Applications

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 10.

(i) Si $x \in [0,1[$, alors $x-1<0$ donc la quantité $\frac{1}{x-1}$ existe et est dans $\mathbb{R}_-$. L'application f est donc bien définie.

(ii) Si $t \in \mathbb{R}_+$, alors $\sqrt{t}$ existe et $1+t>0$ donc $\frac{\sqrt{t}}{1+t}$ existe. Par ailleurs, si $t \in [0,1]$ alors $\sqrt{t} \leqslant 1$ et si $t \geqslant 1$ alors $\sqrt{t} \leqslant t$, donc si $t \in \mathbb{R}_+$ on peut dans tous les cas écrire que $\sqrt{t} \leqslant 1+t$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a bien $\frac{\sqrt{t}}{1+t} \in [0,1]$, ce qui montre que g est bien définie.

(iii) Pour tout $A \in \mathcal{P}(\llbracket 1,10 \rrbracket)$, l'ensemble $\{2x,\, x \in A\}$ est une partie de $\llbracket 2,20 \rrbracket$ (puisque pour tout $x \in A$ on a $x \in \llbracket 1,10 \rrbracket$ donc $2x \in \llbracket 2,20 \rrbracket$). On en déduit que h est bien définie.

(iv) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, la partie entière $\lfloor x-y \rfloor$ est un entier et la valeur absolue $|x-y|$ est un réel positif, donc $(\lfloor x-y \rfloor, |x-y|) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}_+$. Ainsi, l'application i est bien définie.

Correction de l'exercice 11. Raisonnons par double inclusion.

Si $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$, alors il existe $x \in A \cap f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Mais comme $x \in A$, on a $f(x) \in f(A)$ et donc $y \in f(A)$. Par ailleurs, comme $x \in f^{-1}(B)$, on a $f(x) \in B$, soit $y \in B$. Ainsi, on a $y \in f(A) \cap B$. On en déduit l'inclusion $f(A \cap f^{-1}(B)) \subset f(A) \cap B$.

Soit à présent $y \in f(A) \cap B$. Comme $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. La relation $y \in B$ se réécrit alors $f(x) \in B$, d'où $x \in f^{-1}(B)$. Comme $x \in A$, on en déduit que $x \in A \cap f^{-1}(B)$, donc $y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}(B))$. On a ainsi démontré l'inclusion réciproque $f(A) \cap B \subset f(A \cap f^{-1}(B))$.

On a donc bien l'égalité $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

Correction de l'exercice 12.

1. (a) Soit $x \in E$. Si $\mathbb{1}_A(x) = 1$, alors $x \in A$, donc $x \notin \overline{A}$, d'où $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 0$. Par ailleurs, si $\mathbb{1}_A(x) = 0$, alors $x \notin A$, donc $x \in \overline{A}$ et $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1$. Ainsi, on a bien dans tous les cas la relation $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x) = 1 - \mathbb{1}_A(x)$.

   (b) Soit $x \in E$. Alors on a

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1 &\iff \Big(\mathbb{1}_A(x) = 1 \text{ et } \mathbb{1}_B(x) = 1\Big) \\ &\iff \Big(x \in A \text{ et } x \in B\Big) \iff x \in A \cap B. \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$ vaut 1 si $x \in A \cap B$ et 0 sinon : on a donc bien $\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = \mathbb{1}_{A \cap B}(x)$.

(c) Soit $x \in E$. Si $x \in A$ et $x \notin B$, alors $x \in A \cup B$ donc $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$, et

$$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1 + 0 - 1 \cdot 0 = 1.$$

En échangeant les rôles de A et B, on voit que si $x \in B$ et $x \notin A$, alors

$$\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1.$$

À présent, si $x \in A$ et $x \in B$, alors $x \in A \cup B$ donc $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 1$, et

$$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 1 + 1 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Enfin, si $x \notin A$ et $x \notin B$, alors $x \notin A \cup B$ donc $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = 0$, et

$$\mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x) = 0 + 0 - 0 \cdot 0 = 0.$$

Dans tous les cas, on a bien $\mathbb{1}_{A\cup B}(x) = \mathbb{1}_A(x) + \mathbb{1}_B(x) - \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

2. (a) Supposons que $A \subset B$. Soit $x \in E$. Si $\mathbb{1}_A(x) = 0$ alors on a $\mathbb{1}_B(x) \geqslant \mathbb{1}_A(x)$ (car $\mathbb{1}_B$ est positive), et si $\mathbb{1}_A(x) = 1$ alors $x \in A$, donc $x \in B$ et $\mathbb{1}_B(x) = 1$. Dans les deux cas, on a bien $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$, d'où l'implication directe.

   Supposons réciproquement que $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$ pour tout $x \in E$. Si $x \in A$, alors $\mathbb{1}_A(x) = 1$, donc $\mathbb{1}_B(x) \geqslant 1$, ce qui signifie que $\mathbb{1}_B(x) = 1$ et que $x \in B$. Ainsi, on a donc $A \subset B$, ce qui démontre l'implication réciproque et clôt la preuve.

   (b) On a $A = B$ si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$. D'après le point précédent, cette condition équivaut au fait que pour tout $x \in E$ on ait $\mathbb{1}_A(x) \leqslant \mathbb{1}_B(x)$ et $\mathbb{1}_B(x) \leqslant \mathbb{1}_A(x)$, soit $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$. On a donc bien l'équivalence attendue.

Correction de l'exercice 13.

1. Si $x \in]-2, 2[$, alors $x^2 - 4 > 0$, donc le réel $\frac{1+x}{x^2-4}$ existe. Ainsi, l'application f_1 est bien définie.

   Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $\frac{1}{x^2}$ existe et est strictement positif ; comme $x^2 \geqslant 0$, on a alors $x^2 + \frac{1}{x^2} \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui montre que f_2 est bien définie.

   Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, alors $x + 1 \neq 0$ donc le réel $\frac{x-1}{x+1}$ existe. Ainsi, f_3 est bien définie.

2. On rappelle que si $f : A \to B$ et $g : C \to D$ sont deux applications, la composée $g \circ f : A \to D$ est définie si et seulement si $B \subset C$. Ainsi, $f_2 \circ f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}_+^*$ existe puisque $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R}^*$, et $f_3 \circ f_2 : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ existe puisque $\mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; les autres composées n'existent pas.

Correction de l'exercice 14.

1. Les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$, alors $f(g(x)) = a(bx) = abx$ et $g(f(x)) = b(ax) = abx$, donc $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$. Ainsi, on a bien $f \circ g = g \circ f$.

2. Les composées $h \circ i$ et $i \circ h$ sont des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$, alors
$$h(i(x)) = a(bx + d) + c = abx + ad + c$$
et
$$i(h(x)) = b(ax + c) + d = abx + bc + d,$$
donc une condition nécessaire et suffisante pour que $h \circ i = i \circ h$ est que $ad + c = bc + d$.

Correction de l'exercice 15. Plaçons-nous sous les hypothèses de l'énoncé [1]. Comme $f : A \to B$ et $h \circ g : C \to F$, la composée $(h \circ g) \circ f$ a pour ensemble de départ A et pour ensemble d'arrivée F. Comme $g \circ f : A \to D$ et $h : E \to F$, la composée $h \circ (g \circ f)$ a elle aussi pour ensemble de départ A et pour ensemble d'arrivée F. Par ailleurs, si $x \in A$ alors
$$\Big((h \circ g) \circ f\Big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$
et
$$\Big(h \circ (g \circ f)\Big)(x) = h\Big(g \circ f(x)\Big) = h(g(f(x))).$$
On a donc bien $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Correction de l'exercice 16. Il suffit [2] de considérer une application qui échange 0 et 1 et laisse les autres entiers naturels inchangés :
$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & 0 & \longmapsto & 1 \\ & 1 & \longmapsto & 0 \\ & n & \longmapsto & n \text{ si } n \geqslant 2. \end{array}$$
En effet, on a évidemment $f \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ puisque $f(0) \neq 0$, et on vérifie facilement (en différenciant les cas selon que $n = 0$, $n = 1$ ou $n \geqslant 2$) que $(f \circ f)(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

Correction de l'exercice 17.

1. Soit $A \subset E$. Il est possible de démontrer l'égalité attendue par double inclusion, mais il est plus rapide de réécrire directement l'ensemble image considéré :
$$\begin{aligned}(g \circ f)(A) &= \{(g \circ f)(x),\, x \in A\} = \{g(f(x)),\, x \in A\} \\ &= \{g(y),\, y \in f(A)\} = g(f(A)).\end{aligned}$$
La troisième égalité de cette chaîne utilise le fait que les éléments de la forme $f(x)$, avec $x \in A$, sont exactement les éléments de $f(A)$.

1. Il est important de bien comprendre la question posée : il s'agit de vérifier que les applications $(h \circ g) \circ f$ et $h \circ (g \circ f)$ sont égales, c'est-à-dire qu'elles ont le même ensemble de départ, qu'elles ont le même ensemble d'arrivée et qu'elles associent la même image à chaque élément de leur ensemble de départ.

2. De manière générale, il est bon de chercher à construire des exemples aussi simples que possible. Ici, on ne cherche pas à construire f telle que $f(n) \neq n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ mais seulement pour *certains* n ; en prenant par exemple $f(0) = 1$, on voit que l'on doit avoir $f(1) = 0$, et il n'est pas nécessaire de chercher à définir f de façon compliquée hors de ces valeurs !

2. Soit $B \subset H$. Si $x \in E$, alors on a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(g^{-1}(B)) \quad &\iff \quad f(x) \in g^{-1}(B) \\ &\iff \quad g(f(x)) \in B \quad \iff \quad x \in (g \circ f)^{-1}(B), \end{aligned}$$

d'où l'égalité $f^{-1}(g^{-1}(B)) = (g \circ f)^{-1}(B)$ attendue.

