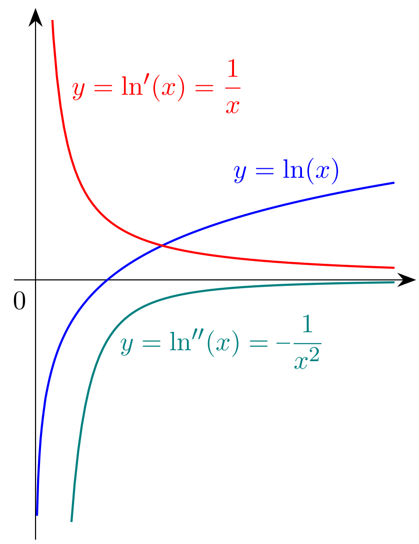
1.2 Interprétation graphique

Section hors-programme

Les notions de convexité et de concavité ne figurent pas au programme de B/L. Toutefois, elles ont été abordées en Terminale et permettent de donner une interprétation graphique de la dérivée seconde ainsi que de mieux comprendre les résultats sur les dérivées d'ordre supérieur présentés dans la section suivante et qui, eux, sont au programme. Nous prenons donc la liberté de faire une présentation (partielle et lacunaire) de ces notions non exigibles.



La dérivée seconde de f représente la croissance du rythme de croissance de f, c'est-à-dire l'*accélération* de la croissance de f. Ainsi, si f'' prend des valeurs négatives sur I, la croissance de la quantité $f(x)$ est de plus en plus lente à mesure que x parcourt I de gauche à droite. La figure ci-contre illustre ce fait lorsque $f = \ln$ et $I = \mathbb{R}_+^*$.

Notons que le fait que f'' soit à valeurs négatives sur I ne donne pas directement d'information sur le sens de variation de f sur I : la quantité $f(x)$ peut fort bien croître (de plus en plus lentement), décroître (de plus en plus vite) ou croître puis décroître lorsque x parcourt I.

Il est possible de lire graphiquement le signe de la dérivée seconde d'une fonction sur sa courbe représentative :

Proposition A (Dérivée seconde et position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à ses tangentes)**.** Supposons que I soit un intervalle ouvert et que f soit deux fois dérivable sur I. Alors :

- La dérivée seconde f'' est positive sur I si et seulement la courbe $\mathcal{C}_f$ se situe *au-dessus de ses tangentes*, au sens où

$$\forall a \in I, \forall x \in I, \quad f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x - a).$$

  On dit alors que la fonction f est *convexe*.

- La dérivée seconde f'' est négative sur I si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ se situe *en-dessous de ses tangentes*, au sens où

$$\forall a \in I, \forall x \in I, \quad f(x) \leqslant f(a) + f'(a)(x-a).$$

On dit alors que la fonction f est *concave*.

La « véritable » définition de la convexité et de la concavité est en fait un peu plus générale ; on la présente dans l'exercice 40 accompagnant ce chapitre.

Démonstration de la proposition A — Démontrons le premier point. Supposons que f'' soit positive sur I et fixons $a \in I$. La fonction g définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad g(x) := f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$$

est dérivable comme différence de fonctions dérivables, et g' est donnée par

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = f'(x) - f'(a).$$

Ainsi, g' est dérivable puisque f' l'est, et on a

$$\forall x \in I, \quad g''(x) = f''(x),$$

soit $g'' = f''$, donc $g'' \geqslant 0$. Par ailleurs, on a

$$g(a) = f(a) - f(a) - f'(a)(a-a) = 0 \quad \text{et} \quad g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0.$$

