Polynômes

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 8. On trouvera ci-dessous le détail des divisions réalisées dans la correction figurant dans le manuel.

(*ii*) Division de $X^7 - 9X + 2$ par $X - 1$:

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
X^7 & & & & & & -9X & +2 & X-1 \\ \cline{9-9}
-X^7 & +X^6 & & & & & & & X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X-8 \\ \cline{1-8}
 & X^6 & & & & & -9X & +2 & \\
 & -X^6 & +X^5 & & & & & & \\ \cline{2-8}
 & & X^5 & & & & -9X & +2 & \\
 & & -X^5 & +X^4 & & & & & \\ \cline{3-8}
 & & & X^4 & & & -9X & +2 & \\
 & & & -X^4 & +X^3 & & & & \\ \cline{4-8}
 & & & & X^3 & & -9X & +2 & \\
 & & & & -X^3 & +X^2 & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & X^2 & -9X & +2 & \\
 & & & & & -X^2 & +X & & \\ \cline{6-8}
 & & & & & & -8X & +2 & \\
 & & & & & & +8X & -8 & \\ \cline{7-8}
 & & & & & & & -6 &
\end{array}$$

(*iii*) Division de $X^3 + 2X^2 - X - 2$ par $X^2 + 1$:

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & +2X^2 & -X & -2 & X^2+1 \\ \cline{5-5}
-X^3 & & -X & & X+2 \\ \cline{1-4}
 & 2X^2 & -2X & -2 & \\
 & -2X^2 & & -2 & \\ \cline{2-4}
 & & -2X & -4 &
\end{array}$$

(*iv*) Division de $X^4 + 7X^3 + 2X^2 - 7X - 3$ par $X^2 + 7X + 3$:

$$\begin{array}{rrrrr|l}
X^4 & +7X^3 & +2X^2 & -7X & -3 & X^2+7X+3 \\ \cline{6-6}
-X^4 & -7X^3 & -3X^2 & & & X^2-1 \\ \cline{1-5}
 & & -X^2 & -7X & -3 & \\
 & & +X^2 & +7X & +3 & \\ \cline{3-5}
 & & & & 0 &
\end{array}$$

(v) Division de $6X^7-15X^6+21X^5+4X^3-8X^2+11X+2$ par $2X^2-5X+7$:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|l}
6X^7 & -15X^6 & +21X^5 & +4X^3 & -8X^2 & +11X & +2 & 2X^2-5X+7 \\ \cline{8-8}
-6X^7 & +15X^6 & -21X^5 & & & & & 3X^5+2X+1 \\ \cline{1-7}
 & & & 4X^3 & -8X^2 & +11X & +2 & \\
 & & & -4X^3 & +10X^2 & -14X & & \\ \cline{4-7}
 & & & & 2X^2 & -3X & +2 & \\
 & & & & -2X^2 & +5X & -7 & \\ \cline{5-7}
 & & & & & 2X & -5 &
\end{array}
$$

Correction de l'exercice 12.

(i) On a

$$\deg\left(\prod_{k=1}^{n}(X-k)^k\right)=\sum_{k=1}^{n}\deg((X-k)^k)=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

(ii) On a $\deg(P(X+5))=\deg(P)\cdot\deg(X+5)=n\cdot 1=n$.

(iii) En calculant comme dans le point précédent les $\deg(P(X+k))=n$, on trouve

$$\begin{aligned}\deg(P(X)P(X+1)^2P(X+2))&=\deg(P(X))+2\deg(P(X+1))+\deg(P(X+2))\\&=n+2n+n=4n.\end{aligned}$$

(iv) Écrivons $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ et $a_n\neq 0$. On remarque que le terme de degré n de $P(X+1)-P(X)$, qui provient du développement de

$$a_n(X+1)^n-a_nX^n=a_nX^n+\underbrace{\cdots}_{\substack{\text{termes de}\\ \text{plus bas degré}}}-a_nX^n,$$

est nul. Pour la même raison, $a_{n-1}(X+1)^{n-1}-a_{n-1}X^{n-1}$ n'apporte pas de terme de degré $n-1$, donc le terme de degré $n-1$ de $P(X+1)-P(X)$ provient uniquement du développement de

$$a_n(X+1)^n-a_nX^n=na_nX^{n-1}+\underbrace{\cdots}_{\substack{\text{termes de}\\ \text{plus bas degré}}},$$

donc vaut na_nX^{n-1}.

Comme $na_n\neq 0$, on a $\deg(P(X+1)-P(X))=n-1$.

(v) En écrivant $P(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ avec $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ et $a_n\neq 0$, on peut écrire

$$X^2P'(X)-(X+1)P(X)=\sum_{k=0}^{n}(ka_kX^{k+1}-(X+1)a_kX^k).$$

Ainsi, le terme de degré $n+1$ de $X^2P'(X)-(X+1)P(X)$ est

$$na_nX^{n+1}-a_nX^{n+1}=(n-1)a_nX^{n+1}.$$

Comme $(n-1)a_n\neq 0$, on a $\deg(X^2P'(X)-(X+1)P(X))=n+1$.

Correction de l'exercice 13. Dans toute la suite, on se donne $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

(i) L'équation fonctionnelle donnée se réécrit sous la forme suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{n} 3a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (-k + k(k-1)) a_k x^k.$$

En identifiant les coefficients des deux fonctions polynomiales qu'elle relie, on obtient qu'elle équivaut à :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad 3a_k = k(k-2)a_k,$$

soit à :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = 0 \text{ ou } k(k-2) = 3.$$

Or l'équation $k(k-2) = 3$ admet $k = 3$ pour unique solution entière et positive, donc l'équation fonctionnelle est vérifiée si et seulement si les coefficients a_k, pour $k \neq 3$, sont tous nuls. Ainsi, les fonctions polynomiales vérifiant cette équation sont exactement les fonctions de la forme $P : x \mapsto a_3 x^3$, avec $a_3 \in \mathbb{R}$.

(ii) L'équation fonctionnelle proposée ne peut être vérifiée que si $\deg(P) = 10$ (sans quoi $\deg(x \mapsto P(x) - x^{10})$ ne pourrait être égal à $\deg(P')$). Supposons que cela soit le cas, et donc que $n = 10$ et $a_{10} \neq 0$. L'équation se réécrit alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^{9} (k+1) a_{k+1} x^k = \sum_{k=0}^{9} a_k x^k + (a_{10} - 1) x^{10}$$

soit, par identification des coefficients, à :

$$\forall k \in \llbracket 0, 9 \rrbracket, \quad (k+1) a_{k+1} = a_k \quad \text{et} \quad a_{10} - 1 = 0,$$

soit encore :

$$\forall k \in \llbracket 0, 10 \rrbracket, \quad a_k = \frac{10!}{k!}.$$

Ainsi, l'unique fonction polynomiale vérifiant l'équation fonctionnelle donnée est

$$P : x \longmapsto \sum_{k=0}^{10} \frac{10!}{k!} x^k.$$

(iii) Une fonction P vérifiant l'équation proposée est nécessairement telle que $\deg(P) \geqslant 1$; on a alors $\deg(PP') = 2\deg(P) - 1$, donc $2\deg(P) - 1 = 5$, soit $\deg(P) = 3$. Supposons donc à présent que $n = 3$. On a alors

$$P(x)P'(x) = (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)(3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui permet de réécrire l'équation fonctionnelle sous la forme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0)(3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1) = x^5$$

et donc, en développant puis en identifiant les coefficients :

$$3a_3^2 = 1 \quad \text{et} \quad 5a_3a_2 = 4a_3a_1 + 2a_2^2 = 3a_2a_1 + 3a_3a_0 = a_1^2 + 2a_2a_0 = a_0a_1 = 0,$$

ce qui donne $a_3 = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, puis $a_2 = a_1 = a_0 = 0$, si bien que les deux seules fonctions polynomiales vérifiant l'équation fonctionnelle proposée sont

$$P : x \longmapsto -\frac{1}{\sqrt{3}}x^3 \quad \text{et} \quad P : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{3}}x^3.$$

On pouvait aussi remarquer PP' est la dérivée de $\frac{P^2}{2}$, et donc que l'équation fonctionnelle étudiée revient à dire que P^2 admet pour dérivée $x \mapsto 2x^5$. Ainsi, P vérifie cette équation si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $P^2(x) = \frac{1}{3}x^6 + c$. Mais dans ce cas, comme $P^2(0) \geqslant 0$, on aurait $c \geqslant 0$, et si l'on avait $c > 0$ alors on aurait $P^2(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, si bien que P^2 (et donc P) n'admettrait pas de racine sur $\mathbb{R}$, en contradiction avec le fait que $\deg(P) = 3$: ainsi, on aurait nécessairement $c = 0$. En conséquence, P est solution de l'équation étudiée si et suelement si on a $P^2(x) = \frac{1}{3}x^6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui redonne bien les deux solutions présentées plus haut.

(iv) L'examen du terme de plus haut degré de l'expression $P(x+1) - P(x)$ montre que celle-ci est de degré $\deg(P) - 1$ si $\deg(P) \geqslant 1$ (et $-\infty$ si $\deg(P) \leqslant 0$). Ainsi, les solutions de l'équation recherchée sont nécessairement de degré 4. Supposons à présent que $n = 4$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} P(x+1) - P(x) &= a_4(x+1)^4 + a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0 \\ &\qquad - a_4x^4 - a_3x^3 - a_2x^2 - a_1 - a_0 \\ &= 4a_4x^3 + (6a_4 + 3a_3)x^2 + (4a_4 + 3a_3 + 2a_2)x + a_4 + a_3 + a_2 + a_1, \end{aligned}$$

donc en identifiant les coefficients, on voit que P vérifie l'équation fonctionnelle proposée si et seulement si

$$4a_4 = 1 \quad \text{et} \quad 6a_4 + 3a_3 = 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 0,$$

soit, en résolvant de proche en proche :

$$a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = -\frac{1}{2}, \quad a_2 = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad a_1 = 0.$$

Ainsi, P est solution de l'équation proposée si et seulement s'il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$P : x \longmapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + a_0.$$

(v) On va montrer qu'il n'existe aucune solution de degré supérieur ou égal à 2 à l'équation proposée.

