Dans la section 1.2, on a étudié le signe de f'' sur un intervalle pour en déduire l'allure globale de la courbe $\mathcal{C}_f$. Étudier le signe de f'' sur tout un intervalle peut néanmoins s'avérer fastidieux lorsque l'expression de f'' est compliquée. On va voir que le signe des premières dérivées de f en un point donné permet déjà de connaître l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de ce point.

3.1 Étude locale du graphe d'une fonction

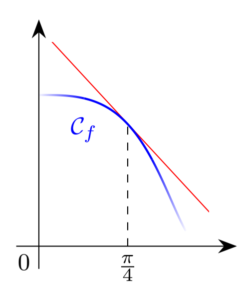
En démontrant la proposition A, on a établi un résultat *local* important :

Proposition E (Dérivée seconde et position locale de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes)**.** Soit $a \in I$. Si la fonction f est deux fois dérivable en a, alors :

- Si $f''(a) > 0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est ***localement*** *strictement au-dessus de sa tangente en* a, au sens où
$$\exists \varepsilon > 0 \,:\, \forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}, \quad f(x) > f(a) + f'(a)(x-a).$$
- Si $f''(a) < 0$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est ***localement*** *strictement en-dessous de sa tangente en* a, au sens où
$$\exists \varepsilon > 0 \,:\, \forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}, \quad f(x) < f(a) + f'(a)(x-a).$$

On notera les hypothèses et les conclusions renforcées de la présente proposition par rapport à la proposition A, plus globale. Remarquons que la proposition ci-contre ne permet pas de conclure sur la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en a dans le cas où $f''(a) = 0$; on verra dans la suite du cours comment traiter ce cas.

Exemple. On souhaite étudier la courbe représentative de la fonction f définie par
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f(x) = e^{x-\tan(x)}$$
au voisinage du point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$. Cette fonction est dérivable comme combinaison de fonctions dérivables, et on a
$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \quad f'(x) = -\tan^2(x)e^{x-\tan(x)}.$$
Ainsi, f' est elle-même dérivable pour la même raison, et pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a
$$f''(x) = \left(-2\tan(x) - 2\tan^3(x) + \tan^4(x)\right) e^{x-\tan(x)}.$$



Ainsi, on a $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3e^{\frac{\pi}{4}-1}$ puisque $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, et donc $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, si bien que $\mathcal{C}_f$ est localement strictement en-dessous de sa tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$, qui est la droite d'équation $y = e^{\frac{\pi}{4}-1} - e^{\frac{\pi}{4}-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. On en déduit l'allure de $\mathcal{C}_f$ donnée ci-contre.

Les dérivées d'ordre $n \geqslant 3$ ne possèdent pas, en général, d'interprétation graphique aussi directe que celle des dérivées première et seconde. Elles permettent en revanche de décrire l'allure locale de $\mathcal{C}_f$ au voisinage d'un point en lequel la dérivée seconde de f s'annule, comme l'indique la généralisation suivante de la proposition E :

Théorème F (Dérivées successives et allure locale de $\mathcal{C}_f$)**.**
Soit $a \in I$. On suppose que f est dérivable $n \geqslant 2$ fois en a et que l'un des nombres $f^{(k)}(a)$, pour $k \in [\![2, n]\!]$, n'est pas nul. Soit k le plus petit entier de $[\![2, n]\!]$ vérifiant cette propriété. Alors :

- $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en a en lequel elle croise sa tangente « par le bas » si k est impair et si $f^{(k)}(a) > 0$.
- $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en a en lequel elle croise sa tangente « par le haut » si k est impair et si $f^{(k)}(a) < 0$.
- $\mathcal{C}_f$ est localement strictement au-dessus de sa tangente en a si k est pair et si $f^{(k)}(a) > 0$.
- $\mathcal{C}_f$ est localement strictement en-dessous de sa tangente en a si k est pair et si $f^{(k)}(a) < 0$.

La position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en a est donc donnée par le premier nombre dérivé non nul d'ordre supérieur ou égal à 2 au point a.

Démonstration du théorème F — On démontre la proposition dans un unique cas de figure, en laissant au lecteur le soin de la compléter dans les autres cas.

