Suites réelles

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 15. On détermine pour chaque suite sa monotonie, en laissant le soin au lecteur de statuer sur sa *stricte* monotonie éventuelle.

(*i*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut réécrire u_n sous la forme

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

ce qui fait clairement apparaître que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(*ii*) La suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la suite $\left(1-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont positives et croissantes, donc leur produit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi une suite croissante.

(*iii*) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n+1}-u_n = 2^{n+1}+2^{\frac{1}{n+1}}-2^n-2^{\frac{1}{n}} = 2^n+2^{\frac{1}{n+1}}-2^{\frac{1}{n}} \geqslant 2^n-2^{\frac{1}{n}} \geqslant 0$$

car $2^{\frac{1}{n}} \leqslant 2 \leqslant 2^n$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(*iv*) On remarque que l'on peut écrire $u_n = f(n)$, où $f : x \mapsto \sqrt{(x-3)^2+1}$ est une fonction dont les variations sont simples à étudier. En effet, comme $y \mapsto \sqrt{y+1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ a le même sens de variation que la fonction $x \mapsto x^2$: elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, la fonction $f : x \mapsto g(x-3)$ est décroissante sur $]-\infty,3]$ et croissante sur $[3,+\infty[$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante jusqu'au rang 3 et croissante ensuite

(*v*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}n^{10-k} + \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k}(-1)^k n^{10-k} - 2n^{10} \quad \text{d'après la formule du binôme}\\
&= \sum_{k\in\{2,4,6,8,10\}}\binom{10}{k}2n^{10-k}\\
&= \sum_{j\in\{0,2,4,6,8\}}\binom{10}{j}2n^{j} \quad \text{en posant } j=10-k\\
&= \sum_{i=0}^{4}\binom{10}{2i}2n^{2i}
\end{aligned}$$

ce qui fait apparaître u_n comme la somme de 5 termes croissants en n. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(vi) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{n^n}{n!} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1} - (n+1)n^n}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)^n - (n+1)n^n}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)\left((n+1)^n - n^n\right)}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)^n - n^n}{n!} \geqslant 0, \end{aligned}$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Correction de l'exercice 16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_1 + \ldots + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} \\ &= \frac{n(u_1 + \ldots + u_{n+1}) - (n+1)(u_1 + \ldots + u_n)}{n(n+1)} \\ &= \frac{nu_{n+1} - (u_1 + \ldots + u_n)}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k), \end{aligned}$$

or $u_{n+1} \geqslant u_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$: la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

Correction de l'exercice 17. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\binom{n}{k} > 0$. On peut donc étudier le sens de variation de la suite (finie) des $\binom{n}{k}$ en écrivant que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k!}{(k+1)!}\frac{(n-k)!}{(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1},$$

qui est supérieur à 1 si et seulement si $n - k \geqslant k + 1$, c'est-à-dire $n - 1 \geqslant 2k$, soit $k \leqslant \frac{n-1}{2}$. Ainsi, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ maximal est atteint pour la première valeur de k dépassant strictement $\frac{n-1}{2}$:

$$\max_{k\in[\![0,n]\!]} \binom{n}{k} = \begin{cases} \binom{n}{\frac{n}{2}} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \binom{n}{\frac{n+1}{2}} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 18.

1. Une diminution de 20% équivaut à une multiplication par $\frac{4}{5}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 10$.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. L'équation $c = \frac{4}{5}c + 10$ admet pour solution $c = 50$; la suite $(u_n - 50)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme $u_0 - 50 = 50$. Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n - 50 = 50\left(\frac{4}{5}\right)^n \quad \text{et donc} \quad u_n = 50\left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right).$$
3. La masse de cheveux perdus par le professeur à l'année $n \in [\![0, 19]\!]$ est égale à $\frac{u_n}{5}$ grammes. Ainsi, la masse totale de cheveux perdue en 20 ans vaut
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{19}\frac{u_n}{5} &= \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{19}u_n = \frac{1}{5}\sum_{n=0}^{19}50\left(1+\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)\\ &= 10\left[\sum_{n=0}^{19}1 + \sum_{n=0}^{19}\left(\frac{4}{5}\right)^n\right] \quad \text{par linéarité de la somme}\\ &= 10\left[20 + \frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{20}}{1-\frac{4}{5}}\right] = 250 - \frac{2^{41}}{5^{18}} \approx 249,42 \text{ grammes.}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 19. On a $u_0 = 1 \geqslant 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_n = |u_{n-1}\cos(u_{n-1})| \geqslant 0$: ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. Si $n \geqslant 0$, on peut donc écrire
$$u_{n+1} = |u_n \cos(u_n)| = u_n \cdot |\cos(u_n)| \leqslant u_n$$
puisque $|\cos| \leqslant 1$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction de l'exercice 20.

(i) L'équation caractéristique $x^2 = \frac{3x+1}{4}$ admet $-\frac{1}{4}$ et 1 pour solutions. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $u_n = \lambda\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ se réécrivent donc
$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+\mu &=& 1\\ -\frac{1}{4}\lambda+\mu &=& 0\end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{rcl}5\mu &=& 1\\ \lambda &=& 4\mu\end{array}\right. \quad \text{soit encore} \quad \left\{\begin{array}{rcl}\mu &=& \frac{1}{5}\\ \lambda &=& \frac{4}{5}.\end{array}\right.$$
On a donc $u_n = \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Seules les conditions initiales changent par rapport au point précédent : on a cette fois
$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda+\mu &=& 1\\ -\frac{1}{4}\lambda+\mu &=& 1\end{array}\right. \quad \text{soit, en comparant les deux lignes,} \quad \left\{\begin{array}{rcl}\lambda &=& 0\\ \mu &=& 1.\end{array}\right.$$
Ainsi, on a $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qu'un examen rapide des premiers termes de la suite permet de confirmer).

(iii) L'équation caractéristique est toujours la même ; les conditions initiales donnent cette fois

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu & = & 0 \\ \frac{1}{16}\lambda+\mu & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -\mu \\ \frac{15}{16}\mu & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et donc} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -\frac{16}{15} \\ \mu & = & \frac{16}{15}, \end{array}\right.$$

d'où $u_n = -\frac{16}{15}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{16}{15} = \frac{1}{15}\left(16-\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iv) L'équation caractéristique $x^2 = x - \frac{2}{9}$ admet pour solutions $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda\left(\frac{1}{3}\right)^n + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les conditions initiales donnent alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu & = & 1 \\ \frac{1}{3}\lambda+\frac{2}{3}\mu & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & 1-\lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda & = & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

et donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -1 \\ \mu & = & 2, \end{array}\right.$$

d'où $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(v) L'équation caractéristique $x^2 = 2$ admet $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ pour solutions. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda(-\sqrt{2})^n + \mu\sqrt{2}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les conditions initiales donnent alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu & = & 1 \\ -\sqrt{2}\lambda+\sqrt{2}\mu & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 1-\mu \\ -\sqrt{2}+2\sqrt{2}\mu & = & 2 \end{array}\right.$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \mu & = & \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}, \end{array}\right.$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1-\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2})^n + \frac{\sqrt{2}+1}{2}\sqrt{2}^n = \begin{cases} \sqrt{2}^n \text{si } n \text{ est pair} \\ \sqrt{2}^{n+1} \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}.$$

Notons que l'on pouvait retrouver ce résultat facilement en remarquant que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites géométriques de raison 2.

(vi) L'équation caractéristique $x^2 = 6x - 9$ admet 3 pour unique solution réelle. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda 3^n + \mu n 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le fait que $u_0 = -3$ implique alors que $\lambda = -3$, et le fait que $u_1 = 6$ implique que $3\lambda + 3\mu = 6$, soit $\mu = 2 - \lambda = 5$. Ainsi, on a $u_n = (5n-3)\cdot 3^n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

(vii) L'équation caractéristique $x^2 = 2x - 4$ admet $1 - i\sqrt{3} = 2e^{i-\frac{\pi}{3}}$ et $1+i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ pour solutions complexes conjuguées. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $u_n = \lambda 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \mu 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le fait que $u_0 = -1$ se réécrit alors $\lambda = -1$, et le fait que $u_1 = 0$ se réécrit $\lambda + \sqrt{3}\mu = 0$, soit $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ainsi, on a $u_n = 2^n\left(-\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 21.

1. L'une des difficultés de la question consiste à déterminer quelle est la propriété à démontrer par récurrence double (il ne peut s'agir de la propriété « il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$... » puisque cette propriété ne dépend pas de n !). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose donc

   $$\mathcal{P}_n \ : \quad « \ \exists a_n \in \mathbb{R} \ : \ u_n = 2^{a_n} \ »,$$

   et on tente d'établir $\mathcal{P}_n$ à tout rang n tout en exhibant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 satisfaite par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Initialisation :

   On a $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 4 = 2^2$, donc les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 2$.

   Hérédité :

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que les propositions $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies. Alors on a

   $$u_{n+2} = \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^4 = \left(\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}\right)^4 = 2^{4a_{n+1}-4a_n},$$

   donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vérifiée avec $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

   Conclusion :

   La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On a établi au passage que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi mise en évidence vérifie $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ et la relation de récurrence $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; il s'agit donc bien d'une suite récurrente double.

2. L'équation caractéristique $x^2 = 4x - 4$ admet 2 pour unique solution. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $a_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les relations $a_0 = 0$ et $a_1 = 2$ donnent alors $\lambda = 0$ et $2\mu = 2$, donc $\mu = 1$; ainsi, on a

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{a_n} = 2^{n2^n}.$$

Correction de l'exercice 22. On va établir la chaîne d'implications

$$(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i).$$

Si (i) est vraie, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, donc *a fortiori* $|u_n - \ell| < \varepsilon$: ainsi, on a bien $(i) \Rightarrow (ii)$. Le même raisonnement montre que l'implication $(iii) \Rightarrow (iv)$ est vraie. L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est quant à elle évidente puisque $n > N$ implique que $n \geqslant N$ et $|u_n - \ell| < \varepsilon$ implique $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Enfin si (iv) est vraie et si $\varepsilon > 0$, alors il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N'$ on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$; si l'on pose $N := N' + 1$, on constate alors que pour tout $n \geqslant N$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$, donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, l'implication $(iv) \Rightarrow (i)$ est vraie elle aussi, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 23. Nous avons déjà vu dans le cours que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ.

Réciproquement, supposons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$, et il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$ on ait $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui signifie que $|u_k - \ell|$ pour tous les rangs k pairs supérieurs à $2N$ et tous les rangs k impairs supérieurs à $2N' + 1$. Ainsi, si $n \geqslant \max(2N, 2N' + 1)$, on a nécessairement $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et clôt la preuve.

Correction de l'exercice 24.

1. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}|\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell}| &= \left|\frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell})(\sqrt{u_n} + \sqrt{\ell})}{\sqrt{u_n} + \sqrt{\ell}}\right| \\ &= \left|\frac{u_n - \ell}{\sqrt{u_n} + \sqrt{\ell}}\right| = \frac{|u_n - \ell|}{\sqrt{u_n} + \sqrt{\ell}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\ell}}|u_n - \ell|.\end{aligned}$$

   (b) On a $0 \leqslant |\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\ell}}|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $|\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème des gendarmes, d'où $\sqrt{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\ell}$.

2. Supposons que $\ell = 0$ et fixons $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $|u_n - 0| \leqslant \varepsilon^2$, soit $u_n \leqslant \varepsilon^2$. Pour tout $n \geqslant N$, on a donc $\sqrt{u_n} \leqslant \varepsilon$ par croissance de la fonction racine carrée, soit $|\sqrt{u_n} - \sqrt{0}| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, on a $\sqrt{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \sqrt{\ell}$.

