



## 5 PLUS LOIN, PLUS FORT

 **Exercice 40** (Continuité des fonctions puissances). Cet exercice s'inscrit dans la continuité de l'exercice 30 sur les fonctions lipschitziennes.

1. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$ , la fonction puissance  $n$ -ième est  $k$ -lipschitzienne sur  $[a, b]$ , avec  $k := n \max(|a|, |b|)^{n-1}$ .
2. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction puissance  $n$ -ième est continue sur  $\mathbb{R}$ .

 **Exercice 41.** Le but de cet exercice est de démontrer l'affirmation du cours (corollaire 55) selon laquelle l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

1. Soit  $I$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  telle que pour tous  $x, y \in I$  tels que  $x < y$  on ait  $[x, y] \in I$ . Montrer que  $I$  est un intervalle.

*Indication :* on distinguera plusieurs cas selon que  $I$  est minorée (resp. majorée) ou non, et le cas échéant selon que  $I$  contient ou non sa borne inférieure (resp. supérieure).

2. Démontrer que si  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et si  $f$  est continue sur  $I$ , alors  $f(I)$  est un intervalle.
3. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est-elle nécessairement un intervalle ouvert ?

*La propriété topologique démontrée dans la question 1 peut être reformulée en disant que les intervalles sont les seules parties de  $\mathbb{R}$  connexes par arcs (c'est-à-dire, pour simplifier, « en un seul morceau »). Les possibilités sont plus riches dans des espaces de dimension supérieure comme  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , dans lesquels des ensembles connexes ne sont pas nécessairement des cubes !*

 **Exercice 42.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\sin(x)).$$

1. Rappeler la démonstration de l'inégalité  $|\sin(x)| \leq |x|$  valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , puis résoudre l'équation  $\sin(x) = x$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 \in [-1, 1]$  et par  $u_{n+1} = \sin(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - (a) Montrer que la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.
  - (b) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.
  - (c) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que  $f$  est constante.

**Exercice 43** (Point fixe des fonctions contractantes). Cet exercice s'inscrit dans la continuité de l'exercice 30.

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On suppose que  $I$  est stable par  $f$  (c'est-à-dire que  $f(x) \in I$  pour tout  $x \in I$ ), et on définit la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que  $f$  est *contractante*, c'est-à-dire qu'il existe  $k \in [0, 1[$  tel que  $f$  soit  $k$ -lipschitzienne.

1. Commenter l'emploi du terme « contractante ».
2. Montrer que  $f$  est continue.
3. Montrer que  $f$  admet au plus un point fixe sur  $I$ . Ce point fixe existe-t-il nécessairement ?
4. Montrer que si  $f$  admet un point fixe  $\ell \in I$ , alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|,$$

et en déduire qu'alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .

*Attention, la question qui suit ne peut être traitée qu'à l'aide de la notion de suites de Cauchy abordée dans l'exercice 54 du chapitre 6.*

5. On cherche à montrer que  $f$  admet un point fixe dès lors que  $I$  est fermé (rappelons que les intervalles de la forme  $]-\infty, a]$ ,  $[a, +\infty[$  et  $\mathbb{R}$  sont considérés fermés).

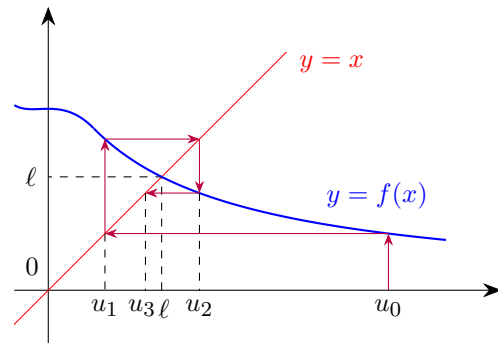
(a) Montrer que  $|u_i - u_{i+1}| \leq k^i |u_0 - u_1|$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .

(b) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est de Cauchy.

D'après l'exercice 54 du chapitre 6, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite que l'on note  $c$ , et qui appartient à  $I$  puisque  $I$  est fermé.

(c) Montrer que  $c$  est un point fixe de  $f$ .

L'exercice explique pourquoi le caractère contractant de la fonction  $f$  implique, indépendamment du choix de  $u_0 \in I$ , la convergence de  $u_n$  vers  $\ell$  à un rythme au moins géométrique, qui apparaît clairement sur la figure ci-contre.



**Exercice 44** (Théorème des bornes atteintes). Le but de cet exercice est de démontrer le théorème des bornes atteintes. Il utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass (hors programme) démontré dans les exercices accompagnant le chapitre « Suites réelles », qui stipule que de toute suite réelle à valeurs dans un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  on peut extraire une sous-suite qui converge vers une limite  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $a < b$  et soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . On va montrer que  $f$  est bornée sur  $[a, b]$  et y atteint sa borne supérieure, qui est donc un maximum ; il suffira alors d'appliquer le résultat à  $-f$  pour voir que  $f$  atteint aussi sa borne inférieure, qui est donc un minimum.

1. Montrer que si  $f$  est non majorée, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $x_n \in [a, b]$  tel que  $f(x_n) \geq n$ , puis utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass pour arriver à une contradiction.

La fonction  $f$  est donc majorée, si bien que la quantité  $M := \sup_{[a, b]} f$  existe.

2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  il existe  $y_n \in [a, b]$  tel que  $M - \frac{1}{n} \leq f(y_n) \leq M$ , puis utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass pour conclure.

**Exercice 45** (Convergence uniforme). Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions continues sur un intervalle  $I$ , et soit  $f$  une fonction définie sur  $I$ .

1. On suppose tout d'abord que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la quantité  $\sup_I |f_n - f|$  existe, et que

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On dit alors que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$ . Montrer que  $f$  est continue.

2. Montrer que cette propriété n'est pas nécessairement vraie si l'on suppose seulement que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement vers  $f$ , au sens où  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$  pour tout  $x \in I$ .

*Mathematics is not a careful march down a well-cleared highway, but a journey into a strange wilderness, where the explorers often get lost. Rigour should be a signal to the historians that the maps have been made, and the real explorers have gone elsewhere.*

— W.S. Anglin