Dérivation

Chapitre 10

On a formulé dans les chapitres précédents plusieurs résultats valables pour des fonctions monotones (par exemple le théorème de la limite monotone) ou strictement monotones (comme le théorème de la bijection). Toutefois, l'étude du sens de variation d'une fonction f sur un intervalle donné peut s'avérer délicate lorsque la fonction réalise des oscillations fréquentes ou lorsqu'il n'est pas possible de comparer par des calculs simples les quantités $f(x)$ et $f(y)$ pour $x < y$. Contrairement au cas des suites, il n'est pas suffisant pour connaître le sens de variation de f d'étudier le signe d'accroissements du type $f(x+1) - f(x)$ pour un certain nombre de valeurs de x. On peut en revanche s'intéresser à une information *locale* sur le « taux d'accroissement instantané » de f en un point x, que l'on appelle *nombre dérivé de f en x*, et dont il est possible de déduire des informations *globales* sur le comportement de f, et notamment son sens de variation sur un intervalle.

On présente dans ce chapitre les bases du calcul différentiel, c'est-à-dire de l'étude des variations locales des fonctions. Loin de n'avoir qu'un intérêt calculatoire, cette approche intervient de façon particulièrement féconde en sciences appliquées (biologie, physique, économie...), dans lesquelles elle permet de donner du sens à certains concepts. Elle ouvre aussi la voie au calcul intégral dont il sera question dans au chapitre **??**.

Dans ce chapitre :

- Notion de nombre dérivé : définition et interprétation.
- Tangente d'une courbe en un point.
- Dérivées classiques et calcul de dérivées.
- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalité des accroissements finis.
- Étude de fonctions grâce à la dérivation.

1 Introduction : le paradoxe de la variation instantanée

On utilise souvent, dans un cadre mathématique ou non, des considérations sur le rythme de croissance d'une quantité donnée : la vitesse d'un véhicule (qui est le rythme auquel augmente la distance qu'il parcourt), le taux de croissance du PIB, l'explosion d'une épidémie, l'effet de plus en plus faible d'un pain au chocolat supplémentaire sur la satisfaction d'un mangeur au petit déjeuner, le ralentissement de l'expansion de l'univers... Si certaines de ces grandeurs se définissent parfaitement en comparant des valeurs successives de la quantité mesurée (ainsi du taux de croissance annuel du PIB), d'autres font référence à des *variations instantanées* qui décrivent la propension d'une quantité qui évolue continûment à le faire de façon plus ou moins forte (c'est le cas de la vitesse instantanée d'une voiture). Or l'idée même de variation instantanée est paradoxale puisque la variation d'une quantité $f(x)$ dépendant de façon continue d'une variable x (qui peut être le temps) ne peut être observée que sur un intervalle de longueur non nulle : le principe même de la continuité impose justement qu'aucune variation ne peut avoir lieu de manière instantanée... Comment, dès lors, fonder rigoureusement l'idée de vitesse de croissance *en un instant donné* ?

Le propos de cette section est développé et magnifiquement illustré dans la vidéo suivante de la chaîne 3Blue1Brown *:*

De façon générale, on recommande sans réserve l'intégralité des vidéos de cette chaîne. La série de vidéos The Essence of Calculus *couvre le contenu du présent chapitre.*

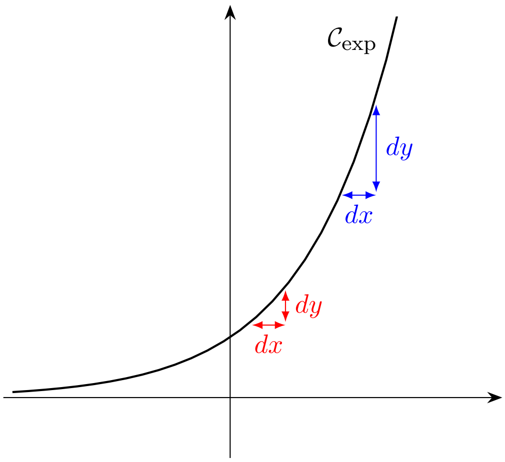
Pour ébaucher la solution de ce problème, on va chercher à donner un sens aux deux affirmations suivantes :

$$\text{« \textit{La fonction exponentielle croît de plus en plus vite.} »} \tag{A}$$

