Trigonométrie

Corrigé des exercices

Correction de l'exercice 13.

1. Si $a \in \mathbb{R}$ est tel que $a \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, alors $\tan(a)$ existe et on a, d'après la relation fondamentale de la trigonométrie et la formule de duplication du cosinus :

$$\begin{aligned}\frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)} &= \frac{1-\frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)}}{1+\frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)}} \\ &= \frac{\cos^2(a)-\sin^2(a)}{\cos^2(a)+\sin^2(a)} = \frac{\cos(2a)}{1} = \cos(2a),\end{aligned}$$

   d'où l'égalité attendue.

2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie $\alpha \not\equiv \pi\,[2\pi]$, alors $\frac{\alpha}{2} \not\equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$. En appliquant le résultat de la question précédente au réel $a := \frac{\alpha}{2}$, on obtient alors

$$\cos(\alpha) = \frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

3. Il s'agit de deviner comment transformer l'expression $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ par un calcul proche de celui mené dans la question 1 : après avoir fait apparaître $\cos^2(a)+\sin^2(a)$ au dénominateur, il suffit de diviser les deux termes du quotient par $\cos^2(a)$ pour faire apparaître des termes fonction de $\tan(a)$. On a ainsi :

$$\begin{aligned}\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) &= \frac{2\sin(a)\cos(a)}{\sin^2(a)+\cos^2(a)} \\ &= \frac{2\frac{\sin(a)}{\cos(a)}}{\frac{\sin^2(a)}{\cos^2(a)}+1} = \frac{2\tan(a)}{\tan^2(a)+1}.\end{aligned}$$

   On en déduit comme dans la question 2 que si $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifie $\alpha \not\equiv \pi\,[2\pi]$, alors

$$\sin(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)+1}.$$

Correction de l'exercice 14. Soient a et b deux réels satisfaisant les conditions de l'énoncé. On a alors $\cos(a) \neq 0$, $\cos(b) \neq 0$, $\cos(a+b) \neq 0$ et $\cos(a-b) \neq 0$, et on peut écrire

$$\begin{aligned}
\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} \\
&= \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} + \frac{\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)} - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} \quad \text{en divisant les deux termes du quotient par } \cos(a)\cos(b) \\
&= \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{\sin(b)}{\cos(b)}} = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.
\end{aligned}$$

Pour trouver la seconde formule, on peut avoir recours au même stratagème calculatoire ou écrire directement grâce à la première formule que

$$\tan(a-b) = \tan\Big(a+(-b)\Big) = \frac{\tan(a)+\tan(-b)}{1-\tan(a)\tan(-b)} = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)},$$

où la dernière égalité résulte du fait que $\tan(-b) = -\tan(b)$.

Correction de l'exercice 15.

(i) On a

$$\begin{aligned}
\cos(a+b)+\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b) - \cancel{\sin(a)\sin(b)} + \cos(a)\cos(b) + \cancel{\sin(a)\sin(b)} \\
&= 2\cos(a)\cos(b),
\end{aligned}$$

d'où la première relation attendue.

(ii) La deuxième relation s'obtient en écrivant

$$\begin{aligned}
-\cos(a+b)+\cos(a-b) &= -\cancel{\cos(a)\cos(b)} + \sin(a)\sin(b) + \cancel{\cos(a)\cos(b)} + \sin(a)\sin(b) \\
&= 2\sin(a)\sin(b).
\end{aligned}$$

(iii) On a cette fois

$$\begin{aligned}
\sin(a+b)+\sin(a-b) &= \cancel{\cos(a)\sin(b)} + \sin(a)\cos(b) - \cancel{\cos(a)\sin(b)} + \sin(a)\cos(b) \\
&= 2\sin(a)\cos(b).
\end{aligned}$$

(iv) Enfin, la quatrième égalité s'obtient en écrivant

$$\begin{aligned}
\sin(a+b)-\sin(a-b) &= \cos(a)\sin(b) + \cancel{\sin(a)\cos(b)} + \cos(a)\sin(b) - \cancel{\sin(a)\cos(b)} \\
&= 2\cos(a)\sin(b).
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 16. Il suffit[1] de réécrire les relations démontrées dans l'exercice précédent en posant $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$, puisque l'on a alors $a + b = x$ et $a - b = y$.

Correction de l'exercice 17.

1. Les intervalles $\left[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right[$, pour $n \in \mathbb{N}$, forment une partition de $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Ainsi, pour tout $x \geqslant -\frac{1}{2}$ il existe (un seul) $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \left[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right[$. Le résultat s'ensuit immédiatement en prenant $x = 2\pi k + \frac{\pi}{2}$.

   Notons que l'on peut expliciter n en fonction de k en écrivant la relation attendue sous la forme de la double inégalité $n \leqslant 2\pi k + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} < n + 1$, ce qui montre que $n = \left\lfloor 2\pi k + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe d'après la question précédente un $n_k \in \mathbb{N}$ tel que
$$n_k - \frac{1}{2} \leqslant 2\pi k + \frac{\pi}{2} < n_k + \frac{1}{2}.$$
   soit
$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} < n_k - 2\pi k \leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}.$$
   Or $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \geqslant \frac{\pi}{3}$ car
$$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} = \frac{\pi - 3}{6} \geqslant 0.$$
   De même, on a $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \leqslant \frac{2\pi}{3}$ car
$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{3 - \pi}{6} \leqslant 0.$$
   Ainsi, on a $n_k - 2\pi k \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, donc $\sin(n_k - 2\pi k) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\sin(n_k) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $n_k \leqslant 2\pi k + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} < 2\pi(k+1) + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} < n_{k+1}$, donc $(n_k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante : ainsi, les n_k sont deux à deux distincts. Il existe donc bien une infinité d'entiers (les n_k) vérifiant la condition $\sin(n_k) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 18. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $0 \leqslant \frac{k\pi}{2n+1} < \frac{n\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}$; l'application $\tan^2$ étant strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, sa restriction à cet intervalle est injective, donc les réels $\frac{k\pi}{2n+1}$ ont des images deux à deux distinctes par $\tan^2$. L'application $y \mapsto \frac{1}{y}$ étant injective, les x_k sont bien deux à deux distincts.
Une preuve moins abstraite consiste à écrire que
$$0 \leqslant \frac{\pi}{2n+1} < \frac{2\pi}{2n+1} < \cdots < \frac{k\pi}{2n+1} < \cdots < \frac{n\pi}{2n+1} < \frac{\pi}{2},$$

1. On verra dans le chapitre suivant une manière élégante et rapide de retrouver ces formules grâce aux nombres complexes.

puis à composer ces inégalités par la fonction tan qui est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ pour obtenir

$$0 \leqslant \tan\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) < \tan\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) < \cdots < \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \cdots < \tan\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right),$$

à passer au carré dans ces inégalités entre termes positifs, ce qui donne

$$0 \leqslant \tan^2\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) < \tan^2\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) < \cdots < \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) < \cdots < \tan^2\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right),$$

et enfin à passer à l'inverse dans ces inégalités entre termes strictement positifs pour obtenir

$$x_1 > x_2 > \cdots > x_k > \cdots > x_n.$$

Correction de l'exercice 19.

