Séries

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 6.

(*i*) Si $u_n = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$, la série des u_n converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$ et la série des $\sqrt{u_n}$ diverge en tant que série harmonique.

(*ii*) Si $u_n = \frac{1}{n^4}$ pour tout $n \geqslant 1$, la série des u_n et celle des $\sqrt{u_n}$ convergent en tant que séries de Riemann de paramètres respectifs $4 > 1$ et $2 > 1$.

(*iii*) Si $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ pour tout $n \geqslant 1$, la série des u_n converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$ tandis que celle des $\sqrt{n}u_n = \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique.

(*iv*) Si $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \geqslant 1$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la série des $\sqrt[p]{u_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[p]{2}}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de paramètre $\frac{1}{\sqrt[p]{2}} \in]-1, 1[$.

Correction de l'exercice 7.

(*i*) On a $\frac{2j^5+j}{j^6-j^3+2j} \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{2}{j}$, or $\frac{2}{j}$ est le terme général d'une série divergente (un multiple de la série harmonique), donc la série de terme général $\frac{2j^5+j}{j^6-j^3+2j}$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

(*ii*) On a $\frac{n^3}{n!} = o\left(\frac{3^n}{n!}\right)$ par croissance comparée. Or la série de terme général $\frac{3^n}{n!}$ est une série exponentielle qui converge ; c'est donc le cas de la série de terme général $\frac{n^3}{n!}$ par comparaison de séries à termes positifs.

Alternativement, on pouvait utiliser le critère de D'Alembert : en effet, en posant $u_n := \frac{n^3}{n!} > 0$ pour tout $n > 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{n^3(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où la convergence de la série de terme général u_n.

(*iii*) On peut écrire $\frac{4^n-n}{5^n+2n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n$, or $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$ donc la série de terme général $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ converge. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n-n}{5^n+2n^3}$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs.

(*iv*) Pour tout $n \geqslant 1$, on peut écrire

$$\left|\frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre 2, donc la série de terme général $\left|\frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1}\right|$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi, la série de terme général $\frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1}$ converge absolument donc converge.

(v) Par croissance comparée, on a $\frac{n^6\ln^3(n)}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Or $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ donc la série de terme général $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{n^6\ln^3(n)}{2^n}$ converge.

(vi) Pour tout $k \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \frac{2^{\cos(k)}\sin^2(k)}{k\sqrt{k}} \leqslant \frac{2}{k\sqrt{k}}$, or la série de terme général $\frac{2}{k\sqrt{k}} = \frac{2}{k^{\frac{3}{2}}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$, donc la série de terme général $\frac{2^{\cos(k)}\sin^2(k)}{k\sqrt{k}}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

(vii) On a $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ par croissance comparée, or la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique), donc la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ diverge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

$(viii)$ On a $\frac{n^5 3^n}{4^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$ par croissance comparée puisque $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$. Or la série de terme général $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de paramètre $\frac{4}{5} \in]-1,1[$, donc la série de terme général $\frac{n^5 3^n}{4^n}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

(ix) Rappelons que l'on a $\lfloor x \rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ (ce que l'on obtient en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'encadrement $\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leqslant 1$). On peut donc écrire

$$\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

or la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{1}{2} \leqslant 1$, donc c'est aussi le cas de la série de terme général $\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ par comparaison de séries à termes positifs.

Notons que l'on aurait pu se contenter de minorer $\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ par $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour arriver à la même conclusion.

(x) On a $ke^{-k} = \frac{k}{e^k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^k}\right)$ par croissance comparée, or la série géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ converge (puisque $\frac{1}{2} \in]-1,1[$), donc la série de terme général ke^{-k} converge par comparaison des séries de termes positifs.

Notons que l'on aurait aussi pu reconnaître une série géométrique dérivée convergente en écrivant $ke^{-k} = \frac{1}{e} \cdot k\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}$ et en remarquant que $\frac{1}{e} \in]-1,1[$.