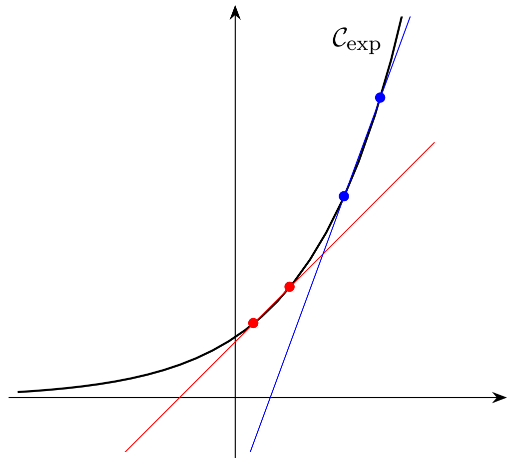
et

$$\text{« \textit{Ma vitesse lorsque j'ai été flashé était de} 50 \textit{km/h.} »} \tag{B}$$

Intéressons-nous tout d'abord à l'affirmation (A). Lorsque l'on parcourt le graphe de la fonction exponentielle de la gauche vers la droite, c'est-à-dire en suivant le sens des x croissants, on observe que l'ordonnée e^x des points de la courbe augmente (ce qui traduit la croissance de la fonction exp), et que cette augmentation est « de plus en plus rapide », au sens où une variation donnée de x correspond à une variation de plus en plus forte de e^x. On a représenté ce phénomène sur la première figure de la page suivante, en notant dx une petite variation de x et dy la variation des ordonnées qui y correspond.



La « réponse » de e^x à une variation de x est de plus en plus forte à mesure que x augmente.

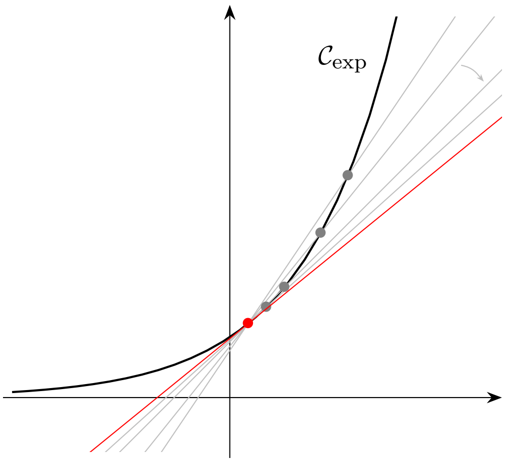


La pente de la sécante passant par les points (x, e^x) et $(x + dx, e^{x+dx})$ augmente avec x.

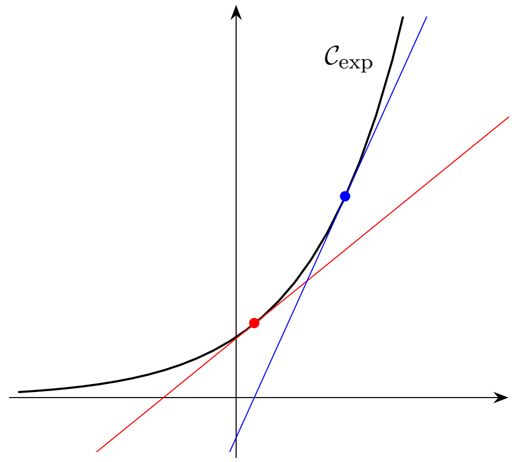
Ainsi, l'affirmation (A) signifie que la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ est caractérisée par « une pente de plus en plus raide ». Or la notion de « pente » d'une courbe n'est pas bien définie puisque l'on ne parle de *coefficient directeur* que pour une droite (voir rappels dans la section suivante) ; on peut donc formaliser l'affirmation (A) en disant que les *sécantes* reliant deux points de la courbe séparés d'une abscisse fixe dx ont un coefficient directeur de plus en plus fort à mesure que x augmente (voir la deuxième figure ci-dessus).

