5 PLUS LOIN, (VRAIMENT) PLUS FORT

Exercices hors-programme

Les exercices 53 à 57 ci-après abordent des notions et des résultats hors du programme de B/L, mais qui figurent au programme d'analyse réelle de certaines classes préparatoires scientifiques.

Par leur technicité et leur intérêt mathématique intrinsèque, ces exercices constituent un très bon entraînement aux questions les plus ardues des sujets de concours. Ils sont donc particulièrement recommandés aux lecteurs les plus à l'aise.

Un certain nombre d'exercices des chapitres suivants feront usage du théorème de Bolzano-Weierstrass démontré dans l'exercice 53 ; nous les signalerons de la même façon.

Exercice 53 (Théorème de Bolzano-Weierstrass). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans le segment $[a, b]$. On se propose de démontrer le *théorème de Bolzano-Weierstrass*, qui stipule que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite (c'est-à-dire une suite extraite) convergente. On définit les suites récurrentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{si } \left|\left\{k \in \mathbb{N} : u_k \in \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]\right\}\right| = +\infty \\ \left(\dfrac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Expliquer en langage courant le procédé utilisé pour construire les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$0 \leqslant b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$
3. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. On note $\ell \in [a, b]$ leur limite commune.
4. On pose $\phi(0) = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit
$$\phi(n+1) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \,:\, k > \phi(n) \text{ et } u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\right\}.$$
Montrer que ϕ est bien définie et est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
5. Montrer que $u_{\phi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et conclure.
6. Donner un contre-exemple au théorème de Bolzano-Weierstrass dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est plus supposée bornée.

Exercice 54 (Suites de Cauchy). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite est *de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \,:\, \forall p, q \in \mathbb{N} \,:\, p \geqslant q \geqslant N, \quad |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon.$$

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors elle est bornée.
3. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et s'il existe une suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente (avec $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante), alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. En utilisant l'exercice 53, montrer que toute suite réelle de Cauchy converge.

La notion de complétude

La notion de suite de Cauchy est fondamentale en analyse, notamment dans l'étude de suites à valeurs dans des ensembles plus compliqués que $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, mais aussi des ensembles de fonctions ou tout ensemble muni d'une « distance » adaptée (on appelle ces ensembles des *espaces métriques*). Dans certains espaces, comme dans $\mathbb{R}$, dire qu'une suite est de Cauchy, et donc que « ses termes sont de plus en plus proches les uns des autres », équivaut à dire qu'elle est convergente, sans qu'il soit besoin de faire référence à une limite donnée ! Ces espaces dans lesquels toutes les suites de Cauchy convergent sont dits *complets*.

Certains espaces, cependant, ne sont pas complets. L'exemple le plus simple est celui de $\mathbb{Q}$: par exemple, la suite des approximations décimales de $\sqrt{2}$ est de Cauchy, mais elle n'est pas « convergente dans $\mathbb{Q}$ » au sens où elle ne converge vers aucun élément de $\mathbb{Q}$. Une idée fertile est de considérer qu'une suite de Cauchy converge toujours « quelque part » et qu'un espace non complet est simplement un ensemble qui ne contient pas toutes les limites de ses suites de Cauchy (d'où, justement, le terme *complet* !). Il est possible de formaliser cette approche et de définir $\mathbb{R}$ comme le « complété » de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire comme l'ensemble constitué par les limites des suites de Cauchy de $\mathbb{Q}$; cette idée est tout à fait cohérente avec la définition de $\mathbb{R}$ comme un ensemble continu obtenu en « bouchant les trous » que l'on observe dans l'ensemble $\mathbb{Q}$. Cette approche permet de définir $\mathbb{R}$ d'une autre façon que par la méthode des coupures présentée dans la section 7.2 du chapitre 3.

Exercice 55. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est une *valeur d'adhérence de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle est la limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$), c'est-à-dire d'une suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

En utilisant l'exercice 53, montrer qu'une suite réelle bornée converge si et seulement si elle possède une unique valeur d'adhérence.

Exercice 56 (Une autre démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass). Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à valeurs dans le segment $[a, b]$. On va proposer une autre démonstration du théorème de Bolzano-Weierstrass étudié dans l'exercice 53, qui stipule que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n := \sup\{u_k \,:\, k > n\}$.

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et converge.

On pose $\phi(0) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi(n+1) = \min\left\{k > \phi(n) \,:\, |u_k - v_{\phi(n)}| \leqslant \frac{1}{2^n}\right\}.$$

2. Montrer que $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est bien définie et est strictement croissante.
3. Montrer que $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 57 (Limite supérieure et limite inférieure d'une suite réelle). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Il n'est pas toujours possible de parler de « la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ », ce qui rend délicats certains raisonnements de passage à la limite. On peut en revanche toujours définir deux objets qui partagent une partie des propriétés de la limite : la *limite inférieure* et la *limite supérieure* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies respectivement comme

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n := \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\inf\limits_{k\geqslant n} u_k\right) & \text{si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est minorée,} \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n := \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{k\geqslant n} u_k\right) & \text{si } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est majorée,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Justifier que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ sont bien définies et que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.
2. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ est sa plus petite valeur d'adhérence, et que si elle est majorée, alors $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ est sa plus grande valeur d'adhérence (la définition d'une valeur d'adhérence est donnée dans l'exercice 55).
3. Déterminer la limite inférieure et la limite supérieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

(a) $u_n = (-1)^n$ (b) $u_n = (-1)^n + \dfrac{1}{2^n}$ (c) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ (d) $u_n = (1 + (-1)^n)n$

4. Déterminer la limite inférieure et la limite supérieure de la suite de terme général $u_n = \sin(n)$.
   Indication : on pourra utiliser le fait que l'ensemble $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \{n + 2k\pi \ : \ n, k \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (voir l'exercice 44 du chapitre 3 pour une démonstration, en se souvenant du fait que π est irrationnel), ainsi que l'inégalité $|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x - y|$ valable pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
5. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles, comparer les quantités
   $$\limsup_{n\to+\infty}(u_n + v_n) \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty}(u_n) + \limsup_{n\to+\infty}(v_n).$$
   Énoncer un résultat similaire pour les limites inférieures.
6. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors
   $$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leqslant \liminf_{n\to+\infty} v_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty} u_n \leqslant \limsup_{n\to+\infty} v_n.$$
7. Si $a \in \mathbb{R}_+$, montrer que
   $$\liminf_{n\to+\infty}(au_n) = a \liminf_{n\to+\infty}(u_n) \quad \text{et} \quad \limsup_{n\to+\infty}(au_n) = a \limsup_{n\to+\infty}(u_n),$$
   où l'on pose (dans ce cadre seulement) $0 \cdot (-\infty) = 0 \cdot (+\infty) = 0$.
8. Traduire en termes de limite inférieure et de limite supérieure les affirmations suivantes :
   (a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
   (b) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une constante strictement positive à partir d'un certain rang.
   (c) Pour tout $\alpha > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une infinité de termes inférieurs ou égaux à α.
9. Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Montrer l'équivalence suivante :
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$
10. Traiter l'exercice 46 à l'aide de la question précédente.
    Indication : on montrera tout d'abord qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions de l'énoncé est nécessairement bornée par $|u_0| + \frac{1}{1-a}M$, où M est un réel tel que $|b_n| < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.