Applications

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 31. Lorsque x parcourt $\mathbb{R}^*$, la quantité $\frac{1}{x}$ parcourt elle aussi $\mathbb{R}^*$, donc $f(x)$ parcourt $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on peut écrire

$$y = f(x) \iff \quad 1 + \frac{1}{x} = y \quad \iff \quad \frac{1}{x} = y - 1 \quad \iff \quad x = \frac{1}{y-1} \quad \text{car} \quad y - 1 \neq 0.$$

Or l'application

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ & y & \longmapsto & \dfrac{1}{y-1} \end{array}$$

est bien définie puisque pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a $y - 1 \neq 0$. Ainsi, f est bijective de $\mathbb{R}^*$ sur $X : \mathbb{R} \setminus \{1\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a $f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{x-1}$.

Correction de l'exercice 32. Soit $A \subset E$. Si $x, x' \in A$ sont tels que $f|_A(x) = f|_A(x')$, alors $f(x) = f(x')$, d'où $x = x'$ puisque f est injective. Ainsi, $f|_A$ est injective, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 33.

1. (*i*) Supposons $g \circ f$ injective. Si $x, x' \in E$ sont tels que $f(x) = f(x')$, alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, soit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, d'où $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$. L'appliction f est donc injective.

   (*ii*) Supposons que $g \circ f$ soit surjective. Pour tout $y \in H$, il existe alors $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x)$, soit $y = g(f(x))$: ainsi, $f(x)$ est un antécédent de y par g. L'application g est donc surjective.
2. Supposons que $h : E \to E$ soit telle que $h \circ h$ est bijective. Elle est donc injective, donc h l'est d'après le point (*i*) de la question précédente. Elle est aussi surjective, donc h l'est d'après le point (*ii*) de la question précédente. Ainsi, h est bijective.

Correction de l'exercice 34.

1. Supposons que les applications f et g soient injectives. Pour tous $x, x' \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, on a $g(f(x)) = g(f(x'))$ donc $f(x) = f(x')$ par injectivité de g, d'où $x = x'$ par injectivité de f. Ainsi, $g \circ f$ est injective.
2. Supposons que f et g soient surjectives. Pour tout $z \in G$, il existe alors $y \in F$ tel que $z = g(y)$; or il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $z = g(f(x))$, soit $z = (g \circ f)(x)$. Ainsi, $g \circ f$ est surjective.

3. Supposons que f et g soient bijectives. L'application $f^{-1} \circ g^{-1}$ est bien définie de G dans E, et si $x \in E$ et $y \in H$ alors on a

$$z = f(g(x)) \iff f^{-1}(z) = g(x) \iff g^{-1}(f^{-1}(z)) = x$$

soit

$$z = (f \circ g)(x) \iff (g^{-1} \circ f^{-1})(z) = x,$$

donc $f \circ g$ est bijective et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Correction de l'exercice 35.

1. (a) Soient A et A' des parties de E.

   Si $y \in f(A \cup A')$, alors y admet un antécédent dans $A \cup A'$: si cet antécédent est dans A alors $y \in f(A)$, et s'il est dans A' alors $y \in f(A')$, donc dans tous les cas $y \in f(A) \cup f(A')$. On en déduit l'inclusion directe $f(A \cup A') \subset f(A) \cup f(A')$.

   Si $y \in f(A) \cup f(A')$, on a soit $y \in f(A)$, soit $y \in f(A')$. Dans le premier cas, y possède un antécédent dans A, et dans le second il possède un antécédent dans A' ; dans tous les cas, il possède donc un antécédent dans $A \cup A'$, c'est-à-dire que $y \in f(A \cup A')$. On en déduit l'inclusion réciproque $f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A')$.

   Ainsi, on a bien l'égalité attendue : $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

   À présent, si $y \in f(A \cap A')$, alors y admet un antécédent qui se trouve à la fois dans A et dans A', alors y est à la fois dans $f(A)$ et dans $f(A')$, d'où l'inclusion $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

   (b) Pour construire un contre-exemple, il est intéressant de comprendre pourquoi l'inclusion réciproque ne peut être démontrée. Si $y \in f(A) \cap f(A')$, on peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in A$ et $y = f(x')$ avec $x' \in A'$, mais rien ne garantit que l'on ait $x = x'$ (ce qui aurait certes permis d'affirmer que $x \in A \cap A'$ et donc que $y \in f(A \cap A')$). Ce n'est notamment jamais le cas si A et A' sont disjoints !

   On construit donc un contre-exemple en choisissant une application simple mais pour laquelle une valeur de y admet plusieurs antécédents dans des ensembles disjoints, par exemple la fonction carré

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2, \end{array}$$

   qui vérifie $f(\mathbb{R}_-^*) = \mathbb{R}_+^*$ et $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$ donc $f(\mathbb{R}_-^*) \cap f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$, mais $f(\mathbb{R}_-^* \cap \mathbb{R}_+^*) = f(\varnothing) = \varnothing$: en choisissant $A = \mathbb{R}_-^*$ et $B = \mathbb{R}_+^*$, on a donc bien $f(A) \cap f(A') \not\subset f(A \cap A')$.

   (c) Supposons f injective. Alors pour tous $A, A' \in \mathcal{P}(E)$, si $y \in f(A) \cap f(A')$, on peut écrire comme plus haut que $y = f(x)$ avec $x \in A$ et $y = f(x')$ avec $x' \in A'$; mais alors $f(x) = f(x')$ donc $x = x'$ par injectivité de f, ce qui implique que $x \in A \cap A'$ et donc que $y \in f(A \cap A')$. Ainsi, on a bien $f(A) \cap f(A') = f(A \cap A')$ pour toutes parties A et A' de E.

