Séries

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 6.

(*i*) Si $u_n = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geqslant 1$, la série des u_n converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$ et la série des $\sqrt{u_n}$ diverge en tant que série harmonique.

(*ii*) Si $u_n = \frac{1}{n^4}$ pour tout $n \geqslant 1$, la série des u_n et celle des $\sqrt{u_n}$ convergent en tant que séries de Riemann de paramètres respectifs $4 > 1$ et $2 > 1$.

(*iii*) Si $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ pour tout $n \geqslant 1$, la série des u_n converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$ tandis que celle des $\sqrt{n}u_n = \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique.

(*iv*) Si $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \geqslant 1$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la série des $\sqrt[p]{u_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[p]{2}}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de paramètre $\frac{1}{\sqrt[p]{2}} \in]-1, 1[$.

Correction de l'exercice 7.

(*i*) On a $\frac{2j^5+j}{j^6-j^3+2j} \underset{j\to+\infty}{\sim} \frac{2}{j}$, or $\frac{2}{j}$ est le terme général d'une série divergente (un multiple de la série harmonique), donc la série de terme général $\frac{2j^5+j}{j^6-j^3+2j}$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.

(*ii*) On a $\frac{n^3}{n!} = o\left(\frac{3^n}{n!}\right)$ par croissance comparée. Or la série de terme général $\frac{3^n}{n!}$ est une série exponentielle qui converge ; c'est donc le cas de la série de terme général $\frac{n^3}{n!}$ par comparaison de séries à termes positifs.

Alternativement, on pouvait utiliser le critère de D'Alembert : en effet, en posant $u_n := \frac{n^3}{n!} > 0$ pour tout $n > 0$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^3}{n^3(n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où la convergence de la série de terme général u_n.

(*iii*) On peut écrire $\frac{4^n-n}{5^n+2n^3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{5^n} = \left(\frac{4}{5}\right)^n$, or $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$ donc la série de terme général $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ converge. La série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n-n}{5^n+2n^3}$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs.

(*iv*) Pour tout $n \geqslant 1$, on peut écrire

$$\left|\frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre 2, donc la série de terme général $\left|\frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1}\right|$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi, la série de terme général $\frac{\sin(n^2+n+1)}{n^2+n+1}$ converge absolument donc converge.

(*v*) Par croissance comparée, on a $\frac{n^6\ln^3(n)}{2^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$. Or $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ donc la série de terme général $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $\frac{n^6\ln^3(n)}{2^n}$ converge.

(*vi*) Pour tout $k \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \frac{2^{\cos(k)}\sin^2(k)}{k\sqrt{k}} \leqslant \frac{2}{k\sqrt{k}}$, or la série de terme général $\frac{2}{k\sqrt{k}} = \frac{2}{k^{\frac{3}{2}}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$, donc la série de terme général $\frac{2^{\cos(k)}\sin^2(k)}{k\sqrt{k}}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

(*vii*) On a $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ par croissance comparée, or la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge (c'est la série harmonique), donc la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ diverge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

(*viii*) On a $\frac{n^5 3^n}{4^n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$ par croissance comparée puisque $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$. Or la série de terme général $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de paramètre $\frac{4}{5} \in]-1,1[$, donc la série de terme général $\frac{n^5 3^n}{4^n}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

(*ix*) Rappelons que l'on a $\lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ (ce que l'on obtient en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'encadrement $\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x\rfloor}{x} \leqslant 1$). On peut donc écrire

$$\frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

or la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{1}{2} \leqslant 1$, donc c'est aussi le cas de la série de terme général $\frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ par comparaison de séries à termes positifs.

Notons que l'on aurait pu se contenter de minorer $\frac{1}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ par $\frac{1}{\sqrt{n}}$ pour arriver à la même conclusion.

(*x*) On a $ke^{-k} = \frac{k}{e^k} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^k}\right)$ par croissance comparée, or la série géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ converge (puisque $\frac{1}{2} \in]-1,1[$), donc la série de terme général ke^{-k} converge par comparaison des séries de termes positifs.

Notons que l'on aurait aussi pu reconnaître une série géométrique dérivée convergente en écrivant $ke^{-k} = \frac{1}{e}\cdot k\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}$ et en remarquant que $\frac{1}{e} \in]-1,1[$.

(*xi*) On a affaire à une série télescopique divergente : en effet, on a

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\ln\left((n+1)^2\right) - \ln(n^2)\right] = \ln((N+1)^2) - \ln(1^2) = 2\ln(N+1) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty.$$

(*xii*) On a $\ln(n^2+1) - \ln(n^2) = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$, donc la série de terme général $\ln(n^2+1) - \ln(n^2)$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

(*xiii*) On a $e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, or $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc

$$\left(\arctan\left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)\right)^2 \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)^2.$$

Cherchons à présent un équivalent de cette dernière quantité lorsque $k \to +\infty$: en utilisant les développements limités $e^x = 1+x+o(x)$ et $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x+o(x)$ lorsque $x \to 0$, on obtient

$$e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}} = 1+\frac{1}{k}+o\left(\frac{1}{k}\right) - \left(1+\frac{1}{2k}+o\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{2k}+o\left(\frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$$

et donc

$$\left(\arctan\left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)\right)^2 \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)^2 \underset{k\to+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1}{4k^2}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{4k^2}$ converge en tant que multiple d'une série de Riemann de paramètre $2 > 1$. Ainsi, la série de terme général $\left(\arctan\left(e^{\frac{1}{k}} - \sqrt{1+\frac{1}{k}}\right)\right)^2$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

(*xiv*) On a $\frac{(n+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(n+3)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n\cdot\frac{1}{n}}{n^2} = \frac{1}{n^2}$, or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge (en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$), donc la série de terme général $\frac{(n+1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(n+3)^2}$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

(*xv*) Lorsque $j \to +\infty$, on a $\sin\left(\frac{1}{j}\right) \to 0$ donc $\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{j}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{j}\right) \sim \frac{1}{j}$. Or la série des $\frac{1}{j}$ diverge (c'est la série harmonique), donc la série de terme général $\sin\left(\frac{1}{j}\right)$ et celle des $\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{j}\right)\right)$ divergent elles aussi par comparaison de séries à termes positifs.

(*xvi*) En reconnaissant une somme télescopique, on peut écrire

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{1+\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{n}}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\ln(1+\sqrt{n+1}) - \ln(1+\sqrt{n})\right) \\ &= \ln(1+\sqrt{N+1}) - \ln(2) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty,\end{aligned}$$

donc la série de terme général $\ln\left(\frac{1+\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{n}}\right)$ diverge.

(*xvii*) Pour tout $n \geqslant 1$, le terme général $u_n := \frac{n!}{n^n}$ est strictement positif et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)},$$

or $n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\cdot\left(-\frac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\cdot\frac{1}{n} = -1$ donc $n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$, d'où

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-1}.$$

Or $e^{-1} < 1$, donc la série étudiée converge d'après la règle de D'Alembert.

$(xviii)$ On a $\frac{2^n}{3^{\sqrt{n}}} = e^{n\ln(2)-\sqrt{n}\ln(3)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ puisque $n\ln(2)-\sqrt{n}\ln(3) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$; ainsi, on a aussi $\frac{2^n(n^3+1)\ln(n)}{3^{\sqrt{n}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc la série étudiée diverge grossièrement.

(xix) Le terme général $u_n := \left(\frac{2n+\sin(n)}{3n}\right)^n$ est positif et

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{2n+\sin(n)}{3n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3} \quad \text{donc} \quad \sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3} < 1,$$

donc la série étudiée converge d'après la règle de Cauchy.

(xx) On a $\left|\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right| \leqslant \frac{1}{n\sqrt{n}}$ pour tout $n \geqslant 1$, or la série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$, donc la série de terme général $\left|\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}\right|$ converge par comparaison de séries à termes positifs. Ainsi, la série de terme général $\frac{\sin(n)}{n\sqrt{n}}$ converge absolument, donc elle converge.

(xxi) On va montrer que la série converge absolument. Appliquons la règle de D'Alembert au terme strictement positif $\left|\frac{(-2)^k}{\sqrt{k!}}\right| = \frac{2^k}{\sqrt{k!}}$: on a

$$\frac{\frac{2^{k+1}}{\sqrt{(k+1)!}}}{\frac{2^k}{\sqrt{k!}}} = \frac{2}{\sqrt{k+1}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 < 1,$$

donc la série $\sum_{n\geqslant 0}\left|\frac{(-2)^k}{\sqrt{k!}}\right|$ converge. Ainsi, la série $\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-2)^k}{\sqrt{k!}}$ converge absolument, donc elle converge.

$(xxii)$ On pourrait appliquer le même raisonnement que dans le point précédent. Pour varier les plaisirs, remarquons plutôt que

$$\left|\frac{x^k}{(2k+1)!}\right| = \frac{|x|^k}{(2k+1)!} \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{|x|^k}{k!}\right),$$

or la série de terme général $\frac{|x|^k}{k!}$ converge en tant que série exponentielle, donc $\sum_{n\geqslant 0}\left|\frac{x^k}{(2k+1)!}\right|$ converge par comparaison des séries à termes positifs, ce qui implique que $\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^k}{(2k+1)!}$ converge absolument donc converge.

Correction de l'exercice 8.

