
Matrices et systèmes linéaires

CORRIGÉ DES EXERCICES

Correction de l'exercice 14. On calcule méthodiquement les 16 produits possibles en commençant par ceux dont le premier terme est A .

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nA.$$

Ce résultat utile est bon à retenir car il figure dans de nombreux exercices.

On a ensuite

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ \vdots & & & \vdots \\ n & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2+\cdots+n & \cdots & 1+2+\cdots+n \\ \vdots & & \vdots \\ 1+2+\cdots+n & \cdots & 1+2+\cdots+n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} A. \end{aligned}$$

On trouve de même

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Examinons à présent les produits dont le premier terme est B : on a

$$BA = \begin{pmatrix} 1+1+\cdots+1 & \cdots & 1+1+\cdots+1 \\ 2+2+\cdots+2 & \cdots & 2+2+\cdots+2 \\ \vdots & & \vdots \\ n+n+\cdots+n & \cdots & n+n+\cdots+n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ 2n & \cdots & 2n \\ \vdots & & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix} = nB,$$

ainsi que

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 1+2+\cdots+n & \cdots & 1+2+\cdots+n \\ 2(1+2+\cdots+n) & \cdots & 2(1+2+\cdots+n) \\ \vdots & & \vdots \\ n(1+2+\cdots+n) & \cdots & n(1+2+\cdots+n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & \cdots & \frac{n(n+1)}{2} \\ 2\frac{n(n+1)}{2} & \cdots & 2\frac{n(n+1)}{2} \\ \vdots & & \vdots \\ n\frac{n(n+1)}{2} & \cdots & n\frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix} = \frac{n(n+1)}{2} B, \end{aligned}$$

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ n & 2n & 2n & \cdots & 2n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

On a ensuite

$$CA = \begin{pmatrix} 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & & \vdots \\ 2 & \cdots & 2 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad CB = \begin{pmatrix} 3 & \cdots & 3 \\ 5 & \cdots & 5 \\ \vdots & & \vdots \\ 2n-1 & \cdots & 2n-1 \\ n & \cdots & n \end{pmatrix},$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

et enfin

$$DA = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad DB = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & -1 & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & \vdots \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ n & \cdots & n & \vdots \end{pmatrix},$$

$$DC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = CD \quad \text{et} \quad D^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 15.

- (i) La matrice A est diagonale. Le produit de deux matrices diagonales se calculant terme à terme, on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix},$$

puis

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix},$$

et ainsi de suite. On conjecture alors, et on démontre par une récurrence très facile que :

$$\forall k \geq 0, \quad A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & (-3)^k \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les puissances successives d'une matrice diagonale se calculent en mettant à la puissance ses coefficients diagonaux. Ce fait crucial sera abondamment exploité dans le cours de deuxième année, où l'on cherchera pour cette raison à ramener le calcul des puissances d'une matrice carrée quelconque à celui des puissances d'une matrice diagonale.

- (ii) On a $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B^4 = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, ce qui nous amène à conjecturer le résultat suivant :

$$\forall k \geq 1, \quad B^k = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^{k-1} & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Démontrons cette relation par récurrence sur $k \geq 1$. Le résultat est évidemment vrai si $k = 1$ du fait de la forme de B . Supposons-le vrai pour un certain $k \geq 1$; on a alors

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= BB^k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & (-2)^{k-1} & 0 \\ 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & -2 \cdot (-2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^k & 0 \\ 0 & (-2)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc le résultat est vrai au rang $k + 1$. Ainsi, le résultat est vrai à tout rang $k \geq 1$ d'après le principe de récurrence.

- (iii) En s'inspirant de la matrice A étudiée dans l'exercice 14 ou en refaisant le calcul, on obtient que $C^2 = 2C$. Dès lors, on peut écrire $C^3 = CC^2 = C \cdot 2C = 2C^2 = 4C$, puis $C^4 = CC^3 = C \cdot 4C = 4C^2 = 8C$ et ainsi de suite : on a ainsi $C^k = 2^{k-1}C$ pour tout $k \geq 1$ – et on laisse au lecteur le soin d'écrire une preuve par récurrence qui formalise le raisonnement itératif que nous venons de mener.

- (iv) On a

$$D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad D^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D^4 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

On conjecture donc le résultat suivant :

$$\forall k \geq 1, \quad D^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Ce résultat est vrai pour $k = 1$ du fait de la forme de D . Supposons qu'il le soit pour un $k \geq 1$ donné ; on a alors

$$\begin{aligned} D^{k+1} &= DD^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k-1} + 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} + 2^{k-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{k-1} + 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} + 2^{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 2^k \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^k & 0 & 2^k \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $k + 1$. Ainsi, notre conjecture est vérifiée pour tous les rangs $k \geq 1$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 16. Comme on l'a vu dans le cours, la formule n'est pas vraie en général dans le cas de matrices qui ne commutent pas. Pour montrer qu'elle est vérifiée lorsque A et B commutent, on reprend mot à mot la démonstration utilisée pour établir la formule du binôme dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} , à l'exception notable d'un passage spécifique au cas matriciel (en rouge ci-dessous).

Procérons par récurrence sur N . Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}_N : \quad \langle\langle (A + B)^N = \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} a^k b^{N-k} \rangle\rangle.$$

La proposition \mathcal{P}_0 est vraie puisque $(A + B)^0 = I_n$ et

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} A^k B^{0-k} = \binom{0}{0} A^0 B^{0-0} = I_n.$$

Fixons à présent $N \in \mathbb{N}$ et supposons \mathcal{P}_N vraie. Alors

$$\begin{aligned} (A + B)^{N+1} &= (A + B)(A + B)^N \\ &= (A + B) \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_N \\ &= A \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k} + B \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k} \\ &= A \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k} + \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} B A^k B^{N-k}. \end{aligned}$$

Or A et B commutent, donc pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ on a

$$\begin{aligned} BA^k B^{N-k} &= B \underbrace{A \cdots A}_{k \text{ fois}} B^{N-k} = AB \underbrace{A \cdots A}_{k-1 \text{ fois}} B^{N-k} \\ &= A^2 B \underbrace{A \cdots A}_{k-2 \text{ fois}} B^{N-k} = \dots = A^k B B^{N-k} \\ &= A^k B^{N+1-k}. \end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
(A + B)^{N+1} &= \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^{k+1} B^{N-k} + \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N-k+1} \\
&= \sum_{k'=1}^{N+1} \binom{N}{k'-1} A^{k'} B^{N-(k'-1)} + \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N+1-k} \quad \text{en posant } k' = k + 1 \\
&= \sum_{k'=1}^{N+1} \binom{N}{k'-1} A^{k'} B^{N+1-k'} + \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N+1-k} \\
&= \sum_{k=1}^{N+1} \binom{N}{k-1} A^k B^{N+1-k} + \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A^k B^{N+1-k} \\
&= \underbrace{\binom{N}{N} A^{N+1} B^{N+1-(N+1)}}_{\text{terme d'indice } N+1} + \sum_{k=1}^N \binom{N}{k-1} A^k B^{N-k+1} \\
&\quad + \sum_{k=1}^N \binom{N}{k} A^k B^{N+1-k} + \underbrace{\binom{N}{0} A^0 B^{N+1-0}}_{\text{terme d'indice 0}} \\
&= A^{N+1} + \sum_{k=1}^N \left[\binom{N}{k-1} + \binom{N}{k} \right] A^k B^{N+1-k} + B^{N+1} \\
&= A^{N+1} + \sum_{k=1}^N \binom{N+1}{k} A^k B^{N+1-k} + B^{N+1} \quad \text{d'après la relation de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{N+1} \binom{N+1}{k} A^k B^{N+1-k},
\end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du fait que

$$A^{N+1} = \binom{N+1}{N+1} A^{N+1} B^{N+1-(N+1)}$$

est le terme d'indice $N+1$ de la somme et du fait que

$$B^{N+1} = \binom{N+1}{0} A^0 B^{N+1-0}$$

est le terme d'indice 0 de la somme. On voit donc que \mathcal{P}_{N+1} est vraie.

La proposition \mathcal{P}_N est donc vraie pour tout rang $N \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

Correction de l'exercice 17.

- (i) On peut écrire $A = I_2 + M$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Or $M^2 = 0$, donc $M^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. Comme I_2 et M commutent, on peut utiliser la formule du binôme

pour écrire que pour tout $n \geq 2$:

$$A^n = (I_2 + M)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^k I_2^{n-k} = \binom{n}{0} I_2 + \binom{n}{1} M = I_2 + nM = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puisque les termes d'indice $k \geq 2$ de la somme sont des matrices nulles. On remarque que la forme obtenue est aussi valable pour $n = 0$ et $n = 1$, donc la formule est vraie pour tout $n \geq 0$.

