Suites réelles

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 15. On détermine pour chaque suite sa monotonie, en laissant le soin au lecteur de statuer sur sa *stricte* monotonie éventuelle.

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut réécrire u_n sous la forme

$$u_n = \frac{(\sqrt{n^2+1}-n)(\sqrt{n^2+1}+n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n},$$

ce qui fait clairement apparaître que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

(ii) La suite $(2^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et la suite $\left(1-\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont positives et croissantes, donc leur produit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est aussi une suite croissante.

(iii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n+1} - u_n = 2^{n+1} + 2^{\frac{1}{n+1}} - 2^n - 2^{\frac{1}{n}} = 2^n + 2^{\frac{1}{n+1}} - 2^{\frac{1}{n}} \geqslant 2^n - 2^{\frac{1}{n}} \geqslant 0$$

car $2^{\frac{1}{n}} \leqslant 2 \leqslant 2^n$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

(iv) On remarque que l'on peut écrire $u_n = f(n)$, où $f : x \mapsto \sqrt{(x-3)^2+1}$ est une fonction dont les variations sont simples à étudier. En effet, comme $y \mapsto \sqrt{y+1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ a le même sens de variation que la fonction $x \mapsto x^2$: elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, la fonction $f : x \mapsto g(x-3)$ est décroissante sur $]-\infty, 3]$ et croissante sur $[3, +\infty[$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante jusqu'au rang 3 et croissante ensuite

(v) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} n^{10-k} + \sum_{k=0}^{10} \binom{10}{k} (-1)^k n^{10-k} - 2n^{10} \quad \text{d'après la formule du binôme} \\ &= \sum_{k\in\{2,4,6,8,10\}} \binom{10}{k} 2n^{10-k} = \sum_{j\in\{0,2,4,6,8\}} \binom{10}{j} 2n^j \quad \text{en posant } j = 10-k, \end{aligned}$$

ce qui fait apparaître u_n comme la somme de termes croissants en n. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(vi) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)^{n+1} - (n+1)n^n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)(n+1)^n - (n+1)n^n}{(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)\left((n+1)^n - n^n\right)}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^n - n^n}{n!} \geqslant 0, \end{aligned}$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Correction de l'exercice 16. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_1 + \ldots + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + \ldots + u_n}{n} = \frac{n(u_1 + \ldots + u_{n+1}) - (n+1)(u_1 + \ldots + u_n)}{n(n+1)} \\ &= \frac{nu_{n+1} - (u_1 + \ldots + u_n)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k), \end{aligned}$$

or $u_{n+1} \geqslant u_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$: la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

Correction de l'exercice 17. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\binom{n}{k} > 0$. On peut donc étudier le sens de variation de la suite (finie) des $\binom{n}{k}$ en écrivant que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a

$$\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}}{\frac{n!}{k!(n-k)!}} = \frac{k!}{(k+1)!} \frac{(n-k)!}{(n-k-1)!} = \frac{n-k}{k+1},$$

qui est supérieur à 1 si et seulement si $n - k \geqslant k + 1$, c'est-à-dire $n - 1 \geqslant 2k$, soit $k \leqslant \frac{n-1}{2}$. Ainsi, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ maximal est atteint pour la première valeur de k dépassant strictement $\frac{n-1}{2}$:

$$\max_{k\in [\![0,n]\!]} \binom{n}{k} = \begin{cases} \dbinom{n}{\frac{n}{2}} & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ \dbinom{n}{\frac{n+1}{2}} & \text{si} \quad n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Correction de l'exercice 18.

1. Une diminution de 20% équivaut à une multiplication par $\frac{4}{5}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} = \frac{4}{5}u_n + 10$.
2. L'équation $c = \frac{4}{5}c + 10$ admet pour solution $c = 50$. La suite $(u_n - 50)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\frac{4}{5}$ et de premier terme $u_0 - 50 = 50$. Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n - 50 = 50 \left(\frac{4}{5}\right)^n \quad \text{et donc} \quad u_n = 50 \left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right).$$
3. La masse de cheveux perdus par le professeur à l'année $n \in [\![0, 19]\!]$ est égale à $\frac{u_n}{5}$ grammes. Ainsi, la masse totale de cheveux perdue en 20 ans vaut
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{19} \frac{u_n}{5} &= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{19} u_n = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{19} 50 \left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) = 10 \left[\sum_{n=0}^{19} 1 + \sum_{n=0}^{19} \left(\frac{4}{5}\right)^n\right] \quad \text{par linéarité de la somme} \\ &= 10 \left[20 + \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{20}}{1 - \frac{4}{5}}\right] \underset{\cdots}{=} 250 - \frac{2^{41}}{5^{18}}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 19. On a $u_0 = 1 \geqslant 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = |u_{n-1} \cos(u_{n-1})| \geqslant 0$: ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive. Si $n \geqslant 0$, on peut donc écrire

$$u_{n+1} = |u_n \cos(u_n)| = u_n \cdot |\cos(u_n)| \leqslant u_n$$

puisque $|\cos| \leqslant 1$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Correction de l'exercice 20.

(i) L'équation caractéristique $x^2 = \frac{3x+1}{4}$ admet $-\frac{1}{4}$ et 1 pour solutions. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $u_n = \lambda\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \mu$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les conditions initiales $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ se réécrivent donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu & = & 1 \\ -\frac{1}{4}\lambda+\mu & = & 0 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 5\mu & = & 1 \\ \lambda & = & 4\mu \end{array}\right. \quad \text{soit encore} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & \frac{1}{5} \\ \lambda & = & \frac{4}{5}. \end{array}\right.$$

On a donc $u_n = \frac{4}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}\left(1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Seules les conditions initiales changent par rapport au point précédent : on a cette fois

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu & = & 1 \\ -\frac{1}{4}\lambda+\mu & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{soit, en comparant les deux lignes,} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 0 \\ \mu & = & 1. \end{array}\right.$$

Ainsi, on a $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ce qu'un examen rapide des premiers termes de la suite permet de confirmer).

