Logique et ensembles

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 31. La proposition n'est pas initialisée ; elle est en fait fausse au rang 0 (car l'entier $10^1 + 1 = 11$ n'est pas multiple de 9), donc son hérédité ne suffit pas à assurer sa validité.

Correction de l'exercice 32. L'erreur porte sur le raisonnement permettant de démontrer l'hérédité dans le cas où $n = 1$ (c'est-à-dire l'implication $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$) : l'argument « les deux crayons retirés successivement sont donc de même couleur que tous les autres » n'a de sens que lorsque la boîte contient $n \geqslant 3$ crayons. Ainsi, on a

$$\mathcal{P}_1 \text{ vraie} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_3 \Rightarrow \mathcal{P}_4 \Rightarrow \ldots$$

mais le premier maillon de la chaîne d'implications manque, ce qui explique que le raisonnement ne soit pas valide.

Correction de l'exercice 33.

(*i*) Cette équivalence est vraie : il s'agit de la distributivité de « et » sur « ou », à rapprocher du résultat de l'exercice 23.

(*ii*) Cette équivalence est vraie : il s'agit cette fois la distributivité de « ou » sur « et ».

(*iii*) Cette équivalence est vraie : dire que tous les élèves de B/L sont brillants et que tous les élèves de B/L sont sympathiques revient à dire que tous les élèves de B/L sont à la fois brillants et sympathiques.

(*iv*) Cette équivalence est fausse : dire que tous les élèves de B/L sont brillants ou que tous les élèves de B/L sont sympathiques implique bien que tous les élèves de B/L sont soit brillants, soit sympathiques, mais la réciproque n'est pas vraie car il est possible que tout élève de B/L soit brillant ou sympathique sans qu'aucun de ces deux traits ne soit partagé par tous les élèves en même temps.

(*v*) Cette équivalence est fausse : l'implication réciproque est valide mais pas l'implication directe. Par exemple, il existe une personne totalement chauve et il existe une personne aux cheveux hirsutes, mais il n'existe aucune personne présentant des deux propriétés à la fois.

(*vi*) Cette équivalence est vraie : le fait qu'il existe une personne chauve ou une personne hirsute est bien équivalent au fait qu'il existe une personne chauve ou hirsute.

Correction de l'exercice 34. On remarque[1] que lorsque la variable x balaie l'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, la quantité $\frac{1}{x+1}$ visite tout l'intervalle $]0, 1[$. Mais pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, lorsque y balaie $\mathbb{R}_-$ la quantité $3xy$ visite tout l'intervalle $\mathbb{R}_-$. Ainsi, l'ensemble des points de la forme $\left(3xy, \frac{1}{x+1}\right)$, pour $x > 0$ et $y \leqslant 0$, est le produit cartésien $\mathbb{R}_- \times]0, 1[$.

Pour démontrer rigoureusement ce fait, on peut procéder par double inclusion :

- Tout d'abord, il est clair que si $x > 0$ alors $\frac{1}{1+x} \in]0, 1[$ et que si de surcroît on a $y \leqslant 0$, alors $3xy \leqslant 0$. Ainsi, on a bien $A \subset \mathbb{R}_- \times]0, 1[$.
- Réciproquement, si $a \in \mathbb{R}_-$ et $b \in]0, 1[$, on peut trouver $x > 0$ tel que $\frac{1}{x+1} = b$ (il suffit de résoudre cette équation pour trouver $x = \frac{1}{b} - 1$, qui est bien strictement positif), et en posant $y = \frac{a}{3x}$ (qui est alors négatif) on a $a = 3xy$. Ainsi, (a, b) s'écrit sous la forme $\left(3xy, \frac{1}{x+1}\right)$, d'où l'inclusion réciproque $\mathbb{R}_- \times]0, 1[\subset A$.

On a donc effectivement l'égalité $A = \mathbb{R}_- \times]0, 1[$.

Correction de l'exercice 35.

1. Si $A \in \mathcal{P}(E \cap F)$, alors A est une partie de $E \cap F$, donc une partie de E et de F, d'où $A \in \mathcal{P}(E)$ et $A \in \mathcal{P}(F)$, soit $A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$. Réciproquement, si $A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$, alors A est une partie de E et une partie de F, donc les éléments de A sont dans $E \cap F$, c'est-à-dire que $A \subset E \cap F$: on a donc l'inclusion réciproque $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cap F)$, d'où l'égalité à démontrer.
2. Si $A \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$, alors A est une partie de E ou une partie de F ; dans les deux cas, c'est une partie de $E \cup F$ puisque ce dernier ensemble contient à la fois E et F. On a donc bien l'inclusion $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.

