Exemple. Déterminons la limite de $\dfrac{\sqrt{3+e^x}-2}{\tan(x)}$ lorsque $x \to 0$: pour lever la forme indéterminée, on écrit

$$\begin{aligned}\sqrt{3+e^x}-2 &= 2\left(\sqrt{\frac{3+e^x}{4}}-1\right)\\ &= 2\left(\sqrt{1+\frac{e^x-1}{4}}-1\right)\\ &\underset{x\to 0}{\sim} 2\cdot\frac{e^x-1}{8} \qquad \text{car} \qquad \frac{e^x-1}{4} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\\ &= \frac{e^x-1}{4} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{4}\end{aligned}$$

On se ramène tout d'abord à une forme $\sqrt{y}-1$ avec $y \to 1$ (ici, $y = \frac{3}{4}+\frac{e^x}{4}$), que l'on écrit ensuite sous la forme $\sqrt{1+u}-1$ avec $u \to 0$ pour pouvoir utiliser l'équivalent $\sqrt{1+u}-1 \sim \frac{u}{2}$. La factorisation initiale par 2 résulte de notre volonté de faire apparaître cette forme.

puis

$$\frac{\sqrt{3+e^x}-2}{\tan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{4} = \frac{1}{4},$$

d'où l'on déduit que

$$\frac{\sqrt{3+e^x}-2}{\tan(x)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

Exemple. On retrouve la *règle de L'Hôpital* démontrée (par des méthodes d'équivalents qui ne disent pas leur nom !) dans l'exercice 25 du chapitre 10 : si f et g sont définies au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$, dérivables en a et telles que $f(a) = g(a) = 0$ ainsi que $f'(a) \neq 0$ et $g'(a) \neq 0$, on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{f'(a)(x-a)}{g'(a)(x-a)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

et donc

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

La règle démontrée en exercice traite aussi le cas où $f'(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$. On peut en retrouver le résultat en écrivant les $DL_1(a)$ de f et g :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{o(x-a)}{g'(a)(x-a)+o(x-a)}\\ &\underset{x\to a}{\sim} \frac{o(x-a)}{g'(a)(x-a)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$