Probabilités élémentaires

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 10.

1. On a $\mathbb{P}(A\cap\varnothing) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\varnothing) = \mathbb{P}(A)\cdot 0 = 0$, donc $\mathbb{P}(A\cap\varnothing) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\varnothing)$: ainsi, A et $\varnothing$ sont indépendants.

   De même, $\mathbb{P}(A\cap\Omega) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A)\cdot 1 = \mathbb{P}(A)$, donc $\mathbb{P}(A\cap\Omega) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\Omega)$: ainsi, A et Ω sont indépendants.
2. Dire que A est indépendant de lui-même signifie que $\mathbb{P}(A\cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A)$, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$. C'est le cas si et seulement si $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$, c'est-à-dire si A est quasi-impossible ou quasi-certain.

Correction de l'exercice 11. Il s'agit de montrer que

$$\mathbb{P}\Big((A\cup B)\cap C\Big) = \mathbb{P}(A\cup B)\mathbb{P}(C).$$

Or on a d'une part

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big((A\cup B)\cap C\Big) &= \mathbb{P}\Big((A\cap C)\cup(B\cap C)\Big)\\
&= \mathbb{P}(A\cap C) + \mathbb{P}(B\cap C) - \mathbb{P}\Big((A\cap B)\cap(A\cap C)\Big)\\
&= \mathbb{P}(A\cap C) + \mathbb{P}(B\cap C) - \mathbb{P}\Big(A\cap B\cap C\Big)\\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \quad \text{car } A, B \text{ et } C \text{ sont indépendants,}
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A\cup B)\mathbb{P}(C) &= \left(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)\right)\mathbb{P}(C)\\
&= \left(\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\right)\mathbb{P}(C) \quad \text{par indépendance de } A \text{ et } B\\
&= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\mathbb{P}\Big((A\cup B)\cap C\Big) = \mathbb{P}(A\cup B)\mathbb{P}(C)$, donc $A\cup B$ et C sont indépendants.

Correction de l'exercice 12.

1. On différencie les deux dés et on écrit leurs résultats sous la forme d'un couple (i,j), où i est le score du premier dé et j celui du deuxième dé. Pour tout $(i,j)\in [\![1,6]\!]^2$, si on note A_i l'événement « le résultat du premier dé est i » et B_j l'événement « le résultat du deuxième dé est j », les événements A_i et B_j sont indépendants (car les résultats des deux dés le sont), d'où $\mathbb{P}(A_i\cap B_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(B_j) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Ainsi, chaque issue $(i,j)\in[\![1,6]\!]^2$ a une probabilité $\frac{1}{36}$ d'être observée : nous sommes bien en situation d'équiprobabilité sur $[\![1,6]\!]^2$.

2. L'événement S_2 n'est réalisé que si les deux dés donnent 1 : il correspond donc uniquement au couple $(1,1)$ (c'est-à-dire, formellement, que $S_2 = \{(1,1)\}$), si bien que $\mathbb{P}(S_2) = \frac{1}{36}$ par équiprobabilité.

   L'événement S_3 est réalisé si le résultat du tirage est $(1,2)$ ou $(2,1)$ (donc $S_3 = \{(1,2),(2,1)\}$), d'où $\mathbb{P}(S_3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ par équiprobabilité.

   On trouve de même $|S_4| = 3$, $|S_5| = 4$, $|S_6| = 5$, $|S_7| = 6$, $|S_8| = 5$, $|S_9| = 4$, $|S_{10}| = 3$, $|S_{11}| = 2$ et $|S_{12}| = 1$. Ainsi, on a les probabilités suivantes :

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\lvert S_i \rvert$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
$\mathbb{P}(S_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

   Il est intéressant de retenir que le résultat le plus probable pour la somme de deux dés à 6 faces équilibrés est 7, et qu'il est 6 fois plus probable que les résultats extrêmes 2 et 12.

Correction de l'exercice 13. On code les résultats obtenus par un couple (i,j) avec $i,j \in [\![1,6]\!]$, où i est le résultat du dé rouge et j celui du dé bleu. On est alors en situation d'équiprobabilité sur l'ensemble des possibles $\Omega = [\![1,6]\!]^2$: en effet, chaque issue (i,j) a pour probabilité $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ par indépendance des dés (voir l'exercice 12).

(i) Le dé rouge amène un résultat tiré avec équiprobabilité dans $[\![1,6]\!]$; or il existe 3 scores pairs $(2,4$ et $6)$ sur les 6 possibles, donc $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

(ii) Il existe 6 configurations correspondant à l'événement B : $(1,1)$, $(2,2)$, et ainsi de suite jusqu'à $(6,6)$. Ainsi, on a $\mathbb{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

(iii) On peut écrire $C = \overline{B}$, si bien que $\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(B) = \frac{5}{6}$.

(iv) L'événement D est constitué des couples formés par un entier pair suivi d'un entier impair (qui sont au nombre de $3 \times 3 = 9$ puisqu'il existe 3 choix pour l'entier pair, puis 3 pour l'entier impair), et des couples formés par un entier impair suivi par un entier pair (qui sont au nombre de 9 pour la même raison). Ainsi, on a $|D| = 18$ et donc $\mathbb{P}(D) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$. On pouvait aussi obtenir ce résultat à l'aide des propriétés de la fonction de probabilité : en rappelant que A est l'événement « le résultat du dé rouge est pair » et en notant A' l'événement « le résultat du dé bleu est pair », on a en effet

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}\Big((A \cap \overline{A'}) \sqcup (\overline{A} \cap A')\Big) = \mathbb{P}(A \cap \overline{A'}) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap A') \quad \text{par incompatibilité}\\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{A'}) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(A') \quad \text{par indépendance}\\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(v) L'événement $\overline{E}$: « on n'obtient aucun 1 » est $[\![2,6]\!]^2$ et est de cardinal 25. Ainsi, on a par équiprobabilité

$$\mathbb{P}(E) = 1 - \mathbb{P}(\overline{E}) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

(*vi*) L'événement F s'écrit explicitement $\{(i,j) \in [\![1,6]\!]^2 \ : \ i > j\}$. Or pour tout $i \in [\![1,6]\!]$, il existe $i-1$ valeurs de $j \in [\![1,6]\!]$ telles que $j < i$ (les valeurs $1, 2, \dots, i-1$), donc il existe $i-1$ couples dans F dont la première composante est i. On a donc

$$|F| = \sum_{i=1}^{6}(i-1) = \sum_{i=0}^{5} i = 15 \quad \text{d'où} \quad \mathbb{P}(F) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

par équiprobabilité.

Remarquons que l'on pourrait raisonner de façon un peu plus astucieuse : notons F' l'événement « le résultat du dé rouge est strictement supérieur au résultat du dé bleu ». On remarque que F' est de même probabilité que F par symétrie de la situation considérée. D'autre part, (F, F', B) forme un système complet d'événements puisque ces trois événements sont incompatibles et décrivent l'ensemble des cas de figure possibles. Ces considérations impliquent que

$$\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(F') + \mathbb{P}(B) = 1 \quad \text{soit} \quad 2\mathbb{P}(F) + \frac{1}{6} = 1, \quad \text{d'où} \quad \mathbb{P}(F) = \frac{5}{12}.$$

Correction de l'exercice 14. Le problème peut être modélisé par une situation d'équiprobabilité sur l'ensemble des combinaisons de 5 cartes tirées parmi 52, qui est de cardinal $\binom{52}{5}$. Cette remarque transforme l'exercice en problème de dénombrement, puisqu'il suffit à chaque question de dénombrer le nombre de mains amenant la configuration demandée et de diviser ce nombre par $\binom{52}{5}$ pour obtenir la probabilité recherchée.

(*i*) Une quinte flush royale est caractérisée uniquement par sa couleur : il existe donc 4 quintes flush royales possibles, et la probabilité recherchée vaut par équiprobabilité $\frac{4}{\binom{52}{5}} = \frac{1}{649740} \approx 0,00015\%$.

(*ii*) Une quinte flush (non royale) est caractérisée par sa couleur ainsi que par sa valeur la plus basse, qui peut être un 1, un 2, et ainsi de suite jusqu'à un 9 (la valeur 10 étant interdite puisqu'elle caractérise une quinte flush royale). Il existe donc 4×9 quintes flush, et par équiprobabilité, la probabilité recherchée vaut $\frac{4\times 9}{\binom{52}{5}} = \frac{3}{216580} \approx 0,0014\%$.

(*iii*) Pour dénombrer les mains contenant une quinte, on décrit la construction d'une telle main (voir le principe de dénombrement par construction énoncé dans la méthode 16 du chapitre 2) :

- On choisit la plus petite valeur : on dispose pour cela de 10 possibilités.
- On choisit la couleur de la plus petite carte, puis de la deuxième plus petite, et ainsi de suite : on dispose pour cela de $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ possibilités.

Parmi les 10×4^5 quintes ainsi construites, 10×4 sont des quintes flush (qui correspondent au cas où toutes les couleurs choisies dans la deuxième étape sont identiques). Ainsi, le nombre de quintes qui ne sont pas des quintes flush est $10 \times 4^5 - 10 \times 4 = 10200$. La probabilité de tirer une telle main est donc égale à

$$\frac{10200}{\binom{52}{5}} = \frac{5}{1274} \approx 0,39\%.$$

(*iv*) Pour construire une main de 5 cartes de hauteurs différentes :

- On choisit les 5 hauteurs parmi les 13 possibles : on dispose pour cela de $\binom{13}{5}$ choix.
- On choisit les couleurs associées à ces 5 hauteurs différentes : on dispose pour cela de 4^5 choix.

Ainsi, il existe $\binom{13}{5} \cdot 4^5$ mains constituées de 5 cartes de hauteurs différentes, donc la probabilité recherchée vaut

$$\frac{\binom{13}{5} \cdot 4^5}{\binom{52}{5}} = \frac{2112}{4165} \approx 50,7\%.$$

(*v*) Pour construire une main contenant un full :

- On choisit trois cartes de même hauteur : pour cela, on choisit une hauteur (on dispose alors de 13 choix) puis trois cartes parmi les quatre cartes de cette hauteur (on dispose alors de $\binom{4}{3} = 4$ choix), ce qui donne 13×4 choix en tout.
- On choisit ensuite deux autres cartes dont les hauteurs sont identiques : on dispose de 12 choix pour la hauteur, puis de $\binom{4}{2} = 6$ choix pour les couleurs, donc de 12×6 choix en tout.

Ainsi, il existe $13 \times 4 \times 12 \times 6 = 3744$ fulls possibles. La probabilité recherchée vaut donc

$$\frac{3744}{\binom{52}{5}} = \frac{6}{4165} \approx 0,14\%.$$

(*vi*) Pour construire un brelan :

- On choisit la hauteur des trois cartes de même valeur (on dispose pour cela de 13 possibilités), puis leur couleur (ce que l'on peut faire de $\binom{4}{3} = 4$ façons).
- On choisit une combinaison de deux cartes dont les hauteurs sont différentes de celles déjà choisies et différentes entre elles : on dispose pour cela de $\frac{48 \times 44}{2}$ choix, la division par 2 s'expliquant par le fait que l'ordre dans lequel les deux cartes sont choisies ne change pas la composition de la main obtenue (qui est une combinaison et non un arrangement !).

Ainsi, il existe $13 \times 4 \times \frac{48 \times 44}{2} = 54912$ brelans possibles, donc la probabilité d'en tirer un est

$$\frac{54912}{\binom{52}{5}} = \frac{88}{4165} = 2,11\%.$$

(*vii*) Pour construire une main contenant deux paires, mais pas un full, on choisit :

- Les deux paires, en choisissant les hauteurs ($\binom{13}{2} = 78$ possibilités) puis les couleurs de la plus petite paire ($\binom{4}{2} = 6$ possibilités) et celles de la plus haute ($\binom{4}{2} = 6$ possibilités à nouveau).
- La dernière carte, qui peut être n'importe laquelle des $52 - 2 \times 4 = 44$ cartes dont la hauteur n'est pas celle de l'une des deux paires.

Il existe donc $78 \times 6 \times 6 \times 44 = 123552$ mains contenant deux paires mais pas un full, donc la probabilité de tirer une telle main est

$$\frac{123552}{\binom{52}{5}} = \frac{198}{4165} \approx 4,75\%.$$

Correction de l'exercice 15. Notons A (resp. B) l'événement « le groupe vient de la classe A (resp. B) », et F l'événement « le groupe est constitué de 3 filles ».

