4 Quelques applications géométriques

Il est conseillé de traiter les exercices de cette section à la suite les uns des autres.

Exercice 36. Soient z et z' deux nombres complexes non nuls et distincts, admettant pour images respectives les points M et M'. En mettant z et z' sous forme exponentielle, montrer que O, M et M' sont alignés si et seulement si $z\overline{z'} \in \mathbb{R}$, et que cette condition est équivalente à $\frac{z}{z'} \in \mathbb{R}$.

Exercice 37. Soient z, z' et z'' trois nombres complexes distincts deux à deux, admettant pour images respectives les points M, M' et M''.

1. Montrer que M, M' et M'' sont alignés si et seulement si $(z'' - z')\overline{(z' - z)} \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que les points $(1, 1)$, $(4, 2)$ et $(-5, -1)$ sont alignés.

Exercice 38. Soient z, z' et z'' trois nombres complexes d'images respectives M, M' et M''. On suppose que $z \neq z'$ et $z \neq z''$, et on note $\theta \in \mathbb{R}$ une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''})$.

1. Montrer que $\arg\left(\dfrac{z'' - z}{z' - z}\right) \equiv \theta\,[2\pi]$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le quotient $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$ pour que M, M' et M'' soient alignés.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le quotient $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$ pour que (MM') et (MM'') soient perpendiculaires.
4. Montrer que si $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$ est imaginaire pur, alors $|z' - z|^2 + |z'' - z|^2 = |z'' - z'|^2$.

Exercice 39. Soient a, b, c, d quatre nombres complexes d'images respectives A, B, C et D. On suppose que $a \neq b$ et $c \neq d$.

1. Montrer que
$$(AB) \perp (CD) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d-c}{b-a} \text{ est imaginaire pur.}$$
2. On suppose que a, b, c et d sont de module 1. Déduire de la question précédente que
$$(AB) \perp (CD) \quad \Longleftrightarrow \quad ab + cd = 0.$$
Indication : on pourra utiliser le fait qu'un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement s'il est opposé à son conjugué.

Exercice 40. Déterminer géométriquement l'ensemble des points du plan dont l'affixe $z \in \mathbb{C}$ vérifie :

(i) $|z - 2i| = 3$

(ii) $|iz - 3| = 1$

(iii) $\left|\dfrac{z-3}{z+2}\right| = 1$

(iv) $|\overline{z} - 3 + i| = |z - 5|$

(v) $\dfrac{z-i}{z+1-i} \in \mathbb{R}$

(vi) $\dfrac{z-i}{z+1-i}$ est imaginaire pur.

Pour simplifier les notations, dans les cinq exercices qui suivent, on assimile le plan euclidien standard à l'ensemble $\mathbb{R}^2$: un point M du plan de coordonnées $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pourra donc être directement noté (a, b), et si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de coordonnées (a', b') on note $M + \overrightarrow{u}$ le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$, c'est-à-dire le point $(a + a', b + b')$.

Exercice 41 (Translations). Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan, d'affixe $z_0 \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que l'écriture complexe de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$

$$T_{\overrightarrow{u}} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ M & \longmapsto & M + \overrightarrow{u} \end{array}$$

   est

$$t_{z_0} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + z_0, \end{array}$$

   c'est-à-dire que si M est le point d'affixe z, alors $T_{\overrightarrow{u}}(M)$ est le point d'affixe $z + z_0$.

2. Montrer que la translation $T_{\overrightarrow{u}}$ est bijective et donner sa réciproque.

Dans l'énoncé ci-contre, on fait figurer une flèche sur le vecteur pour rappeler les notations utilisées au lycée et marquer la nature profondément géométrique de l'opération de translation.

Exercice 42 (Homothéties). Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et soit A un point du plan d'affixe $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle *homothétie de centre A et de rapport λ* l'application

$$H_{A,\lambda} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ M & \longmapsto & A + \lambda\overrightarrow{AM}. \end{array}$$

1. Montrer que l'écriture complexe de l'homothétie de centre A et de rapport λ est

$$h_{z_0,\lambda} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z_0 + \lambda(z - z_0), \end{array}$$

   c'est-à-dire que si M est le point du plan d'affixe z, alors $H_{A,\lambda}(M)$ est le point d'affixe $h_{z_0,\lambda}(z)$.

2. Montrer que $H_{A,\lambda}$ est bijective et que sa réciproque est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.
3. Montrer que la composée de deux homothéties est une translation ou une homothétie.