1. On a $\lim_{k\to+\infty} y_k = 0$; la relation attendue provient alors directement de la définition de la limite. On peut expliciter la plus petite valeur possible de k_0 en écrivant que la condition $y_k \leqslant \frac{1}{16}$ est vérifiée si et seulement si $-\frac{\pi}{3} + k\pi \geqslant 16$, c'est-à-dire si $k \geqslant 6$ (donc $k_0 = 6$).
2. Soit $k \geqslant k_0$ et soi $x \in]x_k, y_k[$. On a alors

$$\begin{aligned}\left(2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) &= 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\\ &= x\sin\left(\frac{2}{x}\right) - \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = x\sin\left(\frac{2}{x}\right) - \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Cherchons à majorer chacun des termes composant cette dernière expression. Comme $x \geqslant 0$, on peut écrire que $x\sin\left(\frac{2}{x}\right) \leqslant x < y_k \leqslant \frac{1}{16}$.

Par ailleurs, en passant à l'inverse dans l'inégalité $x_k < x < y_k$ entre termes strictement positifs, on obtient

$$-\frac{\pi}{3} + k\pi < \frac{1}{x} < \frac{\pi}{3} + k\pi,$$

ce qui permet de lire sur le cercle trigonométrique que $\cos\left(\frac{1}{x}\right) > \frac{1}{2}$ si k est pair et $\cos\left(\frac{1}{x}\right) < -\frac{1}{2}$ si k est impair. Ainsi, si k est pair alors $\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$, d'où

$$\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \geqslant \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$$

et donc

$$-\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{8}.$$

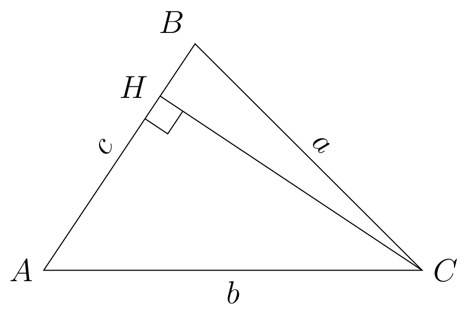
Si k est impair, on a $\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4} \leqslant -\frac{3}{4}$, d'où

$$-\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{4}\right) \geqslant \frac{3}{4}$$

et donc
$$-\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}.$$
Dans les deux cas, on a $\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant-\frac{1}{8}$. On en déduit que
$$x\sin\left(\frac{2}{x}\right)-\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)\leqslant\frac{1}{16}-\frac{1}{8}=-\frac{1}{16},$$
d'où le résultat attendu.

Correction de l'exercice 20.

1. Appelons H la hauteur du triangle issue de C, représentée sur la figure ci-dessous :



Le théorème de Pythagore appliqué au triangle ACH donne $AC^2=AH^2+HC^2$. Or $AC=b$ et $AH=b\cos(\widehat{BAC})$ (puisque AH est le « côté adjacent » à l'angle $\widehat{BAC}$ dans le triangle ACH d'hypoténuse HC), donc la relation donnée par le théorème de Pythagore se réécrit $b^2=b^2\cos^2(\widehat{BAC})+HC^2$ soit $HC^2=b^2(1-\cos^2(\widehat{BAC}))=b^2\sin^2(\widehat{BAC})$. Ainsi, on a $HC=b|\sin(\widehat{BAC})|$. Or $\widehat{BAC}$ est un angle non orienté (et donc compris entre 0 et π radian), donc son sinus est positif et on a $HC=b\sin(\widehat{BAC})$.

Le même raisonnement appliqué au triangle BCH rectangle en H donne l'égalité $HC=a\sin(\widehat{ABC})$.

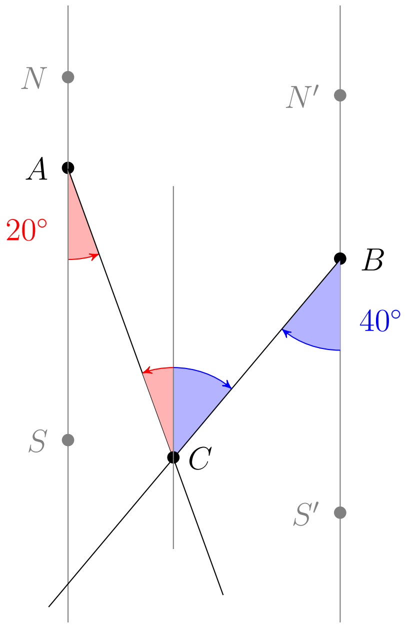
On déduit de ces deux égalités que
$$b\sin(\widehat{BAC})=a\sin(\widehat{ABC}),\quad\text{d'où}\quad\frac{a}{\sin(\widehat{BCA})}=\frac{b}{\sin(\widehat{ABC})}$$
puisque les sinus impliqués sont strictement positifs (aucun angle n'est plat).

En raisonnant de la même façon sur la hauteur issue de A, on obtient
$$\frac{b}{\sin(\widehat{ABC})}=\frac{c}{\sin(\widehat{ACB})},$$
d'où la double égalité attendue.

2. (a) Le randonneur peut tout d'abord tracer l'ensemble des points de la carte tels que le clocher du village A (qui correspond à un point de la carte que nous appelerons encore A) soit situé à un angle azimutal de $-20°$ par rapport à ces points : pour cela, il lui suffit de tracer la droite (NS), où N est un point au Nord de A et S un point au Sud de A, passant par le point A et dirigée du Nord au Sud, puis de considérer la droite formée par tous les points M tels que l'angle orienté $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AM})$ soit égal à $20°$ (on utilise ici la propriété des angles alternes internes, qui stipule que les deux angles indiqués en rouge sur la figure ci-dessous sont égaux).