1. On considère qu'un trinôme d'élèves de la classe A est une combinaison de 3 élèves tirée avec équiprobabilité parmi les $\binom{30}{3}$ trinômes possibles. Or il existe $\binom{20}{3}$ trinômes constitués de 3 filles dans la classe A, si bien que

$$\mathbb{P}(F \,|\, A) = \frac{\binom{20}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{57}{203}.$$

2. Le même raisonnement donne

$$\mathbb{P}(F \,|\, B) = \frac{\binom{15}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{13}{116}.$$

3. Du point de vue de la colleuse avant qu'elle aperçoive le groupe, ce dernier est issu avec équiprobabilité de la classe A ou de la classe B : on a donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. On cherche à présent la probabilité $\mathbb{P}(A \mid F)$. Pour cela, on utilisée la formule de Bayes, combinée à la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (A, B) :

$$\mathbb{P}(A \,|\, F) = \frac{\mathbb{P}(A \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(F \,|\, A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(F \,|\, A) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(F \,|\, B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{57}{203}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{57}{203} + \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{116}} = \frac{228}{319}.$$

Correction de l'exercice 16. On introduit les événements A_k comme suggéré dans l'énoncé.

1. L'événement « au moins deux élèves ont leur anniversaire le même jour » est l'événement contraire de « tous les élèves ont leur anniversaire un jour différent », qui s'écrit $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Par la formule des probabilités composées, la probabilité que deux élèves aient leur anniversaire le même jour vaut donc

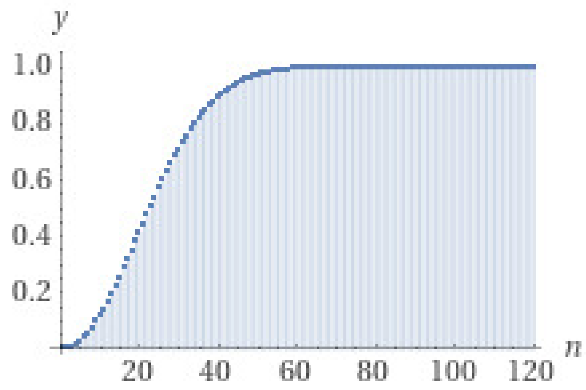
$$1-\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1-\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$
$$= 1 - 1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365}$$

puisque pour tout i, conditionnellement à $A_1 \cap \cdots \cap A_{i-1}$ (et donc au fait que les $i-1$ premiers élèves de la liste aient des dates d'anniversaire différentes), l'événement A_i est de probabilité $\frac{365-(i-1)}{365}$ par équiprobabilité.

Si $n > 365$, l'un des termes du produit $1 \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365}$ vaut 0 et la probabilité recherchée vaut 1 (ce qui n'est pas étonnant : deux élèves ont nécessairement la même date d'anniversaire d'après le lemme des tiroirs, voir le chapitre 1). Si $n \leqslant 365$, cette probabilité se réécrit

$$\mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!365^n}.$$

2. En tapant `1-365!/((365-n)!365^n)` dans la barre de recherche de WolframAlpha, on obtient le graphe des premières valeurs de $1 - \dfrac{365!}{(365-n)!365^n}$:



On voit que le seuil de $\frac{1}{2}$ est dépassé peu après $n = 20$, et en testant les valeurs $n = 22$ et $n = 23$ on détermine que la probabilité de l'événement étudié dépasse $\frac{1}{2}$ si et seulement si $n \geqslant 23$. Ainsi, dans une classe de 23 élèves ou plus, la probabilité que deux élèves au moins aient la même date d'anniversaire est supérieure à $\frac{1}{2}$.

Ce résultat est connu sous le nom de « paradoxe des anniversaires » : il suffit d'un nombre d'élèves relativement peu élevé pour que la probabilité que deux d'entre eux aient leur anniversaire le même jour soit considérable. La raison pour laquelle ce résultat étonne est une confusion courante avec la probabilité que quelqu'un dans une classe soit né le même jour *qu'un élève donné* (ou que le professeur), qui est bien plus faible.

Correction de l'exercice 17.

1. On a déjà croisé ce résultat dans le chapitre 2 (corollaire 18). Pour construire une permutation σ de $\mathfrak{S}_n$, il suffit de construire une application injective : on choisit alors $\sigma(1)$ (on dispose de n choix), puis $\sigma(2)$ (on dispose de $n-1$ choix), et ainsi de suite jusqu'à $\sigma(n)$ (on ne dispose alors plus que d'un choix), ce qui correspond à $n \times (n-1) \times \cdots \times 1 = n!$ choix possibles.

2. Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ vérifie $\sigma(1) = 1$ si et seulement si elle réalise une permutation de $[\![2, n]\!]$, c'est-à-dire si elle envoie bijectivement les éléments de $[\![2, n]\!]$ dans $[\![2, n]\!]$. Or il existe $(n-1)!$ façons d'envoyer $[\![2, n]\!]$ bijectivement dans lui-même d'après la question précédente, donc $(n-1)!$ permutations de $\mathfrak{S}_n$ fixant 1.

   On pourrait formaliser cet argument en exhibant une bijection entre l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$ fixant 1 et l'ensemble des permutations de $[\![2, n]\!]$ (en l'occurrence l'application transformant une permutation σ en la permutation $k \mapsto \sigma(k)$ dont l'ensemble de départ et d'arrivée sont $[\![2, n]\!]$). Expliciter une telle bijection n'est pas utile à la compréhension du raisonnement ; nous nous en dispenserons dans les questions à venir.

3. Les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ vérifiant $\sigma(1) = 2$ sont exactement les permutations envoyant bijectivement $[\![2, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!] \setminus \{2\}$: par la même logique que dans la question 1, il existe $(n-1)!$ bijections de $[\![2, n]\!]$ dans $[\![1, n]\!] \setminus \{2\}$, donc $(n-1)!$ permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ vérifiant $\sigma(1) = 2$.

4. On modélise le problème en considérant que l'application associant chaque nain au propriétaire du bonnet qu'il récupère est une permutation de l'ensemble des nains dans lui-même, choisie avec équiprobabilité parmi les 7! permutations possibles. Par exemple, si la permutation σ choisie vérifie $\sigma(\text{Joyeux}) = \text{Dormeur}$, alors Joyeux repart avec le bonnet de Dormeur.

5. (a) D'après la question 2, le nombre de permutations de l'ensemble des nains fixant l'élément Joyeux (donc le nombre de façons de répartir les bonnets de sorte que Joyeux reparte avec son propre bonnet) est égal à 6!. Par équiprobabilité, la probabilité que Joyeux reparte avec son propre bonnet est donc égale à $\frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$.

   Notons que l'on pouvait raisonner plus simplement en remarquant que le bonnet saisi par Joyeux est tiré au hasard et avec équiprobabilité parmi les 7 bonnets, donc la probabilité recherchée vaut $\frac{1}{7}$.

   (b) Par le même raisonnement que dans la question précédente – en utilisant soit la question 3, soit un raisonnement focalisé sur le choix de Grincheux – on trouve que la probabilité recherchée vaut $\frac{1}{7}$.

   (c) On peut encore raisonner de deux façons différentes, mais il est plus simple de considérer qu'Atchoum choisit avec équiprobabilité un bonnet parmi 7, et que la probabilité qu'il choisisse l'un des trois bonnets appartenant à Simplet, Prof ou Joyeux est donc égale à $\frac{3}{7}$.

   (d) Le nombre de permutations associant Grincheux à Prof et Simplet à Joyeux est 5! : en effet, pour créer une permutation vérifiant ces propriétés, il suffit de choisir quels bonnets (parmi les cinq qui ne sont pas ceux de Prof et Joyeux) récupèrent les cinq nains qui ne sont pas Grincheux et Simplet, donc de choisir une bijection d'un ensemble à 5 éléments dans un ensemble à 5 éléments. Par équiprobabilité, la probabilité d'observer une telle situation est donc $\frac{5!}{7!} = \frac{1}{42}$.

On pouvait raisonner de façon plus probabiliste en notant A l'événement « Grincheux repart avec le bonnet de Prof » et B l'événement « Simplet repart avec le bonnet de Joyeux » puis en écrivant

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{42}$$

grâce au fait que conditionnellement à A, le bonnet pioché par Simplet est tiré avec équiprobabilité parmi les 6 bonnets qui ne sont pas celui de Prof.

(e) Il suffit d'imaginer la situation dans laquelle Dormeur quitte la soirée en premier, plus lucide que tous les autres. Lors de leur départ, les autres nains effectuent alors une permutation de leurs six bonnets au hasard ; la probabilité que Timide reparte avec celui de Simplet est alors égale à $\frac{1}{6}$.

(f) La seule permutation correspondant au fait que tous les nains repartent avec leur propre bonnet est l'identité : par équiprobabilité, la probabilité d'observer cette permutation est $\frac{1}{7!} = \frac{1}{5040}$.

(g) Numérotons les nains de 1 à 7 de façon arbitraire, et introduisons les événements $A_{i,j}$: « le nain i et le nain j échangent leurs bonnets et les autres récupèrent leur propre bonnet » pour tous $i, j \in [\![1, 7]\!]$ tels que $i < j$ (on exclut le cas $i > j$ pour éviter de définir deux fois le même événement). Ces événements sont au nombre de $\binom{7}{2}$ (le nombre de façons de choisir deux nains parmi les sept), deux à deux disjoints (puisqu'ils décrivent des situations incompatibles) et de probabilité $\frac{1}{7!}$ (puisqu'ils décrivent une permutation parmi les $7!$ possibles). Ainsi, la probabilité recherchée vaut

$$\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i<j} A_{i,j}\right) = \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_{i,j}) = \binom{7}{2} \cdot \frac{1}{7!} = \frac{7 \times 6}{2} \cdot \frac{1}{7!} = \frac{1}{2 \cdot 5!} = \frac{1}{240}.$$

Correction de l'exercice 18. On différencie les dix boules de l'urne (par exemple en les numérotant) ; le tirage peut alors être modélisé par le choix avec équiprobabilité d'un arrangement de 3 boules parmi 10, ces arrangements étant au nombre de $10 \times 9 \times 8$.

Notons que l'on ne choisit pas de modéliser le problème par des combinaisons car le deuxième événement considéré fait mention de l'*ordre* dans lequel les boules sont tirées.

1. Le nombre d'arrangements ne contenant aucune boule noire, et donc ne contenant que des boules blanches, est $8 \times 7 \times 6$. Par équiprobabilité, on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{le tirage contient une boule noire}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{le tirage ne contient que des boules blanches}) \\ &= 1 - \frac{8 \times 7 \times 6}{10 \times 9 \times 8} = \frac{8}{15}.\end{aligned}$$

2. En utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle, on peut écrire

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(\text{la première boule est noire}\,|\,\text{le tirage contient une boule noire})\\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{la première boule est noire})}{\mathbb{P}(\text{le tirage contient une boule noire})} = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{8}{15}} = \frac{3}{8}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 19.

1. On introduit les événements

$$A \,:\, \text{« l'équipe 1 est désignée pour tirer en premier »}$$

et

$$B \,:\, \text{« l'équipe 1 gagne le match »}.$$

Le tirage au sort ayant lieu à l'aide d'une pièce équilibrée, on a $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, et la conclusion de l'article cité s'écrit sous la forme $\mathbb{P}(B \,|\, A) = \frac{3}{5}$.

On peut donc utiliser la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(A, \overline{A})$ pour trouver

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \,|\, A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B \,|\, \overline{A}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{2}.$$

L'équipe 1 a donc une probabilité de $\frac{1}{2}$ de gagner la partie – ce qui est assez intuitif compte tenu du caractère symétrique du problème.

2. On cherche à présent la probabilité $\mathbb{P}(A \,|\, B)$. On utilise pour cela la formule de Bayes et le résultat de la question précédente :

$$\mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \,|\, A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}.$$

Conditionnellement à la victoire de l'équipe 1, la probabilité qu'elle ait été tirée au sort est égale à $\frac{3}{5}$: cela ne nous étonne guère puisque le fait d'avoir remporté la partie indique plutôt que l'équipe a été désignée par le tirage au sort que l'inverse.