Cette propriété doit être vérifiée pour toutes les valeurs de dx ; or, lorsque dx tend vers 0, les sécantes passant par les points (x, e^x) et $(x + dx, e^{x+dx})$ semblent se rapprocher de la droite appelée *tangente à la courbe au point* (x, e^x), qui passe par (x, e^x) et « touche » la courbe au plus près au voisinage de ce point (voir la figure de gauche page suivante). En termes de tangentes, l'affirmation (A) se formalise donc en disant que la pente de la tangente à $\mathcal{C}_{\exp}$ au point d'abscisse x est d'autant plus forte que x est grand. Notons que le fait de considérer les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ plutôt que les sécantes construites à partir de cette courbe permet de ne pas avoir à faire référence à des couples de points et à de petites variations dx.

Le terme tangente *vient du latin* tangere *(« toucher »).*



Les sécantes se « rapprochent » de la tangente en (x, e^x) lorsque $dx \to 0$.



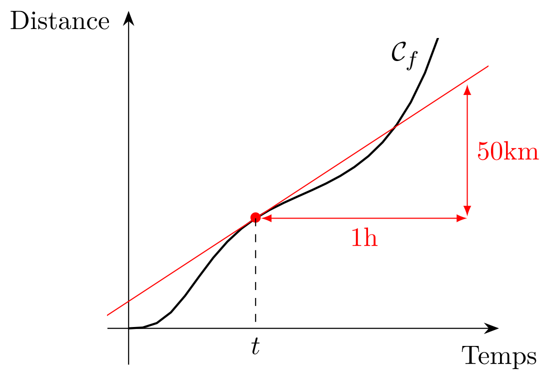
La pente de la tangente à la courbe au point (x, e^x) augmente à mesure que x augmente.

Cherchons à présent à donner un sens à l'affirmation (B). Le point délicat de cette proposition résulte dans l'idée selon laquelle la vitesse peut se calculer *à un moment donné* plutôt qu'entre deux instants distincts : il ne s'agit pas ici de dire que j'ai effectivement parcouru 50 kilomètres en une heure, mais que ma vitesse *au moment du contrôle* était de 50 km/h. Or il est raisonnable de penser que cette vitesse dite *instantanée* en un temps t est une approximation de la vitesse calculée entre t et un temps t' proche de t, approximation d'autant meilleure que $t' - t$ est faible. Si l'on note $f(t)$ la distance (en kilomètres) que j'ai parcourue au temps t (en heures), ma vitesse sur l'intervalle de temps $[t, t']$ est égale à $\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}$, donc ma vitesse instantanée $v(t)$ au temps t peut être définie comme

$$v(t) := \lim_{t' \to t} \frac{f(t') - f(t)}{t' - t}. \qquad (1)$$

La discussion ci-contre relève davantage de l'expérience de pensée mathématique que du véritable questionnement technique : en pratique, le relevé de la vitesse instantanée d'un véhicule par un radar consiste toujours en une approximation de cette vitesse sur un petit intervalle de temps.

Dire que ma vitesse instantanée au temps t est égale à 50 km/h signifie donc que la vitesse à laquelle je me déplace entre les instants t et t' se rapproche de 50 km/h à mesure que le laps de temps $t'-t$ pendant lequel elle est calculée tend vers 0. Or la vitesse $\frac{f(t')-f(t)}{t'-t}$ se trouve être le coefficient directeur de la sécante de la courbe $\mathcal{C}_f$ passant par les points $(t, f(t))$ et $(t', f(t'))$; d'après la discussion menée plus haut, la limite définie par la relation (1) est donc le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point t. Ainsi, l'affirmation (B) signifie que la courbe représentative de la distance parcourue $f(t)$ en fonction du temps t admet, au moment où j'ai été contrôlé, une tangente dont le coefficient directeur vaut 50 (voir figure ci-dessous).



On peut utiliser cette information pour calculer de façon approchée ma position en un temps proche de celui auquel j'ai été contrôlé : si t' est proche de t, ma vitesse étant voisine de 50 km/h sur l'intervalle entre t et t', on peut écrire que j'ai parcouru entre t et t' une distance proche de $50(t'-t)$, si bien que $f(t') \approx f(t) + 50(t'-t)$. Cette approximation traduit le fait que la courbe de f (d'équation $y = f(x)$) est proche de sa tangente (d'équation $y = f(t) + 50(x-t)$) au voisinage de t.