(iii) L'équation caractéristique est toujours la même ; les conditions initiales donnent cette fois

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu & = & 0 \\ \frac{1}{16}\lambda+\mu & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -\mu \\ \frac{15}{16}\mu & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{et donc} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -\frac{16}{15} \\ \mu & = & \frac{16}{15}, \end{array}\right.$$

d'où $u_n = -\frac{16}{15}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \frac{16}{15} = \frac{1}{15}\left(16 - \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iv) L'équation caractéristique $x^2 = x - \frac{2}{9}$ admet pour solutions $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda\left(\frac{1}{3}\right)^n + \mu\left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les conditions initiales donnent alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu & = & 1 \\ \frac{1}{3}\lambda+\frac{2}{3}\mu & = & 1 \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \mu & = & 1-\lambda \\ -\frac{1}{3}\lambda & = & \frac{1}{3} \end{array}\right. \quad \text{et donc} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & -1 \\ \mu & = & 2, \end{array}\right.$$

d'où $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(v) L'équation caractéristique $x^2 = 2$ admet $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ pour solutions. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda(-\sqrt{2})^n + \mu\sqrt{2}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les conditions initiales donnent alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu & = & 1 \\ -\sqrt{2}\lambda+\sqrt{2}\mu & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & 1-\mu \\ -\sqrt{2}+2\sqrt{2}\mu & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda & = & \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \mu & = & \frac{2+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1}{2} \end{array}\right.$$

et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1-\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{2})^n + \frac{\sqrt{2}+1}{2}\sqrt{2}^n = \begin{cases} \sqrt{2}^n \text{si } n \text{ est pair} \\ \sqrt{2}^{n+1} \text{si } n \text{ est impair}. \end{cases}$$

Notons que l'on pouvait retrouver ce résultat facilement en remarquant que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites géométriques de raison 2.

(vi) L'équation caractéristique $x^2 = 6x - 9$ admet 3 pour unique solution réelle. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda 3^n + \mu n 3^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le fait que $u_0 = -3$ implique alors que $\lambda = -3$, et le fait que $u_1 = 6$ implique que $3\lambda + 3\mu = 6$, soit $\mu = 2 - \lambda = 5$. Ainsi, on a $u_n = (5n - 3) \cdot 3^n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

(vii) L'équation caractéristique $x^2 = 2x - 4$ admet $1 - i\sqrt{3} = 2e^{i - \frac{\pi}{3}}$ et $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ pour solutions complexes conjuguées. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait $u_n = \lambda 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) + \mu 2^n \sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le fait que $u_0 = -1$ se réécrit alors $\lambda = -1$, et le fait que $u_1 = 0$ se réécrit $\lambda + \sqrt{3}\mu = 0$, soit $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ainsi, on a $u_n = 2^n \left(-\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 21.

1. L'une des difficultés de la question consiste à déterminer quelle est la propriété à démontrer par récurrence double (il ne peut s'agir de la propriété « il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$... » puisque cette propriété ne dépend pas de n !). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose donc

$$\mathcal{P}_n : \quad « \exists a_n \in \mathbb{R} : u_n = 2^{a_n} »,$$

et on tente d'établir $\mathcal{P}_n$ à tout rang n tout en exhibant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 satisfaite par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Initialisation :

On a $u_0 = 1 = 2^0$ et $u_1 = 4 = 2^2$, donc les propositions $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies avec $a_0 = 0$ et $a_1 = 2$.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que les propositions $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ sont vraies. Alors on a

$$u_{n+2} = \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)^4 = \left(\frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}}\right)^4 = 2^{4a_{n+1} - 4a_n},$$

donc $\mathcal{P}_{n+2}$ est vérifiée avec $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$.

Conclusion :

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a établi au passage que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi mise en évidence vérifie $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ et la relation de récurrence $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. L'équation caractéristique $x^2 = 4x - 4$ admet 2 pour unique solution. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $a_n = \lambda 2^n + \mu n 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Les relations $a_0 = 0$ et $a_1 = 2$ donnent alors $\lambda = 0$ et $2\mu = 2$, donc $\mu = 1$; ainsi, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{a_n} = 2^{n2^n}.$$

Correction de l'exercice 22. On va établir la chaîne d'implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (i)$.

Si (i) est vraie, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, alors $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, donc *a fortiori* $|u_n - \ell| < \varepsilon$: ainsi, on a bien $(i) \Rightarrow (ii)$. Le même raisonnement montre que l'implication $(iii) \Rightarrow (iv)$ est vraie. L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est quant à elle évidente puisque $n > N$ implique que $n \geqslant N$ et $|u_n - \ell| < \varepsilon$ implique $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Enfin si (iv) est vraie et si $\varepsilon > 0$, alors il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > N'$ on ait $|u_n - \ell| < \varepsilon$; si l'on pose $N := N' + 1$, on constate alors que pour tout $n \geqslant N$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$, donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, l'implication $(iv) \Rightarrow (i)$ est vraie elle aussi, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 23. Nous avons déjà vu dans le cours que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, alors les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ.

Réciproquement, supposons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ et fixons $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$ on ait $|u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon$, et il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N'$ on ait $|u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui signifie que $|u_k - \ell|$ pour tous les rangs k pairs supérieurs à $2N$ et tous les rangs k impairs supérieurs à $2N' + 1$. Ainsi, si $n \geqslant \max(2N, 2N' + 1)$, on a nécessairement $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ et clôt la preuve.

Correction de l'exercice 24.