- (ii) On peut écrire $B = I_2 + M$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Les premières puissances de M sont

$$M^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut conjecturer puis démontrer la formule suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad M^k = \begin{cases} 2^k I_2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2^{k-1} M & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Soit $n \geq 1$. Les matrices I_2 et M commutent, donc on peut appliquer la formule du binôme pour écrire

$$\begin{aligned} B^n &= (I_2 + M)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^k I_2^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^k \\ &= \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} 2^k \right) I_2 + \left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} \right) M. \end{aligned}$$

Il reste à présent à calculer les sommes

$$S_1 := \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} 2^k \quad \text{et} \quad S_2 := \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} 2^{k-1}.$$

On a d'une part

$$S_1 + 2S_2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n$$

d'après la formule du binôme, et d'autre part

$$\begin{aligned} S_1 - 2S_2 &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} 2^k - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} 2^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k 1^{n-k} \\ &= (-2+1)^n = (-1)^n \end{aligned}$$

par cette même formule. En additionnant les deux égalités que nous venons d'obtenir, on trouve $2S_1 = 3^n + (-1)^n$, soit $S_1 = \frac{3^n + (-1)^n}{2}$. En les soustrayant, on trouve $4S_2 = 3^n - (-1)^n$ soit $S_2 = \frac{3^n - (-1)^n}{4}$.

Ainsi, on a :

$$B^n = S_1 I_2 + S_2 M = \begin{pmatrix} S_1 & 2S_2 \\ 2S_2 & S_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3^n + (-1)^n}{2} & \frac{3^n - (-1)^n}{2} \\ \frac{3^n - (-1)^n}{2} & \frac{3^n + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'alternativement, on aurait pu éviter le calcul de S_1 et S_2 en privilégiant la décomposition $B = N - I_2$ avec $N = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, puisque les puissances de N sont faciles à calculer : en utilisant le point (iii) de l'exercice 15, on peut écrire que :

$$\forall k \geq 1, \quad N^k = 2^k \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^k = 2^k 2^{k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2^{2k-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme N et $-I_2$ commutent, on peut utiliser la formule du binôme pour obtenir, si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} B^n &= (N - I_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k (-I_2)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} N^k \\ &= \binom{n}{0} (-1)^n I_2 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} 2^{2k-1} N \end{aligned}$$

car la formule pour N^k n'est valable que si $k \geq 1$, d'où

$$\begin{aligned} B^n &= (-1)^n I_2 + \left(\frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-4)^k \right) N \quad \text{car } (-1)^{-k} = (-1)^k \\ &= (-1)^n I_2 + \frac{(-1)^n}{2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-4)^k - 1 \right) N \\ &= (-1)^n I_2 + \frac{(-1)^n}{2} ((-3)^n - 1) N \quad \text{d'après la formule du binôme} \\ &= (-1)^n I_2 + \frac{3^n - (-1)^n}{2} N \end{aligned}$$

ce qui permet de retrouver

$$B^n = \begin{pmatrix} \frac{3^n + (-1)^n}{2} & \frac{3^n - (-1)^n}{2} \\ \frac{3^n - (-1)^n}{2} & \frac{3^n + (-1)^n}{2} \end{pmatrix}.$$

On remarque que cette formule est aussi valable pour $n = 0$.

(iii) On écrit cette fois $C = 3I_3 + M$ avec $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, et on remarque que

$M^2 = 0$, d'où $M^k = 0$ pour tout $k \geq 2$. Comme les matrices $3I_3$ et M commutent, on peut donc utiliser la formule du binôme pour écrire que si $n \geq 1$, alors

$$C^n = (3I_3 + M)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} M^k (3I_3)^{n-k} = (3I_3)^n + nM(3I_3)^{n-1} = 3^n I_3 + n3^{n-1} M$$

puisque les termes d'indice $k \geq 2$ dans la somme sont des matrices nulles. Ainsi, pour tout $n \geq 1$ on a

$$C^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & n3^{n-1} \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix},$$

et on remarque que cette formule est aussi valable pour $n = 0$.

Correction de l'exercice 18.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}_k : \text{« il existe } a_k, b_k \in \mathbb{R} \text{ tels que } A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \text{ ».}$$

La propriété \mathcal{P}_0 est vraie avec $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ puisque $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $k \geq 1$; on suppose la propriété \mathcal{P}_k vérifiée. On a alors

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= AA^k = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_k \\ &= \begin{pmatrix} a_k + 3b_k & b_k + 3a_k \\ 3a_k + b_k & 3b_k + a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ b_{k+1} & a_{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en posant $a_{k+1} := a_k + 3b_k$ et $b_{k+1} := b_k + 3a_k$, donc la propriété \mathcal{P}_{k+1} est vérifiée.

Ainsi, la propriété \mathcal{P}_k est vraie à tout rang $k \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence, et les suites $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifient $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$ ainsi que la relation de récurrence croisée suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = a_k + 3b_k \quad \text{et} \quad b_{k+1} = 3a_k + b_k.$$

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$a_{k+1} + b_{k+1} = a_k + 3b_k + 3a_k + b_k = 4(a_k + b_k),$$

donc la suite $(a_k + b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 4 et de premier terme $a_0 + b_0 = 1$.

On a de même, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$a_{k+1} - b_{k+1} = a_k + 3b_k - 3a_k - b_k = -2(a_k - b_k),$$

donc la suite $(a_k - b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -2 et de premier terme $a_0 - b_0 = 1$.

3. D'après la question précédente, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $a_k + b_k = 4^k$ ainsi que $a_k - b_k = (-2)^k$. En sommant ces deux égalités, on obtient $2a_k = 4^k + (-2)^k$, d'où $a_k = \frac{4^k + (-2)^k}{2}$; en les soustrayant, on obtient $2b_k = 4^k - (-2)^k$, d'où $b_k = \frac{4^k - (-2)^k}{2}$. Ainsi, on peut écrire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4^k + (-2)^k}{2} & \frac{4^k - (-2)^k}{2} \\ \frac{4^k - (-2)^k}{2} & \frac{4^k + (-2)^k}{2} \end{pmatrix}.$$

Correction de l'exercice 19. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Il est clair que la matrice scalaire λI_2 commute avec toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisque $\lambda I_2 \cdot M = \lambda M = M \cdot (\lambda I_2)$.

Réiproquement, considérons une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et supposons que A commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit les matrices $E_{1,1}$, $E_{2,1}$, $E_{1,2}$ et $E_{2,2}$ comme dans l'indication, et on a alors

$$AE_{1,1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$E_{1,1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

or A commute avec $E_{1,1}$ par hypothèse, d'où $AE_{1,1} = E_{1,1}A$ soit

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire que $b = c = 0$.

On a de la même façon $E_{1,2}A = AE_{1,2}$, c'est-à-dire que

$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix},$$

d'où $d = a$. Ainsi, la matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, c'est-à-dire qu'elle est scalaire.

On a donc bien montré que les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les autres sont exactement les matrices scalaires.

Correction de l'exercice 20. Il suffit de vérifier que le produit de $I_n - A$ par la matrice proposée redonne la matrice I_n : or la distributivité de la multiplication matricielle par rapport à l'addition permet d'écrire

$$(I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k = \sum_{k=0}^{p-1} (I_n - A) A^k = \sum_{k=0}^{p-1} (A^k - A^{k+1})$$

d'où, en reconnaissant une somme télescopique :

$$(I_n - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k = A^0 - A^p = I_n - 0 = I_n$$

puisque $A^p = 0$. Ainsi, $I_n - A$ est bien inversible, et $(I_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} A^k$.

Correction de l'exercice 21.

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente et soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = 0$. Si M était inversible, alors M^p le serait en tant que produit de p matrices inversibles ; or $M^p = 0$ donc M^p n'est pas inversible. Ainsi, M n'est pas inversible.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices nilpotentes qui commutent, soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$ et soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^q = 0$. Comme A et B commutent, la formule du binôme permet d'écrire

$$(A + B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} A^k B^{p+q-k}.$$

Or pour tout $k \in \llbracket 0, p+q \rrbracket$, soit l'entier k est supérieur à p , soit l'entier $p+q-k$ est supérieur à q , si bien que A^k ou B^{p+q-k} est nulle, et donc que $A^k B^{p+q-k} = 0$: ainsi, on a

$$(A + B)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} 0 = 0,$$

c'est-à-dire que $A + B$ est nilpotente.

De la même façon, comme A et B commutent, on peut écrire $(AB)^p = A^p B^p$, d'où $(AB)^p = 0 \cdot 0 = 0$: ainsi, AB est elle aussi nilpotente.

3. D'après ce qui précède, il s'agit bien sûr de choisir deux matrices qui ne commutent pas. Si l'on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors :
 - $A^2 = B^2 = 0$, donc A et B sont nilpotentes.
 - $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible (car $\det(A + B) = -1 \neq 0$), donc non nilpotente d'après la question 1.
 - $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonale et est égale à toutes ses puissances successives ; ainsi, aucune de ses puissances ne s'annule, donc AB n'est pas nilpotente.

