Variables aléatoires discrètes

Preuve formelle de la proposition 22

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Si A est une partie de $[\![1, n]\!]$ à k éléments, la probabilité que les variables aléatoires X_i avec $i \in A$ prennent la valeur 1 et pour que les autres prennent la valeur 0 est égale à

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\forall i \in A,\, X_i = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1, n]\!] \setminus A,\, X_j = 0) \\
&\qquad = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i \in A} (X_i = 1)\right) \cap \left(\bigcap_{j \in [\![1,n]\!] \setminus A} (X_j = 0)\right)\right) \\
&\qquad = \left(\prod_{i \in A} \mathbb{P}(X_i = 1)\right)\left(\prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus A} \mathbb{P}(X_j = 0)\right) \\
&\qquad = p^k (1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

par indépendance des X_i. Or l'événement $(X = k)$ est réalisé si et seulement si $(\forall i \in A,\, X_i = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1, n]\!] \setminus A,\, X_j = 0)$ l'est pour une certaine partie A de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k, c'est-à-dire que

$$(X = k) = \bigsqcup_{\substack{A \subset [\![1,n]\!] \\ |A| = k}} (\forall i \in A,\, X_i = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1, n]\!] \setminus A,\, X_j = 0),$$

si bien que

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{\substack{A \subset [\![1,n]\!] \\ |A| = k}} \mathbb{P}(\forall i \in A,\, X_i = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1, n]\!] \setminus A,\, X_j = 0)$$

par incompatibilité, soit

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{\substack{A \subset [\![1,n]\!] \\ |A| = k}} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Or il existe $\binom{n}{k}$ parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments, donc la somme est constituée de $\binom{n}{k}$ termes tous égaux à $p^k(1-p)^{n-k}$, donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ainsi, la variable aléatoire X suit bien une loi binomiale au sens de la définition 21, ce qui clôt la preuve. $\square$