Exemple de trois VARD indépendantes deux à deux mais pas mutuellement

Les VARD X et Y sont indépendantes par hypothèse. Montrons à présent que X et Z sont indépendantes.
On remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z=1) &= \mathbb{P}((X \text{ est pair et } Y \text{ est pair})) + \mathbb{P}((X \text{ est impair et } Y \text{ est impair})) \\ &= \mathbb{P}((X \text{ est pair}) \cap (Y \text{ est pair})) + \mathbb{P}((X \text{ est impair}) \cap (Y \text{ est impair}))\end{aligned}$$

puisque les événements $(X \text{ est pair}) \cap (Y \text{ est pair})$ et $(X \text{ est impair}) \cap (Y \text{ est impair})$ sont incompatibles, d'où

$$\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(X \text{ est pair})\,\mathbb{P}(Y \text{ est pair}) + \mathbb{P}(X \text{ est impair})\,\mathbb{P}(Y \text{ est impair})$$

par indépendance, soit

$$\mathbb{P}(Z=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

et donc

$$\mathbb{P}(Z=0) = 1 - \mathbb{P}(Z=1) = \frac{1}{2}.$$

Soit maintenant $i \in [\![1,6]\!]$ un entier pair. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X=i)\cap(Z=1)) &= \mathbb{P}((X=i)\cap(Y \text{ est pair})) \\ &= \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Y \text{ est pair}) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12},\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Z=1) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

donc $\mathbb{P}((X=i)\cap(Z=1)) = \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Z=1)$. Un raisonnement similaire (en remplaçant l'événement $(Y \text{ est pair})$ par l'événement $(Y \text{ est impair})$ dans le calcul ci-dessus) permet de montrer que $\mathbb{P}((X=i)\cap(Z=1)) = \mathbb{P}(X=i)\,\mathbb{P}(Z=1)$ lorsque $i \in [\![1,6]\!]$ est un entier impair.
De même, on obtient pour tout $i \in [\![1,6]\!]$ pair :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X=i)\cap(Z=0)) &= \mathbb{P}((X=i)\cap(Y \text{ est impair})) \\ &= \mathbb{P}((X=i)\,\mathbb{P}(Y \text{ est impair}) \quad \text{par indépendance de } X \text{ et } Y \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{12},\end{aligned}$$

et donc $\mathbb{P}(X = i) \cap (Z = 0)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Z = 0)$, et il en est de même lorsque i est impair.

Ainsi, on peut écrire que $\mathbb{P}((X = i) \cap (Z = j)) = \mathbb{P}(X = i)\,\mathbb{P}(Z = j)$ pour tout $i \in [\![1, 6]\!] = X(\Omega)$ et tout $j \in \{0, 1\} = Z(\Omega)$, ce qui montre que les VARD X et Z sont indépendantes.

Un raisonnement symétrique (en échangeant les rôles de X et Y) établit que Y et Z sont indépendantes.

Ainsi, les VARD X, Y et Z sont bien deux à deux indépendantes.
Pourtant, elles ne sont pas *mutuellement*[1] indépendantes puisque

$$\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 1) \cap (Z = 0)) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$$

et

$$\mathbb{P}(X = 1)\,\mathbb{P}(Y = 1)\,\mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \neq 0.$$

1. Pour montrer que des VARD ne sont pas mutuellement indépendantes, il suffit de décrire un cas dans lequel les valeurs prises par certaines variables poussent une autre à prendre certaines valeurs, ou au contraire l'empêchent de les prendre. Ici, le fait que X et Y prennent la valeur 1 empêche Z de prendre la valeur 0, et on démontre formellement l'absence d'indépendance (mutuelle) en considérant les événements associés.