Correction de l'exercice 22.

1. Supposons la proposition démontrée pour les matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire inférieure, alors ${}^t A$ est une matrice triangulaire supérieure ; d'après la proposition démontrée, elle est

inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Or ces coefficients diagonaux sont les mêmes que ceux de A , donc ${}^t A$ est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux de A sont tous non nuls. Comme on a vu dans le cours que A est inversible si et seulement si ${}^t A$ l'est, on en conclut que A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls : la proposition est donc aussi valable pour les matrices triangulaires inférieures.

Ainsi, il suffit bien d'établir la proposition pour les matrices triangulaires supérieures.

2. Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé.

Supposons tout d'abord M inversible et notons son inverse

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix},$$

avec $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $Q \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$, $R \in \mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$. En faisant un calcul par blocs¹, relation $M^{-1}M = I_n$ s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} PA & PB + QC \\ RA & RB + SC \end{pmatrix} = I_n = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}.$$

On a donc $PA = I_p$, ce qui implique que A est inversible (d'inverse P). Comme $RA = 0$, en multipliant à droite par A^{-1} on obtient $R = 0$. Ainsi, l'équation $RB + SC = I_{n-p}$ se réécrit $SC = I_{n-p}$, ce qui implique que C est inversible (d'inverse S). On a donc bien montré que si M est inversible, alors A et C le sont.

Réiproquement, supposons que A et C sont inversibles. On a alors²

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AA^{-1} & -AA^{-1}BC^{-1} + BC^{-1} \\ 0 & CC^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix} = I_n, \end{aligned}$$

donc M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$.

On a bien démontré l'équivalence attendue : M est inversible si et seulement A et C le sont.

3. Pour tout $n \geq 1$, on considère la proposition \mathcal{P}_n : « une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls ». Démontrons cette propriété par récurrence.

La proposition \mathcal{P}_1 est vraie puisqu'une matrice $(a) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est toujours

1. Prenez le temps de vérifier que ce calcul ne vous choque pas en visualisant mentalement les opérations réalisées sur les blocs pour multiplier M^{-1} et M .

2. La matrice $\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$ ici parachutée a été déterminée grâce à un raisonnement par analyse-synthèse que nous vous invitons à détailler.

triangulaire supérieure et qu'une telle matrice est inversible si et seulement si $a \neq 0$ (on a alors $(a)^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right)$).

Soit $n \geq 1$. On suppose \mathcal{P}_n vraie. Considérons $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure : on peut alors l'écrire

$$M = \begin{pmatrix} M' & B \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ (le 0 figurant dans la matrice étant la matrice ligne nulle $0_{1,n}$). D'après la question précédente, M est inversible si et seulement M' et (α) le sont ; mais l'hypothèse de récurrence d'une part, et la proposition \mathcal{P}_1 d'autre part, montrent que c'est le cas si et seulement si tous les coefficients diagonaux de M' ainsi que le réel α sont non nuls... c'est-à-dire si tous les coefficients diagonaux de M sont non nuls. La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est donc vraie pour tout $n \geq 1$, ce qui démontre le résultat à établir pour les matrices triangulaires supérieures, et donc, d'après la question 1, pour toutes les matrices triangulaires.

Correction de l'exercice 23.

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. On note $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j},$$

or les coefficients $a_{i,k}$ et $b_{k,j}$ sont tous positifs donc $(AB)_{i,j}$ l'est aussi : ainsi, la matrice AB est à coefficients positifs.

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a de plus

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (AB)_{i,j} &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \quad \text{par interversion de sommes} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(b_{k,j} \cdot \sum_{i=1}^n a_{i,k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n b_{k,j} \cdot 1 \quad \text{car } A \text{ est stochastique} \\ &= 1 \quad \text{car } B \text{ est stochastique.} \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice AB est stochastique.

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices bistochastiques. Alors elles sont stochastiques, donc AB l'est d'après la question précédente. De plus, ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$, or tB et tA sont stochastiques puisque A et B sont bistochastiques, donc le produit ${}^tB {}^tA$ est lui aussi stochastique d'après la question précédente ; ainsi, ${}^t(AB)$ est stochastique. La matrice AB est donc bistochastique, ce qui clôture la preuve.

Correction de l'exercice 24. On détaille les trois preuves suggérées.

Preuve en utilisant un système d'équations linéaires :

On note $A = (a_{i,j})$. Par hypothèse, les $a_{i,i}$ sont tous non nuls. On va utiliser la proposition 42 du cours pour montrer que l'inverse de A est triangulaire supérieure. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$; le système donné dans la proposition 42 s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n & = & y_1 \\ & \vdots & \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n & = & y_{n-1} \\ a_{n,n}x_n & = & y_n \end{array} \right.$$

puisque A est triangulaire. En divisant chaque ligne i par $a_{i,i}$, ce qui est possible car les $a_{i,i}$ sont tous non nuls, ce système équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 + \dots + \frac{a_{1,n-1}}{a_{1,1}}x_{n-1} + \frac{a_{1,n}}{a_{1,1}}x_n & = & \frac{1}{a_{1,1}}y_1 \\ & \vdots & \\ x_{n-1} + \frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}}x_n & = & \frac{1}{a_{n-1,n-1}}y_{n-1} \\ x_n & = & \frac{1}{a_{n,n}}y_n, \end{array} \right.$$

qui peut aisément être transformé, par substitution en partant sa dernière ligne, en un système donnant chaque x_i en fonction des y_j pour $j \geq i$, c'est-à-dire un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & b_{1,1}y_1 + \dots + b_{1,n-1}y_{n-1} + b_{1,n}y_n \\ & & \vdots \\ x_{n-1} & = & b_{n-1,n-1}y_{n-1} + b_{n-1,n}y_n \\ x_n & = & b_{n,n}y_n, \end{array} \right.$$

dans lequel les coefficients $b_{i,j}$ ne dépendent pas des x_i et des y_j .

D'après la proposition 42, l'inverse de A est donc la matrice

$$B := \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & \cdots & b_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

qui est triangulaire supérieure, ce qu'il fallait démontrer.

Preuve en utilisant la méthode de Gauss-Jordan :

La matrice A est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. La méthode de Gauss-Jordan permet de transformer A en la matrice I_n uniquement par des dilatations (pour transformer les pivots de A en 1) et des transvections de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $j > i$, sans recours à aucune transposition. La matrice A^{-1} que l'on détermine au terme de l'application de la méthode de Gauss-Jordan est

donc obtenue en appliquant à la matrice I_n ces dilatations et ces transvections. Or ces opérations ne changent aucun des coefficients situés en-dessous de la diagonale des matrices auxquelles elles s'appliquent. Ainsi, les matrices obtenues au fil de la méthode de Gauss-Jordan sont toutes triangulaires supérieures ; c'est donc notamment le cas de A^{-1} .

Preuve par récurrence sur n :

On va réutiliser un résultat obtenu dans la deuxième question de l'exercice 22 : si M est une matrice triangulaire admettant une écriture par blocs de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A et C deux matrices carrées, alors M est inversible si et seulement si A et C le sont, et dans ce cas on a

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Démontrons par récurrence sur $n \geq 1$ la proposition \mathcal{P}_n : « l'inverse de toute matrice triangulaire supérieure inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure ».

La proposition \mathcal{P}_1 est trivialement vraie puisque toutes les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ sont triangulaires supérieures.

Fixons à présent $n \geq 1$, supposons que \mathcal{P}_n soit vraie et considérons une matrice triangulaire supérieure inversible $M \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$. On peut alors écrire

$$M = \begin{pmatrix} M' & B \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure inversible (car à coefficients diagonaux tous non nuls), $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha \neq 0$, et où le bloc noté 0 est la matrice ligne nulle $0_{1,n}$. D'après le résultat de l'exercice 22 que nous avons rappelé, on a

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (M')^{-1} & -\frac{1}{\alpha}(M')^{-1}B \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Or M' est triangulaire supérieure et de taille $n \times n$, donc l'hypothèse de récurrence \mathcal{P}_n stipule que $(M')^{-1}$ est triangulaire supérieure. Ainsi, on déduit de l'expression par blocs de M^{-1} que cette matrice est elle aussi triangulaire supérieure. La proposition \mathcal{P}_{n+1} est donc établie.

Ainsi, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 1$ d'après le principe de récurrence, ce qui clôture la preuve.

Correction de l'exercice 25.