   Le randonneur peut ensuite procéder de même pour tracer l'ensemble des points de la carte qui « voient » le clocher du village B (assimilé à un point B) sous un angle azimutal égal à $40°$.

   Il se situe donc au croisement des deux droites obtenues, en un point que l'on note C :

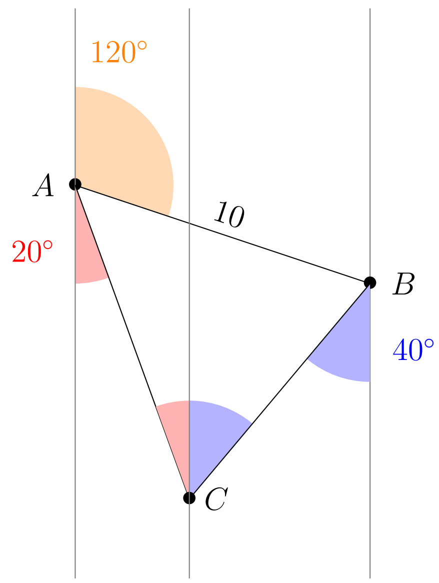


   Pour localiser sa position, le randonneur a uniquement eu besoin des angles azimutaux de A et B.

   (b) En utilisant les données sur la distance AB et l'angle azimutal du vecteur $\overrightarrow{AB}$, on peut compléter la figure comme sur la page suivante (où les trois droites en apparence verticales le sont bel et bien, et où les angles de même couleur ont la même mesure).

   Pour déterminer la distance AC que nous recherchons, il nous faut encore obtenir la mesure de l'angle $\widehat{ABC}$: en effet, d'après la règle des sinus démontrée dans la question 1 on a

$$\frac{10}{\sin(\widehat{ACB})} = \frac{AC}{\sin(\widehat{ABC})} \quad \text{donc} \quad AC = 10 \cdot \frac{\sin(\widehat{ABC})}{\sin(\widehat{ACB})}.$$



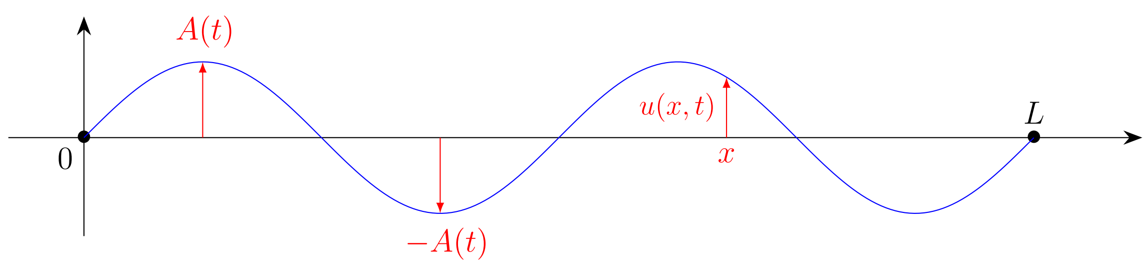
Or l'angle $\widehat{BAC}$ est de mesure 40° puisqu'un angle plat est de mesure 180° ; comme l'angle $\widehat{ACB}$ est de mesure $20 + 40 = 60°$ et comme la somme des mesures des angles d'un triangle vaut 180°, la mesure de $\widehat{ABC}$ est donc égale à $180 - 60 - 40 = 80°$.

On trouve donc

$$AC = 10 \cdot \frac{\sin(80°)}{\sin(60°)} \approx 11,372 \text{ km}.$$

Correction de l'exercice 21.

1. Avant toute chose, il est important de se représenter le problème . Le profil de la corde à un instant t fixé est le suivant :



L'évolution de ce profil au fil du temps est représentée ici.

(a) Le fait que la corde soit fixée à ses extrémités impose que l'on ait les relations $u(0,t) = u(L,t) = 0$ à chaque instant t, c'est-à-dire que $A(t)\sin(\alpha) = A(t)\sin(\alpha + \beta L) = 0$ pour tout $t \geqslant 0$. En supposant que la fonction A n'est pas la fonction nulle (ce qui réduirait l'intérêt de l'exercice), cette condition équivaut au fait que $\sin(\alpha) = \sin(\alpha + \beta L) = 0$. Comme $\alpha \in [0, \pi[$, la première équation signifie que $\alpha = 0$, et la deuxième donne alors $\beta L \equiv 0\,[\pi]$, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\beta L = n\pi$, soit $\beta = \frac{n\pi}{L}$.

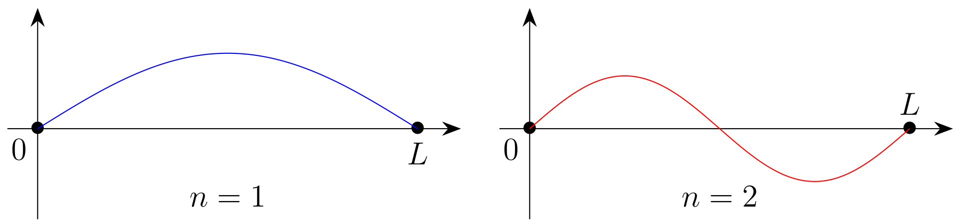
(b) Le nombre de vibrations de la corde par unité de temps est le nombre d'oscillations de la fonction A en une unité de temps. Or la fonction périodique A parcourt une période complète lorsque l'argument nbt présent dans le cosinus parcourt un intervalle de longueur 2π, ce qui a lieu toutes les $\frac{2\pi}{nb}$ unités de temps ; dit autrement, A effectue une oscillation complète $\frac{nb}{2\pi}$ fois par unité de temps. La fréquence de vibration de la corde est donc égale à $\frac{nb}{2\pi}$.

(c) i. Lorsque L est divisé par 2, le paramètre b est multiplié par 2. D'après la question précédente, cela revient à multiplier par 2 la fréquence de vibration de la corde (ce qui est conforme à l'intuition : une corde de guitare bloquée en son milieu par un doigt produit un son plus aigu [2] que si elle n'était pas bloquée).