Correction de l'exercice 18.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a $x - 1 \neq 0$ donc le réel $\frac{x}{x-1}$ est bien défini ; par ailleurs, on a $\frac{x}{x-1} = 1$ si et seulement si $x = x - 1$, ce qui n'est jamais vérifié, si bien que $\frac{x}{x-1} \neq 1$. L'application f est donc bien définie.

   Comme les ensembles de départ et d'arrivée de f sont identiques, la composée $f \circ f = f_2$ existe et est une application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans lui-même. On peut donc la composer par f pour obtenir $f \circ f \circ f = f_3$, qui est une application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans lui-même. Notons que l'expression $f \circ f \circ f$ n'est pas ambiguë puisque l'opération de composition est associative (voir l'exercice 15) : ainsi, $f \circ f \circ f$ désigne à la fois $(f \circ f) \circ f$ et $f \circ (f \circ f)$. En réitérant le processus de composition, on peut définir $f_4 = f \circ f_3$ puis $f_5 = f \circ f_4$ et ainsi de suite, toutes les applications obtenues ayant pour ensemble de départ et d'arrivée $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: ainsi, les f_n sont bien définies.
2. Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on a

   $$f_2(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x) - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = x$$

   et

   $$f_3(x) = f(f_2(x)) = f(x).$$

   On conjecture donc que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n vaut f si n est impair et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$ si n est pair. Cette proposition se démontre par exemple en établissant par récurrence la proposition

   $$\mathcal{P}_k \ : \quad \text{« } f_{2k+1} = f \text{ et } f_{2k+2} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R} \setminus \{1\}} \text{ »}$$

   pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le détail de cette preuve est laissé au lecteur.

Correction de l'exercice 19.

(i) L'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \{-1, 1\} \\ n & \longmapsto & (-1)^n \end{array}$$

est surjective puisque $f(0) = 1$ et $f(1) = -1$. Elle n'est en revanche pas injective, par exemple parce que $f(0) = f(2) = 1$.

(ii) L'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & n \end{array}$$

est injective puisque si $n, p \in \mathbb{N}$ sont tels que $g(n) = g(p)$ alors $n = p$. Elle n'est pas surjective puisqu'aucun réel non entier n'admet d'antécédent par g.

(iii) L'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0 \end{array}$$

n'est pas injective, par exemple parce que $h(0) = h(1) = 0$. Elle n'est pas non plus surjective puisqu'aucun réel non nul n'admet d'antécédent par h.

Correction de l'exercice 20. L'application f n'est pas injective puisqu'elle vérifie $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(0) = 0$. Elle n'est donc pas bijective. Elle est par contre surjective puisque tout $n \in \mathbb{Z}$ est son propre antécédent par f.

Correction de l'exercice 21. On rappelle que l'application $\mathbb{1}_A$ a pour ensemble de départ E et pour ensemble d'arrivée $\{0, 1\}$.

1. L'application est injective lorsqu'il n'existe pas deux éléments de E distincts dont l'image vaut 0 (c'est-à-dire que $E \setminus A$ contient au plus un élément), ni deux éléments de E distincts dont l'image vaut 1 (c'est-à-dire que A contient au plus un élément).
2. L'application $\mathbb{1}_A$ est surjective lorsqu'elle prend effectivement les deux valeurs 0 et 1, c'est-à-dire lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $x \in A$ et $y \in E$ tel que $y \notin A$: cette condition est équivalente au fait que $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$.
3. En combinant les deux points précédents, on voit que $\mathbb{1}_A$ est bijective si et seulement si A et $E \setminus A$ contiennent au plus un élément et au moins un élément, c'est-à-dire exactement un élément. Cette condition équivaut au fait que $|E| = 2$ et $|A| = |E \setminus A| = 1$.

Correction de l'exercice 22. Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $f(x) = 3 + \frac{1}{x} \neq 3$: ainsi, 3 admet 0 pour unique antécédent par f. À présent, fixons $y \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$ et montrons que y admet un unique antécédent par f dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on raisonne par analyse-synthèse :

- Si un tel antécédent $x \in \mathbb{R}$ existe, on a nécessairement $x \neq 0$ (puisque l'on a $f(0) = 3 \neq y$), donc $y = f(x) = 3 + \frac{1}{x}$, c'est-à-dire que $\frac{1}{x} = y - 3$. Comme $y - 3 \neq 0$, on en déduit que $x = \frac{1}{y-3}$: ainsi, l'antécédent de y par f, s'il existe, est unique et vaut $\frac{1}{y-3}$.
- On vérifie ensuite que y admet bien $\frac{1}{y-3}$ pour antécédent en écrivant

$$f\left(\frac{1}{y-3}\right) = 3 + (y-3) = y.$$

Ainsi, tout réel y admet bien un unique antécédent par f, donc f est bijective. On a au passage obtenu l'expression de f^{-1} :

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{y-3} & \text{si} \quad y \neq 3 \\ 0 & \text{si} \quad x = 3 \end{cases} \end{array}$$

Correction de l'exercice 23. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $x - y = 0$, on a $x = y$ et donc $x^2 - y^2 = 0$. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x, x) = (0, 0)$, ce qui montre que f n'est pas injective (puisque $(0, 0)$ admet une infinité d'antécédents par f). On en déduit aussi qu'aucun élément de la forme $(0, b)$, avec $b \neq 0$, n'admet d'antécédent par f : ainsi, f n'est pas non plus surjective.

Étudions à présent l'application g. Considérons[3] $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $g(x, y) = g(x', y')$. On a alors $x - y = x' - y'$ d'une part, et d'autre part $2xy = 2x'y'$, c'est-à-dire que $xy = x'y'$. Notons a la valeur commune de $x - y$ et $x' - y'$: on a alors $x = a + y$ ainsi que $x' = a + y'$. La relation $xy = x'y'$ se réécrit alors sous la forme $(a + y)y = (a + y')y'$... ce qui ne permet pas de conclure que $y = y'$! Cet écueil nous pousse à partir dans la direction opposée et à chercher un contre-exemple permettant de conclure que g n'est pas injective.

La relation $(a + y)y = (a + y')y'$ étant vérifiée si les deux termes de l'égalité sont nuls, ce qui est par exemple le cas lorsque $y = -a$ et $y' = 0$, il suffit de choisir un $a \neq 0$, de poser $y = -a$ et $y' = 0$ puis de choisir x et x' de façon à ce que $x - y$ et $x' - y'$ soient tous deux égaux à a. Par exemple, pour le choix $a = 1$ on obtient $y = -1$ et $y' = 0$, puis $x = 0$ et $x' = 1$, ce qui donne bien deux couples $(0, -1)$ et $(1, 0)$ distincts mais de même image par g. L'application g n'est donc pas injective, et par conséquent pas bijective.

Déterminons à présent si g est surjective. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \geqslant -2xy$$

car x^2 et y^2 sont positifs. Ainsi, si $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ admet un antécédent par g, c'est-à-dire s'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a = x - y$ et $b = 2xy$, alors on a nécessairement $a^2 \geqslant -2b$. On en déduit que certains couples de $\mathbb{R}^2$ n'admettent pas d'antécédent par g, par exemple $(0, -1)$. Ainsi, g n'est pas surjective.

Correction de l'exercice 24.

1. Supposons g injective. Pour tous $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$, on a $(f(x), f(x)) = (f(x'), f(x'))$ donc $g(x) = g(x')$, d'où $x = x'$ par injectivité de g. Ainsi, f est injective, ce qui démontre l'implication directe.

   Supposons réciproquement que f soit injective. Pour tous $x, x' \in E$ tels que $g(x) = g(x')$, on a $(f(x), f(x)) = (f(x'), f(x'))$ donc $f(x) = f(x')$, d'où $x = x'$ par injectivité de f. Ainsi, g est injective, ce qui démontre l'implication réciproque, et donc l'équivalence.

2. Supposons que $|F| \geqslant 2$. Il existe alors deux éléments distincts y et y' dans F ; alors le couple (y, y') ne peut être visité par g puisque pour tout $x \in E$, l'élément $g(x) = (f(x), f(x))$ est un couple de deux éléments identiques. Ainsi, g n'est pas surjective.

---

3. Chercher directement un contre-exemple pour montrer que g n'est pas injective serait évidemment plus rapide, mais encore faut-il savoir d'emblée que l'application n'est pas injective ! Le cheminement intellectuel reproduit ici, plus sinueux, est celui effectué lors d'une phase de recherche classique.

Dans une copie, il est suffisant d'exhiber le contre-exemple obtenu, en écrivant « on remarque que $g(0, -1) = (0, 1) = g(1, 0)$ ».

3. Supposons h injective. Pour tous $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$, on a $(f(x), f(x)) = (f(x'), f(x'))$ soit $h(x,x) = h(x',x')$, d'où $(x,x) = (x',x')$ par injectivité de h, soit $x = x'$. Ainsi, f est injective, ce qui démontre l'implication directe.

   Réciproquement, supposons f injective. Pour tous $(x,y),(x',y') \in E^2$ tels que $h(x,y) = h(x',y')$, on a $(f(x), f(y)) = (f(x'), f(y'))$ donc $f(x) = f(x')$ et $f(y) = f(y')$, d'où $x = x'$ et $y = y'$ par injectivité de f, et donc $(x,y) = (x',y')$. Ainsi, h est injective, ce qui démontre l'implication réciproque, et donc l'équivalence.
4. Supposons que h soit surjective. Pour tout $y \in F$, le couple (y,y) admet un antécédent par h, donc il existe $(x,x') \in E$ tel que $h(x,x') = (y,y)$, soit $(f(x), f(x')) = (y,y)$: on a donc $f(x) = y$, donc y admet un antécédent par f. L'application f est donc surjective, d'où l'implication directe.

