
Séries

CORRIGÉ DES EXERCICES

Correction de l'exercice 6.

- (i) Si $u_n = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$, la série des u_n converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$ et la série des $\sqrt{u_n}$ diverge en tant que série harmonique.
- (ii) Si $u_n = \frac{1}{n^4}$ pour tout $n \geq 1$, la série des u_n et celle des $\sqrt{u_n}$ convergent en tant que séries de Riemann de paramètres respectifs $4 > 1$ et $2 > 1$.
- (iii) Si $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$, la série des u_n converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$ tandis que celle des $\sqrt{n}u_n = \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique.
- (iv) Si $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \geq 1$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la série des $\sqrt[p]{u_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[p]{2}}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de paramètre $\frac{1}{\sqrt[p]{2}} \in]-1, 1[$.

Correction de l'exercice 7.

- (i) On a $\frac{2j^5+j}{j^6-j^3+2j} \underset{j \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{j}$, or $\frac{2}{j}$ est le terme général d'une série divergente (un multiple de la série harmonique), donc la série de terme général $\frac{2j^5+j}{j^6-j^3+2j}$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.
- (ii) On a $\frac{n^3}{n!} = o\left(\frac{3^n}{n!}\right)$ par croissance comparée. Or la série de terme général $\frac{3^n}{n!}$ est une série exponentielle qui converge ; c'est donc le cas de la série de terme général $\frac{n^3}{n!}$ par comparaison de séries à termes positifs.

Alternativement, on pouvait utiliser le critère de D'Alembert : en effet, en posant $u_n := \frac{n^3}{n!} > 0$ pour tout $n > 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{n^3(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où la convergence de la série de terme général u_n .

- (iii) On peut écrire $\frac{4^n-n}{5^n+2n^3} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^n}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n$, or $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$ donc la série de terme général $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ converge. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{4^n-n}{5^n+2n^3}$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs.
- (iv) Pour tout $n \geq 1$, on peut écrire

$$\left| \frac{\sin(n^2 + n + 1)}{n^2 + n + 1} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre 2, donc la série de terme général $\left| \frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1} \right|$ converge par comparaison

de séries à termes positifs. Ainsi, la série de terme général $\frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1}$ converge absolument donc converge.

- (v) Par croissance comparée, on a $\frac{n^6 \ln^3(n)}{2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Or $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ donc la série de terme général $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{n^6 \ln^3(n)}{2^n}$ converge.
- (vi) Pour tout $k \geq 1$, on a $0 \leq \frac{2^{\cos(k)} \sin^2(k)}{k\sqrt{k}} \leq \frac{2}{k\sqrt{k}}$, or la série de terme général $\frac{2}{k\sqrt{k}} = \frac{2}{k^{\frac{3}{2}}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$, donc la série de terme général $\frac{2^{\cos(k)} \sin^2(k)}{k\sqrt{k}}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.
- (vii) On a $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$ par croissance comparée, or la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique), donc la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$ diverge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.
- (viii) On a $\frac{n^{53n}}{4^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$ par croissance comparée puisque $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$. Or la série de terme général $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de paramètre $\frac{4}{5} \in]-1, 1[$, donc la série de terme général $\frac{n^{53n}}{4^n}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.
- (ix) Rappelons que l'on a $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ (ce que l'on obtient en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'encadrement $\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq 1$). On peut donc écrire

$$\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

or la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{1}{2} \leq 1$, donc c'est aussi le cas de la série de terme général $\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ par comparaison de séries à termes positifs.

Notons que l'on aurait pu se contenter de minorer $\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ par $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour arriver à la même conclusion.

- (x) On a $ke^{-k} = \frac{k}{e^k} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^k}\right)$ par croissance comparée, or la série géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ converge (puisque $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$), donc la série de terme général ke^{-k} converge par comparaison des séries de termes positifs.

Notons que l'on aurait aussi pu reconnaître une série géométrique dérivée convergente en écrivant $ke^{-k} = \frac{1}{e} \cdot k \left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}$ et en remarquant que $\frac{1}{e} \in]-1, 1[$.