Exercice 43 (Rotations). Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et soit $A \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle *rotation de centre A et d'angle θ* la transformation géométrique de $\mathbb{R}^2$ dont l'écriture complexe est

$$\begin{aligned} r_{z_0,\theta} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z_0 + e^{i\theta}(z - z_0). \end{aligned}$$

1. Donner l'écriture explicite de $R_{A,\theta}$ en tant qu'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   Indication : on notera $A = (x_0, y_0)$ (et donc $z_0 = x_0 + iy_0$), puis pour tout $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z = x + iy$ on donnera l'écriture algébrique de $r_{z_0,\theta}(z)$ en fonction de x et y.
2. Montrer que la composée de deux rotations est une translation ou une rotation.
3. Montrer que la rotation $R_{A,\theta}$ est bijective et donner sa bijection réciproque.

Exercice 44 (Symétries). Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On considère la transformation géométrique S_θ de $\mathbb{R}^2$ dont l'écriture complexe est

$$\begin{aligned} s_\theta : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto e^{i\theta}\overline{z}. \end{aligned}$$

1. Montrer que si $\theta \equiv 0\,[2\pi]$, alors S_θ est la symétrie orthogonale par rapport à un certain axe.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $s_\theta\,(z) = e^{i\frac{\theta}{2}} \cdot \overline{e^{-i\frac{\theta}{2}} z}$.
3. En déduire que S_θ est une symétrie orthogonale par rapport à un axe que l'on précisera.
4. Calculer $s_\theta \circ s_\theta$, puis montrer que s_θ est bijective et donner s_θ^{-1}.
5. Si $\theta' \in \mathbb{R}$, que vaut $S_{\theta'} \circ S_\theta$?

Exercice 45 (Similitudes directes). Soient $\lambda > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathbb{R}^2$ d'affixe $z_0 \in \mathbb{C}$. On appelle *similitude directe de centre A, d'angle θ et de rapport λ* la transformation $S_{A,\theta,\lambda}$ du plan $\mathbb{R}^2$ telle que pour tout point M, le point $M' := S_{A,\theta,\lambda}(M)$ est l'unique point du plan vérifiant les deux conditions

$$AM' = \lambda AM \quad \text{et} \quad \text{si } A \neq M, \text{ alors } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \theta\,[2\pi].$$

1. Illustrer graphiquement l'action de $S_{A,\theta,\lambda}$ sur un point du plan.
2. À quelle condition (sur λ et θ) $S_{A,\theta,\lambda}$ est-elle l'identité ? une homothétie ? une rotation ?
3. (a) Donner l'écriture complexe de $S_{A,\theta,\lambda}$.
   (b) Montrer qu'une similitude directe est la composée d'une rotation par une homothétie.
   (c) Montrer qu'une application $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une similitude directe si et seulement s'il existe $(a, b) \in (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}) \setminus (\{1\} \times \mathbb{C}^*)$ tel que l'écriture complexe de S soit $s : z \mapsto az + b$. Donner le centre, l'angle et le rapport d'une telle similitude.

4. Montrer que la composée de deux similitudes directes est une similitude directe ou une translation.
5. Montrer que $S_{A,\theta,\lambda}$ préserve les angles orientés, au sens où si B, C et D sont trois points du plan distincts, alors, en notant $B' = S_{A,\theta,\lambda}(B), C' = S_{A,\theta,\lambda}(C)$ et $D' = S_{A,\theta,\lambda}(D)$ on a :

$$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) \equiv (\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'D'}) \ [2\pi].$$

5 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 46. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $j := e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer les sommes $A := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, $B := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^k$ et $C := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} j^{2k}$.
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $1 + j^k + j^{2k} = 3$ si k est multiple de 3, et $1 + j^k + j^{2k} = 0$ sinon.
3. En déduire la valeur de la somme $S := \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ est multiple} \\ \text{de } 3}}^{n} \binom{n}{k}$.

Exercice 47. Soit $n \in \mathbb{N}$. En s'inspirant de l'exercice 46, proposer une méthode de calcul de

$$S := \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ est multiple} \\ \text{de } 4}}^{n} \binom{n}{k}.$$

Exercice 48 (Détermination des racines deuxièmes d'un nombre complexe). On présente dans cet exercice une méthode de détermination des racines deuxièmes d'un nombre complexe qui ne suppose pas de connaître un argument de ce dernier.