   Réciproquement, supposons que f soit surjective. Si $y, y' \in F$, il existe $x, x' \in E$ tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$, soit $(y,y') = (f(x), f(x')) = h(x,x')$. Ainsi, h est surjective, ce qui démontre l'implication réciproque et donc l'équivalence attendue.

Correction de l'exercice 25. Supposons que f soit injective. Si $x \in E$, alors $f(f(x)) = f(x)$, donc $f(x) = x$ par injectivité de f : ainsi, x est son propre antécédent par f, ce qui implique que f est surjective.

Supposons réciproquement que f est surjective. On veut montrer que f est injective ; on considère donc pour cela $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Comme f est surjective, il existe $a, a' \in E$ tels que $f(a) = x$ et $f(a') = x'$. L'égalité $f(x) = f(x')$ s'écrit donc $(f \circ f)(a) = (f \circ f)(a')$, mais $f \circ f = f$ donc $f(a) = f(a')$, soit $x = x'$. Ainsi, f est bien injective.

Ainsi, f est bien injective si et seulement si elle est surjective. Or on a vu dans le premier point que l'injectivité de f entraîne la relation $f(x) = x$ pour tout $x \in E$, c'est-à-dire $f = \mathrm{Id}_E$. Notons que l'on pouvait aussi obtenir ce résultat en composant l'égalité $f \circ f = f$ par f^{-1} (à gauche ou à droite).

Correction de l'exercice 26. On procède par double inclusion. Si $x \in E$ est tel que $f(x) \in B$, en posant $y = f(x)$ on voit que $x = f^{-1}(f(x))$ et que $y \in B$: ainsi, on a

$$\{x \in E \,:\, f(x) \in B\} \subset \{f^{-1}(y), y \in B\}.$$

Réciproquement, un élément x s'écrivant $f^{-1}(y)$, avec $y \in B$, vérifie $f(x) = y \in B$: on a donc bien

$$\{f^{-1}(y), y \in B\} \subset \{x \in E \,:\, f(x) \in B\}.$$

Ainsi, l'égalité attendue est bien démontrée.

Correction de l'exercice 27. Supposons qu'il existe $g : B \to A$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. Soient $x \in A$ et $y \in B$. Alors :

- Si $f(x) = y$, en composant cette égalité à gauche par g on obtient $g(f(x)) = g(y)$ soit $\mathrm{Id}_A(x) = g(y)$, soit encore $x = g(y)$.
- Si $x = g(y)$, composer cette égalité à gauche par f donner $f(x) = f(g(y))$ soit $f(x) = \mathrm{Id}_B(y)$, soit encore $f(x) = y$.

Ainsi, on a équivalence entre les égalités $f(x) = y$ et $x = g(y)$. L'application f est donc bijective et sa bijection réciproque est $f^{-1} = g$.

Correction de l'exercice 28.

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $1 + x > 0$, donc on peut diviser la double inégalité $0 \leqslant x < 1 + x$ par $1 + x$, ce qui donne $0 \leqslant \frac{x}{1+x} < 1$. Ainsi, f_1 est bien définie.

Si $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in [0, 1[$, alors

$$\begin{aligned} y = f_1(x) \quad &\iff \quad y = \frac{x}{x+1} \quad \iff \quad y(x+1) = x \quad \text{car } x+1 \neq 0 \\ &\iff \quad yx + y = x \quad \iff \quad x - yx = y \\ &\iff \quad (1-y)x = y \quad \iff \quad x = \frac{y}{1-y} \quad \text{car } 1 - y \neq 0. \end{aligned}$$

Or l'application

$$g_1 : \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \dfrac{y}{1-y} \end{array}$$

est bien définie puisque si $y \in [0, 1[$ alors $\frac{y}{1-y}$ existe et est positif. On peut donc affirmer que f_1 est bijective et que $f_1^{-1} = g_1$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $1 + x^2 \geqslant 1$, donc $\sqrt{1 + x^2}$ existe et est supérieur ou égal à 1 : ainsi, f_2 est bien définie.

Si $x \in \mathbb{R}_+$ et $y \in [1, +\infty[$, alors on a

$$\begin{aligned} y = f_2(x) \quad &\iff \quad y = \sqrt{1+x^2} \quad \iff \quad y^2 = 1 + x^2 \quad \text{car } y \geqslant 0 \\ &\iff \quad x^2 = y^2 - 1 \quad \iff \quad x = \sqrt{y^2 - 1} \quad \text{car } x \geqslant 0. \end{aligned}$$

Or l'application

$$g_2 : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ y & \longmapsto & \sqrt{y^2-1} \end{array}$$

est bien définie puisque si $y \in [1, +\infty[$ alors $y^2 - 1 \geqslant 0$ donc $\sqrt{y^2 - 1}$ existe et est positif. Ainsi, f_2 est bijective et $f_2^{-1} = g_2$.

(iii) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le couple $(3x + 2y, x - y + 1)$ existe et est dans $\mathbb{R}^2$, donc f_3 est bien définie.

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors on a

$$\begin{aligned} (a,b) = f_3(x,y) \quad &\iff \quad (a,b) = (3x+2y, x-y+1) \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+2y &=& a \\ x-y+1 &=& b \end{array} \right. \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3x+2y &=& a \\ x &=& y+b-1 \end{array} \right. \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 3(y+b-1)+2y &=& a \\ x &=& y+b-1 \end{array} \right. \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 5y+3b-3 &=& a \\ x &=& y+b-1 \end{array} \right. \\ &\iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& \dfrac{a-3b+3}{5} \\ x &=& \dfrac{a-3b+3}{5} + b - 1 \end{array} \right. \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& \dfrac{a-3b+3}{5} \\ x &=& \dfrac{a+2b-2}{5} \end{array} \right. \\ &\iff \quad (x,y) = \left(\frac{a+2b-2}{5}, \frac{a-3b+3}{5} \right). \end{aligned}$$

Or l'application

$$g_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (a,b) & \longmapsto & \left(\frac{a+2b-2}{5}, \frac{a-3b+3}{5}\right) \end{array}$$

est bien définie puisqu'elle associe à tout élément de $\mathbb{R}^2$ un élément de $\mathbb{R}^2$ dont la définition ne pose pas problème. Ainsi, l'application f_3 est bijective et on a $f_3^{-1} = g_3$.

(iv) Pour toute partie A de $[\![1,100]\!]$, l'ensemble $A \cup \{0\}$ est une partie de $[\![0,100]\!]$ contenant 0, donc l'application f_4 est bien définie.

Si $A \in \mathcal{P}([\![1,100]\!])$ et si $B \in \mathcal{P}([\![0,100]\!])$ est telle que $0 \in B$, alors on a

$$B = f_4(A) \iff A = B \setminus \{0\}.$$

Or l'application

$$g_4 : \begin{array}{ccc} \{B \subset [\![0,100]\!] \,:\, 0 \in B\} & \longrightarrow & \mathcal{P}([\![1,100]\!]) \\ B & \longmapsto & B \setminus \{0\} \end{array}$$

est bien définie puisqu'elle associe à toute partie de $[\![0,100]\!]$ contenant 0 un ensemble inclus dans $[\![1,100]\!]$. Ainsi, l'application f_4 est bijective et $f_4^{-1} = g_4$.

Correction de l'exercice 29.

1. Soient $f, g \in \mathcal{F}(A,B)$ telles que $\Phi(f) = \Phi(g)$. Alors

$$(f(x_1), \dots, f(x_n)) = (g(x_1), \dots, g(x_n)),$$

c'est-à-dire que $f(x_i) = g(x_i)$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: ainsi, les applications f et g coïncident sur A, c'est-à-dire qu'elles sont égales. L'application Φ est donc injective.

Soit à présent $(y_1, \dots, y_n) \in B^n$. On peut définir une application $f \in \mathcal{F}(A,B)$ en posant $f(x_i) = y_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, et on a alors $\Phi(f) = (y_1, \dots, y_n)$. Ainsi, Φ est surjective.

On en déduit que Φ est bijective.

2. Les ensembles $\mathcal{F}(A,B)$ et B^n sont en bijection *via* Φ d'après la question précédente. Ils ont donc le même cardinal [4], si bien que

$$|\mathcal{F}(A,B)| = |B^n| = |B|^n = p^n.$$

Remarque : en utilisant la notation alternative B^A pour désigner $\mathcal{F}(A,B)$, le résultat de cet exercice peut s'écrire $|B^A| = |B|^{|A|}$.

La notation B^A rappelle celle d'un produit cartésien indexé sur A, de B par lui-même : cette analogie est justifiée par le codage d'une fonction f sous la forme du n-uplet $\Phi(f)$.

4. On peut montrer (faites-le !) que si un ensemble est en bijection avec un ensemble fini, il est lui aussi fini. Cet argument permet d'utiliser la proposition 19 du cours, d'où l'égalité annoncée.

Correction de l'exercice 30. On pourrait montrer que φ est injective et qu'elle est surjective, mais on préfère varier les plaisirs et exhiber directement sa réciproque. On sait que si $f = \mathbb{1}_A$ pour un certain $A \subset E$, alors $A = f^{-1}(\{1\})$. Par ailleurs, si $f \in \mathcal{F}(E, \{0,1\})$ alors on peut écrire $f = \mathbb{1}_A$ avec $A := f^{-1}(\{1\})$. L'application

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(E,\{0,1\}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ f & \longmapsto & f^{-1}(\{1\}) \end{array}$$

vérifie donc

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad \forall f \in \mathcal{F}(E, \{0,1\}), \quad \big(f = \varphi(A) \iff A = \psi(f)\big).$$

Ainsi, φ est bijective et sa réciproque vaut ψ.

