Relations de comparaison

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 10. On applique le « principe lexicographique » consistant à trier les expressions par leur raison *géométrique*, puis par la croissance de leurs facteurs *polynomiaux*[1], puis par celle de leurs facteurs *logarithmiques*, ce qui donne

$$\begin{aligned}\ln^{10}(n) \ll n+1 \ll 2^n \ll \frac{n}{\ln(n)}2^n \ll n3^n\sqrt{n^2+1} \\ \ll n^2 3^n \sqrt[3]{n} \ll n^7 \ln(n)\left(\frac{7}{2}\right)^n \ll (n+3)^5(n-2)(n-1)^2\left(\frac{7}{2}\right)^n \\ \ll \frac{4^n}{2n^5} \ll \frac{4^n}{\ln^3(n)} \ll 4^n.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 11. On utilise à nouveau le « principe lexicographique » mis en application dans l'exercice précédent. On trie donc les expressions par leur raison *géométrique*, puis leurs facteurs *polynomiaux*, et enfin par leurs facteurs *logarithmiques*, ce qui donne

$$\begin{aligned}\underbrace{n^3e^{-2n}}_{n^3\left(\frac{1}{e^2}\right)^n} \ll \underbrace{e^{-n}\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\left(\frac{1}{2e}\right)^n} \ll \underbrace{n^5e^{-n}\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{n^5\left(\frac{1}{2e}\right)^n} \ll \underbrace{n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}_{n\left(\frac{1}{4}\right)^n} \ll \underbrace{e^{-n}}_{\left(\frac{1}{e}\right)^n} \ll n^2\ln^4(n)\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \ll (n^4+3n^2)\ln(n)\left(\frac{1}{2}\right)^n \ll \left(\frac{3}{4}\right)^n \ll n^{20}\left(\frac{3}{4}\right)^n \ll \left(\frac{9}{10}\right)^n \ll \frac{3n^2}{n^4-1} \ll \frac{1}{n\ln(n)} \ll \frac{1}{\ln^3(n)}.\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 12. On va démontrer la chaîne de relations suivantes[2] : lorsque n tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned}n^{\ln(n)} \ll n^5e^{\sqrt{n}} \ll \ln^{\sqrt{n}}(n) \ll n^{\sqrt{n}} \ll 5^n \\ \ll \ln^n(n) \ll \sqrt{n}^{\,n} \ll n! \ll n^n \ll e^{e^n} \ll \ln^{e^n}(n) \ll n^{e^n}\end{aligned}$$

1. L'expression « polynomiaux » est employée ici en un sens abusivement large : elle désigne tous les termes dont la croissance ou la décroissance est de l'ordre de celle d'une puissance (positive ou négative) de n. En ce sens, les expressions $\frac{1}{2n^5}$ ou $\sqrt{n^2+1}$ sont considérées comme « polynomiales ».

2. Le classement parachuté ici ne provient pas d'une intuition divine mais d'une série d'essais menant à des comparaisons d'expressions deux à deux.
Chaque comparaison demande des techniques et stratagèmes spécifiques pour être menée à bien et il est nécessaire pour tirer profit de cette correction d'avoir cherché vous-même à établir les résultats annoncés.

Avant de commencer, rappelons à toutes fins utiles que si $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, l'expression a^{b^c} désigne le réel $a^{(b^c)}$ et non le réel $(a^b)^c = a^{bc}$.

On va utiliser le lemme suivant (dont l'utilisation serait évitable mais s'avèrera bien pratique) :

Lemme 1. — *Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont deux suites réelles, si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$, alors $e^{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} o(e^{v_n})$.*

Démonstration du lemme 1. Sous les hypothèses du lemme, on peut écrire que pour n assez grand,

$$\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n} = e^{v_n\left(\frac{u_n}{v_n}-1\right)},$$

or

$$\frac{u_n}{v_n} - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 - 1 = -1 \quad \text{d'où} \quad v_n\left(\frac{u_n}{v_n} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

puisque $u_n = o(v_n)$ et $v_n \to +\infty$, donc $\frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où le résultat. □

Ce lemme nous permettra de « passer à l'exponentielle dans une relation de négligeabilité » ; dans la suite de l'exercice, à chaque fois que l'on fera mention du lemme 1, on sous-entendra que les conditions sur les suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont vérifiées (notamment le fait que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$).

