Logique et ensembles

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 11. La proposition se réécrit « $1 < x$ et $x < 2$ et $2 \leqslant y$ » ; sa négation est donc « $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 2$ ou $2 > y$ ».

Correction de l'exercice 12. On procède par double implication [1].

Supposons que n soit pair. On peut alors écrire $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. Mais alors $n^2 = (2k)^2 = 4k^2$, or k^2 est un entier donc n^2 est multiple de 4.

Démontrons à présent l'implication réciproque, c'est-à-dire l'implication

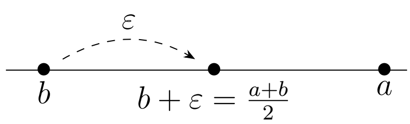
$$n^2 \text{ est multiple de } 4 \quad \Longrightarrow n \text{ est pair.}$$

On raisonne pour cela par contraposée : on suppose donc que n est impair et on souhaite montrer que n^2 n'est pas multiple de 4. Mais le fait que n soit impair implique que n^2 est impair, donc n'est pas multiple de 4 : l'implication est donc bien établie, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 13. Supposons que la négation de la relation $a \leqslant b$ est vraie, c'est-à-dire que $a > b$. On veut montrer que la négation de la proposition

$$\forall \varepsilon > 0, \quad a < b + \varepsilon$$

est vérifiée, c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $a \geqslant b + \varepsilon$. Pour cela, il suffit de visualiser les positions relatives de a et b. En choisissant par exemple $\varepsilon > 0$ tel que $b + \varepsilon$ soit le milieu de a et b, c'est-à-dire tel que $b + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$, on a alors $a \geqslant b + \varepsilon$ (puisque $a > b$), si bien que la négation attendue est démontrée :



Correction de l'exercice 14. On calcule successivement

$$u_0 = 5, \quad u_1 = \frac{1}{5-2} + 2 = \frac{7}{3}, \quad u_2 = \frac{1}{\frac{7}{3} - 2} + 2 = \frac{1}{1/3} + 2 = 5, \quad u_3 = \frac{7}{3}, \quad \text{etc.}$$

On conjecture donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 5$ si n est pair, et $u_n = \frac{7}{3}$ si n est impair.

Démontrons cette proposition par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« } u_n \text{ vaut 5 si } n \text{ est pair et } \frac{7}{3} \text{ si } n \text{ est impair ».}$$

1. La stratégie de preuve appliquée ici revient à démontrer l'équivalence $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ en établissant les implications $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et non$\mathcal{P} \Rightarrow$ non$\mathcal{Q}$.

Initialisation :
La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie car 0 est pair et on a bien $u_0 = 5$.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$; on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie.
Si $n+1$ est pair, alors n est impair donc $u_n = \frac{7}{3}$ d'après l'hypothèse de récurrence ; on a donc $u_{n+1} = \frac{1}{\frac{7}{3}-2} + 2 = 5$.
Si en revanche $n+1$ est impair, alors n est pair donc $u_n = 5$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où $u_{n+1} = \frac{1}{5-2} + 2 = \frac{7}{3}$.
On a donc bien démontré la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.

Conclusion :
La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc établie à tout rang $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 15.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathcal{P}_n \ : \quad « \ 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ».$$

Initialisation :

La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie car $1^2 = 1$ et $\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6} = 1$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right) \\
&= (n+1)\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \\
&= (n+1)\cdot\frac{2n^2+7n+6}{6} \\
&= (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6},
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion :

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc établie à tout rang $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathcal{P}_n \ : \quad « \ 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \ ».$$

Initialisation :
La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie car $1^3 = 1$ et $\frac{1^2\cdot(1+1)^2}{4} = 1$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on suppose $\mathcal{P}_n$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad \text{par l'hypothèse de récurrence} \\
&= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\
&= (n+1)^2 \cdot \frac{n^2+4n+4}{4} \\
&= (n+1)^2 \cdot \frac{(n+2)^2}{4} \\
&= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4},
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion :

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc établie à tout rang $n \in \mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose [2]

$$\mathcal{P}_n : \quad « \, 0 \leqslant u_n \leqslant 2 \, ».$$

Initialisation :
La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie car $0 \leqslant u_0 = 0 \leqslant 2$.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_n \leqslant 2$. Alors $1 \leqslant 1 + u_n \leqslant 2$ donc, par passage à l'inverse dans cette inégalité entre nombres strictement positifs :

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{1+u_n} \leqslant 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{3}{2} \leqslant 1 + \frac{1}{1+u_n} \leqslant 2, \quad \text{soit} \quad \frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2.$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion :
La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

2. La proposition démontrée est plus précise que celle attendue par l'énoncé. Cette modification provient de l'étape de recherche préliminaire à la rédaction de la récurrence : en effet, dans la preuve que nous proposons, il est nécessaire que $1 + u_n$ soit strictement positif pour pouvoir passer à l'inverse dans l'inégalité $1 + u_n \leqslant 2$. On prend donc l'initiative d'ajouter la condition $u_n \geqslant 0$ à l'hypothèse de récurrence – notons que l'on aurait pu se contenter de la condition $u_n > -1$.

Correction de l'exercice 17. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« } \forall x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}, \quad (1+x)^n > 1 + nx \text{ ».}$$

Initialisation :
La proposition $\mathcal{P}_2$ est vraie : en effet, si $x\,]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ alors

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$$

car $x^2 > 0$.

Hérédité :
Fixons à présent $n \geqslant 2$ et supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie. On se donne un réel $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$. Comme $1 + x > 0$ et comme $(1+x)^n > 1 + nx$ d'après l'hypothèse de récurrence, on peut écrire

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n > (1+x)(1+nx),$$

soit

$$(1+x)^{n+1} > 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2.$$

Or $nx^2 \geqslant 0$, donc $1 + (n+1)x + nx^2 > 1 + (n+1)x$, d'où $(1+x)^{n+1} > 1 + (n+1)x$, ce qui signifie que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion :
La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc vraie à tout rang $n \geqslant 2$ par le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« } u_n = 3^n + 1 \text{ ».}$$

Initialisation :
Les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies car $u_0 = 2 = 3^0 + 1$ et $u_1 = 4 = 3^1 + 1$.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies, c'est-à-dire que $u_n = 3^n + 1$ et $u_{n+1} = 3^{n+1} + 1$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 4u_{n+1} - 3u_n = 4(3^{n+1} + 1) - 3(3^n + 1) \\ &= 4 \cdot 3^{n+1} + 4 - 3^{n+1} - 3 = 3 \cdot 3^{n+1} + 1 \\ &= 3^{n+2} + 1. \end{aligned}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+2}$ est donc vraie.

Conclusion :
La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 19. Pour tout $n \geqslant 1$, on définit

$$\mathcal{P}_n \ : \quad \text{« } u_n \leqslant 2 \text{ »}.$$

Initialisation :

La proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie car $u_1 = 1 \leqslant 2$.

Hérédité :

Soit $n \geqslant 1$. On suppose que $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, ..., $\mathcal{P}_n$ sont vraies, c'est-à-dire que $u_k \leqslant 2$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1 + \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{2n} \\ &\leqslant 1 + \frac{2 + 2 + \cdots + 2}{2n} \quad \text{d'après les hypothèses de récurrence} \\ &= 1 + \frac{2n}{2n} = 2. \end{aligned}$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion :

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie à tout rang $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 20. On suit l'indication de l'énoncé et on raisonne par analyse-synthèse.

Analyse :

Supposons qu'il existe g, a et b vérifiant les conditions de l'énoncé. On a alors $f(0) = g(0) + a \cdot 0 + b = b$ et $f(1) = g(1) + a \cdot 1 + b = a + b$. Ainsi, $b = f(0)$ et $a = a + b - b = f(1) - f(0)$. On a donc $g(x) = f(x) - (ax + b) = f(x) - (f(1) - f(0))x - f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui prouve l'unicité de g, a et b sous réserve d'existence.

Synthèse :

Posons $a = f(1) - f(0)$, $b = f(0)$ et $g(x) = f(x) - (f(1) - f(0))x - f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc $g(0) = f(0) - f(0) = 0$ et $g(1) = f(1) - (f(1) - f(0)) - f(0) = 0$, donc g, a et b vérifient bien les conditions de l'énoncé.

