5 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 48 (Détermination des racines deuxièmes d'un nombre complexe). On présente dans cet exercice une méthode de détermination des racines deuxièmes d'un nombre complexe qui ne suppose pas de connaître un argument de ce dernier.

L'argument de $4+3i$ n'est pas « simple » (c'est-à-dire n'est pas l'un des angles de cosinus et sinus connus avec lesquels nous avons l'habitude de travailler) ; on ne peut donc pas appliquer directement la proposition 45.

1. On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 = 4+3i.$$

Soit $z = a+ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que

$$z^2 = 4+3i \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a^2-b^2 &= 4 \\ 2ab &= 3 \end{cases}$$

(b) En utilisant le module de $4+3i$, montrer que si $z^2 = 4+3i$, alors $a^2 = \frac{9}{2}$ et $b^2 = \frac{1}{2}$.

(c) Déterminer les deux solutions de l'équation $z^2 = 4+3i$ dans $\mathbb{C}$.

2. Déterminer par la même méthode les racines deuxièmes des nombres suivants :

(i) $1+2i$ $\qquad$ (ii) $5-12i$ $\qquad$ (iii) $21-20i$

3. En adaptant la méthode de résolution des équations polynomiales du second degré à coefficients réels, résoudre l'équation $z^2+(4+i)z+5-i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

4. En utilisant l'écriture algébrique $z = a+ib$ comme dans la question 1, résoudre l'équation $z^2+2\overline{z}+5 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 49. (Une tentative de mettre de l'ordre dans $\mathbb{C}$)

On appelle *relation d'ordre sur* $\mathbb{C}$ une relation notée $\preceq$ entre les éléments de $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Réflexivité : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \preceq z.$

(ii) Antisymétrie : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \big(z \preceq z' \text{ et } z' \preceq z\big) \Longleftrightarrow z = z'.$

(iii) Transitivité : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, \quad \big(z \preceq z' \text{ et } z' \preceq z''\big) \Longleftrightarrow z \preceq z''.$

On définit *l'ordre lexicographique* sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall a, b, a', b' \in \mathbb{R}, \quad a+ib \preceq a'+ib' \quad \Longleftrightarrow \quad \big(a < a' \text{ ou } (a = a' \text{ et } b \leqslant b')\big).$$

1. Remplacer les pointillés par le signe $\preceq$ ou $\succeq$:

(i) $1+i \ldots 2-i$.	(iii) $-3+5i \ldots -3-2i$.	(v) $0 \ldots 5$.
(ii) $3+5i \ldots 3-2i$.	(iv) $-i \ldots 1$.	(vi) $0 \ldots i$.

2. Vérifier que $\preceq$ est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.
3. Vérifier que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $z \preceq z'$ ou $z' \preceq z$ (on parle de relation *d'ordre total sur* $\mathbb{C}$).
4. Représenter graphiquement l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $1-i \preceq z$.
5. Expliquer pourquoi « l'ordre lexicographique » porte ce nom.
6. (a) Peut-on affirmer que si $z_1 \preceq z_1'$ et $z_2 \preceq z_2'$ alors $z_1+z_2 \preceq z_1'+z_2'$?
   (b) Peut-on affirmer que si $0 \preceq z$ et $0 \preceq z'$ alors $0 \preceq z \times z'$?

Exercice 50. (Une construction de $\mathbb{C}$)

On se propose dans cet exercice de donner (enfin !) un sens concret au nombre i dont on a admis l'existence dans le cours, et plus généralement au corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ des nombres complexes.

La construction présentée ici fut élaborée par William R. Hamilton à partir de 1833 (voir Zoom ci-après). Elle consiste à assimiler $\mathbb{C}$ au plan $\mathbb{R}^2$ (paradigme dans lequel images et affixes sont les mêmes objets !) et à définir les opérations sur les points du plan de façon à retrouver les relations

$$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b') \quad \text{et} \quad (a+ib)\times(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+a'b)$$

obtenues dans le cours.