Correction de l'exercice 20. Soient $A_1, \ldots, A_{n+1}$ des événements tels que $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ soit de probabilité non nulle. La formule des probabilités composées s'écrit alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}\left(A_i \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{i-1} A_j\right).$$

Correction de l'exercice 21. On vérifie tour à tour les trois axiomes définissant une probabilité (voir section 2.3 du cours) :

- Si $B \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$, or $\mathbb{P}(B \cap A) \leqslant \mathbb{P}(A)$ puisque $A \cap B \subset A$, donc $\mathbb{P}(B \mid A) \in [0, 1]$.
- On a $\mathbb{P}(\Omega \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = 1$.
- Si $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} B_k \,\middle|\, A\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} B_k\right) \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=0}^{+\infty} (B_k \cap A)\right)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left(B_k \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} \quad \text{par incompatibilité} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\mathbb{P}\left(B_k \cap A\right)}{\mathbb{P}(A)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k \mid A).
\end{aligned}$$

  Ainsi, les trois axiomes de Kolmogorov sont vérifiés, donc $B \mapsto \mathbb{P}(B \mid A)$ est bien une fonction de probabilité.

Correction de l'exercice 22. Si $\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(B)$ pour tout événement B, on doit en particulier avoir $\mathbb{P}(A \mid A) = \mathbb{P}(A)$ soit $\frac{\mathbb{P}(A \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A)$, donc $\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)} = \mathbb{P}(A)$, soit enfin $1 = \mathbb{P}(A)$.

Supposons réciproquement, que $\mathbb{P}(A) = 1$. Montrons tout d'abord que pour tout événement B, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$. On écrit pour cela $B = (A \cap B) \sqcup (\overline{A} \cap B)$, d'où l'on déduit

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \tag{1}$$

par incompatibilité. Mais $\overline{A} \cap B \subset \overline{A}$ et $\overline{A}$ est de probabilité 0, donc $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \leqslant 0$, d'où $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0$. L'égalité (1) montre donc que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$, qui est la relation annoncée. On déduit alors de cette égalité que pour tout B, on a

$$\mathbb{P}(B \mid A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{1} = \mathbb{P}(B).$$

Ainsi, on a $\mathbb{P}(\cdot \mid A) = \mathbb{P}$ si et seulement si A est quasi-certain, c'est-à-dire $\mathbb{P}(A) = 1$.

Correction de l'exercice 23. On modélise l'expérience aléatoire par une situation d'équiprobabilité sur $[\![1, 6]\!]^2$, la première coordonnée du couple (i, j) représentant le résultat du dé rouge et la deuxième celui du dé bleu (c'est-à-dire que $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et que $\mathbb{P}(\{i, j\}) = 1/36$ pour tout $(i, j) \in \Omega$). On appelle A l'événement « le dé rouge donne un résultat pair » et B l'événement « la somme des résultats des deux dés est au moins égale à 10 », et on cherche à calculer la probabilité $\mathbb{P}(B \mid A)$.

Pour cela, on écrit que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ (puisque 3 nombres sur les 6 résultats possibles du dé sont pairs) et $B \cap A = \{(4,6),(6,4),(6,5),(6,6)\}$, d'où $\mathbb{P}(B \cap A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$ par équiprobabilité, et donc

$$\mathbb{P}(B \,|\, A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9}.$$

Correction de l'exercice 24. Sous l'hypothèse selon laquelle la pièce n'est pas biaisée en faveur des piles, la probabilité d'observer 10 piles de suite est égale à $\frac{1}{2^{10}}$ par indépendance des lancers. L'observation réalisée ne peut donc être réalisée qu'avec une probabilité d'environ $\frac{1}{1024} \approx 0,1\%$ dans le cas où la pièce est équilibrée, c'est-à-dire qu'elle est très peu probable : cela pousse à rejeter l'hypothèse selon laquelle la pièce est équilibrée (et donc à affirmer que la pièce n'est pas équilibrée), avec une probabilité d'erreur de $0,1\%$, donc une probabilité de ne pas se tromper égale à $99,9\%$.

Cette approche, cependant, est plus subtile qu'il n'y paraît et repose sur un raisonnement qu'il convient d'expliciter. Si l'on suppose que la pièce est équilibrée, la probabilité de n'importe quelle suite de 10 observations – même la séquence « 5 piles suivis de 5 faces » – est égale à $\frac{1}{1024}$.

Or toutes les observations ne nous poussent pas à rejeter l'hypothèse de la même façon que plus haut ! On choisit, sur des critères qualitatifs et arbitraires, de considérer certaines configurations comme atypiques (en l'occurrence, celles qui présentent un grand déséquilibre entre le nombre de piles et le nombre de faces obtenues), et d'autres comme conformes à l'hypothèse, bien que chacune soit tout aussi peu probable. Il est donc important de comprendre que dans le paragraphe ci-dessus, on donne un sens bien particulier à la notion de *probabilité d'erreur* : il s'agit de la probabilité de l'événement atypique « on obtient uniquement des piles » sous l'hypothèse d'équilibrage.

Cet exercice présente une démarche bayésienne de *test d'hypothèse*. Pour réaliser un tel test, on identifie l'hypothèse à tester puis on définit arbitrairement des événements atypiques dont on calcule la probabilité. On confronte enfin ces événements aux observations effectuées : si ces dernières tombent dans la *zone de rejet* définie par l'un des événements, l'hypothèse est rejetée avec un certain niveau de certitude.

Prenons un autre exemple et supposons que l'hypothèse à tester soit H_0 : « la pièce est équilibrée ». On peut alors choisir de définir comme atypique l'événement A_k : « la pièce, sur 10 lancers, donne au moins k piles ou au moins k faces » pour de grandes valeurs de k (par exemple $k \in \{7,8,9,10\}$). Remarquons que l'on fait intervenir de façon symétrique les piles et les faces dans les A_k, tandis que l'hypothèse précédente n'était rejetée que dans le cas d'un grand nombre de piles : tout dépend de la formulation de l'hypothèse à tester !

Dans ce cas, la probabilité de A_9, par exemple, est $\frac{22}{2^{10}} \approx 2,15\%$ puisque A_9 correspond à 22 situations possibles (uniquement des piles, un unique pile obtenu à l'un des 10 rangs possibles, un unique face obtenu à l'un des 10 rangs possibles, ou uniquement des faces). Supposons que l'on obtienne 9 faces lors de 10 lancers : l'événement A_9 est alors réalisé, alors qu'il avait une probabilité de $97,85\%$ de ne pas l'être sous l'hypothèse H_0. On dit alors que l'on peut *rejeter H_0 avec un degré de certitude de* $97,85\%$.

Correction de l'exercice 25. Introduisons les événements A : « le soleil a explosé » et B : l'appareil affirme que le soleil a explosé ». Il est raisonnable d'imaginer que la probabilité $\mathbb{P}(A)$ est très faible : on la note ε.

L'appareil annonce aux deux personnages que le soleil a explosé. Le premier personnage calcule uniquement la probabilité *a priori* que l'appareil mente, qui est égale à $\frac{1}{36}$, et il en déduit que l'appareil dit probablement la vérité. Or l'appareil a produit une information, qui est que l'événement B est réalisé : la probabilité que l'appareil dise la vérité n'est donc plus la probabilité *a priori* $\mathbb{P}\Big((A\cap B)\sqcup(\overline{A}\cap\overline{B})\Big)$ (qui prend en compte toutes les branches de l'arbre de probabilité dans lesquelles l'appareil dit la vérité), mais la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A\,|\,B)$ (qui ne prend en compte que la sous-branche partant de l'événement B et menant à $B\cap A$) ! Or cette probabilité se calcule grâce à la formule de Bayes et à la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(A,\overline{A})$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\,|\,B) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\,|\,A)}{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B\,|\,A)+\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B\,|\,\overline{A})}\\ &= \frac{\varepsilon\cdot\frac{35}{36}}{\varepsilon\cdot\frac{35}{36}+(1-\varepsilon)\cdot\frac{1}{36}} = \frac{35\varepsilon}{1+34\varepsilon}.\end{aligned}$$

Cette probabilité est très proche de 0 puisque $\varepsilon\approx 0$, ce qui explique que le bayésien soit prêt à prendre le pari que le soleil n'a pas explosé !

On rapprochera utilement cette question de l'exercice 5 : les faux positifs donnés par la machine sont peu nombreux en proportion des vrais négatifs, mais ils sont très nombreux par rapport aux vrais positifs qui ne se déclenchent que dans des cas très rares, ce qui explique le résultat obtenu.

Correction de l'exercice 26. Pour tout $i\in[\![1,5]\!]$, on note S_i : « le lancer i est un succès ». Les S_i sont alors indépendants et de probabilité $\frac{3}{4}$.

(*i*) Par indépendance des S_i, la probabilité recherchée vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(S_1\cap S_2\cap S_3\cap\overline{S_4}\cap\overline{S_5}\right) &= \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2)\mathbb{P}(S_3)\mathbb{P}(\overline{S_4})\mathbb{P}(\overline{S_5})\\ &= \frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3^3}{4^5} = \frac{27}{1024}.\end{aligned}$$

(*ii*) Par indépendance des S_i, la probabilité recherchée vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\overline{S_1}\cap\overline{S_2}\cap S_3\cap S_4\cap S_5\right) &= \mathbb{P}(\overline{S_1})\mathbb{P}(\overline{S_2})\mathbb{P}(S_3)\mathbb{P}(S_4)\mathbb{P}(S_5)\\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{27}{1024}.\end{aligned}$$

(*iii*) On comprend grâce aux deux questions précédentes que toutes les configurations amenant trois succès et deux échecs ont la même probabilité d'advenir, soit $\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{27}{1024}$. Or il existe $\binom{5}{3}=10$ configurations de ce type puisque l'on peut placer de $\binom{5}{3}$ façons 3 succès sur 5 tentatives. Ces configurations étant deux à deux incompatibles, la probabilité d'obtenir exactement 3 succès sur les 5 tentatives est

$$\binom{5}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{270}{1024} = \frac{135}{502}.$$

Correction de l'exercice 27.

1. Pour tout $k \in [\![1, 500]\!]$, on introduit l'événement A_k : « la k-ième vignette est la vignette recherchée ». Les A_k sont (mutuellement) indépendants et de probabilité $\frac{1}{500}$. La probabilité que Nestor parvienne à compléter sa collection est la probabilité qu'au moins l'un des A_k soit réalisé, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{500} A_k\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{500} \overline{A_k}\right) \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{500} \qquad \text{par indépendance.}\end{aligned}$$

2. Le nombre de vignettes achetées (500) étant important, une idée pour approcher la probabilité $1 - \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{500}$ est de calculer la limite de $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$ lorsque $n \to +\infty$. Or en passant à la forme exponentielle et en utilisant un développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 1 en 0, on obtient

$$\begin{aligned}1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= 1 - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\ &= 1 - \exp\left(n\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= 1 - \exp(-1 + o(1)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 - e^{-1}.\end{aligned}$$

La probabilité que Nestor parvienne à compléter sa collection est donc proche de $1 - \frac{1}{e}$.

Remarquons tout de même que le raisonnement que nous venons de proposer n'est pas tout à fait rigoureux : il serait possible que l'approximation valable pour $n \to +\infty$ soit encore très incorrecte pour $n = 500$. Un calcul numérique donne cependant $1 - \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{500} \approx 0,6325$ et $1 - \frac{1}{e} \approx 0,6321$, ce qui montre que l'approximation est correcte à 3 décimales près !

Correction de l'exercice 28. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note F_k : « on obtient face au k-ième lancer ».

1. L'événement A_1 est réalisé si et seulement si on obtient face aux premier et deuxième lancers : on a donc $A_1 = F_1 \cap F_2$, d'où $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(F_1)\mathbb{P}(F_2) = \frac{4}{9}$ par indépendance des lancers. On écrit de même $A_2 = \overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3$, d'où $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\overline{F_1})\mathbb{P}(F_2)\mathbb{P}(F_3) = \frac{4}{27}$, et $A_3 = \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4$, d'où

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(\overline{F_2})\mathbb{P}(F_3)\mathbb{P}(F_4) = \frac{4}{27}.$$

Remarquons que le lancer 1 n'intervient pas dans la description de l'événement A_3 : en effet, A_3 est réalisé si et seulement si on obtient pile au deuxième lancer et face aux deux suivants, indépendamment du résultat obtenu au premier lancer. On pourrait bien sûr – mais ce serait inutile – faire apparaître cet événement artificiellement en considérant les deux issues possibles du premier tirage, ce qui reviendrait à écrire $A_3 = (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) \sqcup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4)$.