1. On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 = 4 + 3i.$$

Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que

$$z^2 = 4 + 3i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 & = 4 \\ 2ab & = 3 \end{cases}$$

L'argument de $4 + 3i$ n'est pas « simple » (c'est-à-dire n'est pas l'un des angles de cosinus et sinus connus avec lesquels nous avons l'habitude de travailler) ; on ne peut donc pas appliquer directement la proposition 45.

(b) En utilisant le module de $4+3i$, montrer que si $z^2 = 4+3i$, alors $a^2 = \frac{9}{2}$ et $b^2 = \frac{1}{2}$.

(c) Déterminer les deux solutions de l'équation $z^2 = 4+3i$ dans $\mathbb{C}$.

2. Déterminer par la même méthode les racines deuxièmes des nombres suivants :

   (i) $1+2i$ $\quad$ (ii) $5-12i$ $\quad$ (iii) $21-20i$

3. En adaptant la méthode de résolution des équations polynomiales du second degré à coefficients réels, résoudre l'équation $z^2 + (4+i)z + 5 - i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
4. En utilisant l'écriture algébrique $z = a+ib$ comme dans la question 1, résoudre l'équation $z^2 + 2\overline{z} + 5 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 49. (Une tentative de mettre de l'ordre dans $\mathbb{C}$)

On appelle *relation d'ordre sur* $\mathbb{C}$ une relation notée $\preceq$ entre les éléments de $\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Réflexivité : $\forall z \in \mathbb{C}, \quad z \preceq z$.

(ii) Antisymétrie : $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \big(z \preceq z' \text{ et } z' \preceq z\big) \iff z = z'$.

(iii) Transitivité : $\forall z, z', z'' \in \mathbb{C}, \quad \big(z \preceq z' \text{ et } z' \preceq z''\big) \iff z \preceq z''$.

On définit *l'ordre lexicographique* sur $\mathbb{C}$ par :

$$\forall a, b, a', b' \in \mathbb{R}, \quad a+ib \preceq a'+ib' \quad \iff \quad \big(a < a' \text{ ou } (a = a' \text{ et } b \leqslant b')\big).$$

1. Remplacer les pointillés par le signe $\preceq$ ou $\succeq$:

   (i) $1+i \ldots 2-i$. $\quad$ (iii) $-3+5i \ldots -3-2i$. $\quad$ (v) $0 \ldots 5$.

   (ii) $3+5i \ldots 3-2i$. $\quad$ (iv) $-i \ldots 1$. $\quad$ (vi) $0 \ldots i$.

2. Vérifier que $\preceq$ est bien une relation d'ordre sur $\mathbb{C}$.
3. Vérifier que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$ on a $z \preceq z'$ ou $z' \preceq z$ (on parle de relation *d'ordre total sur* $\mathbb{C}$).
4. Représenter graphiquement l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $1-i \preceq z$.
5. Expliquer pourquoi « l'ordre lexicographique » porte ce nom.
6. (a) Peut-on affirmer que si $z_1 \preceq z_1'$ et $z_2 \preceq z_2'$ alors $z_1 + z_2 \preceq z_1' + z_2'$?

   (b) Peut-on affirmer que si $0 \preceq z$ et $0 \preceq z'$ alors $0 \preceq z \times z'$?

Exercice 50. (Une construction de $\mathbb{C}$)

On se propose dans cet exercice de donner (enfin !) un sens concret au nombre i dont on a admis l'existence dans le cours, et plus généralement au corps $(\mathbb{C}, +, \times)$ des nombres complexes.

La construction présentée ici fut élaborée par William R. Hamilton à partir de 1833 (voir Zoom ci-après). Elle consiste à assimiler $\mathbb{C}$ au plan $\mathbb{R}^2$ (paradigme dans lequel images et affixes sont les mêmes objets !) et à définir les opérations sur les points du plan de façon à retrouver les relations

$$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b')$$

et

$$(a+ib)\times(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+a'b)$$

obtenues dans le cours.

On se place donc dans le plan $\mathbb{R}^2$, **que l'on choisit de noter** $\mathbb{C}$. On définit l'addition de deux éléments de ce plan par

$$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)+(a',b') := (a+a', b+b') \tag{1}$$

et leur produit par

$$\forall (a,b),(a',b') \in \mathbb{R}^2, \quad (a,b)\times(a',b') := (aa'-bb', ab'+a'b). \tag{2}$$

