3 RÉFLÉCHISSONS

Exercice 32. Où est l'erreur dans le raisonnement par récurrence suivant, qui vise à prouver une proposition fausse (puisque par exemple $10^2 + 1 = 101$ n'est pas multiple de 9) ?

> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n$: « $10^n + 1$ est multiple de 9 ».
> Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie. Il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^n + 1 = 9k$. On peut donc écrire $10^{n+1} + 1 = 10 \cdot 10^n + 1 = 9 \cdot 10^n + 10^n + 1 = 9 \cdot 10^n + 9k = 9(10^n + k)$, ce qui montre que l'entier $10^{n+1} + 1$ est multiple de 9. La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc bien établie.
> On en déduit que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

Exercice 33. Où est l'erreur dans le raisonnement par récurrence suivant, qui vise à prouver une proposition évidemment fausse ?

> Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
>
> $\mathcal{P}_n$: « Toute boîte de n crayons de couleur ne contient que des crayons de la même couleur. ».
>
> Initialisation :
>
> $\mathcal{P}_1$ est vraie puisqu'une boîte ne contenant qu'un crayon ne contient qu'une couleur.
>
> Hérédité :
>
> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie et on considère une boîte contenant $n+1$ crayons de couleur. Retirons un crayon à cette boîte ; il reste n crayons, qui sont tous de la même couleur par l'hypothèse de récurrence. Reposons ce crayon dans la boîte et retirons-en un autre ; il reste à nouveau n crayons, qui sont tous de la même couleur par l'hypothèse de récurrence. Les deux crayons retirés successivement sont donc de même couleur que tous les autres, si bien que la boîte ne contient effectivement que des crayons d'une seule couleur. La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est bien établie.
>
> Conclusion :
>
> La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

Exercice 34. On considère des propositions $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$, ainsi qu'un ensemble E et, pour tout $x \in E$, des propositions $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies (on justifiera les réponses négatives en exhibant des contre-exemples) :

(i) $(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \text{ et } \mathcal{R} \iff (\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{R}) \text{ ou } (\mathcal{Q} \text{ et } \mathcal{R})$

(ii) $(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \text{ ou } \mathcal{R} \iff (\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{R}) \text{ et } (\mathcal{Q} \text{ ou } \mathcal{R})$

(iii) $(\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ et } \forall x \in E, \mathcal{Q}(x)) \iff (\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x))$

(iv) $(\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ ou } \forall x \in E, \mathcal{Q}(x)) \iff (\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x))$

(v) $(\exists x \in E : \mathcal{P}(x) \text{ et } \exists x \in E : \mathcal{Q}(x)) \iff (\exists x \in E : \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x))$

(vi) $(\exists x \in E : \mathcal{P}(x) \text{ ou } \exists x \in E : \mathcal{Q}(x)) \iff (\exists x \in E : \mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x))$

Exercice 35. Donner une forme simple de l'ensemble

$$A = \left\{ \left(3xy, \frac{1}{x+1} \right) \ : \ (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_- \right\}.$$

Indication : on cherchera à exprimer A comme un produit cartésien d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Exercice 36. Soient E et F deux ensembles.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
2. Montrer que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$. À quelle condition l'inclusion réciproque est-elle vérifiée ?

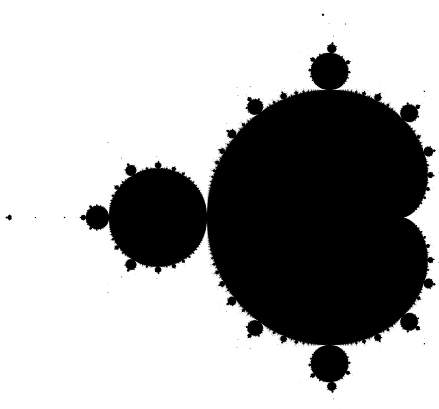
Exercice 37. On veut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre de parties d'un ensemble fini E de cardinal n est

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^n.$$

1. Montrer que la propriété est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire que le nombre de parties d'un ensemble fini à n éléments est égal à 2^n, et on se donne un ensemble E à $n+1$ éléments, dont on choisit un élément $x \in E$.

2. Donner le cardinal de $\mathcal{P}(E \backslash \{x\})$.
3. Montrer que les ensembles $\mathcal{P}_1 := \{F \in \mathcal{P}(E) : x \in F\}$ et $\mathcal{P}_2 := \{F \in \mathcal{P}(E) : x \notin F\}$ forment une partition de $\mathcal{P}(E)$.
4. Montrer que
$$\mathcal{P}_1 = \{G \cup \{x\} : G \in \mathcal{P}(E \backslash \{x\})\}$$
et que
$$\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(E \backslash \{x\})$$
puis en déduire que ces deux ensembles sont de cardinal $|\mathcal{P}(E \backslash \{x\})| = 2^n$.
5. Montrer que $|\mathcal{P}(E)| = 2^{n+1}$.
6. Conclure.
7. Calculer le cardinal de $\mathcal{P}(\{1,2\} \times \{1,3\})$ et de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.



L'ensemble de Mandelbrot, bien que défini par une règle très simple, fait partie de la classe des ensembles fractals *: parmi ses étonnantes propriétés figure* l'autosimilarité, *c'est-à-dire la répétition des structures à toutes les échelles. On trouverait plus d'informations sur cette curiosité de la « zoologie » mathématique en suivant ce lien.*