Démontrons à présent la chaîne de relations annoncée.

- Établissons la première relation de négligeabilité de la chaîne. Pour tout $n \geqslant 1$, on peut écrire $u_n := \ln(n^{\ln(n)}) = \ln^2(n)$ et $v_n := \ln(n^5 e^{\sqrt{n}}) = 5\ln(n) + \sqrt{n}$. Or d'après le principe de croissance comparée, on a $\ln^2(n) = o\left(5\ln(n) + \sqrt{n}\right)$ (soit $u_n = o(v_n)$) lorsque $n \to +\infty$, d'où, en passant à l'exponentielle grâce au lemme 1, $e^{u_n} = o(e^{v_n})$, soit encore

  $$n^{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^5 e^{\sqrt{n}}\right),$$

  ce qu'il fallait démontrer. On utilisera de façon répétée cette méthode dans les points suivants, sans faire explicitement mention des suites (u_n) et (v_n).
- On a ensuite $\ln\left(\ln^{\sqrt{n}}(n)\right) = \sqrt{n}\ln(\ln(n))$ pour $n \geqslant 2$, or

  $$5\ln(n) + \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sqrt{n}\ln(\ln(n))\right)$$

  d'où, en passant à l'exponentielle grâce au lemme 1 :

  $$n^5 e^{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\ln^{\sqrt{n}}(n)\right),$$

  ce qui est la deuxième relation de la chaîne.

- Pour démontrer la troisième relation, on écrit que $\ln(n^{\sqrt{n}}) = \sqrt{n}\ln(n)$ pour tout $n \geqslant 1$, or $\sqrt{n}\ln(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(\sqrt{n}\ln(n))$ puisque $\ln(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$ par croissance comparée, d'où, après application du lemme 1 :
$$\ln^{\sqrt{n}}(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{\sqrt{n}}\right).$$
- La quatrième relation provient du fait que
$$\ln(n^{\sqrt{n}}) = \sqrt{n}\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(n\ln(5)) = o(\ln(5^n))$$
par croissance comparée, puis d'une nouvelle application du lemme 1.
- Pour montrer que $5^n \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln^n(n))$, on écrit que
$$\ln(5^n) = n\ln(5) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n\ln(\ln(n))\right),$$
d'où le résultat d'après le lemme 1.
- Démontrons à présent la relation $\ln^n(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sqrt{n}^n\right)$. Pour tout $n \geqslant 3$, on a
$$\ln\left(\ln^n(n)\right) = n\ln(\ln(n)) \quad \text{et} \quad \ln\left(\sqrt{n}^n\right) = \frac{1}{2}n\ln(n)),$$
or $\ln(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$ par croissance comparée donc
$$n\ln(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2}n\ln(n)\right) \quad \text{soit} \quad \ln\left(\ln^n(n)\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\ln\left(\sqrt{n}^n\right)\right),$$
d'où le résultat attendu grâce au lemme 1.
- Pour montrer que $\sqrt{n}^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$, on procède comme dans la démonstration du théorème des croissances comparées. On pose donc $u_n := \frac{\sqrt{n}^n}{n!}$ pour tout $n \geqslant 1$. On a alors
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{\sqrt{n+1}^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{\sqrt{n}^n}{n!}} = \frac{\sqrt{n+1}^{n+1}}{(n+1)\sqrt{n}^n} &= \left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{e}\cdot 0 = 0\end{aligned}$$
grâce à la limite $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$ donnée par l'exemple 17 du cours. Ainsi, la suite strictement positive $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante à partir d'un certain rang ; elle admet donc une limite positive ou nulle par le théorème de la limite monotone, et le fait que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow 0$ assure que cette limite vaut 0 (sans quoi on aurait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \frac{\ell}{\ell} = 1$), ce qui clôt la preuve.

