Matrices et systèmes linéaires

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 14. On calcule méthodiquement les 16 produits possibles en commençant par ceux dont le premier terme est A.

On a
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nA.$$
Ce résultat utile est bon à retenir car il figure dans de nombreux exercices.

On a ensuite
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+\cdots+n & \cdots & 1+2+\cdots+n \\ \vdots & & \vdots \\ 1+2+\cdots+n & \cdots & 1+2+\cdots+n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} A.$$
On trouve de même
$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$
Examinons à présent les produits dont le premier terme est B : on a
$$BA = \begin{pmatrix} 1+1+\cdots+1 & \cdots & 1+1+\cdots+1 \\ 2+2+\cdots+2 & \cdots & 2+2+\cdots+2 \\ \vdots & & \vdots \\ n+n+\cdots+n & \cdots & n+n+\cdots+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ 2n & \cdots & 2n \\ \vdots & & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix} = nB,$$
ainsi que
$$B^2 = \begin{pmatrix} 1+2+\cdots+n & \cdots & 1+2+\cdots+n \\ 2(1+2+\cdots+n) & \cdots & 2(1+2+\cdots+n) \\ \vdots & & \vdots \\ n(1+2+\cdots+n) & \cdots & n(1+2+\cdots+n) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \\ 2\frac{n(n+1)}{2} & \cdots & 2\frac{n(n+1)}{2} \\ \vdots & & \vdots \\ n\frac{n(n+1)}{2} & \cdots & n\frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} B,$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n & 2n & 2n & \cdots & 2n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & & \vdots \\ 2 & \cdots & 2 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 3 & \cdots & 3 \\ 5 & \cdots & 5 \\ \vdots & & \vdots \\ 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ n & \cdots & n \end{pmatrix},$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et enfin

$$DA = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad DB = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & -1\vdots & & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & & \\ n & \cdots & n & & \end{pmatrix},$$

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = CD \text{ et } D^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 15.

(i) La matrice A est diagonale. Le produit de deux matrices diagonales se calculant terme à terme, on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

puis

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix},$$

et ainsi de suite. On conjecture alors, et on démontre par une récurrence très facile que :

$$\forall k \geqslant 0, \quad A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-3)^k \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les puissances successives d'une matrice diagonale se calculent en mettant à la puissance ses coefficients diagonaux. Ce fait crucial sera abondamment exploité dans le cours de deuxième année, où l'on cherchera pour cette raison à ramener le calcul des puissances d'une matrice carrée quelconque à celui des puissances d'une matrice diagonale.

(*ii*) On a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^4 = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui nous amène à conjecturer le résultat suivant :

$$\forall k \geqslant 1, \quad B^k = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^{k-1} & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrons cette relation par récurrence sur $k \geqslant 1$. Le résultat est évidemment vrai si $k = 1$ du fait de la forme de B. Supposons-le vrai pour un certain $k \geqslant 1$; on a alors

$$\begin{aligned} B^{k+1} = BB^k &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (-2)^{k-1} & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & -2 \cdot (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & (-2)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc le résultat est vrai au rang $k + 1$. Ainsi, le résultat est vrai à tout rang $k \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

(*iii*) En s'inspirant de la matrice A étudiée dans l'exercice 14 ou en refaisant le calcul, on obtient que $C^2 = 2C$. Dès lors, on peut écrire $C^3 = CC^2 = C \cdot 2C = 2C^2 = 4C$, puis $C^4 = CC^3 = C \cdot 4C = 4C^2 = 8C$ et ainsi de suite : on a ainsi $C^k = 2^{k-1}C$ pour tout $k \geqslant 1$ – et on laisse au lecteur le soin d'écrire une preuve par récurrence qui formalise le raisonnement itératif que nous venons de mener.