1. La matrice ${}^t A$ est de taille $n \times m$, donc la matrice $A^t A$ est de taille $m \times m$. Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a

$$(A^t A)_{i,i} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}({}^t A)_{k,i} = \sum_{k=1}^n (A_{i,k})^2 \geq 0.$$

2. Il est clair que si $A = 0$, alors $A^t A = 0$. Supposons réciproquement que $A^t A = 0$. Alors les coefficients diagonaux de $A^t A$ sont nuls, ce qui implique d'après la question précédente que pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ on a

$$\sum_{k=1}^n (A_{i,k})^2 = 0.$$

Comme les $(A_{i,k})^2$ sont des réels positifs, on en déduit que $A_{i,k} = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire que $A = 0$, ce qui achève d'établir l'équivalence annoncée.

Correction de l'exercice 26. Les matrices $A := I_n$ et $B := -I_n$ sont inversibles (et elles sont leurs propres inverses), mais $A + B = 0$ ne l'est pas.

De très nombreux autres contre-exemples pouvaient bien sûr être proposés. Il était particulièrement pertinent de chercher à construire des exemples utilisant des matrices dont l'inversibilité (ou non) peut être établie simplement, par exemple des matrices triangulaires.

Correction de l'exercice 27.

1. Soient $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors $a_{i,j} = b_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i \geq j$. Pour un tel couple (i, j) , on a alors

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = \sum_{k=1}^i \underbrace{a_{i,k}}_{=0 \text{ car } i \geq k} b_{k,j} + \sum_{k=i+1}^n a_{i,k} \underbrace{b_{k,j}}_{=0 \text{ car } k > i \geq j} = 0,$$

donc AB est elle aussi triangulaire supérieure triangulaire stricte.

2. On se convainc assez facilement de la véracité de la proposition en considérant une matrice triangulaire supérieure stricte de taille 3 ou 4 et en calculant les puissances successives : on observe que si A est triangulaire supérieure stricte, alors A^2 l'est aussi et a par ailleurs une sur-diagonale³ nulle, puis que A^3 a deux sur-diagonales nulles, et ainsi de suite.

Tentons de généraliser cette remarque pour un n quelconque fixé. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on dit qu'une matrice triangulaire supérieure stricte $M = (m_{i,j})$ a ses k premières sur-diagonales nulles si $m_{i,j} = 0$ pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ vérifiant $i \geq j - k$. On se propose dans un premier temps de montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, le produit d'une matrice triangulaire supérieure stricte $A = (a_{i,j})$ par une matrice triangulaire supérieure stricte $B = (b_{i,j})$ ayant ses k premières sur-diagonales nulles est une matrice triangulaire supérieure stricte ayant ses $k + 1$ premières sur-diagonales nulles.

Soit donc $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ et soient A, B deux matrices triangulaires supérieures strictes, B ayant par ailleurs ses k premières sur-diagonales nulles. Pour tout

3. On appelle *sur-diagonale* l'ensemble des termes de la matrice dont les indices (i, j) vérifient $j = i + 1$.

couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $i \geq j - k - 1$, on a alors :

$$(AB)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell} b_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^i \underbrace{a_{i,\ell}}_{=0 \text{ car } i \geq \ell} b_{\ell,j} + \sum_{\ell=i+1}^n a_{i,\ell} \underbrace{b_{\ell,j}}_{=0 \text{ car } \ell \geq i+1 \geq j-k} = 0,$$

ce qui montre bien que AB est une matrice triangulaire supérieure stricte ayant ses $k + 1$ premières sur-diagonales nulles, ce que nous souhaitions établir.

Ce résultat nous permet de montrer par une récurrence facile que si A est une matrice triangulaire supérieure stricte, alors A^k est une matrice triangulaire supérieure stricte ayant ses $k - 1$ premières sur-diagonales nulles pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$; en particulier, A^n est triangulaire supérieure stricte et ses $n - 1$ sur-diagonales sont nulles, c'est-à-dire que $A^n = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 28. Il est utile, et très économique en termes de rédaction, de recourir aux caractérisations de la symétrie et de l'antisymétrie en termes de transposée plutôt que de chercher à se ramener aux coefficients des matrices.

1. (a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques et soient $a, b \in \mathbb{R}$. La linéarité de la transposition permet alors d'écrire que

$${}^t(aA + bB) = a^tA + b^tB = aA + bB,$$

donc $aA + bB$ est symétrique. Une combinaison linéaire de matrices symétriques est donc bien symétrique.

- (b) Ce n'est pas toujours le cas : par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont symétriques, mais

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ne l'est pas.

- (c) Si A et B sont de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques qui commutent, alors on a

$${}^t(AB) = {}^tB^tA = BA = AB,$$

d'où ${}^t(AB) = AB$, c'est-à-dire que AB est symétrique.

- (d) Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique et inversible. On a alors⁴

$${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = A^{-1},$$

donc A^{-1} est égale à sa transposée, c'est-à-dire qu'elle est symétrique.

4. Notons que l'on a utilisé dans la chaîne d'égalités la relation ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$ vue dans le cours (point (ii) de la proposition 36), qu'il peut être utile de savoir redémontrer en écrivant que

$${}^t(A^{-1})^tA = {}^t(A \cdot A^{-1}) = {}^tI_n = I_n,$$

d'où le fait que ${}^t(A^{-1})$ est l'inverse de tA .

2. (a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices antisymétriques et soient $a, b \in \mathbb{R}$. La linéarité de la transposition permet alors d'écrire que

$${}^t(aA + bB) = a{}^tA + b{}^tB = -aA - bB,$$

soit ${}^t(aA + bB) = -(aA + bB)$, donc $aA + bB$ est antisymétrique. Une combinaison linéaire de matrices antisymétriques est donc bien antisymétrique.

- (b) Si A et B sont de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques qui commutent, alors on a

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA = (-B)(-A) = BA = AB,$$

d'où ${}^t(AB) = AB$, c'est-à-dire que AB est symétrique.

- (c) Supposons que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique et inversible. On a alors

$${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1},$$

donc A^{-1} est égale à l'opposé de sa transposée, c'est-à-dire qu'elle est antisymétrique.

Remarque : on a ici utilisé le fait que $(-A)^{-1} = -A^{-1}$, que l'on peut retrouver en écrivant que $(-A) \cdot (-A^{-1}) = A \cdot A^{-1} = I_n$, ce qui montre que $(-A^{-1})$ est l'inverse de $-A$. Plus généralement, cette démonstration permet d'établir que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, l'inverse de la matrice λA est $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

3. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la fois symétrique et antisymétrique vérifie

$$M = {}^tM = -M$$

donc $M = -M$, soit, en ajoutant M aux deux termes de l'égalité, $2M = 0$, d'où, en multipliant les deux termes⁵ par $\frac{1}{2}$, la relation $M = 0$. Ainsi, la seule matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle.

Correction de l'exercice 29. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Supposons qu'il existe $A, S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A soit antisymétrique, que S soit symétrique et que $M = A + S$.

La linéarité de la transposition implique que ${}^tM = {}^tA + {}^tS = -A + S$. Ainsi, on a $M = A + S$ et ${}^tM = -A + S$; en sommant ces deux égalités, on obtient alors $M + {}^tM = 2S$, d'où $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$, et en les soustrayant l'une à l'autre, on obtient $M - {}^tM = 2A$, d'où $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. On a donc établi l'unicité de la décomposition de M en somme d'une matrice symétrique et d'une matrice anti-symétrique sous réserve de son existence.

Réciproquement, si l'on définit $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$, alors on a :

$${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S$$

5. Nous détaillons ce passage à l'extrême pour justifier que la relation $M = -M$ implique $M = 0$ sans avoir recours à des considérations sur les coefficients, mais uniquement à des opérations sur les matrices elles-mêmes. Remarquons qu'il n'est pas question ici du signe de quelque objet que ce soit !

donc S est symétrique,

$${}^t A = \frac{1}{2}({}^t M - {}^t ({}^t M)) = \frac{1}{2}({}^t M - M) = -A$$

donc A est antisymétrique, et enfin

$$S + A = \frac{1}{2}(M + {}^t M) + \frac{1}{2}(M - {}^t M) = M,$$

ce qui démontre bien l'existence de la décomposition annoncée et clôt la preuve.

Correction de l'exercice 30.