Les ensembles $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$ sont donc de même cardinal. D'après l'exercice 29, le cardinal de $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$ est $|\{0,1\}|^n = 2^n$, donc $|\mathcal{P}(E)| = 2^n$.

Correction de l'exercice 31. Lorsque x parcourt $\mathbb{R}^*$, la quantité $\frac{1}{x}$ parcourt elle aussi $\mathbb{R}^*$, donc $f(x)$ parcourt $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Si $x \in \mathbb{R}^*$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on peut écrire

$$y = f(x) \iff 1 + \frac{1}{x} = y \quad \iff \frac{1}{x} = y - 1 \iff x = \frac{1}{y-1} \text{ car } y - 1 \neq 0.$$

Or l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ y & \longmapsto & \dfrac{1}{y-1} \end{array}$$

est bien définie puisque pour tout $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a $y - 1 \neq 0$. Ainsi, f est bijective de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a $f^{-1}(x) = g(x) = \frac{1}{x-1}$.

Correction de l'exercice 32. Soit $A \subset E$. Si $x, x' \in A$ sont tels que $f|_A(x) = f|_A(x')$, alors $f(x) = f(x')$, d'où $x = x'$ puisque f est injective. Ainsi, $f|_A$ est injective, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 33.

1. (*i*) Supposons $g \circ f$ injective. Si $x, x' \in E$ sont tels que $f(x) = f(x')$, alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, soit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, d'où $x = x'$ par injectivité de $g \circ f$. L'appliction f est donc injective.

   (*ii*) Supposons que $g \circ f$ soit surjective. Pour tout $y \in H$, il existe alors $x \in E$ tel que $y = (g \circ f)(x)$, soit $y = g(f(x))$: ainsi, $f(x)$ est un antécédent de y par g. L'application g est donc surjective.

2. Supposons que $h : E \to E$ soit telle que $h \circ h$ est bijective. Elle est donc injective, donc h l'est d'après le point (i) de la question précédente. Elle est aussi surjective, donc h l'est d'après le point (ii) de la question précédente. Ainsi, h est bijective.

Correction de l'exercice 34.

1. Supposons que les applications f et g soient injectives. Pour tous $x, x' \in E$ tels que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, on a $g(f(x)) = g(f(x'))$ donc $f(x) = f(x')$ par injectivité de g, d'où $x = x'$ par injectivité de f. Ainsi, $g \circ f$ est injective.
2. Supposons que f et g soient surjectives. Pour tout $z \in G$, il existe alors $y \in F$ tel que $z = g(y)$; or il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $z = g(f(x))$, soit $z = (g \circ f)(x)$. Ainsi, $g \circ f$ est surjective.
3. Supposons que f et g soient bijectives. L'application $f^{-1} \circ g^{-1}$ est bien définie de G dans E, et si $x \in E$ et $y \in H$ alors on a

$$z = f(g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(z) = g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad g^{-1}(f^{-1}(z)) = x$$

soit

$$z = (f \circ g)(x) \quad \Longleftrightarrow \quad (g^{-1} \circ f^{-1})(z) = x,$$

donc $f \circ g$ est bijective et $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

Correction de l'exercice 35.

1. (a) Soient A et A' des parties de E.

   Si $y \in f(A \cup A')$, alors y admet un antécédent dans $A \cup A'$: si cet antécédent est dans A alors $y \in f(A)$, et s'il est dans A' alors $y \in f(A')$, donc dans tous les cas $y \in f(A) \cup f(A')$. On en déduit l'inclusion directe $f(A \cup A') \subset f(A) \cup f(A')$.

   Si $y \in f(A) \cup f(A')$, on a soit $y \in f(A)$, soit $y \in f(A')$. Dans le premier cas, y possède un antécédent dans A, et dans le second il possède un antécédent dans A' ; dans tous les cas, il possède donc un antécédent dans $A \cup A'$, c'est-à-dire que $y \in f(A \cup A')$. On en déduit l'inclusion réciproque $f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A')$.

   Ainsi, on a bien l'égalité attendue : $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

   À présent, si $y \in f(A \cap A')$, alors y admet un antécédent qui se trouve à la fois dans A et dans A', alors y est à la fois dans $f(A)$ et dans $f(A')$, d'où l'inclusion $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

   (b) Pour construire un contre-exemple, il est intéressant de comprendre pourquoi l'inclusion réciproque ne peut être démontrée. Si $y \in f(A) \cap f(A')$, on peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in A$ et $y = f(x')$ avec $x' \in A'$, mais rien ne garantit que l'on ait $x = x'$ (ce qui aurait certes permis d'affirmer que $x \in A \cap A'$ et donc que $y \in f(A \cap A')$). Ce n'est notamment jamais le cas si A et A' sont disjoints !

   On construit donc un contre-exemple en choisissant une application simple mais pour laquelle une valeur de y admet plusieurs antécédents dans des ensembles disjoints, par exemple la fonction carré

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2, \end{array}$$

qui vérifie $f(\mathbb{R}_-^*) = \mathbb{R}_+^*$ et $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$ donc $f(\mathbb{R}_-^*) \cap f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$, mais $f(\mathbb{R}_-^* \cap \mathbb{R}_+^*) = f(\varnothing) = \varnothing$: en choisissant $A = \mathbb{R}_-^*$ et $B = \mathbb{R}_+^*$, on a donc bien $f(A) \cap f(A') \not\subset f(A \cap A')$.

(c) Supposons f injective. Alors pour tous $A, A' \in \mathcal{P}(E)$, si $y \in f(A) \cap f(A')$, on peut écrire comme plus haut que $y = f(x)$ avec $x \in A$ et $y = f(x')$ avec $x' \in A'$; mais alors $f(x) = f(x')$ donc $x = x'$ par injectivité de f, ce qui implique que $x \in A \cap A'$ et donc que $y \in f(A \cap A')$. Ainsi, on a bien $f(A) \cap f(A') = f(A \cap A')$ pour toutes parties A et A' de E.

Supposons à présent que f ne soit pas injective. Il existe alors $x, x' \in A$ tels que $f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$. Alors en posant $A := \{x\}$ et $A' := \{x'\}$ on a $f(A \cap A') = f(\varnothing) = \varnothing$, tandis que $f(x) = f(x')$ appartient à la fois à $f(A)$ et à $f(A')$, donc à $f(A) \cap f(A')$: ainsi, on a $f(A) \cap f(A') \not\subset f(A \cap A')$. Par contraposée, si on a $f(A) \cap f(A') = f(A \cap A')$ pour toutes parties A et A' de E, alors f est injective, ce qui achève d'établir l'équivalence recherchée.

2. (a) Soit $A \subset E$. Si $y \in f(E) \setminus f(A)$, alors on peut écrire $y = f(x)$ pour un $x \in E$, mais y n'admet pas d'antécédent dans A : ainsi, $x \notin A$, si bien que $x \in E \setminus A$ et que $y = f(x) \in f(E \setminus A)$. On en déduit l'inclusion $f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$.

(b) Si l'on considère à nouveau la fonction carré f, on trouve d'une part $f(\mathbb{R}) \setminus f(\{1\}) = \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ et d'autre part $f(\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R}_+ \not\subset (\mathbb{R}_+ \setminus \{1\})$, donc on obtient bien le contre-exemple attendu en posant $E = \mathbb{R}$ et $A = \{1\}$.

(c) On raisonne à nouveau par double implication.

Supposons que pour tout $A \subset E$ on ait $f(E) \setminus f(A) = f(E \setminus A)$. Soient $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$. On a alors $x' \in E \setminus \{x\}$, donc $f(x') \in f(E \setminus \{x\})$, d'où $f(x') \in f(E) \setminus f(\{x\})$ d'après l'hypothèse appliquée à l'ensemble $A = \{x\}$. Ainsi, $f(x') \in f(E) \setminus \{f(x)\}$, ce qui signifie que $f(x') \neq f(x)$: l'application f est donc injective.

Réciproquement, supposons f injective. Soit $A \subset E$. On sait déjà que $f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$ on va montrer que l'inclusion réciproque est vérifiée. Si $y \in f(E \setminus A)$, il existe $x \in E \setminus A$ tel que $y = f(x)$. On a donc notamment $y \in f(E)$. Mais si on avait aussi $y \in f(A)$, il existerait $x' \in A$ tel que $y = f(x')$, soit $f(x) = f(x')$: on en déduirait alors que $x = x'$ par injectivité de f, ce qui est absurde puisque $x \in E \setminus A$ et $x' \in A$. Ainsi, on a $y \notin f(A)$, donc $y \in f(E) \setminus f(A)$. On a donc montré l'inclusion $f(E \setminus A) \subset f(E) \setminus f(A)$, ce qui établit l'égalité de ces deux ensembles et clôt la preuve.

(d) Supposons que l'on ait $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$ pour tout $A \subset E$. En prenant $A = \varnothing$ on trouve $f(E) = F \setminus \varnothing = F$, donc f est surjective. L'hypothèse se réécrit alors en disant que pour tout $A \subset E$ on a $f(E \setminus A) = f(E) \setminus f(A)$: cette condition implique d'après la question précédente que f est injective, donc f est bijective. L'implication directe est donc bien établie.

Réciproquement, supposons que f soit bijective. Alors f est surjective, donc $f(E) = F$. Par ailleurs, comme f est injective, on a pour toute partie A de E, d'après la question précédente :

$$f(E \setminus A) = f(E) \setminus f(A) = F \setminus f(A),$$

ce qui démontre l'implication réciproque et donc l'équivalence attendue.