- Montrons à présent que $n! \underset{n\to+\infty}{=} o(n^n)$. Pour cela, on écrit

$$0 \leqslant \frac{n!}{n^n} = \frac{\overbrace{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}^{n \text{ termes}}}{\underbrace{n\cdot n\cdots n\cdot n}_{n \text{ termes}}} = \underbrace{\frac{n}{n}}_{\leqslant 1}\cdot\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\leqslant 1}\cdots\underbrace{\frac{2}{n}}_{\leqslant 1}\cdot\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

et donc $\dfrac{n!}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème des gendarmes, d'où la relation attendue.

- On établit à présent la relation $n^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{e^n}\right)$. Pour cela, on écrit que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\ln(n^n) = n\ln(n) \quad \text{et} \quad \ln\left(e^{e^n}\right) = e^n$$

pour tout $n \geqslant 1$, or $n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(e^n)$ d'après le principe de croissance comparée, donc $n^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^{e^n}\right)$ d'après le lemme 1.

- On montre ensuite que $e^{e^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\ln^{e^n}(n)\right)$: pour cela, on écrit que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\ln\left(e^{e^n}\right) = e^n \quad \text{et} \quad \ln\left(\ln^{e^n}(n)\right) = e^n\ln(\ln(n)),$$

or $e^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^n\ln(\ln(n))\right)$ puisque $\ln(\ln(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ce qui implique d'après le lemme 1 que $e^{e^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\ln^{e^n}(n)\right)$.

- Enfin, on démontre que $\ln^{e^n}(n) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^{e^n}\right)$ en écrivant que pour tout $n \geqslant 2$ on a

$$\ln\left(\ln^{e^n}(n)\right) = e^n\ln(\ln(n)) \quad \text{et} \quad \ln\left(n^{e^n}\right) = e^n\ln(n),$$

or on a $\ln(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$ par croissance comparée, ce qui implique que $\ln\left(\ln^{e^n}(n)\right) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(e^n\ln(n)\right)$, d'où le résultat attendu d'après le lemme 1.

Correction de l'exercice 13.

(i) On passe à la forme exponentielle et on utilise le $DL_1(0)$ de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ pour écrire, lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)} = e^{\lambda+o(\lambda)}.$$

Or λ est une constante, donc $o(\lambda)$ est un terme de limite nulle, si bien que

$$\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{\lambda+o(\lambda)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\lambda}$$

par continuité de l'exponentielle.

On aurait aussi pu raisonner avec des équivalents[3], en écrivant que

$$n \ln\left(1+\frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n \cdot \frac{\lambda}{n} = \lambda$$

et donc

$$n \ln\left(1+\frac{\lambda}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda,$$

d'où

$$\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{\lambda+o(\lambda)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^\lambda$$

par continuité de l'exponentielle.

(*ii*) On a affaire à une suite extraite de celle étudiée au point précédent : il s'agit de la suite $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$, où l'on a noté $u_n : \left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, la limite de cette suite est une fois encore e^λ.

(*iii*) En passant à la forme exponentielle, on obtient cette fois que lorsque $n \to +\infty$:

$$\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\ln\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)} = e^{n^2\left(\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{\lambda}{n}\right)\right)} = e^{\lambda n+o(\lambda n)}.$$

Or $\lambda n + o(\lambda n)$ admet la même limite que λn, qui est $-\infty$ si $\lambda < 0$, 0 si $\lambda = 0$ et $+\infty$ si $\lambda > 0$. On a donc

$$\left(1+\frac{\lambda}{n}\right)^{n^2} = e^{\lambda n+o(\lambda n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left\{\begin{array}{ccc} 0 & \text{si} & \lambda<0 \\ 1 & \text{si} & \lambda=0 \\ +\infty & \text{si} & \lambda>0 \end{array}\right. .$$

(*iv*) En passant à la forme exponentielle, on obtient cette fois

$$\left(1+\frac{\lambda}{n^2}\right)^{n} = e^{n\ln\left(1+\frac{\lambda}{n^2}\right)} = e^{n\left(\frac{\lambda}{n^2}+o\left(\frac{\lambda}{n^2}\right)\right)} = e^{\frac{\lambda}{n}+o\left(\frac{\lambda}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$$

par continuité de exp en 0.