- (xi) On a affaire à une série télescopique divergente : en effet, on a

$$\sum_{n=1}^N \left[\ln((n+1)^2) - \ln(n^2) \right] = \ln((N+1)^2) - \ln(1^2) = 2 \ln(N+1) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

- (xii) On a $\ln(n^2 + 1) - \ln(n^2) = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$, donc la série de terme général $\ln(n^2 + 1) - \ln(n^2)$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

(xiii) On a $e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$, or $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ donc

$$\left(\arctan \left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \right) \right)^2 \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \right)^2.$$

Cherchons à présent un équivalent de cette dernière quantité lorsque $k \rightarrow +\infty$: en utilisant les développements limités $e^x = 1 + x + o(x)$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$, on obtient

$$e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1 + \frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) - \left(1 + \frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$$

et donc

$$\left(\arctan \left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \right) \right)^2 \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \right)^2 \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2k} \right)^2 = \frac{1}{4k^2}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{4k^2}$ converge en tant que multiple d'une série de Riemann de paramètre $2 > 1$. Ainsi, la série de terme général $\left(\arctan \left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1 + \frac{1}{k}} \right) \right)^2$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

(xiv) On a $\frac{(n+1)\sin(\frac{1}{n})}{(n+3)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{n^2} = \frac{1}{n^2}$, or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$), donc la série de terme général $\frac{(n+1)\sin(\frac{1}{n})}{(n+3)^2}$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

(xv) Lorsque $j \rightarrow +\infty$, on a $\sin\left(\frac{1}{j}\right) \rightarrow 0$ donc $\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{j}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{j}\right) \sim \frac{1}{j}$. Or la série des $\frac{1}{j}$ diverge (c'est la série harmonique), donc la série de terme général $\sin\left(\frac{1}{j}\right)$ et celle des $\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{j}\right)\right)$ divergent elles aussi par comparaison de séries à termes positifs.

(xvi) En reconnaissant une somme télescopique, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \ln\left(\frac{1 + \sqrt{n+1}}{1 + \sqrt{n}}\right) &= \sum_{n=1}^N \left(\ln(1 + \sqrt{n+1}) - \ln(1 + \sqrt{n}) \right) \\ &= \ln(1 + \sqrt{N+1}) - \ln(2) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} +\infty, \end{aligned}$$

donc la série de terme général $\ln\left(\frac{1 + \sqrt{n+1}}{1 + \sqrt{n}}\right)$ diverge.

(xvii) Pour tout $n \geq 1$, le terme général $u_n := \frac{n!}{n^n}$ est strictement positif et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)},$$

or $n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = n \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \cdot \left(-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -n \cdot \frac{1}{n} = -1$ donc $n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -1$, d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-1}.$$

Or $e^{-1} < 1$, donc la série étudiée converge d'après la règle de D'Alembert.

(xviii) On a $\frac{2^n}{3\sqrt{n}} = e^{n \ln(2) - \sqrt{n} \ln(3)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ puisque $n \ln(2) - \sqrt{n} \ln(3) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$; ainsi, on a aussi $\frac{2^n(n^3+1) \ln(n)}{3\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, donc la série étudiée diverge grossièrement.

(xix) Le terme général $u_n := \left(\frac{2n+\sin(n)}{3n}\right)^n$ est positif et

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2n + \sin(n)}{3n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3} \quad \text{donc} \quad \sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{3} < 1,$$

donc la série étudiée converge d'après la règle de Cauchy.

(xx) On a $\left|\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$ pour tout $n \geq 1$, or la série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$, donc la série de terme général $\left|\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right|$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi, la série de terme général $\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ converge absolument, donc elle converge.

(xxi) On va montrer que la série converge absolument. Appliquons la règle de D'Alembert au terme strictement positif $\left|\frac{(-2)^k}{\sqrt{k!}}\right| = \frac{2^k}{\sqrt{k!}}$: on a

$$\frac{\frac{2^{k+1}}{\sqrt{(k+1)!}}}{\frac{2^k}{\sqrt{k!}}} = \frac{2}{\sqrt{k+1}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0 < 1,$$

donc la série $\sum_{n \geq 0} \left|\frac{(-2)^k}{\sqrt{k!}}\right|$ converge. Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-2)^k}{\sqrt{k!}}$ converge absolument, donc elle converge.