3. Soient B et B' des parties de F. On a alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(B \cup B') &= \{x \in E \,:\, f(x) \in B \cup B'\} = \{x \in E \,:\, f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B'\} \\ &= \{x \in E \,:\, x \in f^{-1}(B) \text{ ou } x \in f^{-1}(B')\} = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B') \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} f^{-1}(B \cap B') &= \{x \in E \,:\, f(x) \in B \cap B'\} = \{x \in E \,:\, f(x) \in B \text{ et } f(x) \in B'\} \\ &= \{x \in E \,:\, x \in f^{-1}(B) \text{ et } x \in f^{-1}(B')\} = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B'). \end{aligned}$$

4. Si $B \subset F$, alors

$$\begin{aligned} f^{-1}(F \setminus B) &= \{x \in E \,:\, f(x) \in F \setminus B\} = \{x \in E \,:\, f(x) \in F \text{ et } f(x) \notin B\} \\ &= \{x \in E \,:\, x \in f^{-1}(F) \text{ et } x \notin f^{-1}(B)\} = f^{-1}(F) \setminus f^{-1}(B). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 36.

1. Si $A = E$, on a $\Phi_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$, donc Φ_A est bijective (elle est sa propre réciproque).

   On a $\Phi_A(E) = A = \Phi_A(A)$: ainsi, $\Phi_A(E) = \Phi_A(A)$, donc si $A \neq E$ l'application Φ_A n'est pas injective. Par contraposée, on voit donc que si Φ_A est injective, alors $A = E$.

   On voit par ailleurs que pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$ on a $\Phi_A(X) = A \cap X \subset A$: ainsi, si $A \subsetneq E$, la partie E n'admet aucun antécédent par Φ_A, ce qui montre que Φ_A n'est pas surjective. Par contraposée, on voit donc que si Φ_A est surjective, alors $A = E$.

   On a donc la suite d'implications ci-dessous :

$$\Phi_A \text{ est injective} \implies A = E \implies \Phi_A \text{ est bijective} \implies \Phi_A \text{ est surjective}$$

   ainsi que la suite d'implications

$$\Phi_A \text{ est surjective} \implies A = E \implies \Phi_A \text{ est bijective} \implies \Phi_A \text{ est injective.}$$

   On en déduit la suite d'équivalences recherchée.

2. Si $A = \varnothing$, on a $\Psi_A = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$, donc Ψ_A est bijective.

   On a $\Psi_A(\varnothing) = A = \Psi_A(A)$: ainsi, $\Psi_A(\varnothing) = \Psi_A(A)$, donc si $A \neq \varnothing$ l'application Ψ_A n'est pas injective. Par contraposée, on voit donc que si Ψ_A est injective, alors $A = \varnothing$.

   On voit par ailleurs que pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$ on a $A \subset A \cup X = \Psi_A(X)$: ainsi, si $A \neq \varnothing$, la partie $\varnothing$ n'admet aucun antécédent par Ψ_A, ce qui montre que Ψ_A n'est pas surjective. Par contraposée, on voit donc que si Ψ_A est surjective, alors $A = \varnothing$.

   On conclut alors exactement comme dans le point précédent.

Correction de l'exercice 37.

1. (a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Par définition, la préimage $f^{-1}(f(A))$ est l'ensemble des éléments $x \in E$ tels que $f(x) \in f(A)$: c'est le cas de tous les éléments de A par définition de $f(A)$, donc on a bien $A \subset f^{-1}(f(A))$.

   Supposons à présent que f est injective. Alors pour tout $x \in f^{-1}(f(A))$ on a $f(x) \in f(A)$, donc il existe $x' \in A$ tel que $f(x) = f(x')$, d'où $x = x' \in A$ par injectivité de f. Ainsi, l'inclusion réciproque $f^{-1}(f(A)) \subset A$, et donc l'égalité $f^{-1}(f(A)) = A$, sont bien vérifiées.

   (b) Soit $B \in \mathcal{P}(F)$. Par définition, l'image $f(f^{-1}(B))$ est l'ensemble des images par f des éléments de $f^{-1}(B)$; mais par définition de $f^{-1}(B)$, ces images sont dans B, d'où l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

   Supposons à présent que f est surjective. Alors pour tout $y \in B$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$; mais alors $x \in f^{-1}(B)$ puisque l'image de x par f est dans B, donc $y = f(x) \in f(f^{-1}(B))$. Ainsi, l'inclusion réciproque $B \subset f(f^{-1}(B))$, et donc l'égalité $B = f(f^{-1}(B))$, sont bien vérifiées.

2. (a) Supposons que f est injective. Soient $A, A' \in \mathcal{P}(E)$ tels que $\Phi(A) = \Phi(A')$, c'est-à-dire tels que $f(A) = f(A')$. Comme f est injective, on peut d'après la question 1(a) écrire que

$$A = f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(A')) = A',$$

   ce qui montre que Φ est injective.

   Réciproquement, supposons Φ injective. Soient $x, x' \in E$ deux éléments tels que $x \neq x'$. Alors $\{x\} \neq \{x'\}$, donc $\Phi(\{x\}) \neq \Phi(\{x'\})$ par injectivité de Φ. Or on a d'une part $\Phi(\{x\}) = f(\{x\}) = \{f(x)\}$, et d'autre part $\Phi(\{x'\}) = f(\{x'\}) = \{f(x')\}$, donc $f(x) \neq f(x')$. Ainsi, f est injective.

   On a bien démontré que Φ est injective si et seulement si f l'est.

   (b) Supposons que f est surjective. Alors pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, d'après la question 1(b) on peut écrire que $\Phi(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B)) = B$. Ainsi, l'application Φ est surjective.

   Réciproquement, supposons que Φ est surjective. Alors pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $\Phi(\{x\}) = \{y\}$, ce qui se réécrit $\{f(x)\} = \{y\}$, soit $f(x) = y$. Ainsi, f est surjective.

   On a bien démontré que Φ est surjective si et seulement si f l'est.

3. (a) Supposons que l'application f est surjective. Soient $B, B' \in \mathcal{P}(F)$ tels que $\Psi(B) = \Psi(B')$, c'est-à-dire tels que $f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$. Comme f est surjective, on peut d'après la question 1.(b) écrire que

$$B = f(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B')) = B',$$

   donc Ψ est injective.

Réciproquement, supposons Ψ injective. Comme $\Psi(\varnothing) = \varnothing$, seul l'ensemble vide possède l'ensemble vide pour image par Ψ : ainsi, pour tout $y \in B$ l'ensemble $f^{-1}(\{y\}) = \Psi(\{y\})$ n'est pas égal à $\varnothing$, ce qui signifie que y admet au moins un antécédent par f. On en déduit que f est surjective.

On a bien démontré que Ψ est injective si et seulement si f est surjective.

(b) Supposons à présent que f est injective. Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, on peut d'après la question 1(a) écrire que $f^{-1}(f(A)) = A$, soit $\Psi(f(A)) = A$; ainsi, A admet un antécédent par Ψ. L'application Ψ est donc surjective.

Réciproquement, supposons que Ψ est surjective. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $\{x\}$ admet un antécédent par Ψ, c'est-à-dire qu'il existe $B \subset F$ tel que $\Psi(B) = \{x\}$, soit $f^{-1}(B) = \{x\}$. Mais alors $x \in f^{-1}(B)$, donc l'ensemble B contient nécessairement $f(x)$. Comme cet élément est aussi égal à $f(x')$, on a nécessairement $x' \in f^{-1}(B)$, donc $x' \in \{x\}$: ainsi, $x = x'$. L'application f est donc injective.

On a bien démontré que Ψ est surjective si et seulement si f est injective.

4. Lorsque f est bijective, les deux points de la question 1 montrent d'une part que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ et d'autre part que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(F)}$: ainsi, on a $\Phi^{-1} = \Psi$ et $\Psi^{-1} = \Phi$.

Correction de l'exercice 38.

1. On a $f(1) \in [\![1, n]\!]$ donc $f(1) \geqslant 1$. Comme f est strictement croissante, on a $f(2) > f(1)$ d'où, comme $f(2)$ est entier, $f(2) \geqslant 2$. En raisonnant de même, on trouve $f(3) \geqslant 3$, et plus généralement $f(k) \geqslant k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (cette proposition peut se démontrer rigoureusement par récurrence sur $k \in [\![1, n]\!]$).

   Il reste à présent à montrer que $f(k) \leqslant k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ce qui permettra de conclure que $f(k) = k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et donc que $f = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$. Supposons que ce ne soit pas le cas et qu'il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $f(k_0) > k_0$, c'est-à-dire, comme f est à valeurs entières, que $f(k_0) \geqslant k_0 + 1$. En raisonnant comme précédemment à l'aide de la stricte croissance de f, on montre que pour tout $p \in [\![0, n - k_0]\!]$ on a $f(k_0 + p) \geqslant k_0 + p + 1$; en particulier, pour $p = n - k_0$ on obtient $f(n) \geqslant n + 1$, ce qui est absurde puisque f est à valeurs dans $[\![1, n]\!]$. Ainsi, on a bien $f(k) \leqslant k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ce qui clôt la preuve.

2. Le choix de l'application $g : n \mapsto n + 1$ montre que le résultat de la question précédente n'est plus vrai dans $\mathbb{N}$.

3. Supposons qu'il existe une application $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement décroissante. Alors on a $h(1) < h(0)$ donc, comme h est à valeurs entières, $h(1) \leqslant h(0) - 1$. Par le même raisonnement, on montre que $h(2) \leqslant h(1) - 1 \leqslant h(0) - 2$, puis que $h(3) \leqslant h(0) - 3$, et plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $h(n) \leqslant h(0) - n$. Ainsi, dès que $n > h(0)$ on a $h(n) < 0$; mais cela contredit le fait que h est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Ainsi, il n'existe pas d'application $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement décroissante.

Correction de l'exercice 39.

1. Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la proposition

   $$\mathcal{P}_p \ : \ \text{« } f(C_p) \subset C_p \text{ ».}$$

   Initialisation :

   La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque $C_0 = \mathbb{N}$ et $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$.

   Hérédité :

   Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons la proposition $\mathcal{P}_p$ soit vraie, c'est-à-dire que $f(C_p) \subset C_p$.

   Soit $k \in C_{p+1}$. On a alors $k \geqslant p+1$ donc $k \geqslant p$, soit $k \in C_p$; ainsi, $f(k) \in C_p$ d'après l'hypothèse de récurrence, ce qui signifie que $f(k) \geqslant p$. On sait par ailleurs que $f(f(k-1)) < f(k)$ d'après la propriété $(*)$. Si $f(k) = p$, on peut donc écrire $f(f(k-1)) < p$; or $k-1 \in C_p$ donc $f(k-1) \in C_p$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où $f(f(k-1)) \in C_p$ d'après cette même hypothèse, c'est-à-dire que $f(f(k-1)) \geqslant p$. Ainsi, on ne peut avoir $f(k) = p$; comme $f(k) \geqslant p$, on en déduit que $f(k) \geqslant p+1$, c'est-à-dire que $f(k) \in C_{p+1}$. On a donc montré l'inclusion $f(C_{p+1}) \subset C_{p+1}$, c'est-à-dire la proposition $\mathcal{P}_{p+1}$.

   Conclusion :

   La proposition $\mathcal{P}_p$ est donc vraie à tout rang $p \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence.

2. Supposons que f ne soit pas strictement croissante : il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) \geqslant f(n+1)$. Mais alors $f(n) \in C_{f(n+1)}$ donc on devrait avoir $f(f(n)) \in C_{f(n+1)}$, soit $f(f(n)) \geqslant f(n+1)$, d'après la question précédente ; or cela est contraire à la propriété $(*)$. Ainsi, f est strictement croissante.

3. L'application f étant strictement croissante d'après la question précédente, on peut déduire de l'inégalité $f(f(n)) < f(n+1)$ que $f(n) < n+1$, soit $f(n) \leqslant n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or si $n \in \mathbb{N}$, on a $n \in C_n$, d'où $f(n) \in C_n$ d'après la question 1, soit $f(n) \geqslant n$. Ainsi, on a $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 40.

1. Si A et B sont finis et s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors les cardinaux de A et B vérifient

   $$|A| \leqslant |B| \quad \text{et} \quad |B| \leqslant |A|, \quad \text{et donc} \quad |A| = |B|,$$

   ce qui assure qu'il existe une bijection de A dans B.

2. Si $x \in C$ on a $x \in C_n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et donc $u(x) \in u(C_n) = C_{n+1}$ d'où $u(x) \in C$.

3. La définition de $v(x)$ pour tout $x \in A$ ne posant pas problème, il reste à montrer que v est bien à valeurs dans A'.

   Soit $x \in A$.

   Si $x \in C$, alors $v(x) = u(x) \in A'$ puisque u est à valeurs dans A'.

   Si $x \notin C$, alors on a notamment $x \notin C_0$; or $C_0 = A \setminus A'$ donc $v(x) = x \in A'$.

Dans tous les cas, l'élément défini comme étant égal à $v(x)$ est bien dans A', ce qu'il fallait démontrer. L'application v est donc bien définie.

Montrons à présent que v est injective en considérant $x, x' \in E$ tels que $v(x) = v(x')$. On souhaite montrer que l'on a nécessairement $x = x'$.

On distingue plusieurs cas :

- Si $x \notin C$ et $x' \notin C$, alors l'égalité $v(x) = v(x')$ se réécrit directement comme l'égalité recherchée $x = x'$.
- Si x et x' sont dans C, alors l'égalité $v(x) = v(x')$ se réécrit $u(x) = u(x')$, or u est injective donc $x = x'$.
- Considérons enfin le cas où $x \in C$ et $x' \notin C$. L'égalité $v(x) = v(x')$ se réécrit alors sous la forme $u(x) = x'$. Mais $x \in C$, donc x appartient à C_n pour un certain $n \in \mathbb{N}$; on a alors $x' = u(x) \in u(C_n) = C_{n+1}$, si bien que $x' \in C$, ce qui contredit l'hypothèse. Ce troisième cas est donc impossible : on ne peut avoir $v(x) = v(x')$ avec $x \in C$ et $x' \notin C$.

Ainsi, on a dans tous les cas possibles $x = x'$, ce qu'il fallait démontrer : l'application v est donc bien injective.

Montrons à présent que v est surjective. On considère pour cela $y \in A'$.

Si $y \notin C$, on a $v(y) = y$, d'où le résultat attendu avec $x = y$.

Supposons à présent que $y \in C$. Il existe donc un $n \in \mathbb{N}$ tel que $y \in C_n$. Comme $y \in A'$, on ne peut avoir $n = 0$ puisque $C_0 = A \setminus A'$. Ainsi on a $n \geqslant 1$, or $C_n = u(C_{n-1})$ donc $y \in u(C_{n-1})$. Cela signifie qu'il existe $x \in C_{n-1}$ tel que $y = u(x)$, soit, comme $x \in C$, $y = v(x)$, ce qu'il fallait démontrer.

4. L'application $v : A \to A'$ ainsi construite est injective et surjective, donc bijective : il existe donc bien une bijection de A dans A', ce qui établit le lemme.
5. L'injectivité de h découle de celle de g, et sa surjectivité vient du fait que son ensemble d'arrivée est précisément l'ensemble image de B par g.
6. On a $f : A \to B$ et $h : B \to A'$, donc $u := h \circ f$ existe et est une application de A dans A'. Comme u est la composée de deux injections, elle est elle-même injective (en effet, si $x, x' \in E$ sont tels que $u(x) = u(x')$, c'est-à-dire tels que $h(f(x)) = h(f(x'))$, alors $f(x) = f(x')$ puisque h est injective, et donc $x = x'$ puisque f l'est).
7. On sait que la bijection réciproque h^{-1} de h est une bijection (!). En tant que composée de deux bijections, l'application $h^{-1} \circ v$ est donc elle-même bijective ; or $v : A \to A'$ et $h^{-1} : A' \to B$, donc $h^{-1} \circ v : A \to B$. On a donc bien construit une bijection de A dans B, ce qui établit le théorème de Cantor-Bernstein.

Correction de l'exercice 41.

(i) L'application $x \mapsto x$ de A dans A est évidemment injective, donc $|A| \leqslant |A|$.

(ii) Supposons que $|A| \leqslant |B|$ et $|B| \leqslant |C|$. Il existe donc une application $f : A \to B$ et une application $g : B \to C$ injectives. La composée $g \circ f : A \to C$ est donc injective (voir l'exercice 34) : ainsi, on a $|A| \leqslant |C|$.

(iii) La propriété d'antisymétrie est donnée par le théorème de Cantor-Bernstein (théorème H de la section 3 du cours) : s'il existe une injection de A dans B et une injection de B dans A, alors il existe une bijection de A dans B.

Correction de l'exercice 42.

(i) L'application $x \mapsto x$ de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$ étant injective, la proposition est vraie.

(ii) L'application $x \mapsto (x, 0)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ étant injective, la proposition est vraie.

(iii) La proposition est vraie. On a bien sûr $|\mathbb{Q}^*| \leqslant |\mathbb{Q}|$, l'injection étant réalisée par l'application $x \mapsto x$. On a par ailleurs $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}^*|$ puisque l'application $n \mapsto n+1$ est injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}^*$. Or $\mathbb{Q}$ est dénombrable, donc on peut écrire

$$|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}^*| \leqslant |\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|,$$

si bien [5] que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}^*|$.

(iv) La proposition est vraie d'après le théorème de Cantor.

(v) L'ensemble $[1, 2]$, qui est en bijection évidente avec $[0, 1]$ (par l'application $x \mapsto x - 1$), n'est pas dénombrable d'après le théorème J : on a $|\mathbb{N}| < |[1, 2]|$. Or $[1, 2] \subset [1, 2] \cup \mathbb{Q}_-$, donc

$$|\mathbb{N}| < |[1, 2]| \leqslant |[1, 2] \cup \mathbb{Q}_-| \quad \text{d'où}^{6} \quad |\mathbb{N}| \leqslant |[1, 2] \cup \mathbb{Q}_-|.$$

Ainsi, $[1, 2] \cup \mathbb{Q}_-$ n'est pas dénombrable.

(vi) Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers premiers. Ces entiers sont en nombre infini, donc $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathcal{P}|$ d'après la proposition B de la section 3 du cours. On a par ailleurs $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$, donc $|\mathcal{P}| \leqslant |\mathbb{N}|$. On peut donc en conclure que $|\mathbb{N}| = |\mathcal{P}|$, c'est-à-dire que l'ensemble des nombres premiers est dénombrable.

Correction de l'exercice 43. Soient A, B et C trois ensembles tels que $|A| \leqslant |B|$ et $|B| < |C|$. Il existe donc une injection $f : A \to B$ et une injection $g : B \to C$.

On souhaite montrer que $|A| < |C|$. Or $|A| \leqslant |C|$ par transitivité de la relation $\leqslant$ (voir le point (ii) de l'exercice 41). Il nous reste donc à établir que $|A| \neq |C|$, c'est-à-dire que A et C ne sont pas en bijection ; raisonnons donc par l'absurde et supposons qu'il existe une application bijective $h : A \to C$. L'application $h \circ g : B \to C$, qui est la composée de deux injections, est donc injective d'après l'exercice 34. On a ainsi $|B| \leqslant |C|$, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $|B| < |C|$. Il n'existe donc pas de bijection de A dans C, ce qui montre bien que $|A| < |C|$.