(xi) On a affaire à une série télescopique divergente : en effet, on a

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\ln\left((n+1)^2\right) - \ln(n^2)\right] = \ln((N+1)^2) - \ln(1^2) = 2\ln(N+1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty.$$

(xii) On a $\ln(n^2+1) - \ln(n^2) = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$, donc la série de terme général $\ln(n^2+1) - \ln(n^2)$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

(xiii) On a $e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, or $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc

$$\left(\arctan\left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)\right)^2 \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)^2.$$

Cherchons à présent un équivalent de cette dernière quantité lorsque $k \to +\infty$: en utilisant les développements limités $e^x = 1+x+o(x)$ et $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$ lorsque $x \to 0$, on obtient

$$e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}} = 1 + \frac{1}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) - \left(1 + \frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$$

et donc

$$\left(\arctan\left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)\right)^2 \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)^2 \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4k^2}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{4k^2}$ converge en tant que multiple d'une série de Riemann de paramètre $2 > 1$. Ainsi, la série de terme général $\left(\arctan\left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)\right)^2$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

(xiv) On a $\frac{(n+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(n+3)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\cdot\frac{1}{n}}{n^2} = \frac{1}{n^2}$, or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$), donc la série de terme général $\frac{(n+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(n+3)^2}$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

(xv) Lorsque $j \to +\infty$, on a $\sin\left(\frac{1}{j}\right) \to 0$ donc $\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{j}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{j}\right) \sim \frac{1}{j}$. Or la série des $\frac{1}{j}$ diverge (c'est la série harmonique), donc la série de terme général $\sin\left(\frac{1}{j}\right)$ et celle des $\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{j}\right)\right)$ divergent elles aussi par comparaison de séries à termes positifs.

(xvi) En reconnaissant une somme télescopique, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{1+\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{n}}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\ln(1+\sqrt{n+1}) - \ln(1+\sqrt{n})\right)\\ &= \ln(1+\sqrt{N+1}) - \ln(2) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty,\end{aligned}$$

donc la série de terme général $\ln\left(\frac{1+\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{n}}\right)$ diverge.

(xvii) Pour tout $n \geqslant 1$, le terme général $u_n := \frac{n!}{n^n}$ est strictement positif et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)},$$

or $n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\cdot\left(-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\cdot\frac{1}{n} = -1$ donc $n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$, d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}.$$

Or $e^{-1} < 1$, donc la série étudiée converge d'après la règle de D'Alembert.

$(xviii)$ On a $\frac{2^n}{3^{\sqrt{n}}} = e^{n\ln(2)-\sqrt{n}\ln(3)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ puisque $n\ln(2)-\sqrt{n}\ln(3) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$; ainsi, on a aussi $\frac{2^n(n^3+1)\ln(n)}{3^{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc la série étudiée diverge grossièrement.

(xix) Le terme général $u_n := \left(\frac{2n+\sin(n)}{3n}\right)^n$ est positif et

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2n+\sin(n)}{3n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3} \quad \text{donc} \quad \sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3} < 1,$$

donc la série étudiée converge d'après la règle de Cauchy.

(xx) On a $\left|\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}$ pour tout $n \geqslant 1$, or la série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$, donc la série de terme général $\left|\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right|$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi, la série de terme général $\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ converge absolument, donc elle converge.

(xxi) On va montrer que la série converge absolument. Appliquons la règle de D'Alembert au terme strictement positif $\left|\frac{(-2)^k}{\sqrt{k!}}\right| = \frac{2^k}{\sqrt{k!}}$: on a

$$\frac{\frac{2^{k+1}}{\sqrt{(k+1)!}}}{\frac{2^k}{\sqrt{k!}}} = \frac{2}{\sqrt{k+1}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 < 1,$$

donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{(-2)^k}{\sqrt{k!}}\right|$ converge. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-2)^k}{\sqrt{k!}}$ converge absolument, donc elle converge.

$(xxii)$ On pourrait appliquer le même raisonnement que dans le point précédent. Pour varier les plaisirs, remarquons plutôt que

$$\left|\frac{x^k}{(2k+1)!}\right| = \frac{|x|^k}{(2k+1)!} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{|x|^k}{k!}\right),$$

or la série de terme général $\frac{|x|^k}{k!}$ converge en tant que série exponentielle, donc $\sum_{n\geqslant 0} \left|\frac{x^k}{(2k+1)!}\right|$ converge par comparaison des séries à termes positifs, ce qui implique que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^k}{(2k+1)!}$ converge absolument donc converge.