(i) On reconnaît une série géométrique de paramètre $\frac{1}{e} \in]-1,1[$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e-1}.$$

(ii) On reconnaît ici une série géométrique de paramètre $\frac{2}{9} \in]-1,1[$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{3^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^k = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{3}{7}.$$

(iii) En écrivant $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ (décomposition déjà rencontrée plusieurs fois en exercice !), on reconnaît une série télescopique :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

(iv) On voit encore une fois apparaître une série télescopique :

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\arctan\left(\frac{1}{k}\right) - \arctan\left(\frac{1}{k+1}\right)\right) = \arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{N+1}\right)$$
$$\xrightarrow[N\to+\infty]{} \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\arctan\left(\frac{1}{k}\right) - \arctan\left(\frac{1}{k+1}\right)\right) = \frac{\pi}{4}.$$

(v) On fait cette fois apparaître la somme d'une série géométrique dérivée de paramètre $\frac{1}{2} \in]-1,1[$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i}{2^i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{+\infty} i \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 2.$$

(vi) On fait apparaître la somme d'une série géométrique dérivée deux fois de paramètre $\frac{1}{2} \in]-1,1[$:

$$\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i(i-1)}{2^i} = \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{+\infty} i(i-1) \left(\frac{1}{2}\right)^{i-2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 4.$$

(vii) Pour tout $i \geqslant 2$, on a $\frac{i}{2^i} + \frac{i(i-1)}{2^i} = \frac{i^2}{2^i}$. En utilisant les résultats des deux points précédents et la linéarité de la somme des séries convergentes, on déduit que la série de terme général $\frac{i^2}{2^i}$ converge et que

$$\sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i^2}{2^i} = \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i}{2^i} + \sum_{i=2}^{+\infty} \frac{i(i-1)}{2^i} = 2 - \frac{1}{2} + 4 = \frac{11}{2}.$$

$(viii)$ On reconnaît une série exponentielle de paramètre x^2 :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} - 1 = e^{x^2} - 1.$$

(ix) En reconnaissant deux séries géométriques de paramètre $\frac{1}{2} \in]-1,1[$, on peut écrire

$$\sum_{a=0}^{+\infty}\sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{a+b}} = \sum_{a=0}^{+\infty}\sum_{b=0}^{+\infty} \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{2^b} = \sum_{a=0}^{+\infty} \frac{1}{2^a} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4.$$

(x) Pour tout $n \geqslant 0$, la somme

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\binom{n}{m} 2^m m^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!(n-m)!} 2^m m^{n-m}$$

est finie puisqu'elle ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls. Pour tout $m \geqslant 0$, on calcule la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\binom{n}{m} 2^m m^{n-m} = \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{m!(n-m)!} 2^m m^{n-m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^m}{m!}\frac{m^k}{k!} = \frac{2^m}{m!} e^m = \frac{(2e)^m}{m!}$$

en reconnaissant une somme de série exponentielle. Ainsi, les conditions du théorème de Fubini sont vérifiées, et on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\binom{n}{m} 2^m m^{n-m} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\binom{n}{m} 2^m m^{n-m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2e)^m}{m!} = e^{2e}$$

en reconnaissant une nouvelle somme de série exponentielle.

Correction de l'exercice 9.

1. Comme $\alpha > 1$, la série de Riemann de terme général $\frac{1}{k^\alpha}$ converge. Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$ le terme r_n, qui est son reste d'ordre n, est bien défini.
2. Comme la série de Riemann de terme général $\frac{1}{k^\alpha}$ est convergente, on a $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Soient $n \geqslant 1$ et $N > n$. Pour tout $k \in [\![n+1, N]\!]$ et tout $t \in [k-1, k]$, on a $t \leqslant k \leqslant t+1$ et donc, par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $\mathbb{R}_+^*$: $\frac{1}{(t+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{t^\alpha}$, d'où en intégrant cette inégalité sur $[k-1, k]$:

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

soit

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$

En sommant ces dernières inégalités pour $k \in [\![n+1, N]\!]$ et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_{n}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Cet encadrement se réécrit sous la forme

$$\left[\frac{1}{-\alpha+1}(t+1)^{-\alpha+1}\right]_n^N \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_n^N$$

soit

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}}\right).$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on obtient alors l'encadrement suivant :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

4. Les deux termes qui encadrent r_n dans les inégalités ci-dessus sont équivalents à $\frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ lorsque $n \to +\infty$: on en déduit que

$$r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

d'après le théorème des gendarmes pour les équivalents.

Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général r_n est donc de même nature que la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^{\alpha-1}}$: ainsi, elle converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$, ce qui équivaut à $\alpha > 2$.

Correction de l'exercice 10.

1. Pour tout $n \geqslant e^3$, on a $\ln(n)^n \geqslant 3^n > 0$, d'où $0 \leqslant \frac{2^n}{\ln(n)^n} \leqslant \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{2^n}{\ln(n)^n}$ converge donc d'après le principe de comparaison des séries à termes positifs puisque $\sum \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge en tant que série géométrique de raison $\frac{2}{3} \in]-1,1[$.

2. On peut calculer explicitement la somme géométrique : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1-\frac{2}{3}} = \frac{4}{3}$.
L'autre somme peut être minorée par son premier terme :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{\ln(n)^n} \geqslant \frac{4}{\ln(2)^2} \geqslant \frac{4}{\ln(e)^2} = 4.$$

Ainsi, on a $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n}{\ln(n)^n} \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, ce qui illustre le fait que la majoration du terme général $\frac{2^n}{\ln(n)^n}$ par $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ *à partir d'un certain rang* ne permet pas de tirer de conclusion sur la comparaison des sommes des séries associées.

Correction de l'exercice 11. Supposons que $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ à partir d'un certain rang, donc $0 \leqslant u_n^2 \leqslant u_n$ à partir de ce rang. Par comparaison des séries à termes positifs, la série de terme général u_n^2 converge donc, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 12.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-x)^k = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}$$

car $-x \neq 1$. En intégrant cette égalité sur $[0,1]$ et en utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-x)^k \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x,$$

soit

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = [\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\left|\frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\right| = \frac{x^{n+1}}{1+x} \leqslant x^{n+1}$. Ainsi, par l'inégalité triangulaire et par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\left|\int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-x)^{n+1}}{1+x}\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0,$$

d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} \mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. L'égalité démontrée dans la question précédente montre alors que la série de terme général $\frac{(-1)^k}{k+1}$ converge et que sa somme vaut bien

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2).$$

3. La série de terme général $\left|\frac{(-1)^k}{k+1}\right| = \frac{1}{k+1}$ diverge en tant que série harmonique. Ainsi, la série étudiée ne converge pas absolument : elle est *semi-convergente*.

Correction de l'exercice 13.

1. La série étant à terme général positif, elle est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente si elle est majorée et divergente (vers $+\infty$) sinon.

2. Pour tout $p \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} H_{2p} - H_p = \sum_{n=1}^{2p} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} &= \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{1}{n} \\ &\geqslant \sum_{n=p+1}^{2p} \frac{1}{2p} \quad \text{par minoration terme à terme} \\ &= (2p-(p+1)+1) \cdot \frac{1}{2p} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Pour tout $N \geqslant 2$ on a

$$H_{2^N} = \sum_{p=1}^{N} (H_{2^p} - H_{2^{p-1}}) + H_1 \geqslant \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2} + 1 \geqslant \frac{N}{2} + 1 = \frac{N+3}{2}.$$

Ainsi, la suite $(H_N)_{N \geqslant 1}$ n'est pas majorée, donc la série harmonique diverge.

Correction de l'exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $P : q \mapsto \sum_{k=0}^{n} q^k$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, et pour tout $q \in \mathbb{R}$ on a

$$P''(q) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2}$$

par linéarité de la dérivation.
Or pour tout $q \neq 1$, on a aussi $P(q) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, ce qui définit une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (en tant que quotient de fonctions deux fois dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas). En dérivant deux fois cette relation, on a pour tout $q \neq 1$:

$$P'(q) = \frac{-(n+1)q^n(1-q) + (1-q^{n+1})}{(1-q)^2} = \frac{1 + nq^{n+1} - (n+1)q^n}{(1-q)^2},$$

puis, après simplifications :

$$P''(q) \underset{\cdots}{=} \frac{2 + 2(n^2-1)q^n - (n-1)nq^{n+1} - n(n+1)q^{n-1}}{(1-q)^3}.$$

Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a l'égalité suivante :

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2 + 2(n^2-1)q^n - (n-1)nq^{n+1} - n(n+1)q^{n-1}}{(1-q)^3}.$$

Si $|q| \geqslant 1$, la série de terme général $k(k-1)q^{k-2}$ diverge grossièrement. En revanche, si $|q| < 1$, l'égalité ci-dessus et le théorème de croissance comparée montrent que

$$\sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{(1-q)^3},$$

donc la série converge et sa somme vaut $\frac{2}{(1-q)^3}$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 15.

1. Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. On a alors $n^{\frac{1+\alpha}{2}} u_n = n^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \cdot \ell = 0$ puisque $\frac{1-\alpha}{2} < 0$, donc

$$\frac{u_n}{\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{soit} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right).$$

   Or la série de terme général $\frac{1}{n^{\frac{1+\alpha}{2}}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{1+\alpha}{2} > 1$, donc $\sum u_n$ converge aussi par comparaison des séries à termes positifs.

2. Supposons qu'il existe $\alpha < 1$ tel que $n^\alpha u_n$ tende vers $\ell \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$. On a alors
$$n^{\frac{\alpha+1}{2}} u_n = n^{\frac{1-\alpha}{2}} \cdot n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$
en vertu de l'égalité formelle $\ell \cdot +\infty = +\infty$ (rappelons que $\frac{1-\alpha}{2} > 0$ et $\ell > 0$). Ainsi, on a $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et
$$\frac{\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}} \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n).$$
Or la série de terme général $\frac{1}{n^{\frac{\alpha+1}{2}}}$ diverge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{\alpha+1}{2} < 1$, donc la série $\sum u_n$ diverge aussi par comparaison des séries à termes positifs.

Correction de l'exercice 16. L'égalité à établir se réécrit sous la forme
$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} d_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} d_{m,n}. \tag{1}$$
Or pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ le réel $u_{m,n}d_{m,n}$ est positif en tant que produit de réels positifs, et on a $0 \leqslant u_{m,n}d_{m,n} \leqslant u_{m,n}$. Mais pour tout $m \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_{m,n}$ converge donc par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_{m,n}d_{m,n}$ converge elle aussi. De même, pour tout $n \geqslant 0$, la série $\sum\limits_{m\geqslant 0} u_{m,n}d_{m,n}$ converge puisque c'est aussi le cas de la série $\sum\limits_{m\geqslant 0} u_{m,n}$. Ainsi, on peut bien appliquer le théorème de Fubini pour obtenir l'égalité (1), ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 17.

1. Pour tout $x > 0$, on a $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2+1-2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$, d'où l'inégalité attendue.
2. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs[1]. On a
$$\begin{aligned}(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) &= \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)\left(\sum_{\ell=1}^n \frac{1}{a_\ell}\right) \\ &= \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \frac{a_k}{a_\ell} = \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i}\right) + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_i} \\ &\geqslant \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} 2 + n \quad \text{d'après la question précédente}\end{aligned}$$

1. L'inégalité à établir se réécrit
$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geqslant n\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)^{-1}$$
et revient donc à dire que la *moyenne arithmétique* des a_i est supérieure à leur *moyenne harmonique*.

$$= \sum_{i=1}^{n} 2(i-1) + n = 2\sum_{m=0}^{n-1} m + n = n(n-1) + n = n^2,$$

où la troisième égalité s'obtient en écrivant que tous les termes de la somme sont soit de la forme $\frac{a_i}{a_j}$ ou $\frac{a_j}{a_i}$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$, soit de la forme $\frac{a_i}{a_i}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$.

3. On suit l'indication en écrivant que pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} k^2 u_k + \frac{1}{n^2}\sum_{k=\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}^{n} k^2 u_k \\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} n u_k + \sum_{k=\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1}^{n} u_k = \frac{1}{n} S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} + S_n - S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor},\end{aligned}$$

où pour tout $k \geqslant 1$, la quantité $S_p := \sum_{k=1}^{p} u_k$ est la p-ième somme partielle de la série de terme général u_k. Or S_n et $S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$, tendent tous deux vers la somme S de la série des u_k lorsque $n \to +\infty$, donc

$$\frac{1}{n} S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} + S_n - S_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où, par encadrement,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où la limite à établir.

4. Pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 u_k}\right) \geqslant n^2$$

d'après la question 2, d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 u_k} \geqslant \left(\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k\right)\right)^{-1}.$$

Or le terme de droite tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$ d'après la question 3 puisque $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 u_k > 0$ pour tout $n \geqslant 1$; ainsi, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 u_k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par comparaison. La série de terme général $\frac{1}{k^2 u_k}$ diverge donc, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 18.

1. Si $u_n = -1 + \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $p = 0$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en développant le produit $p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k)$ on obtient une somme de termes positifs, dont $1^n = 1$ (le terme obtenu en multipliant les 1 entre eux), u_1 (le terme obtenu en multipliant u_1 et uniquement des 1), u_2 (obtenu en multipliant 1 puis u_2 et uniquement des 1), et ainsi de suite jusqu'à u_n. Ainsi, on a

$$p_n \geqslant 1 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = 1 + S_n,$$

ce qui établit l'inégalité de gauche dans l'encadrement recherché.

À présent, on remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $e^x \geqslant 1+x$ (par exemple en étudiant la fonction $x \mapsto e^x - (1+x)$ qui atteint son minimum 0 pour $x = 0$ et est donc positive), ce qui permet d'écrire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$p_n = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{u_k} = e^{u_1+\ldots+u_n} = e^{S_n},$$

d'où l'encadrement recherché.

La série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante (puisque les u_k sont positifs), si elle diverge elle tend vers $+\infty$, donc l'inégalité $p_n \geqslant 1 + S_n$ montre que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge elle aussi vers $+\infty$. Par contraposée, si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ aussi.

À présent, si la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors elle est majorée, donc c'est aussi le cas de la suite $(e^{S_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. L'inégalité $e^{S_n} \geqslant p_n$ montre alors que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée ; or elle est croissante puisque les u_k sont positifs, donc $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Ainsi, on a bien montré que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

(b) Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, alors $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge d'après la question précédente ; ainsi, la série de terme général u_n converge, donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$p_n = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)\right)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\ln(1+u_k)\right).$$

Si la série des $\ln(1+u_k)$ converge, c'est donc le cas de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par continuité de exp.

Réciproquement, en écrivant $\sum_{k=1}^{n}\ln(1+u_k) = \ln(p_n)$ pour tout $n \geqslant 1$ (ce qui est possible puisque les $1+u_k$ et p_n sont strictement positifs), on en déduit que si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive, alors la série des $\ln(1+u_k)$ converge elle aussi.

On se place désormais dans le cas où les u_n sont tous positifs.

Alors $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et supérieure à 1, donc elle ne peut converger vers 0. On a alors équivalence entre la convergence de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et celle de la série des $\ln(1+u_n)$.

Supposons que la série des $\ln(1+u_n)$ converge. C'est donc le cas de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; mais on a vu dans la question précédente que cela implique que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On a alors $\ln(1+u_n) \sim u_n$ lorsque $n \to +\infty$, et on peut utiliser le résultat de comparaison des séries à termes positifs pour conclure que la série des u_n converge.

Réciproquement, supposons que la série des u_n converge. D'après la question 2, cela implique la convergence de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et le fait que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$; on peut alors utiliser le même équivalent $\ln(1+u_n) \sim u_n$ que précédemment pour conclure que la série de terme général $\ln(1+u_n)$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

Ainsi, sous l'hypothèse de positivité des u_n, les séries de termes généraux $\ln(1+u_n)$ et u_n sont bien de même nature.

Correction de l'exercice 19.

1. Soit $k \geqslant 1$. Pour tout $t \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$ par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. En intégrant cette inégalité sur $[k, k+1]$, on obtient

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k},$$

soit

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Alternativement, on aurait pu utiliser l'inégalité des accroissements finis (qui est en fait un outil équivalent) : si $k \geqslant 1$, la fonction ln est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$, et pour tout $t \in]k, k+1[$ on a $\ln'(t) = \frac{1}{t}$ donc

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln'(t) \leqslant \frac{1}{k}$$

par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction ln entre les points k et $k+1$ donne alors

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}.$$

2. Si $n \geqslant 1$, en sommant les inégalités $\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et en reconnaissant une somme télescopique, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{soit} \quad \ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

donc $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \geqslant 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est positive.

Par ailleurs, si $n \geqslant 1$ on a

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln(n)) \leqslant 0$$

d'après la question précédente, donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. Le fait qu'elle converge vers une limite γ est alors une conséquence du théorème de la limite monotone.

3. On a $H_n = u_n + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n)) + \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ et $\ln(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Correction de l'exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : x \mapsto x^{n^2}(1-x)$ est dérivable sur $[0,1]$, et pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$f'(x) = n^2 x^{n^2-1}(1-x) - x^{n^2} = x^{n^2-1}(n^2(1-x)-x),$$

donc

$$f'(x) \geqslant 0 \iff n^2(1-x)-x \geqslant 0 \iff n^2 \geqslant x(n^2+1) \iff x \leqslant \frac{n^2}{n^2+1}.$$

Ainsi, f admet un maximum en $\frac{n^2}{n^2+1}$ égal à $\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{n^2+1}$, or $\frac{n^2}{n^2+1} \in [0,1]$ donc ce maximum est inférieur à $\frac{1}{n^2+1}$. On a donc établi l'encadrement suivant :

$$\forall n \geqslant 1, \quad \forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant x^{n^2}(1-x) \leqslant \frac{1}{n^2+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant 1$ on a $0 \leqslant (u_n)^{n^2}(1-u_n) \leqslant \frac{1}{n^2+1} \leqslant \frac{1}{n^2}$. Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$; ainsi, la série de terme général $(u_n)^{n^2}(1-u_n)$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Correction de l'exercice 21.

1. Soit $\alpha' = \frac{1+\alpha}{2}$.
   Si $\alpha > 1$, on a $\alpha > \alpha' > 1$ donc $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right)$ par croissance comparée, or la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha'}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\alpha' > 1$, donc la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.
   Si $\alpha < 1$, on a $\alpha < \alpha' < 1$ donc $\frac{1}{n^{\alpha'}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}\right)$ par croissance comparée, et la divergence de la série de Riemann de paramètre $\alpha' < 1$ implique cette fois celle de la série de terme général positif $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$.
2. (a) La fonction $x \mapsto x\ln^\beta(x)$ est strictement positive et croissante sur $[n-1,n]$ en tant que produit de fonctions strictement positives et croissantes (car $n \geqslant 3$). Ainsi, pour tout $x \in [n-1,n]$ on a

   $$0 < x\ln^\beta(x) \leqslant n\ln^\beta(n) \leqslant (x+1)\ln^\beta(x+1),$$

   d'où l'encadrement attendu par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Si $n \geqslant 3$, en encadrant l'inégalité démontrée dans la question précédente sur $[n-1, n]$ on obtient

$$\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\ln^{\beta}(x+1)} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{n\ln^{\beta}(n)} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\beta}(x)}.$$

En effectuant le changement de variable $u = x+1$ dans l'intégrale de gauche et en remarquant que l'intégrale centrale est l'intégrale d'une constante, cet encadrement se réécrit

$$\int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}u}{u\ln^{\beta}(u)} \leqslant \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\beta}(x)},$$

ce qu'il fallait démontrer.

(c) Soit $N \geqslant 3$. En sommant l'inégalité démontrée dans la question précédente pour $n \in [\![3, N]\!]$, on obtient

$$\sum_{n=3}^{N} \int_{n}^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\beta}(x)} \leqslant \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)} \leqslant \sum_{n=3}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\beta}(x)}$$

ce qui, grâce à la relation de Chasles, se réécrit

$$\int_{3}^{N+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\beta}(x)} \leqslant \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)} \leqslant \int_{n=2}^{N} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^{\beta}(x)}. \tag{2}$$

Si $\beta \neq 1$, en remarquant que $x \mapsto \frac{1}{x\ln^{\beta}(x)} = \ln'(x)\ln^{-\beta}(x)$ admet $x \mapsto \frac{1}{1-\beta}\ln^{1-\beta}(x)$ pour primitive, on peut réécrire cet encadrement sous la forme

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\beta}\left(\ln^{1-\beta}(N+1) - \ln^{1-\beta}(3)\right) &\leqslant \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)} \\ &\leqslant \frac{1}{1-\beta}\left(\ln^{1-\beta}(N) - \ln^{1-\beta}(2)\right).\end{aligned}$$

Si $\beta < 1$, on a $1-\beta > 0$ donc le membre de gauche de l'inégalité tend vers $+\infty$ lorsque $N \to +\infty$, donc

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty.$$

Si $\beta > 1$, on a $1-\beta < 0$ donc le terme de droite de l'inégalité (2) tend vers une limite finie lorsque $N \to +\infty$; ainsi, la série des $\frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}$ est majorée, donc elle converge puisqu'elle est à termes positifs.

Il reste à étudier le cas $\beta = 1$: la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)} = \frac{\ln'(x)}{\ln(x)}$ admet $x \mapsto \ln(\ln(x))$ pour primitive sur $[3, N+1]$, donc l'inégalité de gauche de (2) donne

$$\ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln(3)) \leqslant \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln(n)}.$$

En passant à la limite lorsque $N \to +\infty$, on obtient que

$$\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln(n)} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty,$$

c'est-à-dire que la série de terme général $\frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

3. Étudions le cas où $\alpha = 1$ et $\beta < 0$. Lorsque $\beta < 0$, on a $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}\right)$, or la série harmonique diverge, donc la série des $\frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}$ diverge par comparaison des séries à termes positifs.

   Ainsi, si $\alpha \neq 1$, la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta}(n)}$ est donnée par la valeur de α : elle converge si $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$. Si $\alpha = 1$, la nature de la série est donnée par la valeur de β : elle converge si $\beta > 1$ et diverge si $\beta \leqslant 1$.
4. Les conditions attendues sont satisfaites en prenant $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$ d'après ce qui précède.

Correction de l'exercice 22.

1. Si $w_n = n$ pour tout n, la série $\sum u_n w_n = \sum \frac{1}{n^2}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $2 > 1$. Si $w_n = n^2$ pour tout n, la série $\sum u_n w_n = \sum \frac{1}{n}$ diverge en tant que série harmonique.
2. Soit $K \geqslant 0$ tel que $0 \leqslant w_n \leqslant K$ pour tout n. On a alors $0 \leqslant u_n w_n \leqslant K u_n$ pour tout n ; or la série $\sum K u_n$ converge en tant que multiple d'une série convergente, donc $\sum u_n w_n$ converge elle aussi par comparaison de séries à termes positifs.
3. Supposons que (u_n) ait un nombre infini de termes non nuls. On construit alors la suite positive (w_n) en posant pour tout n :

   $$w_n = \begin{cases} \frac{1}{u_n} & \text{si } u_n > 0 \\ 0 & \text{si } u_n = 0. \end{cases}$$

   Alors la suite $(u_n w_n)$ possède un nombre infini de termes égaux à 1 et tous ses autres termes sont égaux à 0 ; ainsi, $\sum u_n w_n$ diverge, ce qui contredit l'hypothèse faite dans l'énoncé.