(*iv*) On a

$$D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

On conjecture donc le résultat suivant :

$$\forall k \geqslant 1, \quad D^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Ce résultat est vrai pour $k = 1$ du fait de la forme de D. Supposons qu'il le soit pour un $k \geqslant 1$ donné ; on a alors

$$\begin{aligned}
D^{k+1} = DD^k &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^{k-1}+2^{k-1} & 0 & 2^{k-1}+2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1}+2^{k-1} & 0 & 2^{k-1}+2^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $k+1$. Ainsi, notre conjecture est vérifiée pour tous les rangs $k \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 16. Comme on l'a vu dans le cours, la formule n'est pas vraie en général dans le cas de matrices qui ne commutent pas. Pour montrer qu'elle est vérifiée lorsque A et B commutent, on reprend mot à mot la démonstration utilisée pour établir la formule du binôme dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, à l'exception notable d'un passage spécifique au cas matriciel (en rouge ci-dessous).

Procédons par récurrence sur N. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}_N : \quad \text{« } (A+B)^N = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} a^k b^{N-k} \text{ »}.$$

La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque $(A+B)^0 = I_n$ et

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} A^k B^{0-k} = \binom{0}{0} A^0 B^{0-0} = I_n.$$

Fixons à présent $N \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}_N$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}
(A+B)^{N+1} &= (A+B)(A+B)^N \\
&= (A+B) \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_N \\
&= A \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k} + B \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k} \\
&= A \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} A^k B^{N-k} + \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} BA^k B^{N-k}.
\end{aligned}$$

Or A et B commutent, donc pour tout $k \in [\![0, N]\!]$ on a

$$\begin{aligned}
BA^kB^{N-k} &= B \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ fois}} B^{N-k} = AB \underbrace{A \cdots A}_{k-1 \text{ fois}} B^{N-k} \\
&= A^2 B \underbrace{A \cdots A}_{k-2 \text{ fois}} B^{N-k} = \ldots = A^k B B^{N-k} \\
&= A^k B^{N+1-k}.
\end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
(A+B)^{N+1} &= \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^{k+1}B^{N-k} + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^{k}B^{N-k+1} \\
&= \sum_{k'=1}^{N+1}\binom{N}{k'-1}A^{k'}B^{N-(k'-1)} + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^{k}B^{N+1-k} \quad \text{en posant } k'=k+1 \\
&= \sum_{k'=1}^{N+1}\binom{N}{k'-1}A^{k'}B^{N+1-k'} + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^{k}B^{N+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{N+1}\binom{N}{k-1}A^{k}B^{N+1-k} + \sum_{k=0}^{N}\binom{N}{k}A^{k}B^{N+1-k} \\
&= \underbrace{\binom{N}{N}A^{N+1}B^{N+1-(N+1)}}_{\text{terme d'indice } N+1} + \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k-1}A^{k}B^{N-k+1} \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{N}\binom{N}{k}A^{k}B^{N+1-k} + \underbrace{\binom{N}{0}A^{0}B^{N+1-0}}_{\text{terme d'indice } 0} \\
&= A^{N+1} + \sum_{k=1}^{N}\left[\binom{N}{k-1}+\binom{N}{k}\right]A^{k}B^{N+1-k} + B^{N+1} \\
&= A^{N+1} + \sum_{k=1}^{N}\binom{N+1}{k}A^{k}B^{N+1-k} + B^{N+1} \quad \text{d'après la relation de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{N+1}\binom{N+1}{k}A^{k}B^{N+1-k},
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du fait que

$$A^{N+1} = \binom{N+1}{N+1}A^{N+1}B^{N+1-(N+1)}$$

est le terme d'indice $N+1$ de la somme et du fait que

$$B^{N+1} = \binom{N+1}{0}A^{0}B^{N+1-0}$$

est le terme d'indice 0 de la somme. On voit donc que $\mathcal{P}_{N+1}$ est vraie.
La proposition $\mathcal{P}_N$ est donc vraie pour tout rang $N \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 17.

(i) On peut écrire $A = I_2 + M$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or $M^2 = 0$, donc $M^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. Comme I_2 et M commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour écrire que pour tout $n \geqslant 2$:

$$A^n = (I_2 + M)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^k I_2^{n-k} = \binom{n}{0} I_2 + \binom{n}{1} M = I_2 + nM = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puisque les termes d'indice $k \geqslant 2$ de la somme sont des matrices nulles. On remarque que la forme obtenue est aussi valable pour $n = 0$ et $n = 1$, donc la formule est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

