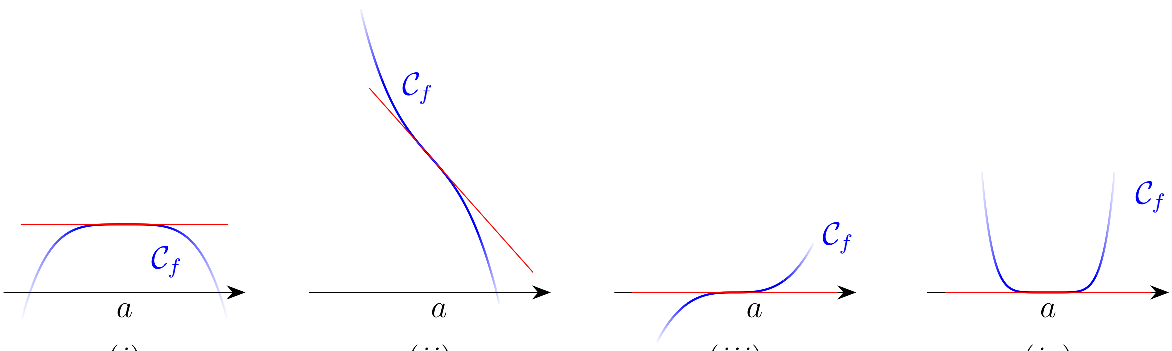
Dérivées d'ordre supérieur

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 10. On utilise les valeurs de $f(a)$ et $f'(a)$ pour déterminer la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a, puis la première dérivée d'ordre supérieur à 2 non nulle pour situer localement $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente.

On obtient les allures suivantes :



Notons que dans le point (iii), la donnée de $f^{(4)}(a)$ n'est pas utilisée puisque le premier nombre dérivé non nul de f en a d'ordre supérieur ou égal à 2 est $f^{(3)}(a)$.

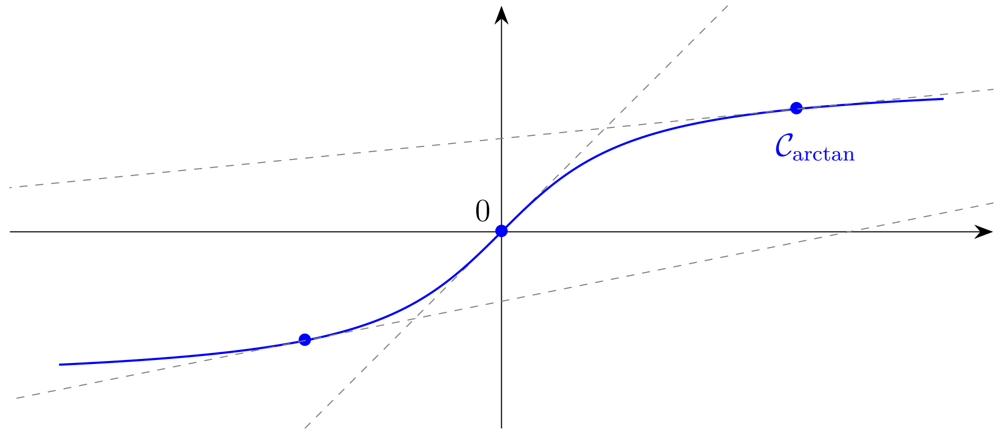
Correction de l'exercice 11. La fonction arctan est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

donc $\arctan''$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_{\arctan}$ est donc localement au-dessus de ses tangentes sur $\mathbb{R}_-^*$ et localement en-dessous de ses tangentes sur $\mathbb{R}_+^*$. En revanche, on a $\arctan''(0) = 0$; pour déterminer la position locale de la courbe par rapport à sa tangente en 0, qui est la droite d'équation $y = x$, on écrit donc

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan^{(3)}(x) &= \frac{-2 \cdot (1+x^2)^2 - (-2x) \cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} \\ &= \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}\end{aligned}$$

d'où $\arctan^{(3)}(0) = -2$, ce qui indique que $\mathcal{C}_{\arctan}$ admet un point d'inflexion à l'abscisse 0 et qu'elle traverse sa tangente « par le haut » en ce point (voir le graphique page suivante).



Correction de l'exercice 12. La fonction $f : x \mapsto e^{\alpha \ln(x)}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. On a vu dans le chapitre sur la dérivation que sa dérivée (qui se calcule simplement comme dérivée d'une fonction composée) est donnée par $f' : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$. En réitérant cet argument, on obtient l'expression des dérivées successives de f :

$$\forall x > 0, \quad f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \quad f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

et plus généralement

$$\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k} = \left(\prod_{i=0}^{k-1}(\alpha-i)\right)x^{\alpha-k}.$$

Dans le cas où $\alpha \in \mathbb{N}$, ce résultat prend la forme plus simple suivante :

$$\forall x > 0, \quad \forall k \in [\![0, \alpha]\!], \quad f^{(k)}(x) = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)!}x^{\alpha-k} \quad \text{et} \quad \forall k > \alpha, \quad f^{(k)}(x) = 0,$$

ces égalités restant alors valables pour tout x réel (non nécessairement positif).

Correction de l'exercice 13. La fonction étudiée est dérivable [1] comme combinaison de fonctions dérivables, de dérivée

$$\begin{array}{rccl} f' : & [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & -e^{-x}(\cos(x) + \sin(x)). \end{array}$$

Cette dérivée est elle-même dérivable comme combinaison de fonctions dérivables, et sa dérivée est

$$\begin{array}{rccl} f'' : & [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & e^{-x}(\cos(x) + \sin(x)) - e^{-x}(-\sin(x) + \cos(x)) = 2e^{-x}\sin(x). \end{array}$$

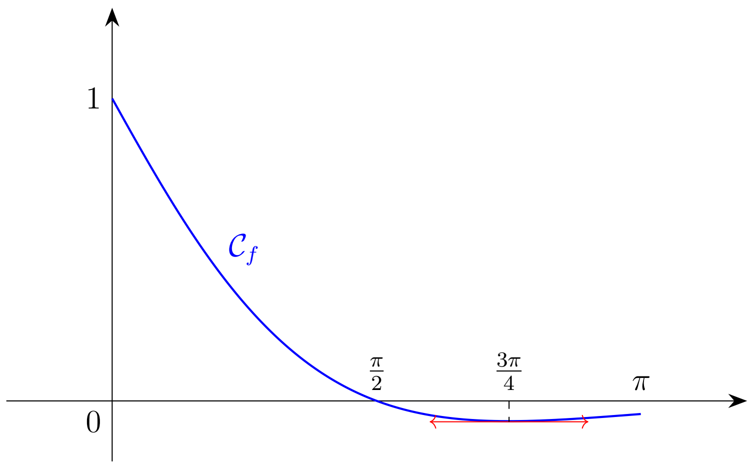
La fonction sin étant à valeurs strictement positives sur $]0, \pi[$, on a $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]0, \pi[$. La fonction f' est donc strictement croissante. Or si $x \in [0, \pi]$, l'équation $f'(x) = 0$ est équivalente à $\cos(x) + \sin(x) = 0$, soit $\sin(x) = -\cos(x)$, soit encore, en consultant le cercle trigonométrique, $x = \frac{3\pi}{4}$.

1. La dérivée est à comprendre au sens de la dérivée à droite en 0, de la dérivée classique sur $]0, \pi[$ et au sens de la dérivée à gauche en π.

On obtient donc le tableau de signes et de variations ci-dessous :

x	0		$\frac{3\pi}{4}$		π
$f''(x)$		$+$		$+$	
f'	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$e^{-\pi}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3\pi}{4}}$	$\nearrow$	$-e^{-\pi}$

On en déduit l'allure du graphe de f :



Correction de l'exercice 14. La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Elle vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

par somme de limites et

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

par croissance comparée.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = -e^{-x} - 2x \quad \text{et} \quad f''(x) = e^{-x} - 2,$$

si bien que $f''(x) > 0$ si et seulement si $-x > \ln(2)$, c'est-à-dire si et seulement si $x < -\ln(2)$. La fonction f' atteint donc son maximum en $-\ln(2)$, or on a $f'(-\ln(2)) = -2 + 2\ln(2) = 2(\ln(2) - 1) < 0$ (puisque $\ln(2) \in]0, 1[$), ce qui implique que f' est à valeurs strictement négatives et donc que f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On peut alternativement présenter ces informations sur le tableau de signes et de variations ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\ln(2)$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
f'		$\nearrow$	$2\ln(2)-2$	$\searrow$	
f	$+\infty$		$\searrow$		$-\infty$

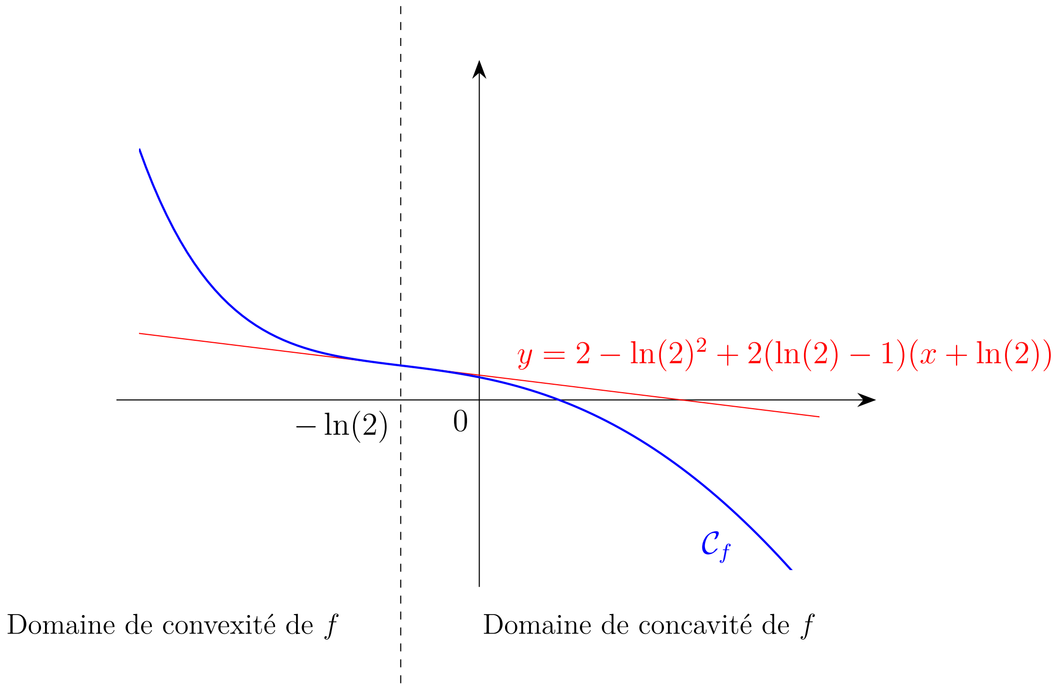
Pour représenter finement la courbe $\mathcal{C}_f$ de f, on utilise le fait f'' change de signe en $-\ln(2)$, ce qui implique que $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion à l'abscisse $-\ln(2)$, dont les coordonnées sont

$$\Big(-\ln(2), f(-\ln(2))\Big) = \Big(-\ln(2), 2-\ln(2)^2\Big).$$

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point est

$$y = f(-\ln(2)) + f'(-\ln(2))(x+\ln(2)) = 2-\ln(2)^2 + 2(\ln(2)-1)(x+\ln(2)),$$

d'où l'allure de $\mathcal{C}_f$:



Correction de l'exercice 15. On a tout d'abord $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

Étudions à présent le sens de variation de f. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que fonction polynomiale, et on a

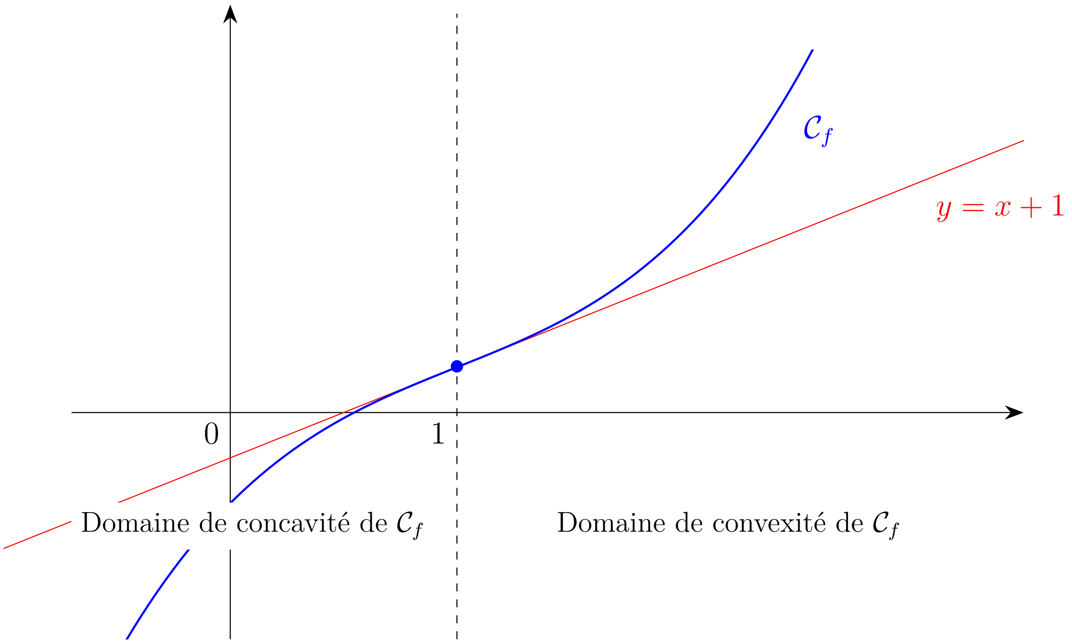
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 5.$$

Or le calcul du discriminant de cette expression montre que $3x^2 - 6x + 5 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f' est strictement positive, si bien que f est strictement croissante.

On a par ailleurs :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = 6x - 6,$$

donc f'' est strictement négative sur $]-\infty, 1[$ et strictement positive sur $]1, +\infty[$, ce qui implique que 1 est l'abscisse d'un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$, qui traverse en ce point sa tangente d'équation $y = 2+(x-1) = x+1$. On obtient donc l'allure de $\mathcal{C}_f$:



Correction de l'exercice 16. En calculant la limite en 0 de f, on se heurte à une forme indéterminée que l'on lève en écrivant que

$$\ln(x) + \frac{1}{x} = \frac{x\ln(x) + 1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty,$$

où l'équivalent est obtenu par croissance comparée, si bien que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$. Par ailleurs, on trouve facilement que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}.$$

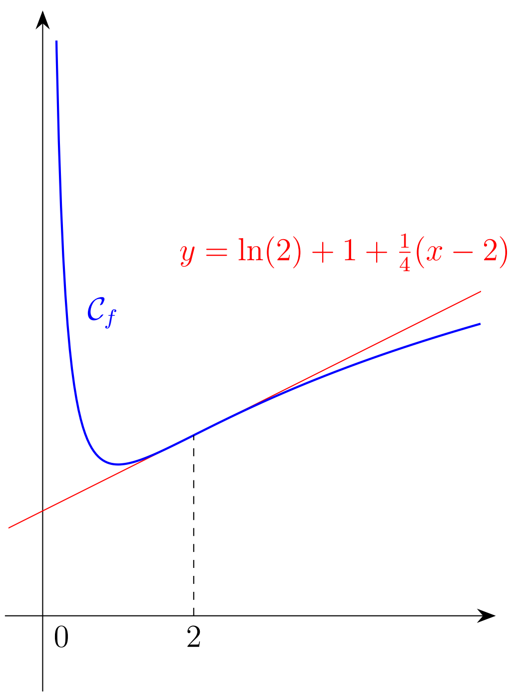
On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Cherchons à présent à caractériser la convexité ou la concavité de $\mathcal{C}_f$: on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = \frac{2-x}{x^3},$$

si bien que f'' s'annule en 2, est strictement positive sur $]0,2[$ et est strictement négative sur $]2,+\infty[$. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc un point d'inflexion à l'abscisse 2, qui est le lieu du passage d'un régime convexe à un régime concave. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ croise sa tangente au point d'abscisse 2, c'est-à-dire la droite d'équation $y = \ln(2) + 1 + \frac{1}{4}(x-2)$.
Ces informations permettent de donner l'allure précise de $\mathcal{C}_f$:



Correction de l'exercice 17. Tout d'abord, f est dérivable en tant que fonction polynomiale et sa dérivée, elle aussi polynomiale, est donnée par $f' : x \mapsto 4x^3 - 12x + 1$. La fonction f est donc deux fois dérivable et de dérivée seconde $f'' : x \mapsto 12x^2 - 12$.

L'étude du signe de f'' ne présente pas de problème et donne le tableau de signes et de variations ci-dessous, dans lequel l'existence des réels α, β et γ, uniques points d'annulation de f' sur $\mathbb{R}$, est une conséquence du théorème de la bijection :

x	$-\infty$	α	-1	β	1	γ	$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	9 ↘	0 ↘	-7 ↗	0 ↗	$+\infty$

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

x	$-\infty$		α	-1	β	1	γ		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘		↗ -6 ↗		↘ -4 ↘		↗	$+\infty$

Une simple lecture du tableau (que l'on peut formaliser grâce au théorème de la bijection) montre que f admet une unique racine dans $]-\infty, \alpha[$ et une unique racine dans $]\gamma, +\infty[$. Par ailleurs, 0 est évidemment une racine de f, et on a $f'(0) = 1 > 0$, si bien que $0 < \beta$ et $f(0) < \beta$ d'après le tableau de variations ci-dessus. On peut donc affiner ce tableau sur $[-1, 1]$:

x	-1	0	β	1
f	-6 ↗	0 ↗	$f(\beta) > 0$ ↘	-4

La fonction f s'annule donc une et une seule fois sur $]-1, \beta[$ (en 0), et une et une seule fois sur $]\beta, 1[$. Ainsi, f admet exactement 4 racines a, b, c, d vérifiant

$$a < -1 < b = 0 < c < 1 < d.$$

Correction de l'exercice 18. Traitons tout d'abord le cas de arcsin. L'argument le plus direct revient à dire que la fonction sin est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que sa dérivée cos ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, ce qui implique que la restriction de arcsin à $]-1, 1[$, en tant que bijection réciproque de la restriction de sin à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ par théorème.

On peut aussi avoir recours à un argument plus explicite en rappelant que comme on l'a vu dans le chapitre sur la dérivation, la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et vérifie

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Or la fonction $x \mapsto 1-x^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et elle y prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction racine carrée est elle aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$; ainsi, la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et elle ne s'y annule pas, donc $\arcsin' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, ce qui implique que arcsin l'est aussi.

