Probabilités élémentaires

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 33. Démontrons par récurrence la propriété attendue, que nous notons $\mathcal{P}_n$.

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie puisqu'elle se réécrit $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$. La propriété $\mathcal{P}_2$ est elle aussi vraie puisque si A_1 et A_2 sont des événements, alors [1]

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \leqslant \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2).$$

Fixons à présent $n \geqslant 1$ et supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Si $A_1, \ldots, A_{n+1}$ sont des événements, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \quad \text{d'après } \mathcal{P}_2 \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k),
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 34.

1. Intuitivement, « tout dépend de la pièce avec laquelle on effectue les lancers ». On introduit donc les deux événements A : « on choisit la pièce truquée » et B : « on obtient face pendant les N premiers lancers », puis on utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'événements $(A, \overline{A})$:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B \mid \overline{A}) = \frac{1}{n} \cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2^N} = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2^N}$$

puisque la pièce est sélectionnée avec équiprobabilité parmi les n pièces disponibles, et que la probabilité qu'une pièce équilibrée amène N faces consécutifs vaut $\frac{1}{2^N}$ par indépendance des lancers.

2. On calcule $\mathbb{P}(A \mid B)$ grâce à la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2^N}} = \frac{1}{1 + \frac{n-1}{2^N}}.$$

1. On établit $\mathcal{P}_2$ séparément puisqu'il s'agit d'un ingrédient dont nous aurons besoin pour démontrer le caractère héréditaire de la proposition.

Correction de l'exercice 35.

1. À chaque étape, un nouveau joueur est introduit, et un joueur qui perd une manche quitte immédiatement la partie. En se représentant mentalement plusieurs configurations possibles, on se convainc des faits suivants :
   - L'étape 2 a lieu de toute façon.
   - L'étape 3 a lieu si le gagnant de la manche 2 n'est pas le gagnant de la manche 1, c'est-à-dire s'il s'agit du joueur 3.
   - L'étape 4 a lieu si l'étape 3 a lieu et si le gagnant de la manche 3 n'est pas le gagnant de la manche 2, c'est-à-dire s'il s'agit du joueur 4.
   - Plus généralement, si $n \geqslant 2$, l'étape $n+1$ a lieu si l'étape n a lieu et si le gagnant de la manche n est le joueur $n+1$.

   En introduisant pour tout $n \geqslant 1$ l'événement A_n : « la manche n a lieu » et l'événement B_n : « la manche n a lieu et le joueur $n+1$ gagne cette manche », on peut donc écrire $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1$ et
   $$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n \cap B_n) \\ &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}\left(B_n \mid A_n\right) = \mathbb{P}(A_n) \cdot \frac{1}{2}.\end{aligned}$$
   Ainsi, la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\geqslant 2}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc pour tout $n \geqslant 2$ on a $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^{n-2}}$.
2. La suite d'événements $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante : pour tout $n \geqslant 1$, l'étape $n+1$ ne peut en effet avoir lieu que si l'étape n a eu lieu. D'après le théorème de la limite monotone, on a donc
   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0,$$
   soit $\mathbb{P}\left(\text{le jeu s'arrête}\right) = 1$: le jeu s'arrête presque sûrement.
3. La probabilité pour que le joueur 1 gagne est la probabilité pour qu'il gagne les deux premières manches, donc $\frac{1}{4}$ par indépendance des manches. C'est aussi la probabilité que le joueur 2 gagne puisque les deux sont dans des situations symétriques. Pour tout $n \geqslant 3$, l'événement « le joueur n gagne » est réalisé si et seulement si n étapes du jeu ont lieu, mais pas $n+1$: en effet, un joueur J_k donné gagne si et seulement s'il remporte les manches $k-1$ et k, donc seule la victoire de J_n peut mener à un jeu en exactement n manches. Ainsi, si $n \geqslant 3$, la probabilité que J_n gagne est
   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_{n-1}) &= \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot (2-1) = \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 36. L'expérience peut être modélisée par le tirage d'un couple de $[\![1, n]\!]^2$ avec équiprobabilité – chaque couple ayant donc une probabilité égale à $\frac{1}{n^2}$ d'être tiré.

1. Dans le cas où $n = 3$, il existe 5 couples $(x, y) \in [\![1, 3]\!]^2$ tels que $\frac{x}{y}$ soit entier : $(1, 1), (2, 1), (3, 1), (2, 2)$ et $(3, 3)$. Par équiprobabilité, on a donc $\mathbb{P}(E_3) = \frac{5}{3^2} = \frac{5}{9}$. Dans le cas où $n = 4$, on peut faire la liste des couples $(x, y) \in [\![1, 4]\!]^2$ tels que $\frac{x}{y}$ soit entier en considérant leur deuxième coordonnée : il s'agit des $(x, 1)$ avec $x \in [\![1, 4]\!]$ (donc 4 couples), mais aussi de $(2, 2)$ et $(4, 2)$, de $(3, 3)$ et de $(4, 4)$, donc 8 couples en tout. Par équiprobabilité, on a donc $\mathbb{P}(E_4) = \frac{8}{4^2} = \frac{1}{2}$.
2. Soit $n \geqslant 1$. Sur le modèle de la question précédente, on souhaite calculer le nombre de couples $(x, y) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $\frac{x}{y}$ soit entier. On distingue pour cela les couples selon leur deuxième coordonnée :
   - Tous les couples de la forme $(x, 1)$ vérifient la propriété attendue.
   - Un couple $(x, 2)$ vérifie la propriété attendue si et seulement si x est pair ; or il existe $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ valeurs paires de x dans $[\![1, n]\!]$ (c'est-à-dire $\frac{n}{2}$ si n est pair, et $\frac{n-1}{2}$ si n est impair).
   - Un couple $(x, 3)$ vérifie la propriété attendue si et seulement si x est multiple de 3 ; or il existe $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ multiples de 3 dans $[\![1, n]\!]$.
   - Plus généralement, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, un couple (x, y) vérifie la propriété attendue si et seulement si x est multiple de k, et $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ entiers vérifient cette propriété dans $[\![1, n]\!]$.