1. (a) Si $n \in \mathbb{N}$, alors
$$|\sqrt{u_n}-\sqrt{\ell}| = \left|\frac{(\sqrt{u_n}-\sqrt{\ell})(\sqrt{u_n}+\sqrt{\ell})}{\sqrt{u_n}+\sqrt{\ell}}\right| = \left|\frac{u_n-\ell}{\sqrt{u_n}+\sqrt{\ell}}\right| = \frac{|u_n-\ell|}{\sqrt{u_n}+\sqrt{\ell}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{\ell}}|u_n-\ell|.$$
   (b) On a $0 \leqslant |\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell}| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\ell}}|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $|\sqrt{u_n} - \sqrt{\ell}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème des gendarmes, d'où $\sqrt{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\ell}$.
2. Supposons que $\ell = 0$ et fixons $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, on a $|u_n - 0| \leqslant \varepsilon^2$, soit $u_n \leqslant \varepsilon^2$. Pour tout $n \geqslant N$, on a donc $\sqrt{u_n} \leqslant \varepsilon$ par croissance de la fonction racine carrée, soit $|\sqrt{u_n} - \sqrt{0}| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, on a $\sqrt{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = \sqrt{\ell}$.

Correction de l'exercice 25.

1. Si $n \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$, on a
$$n! = \underbrace{n(n-1)\cdots(\lfloor x \rfloor + 1)}_{\substack{n-\lfloor x \rfloor \text{ termes} \\ \text{supérieurs à } \lfloor x \rfloor+1}} \cdot \underbrace{\lfloor x \rfloor \cdot (\lfloor x \rfloor - 1) \cdots 2 \cdot 1}_{=\lfloor x \rfloor !} \geqslant (\lfloor x \rfloor + 1)^{n-\lfloor x \rfloor} \lfloor x \rfloor !.$$
2. Par définition de la partie entière, on a $x < \lfloor x \rfloor + 1$, d'où $\frac{\lfloor x \rfloor+1}{x} > 1$; ainsi, $\left(\frac{\lfloor x \rfloor+1}{x}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. D'après la question précédente, on a donc
$$\frac{n!}{x^n} \geqslant \frac{(\lfloor x \rfloor + 1)^{n-\lfloor x \rfloor} \lfloor x \rfloor !}{x^n} = (\lfloor x \rfloor + 1)^{-\lfloor x \rfloor} \lfloor x \rfloor ! \left(\frac{\lfloor x \rfloor + 1}{x}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$
d'où $\frac{n!}{x^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par comparaison.

Correction de l'exercice 26.

(i) On a
$$1+\frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \quad \text{et} \quad 1+\frac{n}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \text{donc} \quad \left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{n}{2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

(*ii*) Le terme $(-1)^n$ est borné par 1 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $3+n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, si bien que $\dfrac{(-1)^n}{3+n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

(*iii*) Pour se débarrasser de la forme indéterminée, on fait apparaître la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(*iv*) Si $q=1$, on a $u_n = n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Si $q \neq 1$, on a $u_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or le terme géométrique q^n tend vers 0 si $|q|<1$, tend vers $+\infty$ si $q>1$ et n'admet pas de limite si $q \leqslant -1$. Ainsi :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\frac{1}{1-q}$ si $|q|<1$; on note alors sa limite sous la forme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k := \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-q}.$$

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si $q>1$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite si $q \leqslant -1$.

(*v*) On utilise la formule donnant la somme des premiers cubes d'entiers : pour tout n, on a

$$u_n = \frac{1}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4n^4} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}{4} \quad \text{en simplifiant par } n^4$$

et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}$.

(*vi*) On utilise l'encadrement $y-1 < \lfloor y \rfloor \leqslant y$ valable pour tout $y \in \mathbb{R}$ pour obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{xn-1}{n} < \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \leqslant \frac{xn}{n}, \quad \text{soit} \quad x - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} \leqslant x.$$

Le théorème des gendarmes donne alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor xn \rfloor}{n} = x$.

Correction de l'exercice 27. La rédaction présentée ci-dessous est simplifiée, mais il est important de garder à l'esprit qu'en cas de doute, le raisonnement par factorisation peut être détaillé comme dans l'exercice **??**.

(*i*) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n^3}{2n^5} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2n^2} = 0$.

(*ii*) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-n^6}{n^5} = \lim\limits_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$.

(*iii*) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7n^4}{-2n^4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$.

(*iv*) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1$.

(*v*) En identifiant précautionneusement les termes prépondérants dans la fraction, on peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^{3/2}}{-n^{5/2}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

(*vi*) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5^n}{3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$ puisque $\frac{5}{3} > 1$.

Notons que la rédaction adoptée ici n'est admissible que parce que les suites considérées admettent bien une limite. Il ne s'agit pas d'écrire « $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ldots$ » au début d'un calcul qui relierait entre eux des termes n'admettant pas de limite !

Correction de l'exercice 28.

1. On a $u_0 \geqslant 0$, et si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $u_n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} = u_n^3 + 1 \geqslant 0$. Ainsi, on a $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.
2. Si $x \in [0,1[$, alors $x^3 + 1 \geqslant 1 > x$. Si $x \geqslant 1$, alors $x^3 + 1 \geqslant x^3 > x$. Ainsi, pour tout $x \geqslant 0$ on a bien l'inégalité $x^3 + 1 > x$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geqslant 0$ d'après la question **??**, donc $u_{n+1} = u_n^3 + 1 > u_n$ d'après la question précédente. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
4. D'après le théorème de la limite monotone, la suite croissante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ou tend vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ : comme la suite est positive, on a $\ell \geqslant 0$, et en passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^3 + 1$ on obtient $\ell^3 + 1 = \ell$, ce qui est absurde d'après la question **??**. Ainsi, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Correction de l'exercice 29.