Le raisonnement est semblable pour arccos, en remarquant que la dérivée de cos, qui vaut $-\sin$, ne s'annule pas sur $]0,\pi[$, ou bien en montrant que $\arccos' : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$.

Correction de l'exercice 19. La fonction f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, et elle vérifie $f(0)=f(1)$; le théorème de Rolle donne donc l'existence d'un point $c_1 \in]0,1[$ tel que $f'(c_1)=0$. En appliquant le même argument entre 1 et 2, on obtient l'existence d'un point $c_2 \in]1,2[$ tel que $f'(c_2)=0$. Comme $c_1<1$ et $1<c_2$, on a $c_1<c_2$; or la fonction f' est continue sur $[c_1,c_2]$, est dérivable sur $]c_1,c_2[$ et vérifie $f'(c_1)=f'(c_2)$, donc on peut lui appliquer le théorème de Rolle pour trouver un point $\alpha \in]c_1,c_2[$ tel que $f''(\alpha)=0$. Comme $\alpha \in]c_1,c_2[\subset]0,2[$, on a bien établi le résultat attendu.

Correction de l'exercice 20. Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé. Comme $f''>0$, la fonction f' est strictement croissante ; or $f'(0)=0$ donc on a, par exemple, $f'(1)>0$. À présent, si $x>1$, la fonction f est continue sur $[1,x]$ et dérivable sur $]1,x[$, et elle vérifie $f'(t) \geqslant f'(1)$ pour tout $t \in]1,x[$, donc l'inégalité des accroissements finis permet d'écrire

$$f(x)-f(1) \geqslant f'(1)\cdot(x-1) \quad \text{d'où} \quad f(x) \geqslant xf'(1)+f(1)-f'(1).$$

Comme $f'(1)>0$, on a $xf'(1)+f(1)-f'(1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc l'inégalité que nous venons d'établir implique que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 21.

1. Cette équivalence a déjà été établie dans le cours sur la dérivation ; démontrons-la à nouveau.

   Si f est constante sur $\mathbb{R}$, alors $f'=0$. Réciproquement, supposons que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'=0$. Pour tous $a,b \in \mathbb{R}$ tels que $a<b$, le théorème des accroissements finis appliquée à f, qui est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, implique qu'il existe $c \in]a,b[$ vérifiant $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$, d'où $f(b)-f(a)=0$ puisque $f'=0$; ainsi, $f(a)=f(b)$, ce qui implique que f est constante sur $\mathbb{R}$ et clôt la preuve.

2. Supposons que f est deux fois dérivable. Il est clair que si f est affine, alors f' est constante et f'' est nulle. Réciproquement, supposons que f'' est nulle. Alors f' est constante d'après le point précédent ; il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On introduit alors la fonction $g : x \mapsto f(x) - cx$; cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de fonctions dérivables, et on a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f'(x) - c = 0,$$
donc $g' = 0$, ce qui signifie que g est constante d'après la question 1. Il existe donc $d \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = d$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $f(x) = cx + d$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: la fonction f est donc bien affine, ce qui établit l'équivalence attendue.
3. Démontrons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}_n$: « si f est n fois dérivable, alors $f^{(n)} = 0$ si et seulement si f est une fonction polynomiale de degré au plus $n-1$ », où l'on rappelle qu'une *fonction polynomiale de degré au plus* $n-1$ est une fonction de la forme
$$f : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$$
avec $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

   La proposition $\mathcal{P}_0$ signifie que si $f^{(0)} = 0$ alors $f = 0$, ce qui est évident puisque $f^{(0)} = f$ par définition. La proposition $\mathcal{P}_1$ a été établie dans la question 1, et la proposition $\mathcal{P}_2$ dans la question 2. Supposons à présent la proposition vraie à un rang $n \geqslant 0$ donné, et supposons que f est $n+1$ fois dérivable.

   Il est clair que si f est une fonction polynomiale de degré au plus n, alors $f^{(n+1)} = 0$. Réciproquement, supposons que $f^{(n+1)} = 0$. Alors $(f')^{(n)} = 0$, donc d'après $\mathcal{P}_n$ il existe $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ tels que l'on ait :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k.$$
   Définissons à présent la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^{k+1}}{k+1}.$$
   En tant que différence d'une fonction $n+1$ fois dérivable et d'une fonction polynomiale (donc elle aussi $n+1$ fois dérivable), g est $n+1$ fois dérivable, donc dérivable, et on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$$
   par linéarité de la dérivation, soit $g' = 0$. Ainsi, g est constante d'après la question 1 : il existe donc un réel que nous choisissons de note a_0 tel que

$g(x) = a_0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En posant $a_k := \frac{b_{k-1}}{k}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = g(x) + \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^{k+1}}{k+1} = a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

ce qui montre que f est une fonction polynomiale de degré au plus $n+1$ et établit $\mathcal{P}_{n+1}$.

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie à tout rang $n \in \mathbb{N}$ d'après le principe de récurrence, ce qui clôt la preuve.

Correction de l'exercice 22.

1. (a) La propriété est vraie au rang $n = 1$ d'après le cours sur la dérivation : si f et g sont dérivables sur I, alors $f + g$ l'est.

   Supposons à présent la propriété vraie à un rang $n \geqslant 1$ donné et considérons deux fonctions f et g dérivables $n+1$ fois sur I. Alors f et g sont *a fortiori* dérivables une fois sur I et $(f+g)' = f' + g'$; en appliquant l'hypothèse de récurrence aux fonctions f' et g', qui sont dérivables n fois sur I, on obtient que $f' + g'$ est dérivable n fois sur I, c'est-à-dire que $(f+g)'$ est dérivable n fois, et donc que $f+g$ est dérivable $n+1$ fois. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

   On en déduit que la propriété à démontrer est vraie à tout rang $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

   (b) La propriété est vraie au rang $n = 1$ d'après le cours sur la dérivation : si f et g sont dérivables sur I, alors fg l'est.

   Supposons à présent la propriété vraie à un rang $n \geqslant 1$ donné et considérons deux fonctions f et g dérivables $n+1$ fois sur I. Alors f et g sont *a fortiori* dérivables une fois sur I et $(fg)' = f'g + fg'$. En appliquant l'hypothèse de récurrence aux fonctions n fois dérivables f' et g d'une part, et f et g' d'autre part, on obtient que $f'g$ et fg' sont dérivables n fois. D'après le point (a), leur somme $f'g + fg'$ est donc dérivable n fois, c'est-à-dire que $(fg)'$ est dérivable n fois, donc que fg est dérivable $n+1$ fois. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

   On en déduit que la propriété à démontrer est vraie à tout rang $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

   (c) La propriété est vraie au rang $n = 1$ d'après le cours sur la dérivation : si f et g sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors f/g est dérivable et $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

   Supposons à présent la propriété vraie à un rang $n \geqslant 1$ donné et considérons deux fonctions f et g dérivables $n+1$ fois sur I. Alors f et g sont *a fortiori* dérivables une fois sur I et $(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$. D'après le point (b), les fonctions $f'g$ et $-fg'$, qui sont des produits de fonctions dérivables n fois, sont elles-mêmes dérivables n fois ; d'après le point (a), leur différence $f'g - fg'$ l'est aussi. Le point (b) assure aussi que $g^2 = g \cdot g$ est dérivable

n fois en tant que produit de fonctions n fois dérivables. En appliquant l'hypothèse de récurrence aux fonctions n fois dérivables $f'g - fg'$ et g^2 (ce qui est possible puisque g^2 ne s'annule pas), on obtient que $\frac{f'g-fg'}{g^2}$ est n fois dérivable, c'est-à-dire que $(f/g)'$ est dérivable n fois, donc que f/g est dérivable $n+1$ fois. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

On en déduit que la propriété à démontrer est vraie à tout rang $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

(d) La propriété est vraie au rang $n = 1$ d'après le cours sur la dérivation : si f et φ sont dérivables respectivement sur I et sur un intervalle contenant $f(I)$, alors $\varphi \circ f$ est dérivable.

Supposons à présent la propriété vraie à un rang $n \geqslant 1$ donné et considérons deux fonctions f et φ dérivables $n+1$ fois, respectivement sur I et sur un intervalle contenant $f(I)$. Alors f et φ sont *a fortiori* dérivables une fois sur I et $(\varphi \circ f)' = (\varphi' \circ f) \cdot f'$. Les fonctions φ' et f étant n fois dérivables, $\varphi' \circ f$ l'est d'après l'hypothèse de récurrence. La fonction $(\varphi' \circ f) \cdot f'$, en tant que produit de fonctions dérivables n fois, est donc elle-même dérivable n fois d'après le point (b). Ainsi, $(\varphi \circ f)'$ est dérivable n fois, donc $\varphi \circ f$ est dérivable $n+1$ fois. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

On en déduit que la propriété à démontrer est vraie à tout rang $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

(e) La propriété est vraie au rang $n = 1$ d'après le cours sur la dérivation : si $f : I \to f(I)$ est bijective et dérivable et si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$.

Supposons à présent la propriété vraie à un rang $n \geqslant 1$ donné et considérons une fonction f dérivable $n+1$ fois sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors f est *a fortiori* dérivable une fois sur I et f' ne s'annule pas, donc f^{-1} est dérivable et et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. La fonction f^{-1} est n fois dérivable d'après l'hypothèse de récurrence ; comme c'est aussi le cas de f' (puisque f est supposée $n+1$ fois dérivable), la composée $f' \circ f^{-1}$ est n fois dérivable d'après le point (d). Or $f' \circ f^{-1}$ ne s'annule pas puisque f' ne s'annule pas, donc le quotient $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est n fois dérivable d'après le point (c). Ainsi, $(f^{-1})'$ est dérivable n fois, donc f^{-1} est dérivable $n+1$ fois. La propriété est donc vraie au rang $n+1$.

On en déduit que la propriété à démontrer est vraie à tout rang $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

2. Il s'agit de reprendre les différentes preuves ci-dessus en remplaçant chaque mention « dérivable n fois » par « de classe $\mathcal{C}^n$ ».

Correction de l'exercice 23.

1. La fonction f est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}^*$ en tant que combinaison de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f'(x) = 4x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

On a par ailleurs
$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
puisque cos est bornée, donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et la fonction f' est donnée par
$$f' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 4x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)+x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0. \end{cases} \end{array}$$

2. La fonction f' est dérivable en tout point $x\in\mathbb{R}^*$ en tant que combinaison de fonctions dérivables, et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ on a
$$\begin{aligned} f''(x) &= 12x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 4x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= (12x^2-1)\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 6x\sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$
On a par ailleurs
$$\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = 4x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$
car cos et sin sont bornées, donc f' est dérivable en 0 et $f''(0)=0$.

Ainsi, f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et f'' est donnée par
$$f'' : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} (12x^2-1)\cos\left(\frac{1}{x}\right)+6x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0. \end{cases} \end{array}$$

3. Les quantités $12x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ et $6x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ admettent une limite nulle lorsque $x\to 0$ puisque cos et sin sont bornées, mais $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'en admet pas, donc $f''(x)$ n'en admet pas[2]. Ainsi, f'' n'est pas continue en 0 : la fonction f est donc deux fois dérivable mais pas de classe $\mathcal{C}^2$.
4. On a $f(0)=f'(0)=0$, donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite d'équation $y=0$. La fonction f prenant une infinité de valeurs strictement positives et une infinité de valeurs strictement négatives sur n'importe quel voisinage de 0, on ne peut pas dire que $\mathcal{C}_f$ est localement au-dessus ou au-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0. Elle ne la « croise » pas au sens où elle admettrait un point d'inflexion en 0, mais elle la traverse une infinité de fois au voisinage de 0.

---

2. Ce raisonnement selon lequel « la somme d'un terme qui converge et d'un terme qui ne converge pas ne converge pas » peut être détaillé de la façon suivante : si f'' admettait une limite ℓ en 0, on aurait
$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 12x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) + 6x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - f''(x) \xrightarrow[x\to 0]{} -\ell,$$
ce qui est absurde puisque $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite lorsque $x\to 0$.

Correction de l'exercice 24. En extrapolant l'exemple étudié dans l'exercice précédent, on peut choisir de s'intéresser à la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{2n}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Si $n \geqslant 1$, on montre comme dans l'exercice précédent que f est dérivable et que $f'(x)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des termes $x^{2n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $x^{2n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$. Si $n \geqslant 2$, ces deux termes définissent des fonctions qui sont à leur tour dérivables, et dont les dérivées sont des combinaisons linéaires d'expressions de la forme « fonction puissance $\times$ terme trigonométrique » avec des puissances au plus égales à $2n-4$. Si $n \geqslant 3$, on peut réitérer le processus et obtenir une combinaison linéaire de termes de la même forme, avec des puissances au plus égales à $2n-6$ et ainsi de suite. Au terme de n dérivations, on obtient une expression de $f^{(n)}(x)$ constituée de termes de la forme $x^p\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $x^p\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $p \geqslant 1$, et d'un seul terme de la forme $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ (si n est pair) ou $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ (si n est impair) ; c'est ce terme qui induit la non-continuité de $f^{(n)}$ en 0.

Formalisons ce raisonnement de façon plus rigoureuse. On va montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les fonctions

$$f_k: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{2k}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \end{array} \qquad g_k: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{2k}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \end{array}$$

sont dérivables k fois mais ne sont pas de classe $\mathcal{C}^k$, et les fonctions

$$h_k: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{2k+1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array} \quad \text{et} \quad i_k: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^{2k+1}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

sont [3] de classe $\mathcal{C}^k$.

La proposition est vraie au rang 1 puisque f_1 et g_1 sont dérivables mais leurs dérivées

$$f_1': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \end{array}$$

$$g_1': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \end{array}$$

ne sont pas continues en 0 (pour la même raison que dans la dernière question de l'exercice précédent), et puisque h_1 et i_1 sont de dérivée

$$h_1': \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \end{array}$$

3. On pourrait – mais ce n'est pas demandé – ajouter « sont de classe $\mathcal{C}^k$ mais ne sont pas $k+1$ fois dérivables en 0 ».

$$\begin{array}{rccl} i_1' : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \end{array}$$

donc de classe $\mathcal{C}^1$.

À présent, supposons la proposition vraie à un rang $k \geqslant 1$ donné. On montre aisément que les fonctions f_{k+1} et g_{k+1}, h_{k+1} et i_{k+1} sont dérivables (sur $\mathbb{R}^*$ en tant que combinaisons de fonctions dérivables, et en 0 en considérant la limite de leur taux d'accroissement) et que l'on a

$$\begin{array}{rccl} f_{k+1}' : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} (2k+2)x^{2k+1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{2k} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g_{k+1}' : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} (2k+2)x^{2k+1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^{2k} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} h_{k+1}' : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} (2k+3)x^{2k+2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{2k+1} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} i_{k+1}' : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} (2k+3)x^{2k+2} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^{2k+1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases} \end{array}$$

soit

$$f_{k+1}' = (2k+2)h_k - g_k, \quad g_{k+1}' = (2k+2)i_k + f_k,$$
$$h_{k+1}' = (2k+3)f_{k+1} - i_k \quad \text{et} \quad i_{k+1}' = (2k+3)g_{k+1} + h_k.$$

Ainsi, f_{k+1}' et g_{k+1}' sont de classe $\mathcal{C}^k$ comme combinaisons linéaires des fonctions h_k et g_k de classe $\mathcal{C}^k$, ce qui montre que f_{k+1} et g_{k+1} sont de classe $\mathcal{C}^{k+1}$. Les fonctions h_{k+1}' et i_{k+1}' sont donc de classe $\mathcal{C}^k$ en tant que combinaisons linéaires des fonctions f_k, i_k, g_{k+1} et h_k qui le sont, ce qui montre que h_{k+1} et i_{k+1} sont de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

On remarque à présent que f_{k+1} n'est pas de classe $\mathcal{C}^{k+1}$: en effet, si c'était le cas, alors $g_k = (2k+2)h_k - f_{k+1}'$ serait de classe $\mathcal{C}^k$ en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, ce qui est contraire à l'hypothèse de récurrence. On montre de même en utilisant le fait que $f_k = g_{k+1}' - (2k+2)i_k$ que g_{k+1} n'est pas de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, ce qui achève d'établir la proposition à démontrer au rang $k+1$.

Ainsi, la proposition est vraie pour toute valeur de $k \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence.

On obtient donc bien une fonction dérivable n fois mais pas de classe $\mathcal{C}^n$ en considérant la fonction $f := f_n$, donnée par

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^{2n} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array}$$

Correction de l'exercice 25. La fonction f est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = 2ax + b$, donc x est un point critique de f si et seulement si $2ax + b = 0$, soit $x = -\frac{b}{2a}$. Ainsi, si f admet un extremum local en un point de $\mathbb{R}$ (qui est un intervalle ouvert, c'est-à-dire un voisinage de chacun de ses points), cet extremum est nécessairement atteint en $-\frac{b}{2a}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a par ailleurs $f''(x) = 2a$. Ainsi, si $a > 0$, alors $f''\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2a$ est strictement positif, donc $-\frac{b}{2a}$ est le lieu d'un minimum local de f. De même, si $a < 0$, alors $f''\left(-\frac{b}{2a}\right) = 2a$ est strictement négatif, donc $-\frac{b}{2a}$ est le lieu d'un maximum local de f.

On retrouve bien un résultat connu, que l'on pourrait par ailleurs renforcer en précisant que ces extrema sont en fait des extrema *globaux* de f – ce qui apparaît directement lors de l'étude des variations de f sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 26.

1. La fonction f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$ et plus généralement :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad f^{(k)}(x) = \underbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ termes}} x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}.$$

   On a alors $f^{(n)}(x) = n!$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et donc

$$\forall k \geqslant n+1, \quad f^{(k)}(x) = 0.$$

2. Si $x \in \mathbb{R}$, alors

$$f'(x) = 0 \iff nx^{n-1} = 0 \iff x^{n-1} = 0 \iff x = 0$$

   puisque $n \neq 0$, donc 0 est l'unique point critique de f.

3. D'après le résultat de la question 1, on a $f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}0^{n-k} = 0$ pour tout $k \in [\![2, n-1]\!]$, donc la première dérivée non nulle d'ordre supérieur à 2 de f en 0 est $f^{(n)}(x) = n! > 0$. D'après le critère formulé dans le cours (théorème O), si n est pair, 0 est donc le lieu d'un minimum local de f, et si n est impair, il s'agit du lieu d'un point col.