Correction de l'exercice 25.

1. Si $n \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$, on a

$$n! = \underbrace{n(n-1)\cdots(\lfloor x\rfloor + 1)}_{\substack{n-\lfloor x\rfloor \text{ termes} \\ \text{supérieurs à } \lfloor x\rfloor+1}} \cdot \underbrace{\lfloor x\rfloor \cdot (\lfloor x\rfloor - 1)\cdots 2\cdot 1}_{=\lfloor x\rfloor!} \geqslant (\lfloor x\rfloor + 1)^{n-\lfloor x\rfloor}\,\lfloor x\rfloor!.$$

2. Par définition de la partie entière, on a $x < \lfloor x\rfloor + 1$, d'où $\frac{\lfloor x\rfloor+1}{x} > 1$; ainsi, $\left(\frac{\lfloor x\rfloor+1}{x}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. D'après la question précédente, on a donc

$$\frac{n!}{x^n} \geqslant \frac{(\lfloor x\rfloor + 1)^{n-\lfloor x\rfloor}\,\lfloor x\rfloor!}{x^n} = (\lfloor x\rfloor + 1)^{-\lfloor x\rfloor}\,\lfloor x\rfloor! \left(\frac{\lfloor x\rfloor + 1}{x}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

   d'où $\frac{n!}{x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par comparaison.

Correction de l'exercice 26.

(*i*) On a $1+\dfrac{2}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ et $1+\dfrac{n}{2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, donc $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\left(1+\dfrac{n}{2}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

(*ii*) Le terme $(-1)^n$ est borné par 1 pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $3+n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, si bien que $\dfrac{(-1)^n}{3+n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

(*iii*) Pour se débarrasser de la forme indéterminée, on fait apparaître la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

(*iv*) Si $q=1$, on a $u_n=n+1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et donc $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

Si $q\neq 1$, on a $u_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Or le terme géométrique q^n tend vers 0 si $|q|<1$, tend vers $+\infty$ si $q>1$ et n'admet pas de limite si $q\leqslant -1$. Ainsi :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\frac{1}{1-q}$ si $|q|<1$; on note alors sa limite sous la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty}q^k:=\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{1-q}.$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si $q>1$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite si $q\leqslant -1$.

(*v*) On utilise la formule donnant la somme des premiers cubes d'entiers : pour tout n, on a

$$\begin{aligned}u_n&=\frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4n^4}\\&=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4}=\frac{\cancel{n^4}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{4\cancel{n^4}}=\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{4}\end{aligned}$$

et donc $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{4}$.

(*vi*) On utilise l'encadrement $y-1<\lfloor y\rfloor\leqslant y$ valable pour tout $y\in\mathbb{R}$ pour obtenir :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \frac{xn-1}{n}<\frac{\lfloor xn\rfloor}{n}\leqslant\frac{xn}{n},\quad\text{soit}\quad x-\frac{1}{n}<\frac{\lfloor xn\rfloor}{n}\leqslant x.$$

Le théorème des gendarmes donne alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\lfloor xn\rfloor}{n}=x$.

Correction de l'exercice 27. La rédaction présentée ci-dessous est simplifiée, mais il est important de garder à l'esprit qu'en cas de doute, le raisonnement par factorisation peut être détaillé comme dans l'exercice 10.

(*i*) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^3}{2n^5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2n^2} = 0$.

(*ii*) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n^6}{n^5} = \lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$.

(*iii*) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7n^4}{-2n^4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$.

(*iv*) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

(*v*) En identifiant précautionneusement les termes prépondérants dans la fraction, on peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{3/2}}{-n^{5/2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

(*vi*) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$ puisque $\frac{5}{3} > 1$.

Notons que la rédaction adoptée ici n'est admissible que parce que les suites considérées admettent bien une limite. Il ne s'agit pas d'écrire « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dots$ » au début d'un calcul qui relierait entre eux des termes n'admettant pas de limite !

Correction de l'exercice 28.

1. On a $u_0 \geqslant 0$, et si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $u_n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} = u_n^3 + 1 \geqslant 0$. Ainsi, on a $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.
2. Si $x \in [0, 1[$, alors $x^3 + 1 \geqslant 1 > x$. Si $x \geqslant 1$, alors $x^3 + 1 > x^3 \geqslant x$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$ on a bien l'inégalité $x^3 + 1 > x$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 0$ d'après la question 1, donc
$$u_{n+1} = u_n^3 + 1 > u_n$$
d'après la question précédente. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
4. D'après le théorème de la limite monotone, la suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou tend vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ : comme la suite est positive, on a $\ell \geqslant 0$, et en passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^3 + 1$ on obtient $\ell^3 + 1 = \ell$, ce qui est absurde d'après la question 2. Ainsi, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 29.

1. La proposition à démontrer est vraie au rang 0 puisque l'on a $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_1 = 1 \leqslant u_0$. Fixons à présent $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$. En composant ces inégalités par la fonction sin, croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$; or $1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$. Ainsi, la propriété à démontrer est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 d'après la question précédente ; d'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc. Comme $u_n \in [0, 1]$ pour tout $n \geqslant 1$, on obtient $\ell \in [0, 1]$ par passage à la limite.

Correction de l'exercice 30.

1. Le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie ne pose pas problème puisque la quantité $2x^2-2x+1$ existe quel que soit $x\in\mathbb{R}$. Montrons à présent que $u_n\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Pour ce faire, on remarque tout d'abord que $u_0=\frac{2}{3}\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. Par ailleurs, la fonction polynomiale $f:x\mapsto 2x^2-2x+1$ est croissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ (en effet, son coefficient dominant est positif et elle admet un minimum en $\frac{-(-2)}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}$) ; or on a $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$ et $f(1)=1$, si bien que $f(x)\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ pour tout $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$. Ainsi, on a bien $u_n\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.
2. On a $u_1=\frac{8}{9}-\frac{4}{3}+1=\frac{5}{9}$ et $u_0=\frac{6}{9}$ donc $u_1<u_0$: la proposition à démontrer est donc vraie au rang 0. Supposons à présent qu'elle le soit à un rang $n\in\mathbb{N}$ donné : on a alors $u_{n+1}\leqslant u_n$, d'où, en composant par la fonction f croissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$, l'inégalité $f(u_{n+1})\leqslant f(u_n)$, soit $u_{n+2}\leqslant u_{n+1}$, c'est-à-dire que la proposition est vraie au rang $n+1$. Ainsi, la proposition est vraie à tous les rangs d'après le principe de récurrence.
3. La suite est minorée par $\frac{1}{2}$ d'après la question 1, et elle est décroissante d'après la question 2 : elle converge donc par le théorème de la limite monotone. En passant à la limite dans la relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on voit que la limite ℓ de la suite vérifie $\ell=2\ell^2-2\ell+1$, c'est-à-dire $2\ell^2-3\ell+1=0$. Ainsi, on a $\ell=\frac{1}{2}$ ou $\ell=1$; comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par son premier terme $\frac{2}{3}$ (puisqu'elle est décroissante), on a $\ell=\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 31.

1. On a $u_0=2\geqslant\frac{1}{2}$, et si $n\in\mathbb{N}$ est tel que u_n est bien défini et supérieur à $\frac{1}{2}$, alors $\frac{1}{2u_n}$ existe et est positif, donc $u_{n+1}:=\frac{1}{2}+\frac{1}{2u_n}$ existe et est supérieur à $\frac{1}{2}$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ d'après le principe de récurrence.
2. Si $x\geqslant\frac{1}{2}$, on a :
$$x=\frac{x+1}{2x}\iff 2x^2=x+1\iff 2x^2-x-1=0\iff x=1.$$
L'avant-dernière équivalence de cette chaîne est due au fait que $x\neq 0$, et la dernière au fait que la solution $-\frac{1}{2}$ de l'équation polynomiale $2x^2-x-1$ est négative. Ainsi, le réel recherché est $x_0=1$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note
$$\mathcal{P}_n\ :\quad \text{« } u_{2n}\geqslant u_{2n+2}\geqslant 1\geqslant u_{2n+3}\geqslant u_{2n+1}\text{ ».}$$
Initialisation :
On a $u_0=2$, $u_1=\frac{3}{4}$, $u_2=\frac{7}{6}$ et $u_3=\frac{13}{14}$, donc $u_0\geqslant u_2\geqslant x_0\geqslant u_3\geqslant u_1$. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité :
Fixons $n\in\mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. En composant la chaîne d'inégalités $u_{2n}\geqslant u_{2n+2}\geqslant 1$ par la fonction $f:x\mapsto\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on

obtient $u_{2n+1} \leqslant u_{2n+3} \leqslant 1$. En composant à nouveau cette chaîne d'inégalités par f, on obtient $u_{2n+2} \geqslant u_{2n+4} \geqslant 1$; en appliquant encore une fois f, on obtient $u_{2n+3} \leqslant u_{2n+5} \leqslant 1$. Ainsi, on a

$$u_{2n+2} \geqslant u_{2n+4} \geqslant 1 \geqslant u_{2n+5} \geqslant u_{2n+3},$$

ce qui est exactement la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion :

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

4. D'après la question précédente, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1, et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 : ces deux suites convergent donc. Il suffit pour conclure de montrer qu'elles convergent toutes deux vers 1 (voir la conclusion de l'exercice 23 !). Pour ce faire, on note ℓ la limite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, puis on passe à la limite dans la relation de récurrence

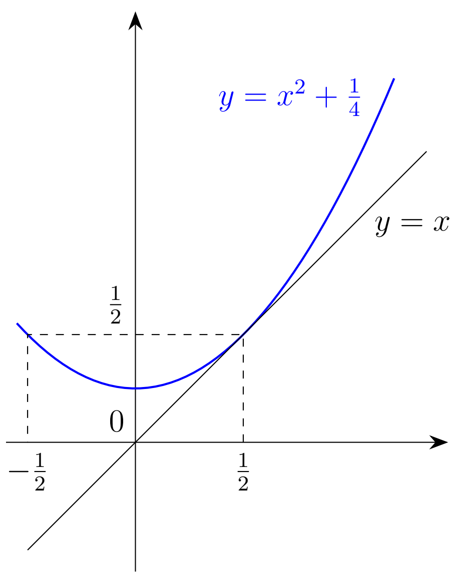
$$u_{2n+2} = \frac{u_{2n+1}+1}{2u_{2n+1}} = \frac{\frac{u_{2n}+1}{2u_{2n}}+1}{\frac{u_{2n}+1}{u_{2n}}} = \frac{u_{2n}+1+2u_{2n}}{2u_{2n}+2} = \frac{3u_{2n}+1}{2u_{2n}+2}$$

satisfaite par la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir

$$\ell = \frac{3\ell+1}{2\ell+2} \quad \text{soit} \quad 2\ell^2+2\ell = 3\ell+1 \quad \text{soit encore} \quad 2\ell^2-\ell-1=0,$$

ce qui, comme ℓ est positif, implique que $\ell = 1$ comme nous l'avons vu dans la question 2. On peut démontrer de la même façon que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, qui vérifie la même relation de récurrence que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers 1, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 32. Une représentation graphique peut grandement aider à traiter la question posée (voir la figure ci-dessous, tracée à partir de l'étude de la fonction polynomiale $x \mapsto x^2 + \frac{1}{4} - x$, et sur laquelle on pourra placer les premiers termes de la suite pour différentes valeurs de u_0).



