre une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centre A ainsi qu'une homothétie de centre A et de rapport 2 ; en appliquant d'abord la rotation, on transforme M en M' puis en $S_{A,\frac{\pi}{3},2}(M)$, tandis qu'en appliquant d'abord l'homothétie, on transforme M en $H_{A,2}(M)$ puis en $S_{A,\frac{\pi}{3},2}(M)$. Il en va de même pour le point N.



2. L'application $S_{A,\theta,\lambda}$ est l'identité si $\lambda = 1$ et $\theta \equiv 0\,[2\pi]$. Réciproquement, si $S_{A,\theta,\lambda}$ est l'identité, pour tout point $M \neq A$ du plan le point $M' := S_{A,\theta,\lambda}(M)$ n'est autre que M, et il vérifie donc $AM' = AM$ et $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv 0\,[2\pi]$: on a donc $\lambda = 1$ et $\theta \equiv 0\,[2\pi]$.

   Ainsi, $S_{A,\theta,\lambda}$ est l'identité de $\mathbb{C}$ si et seulement si $\lambda = 1$ et $\theta \equiv 0\,[2\pi]$.

   L'application $S_{A,\theta,\lambda}$ est une homothétie si $\theta \equiv 0\,[\pi]$: en effet, si $\theta \equiv 0\,[2pi]$, alors $S_{A,\theta,\lambda}$ est l'homothétie de centre A et de rapport λ, et si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$, alors $S_{A,\theta,\lambda}$ est l'homothétie de centre A et de rapport $-\lambda$. Réciproquement, supposons que $S_{A,\theta,\lambda}$ soit une homothétie différente de l'identité. Elle a nécessairement pour centre A puisque A est un point fixe de $S_{A,\theta,\lambda}$ (au sens où $S_{A,\theta,\lambda}(A) = A$). Soit M un point du plan différent de A : comme $S_{A,\theta,\lambda}$ est une homothétie de centre A, les points M, A et $M' := S_{A,\theta,\lambda}$ sont alignés, ce qui signifie que $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv 0\,[\pi]$. or $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \theta\,[2\pi]$, donc $\theta \equiv 0\,[\pi]$.

   Ainsi, $S_{A,\theta,\lambda}$ est une homothétie si et seulement si $\theta \equiv 0\,[\pi]$.

   C'est une rotation si $\lambda = 1$: il s'agit dans ce cas de la rotation de centre A et d'angle θ. Réciproquement, supposons que $S_{A,\theta,\lambda}$ est une rotation différente de l'identité. Comme $S_{A,\theta,\lambda}$ admet A pour point fixe, elle a pour centre A ; or elle multiplie par λ la distance à A des points $M \neq A$ du plan, donc on a nécessairement $\lambda = 1$.

   Ainsi, $S_{A,\theta,\lambda}$ est une rotation si et seulement si $\lambda = 1$.

3. (a) Si M est un point du plan d'affixe z et si z' est l'affixe de son image par $S_{A,\theta,\lambda}$, les conditions définissant M' se réécrivent sous la forme

$$|z' - z_0| = \lambda |z - z_0| \quad \text{et} \quad \text{si } z \neq z_0\text{, alors } \arg\left(\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right) \equiv \theta\,[2\pi].$$

   Si $M = A$, il est clair que son image est aussi A. Si $M \neq A$, on a $z \neq z_0$ et la combinaison des deux conditions ci-dessus donne

$$\left|\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right| = \lambda \quad \text{et} \quad \arg\left(\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$$

donc

$$\frac{z'-z_0}{z-z_0} = \lambda e^{i\theta} \quad \text{soit} \quad z' = z_0 + \lambda e^{i\theta}(z-z_0).$$

Cette dernière égalité étant aussi vraie lorsque $z = z_0$, on en déduit que l'écriture complexe de $S_{A,\theta,\lambda}$ est

$$s_{z_0,\theta,\lambda} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z_0 + \lambda e^{i\theta}(z-z_0). \end{array}$$

(b) La réponse à la question 1 incite à dire que $S_{A,\theta,\lambda}$ est la composée de la rotation de centre A et d'angle θ par l'homothétie de centre A et de rapport λ, dans un sens ou dans l'autre. Vérifions-le sur l'écriture complexe de $s_{z_0,\theta,\lambda}$:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad r_{z_0,\theta}(h_{z_0,\lambda}(z)) = r_{z_0,\theta}(z_0+\lambda(z-z_0)) = z_0+e^{i\theta}\lambda(z-z_0) = s_{z_0,\theta,\lambda}(z),$$

et

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad h_{z_0,\lambda}(r_{z_0,\theta}(z)) = h_{z_0,\lambda}(z_0+e^{i\theta}(z-z_0)) = z_0+\lambda e^{i\theta}(z-z_0) = s_{z_0,\theta,\lambda}(z),$$

ce qui établit bien la relation recherchée en repassant aux applications géométriques correspondantes.

