Exemple (Un contre-exemple classique). Considérons l'expérience aléatoire réalisée en lançant de façon indépendante deux dés équilibrés à six faces. Comme on l'a vu, on peut modéliser cette expérience par une situation d'équiprobabilité sur $\Omega = [\![1,6]\!]^2$. On note respectivement A, B et C les événements « le résultat du premier dé est pair », « le résultat du second dé est pair » et « la somme des deux résultats est paire ».

Il est clair que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$. La formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(A, \overline{A})$ donne par ailleurs

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C \mid A) + \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(C \mid \overline{A}),$$

or $\mathbb{P}(C \mid A)$ est la probabilité que le deuxième dé donne un résultat pair, soit $\frac{1}{2}$, et $\mathbb{P}(C \mid \overline{A})$ est la probabilité qu'il donne un résultat impair, soit encore $\frac{1}{2}$. On a donc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On aurait aussi pu retrouver le résultat $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$ en dénombrant les 18 couples (i, j) de $[\![1,6]\!]^2$ tels que $i+j$ soit pair et en invoquant l'équiprobabilité des couples de résultats obtenus.

On s'intéresse à présent à l'indépendance des événements A, B et C. Il est évident que A et B sont indépendants puisque les deux lancers le sont. On a de plus $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(C \mid A)\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$, donc A et C sont indépendants. Par symétrie du problème, B et C sont aussi indépendants. Ainsi, les événements A, B et C sont deux à deux indépendants.

En revanche, la réalisation simultanée de A et de B implique celle de C, ce qui suggère que ces trois événements ne sont pas mutuellement (c'est-à-dire « globalement ») indépendants. On peut formaliser cette idée par le calcul en écrivant que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

et

$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

donc $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$, ce qui montre bien que les événements A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.