Il apparaît graphiquement que pour toute condition initiale $u_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs inférieures à $\frac{1}{2}$ (on pourrait bien sûr démontrer ces affirmations rigoureusement) ; elle converge donc d'après le théorème de la limite monotone, or sa limite ne peut être qu'une solution de l'équation $\ell = \ell^2 + \frac{1}{4}$, donc $\frac{1}{2}$: ainsi, on a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset B$.

On remarque ensuite que si $u_0 > \frac{1}{2}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et croissante ; elle est donc même à valeurs dans $[u_0, +\infty[$, ce qui implique qu'elle ne peut converger vers $\frac{1}{2}$ puisque $u_0 > \frac{1}{2}$ (on peut montrer par l'absurde qu'elle tend en fait vers $+\infty$). Enfin, si $u_0 < -\frac{1}{2}$, alors $u_1 > \frac{1}{2}$ donc le même raisonnement que celui que nous venons de suivre montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\frac{1}{2}$.

On en déduit que $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Correction de l'exercice 33.

1. L'ensemble considéré correspond dans le plan complexe à l'ensemble des complexes de module 1 : c'est donc le cercle de rayon 1 centré sur l'origine du repère.
2. La fonction f est définie sur $[-1, 1]$. Sa courbe représentative est l'ensemble des points (x, y) vérifiant $x^2 + y^2 = 1$ avec $y \geqslant 0$: c'est donc le demi-cercle de rayon 1 centré sur l'origine du repère inclus dans la moitié supérieure du plan.
3. En plaçant les points u_0, u_1, u_2 et u_3, on s'aperçoit du fait que $u_0 = u_2$ et $u_1 = u_3$, ce qui laisse penser que les termes de rang pair de la suite sont tous égaux et que ses termes de rang impair le sont aussi.
4. On démontre par une récurrence facile (laissée au lecteur) que la propriété
$$\mathcal{P}_n \ : \text{« } u_{2n} = \frac{1}{2} \ \text{ et } \ u_{2n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ »}$$
est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite divergente étudiée est un exemple qu'il est intéressant de garder à l'esprit pour ne pas conclure trop rapidement à des propriétés de convergence erronnées sur les suits récurrentes ; notons que le résultat serait le même pour n'importe quelle valeur de u_0 dans $[0, 1]$ différente de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (valeur pour laquelle la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait constante).

Correction de l'exercice 34.

1. On remarque tout d'abord que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en effet, c'est vrai pour $n = 0$ d'après la première hypothèse, et pour tout $n > 0$ d'après la double inégalité satisfaite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_{n+1} - u_n < 2\sqrt{2} - \frac{2}{u_n} - u_n = \frac{2\sqrt{2}u_n - 2 - u_n^2}{u_n} = \frac{-(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n} \leqslant 0,$$
donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant minorée par 0 et décroissante, elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Si elle convergeait vers 0^+, on aurait alors $2\sqrt{2} - \frac{2}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, et donc $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ par comparaison, ce qui est absurde. Ainsi, la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive. En passant à la

limite dans l'inégalité $u_{n+1} < 2\sqrt{2} - \frac{2}{u_n}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient alors

$$\ell \leqslant 2\sqrt{2} - \frac{2}{\ell} \quad \text{soit} \quad 2\sqrt{2} - \frac{2}{\ell} - \ell \geqslant 0, \quad \text{soit encore} \quad \frac{-(\ell - \sqrt{2})^2}{\ell} \geqslant 0,$$

or le terme de gauche de l'inégalité est négatif car $\ell > 0$ et car $-(\ell - \sqrt{2})^2$ est l'opposé d'un carré, donc il est nul. Ainsi, on a $(\ell - \sqrt{2})^2 = 0$, et donc $\ell = \sqrt{2}$.

3. On dispose de conditions nécessaires sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: elle doit être décroissante et converger vers $\sqrt{2}$. Cela nous donne l'idée de considérer la suite de terme général $u_n = \sqrt{2} + \frac{1}{n+1}$, dont on vérifie qu'elle satisfait bien les conditions requises : la suite est évidemment strictement positive, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ la différence

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} - \frac{2}{u_n} - u_{n+1} &= 2\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2} + \frac{1}{n+1}} - \sqrt{2} - \frac{1}{n+2} \\ &= \sqrt{2} - \frac{2(n+1)}{\sqrt{2}(n+1)+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}(n+1)+1)(n+2)} \end{aligned}$$

est bien strictement positive, ce qui permet de conclure.

Correction de l'exercice 35.

1. On utilise de manière répétée la quantité conjuguée pour calculer les différences de racines carrées. Cette manipulation désormais classique n'est pas détaillée dans les calculs ci-dessous.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} \geqslant 0, \end{aligned}$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. De la même façon, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \leqslant 0, \end{aligned}$$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Enfin, on peut écrire

$$u_n - v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{-2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont bien adjacentes.

2. D'après le théorème des suites adjacentes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (notamment) est convergente. Il existe donc un réel ℓ tel que l'on ait $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Or la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est croissante, donc elle tend vers une limite finie ou égale à $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Si cette limite était finie et égale à un réel $\ell' \in \mathbb{R}$, on aurait alors

$$2\sqrt{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' - \ell,$$

ce qui est évidemment faux puisque $2\sqrt{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Notons que le raisonnement utilisé dans cette question est plus subtil qu'il n'y paraît et qu'il n'aurait pas été possible de passer à la limite brutalement dans l'égalité définissant u_n sans faire apparaître à la fois une limite dont l'existence n'a pas été démontrée et une potentielle forme indéterminée du plus mauvais effet.

Correction de l'exercice 36.

1. Pour démontrer cette inégalité très classique, on suit l'indication proposée : si $x, y \in \mathbb{R}_+$, alors $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$ est un carré de réel, donc une quantité positive, qui vaut $\sqrt{x}^2 + \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{x}\sqrt{y} = x + y - 2\sqrt{xy}$, d'où $x + y - 2\sqrt{xy} \geqslant 0$. On en déduit l'inégalité attendue par un simple réarrangement des termes.
2. Il s'agit de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « u_n et v_n existent et vérifient $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ ». Le détail de cette preuve par récurrence est laissé au lecteur.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a grâce à la question précédente

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{u_n u_n} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant \frac{v_n + v_n}{2} = v_n,$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 0), elle converge d'après le théorème de la limite monotone ; on note $\ell \geqslant 0$ sa limite. En réécrivant la relation de récurrence satisfaite par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient alors

$$u_n = 2v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ell - \ell = \ell,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers ℓ.

Correction de l'exercice 37.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

représente la moyenne des n premiers termes de la suite (u_n).

2. Conformément à l'indication, on se donne $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant N$ (un tel N existe par définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers ℓ.

Si $n \geqslant N$, on a alors

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell|$$

d'après l'inégalité triangulaire, d'où

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} |u_k - \ell|,$$

et donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - \ell| + \frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)\end{aligned}$$

d'après le choix de N.

3. On a $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque N est fixé, donc il existe $N' \geqslant N$ tel que pour tout $n \geqslant N'$ on ait $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, et l'inégalité (1) donne alors

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

4. On a pris $\varepsilon > 0$ quelconque et on a montré qu'il existait un rang N' à partir duquel on a $\displaystyle\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| \leqslant \varepsilon$.

Ainsi, on peut bien affirmer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 38.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned} b_{n+1} - b_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \left(n \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1) \sum_{k=1}^{n} a_k \right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \left(n \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right) - \sum_{k=1}^{n} a_k \right) \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \left(n a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k \right), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait établir.

(b) D'après la question précédente, il suffit d'établir que $n a_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} a_k \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Or la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, donc si $n \in \mathbb{N}^*$ on a $a_{n+1} \geqslant a_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, d'où, par sommation,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_{n+1} = n a_{n+1}.$$

Le résultat attendu est donc bien vérifié.

(c) Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et de limite ℓ, elle est majorée par ℓ. La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, formée par les moyennes arithmétiques des premiers a_k, est donc elle aussi majorée par ℓ. Or elle est croissante d'après la question précédente, si bien qu'elle converge vers une limite $\ell' \leqslant \ell$ d'après le théorème de la limite monotone.

(d) Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned} b_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} a_k = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k &= \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \\ &\geqslant \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} a_n \quad \text{car } a_k \geqslant a_n \text{ pour tout } k \geqslant n \\ &= \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} a_n, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

(e) En passant à la limite dans l'égalité démontrée à la question précédente, on trouve $\ell' \geqslant \frac{\ell' + \ell}{2}$, d'où $\ell' \geqslant \ell$. Or on sait que $\ell' \leqslant \ell$, d'où $\ell' = \ell$: on a donc démontré que $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

2. Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, la suite $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers $-\ell$. La suite de ses moyennes arithmétiques successives, c'est-à-dire la suite $(-b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, converge donc elle aussi vers $-\ell$ d'après le cas croissant traité dans la question 1. Ainsi, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 39. Le résultat démontré dans les deux premières questions est une généralisation du lemme de Cesàro (voir exercice 37), qui correspond au cas où $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On retrouve donc sans surprise les grandes lignes de la preuve de ce lemme.

1. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et tout $n > n_0$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k y_k - L\right| &= \left|\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k y_k - \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k L\right| \\
&= \left|\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k (y_k - L)\right| \\
&= \frac{1}{S_n}\left|\sum_{k=1}^{n} u_k (y_k - L)\right| \quad \text{car } S_n > 0 \\
&\leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k |y_k - L| \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&= \frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k |y_k - L| + \sum_{k=n_0+1}^{N} u_k |y_k - L|\right),
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité attendue.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k > n_0$ on ait $|y_k - L| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par ailleurs, comme $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et comme $\sum_{k=1}^{n_0} u_k |y_k - L|$ est une quantité indépendante de n, il existe $N \geqslant n_0$ tel que pour tout $n > N$ on ait $\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k |y_k - L| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n > N$ on a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k y_k - L\right| &\leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k |y_k - L| + \frac{1}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k |y_k - L| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

donc la définition de la limite est vérifiée et on peut écrire que $\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k y_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $a_n = z_{n+1} - z_n > 0$. Par ailleurs, on peut écrire par télescopage

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (z_{k+1} - z_k) = z_{n+1} - z_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'énoncé.

(b) En appliquant le résultat démontré précédemment aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on obtient

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$$

puisque $b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \gamma$ par hypothèse. Cette relation se réécrit

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}(z_{k+1}-z_k)}\sum_{k=1}^{n}(t_{k+1}-t_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$$

soit, par télescopage,

$$\frac{t_{n+1}-t_1}{z_{n+1}-z_1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma.$$

Ainsi, en utilisant le fait que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{t_n}{z_n} &= \frac{z_n-z_1}{z_n}\cdot\frac{t_n}{z_n-z_1}\\ &= \left(1-\frac{z_1}{z_n}\right)\left(\frac{t_n-t_1}{z_n-z_1}+\frac{t_1}{z_n-z_1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\cdot(\gamma+0)=\gamma,\end{aligned}$$

d'où le résultat attendu.

Correction de l'exercice 40.