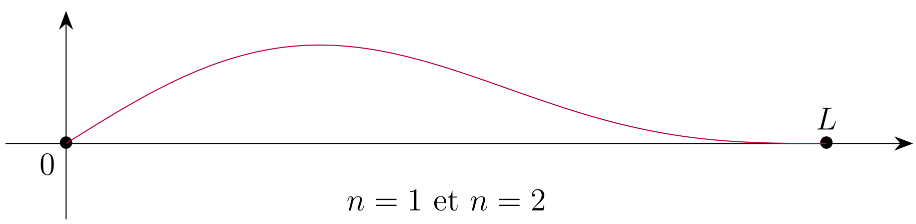
ii. Lorsque T augmente, b augmente, et c'est aussi le cas de la fréquence de la note émise d'après le résultat de la question précédente. Toutefois, l'augmentation n'est pas proportionnelle : il faut multiplier T par 4 pour doubler la fréquence du son produit, et par 16 pour la quadrupler [3].

iii. Lorsque la corde est remplacée par une corde plus fine de même longueur, sa masse μ diminue, ce qui augmente b et donc la fréquence de la note obtenue [4].

2. (a) Fixons un instant t donné. On fait intervenir l'harmonique 1 avec une amplitude $A\cos(bt)$ et l'harmonique 2 avec une amplitude $\frac{1}{2}A\cos(2bt)$, où A est un réel strictement positif. En $t = 0$, le profil associé aux deux harmoniques est représenté ci-dessous :



En additionnant les deux fonctions représentées ci-dessus, on obtient le profil suivant pour $t = 0$ (que l'on esquisse en plaçant quelques points) :

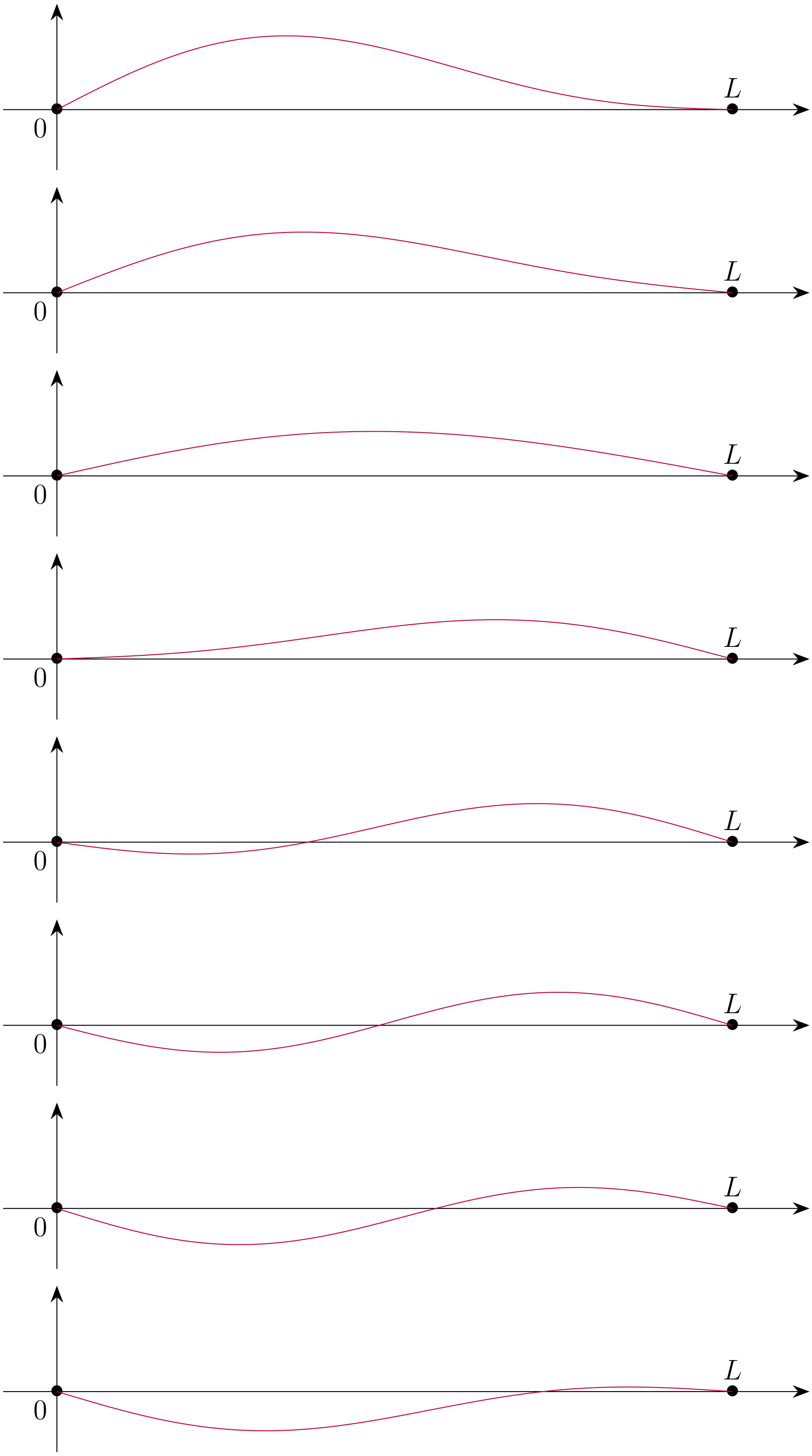


2. Plus précisément, elle produit un son de fréquence deux fois supérieure, c'est-à-dire une octave plus haut.

3. Ne faites pas ça chez vous, les cordes n'ont pas une solidité infinie !

4. Cela est une fois encore conforme à l'observation : quel que soit l'instrument à cordes concerné, les cordes utilisées pour jouer les plus graves sont plus épaisses que celles utilisées pour jouer les cordes les plus aiguës.

On représente ce profil pour plusieurs valeurs de t successives :



On s'aperçoit du fait que cette onde, contrairement aux ondes stationnaires correspondant aux harmoniques, « se déplace le long de la corde » (elle est dite *progressive*).

(b) Un instrument à cordes qui joue une note de hauteur donnée, par exemple un *la* à 440Hz, n'émet pas une onde sonore unique vibrant à 440Hz, mais un *ensemble* d'ondes sonores parmi lesquelles figurent l'harmonique fondamentale ($n = 1$) à 440Hz, la deuxième harmonique (associée au mode $n = 2$) à $2 \cdot 440 = 880$Hz qui correspond au *la* à l'octave supérieure, la troisième harmonique (associée au mode $n = 3$) à $3 \cdot 440 = 1320$Hz qui correspond au *mi* supérieur, et ainsi de suite[5]. La composition exacte du *paquet d'ondes* ainsi produit (et en particulier l'amplitude à laquelle interviennent les différentes harmoniques) dépend des caractéristiques physiques de l'instrument et lui donnent une sonorité reconnaissable à l'oreille appelée *timbre*.