2. (a) Supposons[1] que l'événement $B = \overline{F_1}$ soit réalisé. Aucun doublé n'est alors entamé, et l'expérience est *réinitialisée* à partir du lancer suivant, au sens où tout se passe comme si le premier lancer avait été « un coup pour rien ». Pour tout $n \geqslant 1$, les rangs $n+1$ et $n+2$ de l'expérience réinitialisée sont alors les rangs $n+2$ et $n+3$ de l'expérience réelle, donc la probabilité d'obtenir un premier doublé aux rangs $n+2$ et $n+3$, toujours conditionnellement à B, est égale à la probabilité d'obtenir un premier doublé aux rangs $n+1$ et $n+2$ de l'expérience réinitialisée, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A_{n+2} \mid B) = \mathbb{P}(A_{n+1})$. On explique de même la deuxième relation en remarquant que conditionnellement à C, l'expérience est réinitialisée avec deux lancers de décalage.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements (A_1, B, C) (prenez le temps de vous convaincre du fait qu'il s'agit bien d'un système complet !), on peut écrire

$$\mathbb{P}(A_{n+2}) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_{n+2} \mid A_1) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A_{n+2} \mid B) + \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(A_{n+2} \mid C).$$

Or $\mathbb{P}(A_{n+2} \mid A_1) = 0$ puisque $n+2 \neq 1$, et la question précédente donne $\mathbb{P}(A_{n+2} \mid B) = \mathbb{P}(A_{n+1})$ ainsi que $\mathbb{P}(A_{n+2} \mid C) = \mathbb{P}(A_n)$. Après avoir calculé $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ grâce à l'indépendance des deux premiers lancers, on peut donc écrire

$$\mathbb{P}(A_{n+2}) = \frac{2}{9}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_{n+1}),$$

ce qui donne bien la relation attendue.

(c) On vient de montrer que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la relation de récurrence linéaire double $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On sait par ailleurs que $p_1 = \frac{4}{9}$ et $p_2 = \frac{4}{27}$. On peut alors démontrer la proposition attendue par récurrence double, ou bien utiliser le cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, ce que nous faisons dans la suite de ce corrigé.

Pour déterminer l'expression explicite de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, on résout l'équation caractéristique $x^2 = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$, qui admet $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ pour solutions. On sait alors qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \beta\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Le fait que $p_1 = \frac{4}{9}$ et $p_2 = \frac{4}{27}$ se réécrit donc

$$\left\{\begin{array}{rrcl} -\frac{1}{3}\alpha & +\frac{2}{3}\beta & = & \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9}\alpha & +\frac{4}{9}\beta & = & \frac{4}{27} \end{array}\right. \quad \underset{\substack{L_1 \leftarrow 9L_1 \\ L_2 \leftarrow 27L_2}}{\text{soit}} \quad \left\{\begin{array}{rrcl} -3\alpha & +6\beta & = & 4 \\ 3\alpha & +12\beta & = & 4 \end{array}\right.$$

d'où (en réalisant $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 18\beta & = & 8 \\ \alpha & = & \frac{4-12\beta}{3} \end{array}\right.$$

1. Attention à bien comprendre ce qui est attendu : il s'agit ici d'apporter une explication verbale et heuristique aux relations données dans l'énoncé. Une preuve par calcul direct ne serait pas possible puisqu'elle imposerait de connaître les probabilités p_n que l'on cherche précisément à déterminer !

soit $\beta = \frac{4}{9}$ et $\alpha = -\frac{4}{9}$. On en déduit l'expression explicite de p_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \frac{4}{9}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{4}{9}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+2} - 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2}.$$

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on peut réécrire D_n comme l'union disjointe $D_n = \bigsqcup_{k=1}^{n} A_k$ d'où, en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{k+2} - 4\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k+2} \qquad \text{par linéarité de la somme} \\ &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+3}}{1-\frac{2}{3}} - 4 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+3}}{1+\frac{1}{3}} \underset{\cdots}{=} 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+2} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+3}\end{aligned}$$

Les $(D_n)_{n\geqslant 1}$ forment une suite croissante d'événements, donc la probabilité que l'un des D_n soit réalisé (c'est-à-dire pour que l'on finisse par obtenir un doublé) est égale à la limite de $\mathbb{P}(D_n)$ lorsque $n \to +\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Or l'expression que nous venons de déterminer donne $\mathbb{P}(D_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ puisque $\left|-\frac{1}{3}\right| < 1$ et $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$. Ainsi, la probabilité que l'on finisse par obtenir un doublé est égale à 1, ce qui est conforme à l'intuition.

Correction de l'exercice 29.

1. Si la fortune initiale du joueur est 0, le joueur est ruiné dès le début de la partie, donc $r_0 = 1$. Si sa fortune initiale est N, le joueur gagne la partie avant même qu'elle ait commencé, donc il ne peut finir ruiné : ainsi, $r_N = 0$.
2. Introduisons les événements A : « le premier lancer amène un pile » et R : « le joueur finit ruiné » et considérons que la fortune de départ du joueur est égale à $i \in [\![1, N-1]\!]$. Conditionnellement au fait que A est réalisé, la partie est réinitialisée au lancer suivant avec une fortune initiale égale à $i+1$, et la probabilité de ruine du joueur à partir de ce point est égale à r_{i+1} : on a donc $\mathbb{P}(R \mid A) = r_{i+1}$. Conditionnellement au fait que $\overline{A}$ est réalisé, la partie est réinitialisée avec une fortune initiale égale à $i-1$, ce qui donne $\mathbb{P}(R \mid \overline{A}) = r_{i-1}$. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(\overline{A}, A)$, on obtient

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(R \mid \overline{A}) + \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(R \mid A)$$

soit $r_i = qr_{i-1} + pr_{i+1}$, ce qu'il fallait démontrer.
3. D'après[2] les deux questions précédentes, la suite finie $(r_i)_{i\in[\![0,N]\!]}$ vérifie une relation de récurrence linéaire double ainsi que les conditions $r_0 = 1$ et $r_N = 0$.

2. Le problème considéré ici n'a pas la formulation standard de la détermination explicite d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : on dispose de la valeur initiale de la suite finie et de sa valeur finale (on parle de *conditions au bord*) plutôt que de deux valeurs initiales. On admet toutefois que la méthode classique valable pour les suites récurrentes doubles s'applique ici (ce que l'on peut montrer *a posteriori* en vérifiant que la suite obtenue est la seule qui satisfasse les conditions attendues).

On s'intéresse à l'équation caractéristique $x = q+px^2$, de discriminant $(2p-1)^2$, et on distingue deux cas :

- Si $p \neq \frac{1}{2}$, l'équation caractéristique admet pour solutions 1 et $\frac{1-p}{p}$; nous notons δ cette deuxième solution. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $r_i = \alpha + \beta\delta^i$ pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, et les conditions $r_0 = 1$ et $r_N = 0$ donnent $\alpha = \frac{\delta^N}{\delta^N - 1}$ et $\beta = \frac{1}{1-\delta^N}$. Ainsi, pour tout $i \in [\![0, N]\!]$ on a $r_i = \frac{\delta^N - \delta^i}{\delta^N - 1}$.
- Si $p = \frac{1}{2}$, la seule solution de l'équation caractéristique est 1. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $r_i = \alpha + \beta i$ pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, et les conditions $r_0 = 1$ et $r_N = 0$ donnent $\alpha = 1$ et $\beta = -\frac{1}{N}$. Ainsi, pour tout $i \in [\![0, N]\!]$ on a $r_i = 1 - \frac{i}{N}$.

Correction de l'exercice 30.

1. C est réalisé si et seulement si aucun des S_k ne l'est ; ainsi, $C = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} \overline{S_k}$.
2. Les événements $\bigcap\limits_{k=1}^{N} \overline{S_k}$: « aucun joueur n'est déclaré gagné lors des N premiers lancers », pour $N \geqslant 1$, forment une suite décroissante, et leur intersection vaut C d'après la question précédente. D'après le théorème de la limite monotone, on a donc
$$\mathbb{P}(C) = \lim_{N \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} \overline{S_k} \right).$$
Or pour tout $N \geqslant 1$, la formule des probabilités composées donne
$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{N} \overline{S_k} \right) &= \mathbb{P}(\overline{S_1})\mathbb{P}(\overline{S_2} \mid \overline{S_1}) \cdots \mathbb{P}(\overline{S_N} \mid \overline{S_N} \cap \overline{S_1} \cap \cdots \cap \overline{S_{N-1}}) \\ &= \underbrace{\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{5}{6}}_{N \text{ fois}} = \left(\frac{5}{6}\right)^N. \end{aligned}$$
Comme $\left|\frac{5}{6}\right| < 1$, cette probabilité tend vers 0 lorsque $N \to +\infty$, donc $\mathbb{P}(C) = 0$.
3. Alice (resp. Bruno) gagne la partie si et seulement si la partie se termine après un nombre impair (resp. pair) de lancers. Ainsi :
$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} S_{2k-1} \quad \text{et} \quad B = \bigcup_{k=1}^{+\infty} S_{2k}.$$
4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_k) &= \mathbb{P}(\overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{k-1}}) \cdot \mathbb{P}(S_k \mid \overline{S_1} \cap \overline{S_2} \cap \cdots \cap \overline{S_{k-1}}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^k. \end{aligned}$$
On a utilisé dans ce calcul le résultat obtenu par la formule des probabilités composées dans la question 2.

5. Les S_k étant incompatibles entre eux, on a grâce aux résultats des deux questions précédentes

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} S_{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2k-1}) \\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k-1} = \frac{6}{25}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^k \\ &= \frac{6}{25}\cdot\frac{\frac{25}{36}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{k=1}^{+\infty} S_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_{2k}) \\ &= \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2k} = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^k \\ &= \frac{1}{5}\cdot\frac{\frac{25}{36}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{5}{11}.\end{aligned}$$

Les événements (A, B, C) formant un système complet d'événements, on a $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C) = 1$, donc $\mathbb{P}(C) = 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B) = 1-\frac{6}{11}-\frac{5}{11} = 0$: on retrouve bien que $\mathbb{P}(C) = 0$.

Correction de l'exercice 31. On numérote les réveils arbitrairement, et pour tout $i \in [\![1, N]\!]$ on considère les événements A_i : « le réveil i sonne à l'heure » et B_i : « le réveil i ne sonne pas du tout ». Les A_i sont indépendants entre eux et de probabilité $1-p$. Les B_i sont indépendants entre eux et leur probabilité est $\mathbb{P}(B_i) = \mathbb{P}(\overline{A_i})\mathbb{P}(B_i \mid \overline{A_i}) = p\cdot\frac{1}{2} = \frac{p}{2}$.

1. L'étudiant est réveillé à l'heure si et seulement si l'un de ses réveils ne se détraque pas pendant la nuit. La probabilité de cet événement est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) &= 1-\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N}\overline{A_i}\right) = 1-\mathbb{P}(\overline{A_1})^N \quad \text{par indépendance} \\ &= 1-p^N.\end{aligned}$$

2. L'étudiant n'est pas réveillé du tout si tous ses réveils se détraquent et ne sonnent pas. La probabilité de cet événement est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{N} B_i\right) &= \mathbb{P}(B_1)^N \quad \text{par indépendance} \\ &= \left(\frac{p}{2}\right)^N.\end{aligned}$$

3. L'événement « l'étudiant est réveillé en retard » est le complémentaire de l'union des deux événements considérés dans les questions précédentes. On

a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{l'étudiant est réveillé en retard}) &= 1 - \mathbb{P}(\text{il est réveillé à l'heure}) - \mathbb{P}(\text{il n'est pas réveillé}) \\ &= 1 - \left(1 - p^N\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^N = p^N - \left(\frac{p}{2}\right)^N = p^N\left(1 - \frac{1}{2^N}\right).\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 32.