(ii) On peut écrire $B = I_2 + M$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Les premières puissances de M sont

$$M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut conjecturer puis démontrer la formule suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{cases} 2^k I_2 \text{ si } k \text{ est pair} \\ 2^{k-1} M \text{ si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Soit $n \geqslant 1$. Les matrices I_2 et M commutent, donc on peut appliquer la formule du binôme pour écrire

$$\begin{aligned} B^n = (I_2 + M)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^k I_2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^k \\ &= \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k \right) I_2 + \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1} \right) M. \end{aligned}$$

Il reste à présent à calculer les sommes

$$S_1 := \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k \quad \text{et} \quad S_2 := \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1}.$$

On a d'une part

$$S_1 + 2S_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$$

d'après la formule du binôme, et d'autre part

$$\begin{aligned} S_1 - 2S_2 &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-2)^k 1^{n-k} \\ &= (-2+1)^n = (-1)^n \end{aligned}$$

par cette même formule. En additionnant les deux égalités que nous venons d'obtenir, on trouve $2S_1 = 3^n + (-1)^n$, soit $S_1 = \frac{3^n+(-1)^n}{2}$. En les soustrayant, on trouve $4S_2 = 3^n - (-1)^n$ soit $S_2 = \frac{3^n-(-1)^n}{4}$.
Ainsi, on a :

$$B^n = S_1 I_2 + S_2 M = \begin{pmatrix} S_1 & 2S_2 \\ 2S_2 & S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n + (-1)^n}{2} & \dfrac{3^n - (-1)^n}{2} \\ \dfrac{3^n - (-1)^n}{2} & \dfrac{3^n + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'alternativement, on aurait pu éviter le calcul de S_1 et S_2 en privilégiant la décomposition $B = N - I_2$ avec $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, puisque les puissances de N sont faciles à calculer : en utilisant le point (iii) de l'exercice 15, on peut écrire que :

$$\forall k \geqslant 1, \quad N^k = 2^k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = 2^k 2^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{2k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme N et $-I_2$ commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour obtenir, si $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} B^n = (N - I_2)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k (-I_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k \\ &= \binom{n}{0} (-1)^n I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 2^{2k-1} N \end{aligned}$$

car la formule pour N^k n'est valable que si $k \geqslant 1$, d'où

$$\begin{aligned} B^n &= (-1)^n I_2 + \left(\frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-4)^k \right) N \quad \text{car } (-1)^{-k} = (-1)^k \\ &= (-1)^n I_2 + \frac{(-1)^n}{2} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-4)^k - 1 \right) N \\ &= (-1)^n I_2 + \frac{(-1)^n}{2} \left((-3)^n - 1 \right) N \quad \text{d'après la formule du binôme} \\ &= (-1)^n I_2 + \frac{3^n - (-1)^n}{2} N \end{aligned}$$

ce qui permet de retrouver

$$B^n = \begin{pmatrix} \dfrac{3^n + (-1)^n}{2} & \dfrac{3^n - (-1)^n}{2} \\ \dfrac{3^n - (-1)^n}{2} & \dfrac{3^n + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

On remarque que cette formule est aussi valable pour $n = 0$.

(*iii*) On écrit cette fois $C = 3I_3 + M$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on remarque que $M^2 = 0$, d'où $M^k = 0$ pour tout $k \geqslant 2$. Comme les matrices $3I_3$ et M commutent, on peut donc utiliser la formule du binôme pour écrire que si $n \geqslant 1$, alors

$$C^n = (3I_3+M)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M^k (3I_3)^{n-k} = (3I_3)^n + nM(3I_3)^{n-1} = 3^n I_3 + n3^{n-1}M$$

puisque les termes d'indice $k \geqslant 2$ dans la somme sont des matrices nulles. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$C^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix},$$

et on remarque que cette formule est aussi valable pour $n = 0$.

Correction de l'exercice 18.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}_k \ : \text{ « il existe } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ tels que } A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \text{ ».}$$

La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ puisque $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $k \geqslant 1$; on suppose la propriété $\mathcal{P}_k$ vérifiée. On a alors

$$\begin{aligned} A^{k+1} = AA^k &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_k \\ &= \begin{pmatrix} a_k + 3b_k & b_k + 3a_k \\ 3a_k + b_k & 3b_k + a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ b_{k+1} & a_{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en posant $a_{k+1} := a_k + 3b_k$ et $b_{k+1} := b_k + 3a_k$, donc la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est vérifiée.

