Sommes et produits

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 21.

1. Si $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{\cancel{n!}}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!}} = \frac{(n-k)!}{(n-k-1)!}\frac{k!}{(k+1)!} = \frac{n-k}{k+1}.$$

Or les coefficients binomiaux sont des quantités positives, donc on peut écrire

$$\begin{aligned}\binom{n}{k+1} > \binom{n}{k} \quad &\iff \quad \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} > 1 \quad \iff \quad \frac{n-k}{k+1} > 1\\ &\iff \quad n-k > k+1 \text{ car } k+1 > 0,\end{aligned}$$

donc $\binom{n}{k+1}$ est strictement supérieur à $\binom{n}{k}$ si et seulement si $k < \frac{n-1}{2}$.

On considère alors deux cas [1] :

- Si n est pair, le nombre $\frac{n-1}{2}$ est situé entre les entiers $\frac{n}{2}-1$ et $\frac{n}{2}$. La liste des $\binom{n}{k}$ admet donc son maximum pour $k = \frac{n}{2}$.
- Si n est impair, le nombre $\frac{n-1}{2}$ est un entier. La liste des $\binom{n}{k}$ admet donc son maximum en cet entier. On remarque par ailleurs que $\binom{n}{\frac{n-1}{2}}$ et $\binom{n}{\frac{n+1}{2}}$ ont la même valeur ; $\binom{n}{k}$ est donc aussi maximal lorsque $k = \frac{n+1}{2}$.

Correction de l'exercice 22. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(k+1)k! = (k+1)!$, soit $kk! + k! = (k+1)!$, soit encore $kk! = (k+1)! - k!$. On peut alors écrire

$$\sum_{k=0}^{n} kk! = \sum_{k=0}^{n}\big((k+1)! - k!\big) = (n+1)! - 0! = (n+1)! - 1$$

en reconnaissant une somme télescopique.

Correction de l'exercice 23. Suivant l'indication, on calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(1-x_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}(1-2x_k+x_k^2) &= \sum_{k=1}^{n} 1 - 2\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \quad \text{par linéarité}\\ &= n - 2n + n \quad \text{d'après les hypothèses faites par l'énoncé}\\ &= 0.\end{aligned}$$

1. En regardant le triangle de Pascal, on observe effectivement que les coefficients binomiaux de chaque ligne croissent jusqu'au milieu de la ligne puis décroissent de façon symétrique.

Ainsi, la somme des quantités $(1-x_k)^2$ est nulle ; ces réels étant positifs, ils sont donc tous nuls. On a donc $(1-x_k)^2=0$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, soit $1-x_k=0$, soit encore $x_k=1$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 24.

1. Si $k\in[\![1,n]\!]$, on sait que $\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, soit $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$.

   On utilise cette relation pour réécrire la somme proposée :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}&=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}\quad\text{car le terme d'indice 0 est nul}\\&=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\\&=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\quad\text{par linéarité}\\&=n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}\quad\text{en posant } i=k-1\\&=n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}1^i1^{n-1-i}\\&=n(1+1)^{n-1}\quad\text{d'après la formule du binôme}\\&=n2^{n-1}.\end{aligned}$$

2. Par le procédé désormais classique d'interversion des sommes, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{j}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=n2^{n-1}$$

   d'après le point précédent.

Correction de l'exercice 25. Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme $-t\neq 1$, on peut écrire par linéarité

$$\alpha_n(t)=t^{a-1}\sum_{k=0}^{n}(-t)^k=t^{a-1}\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}=\frac{t^{a-1}+(-1)^nt^{a+n}}{1+t}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}\beta_n(t)&=\sum_{k=1}^{n}(-1)^kt^{k-a-1}=t^{-a-1}\sum_{k=1}^{n}(-t)^k\\&=t^{-a-1}\frac{-t-(-t)^{n+1}}{1+t}=\frac{-t^{-a}+(-1)^nt^{n-a}}{1+t}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 26.

1. En développant $(a_1+a_2)\times(b_1+b_2)$ et $(a_1+a_2+a_3)\times(b_1+b_2+b_3)$, on acquiert l'intuition de la formule suivante :

$$(a_1+\cdots+a_n)\times(b_1+\cdots+b_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_ib_j.$$

2. La formule ci-dessus appliquée au cas où $a_i=b_i$ pour tout i donne

$$(a_1+\cdots+a_n)^2=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_ia_j.$$

On découpe ensuite la somme obtenue en trois « paquets » selon que les couples (i,j) considérés vérifient $i<j$, $i=j$ ou $i>j$:

$$\begin{aligned}(a_1+\cdots+a_n)^2&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j+\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}a_ia_j\\&=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\end{aligned}$$

car les sommes $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j$ et $\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}a_ia_j$ sont égales (l'une est obtenue à partir de l'autre en échangeant les rôles des indices i et j). Ainsi, on obtient

$$(a_1+\cdots+a_n)^2=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}a_ia_j+\sum_{i=1}^{n}a_i^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 27.