   Le nombre total de couples $(x, y) \in [\![1, n]\!]^2$ tels que $\frac{x}{y}$ soit entier est donc égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$. Par équiprobabilité, on a donc

   $$\mathbb{P}(E_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor,$$

   ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 37.

1. On considère qu'un individu choisi au hasard dans la génération 1 descend de deux individus choisis au hasard dans la génération 0. Calculons la probabilité que cet individu ait hérité de son père l'allèle A. On introduit pour cela les événements

   $$P_0 \ : \text{ « le père de l'individu est de génotype } AA \text{ »},$$

   $$Q_0 \ : \text{ « le père est de génotype } Aa \text{ »}$$

   ainsi que

   $$R_0 \ : \text{ « le père est de génotype } aa \text{ »}$$

   et

   $$H \ : \text{ « l'individu hérite de son père l'allèle } A \text{ »}.$$

   La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (P_0, Q_0, R_0) donne

   $$\begin{aligned} \mathbb{P}(H) &= \mathbb{P}(P_0)\mathbb{P}(H \mid P_0) + \mathbb{P}(Q_0)\mathbb{P}(H \mid Q_0) + \mathbb{P}(R_0)\mathbb{P}(H \mid R_0) \\ &= p_0 \cdot 1 + q_0 \cdot \frac{1}{2} + r_0 \cdot 0 \end{aligned}$$

puisque l'allèle hérité est tiré au hasard parmi les deux allèles dont le père est porteur. On a donc

$$\mathbb{P}(H) = p_0 + \frac{1}{2}q_0 \quad \text{d'où} \quad \mathbb{P}(\overline{H}) = 1 - p_0 - \frac{1}{2}q_0 = r_0 + \frac{1}{2}q_0.$$

On montre de même que la probabilité pour l'individu d'hériter d'un allèle A de sa mère est égale à $p_0 + \frac{1}{2}q_0$, et que la probabilité de l'événement contraire (donc qu'il hérite d'un allèle a de sa mère) est $r_0 + \frac{1}{2}q_0$.

Les deux allèles hérités étant choisis de manière indépendante entre les parents, la probabilité que l'individu soit de génotype AA vaut $\mathbb{P}(H)^2 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$ et la probabilité qu'il soit de génotype aa vaut $\mathbb{P}(\overline{H})^2 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$. On a donc :

$$p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2, \quad r_1 = \mathbb{P}(\overline{H})^2 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$$

et

$$q_1 = 1 - p_1 - r_1.$$

2. En écrivant $q_0 = 1 - p_0 - r_0$, on obtient $p_0 + \frac{1}{2}q_0 = \frac{1}{2}(1 + p_0 - r_0)$ ainsi que $r_0 + \frac{1}{2}q_0 = \frac{1}{2}(1 + r_0 - p_0)$. On a donc :

$$p_1 = \frac{1}{4}(1 + p_0 - r_0)^2, \quad r_1 = \frac{1}{4}(1 + r_0 - p_0)^2$$

et

$$q_1 = 1 - \frac{1}{4}\left((1 + p_0 - r_0)^2 + (1 + r_0 - p_0)^2\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + (p_0 - r_0)^2\right).$$

3. Grâce à la question précédente, on peut écrire

$$p_1 - r_1 = \frac{1}{4}\left((1 + p_0 - r_0)^2 - (1 + r_0 - p_0)^2\right) = \frac{1}{4}\left(2 \cdot (2p_0 - 2r_0)\right) = p_0 - r_0.$$

4. La loi de reproduction permettant de passer de la génération 1 à la génération 2 étant la même que celle qui permet de passer de la génération 0 à la génération 1, on obtient les formules

$$p_2 = \frac{1}{4}(1 + p_1 - r_1)^2, \quad r_2 = \frac{1}{4}(1 + r_1 - p_1)^2$$

et

$$q_2 = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + (p_1 - r_1)^2\right).$$

Or on a vu dans la question 3 que la différence $p_1 - r_1$ est égale à la différence $p_0 - r_0$: d'après la question 2, on a donc $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$, et on pourrait montrer de même que tous les p_n (resp. q_n, r_n), avec $n \geqslant 1$, sont égaux à p_1 (resp. q_1, r_1) . La proportion des différents génotypes dans la population est donc stable à partir de la deuxième génération : ainsi, même un allèle très peu répandu dans la population n'a pas vocation à s'éteindre dans le cadre du modèle considéré. Ce résultat quelque peu contre-intuitif est appelé *principe de Hardy-Weinberg*.

Ce principe est assez peu vérifié en pratique, ce qui pousse les biologistes, par un habile raisonnement par contraposée (on pourrait même dire *bayésien* !), à remettre en cause les hypothèses du modèle dans les cas où les proportions alléliques ne sont pas stables au cours des générations. En particulier, des proportions variables au cours du temps suggèrent l'existence de facteurs évolutifs et d'allèles favorisant la survie et/ou la reproduction de l'espèce considérée.