On obtient donc le tableau de signes et de variations ci-dessous, dans lequel les signes et les variations sont à comprendre au sens large (c'est-à-dire au sens de la positivité et de la monotonie mais pas celui de la *stricte* positivité et de la *stricte* monotonie) :

x	a
$g''(x) = f''(x)$	$+$
g'	$\nearrow$ 0 $\nearrow$
g	$\searrow$ 0 $\nearrow$

D'après ce tableau, g est positive, c'est-à-dire que

$$\forall x \in I, \quad f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \geqslant 0,$$

donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est bien au-dessus de sa tangente en a. Comme a est quelconque dans I, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes, ce qu'il fallait démontrer.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}_f$ soit au-dessus de toutes ses tangentes. On veut montrer que $f'' \geqslant 0$; pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f''(a) < 0$. Introduisons à nouveau la fonction g définie sur I par

$$\forall x \in I, \quad g(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a),$$

qui vérifie comme plus haut $g(a) = g'(a) = 0$ et $g'' = f''$. Comme le nombre dérivé $g''(a) = f''(a)$ est la limite (strictement négative) du taux d'accroissement

$$\frac{g'(x) - g'(a)}{x-a} = \frac{g'(x)}{x-a}$$

lorsque x tend vers a, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}, \quad \frac{g'(x)}{x-a} < 0,$$

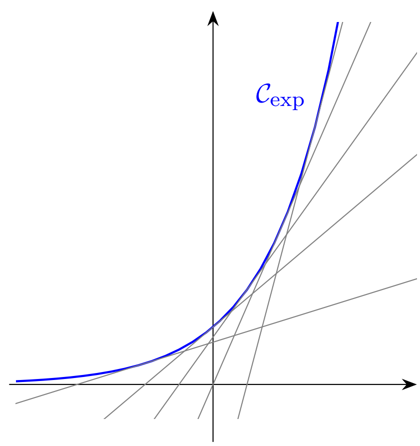
c'est-à-dire que $g'(x)$ est de signe opposé à celui de $x-a$ sur le voisinage épointé $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \setminus \{a\}$ de a. On obtient donc le tableau de signes et de variations suivant, où les signes et les sens de variation sont cette fois à comprendre au sens strict :

x	$a-\varepsilon$		a		$a+\varepsilon$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Or l'hypothèse selon laquelle $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en a signifie que $g \geqslant 0$, ce qui contredit le tableau ci-dessus. On a donc bien $f'' \geqslant 0$, ce qu'il fallait démontrer.

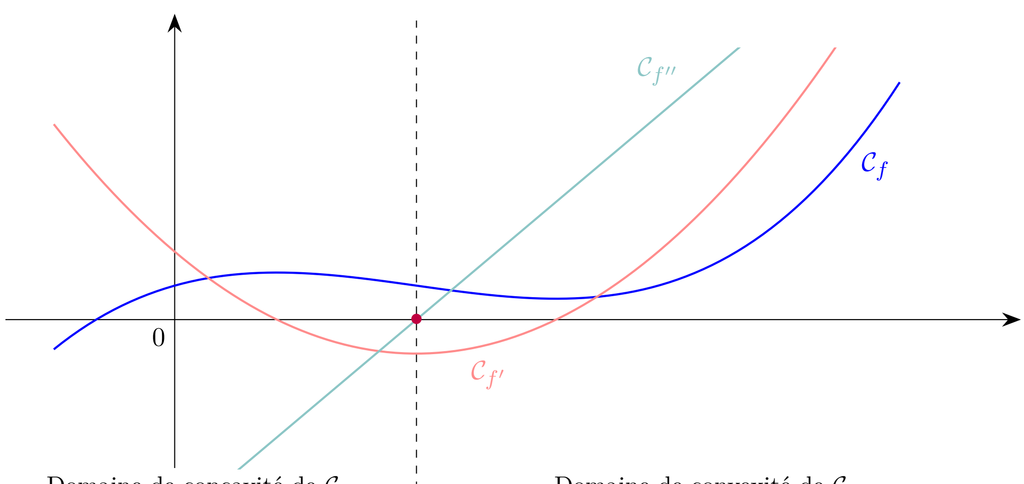
Le deuxième point de la proposition A se démontre de la même façon en considérant la fonction $h := -f$ puisque $h'' = -f''$ est positive si et seulement si f'' est négative, et puisque la courbe représentative de h est au-dessus de toutes ses tangentes si et seulement celle de f est au-dessous de toutes ses tangentes. □

La fonction exp est égale à sa propre dérivée seconde, qui est strictement positive. Elle est donc convexe, c'est-à-dire que sa courbe représentative se situe au-dessus de ses tangentes (voir ci-contre).