   On a donc montré par l'absurde que (u_n) possède seulement un nombre fini de termes non nuls.
4. Il s'agit du résultat de l'exercice 11, dont on pourrait bien sûr reproduire la solution, mais on peut aussi voir dans cette propriété une conséquence de la question 2 du présent exercice. En effet, la convergence de $\sum u_n$ implique que (u_n) tend vers 0, donc est bornée ; la question 2 permet alors d'affirmer que $\sum u_n w_n$ converge.

Correction de l'exercice 23.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} (u_k - u_n),$$
or $u_k - u_n \geqslant 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ puisque $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante, donc
$$0 \leqslant v_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k.$$
Or la série de terme général $\sum u_n$ converge, donc elle est bornée ; c'est donc le cas de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned} v_n - v_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_n - \sum_{k=1}^{n-1} u_k + (n-1) u_{n-1} \\ &= u_n - n u_n + (n-1) u_{n-1} = (n-1)(u_{n-1} - u_n). \end{aligned}$$

   (b) La suite $(v_n)_{n \geqslant 0}$ est majorée par hypothèse, et elle est croissante puisque
$$v_n - v_{n-1} = (n-1)(u_{n-1} - u_n) \geqslant 0$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après la question précédente (on rappelle que $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est supposée décroissante !). Ainsi, elle converge d'après le théorème de la limite monotone, vers une limite que nous notons α.

   (c) Pour tout $n \geqslant 0$, on a
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} (k-1)(u_k - u_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} (v_{k-1} - v_k) \quad \text{d'après la question 21(a)} \\ &= v_0 - v_n \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\ &\xrightarrow[n \to +\infty]{} v_0 - \alpha, \end{aligned}$$
donc la série de terme général $(n-1)(u_n - u_{n-1})$ converge (vers $v_0 - \alpha$).

   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $N > n$, on a
$$\sum_{k=n+1}^{N} (k-1)(u_{k-1} - u_k) \geqslant \sum_{k=n+1}^{N} n(u_{k-1} - u_k)$$
car $k - 1 \geqslant n$ et $u_{k-1} - u_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant n+1$ donc, en reconnaissant une somme télescopique :
$$\sum_{k=n+1}^{N} (k-1)(u_{k-1} - u_k) \geqslant n(u_n - u_N).$$
Passons à la limite lorsque $N \to +\infty$ dans la relation obtenue (ce qui est possible car la série des $(k-1)(u_{k-1} - u_k)$ converge d'après la question précédente) : comme $u_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$, on obtient
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (k-1)(u_{k-1} - u_k) \geqslant n u_n,$$
ce qui est le résultat attendu.

(e) La série de terme général $(k-1)(u_{k-1}-u_k)$ étant convergente, la suite de ses restes tend vers 0 :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}(k-1)(u_{k-1}-u_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Or on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'encadrement

$$0 \leqslant nu_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty}(k-1)(u_{k-1}-u_k)$$

d'après la question précédente, d'où $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème des gendarmes. On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = v_n + nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha + 0 = \alpha,$$

d'où la convergence de la série $\sum u_n$ vers α.

Correction de l'exercice 24. [L'organisation de l'énoncé est fautive. La première question de la partie II est en fait la dernière de la partie I, et les numéros des questions se suivent d'une partie à l'autre. La correction ci-dessous adopte la numérotation rectifiée.]

Partie I – Préliminaires

1. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^1 t^{ka}\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{ka+1}}{ka+1}\right]_0^1 = \frac{1}{ka+1}.$$

(b) Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\begin{aligned}
S_n(a) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{ka+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^1 t^{ka}\mathrm{d}t \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{ka}\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n}(-t^a)^k\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-(-t^a)^{n+1}}{1+t^a}\mathrm{d}t \quad \text{car } -t^a \neq 1 \text{ si } t \in [0,1] \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^a} + (-1)^n \frac{(t^a)^{n+1}}{1+t^a}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+t^a}\mathrm{d}t + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{na+a}}{1+t^a}\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale,}
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(c) D'après la question précédente, il suffit de montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{na+a}}{1+t^a}\mathrm{d}t$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Mais on a par croissance de l'intégrale

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^{na+a}}{1+t^a}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{na+a}\mathrm{d}t = \frac{1}{1+na+a}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, or $\frac{1}{1+na+a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $a > 0$, donc on trouve bien par encadrement

$$\int_0^1 \frac{t^{na+a}}{1+t^a}\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^a)^k}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(1-t^a)}{2}\right)^k \\
&= \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{(1-t^a)}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{(1-t^a)}{2}} \quad \text{car } \frac{(1-t^a)}{2} \neq 1 \\
&= \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{(1-t^a)}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1+t^a}{2}} \\
&= \frac{1-\left(\frac{(1-t^a)}{2}\right)^{n+1}}{1+t^a} \\
&= \frac{1}{1+t^a} - \frac{(1-t^a)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^a)},
\end{aligned}$$

d'où le résultat attendu.

Partie II – Cas $a = 1$

3. On a

$$S(1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2).$$

4. Si $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\begin{aligned}
|S(1) - S_n(1)| &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\mathrm{d}t \quad \text{d'après la question 1.(b)} \\
&\leqslant \int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t \quad \text{par croissance de l'intégrale} \\
&= \frac{1}{n+2},
\end{aligned}$$

d'où la majoration recherchée.

5. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, on obtient par croissance de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{(1-t)^{n+2}}{(n+2)2^{n+1}}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{(n+2)2^{n+1}},\end{aligned}$$

d'où l'inégalité attendue.

(b) En utilisant la décomposition établie dans la question 2 des préliminaires, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left|S(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right| &= \left|\int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right| \\ &= \left|\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t)^k}{2^{k+1}} + \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\right)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right|,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}&\left|S(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right| \\ &\quad = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} \int_0^1 (1-t)^k\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right|\end{aligned}$$

par linéarité de l'intégrale, or pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ on a

$$\int_0^1 (1-t)^k\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

donc

$$\begin{aligned}\left|S(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right| \\ &= \left|\int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t)}\mathrm{d}t\right|.\end{aligned}$$

La majoration attendue est alors une simple conséquence de la question précédente.

Comme le terme $\frac{1}{(n+2)2^{n+1}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on en déduit par encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(S(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}\right) = 0,$$

et donc que

$$S(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)2^{k+1}}.$$

Partie III – Cas $a = 2$

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
J_{n+1} - J_n &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\mathrm{d}t - \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \Big((1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n\Big)\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^1 (1-t^2)^n((1-t^2)-1)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (1-t^2)^n(-t^2)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t\Big(-t(1-t^2)^n\Big)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On effectue une intégration par parties en dérivant la fonction $t \mapsto t$ et en primitivant la fonction continue $t \mapsto -t(1-t^2)^n$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t\Big(-t(1-t^2)^n\Big)\mathrm{d}t &= \left[t\frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 1\cdot\frac{1}{2(n+1)}(1-t^2)^{n+1}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{2(n+1)}J_{n+1} \quad \text{par linéarité de l'intégrale.}
\end{aligned}$$

On a donc $J_{n+1} - J_n = -\frac{1}{2(n+1)}J_{n+1}$.

(b) Si $n \in \mathbb{N}$, l'égalité donnée à la question précédente se réécrit

$$J_{n+1} + \frac{1}{2(n+1)}J_{n+1} = J_n$$

soit

$$\frac{2n+3}{2n+2}J_{n+1} = J_n$$

et donc

$$J_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}J_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(c) Par une récurrence facile, on déduit de la question précédente la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+3)}J_0 = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+3)},$$

avec la convention classique selon laquelle un produit de 0 termes vaut 1.

On peut simplifier cette expression en écrivant que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+2) = 2^n\prod_{k=0}^{n-1}(k+1) = 2^n n!$$

et

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+3) = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{2n+1} i}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(2k+2)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Ainsi, on trouve :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \frac{2^n n!}{\frac{(2n+1)!}{2^n n!}} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

7. La dérivée de arctan est la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. On a donc

$$S(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

8. En utilisant la décomposition établie dans la question 2 des préliminaires, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left|S(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\right| &= \left|\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\right| \\ &= \left|\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t^2)^k}{2^{k+1}} + \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)}\right)\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\right|\end{aligned}$$

d'où, par linéarité de l'intégrale,

$$\left|S(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} J_k + \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\right|.$$

Or $\frac{1}{2^{k+1}} J_k = \dfrac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ d'après la question 6(c), donc

$$\left|S(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}\right| = \left|\frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t\right|.$$

En encadrant brutalement l'intégrande $\frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2}$ entre 0 et 1 lorsque $t \in [0, 1]$, on obtient

$$0 \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \left|\int_0^1 1\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{2^{n+1}},$$

d'où l'inégalité attendue.

Il suffit alors de remarquer que $\frac{1}{2^{n+1}}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ pour obtenir comme dans la question 5(b) de la partie II la relation

$$S(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^{k-1}(k!)^2}{(2k+1)!}.$$

Correction de l'exercice 25.

1. Le niveau de production d'une économie est la somme des valeurs ajoutées comptabilisées sur une période au sein de cette économie. Or toute valeur ajoutée donne lieu à une création de richesse, qui est à la fois une dépense pour le producteur de cette richesse et un revenu pour les facteurs de production. Ainsi, d'un point de vue purement comptable[2], toute valeur ajoutée produite donne lieu à la distribution d'un revenu équivalent aux détenteurs de ses facteurs de production. La somme des revenus distribués dans le cadre de l'économie considérée est donc égale à la somme des valeurs ajoutées ; on désigne ces deux quantités par Y.

   Pouvoir alternativement adopter l'un ou l'autre point de vue sur la grandeur Y est crucial dans la suite de l'exercice.

2. Suite à la distribution d'un revenu supplémentaire de ΔY, la consommation, qui est fonction affine de Y, augmente de $c\Delta Y$.

3. Pour répondre à l'augmentation de $c\Delta Y$ de la demande, la production doit elle aussi augmenter de $c\Delta Y$, ce qui résulte en la distribution d'un revenu supplémentaire égal à $c\Delta Y$ dans l'économie. Une proportion c de ce revenu est alors affectée à une nouvelle augmentation de la consommation, dont l'ampleur est donc égale à $c^2\Delta Y$.