1. (a) En reconnaissant un produit télescopique, on peut écrire

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad p_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{n+1}{1}=n+1$$

   (b) En reconnaissant une fois de plus un produit télescopique, on a

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad p_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}=\frac{1}{n+1}.$$

   (c) On a cette fois, en reconnaissant deux produits télescopiques :

$$\begin{aligned}\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad p_n&=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k^2+2k}{(k+1)^2}\\&=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\frac{k+2}{k+1}=\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{k+1}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{k+2}{k+1}\right)\\&=\frac{1}{n+1}\frac{n+2}{2}=\frac{n+2}{2n+2}.\end{aligned}$$

2. Démontrons pour tout $n \geqslant 1$ la proposition $\mathcal{P}_n$: « $p_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$ ».

   Initialisation :

   On a $p_2 = u_1 \times u_2 = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{2 \cdot 1}$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

   Hérédité :

   Soit $n \geqslant 1$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned}
p_{2(n+1)} &= p_{2n+2} = p_{2n}u_{2n+1}u_{2n+2} \\
&= p_{2n}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2n+2}\right) \quad \text{car } 2n+1 \text{ est impair et } 2n+2 \text{ est pair} \\
&= p_{2n}\frac{2n}{2n+1}\frac{2n+3}{2n+2} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)\frac{2n(2n+3)}{(2n+1)(2n+2)} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= (2n+1)\frac{(2n+3)}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{2n+3}{2n+2} \\
&= 1 + \frac{1}{2n+2} = 1 + \frac{1}{2(n+1)},
\end{aligned}$$

   donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   Conclusion :

   La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout rang $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

3. Le plus simple est de procéder une fois encore par récurrence : démontrons pour tout $n \geqslant 1$ la proposition $\mathcal{P}_n$: « $(1 - a^2)p_n = 1 - a^{2^{n+1}}$ ».

   Initialisation :

   On a $(1 - a^2)p_1 = (1 - a^2)u_1 = (1 - a^2)(1 + a^2) = 1 - a^4 = 1 - a^{2^2}$ grâce à une identité remarquable, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

   Hérédité :

   Soit $n \geqslant 1$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned}
(1 - a^2)p_{n+1} &= (1 - a^2)p_n u_{n+1} \\
&= \left(1 - a^{2^{n+1}}\right)\left(1 + a^{2^{n+1}}\right) \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= 1^2 - \left(a^{2^{n+1}}\right)^2 = 1 - a^{2 \cdot 2^{n+1}} = 1 - a^{2^{n+2}}
\end{aligned}$$

   grâce à la même identité remarquable que dans l'initialisation, donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

   Conclusion :

   La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout rang $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

Notons que l'on pouvait proposer une preuve plus directe et (beaucoup) plus inspirée du résultat attendu. En fixant $n \geqslant 1$, on remarque que le développement du produit

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + a^{2^k}\right)$$

est la somme de tous les termes de la forme $a^{2^{i_1}} a^{2^{i_2}} \cdots a^{2^{i_p}}$ avec $p \in [\![0, n]\!]$ (le produit valant 1 si $p = 0$) et $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$, c'est-à-dire que

$$p_n = \sum_{p=0}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} a^{2^{i_1}} a^{2^{i_2}} \cdots a^{2^{i_p}} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n} a^{2^{i_1} + 2^{i_2} + \cdots + 2^{i_p}}.$$

Or un entier de la forme $2^{i_1} + 2^{i_2} + \cdots + 2^{i_p}$, avec $p \in [\![0, n]\!]$ (la somme valant 0 si $p = 0$) et $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$, est un entier pair de $[\![0, 2^{n+1} - 1]\!]$, et chaque entier pair de $[\![0, 2^{n+1} - 1]\!]$ s'écrit de manière unique sous cette forme (c'est le résultat *d'existence et d'unicité du développement en base* 2 *d'un entier*). On a donc

$$p_n = \sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ pair}}}^{2^{n+1}-1} a^i,$$

donc

$$p_n = \sum_{j=0}^{2^n - 1} a^{2j} = \sum_{j=0}^{2^n - 1} (a^2)^j = \frac{1 - (a^2)^{2^n}}{1 - a^2} = \frac{1 - a^{2^{n+1}}}{1 - a^2},$$

d'où le résultat attendu.

Correction de l'exercice 28.

1. Supposons que le mathématicien perde ses n premières mises et gagne au $(n+1)$-ième coup, avec $n \in \mathbb{N}$. Ses pertes brutes s'élèvent alors à

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = (2^n - 1)€,$$

   tandis que la somme qu'il récupère au $(n+1)$-ième coup, égale à sa mise à ce coup, vaut 2^n€. Ainsi, le joueur récupère bien l'ensemble de ses pertes plus un euro à l'issue de la martingale.

