4 Quelques applications géométriques

Il est conseillé de traiter les exercices de cette section à la suite les uns des autres.

Exercice 36. Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et distincts, admettant pour images respectives les points M et M'. En mettant z et z' sous forme exponentielle, montrer que O, M et M' sont alignés si et seulement si $z\overline{z'} \in \mathbb{R}$, et que cette condition est équivalente à $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}$.

Exercice 37. Soient z, z' et z'' trois nombres complexes distincts deux à deux, admettant pour images respectives les points M, M' et M''.

1. Montrer que M, M' et M'' sont alignés si et seulement si $(z'' - z')\overline{(z' - z)} \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que les points $(1,1)$, $(4,2)$ et $(-5,-1)$ sont alignés.

Exercice 38. Soient z, z' et z'' trois nombres complexes d'images respectives M, M' et M''. On suppose que $z \neq z'$ et $z \neq z''$, et on note $\theta \in \mathbb{R}$ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''})$.

1. Montrer que $\arg\left(\dfrac{z''-z}{z'-z}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le quotient $\dfrac{z''-z}{z'-z}$ pour que M, M' et M'' soient alignés.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le quotient $\dfrac{z''-z}{z'-z}$ pour que (MM') et (MM'') soient perpendiculaires.
4. Montrer que si $\dfrac{z''-z}{z'-z}$ est imaginaire pur, alors $|z'-z|^2 + |z''-z|^2 = |z''-z'|^2$.

Exercice 39. Soient a, b, c, d quatre nombres complexes d'images respectives A, B, C et D. On suppose que $a \neq b$ et $c \neq d$.

1. Montrer que
$$(AB) \perp (CD) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d-c}{b-a} \text{ est imaginaire pur.}$$
2. On suppose que a, b, c et d sont de module 1. Déduire de la question précédente que
$$(AB) \perp (CD) \quad \Longleftrightarrow \quad ab + cd = 0.$$
   Indication : on pourra utiliser le fait qu'un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement s'il est opposé à son conjugué.

Exercice 40. Déterminer géométriquement l'ensemble des points du plan dont l'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifie :

(i) $|z - 2i| = 3$

(ii) $|iz - 3| = 1$

(iii) $\left|\dfrac{z-3}{z+2}\right| = 1$

(iv) $|\overline{z} - 3 + i| = |z - 5|$

(v) $\dfrac{z-i}{z+1-i} \in \mathbb{R}$

(vi) $\dfrac{z-i}{z+1-i}$ est imaginaire pur.

Pour simplifier les notations, dans les cinq exercices qui suivent, on assimile le plan euclidien standard à l'ensemble $\mathbb{R}^2$ *: un point* M *du plan de coordonnées* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *pourra donc être directement noté* (a, b)*, et si* $\overrightarrow{u}$ *est un vecteur de coordonnées* (a', b') *on note* $M + \overrightarrow{u}$ *le point* M' *tel que* $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$*, c'est-à-dire le point* $(a + a', b + b')$*.*

Exercice 41 (Translations). Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan, d'affixe $z_0 \in \mathbb{C}$.

Dans l'énoncé ci-contre, on fait figurer une flèche sur le vecteur pour rappeler les notations utilisées au lycée et marquer la nature profondément géométrique de l'opération de translation.

1. Montrer que l'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$

$$\begin{array}{rccc} T_{\overrightarrow{u}} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & M & \longmapsto & M + \overrightarrow{u} \end{array}$$

   est

$$\begin{array}{rccc} t_{z_0} : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z + z_0, \end{array}$$

   c'est-à-dire que si M est le point d'affixe z, alors $T_{\overrightarrow{u}}(M)$ est le point d'affixe $z + z_0$.