(c) On a montré dans la question 3(a) que $S_{A,\theta,\lambda}$ admet pour écriture complexe $z \mapsto az+b$ avec $a := \lambda e^{i\theta} \neq 0$ et $b := z_0(1-\lambda e^{i\theta})$. Si $a = 1$, on a alors $\lambda = 1$ et $e^{i\theta} = 1$ donc $b = z_0(1-\lambda e^{i\theta}) = 0$, donc (a, b) est bien un élément de $(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \setminus (\{1\} \times \mathbb{C}^*)$.

Réciproquement, considérons $(a,b) \in (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \setminus (\{1\} \times \mathbb{C}^*)$ et montrons que l'application $s : z \mapsto az+b$ est l'écriture complexe d'une similitude directe.

Cherchons tout d'abord le centre potentiel[2] de cette similitude en déterminant l'unique point fixe de s : si $z \in \mathbb{C}$, alors

$$s(z) = z \iff az+b = z \iff z = \frac{b}{1-a}$$

puisque $1-a \neq 0$. On pose donc $z_0 := \frac{b}{1-a}$, qui vérifie $z_0 = az_0 + b$.

Écrivons à présent a sous la forme $a = \lambda e^{i\theta}$ avec $\lambda > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (ce qui est possible puisque $a \neq 0$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a alors[3]

$$\begin{aligned} s(z) &= z_0 + az + b - z_0 \\ &= z_0 + az + b - (az_0 + b) = z_0 + a(z-z_0) = z_0 + \lambda e^{i\theta}(z-z_0). \end{aligned}$$

Ainsi, s est l'écriture complexe de la similitude directe de centre A (d'affixe $z_0 = \frac{b}{1-a}$), de rapport $\lambda := |a|$ et d'angle $\theta \equiv \arg(a)\,[2\pi]$), ce qui achève d'établir l'équivalence recherchée.

2. La démarche adoptée ici est un raisonnement par analyse-synthèse peu formalisé.

3. Ce calcul est guidé par notre désir d'écrire l'expression $az+b$ sous la forme $z_0 + \lambda e^{i\theta}(z-z_0)$ conformément au résultat de la question 3(a).

4. Soient S_1 et S_2 deux similitudes directes, d'écritures complexes respectives $s_1 : z \mapsto a_1 z + b_1$ et $s_2 : z \mapsto a_2 z + b_2$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^*$ et $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ (tels que (a_1, b_1) et (a_2, b_2) ne soient pas dans $\{1\} \times \mathbb{C}^*$, mais cette condition ne nous intéresse pas ici). Leur composée $s_2 \circ s_1$ vérifie alors

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (s_2 \circ s_1)(z) = s_2(a_1 z + b_1) = a_2(a_1 z + b_1) + b_2 = a_2 a_1 z + a_2 b_1 + b_2.$$

Or $a_2 a_1$ est le produit de deux nombres complexes non nuls, donc $a_2 a_1 \neq 0$. Si $a_2 a_1 = 1$, alors $S_2 \circ S_1$ est une translation dont le vecteur a pour affixe $a_2 b_1 + b_2$. Si $a_2 a_1 \neq 1$, $S_2 \circ S_1$ est une similitude directe d'après la question 3(c). On a donc bien établi que la composée de deux similitudes directes est une similitude directe ou une translation.