Supposons que $n \geqslant 2$ et que $a_n \neq 0$. Le terme de degré $n-1$ de l'expression $P(x+1) - P(x)$ est na_nx^{n-1} (qui provient du développement de la quantité $a_n(x+1)^n - a_nx^n$) et celui de $P'(x)$ est na_nx^{n-1}. Le terme de degré $n-2$

de $P(x+1)-P(x)$, quant à lui, provient du développement des expressions $a_n(x+1)^n - a_n x^n$ et $a_{n-1}(x+1)^{n-1} - a_{n-1}x^{n-1}$ et vaut

$$\left(a_n\binom{n}{n-2} + a_{n-1}\binom{n-1}{n-2}\right)x^{n-2} = \left(\frac{n(n-1)}{2}a_n + (n-1)a_{n-1}\right)x^{n-2},$$

tandis que celui de $P'(x)$ est $a_{n-1}(n-1)x^{n-2}$. Ainsi, si l'équation fonctionnelle étudiée est vérifiée par P, l'identification des coefficients d'indice $n-2$ donne

$$\frac{n(n-1)}{2}a_n + (n-1)a_{n-1} = a_{n-1}(n-1), \quad \text{soit} \quad \frac{n(n-1)}{2}a_n = 0,$$

ce qui est contraire à notre hypothèse selon laquelle $n \geqslant 2$ et $a_n \neq 0$. Ainsi, P ne peut satisfaire l'équation proposée si $n \geqslant 2$.

Supposons à présent que P soit une fonction affine, de la forme $P : x \mapsto a_1 x + a_0$ avec $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$P(x+1) - P(x) = a_1(x+1) + a_0 - a_1 x - a_0 = a_1$$

et

$$P'(x) = a_1,$$

donc P vérifie l'équation fontionnelle étudiée. Ainsi, les solutions de l'équation fonctionnelle sont exactement les fonctions affines (donc les éléments de $\mathbb{R}_1[x]$).

(*vi*) Supposons que P soit de degré $n \geqslant 0$ (et donc que $a_n \neq 0$). Le terme de plus haut degré de l'expression $P(x)P''(x)$ est $a_n^2 n(n-1)x^{2n-2}$ et celui de l'expression $P'(x)^2$ est $a_n^2 n^2 x^{2n-2}$, donc si P vérifie l'équation fonctionnelle proposée on a $a_n^2 n(n-1) = a_n^2 n^2$ par identification des coefficients, soit $n(n-1) = n^2$, soit encore $n = 0$ puisque $a_n \neq 0$. Ainsi, si $P \neq 0$ est solution de cette équation, elle est nécessairement constante [1]. Comme il est réciproquement clair que toutes les fonctions polynomiales constantes (y compris la fonction nulle) sont solutions de l'équation, on obtient que l'ensemble des solutions de l'équation étudiée est $\mathbb{R}_0[x]$.

Correction de l'exercice 14. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

1. Supposons que P soit à coefficients entiers, c'est-à-dire que tous les a_k soient entiers. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, la valeur

$$P^{(k)}(0) = a_k k!$$

est un produit d'entiers, donc un entier.

1. On pouvait aussi écrire que $PP'' = P'^2$ équivaut à $PP'' - P'^2$, soit, si $P \neq 0$, à $\left(\frac{P'}{P}\right)' = 0$. Ainsi, si $P \neq 0$, on a $PP'' = P'^2$ si et seulement si $\frac{P'}{P}$ est constante entre les racines de P ; or pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les polynômes P' et λP ne peuvent coïncider sur un intervalle non vide que si $P' = 0$ (puisque l'on a dans ce cas $P' = \lambda P$, ce qui n'est pas possible pour des raisons de degré si $P' \neq 0$). Les solutions non nulles de l'équation étudiée sont donc constantes.

La réciproque de cette propriété est fausse : dire que tous les $P^{(k)}(0)$ sont entiers signifie que tous les $a_k k!$ sont entiers, ce qui n'implique pas nécessairement que les a_k le sont. Par exemple, la fonction $P : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ vérifie $P(0) = P'(0) = 0$, $P''(0) = 1$ et $P^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \geqslant 3$, mais son coefficient dominant n'est pas entier.

2. La même preuve que dans le point précédent montre que si les a_k sont rationnels, alors les $P^{(k)}(0) = a_k k!$ le sont aussi. Réciproquement, si les $P^{(k)}(0) = a_k k!$ sont rationnels, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ le coefficient

$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}$$

s'écrit comme quotient de rationnels donc l'est aussi.

3. Si les a_k sont rationnels, alors pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on a

$$P^{(k)}(1) = \sum_{i=0}^{n-k} a_i i(i-1)\cdots(i-k+1) = \sum_{i=0}^{n-k} a_i \frac{i!}{(i-k)!} \in \mathbb{Q},$$

et pour tout $k > n$ on a $P^{(k)}(1) = 0 \in \mathbb{Q}$, donc tous les $P^{(k)}(1)$ sont rationnels.

Réciproquement, si tous les $P^{(k)}(1)$ sont rationnels, la formule de Taylor en 1 et la formule du binôme donnent :

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i (-1)^{i-k} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\sum_{k=i}^{n} \left(\frac{P^{(k)}(1)}{k!} \binom{k}{i} (-1)^{i-k} \right)}_{\in \mathbb{Q}} x^i, \end{aligned}$$

ce qui montre que tous les coefficients de P sont rationnels.

Correction de l'exercice 15. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. D'après la formule de Taylor en 1, si $\Phi(P) = (a, b, c, d)$ alors on a

$$P(X) = \frac{d}{6}(X-1)^3 + \frac{c}{2}(X-1)^2 + b(X-1) + a,$$

et réciproquement, si P est défini par cette expression on vérifie très facilement que $P(1) = a$, $P'(1) = b$, $P''(1) = c$ et $P^{(3)}(1) = d$, soit $\Phi(P) = (a, b, c, d)$. Ainsi, on a

$$\Phi(P) = (a, b, c, d) \iff P(X) = \frac{d}{6}(X-1)^3 + \frac{c}{2}(X-1)^2 + b(X-1) + a,$$

ce qui montre que Φ est bijective et que sa réciproque est

$$\Phi^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ (a, b, c, d) & \longmapsto & \frac{d}{6}(X-1)^3 + \frac{c}{2}(X-1)^2 + b(X-1) + a. \end{array}$$

Correction de l'exercice 16. D'après la formule de Taylor, l'unique fonction de $\mathbb{R}_3[x]$ vérifiant les conditions attendues est

$$Q : x \longmapsto 10 \cdot \frac{(x-2)^2}{2} + 5 \cdot (x-2) + 2 = 5x^2 - 15x + 12.$$

Soit à présent $P \in \mathbb{R}[x]$. La fonction P vérifie les conditions données si et seulement si les dérivées d'ordre 0, 1, 2 et 3 de P et Q coïncident en 2, c'est-à-dire si $(P-Q)(2) = (P-Q)'(2) = (P-Q)''(2) = (P-Q)^{(3)}(2) = 0$. Or cette condition équivaut au fait que l'expression $(P-Q)(x)$ est factorisable par $(x-2)^3$ (soit parce que $P-Q$ est nulle, soit parce qu'elle admet 2 pour racine d'ordre au moins 3). Ainsi, P vérifie la condition attendue si et seulement s'il existe $A \in \mathbb{R}[x]$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $P(x) - Q(x) = A(x)(x-2)^3$, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = 5x^2 - 15x + 12 + A(x)(x-2)^3.$$

Correction de l'exercice 17. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la proposition suivante, que nous noterons $\mathcal{P}_n$: pour tous réels $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts et pour toute fonction $P \in \mathbb{R}[x]$ admettant $x_1, \ldots, x_n$ pour racines d'ordres respectifs $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{N}$, il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ telle que Q n'admette aucun des x_k pour racine et que l'on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} (x - x_k)^{m_k}\right) Q(x).$$

La proposition $\mathcal{P}_1$ résulte de la définition de l'ordre d'une racine : si $P \in \mathbb{R}[x]$ et si $x_1 \in \mathbb{R}$ est racine d'ordre $m_1 \in \mathbb{N}$ de P, alors il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $Q(x_1) \neq 0$ et $P(x) = (x - x_1)^{m_1} Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Fixons à présent $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Soient à présent $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ des réels distincts et $P \in \mathbb{R}[x]$ une fonction admettant $x_1, \ldots, x_{n+1}$ pour racines d'ordres respectifs $m_1, \ldots, m_{n+1} \in \mathbb{N}$. Alors $x_1, \ldots, x_n$ sont des racines distinctes de P, d'ordres respectives $m_1, \ldots, m_n$, donc il existe d'après $\mathcal{P}_n$ une fonction polynomiale $Q_0 \in \mathbb{R}[x]$ n'admettant aucun des $x_1, \ldots, x_n$ pour racine et telle que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} (x - x_k)^{m_k}\right) Q_0(x).$$

On va à présent montrer que x_{n+1} est racine d'ordre m_{n+1} de Q_0.
Pour ce faire, on écrit que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad Q_0(x) = P(x)R(x)$$

avec $R(x) := \displaystyle\prod_{k=1}^{n} (x - x_k)^{-m_k}$. La fonction R étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition (en tant que produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$), elle l'est aussi en x_{n+1}. D'après la formule de Leibniz, on a donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Q_0^{(k)}(x_{n+1}) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} P^{(i)}(x_{n+1}) R^{(k-i)}(x_{n+1}).$$

Or x_{n+1} est racine de P d'ordre m_{n+1}, donc pour tout $i \in [\![0, m_{n+1}-1]\!]$ on a $P^{(i)}(x_{n+1}) = 0$, et $P^{(m_{n+1})}(x_{n+1}) \neq 0$. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, m_{n+1}-1]\!]$, la formule de Leibniz donne $Q_0^{(k)}(x_{n+1}) = 0$, et elle donne aussi

$$Q_0^{(m_{n+1})}(x_{n+1}) = \binom{m_{n+1}}{m_{n+1}} P^{(m_{n+1})}(x_{n+1}) R^{(0)}(x_{n+1}) = P^{(m_{n+1})}(x_{n+1}) R(x_{n+1}) \neq 0$$

puisque R ne s'annule pas sur son ensemble de définition. Ainsi, x_{n+1} est bien racine d'ordre m_{n+1} de Q_0.

