5 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 45 (Lemme de Cesàro, applications et compléments). Cet exercice s'inscrit dans la continuité de l'exercice 37.

1. Utiliser le lemme de Cesàro pour calculer la limite de la suite de terme général
$$v_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}.$$
2. Soit $(w_n)_{n\geqslant 0}$ une suite réelle telle que
$$w_{n+1} - w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}.$$
Montrer que $\dfrac{w_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. Montrer que le lemme de Cesàro est valable si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $\pm\infty$.
4. Montrer que la réciproque du lemme de Cesàro est fausse en établissant que la suite divergente $(s_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie pourtant
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
5. Montrer qu'en revanche, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite réelle *monotone* telle que
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$
pour un certain $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Exercice 46. Montrer que si $(b_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite réelle convergeant vers $b \in \mathbb{R}$ et si $a \in [0,1[$, alors toute suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b_n$ converge vers $\frac{b}{1-a}$.

Exercice 47. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est *dense dans* $\mathbb{R}$ si pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $x < x'$ il existe $y \in A$ tel que $x < y < x'$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de A.

Exercice 48 (Caractérisation séquentielle de la borne supérieure).
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\ell = \sup(A) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \forall x \in A,\ x \leqslant \ell \\ \exists\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}} \ :\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell, \end{cases}$$

où l'on rappelle que $A^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites réelles à valeurs dans A.

Exercice 49 (Méthode de Héron). Soit $a > 0$. On se propose dans cet exercice d'approcher le réel $\sqrt{a}$ par la *méthode de Héron*. On choisit un point de départ $x \geqslant \sqrt{a}$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2}.$$

1. Montrer que $u_n \geqslant \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$ et passer à la limite dans la relation de récurrence définissant la suite pour déterminer ℓ.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2\sqrt{a}}.$$

On dit que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\sqrt{a}$ est *quadratique*.

(b) Commenter ce terme et la rapidité de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers sa limite.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant u_n - \sqrt{a} \leqslant \frac{(u_0 - \sqrt{a})^{2^n}}{(2\sqrt{a})^{2^n - 1}}.$$

Dans son ouvrage *Metrica* (*Les Métriques*), Héron souhaite calculer la racine de $a = 720$, ce qui revient à calculer le côté d'un carré d'aire 720. Pour cela, il considère une suite de rectangles d'aire 720 « de plus en plus carrés », ce qui permet d'obtenir asymptotiquement un carré de côté $\sqrt{720}$. Héron remarque tout d'abord que 720 est proche de $729 = 27^2$. Il considère donc un rectangle de côtés $u_0 = 27$ et $\frac{720}{27}$, qu'il entreprend de rendre « plus carré » en considérant un nouveau rectangle dont la largeur u_1 est la moyenne arithmétique des deux côtés précédents, c'est-à-dire $u_1 = \frac{u_0 + \frac{720}{u_0}}{2} = \frac{161}{6}$, et dont la longueur vaut $\frac{720}{u_1}$, et ainsi de suite. Cette méthode converge très vite : l'approximation de $\sqrt{720} = 26,8328\ldots$ donnée par $u_1 = 26,8333\ldots$ est déjà correcte jusqu'à la troisième décimale !

Exercice 50 (Méthode de Héron généralisée). Soient $a > 0$ et $N \geqslant 2$. On souhaite généraliser la méthode de Héron étudiée dans l'exercice précédent pour approcher $\sqrt[N]{a}$. On choisit $x \geqslant \sqrt[N]{a}$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{(N-1)u_n + \frac{a}{u_n^{N-1}}}{N}.$$

1. Montrer en utilisant la dérivation que $u_n \geqslant \sqrt[N]{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$ et passer à la limite dans la relation de récurrence définissant la suite pour déterminer ℓ.

Exercice 51. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$u_0 = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad v_0 = 2 \quad \text{ainsi que :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{u_n + v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et strictement positives.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant 1 \leqslant v_n$ et $u_n + v_n \geqslant 2$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent une limite.
5. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 1.$$

Exercice 52 (Méthode de dichotomie). On souhaite approcher $\sqrt{2}$ par une *méthode de dichotomie*. On remarque tout d'abord que $\sqrt{2}$ est l'unique racine sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^2 - 2$, qui est à valeurs négatives sur $[0, \sqrt{2}]$ et positives sur $[\sqrt{2}, +\infty[$. On se donne ensuite un intervalle (éventuellement grossier) de $\mathbb{R}_+$ encadrant $\sqrt{2}$, puis à chaque étape on transforme l'une des deux bornes de l'intervalle en le point médian de l'intervalle précédent, de sorte que l'intervalle obtenu contienne toujours $\sqrt{2}$.

Formellement, on se donne $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a < \sqrt{2} < b$ puis on pose

$$u_0 = a,\ v_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} & \text{si} \quad \left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right)^2 - 2 \geqslant 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = v_n & \text{si} \quad \left(\dfrac{u_n + v_n}{2}\right)^2 - 2 < 0. \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $a = 1$ et $b = 2$.
2. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et que leur limite commune est $\sqrt{2}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, majorer l'erreur d'estimation $\max(|u_n - \sqrt{2}|, |v_n - \sqrt{2}|)$ de $\sqrt{2}$ après n itérations. Si $a = 1$ et $b = 2$, combien d'itérations faut-il pour être certain d'obtenir une estimation de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} près ?
4. Proposer une procédure d'estimation de $\sqrt[3]{5}$ et du nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dont on rappelle qu'il s'agit de l'unique solution positive de l'équation du second degré $x^2 = x + 1$.