Ainsi, il existe bien un unique triplet (g, a, b) vérifiant les conditions de l'énoncé.

Correction de l'exercice 21.

1. Un schéma suggère que si $A \cup B = A$, alors $B \subset A$.

   Pour démontrer ce résultat, supposons que $A \cup B = A$ et considérons $x \in B$. Comme x appartient à B, il appartient à B ou A, si bien que $x \in A \cup B$. Mais $A \cup B = A$, donc $x \in A$. On a donc montré que tout x appartenant à B appartient aussi à A, ce qui permet bien d'affirmer que $B \subset A$.

   On aurait aussi pu raisonner directement sur les ensembles et écrire que $B \subset A \cup B = A$ et donc $B \subset A$, ce qui est en fait exactement le même raisonnement !

2. Un schéma suggère cette fois que si $A \cap B = A$, alors $A \subset B$.

   On pourrait démontrer ce résultat en raisonnant sur les éléments de A comme dans la question précédente, mais il est plus rapide de raisonner directement sur les ensembles et d'écrire que si $A \cap B$, alors $A = A \cap B \subset B$ et donc $A \subset B$.
3. Faire un schéma est une fois encore utile : il suggère que si $A \cup B = A \cap B$, alors $A = B$.

   Pour démontrer ce résultat, supposons que $A \cup B = A \cap B$. On a alors d'une part $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$, d'où $A \subset B$, et d'autre part $B \subset A \cup B = A \cap B \subset A$, d'où $B \subset A$, et donc $A = B$.

Correction de l'exercice 22. Soient A et B deux parties de E. On pourrait démontrer l'égalité attendue par double inclusion, mais il est plus rapide de raisonner directement par équivalence en écrivant que si $x \in E$, alors

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ et } x \notin B \iff x \in A \text{ et } x \in \overline{B} \iff x \in A \cap \overline{B}.$$

Correction de l'exercice 23.

1. Démontrons la première égalité par double inclusion.

   Soit tout d'abord $x \in A \cap (B \cup C)$. Alors $x \in A$, et par ailleurs $x \in B \cup C$, c'est-à-dire que $x \in B$ ou $x \in C$. Ainsi, soit x appartient simultanément à A et à B, soit il appartient simultanément à A et à C (ces deux cas n'étant pas mutuellement exclusifs). On a donc $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$, donc dans tous les cas $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. On a donc montré l'inclusion directe $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

   Soit à présent $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Alors $x \in A \cap B$ ou bien $x \in A \cap C$, c'est-à-dire que x appartient ou bien à A et à B, ou bien à A et à C. Dans tous les cas, x appartient à A, et il appartient de plus soit à B soit à C, c'est-à-dire qu'il appartient à $B \cup C$. On a donc $x \in A \cap (B \cup C)$, ce qui achève de prouver l'inclusion réciproque $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$.

   Ainsi, on a bien établi l'égalité

   $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

   par double inclusion.

   Démontrons à présent la deuxième égalité.

   Soit tout d'abord $x \in A \cup (B \cap C)$. Alors $x \in A$ ou $x \in B \cap C$, et on considère séparément ces deux cas de figure :
   - Si $x \in A$, alors $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$, donc $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
   - Si $x \in B \cap C$, alors $x \in B$ donc $x \in A \cup B$, et $x \in C$ donc $x \in A \cup C$, d'où $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   Dans les deux cas, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, ce qui établit l'inclusion directe $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

   Démontrons l'inclusion réciproque en considérant $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Alors on a $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. On distingue alors deux cas de figure :

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cup (B \cap C)$.
- Si $x \notin A$, alors $x \in B$ et $x \in C$ puisque $x \in A \cup B$ et $x \in A \cup C$. Ainsi, $x \in B \cap C$, et donc $x \in A \cup (B \cap C)$.

Dans les deux cas, on a $x \in A \cup (B \cap C)$, ce qui achève de prouver l'inclusion $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

Ainsi, on a bien établi l'égalité

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

par double inclusion.

