4 EXERCICES D'APPLICATION

La grande majorité des exercices de probabilités croisés plus haut sont directement issus de, et applicables à, des situations pratiques. Cette section propose quatre exercices de réflexion hors du format du concours sur d'autres thèmes appliqués.

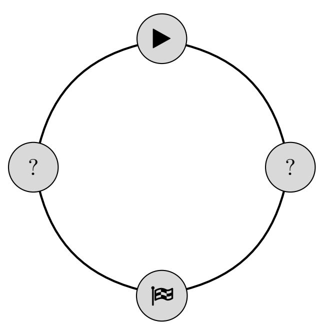
Exercice 37 (Loi de Hardy-Weinberg). Un gène présent dans une population humaine possède deux allèles A et a. Un individu peut donc avoir l'un des trois génotypes suivants : AA, Aa et aa. Chaque enfant à naître hérite d'un allèle de chacun de ses parents, choisi au hasard parmi les deux allèles du parent. Ainsi, si le père est de type AA et la mère de type Aa, l'enfant pourra être de type AA ou Aa, tandis que si le père est de type AA et la mère de type aa, l'enfant sera nécessairement de type Aa.

On considère une population dans laquelle la reproduction s'effectue au hasard et indépendamment du génotype des individus. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note p_n, q_n et r_n les proportions respectives de chacun des génotypes AA, Aa et aa parmi les individus de la génération n.

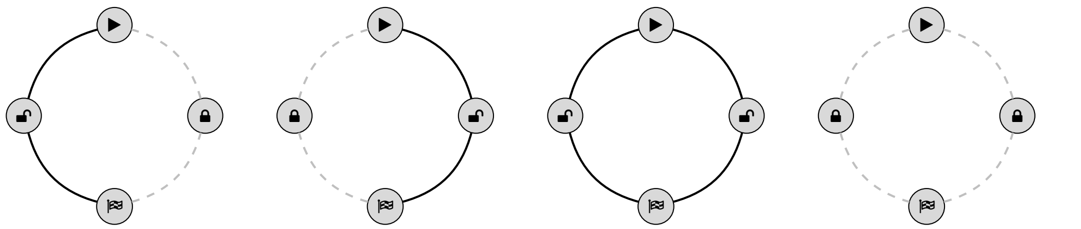
1. Donner p_1, r_1 et q_1 en fonction de p_0, q_0 et r_0.
2. Démontrer que p_1, q_1 et r_1 s'expriment uniquement en fonction de $p_0 - r_0$.
3. Montrer que $p_1 - r_1 = p_0 - r_0$.
4. Donner p_2, q_2 et r_2. Que peut-on conclure ?

Un allèle *est une « version » d'un gène caractérisé par une séquence de nucléotides particulière. L'existence d'allèles explique les différences génétiques entre individus d'une même espèce, et par conséquent leurs différences apparentes (dites* phénotypiques*). Il existe le plus souvent deux allèles pour un même gêne, mais certains gènes possèdent plusieurs dizaines d'allèles.*
On appelle génotype *la « bibliothèque génétique » d'un individu, c'est-à-dire l'information contenue par ses gènes. Dans les espèces diploïdes comme l'être humain, le matériel génétique est supporté par des* paires de chromosomes *: un même gène est donc présent deux fois, potentiellement sous deux formes alléliques différentes, dans le génotype d'un individu donné. Dans le cas étudié, un individu possède soit deux allèles A, soit deux allèles a, soit un allèle de chaque type.*

Exercice 38 (Percolation). On considère un circuit de la forme ci-dessous, dans lequel les cases marquées d'un point d'interrogation permettent le passage avec probabilité $\frac{1}{2}$ et le bloquent avec probabilité $\frac{1}{2}$, indépendamment les unes des autres :

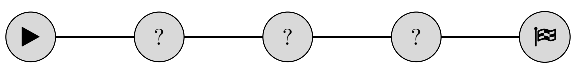


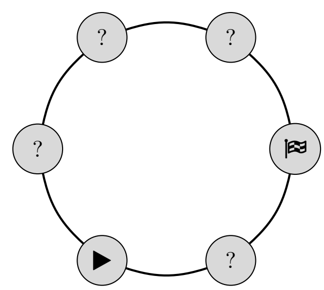
Ainsi, ce circuit est équivalent de façon équiprobable à l'un des quatre circuits suivants :