(*v*) On utilise toujours la même méthode : lorsque $n \to +\infty$, on a

$$\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}} = e^{\sqrt{n+1}\ln\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)} = e^{\sqrt{n+1}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)\right)} = e^{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\lambda+o\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\lambda\right)},$$

mais $\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \sqrt{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc

$$\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}} = e^{\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\lambda+o\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\lambda\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^\lambda$$

par continuité de l'exponentielle.

3. Notons que la preuve proposée ne revient pas à composer un équivalent par la fonction exp, ce qui est notoirement illicite en général, mais à composer un passage à la limite par la fonction continue exp.

(vi) On a cette fois

$$\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)^{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = e^{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\ln\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)}$$
$$= e^{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}+o\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)\right)} = e^{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\lambda+o(\lambda))}$$

lorsque $n \to +\infty$. On souhaite à présent étudier la limite de la quantité $\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ lorsque $n \to +\infty$: on peut pour cela faire apparaître une quantité conjuguée, mais il est davantage dans l'esprit du chapitre d'utiliser un équivalent du cours et d'écrire

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \sqrt{n}\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}-1\right)$$
$$= n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\cdot\frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

On obtient alors

$$\left(1+\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right)^{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = e^{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\lambda+o(\lambda))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{\lambda}{2}}$$

par continuité de l'exponentielle.

Correction de l'exercice 14.

(i) On utilise un équivalent pour simplifier le terme $\ln(1+x)$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

donc

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty.$$

Notons que l'équivalent est valable à droite comme à gauche de 0 mais que la limite n'est, elle, qu'une limite à droite en 0, c'est-à-dire une limite en 0^+.

(ii) On a cette fois $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x^2} = \dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty$, d'où

$$\frac{\ln(1+x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty.$$

(iii) On a $\dfrac{\sin(x)x^2}{\ln(1+x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x\cdot x^2}{x^2} = x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, et donc

$$\frac{\sin(x)x^2}{\ln(1+x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

(*iv*) Lorsque $x \to +\infty$, on a $\frac{1}{x} \to 0$, donc, en utilisant l'équivalent $e^y - 1 \sim y$ valable pour $y \to 0$:

$$x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \cdot \frac{1}{x} = 1, \quad \text{d'où} \quad x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

(*v*) On écrit

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{x^3+x^2} - x &= \left(x^3+x^2\right)^{\frac{1}{3}} - x = \left(x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{3}} - x \\ &= x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - x = x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] \underset{x\to+\infty}{\sim} x \cdot \frac{1}{3x} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

en utilisant l'équivalent $(1+y)^{\frac{1}{3}} - 1 \sim \frac{y}{3}$ valable lorsque $y \to 0$, d'où

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} - x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{3}.$$

(*vi*) Il n'est bien sûr pas question de réaliser une différence d'équivalents pour l'expression proposée ! On a plutôt recours à deux $DL_1(0)$, celui de $y \mapsto \ln(1+y)$ et celui de $y \mapsto \sin(y)$: lorsque $x \to +\infty$ (et donc lorsque $\frac{1}{x} \to 0$), on a

$$x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} - o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x \cdot o\left(\frac{1}{x}\right) = o(1),$$

d'où

$$x\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

(*vii*) Comme plus haut, on a recours à un développement limité pour étudier le terme $e^x - \cos(x)$: lorsque $x \to 0$, on a

$$e^x - \cos(x) = 1 + x + o(x) - (1 + o(x)) = x + o(x) \sim x,$$

d'où $(e^x - \cos(x))^3 \sim x^3$ et enfin

$$\frac{(e^x - \cos(x))^3}{x^2} \sim \frac{x^3}{x^2} = x \xrightarrow[x\to 0]{} 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{(e^x - \cos(x))^3}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

(*viii*) En utilisant les propriétés du logarithme, on peut écrire

$$\begin{aligned}n^2\left(\ln(n^2+n+1) - 2\ln(n)\right) &= n^2\left(\ln(n^2+n+1) - \ln(n^2)\right) \\ &= n^2 \ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right) = n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

or $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, donc

$$n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

d'où $n^2\left(\ln(n^2+n+1) - 2\ln(n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$