   Comme dans l'exercice précédent, le graphe de f est connu et on sait que dans le cas pair, le minimum local de f en 0 est en fait un minimum global. Ces deux exercices ont pour unique but de vérifier la validité des critères donnés dans le cours pour des fonctions simples aux propriétés bien connues.

Correction de l'exercice 27.

1. (a) La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions dérivables, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Elle est par ailleurs dérivable en 0 et de dérivée nulle en ce point puisque

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée [4].

Ainsi, f' est donnée par

$$\begin{array}{rccl} f': & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

En calculant au besoin f'', on est amené à conjecturer que les dérivées successives de f existent toutes et admettent hors de 0 une expression de la forme « fraction rationnelle $\times\, e^{-\frac{1}{x^2}}$ ». Démontrons ce fait par récurrence.

Pour tout $n \geqslant 1$, on introduit la proposition

$\mathcal{P}_n$: « f est dérivable n fois et il existe une fonction polynomiale P_n et $k_n \in \mathbb{N}$ tels que $f^{(n)}$ soit de la forme

$$\begin{array}{rccl} f^{(n)}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{P_n(x)}{x^{k_n}}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon. »} \end{cases} \end{array}$$

D'après l'expression de f' donnée plus haut, la proposition $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Supposons-la à présent vraie pour un $n \geqslant 1$ donné. Conformément à cette hypothèse de récurrence, f est dérivable n fois et il existe une fonction polynomiale P_n ainsi qu'un entier $k_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^{(n)}$ soit donnée par

$$\begin{array}{rccl} f^{(n)}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{P_n(x)}{x^{k_n}}e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

La fonction $f^{(n)}$ est alors dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}^*$ en tant que combinaison de fonctions dérivables, et on a

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x)x^{k_n} - P_n(x)kx^{k_n-1}}{x^{2k_n}}e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{P_n(x)}{x^{k_n}}e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x^3} \\ &= \frac{P_n'(x)x^3 - P_n(x)kx^2 + 2P_n(x)}{x^{k_n+3}}e^{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{P_{n+1}(x)}{x^{k_{n+1}}}e^{-\frac{1}{x^2}} \end{aligned}$$

---

4. En effet, en posant $y = \frac{1}{x}$ on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to\pm\infty} ye^{-y^2} = 0$$

par croissance comparée.

en posant la fonction polynomiale $P_{n+1} : x \mapsto P_n'(x)x^3 - P_n(x)kx^2 + 2P_n(x)$ et l'entier strictement positif $k_{n+1} := k_n + 3$.

On a par ailleurs

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \frac{P_n(x)}{x^{k_n+1}} e^{-\frac{1}{x^2}} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$$

par croissance comparée, donc f est dérivable $n+1$ fois en 0 et $f^{(n+1)}(0) = 0$.

Ainsi, f est dérivable $n+1$ fois sur $\mathbb{R}$ et $f^{(n+1)}$ est donnée par

$$\begin{array}{rccl} f^{(n+1)} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cc} \frac{P_{n+1}(x)}{x^{k_{n+1}}} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{array} \right. \end{array}$$

ce qui établit la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.

La proposition $\mathcal{P}_n$ est donc vraie à tout rang $n \geqslant 1$ d'après le principe de récurrence, ce qui clôt la preuve.

(b) Pour tout $x \neq 0$, on a $f(x) > 0$ par stricte positivité de la fonction exponentielle, soit $f(x) > f(0)$. Ainsi, f admet un minimum local strict en 0.

L'exemple étudié montre donc qu'il est possible pour une fonction indéfiniment dérivable d'admettre un minimum local strict en un point sans qu'aucune de ses dérivées n'y prenne une valeur non nulle : les conditions suffisantes énoncées dans le théorème O ne sont donc pas nécessaires à l'existence d'un extremum. La question suivante montre qu'elles ne sont pas non plus nécessaires à l'existence d'un point col.

2. (a) La fonction $g : x \mapsto xf(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de deux fonctions qui le sont (la fonction identité $x \mapsto x$ et la fonction f). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$g'(x) = f(x)+xf'(x), \quad g''(x) = f'(x)+f'(x)+xf''(x) = 2f'(x)+xf''(x),$$

$$g^{(3)}(x) = 2f''(x) + f''(x) + f^{(3)}(x) = 3f''(x) + f^{(3)}(x)$$

et plus généralement [5], pour tout $n \geqslant 1$:

$$g^{(n)}(x) = nf^{(n-1)}(x) + f^{(n)}(x).$$

On a donc :

$$\forall n \geqslant 1, \quad g^{(n)}(0) = nf^{(n-1)}(0) + f^{(n)}(0) = 0,$$

ce qui clôt la preuve.

5. Cette relation, qui se devine grâce aux cas $n = 2$ et $n = 3$, se démontre facilement par récurrence sur $n \geqslant 1$. Il s'agit d'un cas particulier de la *formule de Leibniz* démontrée dans l'exercice 31, qui donne les dérivées successives d'un produit de fonctions dérivables.

(b) Pour tout $x < 0$, on a $g(x) < 0$, soit $g(x) < g(0)$, et pour tout $x > 0$ on a $g(x) > 0$, soit $g(x) > g(0)$. Ainsi, 0 est un le lieu d'un point col pour g.

Correction de l'exercice 28.

1. On a $f(-1) = f(1) = 0$. Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $x+1 > 0$ donc $\sqrt{x+1} > 0$, et $x - 1 \neq 0$ donc $(x-1)^2 > 0$, si bien que $f(x) = \sqrt{x+1}(x-1)^2 > 0$. Ainsi, 0 est un minimum global de f sur $]-1, 1[$, uniquement atteint en -1 et en 1.
2. (a) (i) La fonction f est continue sur le segment $[-1, 1]$ en tant que produit de fonctions continues ; elle y admet donc un maximum d'après le théorème des bornes atteintes. Comme f atteint en -1 et 1 la valeur 0 et prend partout ailleurs des valeurs strictement positives, le maximum de f est nécessairement atteint hors des points -1 et 1, c'est-à-dire sur $]-1, 1[$.

   (ii) La fonction f est dérivable sur $]-1, 1[$ en tant que produit de fonctions dérivables (puisque pour tout $x \in]-1, 1[$, le réel $x + 1$ est dans $\mathbb{R}_+^*$, domaine de dérivabilité de la fonction racine carrée), et on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x-1)^2 + 2\sqrt{x+1}(x-1) \\ &= \frac{(x-1)^2 + 4(x+1)(x-1)}{2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{5x^2 - 2x - 3}{2\sqrt{x+1}}.\end{aligned}$$

   Si $x \in]-1, 1[$, on a donc

$$f'(x) = 0 \iff 5x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = -\frac{3}{5}$$

   puisque la valeur $x = 1$ (qui est aussi solution de l'équation $5x^2 - 2x - 3 = 0$) est exclue. Ainsi, l'unique point critique de f sur $]-1, 1[$ est $-\frac{3}{5}$. Or le lieu auquel f atteint son maximum sur $]-1, 1[$ est nécessairement un point critique puisqu'il est intérieur à $]-1, 1[$; ainsi, f atteint son maximum en $-\frac{3}{5}$, et il vaut

$$f\left(-\frac{3}{5}\right) = \sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}.$$

   (b) À partir de l'expression de la dérivée de f déterminée dans la première méthode, il n'est guère difficile d'étudier les variations de f et de retrouver le résultat : pour tout $x \in]-1, 1[$, la quantité $f'(x)$ est du signe de $5x^2 - 2x - 3$ puisque $\sqrt{x+1} > 0$, or la fonction polynomiale $x \mapsto 5x^2 - 2x - 3$ s'annule en $-\frac{3}{5}$ et 0 et son coefficient dominant est strictement positif donc on dispose du tableau de variations suivant [6], où

6. Rappelons qu'il n'est pas nécessaire que f soit dérivable en -1 et en 1 pour pouvoir établir ce tableau : le signe de f' sur $]-1, 1[$ et la continuité de f sur $[-1, 1]$ suffisent.

les signe et les variations indiqués sont stricts :

x	-1		$-\frac{3}{5}$		1
$5x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
f	0	$\nearrow$	$\frac{64\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}$	$\searrow$	0

Ainsi, f atteint bien son maximum sur $[-1, 1]$ en $-\frac{3}{5}$.

(c) Comme f est strictement positive sur $]-1, 1[$, on peut considérer la quantité $g(x) := \ln(f(x))$ pour tout $x \in]-1, 1[$; par stricte croissance de ln, la fonction $g : x \mapsto \ln(f(x))$ possède les mêmes variations[7] que f sur $]-1, 1[$. Or pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $g(x) = \frac{1}{2}\ln(1 + x) + 2\ln(1 - x)$ puisque $1 + x > 0$ et $1 - x > 0$; la fonction g est donc dérivable en tant que somme de fonctions dérivables, et pour tout $x \in]-1, 1[$ on a

$$g'(x) = \frac{1}{2(1+x)} - \frac{2}{1-x} = \frac{1 - x - 4(1+x)}{2(1+x)(1-x)} = \frac{-3-5x}{2(1-x^2)}.$$

On en déduit le tableau de signes et de variations suivant :

x	-1		$-\frac{3}{5}$		1
$-3 - 5x$		$+$	0	$-$	
$2(1 - x^2)$			$+$		
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$
g	$\Vert$	$\nearrow$		$\searrow$	$\Vert$
f	0	$\nearrow$	$\frac{64\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}$	$\searrow$	0

On en déduit une fois encore que f admet un maximum global en $-\frac{3}{5}$.

Notons que l'intérêt de cette méthode réside dans le fait que g est (un peu)

7. En effet, si $a, b \in]-1, 1[$ sont tels que $f(a) < f(b)$, alors $g(a) = \ln(f(a)) < \ln(f(b)) = g(b)$.

plus facile à dériver que f. Elle s'avère particulièrement efficace dans le cas de fonctions définies comme le produit d'un grand nombre de termes.

Correction de l'exercice 29.

1. (a) On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ce fait, associé à la continuité de f, suggère que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$ ce qu'il est intéressant de savoir démontrer rigoureusement.

   Pour ce faire, on remarque que $f(0) = 1$ et que les limites de f en $\pm\infty$ impliquent l'existence d'un réel[8] $A \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| > A$ on ait $f(x) \geqslant 1$. Ainsi, f ne peut prendre de valeurs strictement inférieures à 1 que sur l'intervalle $[-A, A]$. Or f est continue sur le segment $[-A, A]$, donc elle y admet un minimum d'après le théorème des bornes atteintes ; notons m la valeur de ce minimum et remarquons que $m \leqslant f(0) = 1$ puisque $0 \in [-A, A]$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors $f(x) \geqslant 1 \geqslant m$ si $x \notin [-A, A]$ et $f(x) \geqslant m$ si $x \in [-A, A]$, donc $f(x) \geqslant m$ dans tous les cas. Ainsi, f admet m pour minimum global sur $\mathbb{R}$.

   (b) Comme f admet $+\infty$ pour limites en $\pm\infty$, elle n'est pas majorée ; *a fortiori*, elle n'admet pas de maximum global sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est dérivable en tant que fonction polynomiale, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$. Les points critiques de f sont les solutions de l'équation $2x(2x^2 - 1) = 0$, soit $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0 et $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. En tant que fonction polynomiale, f est dérivable deux fois, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f''(x) = 12x^2 - 2$. Ainsi, on a
$$f''\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 12 \cdot \frac{1}{2} - 2 = 4 > 0 \quad \text{et} \quad f''(0) = -2 < 0,$$
donc les points critiques $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sont les lieux de minima locaux de f, tandis que le point critique 0 est le lieu d'un maximum local de f.
4. On sait d'après la question 1 que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}$. Il s'agit nécessairement d'un minimum local, donc la question précédente assure qu'il est atteint en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ou en $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Or f est paire donc elle prend la même valeur en ces deux points ; ainsi, tous les deux sont les lieux du minimum global de f.
5. D'après la question précédente, le minimum global de f vaut
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}.$$
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) > \frac{3}{4}$ d'après la question précédente, donc $\ln(f(x))$ existe, c'est-à-dire que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
7. La fonction ln étant strictement croissante, g a les mêmes variations (strictes) que f sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc un maximum local en 0, qui vaut $g(0) = \ln(1) = 0$, et un minimum global en $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$, qui vaut $\ln\left(\frac{3}{4}\right)$. Il s'agit des seuls extrema locaux de g sur $\mathbb{R}$, et g n'admet pas de maximum global.

8. Faites un dessin !

Correction de l'exercice 30.

1. La fonction f est continue sur le segment $[-1,1]$ en tant que composée de fonctions continues, donc elle y admet un minimum et un maximum (globaux) d'après le théorème des bornes atteintes.
2. La fonction f est dérivable sur $[-1,1]$ et vérifie :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f'(x) = \cos\Big((x^2+x)\pi\Big) \cdot (2x+1)\pi,$$

cette égalité étant à comprendre au sens de la dérivée à droite en -1 et de la dérivée à gauche en 1.

On a donc $f'(-1) = \cos(0)\cdot(-1)\cdot\pi = -\pi$; comme f' est continue[9] sur $[-1,1]$, il existe donc un voisinage à droite de -1 sur lequel f' prend des valeurs négatives, donc sur lequel f est décroissante. Ainsi, f admet un maximum local en -1.

On a de même $f(1) = \cos(2\pi)\cdot 3\pi = 3\pi > 0$, donc f est croissante sur un voisinage (à gauche) de 1, ce qui montre que f admet un maximum local en 1.

3. (a) La fonction $x \mapsto x^2+x$ étant polynomiale[10] de degré 2 et admettant -1 et 0 pour racines, on connaît ses variations et on peut en déduire celles de g par restriction :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0		1
x^2+x	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2
$g(x)$	$\Vert$ 0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2 $\Vert$

Les valeurs de la forme $\frac{1}{2}+k$ prises par la fonction g sont donc $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. En résolvant les équations $x^2+x=\frac{1}{2}$ et $x^2+x=\frac{3}{2}$ d'inconnue $x \in [-1,1]$, on trouve que ces valeurs sont respectivement prises en $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$.

(b) D'après l'expression de la dérivée de f donnée dans la question 2, les points critiques de f sur $]-1,1[$ sont les points $x \in]-1,1[$ tels que $\cos\left((x^2+x)\pi\right) = 0$ ou $2x+1=0$, c'est-à-dire tels que $(x^2+x) \equiv \frac{1}{2}\ [1]$ ou $x = -\frac{1}{2}$; d'après la question précédente, ce sont donc les points $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ et $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$.

---

9. L'argument de continuité de f' permet de déduire les variations de f du signe de sa dérivée sur un intervalle. On pouvait cependant s'en passer et écrire directement que comme $f'(-1) < 0$, alors $\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-0} < 0$, d'où $f(x) - f(-1) < 0$ pour tout x dans un voisinage à droite de -1, ce qui montre que -1 est le lieu d'un maximum local de f.

10. Il n'est pas nécessaire de dériver une fonction polynomiale du second degré pour connaître ses variations : on les déduit directement du cours (voir le chapitre 3).

(c) La fonction f est dérivable deux fois sur $[-1,1]$ en tant que composée de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x \in [-1,1], \quad f''(x) = -\sin\big((x^2+x)\pi\big)\cdot\pi^2(2x+1)^2 + \cos\big((x^2+x)\pi\big)\cdot 2\pi.$$

On a ainsi

$$f''\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 0 + \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2\pi = \sqrt{2}\pi > 0,$$

donc le point $-\frac{1}{2}$ est le lieu d'un minimum local de f. Ce minimum vaut $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On a par ailleurs, en utilisant le fait que $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ est solution de l'équation $x^2+x=\frac{1}{2}$:

$$f''\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 3\pi^2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\pi = -3\pi^2 < 0,$$

ce qui montre que le point $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ est le lieu d'un maximum local de f. Ce maximum vaut $f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Enfin, en utilisant le fait que $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$ est solution de l'équation $x^2+x=\frac{3}{2}$, on peut écrire :

$$f''\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot 7\pi^2 + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cdot 2\pi = 7\pi^2 > 0,$$

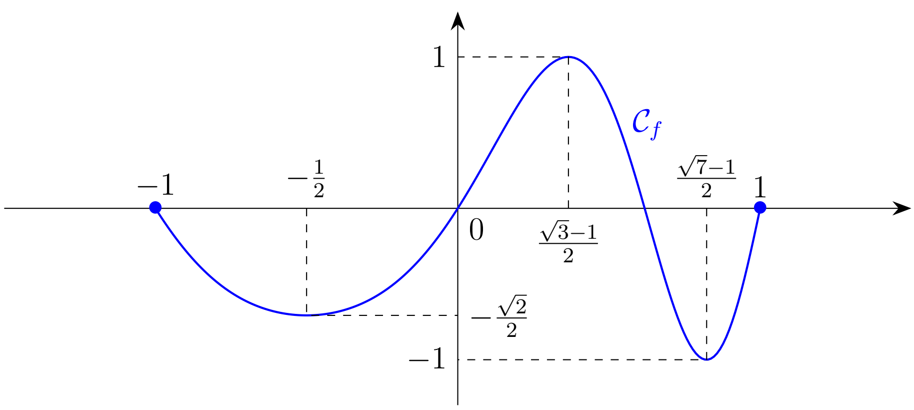
donc $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$ est le lieu d'un minimum local de f. Ce minimum vaut

$$f\left(\frac{\sqrt{7}-1}{2}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1.$$

Les maxima locaux de f en -1 et en 1 valant respectivement $\sin(0)=0$ et $\sin(2\pi)=0$, on en déduit les informations suivantes :

- f admet un minimum global en $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$; il vaut -1.
- f admet un maximum global en $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$; il vaut 1.
- f admet des maxima locaux (non globaux) en -1 et 1, de valeur 0, et un minimum local (non global) en $-\frac{1}{2}$, de valeur $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

On obtient donc l'allure du graphe de f :



Correction de l'exercice 31. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}_n$ la proposition à démontrer.

Tout d'abord, $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque si f et g sont 0 fois dérivables sur I (c'est-à-dire sont deux fonctions définies sur I), on a

$$(fg)^{(0)} := fg = f^{(0)}g^{(0)}.$$

Fixons à présent $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}_n$ vraie, puis considérons deux fonctions f et g dérivables $n+1$ fois sur I. La fonction fg est alors $n+1$ fois dérivable sur I, et on a

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left((fg)^{(n)}\right)' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \quad \text{par linéarité de la dérivation} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\left(f^{(k)}\right)' g^{(n-k)} + f^{(k)} \left(g^{(n-k)}\right)'\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \qquad (*) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-(k-1))} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \quad \text{par changement d'indice} \\
&= \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1-0)} \\
&= f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + f^{(0)} g^{(n+1)} \quad \text{d'après la relation de Pascal} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)},
\end{aligned}$$

ce qui établit la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ et permet de conclure d'après le principe de récurrence.