1. La proposition à démontrer est vraie au rang 0 puisque l'on a $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_1 = 1 \leqslant u_0$. Fixons à présent $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$. En composant ces inégalités par la fonction sin, croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$; or $1 \leqslant \frac{\pi}{2}$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$. Ainsi, la propriété à démontrer est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 d'après la question précédente ; d'après le théorème de la limite monotone, elle converge donc. Comme $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \geqslant 1$, on obtient $\ell \in [0,1]$ par passage à la limite.

Correction de l'exercice 30.

1. Le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie ne pose pas problème puisque la quantité $2x^2 - 2x + 1$ existe quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons à présent que $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour ce faire, on remarque tout d'abord que $u_0 = \frac{2}{3} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Par ailleurs, la fonction polynomiale $f : x \mapsto 2x^2 - 2x + 1$ est croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ (en effet, son coefficient dominant est positif et elle admet un minimum en $\frac{-(-2)}{2\cdot 2} = \frac{1}{2}$) ; or on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ et $f(1) = 1$, si bien que $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Ainsi, on a bien $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.
2. On a $u_1 = \frac{8}{9} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{5}{9}$ et $u_0 = \frac{6}{9}$ donc $u_1 < u_0$: la proposition à démontrer est donc vraie au rang 0. Supposons à présent qu'elle le soit à un rang $n \in \mathbb{N}$ donné : on a alors $u_{n+1} \leqslant u_n$, d'où, en composant par la fonction f croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, l'inégalité $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$, soit $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$, c'est-à-dire que la proposition est vraie au rang $n+1$. Ainsi, la proposition est vraie à tous les rangs d'après le principe de récurrence.

3. La suite est minorée par $\frac{1}{2}$ d'après la question **??**, et elle est décroissante d'après la question **??** : elle converge donc par le théorème de la limite monotone. En passant à la limite dans la relation de récurrence vérifiée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on voit que la limite ℓ de la suite vérifie $\ell = 2\ell^2 - 2\ell + 1$, c'est-à-dire $2\ell^2 - 3\ell + 1 = 0$. Ainsi, on a $\ell = \frac{1}{2}$ ou $\ell = 1$; comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par son premier terme $\frac{2}{3}$ (puisqu'elle est décroissante), on a $\ell = \frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 31.

1. On a $u_0 = 2 \geqslant \frac{1}{2}$, et si $n \in \mathbb{N}$ est tel que u_n est bien défini et supérieur à $\frac{1}{2}$, alors $\frac{1}{2u_n}$ existe et est positif, donc $u_{n+1} := \frac{1}{2} + \frac{1}{2u_n}$ existe et est supérieur à $\frac{1}{2}$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ d'après le principe de récurrence.
2. Si $x \geqslant \frac{1}{2}$, on a : $x = \frac{x+1}{2x} \Leftrightarrow 2x^2 = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. L'avant-dernière équivalence de cette chaîne est due au fait que $x \neq 0$, et la dernière au fait que la solution $-\frac{1}{2}$ de l'équation polynomiale $2x^2 - x - 1$ est négative. Ainsi, le réel recherché est $x_0 = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathcal{P}_n : \quad « \, u_{2n} \geqslant u_{2n+2} \geqslant 1 \geqslant u_{2n+3} \geqslant u_{2n+1} \, ».$$

Initialisation :

On a $u_0 = 2$, $u_1 = \frac{3}{4}$, $u_2 = \frac{7}{6}$ et $u_3 = \frac{13}{14}$, donc $u_0 \geqslant u_2 \geqslant x_0 \geqslant u_3 \geqslant u_1$. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité :

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie. En composant la chaîne d'inégalités $u_{2n} \geqslant u_{2n+2} \geqslant 1$ par la fonction $f : x \mapsto \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2x}$ décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $u_{2n+1} \leqslant u_{2n+3} \leqslant 1$. En composant à nouveau cette chaîne d'inégalités par f, on obtient $u_{2n+2} \geqslant u_{2n+4} \geqslant 1$; en appliquant encore une fois f, on obtient $u_{2n+3} \leqslant u_{2n+5} \leqslant 1$. Ainsi, on a

$$u_{2n+2} \geqslant u_{2n+4} \geqslant 1 \geqslant u_{2n+5} \geqslant u_{2n+3},$$

ce qui est exactement la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$. Ainsi, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion :

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

4. D'après la question précédente, la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 1, et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1 : ces deux suites convergent donc. Il suffit pour conclure de montrer qu'elles convergent toutes deux vers 1 (voir la conclusion de l'exercice **??** !). Pour ce faire, on note ℓ la limite de $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, puis on passe à la limite dans la relation de récurrence

$$u_{2n+2} = \frac{u_{2n+1} + 1}{2u_{2n+1}} = \frac{\frac{u_{2n}+1}{2u_{2n}} + 1}{\frac{u_{2n}+1}{u_{2n}}} = \frac{u_{2n} + 1 + 2u_{2n}}{2u_{2n} + 2} = \frac{3u_{2n} + 1}{2u_{2n} + 2}$$