---

5. Rappelons que le raisonnement « $|\mathbb{N}| \leqslant |\mathbb{Q}^*|$ et $|\mathbb{Q}^*| \leqslant |\mathbb{N}|$ donc $|\mathbb{Q}^*| = |\mathbb{N}|$ » n'est valide qu'en vertu du théorème de Cantor-Bernstein et non d'une propriété triviale.

6. La transitivité de la relation $\leqslant$ sur l'ensemble des cardinaux infinis a été établie dans l'exercice précédent.

Correction de l'exercice 44. L'ensemble A étant infini, on a $|\mathbb{N}| \leqslant |A|$ d'après la proposition B de la section 3 du cours. Grâce au théorème de Cantor-Bernstein, il suffit désormais d'exhiber une injection $A \mapsto \mathbb{N}$ pour établir que $|A| = |\mathbb{N}|$ et donc que A est dénombrable. Or l'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & A & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & \inf\{n \in \mathbb{N} \,:\, x = x_n\} \end{array}$$

est bien définie (puisque tous les éléments de A sont de la forme x_n pour un n donné) et injective (puisque deux éléments de A distincts ne peuvent être égaux à un même élément x_n). Ainsi, on a $|A| \leqslant |\mathbb{N}|$, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 45.

1. Soient $A_1, A_2 \dots, A_N$ des ensembles dénombrables (en nombre fini $N \geqslant 1$). Il est clair que leur union, qui contient chacun de ces ensembles, est infinie puisque chaque ensemble l'est. D'après l'exercice précédent, il suffit de montrer que les éléments de l'union de ces ensembles peuvent être énumérés un à un[7], sans se soucier d'éventuelles répétitions. Pour cela, on écrit

   $$A_1 = \{x_{1,i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}, \quad A_2 = \{x_{2,i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}, \quad \dots, \quad A_N = \{x_{N,i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}.$$

   Les éléments de l'union $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N$ peuvent alors être énumérés de la façon suivante :

   $$\begin{array}{ll} x_{1,1}, x_{2,1}, \dots, x_{N,1}, & \text{(le premier élément de chaque ensemble } A_i\text{)} \\ x_{1,2}, x_{2,2}, \dots, x_{N,2}, & \text{(le deuxième élément de chaque ensemble } A_i\text{)} \\ x_{1,3}, x_{2,3}, \dots, x_{N,3}, & \text{(le troisième élément de chaque ensemble } A_i\text{)} \end{array}$$

   et ainsi de suite. Tous les éléments de l'union sont ainsi décrits, ce qui montre que cette union est dénombrable.

2. Donnons-nous un nombre dénombrable d'ensembles A_i (pour $i \in \mathbb{N}$), et écrivons chaque A_i sous la forme

   $$A_i = \{x_{i,j} \,:\, j \in \mathbb{N}\}.$$

   On se dote ensuite d'une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ (qui existe d'après le théorème I du cours). On peut alors écrire

   $$\bigcup_{i=0}^{+\infty} A_i = \{x_{\varphi(n)} \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

   puisque chaque élément de l'union des A_i s'écrit sous la forme $x_{i,j}$ avec $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, et donc sous la forme $x_{\varphi(n)}$ avec $n := \varphi^{-1}(i,j)$. Ainsi, l'union des A_i est dénombrable.

   On pouvait aussi expliciter l'énumération en reprenant l'énumération de $\mathbb{N}^2$ utilisée pour prouver le théorème I : les éléments de l'union des A_i s'écrivent

   $$x_{0,0},\ x_{0,1},\ x_{1,0},\ x_{0,2},\ x_{1,1},\ x_{2,0},\ x_{0,3},\ x_{1,2},\ \dots$$

   et sont donc en nombre dénombrable.

---

7. On peut, au prix d'un effort formel pas tout à fait négligeable, expliciter la bijection correspondant à ce protocole d'énumération.

3. Soient $A_1, \dots, A_N$ des ensembles dénombrables (en nombre fini $N \geqslant 1$), que l'on écrit

$$A_1 = \{x_{1,i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}, \quad A_2 = \{x_{2,i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}, \quad \dots, \quad A_N = \{x_{N,i} \,:\, i \in \mathbb{N}\}$$

comme précédemment. On se donne une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^N$ (qui existe comme nous l'avons évoqué lors de la démonstration du théorème I), et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on écrit l'élément $\varphi(n)$ sous la forme $(k_{1,n}, k_{2,n}, \dots, k_{N,n})$. Ainsi, tout élément de $\mathbb{N}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme $(k_{1,n}, k_{2,n}, \dots, k_{N,n})$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$; on peut donc écrire

$$\prod_{i=1}^{N} A_i = \{(x_{1,k_{1,n}}, x_{2,k_{2,n}}, \dots, x_{N,k_{N,n}}) \,:\, n \in \mathbb{N}\},$$

ce qui montre que le produit cartésien des A_i est dénombrable.

Correction de l'exercice 46. Remarquons tout d'abord que l'application f est bien définie : en effet, si $a, b \in \mathbb{N}$, alors 2^a et $2b+1$ sont des entiers strictement positifs donc $2^a(2b+1) \in \mathbb{N}^*$.

Montrons à présent que f est surjective. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe alors $a \in \mathbb{N}$ tel que n soit divisible par 2^a mais pas par 2^{a+1}. En effet, il suffit de diviser n par 2, puis par 2, et ainsi de suite jusqu'à obtenir un nombre impair ; a est alors le nombre de divisions par 2 effectuées. L'entier positif $\frac{n}{2^a}$ étant impair, on peut donc le noter sous la forme $2b+1$ avec $b \in \mathbb{N}$. Ainsi, il existe $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = 2^a(2b+1)$, ce qui montre que f est surjective.

Montrons ensuite que f est injective. On suppose pour cela que (a,b) et (a',b') soient deux couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tels que $2^a(2b+1) = 2^{a'}(2b'+1)$.
Si $a > a'$, l'égalité $2^a(2b+1) = 2^{a'}(2b'+1)$ se réécrit $2^{a-a'}(2b+1) = 2b'+1$ et le terme de gauche est pair alors que celui de droite est impair, ce qui est impossible. Une contradiction similaire survient si $a' > a$ (en écrivant $2b+1 = 2^{a'-a}(2b'+1)$). Ainsi, on a $a = a'$. L'égalité $2^a(2b+1) = 2^{a'}(2b'+1)$ se simplifie alors par $2^a = 2^{a'}$, ce qui donne $2b+1 = 2b'+1$ et donc $b = b'$.
Ainsi, on a $(a,b) = (a',b')$, ce qui montre que f est injective.

On a donc établi que f est bijective, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 47. Sur le modèle de la bijection explicitée entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$ dans la preuve du théorème I, on peut proposer la numérotation suivante des éléments de $\mathbb{N}^3$:

- Le triplet de somme 0 : $(0,0,0)$, numéroté 0.
- Les triplets de somme 1 : $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$, numérotés respectivement 1, 2 et 3.
- Les triplets de somme 2 : $(2,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,0,1)$, $(0,2,0)$, $(0,1,1)$, $(0,0,2)$.
- Et ainsi de suite, en énumérant à chaque fois les triplets de somme donnée par ordre lexicographique décroissant (c'est-à-dire de sorte que les entiers formés en concaténant les coefficients des triplets soient dans l'ordre décroissant, comme 200, 110, 101, 20, 11 et 2 dans le point précédent).

Il est clair que la numérotation ainsi effectuée fournit une bijection de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$.

Pour expliciter cette bijection, on peut chercher à exprimer le numéro associé à un triplet quelconque $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$. Cherchons tout d'abord à déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, combien il existe de triplets de $\mathbb{N}^3$ de somme n. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $a \in [\![0,n]\!]$, un triplet est de somme n si et seulement s'il est de la forme $(a,k,n-a-k)$ avec $k \in [\![0,n-a]\!]$, ce qui correspond à $n-a+1$ choix possibles de k, donc à $n-a+1$ triplets possibles. Ainsi, en distinguant les différents triplets selon leur première coordonnée, le nombre de triplets de $\mathbb{N}^3$ de somme n vaut

$$\sum_{a=0}^{n}(n-a+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

où l'on a posé $i = n-a+1$.

Intéressons-nous à présent à la numérotation attribuée à un triplet $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$. Sa somme vaut $a+b+c$, donc il est numéroté après les triplets de somme 0, 1, ..., $a+b+c-1$, qui sont, d'après ce qui précède, au nombre de

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{a+b+c-1} \frac{(n+1)(n+2)}{2} &= \sum_{i=1}^{a+b+c} \frac{i(i+1)}{2} \quad \text{en posant } i = n+1 \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{a+b+c} i^2 + \sum_{i=1}^{a+b+c} i\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(a+b+c)(a+b+c+1)(2a+2b+2c+1)}{6} + \frac{(a+b+c)(a+b+c+1)}{2}\right) \\
&= \frac{(a+b+c)(a+b+c+1)(a+b+c+2)}{6}.
\end{aligned}$$

Il est aussi numéroté après les triplets de somme $a+b+c$ dont la première coordonnée est strictement inférieure à a, qui sont, d'après ce qui précède, au nombre de

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{a-1}(a+b+c-k+1) &= \sum_{k=0}^{a-1}(a+b+c+1) - \sum_{k=0}^{a-1} k \\
&= a(a+b+c+1) - \frac{(a-1)a}{2} = \frac{a(a+2b+2c+3)}{2},
\end{aligned}$$

Enfin, il est numéroté après les triplets de somme $a+b+c$ dont la première coordonnée vaut a et dont la deuxième est strictement inférieure à b, donc des triplets de la forme $(a,k,a+b+c-k)$ avec $k \in [\![0,b-1]\!]$ qui sont au nombre de b.