Supposons que k est impair et que $f^{(k)}(a) > 0$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}$ on ait

$$\frac{f^{(k-1)}(x) - f^{(k-1)}(a)}{x-a} > 0, \quad \text{soit} \quad \frac{f^{(k-1)}(x)}{x-a} > 0$$

puisque $f^{(k-1)}(a) = 0$. Ainsi, la quantité $f^{(k-1)}(x)$ est du signe de $x - a$ pour tout $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}$. On en déduit le tableau de signes et de variations donné à la page suivante, dans lequel les signes et les variations sont à comprendre au sens strict.

x	$a-\varepsilon$		a		$a+\varepsilon$
$f^{(k-1)}(x)$		$-$	0	$+$	
$f^{(k-2)}$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$f^{(k-3)}$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$f^{(k-4)}$		$\searrow$	0	$\nearrow$	
$\dots$			$\dots$		
f''		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

On remarque que les cellules constituant la colonne de droite de ce tableau sont alternées. Comme l'entier k est impair, $k-1$ est pair, si bien que les variations de f'' sont les mêmes que celles de $f^{(k-1)}$.

Ainsi, f'' est bien strictement négative sur $[a-\varepsilon[$ et strictement positive sur $]a+\varepsilon]$, ce qui montre que a est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ et implique d'après la proposition C que $\mathcal{C}_f$ croise sa tangente en a « par le bas ». $\square$

On retient la méthode suivante :

> **Méthode G (Étude locale de $\mathcal{C}_f$ au voisinage d'un point).** Pour étudier l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ de f au voisinage d'un point $a \in I$, on calcule les dérivées successives de f en a jusqu'au premier rang $k \geqslant 2$ tel que $f^{(k)}(a) \neq 0$. Alors :
>
> - Les valeurs de $f(a)$ et $f'(a)$ donnent l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a, qui est
>
> $$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$
>
> - La parité de k et le signe de $f^{(k)}(a)$ donnent la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente en a grâce au théorème F.

Lorsque le rang k est supérieur à 3, la courbe de f est « aplatie » contre sa tangente au voisinage du point considéré (voir les exemples ci-après).

Exemple. Étudions l'allure de la courbe de $f : x \mapsto \sin(x) + \frac{x^3}{6}$ au voisinage de 0.

En tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction f est elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \cos(x) + \frac{x^2}{2}$ donc $f'(0) = 1$; ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = x$ pour tangente au point d'abscisse 0.

On détermine ensuite que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

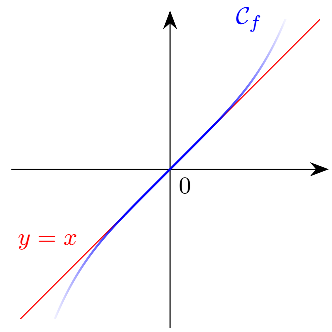
$$f''(x) = -\sin(x) + x, \quad f^{(3)}(x) = -\cos(x) + 1,$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad f^{(5)}(x) = \cos(x)$$

donc

$$f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(5)}(0) = 1 > 0,$$

ce qui montre que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en 0, où elle traverse sa tangente « par le bas » (voir ci-contre).



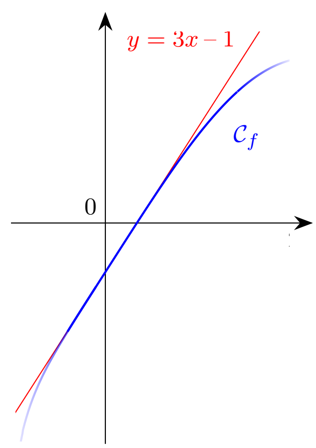
La courbe $\mathcal{C}_f$ présente un aspect très aplati au voisinage de 0 en raison de l'annulation de ses dérivées d'ordre 2, 3 et 4 en 0.

Exemple. Étudions l'allure au voisinage de 0 de la courbe de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x) - \cos(x) + 2\sin(x)$ au voisinage de 0.

En tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, la fonction f est elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On a $f(0) = -1$ et $f'(0) = 3$, donc la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y = 3x - 1$. Le calcul des dérivées successives de f en 0 donne

$$f''(0) = f^{(3)}(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(4)}(0) = -7 < 0,$$

ce qui montre que $\mathcal{C}_f$ est localement strictement en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0 (voir ci-contre).



La courbe $\mathcal{C}_f$ présente une fois encore un aspect très aplati au voisinage de 0 en raison de l'annulation de ses dérivées d'ordre 2 et 3 en 0.