Il arrive fréquemment que la dérivée seconde de f ne soit pas de signe constant sur I. Dans ce cas, la proposition A ne peut pas être appliquée directement pour décrire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de ses tangentes sur I tout entier. On peut toutefois restreindre f à des intervalles sur lesquels f'' est de signe constant pour décrire l'allure de $\mathcal{C}_f$ de façon localisée : on parle alors informellement de « domaine de convexité » et de « domaine de concavité » de la courbe.

Exemple. La figure suivante représente la courbe d'une fonction f présentant une allure concave puis convexe.



On appelle *point d'inflexion* de la courbe $\mathcal{C}_f$ un point de changement de convexité de f :

Définition B (Point d'inflexion)**.** Si f est deux fois dérivable sur I, on appelle *point d'inflexion du graphe de f* tout point $a \in I$ tel que $f''(a) = 0$ et tel que f'' change strictement de signe en a, c'est-à-dire tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant

$$\forall x \in [a-\varepsilon, a[, \forall y \in]a, a+\varepsilon], \quad f''(x) < 0 < f''(y) \tag{1}$$

ou

$$\forall x \in [a-\varepsilon, a[, \forall y \in]a, a+\varepsilon], \quad f''(x) > 0 > f''(y). \tag{2}$$

Le verbe infléchir *signifie « changer de direction, courber ». L'inflexion d'une dynamique croissante et convexe est la première étape vers un éventuel régime de décroissance ; utiliser ce terme convenablement permet de décrire un changement quantitatif* de second ordre *sans tomber dans le genre d'approximation qui a fait dire à un homme politique, en 2013, qu'il allait « inverser la courbe du chômage »...*

Exemple. Dans l'exemple précédent, le point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ est le point d'annulation de f'' indiqué sur l'axe des abscisses.

Un raisonnement analogue à celui mené dans la démonstration de la proposition A et laissé au lecteur permet de montrer qu'un point d'inflexion est un point auquel la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente :

Proposition C (Allure d'une courbe au voisinage d'un point d'inflexion)**.** Supposons que f admette un point d'inflexion en $a \in I$ et définissons la fonction $g : x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$. Alors :

- Si la relation (1) est vérifiée pour un $\varepsilon > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ croise sa tangente en a « par le bas » :

$$\forall x \in [a-\varepsilon, a[, \forall y \in]a, a+\varepsilon], \quad g(x) < 0 < g(y).$$

- Si la relation (2) est vérifiée pour un $\varepsilon > 0$, alors $\mathcal{C}_f$ croise sa tangente en a « par le haut » :

$$\forall x \in [a-\varepsilon, a[, \forall y \in]a, a+\varepsilon], \quad g(x) > 0 > g(y).$$

Dire que la courbe $\mathcal{C}_f$ croise sa tangente en a peut sembler surprenant dans la mesure où cette tangente est par définition la droite « collée » à $\mathcal{C}_f$ en a. Cela n'empêche pourtant pas le croisement d'avoir lieu mais impose simplement que celui-ci s'opère *à angle nul*, comme on le voit sur le graphique ci-dessous.

Exemple D (Fonction gaussienne)**.** On se propose d'étudier l'allure de la courbe de la fonction $f : x \mapsto e^{-x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

La fonction présentée ici porte le nom de *gaussienne* (en l'honneur de Carl Friedrich Gauss). Elle joue un rôle crucial en probabilités, comme nous le verrons dans le cours de deuxième année.