4. Le phénomène de rétroaction esquissé dans les deux questions précédentes conduit à une infinité de hausses de la production, d'ampleurs successives ΔY, $c\Delta Y$, $c^2\Delta Y$ et ainsi de suite, et à une infinité de hausses de la consommation, d'ampleurs successives $c\Delta Y$, $c^2\Delta Y$, $c^3\Delta Y$ et ainsi de suite.

   La hausse totale de Y résultat de l'investissement initial de ΔY est donc égale à

   $$\Delta Y + c\Delta Y + c^2\Delta Y + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} c^k Y = \frac{1}{1-c}\Delta Y,$$

   la convergence de la série géométrique étant assurée par le fait que $c \in [0, 1[$.

   Ainsi, grâce au phénomène vertueux décrit dans cet exercice, un investissement donné a pour effet d'augmenter la production d'un montant $\frac{1}{1-c}$ fois plus important, ce qui explique que l'on parle de *multiplicateur d'investissement*. Dans le cas où $c = 0{,}8$ (c'est-à-dire où les agents de l'économie ont une propension marginale à consommer égale à 80%), le multiplicateur d'investissement est égal à $\frac{1}{1-0{,}8} = 5$: tout euro investi donne lieu à une hausse de la production nationale de 5 euros.

5. L'approche adoptée repose tout d'abord sur une hypothèse keynésienne selon laquelle l'offre est capable de s'adapter à la demande de façon à la satisfaire en permanence. Elle fait ainsi de la demande le moteur principal de l'économie, sans considérer les facteurs qui peuvent induire des rigidités de l'offre ou mener à un déséquilibre durable de celle-ci par rapport à la demande. Dans le cas où

2. L'équivalence des trois approches du PIB (par les revenus, par la demande et par la production) est assurée en théorie. En pratique, un poste « Erreurs et omissions » figure dans la balance des paiements pour assurer l'équilibre entre ces trois grandeurs agrégées.

l'offre ne peut s'adapter mécaniquement à une hausse de la demande, la boucle vertueuse décrite dans les questions précédentes est brisée et un investissement ayant pour but de provoquer un choc de demande est susceptible de provoquer un déséquilibre macroéconomique sans effet positif sur la production.

Par ailleurs, dans une économie ouverte, lorsque la demande de consommation croît, elle est susceptible de s'adresser à l'étranger : la hausse de la consommation est alors assurée en partie par celle des importations, avec un effet moindre sur la production locale (et donc sur les revenus distribués au sein de l'économie locale). Il est possible d'intégrer ces effets dans le modèle en prenant en compte les importations, sous la forme

$$C = C_0 + cY - mY = C_0 + (c - m)Y$$

avec m la propension marginale à importer, qui décrit la hausse des importations consécutive à un accroissement unitaire du revenu national. Le coefficient $c - m$ remplaçant le coefficient c dans la fonction de consommation, on peut montrer par le même raisonnement que plus haut qu'un multiplicateur d'investissement existe bel et bien mais vaut $\frac{1}{1-c+m}$, et qu'il est donc d'autant plus faible que la propension des consommateurs à se tourner vers des produits d'importation est forte.

Enfin, une critique formulée par l'économiste Robert Barro reprenant des travaux de David Ricardo concerne le financement du choc de demande par l'État : lorsque l'État s'endette pour effectuer une relance budgétaire, les agents sont capables d'anticiper une future hausse des impôts et réduisent leur consommation, ce qui contrecarre l'effet multiplicateur de l'investissement public. Ce phénomène, connu sous le nom d'*effet Ricardo-Barro*, est un cas particulier d'*effet d'éviction* par lequel l'investissement public empêcherait l'investissement et la consommation privées.

La réalité empirique de cet effet, comme celle du multiplicateur d'investissement, fait débat [3].

Correction de l'exercice 26. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'investissement soit rentable est que sa valeur actuelle nette [4] soit positive. Dans le cadre d'un horizon temporel infini avec un coût immédiat de C et un rendement constant égal à R à partir de la période N, on peut écrire que cette valeur vaut

$$\mathrm{VAN} = \sum_{k=N}^{+\infty} \frac{R}{(1+r)^k} - C,$$

la convergence de la série géométrique de terme général $\frac{1}{(1+r)^k} = \left(\frac{1}{1+r}\right)^k$ étant assurée

3. On pourra consulter la page Wikipédia sur le théorème de Haavelmo pour un argument selon lequel les dépenses publiques ont bien une conséquence sur le niveau de la production, mais sans effet multiplicateur.

4. Voir l'exercice 31 du chapitre 2 et l'exercice 39 du chapitre 8 pour la définition de cette notion dans le cadre d'un investissement à horizon fini.

par le fait que $\frac{1}{1+r} \in [0,1[$. On peut réécrire

$$\mathrm{VAN} = \sum_{k=N}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+r}\right)^k R - C = \frac{\left(\frac{1}{1+r}\right)^N}{1-\frac{1}{1+r}} R - C = \frac{1}{r(1+r)^{N-1}} R - C,$$

donc l'investissement est rentable si et seulement si

$$\frac{1}{r(1+r)^{N-1}} R - C \geqslant 0, \quad \text{soit} \quad r(1+r)^{N-1} C \leqslant R,$$

ce qui est la condition attendue.

Correction de l'exercice 27.

1. Remarquons tout d'abord que u_n est bien défini pour tout $n \geqslant 1$ puisque $S_n > 0$ en raison de la stricte positivité des v_k.
   (a) Pour tout $N \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} u_n &= \sum_{n=2}^{N} \frac{S_n - S_{n-1}}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \\
&= \sum_{n=2}^{N} \frac{(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}})}{\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}}} \\
&= \sum_{n=2}^{N} (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}}) \\
&= \sqrt{S_N} - \sqrt{S_1} \quad \text{par télescopage} \\
&= \sqrt{S_N} - \sqrt{v_1}.
\end{aligned}$$

   (b) La série de terme général positif v_n est divergente par hypothèse, c'est-à-dire que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. On en déduit que $\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$.

   On a par ailleurs, grâce à la question précédente,

$$\sum_{n=2}^{N} u_n = \sqrt{S_N} - \sqrt{v_1} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty,$$

   donc $\sum u_n$ diverge, ce qu'il fallait démontrer.
2. Une fois encore, les u_n sont bien définis puisque $R_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$ par stricte positivité des v_k.
   (a) Pour tout $N \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n &= \sum_{n=2}^{N} \frac{R_{n-1} - R_n}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \frac{(\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n})(\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n})}{\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}} \\
&= \sum_{n=1}^{N} (\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}) \\
&= \sqrt{R_0} - \sqrt{R_N} \quad \text{par télescopage.}
\end{aligned}$$

(b) La convergence de $\sum v_n$ implique, outre l'existence des restes R_n, le fait que $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a donc $\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $v_n = (\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n})u_n$ est négligeable devant u_n lorsque $n \to +\infty$. Par ailleurs, on a d'après la question précédente :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_N} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sqrt{R_0},$$

donc $\sum u_n$ converge.

3. On a bien établi les deux propriétés attendues : si $\sum v_n$ diverge, on peut trouver une suite négligeable devant $(v_n)_{n\geqslant 1}$ dont la série diverge (la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ étudiée dans la question 1), et si $\sum v_n$ converge, on peut trouver une suite devant laquelle $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est négligeable et donc la série converge (la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ étudiée dans la question 2).

Correction de l'exercice 28.

1. Supposons que l'on ait $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait

$$(\ell - \varepsilon)u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant (\ell + \varepsilon)u_n.$$

On en déduit (par une récurrence facile) que pour tout $n \geqslant N$ on a

$$(\ell - \varepsilon)^{n-N}u_N \leqslant u_n \leqslant (\ell + \varepsilon)^{n-N}u_N,$$

d'où, par croissance de la fonction racine n-ième :

$$(\ell - \varepsilon)\sqrt[n]{\frac{u_N}{(\ell-\varepsilon)^N}} \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant (\ell + \varepsilon)\sqrt[n]{\frac{u_N}{(\ell+\varepsilon)^N}}.$$

Or les termes de gauche et de droite de cet encadrement tendent respectivement[5] vers $\ell - \varepsilon$ et $\ell + \varepsilon$ lorsque $n \to +\infty$, donc il existe $N' \geqslant N$ tel que pour tout $n \geqslant N'$ on ait $\ell - 2\varepsilon \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant \ell + 2\varepsilon$. Ainsi, on a $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, d'où l'implication recherchée[6] lorsque $\ell > 0$.

Supposons à présent que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Soit $A > 0$. On a $u_{n+1} \geqslant Au_n$ à partir d'un certain rang N ; pour $n \geqslant N$, on a alors $u_n \geqslant A^{n-N}u_N$, d'où $\sqrt[n]{u_n} \geqslant A\sqrt[n]{\frac{u_N}{A^N}}$ par croissance de la fonction racine n-ième. Or $A\sqrt[n]{\frac{u_N}{A^N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} A$,

5. En effet, pour tout $a > 0$ on a $\sqrt[n]{a} = e^{\frac{1}{n}\ln(a)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$.

6. On aurait aussi pu utiliser les notions de limites supérieure et inférieure abordées dans l'exercice 57 du chapitre 7 : on obtient $\ell - \varepsilon \leqslant \liminf\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n}$ par passage à la limite inférieure dans la partie gauche de l'encadrement obtenu, et $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} \leqslant \ell + \varepsilon$ par passage à la limite supérieure dans la partie droite de l'encadrement. Ces relations étant valables pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\liminf\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \liminf\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$, d'où $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

donc on a $\sqrt[n]{u_n} \geqslant \frac{A}{2}$ à partir d'un certain rang. Comme A est quelconque, cela implique que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Supposons enfin que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$. En posant $v_n := \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$, on obtient $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_n}{u_{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, donc le cas précédent donne $\sqrt[n]{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En passant à l'inverse, on obtient $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui donne l'implication attendue dans ce dernier cas.

2. Considérons une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour l'instant quelconque. La suite définie par $u_n := 2^{a_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sqrt[n]{u_n} = 2^{\frac{a_n}{n}}$$

ainsi que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 2^{a_{n+1}-a_n}.$$

Il suffit pour exhiber un contre-exemple de trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (ce qui donnera $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$) et telle que $a_{n+1} - a_n$ ne tende pas vers 0 (ce qui empêchera $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ d'admettre une limite, sans quoi $a_{n+1} - a_n = \frac{\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)}{\ln(2)}$ en admettrait une aussi). Pour obtenir une telle suite « à croissance lente mais avec des sauts », on peut par exemple poser $a_n := \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne bien

$$0 \leqslant \frac{a_n}{n} \leqslant \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où $\frac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par comparaison, ainsi que

$$a_{n+1} - a_n = \begin{cases} 1 \text{ si } n+1 \text{ est un carré d'entier} \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases}$$

si bien que $a_{n+1} - a_n \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(2^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ mais $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 1$.