(xxii) On pourrait appliquer le même raisonnement que dans le point précédent. Pour varier les plaisirs, remarquons plutôt que

$$\left|\frac{x^k}{(2k+1)!}\right| = \frac{|x|^k}{(2k+1)!} \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{|x|^k}{k!}\right),$$

or la série de terme général $\frac{|x|^k}{k!}$ converge en tant que série exponentielle, donc $\sum_{n \geq 0} \left|\frac{x^k}{(2k+1)!}\right|$ converge par comparaison des séries à termes positifs, ce qui implique que $\sum_{n \geq 0} \frac{x^k}{(2k+1)!}$ converge absolument donc converge.

Correction de l'exercice 8.

(i) On reconnaît une série géométrique de paramètre $\frac{1}{e} \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{\frac{1}{e}}{1 - \frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}.$$

(ii) On reconnaît ici une série géométrique de paramètre $\frac{2}{9} \in]-1, 1[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{3^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{3}{7}.$$

- (iii) En écrivant $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (décomposition déjà rencontrée plusieurs fois en exercice !), on reconnaît une série télescopique :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 1$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

- (iv) On voit encore une fois apparaître une série télescopique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(\arctan \left(\frac{1}{k} \right) - \arctan \left(\frac{1}{k+1} \right) \right) &= \arctan(1) - \arctan \left(\frac{1}{N+1} \right) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\arctan \left(\frac{1}{k} \right) - \arctan \left(\frac{1}{k+1} \right) \right) = \frac{\pi}{4}.$$

- (v) On fait cette fois apparaître la somme d'une série géométrique dérivée de paramètre $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{1}{2} \right)^{i-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2} \right)^2} = 2.$$

- (vi) On fait apparaître la somme d'une série géométrique dérivée deux fois de paramètre $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$:

$$\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i(i-1)}{2^i} = \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1) \left(\frac{1}{2} \right)^{i-2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2} \right)^3} = 4.$$

- (vii) Pour tout $i \geq 2$, on a $\frac{i}{2^i} + \frac{i(i-1)}{2^i} = \frac{i^2}{2^i}$. En utilisant les résultats des deux points précédents et la linéarité de la somme des séries convergentes, on déduit que la série de terme général $\frac{i^2}{2^i}$ converge et que

$$\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i^2}{2^i} = \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i}{2^i} + \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i(i-1)}{2^i} = 2 - \frac{1}{2} + 4 = \frac{11}{2}.$$

- (viii) On reconnaît une série exponentielle de paramètre x^2 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} - 1 = e^{x^2} - 1.$$

- (ix) En reconnaissant deux séries géométriques de paramètre $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$, on peut écrire

$$\sum_{a=0}^{+\infty} \sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{a+b}} = \sum_{a=0}^{+\infty} \sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{2^b} = \sum_{a=0}^{+\infty} \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 4.$$

(x) Pour tout $n \geq 0$, la somme

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \binom{n}{m} 2^m m^{n-m} = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!(n-m)!} 2^m m^{n-m}$$

est finie puisqu'elle ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Pour tout $m \geq 0$, on calcule la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \binom{n}{m} 2^m m^{n-m} = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{m!(n-m)!} 2^m m^{n-m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^m}{m!} \frac{m^k}{k!} = \frac{2^m}{m!} e^m = \frac{(2e)^m}{m!}$$

en reconnaissant une somme de série exponentielle. Ainsi, les conditions du théorème de Fubini sont vérifiées, et on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \binom{n}{m} 2^m m^{n-m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \binom{n}{m} 2^m m^{n-m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2e)^m}{m!} = e^{2e}$$

en reconnaissant une nouvelle somme de série exponentielle.

Correction de l'exercice 9.