On retient de ces deux exemples plusieurs idées importantes :

- La vitesse instantanée d'évolution d'une quantité $f(x)$ en un point $x = a$ peut être évaluée de façon qualitative et quantitative grâce au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point a (lorsque celle-ci existe).
- Ce coefficient directeur peut être calculé : il s'agit de la limite des coefficients directeurs des sécantes passant par $(a, f(a))$ et un point de la courbe se rapprochant de $(a, f(a))$. C'est donc la quantité
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
si cette limite existe. On la note $f'(a)$ et on l'appelle *nombre dérivé de f en a*.
- Connaître ce coefficient directeur, et donc l'équation de la tangente $y = f(a) + f'(a)(x-a)$, permet d'effectuer une *approximation affine* de $f(x)$ lorsque $x \approx a$:
$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a).$$

La variable x peut ou non être une variable temporelle. C'est le cas dans l'exemple (B), mais pas nécessairement dans l'exemple (A). On pourrait ainsi parler plus justement de *sensibilité instantanée de $f(x)$ à x* que de *vitesse* proprement dite.

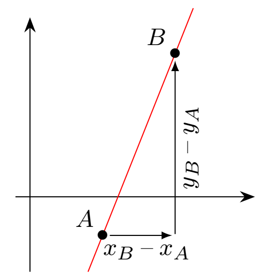
Ces trois idées (définition géométrique du nombre dérivé, formule calculatoire et approximation affine) sont au fondement du calcul différentiel dont nous posons les bases dans les sections suivantes.

2 Nombre dérivé

Donnons à présent un formalisme rigoureux aux notions évoquées dans la section précédente.

2.1 Coefficient directeur et taux d'accroissement

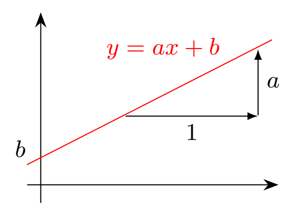
On rappelle tout d'abord une définition introduite au lycée :



Coefficient directeur : $\dfrac{\text{variation des ordonnées}}{\text{variation des abscisses}}$

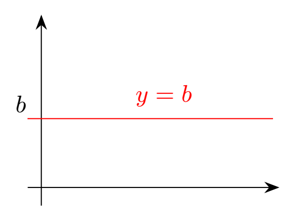
Définition-Proposition 1 (Coefficient directeur d'une droite)**.**
Si $\mathcal{D}$ est une droite non verticale du plan et si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points de $\mathcal{D}$ distincts l'un de l'autre, alors $x_A \neq x_B$ et on appelle *coefficient directeur de* $\mathcal{D}$, ou *pente de* $\mathcal{D}$, la quantité
$$a := \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$
Cette quantité est indépendante du choix de A et B, et la droite D admet une équation de la forme $y = ax + b$ pour un certain $b \in \mathbb{R}$ appelé *ordonnée à l'origine de* $\mathcal{D}$.

Démonstration de la proposition 1 — Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé. La droite $\mathcal{D}$ est la droite contenant A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire qu'un point $M = (x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, ce qui se réécrit de la façon suivante :
$$(x, y) \in \mathcal{D} \quad \Longleftrightarrow \quad (x - x_A, y - y_B) = \lambda(x_B - x_A, y_B - y_A).$$



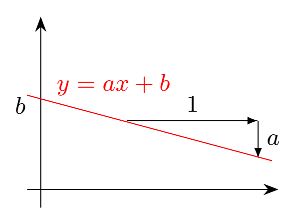
Cas $a > 0$

Comme $\mathcal{D}$ est une droite non verticale, A et B n'ont pas la même abscisse : on a donc $x_B - x_A \neq 0$ et on peut poser $a := \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. On a donc pour tout tout $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\Longleftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} \;:\; x - x_A = \lambda(x_B - x_A) \text{ et } y - y_A = \lambda(y_B - y_A) \\ &\Longleftrightarrow \exists\lambda \in \mathbb{R} \;:\; x - x_A = \lambda(x_B - x_A) \text{ et } y - y_A = a\lambda(x_B - x_A) \\ &\Longleftrightarrow y - y_A = a(x - x_A) \\ &\Longleftrightarrow \; y = ax + y_A - ax_A. \end{aligned}$$



Cas $a = 0$

La droite $\mathcal{D}$ admet donc pour équation $y = ax + b$ avec $b := y_A - ax_A$. Il reste à montrer que la quantité a est indépendante du choix de A et B. Choisissons pour cela deux points $A' = (x_{A'}, y_{A'})$ et $B' = (x_{B'}, y_{B'})$