Supposons à présent que f ne soit pas injective. Il existe alors $x, x' \in A$ tels que $f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$. Alors en posant $A := \{x\}$ et $A' := \{x'\}$ on a $f(A \cap A') = f(\varnothing) = \varnothing$, tandis que $f(x) = f(x')$ appartient à la fois à $f(A)$ et à $f(A')$, donc à $f(A) \cap f(A')$: ainsi, on a $f(A) \cap f(A') \not\subset f(A \cap A')$. Par contraposée, si on a $f(A) \cap f(A') = f(A \cap A')$ pour toutes parties A et A' de E, alors f est injective, ce qui achève d'établir l'équivalence recherchée.

2. (a) Soit $A \subset E$. Si $y \in f(E) \setminus f(A)$, alors on peut écrire $y = f(x)$ pour un $x \in E$, mais y n'admet pas d'antécédent dans A : ainsi, $x \notin A$, si bien que $x \in E \setminus A$ et que $y = f(x) \in f(E \setminus A)$. On en déduit l'inclusion $f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$.

   (b) Si l'on considère à nouveau la fonction carré f, on trouve d'une part $f(\mathbb{R}) \setminus f(\{1\}) = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ et d'autre part $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R}_+ \not\subset (\mathbb{R}_+ \setminus \{1\})$, donc on obtient bien le contre-exemple attendu en posant $E = \mathbb{R}$ et $A = \{1\}$.

   (c) On raisonne à nouveau par double implication.

   Supposons que pour tout $A \subset E$ on ait $f(E) \setminus f(A) = f(E \setminus A)$. Soient $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$. On a alors $x' \in E \setminus \{x\}$, donc $f(x') \in f(E \setminus \{x\})$, d'où $f(x') \in f(E) \setminus f(\{x\})$ d'après l'hypothèse appliquée à l'ensemble $A = \{x\}$. Ainsi, $f(x') \in f(E) \setminus \{f(x)\}$, ce qui signifie que $f(x') \neq f(x)$: l'application f est donc injective.

   Réciproquement, supposons f injective. Soit $A \subset E$. On sait déjà que $f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$ on va montrer que l'inclusion réciproque est vérifiée. Si $y \in f(E \setminus A)$, il existe $x \in E \setminus A$ tel que $y = f(x)$. On a donc notamment $y \in f(E)$. Mais si on avait aussi $y \in f(A)$, il existerait $x' \in A$ tel que $y = f(x')$, soit $f(x) = f(x')$: on en déduirait alors que $x = x'$ par injectivité de f, ce qui est absurde puisque $x \in E \setminus A$ et $x' \in A$. Ainsi, on a $y \notin f(A)$, donc $y \in f(E) \setminus f(A)$. On a donc montré l'inclusion $f(E \setminus A) \subset f(E) \setminus f(A)$, ce qui établit l'égalité de ces deux ensembles et clôt la preuve.

   (d) Supposons que l'on ait $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$ pour tout $A \subset E$. En prenant $A = \varnothing$ on trouve $f(E) = F \setminus \varnothing = F$, donc f est surjective. L'hypothèse se réécrit alors en disant que pour tout $A \subset E$ on a $f(E \setminus A) = f(E) \setminus f(A)$: cette condition implique d'après la question précédente que f est injective, donc f est bijective. L'implication directe est donc bien établie.

   Réciproquement, supposons que f soit bijective. Alors f est surjective, donc $f(E) = F$. Par ailleurs, comme f est injective, on a pour tout $A \subset E$, d'après la question précédente :

$$f(E \setminus A) = f(E) \setminus f(A) = F \setminus f(A),$$

   ce qui démontre l'implication réciproque et donc l'équivalence attendue.

3. Soient B et B' des parties de F. On a alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(B \cup B') &= \{x \in E \,:\, f(x) \in B \cup B'\} = \{x \in E \,:\, f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B'\} \\ &= \{x \in E \,:\, x \in f^{-1}(B) \text{ ou } x \in f^{-1}(B')\} = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} f^{-1}(B \cap B') &= \{x \in E \,:\, f(x) \in B \cap B'\} = \{x \in E \,:\, f(x) \in B \text{ et } f(x) \in B'\} \\ &= \{x \in E \,:\, x \in f^{-1}(B) \text{ et } x \in f^{-1}(B')\} = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

4. Si $B \subset F$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(F \setminus B) &= \{x \in E \,:\, f(x) \in F \setminus B\} = \{x \in E \,:\, f(x) \in F \text{ et } f(x) \notin B\} \\ &= \{x \in E \,:\, x \in f^{-1}(F) \text{ et } x \notin f^{-1}(B)\} = f^{-1}(F) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 36.

1. Si $A = E$, on a $\Phi_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$, donc Φ_A est bijective (elle est sa propre réciproque).

   On a $\Phi_A(E) = A = \Phi_A(A)$: ainsi, $\Phi_A(E) = \Phi_A(A)$, donc si $A \neq E$ l'application Φ_A n'est pas injective. Par contraposée, on voit donc que si Φ_A est injective, alors $A = E$.

   On voit par ailleurs que pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$ on a $\Phi_A(X) = A \cap X \subset A$: ainsi, si $A \subsetneq E$, la partie E n'admet aucun antécédent par Φ_A, ce qui montre que Φ_A n'est pas surjective. Par contraposée, on voit donc que si Φ_A est surjective, alors $A = E$.

   On a donc la suite d'implications ci-dessous :

$$\Phi_A \text{ est injective} \implies A = E \implies \Phi_A \text{ est bijective} \implies \Phi_A \text{ est surjective}$$

   ainsi que la suite d'implications

$$\Phi_A \text{ est surjective} \implies A = E \implies \Phi_A \text{ est bijective} \implies \Phi_A \text{ est injective.}$$

   On en déduit la suite d'équivalences recherchée.

2. Si $A = \varnothing$, on a $\Psi_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$, donc Ψ_A est bijective.

   On a $\Psi_A(\varnothing) = A = \Psi_A(A)$: ainsi, $\Psi_A(\varnothing) = \Psi_A(A)$, donc si $A \neq \varnothing$ l'application Ψ_A n'est pas injective. Par contraposée, on voit donc que si Ψ_A est injective, alors $A = \varnothing$.

