Exponentielle et logarithme

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 14.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{P}_n$: « u_n existe et est strictement positif ». Démontrons par récurrence double que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation :

   Les termes u_0 et u_1 existent et sont strictement positifs puisqu'ils valent tous les deux 1.

   Hérédité :

   Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ vraies. On a alors $u_n u_{n+1} > 0$, donc $u_{n+2} := 8\sqrt{u_n u_{n+1}}$ existe et est strictement positif. La proposition $\mathcal{P}_{n+2}$ est donc vérifiée.

   Conclusion :

   Ainsi, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 0$; ainsi, le logarithme $\ln(u_n)$ existe, si bien que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

   $$\begin{aligned} v_{n+2} &= \ln(u_{n+2}) = \ln\left(8\sqrt{u_n u_{n+1}}\right) \\ &= \ln(8) + \frac{1}{2}\left(\ln(u_n) + \ln(u_{n+1})\right) = 3\ln(2) + \frac{v_n + v_{n+1}}{2}, \end{aligned}$$

   ce qui est la relation attendue.

2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La suite $(\alpha n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation $(*)$ si et seulement si on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$\alpha(n+2) = \frac{\alpha(n+1) + \alpha n}{2} + 3\ln(2)$$

   c'est-à-dire

   $$\alpha\left(n + 2 - n - \frac{1}{2}\right) = 3\ln(2) \quad \text{soit} \quad \frac{3}{2}\alpha = 3\ln(2).$$

   C'est donc le cas si et seulement si $\alpha = 2\ln(2)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

   $$\begin{aligned} w_{n+2} = v_{n+2} - \alpha(n+2) &= \frac{v_{n+1} + v_n}{2} + 3\ln(2) - \left(\frac{\alpha(n+1) + \alpha n}{2} + 3\ln(2)\right) \\ &= \frac{v_{n+1} - \alpha(n+1) + v_n - \alpha n}{2} = \frac{w_{n+1} + w_n}{2} \end{aligned}$$

puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\alpha n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont $(*)$. Ainsi, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence linéaire double $w_{n+2} = \frac{w_{n+1}+w_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. L'équation caractéristique de cette suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $x^2 = \frac{x+1}{2}$ et admet 1 et $-\frac{1}{2}$ pour racines. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \lambda + \mu \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Or $w_0 = \ln(u_0) - \alpha \cdot 0 = \ln(1) = 0$ et $w_1 = \ln(u_1) - \alpha \cdot 1 = \ln(1) - \alpha = -2\ln(2)$, donc on a

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ \lambda - \frac{1}{2}\mu &= -2\ln(2) \end{cases} \quad \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\text{d'où}} \quad \begin{cases} \lambda + \mu &= 0 \\ -\frac{3}{2}\mu &= -2\ln(2) \end{cases}$$

soit $\mu = \frac{4}{3}\ln(2)$ et $\lambda = -\mu = -\frac{4}{3}\ln(2)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$w_n = \frac{4}{3}\ln(2)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right)$$

donc

$$\begin{aligned} v_n = w_n + \alpha n &= \frac{4}{3}\ln(2)\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) + 2\ln(2)n \\ &= \ln(2)\left(\frac{4}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) + 2n\right) \end{aligned}$$

et enfin

$$u_n = e^{v_n} = \exp\left(\ln(2)\left(\frac{4}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) + 2n\right)\right) = 2^{\frac{4}{3}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 1\right) + 2n}.$$

Correction de l'exercice 15.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions continues et strictement croissante en tant que somme de fonctions strictement croissantes. Elle vérifie de plus

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

donc le théorème de la bijection indique qu'elle induit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un unique point $x_n \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $f(x_n) = n$, ce qu'il fallait démontrer.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_n) = n < n+1 = f(x_{n+1})$, donc $x_n < x_{n+1}$ par stricte croissance de f. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante ; elle admet donc une limite finie (nécessairement supérieure à x_0 puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante) ou égale à $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Or, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers un réel $\ell > 0$, on aurait $x_n + \ln(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ln(\ell)$ par continuité de ln, mais $x_n + \ln(x_n) = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, d'où une contradiction. Ainsi, on a nécessairement $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

3. En écrivant à nouveau que $x_n + \ln(x_n) = n$ pour tout $n \geqslant 1$, on obtient

$$\frac{n}{x_n} = \frac{x_n + \ln(x_n)}{x_n} = 1 + \frac{\ln(x_n)}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

par croissance comparée (puisque $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$), d'où, en passant à l'inverse, la relation attendue :

$$\frac{x_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Correction de l'exercice 16.

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$\begin{aligned} L(x_1+\lambda, \dots, x_n+\lambda) &= \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{x_k+\lambda}} \left(e^{x_1+\lambda}, \dots, e^{x_n+\lambda}\right) = \frac{1}{e^{\lambda}\sum\limits_{k=1}^{n} e^{x_k}} \cdot e^{\lambda}\left(e^{x_1}, \dots, e^{x_n}\right) \\ &= \frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} e^{x_k}} (e^{x_1}, \dots, e^{x_n}) = L(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. Raisonnons par analyse-synthèse. On suppose pour commencer l'existence d'un n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant les deux conditions attendues, et on pose $S := \sum\limits_{k=1}^{n} e^{x_k}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a alors $y_k = \frac{1}{S} e^{x_k}$, donc $e^{x_k} = S y_k$ et enfin, comme $S > 0$ et $y_k > 0$: $x_k = \ln(S y_k) = \ln(S) + \ln(y_k)$. Ainsi, en sommant les égalités obtenues pour $k \in [\![1, n]\!]$:

$$1 = \sum_{k=1}^{n} x_k = n\ln(S) + \sum_{k=1}^{n} \ln(y_k),$$

soit

$$\ln(S) = \frac{1}{n}\left(1 - \sum_{k=1}^{n} \ln(y_k)\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \ln\left(\prod_{k=1}^{n} y_k\right)\right),$$

d'où, en passant à l'exponentielle :

$$S = \left(\frac{e}{\prod\limits_{k=1}^{n} y_k}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Ainsi, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a

$$\begin{aligned} x_k = \ln(S) + \ln(y_k) &= \frac{1}{n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)\right) + \ln(y_k) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} (\ln(y_i) - \ln(y_k))\right) = \frac{1}{n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{y_i}{y_k}\right)\right), \end{aligned}$$

ce qui établit l'unicité du vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ sous réserve de son existence.

