

---

## VARD : preuve du théorème 49 (linéarité de l'espérance)

---

On démontre le théorème uniquement dans le cas où  $X$  et  $Y$  sont deux VARD finies. Dans ce cas, la variable aléatoire  $\lambda X + \mu Y$  prend un nombre fini de valeurs (les  $\lambda x + \mu y$  avec  $x \in X(\Omega)$  et  $y \in Y(\Omega)$ ), donc elle admet une espérance donnée par

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) &= \sum_{z \in (\lambda X + \mu Y)(\Omega)} z \mathbb{P}(\lambda X + \mu Y = z) \\
 &= \sum_{z \in (\lambda X + \mu Y)(\Omega)} z \left[ \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ \lambda x + \mu y = z}} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \right] \\
 &= \sum_{z \in (\lambda X + \mu Y)(\Omega)} \left[ \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ \lambda x + \mu y = z}} (\lambda x + \mu y) \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \right] \\
 &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} (\lambda x + \mu y) \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\
 &= \lambda \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) + \mu \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} y \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\
 &= \lambda \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) + \mu \sum_{y \in Y(\Omega)} y \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\
 &= \lambda \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) + \mu \sum_{y \in Y(\Omega)} y \mathbb{P}(Y = y) \\
 &= \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y),
 \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Dans ce qui précède, la deuxième et la troisième égalité sont valides parce que tout  $z \in (X + \lambda Y)(\Omega)$  est de la forme  $\lambda x + \mu y$  avec  $x \in X(\Omega)$  et  $y \in Y(\Omega)$ . Les réarrangements de sommes (linéarité, interversions et sommation par paquets) sont permis par le fait que toutes les sommes mobilisées sont finies. Enfin, on a utilisé la  $\sigma$ -additivité de  $\mathbb{P}$  (c'est-à-dire le fait que la probabilité d'une union disjointe est la somme des probabilités) dans la deuxième et la sixième égalité.

La preuve est la même dans le cas où  $X$  et  $Y$  prennent un nombre infini de valeurs, mais il faut ajouter un certain nombre de considérations de convergence permettant les diverses manipulations effectuées, ce dont nous nous dispensons ici.  $\square$