1. Par indépendance des événements D_i, la probabilité recherchée vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{D_1} \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap \overline{D_5} \cap D_6) &= \mathbb{P}(\overline{D_1})\mathbb{P}(D_2)\mathbb{P}(D_3)\mathbb{P}(D_4)\mathbb{P}(\overline{D_5})\mathbb{P}(D_6) \\ &= (1-p)ppp(1-p)p \\ &= (1-p)^2 p^4.\end{aligned}$$

   Il est utile pour la suite de noter que c'est aussi la probabilité de toute séquence contenant quatre sauts vers la droite et deux vers la gauche, peu importe l'ordre dans lequel ces sauts s'enchaînent.

2. Si n est impair, il n'est pas possible que la particule retourne en 0 en n étapes (elle ne peut effectuer le même nombre de sauts vers la droite et vers la gauche en n itérations). Si n est pair, la particule retourne en 0 en n étapes si et seulement si elle a fait $\frac{n}{2}$ sauts vers la gauche et $\frac{n}{2}$ sauts vers la droite. Chacune des $\binom{n}{\frac{n}{2}}$ trajectoires possibles pour ce faire étant de probabilité $p^{\frac{n}{2}}(1-p)^{\frac{n}{2}}$ par un raisonnement similaire à celui suivi à la question précédente, et ces trajectoires sont deux à deux incompatibles, si bien que

$$\mathbb{P}(A_{0,n}) = \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}}(1-p)^{\frac{n}{2}}.$$

3. Si $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'événement $A_{k,n}$ est réalisé si et seulement si le nombre $j \in [\![0, n]\!]$ d'événements D_i réalisés parmi $D_1, \ldots, D_n$ vérifie $j - (n-j) = k$ (en effet, la particule a alors effectué j sauts vers la droite et $n-j$ sauts vers la gauche), soit $j = \frac{n+k}{2}$. Ainsi, si $\frac{k+n}{2} \notin [\![0, n]\!]$, l'événement $A_{k,n}$ est impossible ($A_{k,n} = \varnothing$), et si $\frac{k+n}{2} \in [\![0, n]\!]$ (c'est-à-dire si k est de même parité que n et vérifie $|k| \leqslant n$), on a

$$A_{k,n} = \bigsqcup_{\substack{\mathcal{I} \subset [\![0,n]\!] \\ |\mathcal{I}| = \frac{n+k}{2}}} \left(\left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{i \in \overline{\mathcal{I}}} \overline{A_i}\right)\right).$$

   On obtient par le même raisonnement que dans la question précédente :

$$\mathbb{P}(A_{k,n}) = \binom{n}{\frac{n+k}{2}} p^{\frac{n+k}{2}}(1-p)^{\frac{n-k}{2}}.$$

Correction de l'exercice 33. Démontrons par récurrence la propriété attendue, que nous notons $\mathcal{P}_n$.

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie puisqu'elle se réécrit $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$. La propriété $\mathcal{P}_2$ est elle aussi vraie puisque si A_1 et A_2 sont des événements, alors[3]

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \leqslant \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$$

car $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) \geqslant 0$).

Fixons à présent $n \geqslant 1$ et supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Si $A_1, \ldots, A_{n+1}$ sont des événements, alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&\leqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_i\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \quad \text{d'après } \mathcal{P}_2 \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{P}(A_k),
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 34.

1. Intuitivement, « tout dépend de la pièce avec laquelle on effectue les lancers ». On introduit donc les deux événements A : « on choisit la pièce truquée » et B : « on obtient face pendant les N premiers lancers », puis on utilise la formule des probabilités totales sur le système complet d'événéments $(A, \overline{A})$:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \,|\, A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(B \,|\, \overline{A}) = \frac{1}{n} \cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2^N} = \frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2^N}$$

   puisque la pièce est sélectionnée avec équiprobabilité parmi les n pièces disponibles, et que la probabilité qu'une pièce équilibrée amène N faces consécutifs vaut $\frac{1}{2^N}$ par indépendance des lancers.

2. On calcule $\mathbb{P}(A \,|\, B)$ grâce à la formule de Bayes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \,|\, B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} &= \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \,|\, A)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2^N}} = \frac{1}{1 + \frac{n-1}{2^N}}.
\end{aligned}$$

3. On établit $\mathcal{P}_2$ séparément puisqu'il s'agit d'un ingrédient dont nous aurons besoin pour démontrer le caractère héréditaire de la proposition.

Correction de l'exercice 35.

1. À chaque étape, un nouveau joueur est introduit, et un joueur qui perd une manche quitte immédiatement la partie. En se représentant mentalement plusieurs configurations possibles, on se convainc des faits suivants :
   - L'étape 2 a lieu de toute façon.
   - L'étape 3 a lieu si le gagnant de la manche 2 n'est pas le gagnant de la manche 1, c'est-à-dire s'il s'agit du joueur 3.
   - L'étape 4 a lieu si l'étape 3 a lieu et si le gagnant de la manche 3 n'est pas le gagnant de la manche 2, c'est-à-dire s'il s'agit du joueur 4.
   - Plus généralement, si $n \geqslant 2$, l'étape $n+1$ a lieu si l'étape n a lieu et si le gagnant de la manche n est le joueur $n+1$.

   En introduisant pour tout $n \geqslant 1$ l'événement A_n : « la manche n a lieu » et l'événement B_n : « la manche n a lieu et le joueur $n+1$ gagne cette manche », on peut donc écrire $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 1$ et

   $$\begin{aligned}\forall n \geqslant 2, \quad \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n \cap B_n) \\ &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}\left(B_n \mid A_n\right) = \mathbb{P}(A_n) \cdot \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

   Ainsi, la suite $(\mathbb{P}(A_n))_{n\geqslant 2}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc pour tout $n \geqslant 2$ on a $\mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{2^{n-2}}$.
2. La suite d'événements $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante : pour tout $n \geqslant 1$, l'étape $n+1$ ne peut en effet avoir lieu que si l'étape n a eu lieu. D'après le théorème de la limite monotone, on a donc

   $$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0,$$

   soit $\mathbb{P}\left(\text{le jeu s'arrête}\right) = 1$: le jeu s'arrête presque sûrement.
3. La probabilité pour que le joueur 1 gagne est la probabilité pour qu'il gagne les deux premières manches, donc $\frac{1}{4}$ par indépendance des manches. C'est aussi la probabilité que le joueur 2 gagne puisque les deux sont dans des situations symétriques. Pour tout $n \geqslant 3$, l'événement « le joueur n gagne » est réalisé si et seulement si n étapes du jeu ont lieu, mais pas $n+1$: en effet, un joueur J_k donné gagne si et seulement s'il remporte les manches $k-1$ et k, donc seule la victoire de J_n peut mener à un jeu en exactement n manches. Ainsi, si $n \geqslant 3$, la probabilité que J_n gagne est

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_{n-1}) &= \mathbb{P}(A_n \setminus A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(A_{n+1}) \\ &= \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot (2-1) = \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 36. L'expérience peut être modélisée par le tirage d'un couple de $[\![1,n]\!]^2$ avec équiprobabilité – chaque couple ayant donc une probabilité égale à $\frac{1}{n^2}$ d'être tiré.

1. Dans le cas où $n=3$, il existe 5 couples $(x,y)\in[\![1,3]\!]^2$ tels que $\frac{x}{y}$ soit entier : $(1,1),(2,1),(3,1),(2,2)$ et $(3,3)$. Par équiprobabilité, on a donc $\mathbb{P}(E_3)=\frac{5}{3^2}=\frac{5}{9}$. Dans le cas où $n=4$, on peut faire la liste des couples $(x,y)\in[\![1,4]\!]^2$ tels que $\frac{x}{y}$ soit entier en considérant leur deuxième coordonnée : il s'agit des $(x,1)$ avec $x\in[\![1,4]\!]$ (donc 4 couples), mais aussi de $(2,2)$ et $(4,2)$, de $(3,3)$ et de $(4,4)$, donc 8 couples en tout. Par équiprobabilité, on a donc $\mathbb{P}(E_4)=\frac{8}{4^2}=\frac{1}{2}$.
2. Soit $n\geqslant 1$. Sur le modèle de la question précédente, on souhaite calculer le nombre de couples $(x,y)\in[\![1,n]\!]^2$ tels que $\frac{x}{y}$ soit entier. On distingue pour cela les couples selon leur deuxième coordonnée :
   - Tous les couples de la forme $(x,1)$ vérifient la propriété attendue.
   - Un couple $(x,2)$ vérifie la propriété attendue si et seulement si x est pair ; or il existe $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ valeurs paires de x dans $[\![1,n]\!]$ (c'est-à-dire $\frac{n}{2}$ si n est pair, et $\frac{n-1}{2}$ si n est impair).
   - Un couple $(x,3)$ vérifie la propriété attendue si et seulement si x est multiple de 3 ; or il existe $\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor$ multiples de 3 dans $[\![1,n]\!]$.
   - Plus généralement, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, un couple (x,y) vérifie la propriété attendue si et seulement si x est multiple de k, et $\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor$ entiers vérifient cette propriété dans $[\![1,n]\!]$.

   Le nombre total de couples $(x,y)\in[\![1,n]\!]^2$ tels que $\frac{x}{y}$ soit entier est donc égal à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor$. Par équiprobabilité, on a donc

   $$\mathbb{P}(E_n)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor,$$

   ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 37.

1. On considère qu'un individu choisi au hasard dans la génération 1 descend de deux individus choisis au hasard dans la génération 0. Calculons la probabilité que cet individu ait hérité de son père l'allèle A. On introduit pour cela les événements

   $$P_0\ :\ \text{« le père de l'individu est de génotype } AA \text{ »},$$

   $$Q_0\ :\ \text{« le père est de génotype } Aa \text{ »}$$

   ainsi que

   $$R_0\ :\ \text{« le père est de génotype } aa \text{ »}$$

   et

   $$H\ :\ \text{« l'individu hérite de son père l'allèle } A \text{ »}.$$

La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements (P_0, Q_0, R_0) donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H) &= \mathbb{P}(P_0)\mathbb{P}(H \mid P_0) + \mathbb{P}(Q_0)\mathbb{P}(H \mid Q_0) + \mathbb{P}(R_0)\mathbb{P}(H \mid R_0) \\ &= p_0 \cdot 1 + q_0 \cdot \frac{1}{2} + r_0 \cdot 0\end{aligned}$$

puisque l'allèle hérité est tiré au hasard parmi les deux allèles dont le père est porteur. On a donc

$$\mathbb{P}(H) = p_0 + \frac{1}{2}q_0 \quad \text{d'où} \quad \mathbb{P}(\overline{H}) = 1 - p_0 - \frac{1}{2}q_0 = r_0 + \frac{1}{2}q_0.$$

On montre de même que la probabilité pour l'individu d'hériter d'un allèle A de sa mère est égale à $p_0 + \frac{1}{2}q_0$, et que la probabilité de l'événement contraire (donc qu'il hérite d'un allèle a de sa mère) est $r_0 + \frac{1}{2}q_0$.

Les deux allèles hérités étant choisis de manière indépendante entre les parents, la probabilité que l'individu soit de génotype AA vaut $\mathbb{P}(H)^2 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$ et la probabilité qu'il soit de génotype aa vaut $\mathbb{P}(\overline{H})^2 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$. On a donc :

$$p_1 = \left(p_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2, \quad r_1 = \mathbb{P}(\overline{H})^2 = \left(r_0 + \frac{1}{2}q_0\right)^2$$

et

$$q_1 = 1 - p_1 - r_1.$$

2. En écrivant $q_0 = 1 - p_0 - r_0$, on obtient $p_0 + \frac{1}{2}q_0 = \frac{1}{2}(1 + p_0 - r_0)$ ainsi que $r_0 + \frac{1}{2}q_0 = \frac{1}{2}(1 + r_0 - p_0)$. On a donc :

$$p_1 = \frac{1}{4}(1 + p_0 - r_0)^2, \quad r_1 = \frac{1}{4}(1 + r_0 - p_0)^2$$

et

$$q_1 = 1 - \frac{1}{4}\left((1 + p_0 - r_0)^2 + (1 + r_0 - p_0)^2\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + (p_0 - r_0)^2\right).$$

3. Grâce à la question précédente, on peut écrire

$$p_1 - r_1 = \frac{1}{4}\left((1 + p_0 - r_0)^2 - (1 + r_0 - p_0)^2\right) = \frac{1}{4}\left(2 \cdot (2p_0 - 2r_0)\right) = p_0 - r_0.$$

4. La loi de reproduction permettant de passer de la génération 1 à la génération 2 étant la même que celle qui permet de passer de la génération 0 à la génération 1, on obtient les formules

$$p_2 = \frac{1}{4}(1 + p_1 - r_1)^2, \quad r_2 = \frac{1}{4}(1 + r_1 - p_1)^2$$

et

$$q_2 = 1 - \frac{1}{2}\left(1 + (p_1 - r_1)^2\right).$$

Or on a vu dans la question 3 que la différence $p_1 - r_1$ est égale à la différence $p_0 - r_0$: d'après la question 2, on a donc $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ et $r_1 = r_2$, et on pourrait montrer de même que tous les p_n (resp. q_n, r_n), avec $n \geqslant 1$, sont égaux à p_1 (resp. q_1, r_1) . La proportion des différents génotypes dans la population est donc stable à partir de la deuxième génération : ainsi, même un allèle très peu répandu dans la population n'a pas vocation à s'éteindre dans le cadre du modèle considéré. Ce résultat quelque peu contre-intuitif est appelé *principe de Hardy-Weinberg*.