2. Montrer que la translation $T_{\overrightarrow{u}}$ est bijective et donner sa réciproque.

Exercice 42 (Homothéties). Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit A un point du plan d'affixe $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle *homothétie de centre* A *et de rapport* λ l'application

$$\begin{array}{rccc} H_{A,\lambda} : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & M & \longmapsto & A + \lambda\overrightarrow{AM}. \end{array}$$

1. Montrer que l'écriture complexe de l'homothétie de centre A et de rapport λ est

$$\begin{array}{rccc} h_{z_0,\lambda} : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & z_0 + \lambda(z - z_0), \end{array}$$

   c'est-à-dire que si M est le point du plan d'affixe z, alors $H_{A,\lambda}(M)$ est le point d'affixe $h_{z_0,\lambda}(z)$.

2. Montrer que $H_{A,\lambda}$ est bijective et que sa réciproque est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
3. Montrer que la composée de deux homothéties est une translation ou une homothétie.

Exercice 43 (Rotations). Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $A \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle *rotation de centre A et d'angle θ* la transformation géométrique de $\mathbb{R}^2$ dont l'écriture complexe est

$$\begin{aligned} r_{z_0,\theta} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0). \end{aligned}$$

1. Donner l'écriture explicite de $R_{A,\theta}$ en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   Indication : on notera $A = (x_0, y_0)$ (et donc $z_0 = x_0 + iy_0$), puis pour tout $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z = x + iy$ on donnera l'écriture algébrique de $r_{z_0,\theta}(z)$ en fonction de x et y.
2. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.
3. Montrer que la rotation $R_{A,\theta}$ est bijective et donner sa bijection réciproque.

Exercice 44 (Symétries). Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la transformation géométrique S_θ de $\mathbb{R}^2$ dont l'écriture complexe est

$$\begin{aligned} s_\theta : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{i\theta}\overline{z}. \end{aligned}$$

1. Montrer que si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, alors S_θ est la symétrie orthogonale par rapport à un certain axe.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $s_\theta(z) = e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \overline{e^{-i\frac{\theta}{2}} z}$.
3. En déduire que S_θ est une symétrie orthogonale par rapport à un axe que l'on précisera.
4. Calculer $s_\theta \circ s_\theta$, puis montrer que s_θ est bijective et donner s_θ^{-1}.
5. Si $\theta' \in \mathbb{R}$, que vaut $S_{\theta'} \circ S_\theta$?

Exercice 45 (Similitudes directes). Soient $\lambda > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle *similitude directe de centre A, d'angle θ et de rapport λ* la transformation $S_{A,\theta,\lambda}$ du plan $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout point M, le point $M' := S_{A,\theta,\lambda}(M)$ est l'unique point du plan vérifiant les deux conditions

$$AM' = \lambda AM \quad \text{et} \quad \text{si } A \neq M, \text{ alors } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \theta\,[2\pi].$$

1. Illustrer graphiquement l'action de $S_{A,\theta,\lambda}$ sur un point du plan.
2. À quelle condition (sur λ et θ) $S_{A,\theta,\lambda}$ est-elle l'identité ? une homothétie ? une rotation ?
3. (a) Donner l'écriture complexe de $S_{A,\theta,\lambda}$.
   (b) Montrer qu'une similitude directe est la composée d'une rotation par une homothétie.
   (c) Montrer qu'une application $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une similitude directe si et seulement s'il existe $(a, b) \in (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \setminus (\{1\} \times \mathbb{C}^*)$ tel que l'écriture complexe de S soit $s : z \mapsto az + b$. Donner le centre, l'angle et le rapport d'une telle similitude.

4. Montrer que la composée de deux similitudes directes est une similitude directe ou une translation.
5. Montrer que $S_{A,\theta,\lambda}$ préserve les angles orientés, au sens où si B, C et D sont trois points du plan distincts, alors, en notant $B' = S_{A,\theta,\lambda}(B), C' = S_{A,\theta,\lambda}(C)$ et $D' = S_{A,\theta,\lambda}(D)$ on a :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \equiv (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'D'}) \ [2\pi].$$