Cas $a < 0$

de $\mathcal{D}$ distincts : on a alors $y_{A'} = ax_{A'} + b$ et $y_{B'} = ax_{B'} + b$, donc

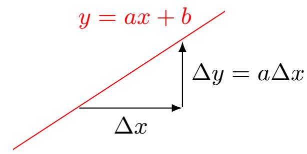
$$\frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} = \frac{a(x_{B'} - x_{A'})}{x_{B'} - x_{A'}} = a.$$

Ainsi, le coefficient directeur calculé à partir des points A' et B' est encore égal à a, ce qui clôt la preuve. □

Rappelons qu'une droite verticale possède une équation de la forme $x = c$, avec $c \in \mathbb{R}$. La notion de coefficient directeur n'est pas définie pour de telles droites.

Le coefficient directeur d'une droite est un réel représentant la raideur de sa pente. Il est positif lorsque la droite est le graphe d'une fonction affine croissante, négatif lorsqu'elle est le graphe d'une fonction affine décroissante, et nul lorsqu'elle est horizontale (voir les figures page précédente).

Il sera intéressant dans la suite d'interpréter le coefficient directeur a d'une droite comme la *sensibilité de y à une variation de x* le long de la droite : une variation Δx en abscisse est répercutée par une variation $\Delta y = a\Delta x$ en ordonnée (voir ci-contre). Notons que les variations considérées ici ne sont pas nécessairement petites, d'où l'utilisation de la notation Δx au lieu de dx.



On considère dans toute la suite une fonction f définie sur un intervalle ouvert I.

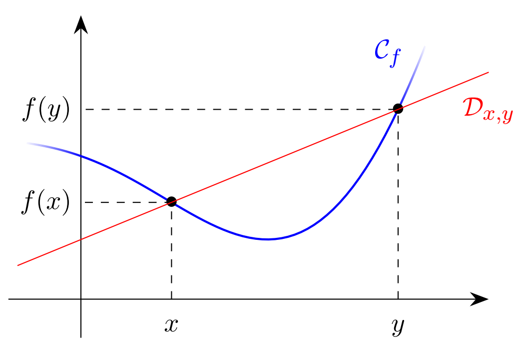
Définition 2 (Accroissement, taux d'accroissement)**.** Soient $x, y \in I$ tels que $x \neq y$.

On appelle *accroissement de f entre x et y* la quantité $f(y) - f(x)$.

On appelle *taux d'accroissement de f entre les points x et y* le rapport $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

Le taux d'accroissement de f entre x et y est le coefficient directeur de la sécante $\mathcal{D}_{x,y}$ passant par les points d'abscisses x et y de la courbe représentative de f, c'est-à-dire les points $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ (voir ci-contre).

Il représente la vitesse moyenne d'accroissement de f entre les points x et y.



2.2 Nombre dérivé d'une fonction en un point

On fixe à présent un point $a \in I$ et on rappelle que I est supposé ouvert, si bien qu'il s'agit d'un voisinage de a.

Cette remarque signifie que f est définie à gauche et à droite de a.

Définition 3 (Nombre dérivé d'une fonction en un point)**.** On dit que la fonction f est *dérivable en a* si le taux d'accroissement

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

de f entre a et $a+h$ admet une limite finie lorsque $h \to 0$ (avec $h \neq 0$) ou, ce qui revient au même, si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

de f entre a et x admet une limite finie lorsque $x \to a$ (et $x \neq a$). Dans ce cas, on note

$$f'(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

et on appelle cette limite le *nombre dérivé de f en a*.

Notons que lorsque f est continue en a, les taux d'accroissements considérés amènent nécessairement des formes indéterminées « $\frac{0}{0}$ » lors du passage à la limite. Tout l'enjeu est justement de les réécrire pour lever ces formes indéterminées.

En pratique, on ne rappelle jamais que $h \neq 0$ ou que $x \neq a$; cette condition est tacite.

Selon les cas considérés, il est plus ou moins intéressant d'utiliser la forme $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ou la forme $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ du taux d'accroissement lors du calcul d'un nombre dérivé — la première expression étant plus utile lorsque l'on dispose d'une relation permettant de reformuler $f(a+h)$, et la deuxième lorsque l'on peut aisément exprimer la différence $f(x)-f(a)$ en fonction de $x-a$.

