2 ENTRAÎNEMENT

Exercice 15. En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ $\quad(iii)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(3-2x)}{x-1}$ $\quad(v)$ $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\cos(e^x)-1}{e^x}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{5x+1}-e^{3x+1}}{2x}$ $\quad(iv)$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ $\quad(vi)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x)\ln(1-x)$

Exercice 16. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur un voisinage de a et dérivable en a. On suppose que $f'(a) > 0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]a-\varepsilon, a\right[, \quad f(x) < f(a) \quad \text{et} \quad \forall x \in \left]a, a+\varepsilon\right[, \quad f(a) < f(x).$$

Exercice 17. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur un voisinage de a.

1. Supposons que f est dérivable en a. Montrer que

$$f'(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}.$$

2. Montrer que la réciproque du résultat précédent est fausse, au sens où l'existence d'une limite finie pour la quantité $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ n'implique pas nécessairement que f est dérivable en a.
3. Supposons f continue. Montrer que f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ :\ \forall (h,k) \in \left]0, \delta\right[^2, \quad \left| \frac{f(a+h)-f(a-k)}{h+k} - \ell \right| \leqslant \varepsilon,$$

et que dans ce cas on a $f'(a) = \ell$.

Exercice 18. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer qu'une fonction f définie sur un voisinage V de a est dérivable en a si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ ainsi qu'une fonction $h : V \to \mathbb{R}$ de limite nulle en a tels que

$$\forall x \in V, \quad f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)h(x),$$

et que dans ce cas on a $f'(a) = \lambda$.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que :

1. Si f est paire, alors f' est impaire.
2. Si f est impaire, alors f' est paire.

Exercice 20.

1. Si $x \in \mathbb{R}$, rappeler la relation donnant $\cos(x)$ comme un sinus.
2. En considérant la relation $\sin' = \cos$ connue, montrer que $\cos' = -\sin$.

Exercice 21. Montrer sur le modèle de l'exemple 17 du cours que la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\cos' = -\sin$.

Exercice 22. Pour les fonctions f et les points a considérés :

- Dire si f est dérivable en a.
- Si f n'est pas dérivable en a, dire si f est dérivable à gauche et/ou à droite en a.
- Donner l'équation de la tangente ou de la (des) demi-tangentes à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

(i) $f : x \mapsto x^5 + 2x$ et $a = -1$

(ii) $f = \sin$ et $a = \pi$

(iii) $f : x \mapsto \sqrt{e^{x^2} - 1}$ et $a = 0$

(iv) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et $a = 1$

(v) $f : x \mapsto \arctan\left(x^2\right)$ et $a = 0$

(vi) $f : x \mapsto \ln\left(\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$ et $a = \frac{\pi}{2}$

Exercice 23. Soient I, J, K des intervalles ouverts non vides et soient $f : K \to \mathbb{R}$, $g : J \to K$ et $h : I \to J$ des fonctions dérivables. Montrer que la composée $f \circ g \circ h$ est dérivable et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in I, \quad (f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))g'(h(x))h'(x).$$

Exercice 24. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soient f, g, h des fonctions définies et dérivables sur I. Montrer que le produit fgh est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

Exercice 25 (Règle de l'Hôpital). On présente dans cet exercice une méthode d'étude de certaines formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$.
Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ et dérivables en a telles que $f(a) = g(a) = 0$.

1. Supposons que $g'(a) \neq 0$. Montrer que
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$
2. Supposons que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a mais que $g'(a) = 0$ et que $f'(a) \neq 0$. Montrer que
$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty.$$
3. Déterminer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{e^x - 1}$ $\qquad$ (iii) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + \tan(x) - \cos(x)}$ $\qquad$ (iv) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

Ce résultat porte le nom de Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital (1661–1704). L'auteur véritable de cette règle est Jean Bernoulli (1667 – 1748), membre d'une grande famille de mathématiciens suisses, à qui L'Hôpital payait une pension mensuelle en échange de rapports réguliers sur les progrès du calcul infinitésimal. Bien que L'Hôpital ait reconnu la paternité de ce résultat à Bernoulli dès sa publication, on persiste encore aujourd'hui à donner à la règle le nom du marquis (c'est une nouvelle occurrence de la loi d'éponymie de Stigler *déjà croisée dans le chapitre de trigonométrie).*

Exercice 26. Soit $n \geqslant 0$.