Ainsi, la propriété $\mathcal{P}_k$ est vraie à tout rang $k \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence, et les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifient $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ ainsi que la relation de récurrence croisée suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = a_k + 3b_k \quad \text{et} \quad b_{k+1} = 3a_k + b_k.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{k+1} + b_{k+1} = a_k + 3b_k + 3a_k + b_k = 4(a_k + b_k),$$

donc la suite $(a_k + b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 4 et de premier terme $a_0 + b_0 = 1$.

On a de même, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$a_{k+1} - b_{k+1} = a_k + 3b_k - 3a_k - b_k = -2(a_k - b_k),$$

donc la suite $(a_k - b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -2 et de premier terme $a_0 - b_0 = 1$.

3. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $a_k + b_k = 4^k$ ainsi que $a_k - b_k = (-2)^k$. En sommant ces deux égalités, on obtient $2a_k = 4^k + (-2)^k$, d'où $a_k = \frac{4^k+(-2)^k}{2}$; en les soustrayant, on obtient $2b_k = 4^k - (-2)^k$, d'où $b_k = \frac{4^k-(-2)^k}{2}$. Ainsi, on peut écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4^k+(-2)^k}{2} & \dfrac{4^k-(-2)^k}{2} \\ \dfrac{4^k-(-2)^k}{2} & \dfrac{4^k+(-2)^k}{2} \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 19. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il est clair que la matrice scalaire λI_2 commute avec toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisque $\lambda I_2 \cdot M = \lambda M = M \cdot (\lambda I_2)$.

Réciproquement, considérons une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et supposons que A commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit les matrices $E_{1,1}$, $E_{2,1}$, $E_{1,2}$ et $E_{2,2}$ comme dans l'indication, et on a alors

$$AE_{1,1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$E_{1,1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

or A commute avec $E_{1,1}$ par hypothèse, d'où $AE_{1,1} = E_{1,1}A$ soit

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que $b = c = 0$.

On a de la même façon $E_{1,2}A = AE_{1,2}$, c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

d'où $d = a$. Ainsi, la matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, c'est-à-dire qu'elle est scalaire.

On a donc bien montré que les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les autres sont exactement les matrices scalaires.

Correction de l'exercice 20. Il suffit de vérifier que le produit de $I_n - A$ par la matrice proposée redonne la matrice I_n : or la distributivité de la multiplication matricielle par rapport à l'addition permet d'écrire

$$(I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k = \sum_{k=0}^{p-1}(I_n - A)A^k = \sum_{k=0}^{p-1}(A^k - A^{k+1})$$

d'où, en reconnaissant une somme télescopique :

$$(I_n - A)\sum_{k=0}^{p-1} A^k = A^0 - A^p = I_n - 0 = I_n$$

puisque $A^p = 0$. Ainsi, $I_n - A$ est bien inversible, et $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

Correction de l'exercice 21.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente et soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$. Si M était inversible, alors M^p le serait en tant que produit de p matrices inversibles ; or $M^p = 0$ donc M^p n'est pas inversible. Ainsi, M n'est pas inversible.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices nilpotentes qui commutent, soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$ et soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^q = 0$. Comme A et B commutent, la formule du binôme permet d'écrire

   $$(A+B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}.$$

   Or pour tout $k \in [\![0, p+q]\!]$, soit l'entier k est supérieur à p, soit l'entier $p+q-k$ est supérieur à q, si bien que A^k ou B^{p+q-k} est nulle, et donc que $A^k B^{p+q-k} = 0$: ainsi, on a

   $$(A+B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} 0 = 0,$$

   c'est-à-dire que $A+B$ est nilpotente.

   De la même façon, comme A et B commutent, on peut écrire $(AB)^p = A^p B^p$, d'où $(AB)^p = 0 \cdot 0 = 0$: ainsi, AB est elle aussi nilpotente.
3. D'après ce qui précède, il s'agit bien sûr de choisir deux matrices qui ne commutent pas. Si l'on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors :
   - $A^2 = B^2 = 0$, donc A et B sont nilpotentes.
   - $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible (car $\det(A+B) = -1 \neq 0$), donc non nilpotente d'après la question 1.
   - $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale et est égale à toutes ses puissances successives ; ainsi, aucune de ses puissances ne s'annule, donc AB n'est pas nilpotente.