Notons qu'à partir de l'étape signalée par le point $(*)$, la démonstration est rigoureusement la même que celle permettant d'établir la formule du binôme de Newton.

Correction de l'exercice 32. L'idée est d'appliquer le théorème de Rolle à f pour trouver un point d'annulation de f' dans $]a, b[$, puis le théorème de Rolle à f' entre a et ce point d'annulation pour trouver un point d'annulation de f'' dans $]a, b[$ et ainsi de suite, ce qui donne finalement un point d'annulation de $f^{(n)}$. Un tel raisonnement heuristique peut suffire à l'oral ; sur une copie, on préfèrera toutefois la preuve par récurrence détaillée ci-dessous.

Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la dérivée $f^{(k)}$ admet un point d'annulation sur $]a,b[$.

C'est le cas pour $k=1$ d'après le théorème de Rolle appliqué à f entre a et b puisque $f(a)=f(b)$.

Supposons que ce soit le cas pour $k \in [\![1,n-1]\!]$ donné et notons $c_0 \in]a,b[$ un point d'annulation de $f^{(k)}$. On peut appliquer le théorème de Rolle à la fonction $f^{(k)}$ entre a et c puisque $f^{(k)}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $f^{(k)}(a)=0=f^{(k)}(c_0)$; ce théorème implique alors que $(f^{(k)})'=f^{(k+1)}$ admet un point d'annulation sur $]a,c_0[$, et donc sur $]a,b[$. La proposition est donc vraie au rang $k+1$, ce qui montre d'après le principe de récurrence qu'elle est vraie à tout rang $k \in [\![1,n]\!]$.

Elle est notamment vraie pour $k=n$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 33. L'idée est d'appliquer le théorème de Rolle sur chacun des n intervalles $[a_0,a_1]$, $[a_1,a_2]$,..., $[a_{n-1},a_n]$, ce qui donne n points d'annulation de f' distincts deux à deux, puis d'appliquer le théorème de Rolle à f' entre ces points d'annulation pour obtenir $n-1$ points d'annulation de f'', et ainsi de suite, ce qui donne finalement un point d'annulation de $f^{(n)}$. On présente ci-dessous une formalisation rigoureuse de cette démonstration.

Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la dérivée $f^{(k)}$ admet $n+1-k$ points d'annulation sur $]a,b[$.

C'est le cas pour $k=1$ d'après le théorème de Rolle puisque ce théorème, appliqué à f sur chacun des intervalles $[a_0,a_1]$, $[a_1,a_2]$,..., $[a_{n-1},a_n]$, donne l'existence de $c_0 \in]a_0,a_1[, c_1 \in]a_1,a_2[, \dots, c_{n-1} \in]a_{n-1},a_n[$ tels que $f'(c_1)=f'(c_2)=\cdots=f'(c_{n-1})=0$, c'est-à-dire de n points d'annulation de f', distincts deux à deux puisque les intervalles $]a_k,a_{k+1}[$ sont deux à deux disjoints.

Considérons à présent $k \in [\![1,n-1]\!]$ et supposons que $f^{(k)}$ admette $n+1-k$ points d'annulation sur $]a,b[$. En particulier, $f^{(k)}$ prend la même valeur (c'est-à-dire 0) en chacun de ces points. Alors le théorème de Rolle appliqué entre chacun de ces points donne l'existence de $n+1-k-1=n+1-(k+1)$ points d'annulation de la dérivée $f^{(k+1)}$ de $f^{(k)}$, distincts deux à deux puisque les intervalles ouverts auxquels ils appartiennent sont deux à deux disjoints. Ainsi, la proposition à démontrer est aussi vraie au rang $k+1$. Elle est donc vraie à tout rang $k \in [\![1,n]\!]$ d'après le principe de récurrence.

En particulier, elle est vraie au rang n, c'est-à-dire que $f^{(n)}$ admet $n+1-n=1$ point d'annulation sur $]a,b[$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 34.

1. On obtient par une récurrence facile que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, la dérivée i-ième de P est donnée par

$$P^{(i)} : x \longrightarrow \sum_{k=i}^{n} a_k k(k-1)\cdots(k-i+1)x^{k-i} = \sum_{k=i}^{n} a_k \frac{k!}{(k-i)!} x^{k-i}.$$

   Lorsque $x=0$, tous les termes de la somme ci-dessus s'annulent à l'exception du terme d'indice i (puisque $0^0 = 1$), si bien que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad P^{(i)}(0) = \frac{i!}{(i-i)!} a_i = i! a_i.$$

Par ailleurs, si $i > n$ on a $P^{(i)} = 0$ et donc $P^{(i)}(0) = 0 = i! a_i$ puisque $a_i = 0$.

2. Il suffit de remplacer a_k par $\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$ dans l'expression de $P(x)$ grâce à la question précédente.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction polynomiale[11] $Q : x \mapsto P(x+a)$. La dérivée de Q est donnée par $Q' : x \mapsto P'(x+a)$, et une récurrence facile montre que
$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad Q^{(k)}(x) = P^{(k)}(x+a).$$
On trouve notamment
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad Q^{(k)}(0) = P^{(k)}(a)$$
d'où, en appliquant le résultat de la question précédente à Q :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} x^k.$$
On a donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = Q(x-a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$
ce qu'il fallait démontrer.
4. D'après la formule ci-dessus, si $P(0) = 1$, $P'(0) = 2$, $P''(0) = 3$ et $P^{(3)}(0) = 4$ on a
$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(1)}{k!} (x-1)^k \\ &= \frac{1}{0!}(x-1)^0 + \frac{1}{1!}(x-1)^1 + \frac{2}{2!}(x-1)^2 + \frac{12}{3!}(x-1)^3 \\ &= 1 + (x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^3 \\ &= 2x^3 - 5x^2 + 5x - 1. \end{aligned}$$
Réciproquement, on s'assure facilement du fait que le polynôme proposé vérifie bien les conditions attendues.

11. Il s'agit bien d'une fonction polynomiale puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x+a)^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i a^{k-i} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} a^{k-i} \right) x^i.$$

De manière générale, la composée de deux fonctions polynomiales (ici $x \mapsto x + a$ et P) est toujours une fonction polynomiale.

Correction de l'exercice 35.

1. (a) D'après le théorème de Pythagore, on a

$$AM = \sqrt{x^2+1^2} = \sqrt{1+x^2} \quad \text{et} \quad MB = \sqrt{(b-x)^2+1^2} = \sqrt{1+(b-x)^2}.$$

   (b) D'après la question précédente, la quantité $L(x)$ représente la longueur de la ligne brisée constituée par les segments $[AM]$ et $[MB]$.

2. (a) Les réels α et β attendus vérifient $\beta = -1$ (car l'ordonnée à l'origine de la droite (AB) est l'ordonnée de B) et $1 = \alpha b + \beta$ (car la droite passe par le point B), donc $2 = \alpha b$, soit $\alpha = \frac{2}{b}$.

   (b) L'équation de la droite (AB) étant $y = \frac{2}{b}x - 1$, le point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses est le point $\left(x, \frac{2}{b}x - 1\right)$ tel que $\frac{2}{b}x - 1 = 0$, c'est-à-dire tel que $x = \frac{b}{2}$. C'est donc bien le point $I = \left(\frac{b}{2}, 0\right)$.

3. Pour minimiser $AM + MB$, c'est-à-dire minimiser $L(x)$, il convient de placer x de façon que A, M et B soient alignés : c'est le principe de l'inégalité triangulaire (qui stipule que la ligne brisée de longueur minimale est la ligne droite). D'après la question précédente, cela revient à choisir $x = \frac{b}{2}$.

4. Il est utile pour la suite de donner une interprétation du problème étudié [12]. Supposons que l'axe des abscisses représente la démarcation entre une plage (la partie inférieure du plan) et la mer (la partie supérieure du plan), et qu'un maître-nageur stationné en le point A voie un nageur en difficulté situé au point B. Le maître-nageur a une vitesse de course sur le sable V fois supérieure à sa vitesse de nage que l'on suppose unitaire [13] et cherche à rejoindre le nageur le plus vite possible ; il veut pour cela minimiser le temps total de son parcours, égal à $T(x) = \frac{1}{V}\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+(b-x)^2}$, en choisissant de façon optimale l'abscisse x à laquelle il rejoindra la mer.

   Il semble intuitif que dans le cas où V est proche de 0 (c'est-à-dire le cas où la vitesse de course est très faible par rapport à la vitesse de nage), le maître-nageur aura intérêt à rejoindre la mer aussi rapidement que possible, tandis que dans le cas où V est proche de $+\infty$ (c'est-à-dire le cas où la vitesse de course est très grande), le maître-nageur aura intérêt à choisir x proche de b pour effectuer une grande partie du trajet en courant.

   Dans les questions suivantes, on démontre l'existence d'une unique solution optimale pour une vitesse V donnée, puis on formalise les intuitions ci-dessus.

---

12. Le problème est en fait issu de considérations physiques : lors du passage d'un rayon lumineux d'un milieu donné à un milieu dans lequel la vitesse de propagation de la lumière n'est pas identique, la direction du rayon change de façon à minimiser son temps total de parcours entre l'émetteur et le récepteur. L'étude de ce phénomène de diffraction est à l'origine des *lois de Snell-Descartes*. Nous donnons ici une interprétation plus parlante pour des étudiants qui n'auraient pas suivi de cours de physique depuis un moment...

13. On suppose par exemple que la vitesse de nage du maître-nageur est égale à 1 mètre par seconde, et donc que sa vitesse de course est de V mètres par seconde. Cette hypothèse n'est intéressante que pour pouvoir interpréter $T(x)$ comme un temps, mais il serait tout à fait possible de s'en passer.

(a) Les fonctions $x \mapsto 1+x^2$ et $x \mapsto 1+(x-b)^2$ sont dérivables et à valeurs dans $[1,+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction racine carrée est dérivable ; ainsi, T est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de composées de fonctions dérivables.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$T'(x) = \frac{1}{V} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{2(x-b)}{2\sqrt{1+(x-b)^2}} = \frac{x}{V\sqrt{1+x^2}} + \frac{x-b}{\sqrt{1+(x-b)^2}}.$$

5. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $T''(x) > 0$ d'après la formule admise puisque $1+x^2 > 0$ et $1+(x-b)^2 > 0$. Ainsi, T' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) Déterminons les limites de T' en $\pm\infty$: lorsque $x < 0$, on peut écrire

$$T'(x) = -\frac{1}{V\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(x-b)^2}+1}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{1}{V} - 1 < 0$$

   et lorsque $x > b$, on peut écrire

$$T(x) = \frac{1}{V\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(x-b)^2}+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{V} + 1 > 0.$$

   Comme T' est continue, il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires [14] un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $T'(x_0) = 0$. Par stricte croissance de T' (établie dans la question précédente), ce réel x_0 est alors le seul point d'annulation de T' sur $\mathbb{R}$.

   (c) On a $T'(0) = -\frac{b}{\sqrt{1+b^2}} < 0$ puisque $b > 0$, et $T'(b) = \frac{b}{V\sqrt{1+b^2}} > 0$ pour la même raison [15]. Ainsi, le point d'annulation x_0 de T' se situe entre 0 et b, ce qu'il fallait démontrer.

6. On remarque que $x_0(V)$ est l'unique point d'annulation de la dérivée de T, exprimé en fonction de V. Dans le cadre de notre interprétation plagiste, $x_0(V)$ est l'abscisse à laquelle notre maître-nageur doit atteindre la mer pour rejoindre le nageur le plus vite possible [16].

   (a) On a $x_0(V) \in [0,b]$ donc $0 \leqslant x_0(V)^2 \leqslant b^2$, d'où $1 \leqslant 1 + x_0(V)^2 \leqslant 1+b^2$, et enfin $1 \leqslant \sqrt{1+x_0(V)^2} \leqslant \sqrt{1+b^2}$ par croissance de la fonction racine carrée.

14. Alternativement, comme T' est strictement croissante on pouvait directement citer le théorème de la bijection, qui assure que T' induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{1}{V}-1, \frac{1}{V}+1\right[$ et s'annule donc une et une seule fois sur $\mathbb{R}$.

15. On aurait pu traiter d'un coup la question précédente et celle-ci en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre 0 et b puis en invoquant la stricte croissance de T. Il vaut toutefois mieux répondre aux questions dans l'ordre préconisé par le sujet, qui est associé à un barème précis et qui peut pénaliser le fait de grouper les réponses.

16. En effet, T' prend des valeurs strictement négatives avant $x_0(V)$ et strictement positives après ; $x_0(V)$ est donc bien le lieu du minimum de T sur $\mathbb{R}$.

(b) En reprenant l'égalité définissant $x_0(V)$, en remarquant que $b - x_0(V) \geqslant 0$ et que $\sqrt{1+(x_0(V)-b)^2} \geqslant 1$ et en utilisant la majoration établie dans la question précédente, on peut écrire que

$$x_0(V) = V\frac{\sqrt{1+x_0(V)^2}(b-x_0(V))}{\sqrt{1+(x_0(V)-b)^2}} \leqslant V\frac{\sqrt{1+b^2}(b-0)}{1} = Vb\sqrt{1+b^2}.$$

(c) On a $Vb\sqrt{1+b^2} \xrightarrow[V\to 0]{} 0$, donc l'encadrement $0 \leqslant x_0(V) \leqslant Vb\sqrt{1+b^2}$ fournit

$$x_0(V) \xrightarrow[V\to 0]{} 0$$

d'après le théorème des gendarmes.

(d) Pour tout $V > 0$, on a

$$0 \leqslant \frac{x_0(V)}{\sqrt{1+x_0(V)^2}} \leqslant \frac{b}{1} = b \quad \text{et} \quad \sqrt{1+(x_0(V)-b)^2} \leqslant \sqrt{1+b^2},$$

donc, en utilisant l'égalité définissant $x_0(V)$:

$$0 \leqslant b - x_0(V) = \frac{1}{V}\frac{x_0(V)}{\sqrt{1+x_0(V)^2}}\sqrt{1+(x_0(V)-b)^2} \leqslant \frac{1}{V}b\sqrt{1+b^2},$$

or $\frac{1}{V}b\sqrt{1+b^2} \xrightarrow[V\to+\infty]{} 0$, donc le théorème des gendarmes donne

$$b - x_0(V) \xrightarrow[V\to+\infty]{} 0 \quad \text{soit} \quad x_0(V) \xrightarrow[V\to+\infty]{} b.$$

Notons que cette question et la précédente permettent de formaliser les intuitions que nous avions énoncées au début de la question 4.

7. (a) D'après la question 6(c), le prolongement par continuité de $V \mapsto x_0(V)$ en 0 est $x_0(0) = 0$. On a alors, en utilisant la relation définissant $x_0(V)$ pour $V \neq 0$ et le fait que $x_0(V) \xrightarrow[V\to 0]{} 0$:

$$\frac{x_0(V)-x_0(0)}{V-0} = \frac{x_0(V)}{V} = \frac{b-x_0(V)}{\sqrt{1+(x_0(V)-b)^2}}\sqrt{1+x_0(V)^2} \xrightarrow[V\to 0]{} \frac{b}{\sqrt{1+b^2}},$$

donc x_0 est dérivable (à droite) en 0 et $x_0'(0) = \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}$.

(b) On a $x_0(0) = 0$ et $x_0'(0) = 0$, donc x_0 admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 donné par $x_0(V) \underset{V\to 0}{=} \frac{b}{\sqrt{1+b^2}}V + o(V)$.

Correction de l'exercice 36.

1. La fonction $f : x \mapsto e^{\alpha\ln(x)}$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions indéfiniment dérivables.
2. En calculant f' puis f'', on conjecture (et on peut démontrer par récurrence) que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x > 0, \quad f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}.$$

3. Pour tout $x > 0$, la fonction f est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ donc le théorème des accroissements finis donne l'existence d'un $x_1 \in]x, x+1[$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(x_1)$, soit $f_1(x) = f'(x_1)$.
4. (a) Pour tout $k \geqslant 0$, on pose

$$\mathcal{P}_k \ : \ \text{« } (g_k)' = (g')_k \text{ »} .$$

La proposition $\mathcal{P}_0$ est varie car $(g_0)' = g' = (g')_0$.

Soit $k \geqslant 0$. On suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie. Alors la fonction $g_{k+1} : x \mapsto g_k(x+1) - g_k(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que différence de deux fonctions dérivables, et sa dérivée est donnée par

$$(g_{k+1})' : x \mapsto g_k'(x+1) - g_k'(x) = (g')_k(x+1) - (g')_k(x)$$

où l'égalité résulte de $\mathcal{P}_k$. Or l'expression $(g')_k(x+1) - (g')_k(x)$ vaut $(g')_{k+1}(x)$ par définition de $(g')_{k+1}$, d'où $(g_{k+1})' = (g')_{k+1}$. Ainsi, $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

On en déduit que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \geqslant 0$ d'après le principe de récurrence, ce qui établit le résultat attendu.

(b) On procède à nouveau par récurrence. Pour tout $k \geqslant 0$, on pose

$$\mathcal{P}_k \ : \ \text{« pour toute fonction } g \text{ indéfiniment dérivable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et tout } x > 0, \text{ il existe } x_k \in [x, x+k] \text{ tel que } g_k(x) = g^{(k)}(x_k) \text{ »}.$$

La proposition $\mathcal{P}_0$ est vraie puisque si g est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $g_0(x) = g(x) = g^{(0)}(x)$ pour tout $x > 0$.