Correction de l'exercice 8.

(i) On reconnaît une série géométrique de paramètre $\frac{1}{e} \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}.$$

(ii) On reconnaît ici une série géométrique de paramètre $\frac{2}{9} \in]-1,1[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{3^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^k = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{3}{7}.$$

(*iii*) En écrivant $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (décomposition déjà rencontrée plusieurs fois en exercice !), on reconnaît une série télescopique :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

(*iv*) On voit encore une fois apparaître une série télescopique :

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\arctan\left(\frac{1}{k}\right) - \arctan\left(\frac{1}{k+1}\right)\right) = \arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{N+1}\right)$$
$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\arctan\left(\frac{1}{k}\right) - \arctan\left(\frac{1}{k+1}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(*v*) On fait cette fois apparaître la somme d'une série géométrique dérivée de paramètre $\frac{1}{2} \in]-1,1[$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} i\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

(*vi*) On fait apparaître la somme d'une série géométrique dérivée deux fois de paramètre $\frac{1}{2} \in]-1,1[$:

$$\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i(i-1)}{2^i} = \frac{1}{4}\sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{i-2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 4.$$

(*vii*) Pour tout $i \geqslant 2$, on a $\frac{i}{2^i} + \frac{i(i-1)}{2^i} = \frac{i^2}{2^i}$. En utilisant les résultats des deux points précédents et la linéarité de la somme des séries convergentes, on déduit que la série de terme général $\frac{i^2}{2^i}$ converge et que

$$\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i^2}{2^i} = \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i}{2^i} + \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i(i-1)}{2^i} = 2 - \frac{1}{2} + 4 = \frac{11}{2}.$$

(*viii*) On reconnaît une série exponentielle de paramètre x^2 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} - 1 = e^{x^2} - 1.$$

(*ix*) En reconnaissant deux séries géométriques de paramètre $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, on peut écrire

$$\sum_{a=0}^{+\infty}\sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{a+b}} = \sum_{a=0}^{+\infty}\sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{2^a}\cdot\frac{1}{2^b} = \sum_{a=0}^{+\infty} \frac{1}{2^a}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

(x) Pour tout $n \geqslant 0$, la somme

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\binom{n}{m} 2^m m^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!(n-m)!} 2^m m^{n-m}$$

est finie puisqu'elle ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Pour tout $m \geqslant 0$, on calcule la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\binom{n}{m} 2^m m^{n-m} = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{m!(n-m)!} 2^m m^{n-m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^m}{m!}\frac{m^k}{k!} = \frac{2^m}{m!} e^m = \frac{(2e)^m}{m!}$$

en reconnaissant une somme de série exponentielle. Ainsi, les conditions du théorème de Fubini sont vérifiées, et on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\binom{n}{m} 2^m m^{n-m} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\binom{n}{m} 2^m m^{n-m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2e)^m}{m!} = e^{2e}$$

en reconnaissant une nouvelle somme de série exponentielle.

Correction de l'exercice 9.

1. Comme $\alpha > 1$, la série de Riemann de terme général $\frac{1}{k^\alpha}$ converge. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$ le terme r_n, qui est son reste d'ordre n, est bien défini.
2. Comme la série de Riemann de terme général $\frac{1}{k^\alpha}$ est convergente, on a $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Soient $n \geqslant 1$ et $N > n$. Pour tout $k \in [\![n+1, N]\!]$ et tout $t \in [k-1, k]$, on a $t \leqslant k \leqslant t+1$ et donc, par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{1}{(t+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$, d'où en intégrant cette inégalité sur $[k-1, k]$:

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

soit

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

En sommant ces dernières inégalités pour $k \in [\![n+1, N]\!]$ et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_{n}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cet encadrement se réécrit sous la forme

$$\left[\frac{1}{-\alpha+1}(t+1)^{-\alpha+1}\right]_n^N \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_n^N$$

soit

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient alors l'encadrement suivant :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

4. Les deux termes qui encadrent r_n dans les inégalités ci-dessus sont équivalents à $\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ lorsque $n \to +\infty$: on en déduit que

$$r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

d'après le théorème des gendarmes pour les équivalents.

Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général r_n est donc de même nature que la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$: ainsi, elle converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, ce qui équivaut à $\alpha > 2$.

Correction de l'exercice 10.

1. Pour tout $n \geqslant e^3$, on a $\ln(n)^n \geqslant 3^n > 0$, d'où $0 \leqslant \frac{2^n}{\ln(n)^n} \leqslant \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{2^n}{\ln(n)^n}$ converge donc d'après le principe de comparaison des séries à termes positifs puisque $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{2}{3} \in]-1,1[$.

2. On peut calculer explicitement la somme géométrique : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}$.
L'autre somme peut être minorée par son premier terme :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{\ln(n)^n} \geqslant \frac{4}{\ln(2)^2} \geqslant \frac{4}{\ln(e)^2} = 4.$$

Ainsi, on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{\ln(n)^n} \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, ce qui illustre le fait que la majoration du terme général $\frac{2^n}{\ln(n)^n}$ par $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *à partir d'un certain rang* ne permet pas de tirer de conclusion sur la comparaison des sommes des séries associées.

Correction de l'exercice 11. Supposons que $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ à partir d'un certain rang, donc $0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$ à partir de ce rang. Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n^2 converge donc, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 12.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

car $-x \neq 1$. En intégrant cette égalité sur $[0,1]$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-x)^k \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x,$$

soit

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = [\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\right| = \frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant x^{n+1}$. Ainsi, par l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. L'égalité démontrée dans la question précédente montre alors que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1}$ converge et que sa somme vaut bien

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2).$$

3. La série de terme général $\left|\frac{(-1)^k}{k+1}\right| = \frac{1}{k+1}$ diverge en tant que série harmonique. Ainsi, la série étudiée ne converge pas absolument : elle est *semi-convergente*.

Correction de l'exercice 13.

1. La série étant à terme général positif, elle est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente si elle est majorée et divergente (vers $+\infty$) sinon.
2. Pour tout $p \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} H_{2p} - H_p = \sum_{n=1}^{2p} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} &= \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{1}{n} \\ &\geqslant \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{1}{2p} \quad \text{par minoration terme à terme} \\ &= (2p-(p+1)+1) \cdot \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Pour tout $N \geqslant 2$ on a

$$H_{2^N} = \sum_{p=1}^{N} (H_{2^p} - H_{2^{p-1}}) + H_1 \geqslant \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2} + 1 \geqslant \frac{N}{2} + 1 = \frac{N+3}{2}.$$

Ainsi, la suite $(H_N)_{N\geqslant 1}$ n'est pas majorée, donc la série harmonique diverge.

Correction de l'exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $P : q \mapsto \sum_{k=0}^{n} q^k$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, et pour tout $q \in \mathbb{R}$ on a

$$P''(q) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2}$$

par linéarité de la dérivation.
Or pour tout $q \neq 1$, on a aussi $P(q) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, ce qui définit une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (en tant que quotient de fonctions deux fois dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas). En dérivant deux fois cette relation, on a pour tout $q \neq 1$:

$$P'(q) = \frac{-(n+1)q^n(1-q) + (1-q^{n+1})}{(1-q)^2} = \frac{1 + nq^{n+1} - (n+1)q^n}{(1-q)^2},$$

puis, après simplifications :

$$P''(q) \underset{\cdots}{=} \frac{2 + 2(n^2-1)q^n - (n-1)nq^{n+1} - n(n+1)q^{n-1}}{(1-q)^3}.$$

Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a l'égalité suivante :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2 + 2(n^2-1)q^n - (n-1)nq^{n+1} - n(n+1)q^{n-1}}{(1-q)^3}.$$

Si $|q| \geqslant 1$, la série de terme général $k(k-1)q^{k-2}$ diverge grossièrement. En revanche, si $|q| < 1$, l'égalité ci-dessus et le théorème de croissance comparée montrent que

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{(1-q)^3},$$

donc la série converge et sa somme vaut $\frac{2}{(1-q)^3}$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 15.

1. Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. On a alors $n^{\frac{1+\alpha}{2}} u_n = n^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \cdot \ell = 0$ puisque $\frac{1-\alpha}{2} < 0$, donc

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{soit} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right).$$

   Or la série de terme général $\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{1+\alpha}{2} > 1$, donc $\sum u_n$ converge aussi par comparaison des séries à termes positifs.