5. Notons z_B, z_C, z_D et $z_{B'}, z_{C'}, z_{D'}$ les affixes des points B, C, D et B', C', D' respectivement, puis notons θ' l'argument (bien défini modulo 2π) de $\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}$, qui est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD})$. On veut montrer[4] que

$$\arg\left(\frac{z_{D'} - z_{B'}}{z_{C'} - z_{B'}}\right) \equiv \theta' \; [2\pi].$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{z_{D'} - z_{B'}}{z_{C'} - z_{B'}} &= \frac{\cancel{z_0} + \lambda e^{i\theta}(z_D - z_0) - \left(\cancel{z_0} + \lambda e^{i\theta}(z_B - z_0)\right)}{\cancel{z_0} + \lambda e^{i\theta}(z_C - z_0) - \left(\cancel{z_0} + \lambda e^{i\theta}(z_B - z_0)\right)} \\
&= \frac{\cancel{\lambda e^{i\theta}}\left((z_D - \cancel{z_0}) - (z_B - \cancel{z_0})\right)}{\cancel{\lambda e^{i\theta}}\left((z_C - \cancel{z_0}) - (z_B - \cancel{z_0})\right)} \\
&= \frac{z_D - z_B}{z_C - z_B},
\end{aligned}$$

donc

$$\arg\left(\frac{z_{D'} - z_{B'}}{z_{C'} - z_{B'}}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_C - z_B}\right) \equiv \theta' \; [2\pi],$$

ce qu'il fallait démontrer[5].

Correction de l'exercice 46.

1. D'après la formule du binôme, on a

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n, \quad B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k 1^{n-k} = (1+j)^n$$

$$\text{et} \quad C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (j^2)^k 1^{n-k} = (1+j^2)^n.$$

---

4. On fait ici usage du formalisme introduit dans l'exercice 38.

5. On peut en fait *définir* une similitude directe du plan comme une transformation préservant les angles. Dans ce cas, les translations sont aussi considérées comme des similitudes directes.

2. Si $k \in \mathbb{N}$, alors $1 + j^k + j^{2k} = 1 + j^k + (j^k)^2$ donc si k est multiple de 3 (c'est-à-dire que $j^k = 1$) alors $1 + j^k + j^{2k} = 3$, et si k n'est pas multiple de 3 (soit $j^k \neq 1$), alors

$$1 + j^k + j^{2k} = \frac{1 - j^{3k}}{1 - j^k} = \frac{1 - (j^3)^k}{1 - j^k} = \frac{1 - 1}{1 - j^k} = 0.$$

3. D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ est multiple} \\ \text{de } 3}}^{n} \binom{n}{k} &= \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + j^k + j^{2k}) \\
&= \frac{1}{3}(A + B + C) \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{3}\left(2^n + (1+j)^n + (1+j^2)^n\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2^n + (1+j)^n + \overline{(1+j)^n}\right) \quad \text{car } j^2 = \overline{j} \\
&= \frac{1}{3}\left(2^n + 2\mathrm{Re}\left((1+j)^n\right)\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\mathrm{Re}((-j^2)^n)\right) \quad \text{car } 1 + j + j^2 = 0 \\
&= \frac{1}{3}\left(2^n + 2\mathrm{Re}\left((-1)^n e^{i\frac{2n\pi}{3}}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + 2(-1)^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 47. Si $n = 0$, la somme vaut 1. Supposons à présent que $n > 0$. On adapte la méthode précédente en remplaçant j par $e^{i\frac{2\pi}{4}} = i$: on calcule

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \quad B = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i = (1+i)^n,$$

$$C = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^{2k} = (1+i^2)^n = 0 \quad (\text{car } n \neq 0), \quad \text{et} \quad D = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^3 = (1+i^3)^n = (1-i)^n,$$

puis on vérifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le nombre $1 + i^k + i^{2k} + i^{3k}$ vaut 4 si k est multiple de 4, et 0 sinon. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ est multiple} \\ \text{de } 4}}^{n} \binom{n}{k} &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1 + i^k + i^{2k} + i^{3k}) \\
&= \frac{1}{4}(A + B + C + D) \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= \frac{1}{4}\left(2^n + (1+i)^n + (1-i)^n\right) = \frac{1}{4}\left(2^n + 2\mathrm{Re}\left((1+i)^n\right)\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(2^n + 2\mathrm{Re}\left(\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n\right)\right) = \frac{1}{4}\left(2^n + 2\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 48.