Correction de l'exercice 38. *La question envisagée ici est un problème de* percolation. *La théorie de la percolation est à l'origine une branche de la physique qui s'intéresse à la capacité d'une substance à traverser un matériau poreux, par exemple de la vapeur d'eau dans de la poudre de café moulu (au sein d'un percolateur, justement). La modélisation mathématique d'un tel problème repose souvent sur des graphes aléatoires comme ceux que nous étudions ici : la percolation est alors équivalente à l'existence d'un chemin dans le graphe entre un sommet et un autre. Parmi les applications de la théorie de la percolation hors de la stricte physique des matériaux, on peut citer la modélisation des feux de forêt, celle de la propagation d'épidémies ou des migrations d'animaux, mais aussi, en économie, l'étude de la propagation d'une information sur un marché structuré en réseau hétérogène et aléatoire (par exemple dans le cas d'un réseau d'organisation avec asymétrie d'information ou d'un marché boursier).*

► La configuration linéaire permet de rejoindre la case d'arrivée à partir de la case de départ si et seulement si les trois cases centrales permettent le passage, ce qui est le cas avec probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

► La configuration circulaire permet de rejoindre la case d'arrivée à partir de la case de départ si et seulement si la case inférieure droite permet le passage (ce qui est le cas avec probabilité $\frac{1}{2}$) ou les trois supérieures cases notées ? permettent le passage (ce qui est le cas avec probabilité $\frac{1}{8}$). La probabilité que ces deux événements se produisent simultanément est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, donc la probabilité que le passage soit possible est $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$.

► Considérons à présent la configuration rectangulaire. La case supérieure gauche n'est pas pertinente pour étudier le problème posé puisqu'elle ne permet le passage que si la case supérieure centrale le fait, et qu'il existe dans ce cas un passage diagonal direct entre la case de départ et la case supérieure centrale. Le passage est donc possible dans deux cas disjoints : si la case supérieure centrale permet le passage (ce qui est vrai avec probabilité $\frac{1}{2}$) et si la case centrale mais les deux cases inférieures le permettent (ce qui est vrai avec probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$). Par incompatibilité, le passage est possible avec probabilité $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

► Étudions à présent la dernière configuration. Le passage est possible dans 4 cas, que nous décrivons comme des cas disjoints :

- Les trois cases supérieures permettent le passage : la probabilité de ce cas est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

- Les trois cases inférieures permettent le passage, mais pas les trois cases supérieures : les branches supérieure et inférieure étant indépendantes, la probabilité de ce cas est égale à $\frac{1}{8} \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{64}$.
- Le passage n'est possible ni par les trois cases supérieures, ni par les trois cases inférieures, mais il l'est en empruntant l'arête verticale centrale (les deux sommets qu'elle relie doivent alors permettre le passage). Pour déterminer la probabilité de ce cas, il suffit de compter les configurations permettant le passage en envisageant les différents cas de figure pour les sommets « en coin » : il n'y a que deux possibilités (sommets supérieur gauche et inférieur droit, ou sommets inférieur gauche et supérieur droit), or la configuration du circuit est tirée avec équiprobabilité parmi les $2^6 = 64$ possibles, donc la probabilité du cas envisagé est $\frac{2}{64} = \frac{1}{32}$.

Ainsi, le passage entre le point de départ et le point d'arrivée est possible dans la dernière configuration avec probabilité $\frac{1}{8} + \frac{7}{64} + \frac{1}{32} = \frac{17}{64}$.

Correction de l'exercice 39.

1. Soit $n \in [\![1, 99]\!]$ un entier dont on note a le chiffre des dizaines et b celui des unités (on a donc $n = 10a + b$ avec $a, b \in [\![0, 9]\!]$). L'entier généré par le lancer des deux dés est n si et seulement si le dé désignant le chiffre des dizaines donne a et l'autre donne b, ce qui se produit avec une probabilité $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ par indépendance des deux dés, qui fournissent par ailleurs un entier de $[\![0, 9]\!]$ de façon équiprobable. Un raisonnement similaire montre que 100 est obtenu avec probabilité $\frac{1}{100}$ (celle de tomber sur un double 0), donc l'entier obtenu par le procédé décrit dans l'énoncé est bien tiré de façon équiprobable dans $[\![1, 100]\!]$.
2. Si le tirage était équiprobable dans $[\![0, 95]\!]$, la probabilité que le nombre des dizaines soit égal à 1 serait plus grande que la probabilité qu'il soit égal à 9 : en effet, il existe dans $[\![0, 95]\!]$ davantage de nombres dont le chiffre des dizaines vaut 1 (10, pour être exact) que de nombres dont le chiffre des dizaines vaut 9 (ces nombres n'étant que 6). Or le protocole proposé implique que le nombre des dizaines est tiré de manière équiprobable sur $[\![0, 9]\!]$; ainsi, le nombre généré n'est pas tiré de manière uniforme sur $[\![0, 95]\!]$.
3. Une méthode simple pour tirer un nombre de manière aléatoire sur $[\![0, 95]\!]$ consiste à suivre le protocole indiqué dans la deuxième partie de l'énoncé, mais à relancer *les deux dés* si le nombre obtenu est strictement supérieur à 95.

   Montrons que l'entier X ainsi généré est tiré avec équiprobabilité dans $[\![1, 95]\!]$. Considérons le résultat Y du tirage des deux dés avant de décider ou non si ce résultat est conservé ; par le même raisonnement que dans la question 1, Y est tiré de façon équiprobable sur $[\![1, 100]\!]$. Si $i \in [\![1, 95]\!]$, la probabilité que X prenne la valeur i est égale à la probabilité que Y, *sous condition d'être* *inférieur ou égal à* 95, prenne la valeur i ; ainsi, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=i) &= \mathbb{P}(Y=i \,|\, Y \leqslant 95)\\ &= \frac{\mathbb{P}((Y=i)\cap(Y\leqslant 95))}{\mathbb{P}(Y\leqslant 95)} = \frac{\mathbb{P}(Y=i)}{\mathbb{P}(Y\leqslant 95)} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{95}{100}} = \frac{1}{95},\end{aligned}$$

ce qui montre bien que X est tiré de façon équiprobable dans $[\![1, 95]\!]$.