Correction de l'exercice 22.

1. Il s'agit d'une redite de l'exercice 16. On peut[6] utiliser les formules donnant le sinus et le cosinus d'une somme pour développer $\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$:

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) &= 2\sin\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)\\
&= 2\left[\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{b}{2}\right)+\cos\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{b}{2}\right)\right]\\
&\qquad\times\left[\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(-\frac{b}{2}\right)-\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(-\frac{b}{2}\right)\right]\\
&= 2\left[\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{b}{2}\right)+\cos\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{b}{2}\right)\right]\\
&\qquad\times\left[\cos\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{b}{2}\right)+\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin\left(\frac{b}{2}\right)\right]\\
&= 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right)\underbrace{\left[\sin^2\left(\frac{b}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{b}{2}\right)\right]}_{\substack{=1\text{ d'après l'égalité fondamentale}\\ \text{de la trigonométrie}}}\\
&\qquad+2\sin\left(\frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{b}{2}\right)\underbrace{\left[\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)\right]}_{=1}\\
&= 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a}{2}\right)+2\sin\left(\frac{b}{2}\right)\cos\left(\frac{b}{2}\right)\\
&= \sin\left(2\times\frac{a}{2}\right)+\sin\left(2\times\frac{b}{2}\right)\\
&= \sin(a)+\sin(b).
\end{aligned}$$

5. On pourra en apprendre davantage sur les rapports de fréquences entre les notes de la gamme en lisant l'article de Wikipédia sur la gamme pythagoricienne.

6. Ce n'est pas la seule méthode : on verra dans le chapitre suivant une technique pour trouver rapidement le résultat à l'aide des nombres complexes.

2. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} s_1(t) + s_2(t) &= 2\sin\left(\frac{2\pi\nu t + \varphi_1 + 2\pi\nu t + \varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi\nu t + \varphi_1 - 2\pi\nu t - \varphi_2}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(2\pi\nu t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

d'après la question précédente. Comme $\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)$ est constant, en posant $A := 2\left|\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|$ on peut écrire

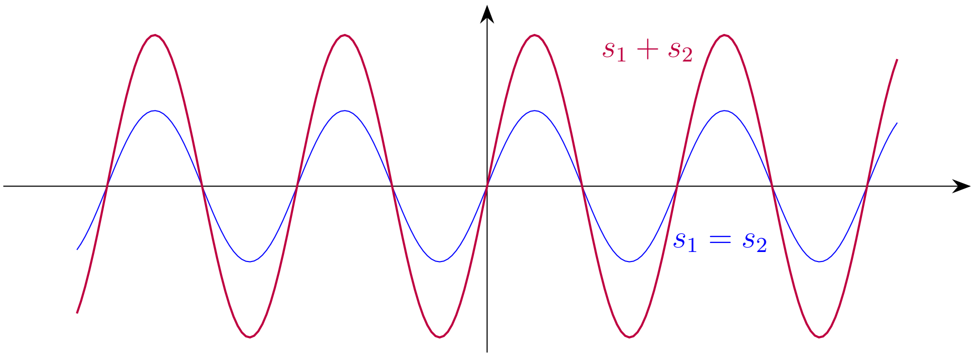
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (s_1 + s_2)(t) = A\sin\left(2\pi f t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \varepsilon\right)$$

où $\varepsilon = 0$ si $\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) \geqslant 0$ et où $\varepsilon = \pi$ si $\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) < 0$ (cette précision ayant pour unique but d'obtenir un facteur A positif dans l'expression de $s_1 + s_2$). Ainsi, $s_1 + s_2$ est un signal sonore d'amplitude A, de phase à l'origine $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} + \varepsilon$ et de fréquence f (ce qui est conforme à l'intuition : superposer deux « *la* 440 » donne un nouveau « *la* 440 »).

(b) L'amplitude $A = 2\left|\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|$ du signal $s_1 + s_2$ est au plus égale à 2 puisque la fonction cos est bornée par 1. Elle est égale à 2 si et seulement si

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \equiv 0\,[\pi],$$

donc si et seulement si les phases à l'origine φ_1 et φ_2 sont égales modulo 2π, c'est-à-dire si les signaux s_1 et s_2 sont identiques.

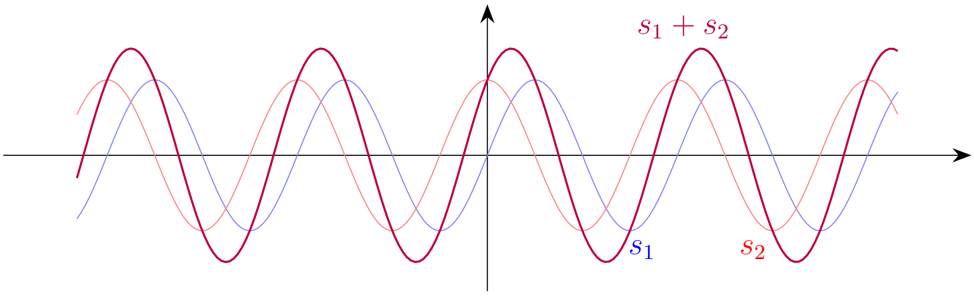


Phases à l'origine identiques : $\varphi_1 = \varphi_2$

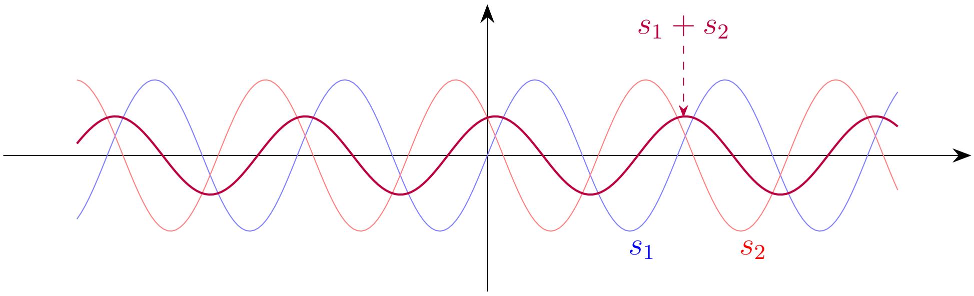
(c) On dit que les signaux s_1 et s_2 sont en *opposition de phase* lorsque $\varphi_1 - \varphi_2 \equiv \pi\,[2\pi]$. Dans ce cas, l'amplitude A du son résultat de la superposition des deux signaux est nulle puisque $\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) = 0$.