1. Comme $\alpha > 1$, la série de Riemann de terme général $\frac{1}{k^\alpha}$ converge. Ainsi, pour tout $n \geq 1$ le terme r_n , qui est son reste d'ordre n , est bien défini.
2. Comme la série de Riemann de terme général $\frac{1}{k^\alpha}$ est convergente, on a $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
3. Soient $n \geq 1$ et $N > n$. Pour tout $k \in \llbracket n+1, N \rrbracket$ et tout $t \in [k-1, k]$, on a $t \leq k \leq t+1$ et donc, par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur \mathbb{R}_+^* : $\frac{1}{(t+1)^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$, d'où en intégrant cette inégalité sur $[k-1, k]$:

$$\int_{k-1}^k \frac{dt}{(t+1)^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}$$

soit

$$\int_{k-1}^k \frac{dt}{(t+1)^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

En sommant ces dernières inégalités pour $k \in \llbracket n+1, N \rrbracket$ et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_n^N \frac{dt}{(t+1)^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cet encadrement se réécrit sous la forme

$$\left[\frac{1}{-\alpha+1} (t+1)^{-\alpha+1} \right]_n^N \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1} \right]_n^N$$

soit

$$\frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}} \right) \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient alors l'encadrement suivant :

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq r_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

4. Les deux termes qui encadrent r_n dans les inégalités ci-dessus sont équivalents à $\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$: on en déduit que

$$r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

d'après le théorème des gendarmes pour les équivalents.

Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général r_n est donc de même nature que la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$: ainsi, elle converge si et seulement si $\alpha-1 > 1$, ce qui équivaut à $\alpha > 2$.

Correction de l'exercice 10.

1. Pour tout $n \geq e^3$, on a $\ln(n)^n \geq 3^n > 0$, d'où $0 \leq \frac{2^n}{\ln(n)^n} \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. La série $\sum_{n \geq 2} \frac{2^n}{\ln(n)^n}$ converge donc d'après le principe de comparaison des séries à termes positifs puisque $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{2}{3} \in]-1, 1[$.

2. On peut calculer explicitement la somme géométrique : $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{4}{3}$.

L'autre somme peut être minorée par son premier terme :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{\ln(n)^n} \geq \frac{4}{\ln(2)^2} \geq \frac{4}{\ln(e)^2} = 4.$$

Ainsi, on a $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{\ln(n)^n} \geq \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, ce qui illustre le fait que la majoration du terme général $\frac{2^n}{\ln(n)^n}$ par $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ à partir d'un certain rang ne permet pas de tirer de conclusion sur la comparaison des sommes des séries associées.

Correction de l'exercice 11. Supposons que $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Ainsi, on a $0 \leq u_n \leq 1$ à partir d'un certain rang, donc $0 \leq u_n^2 \leq u_n$ à partir de ce rang. Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n^2 converge donc, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 12.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, on a

$$\sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1 + x}$$

car $-x \neq 1$. En intégrant cette égalité sur $[0, 1]$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\sum_{k=0}^n \int_0^1 (-x)^k dx = \int_0^1 \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} dx,$$

soit

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = [\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} dx = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} dx,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. Pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left| \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \right| = \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$. Ainsi, par l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\left| \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \right| dx \leq \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où $\int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. L'égalité démontrée dans la question précédente montre alors que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1}$ converge et que sa somme vaut bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2).$$

3. La série de terme général $\left| \frac{(-1)^k}{k+1} \right| = \frac{1}{k+1}$ diverge en tant que série harmonique. Ainsi, la série étudiée ne converge pas absolument : elle est *semi-convergente*.

Correction de l'exercice 13.

1. La série étant à terme général positif, elle est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente si elle est majorée et divergente (vers $+\infty$) sinon.
2. Pour tout $p \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} H_{2p} - H_p &= \sum_{n=1}^{2p} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^p \frac{1}{n} = \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{1}{n} \\ &\geq \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{1}{2p} \quad \text{par minoration terme à terme} \\ &= (2p - (p+1) + 1) \cdot \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Pour tout $N \geq 2$ on a

$$H_{2N} = \sum_{p=1}^N (H_{2p} - H_{2p-1}) + H_1 \geq \sum_{p=1}^N \frac{1}{2} + 1 \geq \frac{N}{2} + 1 = \frac{N+3}{2}.$$

Ainsi, la suite $(H_N)_{N \geq 1}$ n'est pas majorée, donc la série harmonique diverge.