Correction de l'exercice 29.

1. Supposons que $\sum v_n$ converge. D'après le cours sur la comparaison des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge aussi, ce qui justifie l'existence des restes de ces deux séries. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_0$ on ait $0 \leqslant u_n \leqslant \varepsilon v_n$; en sommant ces inégalités, on peut écrire que pour tout $N \geqslant N_0$ on a

$$0 \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} \varepsilon v_n \leqslant \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n.$$

Ainsi, on a bien

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \underset{N\to+\infty}{=} o\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n\right).$$

2. Supposons à présent que $\sum u_n$ diverge. Soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N_1$ on ait $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} v_n$; en sommant ces inégalités, on peut écrire que pour tout $N \geqslant N_1$ on a

$$0 \leqslant \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N_1} u_n + \sum_{n=N_1+1}^{N} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{N_1} u_n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N_1+1}^{N} v_n.$$

Or $\displaystyle\frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N_1+1}^{N} v_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$ puisque $\sum v_n$ diverge, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{N_1} u_n$ ne dépend pas de N, donc lorsque N est supérieur à un certain rang $N_2 \geqslant N_1$ on peut écrire que

$$\frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N_1+1}^{N} v_n \geqslant \sum_{n=0}^{N_1} u_n.$$

Ainsi, on a :

$$\forall N \geqslant N_2, \quad \sum_{n=0}^{N} u_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N_1+1}^{N} v_n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N_1+1}^{N} v_n = \varepsilon \sum_{n=N_1+1}^{N} v_n \leqslant \varepsilon \sum_{n=0}^{N} v_n,$$

la dernière inégalité provenant du fait que les v_n sont positifs. On a donc bien vérifié que

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \underset{N\to+\infty}{=} o\left(\sum_{n=0}^{N} v_n\right).$$

3. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors on a

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n$$

si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ (qui sont de même nature) convergent, et

$$\sum_{n=0}^{N} u_n \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{N} v_n$$

si elles divergent.

Pour démontrer ces faits, on pourrait s'inspirer des preuves données dans les deux questions précédentes, mais il est plus rapide d'en utiliser directement les résultats comme nous allons le faire.

Supposons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et écrivons $v_n = (1+\varepsilon_n)u_n$ pour une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Alors pour tout $N \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (1+\varepsilon_n)u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \varepsilon_n u_n,$$

la convergence de la série de terme général $\varepsilon_n u_n$ étant assurée par le fait que $\varepsilon_n u_n = o(u_n)$ (et par la positivité de u_n) lorsque $n \to +\infty$. Mais ce fait implique aussi, d'après la question 1, que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \varepsilon_n u_n \underset{N\to+\infty}{=} o\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right),$$

d'où

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n + o\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n,$$

ce qui établit le premier point.

Supposons à présent que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N}(1+\varepsilon_n)u_n = \sum_{n=0}^{N} u_n + \sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n u_n,$$

mais

$$\sum_{n=0}^{N} \varepsilon_n u_n \underset{N\to+\infty}{=} o\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right)$$

d'après la question 2, donc

$$\sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{N} u_n + o\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right) \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{N} u_n,$$

d'où le deuxième point.

Correction de l'exercice 30. Avant le début la correction de l'exercice, nous vous invitons à vous munir d'un papier quadrillé et à y représenter l'ensemble $\mathbb{N}^2$. La grande majorité des raisonnements de cet exercice reposent sur des sommations sur différentes parties de $\mathbb{N}^2$ dont il peut être bon d'avoir une représentation graphique.

1. (a) La série des B_n est une suite croissante de limite S, donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$\sum_{n=0}^{N_0} B_n \geqslant S - \frac{\varepsilon}{2},$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{n=0}^{N_0} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} \geqslant S - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par linéarité de la somme des séries convergentes, on obtient donc

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N_0} u_{m,n} \geqslant S - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{soit} \quad \lim_{N\to+\infty} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N_0} u_{m,n} \geqslant S - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $S - \frac{\varepsilon}{2} > S - \varepsilon$, il existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_0} u_{m,n} \geqslant S - \varepsilon.$$

Considérons à présent $N := \max(N_0, N_1)$; les $u_{m,n}$ étant positifs, on a

$$\sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} u_{m,n} \geqslant \sum_{m=0}^{N_1}\sum_{n=0}^{N_0} u_{m,n} \geqslant S - \varepsilon,$$

d'où le résultat à établir.

(b) Comme les $u_{m,n}$ sont positifs, on a $A_m \geqslant \sum_{n=0}^{N} u_{m,n}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, d'où

$$\sum_{m=0}^{+\infty} A_m \geqslant \sum_{m=0}^{N} A_m \geqslant \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} u_{m,n} \geqslant S - \varepsilon.$$

Cette relation étant valide quel que soit $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} A_m \geqslant S.$$

(c) Pour conclure, il nous reste à montrer que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} A_m \leqslant S.$$

Or pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{m=0}^{N} A_m = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{m=0}^{N} u_{m,n}$$

par linéarité de la somme des séries convergentes, et $\sum_{m=0}^{N} u_{m,n} \leqslant \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} = B_n$ pour tout n puisque les $u_{m,n}$ sont positifs, d'où

$$\sum_{m=0}^{N} A_m \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} B_n = S.$$

En passant à la limite lorsque $N \to +\infty$, on obtient donc

$$\sum_{m=0}^{+\infty} A_m \leqslant S,$$

ce qui, grâce à la question précédente, permet d'établir que

$$\sum_{m=0}^{+\infty} A_m = S = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n$$

et clôt la preuve du théorème dans le cas considéré.

2. (a) La série des B_n divergeant vers $+\infty$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=0}^{N_0} B_n \geqslant M+1$, soit

$$\sum_{n=0}^{N_0} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} \geqslant M+1, \quad \text{soit encore} \quad \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N_0} u_{m,n} \geqslant M+1$$

par linéarité de la somme des séries convergentes. On a donc

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N_0} u_{m,n} \geqslant M+1,$$

or $M+1 > M$ donc il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_0} u_{m,n} \geqslant M.$$

En posant $N := \max(N_0, N_1)$, on a grâce à la positivité des $u_{m,n}$:

$$\sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} u_{m,n} \geqslant \sum_{m=0}^{N_1} \sum_{n=0}^{N_0} u_{m,n} \geqslant M.$$

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $A_m \geqslant \sum_{n=0}^{N} u_{m,n}$ par positivité des $u_{m,n}$, d'où, comme les A_m sont positifs :

$$\sum_{m=0}^{+\infty} A_m \geqslant \sum_{m=0}^{N} A_m \geqslant \sum_{m=0}^{N} \sum_{n=0}^{N} u_{m,n} \geqslant M.$$

(c) On a montré que $\sum_{m=0}^{+\infty} A_m \geqslant M$ quel que soit $M \geqslant 0$; ainsi, on a

$$\sum_{m=0}^{+\infty} A_m = +\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n,$$

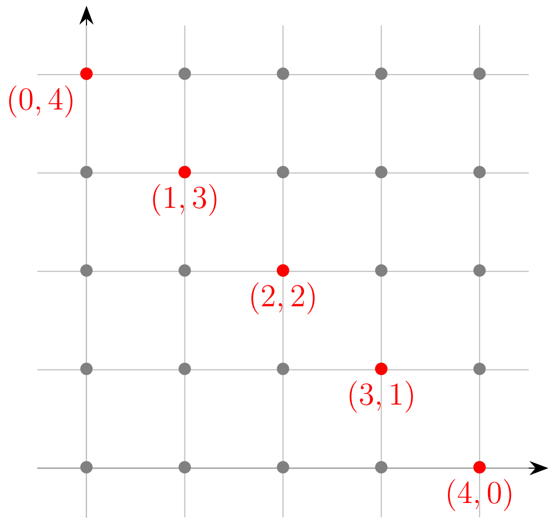
ce qui achève la preuve du théorème.

3. L'égalité entre les deux derniers termes est évidente puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, les expressions

$$\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N} \\ i+j=n}} u_{i,j} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}$$

ne sont que deux écritures différentes d'une même somme.

Pour comprendre la suite de la preuve, il est important de remarquer que cette somme porte sur tous les couples d'entiers (i, j) situés sur un segment diagonal du plan (déjà croisé dans le point de cours sur l'équipotence au moment d'établir la dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$) :

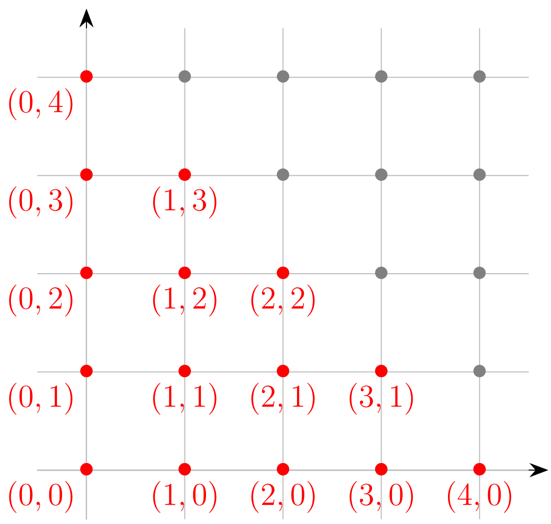


Représentation des couples d'indices sur lesquels est calculée la somme $\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=4}} u_{i,j}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose à présent

$$S_N := \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j\leqslant N}} u_{i,j}, = \sum_{n=0}^{N} \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=n}} u_{i,j}$$

qui représente la somme des $u_{i,j}$ sur l'ensemble des couples d'indices appartenant au triangle de sommets $(0,0)$, $(0,N)$ et $(N,0)$:



Représentation des couples d'indices sur lesquels est calculée la somme S_4.

Or ce triangle est inclus dans le carré $[\![0,N]\!]^2$, qui est lui-même contenu dans le triangle[7] $\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \,:\, i+j=2N\}$, donc on a

$$S_N \leqslant \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{i,j} \leqslant S_{2N}$$

7. Dessinez ces figures pour vous en convaincre !

puisque les $u_{i,j}$ sont positifs.

La suite $(S_N)_{n\in\mathbb{N}}$ est en fait la série de terme général positif $\displaystyle\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=n}} u_{i,j}$ (dépendant de n). On veut montrer que sa somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=n}} u_{i,j} = \lim_{N\to+\infty} S_N,$$

finie ou infinie, est égale à $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$.

De l'encadrement

$$S_N \leqslant \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} u_{i,j} \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$$

valable pour tout $N \in \mathbb{N}$ (la dernière inégalité étant une fois encore assurée par la positivité des $u_{i,j}$), on déduit par passage à la limite que

$$\lim_{N\to+\infty} S_N \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}.$$

On va établir l'inégalité inverse, ce qui permettra de conclure.