Un casque anti-bruit applique ce principe : il capte les signaux sonores ambiants et en diffuse pour l'utilisateur une copie en opposition de phase, ce qui crée un signal superposé d'amplitude nulle[7].

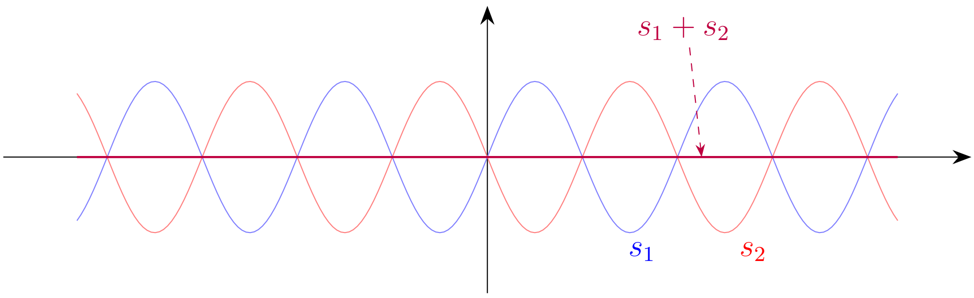
7. La chose est assez contre-intuitive pour que l'on s'y attarde : en superposant au son reçu un son en opposition de phase – qui serait perçu exactement de la même façon par l'oreille humaine – il est bien possible d'*annuler* le signal superposé, c'est-à-dire de « créer du silence ». Ce phénomène d'*interférences* se retrouve dans l'étude des ondes lumineuses, où il explique par exemple la présence de zones noires au croisement de deux faisceaux lumineux de même fréquence émis par des sources distantes l'une de l'autre (*expérience de Young*).



Phases à l'origine décalées : $\varphi_1 - \varphi_2 \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.



Phases à l'origine plus fortement décalées : $\varphi_1 - \varphi_2 \equiv \frac{5\pi}{6}\,[2\pi]$.



Opposition de phase : $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$.

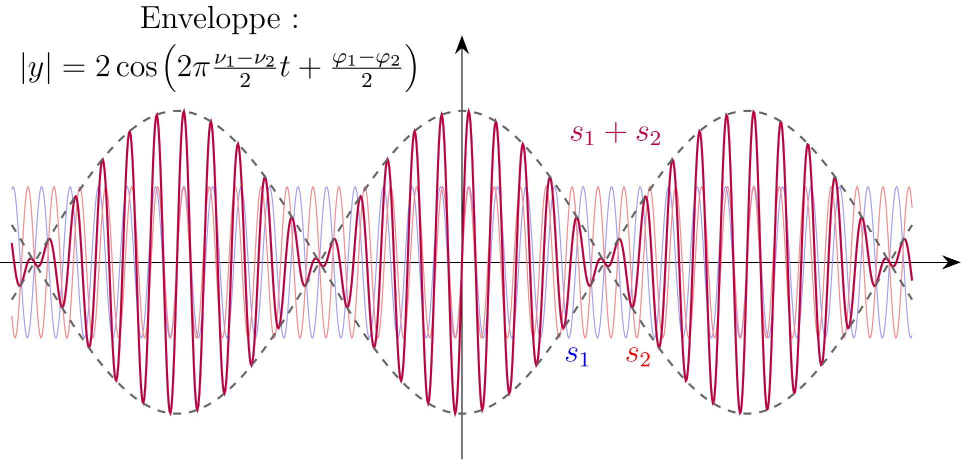
3. (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} s_1(t) + s_2(t) &= 2\sin\left(\frac{2\pi\nu_1 t + \varphi_1 + 2\pi\nu_2 t + \varphi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi\nu_1 t + \varphi_1 - 2\pi\nu_2 t - \varphi_2}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(2\pi\frac{\nu_1+\nu_2}{2}t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)\cos\left(2\pi\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

d'après la question 1.

(b) En examinant l'expression obtenue dans la question précédente, on voit que le signal s_1+s_2 s'écrit comme le produit du signal $t \mapsto \sin\left(2\pi\frac{\nu_1+\nu_2}{2}t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right)$ de fréquence $\frac{\nu_1+\nu_2}{2}$ et du signal $t \mapsto 2\cos\left(2\pi\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)$ de fréquence $\left|\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\right|$. Comme on a supposé $\nu_1 \approx \nu_2$, le deuxième signal possède une fréquence faible par rapport à celle du premier : ses oscillations sont donc plus lentes.

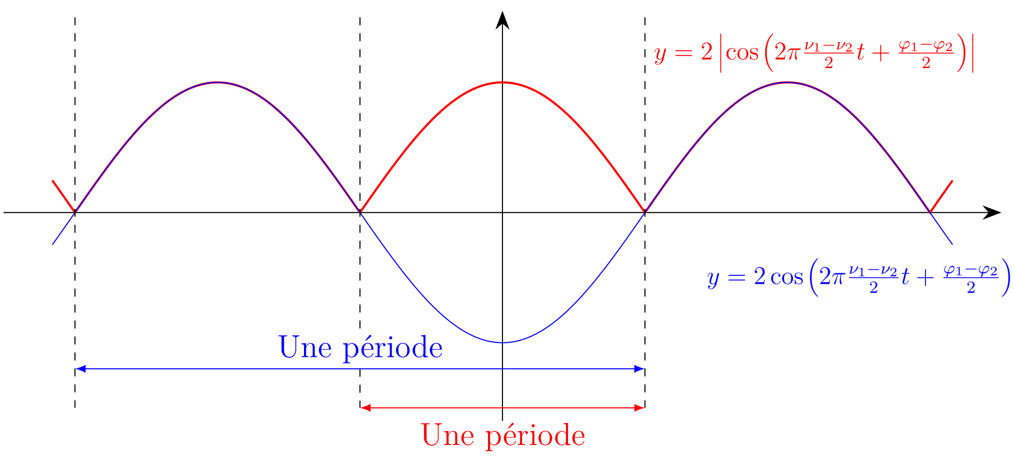
La courbe de $s_1 + s_2$ ainsi obtenue oscille donc rapidement (avec une fréquence $\frac{\nu_1+\nu_2}{2}$) dans un domaine délimité par une courbe enveloppe oscillant plus lentement (avec une fréquence $\frac{\nu_1-\nu_2}{2}$) :



Superposition de deux signaux avec $\nu_1 \approx \nu_2$.
La courbe enveloppe est tracée en pointillés noirs.