Réciproquement, si l'on définit pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ le réel x_k par

$$x_k := \frac{1}{n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{y_i}{y_k}\right)\right),$$

on peut écrire $x_k = \ln(S) + \ln(y_k)$, où

$$S := \left(\frac{e}{\prod_{i=1}^{n} y_i}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \text{et donc} \quad \ln(S) = \frac{1}{n}\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \ln(y_i)\right).$$

On a donc, d'une part :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = n\ln(S) + \sum_{k=1}^{n} \ln(y_k) = 1,$$

et d'autre part, en remarquant que $S = \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}$:

$$L(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{S}(e^{x_1}, \ldots, e^{x_n}) = \frac{1}{S}(Sy_1, \ldots, Sy_n) = (y_1, \ldots, y_n).$$

On a donc bien établi l'existence et l'unicité d'un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant les conditions spécifiées.

3. L'application L n'est pas injective d'après la question 1 : en effet, en prenant par exemple $\lambda = 1$ et tous les x_i nuls, on obtient l'égalité $L(0, \ldots, 0) = L(1, \ldots, 1)$.

   L'application L n'est pas non plus surjective, car l'image d'un vecteur par cette application est nécessairement un vecteur de coordonnées strictement positives ; ainsi, le vecteur nul $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, par exemple, n'admet pas d'antécédent par L.

Correction de l'exercice 17. La première option conduit à disposer au terme des n années d'une somme égale à $A \cdot 1,03^n$, tandis que la deuxième permet de disposer d'une somme $\frac{2A}{3} \cdot 1,06^n$. On cherche donc une condition sur n pour que $\frac{2A}{3} \cdot 1,06^n \geqslant A \cdot 1,03^n$. En simplifiant par $A > 0$, il s'agit donc de résoudre l'inéquation $\frac{2}{3} \cdot 1,06^n \geqslant 1,03^n$. Or

$$\begin{aligned}\frac{2}{3} \cdot 1,06^n \geqslant 1,03^n \quad &\iff \quad \left(\frac{1,06}{1,03}\right)^n \geqslant \frac{3}{2} \quad \iff \quad n\ln\left(\frac{1,06}{1,03}\right) \geqslant \ln\left(\frac{3}{2}\right) \\ &\iff \quad n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln\left(\frac{1,06}{1,03}\right)} = \frac{\ln(3) - \ln(2)}{\ln(1,06) - \ln(1,03)} \approx 14,12\end{aligned}$$

puisque $\ln\left(\frac{1,06}{1,03}\right) > 0$. Ainsi, la deuxième option est préférable à la première si et seulement si la durée du placement est supérieure ou égale à 15 ans.

Correction de l'exercice 18. Au terme de n années, le capital a été multiplié par $\left(1+\frac{x}{100}\right)^n$. Si l'on considère l'évolution du capital comme continue, on peut considérer que le capital présent sur le compte à n'importe quel temps réel $t \geqslant 0$ vaut $\left(1+\frac{x}{100}\right)^t$. Le temps de doublement[1] est alors défini comme le temps $t \geqslant 0$ tel que $\left(1+\frac{x}{100}\right)^t = 2$, c'est-à-dire tel que $t\ln\left(1+\frac{x}{100}\right) = \ln(2)$, soit $t = \frac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{x}{100}\right)}$.
D'après les approximations proposées, on a alors

$$t \approx \frac{0,69}{\frac{x}{100}} \approx \frac{69}{x}$$

puisque $\frac{x}{100}$ est petit par hypothèse. Il est aisé de calculer cette quantité de tête lorsque $x = 1$ (on obtient alors un temps de doublement de 69 ans) ou $x = 3$ (on a alors $t = 23$ ans), mais pour d'autres valeurs de x on préfère souvent utiliser l'approximation

$$t \approx \frac{72}{x}$$

car 72 possède de nombreux diviseurs (notamment 2, 4, 6, 8 et 9). Pour $x = 5$, $x = 7$ ou $x = 70$, on peut choisir l'approximation $t \approx \frac{70}{x}$.
On présente dans le tableau ci-dessous, pour chaque valeur de $x \in [\![1, 10]\!]$, l'arrondi à l'unité supérieure du temps de doublement exact ainsi que l'approximation obtenue grâce à la méthode décrite ici :

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temps de doublement exact	70	36	24	18	15	12	11	10	9	8
Temps de doublement approché	69	36	23	18	14	12	10	9	8	7

Correction de l'exercice 19. On a $\log(\pi^2) = 2\log(\pi) \approx 2 \times 0,49715 = 0,99430$. On se ramène à la table de logarithmes fournie en ajoutant 3 : on a $3 + \log(\pi^2) \approx 3,99430$ soit $\log(1000 \cdot \pi^2) \approx 3,99430$ d'où, en lisant sur la table :

$$\log(9869) \leqslant \log(1000 \cdot \pi^2) \leqslant \log(9870)$$

soit, par stricte croissance de log :

$$9869 \leqslant 1000 \cdot \pi^2 \leqslant 9870,$$

d'où

$$9,869 \leqslant \pi^2 \leqslant 9,870,$$

ce qui est l'approximation attendue.

Correction de l'exercice 20. On écrit tout d'abord que

$$\log(\sqrt{6}) = \frac{1}{2}\ln(6) = \frac{1}{2}(\ln(2) + \ln(3)).$$

1. Le nombre minimal d'années nécessaires pour que le capital ait doublé s'obtient comme le plus petit entier supérieur ou égal à ce temps de doublement purement théorique.

Or on a $0,30103-5\cdot 10^{-6}\leqslant \ln(2)<0,30103+5\cdot 10^{-6}$ et $0,47712-5\cdot 10^{-6}\leqslant \ln(3)<0,47712+5\cdot 10^{-6}$ donc, en sommant ces inégalités, $0,77815-10^{-5}\leqslant \ln(2)+\ln(3)<0,77815+10^{-5}$ et enfin, en divisant par 2 : $0,389075-5\cdot 10^{-6}<\frac{1}{2}(\ln(2)+\ln(3))<0,389075+5\cdot 10^{-6}$ soit $0,389070<\frac{1}{2}(\ln(2)+\ln(3))<0,389076$. Pour se ramener aux approximations fournies, on écrit que

$$3,389075<3+\log(\sqrt{6})<3,389076$$

donc

$$\log(2449)<\log(1000\cdot\sqrt{6})<\log(2450),$$

d'où

$$2449<1000\cdot\sqrt{6}<2450$$

par stricte croissance de log, et enfin

$$2,449<\sqrt{6}<2,450.$$

Correction de l'exercice 21.