Ce principe est assez peu vérifié en pratique, ce qui pousse les biologistes, par un simple raisonnement par contraposée (on pourrait même dire bayésien *!), à remettre en cause les hypothèses du modèle dans les cas où les proportions alléliques ne sont pas stables au cours des générations. En particulier, des proportions variables au cours du temps suggèrent l'existence de facteurs évolutifs et d'allèles favorisant la survie et/ou la reproduction de l'espèce considérée.*

Correction de l'exercice 38. *La question envisagée ici est un problème de* percolation. *La théorie de la percolation est à l'origine une branche de la physique qui s'intéresse à la capacité d'une substance à traverser un matériau poreux, par exemple de la vapeur d'eau dans de la poudre de café moulu (au sein d'un percolateur, justement). La modélisation mathématique d'un tel problème repose souvent sur des graphes aléatoires comme ceux que nous étudions ici : la percolation est alors équivalente à l'existence d'un chemin dans le graphe entre un sommet et un autre. Parmi les applications de la théorie de la percolation hors de la stricte physique des matériaux, on peut citer la modélisation des feux de forêt, celle de la propagation d'épidémies ou des migrations d'animaux, mais aussi, en économie, l'étude de la propagation d'une information sur un marché structuré en réseau hétérogène et aléatoire (par exemple dans le cas d'un réseau d'organisation avec asymétrie d'information ou d'un marché boursier).*

► La configuration linéaire permet de rejoindre la case d'arrivée à partir de la case de départ si et seulement si les trois cases centrales permettent le passage, ce qui est le cas avec probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
► La configuration circulaire permet de rejoindre la case d'arrivée à partir de la case de départ si et seulement si la case inférieure droite permet le passage (ce qui est le cas avec probabilité $\frac{1}{2}$) ou si les trois cases supérieures notées ? permettent le passage (ce qui est le cas avec probabilité $\frac{1}{8}$). La probabilité que ces deux événements se produisent simultanément est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, donc la probabilité que le passage soit possible est $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{9}{16}$.
► Considérons à présent la configuration rectangulaire. La case supérieure gauche n'est pas pertinente pour étudier le problème posé puisqu'elle ne permet le passage que si la case supérieure centrale le fait, et qu'il existe dans ce cas un passage diagonal direct entre la case de départ et la case supérieure centrale. Le passage est donc possible dans deux cas disjoints : si la case supérieure centrale permet le passage (ce qui est vrai avec probabilité $\frac{1}{2}$) et si la case centrale mais les deux cases inférieures

le permettent (ce qui est vrai avec probabilité $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$). Par incompatibilité, le passage est possible avec probabilité $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$.

► Étudions à présent la dernière configuration. Le passage est possible dans 4 cas, que nous décrivons comme des cas disjoints :

- Les trois cases supérieures permettent le passage : la probabilité de ce cas est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.
- Les trois cases inférieures permettent le passage, mais pas les trois cases supérieures : les branches supérieure et inférieure étant indépendantes, la probabilité de ce cas est égale à $\frac{1}{8} \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{64}$.
- Le passage n'est possible ni par les trois cases supérieures, ni par les trois cases inférieures, mais il l'est en empruntant l'arête verticale centrale (les deux sommets qu'elle relie doivent alors permettre le passage). Pour déterminer la probabilité de ce cas, il suffit de compter les configurations permettant le passage en envisageant les différents cas de figure pour les sommets « en coin » : il n'y a que deux possibilités (sommets supérieur gauche et inférieur droit, ou sommets inférieur gauche et supérieur droit), or la configuration du circuit est tirée avec équiprobabilité parmi les $2^6 = 64$ possibles, donc la probabilité du cas envisagé est $\frac{2}{64} = \frac{1}{32}$.

Ainsi, le passage entre le point de départ et le point d'arrivée est possible dans la dernière configuration avec probabilité $\frac{1}{8} + \frac{7}{64} + \frac{1}{32} = \frac{17}{64}$.

Correction de l'exercice 39.

1. Soit $n \in [\![1, 99]\!]$ un entier dont on note a le chiffre des dizaines et b celui des unités (on a donc $n = 10a + b$ avec $a, b \in [\![0, 9]\!]$). L'entier généré par le lancer des deux dés est n si et seulement si le dé désignant le chiffre des dizaines donne a et l'autre donne b, ce qui se produit avec une probabilité $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ par indépendance des deux dés, qui fournissent par ailleurs un entier de $[\![0, 9]\!]$ de façon équiprobable. Un raisonnement similaire montre que 100 est obtenu avec probabilité $\frac{1}{100}$ (celle de tomber sur un double 0), donc l'entier obtenu par le procédé décrit dans l'énoncé est bien tiré de façon équiprobable dans l'ensemble $[\![1, 100]\!]$.
2. Si le tirage était équiprobable dans $[\![0, 95]\!]$, la probabilité que le nombre des dizaines soit égal à 1 serait plus grande que la probabilité qu'il soit égal à 9 : en effet, il existe dans $[\![0, 95]\!]$ davantage de nombres dont le chiffre des dizaines vaut 1 (10, pour être exact) que de nombres dont le chiffre des dizaines vaut 9 (ces nombres n'étant que 6). Or le protocole proposé implique que le nombre des dizaines est tiré de manière équiprobable sur $[\![0, 9]\!]$; ainsi, le nombre généré n'est pas tiré de manière uniforme sur $[\![0, 95]\!]$.
3. Une méthode simple consiste à suivre le protocole indiqué dans la deuxième partie de l'énoncé, mais à relancer *les deux dés* si le nombre obtenu est strictement supérieur à 95.

   Montrons que l'entier X ainsi généré est bien tiré avec équiprobabilité dans l'ensemble $[\![1, 95]\!]$. Considérons le résultat Y du tirage des deux dés avant de décider ou non si ce résultat est conservé ; par le même raisonnement que dans la question 1, le nombre Y est tiré de façon équiprobable sur $[\![1, 100]\!]$. Ainsi, si $i \in [\![1, 95]\!]$, la probabilité que X prenne la valeur i est égale à la probabilité que Y, *sous condition d'être inférieur ou égal à* 95, prenne la valeur i, et on a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = i) &= \mathbb{P}(Y = i \mid Y \leqslant 95)\\ &= \frac{\mathbb{P}((Y = i) \cap (Y \leqslant 95))}{\mathbb{P}(Y \leqslant 95)} = \frac{\mathbb{P}(Y = i)}{\mathbb{P}(Y \leqslant 95)} = \frac{\frac{1}{100}}{\frac{95}{100}} = \frac{1}{95},\end{aligned}$$

ce qui montre bien que X est tiré de façon équiprobable dans $[\![1, 95]\!]$.

La méthode présentée ici est appelée *méthode de rejet* : on simule une variable aléatoire (c'est-à-dire une quantité aléatoire) tirée selon une certaine loi de probabilité en simulant une variable plus simple dont on rejette certaines valeurs bien choisies.

Correction de l'exercice 40. *La création de stratégies optimales pour maximiser les gains en contexte d'incertitude est un sujet de recherche très actif. La formulation générale du problème étudié ici, dit « problème de bandits », est le suivant : un joueur a affaire à un bandit manchot doté de plusieurs bras (!), associés chacun à une distribution de probabilité inconnue. Le joueur cherche à collecter de l'information sur ces distributions de probabilité pour ne pas courir de solliciter trop souvent un bras à faible rendement (ce qui l'amène à tester régulièrement les différents bras), tout en ne perdant pas trop d'argent à jouer sur les bras déjà identifiés comme peu rentables. Pour parler en termes économiques, le joueur doit effectuer un arbitrage entre collecte d'information et extraction de la rente d'information. Une application pratique du problème de bandits est l'administration de vaccins ou de médicaments : en effet, il est nécessaire de collecter de l'information sur l'efficacité d'un nouveau traitement ou d'une nouvelle posologie en effectuant des tests cliniques, tout en ne prolongeant pas trop cette phase de collecte caractérisée par une administration trop fréquente d'un traitement sous-optimal.*

1. (a) La première machine étant choisie au hasard, on a $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{2}$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$ et en se souvenant du fait que le joueur change de machine si et seulement s'il perd, on obtient

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) + \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(A_2 \mid \overline{A_1}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} = \frac{11}{20}.$$

(b) D'après la formule de Bayes, la probabilité recherchée vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2 \mid G_2) &= \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap G_2)}{\mathbb{P}(G_2)} = \frac{\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(G_2 \mid A_2)}{\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(G_2 \mid A_2) + \mathbb{P}(\overline{A_2})\mathbb{P}(G_2 \mid \overline{A_2})}\\ &= \frac{\frac{11}{20} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{11}{20} \cdot \frac{1}{5} + \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{10}} = \frac{22}{31}.\end{aligned}$$

On a appliqué la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A_2, \overline{A_2})$ pour calculer G_2.

2. Pour $k \geqslant 1$, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A_k, \overline{A_k})$ comme dans la question précédente, on obtient

$$\mathbb{P}(G_k) = \mathbb{P}(A_k) \cdot \frac{1}{5} + \mathbb{P}(\overline{A_k}) \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{10}\left(1 + \mathbb{P}(A_k)\right).$$

3. Pour $k \geqslant 1$, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A_k, \overline{A_k})$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_{k+1}) &= \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1} \mid A_k) + \mathbb{P}(\overline{A_k})\mathbb{P}(A_{k+1} \mid \overline{A_k}) \\ &= \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(G_k \mid A_k) + \mathbb{P}(\overline{A_k})\mathbb{P}(\overline{G_k} \mid \overline{A_k}) \\ &= \mathbb{P}(A_k) \cdot \frac{1}{5} + (1 - \mathbb{P}(A_k)) \cdot \frac{9}{10} = \frac{9}{10} - \frac{7}{10}\mathbb{P}(A_k).\end{aligned}$$

4. D'après la question précédente, la suite $(\mathbb{P}(A_k))_{k \geqslant 1}$ est arithmético-géométrique. On détermine son expression explicite à l'aide de la méthode standard : l'équation $\frac{9}{10} - \frac{7}{10}c = c$ admettant $c = \frac{9}{17}$ pour unique solution, donc la suite $\left(\mathbb{P}(A_k) - \frac{9}{17}\right)_{k \geqslant 1}$ est géométrique de premier terme $-\frac{1}{34}$ et de raison $-\frac{7}{10}$, si bien que pour tout $k \geqslant 1$ on a

$$\mathbb{P}(A_k) = \frac{9}{17} - \frac{1}{34}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}.$$

Grâce à la question 2, on en déduit que pour tout $k \geqslant 1$:

$$\mathbb{P}(G_k) = \frac{1}{10}(1 + \mathbb{P}(A_k)) = \frac{13}{85} - \frac{1}{340}\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1}.$$

5. Comme $\left|-\frac{7}{10}\right| < 1$, on a $\left(-\frac{7}{10}\right)^{k-1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, donc $\mathbb{P}(G_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{13}{85}$ d'après la question précédente. Ce résultat n'est pas choquant : comme $\frac{13}{85} \approx 0,15$, la probabilité asymptotique de gain du joueur est meilleure qu'en jouant systématiquement sur la moins bonne machine, et moins bonne qu'en jouant systématiquement sur la meilleure. Remarquons que la stratégie choisie ne conduisant pas le joueur à choisir davantage la « bonne » machine à mesure qu'il comprend que son rendement est supérieur : seul le fait de perdre rapidement sur la machine B conduit la machine A à être davantage utilisée.