2. Démontrons la première égalité par double inclusion.

- Soit tout d'abord $x \in A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$.

  Alors $x \in A$, et par ailleurs $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$, c'est-à-dire qu'il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$. Ainsi, x appartient simultanément à A et à A_i, donc $x \in (A \cap A_i)$. Ainsi, il existe bien $i \in I$ tel que $x \in (A \cap A_i)$, d'où $x \in \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$.

  On a donc l'inclusion directe $A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \subset \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$.
- Soit à présent $x \in \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i)$. Alors il existe $i \in I$ tel que $x \in (A \cap A_i)$; on a donc d'une part $x \in A$, et d'autre part $x \in A_i$, donc $x \in \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$.

  Ainsi, on a $x \in A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$, ce qui établit l'inclusion réciproque

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \supset \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i).$$

Ainsi, on a bien l'égalité

$$A \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap A_i).$$

Démontrons à présent la deuxième égalité.

- Soit tout d'abord $x \in A \cup \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$.

  De deux choses l'une : soit $x \in A$, soit $x \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Dans le premier cas, on a $x \in A \cup A_i$ pour tout $i \in I$, soit $x \in \bigcap_{i \in I} (A \cup A_i)$. Dans le deuxième cas, pour tout $i \in I$ on a $x \in A_i$, donc $x \in A \cup A_i$: ainsi, x appartient à tous les $A \cup A_i$, donc $x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i)$.

La conclusion est la même dans les deux cas : on a $x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i)$, ce qui établit l'inclusion directe

$$A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i).$$

- Soit à présent $x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i)$. Si $x \in A$, on a bien sûr $x \in A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$. Supposons à présent que $x \notin A$. Pour tout $i \in I$, on sait que $x \in A \cup A_i$, donc $x \in A_i$ puisque $x \notin A$. Ainsi, x est dans tous les A_i, c'est-à-dire que $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, d'où $x \in A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$.

  Dans tous les cas, on a $x \in A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)$, d'où l'inclusion réciproque

$$A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \supset \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i).$$

Ainsi, on a bien établi l'égalité

$$A \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i).$$

Correction de l'exercice 24.

(*i*) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ est l'ensemble des réels qui ne sont pas des entiers positifs. Ainsi, la différence $\mathbb{Q}\setminus(\mathbb{R}\setminus\mathbb{N})$, qui est l'ensemble des rationnels qui ne sont pas dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$, est formée des nombres qui *sont* des entiers positifs : on a donc $\mathbb{Q} \setminus (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = \mathbb{N}$.

(*ii*) Chacun des ensembles $\left[0, 1 + \frac{1}{i}\right]$ est inclus dans le suivant (on dit que ces ensembles forment une *suite décroissante d'ensembles* ; le lecteur est invité à faire un dessin pour visualiser ce fait). Ainsi, l'intersection des n premiers de ces ensembles est égale au plus petit d'entre eux :

$$\bigcap_{i=1}^{n} \left[0, 1 + \frac{1}{i}\right] = \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right].$$

(*iii*) Chaque élément $\left\{x, -\frac{1}{x}\right\}$ de l'union lui apporte un élément strictement positif x et un élément strictement négatif $-\frac{1}{x}$. En séparant ces deux éléments, on voit que

$$\bigcup_{x\in\mathbb{R}_+^*} \left\{x, -\frac{1}{x}\right\} = \left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}_+^*} \{x\}\right) \cup \left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}_+^*} \left\{-\frac{1}{x}\right\}\right).$$

Or on a $\bigcup_{x\in\mathbb{R}_+^*} \{x\} = \mathbb{R}_+^*$ et chaque réel $y \in \mathbb{R}_-^*$ peut s'écrire sous la forme $-\frac{1}{x}$ avec $x := -\frac{1}{y} \in \mathbb{R}_+^*$, d'où l'égalité[3] $\bigcup_{x\in\mathbb{R}_+^*} \left\{-\dfrac{1}{x}\right\} = \mathbb{R}_-^*$, donc

$$\bigcup_{x\in\mathbb{R}_+^*} \left\{x, -\frac{1}{x}\right\} = \mathbb{R}_+^* \cup \mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}^*.$$

(*iv*) En utilisant la propriété de distributivité démontrée dans l'exercice 23, on trouve

$$\bigcup_{i=1}^{+\infty} (\mathbb{Q} \cap [i-1, i]) = \mathbb{Q} \cap \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} [i-1, i]\right) = \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+.$$

L'ensemble obtenu, parfois noté $\mathbb{Q}_+$, est donc l'ensemble des nombres rationnels positifs.