La proposition $\mathcal{P}_1$ assure alors qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ telle que $Q(x_{n+1}) \neq 0$ et telle que l'on ait $Q_0(x) = (x - x_{n+1})^{m_{n+1}} Q(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Comme $x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas racines de Q_0, elles ne sont pas non plus racines de Q. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} (x - x_k)^{m_k} \right) (x - x_{n+1})^{m_{n+1}} Q(x)$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = \left(\prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k)^{m_k} \right) Q(x),$$

avec Q ne s'annulant en aucun des réels $x_1, \ldots, x_{n+1}$, ce qui établit la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 18. On pourra consulter avec profit le théorème F du point de cours de première année sur les dérivées d'ordre $n \geqslant 2$ et l'allure locale des courbes, qui traite plus généralement du cas des fonctions n fois dérivables (et non seulement des fonctions polynomiales).

1. On se restreint au cas où P est de degré au moins 2, sinon $\mathcal{C}_P$ est confondue avec toutes ses tangentes et la condition donnée n'est pas vérifiée. On suppose donc à présent que $\deg(P) \geqslant 2$, si bien que P'' n'est pas nulle.

   Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $k \in \mathbb{N}$ l'ordre (éventuellement nul) de a en tant que racine de P''. La fonction $f : x \mapsto P(x) - P(a) - P'(a)(x-a)$, dont le signe au voisinage de a donne la position locale de $\mathcal{C}_P$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse a, est polynomiale et vérifie $f(a) = f'(a) = 0$ ainsi que $f'' = P''$. Elle admet donc a pour racine d'ordre $k+2$. En écrivant

   $$f(x) = (x-a)^{k+2} Q(x)$$

   pour une certaine fonction $Q \in \mathbb{R}[x]$ vérifiant $Q(a) \neq 0$ comme dans la démonstration de la proposition 30 du cours (ce qui donne $f^{(k+2)}(a) = (k+2)!Q(a)$ par la formule de Leibniz), on obtient donc l'équivalence :

   $$\begin{aligned} &\mathcal{C}_P \text{ est localement strictement au-dessus de sa tangente au point d'abscisse } a \\ \iff \quad & f(x) > 0 \text{ au voisinage épointé de } a \\ \iff \quad & k+2 \text{ est pair et } Q(a) > 0 \\ \iff \quad & k \text{ est pair et } f^{(k+2)}(a) > 0 \\ \iff \quad & k \text{ est pair et } P^{(k+2)}(a) > 0, \end{aligned}$$

   ce qu'il fallait démontrer.

2. La même preuve que dans le point précédent montre que a est racine de P'' d'ordre k pair avec $P^{(k+2)}(a) < 0$ si et seulement si $\mathcal{C}_P$ est localement *en-dessous* de sa tangente au point d'abscisse a.
3. Si a est racine de P'' d'ordre impair k, alors en écrivant $f(x) = (x-a)^{k+2}Q(x)$ au voisinage de a comme précédemment avec $Q(a) \neq 0$, on remarque que $f(x)$ change de signe en a, c'est-à-dire que $\mathcal{C}_P$ croise sa tangente au point d'abscisse a.
4. La courbe de P admet au point d'abscisse 1 une tangente d'équation

$$y = P(1) + P'(1)(x-1) = -3 - 2(x-1),$$

et on a $P''(1) = P^{(3)}(1) = 0$ et $P^{(4)}(1) = 24 > 0$. Ainsi, 1 est racine de P'' d'ordre pair (égal à 2), et la question 1 montre que $\mathcal{C}_P$ est localement strictement au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.

Correction de l'exercice 19.

1. Soit $A \in \mathbb{R}_0[X]$. Alors A est constant et on peut écrire $A = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   Supposons dans un premier temps que B est de degré 0 (donc que $k = 0$). L'unique polynôme R de degré strictement inférieur à k est donc 0. Si $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ vérifie $\deg(R) < k$ et $A = BQ + R$, on a donc $A = BQ$, soit $a = bQ$ puisque A et B sont constants, donc $Q = \frac{a}{b}$, ce qui établit l'unicité de (Q, R) sous réserve de son existence. Réciproquement, on peut bien écrire $A = b \cdot \frac{a}{b} + 0$, donc l'existence de la décomposition est établie.

   Supposons à présent que $\deg(B) > 0$ (donc que $k > 0$). Si $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ est un couple vérifiant $\deg(R) < k$ et $A = BQ + R$, soit $a = BQ + R$, alors $BQ = a - R$, en tant que différence de polynômes de degré strictement inférieur à k, l'est aussi. Or $\deg(BQ) = \deg(B) + \deg(Q) = k + \deg(Q)$, donc on a nécessairement $\deg(Q) < 0$, soit $Q = 0$. On a donc $A = 0 \cdot B + R$, soit $R = a$, d'où l'unicité de (Q, R) sous réserve de son existence. Réciproquement, on a bien $A = B \cdot 0 + a$, donc le couple $(0, a)$ satisfait la condition attendue.

   La proposition $\mathcal{P}_0$ est ainsi établie.
2. (a) Comme $\deg(B) = k$, on a $\deg\left(\frac{a_{n+1}}{b}X^{n+1-k}B\right) \leqslant n+1$, et le coefficient d'indice $n+1$ de $\frac{a_{n+1}}{b}X^{n+1-k}B$ est $\frac{a_{n+1}}{b}X^{n+1-k}bX^k = a_{n+1}X^{n+1}$. Ainsi $\widetilde{A}$ est la différence de deux polynômes de degré au plus $n+1$ donc est lui-même de degré au plus $n+1$, et son terme d'indice $n+1$ vaut $a_{n+1}X^{n+1} - a_{n+1}X^{n+1} = 0$ donc $\widetilde{A}$ est bien degré au plus n.

   (b) Comme $\widetilde{A} \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut lui appliquer la proposition $\mathcal{P}_n$ supposée vraie : il existe donc $Q_0, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\widetilde{A} = BQ_0 + R$, avec $\deg(R) < k$. On a alors

$$A = \frac{a_{n+1}}{b}X^{n+1-k}B + \widetilde{A} = \left(\frac{a_{n+1}}{b}X^{n+1-k} + Q_0\right)B + R,$$

   d'où $A = BQ + R$ avec $Q := \frac{a_{n+1}}{b}X^{n+1-k} + Q_0$.

(c) Supposons que $(Q_1, R_1) \in \mathbb{R}[X]^2$ sont tels que $\deg(R_1) < k$ et tels $A = Q_1 B + R_1$. On a alors $QB + R = Q_1 B + R_1$; on peut donc écrire comme dans l'indication que $(Q_1 - Q)B = R_1 - R$. Or

$$\deg((Q_1 - Q)B) = \deg(Q_1 - Q) + \deg(B)$$

et

$$\deg(R_1 - R) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R)) < \deg(B),$$

d'où $\deg(Q_1 - Q) = -\infty$, et donc $Q_1 - Q = 0$, soit $Q_1 = Q$. La relation $(Q_1 - Q)B = R_1 - R$ donne alors $R_1 - R = 0$, soit $R_1 = R$.

(d) On a montré dans les deux questions précédentes qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $\deg(R) < k$ et $A = BQ + R$. Comme A est considéré quelconque dans $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, cela établit la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.

D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui établit le théorème de division euclidienne à démontrer.

Correction de l'exercice 20. Le théorème de division euclidienne sur les entiers s'énonce de la façon suivante :

$$\forall a \in \mathbb{N}, \forall b \in \mathbb{N}^*, \exists!(q, r) \in \mathbb{N} \times [\![0, b-1]\!] \, : \, a = bq + r.$$

Correction de l'exercice 21.

1. D'après le théorème de division euclidienne, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $R_n \in \mathbb{R}_1[X]$ tels que $X^n = Q(X)(X-1)^2 + R_n(X)$. Comme $R_n \in \mathbb{R}_1[X]$, on peut écrire $R_n(X) = a_n X + b_n$ pour certains réels a_n et b_n. On a alors

$$X^n = Q(X)(X-1)^2 + a_n X + b_n. \tag{1}$$

En évaluant (1) en 1, on obtient $1 = a_n + b_n$. Si $n \geqslant 1$, en dérivant (1), on trouve

$$nX^{n-1} = Q'(X)(X-1)^2 + 2Q(X)(X-1) + a_n.$$

En évaluant cette nouvelle relation en 1, on obtient alors $n = a_n$. Cette relation est aussi vraie si $n = 0$, puisque la dérivation de (1) donne alors

$$0 = Q'(X)(X-1)^2 + 2Q(X)(X-1) + a_0,$$

d'où, par évaluation en 1, l'égalité $0 = a_0$.

Des relations $a_n + b_n = 1$ et $a_n = n$, on déduit alors que $b_n = 1 - n$, et donc que le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ est $R_n(X) = nX + 1 - n$.