   On voit par ailleurs que pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$ on a $A \subset A \cup X = \Psi_A(X)$: ainsi, si $A \neq \varnothing$, la partie $\varnothing$ n'admet aucun antécédent par Ψ_A, ce qui montre que Ψ_A n'est pas surjective. Par contraposée, on voit donc que si Ψ_A est surjective, alors $A = \varnothing$.

   On conclut alors exactement comme dans le point précédent.

Correction de l'exercice 37.

1. (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Par définition, la préimage $f^{-1}(f(A))$ est l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que $f(x) \in f(A)$: c'est le cas de tous les éléments de A par définition de $f(A)$, donc on a bien $A \subset f^{-1}(f(A))$.

   Supposons à présent que f est injective. Alors pour tout $x \in f^{-1}(f(A))$ on a $f(x) \in f(A)$, donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$, d'où $x = x' \in A$ par injectivité de f. Ainsi, l'inclusion réciproque $f^{-1}(f(A)) \subset A$, et donc l'égalité $f^{-1}(f(A)) = A$, sont bien vérifiées.

   (b) Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. Par définition, l'image $f(f^{-1}(B))$ est l'ensemble des images par f des éléments de $f^{-1}(B)$; mais par définition de $f^{-1}(B)$, ces images sont dans B, d'où l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

   Supposons à présent que f est surjective. Alors pour tout $y \in B$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; mais alors $x \in f^{-1}(B)$ puisque l'image de x par f est dans B, donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Ainsi, l'inclusion réciproque $B \subset f(f^{-1}(B))$, et donc l'égalité $B = f(f^{-1}(B))$, sont bien vérifiées.

2. (a) Supposons que f est injective. Soient $A, A' \in \mathcal{P}(E)$ tels que $\Phi(A) = \Phi(A')$, c'est-à-dire tels que $f(A) = f(A')$. Comme f est injective, on peut d'après la question 1(a) écrire que

   $$A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(A')) = A',$$

   ce qui montre que Φ est injective.

   Réciproquement, supposons Φ injective. Soient $x, x' \in E$ deux éléments tels que $x \neq x'$. Alors $\{x\} \neq \{x'\}$, donc $\Phi(\{x\}) \neq \Phi(\{x'\})$ par injectivité de Φ. Or on a d'une part $\Phi(\{x\}) = f(\{x\}) = \{f(x)\}$, et d'autre part $\Phi(\{x'\}) = f(\{x'\}) = \{f(x')\}$, donc $f(x) \neq f(x')$. Ainsi, f est injective.

   On a bien démontré que Φ est injective si et seulement si f l'est.

   (b) Supposons que f est surjective. Alors pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, d'après la question 1(b) on peut écrire que $\Phi(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B)) = B$. Ainsi, l'application Φ est surjective.

   Réciproquement, supposons que Φ est surjective. Alors pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $\Phi(\{x\}) = \{y\}$, ce qui se réécrit $\{f(x)\} = \{y\}$, soit $f(x) = y$. Ainsi, f est surjective.

   On a bien démontré que Φ est surjective si et seulement si f l'est.

3. (a) Supposons que l'application f est surjective. Soient $B, B' \in \mathcal{P}(F)$ tels que $\Psi(B) = \Psi(B')$, c'est-à-dire tels que $f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$. Comme f est surjective, on peut d'après la question 1.(b) écrire que

   $$B = f(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B')) = B',$$

   donc Ψ est injective.

Réciproquement, supposons Ψ injective. Comme $\Psi(\varnothing) = \varnothing$, seul l'ensemble vide possède l'ensemble vide pour image par Ψ : ainsi, pour tout $y \in B$ l'ensemble $f^{-1}(\{y\}) = \Psi(\{y\})$ n'est pas égal à $\varnothing$, ce qui signifie que y admet au moins un antécédent par f. On en déduit que f est surjective.

On a bien démontré que Ψ est injective si et seulement si f est surjective.

(b) Supposons à présent que f est injective. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on peut d'après la question 1(a) écrire que $f^{-1}(f(A)) = A$, soit $\Psi(f(A)) = A$; ainsi, A admet un antécédent par Ψ. L'application Ψ est donc surjective.

Réciproquement, supposons que Ψ est surjective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $\{x\}$ admet un antécédent par Ψ, c'est-à-dire qu'il existe $B \subset F$ tel que $\Psi(B) = \{x\}$, soit $f^{-1}(B) = \{x\}$. Mais alors $x \in f^{-1}(B)$, donc l'ensemble B contient nécessairement $f(x)$. Comme cet élément est aussi égal à $f(x')$, on a nécessairement $x' \in f^{-1}(B)$, donc $x' \in \{x\}$: ainsi, $x = x'$. L'application f est donc injective.

On a bien démontré que Ψ est surjective si et seulement si f est injective.

4. Lorsque f est bijective, les deux points de la question 1 montrent d'une part que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ et d'autre part que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(F)}$: ainsi, on a $\Phi^{-1} = \Psi$ et $\Psi^{-1} = \Phi$.

Correction de l'exercice 38.

1. On a $f(1) \in [\![1, n]\!]$ donc $f(1) \geqslant 1$. Comme f est strictement croissante, on a $f(2) > f(1)$ d'où, comme $f(2)$ est entier, $f(2) \geqslant 2$. En raisonnant de même, on trouve $f(3) \geqslant 3$, et plus généralement $f(k) \geqslant k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (cette proposition peut se démontrer rigoureusement par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$).

   Il reste à présent à montrer que $f(k) \leqslant k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ce qui permettra de conclure que $f(k) = k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et donc que $f = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$. Supposons que ce ne soit pas le cas et qu'il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $f(k_0) > k_0$, c'est-à-dire, comme f est à valeurs entières, que $f(k_0) \geqslant k_0 + 1$. En raisonnant comme précédemment à l'aide de la stricte croissance de f, on montre que pour tout $p \in [\![0, n - k_0]\!]$ on a $f(k_0 + p) \geqslant k_0 + p + 1$; en particulier, pour $p = n - k_0$ on obtient $f(n) \geqslant n + 1$, ce qui est absurde puisque f est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Ainsi, on a bien $f(k) \leqslant k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ce qui clôt la preuve.