(*v*) Les unions mobilisées dans cette différence ont beau être impressionnantes, elles n'en sont pas moins identiques en vertu du caractère muet de l'indice. On a donc

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} \left[k, k+\frac{1}{k}\right]\right) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n} \left[j, j+\frac{1}{j}\right]\right) = \left(\bigcup_{k=1}^{n} \left[k, k+\frac{1}{k}\right]\right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n} \left[k, k+\frac{1}{k}\right]\right) = \varnothing.$$

Correction de l'exercice 25. En ordonnant les parties de $\{0, 1, 3\}$ par cardinal croissant (c'est-à-dire en considérant les parties de cardinal 0, 1, 2 puis 3), on trouve :

$$\mathcal{P}(\{0,1,3\}) = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,3\}, \{1,3\}, \{0,1,3\}\Big\}.$$

Correction de l'exercice 26. L'ensemble $\mathcal{P}(\{0,1\}) = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\Big\}$ contient 4 éléments. L'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{0,1\}))$ est constitué des éléments suivants :

$$\varnothing, \qquad \underbrace{\{\varnothing\}, \{\{0\}\}, \{\{1\}\}, \{\{0,1\}\}}_{\text{parties de cardinal 1}}$$

$$\underbrace{\Big\{\varnothing, \{0\}\Big\}, \Big\{\varnothing, \{1\}\Big\}, \Big\{\varnothing, \{0,1\}\Big\}, \Big\{\{0\}, \{1\}\Big\}, \Big\{\{0\}, \{0,1\}\Big\}, \Big\{\{1\}, \{0,1\}\Big\}}_{\text{parties de cardinal 2}},$$

$$\underbrace{\Big\{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\Big\}, \Big\{\varnothing, \{1\}, \{0,1\}\Big\}, \Big\{\varnothing, \{0\}, \{0,1\}\Big\}, \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}\Big\}}_{\text{parties de cardinal 3}}$$

et enfin

$$\underbrace{\Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\Big\}}_{\text{partie de cardinal 4}}.$$

3. Informellement, on dit que « $-\frac{1}{x}$ balaie $\mathbb{R}_-^*$ lorsque la variable x parcourt $\mathbb{R}_+^*$ ».

Correction de l'exercice 27. On note[4] E l'ensemble des élèves de la classe, G l'ensemble des germanistes et A l'ensemble des anglicistes. Les données de l'énoncé se traduisent de la façon suivante :

$$|E| = 50, \quad |A \cap G| = 25, \quad |E \setminus A| = 14 \quad \text{et} \quad |E \setminus (A \cup G)| = 4.$$

De la première et de la dernière donnée, on peut déduire l'égalité $|A \cup G| = 50 - 4 = 46$. Cette propriété se réécrit $|A| + |G| - |A \cap G| = 46$. Or $|A| = 50 - 14 = 36$ et $|A \cap G| = 25$, donc l'égalité obtenue donne $36 + |G| - 25 = 46$, soit $|G| = 35$.

Correction de l'exercice 28.

(i) L'intervalle entier $[\![2, 8]\!]$ contient tous les entiers de 2 à 8 inclus, qui sont au nombre de 7.

(ii) Les ensembles $[\![1, 7]\!]$ et $[\![9, 15]\!]$ étant disjoints, on a

$$|\,[\![1, 7]\!] \cup [\![9, 15]\!]\,| = |\,[\![1, 7]\!]\,| + |\,[\![9, 15]\!]\,| = (7 - 1 + 1) + (15 - 9 + 1) = 14.$$

(iii) Les 2^n, pour $n \in [\![1, 5]\!]$, sont deux à deux distincts, donc

$$\{2^n : n \in [\![1, 5]\!]\} = \{2, 4, 8, 16, 32\}$$

est de cardinal 5.