Supposons tout d'abord que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j}$ soit finie et notons-la S comme dans la question 1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe d'après la question 1(a) un $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{N'}\sum_{j=0}^{N'} u_{i,j} \geqslant S - \varepsilon$. On a donc

$$S_{2N'} \geqslant \sum_{i=0}^{N'}\sum_{j=0}^{N'} u_{m,n} \geqslant S - \varepsilon,$$

d'où, en utilisant la croissance de la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{N\to+\infty} S_N \geqslant S_{2N'} \geqslant S - \varepsilon.$$

Cette relation étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N \geqslant S$, or on a déjà montré que $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N \leqslant S$, donc

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = S = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Envisageons maintenant le cas où $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = +\infty$. Pour tout $A \geqslant 0$, il existe d'après la question 2(a) un $N' \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=0}^{N'}\sum_{j=0}^{N'} u_{i,j} \geqslant A$; on a alors

$$S_{2N'} \geqslant \sum_{i=0}^{N'}\sum_{j=0}^{N'} u_{i,j} \geqslant A,$$

d'où, en utilisant la croissance de la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{N\to+\infty} S_N \geqslant S_{2N'} \geqslant A.$$

Cette relation étant valable pour tout $A \geqslant 0$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} S_N = +\infty = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j},$$

ce qui achève d'établir le résultat attendu.

4. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $\frac{1}{mn(m+n)}$ converge par comparaison des séries à termes positifs puisque $\dfrac{1}{mn(m+n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{mn^2}$ et puisque la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge comme série de Riemann de paramètre $2 > 1$. Par symétrie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série de terme général $\frac{1}{mn(m+n)}$ converge elle aussi. On peut donc considérer[8] la somme double proposée, et le résultat de la question 3 (adapté à une indexation sur $(\mathbb{N}^*)^2$) donne

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{mn(m+n)} &= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}^*\\ i+j=n}}\frac{1}{ij(i+j)}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)n}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right) \quad \text{car} \quad \frac{1}{k}+\frac{1}{n-k} = \frac{n}{k(n-k)}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n-k}\right) \quad \text{par linéarité}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k'=1}^{n-1}\frac{1}{k'}\right) \quad \text{en posant } k' = n-k\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2H_{n-1}}{n^2},
\end{aligned}$$

où

$$H_{n-1} := \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

est la somme partielle de la série harmonique introduite dans l'énoncé. Or lorsque $n \to +\infty$, on peut écrire grâce à l'équivalent donné dans l'énoncé et au théorème de croissance comparée que

$$\frac{2H_{n-1}}{n^2} \sim \frac{2\ln(n-1)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right),$$

8. Répétons-le : vérifier la convergence des séries comme nous venons de le faire avant d'utiliser le théorème de Fubini est un scrupule qui, en réalité, n'est pas nécessaire si l'on accepte l'idée selon laquelle une somme de termes positifs contenant au moins un terme infini est elle-même infinie.

mais la série de terme général $\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge en tant que série de Riemann de paramètre $\frac{3}{2} > 1$, donc la série de terme général $\frac{2H_{n-1}}{n^2}$ converge. Ainsi, la somme

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{mn(m+n)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2H_{n-1}}{n^2}$$

est finie, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 31.

1. Si $x = 0$, la convergence de la série est évidente. Si $x \neq 0$, on a

$$\frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|x|^k}{k!}} = \frac{|x|}{k+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

donc le critère de D'Alembert montre que la série de terme général strictement positif $\frac{|x|^k}{k!}$ converge. Ainsi, la série de terme général $\frac{x^k}{k!}$ converge absolument, donc elle converge.

2. Établissons tout d'abord l'inégalité donnée en indication. Si $a \in \mathbb{R}$ et si $x \in [a-1, a+1]$, on a $|x| \leqslant |a| + 1$ et la formule de Bernoulli permet d'écrire, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} |x^k - a^k| &= \left| (x-a) \sum_{i=0}^{k-1} x^i a^{k-1-i} \right| \\ &= |x-a| \sum_{i=0}^{k-1} |x|^i |a|^{k-1-i} \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &\leqslant |x-a| \sum_{i=0}^{k-1} (|a|+1)^i (|a|+1)^{k-1-i} \\ &= |x-a| \sum_{i=0}^{k-1} (|a|+1)^{k-1} = k(|a|+1)^{k-1} |x-a|, \end{aligned}$$

d'où la majoration annoncée.

On peut à présent écrire que pour tout $x \in [a-1, a+1]$, on a

$$|f(x) - f(a)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k - a^k}{k!} \right|$$

par linéarité de la somme des séries convergentes d'où, d'après l'inégalité triangulaire et l'inégalité que nous venons d'établir :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &\leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x^k - a^k|}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x^k - a^k|}{k!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(|a|+1)^{k-1}}{k!}|x-a| \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(|a|+1)^{k-1}}{(k-1)!}|x-a| \\
&= \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(|a|+1)^{i}}{i!}|x-a| \quad \text{en posant } i=k-1 \\
&= f(|a|+1)\cdot|x-a|.
\end{aligned}$$

Or $f(|a|+1)\cdot|x-a| \xrightarrow[x\to a]{} 0$, donc $|f(x)-f(a)| \xrightarrow[x\to a]{} 0$ par comparaison, si bien que f est continue en a. Comme a a été choisi quelconque dans $\mathbb{R}$, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. La somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=n}} \frac{a^i}{i!}\frac{b^j}{j!}$ porte sur tous les couples d'indices situés sur les segments diagonaux $\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \ : \ i+j=n\}$ (voir l'exercice précédent) ; ces segments réalisant une partition de $\mathbb{N}^2$, la somme porte sur tous les couples de $\mathbb{N}^2$. À des considérations de convergence près[9], il semble donc raisonnable qu'elle soit égale à la somme double des mêmes termes effectuée « en ligne (infinie) puis en colonne (infinie) », qui vaut

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a^i}{i!}\frac{b^j}{j!}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{a^i}{i!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{b^j}{j!}\right) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{b^j}{j!}\right).$$

On admet donc cette égalité[10], qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}
f(a)f(b) &= \left(\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{a^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{b^j}{j!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}\\ i+j=n}}\frac{a^i}{i!}\frac{b^j}{j!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!}
\end{aligned}$$

9. Le théorème de Fubini et le résultat de sommation diagonale de l'exercice précédent peuvent être utilisés pour établir la convergence absolue des séries concernées, ce qui implique leur convergence et permet de démontrer rigoureusement l'égalité que nous admettons ici.

10. On a plus généralement l'identité suivante, valable dès lors que deux séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont absolument convergentes :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty}u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}v_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{\substack{(i,j)\in\mathbb{N}^2\\ i+j=n}} u_i v_j = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}.$$

La série de terme général $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}$ dont la somme apparaît ci-dessus est appelée *produit de Cauchy* des deux séries.

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (a+b)^n \quad \text{d'après la formule du binôme} \\
&= f(a+b),
\end{aligned}
$$

d'où la relation (propriété de morphisme) à justifier.

4. On a montré dans la question 2 que f vérifie (P1). Il est clair que f vérifie (P2) puisque e est défini comme $f(1)$. Enfin, on a montré dans la question 3 que f vérifie (P3). On a donc établi l'existence de la fonction exponentielle f.
5. (a) On démontre la proposition par récurrence sur $n \geqslant 0$.

   Montrons tout d'abord que $g(0) = f(0)$. On a $g(1) = g(0+1) = g(0)g(1)$ soit $e = g(0)e$ puisque g vérifie (P2), d'où, en divisant par $e \neq 0$, l'égalité $g(0) = 1$. Par le même raisonnement, on obtient $f(0) = 1$, d'où $f(0) = g(0)$; ainsi, la propriété à démontrer est vraie au rang $n = 0$.

   Soit à présent $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang n ; on a alors $f(n) = g(n)$. Or $f(n+1) = f(n)f(1) = ef(n)$ et $g(n+1) = g(n)g(1) = eg(n)$ d'après (P3) et (P2), donc $f(n+1) = ef(n) = eg(n) = g(n+1)$ par l'hypothèse de récurrence. Ainsi, la propriété à démontrer est vraie au rang $n+1$.

   On a donc $f(n) = g(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

   (b) Si $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n)f(-n) = f(0) = 1$, donc $f(-n) = f(n)^{-1}$, et $g(-n) = g(n)^{-1}$ par la même démonstration, or $f(n) = g(n)$ d'après la question précédente, donc $f(-n) = g(-n)$.

   (c) D'après les deux questions précédentes, f et g coïncident sur $\mathbb{Z}$. On montre par ailleurs par une récurrence facile sur $q \in \mathbb{N}$ que $f(qx) = f(x)^q$ et $g(qx) = g(x)^q$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $q \in \mathbb{N}$. On montre aussi que f est positive en écrivant $f(x) = f\left(\frac{x}{2} \cdot 2\right) = f\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et de même pour g.

   Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a

   $$\left(f\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q = f(p) = g(p) = \left(g\left(\frac{p}{q}\right)\right)^q,$$

   où l'égalité centrale résulte du fait que f et g coïncident sur $\mathbb{Z}$. En passant à la racine q-ième, ce qui est possible du fait de la positivité de f et g, on obtient donc

   $$f\left(\frac{p}{q}\right) = g\left(\frac{p}{q}\right),$$

   ce qui montre que f et g coïncident sur $\mathbb{Q}$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers x. Par continuité de f et g, on a

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n) = g(x),$$

où l'égalité centrale est assurée par le fait que f et g coïncident sur $\mathbb{Q}$. Ainsi, f et g coïncident sur $\mathbb{R}$, donc $f = g$.

Il y a donc bien unicité de la fonction vérifiant les conditions (P1) à (P3).

6. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\exp(x)-1}{x} - 1\right| &= \left|\frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} - 1\right) - 1\right| \\
&= \left|\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} - 1\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^{k-1}}{k!} - 1\right| \\
&= \left|\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{x^{k-1}}{k!}\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{x^{i}}{(i+1)!}\right| \quad \text{en posant } i = k-1 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{|x|^{i}}{(i+1)!} \quad \text{par l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{+\infty}\frac{|x|^{i}}{i!} \\
&= \exp(|x|) - 1,
\end{aligned}$$

or $\exp(|x|) - 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ en raison de la continuité de exp en 0, donc

$$\left|\frac{\exp(x)-1}{x} - 1\right| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

par comparaison, ce qui montre que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = 1.$$

Correction de l'exercice 32.