   Il est possible d'imaginer des stratégies plus intelligentes conduisant à une probabilité de gain asymptotique plus proches du rendement maximal de $\frac{1}{5} = 20\%$. On peut par exemple choisir initialement une machine au hasard puis, à chaque étape, choisir avec probabilité $1-\varepsilon$ (avec $\varepsilon > 0$ faible) de jouer avec la machine actuellement identifiée comme étant la plus rentable (au sens où la fréquence empirique de gain associée est la plus forte), et avec probabilité ε de jouer avec l'autre (l'idée étant de tester l'autre machine rarement mais une infinité de fois pour parvenir à estimer son rendement).

Correction de l'exercice 41.

1. On introduit les événements A_n conformément à l'indication de l'énoncé, et on note A l'événement « le poisson n'est jamais attrapé », soit

$$A := \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i.$$

Les A_n forment une suite décroissante d'événements : pour tout $n \geqslant 1$, si A_{n+1} est réalisé alors A_n l'est, c'est-à-dire que $A_{n+1} \subset A_n$. La probabilité que le poisson finisse par être attrapé est donc

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

d'après le théorème de la limite monotone. Or pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\mathbb{P}(A_3 \mid A_2) \cdots \mathbb{P}(A_n \mid A_{n-1})$$

par la formule des probabilités composées (qui prend ici une forme particulière due au fait que $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante !), d'où

$$\mathbb{P}(A_n) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)\cdots(1-p_n) = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

Ainsi, la probabilité que le poisson finisse par être attrapé est

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

2. Si $p_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

en reconnaissant un produit télescopique : le poisson a donc une probabilité égale à 1 d'être attrapé.

3. Si $p_n = \frac{1}{(n+1)^2}$ pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{A}) &= 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{i^2+2i}{(i+1)^2} \\ & 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}\frac{i+2}{i+1} = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\frac{n+2}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

en reconnaissant deux produits télescopiques : le poisson a donc une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ d'être attrapé, ce qui est cohérent avec le fait que son apprentissage est plus rapide que dans la question précédente.

4. Supposons que p_n ne tende pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Comme les p_n sont des probabilités (donc des réels positifs), il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $p_n \geqslant \varepsilon$ pour une infinité de valeurs de n que l'on note $n_1, n_2, \ldots$. Les quantités $1 - p_i$ étant toutes entre 0 et 1, on a pour tout $k \geqslant 1$ l'encadrement

$$0 \leqslant \prod_{i=1}^{n_k}(1-p_i) \leqslant (1-p_{n_1})(1-p_{n_2})\cdots(1-p_{n_k}) \leqslant (1-\varepsilon)^k$$

donc

$$\lim_{k\to+\infty} \prod_{i=1}^{n_k}(1-p_i) = 0.$$

Or la suite $\left(\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\right)_{n\geqslant 1}$, décroissante et positive, admet une limite, donc c'est aussi la limite de la suite extraite $\left(\prod_{i=1}^{n_k}(1-p_i)\right)_{n_k\geqslant 1}$, soit 0 d'après ce que nous venons de voir. La probabilité que le poisson finisse par être attrapé vaut ainsi

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n}(1-p_i) = 1.$$

Ainsi, une condition nécessaire pour que le poisson ait une probabilité strictement positive de ne jamais être pêché est que $(p_n)_{n\geqslant 1}$ soit de limite nulle.

Plaçons-nous à présent dans le cas où $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme les probabilités p_n sont toutes dans l'intervalle $]0,1[$, on peut écrire

$$\prod_{i=1}^{n}(1-p_i) = \exp\left(\ln\left(\prod_{i=1}^{n}(1-p_i)\right)\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i)\right)$$

pour tout $n \geqslant 1$. D'après la question 1, on a donc

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{i=1}^{n}(1-p_i) = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i)\right).$$

Ainsi, on a $\mathbb{P}(A) = 0$ si et seulement si $\sum_{i=1}^{n}\ln(1-p_i) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, c'est-à-dire si la série de terme général négatif $\ln(1-p_i)$ diverge. Or $p_i \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0$, donc $\ln(1-p_i) \underset{i\to+\infty}{\sim} -p_i$. Par comparaison des séries à termes négatifs, on a donc les équivalences suivantes :

$$\mathbb{P}(A) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{i\geqslant 1}\ln(1-p_i) \text{ diverge} \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{i\geqslant 1} p_i \text{ diverge},$$

donc

$$\mathbb{P}(A) > 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \sum_{i\geqslant 1} p_i \text{ converge}.$$

Récapitulons :

- Si la série de terme général p_n converge, alors $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et on vient de voir que dans ce cas la convergence de la série implique que $\mathbb{P}(A) > 0$.
- Réciproquement, si $\mathbb{P}(A) > 0$, on a montré que $p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui, comme on vient de le prouver, implique la convergence de la série des p_n.

L'équivalence attendue est donc bien démontrée (sans avoir à faire d'hypothèse *a priori* sur la limite des p_n).

Il est intuitivement clair que le poisson ne peut échapper aux pêcheurs avec une probabilité strictement positive que s'il apprend « assez vite ». La question 2 a montré qu'un apprentissage correspondant au choix $p_n = \frac{1}{n+1}$ est trop lent pour cela, mais la question 3 a permis d'établir que si $p_n = \frac{1}{(n+1)^2}$, l'apprentissage est assez rapide. Ces deux exemples sont en accord avec le résultat de classification que nous venons de démontrer : l'apprentissage est assez rapide si et seulement si p_n tend suffisamment vite vers 0 pour que la série des p_n converge.

Correction de l'exercice 42. La démonstration suit les mêmes étapes que celle de la formule du crible donnant le cardinal d'une réunion d'ensembles finis (voir les exercices du chapitre « Sommes et produits ») [4].

1. Dans le cas $n = 2$, la formule est déjà connue : elle stipule que pour tous événements A_1 et A_2, on a

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2).$$

Dans le cas $n = 3$, elle stipule que pour tous événements A_1, A_2 et A_3, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)\\ - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) + \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$\mathcal{P}_n$: « Pour tous événements $A_1, \ldots, A_n$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right) \text{ ».}$$

4. Pour l'anecdote probabiliste, Poincaré est à l'origine, avec ses confrères Gaston Darboux (1842 – 1917) et Paul Appell (1855 – 1930), d'un rapport d'expertise commandé par la Cour de cassation en 1904 pour clore l'affaire Dreyfus. Ce rapport critique la manipulation des pièces à charge et l'utilisation abusive de techniques mathématiques par le criminologue Alphonse Bertillon, qui avait jugé opportun d'invoquer la formule de Bayes dans son argumentaire contre Dreyfus. Le texte commence ainsi par un petit cours introductif sur l'utilisation correcte de la formule de Bayes ! On trouvera plus de détails sur ce document, et plus généralement sur le rôle des mathématiques et des mathématiciens dans l'affaire Dreyfus, en suivant ce lien.

Initialisation :

La proposition $\mathcal{P}_1$ est simplement l'égalité $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$, et on a vu dans la question précédente que $\mathcal{P}_2$ est vraie[5].

Hérédité :

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la proposition $\mathcal{P}_n$ vraie. On se donne $n+1$ événements $A_1, \ldots, A_{n+1}$. On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cup A_{n+1}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap A_{n+1}\right) \quad \text{par } \mathcal{P}_2 \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap A_{n+1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} (A_{i_j} \cap A_{n+1})\right)\right) \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+2} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \cap A_{n+1}\right)\right).
\end{aligned}$$

Or on remarque que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la somme

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \cap A_{n+1}\right)$$

est la somme des probabilités des intersections de $k+1$ événements choisis parmi $A_1, ..., A_n, A_{n+1}$ et *dans lesquels figure* A_{n+1} (puisqu'alors n événements restent à choisir parmi $A_1, \ldots, A_n$). On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) = &\sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right) + \mathbb{P}(A_{n+1}) \\
&+ \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k+2} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < i_{k+1} = n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k+1} A_{i_j}\right)\right)
\end{aligned}$$

5. Comme dans l'exercice 33, on établit séparément la proposition $\mathcal{P}_2$ car celle-ci est utilisée dans la phase d'hérédité.

$$= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right) \right) + \mathbb{P}(A_{n+1})$$

$$+ \sum_{k=2}^{n+1} \left((-1)^{k'+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k'} = n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k'} A_{i_j} \right) \right) \quad \text{en posant } k' = k+1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k < n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right) \right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n+1} \left((-1)^{k'+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{k'} = n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k'} A_{i_j} \right) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n+1} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right) \right),$$

d'où la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion :

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

3. Plaçons-nous dans le cadre de l'exercice 17. Pour tout $i \in [\![1, 7]\!]$, on note A_i l'événement « le nain numéro i repart avec son propre chapeau », qui est de probabilité $\frac{1}{7}$. La probabilité qu'aucun nain ne reparte avec son propre chapeau est donc égale à

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{7} \overline{A_i} \right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{7} A_i \right)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{7} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant 7} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} \right) \right)$$

d'après la formule du crible. Or si $k \in [\![1, 7]\!]$ et si $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant 7$, les événements $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}$ sont réalisés simultanément si et seulement si les nains $i_1, i_2, \ldots, i_k$ repartent avec leur propre chapeau, ce qui arrive avec probabilité $\frac{(7-k)!}{7!}$ (en effet, il existe $(7-k)!$ permutations possibles des $7-k$ chapeaux restants, donc $(7-k)!$ « cas favorables » correspondant aux événements considérés). En remarquant qu'il existe $\binom{7}{k}$ façons de choisir les valeurs de $i_1, \ldots, i_k$, on en déduit que la probabilité recherchée vaut

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{7} \overline{A_i} \right) = 1 - \sum_{k=1}^{7} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant 7} \frac{(7-k)!}{7!} \right)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{7} (-1)^{k+1} \binom{7}{k} \frac{(7-k)!}{7!}$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{7} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}.$$

4. On se donne des ensembles finis $E_1, \dots, E_n$ et on considère une situation d'équiprobabilité sur l'ensemble fini $\Omega := E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n$. La formule du crible démontrée dans la question 2 s'écrit alors

$$\frac{\left|\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right|}{|\Omega|} = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} \frac{\left|\bigcap_{j=1}^{k} E_{i_j}\right|}{|\Omega|} \right),$$

d'où la formule du crible ensembliste en multipliant les deux termes de l'égalité par $|\Omega|$.

Correction de l'exercice 43.

1. L'événement I est réalisé si et seulement s'il existe un rang n pour lequel l'intersection des A_k, pour $k \geqslant n$, est réalisée, c'est-à-dire si tous les A_k sont réalisés à partir d'un certain rang. Ainsi, I est bien l'événement « tous les A_k sont réalisés à partir d'un certain rang ».

   L'événement S est réalisé si quel que soit le rang n entier que l'on se donne, on peut trouver un rang $k \geqslant n$ tel que A_k soit réalisé : c'est le cas si et seulement s'il existe une infinité de rangs k tels que A_k soit réalisé. Ainsi, S est bien l'événement « une infinité de A_k sont réalisés ».
2. Si tous les A_k sont réalisés à partir d'un certain rang, alors une infinité de A_k sont réalisés : ainsi, « I implique S », c'est-à-dire que $I \subset S$.
3. (a) Soit $n \geqslant 0$. Pour tout $N \geqslant n$, le résultat de l'exercice 33 donne

   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k).$$

   Faisons à présent tendre N vers $+\infty$: le terme de gauche tend vers $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right)$ d'après le théorème de la limite monotone (puisque les événements $\bigcup_{k=n}^{N} A_k$ forment une suite croissante et la réunion de tous ces événements vaut $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$), et le terme de droite tend vers $\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$. Ainsi, par passage à la limite on obtient

   $$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Supposons que la série des $\mathbb{P}(A_k)$ converge. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que son reste d'ordre $n - 1$ vérifie

   $$\sum_{k=n_0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \leqslant \varepsilon.$$

D'après la question précédente, on a alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n_0}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \varepsilon.$$

Or $S \subset \bigcup_{k=n_0}^{+\infty} A_k$ puisque S est l'intersection de tous les événements de la forme $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$, donc

$$\mathbb{P}(S) \leqslant \varepsilon.$$

Le réel strictement positif ε ayant été choisi de manière arbitraire, on en déduit que $\mathbb{P}(S) = 0$.

