5 Plus loin, plus fort

Exercice 39 (Intégration par parties multiples). Soit $n \geqslant 1$ et soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle $[a, b]$, avec $a \leqslant b$. Déterminer et démontrer par récurrence la formule donnant la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b u(x)v^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$$

obtenue par n intégrations par parties successives en dérivant n fois la fonction u et en primitivant n fois la fonction $v^{(n)}$.

Exercice 40 (Lemme de Grönwall). Soient ψ et φ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que ψ soit positive et que l'on ait

$$\forall t \geqslant 0, \quad \varphi(t) \leqslant K + \int_0^t \psi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

pour un certain $K \in \mathbb{R}$.

1. En considérant la fonction

$$f : t \longmapsto \left(K + \int_0^t \psi(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s\right)\exp\left(-\int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\right),$$

   établir l'inégalité suivante :

$$\forall t \geqslant 0, \quad \varphi(t) \leqslant K\exp\left(\int_0^t \psi(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

On considère à présent une fonction F définie sur $\mathbb{R}$ et lipschitzienne, c'est-à-dire qu'il existe $A > 0$ tel que l'on ait $|F(x) - F(y)| \leqslant A|x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. On se donne par ailleurs deux fonctions φ_1 et φ_2 définies sur $\mathbb{R}$, dérivables et telles que $\varphi_1' = F \circ \varphi_1$ et $\varphi_2' = F \circ \varphi_2$.

2. Si $x \in \mathbb{R}_+$, proposer une majoration de $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$ en fonction de A, x et $|\varphi_1(0) - \varphi_2(0)|$.
3. Montrer que si $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

Exercice 41 (Inégalité de Hölder). Soient $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, avec $a \leqslant b$. On souhaite établir l'*inégalité de Hölder*, qui stipule que

$$\int_a^b |fg| \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

1. Montrer que l'on peut se limiter au cas où $\displaystyle\int_a^b |f|^p = \int_a^b |g|^q = 1$.

On suppose désormais que $\displaystyle\int_a^b |f|^p = \int_a^b |g|^q = 1$.

2. (a) Montrer en étudiant une fonction appropriée que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on a l'inégalité suivante : $\ln\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \geqslant \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y)$.
   (b) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}_+$, on a $uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$.
   (c) Démontrer l'inégalité de Hölder.
3. Quelle forme prend l'inégalité de Hölder lorsque $p = q = \frac{1}{2}$?
4. Montrer que l'on a l'inégalité suivante, dite *de Minkowski* :

$$\left(\int_a^b |f+g|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_a^b |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

   Indication : on pourra démontrer et utiliser l'inégalité $|f+g|^p \leqslant |f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| \cdot |f+g|^{q-1}$ ainsi que l'inégalité de Hölder.

Exercice 42 (Une décomposition en éléments simples).

1. Déterminer une fonction polynomiale du second degré Q telle que $1 + u^3 = (1+u)Q(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, puis trois réels $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait

$$\frac{1}{1+u^3} = \frac{\alpha}{1+u} + \frac{\beta + \gamma u}{Q(u)}$$

   pour tout $u \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + t^2}$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Exercice 43 (Combinaison de manipulations sur une intégrale). À l'aide du changement de variable $x = \sin(t)$ et d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^1 \arctan\left(\sqrt{1-x^2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\mathrm{d}t}{1+\cos^2(t)} - \frac{\pi}{2},$$

puis calculer cette quantité à l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$.

Exercice 44 (Un changement de variable utile). L'objet de cet exercice est d'étudier le changement de variable $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ et ses applications.

1. Pour tout $t \in \left]-\pi, \pi\right[$, on pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Montrer qu'on a alors

$$\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin(t) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}t = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

2. *Applications.*
   (a) Calculer une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{2+\sin(x)}$ sur $]-\pi,\pi[$, puis une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\lambda\cos(t)}$ en fonction du paramètre $\lambda \in]-1,1] \setminus \{0\}$.
   Indication : on distinguera deux cas selon que $|\lambda| < 1$ ou $\lambda = 1$.