1. (a) On peut réécrire l'équation $z^2 = 4 + 3i$ comme

$$(a+ib)^2 = 4+3i \quad \text{soit} \quad a^2 - b^2 + 2iab = 4 + 3i$$

soit encore, en identifiant les parties réelle et imaginaire,

$$z^2 = 4+3i \quad \iff \quad \begin{cases} a^2 - b^2 &= 4 \\ 2ab &= 3 \end{cases}$$

(b) En passant au module dans l'équation $(a+ib)^2 = 4+3i$, on trouve de plus $a^2 + b^2 = |4+3i| = 5$. En ajoutant cette équation au système ci-dessus, on trouve

$$\begin{cases} a^2 - b^2 &= 4 \\ a^2 + b^2 &= 5 \\ 2ab &= 3 \end{cases}.$$

En additionnant les deux premières lignes de ce système, on trouve $2a^2 = 9$ soit $a^2 = \frac{9}{2}$, et en les soustrayant on trouve $2b^2 = 1$, soit $b^2 = \frac{1}{2}$.

(c) On obtient donc

$$\begin{cases} a &= \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \\ b &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ ab &= \frac{3}{2} \end{cases}.$$

La dernière ligne implique que ab est positif, si bien que a et b sont de même signe. On a donc deux solutions *possibles* de l'équation $z^2 = 4+3i$:

$$z_1 = \frac{3}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad z_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Or on sait que l'équation $z^2 = 4 + 3i$ admet *exactement* deux solutions ; les racines deuxièmes de $4 + 3i$ sont donc z_1 et z_2.

2. (i) En écrivant $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on peut écrire, toujours en adjoignant au système une troisième équation tirée de la comparaison des modules :

$$z^2 = 1+2i \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a^2 - b^2 &= 1 \\ 2ab &= 2 \\ a^2 + b^2 &= \sqrt{5} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} a^2 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ ab &> 0 \\ b^2 &= \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}.$$

Les deux seules solutions possibles de l'équation $z^2 = 1+2i$ sont donc les nombres

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}.$$

L'équation admettant exactement deux solutions, il s'agit de ces nombres.

(ii) Avec les mêmes notations, on obtient

$$z^2 = 5 - 12i \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & 5 \\ 2ab & = & -12 \\ a^2 + b^2 & = & 13 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 9 \\ ab & < & 0 \\ b^2 & = & 4 \end{array} \right. ,$$

donc les deux solutions de l'équation $z^2 = 5 - 12i$ sont $3 - 2i$ et $-3 + 2i$.

(iii) Toujours avec les mêmes notations, on obtient

$$z^2 = 21 - 20i \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & 21 \\ 2ab & = & -20 \\ a^2 + b^2 & = & 29 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 & = & 25 \\ ab & < & 0 \\ b^2 & = & 4 \end{array} \right. ,$$

donc les deux solutions de l'équation $z^2 = 21 - 20i$ sont $5 - 2i$ et $-5 + 2i$.

3. La démonstration du théorème 36 peut être reproduite pas à pas dans le cas de coefficients complexes en remplaçant $\pm\sqrt{\Delta}$ ou $\pm i\sqrt{-\Delta}$ par les racines deuxièmes de Δ : ainsi, si $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet pour solutions (éventuellement confondues) les nombres complexes $\frac{-b\pm\xi}{2a}$, où ξ est une racine de $\Delta := b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.
Dans le cas de l'équation considérée, on a $\Delta = (4+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5-i) = -5+12i$. On connaît grâce au point (ii) de la question précédente les deux racines deuxièmes de $5 - 12i$, qui sont $3 - 2i$ et $-3 + 2i$; ainsi, les racines deuxièmes de $-5 + 12i$ sont[6] $i(3 - 2i) = 2 + 3i$ et $-2 - 3i$, donc les deux solutions de l'équation sont

$$\frac{-(4+i) - (2+3i)}{2} = -3 - 2i \qquad \text{et} \qquad \frac{-(4+i) + (2+3i)}{2} = -1 + i.$$

Notons que ces deux solutions ne sont pas conjuguées (et n'ont aucune raison de l'être puisque l'équation étudiée n'est pas à coefficients réels !).

4. Notons $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a alors

$$z^2 + 2\overline{z} + 5 = (a + ib)^2 + 2(a - ib) + 5 = a^2 - b^2 + 2a + 5 + 2ib(a - 1),$$

donc

$$\begin{aligned} z^2 + 2\overline{z} + 5 = 0 \quad & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 + 2a + 5 & = & 0 \\ 2b(a-1) & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} a^2 - b^2 + 2a + 5 = 0 \\ a = 1 \ \text{ ou } \ b = 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 8 - b^2 & = & 0 \\ a & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + 2a + 5 & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & \pm 2\sqrt{2} \\ a & = & 1 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 + 2a + 5 & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

6. En effet, si z_1 et $z_2 = -z_1$ sont les racines deuxièmes d'un nombre complexe z, alors les racines deuxièmes de $-z$ sont iz_1 et iz_2 (il suffit de les mettre au carré pour s'en convaincre !).