2. Le résultat de la question précédente peut donner l'impression que la martingale présentée apporte de façon certaine un gain au joueur qui l'emploie. En pratique, l'efficacité de cette stratégie est limitée puisqu'elle suppose de pouvoir miser une somme arbitrairement grande sous peine de tout perdre avec une probabilité non nulle.

   Par exemple, si le joueur dispose initialement de 35€, il peut se permettre de poursuivre la martingale jusqu'au cinquième échec (il aura alors perdu $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$€) mais pas au-delà ; il devra alors quitter le jeu en ayant perdu l'essentiel de son capital de départ.

On peut montrer avec des arguments probabilistes qu'un joueur adoptant une stratégie de martingale doublante avec un capital de départ fini est perdant en moyenne – ce qui explique pourquoi la pratique des martingales n'est pas interdite dans les casinos !

Correction de l'exercice 29. Les dépenses de l'entreprise étant constantes, son profit suit au fil des années une progression arithmétique. Le profit réalisé la première année vaut $1000 - 9000 = -8000$€, tandis que celui réalisé la vingtième année (donc 19 ans plus tard) vaut $1000 + 19 \cdot 1000 - 9000 = 11\,000$€. D'après la formule donnant la valeur de la somme de termes successifs d'une suite arithmétique, le profit total réalisé par l'entreprise au cours de ses 20 premières années d'activité vaut donc

$$20 \times \frac{-8000 + 11\,000}{2} = 30\,000\text{€}.$$

Correction de l'exercice 30. D'après le principe des intérêts composés, pour tout $k \in [\![1, 10]\!]$, la somme remboursée à l'année k vaut

$$10\,000 \times \underbrace{(1 + 0,02) \times (1 + 0,02) \times \cdots \times (1 + 0,02)}_{k \text{ fois}} = 10\,000 \cdot 1,02^k.$$

La somme totale remboursée vaut donc

$$\sum_{k=1}^{10} 10\,000 \cdot 1,02^k = 10\,000 \cdot \frac{1,02 - 1,02^{11}}{1 - 1,02} \approx 111\,687\text{€}.$$

Correction de l'exercice 31.

1. D'après le principe des intérêts composés (voir exercice 30), la valeur du capital au terme de k périodes est $(1 + r)^k C$.
2. D'après la question précédente, la valeur rendant l'investissement et le placement indifférents en terme de rendements est $R = (1 + r)^k C$.
3. Grâce à la possibilité de placement, un capital égal à C au temps présent peut être transformé en un capital égal à $(1 + r)^k C$ dans k périodes. De la même façon, il est indifférent de toucher un revenu R dans k périodes et de toucher au temps présent un revenu $\frac{R}{(1+r)^k}$: cette dernière quantité est donc la « valeur perçue aujourd'hui » du revenu R touché dans k périodes, ce qui justifie sa dénomination de *valeur actualisée*. Le taux r permet ainsi d'exprimer un revenu futur en termes actuels, d'où son nom de *taux d'actualisation*.

   Remarquons que dans le modèle considéré ici, on ne suppose pas l'existence d'une préférence de l'agent pour le présent ni d'un risque associé au placement ; si c'était le cas, ces facteurs devraient rentrer en compte dans le calcul du taux d'actualisation, défini comme le taux qui rémunère la renonciation de l'agent à la liquidité immédiate.

4. La quantité $\sum_{k=0}^{N} \frac{R_k}{(1+r)^k}$ est la valeur actualisée totale de l'investissement, c'est-à-dire l'expression en termes actuels de ce que rapporte l'investissement. En lui retranchant le coût immédiat C, on obtient le gain monétaire en termes actuels associé à l'investissement, d'où le nom de *valeur actuelle nette*. Examiner la VAN d'un investissement constitue un critère pour arbitrer entre un investissement et un placement : si la VAN est positive, l'investissement est rentable, sinon il est préférable de placer la somme.
5. Le taux t est le taux d'actualisation qui annulerait la VAN de l'investissement : en d'autres termes, l'investissement considéré équivaut à un placement à taux t. On en déduit un critère équivalent au précédent : si $t \geqslant r$, l'investissement est rentable, sinon il est préférable de placer le capital.
6. D'après le principe des intérêts composés, à chaque période k, la somme remboursée C_k est obtenue en multipliant le principal à rembourser par la quantité $(1+r)^k$; ainsi, le principal (c'est-à-dire la partie de la somme empruntée) remboursé à la période k est $\frac{C_k}{(1+r)^k}$, d'où l'identité recherchée.
7. Pour comparer deux scénarios associés à des paiements positifs ou négatifs à différentes périodes temporelles, il suffit de considérer le problème « en termes actuels », c'est-à-dire de calculer les valeurs actualisées associées : le coût actualisé de l'emprunt est

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_k}{(1+r)^k} = C \quad \text{d'après la question précédente,}$$

tandis que la valeur actualisée totale de l'investissement est $\sum_{k=0}^{n} \frac{R_k}{(1+r)^k}$.