2. Supposons qu'il existe $\alpha < 1$ tel que $n^\alpha u_n$ tende vers $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. On a alors
$$n^{\frac{\alpha+1}{2}} u_n = n^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
en vertu de l'égalité formelle $\ell \cdot +\infty = +\infty$ (rappelons que $\frac{1-\alpha}{2} > 0$ et $\ell > 0$). Ainsi, on a $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et
$$\frac{\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n).$$
Or la série de terme général $\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{\alpha+1}{2} < 1$, donc la série $\sum u_n$ diverge aussi par comparaison des séries à termes positifs.

Correction de l'exercice 16. L'égalité à établir se réécrit sous la forme
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} d_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} d_{m,n}. \tag{1}$$
Or pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ le réel $u_{m,n}d_{m,n}$ est positif en tant que produit de réels positifs, et on a $0 \leqslant u_{m,n}d_{m,n} \leqslant u_{m,n}$. Mais pour tout $m \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_{m,n}$ converge donc par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_{m,n}d_{m,n}$ converge elle aussi. De même, pour tout $n \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{m\geqslant 0} u_{m,n}d_{m,n}$ converge puisque c'est aussi le cas de la série $\sum\limits_{m\geqslant 0} u_{m,n}$. Ainsi, on peut bien appliquer le théorème de Fubini pour obtenir l'égalité (1), ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 17.

1. Pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2+1-2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$, d'où l'inégalité attendue.
2. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs [1]. On a
$$\begin{aligned}(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) &= \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^n \frac{1}{a_\ell}\right) \\ &= \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \frac{a_k}{a_\ell} = \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i} \\ &\geqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} 2 + n \quad \text{d'après la question précédente}\end{aligned}$$

1. L'inégalité à établir se réécrit
$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geqslant n\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)^{-1}$$
et revient donc à dire que la *moyenne arithmétique* des a_i est supérieure à leur *moyenne harmonique*.

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(i-1) + n = 2\sum_{m=0}^{n-1} m + n = n(n-1) + n = n^2,$$

où la troisième égalité s'obtient en écrivant que tous les termes de la somme sont soit de la forme $\frac{a_i}{a_j}$ ou $\frac{a_j}{a_i}$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$, soit de la forme $\frac{a_i}{a_i}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

3. On suit l'indication en écrivant que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} k^2 u_k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}^{n} k^2 u_k \\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} n u_k + \sum_{k=\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}^{n} u_k = \frac{1}{n}S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} + S_n - S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}, \end{aligned}$$

où pour tout $k \geqslant 1$, la quantité $S_p := \sum_{k=1}^{p} u_k$ est la p-ième somme partielle de la série de terme général u_k. Or S_n et $S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$, tendent tous deux vers la somme S de la série des u_k lorsque $n \to +\infty$, donc

$$\frac{1}{n}S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} + S_n - S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où, par encadrement,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 u_k}\right) \geqslant n^2$$

d'après la question 2, d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 u_k} \geqslant \left(\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k\right)\right).$$

Or le terme de droite tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ d'après la question 3, d'où $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par comparaison. Ainsi, la série de terme général $\frac{1}{k^2 u_k}$ diverge, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 18.

1. Si $u_n = -1 + \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $p = 0$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en développant le produit $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ on obtient une somme de termes positifs, dont $1^n = 1$ (le terme obtenu en multipliant les 1 entre eux), u_1 (le terme obtenu en multipliant u_1 et uniquement des 1), u_2 (obtenu en multipliant 1 puis u_2 et uniquement des 1), et ainsi de suite jusqu'à u_n. Ainsi, on a

$$p_n \geqslant 1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 + S_n,$$

ce qui établit l'inégalité de gauche dans l'encadrement recherché.

À présent, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x \geqslant 1+x$ (par exemple en étudiant la fonction $x \mapsto e^x - (1+x)$ qui atteint son minimum 0 pour $x = 0$ et est donc positive), ce qui permet d'écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{u_k} = e^{u_1+\ldots+u_n} = e^{S_n},$$

d'où l'encadrement recherché.