2. Le choix de l'application $g : n \mapsto n + 1$ montre que le résultat de la question précédente n'est plus vrai dans $\mathbb{N}$.

3. Supposons qu'il existe une application $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement décroissante. Alors on a $h(1) < h(0)$ donc, comme h est à valeurs entières, $h(1) \leqslant h(0) - 1$. Par le même raisonnement, on montre que $h(2) \leqslant h(1) - 1 \leqslant h(0) - 2$, puis que $h(3) \leqslant h(0) - 3$, et plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $h(n) \leqslant h(0) - n$. Ainsi, dès que $n > h(0)$ on a $h(n) < 0$; mais cela contredit le fait que h est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ainsi, il n'existe pas d'application $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement décroissante.

Correction de l'exercice 39.

1. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la proposition
$$\mathcal{P}_p \ : \ « \ f(C_p) \subset C_p \ ».$$
Initialisation :

La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque $C_0 = \mathbb{N}$ et $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$.

Hérédité :

Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons la proposition $\mathcal{P}_p$ soit vraie, c'est-à-dire que $f(C_p) \subset C_p$.

Soit $k \in C_{p+1}$. On a alors $k \geqslant p+1$ donc $k \geqslant p$, soit $k \in C_p$; ainsi, $f(k) \in C_p$ d'après l'hypothèse de récurrence, ce qui signifie que $f(k) \geqslant p$. On sait par ailleurs que $f(f(k-1)) < f(k)$ d'après la propriété $(*)$. Si $f(k) = p$, on peut donc écrire $f(f(k-1)) < p$; or $k-1 \in C_p$ donc $f(k-1) \in C_p$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où $f(f(k-1)) \in C_p$ d'après cette même hypothèse, c'est-à-dire que $f(f(k-1)) \geqslant p$. Ainsi, on ne peut avoir $f(k) = p$; comme $f(k) \geqslant p$, on en déduit que $f(k) \geqslant p+1$, c'est-à-dire que $f(k) \in C_{p+1}$. On a donc montré l'inclusion $f(C_{p+1}) \subset C_{p+1}$, c'est-à-dire la proposition $\mathcal{P}_{p+1}$.

Conclusion :

La proposition $\mathcal{P}_p$ est donc vraie à tout rang $p \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

2. Supposons que f ne soit pas strictement croissante : il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) \geqslant f(n+1)$. Mais alors $f(n) \in C_{f(n+1)}$ donc on devrait avoir $f(f(n)) \in C_{f(n+1)}$, soit $f(f(n)) \geqslant f(n+1)$, d'après la question précédente ; or cela est contraire à la propriété $(*)$. Ainsi, f est strictement croissante.
3. L'application f étant strictement croissante d'après la question précédente, on peut déduire de l'inégalité $f(f(n)) < f(n+1)$ que $f(n) < n+1$, soit $f(n) \leqslant n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or si $n \in \mathbb{N}$, on a $n \in C_n$, d'où $f(n) \in C_n$ d'après la question 1, soit $f(n) \geqslant n$. Ainsi, on a $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 40.

1. Si A et B sont finis et s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors les cardinaux de A et B vérifient
$$|A| \leqslant |B| \quad \text{et} \quad |B| \leqslant |A|, \quad \text{et donc} \quad |A| = |B|,$$
ce qui assure qu'il existe une bijection de A dans B.
2. Si $x \in C$ on a $x \in C_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et donc $u(x) \in u(C_n) = C_{n+1}$ d'où $u(x) \in C$.
3. La définition de $v(x)$ pour tout $x \in A$ ne posant pas problème, il reste à montrer que v est bien à valeurs dans A'.

   Soit $x \in A$.

   Si $x \in C$, alors $v(x) = u(x) \in A'$ puisque u est à valeurs dans A'.

   Si $x \notin C$, alors on a notamment $x \notin C_0$; or $C_0 = A \setminus A'$ donc $v(x) = x \in A'$.

Dans tous les cas, l'élément défini comme étant égal à $v(x)$ est bien dans A', ce qu'il fallait démontrer. L'application v est donc bien définie.

Montrons à présent que v est injective en considérant $x, x' \in E$ tels que $v(x) = v(x')$. On souhaite montrer que l'on a nécessairement $x = x'$.

On distingue plusieurs cas :

- Si $x \notin C$ et $x' \notin C$, alors l'égalité $v(x) = v(x')$ se réécrit directement comme l'égalité recherchée $x = x'$.
- Si x et x' sont dans C, alors l'égalité $v(x) = v(x')$ se réécrit $u(x) = u(x')$, or u est injective donc $x = x'$.
- Considérons enfin le cas où $x \in C$ et $x' \notin C$. L'égalité $v(x) = v(x')$ se réécrit alors sous la forme $u(x) = x'$. Mais $x \in C$, donc x appartient à C_n pour un certain $n \in \mathbb{N}$; on a alors $x' = u(x) \in u(C_n) = C_{n+1}$, si bien que $x' \in C$, ce qui contredit l'hypothèse. Ce troisième cas est donc impossible : on ne peut avoir $v(x) = v(x')$ avec $x \in C$ et $x' \notin C$.

Ainsi, on a dans tous les cas possibles $x = x'$, ce qu'il fallait démontrer : l'application v est donc bien injective.

Montrons à présent que v est surjective. On considère pour cela $y \in A'$.

Si $y \notin C$, on a $v(y) = y$, d'où le résultat attendu avec $x = y$.

