2 ENTRAÎNEMENT

Exercice 14. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et que $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$.

Exercice 15. Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes suivants (où $\theta \in \mathbb{R}$) :

(i) $-\sqrt{3}+i$

(ii) $i\sqrt{3}-1$

(iii) $-2e^{-i\frac{23\pi}{3}}$

(iv) $(1+i)^7$

(v) $i(1+i)^5(1-i)^3$

(vi) $\sin(\theta)+i\cos(\theta)$

(vii) $\dfrac{4e^{i\frac{\pi}{7}}}{\left(\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{5}}\right)^2}$

$(viii)$ $\dfrac{-i\sqrt{2}}{1+i}$

(ix) $\dfrac{i}{\sqrt{3}+i}\cdot\dfrac{1+i}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$

(x) $\dfrac{\cos(2\theta)-i\sin(2\theta)}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}$

Exercice 16. Donner l'écriture algébrique des nombres complexes suivants :

(i) $4e^{-i\frac{29\pi}{3}}$

(ii) $-3ie^{i\frac{5\pi}{3}}$

(iii) $\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{19}$

(iv) $\overline{(2+2i)^6}$

(v) $\dfrac{(1+i)^{1000}}{(i-\sqrt{3})^{3000}}$

(vi) $(1-2i)^{300}\cdot\overline{(1-2i)}^{301}$

Exercice 17. On pose $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

1. Donner l'écriture algébrique de z_1 et de z_2.
2. Donner l'écriture algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.
3. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 18. Soit $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. Calculer z^2 et donner sa forme exponentielle.
2. En déduire le module et l'argument de z.
3. Déterminer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 19. Donner un ensemble A tel que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & A & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & (\rho,\theta) & \longmapsto & \rho e^{i\theta} \end{array}$$

soit bijective.

Exercice 20. Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ le nombre complexe $(1+i\sqrt{3})^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 21. Quels sont les nombres complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que z, $\frac{1}{z}$ et $1-z$ ont le même module ?

Exercice 22. Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\theta_1 \not\equiv \pi\ [2\pi]$ et $\theta_2 \not\equiv \theta_1+\pi\ [2\pi]$. Donner le module de chacun des nombres complexes suivants :

(i) $1-e^{i\theta_1}$

(ii) $e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}$

(iii) $\dfrac{1+e^{i\theta_1}}{1+e^{i\theta_2}}$

(iv) $\dfrac{e^{i\theta_1}-e^{i\theta_2}}{e^{i\theta_1}+e^{i\theta_2}}$

Exercice 23. Linéariser les expressions suivantes :

(i) $\sin^5(\theta)$ (iii) $\sin^7(\theta)$ (v) $\cos(\theta)\sin^2(\theta)$

(ii) $\cos^6(\theta)$ (iv) $\sin^8(\theta)$ (vi) $\cos^3(\theta)\sin^3(\theta)$

Exercice 24. Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$:

(i) $\cos(6\theta)$ (ii) $\sin(6\theta)$ (iii) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+6\theta\right)$

Exercice 25. Si $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les quantités suivantes :

(i) $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \sin(k\theta)$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(2k\theta)$ (iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)\theta)$

Exercice 26. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que les suites

$$(C_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sont bornées.

Exercice 27. Démontrer la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 8\sin(x)\sin(2x)\sin(3x)\sin(4x) = 1 - \cos(6x) - \cos(8x) + \cos(10x).$$

Exercice 28 (Inégalité triangulaire généralisée). Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$. En considérant la quantité

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{k=1}^{n} z_k \cdot \overline{\sum_{k=1}^{n} z_k}$$

et en s'inspirant de la démonstration de l'inégalité triangulaire proposée dans le cours, montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|,$$

avec égalité si et seulement si tous les z_k ont même argument.

Exercice 29. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ de module 1, tels que $zz' \neq -1$. On pose $z'' = \dfrac{z+z'}{zz'+1}$. Montrer que l'on a $z'' \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0.$$

Exercice 31. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

(*i*) $z^3 = 2$

(*ii*) $z^3 = i$

(*iii*) $z^4 = -1$

(*iv*) $z^4 = 1 + i$

(*v*) $z^5 = 32$

(*vi*) $z^6 = -i$