La série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante (puisque les u_k sont positifs), si elle diverge elle tend vers $+\infty$, donc l'inégalité $p_n \geqslant 1 + S_n$ montre que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge elle aussi vers $+\infty$. Par contraposée, si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi.

À présent, si la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors elle est majorée, donc c'est aussi le cas de la suite $(e^{S_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. L'inégalité $e^{S_n} \geqslant p_n$ montre alors que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée ; or elle est croissante puisque les u_k sont positifs, donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Ainsi, on a bien montré que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

(b) Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge d'après la question précédente ; ainsi, la série de terme général u_n converge, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_n = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(1+u_k)\right).$$

Si la série des $\ln(1+u_k)$ converge, c'est donc le cas de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par continuité de exp.

Réciproquement, en écrivant $\sum_{k=1}^{n}\ln(1+u_k) = \ln(p_n)$ pour tout $n \geqslant 1$ (ce qui est possible puisque les $1+u_k$ et p_n sont strictement positifs), on en déduit que si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive, alors la série des $\ln(1+u_k)$ converge elle aussi.

On se place désormais dans le cas où les u_n sont tous positifs.

Alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et supérieure à 1, donc elle ne peut converger vers 0. On a alors équivalence entre la convergence de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et celle de la série des $\ln(1+u_n)$.

Supposons que la série des $\ln(1+u_n)$ converge. C'est donc le cas de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; mais on a vu dans la question précédente que cela implique que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On a alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$ lorsque $n \to +\infty$, et on peut utiliser le résultat de comparaison des séries à termes positifs pour conclure que la série des u_n converge.

Réciproquement, supposons que la série des u_n converge. D'après la question 2, cela implique la convergence de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et le fait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; on peut alors utiliser le même équivalent $\ln(1+u_n) \sim u_n$ que précédemment pour conclure que la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

Ainsi, sous l'hypothèse de positivité des u_n, les séries de termes généraux $\ln(1+u_n)$ et u_n sont bien de même nature.

Correction de l'exercice 19.

1. Soit $k \geqslant 1$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. En intégrant cette inégalité sur $[k, k+1]$, on obtient

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k},$$

soit

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Alternativement, on aurait pu utiliser l'inégalité des accroissements finis (qui est en fait un outil équivalent) : si $k \geqslant 1$, la fonction ln est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$, et pour tout $t \in]k, k+1[$ on a $\ln'(t) = \frac{1}{t}$ donc

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln'(t) \leqslant \frac{1}{k}$$

par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction ln entre les points k et $k+1$ donne alors

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. Si $n \geqslant 1$, en sommant les inégalités $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{soit} \quad \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

en reconnaissant une somme télescopique, donc $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \geqslant 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est positive.

Par ailleurs, si $n \geqslant 1$ on a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leqslant 0$$

d'après la question précédente, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Le fait qu'elle converge vers une limite γ est alors une conséquence du théorème de la limite monotone.

3. On a $H_n = u_n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n)) + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ et $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Correction de l'exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto x^{n^2}(1-x)$ est dérivable sur $[0,1]$, et pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$f'(x) = n^2 x^{n^2-1}(1-x) - x^{n^2} = x^{n^2-1}(n^2(1-x)-x),$$

donc

$$f'(x) \geqslant 0 \iff n^2(1-x)-x \geqslant 0 \iff n^2 \geqslant x(n^2+1) \iff x \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Ainsi, f admet un maximum en $\frac{n^2}{n^2+1}$ égal à $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{n^2+1}$, or $\frac{n^2}{n^2+1} \in [0,1]$ donc ce maximum est inférieur à $\frac{1}{n^2+1}$. On a donc établi l'encadrement suivant :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant x^{n^2}(1-x) \leqslant \frac{1}{n^2+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$ on a $0 \leqslant (u_n)^{n^2}(1-u_n) \leqslant \frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$; ainsi, la série de terme général $(u_n)^{n^2}(1-u_n)$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Correction de l'exercice 21.