Pour savoir si l'investissement grâce à un emprunt est plus rentable que le fait de ne rien faire, on calcule donc à nouveau la VAN de l'investissement :

$$\mathrm{VAN} = \sum_{k=0}^{N} \frac{R_k}{(1+r)^k} - C = \sum_{k=0}^{N} \frac{R_k - C_k}{(1+r)^k},$$

qui est positive lorsque l'investissement est rentable et négative sinon.

On remarque que la formule donnant la VAN est la même dans le cas où l'on possède un capital initial (cas traité dans la question 4) et dans celui où on l'emprunte à taux r. En termes informels, un euro considéré aujourd'hui représente $(1+r)^k$ euros dans k périodes, qu'il s'agisse d'un capital possédé (question 1) ou d'une somme due (question 6) ; ainsi, que le capital initial soit possédé ou non, l'arbitrage intertemporel rendu possible par le taux d'actualisation r conduit à prendre les mêmes décisions d'investissement, et il n'est pertinent que de considérer les rendements nets $R_k - C_k$ associés aux différentes périodes.

Correction de l'exercice 32.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $A_{-1} := 0$, on peut écrire que $a_k = A_k - A_{k-1}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, d'où

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=0}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n} A_{k-1} b_k \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k b_k - \sum_{j=-1}^{n-1} A_j b_{j+1} \quad \text{en posant } j = k-1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_k + A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} - \underbrace{A_{-1} b_0}_{=0} \quad \text{(l'indice est muet)} \\
&= A_n b_n - \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k) \quad \text{par linéarité,}
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. En posant $b_k = x^k$ et $a_k = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(x^{k+1} - x^k) &= \sum_{k=0}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k) \\
&= A_n b_n - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= (n+1)x^n - \sum_{k=0}^{n} x^k = (n+1)x^n - \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}.
\end{aligned}$$

Or on a aussi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(x^{k+1} - x^k) &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(x-1)x^k \\
&= (x-1) \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) x^k \quad \text{par linéarité} \\
&= (x-1) \sum_{j=1}^{n} j x^{j-1} \quad \text{en posant } j = k-1
\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} = \frac{1}{x-1} \left((n+1)x^n - \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} \right) = \frac{1 - (n+1)x^n + n x^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

En multipliant cette égalité par x, on trouve alors

$$\sum_{k=1}^{n} k x^k = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + n x^{n+2}}{(1-x)^2}.$$

Correction de l'exercice 33. Notons $S := \sum_{k=0}^{n} k^4$ la somme à calculer.

D'après la formule du binôme on a $(k+1)^5 - k^5 = 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
Par linéarité de la somme, on a donc

$$\sum_{k=0}^{n}((k+1)^5 - k^5) = 5\sum_{k=0}^{n} k^4 + 10\sum_{k=0}^{n} k^3 + 10\sum_{k=0}^{n} k^2 + 5\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1$$

soit, en utilisant des formules déjà connues :

$$\sum_{k=0}^{n}((k+1)^5 - k^5) = 5S + \frac{5n^2(n+1)^2}{2} + \frac{5n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{5n(n+1)}{2} + (n+1).$$

Par ailleurs, la somme de gauche se calcule facilement en tant que somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n}((k+1)^5 - k^5) = (n+1)^5 - 0^5 = (n+1)^5.$$

On a donc

$$(n+1)^5 = 5S + \frac{5n^2(n+1)^2}{2} + \frac{5n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{5n(n+1)}{2} + (n+1),$$

si bien que

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - \frac{5n^2(n+1)^2}{2} - \frac{5n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{5n(n+1)}{2} - (n+1)\right] \\ &= \frac{n(n+1)}{30}\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 34. Dans cet exercice, chaque réponse s'inspire de la démarche utilisée dans les points précédents.

(i) Il existe $4! = 24$ façons de permuter les quatre lettres du mot CHAT, et donc 24 anagrammes de ce mot.

(ii) Si l'on considère les deux A du mot ARA comme différents, on peut permuter les trois lettres du mot ARA de $3! = 6$ façons. Or les deux A ne sont en réalité pas différentiables à la lecture : chaque anagramme correspond donc à deux permutations différentes, ce qui montre qu'il existe $\frac{6}{2} = 3$ anagrammes du mot ARA (les mots RAA, ARA et AAR).

(iii) Dans chaque anagramme du mot TARAMA, les trois A peuvent être permutés entre eux de 3 ! façons sans changer le mot obtenu. Il existe donc 3! fois plus de permutations des 6 lettres du mot TARAMA que d'anagrammes de ce mot. Or il existe 6! permutations possibles des 6 lettres, donc le mot TARAMA admet $\frac{6!}{3!} = \frac{6!}{6} = 5! = 120$ anagrammes différentes.