La méthode présentée ici est appelée *méthode de rejet* : on simule une variable aléatoire (c'est-à-dire une quantité aléatoire) tirée selon une certaine loi de probabilité en simulant une variable plus simple dont on rejette certaines valeurs bien choisies.

Correction de l'exercice 40. *La création de stratégies optimales pour maximiser les gains en contexte d'incertitude est un sujet de recherche très actif. La formulation générale du problème étudié ici, dit « problème de bandits », est le suivant : un joueur a affaire à un bandit manchot doté de plusieurs bras (!), associés chacun à une distribution de probabilité inconnue. Le joueur cherche à collecter de l'information sur ces distributions de probabilité pour ne pas courir de solliciter trop souvent un bras à faible rendement (ce qui l'amène à tester régulièrement les différents bras), tout en ne perdant pas trop d'argent à jouer sur les bras déjà identifiés comme peu rentables. Pour parler en termes économiques, le joueur doit effectuer un arbitrage entre collecte d'information et extraction de la rente d'information. Une application pratique du problème de bandits est l'administration de vaccins ou de médicaments : en effet, il est nécessaire de collecter de l'information sur l'efficacité d'un nouveau traitement ou d'une nouvelle posologie en effectuant des tests cliniques, tout en ne prolongeant pas trop cette phase de collecte caractérisée par une administration trop fréquente d'un traitement sous-optimal.*

1. (a) La première machine étant choisie au hasard, on a $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$ et en se souvenant du fait que le joueur change de machine si et seulement s'il perd, on obtient

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \,|\, A_1) + \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(A_2 \,|\, \overline{A_1}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{10} = \frac{11}{20}.$$

(b) D'après la formule de Bayes, la probabilité recherchée vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2 \,|\, G_2) = \frac{\mathbb{P}(A_2\cap G_2)}{\mathbb{P}(G_2)} &= \frac{\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(G_2 \,|\, A_2)}{\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(G_2 \,|\, A_2) + \mathbb{P}(\overline{A_2})\mathbb{P}(G_2 \,|\, \overline{A_2})}\\ &= \frac{\frac{11}{20}\cdot\frac{1}{5}}{\frac{11}{20}\cdot\frac{1}{5} + \frac{9}{20}\cdot\frac{1}{10}} = \frac{22}{31}.\end{aligned}$$

On a appliqué la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A_2, \overline{A_2})$ pour calculer G_2.

2. Pour $k \geqslant 1$, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A_k, \overline{A_k})$ comme dans la question précédente, on obtient

$$\mathbb{P}(G_k) = \mathbb{P}(A_k)\cdot\frac{1}{5} + \mathbb{P}(\overline{A_k})\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{10}\left(1+\mathbb{P}(A_k)\right).$$

3. Pour $k \geqslant 1$, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A_k, \overline{A_k})$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{k+1}) &= \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1} \mid A_k) + \mathbb{P}(\overline{A_k})\mathbb{P}(A_{k+1} \mid \overline{A_k}) \\ &= \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(G_k \mid A_k) + \mathbb{P}(\overline{A_k})\mathbb{P}(\overline{G_k} \mid \overline{A_k}) \\ &= \mathbb{P}(A_k) \cdot \frac{1}{5} + (1 - \mathbb{P}(A_k)) \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{10} - \frac{7}{10}\mathbb{P}(A_k).\end{aligned}$$

4. D'après la question précédente, la suite $(\mathbb{P}(A_k))_{k\geqslant 1}$ est arithmético-géométrique. On détermine son expression explicite à l'aide de la méthode standard : l'équation $\frac{9}{10} - \frac{7}{10}c = c$ admettant $c = \frac{9}{17}$ pour unique solution, donc la suite $\left(\mathbb{P}(A_k) - \frac{9}{17}\right)_{k\geqslant 1}$ est géométrique de premier terme $-\frac{1}{34}$ et de raison $-\frac{7}{10}$, si bien que pour tout $k \geqslant 1$ on a

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{9}{17} - \frac{1}{34}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}.$$

Grâce à la question 2, on en déduit que pour tout $k \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}(G_k) = \frac{1}{10}(1 + \mathbb{P}(A_k)) = \frac{13}{85} - \frac{1}{340}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}.$$

5. Comme $\left|-\frac{7}{10}\right| < 1$, on a $\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, donc $\mathbb{P}(G_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \frac{13}{85}$ d'après la question précédente. Ce résultat n'est pas choquant : comme $\frac{13}{85} \approx 0{,}15$, la probabilité asymptotique de gain du joueur est meilleure qu'en jouant systématiquement sur la moins bonne machine, et moins bonne qu'en jouant systématiquement sur la meilleure. Remarquons que la stratégie choisie ne conduisant pas le joueur à choisir davantage la « bonne » machine à mesure qu'il comprend que son rendement est supérieur : seul le fait de perdre rapidement sur la machine B conduit la machine A à être davantage utilisée.

Il est possible d'imaginer des stratégies plus intelligentes conduisant à une probabilité de gain asymptotique plus proches du rendement maximal de $\frac{1}{5} = 20\%$. On peut par exemple choisir initialement une machine au hasard puis, à chaque étape, choisir avec probabilité $1 - \varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$ faible) de jouer avec la machine actuellement identifiée comme étant la plus rentable (au sens où la fréquence empirique de gain associée est la plus forte), et avec probabilité ε de jouer avec l'autre (l'idée étant de tester l'autre machine rarement mais une infinité de fois pour parvenir à estimer son rendement).

Correction de l'exercice 41.

