VARD

Démonstration du théorème 53 (théorème de transfert)

Supposons que X prend un nombre fini de valeurs.
Pour tout $y \in (f(X))(\Omega)$, on peut écrire

$$(f(X) = y) = \Big(X \in f^{-1}(\{y\})\Big) = \bigsqcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} (X = x)$$

d'où

$$\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x) \tag{1}$$

par incompatibilité des événements $(X = x)$ qui sont en nombre fini, la dernière égalité n'étant qu'une réécriture de la somme.
Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(f(X)\Big) &= \sum_{y \in (f(X))(\Omega)} y\, \mathbb{P}(f(X) = y) \\
&= \sum_{y \in (f(X))(\Omega)} y \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} \mathbb{P}(X = x) && \text{d'après (1)} \\
&= \sum_{y \in (f(X))(\Omega)} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} y\, \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{y \in (f(X))(\Omega)} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x) = y}} f(x)\, \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)\, \mathbb{P}(X = x)
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du fait que la somme intérieure, qui porte sur tous les x de $X(\Omega)$ tels que $f(x) = y$, est elle-même sommée sur toutes valeurs de y dans $(f(X))(\Omega)$, ce qui revient à considérer la somme sur tous les x de $X(\Omega)$.
La démonstration du deuxième point du théorème repose sur des considérations de convergence rendant valables les manipulations ci-dessus dans le cadre de sommes infinies ; nous nous épargnons encore une fois cette peine. $\square$
est finie.