5 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 40 (Continuité des fonctions puissances). Cet exercice s'inscrit dans la continuité de l'exercice 30 sur les fonctions lipschitziennes.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, la fonction puissance n-ième est k-lipschitzienne sur $[a, b]$, avec $k := n \max(|a|, |b|)^{n-1}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction puissance n-ième est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41. Le but de cet exercice est de démontrer l'affirmation du cours (corollaire 55) selon laquelle l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

1. Soit I une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in I$ tels que $x < y$ on ait $[x, y] \in I$. Montrer que I est un intervalle.

   Indication : on distinguera plusieurs cas selon que I est minorée (resp. majorée) ou non, et le cas échéant selon que I contient ou non sa borne inférieure (resp. supérieure).
2. Démontrer que si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.
3. L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est-elle nécessairement un intervalle ouvert ?

La propriété topologique démontrée dans la question 1 peut être reformulée en disant que les intervalles sont les seules parties de $\mathbb{R}$ connexes par arcs *(c'est-à-dire, pour simplifier, « en un seul morceau »). Les possibilités sont plus riches dans des espaces de dimension supérieure comme* $\mathbb{R}^2$ *ou* $\mathbb{R}^3$*, dans lesquels des ensembles connexes ne sont pas nécessairement des cubes !*

Exercice 42. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(\sin(x)).$$

1. Rappeler la démonstration de l'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$ valable pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis résoudre l'équation $\sin(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [-1, 1]$ et par $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Montrer que f est constante.

Exercice 43 (Point fixe des fonctions contractantes). Cet exercice s'inscrit dans la continuité de l'exercice 30.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que I est stable par f (c'est-à-dire que $f(x) \in I$ pour tout $x \in I$), et on définit la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que f est *contractante*, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que f soit k-lipschitzienne.

1. Commenter l'emploi du terme « contractante ».
2. Montrer que f est continue.
3. Montrer que f admet au plus un point fixe sur I. Ce point fixe existe-t-il nécessairement ?
4. Montrer que si f admet un point fixe $\ell \in I$, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|,$$

   et en déduire qu'alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

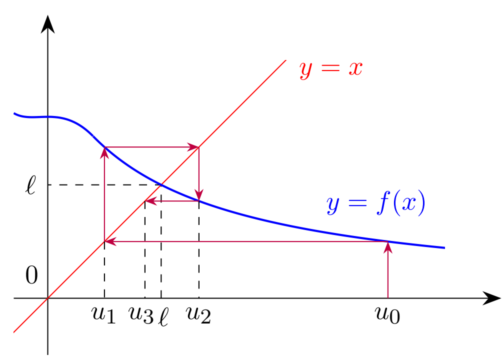
Attention, la question qui suit ne peut être traitée qu'à l'aide de la notion de suites de Cauchy abordée dans l'exercice 54 du chapitre 6.

5. On cherche à montrer que f admet un point fixe dès lors que I est fermé (rappelons que les intervalles de la forme $]-\infty, a]$, $[a, +\infty[$ et $\mathbb{R}$ sont considérés fermés).
   (a) Montrer que $|u_p - u_{p+1}| \leqslant k^p |u_0 - u_1|$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

   D'après l'exercice 54 du chapitre 6, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on note c, et qui appartient à I puisque I est fermé.

   (c) Montrer que c est un point fixe de f.

L'exercice explique pourquoi le caractère contractant de la fonction f implique, indépendamment du choix de $u_0 \in I$, la convergence de u_n vers ℓ à un rythme au moins géométrique, qui apparaît clairement sur la figure ci-contre.



Exercice 44 (Théorème des bornes atteintes). Le but de cet exercice est de démontrer le théorème des bornes atteintes. Il utilise le théorème de Bolzano-Weierstrass (hors programme) démontré dans les exercices accompagnant le chapitre « Suites réelles », qui stipule que de toute suite réelle à valeurs dans un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ on peut extraire une sous-suite qui converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On va montrer que f est bornée sur $[a, b]$ et y atteint sa borne supérieure, qui est donc un maximum ; il suffira alors d'appliquer le résultat à $-f$ pour voir que f atteint aussi sa borne inférieure, qui est donc un minimum.

1. Montrer que si f est non majorée, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) \geqslant n$, puis utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass pour arriver à une contradiction.

La fonction f est donc majorée, si bien que la quantité $M := \sup\limits_{[a,b]} f$ existe.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $y_n \in [a, b]$ tel que $M - \frac{1}{n} \leqslant f(y_n) \leqslant M$, puis utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass pour conclure.

Exercice 45 (Convergence uniforme). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I, et soit f une fonction définie sur I.

1. On suppose tout d'abord que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la quantité $\sup\limits_{I} |f_n - f|$ existe, et que

$$\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   On dit alors que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f. Montrer que f est continue.

2. Montrer que cette propriété n'est pas nécessairement vraie si l'on suppose seulement que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f, au sens où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ pour tout $x \in I$.

Mathematics is not a careful march down a well-cleared highway, but a journey into a strange wilderness, where the explorers often get lost. Rigour should be a signal to the historians that the maps have been made, and the real explorers have gone elsewhere.

— *W.S. Anglin*