Or l'équation $a^2+2a+5=0$, dont le discriminant vaut $-16<0$, n'admet pas de solution réelle. Ainsi :

$$z^2+2\overline{z}+5=0 \iff \left\{\begin{array}{ccc} b & = & \pm 2\sqrt{2} \\ a & = & 1 \end{array}\right. .$$

Les solutions de l'équation $z^2+2\overline{z}+5=0$ sur $\mathbb{C}$ sont donc les nombres $1-2i\sqrt{2}$ et $1+2i\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 49.

1. Le but de cette question est de vérifier que la définition de la relation d'ordre $\preceq$ est bien comprise. On a les relations suivantes :

   (i) $1+i \preceq 2-i$. (iii) $-3+5i \succeq -3-2i$. (v) $0 \preceq 5$.

   (ii) $3+5i \succeq 3-2i$. (iv) $-i \preceq 1$. (vi) $0 \preceq i$.

   Les points (iv) et (v) ont été obtenus en écrivant $-i = 0+(-1)\cdot 1$ et $i = 0+1\cdot i$.

2. Soient $a, a', a'', b, b', b'' \in \mathbb{R}$.

   (i) On a bien $a+ib \preceq a+ib$ puisque $a=a$ et $b \leqslant b$ (...). La relation $\preceq$ est donc bien réflexive.

   (ii) Supposons que $a+ib \preceq a'+ib'$ et $a'+ib' \preceq a+ib$. La première relation implique que $a \leqslant a'$, et la seconde que $a' \leqslant a$: ainsi, on a $a=a'$. On peut donc réécrire les deux relations sous la forme $a+ib \preceq a+ib'$ et $a+ib' \preceq a+ib$; or on déduit de la première que $b \leqslant b'$ et de la deuxième que $b' \leqslant b$, d'où $b=b'$. Ainsi, $a+ib = a'+ib'$. La relation $\preceq$ est donc bien antisymétrique.

   (iii) Supposons que $a+ib \preceq a'+ib'$ et que $a'+ib' \preceq a''+ib''$. La première relation implique que $a \leqslant a'$ et la deuxième que $a' \leqslant a''$, donc on a $a \leqslant a''$.

   Si $a < a''$, alors $a+ib \preceq a''+ib''$.

   Supposons à présent que $a = a''$. Dans ce cas, on a aussi $a=a'$ et $a'=a''$ puisque $a \leqslant a' \leqslant a''$. La relation $a+ib \preceq a'+ib'$ se réécrit alors $a+ib \preceq a+ib'$ et montre que $b \leqslant b'$, tandis que la relation $a'+ib' \preceq a''+ib''$ se réécrit $a'+ib' \preceq a'+ib''$ et montre que $b' \leqslant b''$. Ainsi, on a $b \leqslant b' \leqslant b''$, donc $b \leqslant b''$. On a donc $a+ib \preceq a+ib'' = a''+ib''$.

   Dans les deux cas envisagés, on a donc $a+ib \preceq a''+ib''$.

   La relation $\preceq$ est donc bien transitive.

   La relation $\preceq$ vérifie donc les trois propriétés qui en font une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.

3. Soient $a, a', b, b' \in \mathbb{R}$. On cherche à montrer que l'on a $a+ib \preceq a'+ib'$ ou $a'+ib' \preceq a+ib$.

   Si $a < a'$, alors $a+ib \preceq a'+ib'$. Si $a > a'$, alors $a'+ib' \preceq a+ib$. Dans l'unique cas restant, c'est-à-dire si $a=a'$, on a $a+ib \preceq a+ib'$ si $b \leqslant b'$ et $a+ib \succeq a+ib'$