1. On a $5=4+1=1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0$, donc l'écriture de 5 en binaire est 101. De même, en écrivant[2] $15=8+4+2+1$, on déduit que 15 s'écrit 1111 en binaire. Enfin, en écrivant $26=16+8+2$, on obtient l'écriture binaire de 26 qui est 11010.
2. (a) Les nombres qui peuvent s'écrire en utilisant 6 bits seulement sont les nombres de la forme $\sum_{k=0}^{5} a_k 2^k$ avec $a_0,\dots,a_5\in\{0,1\}$. Ce sont des entiers entre 0 et $1+2+4+6+8+16+32=63$; or il existe 64 entiers entre 0 et 63 (inclus), mais aussi 64 choix possibles pour $(a_0,\dots,a_5)$, et on peut montrer[3] que deux entiers distincts ont des écritures en binaire distinctes : ainsi, les nombres écrits sur 6 bits au plus sont exactement les entiers entre 0 et 63.
   (b) On montre de la même façon que les nombres écrits sur un octet au plus sont exactement les entiers entre 0 et $2^8-1=255$.
   (c) Par la même lorgique, les nombres écrits sur 32 bits au plus sont exactement les entiers entre 0 et $2^{32}-1=4294967295$.
3. D'après la question précédente, il s'agit de déterminer le plus petit entier $n\geqslant 1$ tel que $9999\leqslant 2^n-1$, soit $2^n\geqslant 10000$. On résout donc :

$$2^n\geqslant 10000 \quad\Longleftrightarrow\quad n\geqslant \log_2(10000),$$

où l'on rappelle que le logarithme binaire $\log_2$ est défini par $\log_2 : x\mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(2)}$. Or $\log_2(10000)\approx 13,29$, donc le plus petit entier n tel que $2^n\geqslant 10000$ est 14 (et en effet, $2^{13}=8192$ et $2^{14}=16384$) : il faut donc prévoir 14 bits.

2. Pour obtenir cette décomposition, on se demande quelle est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à 15, en l'occurrence $8=2^3$, puis on écrit $15=8+7$ et on décompose 7 selon la même procédure, que l'on répète jusqu'à tomber sur une puissance de 2, en l'occurrence $1=2^0$.

3. Voir l'exemple 22 du chapitre « Applications ».

4. Dans la logique de la question précédente, il s'agit de déterminer le plus petit entier k tel que $2^k - 1 \geqslant n$, c'est-à-dire tel que $2^k \geqslant n+1$. Or on a
$$2^k \geqslant n+1 \quad \iff \quad k \geqslant \log_2(n+1).$$
L'entier k recherché est donc le plus petit entier supérieur à $\log_2(n+1)$: on peut l'appeler *partie entière supérieure de* $\log_2(n+1)$ et le noter $\lceil \log_2(n+1) \rceil$, ou l'exprimer à l'aide de la partie entière classique en écrivant
$$k = \begin{cases} \log_2(n+1) & \text{si} \quad \log_2(n+1) \in \mathbb{Z} \\ \lfloor \log_2(n+1) \rfloor + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 22.

1. (a) Les graphiques fournis suggèrent qu'une évolution linéaire représentée en échelle logarithmique (en ordonnée) forme une courbe logarithmique. Pour démontrer ce fait, on écrit que la courbe d'une fonction $f > 0$ représentée en échelle logarithmique est l'ensemble des points de la forme $(x, \ln(f(x)))$, c'est-à-dire la courbe de $\ln \circ f$: ainsi, une fonction de la forme $x \mapsto ax + b$, avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, admet pour représentation en échelle logarithmique la courbe de $x \mapsto \ln(ax+b)$, qui a bien une allure logarithmique.
   (b) Les graphiques fournis suggèrent qu'une évolution exponentielle est représentée en échelle logarithmique (en ordonnée) par une évolution linéaire. Pour démontrer ce fait, on remarque que si $f : x \mapsto ae^{bx}$ avec $a > 0$ et $b > 0$, alors la représentation en échelle logarithmique de f est la courbe de $x \mapsto \ln(ae^{bx}) = \ln(a) + bx$, qui a bien une allure linéaire.
2. (a) La représentation d'une fonction f avec un tel choix d'échelles est la courbe formée des points $(\ln(x), f(x))$, qui coïncide avec la courbe formée des points $(t, f(e^t))$ (en posant $x = e^t$). Ainsi, si f est de la forme $f : x \mapsto ax + b$, elle est représentée avec ce choix d'échelles par la courbe de la fonction $t \mapsto e^{at+b} = e^b e^{at}$, c'est-à-dire par une courbe d'allure exponentielle.
   (b) D'après la question précédente, la courbe représentative de f dans le repère est la droite d'équation $y = at + b$ si et seulement si $f(e^t) = at + b$ pour tout t, c'est-à-dire, en posant $x = e^t$, si f est de la forme $f : x \mapsto a\ln(x) + b$.
3. (a) La courbe d'une fonction f dans un repère log-log est l'ensemble des points de la forme $(\ln(x), \ln(f(x)))$, c'est-à-dire, en posant $x = e^t$, l'ensemble des points de la forme $(t, \ln(f(e^t))$. Si $f : x \mapsto ax + b$ représente une évolution linéaire, alors la courbe a l'allure du graphe de
$$\ln(ae^t + b) = \ln\left(ae^t\left(1 + \frac{b}{a}e^{-t}\right)\right) = \ln(a) + t + \ln\left(1 + \frac{b}{a}e^{-t}\right),$$
c'est-à-dire d'une droite de coefficient directeur 1 (la droite d'équation $y = \ln(a) + t$) perturbée par un terme $\ln\left(1 + \frac{b}{a}e^{-t}\right)$ qui converge exponentiellement vite vers 0 à mesure que $t \to +\infty$.

(b) La courbe a l'allure de la droite d'équation $y = at + b$ si et seulement si $\ln(f(e^t)) = at + b$ pour tout t, soit $\ln(f(x)) = a\ln(x) + b$, soit encore $f(x) = \exp(a\ln(x) + b) = e^b x^a$, donc si f est multiple d'une fonction puissance.

4. Les questions précédentes et les graphiques donnés dans l'énoncé illustrent le fait que le choix d'une représentation en échelle (semi-)logarithmique ou linéaire permet de faire apparaître une tendance donnée comme une évolution explosive (exponentielle), stable (linéaire) ou ralentie (logarithmique), ce qui est évidemment susceptible à des conclusions radicalement opposées lorsque se pose la question du contrôle de cette évolution.