(iv) Contrairement à la situation étudiée dans le point précédent, les éléments $(-1)^n$, pour $n \in [\![1, 5]\!]$, ne sont pas deux à deux distincts : en effet, ils ne prennent que les valeurs -1 et 1. Ainsi, l'ensemble

$$\{(-1)^n : n \in [\![1, 5]\!]\} = \{-1, 1, -1, 1, -1\} = \{-1, 1\}$$

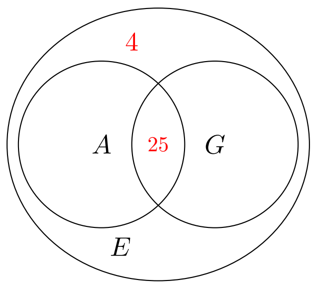
est de cardinal 2.

(v) Les multiples de 3 dans $[\![1, 50]\!]$ sont $3, 6, \ldots, 48$, soit $1 \times 3, 2 \times 3, \ldots, 16 \times 3$: ils sont donc au nombre de 16. Ainsi, le cardinal de l'ensemble des entiers entre 1 et 50 qui ne sont *pas* multiples de 3 est égal à $50 - 16 = 34$.

(vi) On a

$$|\{1, 2\} \times [\![2, 5]\!]| = |\{1, 2\}| \times |\,[\![2, 5]\!]\,| = 2 \times 4 = 8.$$

4. Notons que l'on peut résoudre l'exercice de façon graphique en complétant le diagramme ci-dessous à l'aide des données de l'énoncé :



Correction de l'exercice 29. L'astuce consiste à voir l'union de trois ensembles $A \cup B \cup C$ comme l'union de deux ensembles $(A \cup B) \cup C$. En utilisant trois fois la formule donnant le cardinal de l'union de deux ensembles, on obtient

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|) \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|, \end{aligned}$$

d'où le résultat attendu.

Correction de l'exercice 30. Les ensembles A, B et C sont non vides puisque $7 \in A$, $10 \in B$ et $10 + \sqrt{2} \in C$.[5]

Par ailleurs, ces ensembles sont deux à deux disjoints : en effet, A est constitué de réels inférieurs à 7 tandis que B et C ne contiennent que des éléments strictement supérieurs à 7, donc $A \cap B = \varnothing$ et $A \cap C = \varnothing$, et $B \subset \mathbb{Q}$ tandis que $C \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, donc $B \cap C = \varnothing$.

Enfin, la réunion $A \cup B \cup C$ est égale à $\mathbb{R}$ tout entier : on a évidemment $A \cup B \cup C \subset \mathbb{R}$, et si $x \in \mathbb{R}$ on a soit $x \leqslant 7$, auquel cas $x \in A$, soit $x > 7$ et $x \in \mathbb{Q}$, auquel cas $x \in B$, soit $x > 7$ et $x \notin \mathbb{Q}$, auquel cas $x \in C$, d'où l'inclusion réciproque $\mathbb{R} \subset A \cup B \cup C$.

On a donc bien montré que les ensembles A, B et C forment une partition de $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 31. La proposition n'est pas initialisée ; elle est en fait fausse au rang 0 (car l'entier $10^1 + 1 = 11$ n'est pas multiple de 9), donc son hérédité ne suffit pas à assurer sa validité.

Correction de l'exercice 32. L'erreur porte sur le raisonnement permettant de démontrer l'hérédité dans le cas où $n = 1$ (c'est-à-dire l'implication $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$) : l'argument « les deux crayons retirés successivement sont donc de même couleur que tous les autres » n'a de sens que lorsque la boîte contient $n \geqslant 3$ crayons. Ainsi, on a

$$\mathcal{P}_1 \text{ vraie} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_3 \Rightarrow \mathcal{P}_4 \Rightarrow \dots$$

mais le premier maillon de la chaîne d'implications manque, ce qui explique que le raisonnement ne soit pas valide.

Correction de l'exercice 33.

(i) Cette équivalence est vraie : il s'agit de la distributivité de « et » sur « ou », à rapprocher du résultat de l'exercice 23.