- Soit $p \in \mathbb{N}$. On peut décomposer $M(a, b)$ sous la forme $M(a, b) = bJ + (a-b)I_n$, avec $J = M(1, 1)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Or bJ et $(a-b)I_n$ commutent, donc on peut utiliser la formule du binôme pour écrire :

$$\begin{aligned} M(a, b)^p &= (bJ + (a-b)I_n)^p \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (bJ)^k ((a-b)I_n)^{p-k} \\ &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} b^k (a-b)^{p-k} J^k. \end{aligned}$$

Or on a $J^0 = I_n$ et $J^k = n^{k-1}J$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (voir l'exercice 14), donc

$$\begin{aligned} M(a, b)^p &= \binom{p}{0} b^0 (a-b)^p I_n + \sum_{k=1}^p \binom{p}{k} b^k (a-b)^{p-k} n^{k-1} J \\ &= (a-b)^p I_n + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (nb)^k (a-b)^{p-k} \right) J \\ &= (a-b)^p I_n + \frac{1}{n} \left((nb + a - b)^p - (a-b)^p \right) J \\ &= (a-b)^p I_n + \frac{1}{n} \left(((n-1)b + a)^p - (a-b)^p \right) J. \end{aligned}$$

- D'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned} M(a, b)^2 &= (a-b)^2 I_n + \frac{1}{n} \left(((n-1)b + a)^2 - (a-b)^2 \right) J \\ &= (a-b)^2 I_n + \frac{1}{n} \left((n-2)b^2 + 2anb \right) J \\ &= (a-b)^2 I_n + \left((n-2)b^2 + 2ab \right) J. \end{aligned}$$

- La question précédente montre que si $a \neq b$ et $(n-2)b^2 + 2ab = 0$ (c'est-à-dire que $b = 0$ ou bien que $(n-2)b + 2a = 0$), alors on peut écrire

$$M(a, b)^2 = (a-b)^2 I_n \quad \text{puis} \quad M(a, b) \cdot \frac{1}{(a-b)^2} M(a, b) = I_n,$$

ce qui montre que $M(a, b)$ est inversible et que son inverse est $\frac{1}{(a-b)^2} M(a, b)$.

Ainsi, une condition suffisante à l'inversibilité de $M(a, b)$ est $0 = b \neq a$, et une autre condition suffisante est $b \neq 0$ et $(n-2)b + 2a = 0$.

4. Cette question n'est pas facile ! Comme souvent dans les exercices d'oraux, il est important de ne pas se laisser désarçonner et de s'efforcer de mettre en valeur des raisonnements même inaboutis ou restreints à des cas faciles ; toute piste de réflexion est valorisée par le jury.

En dimension 2 (c'est-à-dire pour $n = 2$), les deux conditions suffisantes déterminées dans la question précédente ne sont pas nécessaires (que ce soit isolément ou conjointement) puisque $M(a, b)$, qui est de déterminant $a^2 - b^2$, est inversible dès lors que $|b| \neq |a|$, et donc par exemple lorsque $a = 5$ et $b = 1$, ce qui ne satisfait aucune des deux conditions proposées.

Pour une valeur quelconque de n , on peut aussi exhiber un contre-exemple en réécrivant l'équation liant $M(a, b)^2$ et I_n à l'aide de M . En effet, avait écrit $M(a, b) = bJ + (a - b)I_n$; on peut donc reformuler cette égalité en

$$J = \frac{1}{b} (M(a, b) - (a - b)I_n).$$

La relation

$$M(a, b)^2 = (a - b)^2 I_n + ((n - 2)b^2 + 2ab) J$$

donne alors

$$M(a, b)^2 = (a - b)^2 I_n + ((n - 2)b^2 + 2ab) \frac{1}{b} (M(a, b) - (a - b)I_n),$$

soit

$$M(a, b)^2 = [(a - b)^2 - ((n - 2)b + 2a)(a - b)] I_n + ((n - 2)b + 2a) M(a, b),$$

soit encore

$$M(a, b)^2 = (b - a)(a + (n - 1)b) I_n + ((n - 2)b + 2a) M(a, b).$$

On peut alors écrire

$$M(a, b) (M(a, b) - ((n - 2)b + 2a) I_n) = (b - a)(a + (n - 1)b) I_n.$$

En choisissant a et b tels que $(b - a)(a + (n - 1)b) \neq 0$ (par exemple en prenant $b = 2$ et $a = 1$), on a alors

$$M(a, b) \cdot \frac{1}{(b - a)(a + (n - 1)b)} (M(a, b) - ((n - 2)b + 2a) I_n) = I_n,$$

ce qui montre que $M(a, b)$ est inversible – et d'inverse donné par la formule

$$M(a, b)^{-1} = \frac{1}{(b - a)(a + (n - 1)b)} (M(a, b) - ((n - 2)b + 2a) I_n).$$

On a donc bien obtenu le contre-exemple recherché : en effet, la matrice $M(1, 2)$ est inversible⁶, mais les coefficients $a = 1$ et $b = 2$ qui lui correspondent ne vérifient ni la condition $0 = b \neq a$, ni la condition $(n - 2)b + 2a = 0 \neq b$. Ainsi,

6. D'après la formule que nous venons d'obtenir, son inverse vaut $\frac{1}{2n-1}(M(1, 2) - (2n - 2)I_n)$.

ces deux conditions sont suffisantes mais aucunement nécessaires à l'inversibilité de $M(a, b)$.

Remarque : nous croiserons dans un exercice du tome de deuxième année la notion de *matrice à diagonale strictement dominante* qui nous permettra d'exhiber aisément des exemples de matrices $M(a, b)$ inversibles⁷. Il suffira pour cela d'avoir $|a| > (n - 1)|b|$, ce qui fait de la matrice $M(n, 1)$, entre autres, un contre-exemple convenable.

Correction de l'exercice 31. Remarquons tout d'abord qu'il y a une imprécision dans l'énoncé et que φ est définie sur *tous les couples de matrices de même format*, c'est-à-dire sur $\bigcup_{p,q \in \mathbb{N}^*} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})^2$, et non sur un seul ensemble $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})^2$.

1. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Le réel

$$\varphi(A, A) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{i,j}^2$$

est la somme des carrés des coefficients de A . Comme ces carrés sont tous positifs, leur somme est nulle si et seulement si tous sont nuls, c'est-à-dire si les coefficients de A sont nuls. Ainsi, on a $\varphi(A, A) = 0$ si et seulement si $A = 0$.

2. Notons $A = (a_{i,j})$, $P = (p_{i,j})$ et $Q = (q_{i,j})$. Comme AP et Q sont de format $p \times r$, on peut considérer $\varphi(AP, Q)$ (d'où l'intérêt de la remarque préliminaire : pour considérer $\varphi(A, B)$, il suffit de A et B soient de même taille). De même, comme P et ${}^t A Q$ sont toutes deux de format $q \times r$, on peut considérer $\varphi(P, {}^t A Q)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \varphi(AP, Q) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r (AP)_{i,j} q_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^q a_{i,k} p_{k,j} q_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^q ({}^t A)_{k,i} p_{k,j} q_{i,j} \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^r \left[\sum_{i=1}^p ({}^t A)_{k,i} q_{i,j} \right] p_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^r ({}^t A Q)_{k,j} p_{k,j} \\ &= \varphi({}^t A Q, P), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

7. Une matrice $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est dite à *diagonale strictement dominante* si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}|.$$

On montrera qu'une telle matrice est toujours inversible.

3. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et soient $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Alors $A^t B$ est de taille $p \times p$, donc

$$\text{Tr}(A^t B) = \sum_{i=1}^p (A^t B)^{i,i} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{i,j} ({}^t B)_{j,i} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q a_{i,j} b_{i,j} = \varphi(A, B),$$

et ${}^t B A$ est de taille $q \times q$, donc

$$\text{Tr}({}^t B A) = \sum_{j=1}^p ({}^t B A)_{j,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q ({}^t B)_{j,i} a_{i,j} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^q b_{i,j} a_{i,j} = \varphi(A, B).$$

4. Plaçons-nous à nouveau sous les conditions de la question 2. On a alors :

$$\varphi(AP, Q) = \text{Tr}\left({}^t Q A P\right) = \text{Tr}\left({}^t ({}^t A Q) P\right) = \varphi(P, {}^t A Q),$$

où la première et la troisième égalité résultent de la deuxième⁸ relation démontrée dans la question 3, ce qui est le résultat à retrouver.

Correction de l'exercice 32.

1. On a $A^2 - \alpha A = \beta I_n$. Si $\beta \neq 0$, on peut écrire

$$A \cdot \frac{1}{\beta} (A - \alpha I_n) = I_n,$$

ce qui montre que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{\beta}(A - \alpha I_n) = \frac{1}{\beta}A - \frac{\alpha}{\beta}I_n$.

2. La proposition est vraie pour tout $p = 0$ puisque $A^0 = I_n = 0 \cdot A + 1 \cdot I_n$. Supposons-la vraie à un rang $p \in \mathbb{N}$ donné : on peut alors écrire $A^p = \lambda A + \mu I_n$ pour certains réels λ et μ . On a alors

$$\begin{aligned} A^{p+1} &= AA^p = A(\lambda A + \mu I_n) \\ &= \lambda A^2 + \mu A = \lambda(\alpha A + \beta I_n) + \mu A = (\lambda\alpha + \mu)A + \lambda\beta I_n, \end{aligned}$$

donc A^{p+1} est elle aussi combinaison linéaire de A et I_n . Ainsi, d'après le principe de récurrence, toutes les puissances de A sont combinaisons linéaires de A et I_n .