   Les choix techniques en matière de représentation des données numériques – qu'il s'agisse de l'échelle adoptée, mais aussi des points de référence choisis ou de l'outil de représentation lui-même – est crucial dans la qualité de la transmission de l'information et dans son interprétation. Il n'est pas nécessaire que le lecteur d'un graphique soit mal ou peu informé pour que la représentation choisie ait un effet sur sa manière d'appréhender une information ; si un esprit averti est capable de déceler des représentations grossièrement fallacieuses, le cerveau humain est peu apte à« redresser » une représentation logarithmique en une représentation linéaire ou à appréhender une évolution par rapport à un point de référence situé loin en-dehors du graphique qu'il considère. Sur ces questions, on conseille la lecture du chapitre 5 (*Data visualization*) de l'ouvrage *Calling Bullsh*t* de Carl Bergstrom et Jevin West (Penguin Books, 2020), qui regorge plus généralement d'outils critiques pour repérer et mettre en défaut les très nombreux raisonnements fallacieux portant sur des grandeurs numériques.

   A minima, on conseille au lecteur de porter une attention systématique aux échelles et aux unités indiquées sur les axes des graphiques qu'il croise, et, à chaque fois qu'il rencontre un mode de présentation des données exotique ou inattendu, de s'interroger longuement sur les conséquences de ce choix de représentation.

Correction de l'exercice 23.

1. Si l'on note x_1 (respectivement x_2) l'intensité ressentie associée à une puissance P_1 (resp. P_2) vérifiant $P_2 = 2P_1$, alors on a

$$\begin{aligned} x_2 = 10\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_0}\right) &= 10\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right) + 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_0}\right) \\ &= 10\log_{10}(2) + x_1 \approx 3,01 + x_1. \end{aligned}$$

   Ainsi, un doublement de la puissance du signal correspond à un accroissement de l'intensité ressentie de 3dB. Ce principe (réponse additive à un stimulus multiplicatif) est typique des progressions logarithmiques.

2. On note P_1 (resp. P_2) la puissance sonore correspondant à une conversation à voix basse (resp. au décollage d'une fusée). On a alors

$$10\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_0}\right) = 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + 180$$

soit

$$\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_0}\right) = \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + 18$$

d'où, en ajoutant $\log_{10}(P_0)$ aux deux membres de l'égalité précédente :

$$\log_{10}(P_2) = \log_{10}(P_1) + 18$$

soit

$$\log_{10}\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 18 \quad \text{donc} \quad \frac{P_2}{P_1} = 10^{18}.$$

Ainsi la fusée au décollage produit une puissance sonore 10^{18} fois (c'est-à-dire un milliard de milliards de fois) plus élevée qu'une conversation à voix basse.

On retrouve cet ordre de grandeur en écrivant qu'un accroissement de 180dB correspond à 60 accroissements de 3dB, et donc à 60 multiplications par 2 de la puissance sonore émise, d'où $\frac{P_2}{P_1} \approx 2^{60} \approx 1,15 \cdot 10^{18}$.

3. Les intensités ressenties ne se somment pas, mais les puissances sonores si : en notant P_1 la puissance sonore des pleurs de bébé et P_2 celle du marteau-piqueur, on remarque que

$$P_1 = 10^{\frac{110}{10}} P_0 = 10^{11} P_0$$

et

$$P_2 = 10^{\frac{100}{10}} P_0 = 10^{10} P_0$$

d'où une puissance totale de

$$P_1 + P_2 = 11 \cdot 10^{10} P_0,$$

ce qui correspond à une intensité ressentie égale à

$$x = 10 \log_{10}(11 \cdot 10^{10}) = 10\Big(\log_{10}(11) + \log_{10}(10^{10})\Big) = 10 \cdot (1,04 + 10) = 110,4\text{dB},$$

à peine supérieure à celle produite par le seul cri de bébé.

4. D'après la question précédente, on cherche le plus petit entier n tel que $nP_2 \geqslant P_1$, c'est-à-dire $n10^{10}P_0 \geqslant P_1$: il s'agit de $n = 10$. Ainsi, on doit utiliser simultanément 10 marteaux-piqueurs pour égaler l'intensité sonore ressentie d'un cri de bébé.

Correction de l'exercice 24.

1. Pour augmenter d'un point le pH d'une solution, il faut diminuer d'une unité la quantité $\log_{10}([H_3O^+]_S)$, donc diviser par 10 la concentration de la solution en ions H_3O^+.
2. Pour le jus d'orange, on a

$$\log_{10}([H_3O^+]_S) = -3,5 \quad \text{donc} \quad [H_3O^+]_S = 10^{-3,5} \approx 3,2 \cdot 10^{-4}\,\text{mol.L}^{-1}.$$

Ainsi, un demi-litre de jus d'orange contient environ $1,6 \cdot 10^{-4}$ moles d'ions H_3O^+, soit $9,6 \cdot 10^{19}$ ions.

3. (a) Le nombre n_A de moles d'ions H_3O^+ apportées par la solution A vérifie

$$n_A = V_A \cdot [H_3O^+]_A = V_A 10^{-\mathrm{pH}_A},$$

et le nombre de moles apportées par la solution B est

$$n_B = V_B \cdot [H_3O^+]_B = V_B 10^{-\mathrm{pH}_B},$$

donc le nombre total de moles d'ions H_3O^+ dans la solution est

$$n_A + n_B = V_A 10^{-\mathrm{pH}_A} + V_B 10^{-\mathrm{pH}_B},$$

et son volume total est $V_A + V_B$ donc sa concentration en ions est

$$[H_3O^+]_S = \frac{V_A 10^{-\mathrm{pH}_A} + V_B 10^{-\mathrm{pH}_B}}{V_A + V_B}.$$

Ainsi, on a

$$\mathrm{pH}_S = -\log([H_3O^+]_S) = -\log\left(\frac{V_A 10^{-\mathrm{pH}_A} + V_B 10^{-\mathrm{pH}_B}}{V_A + V_B}\right).$$

(b) Si $V_A = V_B = 1$, si $\mathrm{pH}_A = 6$ et si $\mathrm{pH}_B = 8$, on a

$$\mathrm{pH}_S = -\log\left(\frac{10^{-6} + 10^{-8}}{2}\right) \approx 6,29.$$

Ainsi, mélanger un litre de solution de pH égal à 6 avec un volume égal de solution de pH égal à 8 ne permet pas d'obtenir une solution de pH égal à 7.

Pour obtenir ce résultat, il faut ajouter un volume V_B de solution basique de manière à avoir

$$-\log\left(\frac{10^{-6} + V_B \cdot 10^{-8}}{1 + V_B}\right) = 7$$

soit

$$\frac{10^{-6} + V_B \cdot 10^{-8}}{1 + V_B} = 10^{-7},$$

donc

$$\frac{100 + V_B}{1 + V_B} = 10,$$

et donc $V_B = 10$. Ainsi, il faut mélanger 10 litres de solution basique à un litre de solution acide pour obtenir une solution neutre.