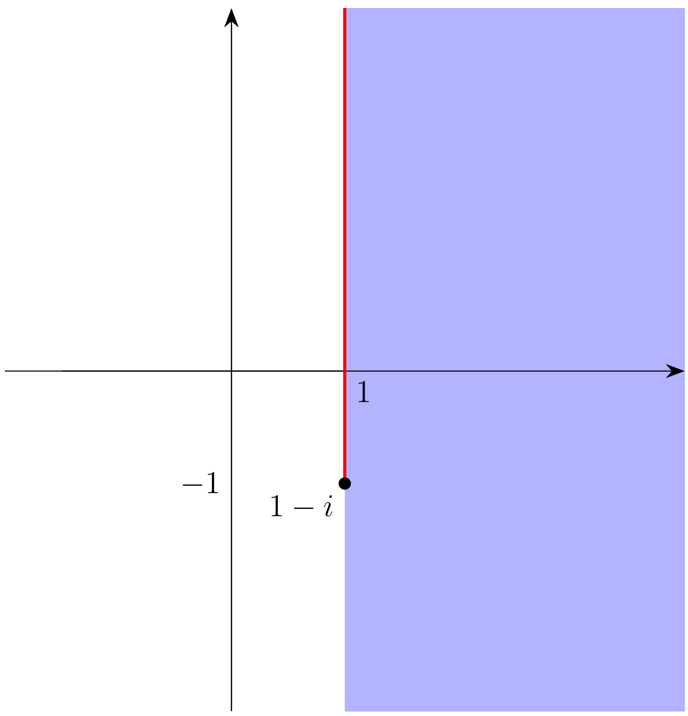
si $b \geqslant b'$. Il est donc possible dans tous les cas d'affirmer que $a+ib \preceq a'+ib'$ ou $a'+ib' \preceq a+ib$.

Ainsi, la définition de la relation $\preceq$ permet de comparer tous les couples de nombres complexes entre eux : on a bien affaire à une relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$.

4. Il suffit de revenir à la définition de la relation $\preceq$:

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, 1-i \preceq z\} = \{a+ib \,:\, a,b \in \mathbb{R} \text{ et } 1 < a \text{ ou } a = 1 \text{ et } b > -1\}.$$

Cet ensemble correspond à la partie du plan formée des points d'abscisse strictement supérieure à 1 et des points d'abscisse égale à 1 et d'ordonnée strictement supérieure à -1, c'est-à-dire à $(]1,+\infty[\times\mathbb{R}) \cup (\{1\}\times]-1,+\infty[)$. Il s'agit de l'ensemble des points du plan colorés (en bleu ou en rouge) ci-dessous :



5. Pour comparer deux nombres complexes $a+ib$ et $a'+ib'$ grâce à la relation $\preceq$, on les ordonne selon leurs parties réelles a et a' si celles-ci sont différentes, et dans le cas contraire, on les ordonne selon leurs parties imaginaires. Ce mode de classement rappelle l'ordre des mots dans un dictionnaire (aussi appelé *lexicographique*) : les mots sont classés dans le dictionnaire selon leur première lettre, puis, en cas d'égalité, selon leur deuxième lettre, puis, en cas d'égalité, selon leur troisième lettre, et ainsi de suite.

6. (a) Soient $z_1, z_1', z_2, z_2' \in \mathbb{C}$. On écrit

$$z_1 = a_1 + ib_1, \quad z_1' = a_1' + ib_1, \quad z_2 = a_2 + ib_2 \quad \text{et} \quad z_2' = a_2' + ib_2'$$

avec $a_1, b_1, a_1', b_1', a_2, b_2, a_2', b_2' \in \mathbb{R}$. Supposons que $z_1 \preceq z_1'$ et $z_2 \preceq z_2'$ et montrons que $z_1 + z_2 \preceq z_1' + z_2'$.

On a $a_1 \leqslant a_1'$ et $a_2 \leqslant a_2'$, donc $a_1 + a_2 \leqslant a_1' + a_2'$. Si cette inégalité est stricte, alors $z_1+z_2 \preceq z_1'+z_2'$ puisque z_1+z_2 a une partie réelle strictement inférieure à celle de $z_1' + z_2'$.

Supposons à présent que $a_1 + a_2 = a_1' + a_2'$; comme $a_1 \leqslant a_1'$ et $a_2 \leqslant a_2'$, on a $a_1 = a_1'$ et $a_2 = a_2'$. Les inégalités $z_1 \preceq z_1'$ et $z_2 \preceq z_2'$ se réécrivent alors $b_1 \leqslant b_1'$ et $b_2 \leqslant b_2'$. Ainsi, on a $b_1 + b_2 \leqslant b_1' + b_2'$. Ainsi, le nombre $z_1 + z_2$ a une partie réelle égale et une partie imaginaire inférieure à celle de $z_1' + z_2'$, d'où $z_1 + z_2 \preceq z_1' + z_2'$.