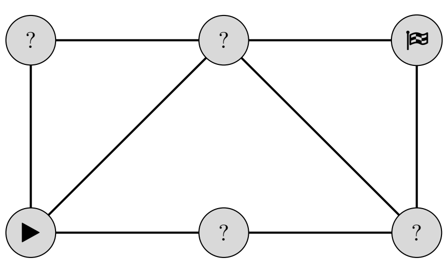


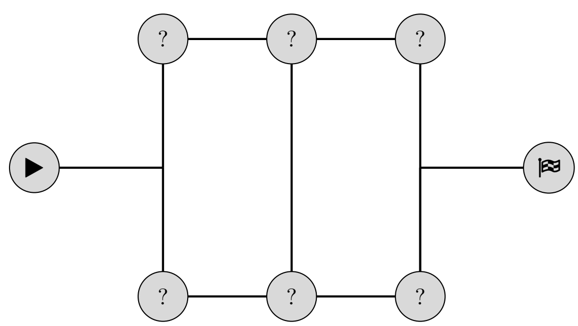
Les trois premiers circuits permettent de rejoindre la case d'arrivée 🏁 depuis la case de départ ▶, mais le quatrième ne le permet pas. Ainsi, la probabilité de pouvoir rejoindre la case d'arrivée depuis la case de départ dans la configuration représentée ci-dessus est $\frac{3}{4}$.

Calculer cette probabilité dans chacune des configurations suivantes :









Exercice 39 (Substitut à un d100). Les amateurs de jeux de rôle reçoivent parfois, au cours d'une partie, l'instruction de lancer un dé équilibré à 100 faces. Cet objet étant rare, coûteux et peu lisible, il est fréquent que les joueurs préfèrent lancer deux dés à 10 faces numérotées de 0 à 9 ; l'un des dés est désigné comme donnant le chiffre des dizaines, l'autre comme donnant le chiffre des unités, et on convient du fait qu'un double 0 est interprété comme un 100.

1. Montrer que l'on génère bien ainsi un entier tiré entre 1 et 100 avec équiprobabilité.

Des joueurs souhaitent à présent tirer un nombre au hasard entre 0 et 95. L'un d'entre eux propose de tirer le chiffre des dizaines au hasard avec un dé à 10 faces, puis de tirer le chiffre des unités au hasard avec un autre dé, en réitérant le tirage du dé des unités si l'entier obtenu est strictement supérieur à 95.

2. Montrer que cette méthode ne génère pas un entier tiré avec équiprobabilité entre 0 et 95.
3. Proposer une méthode permettant de tirer un entier avec équiprobabilité entre 0 et 95.

Exercice 40 (Bandits). Un joueur entre dans un casino avec l'intention de jouer aux machines à sous. Le casino dispose de machines A et B qui sont réglées de la facon suivante : la probabilité de gagner sur la machine A est de $\frac{1}{5}$, tandis que la probabilité de gagner sur la machine B est de $\frac{1}{10}$. Le joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents, mais ne sait pas laquelle est la plus favorable. Il décide d'adopter la stratégie suivante :

- Il choisit tout d'abord une machine au hasard.
- Après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre, et rejoue sur la même machine s'il vient de gagner.

On souhaite évaluer la stratégie du joueur. Pour tout $k \geqslant 1$, on définit les événements

$$G_k \text{ : « le joueur gagne la } k\text{-ième partie »}$$

et

$$A_k \text{ : « la } k\text{-ième partie se déroule sur la machine } A \text{ ».}$$

1. (a) Déterminer $\mathbb{P}(A_1)$ et $\mathbb{P}(A_2)$.
   (b) Sachant que la deuxième partie a été gagnée, quelle est la probabilité que la première partie ait eu lieu sur la machine A ?
2. Si $k \geqslant 1$, exprimer $\mathbb{P}(G_k)$ en fonction de $\mathbb{P}(A_k)$.
3. Si $k \geqslant 1$, exprimer $\mathbb{P}(A_{k+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(A_k)$.
4. En déduire $\mathbb{P}(A_k)$ puis $\mathbb{P}(G_k)$.
5. Déterminer la limite de $\mathbb{P}(G_k)$ et commenter.