   En général, l'inclusion réciproque n'est pas vraie. En effet, une partie A de $E \cup F$ peut n'être ni une partie de E, ni une partie de F : il suffit pour cela qu'elle contienne un élément de $E \setminus F$ et un élément de $F \setminus E$. L'inclusion réciproque est donc vraie uniquement dans le cas où il n'est pas possible de trouver un élément dans $E \setminus F$ et un élément dans $F \setminus E$, c'est-à-dire le cas où $E \subset F$ ou $F \subset E$.

Correction de l'exercice 36.

1. Si E est un ensemble de cardinal 0, alors $E = \varnothing$ donc $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$, d'où $|\mathcal{P}(E)| = |\{\varnothing\}| = 1 = 2^0$. La propriété est donc bien vraie si $n = 0$.
2. Comme $E \setminus \{x\}$ est de cardinal n, on a par hypothèse que le cardinal de $\mathcal{P}(E \setminus \{x\})$ vaut 2^n.
3. On a $E \subset \mathcal{P}_1$ et $\varnothing \in \mathcal{P}_2$, donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont non vides. Par ailleurs, toute partie F et E contient x (donc appartient à $\mathcal{P}_1$) ou ne le contient pas (donc appartient à $\mathcal{P}_2$), et ces deux options sont bien sûr mutuellement exclusives. Ainsi, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ forment bien une partition de $\mathcal{P}(E)$.

1. Dans les chapitres suivants, on apprendra à formaliser ce type d'intuition graphique à l'aide des notions de surjectivité et de continuité.

4. Démontrons la première égalité attendue par double inclusion.

   Soit $F \in \mathcal{P}_1$. Comme F contient x, on peut écrire $F = (F \setminus \{x\}) \cup \{x\}$. Or $F\setminus\{x\}$ est entièrement contenu dans $E\setminus\{x\}$, si bien que $F\setminus\{x\} \in \mathcal{P}(E\setminus\{x\})$: on a donc

   $$F \in \{G \cup \{x\} : G \in \mathcal{P}(E\setminus\{x\})\} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P}_1 \subset \{G \cup \{x\} : G \in \mathcal{P}(E\setminus\{x\})\}.$$

   L'inclusion réciproque s'obtient en remarquant que si F est un élément de l'ensemble $\{G \cup \{x\} : G \in \mathcal{P}(E\setminus\{x\})\}$, alors F s'écrit $G \cup \{x\}$ avec G une partie de E, si bien que F est une partie de E contenant x : on a donc

   $$\{G \cup \{x\} : G \in \mathcal{P}(E\setminus\{x\})\} \subset \mathcal{P}_1,$$

   d'où l'égalité

   $$\mathcal{P}_1 = \{G \cup \{x\} : G \in \mathcal{P}(E\setminus\{x\})\}.$$

   L'égalité $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(E\setminus\{x\})$ est quant à elle évidente puisqu'une partie de E ne contenant pas x est une partie de $E\setminus\{x\})$ et réciproquement.

   En considérant ces deux écritures de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, on voit que tous deux contiennent autant d'éléments que $\mathcal{P}\big(E\setminus\{x\})\big)$ (dans le cas de $\mathcal{P}_1$, il s'agit du nombre de choix possibles pour G).

   Or on a vu dans la question 2 que ce cardinal était égal à 2^n, d'où le résultat.

5. Comme $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ forment une partition de $\mathcal{P}(E)$, on a

   $$|\mathcal{P}(E)| = |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2|, \quad \text{soit} \quad |\mathcal{P}(E)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

   d'après la question précédente.

6. Dans la question 1, on a réalisé l'initialisation du raisonnement par récurrence visant à montrer la propriété attendue. Dans les questions 2 à 5, on a démontré le caractère héréditaire de cette propriété. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7. D'après le résultat que nous venons d'établir, on a

   $$|\mathcal{P}(\{1,2\} \times \{1,3\})| = 2^{|\{1,2\}\times\{1,3\}|} = 2^4 = 16$$

   ainsi que

   $$|\mathcal{P}(\varnothing)| = 2^0 = 1 \quad \text{d'où} \quad |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))| = 2^1 = 2 \quad \text{et donc} \quad |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))| = 2^2 = 4.$$