(*iv*) Il existe 3! façons de permuter entre eux les trois B du mot BAOBAB, et 2! façons de permuter entre eux les deux A. En tout, il existe donc 3!2! façons de permuter entre elles les lettres du mot BAOBAB sans changer ce mot. Plus généralement, chaque anagramme de ce mot correspond à 3!2! permutations des lettres qui le composent, parmi les 6! permutations possibles. Le nombre total d'anagrammes du mot BAOBAB est donc $\frac{6!}{3!2!} = \frac{6!}{6 \cdot 2} = \frac{5!}{2} = 60$.

(*v*) Si le mot considéré est constitué de n lettres dont k lettres différentes, avec a_1 répétitions d'une première lettre, a_2 d'une deuxième lettre, ..., a_k d'une dernière lettre (avec $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n$), il existe $n!$ permutations des lettres composant le mot, et chaque anagramme correspond à $a_1!a_2! \cdots a_k!$ permutations différentes. Le nombre d'anagrammes recherché est donc $\frac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_k!}$.

Correction de l'exercice 35. La méthode de résolution est inspirée de la preuve heuristique de la formule du binôme donnée dans le cours. Lorsque l'on développe explicitement la quantité

$$(a+b+c)^9 = \underbrace{(a+b+c)(a+b+c)\cdots(a+b+c)}_{\text{9 fois}},$$

le terme $a^3b^2c^4$ apparaît à chaque fois que l'on obtient un produit composé de trois a, de deux b et de quatre c. Le coefficient recherché est donc le nombre de façons dont il est possible de placer trois a, deux b et quatre c dans une 9-liste. Or on peut créer une telle liste en choisissant la position des trois a (on dispose pour cela de $\binom{9}{3}$ choix), puis celle des deux b parmi les six positions restantes (on dispose pour cela de $\binom{6}{2}$ choix) : ces listes sont donc au nombre de

$$\binom{9}{3}\binom{6}{2} = \frac{9!}{3!\cancel{6!}}\frac{\cancel{6!}}{2!4!} = \frac{9!}{3!2!4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5}{\cancel{6} \cdot 2} = 9 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 5 = 63 \cdot 20 = 1260.$$

Correction de l'exercice 36. En considérant le triangle de Pascal, on voit que la somme considérée, qui porte sur la première moitié des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$, est égale à la moitié de la somme de tous les $\binom{n}{k}$, que l'on sait calculer. Plus formellement :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k} + \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n}\binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k} + \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{n-j} \quad \text{en posant } j = n-k \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k} + \sum_{j=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{j} \quad \text{par symétrie des coefficients binomiaux} \\
&= 2\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{k} \quad \text{(l'indice est muet).}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \frac{1}{2}2^n = 2^{n-1},$$

où l'égalité centrale est assurée par la formule du binôme.

Correction de l'exercice 37.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition

$$\mathcal{P}_n \ : \quad \text{« } \forall p \in [\![0, n]\!] \, , \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \text{ ».}$$

Démontrons cette proposition par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation :

La proposition $\mathcal{P}_0$ s'écrit

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{k}{0} = \binom{0+1}{0+1} \quad \text{soit} \quad \binom{0}{0} = \binom{1}{1},$$

ce qui est vrai.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.

On considère à présent $p \in [\![0, n]\!]$, et on écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} + \binom{n+1}{p} \\
&= \binom{n+1}{p+1} + \binom{n+1}{p} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= \binom{n+2}{p+1} \quad \text{d'après la relation de Pascal.}
\end{aligned}$$

L'égalité

$$\sum_{k=p}^{n+1} \binom{k}{p} = \binom{n+2}{p+1}$$

est donc vraie pour tout $p \in [\![0, n]\!]$; elle l'est aussi pour $p = n+1$ puisqu'elle se réécrit alors

$$\binom{n+1}{n+1} = \binom{n+2}{n+2},$$

ce qui est correct.

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion :

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

On détaille à présent la deuxième preuve suggérée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $p \in [\![1, n]\!]$ et tout $k \in [\![p, n]\!]$, la relation de Pascal permet d'écrire

$$\binom{k+1}{p+1} = \binom{k}{p} + \binom{k}{p+1}, \quad \text{d'où} \quad \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$

Ainsi, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} &= \sum_{k=p}^{n} \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) \\
&= \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\
&= \binom{n+1}{p+1} \quad \text{car } p < p+1,
\end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.

La propriété est par ailleurs vraie pour $p = 0$ (elle s'écrit alors $n + 1 = n + 1$), ainsi que pour $n = 0$ (elle s'écrit alors $1 = 1$), ce qui clôt la preuve.