Il est tout d'abord clair que f est strictement positive et que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Par ailleurs, f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et on a

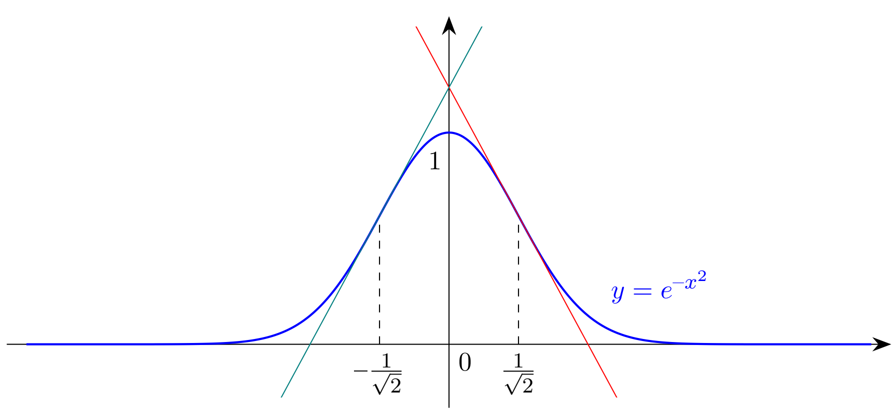
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2xe^{-x^2} \quad \text{et} \quad f''(x) = (-2+4x^2)e^{-x^2}.$$

Comme $e^{-x^2} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut établir le tableau de signes et de variations suivant :

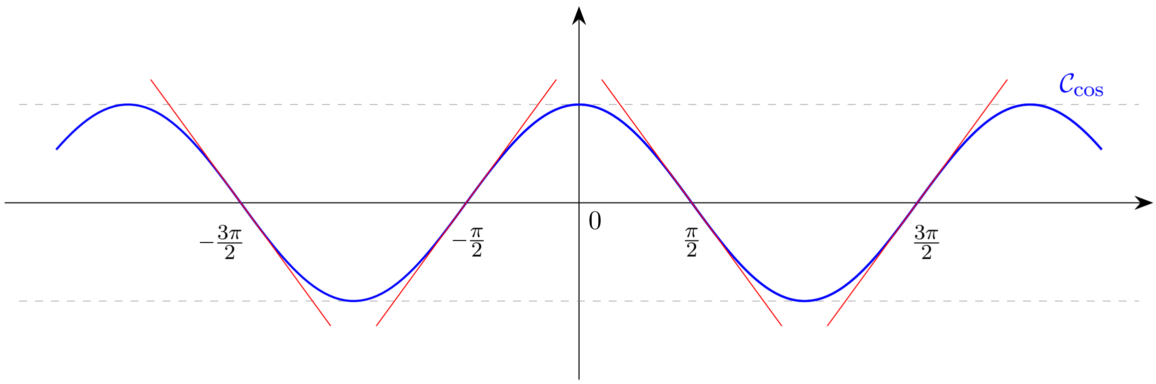
On vérifie bien sûr mentalement que tous les résultats obtenus sont en conformité avec le fait que f est paire !

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Par ailleurs, l'expression $f''(x)$ est toujours du signe de $-2+4x^2$ puisque $e^{-x^2} > 0$, donc $f''(x) > 0$ si $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $f''(x) < 0$ si $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sont des points d'inflexion de f. On obtient donc la courbe « en cloche » suivante :



Exemple. Les points d'inflexion de la courbe représentative de cos sont les points en lesquels $\cos'' = -\cos$ change de signe, c'est-à-dire tous les points de $\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$, qui délimitent une succession de domaines de convexité et de concavité de la fonction.



On vérifie bien graphiquement qu'en chacun de ces points, la courbe $\mathcal{C}_{\cos}$ traverse sa tangente.