Correction de l'exercice 22.

1. Supposons la proposition démontrée pour les matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure, alors ${}^tA$ est une matrice triangulaire supérieure ; d'après la proposition démontrée, elle est

inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Or ces coefficients diagonaux sont les mêmes que ceux de A, donc ${}^tA$ est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls. Comme on a vu dans le cours que A est inversible si et seulement si ${}^tA$ l'est, on en conclut que A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls : la proposition est donc aussi valable pour les matrices triangulaires inférieures.

Ainsi, il suffit bien d'établir la proposition pour les matrices triangulaires supérieures.

2. Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé.

   Supposons tout d'abord M inversible et notons son inverse

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix},$$

   avec $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $Q \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$, $R \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$. En faisant un calcul par blocs [1], relation $M^{-1}M = I_n$ s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} PA & PB+QC \\ RA & RB+SC \end{pmatrix} = I_n = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

   On a donc $PA = I_p$, ce qui implique que A est inversible (d'inverse P). Comme $RA = 0$, en multipliant à droite par A^{-1} on obtient $R = 0$. Ainsi, l'équation $RB + SC = I_{n-p}$ se réécrit $SC = I_{n-p}$, ce qui implique que C est inversible (d'inverse S). On a donc bien montré que si M est inversible, alors A et C le sont.

   Réciproquement, supposons que A et C sont inversibles. On a alors [2]

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}BC^{-1} + BC^{-1} \\ 0 & CC^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = I_n, \end{aligned}$$

   donc M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

   On a bien démontré l'équivalence attendue : M est inversible si et seulement A et C le sont.

3. Pour tout $n \geqslant 1$, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls ». Démontrons cette propriété par récurrence.

   La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie puisqu'une matrice $(a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est toujours

1. Prenez le temps de vérifier que ce calcul ne vous choque pas en visualisant mentalement les opérations réalisées sur les blocs pour multiplier M^{-1} et M.

2. La matrice $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$ ici parachutée a été déterminée grâce à un raisonnement par analyse-synthèse que nous vous invitons à détailler.

triangulaire supérieure et qu'une telle matrice est inversible si et seulement si $a \neq 0$ (on a alors $(a)^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)$).

Soit $n \geqslant 1$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie. Considérons $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure : on peut alors l'écrire

$$M = \begin{pmatrix} M' & B \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ (le 0 figurant dans la matrice étant la matrice ligne nulle $0_{1,n}$). D'après la question précédente, M est inversible si et seulement M' et (α) le sont ; mais l'hypothèse de récurrence d'une part, et la proposition $\mathcal{P}_1$ d'autre part, montrent que c'est le cas si et seulement si tous les coefficients diagonaux de M' ainsi que le réel α sont non nuls... c'est-à-dire si tous les coefficients diagonaux de M sont non nuls. La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \geqslant 1$, ce qui démontre le résultat à établir pour les matrices triangulaires supérieures, et donc, d'après la question 1, pour toutes les matrices triangulaires.

Correction de l'exercice 23.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. On note $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j},$$

or les coefficients $a_{i,k}$ et $b_{k,j}$ sont tous positifs donc $(AB)_{i,j}$ l'est aussi : ainsi, la matrice AB est à coefficients positifs.

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a de plus

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} (AB)_{i,j} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \quad \text{par interversion de sommes} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(b_{k,j} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_{k,j} \cdot 1 \quad \text{car } A \text{ est stochastique} \\ &= 1 \quad \text{car } B \text{ est stochastique.} \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice AB est stochastique.

2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices bistochastiques. Alors elles sont stochastiques, donc AB l'est d'après la question précédente. De plus, ${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$, or ${}^tB$ et ${}^tA$ sont stochastiques puisque A et B sont bistochastiques, donc le produit ${}^tB\,{}^tA$ est lui aussi stochastique d'après la question précédente ; ainsi, ${}^t(AB)$ est stochastique. La matrice AB est donc bistochastique, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 24. On détaille les trois preuves suggérées.

