2 ENTRAÎNEMENT

Exercice 10. Justifier que les applications suivantes sont bien définies :

(i) $\begin{array}{rcl} f : [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}_- \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-1} \end{array}$

(ii) $\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [0,1] \\ t & \longmapsto & \dfrac{\sqrt{t}}{1+t} \end{array}$

(iii) $\begin{array}{rcl} h : \mathcal{P}(\llbracket 1,10 \rrbracket) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\llbracket 2,20 \rrbracket) \\ A & \longmapsto & \{2x \,:\, x \in A\} \end{array}$

(iv) $\begin{array}{rcl} i : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \longmapsto & (\lfloor x-y \rfloor, |x-y|) \end{array}$

Exercice 11. Soit $f : E \to F$ une application et soient $A \subset E$ et $B \subset F$. Montrer que

$$f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B.$$

Exercice 12. Soit E un ensemble et soient A et B deux parties de E. On note $\overline{A} = E \setminus A$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in E$ on a $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in E$ on a $\mathbb{1}_{A \cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$.
   (c) Montrer que pour tout $x \in E$ on a $\mathbb{1}_{A \cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$.
2. (a) Montrer que : $A \subset B \iff \big(\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)\big)$.
   (b) Montrer que : $A = B \iff \big(\forall x \in E,\ \mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)\big)$.

Exercice 13. Soient f_1, f_2, f_3 les trois applications définies par

$$\begin{array}{rcl} f_1 :]-2,2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1+x}{x^2-4}, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} f_2 : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x^2 + \dfrac{1}{x^2} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} f_3 : \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-1}{x+1}. \end{array}$$

1. Vérifier que chacune de ces applications est bien définie.
2. Quels sont les $i, j \in \llbracket 1,3 \rrbracket$ tels que $f_i \circ f_j$ existe ? Le cas échéant, expliciter les ensembles de départ et d'arrivée de cette composée.

Exercice 14. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les fonctions linéaires

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & bx \end{array}$$

commutent, c'est-à-dire que $f \circ g = g \circ f$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions affines

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax + c \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rcl} i : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & bx + d \end{array}$$

commutent.

Exercice 15 (Associativité de la composition). Démontrer que si $f : A \to B$, $g : C \to D$ et $h : E \to F$ sont des applications entre des ensembles tels que $B \subset C$ et $D \subset E$, alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Exercice 16. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ mais telle que $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Exercice 17. On considère deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to H$.

1. Montrer que pour tout $A \subset E$ on a $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.
2. Montrer que pour tout $B \subset H$ on a $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

Exercice 18. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{x-1} \end{array}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n := \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$.

1. Vérifier que f et les f_n sont bien définies.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, calculer $f_2(x)$ puis $f_3(x)$, puis déterminer $f_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 19. Donner un exemple :

(i) d'application surjective non injective.
(ii) d'application injective non surjective.
(iii) d'application ni injective ni surjective.

Exercice 20. L'application partie entière

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 21. Soient E un ensemble et $A \subset E$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ soit injective.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{1}_A$ soit surjective.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{1}_A$ soit bijective.

Exercice 22. Montrer que

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 3 + \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

est bijective.

Exercice 23. Les applications

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-y, x^2-y^2) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-y, 2xy) \end{array}$$

sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

Exercice 24. Soit $f : E \to F$ une application et soient

$$g : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & F \times F \\ x & \longmapsto & (f(x), f(x)) \end{array} \quad \text{et} \quad h : \begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & F \times F \\ (x,y) & \longmapsto & (f(x), f(y)). \end{array}$$

1. Montrer que g est injective si et seulement si f l'est.
2. Montrer que g n'est pas surjective dès lors que $|F| \geqslant 2$.
3. Montrer que h est injective si et seulement si f l'est.
4. Montrer que h est surjective si et seulement si f l'est.

Exercice 25. Soit E un ensemble et soit $f : E \to E$ une application vérifiant $f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective, et que dans ce cas on a $f = \mathrm{Id}_E$.

Exercice 26. Soit $f : E \to F$ une application bijective entre deux ensembles E et F. Montrer que si $B \subset F$, l'image réciproque de B par f est l'ensemble image de B par f^{-1}, c'est-à-dire que

$$\{x \in E \,:\, f(x) \in B\} = \{f^{-1}(y), y \in B\}.$$

Cette question a pour but de justifier que le fait d'utiliser la notation $f^{-1}(B)$ pour désigner ces deux ensembles n'induit pas d'ambiguïté.

Exercice 27. Soit $f : A \to B$ une application. Montrer que s'il existe $g : B \to A$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$, alors f est bijective et $g = f^{-1}$.

Exercice 28. Montrer que chacune des applications suivantes est bien définie et bijective, et en donner la réciproque :

(i) $$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [0,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{1+x} \end{array}$$

(ii) $$f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & [1,+\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array}$$

(iii) $$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (3x+2y, x-y+1) \end{array}$$

(iv) $$f_4 : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}([\![1,100]\!]) & \longrightarrow & \{B \subset [\![0,100]\!] \,:\, 0 \in B\} \\ A & \longmapsto & A \cup \{0\} \end{array}$$

Exercice 29. Soient A et B deux ensembles finis. On note $n = |A|$ et $p = |B|$, et on écrit A sous la forme $A = \{x_1, \dots, x_n\}$.

1. Montrer que l'application
$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(A,B) & \longrightarrow & B^n \\ f & \longmapsto & (f(x_1), \dots, f(x_n)) \end{array}$$
est une bijection.
2. En déduire le cardinal de l'ensemble $\mathcal{F}(A,B)$.

Exercice 30. Soit E un ensemble. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{F}(E,\{0,1\}) \\ A & \longmapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$

est bijective, puis en déduire le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ lorsque E est fini.