1. La suite $\left(\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{u_k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante puisque si $n\in\mathbb{N}^*$, le réel $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n+1}\frac{u_k}{k}$ est le minimum de $\frac{u_k}{k}$ pour $k\in[\![1,n+1]\!]$, tandis que $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{u_k}{k}$ est le minimum de la même expression considérée sur les valeurs de $k\in[\![1,n]\!]\subset[\![1,n+1]\!]$. D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc bien une limite ℓ finie ou égale à $-\infty$.
2. La propriété se démontre par une récurrence facile formalisant le raisonnement suivant, qui repose sur une utilisation répétée de la propriété vérifiée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: pour tous $m,n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_{mn}\leqslant u_{(m-1)n}+u_n\leqslant u_{(m-2)n}+u_n+u_n=u_{(m-2)n}+2u_n\leqslant\cdots\leqslant mu_n.$$

3. (a) Par définition de la limite, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$ on ait $\left|\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{u_n}{n}-\ell\right|\leqslant\varepsilon$, donc $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{u_k}{k}\leqslant\ell+\varepsilon$. En particulier, on a $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{u_k}{k}\leqslant\ell+\varepsilon$, donc en notant $m\in[\![1,N]\!]$ l'indice réalisant le minimum considéré on a $\frac{u_m}{m}\leqslant\ell+\varepsilon$, d'où le résultat attendu.

   (b) Si $n\in\mathbb{N}^*$, on peut écrire d'après le principe de la division euclidienne que $n=q_nm+r_n$ pour un certain $q_n\in\mathbb{N}$ et un certain $r_n\in[\![0,m-1]\!]$, d'où

$$u_n\leqslant u_{q_nm+r_n}\leqslant u_{q_nm}+u_{r_n}\leqslant q_nu_m+u_{r_n},$$

   et donc

$$\frac{u_n}{n}\leqslant\frac{q_nu_m+u_{r_n}}{q_nm+r_n}=\frac{q_n}{q_nm+r_n}u_m+\frac{u_{r_n}}{n}.$$

   Comme $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée (par $m-1$), on a $q_n=\frac{n-r_n}{m}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$, et $(u_{r_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle aussi bornée car elle prend un nombre fini de valeurs (puisque r_n est toujours égal à un entier de $[\![0,m-1]\!]$), donc

$$\frac{q_n}{q_nm+r_n}u_m+\frac{u_{r_n}}{n}=\frac{1}{m+\frac{r_n}{q_n}}u_m+\frac{u_{r_n}}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{u_m}{m}.$$

Ainsi, à partir d'un certain rang on peut majorer $\frac{q_n}{q_n m + r_n} u_m + \frac{u_{r_n}}{n}$ par $\frac{u_m}{m} + \varepsilon$ et écrire

$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{q_n}{q_n m + r_n} u_m + \frac{u_{r_n}}{n} \leqslant \ell + 2\varepsilon.$$

Par ailleurs, comme $\left(\min_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{u_k}{k}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite ℓ, on a $\frac{u_n}{n} \geqslant \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{u_k}{k} \geqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, à partir d'un certain rang on a $\ell \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \ell + 2\varepsilon$, ce qui permet de conclure que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ puisque $\varepsilon > 0$ est quelconque.

4. Il est clair que $c_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par exemple parce que le chemin formé par les points de coordonnées $(0,0), (1,0) \ldots, (n,0)$ est auto-évitant. En écrivant $c_n^{1/n}$ sous la forme $\exp\left(\frac{1}{n} \ln(c_n)\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on voit par continuité de l'exponentielle qu'il suffit de montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n} \ln(c_n)$ converge ou tend vers $-\infty$ pour conclure.

   Compte tenu des questions précédentes, il suffit de démontrer que la suite $(\ln(c_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété satisfaite par la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire que $\ln(c_{m+n}) \leqslant \ln(c_m) + \ln(c_n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ (on dit aussi que la suite est *sous-additive*). Notons que le cas où $\ell = -\infty$ n'a pas encore été traité, mais que la même démonstration que précédemment permet de montrer que dans ce cas on a $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} -\infty$.

   Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$: on cherche à montrer que $\ln(c_{m+n}) \leqslant \ln(c_m) + \ln(c_n)$, soit $\ln(c_{m+n}) \leqslant \ln(c_m c_n)$, c'est-à-dire que $c_{m+n} \leqslant c_m c_n$ puisque ln est strictement croissante. Or un chemin auto-évitant composé de $m+n$ segments, donc de $m+n+1$ points, peut être décomposé en un chemin auto-évitant composé de m segments (formé par les $m+1$ premiers points du chemin) et un autre chemin auto-évitant « décalé » composé de n segments, au départ du point M_m. Plus formellement, si l'on note $\mathcal{A}_i$ l'ensemble des chemins auto-évitants constitués de i segments (et donc de $i+1$ points) pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'application

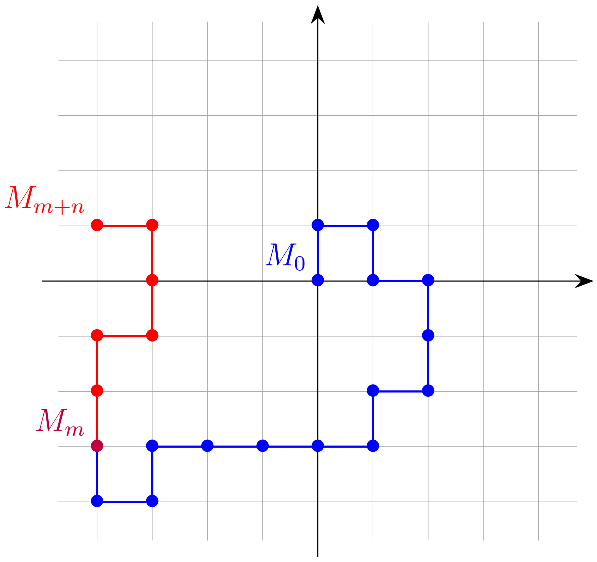
$$(M_0, \ldots, M_{m+n}) \longmapsto \Big((M_0, \ldots, M_{m-1}), (M_m - M_m, M_{m+1} - M_m, \ldots, M_{m+n} - M_{m+n})\Big)$$

   réalise une injection de $\mathcal{A}_{m+n}$ dans $A_m \times A_n$; ainsi, on a

$$c_{m+n} = |\mathcal{A}_{m+n}| \leqslant |\mathcal{A}_m \times \mathcal{A}_n| = |\mathcal{A}_m| \times |\mathcal{A}_n| \leqslant c_m \times c_n,$$

   ce qu'il fallait démontrer.

   La figure ci-après illustre la décomposition d'un chemin auto-évitant de $m+n$ segments en deux sous-chemins de m et n segments respectivement.
   Notons que l'on ne dispose que d'une inégalité entre c_{m+n} et $c_m \times c_n$, et non d'une égalité, car le recollement de deux chemins auto-évitants n'est pas nécessairement un chemin auto-évitant : l'application considérée n'est donc pas surjective.



Correction de l'exercice 41.

1. Le premier rebond de la balle est haut de $2 \cdot 0,7$ mètres, le suivant de $2 \cdot 0,7^2$ mètres, et ainsi de suite : pour tout $n \geqslant 1$, le n-ième rebond est donc haut de $u_n = 2 \cdot 0,7^n$ mètres.
2. La balle parcourt d'abord les 2 mètres qui la séparent du sol, puis, à chaque rebond de hauteur n, parcourt deux fois la hauteur u_n (une fois en montée et une fois en descente). Ainsi, au terme de N rebonds, la balle aura parcouru une longueur égale (en mètres) à

$$\begin{aligned} 2 + \sum_{k=1}^{N} 2u_k &= 2 + 4\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{7}{10}\right)^k = 2 + 4 \cdot \frac{\frac{7}{10} - \left(\frac{7}{10}\right)^{N+1}}{1 - \frac{7}{10}} \\ &= 2 + 28 \cdot \frac{1 - \left(\frac{7}{10}\right)^N}{3} = \frac{34}{3} - \frac{28}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^N \end{aligned}$$

Or $\frac{7}{10} \in]-1,1[$ donc $\left(\frac{7}{10}\right)^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$, donc

$$\frac{34}{3} - \frac{28}{3}\left(\frac{7}{10}\right)^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{34}{3}.$$

Ainsi, la distance totale parcourue par la balle au cours de sa trajectoire (que l'on considère constituée d'une infinité de rebonds) est $\frac{34}{3} = 11,3333...$ mètres.

Correction de l'exercice 42. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les relations

$$u_0 = 1000 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1,03 \cdot u_n - 15.$$

Il s'agit donc d'une suite arithmético-géométrique. Pour déterminer sa valeur explicite, on résout tout d'abord l'équation $c = 1,03c - 15$, qui donne $c = 500$, puis on définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} := (u_n - 500)_{n\in\mathbb{N}}$ et on remarque que $v_0 = 500$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 500 = 1,03u_n - 15 - (1,03 \cdot 500 - 15) = 1,03(u_n - 500) = 1,03v_n,$$

si bien que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $1,03$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$v_n = 500 \cdot 1,03^n \quad \text{et donc} \quad u_n = v_n + 500 = 500 \cdot (1,03^n + 1).$$

Au terme de n années, la somme présente sur le compte est donc égale à $500 \cdot (1,03^n + 1)$ euros.

Correction de l'exercice 43.

1. Lorsqu'aucun disque n'est présent, on peut considérer que la configuration finale est atteinte dès le départ, donc aucun mouvement n'est nécessaire, c'est-à-dire que $u_0 = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On va montrer que $u_{n+1} \leqslant 2u_n + 1$ et que $u_{n+1} \geqslant 2u_n + 1$, ce qui permettra de conclure.

   Tout d'abord, on remarque que si la tour est constituée de $n+1$ disques, on peut la transporter sur la position finale de la façon suivante :

   - En utilisant les positions 2 et 3, on transporte sur la deuxième position la tour constituée des n disques supérieurs (en u_n mouvements), ce qui libère le disque inférieur.
   - On transporte le disque inférieur sur la troisième position (en un mouvement).
   - On transporte sur la troisième position la tour présente sur la deuxième position (en u_n mouvements), en utilisant librement les positions 1 et 3 comme si le plus grand disque n'existait pas puisque sa présence sur la troisième position n'empêche aucun mouvement.

   Ainsi, il est possible de transporter en $2u_n+1$ mouvements une tour constituée de $n+1$ disques, ce qui signifie que $u_{n+1} \leqslant 2u_n + 1$.

   On va maintenant montrer qu'*au moins* $2u_n + 1$ mouvements sont nécessaires pour transporter une telle tour. En effet, pour la transporter il faut :

   - Rendre possible le déplacement du plus grand disque sur la troisième position, ce qui suppose de libérer ce disque *et* la troisième position, c'est-à-dire de déplacer la tour composée des n disques supérieurs sur la deuxième position : cela s'effectue en au moins u_n mouvements.
   - Déplacer le plus grand disque sur la troisième position, ce qui prend un mouvement.
   - Déplacer sur ce disque la tour présente sur la deuxième position, ce qui nécessite au moins u_n mouvements.

   Ainsi, il faut au moins $2u_n + 1$ mouvements pour déplacer une tour de $n+1$ disques, donc $u_{n+1} \geqslant 2u_n + 1$.

