Suites réelles

Démonstration de la proposition 17

Commençons par remarquer que si $x \in \mathbb{R}$, alors la suite géométrique $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'équation (2) si et seulement si x vérifie l'équation (3).

En effet, dire que la suite vérifie (2) signifie que $x^{n+2} = ax^{n+1} + bx^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne, en prenant $n = 0$, la relation $x^2 = ax + b$.

Réciproquement, si $x^2 = ax + b$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire

$$x^{n+2} = x^n \cdot x^2 = x^n(ax + b) = ax^{n+1} + bx^n,$$

donc $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait (2).

On remarque ensuite que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites vérifiant la relation (2), alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie [1] elle aussi (2) : en effet, on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$\begin{aligned} \lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} &= \lambda(au_{n+1} + bu_n) + \mu(av_{n+1} + bv_n) \\ &= a(\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) + b(\lambda u_n + \mu v_n). \end{aligned}$$

Ce fait, connu sous le nom de « principe de superposition », signifie que l'on peut obtenir des suites vérifiant (2) en additionnant entre elles des suites géométriques dont la raison vérifie l'équation caractéristique (3).

Démontrons à présent la proposition, en considérant successivement chacun des trois cas. On note $\alpha := u_0$ et $\beta := u_1$.

- Supposons que l'équation caractéristique (3) admette deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2. D'après ce que nous avons vu plus haut, les suites géométriques $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont la relation de récurrence (2), et c'est aussi le cas de la combinaison linéaire $(\lambda x_1^n + \mu x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

  Or on peut choisir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que les deux premiers termes de la suite $(\lambda x_1^n + \mu x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soient α et β : en effet, trouver de telles valeurs de λ et μ revient à résoudre [2] le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = \alpha \\ \lambda x_1 + \mu x_2 = \beta \end{cases} \quad \text{qui équivaut à} \quad \begin{cases} \mu = \alpha - \lambda \\ \lambda x_1 + (\alpha - \lambda)x_2 = \beta \end{cases}$$

1. La suite $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée *combinaison linéaire* des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On résout ici le système par *substitution* : on exprime l'inconnue μ en fonction de l'inconnue λ grâce à la première équation, puis on remplace μ par cette expression dans la deuxième équation pour se ramener à une équation à une seule inconnue. On verra dans le cours d'algèbre une méthode plus systématique et en général plus efficace pour résoudre les systèmes d'équations linéaires.

soit

$$\begin{cases}\mu = \alpha - \lambda \\ \lambda(x_1 - x_2) = \beta - \alpha x_2\end{cases} \quad \text{soit encore} \quad \begin{cases}\mu = \alpha - \lambda \\ \lambda = \frac{\beta - \alpha x_2}{x_1 - x_2},\end{cases}$$

qui admet pour solutions $\lambda = \frac{\beta - \alpha x_2}{x_1 - x_2}$ et $\mu = \frac{\alpha x_1 - \beta}{x_1 - x_2}$.

Pour ces valeurs de λ et μ, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda x_1^n + \mu x_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie donc la relation de récurrence (2) ainsi que les égalités $v_0 = \alpha$ et $v_1 = \beta$. D'après le principe d'unicité exposé dans la proposition 15, cette suite n'est autre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: on a donc établi qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qu'il fallait démontrer.

- Supposons à présent que l'équation caractéristique $x^2 - ax - b = 0$ admette une unique solution x_1 : le discriminant de l'équation est alors nul, c'est-à-dire que $\Delta := a^2 + 4b = 0$, et on a $x_1 = \frac{a}{2}$. On sait déjà que la suite géométrique $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence (2). La spécificité de ce cas réside dans le fait que la suite $(nx_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie aussi cette relation : en effet, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire

$$\begin{aligned}(n+2)x_1^{n+2} &= (n+2)(ax_1^{n+1} + bx_1^n) \\ &= a(n+1)x_1^{n+1} + bnx_1^n + ax_1^{n+1} + 2bx_1^n \\ &= a(n+1)x_1^{n+1} + bnx_1^n + (ax_1 + 2b)x_1^n,\end{aligned}$$

mais $ax_1 + 2b = a \cdot \frac{a}{2} + 2b = \frac{a^2+4b}{4} = \frac{\Delta}{4} = 0$, donc on a bien

$$(n+2)x_1^{n+2} = a(n+1)x_1^{n+1} + bnx_1^n,$$

d'où le résultat annoncé.

La suite de la preuve est alors la même que dans le premier cas : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la suite $(\lambda x_1^n + \mu n x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait elle aussi la relation de récurrence (2) d'après le principe de superposition, or on peut trouver $\lambda x_1^0 + \mu \cdot 0 x_1^0 = \alpha$ et $\lambda x_1^1 + \mu x_1^1 = \beta$ (en l'occurrence $\lambda = \alpha$ et $\mu = \frac{\beta - \alpha x_1}{x_1}$, ce qui a toujours un sens puisque $x_1 \neq 0$ car $b \neq 0$). Ainsi, pour ces valeurs de λ et μ, la suite $(\lambda x_1^n + \mu n x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (2) et possède pour premiers termes α et β : c'est donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'après le résultat d'unicité de la proposition 15, ce qui clôt la preuve dans le deuxième cas.

- Enfin, lorsque l'équation caractéristique (3) admet deux solutions complexes distinctes et conjuguées que nous noterons $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$, le même raisonnement que dans le premier cas permet de voir qu'il existe $\lambda', \mu' \in \mathbb{C}$ tels que l'on ait $u_n = \lambda'(re^{i\theta})^n + \mu'(re^{-i\theta})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or il est clair, puisque u_0 et u_1 sont réels et a et b le sont aussi, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles. Ainsi :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \mathrm{Re}\,(u_n) &= \mathrm{Re}\left(\lambda'(re^{i\theta})^n + \mu'(re^{-i\theta})^n\right) \\ &= \mathrm{Re}\,(\lambda')\mathrm{Re}\left((re^{i\theta})^n\right) - \mathrm{Im}\,(\lambda')\mathrm{Im}\left((re^{i\theta})^n\right) \\ &\quad + \mathrm{Re}\,(\mu')\mathrm{Re}\left((re^{-i\theta})^n\right) - \mathrm{Im}\,(\mu')\mathrm{Im}\left((re^{-i\theta})^n\right)\end{aligned}$$

d'où, en utilisant la formule de Moivre qui donne $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$ ainsi que $(re^{-i\theta})^n = r^n e^{-in\theta}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\mathrm{Re}\,(\lambda') + \mathrm{Re}\,(\mu'))\, r^n \cos(n\theta) \\ - (\mathrm{Im}\,(\lambda') - \mathrm{Im}\,(\mu'))\, r^n \sin(n\theta).$$

En posant [3] $\lambda := \mathrm{Re}\,(\lambda') + \mathrm{Re}\,(\mu') \in \mathbb{R}$ et $\mu := \mathrm{Im}\,(\lambda') - \mathrm{Im}\,(\mu') \in \mathbb{R}$, on retrouve bien la relation annoncée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta). \qquad \square$$

3. Dans les trois cas considérés, l'ensemble des suites solutions de l'équation (2) est obtenu en considérant les combinaisons linéaires de deux solutions particulières (des suites géométriques dans le cas où $\Delta \neq 0$, et les suites $(x_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(nx_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans celui où $\Delta = 0$). Nous commenterons ce fait dans le cours d'algèbre ; pour l'heure, contentons-nous de remarquer que ces *deux* éléments générant l'ensemble des solutions répondent aux *deux* degrés de liberté dont on dispose dans le choix des termes initiaux u_0 et u_1.