Considérons à présent $k \geqslant 0$ et supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie, et considérons une fonction g indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi que $x > 0$. On a

$$g_{k+1}(x) = g_k(x+1) - g_k(x),$$

donc le même raisonnement que dans la question 3 donne l'existence d'un $c \in]x, x+1[$ tel que

$$g_{k+1}(x) = (g_k)'(c),$$

soit

$$g_{k+1}(x) = (g')_k(c)$$

d'après la question précédente. Or $\mathcal{P}_k$ appliquée à la fonction indéfiniment dérivable g' donne l'existence d'un point $d \in [c, c+k]$ tel que $(g')_k(c) = (g')^{(k)}(d) = g^{(k+1)}(d)$. En notant x_{k+1} le réel d, qui appartient à $[x, x+k+1]$ puisque $c \in]x, x+1[$, on obtient donc

$$g_{k+1}(x) = g^{(k+1)}(x_{k+1}),$$

donc la propriété $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Ainsi, $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \geqslant 0$ d'après le principe de récurrence, d'où le résultat attendu.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, il existe x_k, x_{k+1} strictement positifs tels que $f_k(n) = f^{(k)}(x_k)$ et $f_{k+1}(n) = f^{(k+1)}(x_{k+1})$. Or les expressions de $f^{(k)}$ et $f^{(k+1)}$ données par la question 2 montrent que $f^{(k)} > 0$ et $f^{(k+1)} < 0$ puisque

$$\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) > 0 \quad \text{et} \quad \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\underbrace{(\alpha-k)}_{<0} < 0$$

car $k-1 < \alpha < k$. Ainsi, on a

$$f_k(n) > 0 \quad \text{et} \quad f_{k+1}(n) < 0.$$

(b) L'hypothèse faite sur f au début de la question 5 implique que $f(n) = n^\alpha$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc que $f_1(n) = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ est un entier (car c'est une différence d'entiers) pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc que $f_2(n) = f_1(n+1) - f_1(n)$ est un entier (pour la même raison), et ainsi de suite. Ainsi, $f_k(n)$ est un entier pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On pourrait bien sûr formaliser ce raisonnement en écrivant une récurrence sur $k \geqslant 0$...

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = f_k(n) = f^{(k)}(x_k)$ pour un certain $x_k > 0$ d'après la question 4(b), or $f^{(k)} > 0$ comme on l'a vu à la question 5(a), donc $u_n > 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est composée d'entiers naturels.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a de plus $u_{n+1} - u_n = f_k(n+1) - f_k(n) = f_{k+1}(n)$ par définition de f_{k+1}, or $f_{k+1}(n) < 0$ d'après la question précédente, d'où $u_{n+1} - u_n < 0$: ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

(d) Il n'existe pas de suite d'entiers positifs strictement décroissante, donc le résultat de la question précédente est une contradiction. Ainsi, l'hypothèse selon laquelle $\alpha \in]0, +\infty[\setminus \mathbb{N}$ est incompatible avec la supposition faite au début de la question 5 selon laquelle $n^\alpha \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par contraposée, on en déduit que si β vérifie $n^\beta \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\beta \in \mathbb{N}$. Comme la réciproque de cette implication est évidente, on a bien l'équivalence attendue.

Correction de l'exercice 37.

1. Sous la contrainte $F(K, L) = Q$, on a $K^\alpha L^\beta = Q$ donc $L = Q^{\frac{1}{\beta}} K^{-\frac{\alpha}{\beta}}$. On cherche donc à minimiser la fonction de coût

$$C : K \longmapsto rK + w\left(\frac{Q}{K^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta}} = rK + wQ^{\frac{1}{\beta}}K^{-\frac{\alpha}{\beta}}$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Cette fonction est continue et vérifie $\lim\limits_{K\to 0^+} C(K) = \lim\limits_{K\to+\infty} C(K) = +\infty$, donc elle admet un minimum global sur $\mathbb{R}_+^*$ par le même raisonnement que dans la question 1a de l'exercice 29. Comme C est dérivable et comme $\mathbb{R}_+^*$ est voisinage de chacun de ses points, le minimum de C est atteint en un point critique[17] de C ; or pour tout $K>0$ on a

$$C'(K) = r - \frac{\alpha}{\beta} w Q^{\frac{1}{\beta}} K^{-\frac{\alpha}{\beta}-1},$$

donc

$$C'(K)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad K^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{w}{r}Q^{\frac{1}{\beta}} \quad \Longleftrightarrow \quad K = \left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{w}{r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Ainsi, le minimum de C est atteint pour

$$K = \left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{w}{r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \quad \text{et donc} \quad L = Q^{\frac{1}{\beta}} K^{-\frac{\alpha}{\beta}} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{r}{w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

La combinaison productive optimale est donc

$$(K^*, L^*) = \left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{w}{r}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}, \left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{r}{w}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right) Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

2. La contrainte $rK + wL = R$ se réécrit $L = \frac{R-rK}{w}$; notons que le producteur a intérêt à saturer cette contrainte (c'est-à-dire à utiliser l'intégralité de la somme à sa disposition), sans quoi il peut toujours produire davantage avec en augmentant les quantités de travail et/ou de capital dont il dispose. Du fait de cette contrainte et de la positivité de K et L, K prend nécessairement ses valeurs dans l'intervalle $\left[0, \frac{R}{r}\right]$. On cherche donc à maximiser la fonction

$$Y : K \mapsto F(K,L) = K^{\alpha}\left(\frac{R-rK}{w}\right)^{\beta}$$

sur l'intervalle $\left[0, \frac{R}{r}\right]$. Comme Y est continue sur le segment $\left[0, \frac{R}{r}\right]$, elle y admet un maximum ; or $Y(0) = Y\left(\frac{R}{r}\right) = 0$ et $Y(K) > 0$ pour tout $K \in \left]0, \frac{R}{r}\right[$, donc le maximum de Y est atteint en un point intérieur à $\left[0, \frac{R}{r}\right]$. Comme Y est dérivable sur $\left]0, \frac{R}{r}\right[$, le lieu de ce maximum est un point critique de Y. Or pour tout $K \in \left]0, \frac{R}{r}\right[$, on a

$$\begin{aligned} Y'(K) &= \alpha K^{\alpha-1}\left(\frac{R-rK}{w}\right)^{\beta} - \frac{r}{w}\beta K^{\alpha}\left(\frac{R-rK}{w}\right)^{\beta-1} \\ &= \left(\alpha\frac{R-rK}{w} - \frac{r}{w}K\beta\right) K^{\alpha-1}\left(\frac{R-rK}{w}\right)^{\beta-1}, \end{aligned}$$

17. On pourrait se borner à étudier le signe de la dérivée de C pour en déduire ses variations, mais on choisit de justifier par un argument théorique le fait que l'optimisation de C se résume à une recherche de point critique. Cet intérêt délibéré pour les conditions locales prépare à l'étude des fonctions à plusieurs variables que nous mènerons en deuxième année.

mais $K > 0$ et $L = \frac{R-rK}{w} > 0$ donc

$$Y'(K) = 0 \iff \alpha\frac{R-rK}{w} - \frac{r}{w}K\beta = 0 \iff K = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{R}{r}.$$

La valeur de K qui maximise la quantité produite pour un coût R donné est donc $K^{**} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{R}{r}$ et correspond à une valeur de L égale à $L^{**} = \frac{R-rK}{w} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{R}{w}$. Ainsi, la combinaison productive optimale est

$$(K^{**}, L^{**}) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\frac{R}{r}, \frac{\beta}{\alpha+\beta}\frac{R}{w}\right).$$

3. On observe la symétrie des formules donnant K^* et L^* en fonction des paramètres α et r associés à K d'une part, et en fonction des paramètres β et w associés à L d'autre part.

   On peut par ailleurs remarquer que

   $$\frac{K^*}{L^*} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{w}{r},$$

   et donc que la part de K^* dans la combinaison productive est d'autant plus forte que α (le paramètre positivement corrélé avec la productivité marginale du capital) l'est par rapport à β (celui positivement corrélé avec la productivité marginale de travail), et d'autant plus faible que r (le coût du capital) est grand par rapport à w (le coût du travail).

   On remarque aussi que la proportion du coût total dévolu à la consommation du facteur K^*, égale à

   $$\frac{rK^*}{wL^* + rK^*} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

   ne dépend pas des prix des facteurs mais seulement des paramètres α et β. Cette spécificité de la fonction de Cobb-Douglas a déjà été rencontrée dans le cadre du problème du consommateur : voir l'exercice 63 du chapitre sur la dérivation.

   De manière plus fondamentale pour cet exercice, on constate que

   $$\frac{K^{**}}{L^{**}} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{w}{r},$$

   c'est-à-dire que la combinaison productive permettant de produire une quantité maximale à un coût donné (que l'on peut qualifier de *solution du problème classique du producteur*) est caractérisée par les mêmes proportions de facteurs que la combinaison productive permettant de minimiser le coût de production d'une quantité de biens donnée (la *solution du problème dual du producteur*) [18].

18. On peut vérifier qu'en définissant

$$Q := F(K^{**}, L^{**}) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{w}{r}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{r}{w}\right)^{\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{w}{r}\right)^{\alpha-\beta}$$

comme la quantité optimale qui peut être produite pour un coût R, on vérifie par un simple calcul que les formules données pour (K^*, L^*) et (K^{**}, L^{**}) coïncident.

Cette équivalence du problème dual et du problème classique est un fait général (et assez intuitif) qui n'est pas limité au cas des fonctions de Cobb-Douglas mais est valable pour une gamme étendue de fonctions de production.

Correction de l'exercice 38. Dans les trois problèmes, on incorpore la contrainte en écrivant $y = \frac{R-p_1x}{p_2}$; le problème revient donc à maximiser l'utilité $u\left(x, \frac{R-p_1x}{p_2}\right)$ pour $x \in \left[0, \frac{R}{p_1}\right]$.

(*i*) On cherche à maximiser

$$x \longmapsto \left(\lambda x^r + (1-\lambda)\left(\frac{R-p_1x}{p_2}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

sur $\left[0, \frac{R}{p_1}\right]$. Comme $\frac{1}{r} > 0$, cela revient à maximiser la fonction

$$F : x \longmapsto \lambda x^r + (1-\lambda)\left(\frac{R-p_1x}{p_2}\right)^r$$

sur $\left[0, \frac{R}{p_1}\right]$.

Rappelons que $0 < r < 1$. La fonction F est dérivable sur $\left]0, \frac{R}{p_1}\right[$, et pour tout $x \in \left]0, \frac{R}{p_1}\right[$, on a

$$F'(x) = \lambda r x^{r-1} - (1-\lambda)r\left(\frac{R-p_1x}{p_2}\right)^{r-1}\frac{p_1}{p_2},$$

donc, en posant $y = \frac{R-p_1x}{p_2}$ et en utilisant le fait que $1-r > 0$:

$$\begin{aligned}
F'(x) \geqslant 0 \quad &\iff \quad \lambda x^{r-1} \geqslant (1-\lambda)y^{r-1}\frac{p_1}{p_2} \quad \iff \quad \left(\frac{y}{x}\right)^{1-r} \geqslant \frac{1-\lambda}{\lambda}\frac{p_1}{p_2} \\
&\iff \quad \frac{y}{x} \geqslant \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{1-r}} \quad \iff \quad \frac{R-p_1x}{p_2x} \geqslant \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{1-r}} \\
&\iff \quad x \leqslant \frac{R}{p_1 + p_2\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{1-r}}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, F, qui est continue sur $\left[0, \frac{R}{p_1}\right]$ et dont les variations peuvent donc bien être déduites de l'étude de F' sur $\left]0, \frac{R}{p_1}\right[$, admet son maximum en $x^* = \frac{R}{p_1+p_2\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{1-r}}}$.

Ce choix correspond à une valeur de y égale à

$$y^* = \frac{R-p_1x^*}{p_2} = \frac{R\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{1-r}}}{p_1 + p_2\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{1-r}}} = \frac{R}{p_1\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-r}} + p_2}.$$

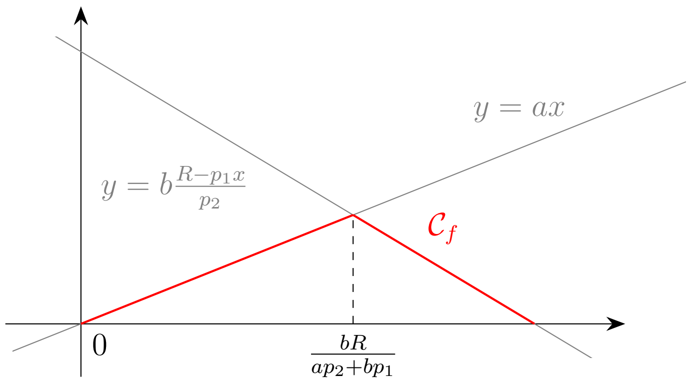
Le panier de biens optimal répondant au problème du consommateur est donc

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{R}{p_1 + p_2\left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\cdot\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{1-r}}}, \frac{R}{p_1\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{1-r}} + p_2}\right).$$

(ii) Le problème du consommateur revient à maximiser la quantité

$$F : x \longmapsto \min\left(ax, b\frac{R - p_1 x}{p_2}\right).$$

On peut facilement tracer le graphe de F en remarquant que $F(x) = ax$ si $ax \leqslant b\frac{R-p_1x}{p_2}$, c'est-à-dire si $x < \frac{bR}{ap_2+bp_1}$ et que $F(x) = b\frac{R-p_1x}{p_2}$ si $ax > b\frac{R-p_1x}{p_2}$, c'est-à-dire si $x > \frac{bR}{ap_2+bp_1}$:



On pouvait aussi adopter une explication purement économique de ce fait : tant que les quantités ax ou $by = b\frac{R-p_1x}{p_2}$ ne sont pas égales l'une à l'autre, il est possible d'augmenter la consommation de l'un des biens au détriment de celle de l'autre en augmentant strictement la valeur de l'utilité que le consommateur retire du panier de bien ; à l'optimum, on doit donc avoir $ax = by$, soit $ax = b\frac{R-p_1x}{p_2}$, ce qui redonne bien $x = \frac{bR}{ap_2+bp_1}$.
Le panier de biens optimal du consommateur dans ce cas est donc

$$(x^*, y^*) = \left(\frac{bR}{ap_2 + bp_1}, \frac{aR}{ap_2 + bp_1}\right).$$

Notons que la complémentarité des biens modélisée par la fonction de Leontief rend l'approche différentielle non pertinente : le point x maximisant $F(x)$ est précisément le point de non-dérivabilité de la fonction F.

(iii) Il s'agit cette fois de maximiser la fonction

$$F : x \longmapsto x^3 + \left(\frac{R - p_1 x}{p_2}\right)^2$$

sur $\left[0, \frac{R-p_1}{p_2}\right]$. Cette fonction est dérivable en tant que fonction polynomiale, et pour tout $x \in \left[0, \frac{R-p_1}{p_2}\right]$ on a

$$F'(x) = 3x^2 - 2\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{R - p_1 x}{p_2}\right),$$

donc

$$F'(x) \geqslant 0 \iff 3x^2 \geqslant 2\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{R - p_1 x}{p_2}\right) \iff 3p_2^2x^2 + 2p_1^2x - 2p_1R \geqslant 0.$$

Or la fonction polynomiale $P : x \mapsto 3p_2^2x_2 + 2p_1^2x - 2p_1R$ est de coefficient dominant strictement positif et admet $r^* := \frac{-p_1^2+\sqrt{p_1^4+6p_2^2p_1R}}{3p_2^2}$ pour unique racine strictement positive ; elle prend donc des valeurs négatives sur $[0, r^*]$ et positives sur $[r^*, +\infty[$. On a par ailleurs

$$P\left(\frac{R}{p_1}\right) = \frac{3Rp_2^2}{p_1^2} + 2p_1R - 2p_1R = 3R\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \geqslant 0,$$

donc $r^* \leqslant \frac{R}{p_1}$, c'est-à-dire que le point r^* auquel P change de signe est bien dans l'intervalle $\left[0, \frac{R}{p_1}\right]$.

Pour tout $x \in \left[0, \frac{R}{p_1}\right]$, on a donc $F'(x) < 0$ si $x < r^*$ et $F'(x) \geqslant 0$ si $x \geqslant r^*$, d'où le tableau de variations suivant :

x	0		r^*		$\frac{R}{p_1}$
$F'(x)$		$-$	0	$+$	
F	$\left(\frac{R}{p_2}\right)^3$	$\searrow$		$\nearrow$	$\left(\frac{R}{p_1}\right)^2$

Ainsi, F admet pour maxima locaux sa valeur en 0, c'est-à-dire $\left(\frac{R}{p_2}\right)^3$, et sa valeur en $\frac{R}{p_1}$, c'est-à-dire $\left(\frac{R}{p_1}\right)^2$, qui correspondent à des paniers de biens intégralement constitués du bien 2 et du bien 1 respectivement. On résout alors le problème du consommateur en comparant ces deux valeurs :

- Si $\left(\frac{R}{p_2}\right)^3 < \left(\frac{R}{p_1}\right)^2$, c'est-à-dire si $\frac{p_2^3}{p_1^2} > R$, le panier optimal est $\left(\frac{R}{p_1}, 0\right)$, donc est intégralement constitué de bien 2.
- Si $\left(\frac{R}{p_2}\right)^3 = \left(\frac{R}{p_1}\right)^2$, c'est-à-dire si $\frac{p_2^3}{p_1^2} = R$, les deux paniers $\left(\frac{R}{p_1}, 0\right)$ et $\left(0, \frac{R}{p_2}\right)$ constitués exclusivement d'un type de bien apportent une utilité maximale.
- Si $\left(\frac{R}{p_2}\right)^3 > \left(\frac{R}{p_1}\right)^2$, c'est-à-dire si $\frac{p_2^3}{p_1^2} < R$, le panier optimal est $\left(0, \frac{R}{p_2}\right)$, donc est intégralement constitué de bien 2.

Notons qu'une fois encore, chercher des points d'annulation de F' (c'est-à-dire s'intéresser au point r^*) n'aurait pas permis de déterminer la solution du problème du consommateur puisque les points optimaux obtenus ne sont pas des points intérieurs à l'intervalle $\left[0, \frac{R}{p_1}\right]$.

Correction de l'exercice 39.

1. (a) Comme f est deux fois dérivable, sa dérivée f' est dérivable, donc continue, sur le segment $[a, b]$. Elle y est donc bornée d'après le théorème des

bornes atteintes, ce qui établit l'existence du réel m. Comme f' est strictement positive sur $[a,b]$ par hypothèse, ce minimum m, qui est atteint par f', est nécessairement strictement positif.

Par ailleurs, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$, sa dérivée seconde f'' est continue sur le segment $[a,b]$. Toujours d'après le théorème des bornes atteintes, elle y est donc bornée en valeur absolue par une constante M.

(b) Lorsque $M = 0$, on a $f''(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$; dans ce cas, f' est constante sur $[a,b]$, et f y est affine. Il n'est donc pas très difficile de déterminer le réel c : en écrivant $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ pour tout $x \in [a,b]$, on obtient que c, qui vérifie $f(c) = 0$, vaut $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.

On suppose à présent que $M > 0$.