(c) D'après la question précédente, le signal superposé est perçu comme un signal sonore de fréquence égale à la fréquence moyenne $\frac{\nu_1+\nu_2}{2}$ des deux signaux, mais dont l'amplitude perçue, égale à $2\left|\cos\left(2\pi\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|$, varie avec le temps (à une échelle macroscopique, c'est-à-dire que ces variations sont clairement audibles par l'oreille humaine) : ces variations sont appelées *battements*.

Le signal sinusoïdal $t \mapsto 2\cos\left(2\pi\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)$ est de fréquence $\left|\frac{\nu_1-\nu_2}{2}\right|$ (et donc de période $\left|\frac{2}{\nu_1-\nu_2}\right|$), mais sa valeur absolue $t \mapsto 2\left|\cos\left(2\pi\frac{\nu_1-\nu_2}{2}t + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\right|$, qui est l'amplitude perçue des battements, possède une fréquence deux fois plus élevée (et donc une période deux fois plus petite), comme on le voit sur le graphique ci-dessous :



L'intervalle (en secondes) entre deux battements perceptibles à l'oreille est donc égal à $\left|\frac{1}{\nu_1-\nu_2}\right|$.

(d) La période des battements est ici égale à

$$\left|\frac{1}{440-440,5}\right| = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ secondes,}$$

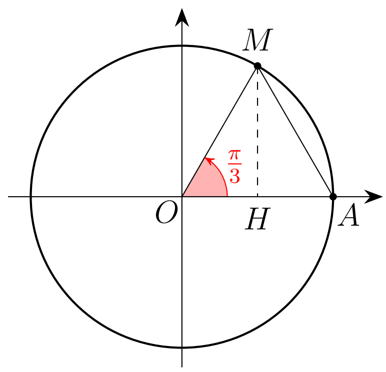
comme on s'en rend compte sur l'enregistrement disponible à cette adresse.

(e) Lorsque l'on cherche à accorder un piano, dans lequel la plupart des notes sont jouées en frappant un ensemble de deux ou trois cordes identiques avec un marteau, on peut accorder l'une des cordes à l'oreille ou à l'aide d'un accordeur électronique, puis jouer une autre corde parmi celles censées produire la même note et écouter les battements : ceux-ci sont de plus en plus espacés dans le temps à mesure que les fréquences des signaux émis par les cordes se rapprochent, jusqu'à ne plus être audibles quand les fréquences sont identiques [8].

Dans le cas d'un instrument à cordes frottées ou d'une guitare, on obtient un phénomène de battements en jouant simultanément deux notes différentes produisant des harmoniques communes (par exemple un *sol* et le *ré* situé à la quinte supérieure ; voir l'exercice précédent pour davantage d'informations sur les harmoniques) ; à nouveau, les battements s'espacent dans le temps jusqu'à devenir inaudibles à mesure que l'accord devient plus juste.

Correction de l'exercice 23.

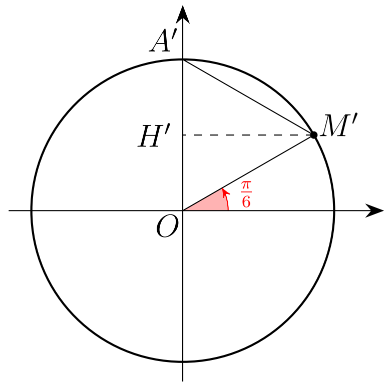
1. Le triangle OMA est isocèle car $OM = OA = 1$. Comme on a de plus $\widehat{OMA} = 60°$, le triangle est équilatéral.
2. Comme OMA est équilatéral, il est symétrique par rapport à la droite (MH), où H est le pied de la hauteur de OMA issue de M. Ainsi, on a $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = OH = HA$; mais on a aussi l'égalité $OH + HA = OA = 1$, donc $2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$, soit $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. Comme $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est positif (puisque M est au-dessus de l'axe des abscisses), la relation fondamentale de la trigonométrie donne



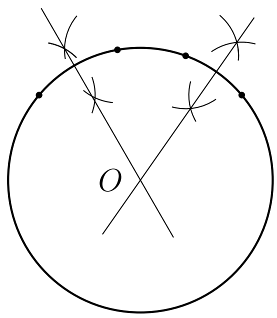
$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

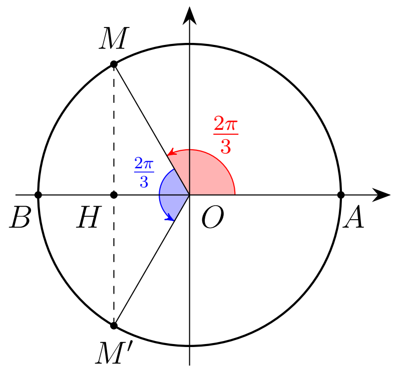
8. On entend bien sur l'enregistrement évoqué dans la question précédente que les battements d'autant plus fréquents que les fréquences ν_1 et ν_2 sont éloignées. Remarquons que c'est la présence de battements qui donne sa sonorité « métallique » à un piano désaccordé.

4. On raisonne de même à partir des points $M' := M\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $A' := M\left(\frac{\pi}{2}\right)$: le triangle $OM'A'$ est équilatéral, donc le pied H' de la hauteur issue de M' a pour ordonnée $\frac{1}{2}$, d'où $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.
La relation fondamentale de la trigonométrie permet alors de trouver $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



Correction de l'exercice 24. On localise tout d'abord le centre O du cercle. Pour ce faire, on choisit deux points sur le cercle et on construit la médiatrice du segment reliant ces deux points : cette construction s'opère en traçant pour chaque point deux arcs de cercle de même rayon, puis en reliant les deux points d'intersection des arcs ainsi obtenus (voir figure de gauche ci-dessous). On sait que le centre du cercle, qui est à équidistance des deux points choisis sur le cercle, est sur cette médiatrice. On réitère la construction avec deux autres points pour obtenir une seconde médiatrice, dont le point d'intersection avec la première est le point O.





