2 EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Exercice 15. Étudier le sens de variation des suites de terme général :

(i) $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$

(ii) $u_n = 2^n\left(1-\frac{1}{n}\right)$

(iii) $u_n = 2^n + 2^{\frac{1}{n}}$

(iv) $u_n = \sqrt{(n-3)^2+1}$

(v) $u_n = (n+1)^{10} + (n-1)^{10} - 2n^{10}$

(vi) $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$

Exercice 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle croissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$v_n := \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n}.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le coefficient binomial maximal $\max\limits_{k\in[\![0,n]\!]} \dbinom{n}{k}$.

Exercice 18. La masse capillaire d'un professeur de mathématiques peut être modélisée de la façon suivante : chaque année entre septembre et juin, elle diminue de 20%, puis elle augmente de 10 grammes pendant les vacances scolaires. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la masse capillaire du professeur (en grammes) le jour de la rentrée scolaire n années après sa prise de poste. On suppose que $u_0 = 100$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner une relation liant u_{n+1} et u_n.
2. Donner l'expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Quel est la masse totale de cheveux perdue par le professeur au cours de ses 20 premières années d'enseignement ?

Exercice 19. Donner la valeur explicite du terme général des suites récurrentes doubles définies par :

(i) $u_0 = 1,\ u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{3u_{n+1}+u_n}{4}$.

(ii) $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{3u_{n+1}+u_n}{4}$.

(iii) $u_0 = 0,\ u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{3u_{n+1}+u_n}{4}$.

(iv) $u_0 = 1,\ u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{2}{9}u_n$.

(v) $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_n$.

(vi) $u_0 = -3,\ u_1 = 6$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$.

(vii) $u_0 = -1,\ u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$.

Exercice 20. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 4$ et la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^4.$$

1. Montrer par récurrence double qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence linéaire double que l'on précisera telle que l'on ait $u_n = 2^{a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire la valeur explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21. Donner le sens de variation de la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = |u_n \cos(u_n)|.$$

Exercice 22. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On rappelle que l'on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si on a :

$$(i) \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,:\, \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Montrer que cette définition est équivalente aux trois conditions suivantes :

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,:\, \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$

(iii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,:\, \forall n > N,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$

(iv) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \,:\, \forall n > N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$

Exercice 23. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ si et seulement si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.

Exercice 24. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive convergeant vers une limite $\ell \geqslant 0$. L'objet de cet exercice est de montrer que $\sqrt{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\ell}$.

1. On considère tout d'abord le cas où $\ell > 0$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell}| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\ell}}|u_n - \ell|$.
   (b) Conclure.
2. On considère à présent le cas où $\ell = 0$. En utilisant la définition de la limite, montrer que $\sqrt{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \sqrt{\ell}$.

Exercice 25. Soit $x > 0$. On veut montrer que $\dfrac{n!}{x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

1. En écrivant $n!$ comme un produit, montrer que si $n \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$, alors $n! \geqslant (\lfloor x \rfloor + 1)^{n-\lfloor x \rfloor} \lfloor x \rfloor !$.
2. Justifier que $\left(\frac{\lfloor x \rfloor + 1}{x}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, puis conclure.

Exercice 26. Étudier la convergence ou la divergence de la suite de terme général :

(i) $u_n = \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)\left(1 + \dfrac{n}{2}\right)$

(ii) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{3+n}$

(iii) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(iv) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$, où $q \in \mathbb{R}$.

(v) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^3}{n^4}$

(vi) $u_n = \dfrac{\lfloor xn \rfloor}{n}$, où $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 27. Étudier la convergence ou la divergence de la suite de terme général :

(i) $u_n = \dfrac{3n^3 - 2n + 1}{2n^5 + 2n}$ $\qquad (iii)$ $u_n = \dfrac{7n^4 - 2n^3 - n + 1}{-2n^4 + 7n^3 + 1}$ $\qquad (v)$ $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n^3}}{n - \sqrt{n^5}}$

(ii) $u_n = \dfrac{-n^6 + 2}{n^5 - 19n}$ $\qquad (iv)$ $u_n = \dfrac{n + \sqrt{n}}{n - \sqrt{n}}$ $\qquad (vi)$ $u_n = \dfrac{5^n + 3^n}{3^n - 2^n}$

Les exercices 28 à 33 ci-après pourraient être traités à l'aide des résultats théoriques de la section 3. On détaille néanmoins les énoncés de façon à éviter l'utilisation de ces résultats, grâce à des jalons similaires à ceux qui structurent les sujets de concours.

Exercice 28. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^3 + 1.$$

1. Montrer que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$ on a $x^3 + 1 > x$.
3. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 29. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sin(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}.$$
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0, 1]$.

Exercice 30. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par

$$u_0 = \frac{2}{3} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n^2 - 2u_n + 1.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
2. Montrer par récurrence que $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 31. On considère la suite définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2u_n}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
2. Déterminer l'unique réel x_0 de $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ vérifiant la relation $x_0 = \dfrac{x_0 + 1}{2x_0}$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$u_{2n} \geqslant u_{2n+2} \geqslant x_0 \geqslant u_{2n+3} \geqslant u_{2n+1}.$$
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0.

Exercice 32. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer l'ensemble B des valeurs de u_0 pour lesquelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

L'exercice 32 est un exemple simple de question traitée par l'étude des *systèmes dynamiques*, c'est-à-dire des systèmes décrits par une condition initiale et une règle d'évolution (dans le cas présent, une relation de récurrence). On cherche ici à déterminer le *bassin d'attraction du point fixe* $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire l'ensemble des conditions initiales qui seront « ramenées vers $\frac{1}{2}$ » (en un temps éventuellement infini) par la dynamique du système.

Exercice 33. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n^2}.$$

1. Quelle est la nature géométrique du sous-ensemble du plan défini par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ x^2 + y^2 = 1\}$?
2. En déduire l'allure de la courbe de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$.
3. Placer graphiquement les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Que conjecture-t-on ?
4. Démontrer la conjecture réalisée.

Exercice 34. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant $u_0 > 0$ ainsi que la condition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_{n+1} < 2\sqrt{2} - \frac{2}{u_n}.$$

1. Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis déterminer sa limite.
3. Trouver un exemple d'une telle suite.

Exercice 35. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = +\infty$.

Exercice 36. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ ainsi que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+$ on a $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$.

   Indication : on pourra développer la quantité $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et admettent la même limite.