Supposons à présent que $y \in C$. Il existe donc un $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in C_n$. Comme $y \in A'$, on ne peut avoir $n = 0$ puisque $C_0 = A \setminus A'$. Ainsi on a $n \geqslant 1$, or $C_n = u(C_{n-1})$ donc $y \in u(C_{n-1})$. Cela signifie qu'il existe $x \in C_{n-1}$ tel que $y = u(x)$, soit, comme $x \in C$, $y = v(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

4. L'application $v : A \to A'$ ainsi construite est injective et surjective, donc bijective : il existe donc bien une bijection de A dans A', ce qui établit le lemme.
5. L'injectivité de h découle de celle de g, et sa surjectivité vient du fait que son ensemble d'arrivée est précisément l'ensemble image de B par g.
6. On a $f : A \to B$ et $h : B \to A'$, donc $u := h \circ f$ existe et est une application de A dans A'. Comme u est la composée de deux injections, elle est elle-même injective (en effet, si $x, x' \in E$ sont tels que $u(x) = u(x')$, c'est-à-dire tels que $h(f(x)) = h(f(x'))$, alors $f(x) = f(x')$ puisque h est injective, et donc $x = x'$ puisque f l'est).
7. On sait que la bijection réciproque h^{-1} de h est une bijection (!). En tant que composée de deux bijections, l'application $h^{-1} \circ v$ est donc elle-même bijective ; or $v : A \to A'$ et $h^{-1} : A' \to B$, donc $h^{-1} \circ v : A \to B$. On a donc bien construit une bijection de A dans B, ce qui établit le théorème de Cantor-Bernstein.

Correction de l'exercice 41.

(i) L'application $x \mapsto x$ de A dans A est évidemment injective, donc $|A| \leqslant |A|$.

(ii) Supposons que $|A| \leqslant |B|$ et $|B| \leqslant |C|$. Il existe donc une application $f : A \to B$ et une application $g : B \to C$ injectives. La composée $g \circ f : A \to C$ est donc injective (voir l'exercice 34) : ainsi, on a $|A| \leqslant |C|$.

(iii) La propriété d'antisymétrie est donnée par le théorème de Cantor-Bernstein : s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe une bijection de A dans B.

Correction de l'exercice 42.

(i) L'application $x \mapsto x$ de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$ étant injective, la proposition est vraie.

(ii) L'application $x \mapsto (x, 0)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ étant injective, la proposition est vraie.

(iii) La proposition est vraie. On a bien sûr $|\mathbb{Q}^*| \leqslant |\mathbb{Q}|$, l'injection étant réalisée par l'application $x \mapsto x$. On a par ailleurs $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}^*|$ puisque l'application $n \mapsto n+1$ est injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}^*$. Or $\mathbb{Q}$ est dénombrable, donc on peut écrire

$$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}^*| \leqslant |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|,$$

si bien [1] que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^*|$.

(iv) La proposition est vraie d'après le théorème de Cantor (théorème 34).

(v) L'ensemble $[1, 2]$, qui est en bijection évidente avec $[0, 1]$ (par l'application $x \mapsto x - 1$), n'est pas dénombrable d'après le théorème 36 : on a $|\mathbb{N}| < |[1, 2]|$. Or $[1, 2] \subset [1, 2] \cup \mathbb{Q}_-$, donc

$$|\mathbb{N}| < |[1, 2]| \leqslant |[1, 2] \cup \mathbb{Q}_-| \quad \text{d'où}^2 \quad |\mathbb{N}| \leqslant |[1, 2] \cup \mathbb{Q}_-|.$$

Ainsi, $[1, 2] \cup \mathbb{Q}_-$ n'est pas dénombrable.

(vi) Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers premiers. Ces entiers sont en nombre infini, donc $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathcal{P}|$ d'après la proposition 29. On a par ailleurs $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$, donc $|\mathcal{P}| \leqslant |\mathbb{N}|$. On peut donc en conclure que $|\mathbb{N}| = |\mathcal{P}|$, c'est-à-dire que l'ensemble des nombres premiers est dénombrable.

Correction de l'exercice 43. Soient A, B et C trois ensembles tels que $|A| \leqslant |B|$ et $|B| < |C|$. Il existe donc une injection $f : A \to B$ et une injection $g : B \to C$.

On souhaite montrer que $|A| < |C|$. Or $|A| \leqslant |C|$ par transitivité de la relation $\leqslant$ (voir le point (ii) de l'exercice 41). Il nous reste donc à établir que $|A| \neq |C|$, c'est-à-dire que A et C ne sont pas en bijection ; raisonnons donc par l'absurde et supposons qu'il existe une application bijective $h : A \to C$. L'application $h \circ g : B \to C$, qui est la composée de deux injections, est donc injective d'après l'exercice 34. On a ainsi $|B| \leqslant |C|$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $|B| < |C|$. Il n'existe donc pas de bijection de A dans C, ce qui montre bien que $|A| < |C|$.

---

1. Rappelons que le raisonnement « $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}^*|$ et $|\mathbb{Q}^*| \leqslant |\mathbb{N}|$ donc $|\mathbb{Q}^*| = |\mathbb{N}|$ » n'est valide qu'en vertu du théorème de Cantor-Bernstein et non d'une propriété triviale.

2. La transitivité de la relation $\leqslant$ sur l'ensemble des cardinaux infinis a été établie dans l'exercice précédent.

Correction de l'exercice 44. L'ensemble A étant infini, on a $|\mathbb{N}| \leqslant |A|$ d'après la proposition 29. Grâce au théorème de Cantor-Bernstein, il suffit désormais d'exhiber une injection $A \mapsto \mathbb{N}$ pour établir que $|A| = |\mathbb{N}|$ et donc que A est dénombrable. Or l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & A & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & \inf\{n \in \mathbb{N} \,:\, x = x_n\} \end{array}$$

est bien définie (puisque tous les éléments de A sont de la forme x_n pour un n donné) et injective (puisque deux éléments de A distincts ne peuvent être égaux à un même élément x_n). Ainsi, on a $|A| \leqslant |\mathbb{N}|$, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 45.

