5 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 39 (Méthode de Newton). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. On suppose que f' est strictement positive sur $[a, b]$ et qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. On présente dans ce exercice la *méthode de Newton*, protocole itératif permettant d'approcher le réel c.

1. (a) Justifier l'existence des réels $m := \min_{[a,b]} f' > 0$ et $M := \max_{[a,b]} |f''|$.

   (b) Expliciter le cas $M = 0$. Dans la suite, on supposera que $M > 0$.

2. Soit $x \in [a, b]$ tel que $x \neq c$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction

$$g : y \longmapsto f(y) + f'(y)(c-y) - \frac{(y-c)^2}{(x-c)^2}\left(f(x) + f'(x)(c-x)\right),$$

   montrer que

$$\left|f(x) + f'(x)(c-x)\right| \leqslant \frac{M}{2}(x-c)^2. \tag{1}$$

3. La méthode de Newton consiste à choisir un réel $u_0 \in [a, b]$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à définir le réel u_{n+1} comme l'unique abscisse à laquelle la tangente à $\mathcal{C}_f$ en u_n croise l'axe des abscisses, si ce réel est dans $[a, b]$ (sinon, la méthode n'aboutit pas). On suppose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien définie et on se propose d'étudier la convergence de cette suite vers c.

   (a) Donner une expression explicite de u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Illustrer graphiquement la méthode de Newton.

   (c) En utilisant l'inégalité (1), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - c| \leqslant \frac{M}{2m}|u_n - c|^2.$$

   (d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - c| \leqslant \left(\frac{M}{2m}\right)^{2^n-1} |u_0 - c|^{2^n}$$

   et que si $|u_0 - c| < \frac{2m}{M}$, alors la méthode de Newton converge vers c à vitesse plus que géométrique, au sens où

$$\forall q \in]0, 1[, \quad |u_n - c| \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n).$$

4. Appliquer la méthode de Newton à la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$ à partir de $u_0 = 1$ pour déterminer une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

5. Appliquer la méthode de Newton pour résoudre de façon approchée l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Exercice 40 (Convexité). Cet exercice a pour but de définir et d'étudier la notion générale de *convexité* d'une fonction sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *convexe* si et seulement si

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que f est *concave* si et seulement si $-f$ est convexe.

1. Montrer que f est concave si et seulement si

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On s'intéressera uniquement dans cet exercice au cas des fonctions convexes ; le cas concave s'en déduit par passage à l'opposé.

2. Montrer que f est convexe si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de chacune de ses cordes.
3. Donner un exemple de fonction convexe non dérivable.
4. On dit d'une partie A de $\mathbb{R}^2$ qu'elle est *convexe* si et seulement si pour tous points $M, M' \in A$ le segment $[M, M']$ est entièrement contenu dans A. Montrer que f est convexe (en tant que fonction) si et seulement si son *épigraphe*

$$\mathcal{E}_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in I \ \text{ et } \ f(x) \leqslant y\}$$

est convexe (en tant que partie de $\mathbb{R}^2$) et donner une représentation graphique de ce résultat.

5. (a) Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y, z \in I, \quad x < y < z \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

et représenter graphiquement cette inégalité, nommée *inégalité des trois pentes*.

(b) Montrer que si I est un intervalle ouvert et si f est convexe, alors f est continue.

(c) Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, le taux d'accroissement

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

est une fonction croissante.

6. (a) Si f est dérivable sur I, montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante.

(b) Montrer que si f est dérivable sur I, alors f est convexe si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

7. Si f est deux fois dérivable sur I, montrer que f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$.

On dit que f est *strictement convexe* si et seulement si

$$\forall x, y \in I \,:\, x \neq y, \quad \forall \lambda \in]0,1[, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que f est *strictement concave* si et seulement si $-f$ est strictement convexe.

8. Donner un exemple de fonction convexe non strictement convexe.
9. Que devient l'inégalité des trois pentes dans le cas d'une fonction strictement convexe ?
10. Si f est dérivable sur I, montrer que f est strictement convexe si et seulement si f' est strictement croissante.
11. Donner un exemple de fonction strictement convexe non dérivable.
12. Montrer que si f est dérivable et convexe (resp. strictement convexe), alors tout point critique de f est un minimum global (resp. un minimum global strict) de f.

Exercice 41 (Inégalités de convexité). Cet exercice s'inscrit dans la continuité de l'exercice 40.

1. (a) Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$
   (b) Soit f une fonction strictement convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in]0,1[$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a
$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k),$$
   avec égalité si et seulement si tous les x_k sont égaux.
   (c) Adapter les résultats des deux questions précédentes au cas de fonctions concaves.
2. En utilisant la stricte concavité de la fonction ln, établir l'*inégalité arithmético-géométrique* selon laquelle pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ on a
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$
avec égalité si et seulement si tous les x_k sont égaux.

3. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ainsi que $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$. On veut montrer l'*inégalité de Hölder* selon laquelle
$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$
   (a) Montrer en utilisant la concavité de la fonction ln que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, et discuter du cas d'égalité.
   (b) Montrer que l'inégalité de Hölder est vraie si $\sum_{k=1}^n a_k^p = \sum_{k=1}^n b_k^q = 1$, et discuter du cas d'égalité sous cette hypothèse.
   (c) Montrer que l'inégalité de Hölder est vraie en général et discuter du cas d'égalité.
4. En déduire l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*, qui stipule que pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et tous $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ on a
$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2},$$
avec égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on ait $a_k = \lambda b_k$ ou tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on ait $b_k = \lambda a_k$.

Exercice 42 (Formule de Faà di Bruno). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non vide, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit φ une fonction définie sur un intervalle contenant $f(I)$.

On souhaite démontrer la formule de Faà di Bruno, qui stipule que si $n \in \mathbb{N}$ et si f et φ sont n fois dérivables, alors $\varphi \circ f$ l'est et sa dérivée n-ième est donnée par
$$(\varphi \circ f)^{(n)} = \sum \frac{n!}{m_1! 1!^{m_1} m_2! 2!^{m_2} \cdots m_n! n!^{m_n}} \left(\varphi^{(m_1 + \cdots + m_n)} \circ f \right) \cdot \prod_{j=1}^n \left(f^{(j)} \right)^{m_j},$$
où la somme porte sur l'ensemble des n-uplets $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $1m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n = n$.

1. Expliciter la formule dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
2. Prendre une grande inspiration et démontrer la formule dans le cas général par récurrence sur n.
3. Expliciter les dérivées successives de la fonction $x \mapsto e^{f(x)}$ lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Expliciter les dérivées successives de la fonction $x \mapsto (f(x))^N$ lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Cette formule n'a en réalité pas été découverte par le mathématicien italien Francesco Faà di Bruno (1825–1888) ; elle figure déjà dans un écrit du Français Louis François Antoine Arbogast datant de 1800.