   On a donc bien $u_{n+1} = 2u_n + 1$.
3. On a montré dans les questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les relations
$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1.$$

La méthode d'étude standard des suites arithmético-géométriques permet alors d'obtenir l'expression explicite suivante :

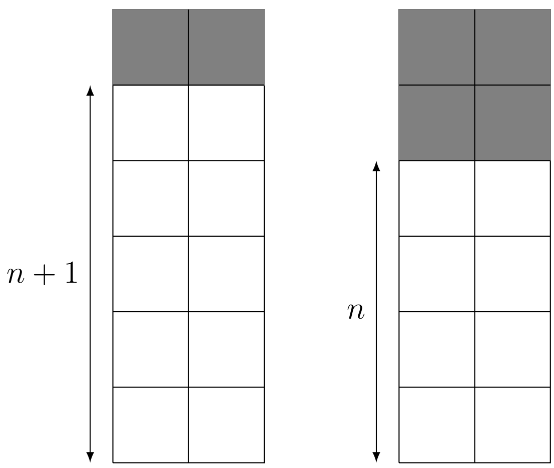
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 1.$$

Correction de l'exercice 44.

1. On a croisé une situation similaire dans l'exercice 39 du chapitre « Sommes et produits ». L'idée du raisonnement est la suivante : si pour tout $n \geqslant 1$ on note v_n le nombre de façons de franchir un chemin de longueur n à l'aide de pas de longueur 1 ou 2, on montre que $v_1 = 1$ et que $v_2 = 1$ puis, en considérant deux cas disjoints selon la taille du premier pas effectué, $v_{n+2} = v_n + v_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi, $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est bien la suite de Fibonacci, donc $v_n = u_n$ pour tout $n \geqslant 1$.
2. On raisonne de façon similaire. Si pour tout $n \geqslant 1$ on note w_n le nombre de pavages possibles d'un damier de taille $n \times 2$ par des dominos de taille 1×2, alors on a de façon évidente $w_1 = 1$ (un unique pavage est possible pour un damier de taille 1×2, par un seul domino) et $w_2 = 2$ (deux pavages d'un damier de taille 2×2 sont possibles, par deux dominos verticaux ou deux dominos horizontaux).

   Par ailleurs, si $n \geqslant 1$, alors le pavage d'un damier de taille $(n+2) \times 2$ peut s'effectuer de deux façons différentes et incompatibles :

   - En positionnant un domino horizontalement sur les deux positions supérieures, puis en pavant les $(n+1) \times 2$ positions restantes (ce qui peut être fait de w_{n+1} façons).
   - En positionnant un domino verticalement sur la position supérieure gauche, ce qui impose, pour que le pavage soit complet, de positionner un domino verticalement sur la position supérieure droite, puis en pavant les $n \times 2$ positions restantes (ce qui peut être fait de w_n façons). On a donc bien $w_{n+2} = w_{n+1} + w_n$, ce qui implique que pour tout $n \geqslant 1$, on a $w_n = u_n$.



Cas 1 : w_{n+1} choix Cas 2 : w_n choix

Correction de l'exercice 45.

1. On sait que $\frac{1}{k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, donc le lemme de Cesàro donne

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

2. Pour tout $n \geqslant 2$, on peut écrire
$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) + w_1$$
par télescopage, donc
$$\begin{aligned} \frac{w_n}{n} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) + w_1\right) \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(w_{k+1} - w_k) + \frac{w_1}{n} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \cdot \ell + 0 = \ell \end{aligned}$$
d'après le lemme de Cesàro.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle vérifiant $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et soit $M > 0$. Il existe alors $N \geqslant 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $u_n \geqslant M + 1$. Alors pour $n > N$, on a
$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} u_k \\ &\geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} (M+1) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \frac{n-N}{n}(M+1), \end{aligned}$$
or
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \frac{n-N}{n}(M+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + 1 \cdot (M+1) = M+1$$
donc on a
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \frac{n-N}{n}(M+1) > M$$
à partir d'un certain rang. Lorsque n est au-delà de ce rang et plus grand que N, on a alors
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} u_k + \frac{n-N}{n}(M+1) > M.$$
Comme M est choisi arbitrairement, on peut donc écrire que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, c'est-à-dire que le lemme de Cesàro est valable pour une limite égale à $+\infty$. On montrerait de la même façon qu'il l'est aussi pour une limite égale à $-\infty$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\sum_{k=1}^{n} s_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \frac{-1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

Ainsi,
$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k\right| \leqslant \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, par contre, n'admet pas de limite, ce qui fournit bien le contre-exemple attendu.

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle monotone. D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite finie ou infinie. Le lemme de Cesàro (éventuellement dans sa variante démontrée dans la question 3) implique alors que la suite $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers cette limite. Ainsi, si
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$
pour un certain $\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$, il s'agit de la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction de l'exercice 46. Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé. L'astuce consiste à comparer $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à des suites arithmético-géométriques dont la raison géométrique est a et dont la raison arithmétique est proche de b.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $b-\varepsilon \leqslant b_n \leqslant b+\varepsilon$. On a alors :
$$\forall n \geqslant N, \quad au_n + b - \varepsilon \leqslant au_n + b_n \leqslant au_n + b + \varepsilon. \tag{2}$$
Définissons les suites $(v_n)_{n\geqslant N}$ et $(w_n)_{n\geqslant N}$ par $v_N = w_N := u_N$ ainsi que
$$\forall n \geqslant N, \quad v_{n+1} = av_n + b - \varepsilon \quad \text{et} \quad w_{n+1} = aw_n + b + \varepsilon.$$
Une récurrence facile, dont l'initialisation est vraie par construction et dont l'hérédité provient de (2), assure que l'on a
$$\forall n \geqslant N, \quad v_n \leqslant u_n \leqslant w_n.$$
Les suites $(v_n)_{n\geqslant N}$ et $(w_n)_{n\geqslant N}$ ainsi construites sont arithmético-géométriques, et la méthode d'étude standard de ces suites montre que
$$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{b-\varepsilon}{1-a} \quad \text{et} \quad w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{b+\varepsilon}{1-a}.$$
Ainsi, à partir d'un certain rang on a
$$\frac{b-2\varepsilon}{1-a} \leqslant v_n \leqslant u_n \leqslant w_n \leqslant \frac{b+2\varepsilon}{1-a}$$
et donc, en soustrayant $\frac{b}{1-a}$:
$$-\frac{2\varepsilon}{1-a} \leqslant u_n - \frac{b}{1-a} \leqslant \frac{2\varepsilon}{1-a}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque [1], la borne $\frac{2\varepsilon}{1-a}$ peut être rendue arbitrairement proche de 0 ; on a donc bien montré que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{b}{1-a}$.

Correction de l'exercice 47. Supposons que A soit dense dans $\mathbb{R}$ et considérons $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on peut choisir $x_n \in A$ tel que $x - \frac{1}{n} < x_n < x$; ainsi, on a $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ d'après le théorème des gendarmes, ce qui montre que x est limite d'une suite d'éléments de A.

Réciproquement, supposons que tout réel est limite d'une suite d'éléments de A et considérons $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $x < x'$. Il existe alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergeant vers $\frac{x+x'}{2}$; à partir d'un certain rang [2], on a donc $\left|\frac{x+x'}{2} - u_n\right| < \frac{x'-x}{2}$ donc $x < u_n < x'$. Ainsi, il existe donc un élément de A dans $]x, x'[$, ce qui montre que A est dense dans $\mathbb{R}$.

L'équivalence attendue est donc démontrée par double implication.

Correction de l'exercice 48. Démontrons l'équivalence par double implication. On rappelle que

$$\ell = \sup(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in A, \quad x \leqslant \ell \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \,:\, x > \ell - \varepsilon. \end{cases}$$

$\Rightarrow$: Supposons que $\ell = \sup(A)$. Pour tout $n \geqslant 1$, en appliquant la deuxième condition ci-dessus à $\varepsilon := \frac{1}{n}$, on obtient l'existence d'un $u_n \in A$ tel que $\ell - \frac{1}{n} < u_n < \ell$, et le théorème des gendarmes donne alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

$\Leftarrow$: Réciproquement, s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A convergeant vers ℓ, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > \ell - \varepsilon$, et cette valeur de u_n est un élément de A. Si de plus A est majorée par ℓ, alors les conditions sont réunies pour conclure que $\ell = \sup(A)$.

On a donc bien l'équivalence attendue.

Correction de l'exercice 49.

1. La propriété est vraie pour $n = 0$. Supposons-la vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ donné : on a alors $u_n > 0$, donc [3]

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 + a}{2u_n} - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}u_n}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} \geqslant 0$$

   d'où $u_{n+1} - \sqrt{a} \geqslant 0$. Ainsi, on a $u_n \geqslant \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

1. On aurait aussi pu vérifier directement la définition de la convergence, c'est-à-dire obtenir une majoration de $\left|u_n - \frac{b}{1-a}\right|$ par ε, en posant $\varepsilon' := \frac{\varepsilon(1-a)}{2}$ et en adaptant à ε' le raisonnement appliqué ici à ε.
2. N'hésitez pas à faire un dessin pour vous en convaincre !
3. Notons que la stricte positivé de u_n est l'unique information issue de l'hypothèse de récurrence que nous utilisons ici.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2} - u_n = \frac{\frac{a}{u_n} - u_n}{2} \leqslant 0$$

puisque $\frac{a}{u_n} - u_n \leqslant \frac{u_n^2}{u_n} - u_n = 0$ d'après la question précédente. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{a}$. Elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant \sqrt{a}$ d'après le théorème de la limite monotone. En passant à la limite dans la relation de récurrence définissant la suite, ce qui est possible grâce aux opérations usuelles sur les limites et au fait que $\ell > 0$, on obtient

$$\ell = \frac{\ell + \frac{a}{\ell}}{2}, \quad \text{soit} \quad \ell = \frac{a}{\ell} \quad \text{et donc} \quad \ell^2 = a,$$

d'où $\ell = \sqrt{a}$ puisque $\ell \geqslant 0$.

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a d'après le calcul déjà effectué dans la question 1 :

$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} \leqslant \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}$$

puisque $u_n \geqslant \sqrt{a} > 0$.

(b) Le terme *quadratique* signifie « élevé au carré ». L'erreur d'approximation $u_n - \ell$ est au moins mise au carré à chaque étape, ce qui la réduit considérablement puisque cette erreur est *a priori* largement inférieure à 1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors très rapidement vers sa limite : si $2\sqrt{a} \geqslant 1$, le nombre de décimales correctes dans l'approximation de $\sqrt{a}$ par u_n double (au moins) à chaque étape !

(c) La proposition est vraie pour $n = 0$ puisqu'elle se réécrit alors

$$0 \leqslant u_0 - \sqrt{a} \leqslant u_0 - \sqrt{a}.$$

À présent, supposons-la vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ donné. On a alors

$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot (u_n - \sqrt{a})^2$$

d'après la question 4(a), or

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot (u_n - \sqrt{a})^2 &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \left(\frac{(u_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(2\sqrt{a})^{2^n - 1}} \right)^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{(u_0 - \sqrt{a})^{2\cdot 2^n}}{(2\sqrt{a})^{2\cdot(2^n - 1)+1}} = \frac{(u_0 - \sqrt{a})^{2^{n+1}}}{(2\sqrt{a})^{2^{n+1}-1}}, \end{aligned}$$

ce qui établit la proposition au rang $n + 1$. Ainsi, la proposition est vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 50.