2. En écrivant $X^3 - 2X^2 - 4X + 8$ sous la forme $(X-2)^2(X+2)$, on remarque que $X^3 - 2X^2 - 4X + 8$ admet 2 pour racine double et -2 pour racine simple. D'après le théorème de division euclidienne, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ et $R_n \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $X^n = Q_n(X)(X^3 - 2X^2 - 4X + 8) + R_n(X)$. Comme $R_n \in \mathbb{R}_2[X]$, on peut écrire $R_n(X) = a_n X^2 + b_n X + c_n$ pour certains réels a_n, b_n et c_n. On a alors

$$X^n = Q_n(X)(X-2)^2(X+2) + a_n X^2 + b_n X + c_n. \tag{2}$$

En évaluant (2) en 2, on trouve $2^n = 4a_n + 2b_n + c_n$. En l'évaluant en -2, on trouve $(-2)^n = 4a_n - 2b_n + c_n$. Enfin, en la dérivant puis en l'évaluant en 2, on trouve $n2^{n-1} = 4a_n + b_n$. En soustrayant les deux premières égalités, on trouve $b_n = \frac{2^n-(-2)^n}{4} = 2^{n-2} - (-2)^{n-2}$, et la troisième égalité donne alors $a_n = \frac{n2^{n-1}-b_n}{4} = (2n-1)2^{n-4} + (-2)^{n-4}$. La première égalité donne enfin $c_n = (3-2n)2^{n-2} + (-2)^{n-2}$. Ainsi, le reste recherché est

$$R_n(X) = \left((2n-1)2^{n-4} + (-2)^{n-4}\right) X^2 + \left(2^{n-2} - (-2)^{n-2}\right) X + (3-2n)2^{n-2} + (-2)^{n-2}.$$

La méthode étudiée dans cet exercice s'applique à la détermination du reste de la division euclidienne de X^n par n'importe quel polynôme admettant des racines multiples. Ainsi, en évaluant une relation de division euclidienne en les racines du polynôme par lequel on divise, éventuellement après avoir dérivé la relation autant de fois que l'ordre des racines considérées, on obtient un système d'équations permettant de déterminer le reste de la division sans avoir à effectuer intégralement cette dernière – ce qui, comme on l'a vu dans le cours, s'avère par exemple très utile pour calculer les puissances successives d'une matrice dont on connaît un polynôme annulateur.

Correction de l'exercice 22. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. On écrit

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad \text{et} \quad Q(X) = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$. On va montrer que le coefficient d'ordre k de $(PQ)'$ est le même que celui de $P'Q + PQ'$, ce qui permettra de conclure.

Le coefficient d'ordre k de PQ est par définition $c_k := \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$, donc celui de $(PQ)'$ est

$$(k+1)c_{k+1} = (k+1)\sum_{i=0}^{k+1} a_i b_{k+1-i}.$$

Par ailleurs, le coefficient de degré k de $P'Q$ est par définition

$$e_k := \sum_{i=0}^{k} (i+1)a_{i+1}b_{k-i}$$

et celui de PQ' est par définition

$$f_k := \sum_{i=0}^{k} a_i(k-i+1)b_{k-i+1},$$

donc celui de $P'Q + PQ'$ est

$$\begin{aligned} e_k + f_k &= \sum_{i=0}^{k} (i+1)a_{i+1}b_{k-i} + \sum_{i=0}^{k} a_i(k-i+1)b_{k-i+1} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} j a_j b_{k-(j-1)} + \sum_{i=0}^{k} a_i(k-i+1)b_{k-i+1} \quad \text{en posant } j = i+1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k+1} i a_i b_{k-(i-1)} + \sum_{i=0}^{k} a_i (k-i+1) b_{k-i+1} \quad \text{car l'indice de sommation est muet}\\
&= \sum_{i=0}^{k+1} i a_i b_{k-i+1} + \sum_{i=0}^{k+1} a_i (k-i+1) b_{k-i+1} \quad \text{en rajoutant des termes nuls}\\
&= \sum_{i=0}^{k+1} (i+k-i+1) a_i b_{k-i+1}\\
&= (k+1) \sum_{i=0}^{k+1} a_i b_{k+1-i},
\end{aligned}
$$

soit exactement $(k+1)c_{k+1}$, c'est-à-dire le coefficient d'ordre k de $(PQ)'$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 23. D'après le théorème de factorisation, on peut écrire

$$X^3 + aX^2 + bX + c = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3),$$

soit

$$X^3 + aX^2 + bX + c = X^3 - (z_1 + z_2 + z_3)X^2 + (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)X - z_1 z_2 z_3.$$

1. En considérant le terme constant de la relation ci-dessus, on obtient $z_1 z_2 z_3 = -c$. En considérant son coefficient d'indice 2, on trouve $z_1 + z_2 + z_3 = -a$. Enfin, en considérant son coefficient d'indice 1, on obtient $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 = b$, d'où

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) = a^2 - 2b.$$

2. Supposons que $c \neq 0$, ce qui implique que les trois racines z_1, z_2 et z_3 sont non nulles. On a alors

$$-\frac{b}{c} = \frac{z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{z_1 z_2 z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$$

et

$$
\begin{aligned}
b^2 &= (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3)^2\\
&= z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_3^2 + 2(z_1^2 z_2 z_3 + z_1 z_2^2 z_3 + z_1 z_2 z_3^2)\\
&= z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_3^2 + 2 z_1 z_2 z_3 (z_1 + z_2 + z_3)\\
&= z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_3^2 + 2ac,
\end{aligned}
$$

donc

$$\frac{b^2 - 2ac}{c^2} = \frac{z_1^2 z_2^2 + z_1^2 z_3^2 + z_2^2 z_3^2}{z_1^2 z_2^2 z_3^2} = \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2}.$$

Correction de l'exercice 24.

(i) Le polynôme X^2+X+1 a pour discriminant $-3<0$, donc il admet deux racines complexes conjuguées données par $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, soit $e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ et $e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Il s'agit des deux racines troisièmes de l'unité différentes de 1, ce que l'on peut retrouver en écrivant que $z^2+z+1=\frac{1-z^3}{1-z}$ si $z\neq 1$. Ainsi, X^2+X+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, et sa forme factorisée dans $\mathbb{C}[X]$ est

$$X^2+X+1=\left(X+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

(ii) Le polynôme considéré n'admet pas de racine réelle, mais on peut le factoriser en produit de deux polynômes de degré 2 irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Pour cela on commence par le factoriser entièrement dans $\mathbb{C}[X]$. Si $z\in\mathbb{C}$, alors $z^4+2=0$ si et seulement si z est une racine quatrième de -2, c'est-à-dire si $z=\sqrt[4]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)}$ pour un $k\in[\![0,3]\!]$. Ainsi, on peut écrire

$$X^4+2=\left(X-\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X-\sqrt[4]{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X-\sqrt[4]{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X-\sqrt[4]{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right),$$

ce qui est la forme entièrement factorisée de X^4+2 dans $\mathbb{C}[X]$, d'où, en écrivant que

$$\left(X-\sqrt[4]{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X-\sqrt[4]{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)=X^2-\sqrt[4]{2}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}+e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)+\sqrt[4]{2}^2=X^2-2^{\frac{3}{4}}X+\sqrt{2}$$

et

$$\left(X-\sqrt[4]{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X-\sqrt[4]{2}e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)=X^2-\sqrt[4]{2}\left(e^{\frac{3i\pi}{4}}+e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)+\sqrt[4]{2}^2=X^2+2^{\frac{3}{4}}X+\sqrt{2},$$

la factorisation suivante à l'aide de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^4+2=(X^2-2^{\frac{3}{4}}X+\sqrt{2})(X^2+2^{\frac{3}{4}}X+\sqrt{2}).$$

(iii) On peut écrire $X^3+X^2+X=X(X^2+X+1)$, ce qui donne une factorisation complète dans $\mathbb{R}[X]$ puisque X^2+X+1 n'admet pas de racine réelle. Pour obtenir la factorisation du polynôme en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, on peut utiliser le résultat de la question (i), qui donne

$$X^3+X^2+X=X(X^2+X+1)=X\left(X+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(X+\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

(iv) Pour tout $z\neq 1$, on a

$$z^4+z^3+z^2+z+1=\frac{1-z^5}{1-z},$$

donc les racines du polynôme $X^4+X^3+X^2+X+1$ sont les racines cinquièmes de l'unité différentes de 1. Ainsi, on peut écrire la factorisation suivante dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^4+X^3+X^2+X+1=\left(X-e^{\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-\frac{2i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{\frac{4i\pi}{5}}\right)\left(X-e^{-\frac{4i\pi}{5}}\right),$$

qui donne, en rassemblant deux par deux les facteurs correspondant à des racines conjuguées et en utilisant la première formule d'Euler, la factorisation suivante dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^4+X^3+X^2+X+1 = \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X+1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X+1\right).$$

Les valeurs de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ peuvent être obtenues à partir de celle de $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ déterminée dans l'exercice 11 du chapitre de trigonométrie[2] du tome de première année, ce qui permet d'écrire :

$$X^4+X^3+X^2+X+1 = \left(X^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}X+1\right)\left(X^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}X+1\right).$$

(v) Une méthode simple pour factoriser ce polynôme est de le réécrire comme différence de deux carrés en remarquant que sa forme est proche de $(X^2+1)^2 = X^4+2X^2+1$: on a alors

$$X^4+X^2+1 = (X^2+1)^2 - X^2 = (X^2+1+X)(X^2+1-X).$$

On pouvait aussi appliquer la méthode désormais classique de décomposition dans $\mathbb{C}$. Si $z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm1\}$, alors

$$z^4+z^2+1 = 1+z^2+(z^2)^2 = \frac{1-(z^2)^3}{1-z^2} = \frac{1-z^6}{1-z^2}.$$

Ainsi, les racines sixièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$, à l'exception de 1 et -1, sont solution de l'équation $z^4+z^2+1=0$, c'est-à-dire racines complexes du polynôme X^4+X^2+1. On dispose donc de la factorisation complète (dans $\mathbb{C}$) du polynôme X^4+X^2+1 :

$$X^4+X^2+1 = \left(X-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right).$$

On obtient alors la factorisation recherchée (dans $\mathbb{R}$) en regroupant les termes associés à des racines conjuguées et en utilisant la première formule d'Euler :

$$\begin{aligned} X^4+X^2+1 &= \left(X-e^{\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)\left(X-e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right) \\ &= \left(X^2-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)X+1\right)\left(X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)X+e^{\frac{2i\pi}{3}}e^{-\frac{2i\pi}{3}}\right) \\ &= (X^2-X+1)(X^2+X+1). \end{aligned}$$

(vi) Le polynôme proposé n'admet pas de racine évidente réelle. En revanche, il admet i pour racine complexe évidente. Comme il est à coefficients réels, il admet aussi $-i$ pour racine. Il est donc factorisable par $(X-i)(X+i) = X^2+1$, et on trouve (mentalement ou en posant une division euclidienne) :

$$2X^4+X^3+3X^2+X+1 = (X^2+1)(2X^2+X+1),$$

2. L'idée de la preuve est de montrer que $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est racine du polynôme $16X^5-20X^3+5X$, puis de déterminer sa valeur en se ramenant à une équation bicarrée.

ce qui est la factorisation du polynôme proposé en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. À présent, on peut factoriser $2X^2+X+1$ en étudiant son discriminant, ce qui donne

$$2X^2+X+1 = 2\left(X+\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)\left(X+\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right),$$

d'où enfin :

$$2X^4+X^3+3X^2+X+1 = 2(X-i)(X+i)\left(X+\frac{1+i\sqrt{7}}{4}\right)\left(X+\frac{1-i\sqrt{7}}{4}\right),$$

ce qui est la factorisation complète du polynôme étudié dans $\mathbb{C}[X]$.