Correction de l'exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $P : q \mapsto \sum_{k=0}^n q^k$ est dérivable deux fois sur \mathbb{R} en tant que fonction polynomiale, et pour tout $q \in \mathbb{R}$ on a

$$P''(q) = \sum_{k=2}^n k(k-1)q^{k-2}$$

par linéarité de la dérivation.

Or pour tout $q \neq 1$, on a aussi $P(q) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, ce qui définit une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (en tant que quotient de fonctions deux fois dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas). En dérivant deux fois cette relation, on a pour tout $q \neq 1$:

$$P'(q) = \frac{-(n+1)q^n(1-q) + (1-q^{n+1})}{(1-q)^2} = \frac{1+nq^{n+1}-(n+1)q^n}{(1-q)^2},$$

puis, après simplifications :

$$P''(q) = \frac{2+2(n^2-1)q^n-(n-1)nq^{n+1}-n(n+1)q^{n-1}}{(1-q)^3}.$$

Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a l'égalité suivante :

$$\sum_{k=2}^n k(k-1)q^{k-2} = \frac{2+2(n^2-1)q^n-(n-1)nq^{n+1}-n(n+1)q^{n-1}}{(1-q)^3}.$$

Si $|q| \geq 1$, la série de terme général $k(k-1)q^{k-2}$ diverge grossièrement. En revanche, si $|q| < 1$, l'égalité ci-dessus et le théorème de croissance comparée montrent que

$$\sum_{k=2}^n k(k-1)q^{k-2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{(1-q)^3},$$

donc la série converge et sa somme vaut $\frac{2}{(1-q)^3}$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 15.

- Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. On a alors $n^{\frac{1+\alpha}{2}} u_n = n^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \cdot \ell = 0$ puisque $\frac{1-\alpha}{2} < 0$, donc

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{soit} \quad u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right).$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{1+\alpha}{2} > 1$, donc $\sum u_n$ converge aussi par comparaison des séries à termes positifs.

2. Supposons qu'il existe $\alpha < 1$ tel que $n^\alpha u_n$ tende vers $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. On a alors

$$n^{\frac{\alpha+1}{2}} u_n = n^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot n^\alpha u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

en vertu de l'égalité formelle $\ell \cdot +\infty = +\infty$ (rappelons que $\frac{1-\alpha}{2} > 0$ et $\ell > 0$). Ainsi, on a $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et

$$\frac{\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(u_n).$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{\alpha+1}{2} < 1$, donc la série $\sum u_n$ diverge aussi par comparaison des séries à termes positifs.

Correction de l'exercice 16. L'égalité à établir se réécrit sous la forme

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} d_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} d_{m,n}. \quad (1)$$

Or pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ le réel $u_{m,n} d_{m,n}$ est positif en tant que produit de réels positifs, et on a $0 \leq u_{m,n} d_{m,n} \leq u_{m,n}$. Mais pour tout $m \geq 0$, la série $\sum_{n \geq 0} u_{m,n}$ converge donc par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 0} u_{m,n} d_{m,n}$ converge elle aussi. De même, pour tout $n \geq 0$, la série $\sum_{m \geq 0} u_{m,n} d_{m,n}$ converge puisque c'est aussi le cas de la série $\sum_{m \geq 0} u_{m,n}$. Ainsi, on peut bien appliquer le théorème de Fubini pour obtenir l'égalité (1), ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 17.

1. Pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2+1-2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, d'où l'inégalité attendue.
2. Soient a_1, \dots, a_n des réels strictement positifs¹. On a

$$\begin{aligned} (a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) &= \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{1}{a_\ell} \right) \\ &= \sum_{1 \leq k, \ell \leq n} \frac{a_k}{a_\ell} = \sum_{1 \leq j < i \leq n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i} \\ &\geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} 2 + n \quad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

1. L'inégalité à établir se réécrit

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq n \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)^{-1}$$

et revient donc à dire que la *moyenne arithmétique* des a_i est supérieure à leur *moyenne harmonique*.

$$= \sum_{i=1}^n 2(i-1) + n = 2 \sum_{m=0}^{n-1} m + n = n(n-1) + n = n^2,$$

où la troisième égalité s'obtient en écrivant que tous les termes de la somme sont soit de la forme $\frac{a_i}{a_j}$ ou $\frac{a_j}{a_i}$ avec $1 \leq i < j \leq n$, soit de la forme $\frac{a_i}{a_i}$ avec $1 \leq i \leq n$.

3. On suit l'indication en écrivant que pour tout $n \geq 1$ on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 u_k &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} k^2 u_k + \frac{1}{n^2} \sum_{k=\lfloor \sqrt{n} \rfloor+1}^n k^2 u_k \\ &\leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} n u_k + \sum_{k=\lfloor \sqrt{n} \rfloor+1}^n u_k = \frac{1}{n} S_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} + S_n - S_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}, \end{aligned}$$

où pour tout $k \geq 1$, la quantité $S_p := \sum_{k=1}^p u_k$ est la p -ième somme partielle de la série de terme général u_k . Or S_n et $S_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$, tendent tous deux vers la somme S de la série des u_k lorsque $n \rightarrow +\infty$, donc

$$\frac{1}{n} S_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} + S_n - S_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

d'où, par encadrement,

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^n k^2 u_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 u_k} \right) \geq n^2$$

d'après la question 2, d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 u_k} \geq \left(\frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k^2 u_k \right) \right).$$

Or le terme de droite tend vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ d'après la question 3, d'où $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 u_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ par comparaison. Ainsi, la série de terme général $\frac{1}{k^2 u_k}$ diverge, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 18.

1. Si $u_n = -1 + \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$p_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \frac{2}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $p = 0$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en développant le produit $p_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k)$ on obtient une somme de termes positifs, dont $1^n = 1$ (le terme obtenu en multipliant les 1 entre eux), u_1 (le terme obtenu en multipliant u_1 et uniquement des 1), u_2 (obtenu en multipliant 1 puis u_2 et uniquement des 1), et ainsi de suite jusqu'à u_n . Ainsi, on a

$$p_n \geq 1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 + S_n,$$

ce qui établit l'inégalité de gauche dans l'encadrement recherché.

À présent, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x \geq 1 + x$ (par exemple en étudiant la fonction $x \mapsto e^x - (1 + x)$ qui atteint son minimum 0 pour $x = 0$ et est donc positive), ce qui permet d'écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$p_n = \prod_{k=1}^n (1 + u_k) \leq \prod_{k=1}^n e^{u_k} = e^{u_1 + \cdots + u_n} = e^{S_n},$$

d'où l'encadrement recherché.

La série $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant croissante (puisque les u_k sont positifs), si elle diverge elle tend vers $+\infty$, donc l'inégalité $p_n \geq 1 + S_n$ montre que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge elle aussi vers $+\infty$.

À présent, si la série $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, alors elle est majorée, donc c'est aussi le cas de la suite $(e^{S_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$. L'inégalité $e^{S_n} \geq p_n$ montre alors que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée; or elle est croissante puisque les u_k sont positifs, donc $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Ainsi, on a bien montré que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

- (b) Si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, alors $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge d'après la question précédente; ainsi, la série de terme général u_n converge, donc $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_n = \exp \left(\ln \left(\prod_{k=1}^n (1 + u_k) \right) \right) = \exp \left(\sum_{k=1}^n \ln(1 + u_k) \right).$$

Si la série des $\ln(1 + u_k)$ converge, c'est donc le cas de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par continuité de \exp .

Réciproquement, en écrivant $\sum_{k=1}^n \ln(1 + u_k) = \ln(p_n)$ pour tout $n \geq 1$ (ce qui est possible puisque les $1 + u_k$ et p_n sont strictement positifs), on en déduit que si $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive, alors la série des $\ln(1 + u_k)$ converge elle aussi.

On se place désormais dans le cas où les u_n sont tous positifs.