1. On a $u_0 = x \geqslant \sqrt[N]{a}$. Soit à présent $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \geqslant \sqrt[N]{a}$. La fonction $f : y \mapsto \frac{(N-1)y+\frac{a}{y^{N-1}}}{N}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que combinaison de fonctions dérivables, et pour tout $y > 0$ on a
$$f'(y) = \frac{1}{N}\Big((N-1) - a(N-1)y^{-N}\Big) = \frac{N-1}{N}\left(1 - \frac{a}{y^N}\right),$$
si bien que
$$f'(y) \geqslant 0 \iff 1 - \frac{a}{y^N} \geqslant 0 \iff y^N \geqslant a \iff y \geqslant \sqrt[N]{a}$$
puisque a et y^N sont strictement positifs. Ainsi, le minimum de f sur $\mathbb{R}_+^*$ est atteint en $\sqrt[N]{a}$, et il vaut $f(\sqrt[N]{a}) = \frac{(N-1)\sqrt[N]{a}+\sqrt[N]{a}}{N} = \sqrt[N]{a}$. Comme $u_n \geqslant \sqrt[N]{a}$ (et donc $u_n > 0$), on a alors $f(u_n) \geqslant \sqrt[N]{a}$, soit $u_{n+1} \geqslant \sqrt[N]{a}$. Ainsi, $u_n \geqslant \sqrt[N]{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.
2. Pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n^N \geqslant a$ d'après la question précédente, donc on peut écrire $\frac{a}{u_n^{N-1}} \leqslant \frac{u_n^N}{u_n^{N-1}} = u_n$, d'où
$$u_{n+1} = \frac{(N-1)u_n + \frac{a}{u_n^{N-1}}}{N} \leqslant \frac{(N-1)u_n + u_n}{N} = u_n.$$
Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. D'après les deux questions précédentes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $\sqrt[N]{a}$. Ainsi, elle converge vers une limite $\ell \geqslant \sqrt[N]{a}$ d'après le théorème de la limite monotone. En passant à la limite dans la relation de récurrence définissant la suite, ce qui est possible grâce aux opérations usuelles sur les limites et au fait que $\ell > 0$, on obtient alors
$$\ell = \frac{(N-1)\ell + \frac{a}{\ell^{N-1}}}{N} \quad \text{soit} \quad \ell = \frac{a}{\ell^{N-1}}, \quad \text{donc} \quad \ell^N = a,$$
et enfin $\ell = \sqrt[N]{a}$ puisque $\ell \geqslant 0$ (ce dernier argument étant pertinent uniquement si N est pair). Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt[N]{a}$, ce qui établit la validité de la méthode proposée pour approcher $\sqrt[N]{a}$.

Correction de l'exercice 51.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition
$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« } u_n \text{ et } v_n \text{ existent et sont strictement positifs »}.$$
Initialisation :

La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie car $u_0 = \frac{1}{4}$ et $v_0 = 2$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la proposition $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors $u_n + v_n > 0$ donc la quantité $u_{n+1} := \frac{2}{u_n+v_n}$ existe et est strictement positive, et il en va de même pour le réel $v_{n+1} := \frac{u_n+v_n}{2}$. Ainsi, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion :

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

2. On démontre une fois encore la proposition par récurrence (avec une rédaction plus succincte). Elle est vraie pour $n = 0$, et si elle l'est pour un $n \in \mathbb{N}$ alors

$$u_{n+1} = \frac{2}{u_n + v_n} \leqslant \frac{2}{2} = 1$$

et

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \geqslant \frac{2}{2} = 1$$

donc $u_{n+1} \leqslant 1 \leqslant v_{n+1}$ d'une part, et d'autre part

$$u_{n+1} + v_{n+1} - 2 = u_{n+1} + \frac{1}{u_{n+1}} - 2 = \frac{u_{n+1}^2 + 1 - 2u_{n+1}}{u_{n+1}} = \frac{(u_{n+1} - 1)^2}{u_{n+1}} \geqslant 0$$

donc $u_{n+1} + v_{n+1} \geqslant 2$, si bien que la proposition est vraie au rang $n + 1$. Elle l'est donc à tout rang $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$$

puisque $u_n \leqslant 1 \leqslant v_n$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Or $u_n = \frac{1}{v_n}$ pour tout $n \geqslant 1$, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$, inverse d'une suite strictement positive et décroissante, est croissante.

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, strictement positive et majorée par 1, donc elle admet une limite $\ell \in]0, 1]$ d'après le théorème de la limite monotone. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1, donc elle admet une limite $\ell' \geqslant 1$ d'après ce même théorème.

5. En passant à la limite dans la relation de récurrence définissant v_{n+1} en fonction de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient

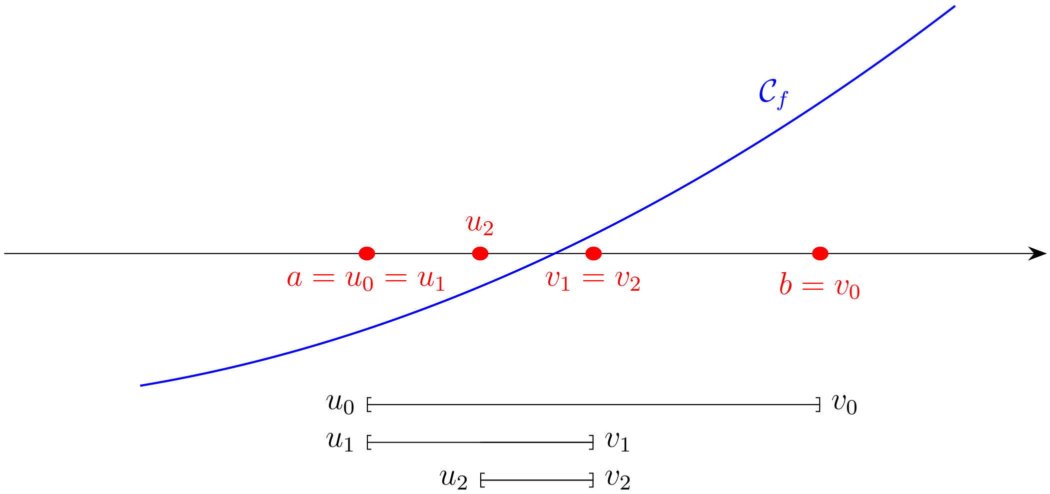
$$\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2} \quad \text{soit} \quad \ell' = \ell.$$

Or $\ell \leqslant 1$ et $\ell' \geqslant 1$, donc $\ell = \ell' = 1$, d'où le résultat attendu.

Correction de l'exercice 52.

1. Le principe de la méthode est de couper en deux l'intervalle $[a, b]$ (ici $[1, 2]$) de façon répétée pour obtenir des intervalles de plus en plus petits et encadrant toujours la valeur $\sqrt{2}$ à estimer. À chaque étape, la fonction $x \mapsto x^2 - 2$ est évaluée en le point médian de l'intervalle précédemment obtenu, qui devient la valeur de v_{n+1} si la fonction prend une valeur positive en ce point et la nouvelle valeur de u_{n+1} sinon.

Ce principe est illustré sur la figure ci-après.



2. La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et s'annule en $\sqrt{2}$; elle est donc négative sur $[0, \sqrt{2}]$ et positive sur $[\sqrt{2}, +\infty[$. Il résulte de la construction [4] des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que celles-ci sont positives et vérifient $f(u_n) \leqslant 0$ et $f(v_n) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; on déduit de ce fait l'encadrement $u_n \leqslant \sqrt{2} \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la quantité $u_{n+1} - u_n$, qui vaut 0 ou $\frac{v_n - u_n}{2}$, est positive, et la quantité $v_{n+1} - v_n$, qui vaut 0 ou $\frac{u_n - v_n}{2}$, est négative : la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante, et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, quel que soit le signe de $\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)^2 - 2$ on a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n - v_n}{2},$$

   donc la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$: elle converge donc vers 0, ce qui montre que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Elles convergent donc vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$. En passant à la limite dans la relation $u_n \leqslant \sqrt{2} \leqslant v_n$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $\ell \leqslant \sqrt{2} \leqslant \ell$, soit $\ell = \sqrt{2}$, ce qu'il fallait démontrer.

3. Si $n \in \mathbb{N}$, l'erreur d'estimation de $\sqrt{2}$ par les approximations u_n et v_n est majorée par $v_n - u_n$ puisque u_n et v_n sont de part et d'autre de $\sqrt{2}$; or la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc

$$\max(|u_n - \sqrt{2}|, |v_n - \sqrt{2}|) \leqslant v_n - u_n = \frac{v_0 - u_0}{2^n} = \frac{b-a}{2^n}.$$

   Si $a = 1$ et $b = 2$, on obtient $\max(|u_n - \sqrt{2}|, |v_n - \sqrt{2}|) \leqslant \frac{1}{2^n}$ donc l'estimation est précise à 10^{-3} près dès lors que $2^n \geqslant 1000$, c'est-à-dire dès lors que $n \geqslant 10$ (puisque $2^9 = 512$ et $2^{10} = 1024$).

4. Par la même méthode, on peut estimer $\sqrt[3]{5}$, unique point d'annulation de la fonction croissante $x \mapsto x^3 - 5$, grâce aux suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et

---

4. Le lecteur est invité à rédiger la démonstration par récurrence (facile) de ce fait en cas de doute.

pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & \text{si} \quad \left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right)^3 - 5 \geqslant 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n & \text{si} \quad \left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right)^3 - 5 < 0. \end{cases}$$

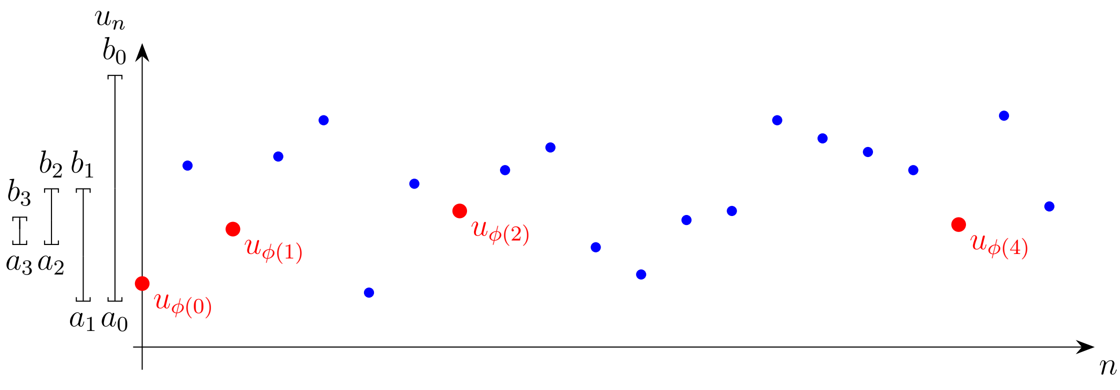
On peut de même estimer φ, unique point d'annulation sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ de la fonction $x \mapsto x^2 - x - 1$ croissante sur cet intervalle, grâce aux suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & \text{si} \quad \left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right)^2 - \dfrac{u_n+v_n}{2} - 1 \geqslant 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n & \text{si} \quad \left(\dfrac{u_n+v_n}{2}\right)^2 - \dfrac{u_n+v_n}{2} - 1 < 0. \end{cases}$$

Correction de l'exercice 53.

1. On met ici en œuvre une méthode de dichotomie (voir l'exercice précédent) permettant d'obtenir des intervalles imbriqués dont la longueur tend vers 0 et qui contiennent chacun une infinité de termes de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. À partir de $[a_0, b_0] = [a, b]$, on obtient les intervalles $[a_n, b_n]$ successifs en définissant chaque $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ comme la moitié gauche ou la moitié droite de l'intervalle $[a_n, b_n]$, de sorte que ce nouvel intervalle contienne une infinité de termes u_k.