Correction de l'exercice 25.

1. Posons

$$P(X) = (X+1)^a = \sum_{k=0}^{a}\binom{a}{k}X^k \quad \text{et} \quad Q(X) = (X+1)^b = \sum_{k=0}^{b}\binom{b}{k}X^k.$$

On a alors

$$PQ(X) = (X+1)^{a+b} = \sum_{k=0}^{a+b}\binom{a+b}{k}X^k,$$

donc si $k \in [\![0, a+b]\!]$, le coefficient d'indice k de PQ est $\binom{a+b}{k}$. Or on a aussi

$$PQ(X) = \sum_{k=0}^{a+b} c_k X^k,$$

avec pour tout $k \in [\![0, a+b]\!]$:

$$c_k = \sum_{i=0}^{k}\binom{a}{i}\binom{b}{k-i}.$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![0, a+b]\!]$, le coefficient d'indice k de PQ est à la fois $\binom{a+b}{k}$ et c_k, ce qui établit l'identité de Vandermonde.

2. Soit $k \in [\![0, a+b]\!]$. Considérons une classe de $a+b$ élèves dont a portent des lunettes et b n'en portent pas. Le nombre de groupes de k élèves que l'on peut créer au sein de cette classe est égal à $\binom{a+b}{k}$. Or on peut classer ces groupes en différentes catégories :

   - Ceux qui ne contiennent aucun élève à lunettes et k élèves sans lunettes, ce qui correspond à $\binom{a}{0}\binom{b}{k}$ groupes ;
   - Ceux formés d'un.e élève à lunettes et de $k-1$ élèves sans lunettes, ce qui correspond à $\binom{a}{1}\binom{b}{k-1}$ groupes ;
   - Ceux formés de deux élèves à lunettes et de $k-2$ élèves sans lunettes, ce qui correspond à $\binom{a}{2}\binom{b}{k-2}$ groupes ;
   - ...

- Ceux qui contiennent k élèves à lunettes et aucun élève sans, ce qui correspond à $\binom{a}{k} \times \binom{b}{0}$ groupes.

Les cas que nous venons d'énumérer étant disjoints (c'est-à-dire incompatibles), on a bien

$$\binom{a+b}{k} = \binom{a}{0}\binom{b}{k} + \binom{a}{1}\binom{b}{k-1} + \cdots + \binom{a}{k}\binom{b}{0},$$

soit

$$\binom{a+b}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i}\binom{b}{k-i},$$

d'où la formule de Vandermonde.

Correction de l'exercice 26.

1. La fonction polynomiale $p : x \mapsto x^2$ est positive et non constante puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $x^2 \geqslant 0$ et puisque $p(0) = 0 \neq 1 = p(1)$.
2. On sait qu'une fonction polynomiale p de degré impair tend vers $-\infty$ en $-\infty$ (si son coefficient dominant est strictement positif) ou en $+\infty$ (si son coefficient dominant est strictement négatif). Dans tous les cas, elle ne peut être positive. À présent, si $p \in \mathbb{R}[x]$ est une fonction polynomiale non nulle de degré pair et de coefficient dominant $a_{2n} \neq 0$, alors $p(x)$ admet la même limite que $a_{2n}x^{2n}$ en $+\infty$, c'est-à-dire $+\infty$ si $a_{2n} > 0$ et $-\infty$ si $a_{2n} < 0$; ainsi, si p est positive, on a nécessairement $a_{2n} > 0$.

   On a donc bien montré qu'une fonction polynomiale positive non nulle est de degré pair et de coefficient dominant strictement positif.
3. (a) Comme $a_2 > 0$, la fonction p est positive si et seulement si elle n'admet pas deux racines réelles distinctes, c'est-à-dire si son discriminant est négatif, soit $a_1^2 - 4a_2a_0 \leqslant 0$.

   (b) Supposons que $\Delta : a_1^2 - 4a_2a_0$ est négatif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la forme canonique de l'expression $p(x)$ est la suivante :

   $$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \frac{4a_2a_0 - a_1^2}{4a_2}$$

   soit

   $$a_2x^2 + a_1x + a_0 = \left(\sqrt{a_2}x + \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a_2},$$

   d'où $p(x) = p_1(x)^2 + p_0(x)^2$ en posant $p_1(x) = \sqrt{a_2}x + \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}$ et $p_0(x) = \sqrt{\frac{-\Delta}{4a_2}}$.

Remarquons avant d'aller plus loin que le résultat admis signifie simplement que p admet un minimum sur $\mathbb{R}$. Pour le démontrer, il suffit de remarquer qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \notin [-M, M]$ on ait $p(x) \geqslant p(0) + 1$ puisque $p(x)$ admet $+\infty$ pour limite en $\pm\infty$, puis que p, en tant que fonction continue sur le segment $[-M, M]$, y admet un minimum d'après le théorème des bornes atteintes. Comme les valeurs prises par p hors de $[-M, M]$ sont supérieures à $p(0) + 1$, le minimum de p sur $[-M, M]$ est son minimum sur $\mathbb{R}$, d'où le résultat.

4. Si l'égalité attendue est vérifiée, on a $p(x_0) = \alpha^2$, il est raisonnable de poser $\alpha := \sqrt{p(x_0)}$ (on rappelle que p est positive, ce qui implique que $p(x_0) \geqslant 0$). La fonction $r : x \mapsto p(x) - \alpha^2$ est une fonction polynomiale positive s'annulant en x_0 ; en d'autres termes, x_0 est une racine de r, qui est nécessairement d'ordre pair puisque r ne change pas de signe en x_0. Notons cet ordre sous la forme $2k$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$) ; il existe alors $q \in \mathbb{R}[x]$ telle que $q(x_0) \neq 0$ et telle que l'on ait

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad r(x) = (x - x_0)^{2k} q(x).$$

Ainsi, on a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = r(x) + \alpha^2 = (x - x_0)^{2k} q(x) + \alpha^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Démontrons la propriété par récurrence forte sur $n \geqslant 1$.

Si $n = 1$, la propriété est celle que nous avons établie dans la question 3(b).

Soit à présent $n \geqslant 1$. On suppose la propriété vraie jusqu'au rang n et on considère une fonction polynomiale p positive et de degré $2(n+1)$. D'après la question précédente, il existe alors $x_0 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q \in \mathbb{R}[x]$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $p(x) = (x - x_0)^{2k} q(x) + \alpha^2$. Comme p est de degré $2(n+1) = 2n+2$, la fonction q est de degré $2n + 2 - 2k = 2(n + 1 - k) \leqslant 2n$. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence (au rang $n+1-k$) pour obtenir l'existence de fonctions polynomiales $q_0, \dots, q_{n+1-k}$ telles que l'on ait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad q(x) = q_0(x)^2 + \ldots + q_{n+1-k}(x)^2.$$

En posant $q_i = 0$ pour tout $i \in [\![n + 2 - k, n]\!]$ (si de tels i existent), on obtient donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad q(x) = q_0(x)^2 + \ldots + q_n(x)^2.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire :

$$p(x) = (x - x_0)^{2k} (q_0(x)^2 + \ldots + q_n(x)^2) + \alpha^2,$$

soit

$$p(x) = p_0(x)^2 + \ldots + p_n(x)^2 + p_{n+1}(x)^2$$

avec $p_i : x \mapsto (x - x_0)^k q_i(x)$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ et $p_{n+1} : x \mapsto \alpha$. Les fonctions $p_0, \dots, p_{n+1}$ étant polynomiales, la proposition à démontrer est bien établie au rang $n + 1$.

Elle est donc vraie à tout rang $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 27.

1. (a) En effectuant la division euclidienne, on trouve $Q(X) = 1$ et $R(X) = 3$.
   (b) En effectuant la division euclidienne, on trouve cette fois $Q(X) = X + 1$ et $R(X) = 0$.

(c) Le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$ est de la forme $a_n X + b_n$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. En notant Q_n le quotient de cette division euclidienne et évaluant la relation

$$X^n = Q_n(X)(X^2 - X - 2) + a_n X + b_n$$

en -1 et 2 (qui sont les deux racines de $X^2 - X - 2$), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -a_n + b_n & = & (-1)^n \\ 2a_n + b_n & = & 2^n \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} a_n & = & \frac{2^n - (-1)^n}{3} \\ b_n & = & \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}, \end{array} \right.$$

d'où $R_n(X) = \frac{2^n - (-1)^n}{3} X + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$.

2. On a

$$A^2 - A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2 & t & t^2 \\ 1/t & 2 & t \\ 1/t^2 & 1/t & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & t & t^2 \\ 1/t & 0 & t \\ 1/t^2 & 1/t & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc P est bien un polynôme annulateur de A.

3. En évaluant en A la relation $X^n = Q_n(X)(X^2 - X - 2) + a_n X + b_n$ étudiée en 1(c), avec toujours $a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$ et $b_n = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$, on obtient

$$A^n = Q_n(A)(A^2 - A - 2I_3) + a_n A + b_n I_3,$$

soit $A^n = a_n A + b_n I_3$ puisque $A^2 - A - 2I_3 = 0$.

Correction de l'exercice 28.

1. Soient $j, k \in [\![0, n]\!]$. Si $j = k$, on a

$$P_k(x_j) = P_k(x_j) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x_k - x_i}{x_k - x_i} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} 1 = 1,$$

et si $j \neq k$, on a

$$P_k(x_j) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x_j - x_i}{x_k - x_i} = 0$$

puisque le terme d'indice j du produit est $\frac{x_j - x_j}{x_k - x_j} = 0$.

2. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On pose $P := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$. On a alors, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$:

$$P(x_j) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(x_j) = \lambda_j$$

d'après la question 1, donc $P(x_j) = y_j$ si et seulement si $\lambda_j = y_j$. Ainsi, le polynôme $\sum_{k=0}^{n} y_k P_k$, qui est bien de degré au plus n puisque les P_k le sont, répond au problème posé.

À présent, si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ est un autre polynôme vérifiant $Q(x_k) = y_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, alors Q et P coïncident en $x_0, \dots, x_n$, c'est-à-dire en $n + 1$

points distincts de $\mathbb{R}$. Comme leur degré vaut au plus n, ils sont nécessairement égaux, ce qui établit l'unicité de la solution au problème considéré et clôt la preuve.

Correction de l'exercice 29. Cet exercice est une version plus complète et ambitieuse de l'exercice 28.

1. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Supposons qu'il existe $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P_k(x_k) = 1$ ainsi que $P_k(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ tel que $i \neq k$.

   Comme P est de degré au plus n et admet les n réels x_i, avec $i \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\}$, pour racines distinctes, il existe d'après le théorème de factorisation un $a \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_k(x) = a \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i).$$
   La relation $P_k(x_k) = 1$ donne alors
$$a \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i) = 1 \quad \text{soit} \quad a = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)}.$$
   On en déduit donc la forme explicite de P_k :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i},$$
   d'où son unicité sous réserve d'existence.

   Réciproquement, si l'on définit P_k par $P_k : x \mapsto \displaystyle\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$, on a $\deg(P_k) = n$ puisque P_k est le produit de n polynômes de degré 1, et on vérifie aisément (voir la première question de l'exercice 28) que $P_k(x_k) = 1$ et $P_k(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ tel que $i \neq k$.

   On a donc bien établi l'existence et l'unicité d'un polynôme vérifiant les conditions attendues.

2. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a
$$P(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k P_k(x_i) = y_i \cdot 1 = y_i$$
   puisque $P_i(x_i) = 1$ et $P_k(x_i) = 0$ si $k \neq i$.

3. Si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ est un autre polynôme vérifiant $Q(x_k) = y_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, alors Q et P coïncident en $x_0, \ldots, x_n$, c'est-à-dire en $n+1$ points distincts de $\mathbb{R}$. Comme leur degré vaut au plus n, ils sont nécessairement égaux, ce qui établit l'unicité de la solution au problème considéré et clôt la preuve.

4. Les P_k sont de degré n, mais leur combinaison linéaire P ne l'est pas nécessairement. Par exemple, si les y_i sont tous égaux, alors P est le polynôme constant $P(X) = y_0$ (puisqu'il est dans $\mathbb{R}_n[X]$ et vérifie bien $P(x_i) = y_i$ pour tout i), mais ce polynôme n'est pas de degré n.

5. Si $Q \in \mathbb{R}[X]$, alors Q vérifie $Q(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ si et seulement si $Q - P$ admet $x_0, \ldots, x_n$ pour racines, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un polynôme $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que l'on ait :

$$Q(X) = P(X) + A(X) \prod_{k=0}^{n} (X - x_k).$$

Le polynôme P n'est donc pas le seul à interpoler les points (x_i, y_i) ; il est en revanche, comme on l'a vu dans la question 3, le seul polynôme *de degré inférieur ou égal à n* à le faire.

6. Il suffit d'appliquer le protocole de construction de P détaillé dans les questions 1 et 2. L'unique polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_4[X]$ prenant la valeur 1 en 0 et s'annulant en $1, 2, 3$ et 4 est

$$P_0(X) = \frac{1}{24}(X-1)(X-2)(X-3)(X-4).$$

L'unique polynôme $P_1 \in \mathbb{R}_4[X]$ prenant la valeur 1 en 1 et s'annulant en $0, 2, 3$ et 4 est

$$P_1(X) = -\frac{1}{6}X(X-2)(X-3)(X-4).$$

L'unique polynôme $P_2 \in \mathbb{R}_4[X]$ prenant la valeur 1 en 2 et s'annulant en $0, 1, 3$ et 4 est

$$P_2(X) = \frac{1}{4}X(X-1)(X-3)(X-4).$$

L'unique polynôme $P_3 \in \mathbb{R}_4[X]$ prenant la valeur 1 en 3 et s'annulant en $0, 1, 2$ et 4 est

$$P_3(X) = -\frac{1}{6}X(X-1)(X-2)(X-4).$$

Enfin, l'unique polynôme $P_4 \in \mathbb{R}_4[X]$ prenant la valeur 1 en 4 et s'annulant en $0, 1, 2$ et 3 est

$$P_4(X) = \frac{1}{24}X(X-1)(X-2)(X-3).$$

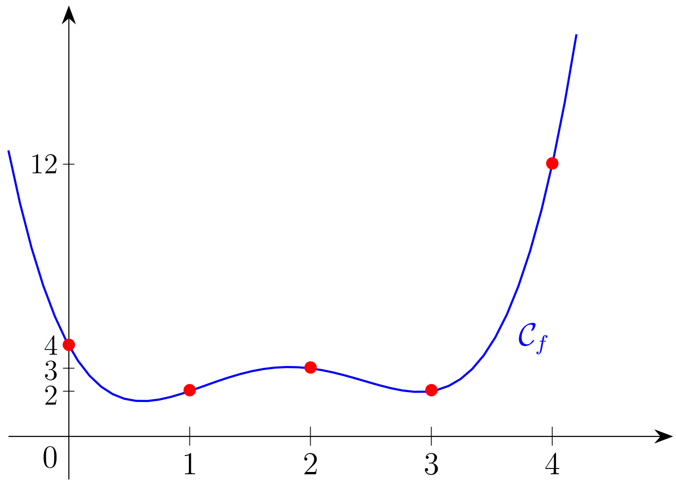
Ainsi, l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_4[X]$ satisfaisant les conditions attendues est

$$P(X) = 4P_0(X) + 2P_1(X) + 3P_2(X) + 2P_3(X) + 12P_4(X),$$

soit, après calcul :

$$P(X) = \frac{3}{4}X^4 - \frac{16}{3}X^3 + \frac{49}{4}X^2 - \frac{29}{3}X + 4.$$

On donne ci-dessous le graphe de la fonction polynomiale obtenue, qui interpole bien les points $(0, 4)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ et $(4, 12)$:



Correction de l'exercice 30.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme nous l'avons vu dans le cours sur les nombres complexes, il est possible d'écrire l'expression $\cos(n\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$ grâce à l'opération inverse de la linéarisation. Plus précisément, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on peut écrire grâce à la formule de Moivre, à la formule du binôme et à la relation fondamentale de la trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}\left(e^{in\theta}\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta)\right) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin^k(\theta)\cos^{n-k}(\theta) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2\ell} i^{2\ell} \sin^{2\ell}(\theta)\cos^{n-2\ell}(\theta) \\
&= \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2\ell} (-1)^\ell (1-\cos^2(\theta))^\ell \cos^{n-2\ell}(\theta),
\end{aligned}$$

soit $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$ avec

$$T_n : x \longmapsto \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2\ell} (-1)^\ell (1-x^2)^\ell x^{n-2\ell}.$$

Si Q_n est une autre fonction polynomiale vérifiant $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, alors Q_n et T_n coïncident sur toutes les valeurs de $\cos(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire sur $[-1, 1]$ tout entier, donc ces deux fonctions polynomiales sont égales. Ainsi, on a bien montré l'existence et l'unicité de la fonction polynomiale T_n vérifiant la condition de l'énoncé.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, une linéarisation donne cette fois l'identité :

$$\sin(n\theta) = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2\ell+1} (-1)^\ell \sin^{2\ell+1}(\theta) \cos^{n-2\ell-1}(\theta),$$

d'où $\sin(n\theta) = \sin(\theta)\, U_n(\cos(\theta))$ avec

$$U_n : x \longmapsto \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2\ell+1} (-1)^\ell (1-x^2)^\ell x^{n-2\ell-1}.$$

L'unicité de U_n procède du même argument que précédemment : si $Q \in \mathbb{R}[x]$ est telle que $\sin(\theta) U_n(\cos(\theta)) = \sin(\theta) Q(\cos(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, alors les fonctions polynomiales U_n et Q coïncident sur toutes les valeurs de $\cos(\theta)$ telles que $\sin(\theta) \neq 0$, donc au moins sur $[0, 1[$ (ce qui correspond par exemple aux valeurs de $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$), et elles sont donc égales.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En dérivant l'égalité $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$ vraie sur $\mathbb{R}$, on obtient pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$-n \sin(n\theta) = T_n'(\cos(\theta)) \cdot (-\sin(\theta)),$$

d'où

$$\frac{\sin(\theta)}{n} T_n'(\cos(\theta)) = \sin(n\theta).$$

De cette relation et de la définition de U_n (qui est l'unique fonction polynomiale vérifiant cette définition), il apparaît alors que $U_n = \frac{T_n'}{n}$.

4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(0 \cdot \theta) = 1$, $\cos(\theta) = \cos(\theta)$, $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$ et [3]

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \cos(\theta)\cos(2\theta) - \sin(\theta)\sin(2\theta) \\ &= \cos(\theta)(2\cos^2(\theta) - 1) - 2\sin^2(\theta)\cos(\theta) \\ &= 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta) - 2(1 - \cos^2(\theta))\cos(\theta) \\ &= 4\cos^3(\theta) - 3\cos(\theta). \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$ et $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.

