5 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 39 (Méthode de Newton). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[a,b]$, avec $a<b$. On suppose que f' est strictement positive sur $[a,b]$ et qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c)=0$. On présente dans ce exercice la *méthode de Newton*, protocole itératif permettant d'approcher le réel c.

1. (a) Justifier l'existence des réels $m := \min\limits_{[a,b]} f' > 0$ et $M := \max\limits_{[a,b]} |f''|$.

   (b) Expliciter le cas $M=0$. Dans la suite, on supposera que $M>0$.

2. Soit $x \in [a,b]$ tel que $x \neq c$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction

$$g : y \longmapsto f(y) + f'(y)(c-y) - \frac{(y-c)^2}{(x-c)^2}\left(f(x)+f'(x)(c-x)\right),$$

   montrer que

$$\left|f(x)+f'(x)(c-x)\right| \leqslant \frac{M}{2}(x-c)^2. \qquad (1)$$

3. La méthode de Newton consiste à choisir un réel $u_0 \in [a,b]$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, à définir le réel u_{n+1} comme l'unique abscisse à laquelle la tangente à $\mathcal{C}_f$ en u_n croise l'axe des abscisses, si ce réel est dans $[a,b]$ (sinon, la méthode n'aboutit pas). On suppose la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bien définie et on se propose d'étudier la convergence de cette suite vers c.

   (a) Donner une expression explicite de u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Illustrer graphiquement la méthode de Newton.

   (c) En utilisant l'inégalité (1), montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}-c| \leqslant \frac{M}{2m}|u_n-c|^2.$$

   (d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n-c| \leqslant \left(\frac{M}{2m}\right)^{2^n-1}|u_0-c|^{2^n}$$

   et que si $|u_0-c| < \frac{2m}{M}$, alors la méthode de Newton converge vers c à vitesse plus que géométrique, au sens où

$$\forall q \in]0,1[, \quad |u_n-c| \underset{n\to+\infty}{=} o(q^n).$$

   (e) Appliquer la méthode de Newton à la fonction $f : x \mapsto x^2-2$ à partir de $u_0=1$ pour déterminer une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-10} près.

   (f) Appliquer la méthode de Newton pour résoudre de façon approchée l'équation $x^3-2x-5=0$.

Exercice 40 (Convexité). Cet exercice a pour but de définir et d'étudier la notion générale de *convexité* d'une fonction sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est *convexe* si et seulement si

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que f est *concave* si et seulement si $-f$ est convexe.

1. Montrer que f est concave si et seulement si

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On s'intéressera uniquement dans cet exercice au cas des fonctions convexes ; le cas concave s'en déduit par passage à l'opposé.

2. Montrer que f est convexe si et seulement si sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de chacune de ses cordes.
3. Donner un exemple de fonction convexe non dérivable.
4. On dit d'une partie A de $\mathbb{R}^2$ qu'elle est *convexe* si et seulement si pour tous points $M, M' \in A$ le segment $[M, M']$ est entièrement contenu dans A. Montrer que f est convexe (en tant que fonction) si et seulement si son *épigraphe*

$$\mathcal{E}_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x \in I \text{ et } f(x) \leqslant y\}$$

est convexe (en tant que partie de $\mathbb{R}^2$) et donner une représentation graphique de ce résultat.

5. (a) Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y, z \in I, \quad x < y < z \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

et représenter graphiquement cette inégalité, nommée *inégalité des trois pentes*.

(b) Montrer que si f est convexe, alors f est continue.

(c) Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, le taux d'accroissement

$$\tau_a : \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$

est une fonction croissante.

6. (a) Si f est dérivable sur I, montrer que f est convexe si et seulement si f' est croissante.

(b) Montrer que si f est dérivable sur I, alors f est convexe si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.

7. Si f est deux fois dérivable sur I, montrer que f est convexe si et seulement si $f'' \geqslant 0$.

On dit que f est *strictement convexe* si et seulement si

$$\forall x, y \in I \,:\, x \neq y, \quad \forall \lambda \in]0,1[, \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On dit que f est *strictement concave* si et seulement si $-f$ est strictement convexe.

8. Donner un exemple de fonction convexe non strictement convexe.
9. Donner un exemple de fonction strictement convexe non dérivable.
10. Que devient l'inégalité des trois pentes dans le cas d'une fonction strictement convexe ?
11. Si f est dérivable sur I, montrer que f est strictement convexe si et seulement si f' est strictement croissante.
12. Montrer que si f est dérivable et convexe (resp. strictement convexe), alors tout point critique de f est un minimum global (resp. un minimum global strict) de f.

Exercice 41 (Inégalités de convexité). Cet exercice s'inscrit dans la continuité de l'exercice 40.

1. (a) Soit f une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

   (b) Soit f une fonction strictement convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in]0,1[$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k),$$

   avec égalité si et seulement si tous les x_k sont égaux.

   (c) Adapter les résultats des deux questions précédentes au cas de fonctions concaves.

2. En utilisant la stricte concavité de la fonction ln, établir l'*inégalité arithmético-géométrique* selon laquelle pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$

avec égalité si et seulement si tous les x_k sont égaux.

3. Soient $p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ainsi que $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}_+$. On veut montrer l'*inégalité de Hölder* selon laquelle
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
   (a) Montrer en utilisant la concavité de la fonction ln que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, on a $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, et discuter du cas d'égalité.
   (b) Montrer que l'inégalité de Hölder est vraie si $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q = 1$, et discuter du cas d'égalité sous cette hypothèse.
   (c) Montrer que l'inégalité de Hölder est vraie en général et discuter du cas d'égalité.
4. En déduire l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*, qui stipule que pour tous $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et tous $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ on a
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2},$$
avec égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on ait $a_k = \lambda b_k$.

Exercice 42 (Formule de Faà di Bruno). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur non vide, soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et soit φ une fonction définie sur un intervalle contenant $f(I)$.

On souhaite démontrer la formule de Faà di Bruno, qui stipule que si $n \in \mathbb{N}$ et si f et φ sont n fois dérivables, alors $\varphi \circ f$ l'est et sa dérivée n-ième est donnée par
$$(\varphi \circ f)^{(n)} = \sum \frac{n!}{m_1!1!^{m_1} m_2!2!^{m_2} \cdots m_n!n!^{m_n}} \left(\varphi^{(m_1 + \cdots + m_n)} \circ f\right) \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(f^{(j)}\right)^{m_j},$$
où la somme porte sur l'ensemble des n-uplets $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $1m_1 + 2m_2 + \cdots + nm_n = n$.

1. Expliciter la formule dans les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.
2. Prendre une grande inspiration et démontrer la formule dans le cas général par récurrence sur n.
3. Expliciter les dérivées successives de la fonction $x \mapsto e^{f(x)}$ lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
4. Soit $N \in \mathbb{N}$. Expliciter les dérivées successives de la fonction $x \mapsto (f(x))^N$ lorsque f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Cette formule n'a en réalité pas été découverte par le mathématicien italien Francesco Faà di Bruno (1825–1888) ; elle figure déjà dans un écrit du Français Louis François Antoine Arbogast datant de 1800.