   On représente ci-dessous les intervalles $[a_n, b_n]$ pour $n \in [\![0, 3]\!]$ ainsi que les quatre premiers termes de la sous-suite convergente $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui sera construite dans la suite de l'exercice :



2. En utilisant la définition, on remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, quel que soit le cas de figure on a
$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2},$$
d'où le résultat par une récurrence facile.

3. D'après la question précédente, on a $b_n - a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par ailleurs montré que $b_n - a_n \geqslant 0$, si bien que le réel $a_{n+1} - a_n$, qui vaut $a_n - a_n = 0$ ou bien $\frac{a_n+b_n}{2} - a_n = \frac{b_n-a_n}{2} \geqslant 0$, est positif. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

   De la même façon, pour tout $n \in \mathbb{N}$ le réel $b_{n+1} - b_n$, qui vaut $b_n - b_n = 0$ ou bien $\frac{a_n+b_n}{2} - b_n = \frac{a_n-b_n}{2} \leqslant 0$, est nécessairement négatif. Ainsi, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Les deux suites sont donc bien adjacentes.

4. Montrons par récurrence la proposition

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« } \phi(n) \text{ est bien défini et est dans } \mathbb{N} \text{ ».}$$

   Initialisation :

   On a posé $\phi(0) = 0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité :

   Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors $\phi(n)$ est bien défini et est entier, et il reste à montrer que la notation

$$\phi(n+1) := \min \{k \in \mathbb{N} \,:\, k > \phi(n) \text{ et } u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$$

   désigne bien un (unique) entier positif.

   L'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \,:\, k > \phi(n) \text{ et } u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$ est une partie de $\mathbb{N}$. Il s'agit d'une partie non vide puisque par construction, l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$, et donc contient au moins un u_k avec $k > \phi(n)$; il s'agit aussi d'une partie minorée de $\mathbb{R}$ puisqu'elle ne contient que des nombres positifs. L'axiome de la borne inférieure montre alors que

$$\inf \{k \in \mathbb{N} \,:\, k > \phi(n) \text{ et } u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\}$$

   existe bel et bien ; en tant que borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{N}$, il s'agit d'un minimum [5] de cette partie, que l'on peut noter $\phi(n+1)$.

   Conclusion :

   La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$ par le principe de récurrence.

   Enfin, comme par définition on a $\phi(n+1) \in \{k \in \mathbb{N} \,:\, k > \phi(n)\}$ et donc $\phi(n+1) > \phi(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction ϕ (qui est en fait une suite !) est strictement croissante.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a par construction

$$u_{\phi(n)} \in [a_n, b_n] \quad \text{soit} \quad a_n \leqslant u_{\phi(n)} \leqslant b_n.$$

5. En effet, la borne inférieure d'une partie non vide A de $\mathbb{N}$ est nécessairement un élément de cette partie. Pour démontrer ce fait, il suffit de remarquer que si $\inf(A)$ n'est pas entier, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[\inf(A), \inf(A) + \varepsilon]$ ne contient aucun entier et donc aucun élément de A, ce qui contredit la définition de la borne inférieure.

Or on a vu que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite ℓ, d'où

$$u_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

d'après le théorème des gendarmes.

La suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bel et bien, ce qui établit le théorème de Bolzano-Weierstrass.

6. Il suffit de prendre $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: on a alors

$$u_{\phi(n)} = \phi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

pour toute fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante[6].

Correction de l'exercice 54.

1. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Si $p, q \in \mathbb{N}$ sont tels que $p \geqslant q \geqslant N$, on a alors d'après l'inégalité triangulaire

$$|u_p - u_q| = |(u_p - \ell) + (\ell - u_q)| \leqslant |u_p - \ell| + |\ell - u_q| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

2. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. En appliquant la définition avec $\varepsilon = 1$, on obtient l'existence d'un $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p, q \in \mathbb{N}$ vérifient $p \geqslant q \geqslant N$ alors $|u_p - u_q| \leqslant 1$. En particulier, en prenant $q = N$ on obtient $|u_p - u_N| \leqslant 1$ pour tout $p \geqslant N$. Ainsi, pour tout $p \geqslant N$ on a $|u_p| \leqslant |u_N| + 1$ d'après l'inégalité triangulaire, donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par

$$\max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1),$$

qui existe en tant que maximum d'un nombre fini de réels.

3. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et qu'il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N_1$ alors $|u_{\phi(n)} - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe aussi N_2 tel que si $p, q \in \mathbb{N}$ vérifient $p \geqslant q \geqslant N_2$, alors $|u_p - u_q| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Posons $N := \max(N_1, N_2)$. Si $n \geqslant N$, on a d'une part $|u_{\phi(n)} - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ puisque $n \geqslant N \geqslant N_1$, et d'autre part $|u_n - u_{\phi(N)}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ puisque n et $\phi(N)$ sont tous deux[7] supérieurs à N, et donc à N_2.

Ainsi, pour tout $n \geqslant N$ on a

$$\begin{aligned} |u_n - \ell| &= |u_n - u_{\phi(N)}| + |u_{\phi(N)} - \ell| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

---

6. Le fait que toute fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante tend vers $+\infty$ résulte de la minoration $\phi(n) \geqslant n$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$; le lecteur est invité à démontrer cette inégalité par récurrence.

7. Comme dans l'exercice précédent, on démontre par une récurrence facile l'inégalité $\phi(k) \geqslant k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

4. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. D'après la question 2, elle est alors bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass démontré dans l'exercice précédent, elle admet donc une sous-suite convergente. La question 3 montre alors qu'elle converge.

Correction de l'exercice 55. Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente, de limite $\ell \in \mathbb{R}$. Elle est alors bornée, et pour toute fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante on a[8]

$$u_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour unique valeur d'adhérence.

Réciproquement, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée admettant une unique valeur d'adhérence que nous noterons $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers α. On peut alors trouver $\varepsilon > 0$ et une infinité de termes u_n hors de $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$, c'est-à-dire une sous-suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{\varphi(n)} - \alpha| > \varepsilon.$$

Or $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, en tant que suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est bornée, donc elle admet une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass : on note cette sous-suite $(u_{\phi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) et on note β sa limite. En passant à la limite dans la relation

$$|u_{\phi(\psi(n))} - \alpha| > \varepsilon$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient alors $|\beta - \alpha| \geqslant \varepsilon$, mais $\varepsilon > 0$ donc $\beta \neq \alpha$. Ainsi, la suite $(u_{\phi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{(\phi\circ\psi)(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, qui est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers une limite différente de α : or ce point contredit le fait que l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est α. Ainsi, notre hypothèse de départ est absurde : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Correction de l'exercice 56.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{u_k \,:\, k > n\}$ est non vide (puisqu'il contient par exemple u_{n+1}) et majoré (puisqu'il contient uniquement des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, majorée par b) ; il admet donc une borne supérieure, ce qui montre que v_n est bien défini. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\{u_k \,:\, k > n+1\} \subset \{u_k \,:\, k > n\}$$

donc

$$\sup\{u_k \,:\, k > n+1\} \leqslant \sup\{u_k \,:\, k > n\},$$

soit $v_{n+1} \leqslant v_n$. Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; or elle est minorée par a puisque l'ensemble $\{u_k \,:\, k > n\}$ est minoré par a pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ sa limite.

8. Pour démontrer cette proposition, on utilise une fois encore l'inégalité $\phi(n) \geqslant n$, qui donne $\phi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2. Le nombre $\phi(0) = 0$ est bien défini. On montre ensuite par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $\phi(n+1)$ est bien défini et vérifie $\phi(n+1) > \phi(n)$. En effet, pour tout n, si $\phi(n)$ est bien défini alors l'ensemble
$$\left\{k > \phi(n) \, : |u_k - v_{\phi(n)}| \leqslant \frac{1}{2^n}\right\},$$
qui est une partie de $\mathbb{N}$, est non vide par définition de la borne supérieure puisque $v_{\phi(n)} = \sup\{u_k \, : \, k > \phi(n)\}$: ainsi, cet ensemble admet un minimum [9] qui est un entier strictement supérieur à $\phi(n)$, c'est-à-dire que $\phi(n+1)$ existe et que $\phi(n+1) > \phi(n)$. La fonction ϕ est donc bien définie et strictement croissante.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_{\phi(n+1)} - v_{\phi(n)}| \leqslant \frac{1}{2^n}$$
par définition de ϕ, donc
$$\begin{aligned} |u_{\phi(n+1)} - \ell| &= |u_{\phi(n+1)} - v_{\phi(n)} + v_{\phi(n)} - \ell| \\ &\leqslant |u_{\phi(n+1)} - v_{\phi(n)}| + |v_{\phi(n)} - \ell| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leqslant \frac{1}{2^n} + |v_{\phi(n)} - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$
d'où $u_{\phi(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, c'est-à-dire que $u_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Le théorème de Bolzano-Weierstrass est donc démontré [10].

Correction de l'exercice 57.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors $(u_k)_{k\geqslant n}$ l'est pour tout n, donc la suite $\left(\inf_{k\geqslant n} u_k\right)_{n\geqslant 0}$ est bien définie. Elle est par ailleurs croissante puisque pour tout $n \geqslant 0$ on a
$$\{u_k \, : \, k \geqslant n+1\} \subset \{u_k \, : \, k \geqslant n\}$$
et donc
$$\inf_{k\geqslant n+1} u_k \geqslant \inf_{k\geqslant n} u_k.$$
Ainsi, elle admet une limite finie ou infinie d'après le théorème de la limite monotone. La quantité $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ est donc bien définie.

Le même argument (adapté à la décroissance de $\left(\sup_{k\geqslant n} u_k\right)_{n\geqslant 0}$ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée) montre que $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ est bien définie.

L'inégalité $\liminf_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} u_n$ est évidente lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée (puisqu'alors le terme de gauche vaut $-\infty$) ou pas majorée (puisqu'alors

9. Voir l'autre démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass plus haut, qui utilise le fait que la borne inférieure d'une partie non vide de $\mathbb{N}$ est nécessairement un minimum.

10. La technique de preuve adoptée ici est intéressante. En ne retenant que les termes v_n, on obtient une suite convergente ; toutefois, ces réels ne sont pas des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisqu'une borne supérieure n'est pas nécessairement atteinte. On choisit donc pour tout n une valeur de u_k (notée $u_{\phi(n+1)}$) située à une distance inférieure à $\frac{1}{2^n}$ de l'un des v_k (en l'occurrence $v_{\phi(n)}$), ce qui construit de proche en proche une suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$ dont les termes deviennent arbitrairement proches de certains v_k, et donc de ℓ.

le terme de droite vaut $+\infty$). Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on peut passer à la limite dans la relation

$$\inf_{k\geqslant n} u_k \leqslant \sup_{k\geqslant n} u_k$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour obtenir

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} u_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minorée. On va montrer que $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de la suite – le résultat analogue pour $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ s'établit de la même façon.

