

---

## VARD : démonstration du théorème 55 (théorème de transfert)

---

Supposons que  $X$  prend un nombre fini de valeurs.

Pour tout  $y \in (f(X))(\Omega)$ , on peut écrire

$$(f(X) = y) = \left( X \in f^{-1}(\{y\}) \right) = \bigsqcup_{x \in f^{-1}(\{y\})} (X = x)$$

d'où

$$\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x)=y}} \mathbb{P}(X = x) \quad (1)$$

par incompatibilité des événements  $(X = x)$  qui sont en nombre fini, la dernière égalité n'étant qu'une réécriture de la somme.

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)) &= \sum_{y \in (f(X))(\Omega)} y \mathbb{P}(f(X) = y) \\ &= \sum_{y \in (f(X))(\Omega)} y \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x)=y}} \mathbb{P}(X = x) && \text{d'après (1)} \\ &= \sum_{y \in (f(X))(\Omega)} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x)=y}} y \mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{y \in (f(X))(\Omega)} \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ f(x)=y}} f(x) \mathbb{P}(X = x) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x) \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte du fait que la somme intérieure, qui porte sur tous les  $x$  de  $X(\Omega)$  tels que  $f(x) = y$ , est elle-même sommée sur toutes valeurs de  $y$  dans  $(f(X))(\Omega)$ , ce qui revient à considérer la somme sur tous les  $x$  de  $X(\Omega)$ .

La démonstration du deuxième point du théorème repose sur des considérations de convergence rendant valables les manipulations ci-dessus dans le cadre de sommes infinies ; nous nous épargnons encore une fois cette peine.  $\square$   
est finie.