3 PRIMITIVATION DES FONCTIONS RATIONNELLES

*La théorie générale de la primitivation des fonctions rationnelles, qui n'est pas au programme de B/L, est fondée sur l'existence de décompositions des fractions rationnelles en sommes d'*éléments simples *primitivables. On étudie un certain nombre d'exemples dans les exercices qui suivent, qu'il est conseillé de traiter dans l'ordre.*

Exercice 9 (Formes $\frac{1}{ax^2-b}$ et $\frac{1}{ax^2+b}$). Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Déterminer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{\frac{b}{a}}, \sqrt{\frac{b}{a}}\right\}, \qquad \frac{1}{ax^2-b} = \frac{\alpha}{x-\sqrt{\frac{b}{a}}} + \frac{\beta}{x+\sqrt{\frac{b}{a}}},$$
puis donner une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1}{ax^2-b}$ sur son ensemble de définition.
2. Donner une primitive de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+b}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 (Formes $\frac{1}{ax^2+bx+c}$). Le but de cet exercice est d'étudier sur des exemples la méthode de primitivation des fonctions rationnelles de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$. La première question traite le cas où $\Delta := b^2 - 4ac > 0$, la deuxième celui où $\Delta = 0$, et la troisième celui où $\Delta < 0$.

1. Déterminer une primitive de la fonction
$$f : x \longmapsto \frac{1}{2x^2+2x-4}$$
sur les intervalles constituant son ensemble de définition en écrivant $f(x)$ comme la somme de deux fonctions de la forme $x \mapsto \frac{\alpha}{x+\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer une primitive de la fonction
$$g : x \longmapsto \frac{1}{4x^2+4x+1}$$
sur les intervalles constituant son ensemble de définition en factorisant l'expression $4x^2+4x+1$.
3. Déterminer une primitive de la fonction
$$h : x \longmapsto \frac{1}{2x^2+2x+4}$$
sur $\mathbb{R}$ en écrivant l'expression polynomiale $2x^2+2x+4$ sous forme canonique.

Exercice 11 (Formes $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$). On étudie dans cet exercice, toujours sur des exemples, la méthode de primitivation des fractions rationnelles de la forme $x \mapsto \dfrac{dx+e}{ax^2+bx+c}$.

1. Déterminer une primitive de la fonction rationnelle
$$f : x \longmapsto \frac{x+1}{x^2-2x+1}$$
sur les intervalles constituant son ensemble de définition en écrivant $x+1=(x-1)+2$.
2. Déterminer une primitive de la fonction rationnelle
$$g : x \longmapsto \frac{4x-3}{x^2+5}$$
sur $\mathbb{R}$ en décomposant $g(x)$ en une combinaison linéaire de deux expressions primitivables.

Exercice 12 (Quelques applications). Cet exercice met à profit les méthodes présentées dans les exercices 9 à 11 pour calculer les primitives de fractions rationnelles formées à partir de polynômes de degrés plus élevés. Il utilise les notions de division euclidienne et de factorisation abordées dans le chapitre sur les polynômes présent dans l'ouvrage de deuxième année.

1. Déterminer une primitive de la fraction rationnelle
$$f : x \longmapsto \frac{4x^3+9x^2+8x}{x^2+2x+1}$$
sur les intervalles constituant son ensemble de définition en réalisant la division euclidienne de son numérateur par son dénominateur, puis en utilisant les résultats des exercices précédents.
2. Déterminer une primitive de la fraction rationnelle
$$g : x \longmapsto \frac{3x^4+6x^3-8x^2-3}{2x^2+4x-6}$$
sur les intervalles constituant son ensemble de définition.
3. On cherche une primitive de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^4}$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Déterminer $P, Q \in \mathbb{R}_2[x]$ telles que $P(x)Q(x) = 1+x^4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Déterminer quatre réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que l'on ait
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^4} = \frac{\alpha x+\beta}{P(x)} + \frac{\gamma x+\delta}{Q(x)},$$
   puis conclure.