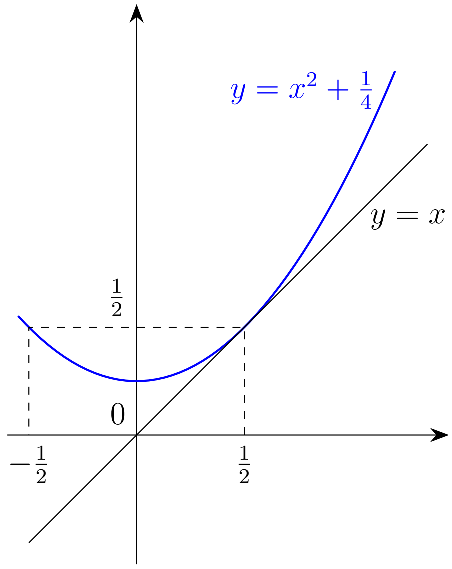
satisfaite par la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir

$$\ell = \frac{3\ell+1}{2\ell+2} \quad \text{soit} \quad 2\ell^2 + 2\ell = 3\ell + 1 \quad \text{soit encore} \quad 2\ell^2 - \ell - 1 = 0,$$

ce qui, comme ℓ est positif, implique que $\ell = 1$ comme nous l'avons vu dans la question 2. On peut démontrer de la même façon que la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, qui vérifie la même relation de récurrence que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers 1, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 32. Une représentation graphique peut grandement aider à traiter la question posée (voir la figure ci-contre, tracée à partir de l'étude de la fonction polynomiale $x \mapsto x^2 + \frac{1}{4} - x$, et sur laquelle on pourra placer les premiers termes de la suite pour différentes valeurs de u_0).

Il apparaît graphiquement que pour toute condition initiale $u_0 \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et à valeurs inférieures à $\frac{1}{2}$ (on pourrait bien sûr démontrer ces affirmations rigoureusement) ; elle converge donc d'après le théorème de la limite monotone, or sa limite ne peut être qu'une solution de l'équation $\ell = \ell^2 + \frac{1}{4}$, donc $\frac{1}{2}$: ainsi, on a $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset B$.



On remarque ensuite que si $u_0 > \frac{1}{2}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et croissante ; elle est donc même à valeurs dans $[u_0, +\infty[$, ce qui implique qu'elle ne peut converger vers $\frac{1}{2}$ puisque $u_0 > \frac{1}{2}$ (on peut montrer par l'absurde qu'elle tend en fait vers $+\infty$). Enfin, si $u_0 < -\frac{1}{2}$, alors $u_1 > \frac{1}{2}$ donc le même raisonnement que celui que nous venons de suivre montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers $\frac{1}{2}$.

On en déduit que $B = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Correction de l'exercice 33.

1. L'ensemble considéré correspond dans le plan complexe à l'ensemble des complexes de module 1 : c'est donc le cercle de rayon 1 centré sur l'origine du repère.
2. La fonction f est définie sur $[-1, 1]$. Sa courbe représentative est l'ensemble des points (x, y) vérifiant $x^2 + y^2 = 1$ avec $y \geqslant 0$: c'est donc le demi-cercle de rayon 1 centré sur l'origine du repère inclus dans la moitié supérieure du plan.
3. En plaçant les points u_0, u_1, u_2 et u_3, on s'aperçoit du fait que $u_0 = u_2$ et $u_1 = u_3$, ce qui laisse penser que les termes de rang pair de la suite sont tous égaux et que ses termes de rang impair le sont aussi.
4. On démontre par une récurrence facile (laissée au lecteur) que la propriété

$$\mathcal{P}_n \ : \ \text{« } u_{2n} = \frac{1}{2} \ \text{ et } \ u_{2n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite divergente étudiée est un exemple qu'il est intéressant de garder à l'esprit pour ne pas conclure trop rapidement à des propriétés de convergence erronnées sur les suits récurrentes ; notons que le résultat serait le même pour n'importe quelle valeur de u_0 dans $[0,1]$ différente de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (valeur pour laquelle la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ serait constante).

Correction de l'exercice 34.

1. On remarque tout d'abord que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (en effet, c'est vrai pour $n = 0$ d'après la première hypothèse, et pour tout $n > 0$ d'après la double inégalité satisfaite par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_{n+1} - u_n < 2\sqrt{2} - \frac{2}{u_n} - u_n = \frac{2\sqrt{2}u_n - 2 - u_n^2}{u_n} = \frac{-(u_n - \sqrt{2})^2}{u_n} \leqslant 0,$$
donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant minorée par 0 et décroissante, elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Si elle convergeait vers 0^+, on aurait alors $2\sqrt{2} - \frac{2}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, et donc $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ par comparaison, ce qui est absurde. Ainsi, la limite ℓ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive. En passant à la limite dans l'inégalité $u_{n+1} < 2\sqrt{2} - \frac{2}{u_n}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient alors
$$\ell \leqslant 2\sqrt{2} - \frac{2}{\ell} \quad \text{soit} \quad 2\sqrt{2} - \frac{2}{\ell} - \ell \geqslant 0, \quad \text{soit encore} \quad \frac{-(\ell - \sqrt{2})^2}{\ell} \geqslant 0,$$
or le terme de gauche de l'inégalité est négatif car $\ell > 0$ et car $- - (\ell - \sqrt{2})^2$ est l'opposé d'un carré, donc il est nul. Ainsi, on a $(\ell - \sqrt{2})^2 = 0$, et donc $\ell = \sqrt{2}$.
3. On dispose de conditions nécessaires sur la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: elle doit être décroissante et converger vers $\sqrt{2}$. Cela nous donne l'idée de considérer la suite de terme général $u_n = \sqrt{2} + \frac{1}{n+1}$, dont on vérifie qu'elle satisfait bien les conditions requises : la suite est évidemment strictement positive, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ la différence
$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} - \frac{2}{u_n} - u_{n+1} &= 2\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2} + \frac{1}{n+1}} - \sqrt{2} - \frac{1}{n+2} \\ &= \sqrt{2} - \frac{2(n+1)}{\sqrt{2}(n+1)+1} - \frac{1}{n+2} \overset{}{\underset{\cdots}{=}} \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}(n+1)+1)(n+2)} \end{aligned}$$
est bien strictement positive, ce qui permet de conclure.

Correction de l'exercice 35.