2. Si $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, on sait que les parties de $[\![0, n]\!]$ contenant $p+1$ éléments sont au nombre de $\binom{n+1}{p+1}$. On peut par ailleurs partitionner l'ensemble de ces parties en plusieurs sous-ensembles :
   - Les parties dont le plus grand élément est p : ces parties sont définies par le choix des p éléments restants parmi les p éléments de $[\![0, n]\!]$ strictement inférieurs à p, donc sont au nombre de $\binom{p}{p}$.
   - Les parties dont le plus grand élément est $p+1$: ces parties sont définies par le choix des p éléments restants parmi les $p+1$ éléments de $[\![0, n]\!]$ strictement inférieurs à $p+1$, donc sont au nombre de $\binom{p+1}{p}$.
   - Les parties dont le plus grand élément est $p+2$: ces parties sont définies par le choix des p éléments restants parmi les $p+2$ éléments de $[\![0, n]\!]$ strictement inférieurs à $p+2$, donc sont au nombre de $\binom{p+2}{p}$.
   - ...
   - Les parties dont le plus grand élément est n : ces parties sont définies par le choix des p éléments restants parmi les n éléments de $[\![0, n]\!]$ strictement inférieurs à n, donc sont au nombre de $\binom{n}{p}$.

   Le cardinal de cette partition est donc $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$, d'où l'égalité attendue.

Correction de l'exercice 38.

1. Au rang 1, la formule s'écrit simplement $|A_1| = |A_1|$ pour tout ensemble fini A_1. Dans le cas $n = 2$, la formule est déjà connue : elle stipule que pour tous ensembles finis A_1 et A_2, on a

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Dans le cas $n = 3$, elle stipule que pour tous ensembles finis A_1, A_2 et A_3, on a

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|,$$

identité que l'on a déjà établie dans l'exercice 29 du chapitre « Logique et ensembles ».

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$\mathcal{P}_n$: « Pour tous ensembles finis $A_1, \ldots, A_n$, on a
$$\left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|\right) \text{ ».}$$

Initialisation :

On a vu dans la question précédente que $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité :

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. On se donne $n+1$ ensembles finis $A_1, \ldots, A_{n+1}$ et on écrit [2]

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right| &= \left|\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right| \\
&= \left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right| \\
&= \left|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right| + |A_{n+1}| - \left|\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\right| \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|\right) + |A_{n+1}| \\
&\qquad - \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} (A_{i_j} \cap A_{n+1})\right|\right) \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|\right) + |A_{n+1}| \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+2} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \left|\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \cap A_{n+1}\right|\right).
\end{aligned}$$

2. Notons que la relation $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ utilisée pour obtenir la première égalité ci-dessus est la proposition $\mathcal{P}_2$, que l'on utilise ici comme un résultat de cours mais qui aurait sinon nécessité d'être vérifiée lors de l'étape d'initialisation.

On remarque que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la somme

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \left| \left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right) \cap A_{n+1} \right|$$

porte exactement sur les intersections de $n+1$ ensembles parmi $A_1, \ldots, A_n, A_{n+1}$ *parmi lesquels figure* A_{n+1} (puisqu'alors n ensembles restent à choisir parmi $A_1, \ldots, A_n$). On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\left| \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \right| &= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n+1} \left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right| \right) + |A_{n+1}| \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+2} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < i_{k+1} = n+1} \left| \bigcap_{j=1}^{k+1} A_{i_j} \right| \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n+1} \left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right| \right) + |A_{n+1}| \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n+1} \left((-1)^{k'+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k'} = n+1} \left| \bigcap_{j=1}^{k'} A_{i_j} \right| \right) \qquad \text{en posant } k' = k+1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n+1} \left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right| \right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n+1} \left((-1)^{k'+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k'} = n+1} \left| \bigcap_{j=1}^{k'} A_{i_j} \right| \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n+1} \left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right| \right),
\end{aligned}$$

ce qui établit la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion :

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

3. Suivons les indications de l'énoncé et définissons pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ l'ensemble

$$A_k := \{ f \in \mathcal{F}\left([\![1, m]\!], [\![1, n]\!] \right) \,:\, k \notin f([\![1, m]\!]) \}$$

des applications $f : [\![1, m]\!] \to [\![1, n]\!]$ ne prenant pas la valeur k. L'ensemble des applications *non* surjectives de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ est donc la réunion

$$A := \bigcup_{k=1}^{n} A_k.$$

Déterminons le cardinal de cet ensemble. D'après la formule du crible, on a

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} \left| \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right| \right).$$

Or pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et tous $i_1,\dots,i_k$ dans $[\![1,n]\!]$ vérifiant les inégalités $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, l'intersection $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$ est l'ensemble des applications de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ ne prenant pas les valeurs $i_1,\dots,i_k$, c'est-à-dire des applications définies sur l'ensemble $[\![1,m]\!]$ (à m éléments) et à valeurs dans l'ensemble $[\![1,n]\!] \setminus \{i_1,\dots,i_k\}$ (qui contient $n-k$ éléments) : ainsi, le cardinal de cette intersection est égal à $(n-k)^m$.
On a donc

$$|A| = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\dots<i_k\leqslant n}(n-k)^m\right),$$

or pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ la somme intérieure contient $\binom{n}{k}$ termes tous égaux à $(n-k)^m$, d'où

$$|A| = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)^m.$$

Le nombre d'applications surjectives de $[\![1,m]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est donc

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}([\![1,m]\!],[\![1,n]\!]) \setminus A| &= |\mathcal{F}([\![1,m]\!],[\![1,n]\!])| - |A| \\
&= n^m - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)^m \\
&= n^m + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^m \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}(n-k)^m \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{n-j}j^m \quad \text{en posant } j=n-k \\
&= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^m \quad \text{par symétrie des coefficients binomiaux,}
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

Correction de l'exercice 39.