Ainsi, le triplet (a,b,c) est numéroté $\frac{(a+b+c)(a+b+c+1)(a+b+c+2)}{6} + \frac{a(a+2b+2c+3)}{2} + b$ (rappelons que la numérotation commence à 0).

L'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^3 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a,b,c) & \longmapsto & \frac{(a+b+c)(a+b+c+1)(a+b+c+2)}{6} + \frac{a(a+2b+2c+3)}{2} + b \end{array}$$

est donc une bijection (explicite) de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$.

Notons qu'il existait bien d'autres bijections possibles : on pouvait aussi s'inspirer de l'exercice précédent et proposer l'application $g : (a,b,c) \mapsto 2^a\Big(2(2^b(2c+1))+1\Big) - 1$, dont on laisse le lecteur montrer qu'il s'agit bien d'une bijection de $\mathbb{N}^3$ dans $\mathbb{N}$.

Correction de l'exercice 48. Considérons l'application $f : [0,1]^2 \to [0,2]$ qui transforme un couple (x_1, x_2) avec x_1 et x_2 de développements décimaux propres [8]

$$x_1 = a_0, a_2a_4a_6 \ldots \quad \text{et} \quad x_2 = a_1, a_3a_5a_7 \ldots$$

en le nombre $x \in \mathbb{R}$ défini par l'alternance des développements décimaux de x_1 et x_2, c'est-à-dire par

$$f(x_1, x_2) = x := a_0, a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \ldots$$

Cette application est bien définie puisque les développements décimaux propres sont uniques et parce que le nombre x a pour partie réelle 0 ou 1, donc est dans $[0, 2[$.
Montrons que f est injective : on considère deux couples (x_1, x_2) et (x'_1, x'_2) dont les développements décimaux propres des coordonnées sont

$$x_1 = a_0, a_2a_4a_6 \ldots \quad \text{et} \quad x_2 = a_1, a_3a_5a_7 \ldots$$

ainsi que

$$x'_1 = a'_0, a'_2a'_4a'_6 \ldots \quad \text{et} \quad x'_2 = a'_1, a'_3a'_5a'_7 \ldots$$

On suppose à présent que $f(x_1, x_2) = f(x'_1, x'_2)$, c'est-à-dire que

$$a_0, a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \ldots = a'_0, a'_1a'_2a'_3a'_4a'_5a'_6a'_7 \ldots$$

Comme les a_{2k} et les a_{2k+1} ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang, les a_k ne sont pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. Il en va de même pour les a'_k. Ainsi, les écritures $a_0, a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7 \ldots$ et $a'_0, a'_1a'_2a'_3a'_4a'_5a'_6a'_7 \ldots$ sont les développements décimaux propres d'un même nombre, d'où $a_k = a'_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, les couples (x_1, x_2) et (x'_1, x'_2) sont égaux, ce qui établit l'injectivité de f.
L'application $f/2 : x \mapsto \frac{f(x)}{2}$ réalise donc une injection [9] de $[0,1]^2$ dans $[0,1]$.
Ainsi, on a $|[0,1]|^2 \leqslant |[0,1]|$. L'application $x \mapsto (x, 0)$ réalisant évidemment une injection de $[0,1]$ dans $[0,1]^2$, on a $|[0,1]| \leqslant |[0,1]^2|$, donc $|[0,1]^2| = |[0,1]|$ d'après le théorème de Cantor-Bernstein, ce qu'il fallait démontrer.

8. Sans imposer aux développements décimaux considérés d'être *propres*, on ne pourrait définir $f(1)$ de façon univoque comme dans la correction puisqu'il pourrait s'agir de $(1,0)$ ou de $(0,999\ldots, 0,999\ldots) = (1,1)$.

9. L'application $f/2$ n'est cependant pas surjective. En effet, le nombre $x = 0,3 \in [0,2]$ n'est pas l'image d'un couple $(x_1, x_2) \in [0,1]^2$ par f puisque la première décimale du nombre $f(x_1, x_2)$ est la partie entière de x_2 et vaut donc nécessairement 0 ou 1. Ainsi, le réel $\frac{x}{2} = 0,15$ n'admet pas d'antécédent par $f/2$ dans $[0,1]^2$. Ce point justifie l'utilisation du théorème de Cantor-Bernstein pour obtenir l'existence d'une bijection.

Correction de l'exercice 49. L'application $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ qui associe à une application $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ l'application $\widetilde{f} : \mathbb{N} \to [\![0,9]\!]$ définie par $\widetilde{f}(n) = f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est trivialement injective (puisque $\widetilde{f}$ et f prennent les mêmes valeurs sur $\mathbb{N}$ et ne diffèrent que par leur ensemble d'arrivée). On peut ainsi écrire [10] que $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| \leqslant |[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}|$.

Introduisons à présent une application $\psi : [\![0,9]\!] \to \{0,1\}^4$ qui réalise un « codage en 4 bits » des entiers de $[\![0,9]\!]$, c'est-à-dire qui associe à chacun de ses entiers son écriture en binaire écrite dans un quadruplet [11] :

$$\psi(0) = (0,0,0,0), \quad \psi(1) = (0,0,0,1), \quad \psi(2) = (0,0,1,0), \quad \psi(3) = (0,0,1,1),$$
$$\psi(4) = (0,1,0,0), \quad \psi(5) = (0,1,0,1), \quad \psi(6) = (0,1,1,0), \quad \psi(7) = (0,1,1,1),$$
$$\psi(8) = (1,0,0,0) \quad \text{et} \quad \psi(9) = (1,0,0,1).$$

L'application ψ est injective puisque les images listées ci-dessus sont deux à deux distinctes.

Considérons à présent l'application $\Phi : [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que pour toute application $f : \mathbb{N} \to [\![0,9]\!]$, l'application $\Phi(f) : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ soit définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(\Phi(f)(4n), \Phi(f)(4n+1), \Phi(f)(4n+2), \Phi(f)(4n+3)\big) = \psi(f(n)).$$

En d'autres termes, la liste des valeurs de $\Phi(f)$ est obtenue en concaténant les écritures en 4 bits des valeurs de f : par exemple, si $f(0) = 3$ (ce qui donne l'écriture en 4 bits $\psi(f(0)) = (0,0,1,1)$) et $f(1) = 7$ (donc $\psi(f(1)) = (0,1,1,1)$), les huit premières valeurs de $\Phi(f)$ sont

$$\Phi(f)(0) = 0, \quad \Phi(f)(1) = 0, \quad \Phi(f)(2) = 1, \quad \Phi(f)(3) = 1,$$
$$\Phi(f)(4) = 0, \quad \Phi(f)(5) = 1, \quad \Phi(f)(6) = 1 \quad \text{et} \quad \Phi(f)(7) = 1.$$

Connaître les valeurs successives de $\Phi(f)$ permet donc de connaître celles de f, ce qui signifie que Φ est injective. On a donc $|[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}| \leqslant |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$.

On conclut grâce au théorème de Cantor-Bernstein que $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sont équipotents, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 50. L'application associant un nombre $x \in [0,1[$ à la suite des décimales de son unique développement décimal propre est injective : deux éléments de $[0,1[$ distincts ne peuvent en effet avoir le même développement décimal propre. On dispose ainsi d'une injection de $[0,1[$ dans $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$.

Pour exhiber une injection de $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ dans $[0,1[$, il ne suffit pas de considérer la transformation réciproque de l'application définie précédemment : en effet, deux suites de décimales différentes peuvent correspondre au même réel si l'une des deux suites est stationnaire à 9, c'est-à-dire si elle prend constamment la valeur 9 à partir

10. Il aurait été fort tentant de dire que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est inclus dans $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ puisque toute suite à valeurs dans $\{0,1\}$ est une suite à valeurs dans $[\![0,9]\!]$, mais cela n'est pas vrai en toute rigueur puisque les éléments de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ont pour ensemble d'arrivée $\{0,1\}$ et non $[\![0,9]\!]$. C'est pour contourner cet obstacle (qui relève un peu du pinaillage !) que nous introduisons la bijection φ.

11. On pourrait choisir n'importe quelle injection de $[\![0,9]\!]$ dans $\{0,1\}^4$ à la place de ψ.

d'un certain rang (l'une des suites au moins correspond alors un développement décimal impropre du réel). Pour contourner cette difficulté, on considère pour toute suite $u \in [\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ le réel x_u de $[0,1[$ dont les décimales de rang pair valent 0 et dont les décimales de rang impair valent u_0, u_1, u_2 et ainsi de suite : par exemple, si u a pour premiers termes $3, 5$ et 1, alors $x_u = 0,305010\dots$ L'application $u \mapsto x_u$ de $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ dans $[0,1[$ est alors bien définie et injective.

Le théorème de Cantor-Bernstein montre donc que $[0,1[$ et $[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}$ sont équipotents, ce qu'il fallait établir.

D'après l'exercice 30, on a $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ (*via* la bijection $A \mapsto \mathbb{1}_A$ entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$). L'exercice 49 montre en outre que $|\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}|$. Enfin, on a $|[0,1[| = |\mathbb{R}|$ puisque $|[0,1[| \leqslant |\mathbb{R}|$ (*via* l'injection triviale $x \mapsto x$) et $|\mathbb{R}| \leqslant |[0,1[|$ (ce qui se conçoit facilement en dessinant la courbe d'une injection de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$, qui peut être explicitée par exemple par la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$). On a donc, grâce à l'égalité $|[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$ que nous venons de démontrer :

$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}| = |[\![0,9]\!]^{\mathbb{N}}| = |[0,1[| = |\mathbb{R}|,$$

donc $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents, ce qu'il fallait démontrer [12].

12. Notons que le fait de considérer le développement propre d'un nombre *en binaire* nous aurait permis d'économiser le passage par $[\![0,9]\!]$ dans cette preuve.