Preuve en utilisant un système d'équations linéaires :

On note $A = (a_{i,j})$. Par hypothèse, les $a_{i,i}$ sont tous non nuls. On va utiliser la proposition 42 du cours pour montrer que l'inverse de A est triangulaire supérieure. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$; le système donné dans la proposition 42 s'écrit

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,n-1}x_{n-1} & + & a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & a_{n-1,n-1}x_{n-1} & + & a_{n-1,n}x_n & = & y_{n-1} \\ & & & & & & a_{n,n}x_n & = & y_n \end{array}\right.$$

puisque A est triangulaire. En divisant chaque ligne i par $a_{i,i}$, ce qui est possible car les $a_{i,i}$ sont tous non nuls, ce système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & \dots & + & \frac{a_{1,n-1}}{a_{1,1}}x_{n-1} & + & \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n & = & \frac{1}{a_{1,1}}y_1 \\ & & & & & & & \vdots & \\ & & & & x_{n-1} & + & \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}x_n & = & \frac{1}{a_{n-1,n-1}}y_{n-1} \\ & & & & & & x_n & = & \frac{1}{a_{n,n}}y_n, \end{array}\right.$$

qui peut aisément être transformé, par substitution en partant sa dernière ligne, en un système donnant chaque x_i en fonction des y_j pour $j \geqslant i$, c'est-à-dire un système de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & b_{1,1}y_1 & + & \dots & + & b_{1,n-1}y_{n-1} & + & b_{1,n}y_n \\ & & & & & & & \vdots & \\ x_{n-1} & = & & & & & b_{n-1,n-1}y_{n-1} & + & b_{n-1,n}y_n \\ x_n & = & & & & & & & b_{n,n}y_n, \end{array}\right.$$

dans lequel les coefficients $b_{i,j}$ ne dépendent pas des x_i et des y_j.

D'après la proposition 42, l'inverse de A est donc la matrice

$$B := \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

qui est triangulaire supérieure, ce qu'il fallait démontrer.

Preuve en utilisant la méthode de Gauss-Jordan :

La matrice A est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. La méthode de Gauss-Jordan permet de transformer A en la matrice I_n uniquement par des dilatations (pour transformer les pivots de A en 1) et des transvections de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $j > i$, sans recours à aucune transposition. La matrice A^{-1} que l'on détermine au terme de l'application de la méthode de Gauss-Jordan est donc obtenue en appliquant à la matrice I_n ces dilatations et ces transvections. Or ces opérations ne changent aucun des coefficients situés en-dessous de la diagonale des matrices auquelles elles s'appliquent. Ainsi, les matrices obtenues au fil de la méthode de Gauss-Jordan sont toutes triangulaires supérieures ; c'est donc notamment le cas de A^{-1}.

Preuve par récurrence sur n :

On va réutiliser un résultat obtenu dans la deuxième question de l'exercice 22 : si M est une matrice triangulaire admettant une écriture par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A et C deux matrices carrées, alors M est inversible si et seulement si A et C le sont, et dans ce cas on a

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Démontrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la proposition $\mathcal{P}_n$: « l'inverse de toute matrice triangulaire supérieure inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure ».

La proposition $\mathcal{P}_1$ est trivialement vraie puisque toutes les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sont triangulaires supérieures.

Fixons à présent $n \geqslant 1$, supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie et considérons une matrice triangulaire supérieure inversible $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. On peut alors écrire

$$M = \begin{pmatrix} M' & B \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure inversible (car à coefficients diagonaux tous non nuls), $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \neq 0$, et où le bloc noté 0 est la matrice ligne nulle $0_{1,n}$. D'après le résultat de l'exercice 22 que nous avons rappelé, on a

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (M')^{-1} & -\frac{1}{\alpha}(M')^{-1}B \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Or M' est triangulaire supérieure et de taille $n \times n$, donc l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}_n$ stipule que $(M')^{-1}$ est triangulaire supérieure. Ainsi, on déduit de l'expression par blocs de M^{-1} que cette matrice est elle aussi triangulaire supérieure. La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc établie.

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 25.

