4 EXERCICES D'APPLICATION

On étudiera dans les chapitres de probabilités de nombreuses applications des séries à des calculs de probabilités, d'espérance ou de variance. On choisit ici de se focaliser sur deux occurrences des séries en sciences économiques ; cela ne doit cependant pas faire oublier que c'est en physique et en traitement du signal qu'elles trouvèrent historiquement leur cadre applicatif le plus naturel, à travers la résolution d'équations aux dérivées partielles et la décomposition fréquentielle à l'aide de la théorie de Fourier.

Exercice 25 (Multiplicateur d'investissement). On considère une économie dans laquelle la relation entre la consommation agrégée C et le revenu agrégé Y est décrite par la fonction de consommation

$$C = cY + C_0,$$

où $c \in [0, 1[$ est la propension marginale à consommer des agents et où $C_0 \geqslant 0$ est leur consommation autonome.

1. Rappeler pourquoi Y décrit à la fois le niveau de production de l'économie et son revenu agrégé.
2. On suppose qu'un investissement d'une valeur de ΔY est réalisé, ce qui augmente Y d'une quantité ΔY. Calculer la variation de la consommation directement consécutive à cette hausse.
3. Donner la variation de Y nécessaire pour répondre à la hausse de la consommation décrite dans la question précédente, puis calculer la hausse de la consommation qui en résulte.
4. Montrer que la hausse totale de Y résultant de l'investissement initial ΔY est égale à $\frac{1}{1-c}\Delta Y$, puis expliquer en quoi la quantité $\frac{1}{1-c}$ peut être appelée *multiplicateur d'investissement* (ou *multiplicateur keynésien*).
5. Énoncer quelques limites de la théorie du multiplicateur keynésien. On s'intéressera notamment au financement d'un éventuel investissement public et à la validité de la théorie dans le cadre d'une économie ouverte (c'est-à-dire d'importations et d'exportations).

Exercice 26 (Actualisation à horizon temporel infini). La question ci-dessous fait suite à l'exercice 31 du chapitre 2 et à l'exercice 39 du chapitre 8.
On considère une économie caractérisée par un horizon temporel infini et un taux d'intérêt $r > 0$, ainsi qu'un investisseur immortel qui dispose de la possibilité d'investir une somme $C > 0$ pour obtenir un rendement $R > 0$ *à chaque période à partir de la période* $N \in \mathbb{N}$.
Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que l'investissement soit rentable est

$$R \geqslant r(1+r)^{N-1}C.$$

5 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 27 (Absence de série « frontière »). Soit $(v_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs. L'objet de cet exercice est de montrer que $\sum v_n$ « n'est pas la série qui converge le plus lentement, ni celle qui diverge le plus lentement ». Plus formellement, on souhaite démontrer la proposition suivante :

- Si $\sum v_n$ diverge, il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et telle que $\sum u_n$ diverge.
- Si $\sum v_n$ converge, il existe une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et telle que $\sum u_n$ converge.

Pour tout $N \geqslant 1$, on note $S_N := \sum\limits_{n=1}^{N} v_n$ la N-ième somme partielle de la série de terme général v_n.

1. Supposons que $\sum v_n$ diverge. On considère la suite de terme général $u_n := \dfrac{v_n}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}$.
   (a) En écrivant $v_n = S_n - S_{n-1}$, montrer que :
   $$\forall N \geqslant 2, \quad \sum_{n=2}^{N} u_n = \sqrt{S_N} - \sqrt{v_1}.$$
   (b) Montrer que l'on a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et que $\sum u_n$ diverge.
2. Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour tout $N \geqslant 0$, on note
   $$R_N := \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n$$
   le reste d'ordre N de la série $\sum v_n$. On considère la suite de terme général $u_n := \dfrac{v_n}{\sqrt{R_{n-1}}+\sqrt{R_n}}$.
   (a) Montrer que l'on a :
   $$\forall N \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{N} u_n = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_N}.$$
   (b) Montrer que l'on a $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$ et que $\sum u_n$ converge.
3. Conclure.

Exercice 28 (Cadres applicatifs des règles de D'Alembert et de Cauchy).

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes strictement positifs et soit $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. À l'aide de la définition de la limite, montrer que
   $$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$
2. Montrer que la réciproque de l'implication ci-dessus n'est pas vraie.

