Variables aléatoires réelles discrètes

Démonstration de la proposition 17

Avant de présenter la preuve, introduisons une notation utile. Si I est un ensemble dénombrable s'écrivant $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ et si $(A_i)_{i\in I}$ est un ensemble d'événements deux à deux disjoints, alors on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{x_k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{x_k}),$$

où la deuxième égalité procède de la σ-additivité de $\mathbb{P}$. Ainsi, la probabilité

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{x_k})$$

ne dépend pas du choix de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ utilisée pour représenter les éléments de I. On s'autorise alors à noter

$$\sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$$

la valeur de cette somme [1].

De même, soient I et J sont deux ensembles finis ou dénombrables. On a vu dans cette section du cours sur les ensembles et dans l'exercice 45 associé que leur produit cartésien est lui-même fini ou dénombrable. Donnons-nous à présent une famille d'événements deux à deux disjoints $\left(A_{i,j}\right)_{(i,j)\in I\times J}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(i,j)\in I\times J}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i\in I}\left(\bigsqcup_{j\in J} A_{i,j}\right)\right) \\
&= \sum_{i\in I} \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{j\in J} A_{i,j}\right) \qquad \text{par incompatibilité}
\end{aligned}$$

1. On peut plus généralement montrer, sur le modèle de la preuve du théorème de Fubini proposée en exercice dans le tome de première année, que si u_k est le terme général positif d'une série convergente, alors la valeur de la somme de cette série est la même quel que soit l'ordre dans lequel les termes sont sommés, c'est-à-dire que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)}$$

pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Cette propriété, qui figure en creux dans la définition de la σ-additivité, peut sembler évidente, mais un théorème de réarrangement de Riemann stipule qu'elle n'est plus vraie lorsque les termes ne sont plus supposés positifs et forment une série non absolument convergente.

$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\mathbb{P}(A_{i,j}) \qquad \text{à nouveau par incompatibilité,}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(i,j)\in I\times J}\right) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i\in I}\left(\bigsqcup_{j\in J} A_{i,j}\right)\right)\\
&= \sum_{j\in J}\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i\in I} A_{i,j}\right) \qquad \text{par incompatibilité}\\
&= \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_{i,j}) \qquad \text{à nouveau par incompatibilité.}
\end{aligned}$$

Ainsi, la somme des $\mathbb{P}(A_{i,j})$ est indépendante de l'ordre de sommation des termes, et elle vaut indifféremment chacune des sommes doubles ci-dessus. On se permet donc de simplement la noter

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}\mathbb{P}(A_{i,j}) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\mathbb{P}(A_{i,j}) = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I}\mathbb{P}(A_{i,j}).$$

Passons à présent à la démonstration de notre proposition.

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble fini ou dénombrable $I := A\cap X(\Omega)$ et l'ensemble fini ou dénombrable $J := B\cap Y(\Omega)$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big((X\in A)\cap(Y\in B)\Big) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(x,y)\in I\times J}\Big((X=x)\cap(Y=y)\Big)\right)\\
&= \sum_{(x,y)\in I\times J}\mathbb{P}\Big((X=x)\cap(Y=y)\Big) \qquad \text{par incompatibilité [2]}\\
&= \sum_{(x,y)\in I\times J}\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y) \qquad \text{par indépendance}\\
&= \sum_{x\in I}\sum_{y\in J}\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)\\
&= \sum_{x\in I}\mathbb{P}(X=x)\sum_{y\in J}\mathbb{P}(Y=y)\\
&= \mathbb{P}(X\in A)\mathbb{P}(Y\in B) \qquad \text{par linéarité,}
\end{aligned}$$

où le recours à la σ-additivité (à hauteur de la deuxième égalité) est rendu possible par le fait que $I\times J$ est fini ou dénombrable, et où les notations des sommes ont été introduites dans la remarque qui précède le début de la preuve. La propriété de linéarité utilisée pour justifier l'avant-dernière égalité est la linéarité de la somme finie si J est fini, et la linéarité des sommes de séries convergentes si J est infini.

On a bien obtenu la relation

$$\mathbb{P}\Big((X\in A)\cap(Y\in B)\Big) = \mathbb{P}(X\in A)\mathbb{P}(Y\in B),$$

ce qui clôt la preuve.