   Montrons tout d'abord que $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On va pour cela s'inspirer de la méthode utilisée pour démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans l'exercice précédent. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n := \inf_{k>n} u_k$; on a alors $\lim v_n = \liminf_{n\to+\infty} u_n$ par définition. On pose à présent $\phi(0) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi(n+1) = \min\left\{k > \phi(n) \ : \ |u_k - v_{\phi(n)}| \leqslant \frac{1}{2^n}\right\}.$$

   La définition de la borne inférieure implique que la fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est bien définie et strictement croissante. On peut alors écrire que

$$\left|u_{\phi(n+1)} - v_{\phi(n)}\right| \leqslant \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   et donc $u_{\phi(n+1)} - v_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où

$$u_{\phi(n+1)} = \underbrace{u_{\phi(n+1)} - v_{\phi(n)}}_{\to 0} + \underbrace{v_{\phi(n)}}_{\to \liminf u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \liminf_{n\to+\infty} u_n.$$

   Ainsi, $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ est bien une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

   Montrons à présent que toute valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est supérieure ou égale à $\liminf_{n\to+\infty} u_n$. Pour cela, il suffit d'écrire que $u_n \geqslant v_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$ (puisque v_{n-1} est la borne inférieure d'un ensemble contenant le terme u_n), et donc que si $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction strictement croissante [11] telle que $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ, alors en passant à la limite dans la relation $u_{\phi(n)} \geqslant v_{\phi(n)-1}$ quand $n \to +\infty$ on obtient

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} \geqslant \lim_{n\to+\infty} v_{\phi(n)-1} = \liminf_{n\to+\infty} u_n.$$

   Ainsi, $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ est bien la plus petite valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ce qu'il fallait démontrer.

11. Rappelons une fois encore qu'une telle application vérifie $\phi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\phi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Nous nous servirons de ce résultat sans le rappeler dans la suite.

3. (a) La suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par -1, donc $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant -1$. Or -1 est une valeur d'adhérence de la suite puisque $(-1)^{2n+1} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant -1$ (puisque la limite inférieure est la plus petite des valeurs d'adhérence d'après la question précédente), si bien que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

   On montre de même que $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

   (b) La suite $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ est une fois encore minorée par -1, et on a $u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$, donc $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

   À présent, si $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors

$$u_{\phi(n)} \leqslant (-1)^{\phi(n)} + \frac{1}{2^{\phi(n)}} \leqslant 1 + \frac{1}{2^{\phi(n)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

   donc $(u_{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$ ne peut converger vers un réel strictement supérieur à 1, c'est-à-dire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'admet pas de valeur d'adhérence strictement supérieure à 1. Or 1 est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puisque l'on a par exemple

$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2^{2n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$

   donc $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$, qui est la plus grande valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, vaut 1.

   (c) Comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, pour toute application $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante on a $u_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc 0 est la seule valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: ainsi, on a

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

   (d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et vérifie $u_{2n+1} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   On a par contre $u_{2n} = 2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée et $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par définition.

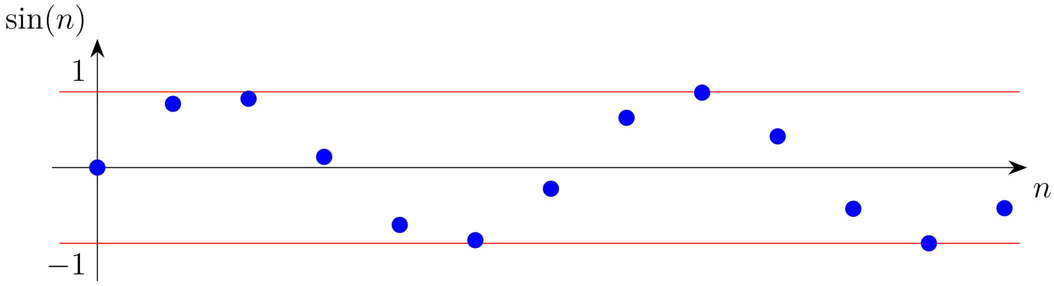
4. Comme $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[-1, 1]$, elle admet une limite inférieure et une limite supérieure, toutes deux dans $[-1, 1]$. Montrons que $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sin(n) = 1$; la démonstration du fait que $\liminf\limits_{n\to+\infty} \sin(n) = -1$ est similaire et son détail est laissé au lecteur.

   L'ensemble $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver une suite d'éléments de cet ensemble convergeant vers $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire une suite $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et une suite $(k_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que $n_p + 2k_p\pi \xrightarrow[p\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$. On a alors

$$|\sin(n_p) - 1| = \left|\sin(n_p + 2k_p\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \leqslant \left|n_p + 2k_p\pi - \frac{\pi}{2}\right| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

grâce à la 2π-périodicité de sin et à l'inégalité donnée dans l'énoncé, d'où $\sin(n_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$. Ainsi, 1 est une valeur d'adhérence de la suite $(\sin(n))_{n\geqslant 0}$ qui est majorée par 1 : on a donc $\limsup_{n\to+\infty} \sin(n) = 1$.

La figure suivante illustre le fait que -1 et 1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$:



5. Supposons les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorées. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sup_{k\geqslant n}(u_k + v_k) \leqslant \sup_{k\geqslant n}(u_k) + \sup_{k\geqslant n}(v_k).$$

En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, on obtient alors

$$\limsup_{n\to+\infty}(u_n + v_n) \leqslant \limsup_{n\to+\infty}(u_n) + \limsup_{n\to+\infty}(v_n),$$

sans qu'il y ait nécessairement d'égalité [12]. Cette relation reste valable si l'une des deux limites supérieures vaut $+\infty$ puisque le terme de droite de l'inégalité vaut alors $+\infty$.

On démontre de la même façon que

$$\liminf_{n\to+\infty}(u_n + v_n) \geqslant \liminf_{n\to+\infty}(u_n) + \liminf_{n\to+\infty}(v_n).$$

6. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi, et on a

$$\sup_{k\geqslant n} u_k \leqslant \sup_{k\geqslant n} v_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$:

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} v_n.$$

Cette inégalité reste vraie si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, puisqu'alors le terme de droite vaut $+\infty$.

On démontre de la même façon que

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} v_n.$$

12. On le voit en prenant $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne

$$\limsup_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \limsup_{n\to+\infty} 0 = 0 \quad \text{et} \limsup_{n\to+\infty}(u_n) + \limsup_{n\to+\infty}(v_n) = 1 + 1 = 2.$$

7. Si $a = 0$, l'égalité est clairement vérifiée puisque la limite (et donc les limites supérieure et inférieure) de la suite nulle est nulle. Supposons à présent que $a > 0$. On remarque tout d'abord que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors $(au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne l'est pas non plus, donc les limites supérieures de ces deux suites valent $+\infty$. À présent, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors les valeurs d'adhérence de $(au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont exactement [13] les réels $a\ell$ où ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; or la limite supérieure d'une suite majorée est sa plus grande valeur d'adhérence, donc
$$\limsup_{n\to+\infty}(au_n) = a \limsup_{n\to+\infty}(u_n)$$
puisque $a > 0$.

   On démontre de façon équivalente l'égalité sur la limite inférieure.

8. (a) Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée signifie que $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n < +\infty$; cela découle directement de la définition de la limite supérieure.

   (b) Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une constante strictement positive à partir d'un certain rang signifie que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$. En effet :

   - Si $m > 0$ est tel que $u_n \geqslant m$ à partir d'un certain rang, alors toute valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécessairement supérieure à m, donc $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant m > 0$.
   - Réciproquement, si $\alpha := \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n > 0$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{k\geqslant n} u_k\right) > 0$, alors à partir d'un certain rang on a $\inf\limits_{k\geqslant n} u_k > \frac{\alpha}{2}$ donc $u_n \geqslant \frac{\alpha}{2}$, si bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée à partir d'un certain rang par une constante strictement positive.

   (c) Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une infinité de termes inférieurs ou égaux à α pour tout $\alpha > 0$ signifie que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est minorée à partir d'un certain rang par aucune constante positive. Il s'agit de la négation du point précédent : ainsi, cette proposition est équivalente au fait que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant 0$.

9. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admette ℓ pour limite. Si $\ell = +\infty$, alors $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ par définition, et pour tout $M > 0$ on a $u_n \geqslant M$ à partir d'un certain rang, donc $\inf\limits_{k\geqslant n} u_k \geqslant M$ à partir de ce rang, ce qui montre que
$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geqslant n} u_k = +\infty.$$
On montre de même que si $\ell = -\infty$, alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ sont égales à $-\infty$. Enfin, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, c'est-à-dire que l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ℓ, donc les limites inférieure et supérieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui en sont les valeurs d'adhérence extrêmes, valent ℓ. Dans tous les cas, on a donc
$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

13. En effet, il est équivalent d'écrire que $u_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et que $au_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\ell$ puisque $a \neq 0$.

Réciproquement, supposons que $\liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Si $\ell = +\infty$, la relation $\liminf_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donne

$$u_n \geqslant \inf_{k\geqslant n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. De même, si $\ell = -\infty$, la relation $\limsup_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ montre que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. Supposons à présent que $\ell \in \mathbb{R}$. D'après la définition des limites inférieure et supérieure, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : on peut donc écrire que

$$\inf_{k\geqslant n} u_k \leqslant u_n \leqslant \sup_{k\geqslant n} u_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or les termes de gauche et de droite de cet encadrement convergent vers ℓ, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ d'après le théorème des gendarmes, ce qui clôt la preuve.

10. Cette question est typique des raisonnements de passage à la limite permis par les opérateurs lim inf et lim sup.

Considérons une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $b \in \mathbb{R}$ et $a \in [0,1[$, ainsi qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = au_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, elle est bornée par un réel $M \geqslant 0$. Montrons à présent que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; conformément à l'indication de l'énoncé, on va démontrer pour tout $n \geqslant 0$ la proposition

$$\mathcal{P}_n \ : \quad \text{«} \ |u_n| \leqslant |u_0| + \frac{M}{1-a} \ \text{»}.$$

Tout d'abord, $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $|u_0| \leqslant |u_0| + \frac{M}{1-a}$. Supposons à présent $\mathcal{P}_n$ vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ donné. On a alors

$$\begin{aligned} |u_{n+1}| = |au_n + b_n| &\leqslant a|u_n| + |b_n| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\ &= a\left(|u_0| + \frac{M}{1-a}\right) + |b_n| \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\ &\leqslant a|u_0| + \frac{Ma}{1-a} + M = a|u_0| + M\left(\frac{a}{1-a} + 1\right) \\ &\leqslant 1 \cdot |u_0| + \frac{M}{1-a} \quad \text{car } a \leqslant 1 \text{ et } |u_0| \geqslant 0, \end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

En passant à la limite inférieure dans la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b_n$, on obtient

$$\liminf_{n\to+\infty} u_{n+1} = \liminf_{n\to+\infty}(au_n + b_n) \geqslant a \liminf_{n\to+\infty} u_n + \liminf_{n\to+\infty} b_n = a \liminf_{n\to+\infty} u_n + b$$

grâce aux questions 5 et 6, donc $\ell := \liminf_{n\to+\infty} u_n$ (qui est finie puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée) vérifie

$$\ell \geqslant a\ell + b \quad \text{soit} \quad \ell \geqslant \frac{b}{1-a}$$

puisque $1-a>0$. En passant à la limite supérieure dans la même relation, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} u_{n+1} = \limsup_{n\to+\infty}(au_n+b_n) \leqslant a \limsup_{n\to+\infty} u_n + \limsup_{n\to+\infty} b_n = a \limsup_{n\to+\infty} u_n + b$$

donc $L := \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ (qui est elle aussi finie puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée) vérifie

$$L \leqslant aL+b \quad \text{soit} \quad L \leqslant \frac{b}{1-a}$$

puisque $1-a>0$.
Or $\ell = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant L$ d'après la question 1, donc

$$\frac{b}{1-a} \leqslant \ell \leqslant L \leqslant \frac{b}{1-a},$$

si bien que $\ell = L = \frac{b}{1-a}$, soit

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n = \frac{b}{1-a}.$$

La question 8 permet alors d'affirmer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{b}{1-a}$, ce qu'il fallait démontrer.