Des relations $U_n = \frac{T_n'}{n}$, on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $U_1(x) = \frac{1}{1} = 1$, $U_2(x) = \frac{4x}{2} = 2x$ et $U_3(x) = \frac{12x^2-3}{3} = 4x^2 - 1$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} T_{n+2}(\cos(\theta)) &= \cos((n+2)\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta + \theta) \\ &= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta) \end{aligned}$$

3. On aurait pu utiliser directement la formule de linéarisation explicitée dans la question 1, mais ne nous privons pas de rappeler une démonstration à moindre frais de cette formule dans le cas où $n = 3$!

$$
\begin{aligned}
&= T_{n+1}(\cos(\theta))\cos(\theta) - \sin(n\theta+\theta)\sin(\theta) \\
&= T_{n+1}(\cos(\theta))\cos(\theta) - (\cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(n\theta)\cos(\theta))\sin(\theta) \\
&= T_{n+1}(\cos(\theta))\cos(\theta) - \cos(n\theta)\sin^2(\theta) - \sin(n\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) \\
&= T_{n+1}(\cos(\theta))\cos(\theta) - \cos(n\theta)(1-\cos^2(\theta)) - \sin(n\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) \\
&= T_{n+1}(\cos(\theta))\cos(\theta) - \cos(n\theta) + \cos(n\theta)\cos^2(\theta) - \sin(n\theta)\cos(\theta)\sin(\theta) \\
&= T_{n+1}(\cos(\theta))\cos(\theta) - T_n(\theta) + \cos(\theta)(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(n\theta)) \\
&= T_{n+1}(\cos(\theta))\cos(\theta) - T_n(\theta) + \cos(\theta)\cos((n+1)\theta)) \\
&= T_{n+1}(\cos(\theta))\cos(\theta) - T_n(\theta) + \cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) \\
&= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)).
\end{aligned}
$$

Ainsi, la fonction polynomiale T_{n+2} est égale à $x \mapsto 2xT_{n+1}(x) - T_n(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

6. Les fonctions polynomiales T_0 et T_1 sont de degrés respectifs 0 et 1, et elles ont pour coefficients dominants respectifs 1 et 1. En utilisant la relation de récurrence que nous venons de démontrer, on établit par une récurrence double facile[4] que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.

7. (a) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère[5] la proposition $\mathcal{P}_p$: « T_{2p} est paire et T_{2p+1} est impaire ».

   Comme $T_0 : x \mapsto 1$ est paire et $T_1 : x \mapsto x$ impaire, la proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Considérons à présent $p \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}_p$ vraie. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors d'après la question 5 :

   $$T_{2p+2}(-x) = -2xT_{2p+1}(-x) - T_{2p}(-x) = 2xT_{2p+1}(x) - T_{2p}(x) = T_{2p+2}(x)$$

   puisque T_{2p+1} est impaire et T_{2p} paire, ce qui montre que T_{2p+2} est paire. De même, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$T_{2p+3}(-x) = -2xT_{2p+2}(-x) - T_{2p+1}(-x) = -2xT_{2p+2}(x) + T_{2p+1}(x) = -T_{2p+3}(x),$$

   ce qui montre que T_{2p+3} est impaire. Ainsi, $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.

   La propriété est donc vraie à tout rang $p \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

   (b) On a montré que $U_n = \frac{T_n'}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; or la dérivée d'une fonction impaire est paire et réciproquement, donc d'après la question précédente, U_n a une parité opposée à celle de n.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$T_n(1) = T_n(\cos(0)) = \cos(n \cdot 0) = \cos(0) = 1$$

---

4. N'hésitez pas à la détailler en cas de doute !

5. Alternativement, on pouvait démontrer la propriété directement en considérant l'expression explicite de T_n donnée dans la question 1.

et
$$T_n(-1) = T_n(\cos(\pi)) = \cos(n\pi) = (-1)^n.$$
De même,
$$T_{2n}(0) = T_{2n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\left(2n\cdot\frac{\pi}{2}\right) = \cos(n\pi) = (-1)^n,$$
et
$$T_{2n+1}(0) = 0$$
puisque T_{2n+1} est impaire.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. En dérivant la relation $\frac{\sin(\theta)}{n}T_n'(\cos(\theta)) = \sin(n\theta)$ vraie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on obtient
$$\frac{\cos(\theta)}{n}T_n'(\cos(\theta)) - \frac{\sin^2(\theta)}{n}T_n''(\cos(\theta)) = n\cos(n\theta)$$
soit, en multipliant par n et en utilisant la relation fondamentale de la trigonométrie :
$$\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) - (1-\cos^2(\theta))T_n''(\cos(\theta)) = n^2 T_n(\cos(\theta)),$$
d'où
$$(1-\cos^2(\theta))T_n''(\cos(\theta)) - \cos(\theta)T_n'(\cos(\theta)) + n^2T_n(\cos(x)) = 0.$$
Ainsi, la fonction polynomiale $x \mapsto (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x)$ est nulle sur toutes les valeurs de $\cos(\theta)$, c'est-à-dire sur $[-1,1]$: elle est donc nulle sur $\mathbb{R}$, ce qu'il fallait démontrer.

10. Si $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(n\theta) = 0$ si et seulement si $n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, soit $\theta \equiv \frac{\pi}{2n}\left[\frac{\pi}{n}\right]$. Il existe donc dans $[0,\pi[$ exactement n solutions de l'équation $\cos(n\theta) = 0$: les réels de la forme $\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, si l'on pose $x_k := \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, on a donc $x_k \in [0,\pi[$ et $T_n(\cos(x_k)) = \cos(nx_k) = 0$, ce qui montre que $\cos(x_k)$ est une racine de T_n. Or les $\cos(x_k)$ sont deux à deux distincts puisque les x_k sont deux à deux distincts et dans $]0,\pi[$, intervalle sur lequel cos est strictement décroissante. Comme $\deg(T_n) = n$, il s'agit donc des n racines de T_n.

 Comme le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1}, on peut donc écrire :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(x - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right).$$

Correction de l'exercice 31. On utilise sans la démontrer [6] une transposition au cas des polynômes d'une propriété connue sur la dérivée d'un produit de fonctions, qui stipule que si $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{C}[X]$ alors
$$\left(\prod_{k=1}^{n} P_k(X)\right)' = \sum_{k=1}^{n} P_k'(X)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} P_i(X).$$

6. Une récurrence suffirait !

En dérivant l'expression factorisée de P, on obtient

$$P'(X) = a\sum_{k=1}^{n}((X-a_k)^{m_k})'\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(X-a_i)^{m_i} = a\sum_{k=1}^{n}m_k(X-a_k)^{m_k-1}\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(X-a_i)^{m_i}.$$

1. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\mathcal{R}$. On a alors $z-a_k\neq 0$ pour tout $k\in [\![1,n]\!]$, d'où

$$\begin{aligned}P'(z) &= a\sum_{k=1}^{n}m_k(z-a_k)^{m_k-1}\prod_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{n}(z-a_i)^{m_i}\\ &= a\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{z-a_k}\prod_{i=1}^{n}(z-a_i)^{m_i} = a\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{z-a_k}P(z),\end{aligned}$$

   d'où le résultat attendu en divisant par $P(z)$.
2. Supposons que $z\in\mathbb{C}$ soit racine de P' sans être racine de P, c'est-à-dire sans être dans $\mathcal{R}$. Le résultat de la question précédente devient alors

$$0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{z-a_k},$$

   d'où

$$0 = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k\cdot\overline{z-a_k}}{(z-a_k)\overline{z-a_k}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k\cdot\overline{z}-m_k\overline{a_k}}{|z-a_k|^2},$$

   ce qui, par linéarité de la somme, donne

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{|z-a_k|^2}\right)\overline{z} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{a_k}}{|z-a_k|^2},$$

   d'où le résultat attendu en passant au conjugué (puisque les m_k et les $|z-a_k|^2$ sont réels).
3. Soit z une racine de P' dans $\mathbb{C}$. Si z est aussi une racine de P, alors z est barycentre à coefficients positifs des racines de P (avec tous les coefficients nuls à l'exception d'un seul égal à 1). Supposons à présent que z n'est pas l'un des a_k et posons

$$S := \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{|z-a_k|^2} > 0$$

   ainsi que :

$$\forall k\in [\![1,n]\!],\quad \lambda_k := \frac{1}{S}\frac{m_k}{|z-a_k|^2}.$$

   Par construction, les λ_k sont des nombres positifs vérifiant $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$. Par ailleurs comme z n'est pas racine de P, le résultat de la question précédente se réécrit sous la forme

$$Sz = \sum_{k=1}^{n}S\lambda_k a_k$$

   soit

$$z = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k a_k.$$

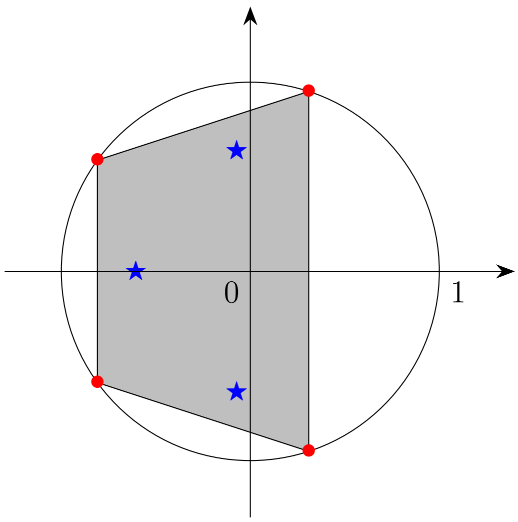
   Ainsi, z est bien un barycentre à coefficients positifs des a_k.

4. Le polynôme Q est la dérivée du polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} X^k$. Or pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut réécrire $P(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$ si $z \neq 1$ et on a $P(1) = n+1 \neq 0$, donc les racines de P sont les racines $(n+1)$-ièmes de l'unité différentes de 1. Ainsi, les racines de P ont toutes pour module 1.

   D'après le théorème démontré dans la question précédente, les racines de $Q = P'$ dans $\mathbb{C}$ sont des barycentres à coefficients positifs des racines de P. Il est clair graphiquement que de tels barycentres sont nécessairement contenus dans le disque de centre 0 et de rayon 1 (voir la figure ci-après). Démontrons-le rigoureusement : si $z \in \mathbb{C}$ est racine de $Q = P'$, alors on peut écrire $z = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k$ où les réels λ_k sont positifs et de somme 1 et où les a_k sont les racines de P (donc de module 1), et l'inégalité triangulaire permet alors d'écrire

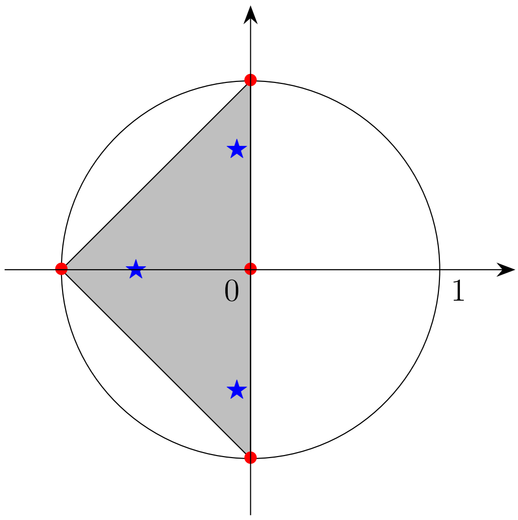
$$|z| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k a_k| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |a_k| = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1,$$

   donc les racines de Q sont bien de module inférieur ou égal à 1.