1. Soient $A_1, A_2 \ldots, A_N$ des ensembles dénombrables (en nombre fini $N \geqslant 1$). Il est clair que leur union, qui contient chacun de ces ensembles, est infinie puisque chaque ensemble l'est. D'après l'exercice précédent, il suffit de montrer que les éléments de l'union de ces ensembles peuvent être énumérés un à un[3], sans se soucier d'éventuelles répétitions. Pour cela, on écrit

$$A_1 = \{x_{1,i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}, \quad A_2 = \{x_{2,i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}, \quad \ldots, \quad A_N = \{x_{N,i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}.$$

   Les éléments de l'union $A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_N$ peuvent alors être énumérés de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{N,1}, & \text{(le premier élément de chaque ensemble } A_i) \\ x_{1,2}, x_{2,2}, \ldots, x_{N,2}, & \text{(le deuxième élément de chaque ensemble } A_i) \\ x_{1,3}, x_{2,3}, \ldots, x_{N,3}, & \text{(le troisième élément de chaque ensemble } A_i) \end{array}$$

   et ainsi de suite. Tous les éléments de l'union sont ainsi décrits, ce qui montre que cette union est dénombrable.

2. Donnons-nous un nombre dénombrable d'ensembles A_i (pour $i \in \mathbb{N}$), et écrivons chaque A_i sous la forme

$$A_i = \{x_{i,j} \,:\, j \in \mathbb{N}\}.$$

   On se dote ensuite d'une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ (qui existe d'après le théorème 35 du cours). On peut alors écrire

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \{x_{\varphi(n)} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

   puisque chaque élément de l'union des A_i s'écrit sous la forme $x_{i,j}$ avec $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, et donc sous la forme $x_{\varphi(n)}$ avec $n := \varphi^{-1}(i, j)$. Ainsi, l'union des A_i est dénombrable.

   On pouvait aussi expliciter l'énumération en reprenant l'énumération de $\mathbb{N}^2$ utilisée pour prouver le théorème 35 : les éléments de l'union des A_i s'écrivent

$$x_{0,0},\ x_{0,1},\ x_{1,0},\ x_{0,2},\ x_{1,1},\ x_{2,0},\ x_{0,3},\ x_{1,2},\ \ldots$$

   et sont donc en nombre dénombrable.

---

3. On peut, au prix d'un effort formel pas tout à fait négligeable, expliciter la bijection correspondant à ce protocole d'énumération.

3. Soient $A_1, \dots, A_N$ des ensembles dénombrables (en nombre fini $N \geqslant 1$), que l'on écrit

$$A_1 = \{x_{1,i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}, \quad A_2 = \{x_{2,i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}, \quad \dots, \quad A_N = \{x_{N,i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}$$

comme précédemment. On se donne une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^N$ (qui existe comme nous l'avons évoqué lors de la démonstration du théorème 35), et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on écrit l'élément $\varphi(n)$ sous la forme $(k_{1,n}, k_{2,n}, \dots, k_{N,n})$. Ainsi, tout élément de $\mathbb{N}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme $(k_{1,n}, k_{2,n}, \dots, k_{N,n})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire

$$\prod_{i=1}^{N} A_i = \{(x_{1,k_{1,n}}, x_{2,k_{2,n}}, \dots, x_{N,k_{N,n}}) \,:\, n \in \mathbb{N}\},$$

ce qui montre que le produit cartésien des A_i est dénombrable.

Correction de l'exercice 46. Remarquons tout d'abord que l'application f est bien définie : en effet, si $a, b \in \mathbb{N}$, alors 2^a et $2b+1$ sont des entiers strictement positifs donc $2^a(2b+1) \in \mathbb{N}^*$.

Montrons à présent que f est surjective. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe alors $a \in \mathbb{N}$ tel que n soit divisible par 2^a mais pas par 2^{a+1}. En effet, il suffit de diviser n par 2, puis par 2, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un nombre impair ; a est alors le nombre de divisions par 2 effectuées. L'entier positif $\frac{n}{2^a}$ étant impair, on peut donc le noter sous la forme $2b+1$ avec $b \in \mathbb{N}$. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = 2^a(2b+1)$, ce qui montre que f est surjective.

Montrons ensuite que f est injective. On suppose pour cela que (a, b) et (a', b') soient deux couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que $2^a(2b+1) = 2^{a'}(2b'+1)$.
Si $a > a'$, l'égalité $2^a(2b+1) = 2^{a'}(2b'+1)$ se réécrit $2^{a-a'}(2b+1) = 2b'+1$ et le terme de gauche est pair alors que celui de droite est impair, ce qui est impossible. Une contradiction similaire survient si $a' > a$ (en écrivant $2b+1 = 2^{a'-a}(2b'+1)$).
Ainsi, on a $a = a'$. L'égalité $2^a(2b+1) = 2^{a'}(2b'+1)$ se simplifie alors par $2^a = 2^{a'}$, ce qui donne $2b+1 = 2b'+1$ et donc $b = b'$.
Ainsi, on a $(a, b) = (a', b')$, ce qui montre que f est injective.

On a donc établi que f est bijective, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 47. Sur le modèle de la bijection explicitée entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ dans la preuve du théorème 35, on peut proposer la numérotation suivante des éléments de $\mathbb{N}^3$:

- Le triplet de somme 0 : $(0,0,0)$, numéroté 0.
- Les triplets de somme 1 : $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$, numérotés respectivement 1, 2 et 3.
- Les triplets de somme 2 : $(2,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,2,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,2)$.
- Et ainsi de suite, en énumérant à chaque fois les triples de somme donnée par ordre lexicographique décroissant (c'est-à-dire de sorte que les entiers formés en concaténant les coefficients des triplets soient dans l'ordre décroissant, comme 200, 110, 101, 20, 11 et 2 dans le point précédent).

Il est clair que la numérotation ainsi effectuée fournit une bijection de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$.