2. La fonction g est continue sur le segment reliant c à x (donc $[c,x]$ si $c < x$ et $[x,c]$ si $x < c$) en tant que combinaison de fonctions continues, et dérivable sur l'intervalle ouvert entre c et x en tant que combinaison de fonctions dérivables. Elle vérifie par ailleurs

$$g(c) = f(c) + f'(c)(c-c) - \frac{(c-c)^2}{(x-c)^2}(f(x) + f'(x)(c-x)) = 0$$

et

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + f'(x)(c-x) - \frac{(x-c)^2}{(x-c)^2}(f(x) + f'(x)(c-x)) \\ &= f(x) + f'(x)(c-x) - f(x) - f'(x)(c-x) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $g(c) = g(x)$; on peut donc appliquer le théorème de Rolle à g entre c et x pour obtenir l'existence d'un point d strictement compris entre c et x tel que $g'(d) = 0$, soit

$$f'(d) + f''(d)(c-d) - f'(d) - 2\frac{d-c}{(x-c)^2}(f(x) + f'(x)(c-x)) = 0$$

donc

$$f''(d) = \frac{2}{(x-c)^2}(f(x) + f'(x)(c-x)),$$

d'où

$$f(x) + f'(x)(c-x) = \frac{f''(d)}{2}(x-c)^2.$$

On en déduit que

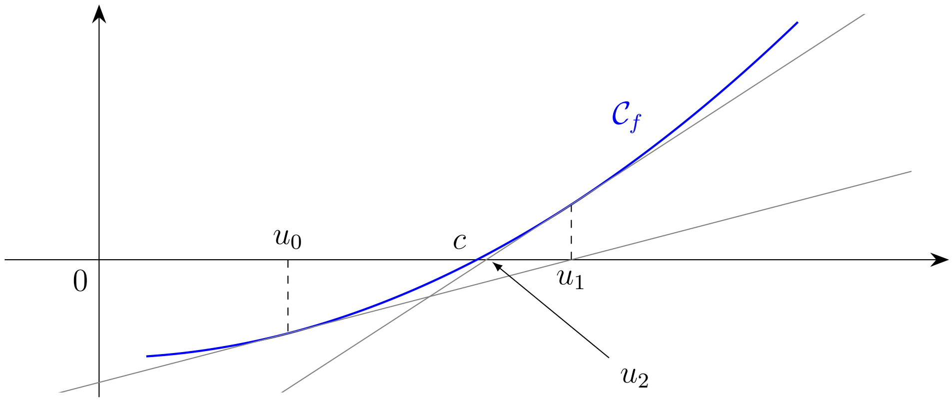
$$|f(x) + f'(x)(c-x)| = \frac{|f''(d)|}{2}(x-c)^2 \leqslant \frac{M}{2}(x-c)^2,$$

ce qu'il fallait établir.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse u_n est $y = f(u_n) + f'(u_n)(x - u_n)$, donc l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses est la solution de l'équation $f(u_n) + f'(u_n)(x - u_n) = 0$: il s'agit donc de

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

(b) On représente ci-dessous les premiers termes de la suite obtenue à partir de la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2$:



Le lecteur est invité à représenter la suite pour d'autres choix de la fonction f, et à constater empiriquement la (très) rapide convergence de la suite vers le point c.

La suite de l'exercice a pour but d'établir cette convergence.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
|u_{n+1} - c| &= \left| u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} - c \right| \\
&= \left| u_n - c - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \right| \\
&= \frac{1}{f'(u_n)} \left| f(u_n) - f'(u_n)(c - u_n) \right| \quad \text{car } f'(u_n) > 0 \\
&\leqslant \frac{1}{m} \frac{M}{2} (u_n - c)^2,
\end{aligned}$$

où la majoration résulte du résultat de la question 2 et du fait que $\frac{1}{f'(u_n)} \leqslant \frac{1}{m}$.

On obtient donc bien l'inégalité attendue [19].

(d) La proposition se démontre facilement par récurrence sur n : elle est vraie pour $n = 0$, et si elle est vraie pour un $n \geqslant 0$ donné alors

$$\begin{aligned}
|u_{n+2} - c| &\leqslant \frac{M}{2m} |u_{n+1} - c|^2 \quad \text{d'après la question précédente} \\
&= \frac{M}{2m} \left(\left(\frac{M}{2m} \right)^{2^n - 1} |u_0 - c|^{2^n} \right)^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\
&= \left(\frac{M}{2m} \right)^{2 \cdot (2^n - 1) + 1} |u_0 - c|^{2 \cdot 2^n} \\
&= \left(\frac{M}{2m} \right)^{2^{n+1} - 1} |u_0 - c|^{2^{n+1}},
\end{aligned}$$

19. L'énoncé note $|u_n - c|^2$ la quantité $(u_n - c)^2$ (qui lui est bien entendu égale) pour souligner le fait que l'on s'intéresse à l'évolution avec n de la distance entre u_n et c, c'est-à-dire de $|u_n - c|$.

d'où la proposition au rang $n+1$, ce qui clôt la preuve par récurrence.

Supposons à présent que $|u_0 - c| < \frac{2m}{M}$ et considérons $q \in]0,1[$. On a alors [20] $0 \leqslant \frac{M}{2m} \cdot |u_0 - c| < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{|u_n - c|}{q^n} &\leqslant \frac{1}{q^n} \left(\frac{M}{2m}\right)^{2^{n+1}-1} |u_0 - c|^{2^{n+1}} \\ &= \frac{2m}{M} \left(\frac{1}{q}\right)^n \left(\frac{M}{2m} \cdot |u_0 - c|\right)^{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Or en notant $\alpha := \frac{M}{2m} \cdot |u_0 - c|$, on a

$$\left(\frac{1}{q}\right)^n \alpha^{2^{n+1}} = \exp\left(-n\ln(q) + 2^{n+1}\ln(\alpha)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

puisque $-n\ln(q) + 2^{n+1}\ln(\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ par croissance comparée. Ainsi, on a

$$\frac{2m}{M} \left(\frac{1}{q}\right)^n \left(\frac{M}{2m} \cdot |u_0 - c|\right)^{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

donc

$$\frac{|u_n - c|}{q^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'après le théorème des gendarmes, ce qui montre bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c plus vite que n'importe quelle suite géométrique [21].

4. Dans le cas de la fonction envisagée, dont la dérivée est strictement positive sur $[1,2]$ (intervalle contenant $\sqrt{2}$) et dont la dérivée seconde est constante et égale à 2, on a [22] :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - 2}{2u_n} = \frac{u_n + \frac{2}{u_n}}{2}.$$

On montre par une récurrence évidente que cette suite est bien définie et à valeurs dans $[1,2]$; en outre, avec les notations précédentes, on a $m = 2$, $M = 2$ et $|u_0 - c| = |1 - \sqrt{2}| < 2 = \frac{2m}{M}$, si bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{2}$ à un rythme plus que géométrique d'après la question précédente.

Les premiers termes de la suite, représentés dans notre réponse à la question 3(b), sont

$$u_0 = 1, \quad u_1 = \frac{3}{2}, \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{17}{12} = 1{,}41666...$$

---

20. Cette majoration permet de montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[a,b]$; plus précisément, elle permet de montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n est bien défini et vérifie $|u_n - c| \leqslant |u_0 - c|$. Le détail de cette preuve est laissé au lecteur.

21. On dit que la vitesse de convergence de la méthode de Newton est *quadratique* en référence au carré qui figure dans l'inégalité démontrée dans la question 3(c). Cette impressionnante vitesse de convergence – le nombre de décimales correctes dans l'approximation de c par u_n double à peu près à chaque itération ! – fait de la méthode de Newton un algorithme très utilisé pour localiser numériquement les points d'annulation d'une fonction donnée. En l'appliquant à la dérivée de f plutôt qu'à f elle-même, elle permet par ailleurs d'approcher les points critiques de f, ce qui est d'une grande utilité dans le cadre de problèmes d'optimisation.

22. On retrouve la *méthode de Héron* étudiée dans l'exercice 49 du chapitre 7 !

Le terme suivant,

$$u_3 = \frac{577}{406} \approx 1,414215...,$$

possède déjà les mêmes cinq premières décimales que $\sqrt{2} = 1,414213...$!

5. Il s'agit de l'exemple historique donné par Newton dans son ouvrage *Methodus fluxionum et serierum infinitorum* pour illustrer l'usage de « sa » méthode.

   En remarquant que $2^3 - 2 \cdot 2 - 5 = -1 < 0$ et que $3^3 - 2 \cdot 3 - 5 = 16 > 0$, on constate grâce au théorème des valeurs intermédiaires que la fonction continue $f : x \mapsto x^3 - 2x - 5$ admet un point d'annulation c dans $[2, 3]$, intervalle sur lequel elle admet par ailleurs une dérivée $f' : x \mapsto 3x^2 - 2$ strictement positive et minorée par 10, et une dérivée seconde $f'' : x \mapsto 6x$ continue et bornée par 18. On se propose d'approcher c en utilisant la méthode de Newton appliquée à la fonction f, c'est-à-dire que l'on pose $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3 - 2u_n - 5}{3u_n^2 - 2} = \frac{2u_n^3 + 5}{3u_n^2 - 2}.$$

   On peut montrer par récurrence[23] que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $[2, 3]$. En reprenant les notations de l'énoncé, on a $|u_0 - c| \leqslant 1$ et $\frac{2m}{M} = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$, donc $|u_0 - c| < \frac{2m}{M}$; ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers c d'après la question 3(d).

   Les premiers termes de la suite sont

$$u_0 = 2, \quad u_1 = \frac{21}{10} = 2,1, \quad u_2 = \frac{11761}{5615} = 2,094568...$$

   La racine recherchée est $c = 2,094551...$; on constate que u_2 en fournit déjà une approximation correcte jusqu'à la troisième décimale.

Correction de l'exercice 40.

1. La fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe, c'est-à-dire que :

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad (-f)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda(-f)(x) + (1-\lambda)(-f)(y),$$

   soit, en utilisant la définition de la fonction $-f$:

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad -f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant -\lambda f(x) - (1-\lambda)(y),$$

   soit encore, en multipliant l'inégalité par -1 :

$$\forall x, y \in I, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)(y),$$

   ce qu'il fallait démontrer.

23. On montre pour cela que $[2, 3]$ est stable par la fonction $x \mapsto \frac{2x^3+5}{3x^2-2}$, en remarquant que si $x \in [2, 3]$ alors on a d'une part $\frac{2x^3+5}{3x^2-2} - 2 = \frac{2x^3-6x^2+9}{3x^2-2} \geqslant \frac{4x^2-6x^2+9}{3x^2-2} = \frac{9-2x^2}{3x^2-2} \geqslant 0$, d'où $\frac{2x^3+5}{3x^2-2} \geqslant 2$, et d'autre part $\frac{2x^3+5}{3x^2-2} - 3 = \frac{2x^3-9x^2+11}{3x^2-2} \leqslant \frac{6x^2-9x^2+11}{3x^2-2} = \frac{11-3x^2}{3x^2-2} \leqslant 0$, d'où $\frac{2x^3+5}{3x^2-2} \leqslant 3$.

2. Si $a, b \in I$, la *corde* de $\mathcal{C}_f$ reliant les points d'abscisse a et b est le segment reliant les points $(a, f(a))$ à $(b, f(b))$. Une représentation paramétrique de ce segment est

$$\begin{aligned} S &= \{\lambda(a, f(a)) + (1-\lambda)(b, f(b)) : \lambda \in [0,1]\} \\ &= \{\big(\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\big) : \lambda \in [0,1]\}, \end{aligned}$$

Dire que la courbe $\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) : x \in I\}$ est en-dessous de cette corde signifie que pour tout élément de la forme $\lambda a + (1-\lambda)b$ avec $\lambda \in [0,1]$, l'ordonnée du point de la courbe situé à cette abscisse (donc le réel $f(\lambda a + (1-\lambda)b)$) est inférieure à l'ordonnée du point de la corde situé à cette abscisse (donc le réel $\lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\big)$). Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de chacune de ses cordes si et seulement si l'on a :

$$\forall a, b \in I, \quad \forall \lambda \in [0,1], \quad f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b),$$

ce qui est exactement la définition de la convexité.

3. La fonction valeur absolue $f : x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ puisque pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in [0,1]$ on a

$$|\lambda a + (1-\lambda)b| \leqslant \lambda|a| + (1-\lambda)|b|$$

d'après l'inégalité triangulaire. Cette fonction n'est en revanche pas dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle ne l'est pas en 0).

4. Supposons que f est convexe. Soient M et M' deux points de son épigraphe $\mathcal{E}_f$; on peut alors écrire $M = (a, y)$ et $M' = (b, y')$ avec $y \geqslant f(a)$ et $y' \geqslant f(b)$. Soit à présent C un point du segment $[MM']$: il existe donc $\lambda \in [0,1]$ tel que $C = \lambda(a, y) + (1-\lambda)(b, y') = \big(\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda y + (1-\lambda)y'\big)$. Or on a

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \leqslant \lambda a' + (1-\lambda)b'$$

par convexité de f, donc C est bien dans $\mathcal{E}_f$. Ainsi, l'épigraphe $\mathcal{E}_f$ est convexe.

Réciproquement, supposons que l'épigraphe $\mathcal{E}_f$ est convexe. On considère $a, b \in I$; les points $M := (a, f(a))$ et $M' := (b, f(b))$, qui appartiennent à la courbe de f, font alors partie de son épigraphe. Pour tout $\lambda \in [0,1]$, le point

$$\lambda(a, f(a)) + (1-\lambda)(b, f(b)) = \big(\lambda a + (1-\lambda)b, \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b)\big),$$

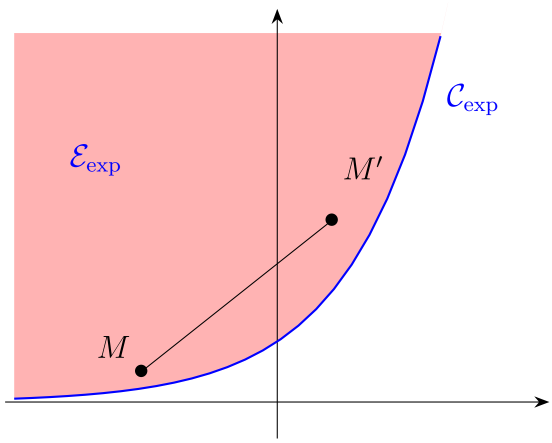
qui appartient au segment $[M, M']$, appartient donc à $\mathcal{E}_f$ par convexité de ce dernier ; mais cela signifie que l'on a

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b),$$

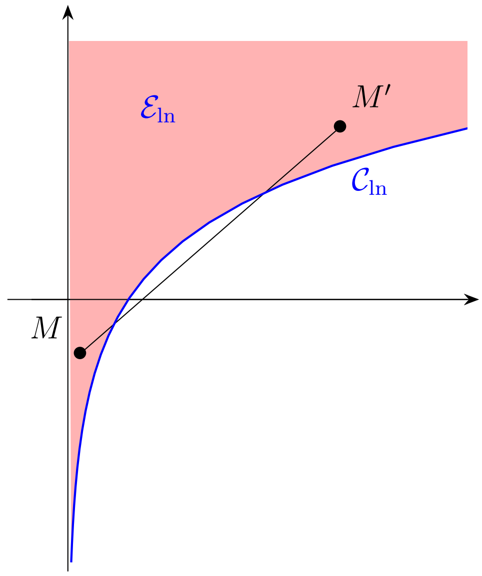
ce qui établit la convexité de f.

On a donc bien établi l'équivalence attendue.

On représente ci-dessous la fonction exponentielle, archétype de fonction convexe (puisque la relation $\exp'' > 0$, comme on l'a annoncé dans le cours et comme on le verra à la question 7, implique la convexité de la fonction), ainsi que son épigraphe :



En revanche, l'épigraphe de la fonction logarithme (qui n'est pas convexe) n'est, lui, pas convexe, en le sens qu'il est possible de trouver deux points de $\mathcal{E}_{\ln}$ reliés par un segment qui n'est pas entièrement contenu dans $\mathcal{E}_{\ln}$:



5. (a) Supposons que f est convexe et considérons $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$. On peut alors écrire $y = \lambda x + (1-\lambda)z$ pour un certain $\lambda \in]0,1[$, plus précisément pour $\lambda = \frac{z-y}{z-x}$. La convexité de f permet alors d'écrire

$$f(y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda)f(z),$$

donc

$$f(y) - f(x) \leqslant \lambda f(x) - f(x) + (1-\lambda)f(z) = (1-\lambda)(f(z) - f(x)),$$

soit, en remplaçant λ par sa valeur :

$$f(y) - f(x) \leqslant \frac{y-x}{z-x}(f(z) - f(x))$$

et donc, en divisant les deux termes de l'inégalité par $y - x > 0$:

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

ce qui établit la partie de gauche de l'inégalité des trois pentes.

L'inégalité de convexité donne aussi

$$f(y) - f(z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z) - f(z) = \lambda(f(x) - f(z))$$

d'où

$$f(y) - f(z) \leqslant \frac{z-y}{z-x}(f(x) - f(z))$$

et donc, en divisant les deux termes par $z - y > 0$:

$$\frac{f(y)-f(z)}{z-y} \leqslant \frac{f(x)-f(z)}{z-x} \quad \text{soit} \quad \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \geqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$

ce qui établit la partie de droite de l'inégalité des trois pentes.

Réciproquement, supposons que f vérifie l'inégalité des trois pentes et considérons $x, z \in I$ tels que $x < z$ ainsi que $\lambda \in [0,1]$. On cherche à montrer que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z).$$

Or cette inégalité est trivialement vraie pour $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ (c'est même une égalité dans ce cas). On suppose donc désormais que $\lambda \in]0,1[$, et on pose $y := \lambda x + (1-\lambda)z$. On a alors $x < y < z$, ce qui permet d'écrire l'inégalité des trois pentes, et en particulier :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$

soit, en utilisant le fait que $y = \lambda x + (1-\lambda)z$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{(1-\lambda)(z-x)} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$

d'où, en multipliant les deux termes de l'inégalité par $(1-\lambda)(z-x) > 0$:

$$f(y) - f(x) \leqslant (1-\lambda)(f(z) - f(x)),$$

donc

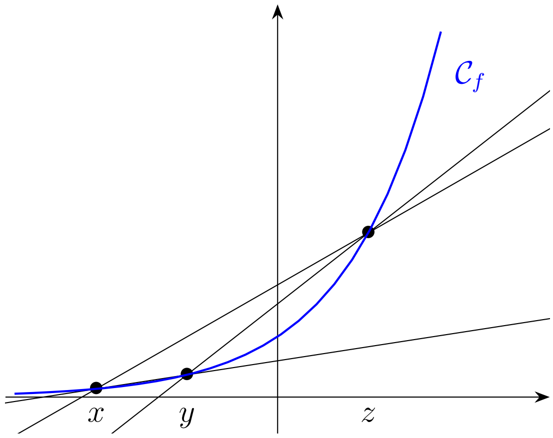
$$f(y) \leqslant f(x) + (1-\lambda)(f(z) - f(x)) = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z),$$

ce qui se réécrit enfin

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z)$$

et établit la convexité de f.