(ix) Désormais habitués aux raisonnements de croissance comparée, on peut « sentir » l'équivalent

$$\frac{e^{\frac{3x}{2}} + e^{-x} - \sqrt{x}\ln(x) + \sqrt[5]{x}e^{x}}{1 - e^{2x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{\frac{3x}{2}}}{-e^{2x}} = -e^{-\frac{x}{2}} \tag{1}$$

et en déduire directement la limite

$$\frac{e^{\frac{3x}{2}} + e^{-x} - \sqrt{x}\ln(x) + \sqrt[5]{x}e^{x}}{1 - e^{2x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Pour démontrer l'équivalent (1) – ce qui n'est nécessaire que si vous n'en êtes pas convaincu ou si on vous le demande ! – on peut écrire

$$\frac{e^{\frac{3x}{2}} + e^{-x} - \sqrt{x}\ln(x) + \sqrt[5]{x}e^{x}}{e^{\frac{3x}{2}}} = 1 + \underbrace{e^{-\frac{x}{2}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\sqrt{x}\ln(x)}{e^{\frac{3x}{2}}}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\sqrt[5]{x}}{e^{x}}}_{\to 0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

par croissance comparée, ainsi que

$$\frac{1 - e^{2x}}{-e^{2x}} = -\underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{\to 0} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1,$$

d'où les équivalents

$$\frac{e^{\frac{3x}{2}} + e^{-x} - \sqrt{x}\ln(x) + \sqrt[5]{x}e^{x}}{e^{\frac{3x}{2}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\frac{3x}{2}} \quad \text{et} \quad 1 - e^{2x} \underset{x\to+\infty}{\sim} -e^{2x},$$

qui donnent finalement (1) et la limite annoncée.

(x) Lorsque $x \to 0^+$, on a $1 - \cos(x) = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2}$, ce qui permet d'obtenir l'équivalent $\sqrt{1 - \cos(x)} \sim \sqrt{\frac{x^2}{2}} = \frac{x}{\sqrt{2}}$ (rappelons que l'on considère uniquement le cas où x tend vers 0 par valeurs positives !). Ainsi, on peut écrire

$$\frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\ln(1 + x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\frac{x}{\sqrt{2}}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

donc

$$\frac{\sqrt{1 - \cos(x)}}{\ln(1 + x)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(xi) Lorsque $x \to 1$, on a $\cos(x-1) \to 1$ donc $\cos(x-1) - 1 \to 0$, d'où, en utilisant l'équivalent classique $\sqrt{1+y} - 1 \underset{y\to 0}{\sim} \frac{y}{2}$:

$$\sqrt{\cos(x-1)} - 1 = \sqrt{1 + (\cos(x-1) - 1)} - 1 \underset{x\to 1}{\sim} \frac{\cos(x-1) - 1}{2}.$$

On utilise à présent le fait que $u := x - 1$ tend vers 0 lorsque $x \to 1$, puis les équivalents classiques $\cos(u) - 1 \sim -\frac{u^2}{2}$ et $\ln(1+u) \sim u$ lorsque $u \to 0$, pour écrire que lorsque $x \to 1$:

$$\frac{\sqrt{\cos(x-1)} - 1}{\ln(x)} \sim \frac{\cos(x-1) - 1}{2\ln(x)} = \frac{\cos(u) - 1}{2\ln(1+u)} \sim \frac{-\frac{u^2}{2}}{2u} = -\frac{u}{4}.$$

Or $-\frac{u}{4} \to 0$ lorsque $x \to 1$, donc

$$\frac{\sqrt{\cos(x-1)} - 1}{\ln(x)} \xrightarrow[x \to 1]{} 0.$$

(xii) Lorsque $x \to 0$, on a $e^x - 1 \to 0$, donc $\tan(e^x - 1) \sim e^x - 1$ (notons que l'on ne compose pas ici d'équivalents, mais que l'on utilise l'équivalent $\tan(u) \sim u$ valable lorsque $u \to 0$ avec $u := e^x - 1$). Ainsi, on peut écrire

$$\frac{\tan(e^x - 1)}{x^3} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{e^x - 1}{x^3} \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty.$$

On a donc $\frac{\tan(e^x - 1)}{x^3} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$.

Correction de l'exercice 15.