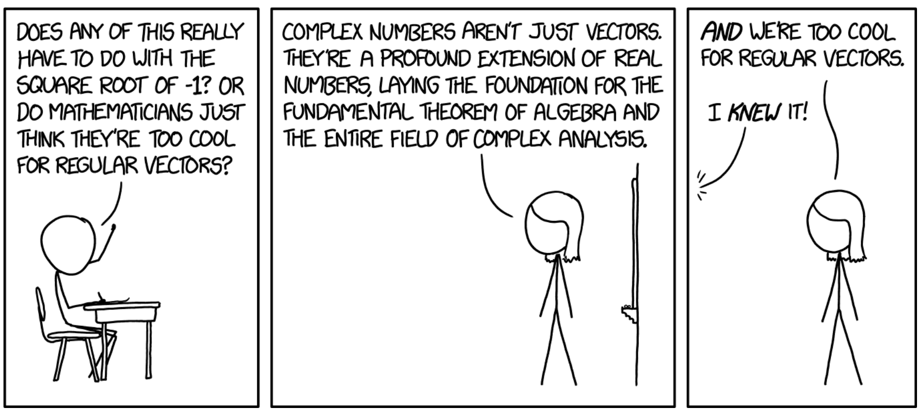
On choisit ensuite de simplement noter 1 **le couple** $(1,0)$, et plus généralement de noter x le couple $(x,0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On choisit par ailleurs de noter $i = (0,1)$. Tout nombre $z = (a,b)$ de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire de $\mathbb{C}$, s'écrit donc bel et bien sous la forme $a+ib$.

Une fois ces définitions données, il reste à vérifier que les opérations ainsi introduites possèdent les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{R}$, ainsi qu'on l'avait admis au début du cours.

Voilà donc la clé du mystère : l'unité imaginaire i n'est autre que le couple $(0,1)$, élément de l'ensemble $\mathbb{R}^2$ que l'on a muni d'une addition plutôt standard et d'une multiplication plus exotique.

1. Vérifier que $i \times i = -1$.
2. (a) (Commutativité de l'addition) Vérifier que si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $z+z' = z'+z$.
   (b) (Associativité de l'addition) Vérifier que si $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, alors $(z+z')+z'' = z+(z'+z'')$.
   (c) (Élément neutre pour l'addition) Vérifier que si $z \in \mathbb{C}$, alors $z+0 = 0+z = z$.
   (d) (Existence d'un opposé) Vérifier que si $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z+z' = 0$. On note ce nombre $-z$.

3. (a) (Commutativité du produit) Vérifier que si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $z \times z' = z' \times z$.
   (b) (Associativité du produit) Vérifier que si $z, z', z'' \in \mathbb{C}$, alors $(z \times z') \times z'' = z \times (z' \times z'')$.
   (c) (Distributivité) Vérifier que si $z, z' \in \mathbb{C}$, $z'' \in \mathbb{C}$, alors $(z + z') \times z'' = z \times z'' + z' \times z''$.
   (d) (Existence d'un inverse) Vérifier que si $z \in \mathbb{C}$ est tel que $z \neq 0$, alors il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z \times z' = 1$. On note ce nombre z^{-1} ou $\frac{1}{z}$, et si $z'' \in \mathbb{C}$ on définit le quotient $\frac{z''}{z}$ comme le produit $z'' \times \frac{1}{z}$.
   (e) (Intégrité de $\mathbb{C}$) Montrer que si $z, z' \in \mathbb{C}$, alors $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$.



Hamilton et les corps de nombres

Non content d'avoir étendu le corps $\mathbb{R}$ au corps « à deux dimensions » qu'est $\mathbb{C}$, le mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805 – 1865) chercha à prolonger cette structure à la dimension 3, sans succès (on a montré depuis que cette entreprise était impossible). Il y parvint par contre en dimension 4, donnant ainsi naissance à la théorie des *quaternions* : le corps des quaternions, noté $\mathbb{H}$ en l'honneur de Hamilton, est l'ensemble $\{a+ib+cj+dk \,:\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\}$, où i est l'unité imaginaire définie dans ce chapitre, j est un élément « étranger à $\mathbb{C}$ » et k en est un autre, et où les règles de calcul sont définies en généralisant celles de $\mathbb{R}$ (à l'exception de la commutativité de la multiplication) et en imposant les relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

On raconte que c'est le 16 octobre 1843 que Hamilton, au cours d'une promenade avec son épouse le long du Royal Canal à Dublin, eut l'idée de ces relations, qu'il s'empressa alors de graver sur une pierre du Brougham Bridge. L'Université Nationale d'Irlande organise depuis 1989 des pélerinages de mathématiciens jusqu'à la plaque commémorative qui remplace aujourd'hui l'inscription effacée par le temps (voir ci-contre).