# VARD

## Preuve formelle de la proposition 32

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Si $A$ est une partie de $[\![1,n]\!]$ à $k$ éléments, la probabilité que les variables aléatoires $X_i$ avec $i \in A$ prennent la valeur 1 et pour que les autres prennent la valeur 0 est égale à

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\forall i \in A,\, X_i = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!] \setminus A,\, X_j = 0) \\
&\qquad = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i\in A}(X_i = 1)\right) \cap \left(\bigcap_{j\in [\![1,n]\!]\setminus A}(X_j = 0)\right)\right) \\
&\qquad = \left(\prod_{i\in A}\mathbb{P}(X_i = 1)\right)\left(\prod_{j\in [\![1,n]\!]\setminus A}\mathbb{P}(X_j = 0)\right) \\
&\qquad = p^k(1-p)^{n-k}
\end{aligned}$$

par indépendance des $X_i$. Or l'événement $(X = k)$ est réalisé si et seulement si $(\forall i \in A,\, X_i = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!] \setminus A,\, X_j = 0)$ l'est pour une certaine partie $A$ de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $k$, c'est-à-dire que

$$(X = k) = \bigsqcup_{\substack{A\subset [\![1,n]\!] \\ |A|=k}} (\forall i \in A,\, X_i = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!] \setminus A,\, X_j = 0),$$

si bien que

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{\substack{A\subset [\![1,n]\!] \\ |A|=k}} \mathbb{P}(\forall i \in A,\, X_i = 1 \text{ et } \forall j \in [\![1,n]\!] \setminus A,\, X_j = 0)$$

par incompatibilité, soit

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{\substack{A\subset [\![1,n]\!] \\ |A|=k}} p^k(1-p)^{n-k}.$$

Or il existe $\binom{n}{k}$ parties de $[\![1,n]\!]$ à $k$ éléments, donc la somme est constituée de $\binom{n}{k}$ termes tous égaux à $p^k(1-p)^{n-k}$, donc

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}.$$

Ainsi, la variable aléatoire $X$ suit bien une loi binomiale au sens de la définition 21, ce qui clôt la preuve. $\square$