2 ENTRAÎNEMENT

Exercice 14. Soient $n \geqslant 2$ et $x > 0$. Simplifier au maximum les expressions suivantes :

(i) $5^{2^{2n}} \left(\dfrac{1}{5^{2^n - 1}} \right)^{2^n + 1}$

(ii) $\sqrt{1 + x^2}$

(iii) $\dfrac{\sqrt{x^3 + x^5}}{x}$

(iv) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\sqrt[n]{x}^k \right)^k$

(v) $x^{\frac{n-1}{n^2-1}} (2x)^{-\frac{1}{n+1}}$

(vi) $\left(\sqrt{x^7} \right)^{\frac{6}{7}} \sqrt[7]{x^{14}}$

(vii) $\dfrac{\sqrt[n]{x^{n-3}}}{x^{-\frac{3}{n}}}$

$(viii)$ $\dfrac{2^n + 2^{n+1}}{2^{-(n+1)} + 2^{-n}}$

(ix) $x^{-\frac{n^2}{2}} \sqrt{x^n} \displaystyle\prod_{i=1}^{n} x^i$

Exercice 15. Déterminer, si cela est possible :

(i) Deux réels dont la somme vaut 30 et le produit 209.

(ii) Deux réels dont la somme des carrés vaut 30 et le produit des carrés vaut 209.

Exercice 16. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Montrer que si $a > 0$, alors f admet un minimum atteint en $-\frac{b}{2a}$ et n'admet pas de maximum.

   Indication : on pourra mettre l'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ sous forme canonique.
2. Montrer que si $a < 0$, alors f atteint un maximum atteint en $-\frac{b}{2a}$ et n'admet pas de minimum.

Exercice 17. Déterminer l'ensemble des réels x vérifiant chacune des conditions suivantes :

(i) L'équation $xy^2 + (2 - x)y + 1 = 0$ d'inconnue y admet deux solutions réelles distinctes.

(ii) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$

(iii) $x^4 + 2x^2 - 3 > 0$

(iv) $x^6 - 3x^3 + 1 = 0$

(v) $(x^2 - 2)(x^2 - 1) > (x^2 - 2)^2$

(vi) $x - 1 \leqslant \sqrt{x^2 + 2}$

(vii) $(x - 1)^4 \leqslant 16x^4$

$(viii)$ $x > 0$ et $x^2\sqrt{x} - 4x + \dfrac{1}{\sqrt{x}} < 0$

Exercice 18. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que le second volet de l'inégalité triangulaire soit une égalité, c'est-à-dire pour que

$$\big| |x| - |y| \big| = |x - y|.$$

Exercice 19. Trouver l'ensemble des réels x vérifiant les inégalités suivantes :

(i) $|x-2| < |x-1|$

(ii) $|x| + |x-1| \leqslant 3$

(iii) $|3x-2| < |x-1|$

(iv) $|2x+3| \leqslant |3x+2|$

(v) $|x-1| + |3x+1| \geqslant 8$

(vi) $\sqrt{1-x^2} > |3x+1|$

(vii) $(x+1)^2 \leqslant |x+1|$

(viii) $\dfrac{1}{2} < \dfrac{|x+1|}{|x-1|} \leqslant 1$

Exercice 20. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

Indication : procéder par double inégalité.

Exercice 21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $S := (3+\sqrt{7})^n + (3-\sqrt{7})^n$ est un entier pair.
2. En déduire que $\lfloor (3+\sqrt{7})^n \rfloor$ est impair.

Exercice 22. Soient $A \geqslant 0$ et $x_1, \dots, x_n \in [0, A]$. On appelle *moyenne géométrique des* x_k le réel

$$G := \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

Montrer que $G \in [0, A]$.

Exercice 23. Soient $x_1, \dots, x_n \in [-2, 1]$. Proposer le meilleur encadrement possible du produit

$$\prod_{k=1}^{n} x_k$$

par des constantes réelles.

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a $\dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.
2. En déduire l'inégalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.

Exercice 25. Soient A et B des parties de $\mathbb{R}$ non vides, majorées et telles que $A \cap B \neq \varnothing$.

1. Montrer que $\sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup(A), \sup(B))$.
2. Y a-t-il égalité dans l'inégalité précédente ?
3. Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
4. Montrer que si $\mathbb{R} \setminus A$ est non vide et minoré, alors $\sup(A) \geqslant \inf(\mathbb{R} \setminus A)$.
5. Y a-t-il égalité dans l'inégalité précédente ?

Exercice 26. Soient A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$ et

$$A + B := \{x + y,\, x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

1. Que vaut $A + B$ si $A = [-1, 1]$ et $B = [0, 3]$?
2. Que vaut $A + B$ si $A = \mathbb{Z}$ et $B = [0, 1[$?
3. Montrer que si A et B sont majorées, alors

$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$

Exercice 27. Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \neq 0$. Donner la borne supérieure de $B := \{\alpha x + \beta, x \in A\}$ en fonction des bornes de A.

Exercice 28. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $g : A \to \mathbb{R}$ des fonctions majorées.

1. Montrer que $f + g$ est majorée et que l'on a $\sup_A(f + g) \leqslant \sup_A f + \sup_A g$.
2. Donner un exemple de cas où $\sup_A(f + g) < \sup_A f + \sup_A g$.