3. On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I_3,$$

donc la question 1 permet d'écrire que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I_3)$, soit

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

8. On aurait pu procéder à partir de la première.

4. On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont tels que $A^2 = \lambda A + \mu I_2$, alors on doit avoir $a^2 + bc = \lambda a + \mu$ (en considérant le premier coefficient des matrices reliées par l'égalité) et $(a+d)b = \lambda b$ (en considérant leur coefficient supérieur droit). Le choix de $\lambda = a+d$ et de $\mu = a^2 + bc - \lambda a = bc - ad$ permet de satisfaire ces deux équations. On vérifie réciproquement que l'on a bien⁹ :

$$A^2 = (a+d)A + (bc-ad)I_2.$$

On en déduit grâce à la question 1 que si $bc - ad \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{bc - ad} (A - (a+d)I_2) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

ce qui est bien la formule du cours.

Correction de l'exercice 33. Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, le centre de gravité de l'ensemble constitué par les k briques supérieures est à l'abscisse

$$\tilde{x}_k = \frac{1}{k} (x_{n-k+1} + \dots + x_n) = \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^n x_i.$$

Le plongeoir optimal est donc caractérisé par le fait que l'on ait, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$x_{n-k} + \frac{\ell}{2} = \tilde{x}_k,$$

soit

$$-x_{n-k} + \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^n x_i = \frac{\ell}{2}.$$

Ainsi, il vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -x_1 + \frac{1}{n-1} x_2 + \frac{1}{n-1} x_3 + \dots + \frac{1}{n-1} x_n & = & \frac{\ell}{2} \\ -x_2 + \frac{1}{n-2} x_3 + \dots + \frac{1}{n-2} x_n & = & \frac{\ell}{2} \\ \vdots \\ -x_{n-1} + x_n & = & \frac{\ell}{2} \end{array} \right.$$

soit, en remarquant que $x_k = y_1 + \dots + y_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \frac{n-1}{n-1} y_2 + \frac{n-2}{n-1} y_3 + \frac{n-3}{n-1} y_4 + \dots + \frac{1}{n-1} y_n & = & \frac{\ell}{2} \\ \frac{n-2}{n-2} y_3 + \frac{n-3}{n-2} y_4 + \dots + \frac{1}{n-2} y_n & = & \frac{\ell}{2} \\ \vdots \\ \frac{1}{n-(n-1)} y_n & = & \frac{\ell}{2} \end{array} \right.$$

9. Il s'agit de l'égalité « parachutée » au début de la démonstration du théorème 38 !

Or ce système se résout grâce aux opérations $L_i \leftarrow (n-i)L_i - (n-i-1)L_{i+1}$ pour $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, qui donnent :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (n-1)y_2 & = & \frac{\ell}{2} \\ (n-2)y_3 & = & \frac{\ell}{2} \\ \vdots & & \\ y_n & = & \frac{\ell}{2} \end{array} \right.$$

d'où enfin :

$$\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad y_i = \frac{\ell}{2(n-i+1)}.$$

Le plongeoir optimal correspond donc à un agencement dans lequel l'avancée entre la première et la deuxième brique est égale à $\frac{\ell}{2(n-1)}$, l'avancée entre la deuxième et la troisième est égale à $\frac{\ell}{2(n-2)}$, et ainsi de suite jusqu'à la n -ième brique, dont l'avancée par rapport à la $(n-1)$ -ième doit être égale à $\frac{\ell}{2}$.

On a ainsi, moyennant un changement d'indice de sommation ($j = n-i+1$) et en rappelant que $y_1 := x_1 = \frac{\ell}{2}$:

$$\begin{aligned} \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad x_k &= \sum_{i=1}^k y_i = y_1 + \sum_{i=2}^k \frac{\ell}{2(n-i+1)} \\ &= y_1 + \sum_{j=n-k+1}^{n-1} \frac{\ell}{2j} \\ &= \frac{\ell}{2} \left(1 + \sum_{j=n-k+1}^{n-1} \frac{1}{j} \right). \end{aligned}$$

Signalons un fait intéressant : la longueur du plongeoir optimal est

$$\ell_n^* = x_n + \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} \left(2 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} \right) \tag{1}$$

et en utilisant l'équivalent classique de la série harmonique (voir l'exercice 19 du chapitre sur les séries, page 752), on trouve

$$\ell_n^* \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\ell}{2} \ln(n).$$

Cela montre entre autres que le plongeoir peut être rendu arbitrairement long en utilisant suffisamment de briques, mais que le nombre de briques nécessaires croît de façon exponentielle en fonction de la longueur requise.

Correction de l'exercice 34.

1. Les matrices d'adjacence de G_1, G_2, G_3 et G_4 sont :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Le coefficient $(A^2)_{1,2}$ vaut $\sum_{k=1}^n a_{1,k}a_{k,2}$. Or pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, le réel $a_{1,k}a_{k,2}$ vaut 1 si le graphe contient une arête entre 1 et k *et* une arête allant entre k et 2, et il vaut 0 sinon. Ainsi, la somme $\sum_{k=1}^n a_{1,k}a_{k,2}$ est égale au nombre de k pour lesquels $1 \rightarrow k \rightarrow 2$ est un chemin de longueur 2 entre 1 et 2 au sein du graphe G ; cette somme représente donc le nombre de chemins de longueur 2 entre 1 et 2 au sein de G . Plus généralement, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le coefficient $(A^2)_{i,j}$ représente le nombre de chemins de longueur 2 entre i et j au sein du graphe G .
3. Interprétons les coefficients de la matrice A^3 . Si $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, alors

$$(A^3)_{i,j} = (A^2 \cdot A)_{i,j} = \sum_{k=1}^n (A^2)_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}a_{\ell,k}a_{k,j}$$

compte le nombre de couples (k, ℓ) tels que le chemin $i \rightarrow \ell \rightarrow k \rightarrow j$ figure au sein du graphe G , c'est-à-dire le nombre de chemins de longueur 3 dans G .

En extrapolant ce résultat (par une démonstration similaire mais lourde notationnellement, que l'on épargne au lecteur), on peut dire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le réel $(A^p)_{i,j}$ est le nombre de chemins de longueur p entre i et j dans le graphe G .

4. D'après la question précédente, il s'agit de calculer $(A^8)_{1,3}$ dans les quatre cas proposés. Pour cela, on calcule A^2 , puis $A^4 = (A^2)^2$, et enfin $(A^8)_{1,3}$, en se limitant au calcul du coefficient de $A^8 = (A^4)^2$ situé à la ligne 1 et à la colonne 3.

Dans le premier cas, on a

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donc le nombre de chemins de longueur 8 entre les sommets 1 et 3 dans le graphe G_1 est

$$(A_1^8)_{1,3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 + 15 = 21.$$

On trouve de même

$$A_2^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2^4 = (A_2^2)^2 = 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = 8 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et enfin

$$A_2^8 = (A_2^4)^2 = 64 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = 128 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc le nombre de chemins de longueur 8 entre les sommets 1 et 3 dans le graphe G_2 est

$$(A_2^8)_{1,3} = 128.$$

On a ensuite¹⁰

$$A_3^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3^4 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 21 & 20 & 20 & 20 \\ 20 & 21 & 20 & 20 \\ 20 & 20 & 21 & 20 \\ 20 & 20 & 20 & 21 \end{pmatrix}$$

donc le nombre de chemins de longueur 8 entre les sommets 1 et 3 dans le graphe G_3 est

$$(A_3^8)_{1,3} = (21 \ 20 \ 20 \ 20) \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 21 \\ 20 \end{pmatrix} = 420 + 400 + 420 + 400 = 1640.$$

Enfin, on calcule courageusement

$$A_4^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

puis

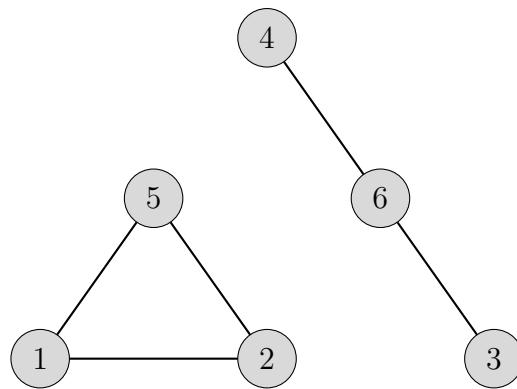
$$A_4^4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 10 & 10 & 15 & 18 \\ 15 & 30 & 15 & 18 & 25 & 25 \\ 10 & 15 & 12 & 10 & 18 & 15 \\ 10 & 18 & 10 & 12 & 15 & 15 \\ 15 & 25 & 18 & 15 & 30 & 25 \\ 18 & 25 & 15 & 15 & 25 & 30 \end{pmatrix},$$