Pour expliciter cette bijection, on peut chercher à exprimer le numéro associé à un triplet quelconque $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$. Cherchons tout d'abord à déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, combien il existe de triplets de $\mathbb{N}^3$ de somme n. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $a \in [\![0, n]\!]$, un triplet est de somme n si et seulement s'il est de la forme $(a, k, n-a-k)$ avec $k \in [\![0, n-a]\!]$, ce qui correspond à $n-a+1$ choix possibles de k, donc à $n-a+1$ triplets possibles. Ainsi, en distinguant les différents triplets selon leur première coordonnée, le nombre de triplets de $\mathbb{N}^3$ de somme n vaut

$$\sum_{a=0}^{n}(n-a+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

où l'on a posé $i = n-a+1$.

Intéressons-nous à présent à la numérotation attribuée à un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$. Sa somme vaut $a+b+c$, donc il est numéroté après les triplets de somme 0, 1, ..., $a+b+c-1$, qui sont, d'après ce qui précède, au nombre de

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{a+b+c-1} \frac{(n+1)(n+2)}{2} &= \sum_{i=1}^{a+b+c} \frac{i(i+1)}{2} \quad \text{en posant } i = n+1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{a+b+c} i^2 + \sum_{i=1}^{a+b+c} i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(a+b+c)(a+b+c+1)(2a+2b+2c+1)}{6} + \frac{(a+b+c)(a+b+c+1)}{2}\right) \\
&= \frac{(a+b+c)(a+b+c+1)(a+b+c+2)}{6}.
\end{aligned}$$

Il est aussi numéroté après les triplets de somme $a+b+c$ dont la première coordonnée est strictement inférieure à a, qui sont, d'après ce qui précède, au nombre de

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{a-1}(a+b+c-k+1) &= \sum_{k=0}^{a-1}(a+b+c+1) - \sum_{k=0}^{a-1} k \\
&= a(a+b+c+1) - \frac{(a-1)a}{2} = \frac{a(a+2b+2c+3)}{2},
\end{aligned}$$

Enfin, il est numéroté après les triplets de somme $a+b+c$ dont la première coordonnée vaut a et dont la deuxième est strictement inférieure à b, donc des triplets de la forme $(a, k, a+b+c-k)$ avec $k \in [\![0, b-1]\!]$ qui sont au nombre de b.

Ainsi, le triplet (a, b, c) est numéroté $\frac{(a+b+c)(a+b+c+1)(a+b+c+2)}{6} + \frac{a(a+2b+2c+3)}{2} + b$ (rappelons que la numérotation commence à 0).

L'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^3 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a, b, c) & \longmapsto & \frac{(a+b+c)(a+b+c+1)(a+b+c+2)}{6} + \frac{a(a+2b+2c+3)}{2} + b \end{array}$$

est donc une bijection (explicite) de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$.

Notons qu'il existait bien d'autres bijections possibles : on pouvait aussi s'inspirer de l'exercice précédent et proposer l'application $g : (a, b, c) \mapsto 2^a\Big(2(2^b(2c+1)) + 1\Big) - 1$, dont on laisse le lecteur montrer qu'il s'agit bien d'une bijection de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 48. Considérons l'application $f : [0,1]^2 \to [0,2]$ qui transforme un couple (x_1, x_2) avec x_1 et x_2 de développements décimaux propres [4]

$$x_1 = a_0, a_2a_4a_6 \dots \quad \text{et} \quad x_2 = a_1, a_3a_5a_7 \dots$$

en le nombre $x \in \mathbb{R}$ défini par l'alternance des développements décimaux de x_1 et x_2, c'est-à-dire par

$$f(x_1, x_2) = x := a_0, a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \dots$$

Cette application est bien définie puisque les développements décimaux propres sont uniques et parce que le nombre x a pour partie réelle 0 ou 1, donc est dans $[0,2[$.
Montrons que f est injective : on considère deux couples (x_1, x_2) et (x_1', x_2') dont les développements décimaux propres des coordonnées sont

$$x_1 = a_0, a_2a_4a_6 \dots \quad \text{et} \quad x_2 = a_1, a_3a_5a_7 \dots$$

ainsi que

$$x_1' = a_0', a_2'a_4'a_6' \dots \quad \text{et} \quad x_2' = a_1', a_3'a_5'a_7' \dots$$

On suppose à présent que $f(x_1, x_2) = f(x_1', x_2')$, c'est-à-dire que

$$a_0, a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \dots = a_0', a_1'a_2'a_3'a_4'a_5'a_6'a_7' \dots$$

Comme les a_{2k} et les a_{2k+1} ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang, les a_k ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Il en va de même pour les a_k'. Ainsi, les écritures $a_0, a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \dots$ et $a_0', a_1'a_2'a_3'a_4'a_5'a_6'a_7' \dots$ sont les développements décimaux propres d'un même nombre, d'où $a_k = a_k'$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, les couples (x_1, x_2) et (x_1', x_2') sont égaux, ce qui établit l'injectivité de f.
L'application $f/2 : x \mapsto \frac{f(x)}{2}$ réalise donc une injection [5] de $[0,1]^2$ dans $[0,1]$.
Ainsi, on a $|[0,1]|^2 \leqslant |[0,1]|$. L'application $x \mapsto (x, 0)$ réalisant évidemment une injection de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$, on a $|[0,1]| \leqslant |[0,1]^2|$, donc $|[0,1]^2| = |[0,1]|$ d'après le théorème de Cantor-Bernstein, ce qu'il fallait démontrer.

4. Sans imposer aux développements décimaux considérés d'être *propres*, on ne pourrait définir $f(1)$ de façon univoque comme dans la correction puisqu'il pourrait s'agir de $(1,0)$ ou de $(0,999\dots, 0,999\dots) = (1,1)$.