1. On utilise de manière répétée la quantité conjuguée pour calculer les différences de racines carrées. Cette manipulation désormais classique n'est pas détaillée dans les calculs ci-dessous.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} \geqslant 0, \end{aligned}$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. De la même façon, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leqslant 0, \end{aligned}$$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. Enfin, on peut écrire

$$u_n - v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{-2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

AInsi, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont bien adjacentes.

2. D'après le théorème des suites adjacentes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (notamment) est convergente. Il existe donc un réel ℓ tel que l'on ait $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Or la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ est croissante, donc elle tend vers une limite finie ou égale à $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Si cette limite était finie et égale à un réel $\ell' \in \mathbb{R}$, on aurait alors

$$2\sqrt{n+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' - \ell,$$

ce qui est évidemment faux puisque $2\sqrt{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ce qu'il fallait démontrer.
Notons que le raisonnement utilisé dans cette question est plus subtil qu'il n'y paraît et qu'il n'aurait pas été possible de passer à la limite brutalement dans l'égalité définissant u_n sans faire apparaître à la fois une limite dont l'existence n'a pas été démontrée et une potentielle forme indéterminée du plus mauvais effet.

Correction de l'exercice 36.

1. Pour démontrer cette inégalité très classique, on suit l'indication proposée : si $x, y \in \mathbb{R}_+$, alors $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$ est une quantité positive (en tant que carré de nombre réel) qui vaut $\sqrt{x}^2+\sqrt{y}^2-2\sqrt{x}\sqrt{y} = x+y-2\sqrt{xy}$, donc $x+y-2\sqrt{xy} \geqslant 0$. On en déduit l'inégalité attendue par un simple réarrangement des termes.
2. Il s'agit de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « u_n et v_n existent et vérifient $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ ». Le détail de cette preuve par récurrence est laissé au lecteur.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a grâce à la question précédente

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geqslant \sqrt{u_n u_n} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leqslant \frac{v_n+v_n}{2} = v_n,$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 0), elle converge d'après le théorème de la limite monotone ; on note $\ell \geqslant 0$ sa limite. En réécrivant la relation de récurrence satisfaite par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on obtient alors

$$u_n = 2v_{n+1} - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\ell - \ell = \ell,$$

ce qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers ℓ.

Correction de l'exercice 37.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la quantité

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

représente la moyenne des n premiers termes de la suite (u_n).

2. Conformément à l'indication, on se donne $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $n \geqslant N$ (un tel N existe par définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers ℓ.

Si $n \geqslant N$, on a alors

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ell\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(u_k - \ell)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell|$$

d'après l'inégalité triangulaire, d'où

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k - \ell\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N} |u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n} |u_k - \ell|,$$

et donc

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k-\ell\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k-\ell|+\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}\frac{\varepsilon}{2}$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k-\ell|+\frac{n-N}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k-\ell|+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

d'après le choix de N.

3. On a $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k-\ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque N est fixé, donc il existe $N' \geqslant N$ tel que pour tout $n \geqslant N'$ on ait $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}|u_k-\ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, et (1) donne alors $\displaystyle\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k-\ell\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
4. On a pris $\varepsilon>0$ quelconque et on a montré qu'il existait un rang N' à partir duquel on a $\displaystyle\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k-\ell\right| \leqslant \varepsilon$. Ainsi, on peut bien affirmer que $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 38.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{n(n+1)}\left(n\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$$
$$=\frac{1}{n(n+1)}\left(n\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)-\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=\frac{1}{n(n+1)}\left(na_{n+1}-\sum_{k=1}^{n}a_k\right),$$

ce qu'il fallait établir.

(b) D'après la question précédente, il suffit d'établir que $na_{n+1}-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k \geqslant 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Or la suite$(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, donc si $n\in\mathbb{N}^*$ on a $a_{n+1}\geqslant a_k$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, d'où, par sommation, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}a_{n+1}=na_{n+1}$. Le résultat attendu est donc bien vérifié.

(c) Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et de limite ℓ, elle est majorée par ℓ. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, formée par les moyennes arithmétiques des premiers a_k, est donc elle aussi majorée par ℓ. Or elle est croissante d'après la question précédente, si bien qu'elle converge vers une limite $\ell'\leqslant\ell$ d'après le théorème de la limite monotone.

(d) Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned}
b_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} a_k = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_k \\
&\geqslant \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} a_n \quad \text{car } a_k \geqslant a_n \text{ pour tout } k \geqslant n \\
&= \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}a_n,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(e) En passant à la limite dans l'égalité démontrée à la question précédente, on trouve $\ell' \geqslant \frac{\ell'+\ell}{2}$, d'où $\ell' \geqslant \ell$. Or on sait que $\ell' \leqslant \ell$, d'où $\ell' = \ell$: on a donc démontré que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ.

2. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, la suite $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et converge vers $-\ell$. La suite de ses moyennes arithmétiques successives, c'est-à-dire la suite $(-b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, converge donc elle aussi vers $-\ell$ d'après le cas croissant traité dans la question 1. Ainsi, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 39. Le résultat démontré dans les deux premières questions est une généralisation du lemme de Cesàro (voir exercice **??**), qui correspond au cas où $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On retrouve donc sans surprise les grandes lignes de la preuve de ce lemme.

1. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}^*$ et tout $n > n_0$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k y_k - L\right| &= \left|\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k y_k - \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k L\right| = \left|\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k (y_k - L)\right| \\
&= \frac{1}{S_n}\left|\sum_{k=1}^{n} u_k (y_k - L)\right| \quad \text{car } S_n > 0 \\
&\leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k |y_k - L| \quad \text{par l'inégalité triangulaire puisque } u_k > 0 \text{ pour tout } k \\
&= \frac{1}{S_n}\left(\sum_{k=1}^{n_0} u_k |y_k - L| + \sum_{k=n_0+1}^{N} u_k |y_k - L|\right),
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité attendue.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k > n_0$ on ait $|y_k - L| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Par ailleurs, comme $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et comme $\sum_{k=1}^{n_0} u_k |y_k - L|$ est une quantité indépendante de n, il existe $N \geqslant n_0$ tel que pour tout $n > N$ on ait $\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k |y_k - L| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n > N$ on a :

$$\left|\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n} u_k y_k - L\right| \leqslant \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n_0} u_k |y_k - L| + \frac{1}{S_n}\sum_{k=n_0+1}^{n} u_k |y_k - L|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

donc la définition de la limite est vérifiée et on peut écrire que $\displaystyle\frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^{n}u_k y_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$.

3. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $a_n = z_{n+1}-z_n>0$. Par ailleurs, on peut écrire par télescopage

$$S_n := \sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(z_{k+1}-z_k)=z_{n+1}-z_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty,$$

donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie bien les propriétés de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'énoncé.

(b) En appliquant le résultat démontré précédemment aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on obtient

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k}\sum_{k=1}^{n}a_k b_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$$

puisque $b_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} \gamma$ par hypothèse. Cette relation se réécrit

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}(z_{k+1}-z_k)}\sum_{k=1}^{n}(t_{k+1}-t_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma \quad \text{soit, par télescopage,} \quad \frac{t_{n+1}-t_1}{z_{n+1}-z_1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma.$$

Ainsi, en utilisant le fait que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ on peut écrire

$$\frac{t_n}{z_n}=\frac{z_n-z_1}{z_n}\cdot\frac{t_n}{z_n-z_1}=\left(1-\frac{z_1}{z_n}\right)\left(\frac{t_n-t_1}{z_n-z_1}+\frac{t_1}{z_n-z_1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\cdot(\gamma+0)=\gamma,$$

d'où le résultat attendu.

Correction de l'exercice 40.

1. La suite $\left(\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{u_k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante puisque si $n\in\mathbb{N}^*$, la quantité $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n+1}\frac{u_k}{k}$ est le minimum de $\frac{u_k}{k}$ pour $k\in[\![1,n+1]\!]$, tandis que la quantité $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{u_k}{k}$ est le minimum de la même expression considérée sur les valeurs de $k\in[\![1,n]\!]\subset[\![1,n+1]\!]$. D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc bien une limite ℓ finie ou égale à $-\infty$.
2. La propriété se démontre par une récurrence facile formalisant le raisonnement suivant, qui repose sur une utilisation répétée de la propriété vérifiée par $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$\begin{aligned}\forall m,n\in\mathbb{N}^*,\quad u_{mn}&=u_{(m-1)n+n}\leqslant u_{(m-1)n}+u_n\\&=u_{(m-2)n+n}+u_n\leqslant u_{(m-2)n}+2u_n\\&=\cdots\leqslant mu_n.\end{aligned}$$

3. (a) Par définition de la limite, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$ on ait $\left|\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{u_n}{n}-\ell\right|\leqslant\varepsilon$, donc $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{u_k}{k}\leqslant\ell+\varepsilon$. En particulier, on a $\min\limits_{1\leqslant k\leqslant N}\frac{u_k}{k}\leqslant\ell+\varepsilon$, donc en notant $m\in[\![1,N]\!]$ l'indice réalisant le minimum considéré on a $\frac{u_m}{m}\leqslant\ell+\varepsilon$, d'où le résultat attendu.

(b) Si $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire d'après le principe de la division euclidienne que $n = q_n m + r_n$ pour un certain $q_n \in \mathbb{N}$ et un certain $r_n \in [\![0, m-1]\!]$, d'où
$$u_n \leqslant u_{q_n m + r_n} \leqslant u_{q_n m} + u_{r_n} \leqslant q_n u_m + u_{r_n},$$
et donc
$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{q_n u_m + u_{r_n}}{q_n m + r_n} = \frac{q_n}{q_n m + r_n} u_m + \frac{u_{r_n}}{n}.$$
Comme $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée (par $m-1$), on a $q_n = \frac{n-r_n}{m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, et $(u_{r_n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle aussi bornée car elle prend un nombre fini de valeurs (puisque r_n est toujours égal à un entier de $[\![0, m-1]\!]$), donc
$$\frac{q_n}{q_n m + r_n} u_m + \frac{u_{r_n}}{n} = \frac{1}{m + \frac{r_n}{q_n}} u_m + \frac{u_{r_n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{u_m}{m}.$$
Ainsi, à partir d'un certain rang on peut majorer $\frac{q_n}{q_n m + r_n} u_m + \frac{u_{r_n}}{n}$ par $\frac{u_m}{m} + \varepsilon$ et écrire
$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{q_n}{q_n m + r_n} u_m + \frac{u_{r_n}}{n} \leqslant \ell + 2\varepsilon.$$
Par ailleurs, comme $\left(\min_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{u_k}{k}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite ℓ, on a $\frac{u_n}{n} \geqslant \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{u_k}{k} \geqslant \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, à partir d'un certain rang on a $\ell \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \ell + 2\varepsilon$, ce qui permet de conclure que $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ puisque $\varepsilon > 0$ est quelconque.