1. Soit $\alpha' = \frac{1+\alpha}{2}$.

   Si $\alpha > 1$, on a $\alpha > \alpha' > 1$ donc $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right)$ par croissance comparée, or la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha'}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha' > 1$, donc la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

   Si $\alpha < 1$, on a $\alpha < \alpha' < 1$ donc $\frac{1}{n^{\alpha'}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}\right)$ par croissance comparée, et la divergence de la série de Riemann de paramètre $\alpha' < 1$ implique cette fois celle de la série de terme général positif $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.

2. (a) La fonction $x \mapsto x\ln^\beta(x)$ est strictement positive et croissante sur $[n-1,n]$ en tant que produit de fonctions strictement positives et croissantes. Ainsi, pour tout $x \in [n-1,n]$ on a

   $$0 < x\ln^\beta(x) \leqslant n\ln^\beta(x) \leqslant (n+1)\ln^\beta(n+1),$$

   d'où l'encadrement attendu par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Si $n \geqslant 3$, en encadrant l'inégalité démontrée dans la question précédente sur $[n-1, n]$ on obtient

$$\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\ln^{\beta}(x+1)} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{n\ln^{\beta}(n)} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\beta}(x)}.$$

En effectuant le changement de variable $u = x+1$ dans l'intégrale de gauche et en remarquant que l'intégrale centrale est l'intégrale d'une constante, cet encadrement se réécrit

$$\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}u}{u\ln^{\beta}(u)} \leqslant \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\beta}(x)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

(c) Soit $N \geqslant 3$. En sommant l'inégalité démontrée dans la question précédente pour $n \in [\![3, N]\!]$, on obtient

$$\sum_{n=3}^{N} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\beta}(x)} \leqslant \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)} \leqslant \sum_{n=3}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\beta}(x)}$$

ce qui, grâce à la relation de Chasles, se réécrit

$$\int_{3}^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\beta}(x)} \leqslant \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)} \leqslant \int_{n=2}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\beta}(x)}.$$

Si $\beta \neq 1$, en remarquant que $x \mapsto \frac{1}{x\ln^{\beta}(x)} = \ln'(x)\ln^{\beta}(x)$ admet $x \mapsto \frac{1}{1-\beta}\ln^{1-\beta}(x)$ pour primitive, on peut réécrire cet encadrement sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\beta}\left(\ln^{1-\beta}(N+1) - \ln^{1-\beta}(3)\right) &\leqslant \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)} \\ &\leqslant \frac{1}{1-\beta}\left(\ln^{1-\beta}(N) - \ln^{1-\beta}(2)\right).\end{aligned}$$

Si $\beta < 1$, on a $1-\beta > 0$ donc le membre de gauche de l'inégalité tend vers $+\infty$ lorsque $N \to +\infty$, donc

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty.$$

Si $\beta > 1$, on a $1-\beta < 0$ donc le terme de droite de l'inégalité tend vers une limite finie lorsque $N \to +\infty$; ainsi, la série des $\frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}$ est majorée, donc elle converge puisqu'elle est à termes positifs.

Il reste à étudier le cas $\beta = 1$: la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)} = \frac{\ln'(x)}{\ln(x)}$ admet $x \mapsto \ln(\ln(x))$ pour primitive sur $[3, N]$, donc l'encadrement obtenu donne sous la forme

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(2)) \leqslant \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln(n)};$$

en passant à la limite lorsque $N \to +\infty$, on obtient que

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln(n)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty,$$

c'est-à-dire que la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

3. Étudions le cas où $\alpha = 1$ et $\beta < 0$. Lorsque $\beta < 0$, on a $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}\right)$, or la série harmonique diverge, donc la série des $\frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}$ diverge par comparaison des séries à termes positifs.

   Ainsi, si $\alpha \neq 1$, la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}(n)}$ est donnée par la valeur de α : elle converge si $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$, la nature de la série est donnée par la valeur de β : elle converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leqslant 1$.
4. Les conditions attendues sont satisfaites en prenant $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ d'après ce qui précède.

Correction de l'exercice 22. Lalala
Correction de l'exercice 23. Regarder si pas déjà écrit !
Correction de l'exercice 24. Lalala
Correction de l'exercice 25. Lalala
Correction de l'exercice 26. Lalala
Correction de l'exercice 27. Lalala
Correction de l'exercice 28. Lalala