(c) Le pH résultant du mélange d'un volume égal de jus d'orange et d'eau pure est

$$\mathrm{pH}_S = -\log\left(\frac{10^{-3,5} + 10^{-7}}{2}\right) \approx 3,8.$$

Correction de l'exercice 25.

1. Par hypothèse, $e = \frac{a}{b}$ donc
$$x = b!\left(e - \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!}\right) = b! \cdot \frac{a}{b} - \sum_{k=0}^{b} \frac{b!}{k!} = (b-1)!a - \sum_{k=0}^{b} b(b-1)\cdots(k+1)$$
est un entier en tant que somme d'entiers. Par ailleurs, on a
$$e := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} > \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!}$$
puisque la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, et $b > 0$ donc
$$x = b\left(e - \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!}\right) > 0.$$
Ainsi, on a bien $x \in \mathbb{N}^*$.
2. On a
$$b! \sum_{k=b+1}^{n} \frac{1}{k!} = b!\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b!\left(e - \sum_{k=0}^{b} \frac{1}{k!}\right) = x,$$
d'où le résultat attendu.
3. Pour tout $n > b$, on a
$$b! \sum_{k=b+1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=b+1}^{n} \frac{b!}{k!} = \sum_{k=b+1}^{n} \frac{1}{\underbrace{k(k-1)\cdots(b+1)}_{\substack{k-b \text{ termes} \\ \text{supérieurs à } b+1}}} \leqslant \sum_{k=b+1}^{n} \frac{1}{(b+1)^{k-b}},$$
et le changement d'indice $j = k - b$ permet d'écrire
$$\sum_{k=b+1}^{n} \frac{1}{(b+1)^{k-b}} = \sum_{j=1}^{n-b} \frac{1}{(b+1)^j},$$
d'où les relations annoncées.
4. Pour tout $n > b$, on a
$$\sum_{k=1}^{n-b} \frac{1}{(b+1)^k} = \frac{\frac{1}{b+1} - \frac{1}{(b+1)^{n-b+1}}}{1 - \frac{1}{b+1}} = \frac{1 - \frac{1}{(b+1)^{n-b}}}{b} < \frac{1}{b}$$
puisque $b > 0$ et $\frac{1}{(b+1)^{n-b}} > 0$. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'inégalité
$$\sum_{k=1}^{n-b} \frac{1}{(b+1)^k} < \frac{1}{b}$$
que nous venons d'établir, on obtient alors $x \leqslant \frac{1}{b}$ grâce à la question 2. Or $b \geqslant 2$ puisque $e = \frac{a}{b}$ n'est pas entier, d'où $x < 1$.

5. On a montré dans la question 1 que $x \in \mathbb{N}^*$, et dans la question 4 que $x < 1$, ce qui induit une contradiction. Ainsi, l'hypothèse de rationalité de e est absurde, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 26.

1. Il est clair que la fonction nulle vérifie bien la propriété de morphisme proposée.

   Réciproquement, supposons que f vérifie la propriété de morphisme et s'annule en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

   $$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)f(x_0) = f(x - x_0) \cdot 0 = 0,$$

   donc f est nulle.

   On a donc bien montré qu'une fonction vérifiant la propriété de morphisme étudiée s'annule si et seulement si elle est nulle.

2. (a) On a $f(1) = f(1+0) = f(1)f(0)$ soit $a = af(0)$, or $a \neq 0$ donc on obtient $1 = f(0)$ en divisant par a.

   (b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x)f(-x) = f(x+(-x)) = f(0)$ donc $f(x)f(-x) = 1$, ce qui signifie que $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par ailleurs $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$, donc f est positive ; comme elle ne s'annule pas, elle est strictement positive.

   (c) On montre comme dans la proposition 2 du cours que $f(\alpha) = a^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, d'abord par récurrence sur $\alpha \in \mathbb{N}$, puis pour $\alpha \in \mathbb{Z}$ en utilisant la question précédente, ensuite pour α de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$, et enfin pour $\alpha \in \mathbb{Q}$ quelconque.

   (d) Soit g une fonction continue vérifiant la propriété de morphisme ainsi que $g(1) = a$. D'après la question précédente, g et f coïncident sur $\mathbb{Q}$ (avec $\alpha \mapsto a^\alpha$). Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres rationnels convergeant vers x : on a alors

   $$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$$

   par continuité de g et f. Ainsi, $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $g = f$.

3. Considérons $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ tels que $\alpha \leqslant \beta$. En mettant deux fractions représentant α et β sur le même dénominateur, on peut écrire

   $$\alpha = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{p'}{q}$$

   avec $p, p' \in \mathbb{Z}$ tels que $p \leqslant p'$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

   Supposons que $a \in \,]0, 1]$; on a alors $a^{\frac{1}{q}} \in \,]0, 1]$, donc

   $$a^\alpha = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p \geqslant \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p'} = a^\beta$$

puisque[4] $p \leqslant p'$.

À présent, si $a \geqslant 1$, on a $a^{\frac{1}{q}} \geqslant 1$, donc

$$a^\alpha = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p \leqslant \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p'} = a^\beta$$

puisque $p \leqslant p'$.

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de rationnels convergeant vers x, et soit N un entier supérieur à x (et donc aux u_n). D'après la question précédente, si $a \in]0,1]$, la suite $(a^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; or elle est minorée par $a^N > 0$, donc elle converge d'après le théorème de la limite monotone, et sa limite est strictement positive. Si $a \geqslant 1$, la question précédente montre que la suite est croissante ; or elle est majorée par a^N, donc elle converge, et comme son premier terme a_{u_0} est strictement positif, c'est aussi le cas de sa limite. Dans tous les cas, la suite $(a^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

   Soit à présent $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite croissante de rationnels convergeant vers x. Par le même raisonnement, $(a^{v_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell' \in \mathbb{R}_+^*$. On va montrer que $\ell = \ell'$. On écrit pour cela que

$$\frac{a^{v_n}}{a^{u_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell}{\ell'} \quad \text{c'est-à-dire que} \quad a^{v_n - u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\ell}{\ell'}.$$

   Pour conclure que $\ell = \ell'$, il suffit donc de montrer que si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels tendant vers 0, alors $a^{w_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$; le résultat s'ensuivra en prenant $w_n : v_n - u_n$.

   Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers 0. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a à partir d'un certain rang l'encadrement $-\frac{1}{N} \leqslant w_n \leqslant \frac{1}{N}$, donc :

   - Si $a \in]0,1]$, on a à partir de ce rang $a^{\frac{1}{N}} \leqslant a^{w_n} \leqslant a^{-\frac{1}{N}}$ d'après la question 3, donc $a < (a^{w_n})^N < a^{-1}$.
   - Si $a \geqslant 1$, on a à partir de ce rang $a^{-\frac{1}{N}} \leqslant a^{w_n} \leqslant a^{\frac{1}{N}}$ d'après la question 3, donc $a^{-1} \leqslant (a^{w_n})^N \leqslant a$.

   Dans tous les cas, on peut donc écrire que quel que soit N, on a

$$0 < \min(a^{-1}, a) \leqslant (a^{w_n})^N \leqslant \max(a^{-1}, a)$$

   à partir d'un certain rang.

   Supposons que $(a^{w_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 1 ; il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $a^{w_n} < 1 - \varepsilon$ ou $a^{w_n} > 1 + \varepsilon$ pour une infinité de valeurs de n. On est alors (au moins) dans l'un des deux cas suivants :

   - Soit il existe une infinité de valeurs de n telles que $0 < a^{w_n} < 1 - \varepsilon$. Dans ce cas, pour tout $N \geqslant 1$ on a $0 < (a^{w_n})^N < (1-\varepsilon)^N$ pour ces

4. Il faut se convaincre du fait que ce raisonnement est valable même si p et/ou p' est négatif. En cas de doute, on peut toujours écrire $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p}{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p'}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p-p'} \geqslant 1$ puisque $a^{\frac{1}{q}} \in]0,1]$ et $p - p' \leqslant 0$.

valeurs. Or, si n est assez grand, on vient de montrer que l'on doit avoir $(a^{w_n})^N \geqslant \min(a, a^{-1})$; on aboutit donc à une contradiction en prenant N assez grand pour que $(1-\varepsilon)^N \leqslant \min(a, a^{-1})$ (ce qui est possible puisque $(1-\varepsilon)^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$).

- Soit il existe une infinité de valeurs de n telles que $a^{w_n} > 1+\varepsilon$. Dans ce cas, pour tout $N \geqslant 1$ on a $(a^{w_n})^N \geqslant (1+\varepsilon)^N$ pour ces valeurs. Or, si n est assez grand, on a montré que l'on doit avoir $(a^{w_n})^N < \max(a, a^{-1})$; on aboutit donc à une contradiction en prenant N assez grand pour que $(1+\varepsilon)^N \geqslant \max(a^{-1}, a)$ (ce qui est possible puisque $(1-\varepsilon)^N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$).

Dans les deux cas, on arrive bien à une contradiction ; ainsi, $(a^{w_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, ce qui clôt la preuve.

5. (a) Soient $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $x < x'$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites croissantes de rationnels convergeant respectivement vers x et x', on a à partir d'un certain rang $u_n \leqslant v_n$, donc :
   - Si $a \in]0,1]$, alors $a^{u_n} \geqslant a^{v_n}$ à partir d'un certain rang d'après la question 3, d'où, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, la relation $f(x) \geqslant f(x')$.
   - Si $a \geqslant 1$, alors $a^{u_n} \leqslant a^{v_n}$ à partir d'un certain rang d'après la question 3, d'où, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$, la relation $f(x) \leqslant f(x')$.

   Ainsi, f est décroissante sur $a \in]0,1]$ et croissante si $a \geqslant 1$.

   (b) La suite $(1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels croissante (car constante) convergeant vers 1 ; on a donc

$$f(1) = \lim_{n\to+\infty} a^1 = a.$$

   Plus généralement, si $\alpha \in \mathbb{Q}$, la suite $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de rationnels convergeant vers α donc

$$f(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} a^\alpha = a^\alpha.$$

   (c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit deux suites de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit croissante, à valeurs strictement inférieures à x et converge vers x, et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit à valeurs strictement supérieures à x et converge vers x. Alors

$$f(u_n) \leqslant f(x) \leqslant f(v_n)$$

   pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or $f(u_n) = a^{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ par définition de $f(x)$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de rationnels convergeant vers x, et

$$f(v_n) = a^{v_n} = a^{u_n} a^{v_n - u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) \cdot 1 = f(x)$$

   d'après le résultat qui nous a permis de démontrer l'unicité de $f(x)$ dans la question 4.

   Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait

$$f(x) - \varepsilon \leqslant f(u_n) \leqslant f(x) \leqslant f(v_n) \leqslant f(x) + \varepsilon.$$

En particulier, on a

$$f(x) - \varepsilon \leqslant f(u_N) \leqslant f(x) \leqslant f(v_N) \leqslant f(x) + \varepsilon.$$

Comme f est croissante, pour tout y appartenant à l'intervalle $[u_N, v_N]$ on a donc

$$f(u_N) \leqslant f(y) \leqslant f(v_N),$$

d'où

$$f(x) - \varepsilon \leqslant f(y) \leqslant f(x) + \varepsilon.$$

Si l'on choisit un réel $\eta > 0$ tel que $[x - \eta, x + \eta] \subset [u_N, v_N]$ (ce qui est possible car $u_N < x < v_N$), on obtient donc que pour tout $y \in [x-\eta, x+\eta]$, on a $|f(y) - f(x)| \leqslant \varepsilon$. On a donc vérifié la définition de la limite

$$f(y) \xrightarrow[y \to x]{} f(x),$$

ce qui montre que f est continue en x. Comme x est quelconque dans $\mathbb{R}$, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

(d) Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites croissantes de rationnels convergeant respectivement vers x et y. La suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante convergeant vers $x + y$, d'où

$$f(x + y) = \lim_{n\to+\infty} a^{u_n+v_n} = \lim_{n\to+\infty} a^{u_n} a^{v_n} = f(x)f(y)$$

puisque $a^{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ et $a^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(y)$, donc f satisfait bien la propriété de morphisme.

(e) Rappelons pour commencer que comme f est continue, qu'elle vérifie la propriété de morphisme et que $f(1) = a$, la question 2(b) implique que f est strictement positive.

Supposons que $a > 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et toute suite croissante de rationnels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers t, la suite $(a^{u_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs strictement supérieures à 1 à partir d'un certain rang (puisque $u_n > 0$ à partir d'un certain rang), donc sa limite $f(t)$ est strictement supérieure à 1 : ainsi, $f(t) > 1$ pour tout $t > 0$. Soient à présent $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$; on a alors

$$f(y) = f(x + (y - x)) = f(x)f(y - x) > f(x)$$

puisque $f(y - x) > 1$ et $f(x) > 0$. Ainsi, f est strictement croissante.

On montre de la même façon que si $a \in]0, 1]$, alors $f(t) < 1$ dès que $t > 0$, puis que f est strictement décroissante.