Exercice 45 (Sommes de Riemann (cas $\mathcal{C}^1$)). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$, avec $a \leqslant b$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la quantité $u_n := \displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$, appelée *$n$-ème somme de Riemann associée à f sur $[a,b]$.*

1. Montrer que f est *lipschitzienne* sur $[a,b]$, au sens où
$$\exists \alpha > 0 \, : \, \forall x,y \in [a,b], \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \alpha|x-y|.$$
2. Donner l'interprétation graphique de la quantité u_n pour tout $n \geqslant 1$.
   Indication : on pourra avec profit relire l'exemple 3 du cours sur le calcul d'une intégrale par quadrature.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a
$$\left|\int_{a+(k-1)\frac{(b-a)}{n}}^{a+k\frac{(b-a)}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \alpha\frac{(b-a)^2}{n^2}.$$
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - u_n\right| \leqslant \alpha\frac{(b-a)^2}{n},$$
   puis que
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$
5. Application : déterminer la limite de la quantité $v_n := \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 46 (Uniforme continuité et sommes de Riemann). Cet exercice s'inscrit dans la continuité de l'exercice précédent.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a \leqslant b$. On admet le théorème de Bolzano-Weierstrass (démontré dans l'exercice 53 du chapitre 7) selon lequel toute suite d'éléments de $[a, b]$ admet une sous-suite convergente.

1. Montrer par l'absurde à l'aide du théorème de Bolzano-Weierstrass que f est *uniformément continue sur* $[a, b]$, au sens où :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \,:\, \forall x, y \in [a, b], \quad |x - y| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

   Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Heine*.

2. En déduire que l'on a toujours

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

   avec les notations de l'exercice précédent, cette fois sous la simple hypothèse de continuité de f.

Le résultat démontré dans cet exercice montre que l'approximation de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment par des méthodes de quadrature est toujours valide (même lorsque la fonction n'est pas monotone, cas dans lequel on ne peut généraliser tel quel le raisonnement adopté dans l'exemple 3 du cours).

Il justifie l'interprétation de la notation $\mathrm{d}x$ *donnée dans la section 3.2.2 du cours, que l'on peut trouver illustrée dans cette vidéo de la chaîne 3Blue1Brown.*

Bernhard Riemann, entre analyse et géométrie

L'un des premiers mathématiciens à proposer une définition rigoureuse de la notion d'intégrale fut l'Allemand Bernhard Riemann (1826 – 1866). À rebours de l'approche adoptée dans le présent chapitre, qui consiste à construire l'intégrale à partir de l'idée informelle d'*aire* d'une surface pour ensuite montrer (dans l'exemple 3 et dans les exercices 29, 45 et 46) qu'elle est la limite des sommes de Riemann associées, Riemann *définit* l'intégrale d'une fonction sur un segment comme la limite des sommes de Riemann correspondantes, s'affranchissant ainsi de considérations techniques sur la notion d'aire de surfaces biscornues ou aux frontières floues. D'autres constructions de l'intégrale furent proposées à la suite de celle de Riemann ; l'une des plus fructueuses fut celle élaborée au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle par Henri Lebesgue (1875 – 1941) dans le cadre de la théorie de la mesure, qui ouvrit notamment la voie à la théorie moderne des probabilités.

Malgré la brièveté d'une carrière scientifique interrompue par la tuberculose, les apports de Riemann aux mathématiques ne se limitent pas à cette définition de l'intégrale. Dans sa thèse de doctorat dirigée par Gauss et soutenue en 1851, Riemann dota de fondations solides la théorie des fonctions d'une variable complexe. Premier mathématicien à travailler dans des espaces géométriques de grande dimension pour décrire la réalité physique, il introduit dans sa thèse d'habilitation de 1854 la théorie qui portera le nom de *géométrie riemannienne* et servira de cadre mathématique à la théorie de la relativité d'Albert Einstein.

Un héritage particulièrement célèbre des travaux de Riemann est la *fonction zêta*, définie comme le prolongement à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ de la fonction

$$\begin{array}{rcl} \zeta :]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{array}$$

que nous croiserons dans le chapitre sur les séries. Une identité fondamentale démontrée par Euler établit un lien entre cette fonction et la répartition des nombres premiers. L'*hypothèse de Riemann*, formulée en 1859, stipule que les points d'annulation de la fonction ζ qui ne sont pas des entiers pairs négatifs sont tous des nombres complexes de partie réelle égale à $\frac{1}{2}$. Statuer sur la véracité de cette hypothèse aurait des conséquences profondes sur la connaissance de la répartition des nombres premiers, et figure dans la liste des sept « problèmes du prix du millénaire » de l'institut Clay (voir le Zoom sur les conjectures dans le chapitre 0).
On trouvera plus d'informations au sujet de l'hypothèse de Riemann dans cet article très accessible du journal *La Recherche* ou dans cette vidéo de la chaîne *Science étonnnante*.