Alors $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et supérieure à 1, donc elle ne peut converger vers 0. On a alors équivalence entre la convergence de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et celle de la série des $\ln(1 + u_n)$.

Supposons que la série des $\ln(1 + u_n)$ converge. C'est donc le cas de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$; mais on a vu dans la question précédente que cela implique que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a alors $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et on peut utiliser le résultat de comparaison des séries à termes positifs pour conclure que la série des u_n converge.

Réciproquement, supposons que la série des u_n converge. D'après la question 2, cela implique la convergence de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et le fait que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$; on peut alors utiliser le même équivalent $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ que précédemment pour conclure que la série de terme général $\ln(1 + u_n)$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

Ainsi, sous l'hypothèse de positivité des u_n , les séries de termes généraux $\ln(1 + u_n)$ et u_n sont bien de même nature.

Correction de l'exercice 19.

1. Soit $k \geq 1$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* . En intégrant cette inégalité sur $[k, k+1]$, on obtient

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k},$$

soit

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Alternativement, on aurait pu utiliser l'inégalité des accroissements finis (qui est en fait un outil équivalent) : si $k \geq 1$, la fonction \ln est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$, et pour tout $t \in]k, k+1[$ on a $\ln'(t) = \frac{1}{t}$ donc

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln'(t) \leq \frac{1}{k}$$

par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* . L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction \ln entre les points k et $k+1$ donne alors

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}.$$

2. Si $n \geq 1$, en sommant l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on obtient

$$\sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{soit} \quad \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

en reconnaissant une somme télescopique, donc $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \geq 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est positive.

Par ailleurs, si $n \geq 1$ on a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leq 0$$

d'après la question précédente, donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante. Le fait qu'elle converge vers une limite γ est alors une conséquence du théorème de la limite monotone.

3. On a $H_n = u_n + \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(\ln(n)) + \ln(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ puisque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \gamma$ et $\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Correction de l'exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto x^{n^2}(1-x)$ est dérivable sur $[0, 1]$, et pour tout $x \in [0, 1]$ on a

$$f'(x) = n^2 x^{n^2-1}(1-x) - x^{n^2} = x^{n^2-1}(n^2(1-x) - x),$$

donc

$$f'(x) \geq 0 \iff n^2(1-x) - x \geq 0 \iff n^2 \geq x(n^2 + 1) \iff x \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Ainsi, f admet un maximum en $\frac{n^2}{n^2+1}$ égal à $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{n^2+1}$, or $\frac{n^2}{n^2+1} \in [0, 1]$ donc ce maximum est inférieur à $\frac{1}{n^2+1}$. On a donc établi l'encadrement suivant :

$$\forall n \geq 1, \quad \forall x \in [0, 1], \quad 0 \leq x^{n^2}(1-x) \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$ on a $0 \leq (u_n)^{n^2}(1-u_n) \leq \frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$; ainsi, la série de terme général $(u_n)^{n^2}(1-u_n)$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Correction de l'exercice 21.

1. Soit $\alpha' = \frac{1+\alpha}{2}$.

Si $\alpha > 1$, on a $\alpha > \alpha' > 1$ donc $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right)$ par croissance comparée, or la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha'}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha' > 1$, donc la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Si $\alpha < 1$, on a $\alpha < \alpha' < 1$ donc $\frac{1}{n^{\alpha'}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}\right)$ par croissance comparée, et la divergence de la série de Riemann de paramètre $\alpha' < 1$ implique cette fois celle de la série de terme général positif $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.

2. (a) La fonction $x \mapsto x \ln^\beta(x)$ est strictement positive et croissante sur $[n-1, n]$ en tant que produit de fonctions strictement positives et croissantes. Ainsi, pour tout $x \in [n-1, n]$ on a

$$0 < x \ln^\beta(x) \leq n \ln^\beta(x) \leq (n+1) \ln^\beta(n+1),$$

d'où l'encadrement attendu par décroissance de la fonction inverse sur \mathbb{R}_+^* .