(i) Le terme prépondérant en $+\infty$ est x^2, donc on peut écrire[4]

$$x^2 + 3x \underset{x \to +\infty}{\sim} x^2.$$

(ii) Le terme prépondérant en 0 est ici $-\sqrt[3]{x} = -x^{\frac{1}{3}}$, d'où

$$x^2 + 3x - \sqrt[3]{x} \underset{x \to 0}{\sim} -\sqrt[3]{x}.$$

(iii) Comme $\sin(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$, on peut utiliser l'équivalent $e^y - 1 \sim y$ valable lorsque $y \to 0$:

$$e^{\sin(x)} - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x.$$

(iv) Comme $\frac{1}{x^2} \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, on peut utiliser l'équivalent $\sin(y) \sim y$ valable lorsque $y \to 0$:

$$\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x \to +\infty}{\sim} \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

(v) On sait que $\ln(x) \to -\infty$ lorsque $x \to 0^+$, donc le terme prépondérant de l'expression $x - 2 + \ln(x)$ en 0^+ est $\ln(x)$ (puisque les autres termes tendent vers une limite finie). Ainsi,

$$x - 2 + \ln(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \ln(x).$$

4. Sur une copie, il n'est pas nécessaire de détailler la démonstration de ce résultat plutôt évident, mais la méthode est toujours la même : on forme le quotient $\frac{x^2+3x}{x^2} = 1 + \frac{3}{x}$ et on vérifie qu'il tend vers 1 lorsque x tend vers $+\infty$.

(*vi*) En revanche, lorsque $x \to +\infty$, le terme prépondérant de l'expression est x par croissance comparée : on a donc

$$x - 2 + \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x.$$

(*vii*) L'astuce consiste ici à factoriser par l'un des deux termes pour faire apparaître la forme $e^y - 1$ avec $y \to 0$ (dans le calcul ci-dessous, y est l'expression $\frac{1}{x(x+1)}$) :

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} &= e^{\frac{1}{x+1}}\left(e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}} - 1\right) \\ &= \underbrace{e^{\frac{1}{x+1}}}_{\to e^0=1}\left(e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1 \cdot \frac{1}{x(x+1)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

(*viii*) On se ramène à l'équivalent $\ln(1+y) \sim y$ valable lorsque $y \to 0$ en écrivant

$$\ln(x-1) = \ln(1 + (x-2)) \underset{x\to2}{\sim} x - 2.$$

(*ix*) Par le même stratagème que précédemment, on écrit

$$\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln\left(1 + \left(\frac{x}{2} - 1\right)\right) \underset{x\to2}{\sim} \frac{x}{2} - 1 = \frac{x-2}{2}.$$

(*x*) On ne peut pas *a priori* composer l'équivalence $\tan(x) \sim x$ valable en 0^+ pour obtenir l'équivalent $\ln(\tan(x)) \sim \ln(x)$. On peut toutefois tenter de montrer que cette équivalence est vraie en considérant le quotient

$$\frac{\ln(\tan(x))}{\ln(x)} = \frac{\ln(\tan(x)) - \ln(x)}{\ln(x)} + 1 = \frac{\ln\left(\frac{\tan(x)}{x}\right)}{\ln(x)} + 1,$$

qui tend bien vers 1 lorsque $x \to 0^+$ puisque $\frac{\tan(x)}{x} \to 1$ et $\ln(x) \to -\infty$. On a donc l'équivalence

$$\ln(\tan(x)) \underset{x\to0^+}{\sim} \ln(x).$$

Cette preuve permet de montrer en général que l'on *peut* composer par ln des équivalents d'expressions tendant vers 0^+. La même démonstration est d'ailleurs valable lorsque les expressions considérées tendent vers $+\infty$. Elle ne l'est plus lorsque les deux expressions tendent vers 1, cas dans lequel la composition des équivalents par ln est bel et bien illicite en général (par exemple, lorsque $x \to 0$ on a $1 + x \sim 1 + x^2$ mais $\ln(1+x) \not\sim \ln\left(1+x^2\right)$).