1. La matrice ${}^tA$ est de taille $n \times m$, donc la matrice A^tA est de taille $m \times m$. Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a

$$(A^tA)_{i,i} = \sum_{k=1}^{n} A_{i,k}({}^tA)_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} (A_{i,k})^2 \geqslant 0.$$

2. Il est clair que si $A = 0$, alors $A^tA = 0$. Supposons réciproquement que $A^tA = 0$. Alors les coefficients diagonaux de A^tA sont nuls, ce qui implique d'après la question précédente que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ on a
$$\sum_{k=1}^{n} (A_{i,k})^2 = 0.$$
Comme les $(A_{i,k})^2$ sont des réels positifs, on en déduit que $A_{i,k} = 0$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, c'est-à-dire que $A = 0$, ce qui achève d'établir l'équivalence annoncée.

Correction de l'exercice 26. Les matrices $A := I_n$ et $B := -I_n$ sont inversibles (et elles sont leurs propres inverses), mais $A + B = 0$ ne l'est pas.

De très nombreux autres contre-exemples pouvaient bien sûr être proposés. Il était particulièrement pertinent de chercher à construire des exemples utilisant des matrices dont l'inversibilité (ou non) peut être établie simplement, par exemple des matrices triangulaires.

Correction de l'exercice 27.

1. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $i \geqslant j$. Pour un tel couple (i, j), on a alors
$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^{i} \underbrace{a_{i,k}}_{=0 \text{ car } i \geqslant k} b_{k,j} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{i,k} \underbrace{b_{k,j}}_{=0 \text{ car } k > i \geqslant j} = 0,$$
donc AB est elle aussi triangulaire supérieure triangulaire stricte.
2. On se convainc assez facilement de la véracité de la proposition en considérant une matrice triangulaire supérieure stricte de taille 3 ou 4 et en en calculant les puissances successives : on observe que si A est triangulaire supérieure stricte, alors A^2 l'est aussi et a par ailleurs une sur-diagonale nulle, puis que A^3 a deux sur-diagonales nulles, et ainsi de suite.

   Tentons de généraliser cette remarque pour un n quelconque fixé. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on dit qu'une matrice triangulaire supérieure stricte $M = (m_{i,j})$ *a ses k premières sur-diagonales nulles* si $b_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ vérifiant $i \geqslant j - k$. On se propose dans un premier temps de montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, le produit d'une matrice triangulaire supérieure stricte $A = (a_{i,j})$ par une matrice triangulaire supérieure stricte $B = (b_{i,j})$ ayant ses k premières sur-diagonales nulles est une matrice triangulaire supérieure stricte ayant ses $k + 1$ premières sur-diagonales nulles.

   Soit donc $k \in [\![1, n-1]\!]$ et soient A, B deux matrices triangulaires supérieures strictes, B ayant par ailleurs ses k premières sur-diagonales nulles. Pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ tel que $i \geqslant j - k - 1$, on a alors :
$$(AB)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} b_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^{i} \underbrace{a_{i,\ell}}_{=0 \text{ car } i \geqslant \ell} b_{\ell,j} + \sum_{\ell=i+1}^{n} a_{i,\ell} \underbrace{b_{\ell,j}}_{\substack{=0 \text{ car} \\ \ell \geqslant i+1 \geqslant j-k}} = 0,$$

ce qui montre bien que $(AB)_{i,j}$ est une matrice triangulaire supérieure stricte ayant ses $k+1$ premières sur-diagonales nulles, ce que nous souhaitions établir.

Ce résultat nous permet de montrer par une récurrence facile que si A est une matrice triangulaire supérieure stricte, alors A^k est une matrice triangulaire supérieure stricte ayant ses $k-1$ premières sur-diagonales nulles pour tout $k \in [\![1, n]\!]$; en particulier, A^n est triangulaire supérieure stricte et ses $n-1$ sur-diagonales sont nulles, c'est-à-dire que $A^n = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 28. Il est utile, et très économique en termes de rédaction, de recourir aux caractérisations de la symétrie et de l'antisymétrie en termes de transposée plutôt que de chercher à se ramener aux coefficients des matrices.