6. On a démontré dans la question 2 l'unicité d'une fonction continue vérifiant la propriété de morphisme et prenant la valeur a en 1 sous réserve de son existence, et on a construit dans la question 4 une fonction dont on a vérifié dans la question 5 qu'elle satisfaisait ces propriétés. En prenant $a = e$, on en déduit l'existence et l'unicité de la fonction exponentielle étudiée dans le présent chapitre.

Correction de l'exercice 27.

1. Soit $x > -1$. Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}_k : \quad \text{« } (1+x)^k \geqslant 1+kx \text{ »}$$

est vraie pour tout $k \geqslant 0$.

Initialisation :

La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie car $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0 \cdot x = 1$.

Hérédité :

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose la proposition $\mathcal{P}_k$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^k \\ &\geqslant (1+x)(1+kx) \quad \text{d'après } \mathcal{P}_k \text{ et car } 1+x \geqslant 0 \\ &= 1 + x + kx + kx^2 \\ &\geqslant 1 + x + kx \\ &= 1 + (k+1)x \end{aligned}$$

puisque $kx^2 \geqslant 0$, donc la proposition $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Conclusion :

Ainsi, $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \geqslant 1$, ce qui clôt la preuve.

2. (a) Si $n > |x|$, on a $\frac{|x|}{n} < 1$ donc $\frac{x}{n} > -1$, d'où $1 + \frac{x}{n} > 0$, d'où l'on déduit que $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n > 0$.

   (b) Soit $n > |x|$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} &= \left(\frac{1+\frac{x}{n+1}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n \left(1+\frac{x}{n+1}\right) \\ &= \left(1 + \frac{\frac{x}{n+1} - \frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n \left(1+\frac{x}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{\frac{x}{n(n+1)}}{1+\frac{x}{n}}\right)^n \left(1+\frac{x}{n+1}\right) \\ &= \left(1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)}\right)^n \left(1+\frac{x}{n+1}\right) \\ &\geqslant \left(1 - \frac{nx}{(n+1)(n+x)}\right) \left(1+\frac{x}{n+1}\right) \end{aligned}$$

   d'après l'inégalité de Bernoulli[5] et parce que $1 + \frac{x}{n+1} > 0$.

5. En effet, $-\frac{x}{(n+1)(n+x)} > -1$ puisque $1 - \frac{x}{(n+1)(n+x)} = \frac{n(n+x)+n}{(n+1)(n+x)}$ est strictement positif en tant que quotient de deux nombres strictement positifs (on rappelle que $n > |x|$).

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &\geqslant 1 + \frac{x}{n+1} - \frac{nx}{(n+1)(n+x)} - \frac{nx^2}{(n+1)^2(n+x)} \\ &= 1 + \frac{x(n+1)(n+x) - nx(n+1) - nx^2}{(n+1)^2(n+x)} \\ &= 1 + \frac{x^2}{(n+1)^2(n+x)} \geqslant 1 \quad \text{puisque } n+x>0,\end{aligned}$$

donc $(u_n)_{n>|x|}$, qui est strictement positive d'après la question précédente, est croissante.

(c) En appliquant le résultat précédent à la suite définie comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en changeant x en $-x$, on obtient que $\left(\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n>|x|}$ est strictement positive et croissante ; en passant à l'inverse, on montre que $\left(\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}\right)_{n>|x|}$, c'est-à-dire $(v_n)_{n>|x|}$, est décroissante.

(d) Soit $n > |x|$. Alors

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ &= \left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}\left(1-\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right) \\ &= v_n\left(1-\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}\right)\right]^n\right) \\ &= v_n\left(1-\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right)^n\right),\end{aligned}$$

d'où l'on déduit d'une part que $v_n - u_n \geqslant 0$ (car $v_n \geqslant 0$ et $0 \leqslant 1-\frac{x^2}{n^2} \leqslant 1$), et d'autre part que

$$v_n - u_n \leqslant v_n\left(1-\left(1-n\cdot\frac{x^2}{n^2}\right)\right) = x^2\frac{v_n}{n}$$

d'après l'inégalité de Bernoulli (puisque $-\frac{x^2}{n^2} > -1$ et $v_n \geqslant 0$).

(e) La suite $(v_n)_{n>|x|}$ est décroissante et positive, donc elle converge. On a donc $x^2\frac{v_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ grâce à l'encadrement donné dans la question précédente. Comme $(u_n)_{n>|x|}$ est croissante, les suites $(u_n)_{n>|x|}$ et $(v_n)_{n>|x|}$ sont adjacentes, donc elles convergent vers la même limite.

(f) On a montré dans cette question que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite de terme général $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ admet une limite finie ; ainsi, la fonction

$$f : x \longmapsto \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

est bien définie sur $\mathbb{R}$. On a au passage obtenu pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'égalité

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n},$$

qui nous sera utile dans la question 4.

3. Pour x fixé, on a montré que $f(x)$ est la limite de la suite $(u_n)_{n>|x|}$ qui est croissante et strictement positive ; ainsi, $f(x) > 0$.
4. (a) Si $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n > |x|$ on a $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1+x$ d'après l'inégalité de Bernoulli (car $\frac{x}{n} > -1$), donc en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ on obtient $f(x) \geqslant 1+x$.

   (b) Soit $x \in]-1,1[$. D'après la question 2, la suite $(v_n)_{n>|x|}$ est décroissante et de limite $f(x)$. Or son premier terme vérifie
$$v_1 = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x},$$
donc on a
$$f(x) \leqslant v_1 \leqslant \frac{1}{1-x},$$
ce qu'il fallait démontrer.

   (c) Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de limite nulle. Soit $\varepsilon \in]0,1]$. On a $-\varepsilon \leqslant w_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ à partir d'un certain rang, d'où
$$\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{w_n}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon/2}{n}\right)^n$$
à partir de ce rang (puisqu'alors $1-\frac{\varepsilon}{n}$, $1+\frac{w_n}{n}$ et $1+\frac{\varepsilon/2}{n}$ sont des termes positifs). Or on a
$$\left(1-\frac{\varepsilon}{n}\right)^n \geqslant 1-\varepsilon$$
d'après l'inégalité de Bernoulli puisque $-\frac{\varepsilon}{n} > -1$, et $\left(\left(1+\frac{\varepsilon/2}{n}\right)^n\right)_{n\geqslant 1}$ tend en croissant vers $f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ qui est inférieur à $\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ d'après la question 4(b) (car $\frac{\varepsilon}{2} \in]-1,1[$), donc
$$\left(1+\frac{\varepsilon/2}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}$$
quel que soit $n \geqslant 1$; ainsi, on a
$$1-\varepsilon \leqslant \left(1+\frac{w_n}{n}\right)^n \leqslant \frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}}$$
à partir d'un certain rang. Or
$$\frac{1}{1-\frac{\varepsilon}{2}} = 1+\frac{\varepsilon/2}{1-\frac{\varepsilon}{2}} = 1+\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \leqslant 1+\varepsilon$$
puisque $2-\varepsilon \geqslant 1$, ce qui montre que
$$1-\varepsilon \leqslant \left(1+\frac{w_n}{n}\right)^n \leqslant 1+\varepsilon$$
à partir d'un certain rang, et donc, comme ε est pris arbitrairement petit dans $]0,1]$, que
$$\left(1+\frac{w_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

