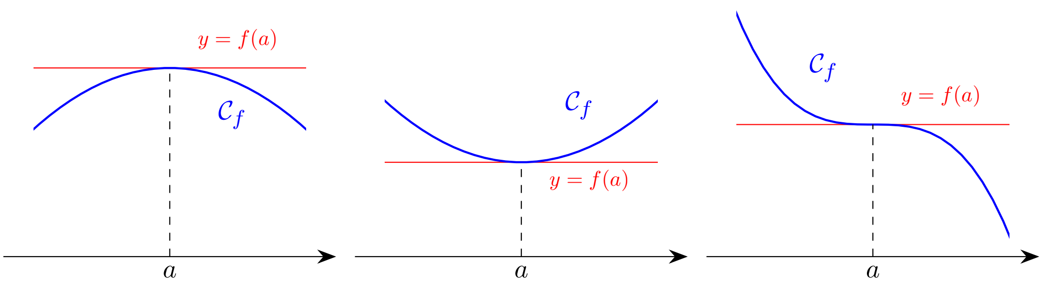
Il n'est pas nécessaire pour cela de connaître finement les variations de f pour déterminer si ses points critiques sont ou non des lieux d'extrema locaux. En effet, si a est un point intérieur de I et un point critique de f, alors f admet en a une tangente horizontale d'équation $y = f(a)$, et la question de l'optimalité du point a peut alors être reformulée en termes de position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente :



Maximum local strict — Minimum local strict — Point col

La proposition E donne alors directement le résultat suivant :

Proposition H (Condition suffisante de second ordre pour l'existence d'un extremum local). Soit a un point intérieur à I.

Si f est deux fois dérivable en a, si a est un point critique de f et si $f''(a) \neq 0$, alors f admet un extremum local strict en a. Il s'agit dans ce cas d'un maximum local strict si $f''(a) < 0$ et d'un minimum local strict si $f''(a) > 0$.

L'utilisation conjointe de la condition nécessaire de premier ordre (pour identifier les points candidats) et de la condition suffisante de deuxième ordre (pour vérifier si chacun de ces points est le lieu d'un extremum) est généralement suffisante pour déterminer les extrema locaux de f.

Exemple. On cherche à étudier les minima et maxima locaux de la fonction polynomiale du cinquième degré $f : x \mapsto x^5 + 20x^2 - 10$.

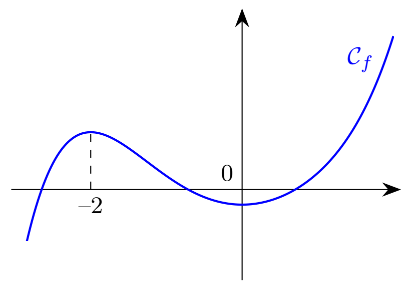
Pour cela, on commence par chercher les points critiques de f, c'est-à-dire les solutions de l'équation $f'(x) = 0$, soit $5x^4 + 40x = 0$, soit encore $5x(x^3 + 8) = 0$: ces solutions sont les réels -2 et 0, qui sont donc les seuls candidats pour être le lieu d'un extremum local de f.

On calcule alors les valeurs prises par la fonction $f'' : x \mapsto 20x^3 + 40$ en -2 et en 0 : on obtient

$$f''(-2) = -120 < 0 \quad \text{et} \quad f''(0) = 40 > 0,$$

donc f admet un maximum local strict en -2 et un minimum local strict en 0 (voir ci-contre).

Notons que ces extrema sont locaux mais non globaux puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



Toutefois, la proposition que nous venons d'appliquer ne permet pas de traiter le cas où a est un point critique mais $f''(a) = 0$. On utilise dans ce cas le théorème F :

Théorème I (Condition suffisante pour l'existence d'un extremum local)**.** Soit a un point intérieur à I.

On suppose que f est dérivable $n \geqslant 2$ fois en a, que a est un point critique de f et que l'un des nombres $f^{(k)}(a)$, pour $k \in [\![2, n]\!]$, n'est pas nul. Soit k le plus petit entier de $[\![2, n]\!]$ vérifiant cette propriété.

Alors la fonction f :

- admet un point col en a si k est impair.
- admet un maximum local strict en a si k est pair et $f^{(k)}(a) < 0$.
- admet un minimum local strict en a si k est pair et $f^{(k)}(a) > 0$.

On retiendra la méthode suivante :

Méthode J (Détermination des extrema locaux de f)**.** Pour déterminer les extrema locaux d'une fonction dérivable $f : I \to \mathbb{R}$ dont on ne dispose pas d'un tableau de variations :

- Si I contient l'une ou l'autre de ses bornes, on étudie le comportement de f au voisinage de ces points pour déterminer s'ils sont ou non le lieu d'un extremum.
- On localise les points critiques de f sur l'intérieur de I en résolvant l'équation $f'(x) = 0$. Pour chaque point critique a :
  - On calcule les dérivées successives de f en a jusqu'au premier rang $k \geqslant 2$ tel que $f^{(k)}(a) \neq 0$.
  - On statue sur la nature du point critique a grâce à la parité de k et au signe de $f^{(k)}(a)$ en utilisant le théorème I.

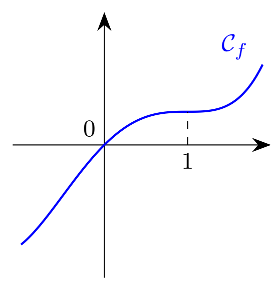
Exemple. L'étude de la fonction $f : x \mapsto x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x$ et de sa dérivée $f' : x \mapsto 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$ indiquent que 1 est un point critique de f. On calcule ensuite

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 12x^2 - 6x - 6 \quad \text{donc} \quad f''(1) = 0$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(3)}(x) = 24x - 6 \quad \text{donc} \quad f^{(3)}(1) = 18 \neq 0,$$

donc f admet un point col en 1.



Exemple. L'étude de la fonction

$$f : x \longmapsto 1 + \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

indique que 0 est un point critique de f. On obtient alors par le calcul (vérifiez-le !) :

$$f''(0) = 0, \quad f^{(3)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(4)}(0) = -6 < 0,$$

si bien que f admet un maximum local strict en 0.