1. On introduit les événements A_n conformément à l'indication de l'énoncé, et on note A l'événement « le poisson n'est jamais attrapé », soit

$$A := \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

Les A_n forment une suite décroissante d'événements : pour tout $n \geqslant 1$, si A_{n+1} est réalisé alors A_n l'est, c'est-à-dire que $A_{n+1} \subset A_n$. La probabilité que le poisson finisse par être attrapé est donc

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

d'après le théorème de la limite monotone. Or pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n \mid A_{n-1})$$

par la formule des probabilités composées (qui prend ici une forme particulière due au fait que $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante !), d'où

$$\mathbb{P}(A_n) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\cdots(1-p_n) = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

Ainsi, la probabilité que le poisson finisse par être attrapé est

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

2. Si $p_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

en reconnaissant un produit télescopique : le poisson a donc une probabilité égale à 1 d'être attrapé.

3. Si $p_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{A}) &= 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{i^2+2i}{(i+1)^2} \\ & 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}\frac{i+2}{i+1} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\frac{n+2}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

en reconnaissant deux produits télescopiques : le poisson a donc une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ d'être attrapé, ce qui est cohérent avec le fait que son apprentissage est plus rapide que dans la question précédente.

4. Supposons que p_n ne tende pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Comme les p_n sont des probabilités (donc des réels positifs), il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $p_n \geqslant \varepsilon$ pour une infinité de valeurs de n que l'on note $n_1, n_2, \ldots$. Les quantités $1 - p_i$ étant toutes entre 0 et 1, on a pour tout $k \geqslant 1$ l'encadrement

$$0 \leqslant \prod_{i=1}^{n_k}(1-p_i) \leqslant (1-p_{n_1})(1-p_{n_2})\cdots(1-p_{n_k}) \leqslant (1-\varepsilon)^k$$

donc

$$\lim_{k\to+\infty} \prod_{i=1}^{n_k}(1-p_i) = 0.$$

Or la suite $\left(\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\right)_{n\geqslant 1}$, décroissante et positive, admet une limite, donc c'est aussi la limite de la suite extraite $\left(\prod_{i=1}^{n_k}(1-p_i)\right)_{n_k\geqslant 1}$, soit 0 d'après ce que nous venons de voir. La probabilité que le poisson finisse par être attrapé vaut ainsi

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}(1-p_i) = 1.$$

Ainsi, une condition nécessaire pour que le poisson ait une probabilité strictement positive de ne jamais être pêché est que $(p_n)_{n\geqslant 1}$ soit de limite nulle.

Plaçons-nous à présent dans le cas où $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme les probabilités p_n sont toutes dans l'intervalle $]0,1[$, on peut écrire

$$\prod_{i=1}^{n}(1-p_i) = \exp\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\right)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i)\right)$$

pour tout $n \geqslant 1$. D'après la question 1, on a donc

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{i=1}^{n}(1-p_i) = \lim_{n\to+\infty}\exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i)\right).$$

Ainsi, on a $\mathbb{P}(A) = 0$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, c'est-à-dire si la série de terme général négatif $\ln(1-p_i)$ diverge. Or $p_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$ donc $\ln(1-p_i) \underset{i\to+\infty}{\sim} -p_i$. Par comparaison des séries à termes négatifs, on a donc les équivalences suivantes :

$$\mathbb{P}(A) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{i\geqslant 1}\ln(1-p_i) \text{ diverge} \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{i\geqslant 1}p_i \text{ diverge},$$

donc

$$\mathbb{P}(A) > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{i\geqslant 1}p_i \text{ converge.}$$

Récapitulons :

- Si la série de terme général p_n converge, alors $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et on vient de voir que dans ce cas la convergence de la série implique que $\mathbb{P}(A) > 0$.
- Réciproquement, si $\mathbb{P}(A) > 0$, on a montré que $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui, comme on vient de le prouver, implique la convergence de la série des p_n.

L'équivalence attendue est donc bien démontrée (sans avoir à faire d'hypothèse *a priori* sur la limite des p_n).

Il est intuitivement clair que le poisson ne peut échapper aux pêcheurs avec une probabilité strictement positive que s'il apprend « assez vite ». La question 2 a montré qu'un apprentissage correspondant au choix $p_n = \frac{1}{n+1}$ est trop lent pour cela, mais la question 3 a permis d'établir que si $p_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, l'apprentissage est assez rapide. Ces deux exemples sont en accord avec le résultat de classification que nous venons de démontrer : l'apprentissage est assez rapide si et seulement si p_n tend suffisamment vite vers 0 pour que la série des p_n converge.

Correction de l'exercice 42. La démonstration suit les mêmes étapes que celle de la formule du crible donnant le cardinal d'une réunion d'ensembles finis (voir les exercices du chapitre « Sommes et produits »). [2]

1. Dans le cas $n = 2$, la formule est déjà connue : elle stipule que pour tous événements A_1 et A_2, on a
$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2).$$
Dans le cas $n = 3$, elle stipule que pour tous événements A_1, A_2 et A_3, on a
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)\\ - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« Pour tous événements } A_1, \ldots, A_n\text{, on a } \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right) \text{ ».}$$
Initialisation :
La proposition $\mathcal{P}_1$ est simplement l'égalité $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$, et on a vu dans la question précédente que $\mathcal{P}_2$ est vraie [3].
Hérédité :
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la proposition $\mathcal{P}_n$ vraie. On se donne $n + 1$

2. Pour l'anecdote probabiliste, Poincaré est à l'origine, avec ses confrères Gaston Darboux (1842 – 1917) et Paul Appell (1855 – 1930), d'un rapport d'expertise commandé par la Cour de cassation en 1904 pour clore l'affaire Dreyfus. Ce rapport critique la manipulation des pièces à charge et l'utilisation abusive de techniques mathématiques par le criminologue Alphonse Bertillon, qui avait jugé opportun d'invoquer la formule de Bayes dans son argumentaire contre Dreyfus. Le texte commence ainsi par un petit cours introductif sur l'utilisation correcte de la formule de Bayes ! On trouvera plus de détails sur ce document, et plus généralement sur le rôle des mathématiques et des mathématiciens dans l'affaire Dreyfus, en suivant ce lien.

