4.4 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

On peut à présent traiter le problème général et résoudre l'équation $z^n = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ pour un nombre complexe a quelconque.

Définition 44 (Racine n-ième d'un nombre complexe)**.** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}$. On appelle *racine n-ième de a* tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ solution de l'équation $z^n = a$.

Tout d'abord, si $a = 0$, il est clair que quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$, la seule racine n-ième de a est 0 (puisque si $z \neq 0$ alors $z^n \neq 0$).

On s'intéresse donc désormais au cas où $a \neq 0$.

Proposition 45 (Racines n-ièmes d'un nombre complexe non nul)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in \mathbb{C}^*$. On note $\theta_0 \in \mathbb{R}$ un argument de a. Alors les racines n-ièmes de $a \in \mathbb{C}^*$ sont au nombre de n : il s'agit des nombres complexes de la forme

$$|a|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta_0}{n} + \frac{2ik\pi}{n}} \quad \text{avec} \quad k \in [\![0, n-1]\!],$$

c'est-à-dire, en notant $\xi_0 := |a|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta_0}{n}}$, des nombres

$$\xi_0, \ \xi_0 e^{\frac{2i\pi}{n}}, \ \xi_0 e^{\frac{4i\pi}{n}}, \ \ldots, \ \xi_0 e^{\frac{2i(n-1)\pi}{n}}.$$

La lettre ξ est un « xi » (prononcer « ksi ») minuscule. La majuscule correspondante est Ξ.

Démonstration de la proposition 45 — Si $z \in \mathbb{C}^*$ et si $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de z, alors on a

$$z^n = a \iff \begin{cases} |z^n| = |a| \\ \arg(z^n) \equiv \theta_0 \, [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z|^n = |a| \\ n\theta \equiv \theta_0 \, [2\pi] \end{cases}$$

soit

$$z^n = a \iff \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|a|} \\ \theta \equiv \frac{\theta_0}{n} \left[\frac{2\pi}{n}\right]. \end{cases}$$

Rappelons que le passage à la racine n-ième dans l'équivalence $|z|^n = |a| \Leftrightarrow |z| = \sqrt[n]{|a|}$ est rendu possible par le fait que $|z|$ est un réel positif.

Ainsi, on a

$$z^n = a \iff \exists k \in \mathbb{Z} \, : \, z = \sqrt[n]{|a|} e^{i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = \xi_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}}.$$

Or on a vu dans la preuve de la proposition 43 que les valeurs deux à deux distinctes du nombre $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont celles que l'on obtient pour $k \in [\![0, n-1]\!]$.

On a donc

$$z^n = a \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!] \,:\, z = \xi_0 e^{\frac{2ik\pi}{n}},$$

d'où le résultat annoncé. $\square$

La forme explicite des racines n'est pas à retenir par cœur. Il importe en revanche de savoir reproduire le raisonnement pour trouver explicitement les racines n-ièmes de nombres complexes dont un argument est connu, ainsi que de connaître le résultat théorique selon lequel un nombre $a \in \mathbb{C}^*$ admet n racines n-ièmes distinctes dans $\mathbb{C}$.

Les images des racines n-ièmes d'un nombre complexe $a \in \mathbb{C}^*$ sont situées sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{|a|}$; elles forment une fois encore un polygone régulier (qui n'admet plus le point d'affixe 1 pour sommet si $a \neq 1$).

Exemple. Cherchons les racines troisièmes du nombre $-2i = 2e^{i\frac{3\pi}{2}}$. Si $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$z^3 = -2i \iff \begin{cases} |z^3| = 2 \\ \arg(z^3) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} |z|^3 = 2 \\ 3\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z| = \sqrt[3]{2} \\ \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \end{cases}$$

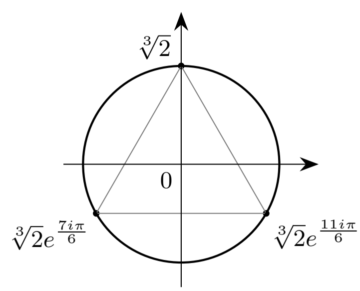
On obtient les trois racines suivantes :

$$\sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{2}} = \sqrt[3]{2}i,$$

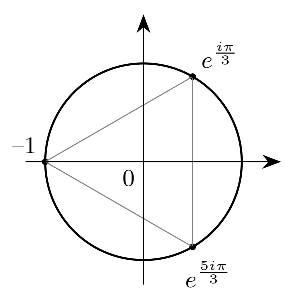
$$\sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{2i\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{\frac{7i\pi}{6}} = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$

et

$$\sqrt[3]{2}e^{\frac{i\pi}{2}}e^{\frac{4i\pi}{3}} = \sqrt[3]{2}e^{\frac{11i\pi}{6}} = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right).$$



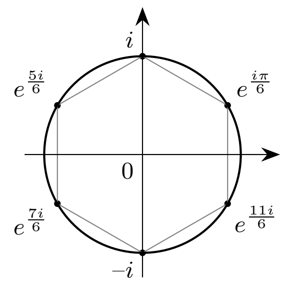
Exemple. Les racines n-ièmes de -1 sont les nombres complexes $e^{\frac{i\pi}{n}+\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$. On observe que parmi ces racines, aucune n'est réelle si n est pair, et seule -1 est réelle si n est impair (voir les schémas ci-contre).



Racines troisièmes de -1

Remarque — *On retrouve ici l'idée selon laquelle la situation asymétrique observée sur $\mathbb{R}$ (l'existence d'une unique racine n-ième pour un nombre réel quelconque si n est impair, et celle de deux racines n-ièmes pour les réels strictement positifs et aucune pour les réels strictement négatifs si n est pair) n'est que la trace sur $\mathbb{R}$ d'une situation bien plus* *symétrique sur $\mathbb{C}$ (l'existence de n racines n-ièmes distinctes pour tout nombre complexe non nul). Nous observerons un phénomène similaire dans le cours sur les polynômes, dans lequel nous effectuerons des incursions sur $\mathbb{C}$ pour obtenir des résultats sur des polynômes à coefficients réels.*

Une branche de l'analyse nommée analyse complexe *exploite pleinement ce principe et permet, entre autres, d'expliquer de nombreuses propriétés des fonctions réelles à partir de leurs prolongements à $\mathbb{C}$, ce qui permet par exemple de réaliser certains calculs d'intégrales sur des intervalles réels à l'aide de détours inattendus et parfois spectaculaires par le plan complexe.*



Racines sixièmes de -1