L'inégalité des trois pentes établit le fait que les sécantes à la courbe d'une fonction convexe sont de plus en plus pentues à mesure que les points de sécance ont des abscisses élevées. On représente ci-dessous cette inégalité sur la courbe de la fonction exponentielle, avec $x = -2$, $y = -1$ et $z = 1$:



(b) Supposons que f est convexe et que I est ouvert. Soit $a \in I$; donnons-nous $x, z \in I$ tels que $x < a < z$ (ce qui est possible puisque I est un intervalle ouvert). Pour tout $y \in]x, a[$, l'inégalité des pentes implique d'une part que

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \frac{f(a) - f(y)}{a - y},$$

donc

$$f(a) - f(y) \geqslant (a - y)\frac{f(a) - f(x)}{a - x},$$

et d'autre part que

$$\frac{f(a) - f(y)}{a - y} \leqslant \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

donc

$$f(a) - f(y) \leqslant (a - y)\frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

d'où l'encadrement

$$(a - y)\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant f(a) - f(y) \leqslant (a - y)\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

qui, d'après le théorème des gendarmes, donne

$$\lim_{y \to a^-} (f(a) - f(y)) = 0 \quad \text{soit} \quad \lim_{y \to a^-} f(y) = f(a).$$

On établit de même l'encadrement

$$(y - a)\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant f(y) - f(a) \leqslant (y - a)\frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

lorsque $y \in]a, z[$, et on en déduit la limite

$$\lim_{y \to a^+} f(y) = f(a).$$

Ainsi, on a

$$\lim_{y \to a^-} f(y) = \lim_{y \to a^+} f(y) = f(a),$$

ce qui montre que f est continue en a, et donc que f est continue [24] sur I.

24. Cette propriété n'est pas vraie si I n'est pas un intervalle ouvert : on peut par exemple vérifier que la fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ restreinte à $\mathbb{R}_+$ est convexe (sur $\mathbb{R}_+$) et discontinue en 0.

(c) Supposons que f est convexe et considérons $a \in I$.

Si $x, y \in I$ sont tels que $x < y < a$, alors la partie droite de l'inégalité des trois pentes fournit $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$. Si $x < y < a$, la partie gauche de l'inégalité des trois pentes donne $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$. Enfin, si $x < a < y$, la comparaison des deux termes extrêmes de l'inégalité des trois pentes donne $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$.

Dans tous les cas, on a montré que si $x, y \in I \setminus \{a\}$ avec $x < y$, alors $\tau_a(x) \leqslant \tau_a(y)$, ce qui signifie que τ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Supposons réciproquement que τ_a est croissante quel que soit a et considérons $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$. On a alors $\tau_x(y) \leqslant \tau_x(z)$ (puisque $y < z$), soit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

et $\tau_z(x) \leqslant \tau_z(y)$ (puisque $x < y$), soit

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - x},$$

d'où

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - x}.$$

Ainsi, f vérifie l'inégalité des trois pentes, donc elle est convexe d'après la question 5(a).

6. (a) Supposons f dérivable sur I.

Supposons que f est convexe et considérons $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors pour tout $x \in]a, b[$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

d'après l'inégalité des trois pentes. En faisant tendre x vers a^+, on obtient grâce à l'inégalité de gauche la relation

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

et en faisant tendre x vers b^-, on obtient grâce à l'inégalité de droite la relation

$$f'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \geqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

d'où

$$f'(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'(b),$$

et donc $f'(a) \leqslant f'(b)$. Ainsi, f' est croissante sur I.

Réciproquement, supposons que f' est croissante sur I. Si $x, y, z \in I$ vérifient $x < y < z$, le théorème des accroissements finis appliqué à f

(qui est continue sur $[x, y]$ et $[y, z]$ et dérivable sur $]x, y[$ et $]y, z[$) donne l'existence de $c_1 \in]x, y[$ et $c_2 \in]y, z[$ tels que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c_1) \quad \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(c_2).$$

Or $c_1 \leqslant c_2$ et f' est supposée croissante, donc $f'(c_1) \leqslant f'(c_2)$; ainsi, on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

et ce, quels que soient $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$. Or on a vu dans la question 5(a) que cette partie de l'inégalité des trois pentes implique la convexité de f. Ainsi, il est bien équivalent de dire que f est convexe et que f' est croissante.

(b) Supposons que f est dérivable.

Supposons que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes. Dans ce cas, pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, le point $(x, f(x))$ (resp. $(z, f(z))$) est au-dessus du point d'abscisse x (resp. z) sur la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point y, c'est-à-dire que

$$f(x) \geqslant f(y) + f'(y)(x - y) \quad (\text{resp. } f(z) \geqslant f(y) + f'(y)(x - y)),$$

d'où

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y) \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y},$$

et donc notamment

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

On retrouve une fois encore l'inégalité qui nous a permis, dans la question 5(a), de démontrer la convexité de f. Ainsi, f est convexe.

Réciproquement, supposons que f est convexe. D'après la question précédente, f' est alors croissante. Soit $a \in I$. La fonction $g : x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x - a))$ est dérivable sur I et vérifie

$$\forall x \in I, \quad g'(x) = f'(x) - f'(a).$$

Ainsi, par croissance de f', la fonction g' est négative sur $I \cap]-\infty, a] \cap I[$ et positive sur $I \cap [a, +\infty[$, si bien que g admet son minimum en a. Or $g(a) = 0$, donc g est positive, ce qui signifie que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en a. La courbe $\mathcal{C}_f$ est donc bien au-dessus de toutes ses tangentes, ce qui clôt la preuve.

7. Supposons que f'' est deux fois dérivable sur I. On sait d'après la question 6(a) que f est convexe si et seulement f' est croissante ; or f' est croissante si et seulement si $f'' \geqslant 0$, d'où le résultat attendu.

On retrouve bien la propriété utilisée pour *définir* la convexité dans le cours.

8. La fonction $f : x \mapsto |x|$ est convexe, mais pas strictement convexe puisqu'elle adopte un comportement linéaire sur $\mathbb{R}_+$: on a par exemple
$$f\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 3\right)=f(2)=2$$
et
$$\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(3)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2,$$
donc
$$f\left(\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 3\right)=\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(3).$$
9. L'inégalité des trois pentes, qui équivaut à la relation de convexité réécrite en posant $y : \lambda x+(1-\lambda)z$ pour $x<z$ et $\lambda\in]0,1[$ ainsi que nous l'avons vu dans la question 5(a), devient donc une inégalité stricte dans le cas de la stricte convexité : la fonction f est strictement convexe si et seulement si on a
$$\forall x,y,z\in I,\quad x<y<z\Longrightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x}<\frac{f(z)-f(x)}{z-x}<\frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$
10. Supposons que f est dérivable.

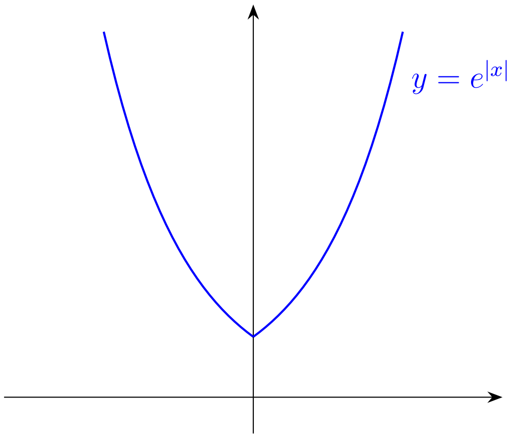
    On montre comme dans la question 6(a), à l'aide du théorème des accroissements finis, que si f' est strictement croissante alors f est strictement convexe.

    La réciproque est un peu plus délicate puisque le raisonnement de passage à la limite utilisé dans la question 6(a) ne fournit que des inégalités larges. On va donc avoir recours à un argument supplémentaire.

    Supposons que f est strictement convexe ; elle est donc convexe, ce qui implique que f' est croissante sur I. Supposons à présent que f' ne soit pas *strictement* croissante sur I : il existe alors $x,z\in I$ tels que $x<z$ et $f'(x)=f'(z)$. Comme f' est croissante, la fonction f' est alors constante sur tout l'intervalle $[x,z]$, où elle prend seulement la valeur $f'(x)$; ainsi, f se comporte comme une fonction affine[25] sur cet intervalle, c'est-à-dire que l'on a $f(y)=f(x)+f'(x)(y-x)$ pour tout $y\in[x,z]$. On a alors
$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x}=f'(x),$$
    et pour tout point $y\in]x,z[$,
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(x),$$
    d'où
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=\frac{f(z)-f(x)}{z-x},$$
    ce qui contredit l'inégalité (stricte) des pentes. Ainsi, f' est bien *strictement* croissante sur I, ce qui clôt la preuve.

25. Il est graphiquement facile de concevoir que la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction strictement convexe ne peut comporter de portions qui sont des segments de droites. Les quelques lignes qui suivent sont une démonstration rigoureuse, mais pas forcément plus éclairante, de ce fait.

11. Il suffit d'induire un point de non-dérivabilité en recollant les courbes de deux fonctions strictement convexes :



Montrons que la fonction $f : x \mapsto e^{|x|}$ dont la courbe est représentée ci-dessus est strictement convexe. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et soit $\lambda \in]0,1[$. Alors :

- Si $|x| \neq |y|$, on peut écrire d'une part que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \exp\left(|\lambda x + (1-\lambda)y|\right) \leqslant \exp\left(\lambda|x| + (1-\lambda)|y|\right)$$

par l'inégalité triangulaire et par croissance de exp, et d'autre part que

$$\exp\left(\lambda|x| + (1-\lambda)|y|\right) < \lambda \exp(|x|) + (1-\lambda)\exp(|y|)$$

puisque exp est strictement convexe (car $\exp'' = \exp > 0$) et $|x| \neq |y|$, donc

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda \exp(|x|) + (1-\lambda)\exp(|y|) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

- Si $|x| = |y|$, comme $x < y$ on a nécessairement $x < 0 < y$, donc l'inégalité triangulaire utilisée dans le premier cas est stricte, et on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \exp\left(|\lambda x + (1-\lambda)y|\right) < \exp\left(\lambda|x| + (1-\lambda)|y|\right)$$

par stricte croissance de exp. Or $|x| = |y|$ donc $f(x) = f(y)$, d'où

$$\exp\left(\lambda|x| + (1-\lambda)|y|\right) = \exp(|x|) = f(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

et donc

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Dans les deux cas, on a

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$

ce qui montre que f est strictement convexe.

Par ailleurs, f n'est pas dérivable en 0 puisque son nombre dérivé à droite en 0 (qui est celui de exp) vaut 1 et son nombre dérivé à gauche en 0 (qui est celui de $x \mapsto e^{-x}$) vaut -1.

12. Supposons que f est dérivable et convexe. D'après la question 6(a), f' est alors croissante. Si $a \in I$ est un point critique de f, alors f' s'annule en a, donc elle est à valeurs négatives avant a et positives après a ; ainsi, f est décroissante sur $I \cap]-\infty, a]$ et croissante sur $I \cap [a, +\infty[$, donc elle admet un minimum en a.

    Le raisonnement est le même dans le cas où f est strictement convexe, en remplaçant les sens de variation et les signes par des sens de variations et des signes stricts.

Correction de l'exercice 41.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« Pour tous} x_1, \dots, x_n \in I \text{ et tous } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1] \\ \text{tels que } \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \quad f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k). \text{ ».}$$

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vraie puisqu'elle énonce que $f(x_1) = f(x_1)$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$. La définition de la convexité, que l'on va utiliser pour prouver l'hérédité de la proposition, est quant à elle la proposition $\mathcal{P}_2$.

Soit à présent $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la proposition $\mathcal{P}_n$ vraie, et on considère $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in [0,1]$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$ ainsi que $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in I$. On veut montrer que

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k).$$

Si $\lambda_{n+1} = 1$ (et donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$), on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) = f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k)$$

donc l'inégalité à démontrer est valide (et il s'agit en fait d'une égalité).

Supposons à présent que $\lambda_{n+1} \neq 1$. On peut écrire

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k\right) &= f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &= f\left((1-\lambda_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\ &\leqslant (1-\lambda_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} x_k\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \quad \text{par convexité de } f. \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}} = \frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \frac{1}{1-\lambda_{n+1}} \cdot (1-\lambda_{n+1}) = 1,$$

donc
$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}f(x_k)$$
d'après l'hypothèse de récurrence appliquée aux n coefficients $\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}$. On a donc
$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right)\leqslant(1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}f(x_k)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f(x_k),$$
ce qui établit l'inégalité à démontrer, donc la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.

Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.

(b) La proposition est vraie si $n=1$ (le cas d'égalité étant alors systématique). Supposons-la vraie à un rang $n\in\mathbb{N}^*$ donné et montrons qu'elle l'est au rang $n+1$. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_n,\lambda_{n+1}\in\,]0,1[$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n+1}\lambda_k=1$ et soient $x_1,\dots,x_n,x_{n+1}\in I$. Il est clair que si tous les x_k sont égaux, on a
$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right)=f\left(x_1\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k\right)=f(x_1)=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f(x_1)=\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f(x_k).$$
Supposons à présent que tous les x_k ne sont pas égaux. On va montrer que l'une des inégalités utilisées dans la phase d'hérédité de la question précédente (c'est-à-dire du cas convexe) est une inégalité stricte. On distingue deux cas :

- Si $x_1,\dots,x_n$ ne sont pas tous égaux, on a
$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}f(x_k)$$
d'après l'hypothèse de récurrence appliquée aux coefficients $\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}$ (dont la somme vaut 1) et aux réels $x_1,\dots,x_n$; en utilisant le même raisonnement que dans la phase d'hérédité de la question précédente, on obtient alors
$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right)<\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f(x_k).$$
- Si $x_1,\dots,x_n$ sont tous égaux, alors ils valent tous x_1, et on a $x_{n+1}\neq x_1$ puisque l'on a supposé que les x_k n'étaient pas tous égaux. Ainsi, on peut écrire que
$$\color{blue}{\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k}\neq\color{red}{x_{n+1}},$$

donc que

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) &= f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k + \lambda_{n+1}x_{n+1}\right)\\ &= f\left((1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k + \lambda_{n+1}x_{n+1}\right)\\ &< (1-\lambda_{n+1})f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}x_k\right) + \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

par stricte convexité de f. En utilisant le même raisonnement que dans la phase d'hérédité de la question précédente, on obtient à nouveau

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) < \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f(x_k).$$

Dans les deux cas, on a montré que l'inégalité à démontrer est stricte, ce qui établit la propriété au rang $n+1$ et permet de conclure d'après le principe de récurrence.

(c) Il suffit de renverser le sens des inégalités.

Si f est concave, alors pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k).$$

Si f est strictement concave, alors pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in]0,1[$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k),$$

avec égalité si et seulement si tous les x_k sont égaux.

2. La fonction ln est strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$ puisqu'elle y est deux fois dérivable et de dérivée seconde strictement négative (en effet, pour tout $x > 0$ on a $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$).

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente appliquée aux x_k avec les coefficients $\lambda_k := \frac{1}{n}$, on a

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k\right) \geqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln(x_k)$$

soit

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right) \geqslant \ln\left(\left(\prod_{k=1}^{n}x_k\right)^{1/n}\right)$$

d'où, en passant à l'exponentielle qui est croissante :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} x_k^{1/n}\right)^{1/n},$$

ce qui est l'inégalité à établir. D'après la question précédente, les deux premières inégalités ci-dessus sont des égalités si et seulement si les x_k sont tous égaux ; c'est aussi le cas de la troisième par stricte croissante de la fonction exp, ce qui clôt la preuve.

3. (a) La fonction ln étant strictement concave et p et q vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, pour tous $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ on a

$$\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \geqslant \frac{1}{p}\ln(a^p)+\frac{1}{q}\ln(b^q),$$

soit

$$\ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right) \geqslant \ln(a)+\ln(b),$$

avec égalité si et seulement si $a^p=b^q$. En passant cette inégalité à l'exponentielle (qui est strictement croissante), on obtient

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q} \geqslant ab,$$

toujours avec égalité si et seulement si $a^p=b^q$.

(b) Supposons que l'on ait $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q = 1$. On veut montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant 1$; or

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k^p}{p}+\frac{b_k^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n} a_k^p + \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} b_k^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

grâce à l'inégalité démontrée dans la question précédente, d'où le résultat attendu. L'égalité est valable lorsque l'on a $a_k b_k = \frac{a_k^p}{p}+\frac{b_k^q}{q}$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, c'est-à-dire lorsque $a_k^p=b_k^q$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ d'après la question précédente.

(c) Si $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p = 0$, alors tous les a_k sont nuls et l'inégalité de Hölder est vraie (puisque $0=0$) ; c'est alors une égalité. Il en va de même si $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q = 0$.

Supposons à présent que nous ne sommes dans aucun de ces deux cas et posons $A := \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{1/p} > 0$ et $B := \left(\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{1/q} > 0$. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on pose $a'_k := \frac{a_k}{A}$ et $b'_k := \frac{b_k}{B}$. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n} (a'_k)^p = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^p}{A^p} = 1$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}(b'_k)^q = \sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^q}{B^q} = 1,$$

donc le cas traité dans la question précédente donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a'_k b'_k \leqslant 1$, soit $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{A}\frac{b_k}{B} \leqslant 1$, soit encore

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

d'où l'inégalité de Hölder. D'après la question précédente, cette inégalité est une égalité si et seulement si on a $(a'_k)^p = (b'_k)^q$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, c'est-à-dire si on a :

$$(a_1^p, \ldots, a_n^p) = \frac{A^p}{B^q}(b_1^q, \ldots, b_n^q).$$

Cette condition implique que les vecteurs $(a_1^p, \ldots, a_n^p)$ et $(b_1^q, \ldots, b_n^q)$ sont proportionnels ; réciproquement, si $(a_1^p, \ldots, a_n^p) = \lambda(b_1^q, \ldots, b_n^q)$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a

$$A^p = \sum_{k=1}^{n} a_k^p = \sum_{k=1}^{n} \lambda b_k^q = \lambda B^q,$$

donc

$$(a_1^p, \ldots, a_n^p) = \frac{A^p}{B^q}(b_1^q, \ldots, b_n^q),$$

ce qui assure que l'inégalité de Hölder est une égalité.

