Exemple (Écriture en binaire d'un entier). L'application

$$f : \begin{array}{ccc} \{0,1\}^5 & \longrightarrow & [\![0,31]\!] \\ (a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) & \longmapsto & a_4 2^4 + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 \end{array}$$

On a par exemple l'égalité $f(1,0,0,1,0) = 2^4 + 2^2 = 18$.

qui est bien définie puisque si $(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) \in \{0,1\}^5$ alors la quantité $a_4 2^4 + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0$ est un entier positif inférieur à $2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 = 31$.

Montrons que f est injective en considérant deux éléments (a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) et (b_0,b_1,b_2,b_3,b_4) de $\{0,1\}^5$ de même image par f. On a alors

$$a_4 2^4 + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 = b_4 2^4 + b_3 2^3 + b_2 2^2 + b_1 2^1 + b_0 2^0,$$

soit

$$16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 16b_4 + 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0.$$

Ces deux entiers étant simultanément pairs ou impairs, on a $a_0 = b_0$. En retranchant cette quantité aux deux termes de l'égalité ci-dessus et en divisant par 2, on obtient alors

$$8a_4 + 4a_3 + 2a_2 + a_1 = 8b_4 + 4b_3 + 2b_2 + b_1,$$

ce qui donne $a_1 = b_1$ par le même argument de parité, et ainsi de suite. On obtient finalement $(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4) = (b_0,b_1,b_2,b_3,b_4)$, ce qui montre que f est injective.

Or on a $\left|\{0,1\}^5\right| = |\{0,1\}|^5 = 32$ et $|[\![0,31]\!]| = 32$: les ensembles de départ et d'arrivée de f sont donc de même cardinal. Ainsi, f est bijective.

On a donc démontré que pour tout $k \in [\![0,31]\!]$, il existe une unique décomposition de la forme

$$k = a_4 2^4 + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0$$

avec $a_0,a_1,a_2,a_3,a_4 \in \{0,1\}$. L'écriture $a_4a_3a_2a_1a_0$ ainsi obtenue s'appelle la *décomposition de k en base* 2, ou *écriture binaire de k*.

Notre écriture décimale *usuelle n'est rien d'autre qu'une décomposition en base* 10 *!*

Le même raisonnement montre que tout entier naturel admet une écriture en base 2 (en utilisant davantage de chiffres si besoin) : par exemple, l'entier 23 admet 10111 pour écriture binaire, tandis que l'entier $259 = 2^8 + 2^1 + 2^0$ s'écrit sous la forme 100000011.