4. Plaçons-nous dans le cadre de l'exercice 32, supposons que $p \neq \frac{1}{2}$ et reprenons la notation $A_{0,k}$: « la particule est en 0 à l'étape k » pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a $\mathbb{P}(A_{0,k}) = \binom{k}{\frac{k}{2}} p^{\frac{k}{2}}(1-p)^{\frac{k}{2}}$ pour tout k pair et $\mathbb{P}(A_{0,k}) = 0$ pour tout k impair, donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_{0,k}) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} \binom{k}{\frac{k}{2}} p^{\frac{k}{2}}(1-p)^{\frac{k}{2}} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{2j}{j} p^j (1-p)^j.$$

On souhaite montrer que la probabilité qu'un nombre infini de $A_{0,k}$ soient réalisés vaut 0. D'après le lemme de Borel-Cantelli, il suffit pour cela de montrer que la série des $\mathbb{P}(A_{0,k})$ converge. Ainsi, il suffit pour conclure d'établir la convergence de la série de terme général $\binom{2j}{j} p^j(1-p)^j$. Or la formule de Stirling permet d'écrire

$$\begin{aligned}\binom{2j}{j} p^j (1-p)^j = \frac{(2j)!}{j!^2}(p(1-p))^j &\underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi}(2j)^{2j+\frac{1}{2}} e^{-2j}}{\left(\sqrt{2\pi}\, j^{j+\frac{1}{2}} e^{-j}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2^{2j+\frac{1}{2}}}{\sqrt{j}}(p(1-p))^j = \frac{1}{\sqrt{\pi j}}(4p(1-p))^j.\end{aligned}$$

En étudiant la fonction $p \mapsto 4p(1-p)$ sur $[0,1]$, on s'aperçoit du fait que $4p(1-p) \in [0,1[$ dès lors que $p \neq \frac{1}{2}$. Ainsi, en écrivant

$$\binom{2j}{j} p^j (1-p)^j \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi j}}(4p(1-p))^j \underset{j\to+\infty}{=} o\left((4p(1-p))^j\right),$$

on peut dire que $\binom{2j}{j} p^j(1-p)^j$ est négligeable devant le terme général positif d'une série géométrique convergente. La série de terme général $\binom{2j}{j} p^j(1-p)^j$ est donc elle-même convergente, ce qui clôt la preuve.

5. (a) Pour tous $n, q \in \mathbb{N}$ tels que $n \leqslant q$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{q} A_k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=n}^{q} \overline{A_k}\right) = 1 - \prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k})$$

par indépendance des $\overline{A_k}$. Ainsi, si n est fixé, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = \lim_{q\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=n}^{q} A_k\right) = \lim_{q\to+\infty}\left(1 - \prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k})\right)$$

d'après le théorème de la limite monotone (puisque les $\bigcup\limits_{k=n}^{q} A_k$, lorsque q varie, forment une suite croissante d'ensembles dont l'union vaut $\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$). Or les $\bigcup\limits_{k\geqslant n} A_k$, lorsque n varie, forment une suite décroissante d'ensembles dont l'intersection vaut S, donc une nouvelle application du théorème de la limite monotone donne

$$\mathbb{P}(S) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{q\to+\infty}\left(1 - \prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k})\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

(b) On rappelle l'inégalité (très utile !) $1 + x \leqslant e^x$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, qui se démontre par une simple étude de fonction ; en appliquant cette inégalité à $x = -\mathbb{P}(A_k)$, on en déduit que $0 \leqslant 1 - \mathbb{P}(A_k) \leqslant e^{-\mathbb{P}(A_k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si $n, q \in \mathbb{N}$ sont tels que $n \leqslant q$, on peut alors écrire

$$\prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{q} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \leqslant \prod_{k=n}^{q} e^{-\mathbb{P}(A_k)} = \exp\left(-\sum_{k=n}^{q} \mathbb{P}(A_k)\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

(c) Supposons que la série de terme général $\mathbb{P}(A_k)$ diverge. On souhaite montrer que $\mathbb{P}(S) = 1$ pour établir le deuxième volet du lemme de Borel-Cantelli.

Soit $n \geqslant 0$. D'après la question précédente, on a

$$0 \leqslant \prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k}) \leqslant \exp\left(-\sum_{k=n}^{q} \mathbb{P}(A_k)\right) \xrightarrow[q\to+\infty]{} 0$$

puisque $\sum\limits_{k=n}^{q} \mathbb{P}(A_k) \xrightarrow[q\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{q\to+\infty} \prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = 0$$

donc, d'après la question 5(a) :

$$\mathbb{P}(S) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{q\to+\infty}\left(1 - \prod_{k=n}^{q} \mathbb{P}(\overline{A_k})\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1,$$

ce qui clôt la preuve.

6. Notons N le nombre de touches de la machine à écrire dont dispose le singe et M la taille de la chaîne de caractères constituant la Comédie Humaine. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons A_k l'événement « la chaîne de caractères écrite par le singe entre le $(kM+1)$-ième et le $(k+1)M$-ième caractère est l'intégralité de la *Comédie Humaine* »[6]. On suppose que le singe tape à chaque seconde sur une touche choisie avec équiprobabilité parmi les N disponibles, indépendamment des choix précédents (en ignorant les combinaisons de touche pour des raisons de simplicité, bien que le problème puisse se résoudre de la même façon dans ce cas) : ainsi, les événements A_k sont chacun de probabilité $\left(\frac{1}{N}\right)^M = \frac{1}{N^M}$. Par construction, les événements A_k, qui portent sur des chaînes de caractères deux à deux disjointes (A_0 porte sur les caractères 1 à M, A_1 sur les caractères $M+1$ à $2M$ et ainsi de suite), sont indépendants. On a donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{N^M} = +\infty.$$

D'après le deuxième volet du lemme de Borel-Cantelli, la probabilité qu'une infinité de A_k soit réalisée est donc égale à 1, c'est-à-dire que le singe reproduira presque sûrement la chaîne de caractères constituant la *Comédie Humaine* une infinité de fois.

Remarquons que l'on aurait pu se passer du lemme de Borel-Cantelli pour démontrer que l'*un* des événements A_k se produit avec probabilité 1 : en effet, le théorème de la limite monotone donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right) &= \lim_{j\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{j} A_k\right) \\ &= \lim_{j\to+\infty}\left(1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{j} \overline{A_k}\right)\right) = \lim_{j\to+\infty}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N^M}\right)^{j+1}\right) = 1.\end{aligned}$$

6. L'exemple du singe dactylographe fut présenté pour la première fois par Émile Borel, l'un des pères fondateurs de la théorie modernes des probabilités. Toutefois, l'idée exposée ici, selon laquelle toute issue de probabilité arbitrairement faible (mais non nulle) doit nécessairement se produire si une expérience aléatoire est répétée un nombre suffisant (aléatoire) de fois, est présente dans les œuvres d'auteurs aussi divers qu'Aristote (voir la citation en introduction de cette feuille d'exercices), Blaise Pascal, Jean-Jacques Rousseau et Jonathan Swift. Ce dernier fait mention dans les *Voyages de Gulliver* (1721) d'un professeur d'académie faisant générer à ses étudiants des chaînes de lettres aléatoires en tournant des manivelles, dans le but de créer une liste complète de toutes les connaissances scientifiques. Il faut cependant tempérer l'enthousiasme du lecteur qui verrait dans cette méthode une façon d'obtenir à moindre coût des dissertations de littérature : le temps moyen nécessaire à notre singe pour obtenir une séquence de 30 caractères donnée à partir d'un clavier à 39 touches est d'environ $1,7 \cdot 10^{40}$ années, soit plus de 10^{30} fois l'estimation de la durée de vie de l'univers faite par les physiciens.
Les ordinateurs étant plus rapides que les singes pour générer des chaînes de caractères aléatoires, on peut d'ores et déjà consulter en ligne la vertigineuse Bibliothèque de Babel, inspirée d'une nouvelle de Jorge Luis Borges : à l'heure de l'écriture de ce document, elle contient toutes les pages possibles formées de 3200 caractères du clavier anglais standard, hors caractères spéciaux, pour un total de 10^{4677} livres de 410 pages environ. Sur l'une de ses étagères se trouve donc un livre détaillant la composition du petit déjeuner que vous avez pris ce matin, suivie de la réponse à la question de l'existence de Dieu ainsi que de la date et les circonstances exactes de votre décès...

7. Considérons un événement A de probabilité strictement comprise entre 0 et 1 (par exemple « la pièce tombe sur pile » dans le cadre du lancer d'une pièce équilibrée), et posons $A_k := A$ pour tout $k \geqslant 0$. Les A_k ne sont alors clairement pas indépendants ! Alors la série des $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2}$ diverge (grossièrement), mais la probabilité qu'une infinité de A_k soient réalisés est égale à la probabilité que A le soit, soit $\frac{1}{2}$, et non 1 comme dans le deuxième volet du lemme de Borel-Cantelli.

8. (a) Soit $k \geqslant 2$. L'hypothèse selon laquelle $\mathbb{P}(X_i = X_j) = 0$ si $i \neq j$ signifie que l'égalité des longévités de deux individus est un événement de probabilité nulle ; on peut donc affirmer que les individus $1, 2, \ldots, k+1$ ont des longévités deux à deux distinctes[7] avec probabilité 1. Les longévités des individus étant aléatoires mais distribuées de façon symétrique (on dira en khâgne qu'elles ont *la même loi*), chaque longévité X_i, pour $i \in [\![1, k]\!]$, a une probabilité égale à $\frac{1}{k}$ d'être la plus grande parmi $X_1, \ldots, X_k$. Ainsi, on a
$$\mathbb{P}(X_k > \max(X_1, \ldots, X_{k-1})) = \frac{1}{k}.$$
De la même façon, chaque couple (i, j) d'éléments de $[\![1, k+1]\!]$, avec $i \neq j$, a une probabilité égale de correspondre aux longévités les plus élevées, au sens où $X_i > X_j > X_\ell$ pour tout $\ell \in [\![1, k+1]\!] \setminus \{i, j\}$. Ces couples étant au nombre de $k(k+1)$, la probabilité en question vaut donc $\frac{1}{k(k+1)}$. En particulier, en prenant $i = k+1$ et $j = k$, on obtient
$$\mathbb{P}(X_{k+1} > X_k > \max(X_1, \ldots, X_{k-1})) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

(b) Pour tout $k \geqslant 1$, on pose A_k : « les individus k et $k+1$ établissent un double record de longévité ». D'après la question 8(c), on a donc
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} < +\infty$$
puisque $\frac{1}{k(k+1)} \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$ et puisque la série de Riemann de terme général positif $\frac{1}{k^2}$ converge. Le lemme de Borel-Cantelli montre donc qu'avec probabilité 1, seul un nombre fini de A_k sont réalisés, c'est-à-dire que seul un nombre fini de doubles records sont établis.

(c) Pour tout $k \geqslant 2$, on pose B_k : « l'individu k établit un record de longévité ». La longévité de l'individu k ne dépendant aucunement de l'identité de l'individu titulaire du record de longévité parmi les autres individus, les événements B_k sont mutuellement indépendants[8]. D'après la ques-

7. On laisse le lecteur établir ce fait rigoureusement en écrivant l'événement contraire comme une union d'événements du type $(X_i = X_j)$ et en majorant sa probabilité par 0 grâce à l'exercice 33, ou en utilisant la formule du crible démontrée dans l'exercice 42.

8. Le lecteur courageux et/ou dubitatif pourra démontrer cette affirmation en revenant à la définition d'événements mutuellement indépendants et en utilisant le principe d'indifférence mobilisé dans la question 9(a).

tion 8(b), on a donc

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

puisque la série harmonique diverge, donc le deuxième volet du lemme de Borel-Cantelli montre qu'avec probabilité 1, une infinité de B_k sont réalisés, c'est-à-dire qu'une infinité de nouveaux records sont établis.