2 ENTRAÎNEMENT

Exercice 10. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ en un point $a \in \mathbb{R}$. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f au voisinage de a lorsque :

(i) $f(a) = 1$, $f'(a) = f''(a) = f^{(3)}(a) = 0$ et $f^{(4)}(a) = -1$.

(ii) $f(a) = 2$, $f'(a) = -1$, $f''(a) = 0$ et $f^{(3)}(a) = -2$.

(iii) $f(a) = 0$, $f'(a) = 0$, $f''(a) = 1$, $f^{(3)}(a) = 1$ et $f^{(4)} = -5$.

(iv) $f^{(k)}(a) = 0$ pour tout $k \in [\![0, 17]\!]$ et $f^{(18)}(a) = 1$.

Exercice 11. Étudier la position relative (locale) de la courbe représentative de arctan par rapport à ses tangentes.

Exercice 12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer les dérivées successives de la fonction puissance $f : x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13. Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto e^{-x}\cos(x)$ sur $[0, \pi]$.

Exercice 14. Étudier les variations et représenter finement le graphe de la fonction $f : x \mapsto e^{-x} - x^2$.

Exercice 15. Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x^2 + 5x + 2$.

Exercice 16. Étudier les variations et représenter finement le graphe de la fonction $f : x \mapsto \ln(x) + \frac{1}{x}$.

Exercice 17. Étudier les variations et donner le nombre de points d'annulation de la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^4 - 6x^2 + x$.

Exercice 18. Montrer que les fonctions trigonométriques réciproques arcsin et arccos sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

Exercice 19. Soit f une fonction continue sur $[0, 2]$ et dérivable deux fois sur $]0, 2[$ telle que $f(0) = f(1) = f(2)$. En utilisant trois fois le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $\alpha \in]0, 2[$ tel que $f''(\alpha) = 0$.

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Montrer que si $f'(0) = 0$ et $f'' > 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1. Montrer que si f est dérivable, alors $f' = 0$ si et seulement si f est constante.
2. Montrer que si f est deux fois dérivable, alors $f'' = 0$ si et seulement si f est une fonction affine.

   Indication : dans l'implication directe, on pourra d'abord montrer que f' est constante, puis écrire $f' = c$ et considérer la fonction $g : x \mapsto f(x) - cx$.
3. Si $n \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de f si elle est n fois dérivable et vérifie $f^{(n)} = 0$?

Exercice 22. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

1. (a) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que si f et g sont dérivables n fois sur I, alors $f + g$ l'est.
   (b) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que si f et g sont dérivables n fois sur I, alors fg l'est.
   (c) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que si f et g sont dérivables n fois sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable n fois sur I.
   (d) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que si φ est une fonction définie sur un intervalle contenant $f(I)$ et si f et φ sont dérivables n fois, alors $\varphi \circ f$ est dérivable n fois.
   (e) Montrer par récurrence sur $n \geqslant 1$ que si f est bijective et n fois dérivable sur I et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est n fois dérivable sur l'intervalle $f(I)$.
2. Les résultats établis à la question précédente sont-ils vrais en remplaçant l'hypothèse « n fois dérivable » par « de classe $\mathcal{C}^n$ » ?

Exercice 23 (Un cas pathologique). On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} x^4 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner f'.
2. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. La fonction f'' est-elle continue en 0 ?
4. Peut-on dire que la courbe représentative de f :
   - croise sa tangente en 0 ?
   - est localement au-dessus de sa tangente en 0 ?
   - est localement en-dessous de sa tangente en 0 ?

Exercice 24. Soit $n \geqslant 0$. Déterminer $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \begin{cases} x^k \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

soit de classe $\mathcal{C}^n$ mais pas de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Exercice 25 (Retrouver les extrema d'une fonction polynomiale).
Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$. On considère la fonction polynomiale

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c.$$

Calculer f' puis f'' et retrouver un résultat bien connu sur les extrema locaux de f.

Exercice 26. Soit $n \geqslant 2$. On considère la fonction puissance $f : x \mapsto x^n$.

1. Calculer les dérivées successives de f.
2. Montrer que 0 est l'unique point critique de f.
3. Déterminer à l'aide du critère portant sur les dérivées d'ordre supérieur à quelle condition f admet un extremum local en 0, et statuer sur la nature de cet extremum le cas échéant.

Exercice 27. Considérons la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

1. (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que ses dérivées successives en 0 sont toutes nulles.

   Indication : on pourra conjecturer la forme générale des dérivées successives de f et effectuer une démonstration par récurrence.

   (b) Montrer que f admet un minimum local strict en 0.

Considérons à présent la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

2. (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que ses dérivées successives en 0 sont toutes nulles.

   (b) Montrer que 0 est un point col pour g.

Exercice 28. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : [-1,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x+1}(x-1)^2. \end{aligned}$$

1. Calculer $f(-1)$ et $f(1)$, montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in]-1,1[$ et en déduire que f admet un minimum local sur $[-1,1]$ qu'elle atteint uniquement en -1 et en 1.

2. On étudie à présent plusieurs méthodes indépendantes pour déterminer le maximum de f ainsi que le lieu de ce maximum.
   (a) **Première méthode :**
      (i) Montrer à l'aide d'un argument théorique que f admet un maximum global sur $[-1, 1]$, puis montrer que ce maximum est atteint en un point intérieur de $[-1, 1]$ (c'est-à-dire en un point de $]-1, 1[$).
      (ii) Montrer que f' admet un unique point critique sur $]-1, 1[$ puis conclure.
   (b) **Deuxième méthode :** étudier le signe de f' sur $]-1, 1[$, en déduire le tableau de variations de f et conclure.
   (c) **Troisième méthode :** justifier que les variations de f sur $]-1, 1[$ sont les mêmes que celles de la fonction $g : x \mapsto \ln(f(x))$ définie sur $]-1, 1[$, puis étudier les variations de g et conclure.

Exercice 29. On considère la fonction $f : x \longmapsto x^4 - x^2 + 1$.

1. (a) Montrer grâce à un argument théorique que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$.
   (b) f admet-elle un maximum global sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Pour chacun des points critiques de f, déterminer la nature (lieu d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point col) de ce point.
4. Donner la valeur du minimum (global) de f sur $\mathbb{R}$.

On considère à présent la fonction $g : x \mapsto \ln\left(x^4 - x^2 + 1\right)$.

5. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
6. Déterminer les extrema locaux et globaux de g.

Exercice 30. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\left(x^2 + x\right)\pi\right). \end{array}$$

1. Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sur $[-1, 1]$.
2. En calculant la dérivée à droite de f en -1 et sa dérivée à gauche en 1, montrer que f admet un extremum local en -1 et en 1.

3. (a) Tracer le tableau de variations de $g : x \mapsto x^2 + x$ sur $]-1, 1[$ et en déduire les deux valeurs de $x \in]-1, 1[$ telles que $x^2 + x \equiv \frac{1}{2}\,[1]$, c'est-à-dire telles que $x^2 + x = \frac{1}{2} + k$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.
   (b) Déterminer les points critiques de f sur $]-1, 1[$.
   (c) Déterminer pour chacun de ces points critiques s'il s'agit du lieu d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point col pour f.
4. Donner les extrema locaux et les extrema globaux de f ainsi que les points auxquels ces extrema sont atteints.