Cas $n = 4$. Les racines de $Q(X) = P'(X) = 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$, représentées par les étoiles bleues, se situent dans l'enveloppe convexe (c'est-à-dire l'ensemble des barycentres à coefficients positifs) des racines de $P(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, représentées par les points rouges.

   Remarquons qu'en choisissant de voir Q comme la dérivée de $R(X) = \sum_{k=1}^{n} X^k$, qui admet d'autres racines que P (et notamment 0), on aurait été en mesure de localiser les racines de Q dans une autre enveloppe convexe (voir la figure ci-après).



Cas $n = 4$. Les racines de $Q(X) = R'(X) = 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$ (les étoiles bleues) se situent dans l'enveloppe convexe des racines de $R(X) = X^4 + X^3 + X^2 + X$ (les points rouges).

Correction de l'exercice 32.

1. L'ensemble $\{|P(z)| \, : \, z \in \mathbb{C}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ puisqu'elle contient $|P(0)|$. Elle est par ailleurs constituée de réels positifs, donc minorée par 0. Ainsi, elle admet une borne inférieure d'après l'axiome de la borne inférieure.
2. (a) Soit $z \in \mathbb{C}$. D'après l'inégalité triangulaire (second volet puis premier volet), on a

$$\begin{aligned} |P(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right| \\ &= \left| a_n z^n - \sum_{k=0}^{n-1} (-a_k) z^k \right| \\ &\geqslant |a_n z^n| - \left| \sum_{k=0}^{n-1} (-a_k) z^k \right| \\ &\geqslant |a_n z^n| - \sum_{k=0}^{n-1} |-a_k z^k| \\ &= |a_n| \cdot |z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \cdot |z|^k \\ &= Q(|z|). \end{aligned}$$

   (b) D'après la question précédente, il suffit de montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $x > r$ on ait $Q(x) > \alpha + 1$: c'est vrai puisque le polynôme Q est non constant, à coefficients réels et de coefficient dominant $|a_n| > 0$, donc vérifie $Q(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

   (c) Par définition de la borne inférieure, pour tout $k \geqslant 0$ il existe $z_k \in \mathbb{C}$ tel que l'on ait $\alpha \leqslant |P(z_k)| < \alpha + \frac{1}{k+1}$; on a donc $|P(z_k)| \xrightarrow[k \to +\infty]{} \alpha$ d'après le théorème des gendarmes. Par ailleurs, la question précédente indique que pour tout $k \geqslant 0$, le nombre complexe z_k ne peut vérifier $|z| > r$, ce qui signifie qu'il appartient au disque D.

(d) Le théorème de Bolzano-Weierstrass stipule qu'une suite de réels bornée admet nécessairement une sous-suite convergente. Comme $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans D, les suites $(\mathrm{Re}\,(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}\,(z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont bornées[7] par r. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe donc une fonction $\varphi_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\mathrm{Re}\,(z_{\varphi_1(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $x^* \in \mathbb{R}$. Mais la suite réelle $(\mathrm{Im}\,(z_{\varphi_1(k)}))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée par r, donc on peut encore lui appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour obtenir une fonction $\varphi_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\mathrm{Im}\,(z_{\varphi_1(\varphi_2(k))})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain $y^* \in \mathbb{R}$. La suite $(\mathrm{Re}\,(z_{\varphi_1(\varphi_2(k))})_{k\in\mathbb{N}}$, en tant que suite extraite d'une suite convergente, converge elle aussi vers x^*, si bien que

$$z_{\varphi_1(\varphi_2(k))} = \mathrm{Re}\,(z_{\varphi_1(\varphi_2(k))}) + i\mathrm{Im}\,(z_{\varphi_1(\varphi_2(k))}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} x^* + iy^*.$$

En posant $z^* := x^* + iy^*$, on peut donc écrire que

$$z_{(\varphi_1\circ\varphi_2)(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} z^*,$$

ce qui établit la propriété attendue puisque $\varphi := \varphi_1 \circ \varphi_2$ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Notons que la démonstration proposée n'exploite aucune autre propriété de la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que son caractère bornée ; elle permet donc d'étendre le domaine de validité du théorème de Bolzano-Weierstrass à n'importe quelle suite complexe bornée.

(e) Comme $z_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} z^*$, on a $z^p_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} (z^*)^p$ pour tout $k \in [\![0,p]\!]$ par produit de limites, d'où, en sommant les limites obtenues[8] :

$$P(z_{\varphi(k)}) = \sum_{p=0}^{n} a_p z^p_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \sum_{p=0}^{n} a_p (z^*)^p = P(z^*).$$

(f) On a montré que $|P(z_{\varphi(k)}) - P(z^*)| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$. D'après le second volet de l'inégalité triangulaire, on peut donc écrire que

$$\Big||P(z_{\varphi(k)})| - |P(z^*)|\Big| \leqslant |P(z_{\varphi(k)}) - P(z^*)| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

donc que $|P(z_{\varphi(k)})| \xrightarrow[k\to+\infty]{} |P(z^*)|$. Or on sait que $|P(z_k)| \xrightarrow[k\to+\infty]{} \alpha$, donc $|P(z^*)| = \alpha$ par unicité de la limite. Ainsi, la borne α est bien atteinte.

7. En vertu des inégalités $|\mathrm{Re}\,(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}\,(z)| \leqslant |z|$, qui sont des conséquences de la définition $|z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)}$.

8. On peut généraliser à $\mathbb{C}$ la notion de fonction continue ; les fonctions polynomiales font bien entendu partie de la classe des fonctions continues de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, ce qui permet de composer un passage à la limite par une telle fonction sans revenir à des opérations simples sur les limites comme nous le faisons ici.

3. (a) Supposons que l'on soit parvenu à établir une contradiction dans le cas où $z^* = 0$ et $P(0) = 1$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de polynôme P non constant tel que $P(0) = 1$ et tel que le module $|P(z)|$ soit minimal en 0 (avec un minimum égal à 1). Le polynôme non constant $\widetilde{P}$ vérifie $|\widetilde{P}(z)| = \frac{|P(z^*+z)|}{\alpha}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, donc le module $|\widetilde{P}(z)|$ est minimal pour $z = 0$ et on a $\widetilde{P}(0) = 1$; cela, par hypothèse, induit une contradiction qui permet de conclure.

   Ainsi, on peut bien se limiter à montrer une contradiction dans le cas où $z^* = 0$ et $P(0) = 1$.

   (b) Soit a_p le premier coefficient non nul de P d'indice strictement positif – un tel coefficient existe car P n'est pas constant. Comme $a_0 = 1$ et comme les a_k sont nuls pour $0 < k < p$, on peut alors écrire

$$P(X) = 1 + a_p X^p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k X^k.$$

   L'idée de la suite de la preuve est de dire que pour z assez proche de 0, on a $P(z) \approx 1 + a_p z^p$, et de choisir z de façon à avoir $a_p z^p \in \mathbb{R}_-^*$, ce qui amènera $|P(z)| < 1$, d'où la contradiction recherchée.

   (c) Soient $r > 0$ et $z = re^{-i(\theta+\pi)/p}$. On a alors

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= \left|1 + a_p z^p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k z^k\right| \\
&= \left|1 + a_p r^p e^{-i(\theta+\pi)} + \sum_{k=p+1}^{n} a_k z^k\right| \\
&= \left|1 - a_p r^p e^{-i\theta} + \sum_{k=p+1}^{n} a_k z^k\right| \\
&= \left|1 - \rho r^p + \sum_{k=p+1}^{n} a_k z^k\right| \\
&\leqslant |1 - \rho r^p| + \sum_{k=p+1}^{n} |a_k z^k| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&= |1 - \rho r^p| + \sum_{k=p+1}^{n} |a_k| r^k.
\end{aligned}$$

   (d) Si $r > 0$ est assez proche de 0 pour que $\rho r^p \leqslant 1$ (donc si $r \leqslant \rho^{-\frac{1}{p}}$), on a $1 - \rho r^p \geqslant 0$ donc la majoration obtenue dans la question précédente donne

$$|P(z)| \leqslant 1 - \rho r^p + \sum_{k=p+1}^{n} |a_k| r^k,$$

   d'où l'inégalité attendue en soustrayant 1 aux deux termes.

(e) Pour tout $k > p$, on a $r^k \underset{r \to 0^+}{=} o(r^p)$, donc, comme $\rho \neq 0$:

$$\sum_{k=p+1}^{n} |a_k| r^k \underset{r \to 0^+}{=} o\left(-\rho r^p\right),$$

d'où

$$-\rho r^p + \sum_{k=p+1}^{n} |a_k| r^k \underset{r \to 0^+}{\sim} -\rho r^p.$$

Comme $-\rho r^p < 0$ pour tout $r > 0$, on a donc $-\rho r^p + \sum_{k=p+1}^{n} |a_k| r^k < 0$ pour r assez proche de 0. L'inégalité établie à la question précédente montre alors que pour r suffisamment proche de 0 et $z = re^{-i(\theta+\pi)/p}$, on a $|P(z)| - 1 < 0$, ce qui contredit le fait que $|P|$ est minorée par 1.

4. On a établi une contradiction qui permet de déduire que $\alpha = 0$. Ainsi, $|P(z^*)| = 0$, soit $P(z^*) = 0$: le polynôme P admet donc une racine dans $\mathbb{C}$, ce qui clôt la preuve du théorème.