3. Comme dans l'exercice 33, on établit séparément la proposition $\mathcal{P}_2$ car celle-ci est utilisée dans la phase d'hérédité.

événements $A_1, \ldots, A_{n+1}$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \quad \text{par } \mathcal{P}_2 \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} (A_{i_j} \cap A_{n+1})\right)\right) \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+2} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \cap A_{n+1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Or on remarque que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la somme

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \cap A_{n+1}\right)$$

est la somme des probabilités des intersections de $k+1$ événements choisis parmi $A_1, ..., A_n, A_{n+1}$ et *dans lesquels figure* A_{n+1} (puisqu'alors n événements restent à choisir parmi $A_1, \ldots, A_n$). On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+2} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < i_{k+1} = n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k+1} A_{i_j}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n+1} \left((-1)^{k'+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k'} = n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k'} A_{i_j}\right)\right) \quad \text{en posant } k' = k+1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n+1} \left((-1)^{k'+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k'} = n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k'} A_{i_j}\right)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right),
\end{aligned}$$

d'où la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion :

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

3. Plaçons-nous dans le cadre de l'exercice 17. Pour tout $i \in [\![1, 7]\!]$, on note A_i l'événement « le nain numéro i repart avec son propre chapeau », qui est de probabilité $\frac{1}{7}$. La probabilité qu'aucun nain ne reparte avec son propre chapeau est donc égale à

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{7} \overline{A_i}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{7} A_i\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{7} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant 7} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right)\end{aligned}$$

d'après la formule du crible. Or si $k \in [\![1, 7]\!]$ et si $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant 7$, les événements $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ sont réalisés simultanément si et seulement si les nains $i_1, i_2, \ldots, i_k$ repartent avec leur propre chapeau, ce qui arrive avec probabilité $\frac{(7-k)!}{7!}$ (en effet, il existe $(7-k)!$ permutations possibles des $7-k$ chapeaux restants, donc $(7-k)!$ « cas favorables » correspondant aux événements considérés). En remarquant qu'il existe $\binom{7}{k}$ façons de choisir les valeurs de $i_1, \ldots, i_k$, on en déduit que la probabilité recherchée vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{7} \overline{A_i}\right) &= 1 - \sum_{k=1}^{7} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant 7} \frac{(7-k)!}{7!}\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \binom{7}{k} \frac{(7-k)!}{7!} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{7} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}.\end{aligned}$$

4. On se donne des ensembles finis $E_1, \ldots, E_n$ et on considère une situation d'équiprobabilité sur l'ensemble fini $\Omega := E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$. La formule du crible démontrée dans la question 2 s'écrit alors

$$\frac{\left|\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right|}{|\Omega|} = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \frac{\left|\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}\right|}{|\Omega|}\right),$$

d'où la formule du crible ensembliste en multipliant les deux termes de l'égalité par $|\Omega|$.

Correction de l'exercice 43.

1. L'événement I est réalisé si et seulement s'il existe un rang n pour lequel l'intersection des A_k, pour $k \geqslant n$, est réalisée, c'est-à-dire si tous les A_k sont réalisés à partir d'un certain rang. Ainsi, I est bien l'événement « tous les A_k sont réalisés à partir d'un certain rang ».

   L'événement S est réalisé si quel que soit le rang n entier que l'on se donne, on peut trouver un rang $k \geqslant n$ tel que A_k soit réalisé : c'est le cas si et seulement s'il existe une infinité de rangs k tels que A_k soit réalisé. Ainsi, S est bien l'événement « une infinité de A_k sont réalisés ».
2. Si tous les A_k sont réalisés à partir d'un certain rang, alors une infinité de A_k sont réalisés : ainsi, « I implique S », c'est-à-dire que $I \subset S$.
3. (a) Soit $n \geqslant 0$. Pour tout $N \geqslant n$, le résultat de l'exercice 33 donne

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k).$$

   Faisons à présent tendre N vers $+\infty$: le terme de gauche tend vers $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$ d'après le théorème de la limite monotone (puisque les événements $\bigcup_{k=n}^{N} A_k$ forment une suite croissante et la réunion de tous ces événements vaut $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$), et le terme de droite tend vers $\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$. Ainsi, par passage à la limite on obtient

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que la série des $\mathbb{P}(A_k)$ converge. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que son reste d'ordre $n - 1$ vérifie

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \leqslant \varepsilon.$$

   D'après la question précédente, on a alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n_0}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \varepsilon.$$

   Or $S \subset \bigcup_{k=n_0}^{+\infty} A_k$ puisque S est l'intersection de tous les événements de la forme $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$, donc

$$\mathbb{P}(S) \leqslant \varepsilon.$$

   Le réel strictement positif ε ayant été choisi de manière arbitraire, on en déduit que $\mathbb{P}(S) = 0$.