Dans les deux cas, on a donc $z_1 + z_2 \preceq z_1' + z_2'$, ce qui clôt la preuve : la propriété donnée dans l'énoncé est donc vraie.

(b) La propriété est fausse : on a $0 \preceq i$ et $0 \preceq i$ (...) mais 0 n'est pas inférieur à $i \times i = -1$ pour la relation $\preceq$ (qui coïncide sur $\mathbb{R}$ avec la relation $\leqslant$).

Correction de l'exercice 50.

1. D'après la définition de la multiplication dans $\mathbb{C}$, on a

$$i \times i = (0,1) \times (0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1,0) = -1.$$

2. (a) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Il existe alors $a, b, a', b' \in \mathbb{C}$ tels que $z = (a,b)$ et $z' = (a', b')$. On a alors

$$\begin{aligned} z + z' &= (a,b) + (a',b') = (a + a', b + b') \\ &= (a' + a, b' + b) = (a', b') + (a, b) = z' + z \end{aligned}$$

par définition de l'addition dans $\mathbb{C}$ et par commutativité de l'addition dans $\mathbb{R}$, d'où le résultat attendu.

(b) Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$. Il existe alors $a, b, a', b', a'', b'' \in \mathbb{R}$ tels que $z = (a,b)$, $z' = (a', b')$ et $z'' = (a'', b'')$. On a alors

$$\begin{aligned} (z + z') + z'' &= (a + a', b + b') + (a'', b'') \\ &= \big((a + a') + a'', (b + b') + b''\big) \\ &= \big(a + (a' + a''), b + (b' + b'')\big) \\ &= (a,b) + (a' + a'', b' + b'') = z + (z' + z''), \end{aligned}$$

par définition de l'addition dans $\mathbb{C}$ et par associativité de l'addition dans $\mathbb{R}$, d'où le résultat attendu.

(c) Si $z \in \mathbb{C}$ s'écrit $z = (a, b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$z + 0 = (a,b) + (0,0) = (a,b) = z$$

et

$$0 + z = (0,0) + (a,b) = (a,b) = z$$

donc $z + 0 = 0 + z = z$.

(d) Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit $z = (a, b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Soit à présent $z' \in \mathbb{C}$, que l'on écrit $z' = (a', b')$ avec $a', b' \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} z + z' = 0 \quad &\iff \quad (a,b) + (a',b') = (0,0) \quad \iff \quad (a+a', b+b') = (0,0) \\ &\iff \quad \begin{cases} a + a' = 0 \\ b + b' = 0 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} a' = -a \\ b' = -b \end{cases} \\ &\iff \quad z' = (-a, -b), \end{aligned}$$

donc il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z + z' = 0$, donné par $z' := (-a, -b)$ et noté $-z$.

3. (a) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. On écrit $z = (a, b)$ et $z' = (a', b')$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} z \times z' &= (a,b) \times (a',b') \\ &= (aa' - bb', ab' + a'b) \quad \text{par définition du produit dans } \mathbb{C} \\ &= (a'a - b'b, a'b + ab') \quad \text{par commutativité du produit dans } \mathbb{R} \\ &= (a',b') \times (a,b) \\ &= z' \times z, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

(b) Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$ et soient $a, b, a', b', a'', b'' \in \mathbb{R}$ tels que $z = (a, b)$, $z' = (a', b')$ et $z'' = (a'', b'')$.

On a alors

$$\begin{aligned} (z \times z') \times z'' &= \big((a,b) \times (a',b')\big) \times (a'',b'') \\ &= \big((aa' - bb', ab' + a'b)\big) \times (a'',b'') \\ &= \big((aa' - bb')a'' - (ab' + a'b)b'', (aa' - bb')b'' + (ab' + a'b)a''\big) \\ &= \big(aa'a'' - bb'a'' - ab'b'' - a'bb'', aa'b'' - bb'b'' + ab'a'' + a'ba''\big) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z \times (z' \times z'') &= (a,b) \times \big((a',b') \times (a'',b'')\big) \\ &= (a,b) \times (a'a'' - b'b'', a'b'' + b'a'') \\ &= \big(a(a'a'' - b'b'') - b(a'b'' + b'a''), a(a'b'' + b'a'') + b(a'a'' - b'b'')\big) \\ &= \big(aa'a'' - ab'b'' - ba'b'' - bb'a'', aa'b'' + ab'a'' + ba'a'' - bb'b''\big), \end{aligned}$$

d'où $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$ comme attendu.