   Indication : on pourra considérer la suite $(2^{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$, avec a_n une suite bien choisie.

Exercice 29 (Sommation des relations de comparaison). Soient $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites réelles positives telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

1. Montrer que si $\sum v_n$ (et donc $\sum u_n$) converge, alors
$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \underset{N\to+\infty}{=} o\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n\right).$$
Indication : revenir à la définition « epsilonesque » de la négligeabilité.
2. Montrer que si $\sum u_n$ (et donc $\sum v_n$) diverge, alors
$$\sum_{n=0}^{N} u_n \underset{N\to+\infty}{=} o\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right).$$
3. Quels résultats similaires peut-on énoncer si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ (toujours pour des suites positives) ?

Exercice 30 (Théorème de Fubini). Soit $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs tels que pour tout $m \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_{m,n}$ converge, et que pour tout $n \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{m\geqslant 0} u_{m,n}$ converge.
L'objet de cet exercice est de démontrer le théorème de Fubini ainsi qu'un résultat de sommation « diagonal » associé.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose $A_m := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n := \sum\limits_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}$. On cherche donc à montrer que
$$\sum_{m=0}^{+\infty} A_m = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n.$$

1. Supposons que la somme $S := \sum\limits_{n=0}^{+\infty} B_n$ est finie.
   (a) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{m=0}^{N}\sum\limits_{n=0}^{N} u_{m,n} \geqslant S - \varepsilon$.
   (b) Montrer que $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} A_m \geqslant S$.
   (c) Conclure.

2. Supposons à présent que $\sum_{n=0}^{+\infty} B_n = +\infty$.
   (a) Soit $M \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} u_{m,n} \geqslant M$.
   (b) Montrer que $\sum_{m=0}^{+\infty} A_m \geqslant M$.
   (c) Conclure.
3. En adaptant la démonstration précédente, montrer que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N} \\ i+j=n}} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}.$$

4. En utilisant la question précédente et le fait que $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ (voir l'exercice 19), montrer que la quantité $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{mn(m+n)}$ est finie.

Exercice 31 (La fonction exponentielle). Dans le chapitre 9, on a admis l'existence et l'unicité de la fonction exponentielle définie par sa *propriété de morphisme* : exp est l'unique fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les propriétés

(P1) f est continue sur $\mathbb{R}$

(P2) $f(1) = e := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

(P3) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $f(a+b) = f(a)f(b)$.

Le but de cet exercice est de démontrer rigoureusement l'existence de cette fonction. Oubliant tout ce que nous savons sur la fonction exponentielle, on définit une fonction f par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

On va montrer que f est la seule fonction vérifiant les propriétés (P1) à (P3).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier la convergence de la série définissant $f(x)$.
2. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   Indication : fixer $a \in \mathbb{R}$ puis majorer $|f(x) - f(a)|$ par une quantité tendant vers 0 lorsque $x \to a$. On pourra montrer que $|x^k - a^k| \leqslant k\,(|a|+1)^{k-1}\,|x-a|$ pour tout $k \geqslant 1$ et tout $x \in [a-1, a+1]$.

3. Justifier que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a $f(a+b) = f(a)f(b)$.
Indication : on pourra justifier heuristiquement puis admettre l'égalité
$$\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{b^j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=n}} \frac{a^i}{i!}\frac{b^j}{j!},$$
démontrée dans le cas de séries à termes positifs dans l'exercice 30.
4. Conclure que f vérifie bien les propriétés (P1) à (P3).
5. Soit g une autre fonction vérifiant ces propriétés. On va montrer que $g = f$, ce qui terminera la preuve.
   (a) Montrer que $g(n) = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $g(-n) = f(-n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
   (d) Conclure.
6. Établir la relation $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(x)-1}{x} = 1$.

On avait admis la propriété démontrée dans la question 6 au chapitre 10 ; elle nous avait permis de calculer la dérivée de la fonction exponentielle, dont nous nous sommes servis dans la démonstration du théorème 14 pour établir la valeur de la somme exponentielle. La boucle est désormais bouclée !