10. On pouvait aussi calculer les puissances successives de A_3 à l'aide de la formule du binôme sur le modèle des exercices 17, 30 et 32.

donc le nombre de chemins de longueur 8 entre les sommets 1 et 3 dans le graphe G_4 est

$$(A_4^8)_{1,3} = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 10 & 10 & 15 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 12 \\ 10 \\ 18 \\ 15 \end{pmatrix} = 1105.$$

5. Le graphe ci-dessous est non connexe puisqu'il ne permet pas de rejoindre le sommet 4 à partir du sommet 2 :



Dire que G est connexe signifie que pour tous $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, il existe un chemin dans le graphe entre i et j . Or si un chemin de longueur donnée relie i à j dans G , en supprimant les boucles éventuelles de ce chemin (c'est-à-dire en ne le faisant jamais passer deux fois par le même point) on peut obtenir un chemin entre i et j dans G de longueur inférieure ou égale à $n - 1$ (puisque un chemin entre n sommets ne passant pas deux fois par le même point ne peut contenir que $n - 1$ arêtes au plus). Ainsi, G est connexe si et seulement si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, il existe un chemin de longueur inférieure ou égale à $n - 1$ reliant i et j dans G . Or pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, le nombre de chemins de longueur inférieure ou égale à $n - 1$ dans G vaut

$$(A)_{i,j} + (A^2)_{i,j} + \cdots + (A^{n-1})_{i,j} = (A + A^2 + \cdots + A^{n-1})_{i,j}$$

d'après la question 3, donc le graphe G est connexe si et seulement si la matrice $A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ est à coefficients strictement positifs.

À titre d'exemple, le graphe G_1 est connexe et

$$A_1 + A_1^2 + A_1^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

est à coefficients strictement positifs. En revanche, si l'on note A la matrice d'adjacence du graphe non connexe représenté au début de cette question, on

a $A_{2,4}^p = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, donc $(A + A^2 + \cdots + A^5)_{2,4} = 0$ (puisque 4 n'est pas accessible depuis 2 par des arêtes du graphe), ce qui montre que tous les coefficients de $A + A^2 + \cdots + A^5$ ne sont pas strictement positifs.

Correction de l'exercice 35.

1. Dans ce cas, on a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Si deux des x_i sont égaux, alors les lignes correspondantes de M sont égales : ainsi, M est non inversible.
3. En appliquant les opérations sur les colonnes¹¹, on transforme M en

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \cdots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

En appliquant ensuite les opérations sur les lignes (qui sont licites puisque $x_i - x_1 \neq 0$ pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$), on transforme cette matrice en

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{x_2 - x_1} & 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{x_n - x_1} & 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

4. La matrice M' peut s'écrire par blocs comme

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U & V \end{pmatrix},$$

où $U \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{R})$ est le vecteur colonne dont tous les coefficients valent 1, et où $V \in \mathcal{M}_{n-1,n-1}(\mathbb{R})$ est la matrice de Vandermonde associée aux coefficients x_2, \dots, x_n .

On peut alors démontrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice de Vandermonde associée à k coefficients différents deux à deux est inversible. En effet, il est clair que si $k = 1$, alors $M = (1) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ est inversible. À présent, si la propriété est vraie pour un k donné, alors la matrice de Vandermonde $M \in \mathcal{M}_{k+1}(\mathbb{R})$ associée aux coefficients x_1, \dots, x_{k+1} peut être transformée par les opérations élémentaires décrites dans l'énoncé en

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U & V \end{pmatrix}$$

11. On trouvera une preuve plus concise de l'inversibilité des matrices de Vandermonde dans l'exercice ?? du chapitre ??.

avec V une matrice de Vandermonde inversible par hypothèse de récurrence (puisque associée aux coefficients x_2, \dots, x_{k+1} deux à deux distincts). On peut alors transformer V en matrice triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls $T \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ par l'algorithme du pivot, ce qui, en appliquant ces transformations à M' , transforme cette dernière en une matrice de la forme

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U' & T \end{pmatrix}$$

avec $U' \in \mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$. Or M'' est triangulaire inférieure à coefficients diagonaux non nuls, donc elle est inversible. Ainsi, M l'est elle aussi, ce qui établit l'hérédité de la proposition et clôt la preuve.

Correction de l'exercice 36.

- En appliquant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{2}L_1$ puis $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{3}L_2$, on transforme A en la matrice triangulaire supérieure

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Or ces deux opérations élémentaires correspondent à des multiplications successives, à gauche, par les matrices de transvection

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$T_2 T_1 A = U.$$

Or T_1 et T_2 sont inversibles, donc $T_2 T_1$ l'est et on peut écrire

$$A = (T_2 T_1)^{-1} U.$$

La matrice $T_2 T_1$, en tant que produit de matrices triangulaires inférieures, l'est aussi ; son inverse l'est donc elle aussi. En notant $L = (T_2 T_1)^{-1}$, on a alors $A = LU$ avec L triangulaire inférieure et U triangulaire supérieure. En écrivant $(T_2 T_1)^{-1} = T_1^{-1} T_2^{-1}$ et en remarquant que T_1^{-1} (resp. T_2^{-1}) est la matrice de la transvection annulant l'effet de T_1 (resp. de T_2), c'est-à-dire de l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ (resp. $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_2$), on peut écrire

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

La décomposition $A = LU$ (où L est l'abréviation de *lower* et U celle de *upper*) s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

2. En utilisant le fait que le produit LUX peut désigner indifféremment $(LU)X$ ou $L(UX)$ par associativité du produit matriciel, on peut écrire :

$$AX = Y \iff LUX = Y \iff LX' = Y.$$

3. Écrivons

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

(a) On a :

$$\begin{aligned} LX' &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x'_1 = 0 \\ -\frac{1}{2}x'_1 + x'_2 = 1 \\ -\frac{2}{3}x'_2 + x'_3 = 2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x'_1 = 0 \\ x'_2 = 1 \\ x'_3 = \frac{8}{3} \end{cases} \\ &\iff X' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On résout à présent :

$$\begin{aligned} UX &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ \frac{3}{2}x_2 - x_3 = 1 \\ \frac{4}{3}x_3 = \frac{8}{3} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Il est intéressant de noter qu'aucune opération élémentaire n'a été nécessaire pour manipuler ces deux systèmes triangulaires, que l'on a intégralement pu résoudre de proche en proche.

(b) On a :

$$\begin{aligned}
 LX' &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} x'_1 = -1 \\ -\frac{1}{2}x'_1 + x'_2 = 1 \\ -\frac{2}{3}x'_2 + x'_3 = 3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x'_1 = -1 \\ x'_2 = \frac{1}{2} \\ x'_3 = \frac{10}{3} \end{cases} \\
 &\iff X' = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

On résout à présent :

$$\begin{aligned}
 UX &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1 \\ \frac{3}{2}x_2 - x_3 = \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3}x_3 = \frac{10}{3} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 2 \\ x_3 = \frac{5}{2} \end{cases} \\
 &\iff X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$AX = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

(c) On a :

$$\begin{aligned}
 LX' = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} x'_1 = 6 \\ -\frac{1}{2}x'_1 + x'_2 = -2 \\ -\frac{2}{3}x'_2 + x'_3 = 5 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x'_1 = 6 \\ x'_2 = 1 \\ x'_3 = \frac{17}{3} \end{cases} \\
 &\iff X' = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

On résout à présent :

$$\begin{aligned}
 UX = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix} &\iff \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ \frac{17}{3} \end{pmatrix} \\
 &\iff \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 6 \\ \frac{3}{2}x_2 - x_3 = 1 \\ \frac{4}{3}x_3 = \frac{17}{3} \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x_1 = \frac{19}{4} \\ x_2 = \frac{7}{2} \\ x_3 = \frac{17}{4} \end{cases} \\
 &\iff X = \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{17}{4} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$AX = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \iff X = \begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ \frac{7}{2} \\ \frac{17}{4} \end{pmatrix}.$$

4. Le fait de disposer d'une décomposition de A sous la forme LU permet de réduire la résolution d'un système non triangulaire de la forme $AX = Y$ à celle des deux systèmes triangulaires $LX' = Y$ et $UX = X'$. Cette manœuvre, qui permet de ne pas avoir à éliminer les variables du système par des transvections¹², permet d'économiser de nombreux calculs, ce qui est particulièrement

12. Plus précisément, la décomposition de A sous la forme LU permet de conserver en mémoire les opérations de transvection faites pour rendre triangulaire un système général de la forme $AX = Y$. Le calcul réalisé dans la première question revient à identifier ces opérations une fois pour toutes pour ensuite se limiter à des systèmes triangulaires.

utile lorsque l'on réalise par ordinateur la résolution de systèmes linéaires associés à une même matrice A et pour de grandes valeurs de n .