1. Rappeler l'expression sous forme de somme de la quantité $(a+1)^n$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. En dérivant l'égalité obtenue à la question 1, montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$
3. Proposer une autre méthode de calcul de la somme ci-dessus.

Exercice 27. On considère la fonction
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^x. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, noté $\widetilde{f}$.
3. La fonction $\widetilde{f}$ est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 28. On considère la fonction

$$f : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^{-\frac{1}{|x|}} \ln(|\sin(x)|).$$

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, que l'on notera $\widetilde{f}$.
2. La fonction $\widetilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 29. Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité des fonctions définies par les expressions suivantes, puis calculer leur dérivée.

(i) $f(x) = x\ln(x) - x$

(ii) $f(x) = 2^x - 5^x$

(iii) $f(x) = x\arctan(x)$

(iv) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

(v) $f(x) = \arctan(e^x)$

(vi) $f(x) = \sin(\cos(\tan(x)))$

(vii) $f(x) = e^{e^{e^x}}$

(viii) $f(x) = x^2\sin(x)\cos(x)$

(ix) $f(x) = \ln(|x|)$

(x) $f(x) = |x|\sin(x)$

(xi) $f(x) = \frac{1}{\ln(|x|)}$

(xii) $f(x) = \ln(|\cos(x)|)$

Exercice 30 (Deux formules de trigonométrie).

1. (a) Montrer à l'aide de la dérivation que $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.
   (b) Retrouver ce résultat à l'aide de la formule de trigonométrie donnant la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
2. (a) Montrer à l'aide de la dérivation que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante sur $\mathbb{R}_-^*$, où elle vaut $-\frac{\pi}{2}$, et sur $\mathbb{R}_+^*$, où elle vaut $\frac{\pi}{2}$.
   (b) Retrouver ce résultat à l'aide de la formule de trigonométrie donnant la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ en fonction de $\tan(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

Exercice 31. Étudier la fonction $f : x \mapsto 3x^5 + 5x^3 - 180x$.

Exercice 32. Étudier la fonction $f : x \mapsto x - \sqrt{e^x + 1}$ et donner l'allure de son graphe.

Exercice 33. Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1 - \sin(x)}$ et donner l'allure de son graphe.

« Étudier f » consiste à donner son ensemble de définition, ses limites aux bornes des intervalles constituant cet ensemble, sa périodicité et sa parité éventuelles, ainsi qu'à déterminer ses variations et les asymptotes éventuelles à sa courbe.

Exercice 34. Étudier la fonction $f : x \mapsto \cos(2x) - 2\cos(x)$ et donner l'allure de son graphe.

Exercice 35. Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln\big(x^4 - 2x^2 + 2\big)$.

Exercice 36. Exhiber un contre-exemple au théorème de Rolle dans chacun des trois cas suivants :

(i) $f(a) = f(b)$ et f est dérivable sur $]a,b[$ mais elle n'est pas continue sur $[a,b]$.

(ii) $f(a) = f(b)$ et f est continue sur $[a,b]$ mais elle n'est pas dérivable sur $]a,b[$.

(iii) f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ mais $f(a) \neq f(b)$.

Exercice 37. Le but de cet exercice est d'étendre le théorème de Rolle au cas où l'intervalle de définition de la fonction est infini, ainsi qu'au cas où les valeurs prises par la fonction sont remplacées par des limites (finies ou infinies).

1. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère une fonction f dérivable sur $]a,b[$ et vérifiant $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

   (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère une fonction f dérivable sur $]a,b[$ et vérifiant $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère une fonction f continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ et vérifiant $f(a) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

   (b) On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 38. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit f une fonction dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, il existe $c \in]a,b[$ tel que le point $(x,0)$ du plan soit situé sur la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c.

Indication : pour x fixé, on pourra considérer la fonction $g : t \mapsto \frac{f(t)}{x-t}$.

Exercice 39. Montrer que la fonction $\arctan + 1$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

Indication : on pourra utiliser le théorème de la bijection avec la fonction $g : x \mapsto \arctan(x) + 1 - x$.