4. Plaçons-nous dans le cadre de l'exercice 32, supposons que $p \neq \frac{1}{2}$ et reprenons la notation $A_{0,k}$: « la particule est en 0 à l'étape k » pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a $\mathbb{P}(A_{0,k}) = \binom{k}{\frac{k}{2}} p^{\frac{k}{2}}(1-p)^{\frac{k}{2}}$ pour tout k pair et $\mathbb{P}(A_{0,k}) = 0$ pour tout k impair, donc
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{0,k}) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \binom{k}{\frac{k}{2}} p^{\frac{k}{2}}(1-p)^{\frac{k}{2}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{2j}{j} p^j (1-p)^j.$$
On souhaite montrer que la probabilité qu'un nombre infini de $A_{0,k}$ soient réalisés vaut 0. D'après le lemme de Borel-Cantelli, il suffit pour cela de montrer que la série des $\mathbb{P}(A_{0,k})$ converge. Ainsi, il suffit pour conclure d'établir la convergence de la série de terme général $\binom{2j}{j} p^j(1-p)^j$. Or la formule de Stirling permet d'écrire
$$\begin{aligned}\binom{2j}{j} p^j (1-p)^j = \frac{(2j)!}{j!^2}(p(1-p))^j &\underset{j \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}(2j)^{2j+\frac{1}{2}} e^{-2j}}{\left(\sqrt{2\pi} j^{j+\frac{1}{2}} e^{-j}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2^{2j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{j}} (p(1-p))^j = \frac{1}{\sqrt{\pi j}} (4p(1-p))^j.\end{aligned}$$
En étudiant la fonction $p \mapsto 4p(1-p)$ sur $[0,1]$, on s'aperçoit du fait que $4p(1-p) \in [0,1[$ dès lors que $p \neq \frac{1}{2}$. Ainsi, en écrivant
$$\binom{2j}{j} p^j (1-p)^j \underset{j \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi j}} (4p(1-p))^j \underset{j \to +\infty}{=} o\left((4p(1-p))^j\right),$$
on peut dire que $\binom{2j}{j} p^j(1-p)^j$ est négligeable devant le terme général positif d'une série géométrique convergente. La série de terme général $\binom{2j}{j} p^j(1-p)^j$ est donc elle-même convergente, ce qui clôt la preuve.

5. (a) Pour tous $n, q \in \mathbb{N}$ tels que $n \leqslant q$, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{q} A_k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{q} \overline{A_k}\right) = 1 - \prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k})$$
par indépendance des $\overline{A_k}$. Ainsi, si n est fixé, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k\right) = \lim_{q \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{q} A_k\right) = \lim_{q \to +\infty} \left(1 - \prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k})\right)$$
d'après le théorème de la limite monotone (puisque les $\bigcup_{k=n}^{q} A_k$, lorsque q varie, forment une suite croissante d'ensembles dont l'union vaut $\bigcup_{k \geqslant n} A_k$). Or les $\bigcup_{k \geqslant n} A_k$, lorsque n varie, forment une suite décroissante d'ensembles dont l'intersection vaut S, donc une nouvelle application du théorème de la limite monotone donne
$$\mathbb{P}(S) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k\right) = \lim_{n \to +\infty} \lim_{q \to +\infty} \left(1 - \prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k})\right),$$
ce qu'il fallait démontrer.

(b) On rappelle l'inégalité (très utile !) $1 + x \leqslant e^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, qui se démontre par une simple étude de fonction ; en appliquant cette inégalité à $x = -\mathbb{P}(A_k)$, on en déduit que $0 \leqslant 1 - \mathbb{P}(A_k) \leqslant e^{-\mathbb{P}(A_k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si $n, q \in \mathbb{N}$ sont tels que $n \leqslant q$, on peut alors écrire

$$\prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{q} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leqslant \prod_{k=n}^{q} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = \exp\left(-\sum_{k=n}^{q} \mathbb{P}(A_k)\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

(c) Supposons que la série de terme général $\mathbb{P}(A_k)$ diverge. On souhaite montrer que $\mathbb{P}(S) = 1$ pour établir le deuxième volet du lemme de Borel-Cantelli.

Soit $n \geqslant 0$. D'après la question précédente, on a

$$0 \leqslant \prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=n}^{q} \mathbb{P}(A_k)\right) \xrightarrow[q \to +\infty]{} 0$$

puisque $\sum_{k=n}^{q} \mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[q \to +\infty]{} +\infty$. Ainsi, le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{q \to +\infty} \prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = 0$$

donc, d'après la question 5(a) :

$$\mathbb{P}(S) = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1,$$

ce qui clôt la preuve.

6. Notons N le nombre de touches de la machine à écrire dont dispose le singe et M la taille de la chaîne de caractères constituant la Comédie Humaine. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons A_k l'événement « la chaîne de caractères écrite par le singe entre le $(kM + 1)$-ième et le $(k + 1)M$-ième caractère est l'intégralité de la *Comédie Humaine* »[4]. On suppose que le singe tape à chaque seconde sur une touche choisie avec équiprobabilité parmi les N disponibles, indépendamment

4. L'exemple du singe dactylographe fut présenté pour la première fois par Émile Borel, l'un des pères fondateurs de la théorie modernes des probabilités. Toutefois, l'idée exposée ici, selon laquelle toute issue de probabilité arbitrairement faible (mais non nulle) doit nécessairement se produire si une expérience aléatoire est répétée un nombre suffisant (aléatoire) de fois, est présente dans les œuvres d'auteurs aussi divers qu'Aristote (voir la citation en introduction de cette feuille d'exercices), Blaise Pascal, Jean-Jacques Rousseau et Jonathan Swift. Ce dernier fait mention dans les *Voyages de Gulliver* (1721) d'un professeur d'académie faisant générer à ses étudiants des chaînes de lettres aléatoires en tournant des manivelles, dans le but de créer une liste complète de toutes les connaissances scientifiques. Il faut cependant tempérer l'enthousiasme du lecteur qui verrait dans cette méthode une façon d'obtenir à moindre coût des dissertations de littérature : le temps moyen nécessaire à notre singe pour obtenir une séquence de 30 caractères donnée à partir d'un clavier à 39 touches est d'environ $1,7 \cdot 10^{40}$ années, soit plus de 10^{30} fois l'estimation de la durée de vie de l'univers faite par les physiciens.
Les ordinateurs étant plus rapides que les singes et les élèves de B/L pour générer des chaînes de caractères aléatoires, on peut d'ores et déjà consulter en ligne la vertigineuse Bibliothèque de