On se place donc dans le plan $\mathbb{R}^2$, **que l'on choisit de noter** $\mathbb{C}$. On définit l'addition de deux éléments de ce plan par

$$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)+(a',b') := (a+a', b+b') \tag{1}$$

et leur produit par

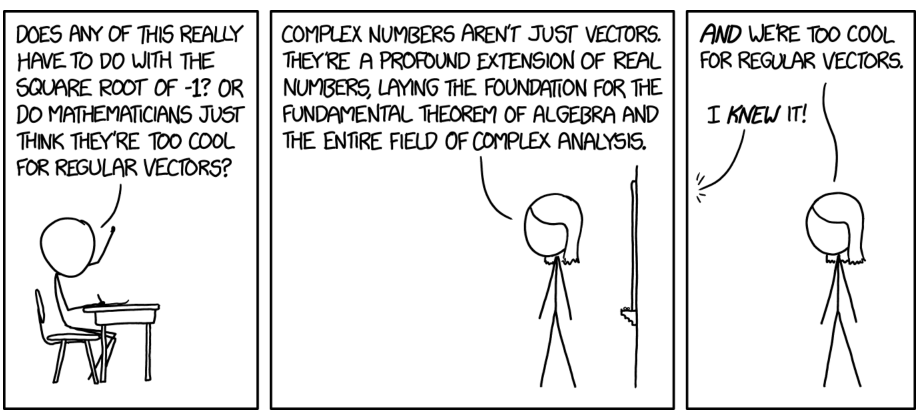
$$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)\times(a',b') := (aa'-bb', ab'+a'b). \tag{2}$$

On choisit ensuite de simplement noter 1 **le couple** $(1,0)$, et plus généralement de noter x le couple $(x,0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On choisit par ailleurs de noter $i = (0,1)$. Tout nombre $z = (a,b)$ de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire de $\mathbb{C}$, s'écrit donc bel et bien sous la forme $a+ib$.

Une fois ces définitions données, il reste à vérifier que les opérations ainsi introduites possèdent les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{R}$, ainsi qu'on l'avait admis au début du cours.

Voilà donc la clé du mystère : l'unité imaginaire i n'est autre que le couple $(0,1)$, élément de l'ensemble $\mathbb{R}^2$ que l'on a muni d'une addition plutôt standard et d'une multiplication plus exotique.

1. Vérifier que $i \times i = -1$.
2. (a) (Commutativité de l'addition) Vérifier que si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $z + z' = z' + z$.
   (b) (Associativité de l'addition) Vérifier que si $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, alors $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$.
   (c) (Élément neutre pour l'addition) Vérifier que si $z \in \mathbb{C}$, alors $z + 0 = 0 + z = z$.
   (d) (Existence d'un opposé) Vérifier que si $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z + z' = 0$. On note ce nombre $-z$.
3. (a) (Commutativité du produit) Vérifier que si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $z \times z' = z' \times z$.
   (b) (Associativité du produit) Vérifier que si $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, alors $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$.
   (c) (Distributivité) Vérifier que si $z, z' \in \mathbb{C}$, $z'' \in \mathbb{C}$, alors $(z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$.
   (d) (Existence d'un inverse) Vérifier que si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $z \neq 0$, alors il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z \times z' = 1$. On note ce nombre z^{-1} ou $\frac{1}{z}$, et si $z'' \in \mathbb{C}$ on définit le quotient $\frac{z''}{z}$ comme le produit $z'' \times \frac{1}{z}$.
   (e) (Intégrité de $\mathbb{C}$) Montrer que si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.



Hamilton et les corps de nombres

Non content d'avoir étendu le corps $\mathbb{R}$ au corps « à deux dimensions » qu'est $\mathbb{C}$, le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805 – 1865) chercha à prolonger cette structure à la dimension 3, sans succès (on a montré depuis que cette entreprise était impossible). Il y parvint par contre en dimension 4, donnant ainsi naissance à la théorie des *quaternions* : le corps des quaternions, noté $\mathbb{H}$ en l'honneur de Hamilton, est l'ensemble $\{a + ib + cj + dk \,:\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, où i est l'unité imaginaire définie dans ce chapitre, j est un élément « étranger à $\mathbb{C}$ » et k en est un autre, et où les règles de calcul sont définies en généralisant celles de $\mathbb{R}$ (à l'exception de la commutativité de la multiplication) et en imposant les relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

On raconte que c'est le 16 octobre 1843 que Hamilton, au cours d'une promenade avec son épouse le long du Royal Canal à Dublin, eut l'idée de ces relations, qu'il s'empressa alors de graver sur une pierre du Brougham Bridge. L'Université Nationale d'Irlande organise depuis 1989 des pélerinages de mathématiciens jusqu'à la plaque commémorative qui remplace aujourd'hui l'inscription effacée par le temps (voir ci-contre).