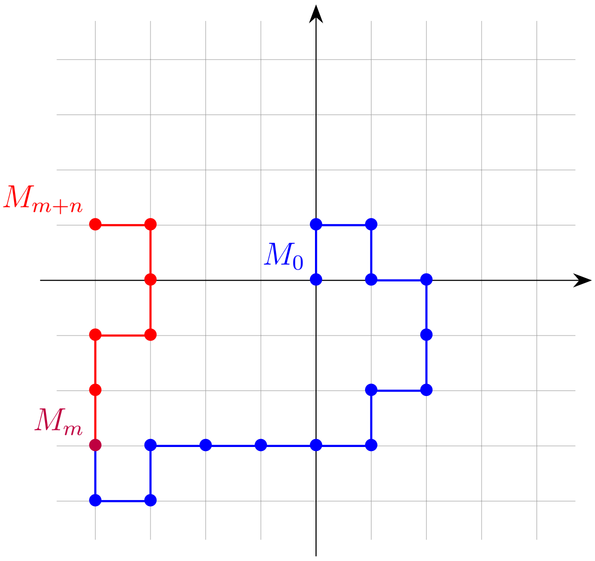
4. Il est clair que $c_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par exemple parce que le chemin formé par les points de coordonnées $(0,0), (1,0)\ldots,(n,0)$ est auto-évitant. En écrivant $c_n^{1/n}$ sous la forme $\exp\left(\frac{1}{n}\ln(c_n)\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on voit par continuité de l'exponentielle qu'il suffit de montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n}\ln(c_n)$ converge ou tend vers $-\infty$ pour conclure.

   Compte tenu des questions précédentes, il suffit de démontrer que la suite $(\ln(c_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la propriété satisfaite par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire que $\ln(c_{m+n}) \leqslant \ln(c_m) + \ln(c_n)$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$ (on dit aussi que la suite est *sous-additive*). Notons que le cas où $\ell = -\infty$ n'a pas encore été traité, mais que la même démonstration que précédemment permet de montrer que dans ce cas on a $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

   Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$: on cherche à montrer que $\ln(c_{m+n}) \leqslant \ln(c_m) + \ln(c_n)$, soit $\ln(c_{m+n}) \leqslant \ln(c_m c_n)$, c'est-à-dire que $c_{m+n} \leqslant c_m c_n$ puisque ln est strictement croissante. Or un chemin auto-évitant composé de $m+n$ segments, donc de $m+n+1$ points, peut être décomposé en un chemin auto-évitant de m segments (formé par les $m+1$ premiers points du chemin) et un autre chemin auto-évitant « décalé » de n segments, au départ du point M_m. Plus formellement, si l'on note $\mathcal{A}_i$ l'ensemble des chemins auto-évitants constitués de i segments (et donc de $i+1$ points) pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'application $(M_0, \ldots, M_{m+n}) \mapsto \big((M_0, \ldots, M_{m-1}), (M_m - M_m, M_{m+1} - M_m, \ldots, M_{m+n} - M_{m+n})\big)$ réalise une injection de $\mathcal{A}_{m+n}$ dans $A_m \times A_n$; ainsi, on a
$$c_{m+n} = |\mathcal{A}_{m+n}| \leqslant |\mathcal{A}_m \times \mathcal{A}_n| = |\mathcal{A}_m| \times |\mathcal{A}_n| \leqslant c_m \times c_n,$$

ce qu'il fallait démontrer.

La figure ci-contre illustre la décomposition d'un chemin auto-évitant de $m+n$ segments en deux sous-chemins de m et n segments respectivement.
Notons que l'on ne dispose que d'une inégalité entre c_{m+n} et $c_m \times c_n$, et non d'une égalité, car le recollement de deux chemins auto-évitants n'est pas nécessairement un chemin auto-évitant : l'application considérée n'est donc pas surjective.



Correction de l'exercice 41.
Correction de l'exercice 42.
Correction de l'exercice 43.
Correction de l'exercice 44.
Correction de l'exercice 45.
Correction de l'exercice 46.
Correction de l'exercice 47.
Correction de l'exercice 48.
Correction de l'exercice 49.
Correction de l'exercice 50.
Correction de l'exercice 51.
Correction de l'exercice 52.
Correction de l'exercice 53.
Correction de l'exercice 54.
Correction de l'exercice 55.
Correction de l'exercice 56.
Correction de l'exercice 57.
Correction de l'exercice 58.
Correction de l'exercice 59.
Correction de l'exercice 60.
Correction de l'exercice 61.
Correction de l'exercice 62.
Correction de l'exercice 63.

Correction de l'exercice 64.
Correction de l'exercice 65.
Correction de l'exercice 66.
Correction de l'exercice 67.
Correction de l'exercice 68.
Correction de l'exercice 69.
Correction de l'exercice 70.
Correction de l'exercice 71.
Correction de l'exercice 72.
Correction de l'exercice 73.
Correction de l'exercice 74.
Correction de l'exercice 75.
Correction de l'exercice 76.
Correction de l'exercice 77.
Correction de l'exercice 78.
Correction de l'exercice 79.
Correction de l'exercice 80.
Correction de l'exercice 81.
Correction de l'exercice 82.
Correction de l'exercice 83.
Correction de l'exercice 84.
Correction de l'exercice 85. Démo du fait qu'une suite bornée avec une unique VA converge :

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée admettant une unique valeur d'adhérence que nous noterons $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers α. On peut alors trouver $\varepsilon > 0$ et une infinité de termes u_n hors de $[\alpha-\varepsilon, \alpha+\varepsilon]$, c'est-à-dire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{\varphi(n)} - \alpha| > \varepsilon.$$

Or $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, en tant que suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est bornée, donc elle admet une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass : on note cette sous-suite $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ (avec $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) et on note β sa limite. En passant à la limite dans la relation

$$|u_{\varphi(\psi(n))} - \alpha| > \varepsilon$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient alors $|\beta - \alpha| \geqslant \varepsilon$, mais $\varepsilon > 0$ donc $\beta \neq \alpha$. Ainsi, la suite $(u_{\varphi(\psi(n))})_{n\in\mathbb{N}} = (u_{(\varphi\circ\psi)(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, qui est une sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, converge vers une limite différente de α : or ce point contredit le fait que l'unique valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est α.

Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers α).