- (b) Si $n \geq 3$, en encadrant l'inégalité démontrée dans la question précédente sur $[n-1, n]$ on obtient

$$\int_{n-1}^n \frac{dx}{(x+1) \ln^\beta(x+1)} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{n \ln^\beta(n)} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x \ln^\beta(x)}.$$

En effectuant le changement de variable $u = x + 1$ dans l'intégrale de gauche et en remarquant que l'intégrale centrale est l'intégrale d'une constante, cet encadrement se réécrit

$$\int_n^{n+1} \frac{du}{u \ln^\beta(u)} \leq \frac{1}{n \ln^\beta(n)} \leq \int_{n-1}^n \frac{dx}{x \ln^\beta(x)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

- (c) Soit $N \geq 3$. En sommant l'inégalité démontrée dans la question précédente pour $n \in \llbracket 3, N \rrbracket$, on obtient

$$\sum_{n=3}^N \int_n^{n+1} \frac{dx}{x \ln^\beta(x)} \leq \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \ln^\beta(n)} \leq \sum_{n=3}^N \int_{n-1}^n \frac{dx}{x \ln^\beta(x)}$$

ce qui, grâce à la relation de Chasles, se réécrit

$$\int_3^{N+1} \frac{dx}{x \ln^\beta(x)} \leq \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \ln^\beta(n)} \leq \int_{n=2}^N \frac{dx}{x \ln^\beta(x)}.$$

Si $\beta \neq 1$, en remarquant que $x \mapsto \frac{1}{x \ln^\beta(x)} = \ln'(x) \ln^\beta(x)$ admet $x \mapsto \frac{1}{1-\beta} \ln^{1-\beta}(x)$ pour primitive, on peut réécrire cet encadrement sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\beta} \left(\ln^{1-\beta}(N+1) - \ln^{1-\beta}(3) \right) &\leq \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \ln^\beta(n)} \\ &\leq \frac{1}{1-\beta} \left(\ln^{1-\beta}(N) - \ln^{1-\beta}(2) \right). \end{aligned}$$

Si $\beta < 1$, on a $1 - \beta > 0$ donc le membre de gauche de l'inégalité tend vers $+\infty$ lorsque $N \rightarrow +\infty$, donc

$$\sum_{n=3}^N \frac{1}{n \ln^\beta(n)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Si $\beta > 1$, on a $1 - \beta < 0$ donc le terme de droite de l'inégalité tend vers une limite finie lorsque $N \rightarrow +\infty$; ainsi, la série des $\frac{1}{n \ln^\beta(n)}$ est majorée, donc elle converge puisqu'elle est à termes positifs.

Il reste à étudier le cas $\beta = 1$: la fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)} = \frac{\ln'(x)}{\ln(x)}$ admet $x \mapsto \ln(\ln(x))$ pour primitive sur $[3, N]$, donc l'encadrement obtenu donne sous la forme

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{n=3}^N \frac{1}{n \ln(n)};$$

en passant à la limite lorsque $N \rightarrow +\infty$, on obtient que

$$\sum_{n=3}^N \frac{1}{n \ln(n)} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty,$$

c'est-à-dire que la série de terme général $\frac{1}{n \ln(n)}$ diverge.

3. Étudions le cas où $\alpha = 1$ et $\beta < 0$. Lorsque $\beta < 0$, on a $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n \ln^\beta(n)}\right)$, or la série harmonique diverge, donc la série des $\frac{1}{n \ln^\beta(n)}$ diverge par comparaison des séries à termes positifs.

Ainsi, si $\alpha \neq 1$, la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est donnée par la valeur de α : elle converge si $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$, la nature de la série est donnée par la valeur de β : elle converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leq 1$.

4. Les conditions attendues sont satisfaites en prenant $u_n = \frac{1}{n \ln(n)}$ d'après ce qui précède.

Correction de l'exercice 22. Lalala

Correction de l'exercice 23. Regarder si pas déjà écrit !

Correction de l'exercice 24. Lalala

Correction de l'exercice 25. Lalala

Correction de l'exercice 26. Lalala

Correction de l'exercice 27. Lalala

Correction de l'exercice 28. Lalala