(ii) Cette équivalence est vraie : il s'agit cette fois la distributivité de « ou » sur « et ».

5. Le fait que $10 + \sqrt{2}$ ne soit pas rationnel provient d'un raisonnement par l'absurde : en effet, s'il était rationnel, alors $\sqrt{2} = 10 + \sqrt{2} - 10$ le serait aussi en tant que différence de deux nombres rationnels, or $\sqrt{2}$ est notoirement irrationnel donc $10 + \sqrt{2}$ l'est aussi.

(*iii*) Cette équivalence est vraie : dire que tous les élèves de B/L sont brillants et que tous les élèves de B/L sont sympathiques revient à dire que tous les élèves de B/L sont à la fois brillants et sympathiques.

(*iv*) Cette équivalence est fausse : dire que tous les élèves de B/L sont brillants ou que tous les élèves de B/L sont sympathiques implique bien que tous les élèves de B/L sont soit brillants, soit sympathiques, mais la réciproque n'est pas vraie car il est possible que tout élève de B/L soit brillant ou sympathique sans qu'aucun de ces deux traits ne soit partagé par tous les élèves en même temps.

(*v*) Cette équivalence est fausse : l'implication réciproque est valide mais pas l'implication directe. Par exemple, il existe une personne totalement chauve et il existe une personne aux cheveux hirsutes, mais il n'existe aucune personne présentant des deux propriétés à la fois.

(*vi*) Cette équivalence est vraie : le fait qu'il existe une personne chauve ou une personne hirsute est bien équivalent au fait qu'il existe une personne chauve ou hirsute.

Correction de l'exercice 34. On remarque[6] que lorsque la variable x balaie l'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$, la quantité $\frac{1}{x+1}$ visite tout l'intervalle $]0,1[$. Mais pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, lorsque y balaie $\mathbb{R}_-$ la quantité $3xy$ visite tout l'intervalle $\mathbb{R}_-$. Ainsi, l'ensemble des points de la forme $\left(3xy, \frac{1}{x+1}\right)$, pour $x > 0$ et $y \leqslant 0$, est le produit cartésien $\mathbb{R}_- \times]0,1[$.

Pour démontrer rigoureusement ce fait, on peut procéder par double inclusion :

- Tout d'abord, il est clair que si $x > 0$ alors $\frac{1}{1+x} \in]0,1[$ et que si de surcroît on a $y \leqslant 0$, alors $3xy \leqslant 0$. Ainsi, on a bien $A \subset \mathbb{R}_- \times]0,1[$.
- Réciproquement, si $a \in \mathbb{R}_-$ et $b \in]0,1[$, on peut trouver $x > 0$ tel que $\frac{1}{x+1} = b$ (il suffit de résoudre cette équation pour trouver $x = \frac{1}{b} - 1$, qui est bien strictement positif), et en posant $y = \frac{a}{3x}$ (qui est alors négatif) on a $a = 3xy$. Ainsi, (a, b) s'écrit sous la forme $\left(3xy, \frac{1}{x+1}\right)$, d'où l'inclusion réciproque $\mathbb{R}_- \times]0,1[\subset A$.

On a donc effectivement l'égalité $A = \mathbb{R}_- \times]0,1[$.

Correction de l'exercice 35.

1. Si $A \in \mathcal{P}(E \cap F)$, alors A est une partie de $E \cap F$, donc une partie de E et de F, d'où $A \in \mathcal{P}(E)$ et $A \in \mathcal{P}(F)$, soit $A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$. Réciproquement, si $A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$, alors A est une partie de E et une partie de F, donc les éléments de A sont dans $E \cap F$, c'est-à-dire que $A \subset E \cap F$: on a donc l'inclusion réciproque $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cap F)$, d'où l'égalité à démontrer.
2. Si $A \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$, alors A est une partie de E ou une partie de F ; dans les deux cas, c'est une partie de $E \cup F$ puisque ce dernier ensemble contient à la

6. Dans les chapitres suivants, on apprendra à formaliser ce type d'intuition graphique à l'aide des notions de surjectivité et de continuité.

fois E et F. On a donc bien l'inclusion $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.