En réunissant les trois cas considérés dans cette question, on obtient que l'inégalité de Hölder est une égalité si et seulement si les vecteurs $(a_1^p, \ldots, a_n^p)$ et $(b_1^q, \ldots, b_n^q)$ sont colinéaires, c'est-à-dire proportionnels. Ces vecteurs étant à coordonnées positives, on peut dans ce cas imposer que la constante de proportionnalité reliant ces deux vecteurs soit elle aussi positive.

4. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est l'inégalité de Hölder considérée dans le cas où $p = q = 2$. Il s'agit d'une égalité si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que l'on ait $a_k^2 = \alpha b_k^2$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ ou tel que l'on ait $b_k^2 = \alpha b_k^2$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$. Cette condition équivaut à l'existence d'un $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (égal à $\sqrt{\alpha}$) tel que $a_k = \lambda b_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ ou tel que l'on ait $b_k = \lambda b_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ce qu'il fallait démontrer.

Correction de l'exercice 42.

1. Dans le cas où $n = 1$, la somme ne porte que sur 1-uplet (1) (donc avec $m_1 = 1$), et la formule énonce que si f et φ sont dérivables, alors $\varphi \circ f$ l'est et

$$(\varphi \circ f)' = \frac{1}{1!1!}(\varphi' \circ f) \cdot (f')^1 = (\varphi' \circ f) \cdot f',$$

ce qui est vrai d'après le cours.

Si $n = 2$, la somme porte sur deux 2-uplets : $(2, 0)$ et $(0, 1)$. La formule énonce alors que si f et φ sont dérivables deux fois, alors $\varphi \circ f$ l'est et

$$(\varphi\circ f)'' = \frac{2}{2!1!^2}\,(\varphi''\circ f)\cdot(f')^2 + \frac{2}{1!2!^1}\,(\varphi'\circ f)\cdot f'' = (\varphi''\circ f)\cdot(f')^2 + (\varphi'\circ f)\cdot f'',$$

ce que l'on peut démontrer en écrivant que

$$\begin{aligned}
(\varphi\circ f)'' &= \big((\varphi'\circ f)\cdot f'\big)' \\
&= (\varphi'\circ f)'\cdot f' + (\varphi'\circ f)\cdot f'' \\
&= (\varphi''\circ f)\cdot f'\cdot f' + (\varphi'\circ f)\cdot f'' \\
&= (\varphi''\circ f)\cdot (f')^2 + (\varphi'\circ f)\cdot f''
\end{aligned}$$

Si $n = 3$, la somme porte sur 3-uplets : $(3, 0)$, $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. La formule énonce alors que si f et φ sont dérivables trois fois, alors $\varphi \circ f$ l'est et

$$\begin{aligned}
(\varphi\circ f)''' &= \frac{3!}{3!1!^3}\,(\varphi'''\circ f)\cdot(f')^3 + \frac{3!}{1!1!^1 1!2!^1}\,(\varphi''\circ f)\cdot f'f'' + \frac{3!}{1!3!^1}\,(\varphi'''\circ f)\cdot f''' \\
&= (\varphi'''\circ f)\cdot(f')^3 + 3(\varphi''\circ f)\cdot f'f'' + (\varphi'\circ f)\circ f''',
\end{aligned}$$

ce que nous pouvons démontrer en écrivant, grâce à la formule au rang 2, que

$$\begin{aligned}
(\varphi\circ f)''' &= \big((\varphi''\circ f)\cdot(f')^2 + (\varphi'\circ f)\cdot f''\big)' \\
&= (\varphi''\circ f)'\cdot(f')^2 + (\varphi''\circ f)\cdot((f')^2)' + (\varphi'\circ f)'\cdot f'' + (\varphi'\circ f)\cdot f''' \\
&= (\varphi'''\circ f)\cdot(f')^3 + (\varphi''\circ f)\cdot 2f'f'' + (\varphi''\circ f)\cdot f'f'' + (\varphi'\circ f)\cdot f''' \\
&= (\varphi'''\circ f)\cdot(f')^3 + 3(\varphi''\circ f)\cdot f'f'' + (\varphi'\circ f)\cdot f'''.
\end{aligned}$$

2. On a vu que la proposition est vraie aux rangs 1, 2 et 3. Considérons à présent $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la formule vérifiée au rang n.

   On note
   $$I_n := \left\{(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n \ : \ \sum_{k=1}^{n} km_k = n\right\}$$
   l'ensemble des multi-indices sur lesquels porte la somme qui intervient dans la formule au rang n, et
   $$I_{n+1} := \left\{(m_1, \ldots, m_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1} \ : \ \sum_{k=1}^{n+1} km_k = n+1\right\}$$
   celui des multi-indices sur lesquels porte la somme qui intervient dans la formule au rang $n + 1$.

   Avant de chercher à établir la proposition au rang $n + 1$, cherchons à comprendre comment un élément de I_{n+1} peut être obtenu à partir d'un élément de I_n. Tout élément de I_{n+1} peut être défini en considérant un élément de I_n, en lui ajoutant une coordonnée nulle pour en faire un $(n + 1)$-uplet, et en abaissant de 1 l'une de ses coordonnées pour augmenter de 1 la suivante : par ce processus, le 3-uplet $(1,1,0)$ peut par exemple devenir le 4-uplet $(0,2,0,0)$ ou le 4-uplet $(1,0,1,0)$, et le 3-uplet $(0,0,1)$ peut devenir le 4-uplet $(0,0,0,1)$.

Notons que plusieurs éléments de I_n peuvent permettent de créer le même élément de I_{n+1}, et un élément donné de I_n peut permettre de créer plusieurs éléments de I_{n+1} selon la coordonnée à laquelle le protocole s'applique ; nous allons préciser ce propos dans quelques lignes.

Plus formellement, considérons pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ l'application $T_i : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^{n+1}$ définie par

$$T_i : (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \ldots, m_n) \longmapsto (m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i - 1, m_{i+1}{+}1, \ldots, m_n, 0),$$

considérons aussi $T_0 : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^{n+1}$ définie par

$$T_0 : (m_1, m_2, \ldots, m_n) \longmapsto (m_1 + 1, m_2, \ldots, m_n, 0),$$

et considérons enfin $T_n : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^{n+1}$ définie par

$$T_n : (m_1, \ldots, m_n) \longmapsto (m_1, \ldots, m_n - 1, 1).$$

Pour tout $m \in I_n$ et tout $m' \in I_{n+1}$, on note $m \to m'$ s'il existe $i \in [\![0,n]\!]$ tel que $T_i(m) = m'$.

On introduit aussi une notation qui permettra de limiter la lourdeur des calculs : pour tout $m \in I_n$ (que l'on notera systématiquement $m = (m_1, \ldots, m_n)$), on note

$$A(m) := \left(\varphi^{(m_1+\cdots+m_n)} \circ f\right) \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(f^{(j)}\right)^{m_j},$$

et pour tout $m' \in I_{n+1}$ (que l'on écrit $m' = (m'_1, \ldots, m'_{n+1})$, on note

$$A(m') := \left(\varphi^{(m'_1+\cdots+m'_{n+1})} \circ f\right) \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \left(f^{(j)}\right)^{m'_j}.$$

L'hypothèse de récurrence se réécrit ainsi

$$(\varphi \circ f)^{(n)} = \sum_{m \in I_n} \frac{n!}{m_1!1!^{m_1} m_2!2!^{m_2} \cdots m_n!n!^{m_n}} A(m),$$

et on va démontrer que

$$(\varphi \circ f)^{(n+1)} = \sum_{m' \in I_{n+1}} \frac{(n+1)!}{m'_1!1!^{m'_1} m'_2!2!^{m'_2} \cdots m'_{n+1}!(n+1)!^{m_{n+1}}} A(m'),$$

ce qui est la formule de Faà di Bruno au rang $n+1$.

Considérons que f et φ sont $n+1$ fois dérivables ; alors $f \circ \varphi$ l'est aussi (nous l'avons admis dans le cours et démontré dans la question 1d de l'exercice 22). En utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve alors :

$$(f \circ \varphi)^{n+1} = \left(\sum_{m \in I_n} \frac{n!}{m_1!1!^{m_1} m_2!2!^{m_2} \cdots m_n!n!^{m_n}} A(m)\right)'$$

soit

$$(f \circ \varphi)^{n+1} = \sum_{m \in I_n} \frac{n!}{m_1!1!^{m_1} m_2!2!^{m_2} \cdots m_n!n!^{m_n}} (A(m))'$$

par linéarité de la dérivation.

Or pour tout $m = (m_1, \ldots, m_n) \in I_n$, on a

$$\begin{aligned}
(A(m))' &= \left(\left(\varphi^{(m_1+\cdots+m_n)} \circ f \right) \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(f^{(j)} \right)^{m_j} \right)' \\
&= \left(\varphi^{(m_1+\cdots+m_n)} \circ f \right)' \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(f^{(j)} \right)^{m_j} + \left(\varphi^{(m_1+\cdots+m_n)} \circ f \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{n} \left(f^{(j)} \right)^{m_j} \right)' \\
&= \left(\varphi^{(m_1+\cdots+m_n+1)} \circ f \right) \cdot f' \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(f^{(j)} \right)^{m_j} \\
&\quad + \left(\varphi^{(m_1+\cdots+m_n)} \circ f \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left((f^{(i)})^{m_i} \right)' \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(f^{(j)} \right)^{m_j},
\end{aligned}$$

où l'on a fait usage de la formule donnant la dérivée du produit de n fonctions dérivables[26], à savoir $\left(\prod_{j=1}^{n} u_i \right)' = \sum_{i=1}^{n} u_i' \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} u_j$.

Ainsi, pour tout $m \in I_n$, on a

$$\begin{aligned}
(A(m))' &= \left(\varphi^{(m_1+\cdots+m_n+1)} \circ f \right) \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(f^{(j)} \right)^{(T_0(m))_j} \\
&\quad + \left(\varphi^{(m_1+\cdots+m_n)} \circ f \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i (f^{(i)})^{m_i - 1} f^{(i+1)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(f^{(j)} \right)^{m_j} \\
&= \left(\varphi^{(m_1+\cdots+m_n+1)} \circ f \right) \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \left(f^{(j)} \right)^{(T_0(m))_j} + \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\varphi^{(m_1+\cdots+m_n)} \circ f \right) \cdot \prod_{j=1}^{n+1} \left(f^{(j)} \right)^{(T_i(m))_j} \\
&= A(T_0(m)) + \sum_{i=1}^{n} m_i A(T_i(m))
\end{aligned}$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![0, n]\!]$, l'entier $(T_i(m))_j$ est la j-ième coordonnée du vecteur $T_i(m)$ (donc $m_{i-1} - 1$ si $j = i$, $m_{i+1} + 1$ si $j = i + 1$, et m_j sinon), et où l'on a convenu de noter $m_i(f^{(i)})^{m_i - 1} := 0$ si $m_i = 0$ (sans chercher, donc, à discuter de l'existence de $(f^{(i)})^{-1}$).

On a donc, pour tout $m \in I_n$:

$$(A(m))' = A(T_0(m)) + \sum_{i=1}^{n} m_i A(T_i(m)). \tag{1}$$

26. Il s'agit d'une généralisation du résultat de l'exercice 24 du chapitre 10. La preuve de ce résultat par récurrence sur n, bien plus aisée que celle qui nous occupe, est un bon exercice.

On remarque que l'expression obtenue est une somme de termes de la forme $A(m')$, avec $m' \in I_{n+1}$ tels que $m \to m'$.

Ainsi, la formule (2) fait apparaître $(f \circ \varphi)^{(n+1)}$ comme une somme de termes de la forme $A(m')$ avec $m' \in I_{n+1}$. Il nous reste à déterminer combien de fois chaque terme $A(m')$ figure dans cette somme.

Pour cela, on remarque tout d'abord qu'un $(n+1)$-uplet $m' \in I_{n+1}$ donné est de la forme $T_i(m)$ pour un $i \in [\![0, n]\!]$ et un $m \in I_n$ si et seulement si $m'_i \neq 0$ et qu'un tel m est alors unique (pour un i donné). Or pour un tel m, la formule (1) indique que la dérivation du terme $A(m)$ amène m_i fois le terme $A(m')$ si $i > 0$, et une fois le terme $A(m')$ si $i = 0$.

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$ et tout $m' \in I_{n+1}$, le terme $A(m')$ apparaît

$$\begin{aligned}
&\frac{n!}{m_1!1!^{m_1}m_2!2!^{m_2}\cdots m_n!n!^{m_n}} \cdot m_i \\
&\qquad = \frac{m'_{i+1}(i+1)!}{(m'_i+1)i!} \cdot \frac{n!}{m'_1!1!^{m'_1}m'_2!2!^{m'_2}\cdots m'_n!n!^{m'_n}} \cdot (m'_i+1) \\
&\qquad = m'_{i+1}(i+1) \cdot \frac{n!}{m'_1!1!^{m'_1}m'_2!2!^{m'_2}\cdots m'_n!n!^{m'_n}}
\end{aligned}$$

fois dans la somme (2) du fait de la dérivation de termes de multi-indice m tels que $T_i(m) = m'$ (puisque l'on a alors $m_i = m_i + 1$ et $m_{i+1} = m'_{i+1} - 1$). Cette relation est aussi valable si m' n'est l'image par T_i d'aucun $m \in I_n$, puisqu'alors $m'_{i+1} = 0$.

Par ailleurs, si $m' \in I_{n+1}$ vérifie $m'_1 > 0$, le terme $A(m')$ apparaît dans la somme (2) lors de la dérivation de l'unique n-uplet $m \in I_n$ tel que $m' = T_0(m)$, et la dérivation de $A(m)$ l'amène une fois d'après la formule (1). Ainsi, le terme $A(m')$ apparaît

$$\begin{aligned}
&\frac{n!}{m_1!1!^{m_1}m_2!2!^{m_2}\cdots m_n!n!^{m_n}} \\
&\qquad = m'_1 \frac{n!}{m'_1!1!^{m'_1}m'_2!2!^{m'_2}\cdots m'_n!n!^{m'_n}}
\end{aligned}$$

dans la somme (2) du fait de la dérivation de termes de multi-indice m tels que $T_0(m) = m'$ (puisque l'on a alors $m_1 = m'_1 - 1$). Cette formule reste valable si m' n'est l'image par T_0 d'aucun $m \in I_n$ (c'est-à-dire si $m'_1 = 0$).

Un seul élément de I_{n+1} ne peut être décrit comme $T_i(m)$ pour un certain $i \in [\![0, n-1]\!]$ et un certain $m \in I_n$: le $(n+1)$-uplet $m' = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, qui est l'image par T_n du n-uplet $m = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. D'après la relation (1), le terme $T(m')$ apparaît $n+1$ fois dans la somme (2), uniquement du fait de la dérivation du terme $T(m)$.

On rassembler les trois cas envisagés (qui correspondent au fait que $m' = T_i(m)$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$, pour $i = 0$ et pour $i = n$) en affirmant que quel que soit $m' \in I_{n+1}$ et quel que soit $i \in [\![0, n]\!]$, le terme $A(m')$ apparaît

$$m'_{i+1}(i+1) \cdot \frac{n!}{m'_1!1!^{m'_1}m'_2!2!^{m'_2}\cdots m'_n!n!^{m'_n}m'_{n+1}!(n+1)!^{m'_{n+1}}}$$

fois dans la somme (2) du fait de la dérivation de termes de multi-indice m tels que $T_i(m) = m'$. Ce dernier coefficient s'écrit plus simplement

$$m'_{i+1}(i+1) \cdot \frac{n!}{m'_1!1!^{m'_1}m'_2!2!^{m'_2}\cdots m'_{n+1}!(n+1)!^{m'_{n+1}}}.$$

Ainsi, la formule (2) donne :

$$\begin{aligned}
(f\circ\varphi)^{(n+1)} &= \sum_{m'\in I_{n+1}} \left(\sum_{\substack{m\in I_n \\ m\to m'}} \frac{n!}{m'_1!1!^{m'_1}m'_2!2!^{m'_2}\cdots m'_{n+1}!(n+1)!^{m'_{n+1}}} \right) A(m') \\
&= \sum_{m'\in I_{n+1}} \sum_{i=0}^{n} m'_{i+1}(i+1) \cdot \frac{n!}{m'_1!1!^{m'_1}m'_2!2!^{m'_2}\cdots m'_{n+1}!(n+1)!^{m'_{n+1}}} A(m') \\
&= \sum_{m'\in I_{n+1}} \left(\frac{n!}{m'_1!1!^{m'_1}m'_2!2!^{m'_2}\cdots m'_{n+1}!(n+1)!^{m'_{n+1}}} \sum_{i=0}^{n} m'_{i+1}(i+1) \right) A(m') \\
&= \sum_{m'\in I_{n+1}} \left(\frac{n!}{m'_1!1!^{m'_1}m'_2!2!^{m'_2}\cdots m'_{n+1}!(n+1)!^{m'_{n+1}}} (n+1) \right) A(m') \\
&= \sum_{m'\in I_{n+1}} \frac{(n+1)!}{m'_1!1!^{m'_1}m'_2!2!^{m'_2}\cdots m'_{n+1}!(n+1)!^{m'_{n+1}}} A(m'),
\end{aligned}$$

ce qui établit la proposition au rang $n+1$ et clôt la preuve.

3. Il s'agit d'appliquer la formule de Faà di Bruno aux fonctions indéfiniment dérivables $\varphi := \exp$ et $f : x \mapsto x^2$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$(\exp\circ f)^{(n)}(x) = \sum_{m\in I_n} \frac{n!}{m_1!1!^{m_1}m_2!2!^{m_2}\cdots m_n!n!^{m_n}} (\exp\circ f) \cdot \prod_{j=1}^{n} \left(f^{(j)}\right)^{m_j},$$

or $f' : x \mapsto 2x$, $f'' : x \mapsto 2$ et $f^{(j)} = 0$ dès lors que $j \geqslant 2$, donc les termes de la somme sont nuls dès lors qu'ils portent sur un multi-indice $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ tel qu'il existe $j > 2$ vérifiant $m_j > 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire

$$\begin{aligned}
(\exp\circ f)^{(n)}(x) &= \sum_{\substack{(m_1,m_2)\in\mathbb{N}^2 \\ m_1+2m_2=n}} \frac{n!}{m_1!1!^{m_1}m_2!2!^{m_2}} e^{x^2}(2x)^{m_1}2^{m_2} \\
&= \sum_{\substack{(m_1,m_2)\in\mathbb{N}^2 \\ m_1+2m_2=n}} \frac{n!}{m_1!m_2!} e^{x^2}(2x)^{m_1} \\
&= e^{x^2} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.
\end{aligned}$$