Pour n grand, le recours à une factorisation LU pour résoudre l'équation $AX = Y$ est plus efficace que l'inversion de A qui permettrait d'utiliser la formule $X = A^{-1}Y$. Pour donner un ordre d'idées, le calcul de la factorisation LU puis la résolution des deux systèmes triangulaires demande à l'ordinateur de réaliser environ $\frac{2n^3}{3}$ opérations, tandis que l'inversion complète de la matrice A et le calcul de $A^{-1}Y$ lui demande environ $2n^3$ opérations, soit trois fois plus.

Correction de l'exercice 37.

1. (a) Le système définissant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence se réécrit sous la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$$

$$\text{avec } A := \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

- (b) La question précédente montre que la suite de vecteurs-colonnes $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une « suite géométrique matricielle de raison A » (cette raison étant appliquée à gauche). Il est raisonnable de chercher à généraliser le résultat existant pour les suites géométriques réelles en écrivant¹³ que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette proposition se démontre par une récurrence facile sur n : en effet, on a $X_0 = I_3 X_0 = A^0 X_0$, et si on a $X_n = A^n X_0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors $X_{n+1} = AX_n = AA^n X_0 = A^{n+1} X_0$, ce qui clôture la preuve.

- (c) On dispose de la valeur de $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. D'après la question précédente, pour déterminer les valeurs explicites de u_n et v_n (c'est-à-dire la valeur de X_n) en fonction de n , il suffit de savoir calculer les puissances successives de A .

Pour ce faire, on écrit que $A = \sqrt{3}I_2 + B$, avec $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie que $B^2 = -I_2$, d'où $B^3 = -B$, puis $B^4 = I_2$, et on montre ainsi par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $B^k = (-1)^{\frac{k}{2}}I_2$ si k est pair et $B^k = (-1)^{\frac{k-1}{2}}B$ si k est impair. Fixons à présent $n \in \mathbb{N}$. Comme $\sqrt{3}I_2$ et $2B$ commutent, on peut écrire grâce à la formule du binôme que

$$\begin{aligned} A^n &= (\sqrt{3}I_2 + B)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k \sqrt{3}^{n-k} \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^{n-k} (-1)^{\frac{k}{2}} I_2 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^{n-k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} B \end{aligned}$$

13. Attention, il ne s'agit pas de calquer sans réfléchir la relation $u_n = u_0 a^n$ valable pour une suite géométrique (u_n) de raison a . Le vecteur X_n vaut $A^n X_0$ et non $X_0 A^n$; cette dernière écriture n'a d'ailleurs pas de sens puisque X_0 est de format 3×1 et A^n de format 3×3 .

Il nous reste à calculer les sommes

$$S_1 := \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^{n-k} (-1)^{\frac{k}{2}}$$

et

$$S_2 := \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^{n-k} (-1)^{\frac{k-1}{2}}.$$

On écrit pour cela¹⁴

$$S_1 = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^{n-k} i^k \right)$$

et

$$S_2 = \operatorname{Im} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^{n-k} i^k \right)$$

Or

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sqrt{3}^{n-k} i^k = (\sqrt{3} + i)^n$$

d'après la formule du binôme, donc

$$S_1 = \operatorname{Re} ((\sqrt{3} + i)^n) \quad \text{et} \quad S_2 = \operatorname{Im} ((\sqrt{3} + i)^n).$$

En écrivant $\sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, on obtient

$$(\sqrt{3} + i)^n = \left(2e^{i\frac{\pi}{6}} \right)^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}},$$

donc

$$S_1 = 2^n \cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) \quad \text{et} \quad S_2 = 2^n \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right).$$

Ainsi, on a

$$A^n = S_1 I_2 + S_2 B = 2^n \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) & \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) \\ -\sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) & \cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) \end{pmatrix},$$

donc

$$X_n = A^n X_0 = 2^n \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) & \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) \\ -\sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) & \cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \left(\cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) \right) \\ 2^n \left(\cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) - \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) \right) \end{pmatrix},$$

soit

$$u_n = 2^n \left(\cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) + \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) \right) \quad \text{et} \quad v_n = 2^n \left(\cos \left(\frac{n\pi}{6} \right) - \sin \left(\frac{n\pi}{6} \right) \right).$$

14. L'idée de cette réécriture provient du fait que l'alternance observée dans l'expression des B^k rappelle celle des puissances de i : en effet, on a $i^k = (-1)^{\frac{k}{2}}$ si k est pair et $i^k = (-1)^{\frac{k-1}{2}}i$ si k est impair.

Notons qu'en raison de cette similitude, la matrice B peut être utilisée pour donner une construction de \mathbb{C} alternative à celle que nous avons présentée dans l'[exercice 50 du chapitre 6](#) : en notant i la matrice $-B$ et en assimilant pour tout $x \in \mathbb{R}$ le réel x à la matrice scalaire xI_2 , on retrouve la relation $i^2 = -1$, puis toutes les propriétés de \mathbb{C} comme dans la construction utilisant les points du plan.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ u_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ -3u_{n+2} + 2u_{n+1} + 2u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = AX_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

(b) On a

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 3-2\sqrt{2} & 3+2\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 8 & 16 & 4 \\ -2-4\sqrt{2} & -4-\sqrt{2} & 6+5\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-4 & 6-5\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3, \end{aligned}$$

donc P est inversible et $\frac{1}{28} \begin{pmatrix} 8 & 16 & 4 \\ -2-4\sqrt{2} & -4-\sqrt{2} & 6+5\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-4 & 6-5\sqrt{2} \end{pmatrix}$ est bien son inverse.

(c) On trouve par le calcul :

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP \\ &= \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 8 & 16 & 4 \\ -2-4\sqrt{2} & -4-\sqrt{2} & 6+5\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}-4 & 6-5\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3-2\sqrt{2} & 3+2\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}-2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La matrice D est donc diagonale (d'où la lettre choisie pour la noter).

(d) La proposition est vraie pour $n = 0$ puisque $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

Supposons-la vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ donné ; on a alors

$$A^{n+1} = AA^n = (PDP^{-1})(PD^nP^{-1})$$

par l'hypothèse de récurrence, d'où, par associativité du produit matriciel,

$$A^{n+1} = PD(P^{-1}P)D^nP^{-1} = PDI_3D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1},$$

ce qui établit la proposition au rang $n + 1$.

Ainsi, la proposition à démontrer est vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

- (e) La relation $X_{n+1} = AX_n$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$ permet d'écrire comme dans la question 1 que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0 = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soit à présent $n \in \mathbb{N}$. On peut écrire d'après la question précédente :

$$\begin{aligned} A^n &= PD^n P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 - 2\sqrt{2} & 3 + 2\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} - 2 & -\sqrt{2} - 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2 - \sqrt{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{2} - 2)^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & (3 - 2\sqrt{2})(-2 - \sqrt{2})^n & (3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{2} - 2)^n \\ 1 & (\sqrt{2} - 2)(-2 - \sqrt{2})^n & (-\sqrt{2} - 2)(\sqrt{2} - 2)^n \\ 1 & 2(-2 - \sqrt{2})^n & 2(\sqrt{2} - 2)^n \end{pmatrix} \cdot P^{-1}. \end{aligned}$$

Le terme u_n est le premier coefficient du vecteur $X_n = A^n X_0$, avec $X_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il n'est pas nécessaire d'effectuer le fastidieux calcul complet de $A^n X_0$ pour l'obtenir : on peut se contenter de remarquer que $A^n X_0$ est égal au double de la première colonne de A^n , et que son premier coefficient, qui vaut u_n , est donc égal au double du premier coefficient de A^n . Or le coefficient $(A^n)_{1,1}$ est obtenu en multipliant la première ligne de la matrice PD^n détaillée ci-dessus par la première colonne de la matrice P^{-1} explicitée dans la question 2(c). Ainsi, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{14} \left(1 \cdot 8 + (3 - 2\sqrt{2})(-2 - \sqrt{2})^n (-2 - 4\sqrt{2}) + (3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{2} - 2)^n (4\sqrt{2} - 2) \right) \\ &= \frac{1}{14} \left(8 + (10 - 8\sqrt{2})(-2 - \sqrt{2})^n + (10 + 8\sqrt{2})(\sqrt{2} - 2)^n \right) \\ &= \frac{1}{7} \left(4 + (5 - 4\sqrt{2})(-2 - \sqrt{2})^n + (5 + 4\sqrt{2})(\sqrt{2} - 2)^n \right). \end{aligned}$$

Cette suite de questions illustre l'intérêt de disposer d'une matrice diagonale D et d'une matrice inversible P vérifiant les relations $A = PDP^{-1}$ pour pouvoir calculer A^n aisément. Nous verrons dans le cours de diagonalisation en deuxième année sous quelles conditions une telle décomposition existe, et comment il est possible de l'expliciter le cas échéant.