1. (a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques et soient $a, b \in \mathbb{R}$. La linéarité de la transposition permet alors d'écrire que

$$^t(aA + bB) = a\,^tA + b\,^tB = aA + bB,$$

donc $aA + bB$ est symétrique. Une combinaison linéaire de matrices symétriques est donc bien symétrique.

(b) Ce n'est pas toujours le cas : par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont symétriques, mais

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ne l'est pas.

(c) Si A et B sont de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques qui commutent, alors on a

$$^t(AB) = {}^tB\,^tA = BA = AB,$$

d'où $^t(AB) = AB$, c'est-à-dire que AB est symétrique.

(d) Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et inversible. On a alors [3]

$$^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = A^{-1},$$

donc A^{-1} est égale à sa transposée, c'est-à-dire qu'elle est symétrique.

2. (a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices antisymétriques et soient $a, b \in \mathbb{R}$. La linéarité de la transposition permet alors d'écrire que

$$^t(aA + bB) = a\,^tA + b\,^tB = -aA - bB,$$

soit $^t(aA + bB) = -(aA + bB)$, donc $aA + bB$ est antisymétrique. Une combinaison linéaire de matrices antisymétriques est donc bien antisymétrique.

3. Notons que l'on a utilisé dans la chaîne d'égalités la relation $^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ vue dans le cours (point (ii) de la proposition 36), qu'il peut être utile de savoir redémontrer en écrivant que

$$^t(A^{-1})\,^tA = {}^t(A \cdot A^{-1}) = {}^tI_n = I_n,$$

d'où le fait que $^t(A^{-1})$ est l'inverse de ^tA.

(b) Si A et B sont de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques qui commutent, alors on a

$$^t(AB) = {}^tB{}^tA = (-B)(-A) = BA = AB,$$

d'où $^t(AB) = AB$, c'est-à-dire que AB est symétrique.

(c) Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique et inversible. On a alors

$$^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1},$$

donc A^{-1} est égale à l'opposé de sa transposée, c'est-à-dire qu'elle est antisymétrique.

Remarque : on a ici utilisé le fait que $(-A)^{-1} = -A^{-1}$, que l'on peut retrouver en écrivant que $(-A) \cdot (-A^{-1}) = A \cdot A^{-1} = I_n$, ce qui montre que $(-A^{-1})$ est l'inverse de $-A$. Plus généralement, cette démonstration permet d'établir que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'inverse de la matrice λA est $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

3. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la fois symétrique et antisymétrique vérifie

$$M = {}^tM = -M$$

donc $M = -M$, soit, en ajoutant M aux deux termes de l'égalité, $2M = 0$, d'où, en multipliant les deux termes [4] par $\frac{1}{2}$, la relation $M = 0$. Ainsi, la seule matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle.

Correction de l'exercice 29. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Supposons qu'il existe $A, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A soit antisymétrique, que S soit symétrique et que $M = A + S$.

La linéarité de la transposition implique que $^tM = {}^tA + {}^tS = -A + S$. Ainsi, on a $M = A + S$ et $^tM = -A + S$; en sommant ces deux équations, on obtient alors $M + {}^tM = 2S$, d'où $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$, et en les soustrayant l'une à l'autre, on obtient $M - {}^tM = 2A$, d'où $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. On a donc établi l'unicité de la décomposition de M en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique sous réserve de son existence.

Réciproquement, si l'on définit $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$, alors on a :

$$^tS = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$$

donc S est symétrique,

$$^tA = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$$

4. Nous détaillons ce passage à l'extrême pour justifier que la relation $M = -M$ implique $M = 0$ sans avoir recours à des considérations sur les coefficients, mais uniquement à des opérations sur les matrices elles-mêmes. Remarquons qu'il n'est pas question ici du signe de quelque objet que ce soit !

donc A est antisymétrique, et enfin

$$S + A = \frac{1}{2}(M + {}^tM) + \frac{1}{2}(M - {}^tM) = M,$$

ce qui démontre bien l'existence de la décomposition annoncée et clôt la preuve.

Correction de l'exercice 30.
Correction de l'exercice 31.
Correction de l'exercice 32.
Correction de l'exercice 33.
Correction de l'exercice 34.
Correction de l'exercice 35.
Correction de l'exercice 36.
Correction de l'exercice 37.
Correction de l'exercice 38.