1. Démontrons la propriété par récurrence sur n. Elle est évidente si $n = 0$ puisqu'elle se réécrit alors sous la forme suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = 1 - \int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t,$$

ce qui se vérifie en calculant l'intégrale

$$\int_0^x \sin(t)\mathrm{d}t = [-\cos(t)]_0^x = 1 - \cos(x).$$

Soit à présent $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété à démontrer vraie au rang n. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\mathrm{d}t.$$

Fixons à présent x, puis réalisons une double intégration par parties pour réécrire l'intégrale qui apparaît dans le terme de droite, en primitivant deux fois la fonction continue $t \mapsto \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}$ et en dérivant deux fois la fonction sin de classe $\mathcal{C}^2$: on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\mathrm{d}t &= \left[-\sin(t)\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]_0^x \\
&\quad - \left[\cos(t)\frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}\right]_0^x - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(t)\mathrm{d}t \\
&= -0 + 0 - 0 + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

d'où, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \\
&\quad - (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} \sin(t)\mathrm{d}t \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{n+2} \int_0^x \frac{(x-t)^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} \sin(t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

d'où la proposition à démontrer au rang $n+1$.

Ainsi, la proposition à établir est vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$ par le principe de récurrence.

2. Soit $x \geqslant 0$. L'inégalité triangulaire permet d'écrire que

$$\begin{aligned}
\left|(-1)^{n+1} \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!} \sin(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^x \frac{|x-t|^{2n}}{(2n)!} |\sin(t)|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]_0^x \\
&= \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \text{par croissance comparée [11]},
\end{aligned}$$

d'où

$$(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n}}{(2n)!}\sin(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'après le théorème des gendarmes. En passant à la limite lorsque $n \to +\infty$ dans l'égalité démontrée dans la question précédente, on obtient donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos(x),$$

d'où la convergence de la série de terme général $\frac{x^{2k}}{(2k)!}$ et la relation

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Le résultat pour $x \leqslant 0$ provient du même raisonnement adapté à l'intervalle $[x, 0]$ (ce qui intervertit seulement les bornes de l'intégrale après l'application de l'inégalité triangulaire), mais on peut aussi appliquer l'égalité que l'on vient de démontrer à $-x$ et écrire, par parité de cos :

$$\cos(x) = \cos(-x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

3. La démonstration par récurrence de l'égalité proposée (grâce à une double intégration par parties pour assurer l'hérédité de la proposition) est similaire à celle de la question 1 et laissée au lecteur. Si $x \geqslant 0$, la majoration

$$\begin{aligned}\left|(-1)^{n+1}\int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos(t)\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_0^x \frac{|x-t|^{2n+1}}{(2n+1)!}|\cos(t)|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!}\right]_0^x \\ &= \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

amène l'égalité

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

que l'on démontre aussi pour $x \leqslant 0$ en adaptant le raisonnement ci-dessus ou par imparité des deux termes de l'égalité.

11. Il s'agit du résultat de croissance comparée sur les factorielles donné par le lemme 15 du cours.

4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. En séparant les termes d'indice pair et d'indice impair dans la somme définissant $e^{i\theta}$, on obtient

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} i^k \frac{\theta^k}{k!} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{+\infty} i^k \frac{\theta^k}{k!} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{+\infty} i^k \frac{\theta^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} i^{2k} \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} i^{2k+1} \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos(\theta) + i \sin(\theta)
\end{aligned}$$

d'après les questions 2 et 3, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 33.

1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$S_{2(N+1)} - S_{2N} = u_{2N+2} - u_{2N+1} \leqslant 0$$

puisque $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante, et

$$S_{2(N+1)+1} - S_{2N+1} = u_{2N+2} - u_{2N+3} \geqslant 0$$

pour la même raison, si bien que $(S_{2N})_{N \geqslant 0}$ est décroissante et $(S_{2N+1})_{N \geqslant 0}$ est croissante.

On a par ailleurs

$$S_{2N} - S_{2N+1} = u_{2N+1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0,$$

donc $(S_{2N})_{N \geqslant 0}$ et $(S_{2N+1})_{N \geqslant 0}$ sont adjacentes.

2. D'après le théorème des suites adjacentes, $(S_{2_N})_{N \geqslant 0}$ et $(S_{2_N+1})_{N \geqslant 0}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. C'est donc le cas de la suite $(S_N)_{N \geqslant 0}$, c'est-à-dire que la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

3. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $R_{2N} = \ell - S_{2N}$ est négatif puisque ℓ est la limite de la suite décroissante $(S_{2N})_{N \geqslant 0}$, et $R_{2N+1} = \ell - S_{2N+1}$ est positif puisque ℓ est la limite de la suite croissante $(S_{2N+1})_{N \geqslant 0}$. Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}$, R_N est du signe de $(-1)^{N+1}$.

Par ailleurs, pour tout $N \in \mathbb{N}$, la limite ℓ est comprise entre les deux termes successifs S_N et S_{N+1} (puisque l'un des deux est supérieur à ℓ et l'autre inférieur à ℓ), donc

$$|S_N - \ell| \leqslant |S_N - S_{N+1}|,$$

soit
$$|R_N| \leqslant |u_{N+1}|,$$
ce qu'il fallait démontrer.

4. (a) La série des $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ satisfait l'hypothèse du théorème des séries alternées puisque $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\geqslant 1}$ est positive, décroissante et de limite nulle. Ainsi, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

   On a par ailleurs
$$\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right),$$
   donc
$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$
   Or la série $\sum \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum \frac{1}{n}$ diverge comme somme d'une série convergente et de la série harmonique divergente. Ainsi, les séries de termes généraux équivalents $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ne sont pas de même nature.

   (b) Le résultat que nous venons d'établir contredirait le résultat de comparaison par équivalence (proposition 19 du cours) si les séries étaient à termes positifs ; or ce n'est pas le cas ici ! Cet exemple ne contredit donc (heureusement) aucun théorème du cours.

   Il s'agit du contre-exemple canonique permettant de montrer que l'hypothèse de positivité est nécessaire à la validité du principe selon lequel deux séries de termes généraux équivalents sont de même nature.

Correction de l'exercice 34.

1. Lorsque $x = 1{,}5629$, on a $d_0 = 1$,
$$d_1 = \lfloor 10(x-1) \rfloor = \lfloor 5{,}629 \rfloor = 5,$$
   ,
$$d_2 = \lfloor 100(x-1{,}5) \rfloor = \lfloor 6{,}29 \rfloor = 6,$$
$$d_3 = \lfloor 1000(x-1{,}56) \rfloor = \lfloor 2,9 \rfloor = 2,$$
$$d_4 = \lfloor 10000(x-1{,}562) \rfloor = \lfloor 9 \rfloor = 9,$$
   et $d_n = 0$ pour tout $n \geqslant 5$.

   Si $x = \pi \approx 3{,}141592...$, on a $d_0 = 3$,
$$d_1 = \lfloor 10(\pi-3) \rfloor = 1, \quad d_2 = \lfloor 100(\pi-3{,}1) \rfloor = 4,$$
$$d_3 = \lfloor 1000(\pi-3{,}14) \rfloor = 1, \quad d_4 = \lfloor 10000(\pi-3{,}141) \rfloor = 5$$
   et ainsi de suite.

   Pour tout $n \geqslant 1$, il semble donc raisonnable d'affirmer que d_n est « la n-ième décimale de x », à supposer que cette notion ait un sens pour tout réel x (ce que cet exercice se propose d'étudier).

2. La proposition attendue est vraie pour $n = 0$ puisque $d_0 \leqslant x < d_0 + 1$ par définition de $d_0 := \lfloor x \rfloor$.

   À présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

   $$d_{n+1} \leqslant 10^{n+1}\left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}\right) < d_{n+1} + 1$$

   par définition de la partie entière, d'où

   $$\frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} \leqslant x - \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} < \frac{d_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

   soit

   $$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{d_k}{10^k} \leqslant x < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^{n+1}},$$

   ce qui montre que la propriété à démontrer est vraie au rang $n + 1$.

   Ainsi, la propriété est vraie au rang 0 et à tout rang supérieur ou égal à 1, ce qui clôt la preuve.

3. En réécrivant l'inégalité démontrée dans la question précédente sous la forme :

   $$\forall n \geqslant 0, \quad x - \frac{1}{10^n} < \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} \leqslant x,$$

   on obtient par le théorème de gendarmes que $\sum \frac{d_k}{10^k}$ converge et que

   $$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k}.$$

4. Si $x \in \mathbb{R}$ est tel que $d_0 = 0$ et $d_n = 9$ pour tout $n \geqslant 1$, on a

   $$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1.$$

   Or on a dans ce cas $d_0 = \lfloor x \rfloor = 1$, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

   Ainsi, 0,999999... n'est pas une écriture que l'on peut obtenir par le procédé décrit dans l'énoncé ; en revanche, si l'on accepte l'idée selon laquelle une telle suite de décimales décrit nécessairement un nombre réel [12], elle décrit nécessairement le nombre

   $$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{d_k}{10^k} = 1,$$

   dont elle est appelée *développement décimal impropre*.

---

12. Cette idée est conforme à la définition très vague que nous avons donnée d'un nombre réel au début du chapitre 3 !

5. Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé. Comme la suite $(d'_k)_{k\geqslant 1}$ ne stationne pas à 9 (et prend donc une infinité de valeurs strictement inférieures à 9), pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{d'_k}{10^k} < \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = \frac{1}{10^n}.$$

Démontrons à présent par récurrence forte que $d_n = d'_n$ pour tout $n \geqslant 0$. On a

$$d'_0 \leqslant x \leqslant d'_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{d'_k}{10^k} < d'_0 + 1$$

d'après l'inégalité que nous venons d'établir (pour $n = 0$), donc $\lfloor x \rfloor = d'_0$, soit $d_0 = d'_0$. À présent, fixons $n \geqslant 0$ et supposons que $d_k = d'_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. On a alors

$$x - \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k} = x - \sum_{k=0}^{n} \frac{d'_k}{10^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{d'_k}{10^k},$$

donc

$$10^{n+1}\left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}\right) = d'_{n+1} + 10^{n+1} \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{d'_k}{10^k},$$

or

$$0 \leqslant 10^{n+1} \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{d'_k}{10^k} < 10^{n+1} \cdot \frac{1}{10^{n+1}} = 1$$

d'après l'inégalité démontrée au début de cette question, donc

$$d_{n+1} := \left\lfloor 10^{n+1}\left(x - \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{10^k}\right) \right\rfloor = d'_{n+1}.$$

La propriété à démontrer est donc vraie au rang $n + 1$.

Ainsi, on a $d_n = d'_n$ pour tout $n \geqslant 0$ d'après le principe de récurrence.

6. D'après le résultat de la question 4, le résultat n'est pas valable sans l'hypothèse selon laquelle $(d'_n)_{n\geqslant 1}$ ne stationne pas à 9 : on a par exemple

$$1 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{0}{10^k} = 1 = 0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k},$$

donc l'égalité a lieu lorsque $d_0 = 1$, $d'_0 = 0$ ainsi que $d_n = 0$ et $d'_n = 9$ pour tout $n \geqslant 1$.