(d) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Pour tout $n > \max(|x|, |y|, |x+y|)$, on a [6]

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n &= \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right)^n = \left(1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\left(\frac{1+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n \\ &= \left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\left(1+\frac{\frac{xy}{n+x+y}}{n}\right)^n,\end{aligned}$$

d'où, en passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ et en utilisant le résultat de la question précédente appliqué à $w_n := \frac{xy}{n+x+y}$,

$$f(x)f(y) = f(x+y) \cdot 1 = f(x+y),$$

ce qu'il fallait démontrer.

5. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$. La propriété de morphisme donne

$$f(y) = f(x+(y-x)) = f(x)f(y-x),$$

or $f(x) > 0$ d'après la question 3 et $f(y-x) \geqslant 1+y-x > 1$ d'après la question 4(a), donc $f(y) > f(x) \cdot 1 = f(x)$. Ainsi, f est strictement croissante.

6. L'encadrement $1+x \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{1-x}$ valable au voisinage de 0 et le théorème des gendarmes donnent

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0),$$

donc f est continue en 0. Si $x \in \mathbb{R}$, la propriété de morphisme donne alors

$$f(x+h) = f(x)f(h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)f(0) = f(x) \cdot 1 = f(x),$$

donc f est continue en x. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}$.

7. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \quad \text{par la formule du binôme} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}\cdot\frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}}_{k \text{ termes positifs inférieurs à } 1}\cdot\frac{1}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Pour démontrer l'inégalité de droite, on commence par établir l'inégalité de Bernoulli généralisée donnée dans l'énoncé. Elle est évidemment vraie

6. Le fait que $n > |x+y|$ permet d'éviter que le dénominateur $1+\frac{x+y}{n}$ soit nul.

si $n = 1$ (c'est même une égalité). Supposons-la vraie pour une valeur donnée de $n \geqslant 1$; si $a_1, \ldots, a_{n+1} \in [0,1]$, on a alors

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i) = \left(\prod_{i=1}^{n}(1-a_i)\right)(1-a_{n+1}) \geqslant \left(1-\sum_{i=1}^{n} a_i\right)(1-a_{n+1})$$

par l'hypothèse de récurrence et parce que $1 - a_{n+1} \geqslant 0$, donc

$$\prod_{i=1}^{n+1}(1-a_i) \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i - a_{n+1} + a_{n+1}\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant 1 - \sum_{i=1}^{n+1} a_i$$

car les a_i sont positifs. Ainsi, l'inégalité de Bernoulli généralisée est vérifiée pour $n+1$ termes, ce qui l'établit à tous les rangs d'après le principe de récurrence.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \quad \text{d'après la formule du binôme} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\cdot\frac{1}{k!} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right)\cdot\frac{1}{k!} \\
&\geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(1-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!} \quad \text{par l'inégalité de Bernoulli généralisée} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{(k-1)k}{2n}\right)\frac{1}{k!} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!}\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{1}{j!}\right) \quad \text{avec } j = k-2 \\
&\geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right) \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{2n}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \\
&= \left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n^2}\right)\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \\
&\geqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \quad \text{car } \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n^2},
\end{aligned}$$

ce qui établit l'inégalité attendue.

(b) On a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=f(1),$$

donc en passant à la limite dans l'inégalité que nous venons de démontrer on obtient $f(1)\leqslant e\leqslant f(1)$, soit $f(1)=e$.

8. (a) Au terme d'une année, le capital aura été multiplié par $1+100\%=2$.

(b) Au terme d'une année, le capital aura été multiplié 12 fois par $1+\frac{100}{12}\%=1+\frac{1}{12}$, c'est-à-dire par $\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}\approx 2,61$.

(c) Au terme d'une année, le capital aura été multiplié par

$$\left(1+\frac{1}{525600}\right)^{525600}\approx\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2,71.$$

Ainsi, e est la quantité approximative par laquelle est multiplié un capital placé à un taux d'intérêt annuel de 100% avec un calcul (et une composition) des intérêts à des intervalles de temps très courts.

9. (a) Soit $x\in]0,1[$. On a alors

$$1+x\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{1-x}$$

d'après les questions 4(a) et 4(b), donc

$$x\leqslant f(x)-1\leqslant\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}.$$

En divisant les termes de cette double inégalité par $x>0$, on obtient

$$1\leqslant\frac{f(x)-1}{x}\leqslant\frac{1}{1-x},$$

d'où

$$0\leqslant\frac{f(x)-1}{x}-1\leqslant\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x},$$

donc

$$\left|\frac{f(x)-1}{x}-1\right|=\frac{f(x)-1}{x}-1\leqslant\frac{x}{1-x}=\frac{|x|}{1-x}.$$

À présent, si $x\in]-1,0[$, on a encore

$$x\leqslant f(x)-1\leqslant\frac{x}{1-x},$$

et une division par $x<0$ donne

$$1\geqslant\frac{f(x)-1}{x}\geqslant\frac{1}{1-x},$$

d'où

$$0\geqslant\frac{f(x)-1}{x}-1\geqslant\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}.$$

On a donc

$$\left|\frac{f(x)-1}{x}-1\right| \leqslant \left|\frac{x}{1-x}\right| = \frac{|x|}{1-x}.$$

Ainsi, dans tous les cas on a

$$\left|\frac{f(x)-1}{x}-1\right| \leqslant \frac{|x|}{1-x}.$$

(b) On a $\frac{|x|}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{0}{1}=0$, donc l'inégalité démontrée dans la question précédente permet d'écrire que

$$\left|\frac{f(x)-1}{x}-1\right| \xrightarrow[x\to 0]{} 0,$$

c'est-à-dire que $\frac{f(x)-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0)=1$.

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire grâce à la propriété de morphisme que

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}\\ &= f(x)\cdot\frac{f(h)-1}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)\cdot f'(0) = f(x)\cdot 1 = f(x),\end{aligned}$$

donc f est dérivable en x et $f'(x)=f(x)$. Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'=f$.