2 ENTRAÎNEMENT

Exercice 6. Pour chacun des points suivants, donner un exemple de suite positive (u_n) telle que :

(i) $\sum u_n$ converge et $\sum \sqrt{u_n}$ diverge.

(ii) $\sum u_n$ converge et $\sum \sqrt{u_n}$ converge.

(iii) $\sum u_n$ converge et $\sum \sqrt{n} u_n$ diverge.

(iv) $\sum \sqrt[p]{u_n}$ converge pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7. Déterminer la nature des séries suivantes :

(i) $\displaystyle\sum_{j\geqslant 1} \frac{2j^5 + j}{j^6 - j^3 + 2j}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n - n}{5^n + 2n^3}$

(iv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{\sin\left(n^2 + n + 1\right)}{n^2 + n + 1}$

(v) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^6 \ln^3(n)}{3^n}$

(vi) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{2^{\cos(k)} \sin^2(k)}{k\sqrt{k}}$

(vii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$

$(viii)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^5 3^n}{4^n}$

(ix) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$

(x) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k e^{-k}$

(xi) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left[\ln\left((n+1)^2\right) - \ln(n^2)\right]$

(xii) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left[\ln\left(n^2 + 1\right) - \ln(n^2)\right]$

$(xiii)$ $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \left(\arctan\left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1 + \frac{1}{k}}\right)\right)^2$

(xiv) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(n+3)^2}$

(xv) $\displaystyle\sum_{j\geqslant 1} \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{j}\right)\right)$

(xvi) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{1 + \sqrt{n+1}}{1 + \sqrt{n}}\right)$

$(xvii)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$

$(xviii)$ $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n (n^3 + 1)\ln(n)}{3\sqrt{n}}$

(xix) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{2n + \sin(n)}{3n}\right)^n$

(xx) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$

(xxi) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-2)^k}{\sqrt{k!}}$

$(xxii)$ $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{(2k+1)!}$, où $x \in \mathbb{R}$

Exercice 8. Calculer les sommes suivantes :

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{3^{2k+1}}$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

(iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\arctan\left(\frac{1}{k}\right) - \arctan\left(\frac{1}{k+1}\right)\right)$

(v) $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2^i}$

(vi) $\displaystyle\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i(i-1)}{2^i}$

(vii) $\displaystyle\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i^2}{2^i}$

$(viii)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$, où $x \in \mathbb{R}$

(ix) $\displaystyle\sum_{a=0}^{+\infty}\sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{a+b}}$

(x) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\binom{n}{m} 2^m m^{n-m}$

Exercice 9. Soit $\alpha > 1$. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $r_n := \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Justifier l'existence de r_n pour tout $n \geqslant 1$.
2. Donner la limite de la suite $(r_n)_{n\geqslant 1}$.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et tout $N > n$ on a
$$\int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^N \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha},$$
puis en déduire un encadrement de r_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire que la série de terme général r_n converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 10.

1. Montrer que $\frac{2^n}{\ln(n)^n} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ à partir d'un certain rang, puis donner la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{2^n}{\ln(n)^n}$.
2. Comparer les valeurs des sommes $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{\ln(n)^n}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Exercice 11. Soit (u_n) une suite à termes positifs. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge.

Exercice 12 (Une série semi-convergente).

1. En intégrant sur $[0,1]$ la formule donnant l'expression de la somme $\sum_{k=0}^{n}(-x)^k$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x.$$

2. En déduire que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1}$ converge et que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)$.

3. La série étudiée est-elle absolument convergente ?

Exercice 13 (Une autre preuve de la divergence de la série harmonique).
On souhaite démontrer la divergence de la série harmonique par une méthode ne faisant pas appel aux intégrales.
Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note

$$H_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$$

la N-ième somme partielle de la série harmonique.

1. Montrer que la série harmonique $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} = (H_N)_{N\geqslant 1}$ diverge si et seulement si la suite $(H_N)_{N\geqslant 1}$ n'est pas majorée.

2. Montrer que pour tout $p \geqslant 1$ on a

$$H_{2p} - H_p \geqslant \frac{1}{2}.$$

3. En déduire que la suite $(H_N)_{N\geqslant 1}$ n'est pas majorée et conclure.

Cette preuve a été présentée par l'homme de science médiéval Nicolas Oresme dans son ouvrage Questiones super geometriam Euclidis *(1360). Elle précède donc de plusieurs siècles la preuve par comparaison série/intégrale donnée dans le cours.*

L'idée de la preuve est de montrer que la somme infinie

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

peut être regroupée en une infinité de « paquets de termes » (de taille 1, 2, 3, etc) dont la somme dépasse toujours $\frac{1}{2}$: elle vaut donc $+\infty$.

Exercice 14. Soit $q \in \mathbb{R}$. Établir le résultat évoqué dans le cours selon lequel la série *géométrique dérivée deux fois* $\sum_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$ converge si et seulement si $q \in]-1,1[$, et sa somme vaut alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Exercice 15 (Règle de Riemann). Soit (u_n) une suite de réels positifs.

1. Montrer que s'il existe $\alpha > 1$ tel que $n^\alpha u_n$ tende vers une limite finie, alors $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que s'il existe $\alpha < 1$ tel que $n^\alpha u_n$ tende vers une limite finie non nulle ou vers $+\infty$, alors $\sum u_n$ diverge.

Exercice 16 (Théorème de Fubini triangulaire). Soit $(u_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ une famille de réels positifs tels que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_{m,n}$ converge pour tout $m \geqslant 0$ et que $\sum\limits_{m\geqslant 0} u_{m,n}$ converge pour tout $n \geqslant 0$. Montrer qu'alors on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=m}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{n} u_{m,n},$$

Il s'agit de la transposition au cadre des séries de la proposition 27 du chapitre 2.

où l'égalité a lieu dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Indication : on pourra se ramener au théorème de Fubini classique en faisant usage de la quantité

$$d_{m,n} := \begin{cases} 1 \text{ si } m \leqslant n \\ 0 \quad \text{sinon.} \end{cases}$$