


4 PLUS LOIN, PLUS FORT

 **Exercice 35.** Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

1. (a) Montrer que si A et A' sont des parties de E , alors

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \quad \text{et} \quad f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A').$$

- (b) Donner un exemple d'application f et d'ensembles A et A' pour lesquels l'inclusion réciproque $f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A')$ n'est **pas** vérifiée.

- (c) Montrer l'équivalence suivante :

$$(\forall A, A' \in \mathcal{P}(E), \quad f(A) \cap f(A') = f(A \cap A')) \iff f \text{ est injective.}$$

2. (a) Montrer que si A est une partie de E , alors

$$f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A).$$

- (b) Donner un exemple d'application f et d'ensembles A et E pour lesquels l'inclusion réciproque $f(E \setminus A) \subset f(E) \setminus f(A)$ n'est **pas** vérifiée.

- (c) Montrer l'équivalence suivante :

$$(\forall A \subset E, \quad f(E) \setminus f(A) = f(E \setminus A)) \iff f \text{ est injective.}$$

- (d) Montrer l'équivalence suivante :

$$(\forall A \subset E, \quad f(E) \setminus f(A) = f(E \setminus A)) \iff f \text{ est bijective.}$$

3. Montrer que si B et B' sont des parties de F , alors on a toujours

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \quad \text{et} \quad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B').$$

4. Montrer que si B est une partie de F , alors on a toujours

$$f^{-1}(F \setminus B) = f^{-1}(F) \setminus f^{-1}(B).$$

Exercice 36. Soit E un ensemble et soit A une partie de E . On considère les applications

$$\begin{array}{ccc} \Phi_A : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) & & \Psi_A : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X \longmapsto A \cap X & \text{et} & X \longmapsto A \cup X. \end{array}$$

1. Établir les équivalences suivantes :

$$\Phi_A \text{ est injective} \iff \Phi_A \text{ est surjective} \iff \Phi_A \text{ est bijective} \iff A = E.$$

2. Établir les équivalences suivantes :

$$\Psi_A \text{ est injective} \iff \Psi_A \text{ est surjective} \iff \Psi_A \text{ est bijective} \iff A = \emptyset.$$

Exercice 37. Soit $f : E \rightarrow F$ une application. On définit les applications auxiliaires

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(F) & & \Psi : \mathcal{P}(F) \longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ A \longmapsto f(A) & \text{et} & B \longmapsto f^{-1}(B). \end{array}$$

1. (a) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$ on a $A \subset f^{-1}(f(A))$, avec égalité si f est injective.
 (b) Montrer que pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$ on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$, avec égalité si f est surjective.
2. (a) Montrer que Φ est injective si et seulement si f l'est.
 (b) Montrer que Φ est surjective si et seulement si f l'est.
3. (a) Montrer que Ψ est injective si et seulement si f est surjective.
 (b) Montrer que Ψ est surjective si et seulement si f est injective.
4. Expliciter la bijection réciproque de Φ et celle de Ψ dans le cas où f est bijective.


Exercice 38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ une application strictement croissante. Montrer que $f = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$.
2. Si $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, a-t-on nécessairement $g = \text{Id}_{\mathbb{N}}$?
3. Existe-t-il une application $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement décroissante?

Exercice 39. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(f(n)) < f(n+1). \quad (*)$$

1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose $C_p := \{n \in \mathbb{N} : n \geq p\}$. Montrer que si $p \in \mathbb{N}$ alors $f(C_p) \subset C_p$.
2. Montrer que f est strictement croissante.
3. Montrer que $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.

 **Exercice 40** (Théorème de Cantor-Bernstein). L'objectif de cet exercice est de prouver le théorème de Cantor-Bernstein énoncé dans la [section 3](#) du cours et dont on rappelle l'énoncé :

Si A et B sont des ensembles tels qu'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A , alors il existe une bijection de A dans B .

1. Démontrer le théorème dans le cas où A et B sont finis.

Dans la suite, on ne suppose pas nécessairement que A et B sont finis.

On commence par démontrer le lemme suivant :

Si A est un ensemble et si $A' \subset A$ est tel qu'il existe une application injective $u : A \rightarrow A'$, alors il existe une bijection de A sur A' .

Pour démontrer ce résultat, donnons-nous un ensemble A et une partie A' de A telle qu'il existe une application injective $u : A \rightarrow A'$. On cherche à construire une bijection de A sur A' .