(c) Reprenons les notations du point précédent. On a alors

$$\begin{aligned} (z + z') \times z'' &= (a + a', b + b') \times (a'', b'') \\ &= ((a + a')a'' - (b + b')b'', (a + a')b'' + (b + b')a'') \\ &= (aa'' + a'a'' - bb'' - b'b'', ab'' + a'b'' + ba'' + b'a'') \\ &= (aa'' - bb'', ab'' + a''b) + (a'a'' - b'b'', a'b'' + a''b') \\ &= (a,b) \times (a'',b'') + (a',b') \times (a'',b'') \\ &= z \times z'' + z' \times z'', \end{aligned}$$

d'où la relation attendue.

(d) On pourrait raisonner comme à la question 2(d), mais on présente ici une approche qui permet une preuve d'unicité utilisable dans d'autres circonstances.

Supposons que toutes les règles de calcul de $\mathbb{R}$ se transposent à $\mathbb{C}$ et donnons-nous $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

Une intuition providentielle (ou bien le fait d'avoir déjà lu le cours et fait de nombreux exercices sur les nombre complexes) nous amène à écrire

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Un candidat « naturel » pour z^{-1} est donc le nombre complexe

$$z' := \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right).$$

Vérifions tout d'abord que l'on a bien $z \times z' = 1$:

$$\begin{aligned} z \times z' &= (a, b) \times \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) \\ &= \left(a \cdot \frac{a}{a^2+b^2} + b \cdot \frac{b}{a^2+b^2}, a \cdot \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right) + \frac{a}{a^2+b^2} \cdot b\right) \\ &= (1, 0) = 1. \end{aligned}$$

Il reste alors à montrer que z' est l'*unique* nombre complexe vérifiant cette propriété. Pour cela, on se donne un nombre $z'' \in \mathbb{C}$ vérifiant $z \times z'' = 1$. Par commutativité du produit dans $\mathbb{C}$, on peut écrire que

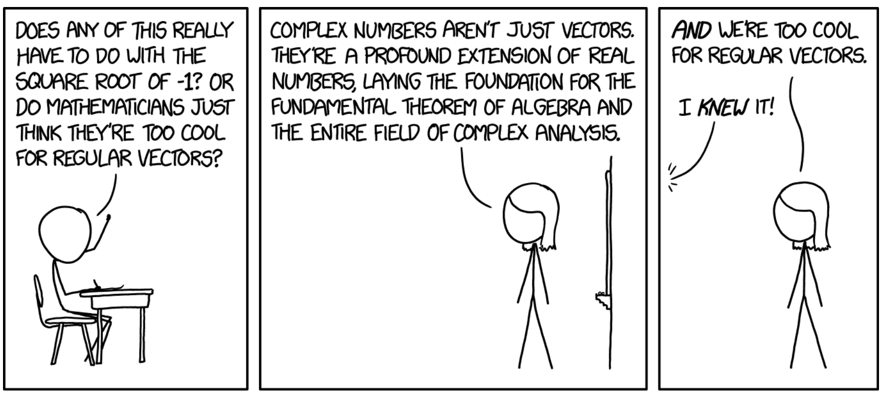
$$z' = z' \times 1 = z' \times (z'' \times z) = z' \times (z \times z''),$$

d'où, par associativité du produit,

$$z' = (z' \times z) \times z'' = (z \times z') \times z'' = 1 \times z'' = z''.$$

Ainsi, l'unique élément de $\mathbb{C}$ vérifiant la propriété attendue est bien le nombre complexe z' défini plus haut, d'où le résultat.

4. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ tels que $zz' = 0$. Si $z \neq 0$, alors z^{-1} existe, et en multipliant l'égalité $zz' = 0$ par z^{-1} on obtient $z' = 0$. Ainsi, z ou z' est nécessairement nul, ce qu'il fallait démontrer.



©xkcd.com