En général, l'inclusion réciproque n'est pas vraie. En effet, une partie A de $E \cup F$ peut n'être ni une partie de E, ni une partie de F : il suffit pour cela qu'elle contienne un élément de $E \setminus F$ et un élément de $F \setminus E$. L'inclusion réciproque est donc vraie uniquement dans le cas où il n'est pas possible de trouver un élément dans $E \setminus F$ et un élément dans $F \setminus E$, c'est-à-dire le cas où $E \subset F$ ou $F \subset E$.

Correction de l'exercice 36.

1. Si E est un ensemble de cardinal 0, alors $E = \varnothing$ donc $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing\}$, d'où $|\mathcal{P}(E)| = |\{\varnothing\}| = 1 = 2^0$. La propriété est donc bien vraie si $n = 0$.
2. Comme $E \setminus \{x\}$ est de cardinal n, on a par hypothèse que le cardinal de $\mathcal{P}\left(E \setminus \{x\}\right)$ vaut 2^n.
3. On a $E \subset \mathcal{P}_1$ et $\varnothing \in \mathcal{P}_2$, donc $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont non vides. Par ailleurs, toute partie F de E contient x (donc appartient à $\mathcal{P}_1$) ou ne le contient pas (donc appartient à $\mathcal{P}_2$), et ces deux options sont bien sûr mutuellement exclusives. Ainsi, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ forment bien une partition de $\mathcal{P}(E)$.
4. Démontrons la première égalité attendue par double inclusion.

   Soit $F \in \mathcal{P}_1$. Comme F contient x, on peut écrire $F = (F \setminus \{x\}) \cup \{x\}$. Or $F \setminus \{x\}$ est entièrement contenu dans $E \setminus \{x\}$, si bien que $F \setminus \{x\} \in \mathcal{P}(E \setminus \{x\})$: on a donc

   $$F \in \{G \cup \{x\} : G \in \mathcal{P}(E \setminus \{x\})\} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{P}_1 \subset \{G \cup \{x\} : G \in \mathcal{P}(E \setminus \{x\})\}.$$

   L'inclusion réciproque s'obtient en remarquant que si F est un élément de l'ensemble $\{G \cup \{x\} : G \in \mathcal{P}(E \setminus \{x\})\}$, alors F s'écrit $G \cup \{x\}$ avec G une partie de E, si bien que F est une partie de E contenant x : on a donc

   $$\{G \cup \{x\} : G \in \mathcal{P}(E \setminus \{x\})\} \subset \mathcal{P}_1,$$

   d'où l'égalité

   $$\mathcal{P}_1 = \{G \cup \{x\} : G \in \mathcal{P}(E \setminus \{x\})\}.$$

   L'égalité $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}(E \setminus \{x\})$ est quant à elle évidente puisqu'une partie de E ne contenant pas x est une partie de $E \setminus \{x\})$ et réciproquement.

   En considérant ces deux écritures de $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, on voit que tous deux contiennent autant d'éléments que $\mathcal{P}\Big(E \setminus \{x\}\Big)$ (dans le cas de $\mathcal{P}_1$, il s'agit du nombre de choix possibles pour G).

   Or on a vu dans la question 2 que ce cardinal était égal à 2^n, d'où le résultat.
5. Comme $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ forment une partition de $\mathcal{P}(E)$, on a

   $$|\mathcal{P}(E)| = |\mathcal{P}_1| + |\mathcal{P}_2|, \quad \text{soit} \quad |\mathcal{P}(E)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

   d'après la question précédente.

6. Dans la question 1, on a réalisé l'initialisation du raisonnement par récurrence visant à montrer la propriété attendue. Dans les questions 2 à 5, on a démontré le caractère héréditaire de cette propriété. D'après le principe de récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. D'après le résultat que nous venons d'établir, on a
$$|\mathcal{P}(\{1,2\} \times \{1,3\})| = 2^{|\{1,2\}\times\{1,3\}|} = 2^4 = 16$$
ainsi que
$$|\mathcal{P}(\varnothing)| = 2^0 = 1 \quad \text{d'où} \quad |\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))| = 2^1 = 2$$
et donc
$$|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))| = 2^2 = 4.$$