Exercice 32 (Fonctions trigonométriques et exponentielle complexe).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\mathrm{d}t.$$
2. En déduire la relation suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$
3. Démontrer de même que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos(t)\mathrm{d}t$$
et en déduire une expression de $\sin(x)$ comme somme de série pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on définit $e^z := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ (on admet que cette somme infinie a un sens dans $\mathbb{C}$). En décomposant hardiment des sommes de séries, montrer (sans se poser de question de convergence) que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

La définition donnée dans la question 4 étend le domaine de la fonction exponentielle à l'ensemble du plan complexe. On peut définir de la même façon l'exponentielle d'objets plus alambiqués, comme des matrices carrées.

Attardons-nous un instant sur le résultat de la question 4 : il montre que la relation $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$*, loin d'être une simple convention calculatoire comme nous l'avons prétendu dans le chapitre 6, est en réalité la facette « imaginaire pure » d'une transformation générale appelée l'*exponentielle complexe*, dont l'exponentielle usuelle est la facette « réelle ». Plus précisément, si* $a, b \in \mathbb{R}$*, alors l'exponentielle du nombre complexe* $z = a + ib$ *est le nombre complexe* $e^{a+ib} = e^a \cdot e^{ib}$*, dont le module vaut* e^a *et dont un argument vaut* b*. Dès lors, on comprend mieux pourquoi les propriétés calculatoires de l'argument rappellent celles du logarithme népérien, et pourquoi l'identité d'Euler* $e^{i\pi} + 1 = 0$ *surprend les mathématiciens par sa simplicité (voir le Zoom à la fin du chapitre « Nombres complexes »).*

Exercice 33 (Théorème des séries alternées). Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite positive décroissante et de limite nulle. Le but de cet exercice est de démontrer le *théorème des séries alternées*, qui stipule que la série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$ converge et donne un encadrement de ses restes successifs.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N := \sum_{n=0}^{N} (-1)^n u_n$.

1. Montrer que les suites $(S_{2N})_{N\geqslant 0}$ et $(S_{2N+1})_{N\geqslant 0}$ sont adjacentes.
2. En déduire que la série de terme général $(-1)^n u_n$ converge.

On rappelle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre N de la série des $(-1)^n u_n$ est donné par

$$R_N := \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n.$$

3. Montrer que pour tout $N \geqslant 0$, le reste R_N est du signe de $(-1)^{N+1}$ et qu'il vérifie $|R_N| \leqslant u_{N+1}$.
4. *Application.*
   (a) Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, puis que

   $$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

   mais que les séries de termes généraux respectifs $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne sont pas de même nature.

   (b) Ce résultat contredit-il un théorème du cours ?

Exercice 34 (Développement décimal d'un nombre réel). Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ de la façon suivante :

$$d_0 = \lfloor x \rfloor \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 0, \quad d_{n+1} = \left\lfloor 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} \right) \right\rfloor.$$

1. Expliciter les premiers termes de la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ lorsque $x = 1{,}5629$, puis lorsque $x = \pi$.
2. Montrer que :
$$\forall n \geqslant 0, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} \leqslant x < \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$
3. En déduire que
$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}.$$
4. Est-il possible que $d_0 = 0$ et que $d_n = 9$ pour tout $n \geqslant 1$?
5. Montrer que si $d'_0 \in \mathbb{N}$ et si $(d'_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'entiers de $[\![0, 9]\!]$ ne stationnant pas à 9 telle que l'on ait
$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d'_k}{10^k},$$
alors $d_n = d'_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
6. Le résultat de la question précédente est-il toujours valable sans l'hypothèse selon laquelle $(d'_n)_{n\geqslant 1}$ ne stationne pas à 9 ?

Internet fleurit de « paradoxes » affirmant que $0{,}999999\ldots = 1$ *: cet exercice montre que c'est bien le cas ! Ce n'est guère surprenant lorsque l'on y réfléchit quelques instants :* $0{,}999999\ldots$ *ne peut en effet désigner le « plus grand réel strictement inférieur à* 1 *» puisqu'un tel réel n'existe pas ! Plus généralement, l'exercice nous montre que tout nombre décimal peut s'écrire de deux façons, l'une « naturelle » et l'autre mobilisant une suite de décimales qui stationne à* 9 *: par exemple, le nombre* 2,1 *peut aussi s'écrire* $2{,}099999\ldots$ *La première notation est appelée* développement propre en base 10 *du nombre. Comme on le démontre dans la question 5, le développement propre d'un nombre réel est unique, ce qui permet de parler de façon non ambiguë de « la » suite de ses décimales.*