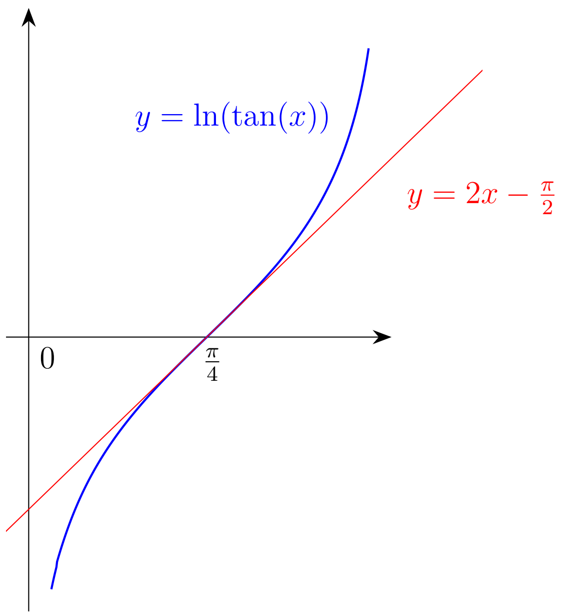
(*xi*) Lorsque $x \to \frac{\pi}{4}$, on a $\tan(x) \to 1$. On pose donc $y := \tan(x) - 1$ pour utiliser l'équivalent $\ln(1+y) \sim y$ valable lorsque $y \to 0$:

$$\ln(\tan(x)) = \ln\left(1 + (\tan(x) - 1)\right) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim} \tan(x) - 1.$$

Pour pousser l'étude de ce dernier terme un peu plus loin, on peut considérer un $DL_1\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de tan, qui donne

$$\begin{aligned} \tan(x) &\underset{x\to\frac{\pi}{4}}{=} \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \tan'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + o\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

et donc
$$\tan(x)-1 = 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+o\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim} 2x-\frac{\pi}{2}.$$
On obtient alors
$$\ln(\tan(x)) \underset{x\to\frac{\pi}{4}}{\sim} 2x-\frac{\pi}{2}.$$



(xii) Pour tout $n \geqslant 1$, on peut écrire
$$2^{\frac{1}{n}}-3^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln(2)}{n}}-e^{\frac{\ln(3)}{n}} = e^{\frac{\ln(3)}{n}}\left(e^{\frac{\ln(2)-\ln(3)}{n}}-1\right),$$
d'où, en utilisant l'équivalent $e^y-1\sim y$ valable lorsque $y\to 0$:
$$2^{\frac{1}{n}}-3^{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1\cdot\frac{\ln(2)-\ln(3)}{n} = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

Correction de l'exercice 16. Supposons tout d'abord que $\mathcal{C}_f$ admette une asymptote oblique de coefficient directeur a en $+\infty$. Il existe donc $b\in\mathbb{R}$ tel que
$$f(x)-(ax+b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
On a donc
$$\frac{f(x)}{ax} = \underbrace{\frac{f(x)-(ax+b)}{ax}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{ax+b}{ax}}_{\to 1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1,$$
donc
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} ax.$$

La réciproque de cette propriété est fausse : par exemple, la fonction $f : x \mapsto x + \ln(x)$ vérifie $f(x) \sim x$ lorsque $x \to +\infty$ par croissance comparée, mais elle n'admet pas d'asymptote oblique puisque $\frac{f(x)}{x} \longrightarrow 1$ mais $f(x) - x = \ln(x) \longrightarrow +\infty$.

Correction de l'exercice 17. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $x > 0$, on peut écrire

$$(1+x)^{\frac{1}{x^\alpha}} = e^{\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}}.$$

Il suffit donc pour traiter la question posée d'étudier la limite de $\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha}$ lorsque $x \to 0^+$; or on a

$$\frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}} = x^{1-\alpha},$$

donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} x^{1-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < 1 \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

et donc

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x^\alpha}} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \alpha < 1 \\ e & \text{si} \quad \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha > 1 \end{cases}.$$

Correction de l'exercice 18. On passe à la forme exponentielle[5] en écrivant

$$\cos(x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(\cos(x))}$$

pour x assez proche de 0 (plus précisément, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ce qui assure que $\ln(\cos(x))$ existe). Comme $\cos(x) - 1 \to 0$ lorsque $x \to 0$, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \frac{1}{x}\ln(\cos(x)) &= \frac{1}{x}\ln\left(1 + (\cos(x) - 1)\right) \\ &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}(\cos(x) - 1) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\frac{1}{x}\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, d'où $\cos(x)^x = e^{x\ln(\cos(x))} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$.