Une fois le centre O localisé, on choisit un point A sur le cercle, puis on trace le rayon $[AO]$ que l'on prolonge en un diamètre $[AB]$ comme sur la figure de droite ci-dessus. On trace ensuite la médiatrice de $[OB]$ par la même méthode que précédemment : celle-ci coupe alors le cercle en deux points M et M' tels que l'angle orienté entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ soit égal à $\frac{2\pi}{3}$, et celui entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM'}$ à $-\frac{2\pi}{3}$. En traçant les segments $[OA]$, $[OM]$ et $[OM']$, on partage alors le disque en trois parts égales [9].

Remarque : *On a vu dans cet exercice comment obtenir un angle de* $\frac{2\pi}{3}$ *grâce à des constructions à la règle et au compas. Plus généralement, on peut montrer qu'il est possible d'obtenir un angle de* $\frac{2\pi}{n}$ *(et donc de diviser un disque en n parts égales ou, ce qui équivalent, de tracer un polygone régulier à n côtés inscrit dans un disque), si et seulement si tous les nombres premiers divisant l'entier n sont égaux à* 2 *ou de la forme* $2^{2^k}+1$, *avec* $k \in \mathbb{N}$ *: c'est le* théorème de Gauss-Wantzel. *Ainsi, il est possible de construire un pentagone régulier à la règle et au compas puisque* $5 = 2^{2^1}+1$ *(c'est d'ailleurs ce qui est fait dans l'exercice 12). On peut aussi construire un polygone*

9. Cet exercice permet de briller en société au moment de découper une tarte en trois parts égales : il suffit de placer le point H grossièrement et d'en déduire les points M et M' pour obtenir les trois rayons le long desquels couper la tarte.

régulier à $68 = 2^2 \cdot (2^{2^2} + 1)$ *côtés, mais pas un polygone régulier à* 13 *côtés puisque* 13 *est un nombre premier qui n'est ni* 2*, ni de la forme* $2^{2^k} + 1$.

La question à laquelle répond le théorème de Gauss-Wantzel est un cas particulier du problème plus général de constructibilité des nombres réels*, dont l'énoncé est le suivant : quelles sont les longueurs qu'il est possible de construire géométriquement à partir d'un cercle de rayon* 1 *et à l'aide d'une règle et d'un compas ? La solution à ce problème est apportée par le* théorème de Wantzel*, qui donne une condition algébrique pour qu'un nombre réel* x *soit constructible. Ce théorème admet pour autre corollaire important l'impossibilité de la* quadrature du cercle *: on ne peut pas construire à la règle et au compas un carré dont l'aire serait égale à celle d'un disque de rayon* 1 *(ce qui reviendrait à construire la longueur* $\sqrt{\pi}$*). Signalons au passage que la quadrature du cercle, problème de géométrie millénaire, est l'archétype du problème de mathématiques insoluble, c'est-à-dire dont on a démontré qu'il n'admet pas de solution – c'est d'ailleurs le sens de l'expression courante « chercher la quadrature du cercle », qui signifie « entreprendre de résoudre un problème impossible » !*

Correction de l'exercice 25. Assurons-nous tout d'abord de bien comprendre la relation à démontrer : pour $n = 2$, elle stipule par exemple que si $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}\sin(a + a_1 + a_2) + \sin(a - a_1 + a_2) + \sin(a + a_1 - a_2) + \sin(a - a_1 - a_2)&\\ = 4\sin(a)\cos(a_1)\cos(a_2).&\end{aligned}$$

Démontrons donc par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_n \ : \text{«}\ &\forall a, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R},\\ &\sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \sin\Big(a + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n\Big) = 2^n \sin(a) \prod_{k=1}^{n} \cos(a_k)\ \text{»}\end{aligned}$$

est vraie.

Initialisation :

Si $a, a_1 \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}\sin(a + a_1) + \sin(a - a_1) &= \sin(a)\cos(a_1) + \cancel{\cos(a)\sin(a_1)} + \sin(a)\cos(a_1) - \cancel{\cos(a)\sin(a_1)}\\ &= 2\sin(a)\cos(a_1),\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est. Pour ce faire, considérons des réels $a, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned}&\sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1})\in\{-1,1\}^{n+1}} \sin\Big(a + \varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n + \varepsilon_{n+1} a_{n+1}\Big)\\ &\quad= \sum_{(\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1})\in\{-1,1\}^{n+1}} \sin\Big(a + a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n + \varepsilon_{n+1} a_{n+1}\Big)\\ &\qquad+ \sum_{(\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1})\in\{-1,1\}^{n+1}} \sin\Big(a - a_1 + \varepsilon_2 a_2 + \cdots + \varepsilon_n a_n + \varepsilon_{n+1} a_{n+1}\Big)\end{aligned}$$

donc

$$\sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1})\in\{-1,1\}^{n+1}} \sin\Big(a+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n+\varepsilon_{n+1}a_{n+1}\Big)$$
$$= 2^n \sin(a+a_1)\prod_{k=2}^{n+1}\cos(a_k) + 2^n\sin(a-a_1)\prod_{k=2}^{n+1}\cos(a_k)$$

d'après l'hypothèse de récurrence appliquée aux réels $a+a_1$ et $a_2,\ldots,a_n,a_{n+1}$ d'une part, et aux réels $a-a_1$ et $a_2,\ldots,a_n,a_{n+1}$ d'autre part. On a donc

$$\sum_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n,\varepsilon_{n+1})\in\{-1,1\}^{n+1}} \sin\Big(a+\varepsilon_1 a_1+\varepsilon_2 a_2+\cdots+\varepsilon_n a_n+\varepsilon_{n+1}a_{n+1}\Big)$$
$$= 2^n\Big(\sin(a+a_1)+\sin(a-a_1)\Big)\prod_{k=2}^{n+1}\cos(a_k)$$
$$= 2^n\cdot 2\sin(a)\cos(a_1)\prod_{k=2}^{n+1}\cos(a_k) \quad \text{d'après } \mathcal{P}_1$$
$$= 2^{n+1}\sin(a)\prod_{k=1}^{n+1}\cos(a_k).$$

La proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est donc vraie.

Conclusion :

Ainsi, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout rang $n\in\mathbb{N}^*$ d'après le principe de récurrence.