des choix précédents (en ignorant les combinaisons de touche pour des raisons de simplicité, bien que le problème puisse se résoudre de la même façon dans ce cas) : ainsi, les événements A_k sont chacun de probabilité $\left(\frac{1}{N}\right)^M = \frac{1}{N^M}$. Par construction, les événements A_k, qui portent sur des chaînes de caractères deux à deux disjointes (A_0 porte sur les caractères 1 à M, A_1 sur les caractères $M+1$ à $2M$ et ainsi de suite), sont indépendants. On a donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{N^M} = +\infty.$$

D'après le deuxième volet du lemme de Borel-Cantelli, la probabilité qu'une infinité de A_k soit réalisée est donc égale à 1, c'est-à-dire que le singe reproduira presque sûrement la chaîne de caractères constituant la *Comédie Humaine* une infinité de fois.

Remarquons que l'on aurait pu se passer du lemme de Borel-Cantelli pour démontrer que l'*un* des événements A_k se produit avec probabilité 1 : en effet, le théorème de la limite monotone donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) &= \lim_{j\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{j} A_k\right) = \lim_{j\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{j} A_k\right) \\ &= \lim_{j\to+\infty}\left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{j} \overline{A_k}\right)\right) = \lim_{j\to+\infty}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N^M}\right)^{j+1}\right) = 1.\end{aligned}$$

7. Considérons un événement A de probabilité strictement comprise entre 0 et 1 (par exemple « la pièce tombe sur pile » dans le cadre du lancer d'une pièce équilibrée), et posons $A_k := A$ pour tout $k \geqslant 0$. Les A_k ne sont alors clairement pas indépendants ! Alors la série des $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2}$ diverge (grossièrement), mais la probabilité qu'une infinité de A_k soient réalisés est égale à la probabilité que A le soit, soit $\frac{1}{2}$, et non 1 comme dans le deuxième volet du lemme de Borel-Cantelli.

8. (a) Soit $k \geqslant 2$. L'hypothèse selon laquelle $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$ si $i \neq j$ signifie que l'égalité des longévités de deux individus est un événement de probabilité nulle ; on peut donc affirmer que les individus $1, 2, \ldots, k+1$ ont des longévités deux à deux distinctes [5] avec probabilité 1. Les longévités des individus étant aléatoires mais distribuées de façon symétrique (on dira en khâgne qu'elles ont *la même loi*), chaque longévité X_i, pour $i \in [\![1, k]\!]$, a une probabilité égale à $\frac{1}{k}$ d'être la plus grande parmi $X_1, \ldots, X_k$. Ainsi,

Babel, inspirée d'une nouvelle de Jorge Luis Borges : à l'heure de l'écriture de ce document, elle contient toutes les pages possibles formées de 3200 caractères du clavier anglais standard, hors caractères spéciaux, pour un total de 10^{4677} livres de 410 pages environ. Sur l'une de ses étagères se trouve donc un livre détaillant la composition du petit déjeuner que vous avez pris ce matin, suivie de la réponse à la question de l'existence de Dieu ainsi que de la date et des circonstances exactes de votre décès...

5. On laisse le lecteur établir ce fait rigoureusement en écrivant l'événement contraire comme une union d'événements du type $(X_i = X_j)$ et en majorant sa probabilité par 0 grâce à l'exercice 33, ou en utilisant la formule du crible démontrée dans l'exercice 42.

on a

$$\mathbb{P}(X_k > \max(X_1, \ldots, X_{k-1})) = \frac{1}{k}.$$

De la même façon, chaque couple (i, j) d'éléments de $[\![1, k+1]\!]$, avec $i \neq j$, a une probabilité égale de correspondre aux longévités les plus élevées, au sens où $X_i > X_j > X_\ell$ pour tout $\ell \in [\![1, k+1]\!] \setminus \{i, j\}$. Ces couples étant au nombre de $k(k+1)$, la probabilité en question vaut donc $\frac{1}{k(k+1)}$. En particulier, en prenant $i = k+1$ et $j = k$, on obtient

$$\mathbb{P}(X_{k+1} > X_k > \max(X_1, \ldots, X_{k-1})) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

(b) Pour tout $k \geqslant 1$, on pose A_k : « les individus k et $k+1$ établissent un double record de longévité ». D'après la question 8(c), on a donc

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} < +\infty$$

puisque $\frac{1}{k(k+1)} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$ et puisque la série de Riemann de terme général positif $\frac{1}{k^2}$ converge. Le lemme de Borel-Cantelli montre donc qu'avec probabilité 1, seul un nombre fini de A_k sont réalisés, c'est-à-dire que seul un nombre fini de doubles records sont établis.

(c) Pour tout $k \geqslant 2$, on pose B_k : « l'individu k établit un record de longévité ». La longévité de l'individu k ne dépendant aucunement de l'identité de l'individu titulaire du record de longévité parmi les autres individus, les événements B_k sont mutuellement indépendants[6]. D'après la question 8(b), on a donc

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

puisque la série harmonique diverge, donc le deuxième volet du lemme de Borel-Cantelli montre qu'avec probabilité 1, une infinité de B_k sont réalisés, c'est-à-dire qu'une infinité de nouveaux records sont établis.

6. Le lecteur courageux et/ou dubitatif pourra démontrer cette affirmation en revenant à la définition d'événements mutuellement indépendants et en utilisant le principe d'indifférence mobilisé dans la question 9(a).