1. Pour $n=0$, on a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 0$ donc la formule s'écrit $F_0 = \binom{0}{0}$, ce qui est vrai car F_0 et $\binom{0}{0}$ valent 1.

   Pour $n=1$, on a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = 0$ donc la formule s'écrit $F_1 = \binom{1}{0}$, ce qui est vrai car F_1 et $\binom{1}{0}$ valent 1.
2. Il est tentant (et possible) de raisonner par récurrence double en raison de la définition de la suite de Fibonacci. Toutefois, pour ne pas avoir à distinguer de cas selon la parité de n en cours de démonstration, il est plus simple de démontrer par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la proposition

$$\mathcal{P}_p : \quad \text{« } F_{2p} = \sum_{k=0}^{p}\binom{2p-k}{k} \quad \text{et} \quad F_{2p+1} = \sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1-k}{k} \text{ ».}$$

Initialisation :

La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie d'après la question précédente puisque la formule est vraie pour les rangs $n = 0$ et $n = 1$.

Hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_p$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned}
F_{2(p+1)} &= F_{2p+2} = F_{2p} + F_{2p+1} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{2p-k}{k} + \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1-k}{k} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_p \\
&= \sum_{j=1}^{p+1} \binom{2p-(j-1)}{j-1} + \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1-k}{k} \quad \text{en posant } j = k+1 \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{2p+1-k}{k-1} + \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1-k}{k} \quad \text{car l'indice est muet} \\
&= \binom{p}{p} + \sum_{k=1}^{p} \binom{2p+1-k}{k-1} + \sum_{k=1}^{p} \binom{2p+1-k}{k} + \binom{2p+1}{0} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{p} \left(\binom{2p+1-k}{k-1} + \binom{2p+1-k}{k} \right) + 1 \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{p} \binom{2p+2-k}{k} + 1 \quad \text{d'après la relation de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{2(p+1)-k}{k} \quad \text{car } \binom{2(p+1)}{0} = \binom{p+1}{p+1} = 1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F_{2(p+1)+1} &= F_{2p+3} = F_{2p+1} + F_{2p+2} \\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{2p+1-k}{k} + \sum_{k=0}^{p+1} \binom{2(p+1)-k}{k} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_p \text{ et ce qui précède} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{2p+1-(j-1)}{j-1} + \sum_{k=1}^{p+1} \binom{2(p+1)-k}{k} + 1 \quad \text{en posant } j = k+1 \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \left(\binom{2(p+1)-k}{k-1} + \binom{2(p+1)-k}{k} \right) + 1 \quad \text{car l'indice est muet} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \binom{2(p+1)+1-k}{k} + 1 \quad \text{d'après la relation de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{p+1} \binom{2(p+1)+1-k}{k} \quad \text{car } \binom{2(p+1)+1}{0} = 1,
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.

Conclusion :

La propriété $\mathcal{P}_p$ est donc vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence, ce qui clôt la preuve.

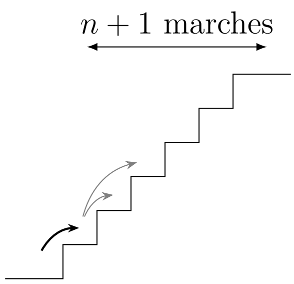
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons G_n le nombre de façons de monter un escalier composé de n marches en grimpant une ou deux marches à chaque pas.

   On a tout d'abord $G_0 = 1$ (le seul chemin permettant de monter un escalier composé de 0 marches est le chemin vide qui ne contient aucun pas), et $G_1 = 1$ (le seul chemin permettant de monter un escalier d'une marche est le chemin composé d'un unique pas d'une seule marche).

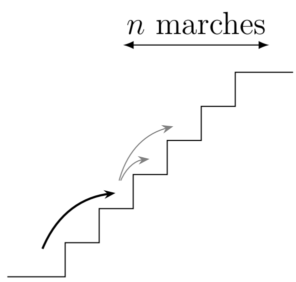
   Montrons à présent que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$.

   Fixons $n \in \mathbb{N}$; les chemins permettant de monter un escalier de $n+2$ marches sont au nombre total de G_{n+2} par définition. Or on peut partitionner l'ensemble de ces chemins en deux classes :

   - Les chemins commençant par un pas de longueur 1 : ce pas ayant été effectué, il reste alors $n+1$ marches à parcourir, ce qui peut être fait de G_{n+1} façons par définition. La classe considérée contient donc G_{n+1} chemins.
   - Les chemins commençant par un pas de longueur 2 : ce pas ayant été effectué, il reste alors n marches à parcourir, ce qui peut être fait de G_n façons par définition. La classe considérée contient donc G_n chemins.