Exemple. On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

donc la fonction sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$.

Exemple. Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = x + a \xrightarrow[x \to a]{} 2a,$$

donc la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Remarque — *En sciences appliquées (notamment en économie et en physique), il arrive que la quantité $f'(a)$ soit notée sous la forme*

$$f'(a) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a},$$

ce qui témoigne du fait que $f'(a)$ peut être interprété comme le rapport d'un accroissement infinitésimal $\mathrm{d}f$ de f en réponse à un accroissement infinitésimal $\mathrm{d}x$ de la variable x au voisinage de a. Cette notation, qui permet d'effectuer de nombreux calculs commodes mais peu rigoureux en traitant $\mathrm{d}f$ et $\mathrm{d}x$ comme des nombres réels à part entière, n'est pas très populaire en mathématiques. Nous en ferons cependant usage dans le chapitre sur l'intégration.

*Cette notation a été introduite par Leibniz (voir « Zoom » page **??**). Elle correspond à ce que Newton, à la même époque, nomme* fluxion *et définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».*

La définition 3 n'est pas toujours applicable puisque le taux d'accroissement de la fonction entre a et $a + h$ n'admet pas nécessairement de limite finie lorsque $h \to 0$. L'exemple canonique est le suivant :

Exemple 4 (Non-dérivabilité de la valeur absolue en 0)**.** La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0 : en effet, si $x < 0$ on a

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = -1$$

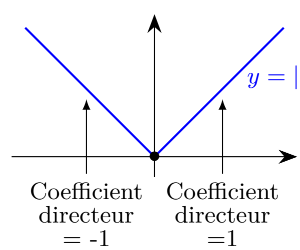
et si $x > 0$ on a

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = 1,$$

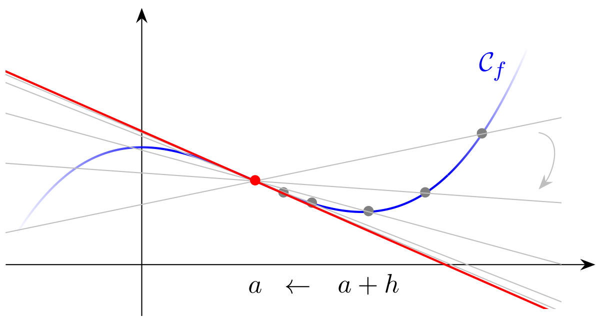
si bien que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0},$$

donc le taux d'accroissement $\frac{|x|-|0|}{x-0}$ n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$.



Intuitivement, le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, est le coefficient directeur limite de la droite sécante passant par les points $(a, f(a))$ et $(a+h, f(a+h))$, ce dernier se rapprochant de plus en plus du point $(a, f(a))$ le long de la courbe représentative de f à mesure que h tend vers 0.



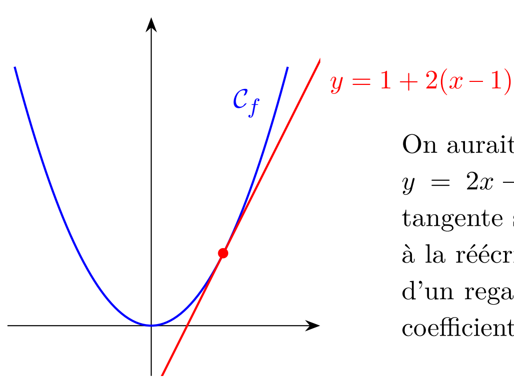
Il est alors naturel de définir la droite *tangente* à la courbe représentative de f comme la « droite limite » passant par le point $(a, f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$:

Définition 5 (Tangente à la courbe représentative de f en a)**.**
Si f est dérivable en a, on appelle *tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a* la droite d'équation

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

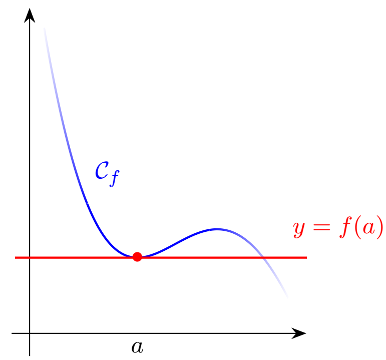
Notons que la tangente, que nous avons introduite de façon intuitive page 4 pour interpréter géométriquement le nombre dérivé, est ici *définie* à partir du nombre dérivé.