Exercice 40. Montrer que la fonction cos admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^2.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 42. On considère la fonction $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c_x^2} \exp\left(\frac{1}{c_x}\right).$$

2. En déduire la limite de la quantité $x^2\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 43 (Théorème des accroissements finis généralisés). Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, avec $a < b$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

1. Montrer que $g(b) \neq g(a)$.
2. En considérant la fonction

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a)), \end{array}$$

montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) \neq 0$ et

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

3. En quoi le résultat de la question précédente est-il une généralisation du théorème des accroissements finis ?

Exercice 44. On pose $I = [1, 2]$ et on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans I.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3 - x}$ admet un unique point fixe α sur I que l'on précisera.

3. Montrer que pour tous $x, y \in I$ on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|,$$

puis que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.

Exercice 45. On donne les approximations $\ln(2) \approx 0,69$ et $\ln(3) \approx 1,10$, et on pose $I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{u_n} + \ln(u_n).$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{2}{x} + \ln(x) \end{array}$$

et montrer que I est stable par f.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans I.
3. Montrer que f admet un unique point fixe α sur I.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|,$$

puis que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.

Exercice 46. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{\cos(u_n)}{2}.$$

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{\cos(x)}{2}$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, que l'on notera α.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$.
3. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.

Exercice 47. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $f(0) \geqslant 0$ et $f' \geqslant f$. Montrer que f est à valeurs positives.

Indication : on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$.

Exercice 48 (Équations différentielles linéaires). Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'*équation différentielle*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = af(x) + b. \tag{1}$$

1. On suppose que $a = 0$. Déterminer toutes les solutions de l'équation (1).
2. On suppose à présent que $a \neq 0$.
   (a) Vérifier que la fonction $g : x \mapsto e^{ax} - \frac{b}{a}$ est solution de (1).
   (b) Si f est une solution de (1), vérifier que la fonction $x \mapsto e^{-ax}(f(x) - g(x))$ est constante.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (1).

Une équation différentielle *est une équation fonctionnelle reliant la dérivée d'une fonction à la fonction elle-même. On retrouve des équations différentielles au fondement d'un grand nombre de modèles :*

- *Physiques : refroidissement d'un liquide, désintégration atomique, mouvement d'une planète en orbite autour d'une étoile...*
- *Économiques : croissance de la production, valorisation d'un capital, ajustement des prix en temps continu...*
- *Biologiques : croissance d'une population, mutation d'un gène, propagation d'un pathogène (voir l'exercice 64)...*
- *Financiers : modélisation du prix d'un actif en situation d'incertitude (l' équation différentielle est alors généralement couplée avec une composante aléatoire à temps continu nommée* mouvement brownien, *voir chapitre 16).*

Si les équations différentielles linéaires de la forme (1) admettent des solutions explicites, la grande majorité des équations différentielles ne peut se résoudre de façon analytique à l'aide des fonctions usuelles du cours : c'est le cas par exemple de l'équation différentielle $xf'(x) + f'(x)^2 = e^{f(x)}$*, plus souvent notée* $xy' + y'^2 = e^y$*. La passionnante théorie des équations différentielles (et plus largement des systèmes dynamiques, qui décrivent des grandeurs évoluant selon des lois fixées) permet malgré tout d'effectuer une étude* qualitative *des solutions non explicites pour pouvoir décrire leur comportement en termes de convergence, de bornitude, d'explosion... Cette théorie ne figure cependant pas au programme de B/L.*

Exercice 49. On cherche l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xf(x) + f'(x) = 0. \tag{2}$$

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $g : x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$ est solution de (2).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable solution de (2). Montrer que la fonction $h : x \mapsto f(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ est constante.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (2).

Exercice 50 (Séries de Riemann). Soit $\alpha > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha},$$

appelée *série de Riemann de paramètre* α.

1. Supposons tout d'abord que $\alpha > 1$.
   (a) Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a
   $$\frac{\alpha - 1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}.$$
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une limite réelle, notée $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. On suppose à présent que $\alpha < 1$.
   (a) Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a
   $$(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leqslant \frac{1-\alpha}{k^\alpha}.$$
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.
3. Que se passe-t-il dans le cas $\alpha = 1$?