L'algorithme présenté dans la méthode 47 est rigide et conduit à obtenir une matrice triangulaire supérieure d'un type bien précis (dont la diagonale est composée de 0 et de 1), ce qui n'est pas nécessaire pour lire son inversibilité. L'existence de certains raccourcis n'aura pas échappé au lecteur attentif, qui est encouragé à en faire usage uniquement après en avoir bien compris les limites de validité :

- Il n'est pas nécessaire de transformer en 1 le dernier coefficient diagonal de la matrice triangulaire obtenue au terme de l'algorithme puisque ce coefficient n'a pas vocation à servir de pivot.

- De façon générale, il n'est pas obligatoire de transformer en 1 les pivots successifs utilisés lors de l'algorithme. Il s'agit même d'une opération contre-productive lorsqu'un pivot est en amont d'un coefficient qui lui est égal ou opposé : par exemple, lors de l'étude de la matrice
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$
l'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ est bien plus pertinente que les opérations successives $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ qui font apparaître des fractions indésirables.

- On peut arrêter l'algorithme dès lors qu'il est impossible, à une étape donnée, d'obtenir un pivot non nul (ce qui correspond au fait que la sous-matrice que l'on manipule possède une première colonne nulle) : en effet, on sait alors que l'un des coefficients diagonaux de la matrice triangulaire obtenue au terme de l'algorithme sera nul, et donc que la matrice de départ est non inversible. Par exemple, l'algorithme appliqué à la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
dont la première colonne est déjà « vidée », amène à considérer directement la sous-matrice
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont la première colonne est nulle. On ne peut donc pas obtenir de deuxième pivot non nul, ce qui implique que A est non inversible.

On pouvait aussi remarquer directement sur la matrice A la relation de dépendance linéaire $C_2 = 2C_1$, qui implique que A n'est pas inversible.

- La proposition 45 implique qu'il est tout à fait possible de réaliser des opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice lorsque celles-ci permettent de raccourcir l'algorithme. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ peut se réduire très rapidement à une matrice triangulaire en écrivant

$$A \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Il est possible de faire figurer simultanément plusieurs opérations élémentaires sous un même signe d'équivalence pour ne pas avoir à écrire trop d'étapes différentes. Par exemple, on peut réaliser en une seule étape toutes les transvections permettant de « vider » une colonne donnée. Ainsi, on peut par exemple écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

On peut aussi effectuer en une seule étape des opérations portant sur des ensembles disjoints de lignes, comme la permutation $L_1 \leftrightarrow L_2$ et la transvection $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$.

On s'interdira par contre de réaliser simultanément une opération transformant une ligne et une transvection utilisant cette ligne, comme par exemple $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ (qui change L_1) et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ (qui utilise L_1 sous sa nouvelle forme sans que cette dernière soit présente sous nos yeux). On s'abstiendra aussi de manipuler en une seule étape les lignes et les colonnes.

- Lorsque $\mu \neq 0$, il est possible de réaliser une opération du type $L_i \leftarrow \mu L_i + \lambda L_j$, qui est la combinaison de la dilatation $L_i \leftarrow \mu L_i$ et de la transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. Il est néanmoins nécessaire de s'assurer du fait que μ est bien non nul, sous peine de compromettre la validité de la méthode. Par exemple, on peut soumettre la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

aux opérations élémentaires $L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_1$ pour « vider » sa première colonne sans avoir à se ramener à un pivot égal à 1 : on écrit alors

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 3L_3 - 4L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

En revanche, la matrice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

ne peut être réduite à l'aide de l'opération $L_2 \leftarrow aL_2 - L_1$ que lorsque $a \neq 0$. Il importe alors de distinguer explicitement les deux cas $a \neq 0$ et $a = 0$ lors de l'étude de cette matrice, ou bien de se ramener à un pivot non nul par l'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$ pour mener à bien l'algorithme classique.

De fait, si $a = 0$ on peut vérifier que la matrice est inversible, mais que l'opération illicite $L_2 \leftarrow aL_2 - L_1$ la transforme en une matrice non inversible.

- Lorsque cela est possible, il est avantageux de recourir à des permutations de lignes ou de colonnes pour se ramener à une forme « plus triangulaire » sans avoir à faire de calcul. Par exemple, la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
peut être directement transformée en une matrice triangulaire grâce aux opérations $C_1 \leftrightarrow C_3$ puis $C_1 \leftrightarrow C_2$:
$$A \underset{C_1 \leftrightarrow C_3}{\sim} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

L'exemple suivant combine plusieurs des raccourcis que nous venons de décrire :

Exemple. Étudions l'inversibilité de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow 3L_4 - 2L_2}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix},$$

et les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire obtenue sont non nuls donc A est inversible.

Insistons cependant sur le fait qu'un algorithme du pivot correctement mené, même s'il mobilise de nombreuses étapes, ne sera jamais pénalisé, et qu'il importe bien davantage de savoir réaliser un pivot sans erreur que de savoir le faire en peu d'étapes. En d'autres termes : ne cherchez pas à gagner de temps avant d'être parfaitement à l'aise avec la méthode du pivot !