G_{n+1} chemins



G_n chemins

   On a donc bien $G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$.

   Ainsi, la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions (valeurs initiales et relation de récurrence) définissant la suite de Fibonacci ; on a donc $G_n = F_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

   Or si $n \in \mathbb{N}$, on peut recourir à une autre approche pour calculer G_n. On peut en effet classer en différentes catégories les chemins de longueur n constitués de pas de longueur 1 ou 2 :

   - Ceux qui ne contiennent aucun pas de longueur 2 : il existe alors un unique chemin admissible, constitué de n pas de longueur 1.
   - Ceux qui contiennent exactement un pas de longueur 2 : pour créer une telle liste, on choisit la position du pas long parmi les $n-1$ pas constituant le chemin, ce qui donne lieu à $\binom{n-1}{1}$ chemins possibles.
   - Ceux qui contiennent exactement deux pas de longueur 2 : le nombre de ces chemins est égal au nombre de façon de placer les deux longs pas parmi les $n-2$ pas constituant le chemin, donc $\binom{n-2}{2}$.
   - ...

- Ceux qui contiennent le maximum de pas longs possible, c'est-à-dire $\frac{n}{2}$ si n est pair, et $\frac{n-1}{2}$ si n est impair, donc $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dans tous les cas : il existe $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ chemins de ce type.

La partition ainsi décrite permet d'écrire que

$$G_n = 1 + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k},$$

d'où la relation attendue puisque $G_n = F_n$.

Correction de l'exercice 40.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $i, k \in [\![0, n]\!]$ tels que $i \leqslant k$. Alors

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k}\binom{k}{i} &= \frac{n!}{\cancel{k!}(n-k)!} \frac{\cancel{k!}}{i!(k-i)!} \\
&= \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{(n-k)!(k-i)!} \\
&= \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k} \quad \text{car } k-i = (n-i)-(n-k),
\end{aligned}$$

d'où la relation attendue.

2. Si $n \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![0, n-1]\!]$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{i} &= \sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{n-k} \\
&= \binom{n}{i} \sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n-i}{n-k} \quad \text{par linéarité} \\
&= \binom{n}{i} \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^{j} \binom{n-i}{j} \quad \text{en posant } j = n-k \\
&= \binom{n}{i} (-1+1)^{n-i} \quad \text{d'après la formule du binôme} \\
&= 0 \quad \text{car } n-i \geqslant 1,
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. On part du terme de droite de la formule : si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} a_k &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} b_i \\
&= \sum_{0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{i} b_i \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k}\binom{k}{i} b_i
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} b_i \underbrace{\left(\sum_{k=i}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{i}\right)}_{\substack{=0 \text{ si } i<n \text{ d'après la} \\ \text{question précédente}}} \quad \text{par linéarité}$$

$$= b_n(-1)^{n-n}\binom{n}{n}\binom{n}{n}$$

$$= b_n,$$

d'où la formule d'inversion.

4. L'ensemble $\mathcal{F}(\llbracket 1,m \rrbracket, \llbracket 1,n \rrbracket)$, de cardinal n^m, peut être partitionné en

$$\mathcal{F}(\llbracket 1,m \rrbracket, \llbracket 1,n \rrbracket) = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k,$$

où pour tout $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$ on a noté

$$A_k := \{f : \llbracket 1,m \rrbracket \to \llbracket 1,n \rrbracket \; : \; |f(\llbracket 1,m \rrbracket)| = k\}$$

l'ensemble des applications de $\llbracket 1,m \rrbracket$ dans $\llbracket 1,n \rrbracket$ prenant exactement k valeurs distinctes.

Or pour tout $k \in \llbracket 1,n \rrbracket$, l'ensemble A_k peut être dénombré en remarquant que pour créer un élément de A_k, il suffit de sélectionner une partie à k éléments de $\llbracket 1,n \rrbracket$ (on dispose pour cela de $\binom{n}{k}$ choix) puis de choisir une surjection de $\llbracket 1,m \rrbracket$ dans cette partie (ce qui peut être fait de $b_{m,k}$ façons différentes), si bien que $|A_k| = \binom{n}{k}b_{m,k}$.

On a alors

$$n^m = |\mathcal{F}(\llbracket 1,m \rrbracket, \llbracket 1,n \rrbracket)| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}b_{m,k},$$

ce qu'il fallait démontrer. Ainsi, pour m fixé, si on pose

$$a_0 = b_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n := n^m \text{ et } b_n = b_{m,n},$$

les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont les conditions nécessaires à l'application de la formule d'inversion de Pascal. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ la formule

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}a_k, \quad \text{soit} \quad b_{m,n} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^m.$$