Correction de l'exercice 19.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« } u_n \text{ est bien défini et est strictement positif ».}$$

La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie car on a posé $u_1 = 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la proposition $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors u_n existe et vérifie $u_n > 0$, donc $u_n + \frac{1}{u_n^2}$ existe et est strictement positif en tant que somme de réels strictement positifs, donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

5. Avant de passer à la forme exponentielle, on s'est bien sûr demandé quelles étaient les limites respectives de $\cos(x)$ et de $\frac{1}{x}$ pour être sûr d'avoir affaire à une forme indéterminée.

On en déduit $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc bien définie (et strictement positive).

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n^2} > 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

(c) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et de premier terme 1, elle converge vers une limite $\ell \geqslant 1$ ou diverge vers $+\infty$. Dans le premier cas, on obtient l'équation $\ell = \ell + \frac{1}{\ell^2}$ en passant à la limite dans l'équation de récurrence définissant $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, or cette équation n'admet pas de solution réelle. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge bien vers $+\infty$.

2. (a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\beta - u_n^\beta &= \left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right)^\beta - u_n^\beta = \left[u_n\left(1 + \frac{1}{u_n^3}\right)\right]^\beta - u_n^\beta \\ &= u_n^\beta\left(1 + \frac{1}{u_n^3}\right)^\beta - u_n^\beta = u_n^\beta\left[\left(1 + \frac{1}{u_n^3}\right)^\beta - 1\right]. \end{aligned}$$

(b) On sait que $(1+x)^\beta - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \beta x$ (car $\beta \neq 0$). Lorsque $n \to +\infty$, on a $u_n \to +\infty$ d'après la question 1.(c) et donc $\frac{1}{u_n^3} \to 0$, d'o

$$\left(1 + \frac{1}{u_n^3}\right)^\beta - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\beta}{u_n^3}.$$

(c) D'après les questions 2.(a) et 2.(b), on a

$$u_{n+1}^\beta - u_n^\beta \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^\beta \frac{\beta}{u_n^3} = \beta u_n^{\beta-3}.$$

Comme $u_n \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$, la quantité $u_{n+1}^\beta - u_n^\beta$ tend donc vers 0 si $\beta < 3$, tend vers $+\infty$ si $\beta > 3$, et est constamment égale à β (et donc de limite β) si $\beta = 3$.

3. On sait d'après la question précédente que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 3. En appliquant le lemme de Cesàro à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(u_{k+1}^3 - u_k^3\right) = 3$$

soit, en reconnaissant une somme télescopique,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(u_{n+1}^3 - u_1^3\right) = 3.$$

On a donc, lorsque $n \to +\infty$, $u_{n+1}^3 \sim u_{n+1}^3 - u_1^3 \sim 3n$ puisque $u_{n+1} \to +\infty$, d'où $u_n^3 \sim 3(n-1) \sim 3n$ et enfin, en composant cet équivalent par la fonction racine cubique (ce qui est toujours licite) :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{3n}.$$

Correction de l'exercice 20.

1. La fonction f n'étant pas définie (et encore moins dérivable) en 0, il n'est pas possible d'utiliser la formule classique pour en obtenir un développement limité à droite en 0. Il faut donc revenir à la définition de ce développement limité : on cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $f(x) = ax + b + o(x)$ lorsque $x \to 0^+$. Or on a $f(x) = x + \frac{x}{\ln(x)}$ pour tout $x \in]0, 1[$, et lorsque $x \to 0^+$, la quantité $\frac{1}{\ln(x)}$ tend vers 0 donc $\frac{x}{\ln(x)} = o(x)$. Ainsi, on peut écrire
$$f(x) \underset{x \to 0^+}{=} x + o(x),$$
ce qui est le développement limité recherché.
2. Le développement limité obtenu assure que
$$f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(x) - 0}{x - 0} = 1 + o(1) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1,$$
donc f admet un prolongement par continuité à droite en 0 défini par $\widetilde{f}(0) = 0$, et ce prolongement par continuité est dérivable en 0, avec $\widetilde{f}'(0) = 1$.