On définit la suite d'ensembles $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $C_0 = A \setminus A'$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = u(C_n)$, et on pose

$$C = \bigcup_{n=0}^{+\infty} C_n.$$

2. Montrer que pour tout $x \in C$, on a $u(x) \in C$ (on dit que C est *stable par u*).

On considère à présent l'application

$$\begin{aligned} v : A &\longrightarrow A' \\ x &\longmapsto \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in C \\ x & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Montrer que v est bien définie, puis qu'elle est bijective.
4. En déduire le lemme.

On démontre enfin le théorème de Cantor-Bernstein. Supposons que A et B sont deux ensembles tels qu'il existe une injection $f : A \rightarrow B$ et une injection $g : B \rightarrow A$. On pose $A' = g(B)$.

5. Montrer que

$$\begin{aligned} h : B &\longrightarrow A' \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$$

est une bijection.

6. Montrer que $u := h \circ f$ est une injection de A dans A' .

D'après le lemme, il existe donc une bijection $v : A \rightarrow A'$.

7. Montrer que $h^{-1} \circ v$ est bijective et conclure.

Les exercices ci-après font référence aux notions développées dans la section 3 du présent chapitre, disponible en suivant [ce lien](#). Ils sont donc tous hors-programme.

▣ **Exercice 41** (\leq est une relation d'ordre.). Soient A , B et C trois ensembles. Montrer les trois propriétés suivantes :

- (i) $|A| \leq |A|$ (réflexivité).
- (ii) Si $|A| \leq |B|$ et $|B| \leq |C|$, alors $|A| \leq |C|$ (transitivité).
- (iii) Si $|A| \leq |B|$ et $|B| \leq |A|$, alors $|A| = |B|$ (antisymétrie).

Ces trois propriétés font de la relation \leq entre cardinaux ce que l'on appelle une *relation d'ordre*.

▣ **Exercice 42.** Dire si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse :

- (i) $|\mathbb{D}| = |\mathbb{R}|$
- (iii) $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^*|$
- (v) $\mathbb{Q}_- \cup [1, 2]$ est dénombrable.
- (ii) $|\mathbb{R}| \leq |\mathbb{R}^2|$
- (iv) $|\mathbb{R}| < |\mathcal{P}(\mathbb{R})|$
- (vi) L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.

▣ **Exercice 43.** Montrer que si A , B et C sont trois ensembles tels que $|A| \leq |B|$ et $|B| < |C|$, alors on a $|A| < |C|$.

▣ **Exercice 44.** Soit A un ensemble infini tel que l'on puisse écrire

$$A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\},$$

où les x_n sont des éléments de A non nécessairement distincts deux à deux.

Montrer que A est dénombrable.

▣ **Exercice 45.** Montrer les points suivants :

1. Une union finie d'ensembles dénombrables est dénombrable.
2. Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
3. Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

▣ **Exercice 46.** Montrer que l'application


$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (a, b) &\longmapsto 2^a(2b + 1) \end{aligned}$$

est bijective.

▣ **Exercice 47.** Expliciter une bijection entre \mathbb{N}^3 et \mathbb{N} .


Indication : on proposera un protocole de numérotation des éléments de \mathbb{N}^3 sur le modèle donné dans la preuve du théorème 9 de la section 3, puis on cherchera une définition explicite.

Dans les exercices qui suivent, on pourra utiliser le résultat suivant : tout réel admet un unique développement décimal propre, c'est-à-dire une unique écriture sous la forme d'un entier suivi d'une virgule et d'un nombre infini de décimales éventuellement nulles mais qui ne sont pas toutes égales à 9 à partir d'un certain rang – cette précision étant importante puisque le nombre $1 = 1,0000\dots$ s'écrit aussi sous la forme $0,9999\dots$ (voir l'exercice 34 du chapitre 15).

 **Exercice 48.** Montrer que $[0, 1]$ et $[0, 1]^2$ sont en bijection.

 **Exercice 49.** Montrer que $\llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbb{N}}$ et $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents.

Indication : on pourra expliciter puis utiliser une injection $i : \llbracket 0, 9 \rrbracket \rightarrow \{0, 1\}^4$.

 **Exercice 50** (Égalité $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$). Montrer que les ensembles $[0, 1[$ et $\llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbb{N}}$ sont équipotents, puis en déduire que \mathbb{R} et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ le sont.

Indication : on pourra utiliser l'écriture décimale d'un nombre $x \in [0, 1[$.