5. L'application $f/2$ n'est cependant pas surjective. En effet, le nombre $x = 0,3 \in [0,2]$ n'est pas l'image d'un couple $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ par f puisque la première décimale du nombre $f(x_1, x_2)$ est la partie entière de x_2 et vaut donc nécessairement 0 ou 1. Ainsi, le réel $\frac{x}{2} = 0,15$ n'admet pas d'antécédent par $f/2$ dans $[0,1]^2$. Ce point justifie l'utilisation du théorème de Cantor-Bernstein pour obtenir l'existence d'une bijection.

Correction de l'exercice 49. L'application $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ qui associe à une application $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ l'application $\widetilde{f} : \mathbb{N} \to [\![0,9]\!]$ définie par $\widetilde{f}(n) = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est trivialement injective (puisque $\widetilde{f}$ et f prennent les mêmes valeurs sur $\mathbb{N}$ et ne diffèrent que par leur ensemble d'arrivée). On peut ainsi écrire [6] que $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leqslant |[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}|$.

Introduisons à présent une application $\psi : [\![0,9]\!] \to \{0,1\}^4$ qui réalise un « codage en 4 bits » des entiers de $[\![0,9]\!]$, c'est-à-dire qui associe à chacun de ses entiers son écriture en binaire écrite dans un quadruplet [7] :

$$\psi(0) = (0,0,0,0), \quad \psi(1) = (0,0,0,1), \quad \psi(2) = (0,0,1,0), \quad \psi(3) = (0,0,1,1),$$

$$\psi(4) = (0,1,0,0), \quad \psi(5) = (0,1,0,1), \quad \psi(6) = (0,1,1,0), \quad \psi(7) = (0,1,1,1),$$

$$\psi(8) = (1,0,0,0) \quad \text{et} \quad \psi(9) = (1,0,0,1).$$

L'application est ψ est injective puisque les images listées ci-dessus sont deux à deux distinctes.

Considérons à présent l'application $\Phi : [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que pour toute application $f : \mathbb{N} \to [\![0,9]\!]$, l'application $\Phi(f) : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ soit définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(\Phi(f)(4n), \Phi(f)(4n+1), \Phi(f)(4n+2), \Phi(f)(4n+3)\big) = \psi(f(n)).$$

En d'autres termes, la liste des valeurs de $\Phi(f)$ est obtenue en concaténant les écritures en 4 bits des valeurs de f : par exemple, si $f(0) = 3$ (ce qui donne l'écriture en 4 bits $\psi(f(0)) = (0,0,1,1)$) et $f(1) = 7$ (donc $\psi(f(1)) = (0,1,1,1)$), les huit premières valeurs de $\Phi(f)$ sont

$$\Phi(f)(0) = 0, \quad \Phi(f)(1) = 0, \quad \Phi(f)(2) = 1, \quad \Phi(f)(3) = 1,$$

$$\Phi(f)(4) = 0, \quad \Phi(f)(5) = 1, \quad \Phi(f)(6) = 1 \quad \text{et} \quad \Phi(f)(7) = 1.$$

Connaître les valeurs successives de $\Phi(f)$ permet donc de connaître celles de f, ce qui signifie que Φ est injective. On a donc $|[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}| \leqslant |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

On conclut grâce au théorème de Cantor-Bernstein que $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 50. L'application associant un nombre $x \in [0,1[$ à la suite des décimales de son unique développement décimal propre est injective : deux éléments de $[0,1[$ distincts ne peuvent en effet avoir le même développement décimal propre. On dispose ainsi d'une injection de $[0,1[$ dans $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$.

Pour exhiber une injection de $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ dans $[0,1[$, il ne suffit pas de considérer la transformation réciproque de l'application définie précédemment : en effet, deux suites de décimales différentes peuvent correspondre au même réel si l'une des deux suites est stationnaire à 9, c'est-à-dire si elle prend constamment la valeur 9 à partir

---

6. Il aurait été fort tentant de dire que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est inclus dans $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ puisque toute suite à valeurs dans $\{0,1\}$ est une suite à valeurs dans $[\![0,9]\!]$, mais cela n'est pas vrai en toute rigueur puisque les éléments de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ont pour ensemble d'arrivée $\{0,1\}$ et non $[\![0,9]\!]$. C'est pour contourner cet obstacle (qui relève un peu du pinaillage !) que nous introduisons la bijection φ.

7. On pourrait choisir n'importe quelle injection de $[\![0,9]\!]$ dans $\{0,1\}^4$ à la place de ψ.

d'un certain rang (l'une des suites au moins correspond alors un développement décimal impropre du réel). Pour contourner cette difficulté, on considère pour toute suite $u \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ le réel x_u de $[0,1[$ dont les décimales de rang pair valent 0 et dont les décimales de rang impair valent u_0, u_1, u_2 et ainsi de suite : par exemple, si u a pour premiers termes $3, 5$ et 1, alors $x_u = 0,305010\dots$ L'application $u \mapsto x_u$ de $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ dans $[0,1[$ est alors bien définie et injective.

Le théorème de Cantor-Bernstein montre donc que $[0,1[$ et $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ sont équipotents, ce qu'il fallait établir.

D'après l'exercice 30, on a $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ (*via* la bijection $A \mapsto \mathbb{1}_A$ entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$). L'exercice 49 montre en outre que $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}|$. Enfin, on a $|[0,1[| = |\mathbb{R}|$ puisque $|[0,1[| \leqslant |\mathbb{R}|$ (*via* l'injection triviale $x \mapsto x$) et $|\mathbb{R}| \leqslant |[0,1[|$ (ce qui se conçoit facilement en dessinant la courbe d'une injection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$, qui peut être explicitée par exemple par la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$). On a donc, grâce à l'égalité $|[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ que nous venons de démontrer :

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}| = |[0,1[| = |\mathbb{R}|,$$

donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents, ce qu'il fallait démontrer [8].

8. Notons que le fait de considérer le développement propre d'un nombre *en binaire* nous aurait permis d'économiser le passage par $[\![0,9]\!]$ dans cette preuve.