Exemple. La tangente à la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ au point d'abscisse 1 existe puisque f est dérivable en 1 (voir l'exemple page précédente). Il s'agit de la droite d'équation $y = f(1) + f'(1)(x-1)$, soit $y = 1 + 2(x-1)$.



On aurait pu réécrire l'équation de la tangente sous la forme $y = 2x - 1$. Cependant, on laisse souvent l'équation de la tangente sous sa forme $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ sans chercher à la réécrire sous la forme $y = \alpha x + \beta$: elle permet de saisir d'un regard l'ordonnée du point de tangence et la valeur du coefficient directeur de la tangente.

Exemple 6 (Un cas particulier)**.** La courbe représentative de la fonction f admet au point d'abscisse a une tangente horizontale (d'équation $y = f(a)$) si et seulement si f est dérivable en a et $f'(a) = 0$.



Lorsqu'elle existe, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite qui approche le mieux la courbe de f sur un voisinage de a. Elle fournit donc une *approximation affine locale* que l'on peut écrire sous la forme

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) \quad \text{lorsque} \quad x \approx a,$$

ou encore

$$f(x+h) \approx f(a) + hf'(a) \quad \text{lorsque} \quad h \approx 0.$$

On apprendra dans un chapitre ultérieur à exprimer rigoureusement de telles approximations.

L'intérêt pour la droite tangente à une courbe remonte au moins à Archimède (287–212 av. J.-C.), et on retrouve une notion d'approximation linéaire (notamment pour les fonctions sin *et* cos*) chez les mathématiciens de l'école indienne du Kerala au XIV*$^{\text{ème}}$ *siècle. C'est notamment pour résoudre le* problème de la tangente*, qui consiste à déterminer les tangentes à une courbe donnée, que le calcul différentiel a été développé au XVII*$^{\text{ème}}$ *siècle.*

Exemple 7 (Approximation de $\frac{1}{1+x}$ et taux d'intérêt réel)**.** Cherchons à établir la dérivabilité en 0 de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$. On a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{1}{1+x}-1}{x} = \frac{\frac{-x}{1+x}}{x} = -\frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 0]{} -1,$$

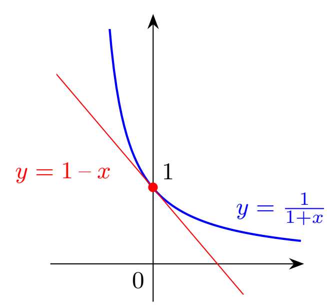
si bien que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -1$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est donc d'équation $y = 1-x$, et on peut écrire l'approximation

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x$$

lorsque x est assez proche de 0. Cette approximation permet de justifier le fait que si une quantité B est 2% supérieure à une quantité A, alors A est à peu près 2% inférieure à B : on a en effet

$$A = \frac{1}{1+0,02} \cdot B \approx (1-0,02)B$$

puisque $0,02 \approx 0$.



Elle permet aussi de donner une forme approchée très simple pour le *taux d'intérêt réel*. Introduite par l'économiste Irving Fisher dans son ouvrage *The Theory of Interest* en 1907, la notion de *taux d'intérêt réel* désigne le taux auquel croît le pouvoir d'achat correspondant à une somme placée et rémunérée par un taux d'intérêt nominal r donné dans une économie soumise à une inflation i donnée. La formule explicite pour ce taux d'intérêt réel est

$$\tau = \frac{1+r}{1+i} - 1,$$

ce qui donne, si i est proche de 0,

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{r-i}{1+i} \approx (r-i)(1-i) \\ &= r - i - i(r-i) \approx r - i,\end{aligned}$$

où la dernière approximation est justifiée par le fait que $i(r-i)$ est négligeable face à $r-i$ puisque $i \approx 0$.

Ainsi, si $r = 3\%$ et $i = 2\%$, on peut approcher par $3\% - 2\% = 1\%$ la valeur du taux d'intérêt réel, qui est en réalité de $0,98\%$ environ.

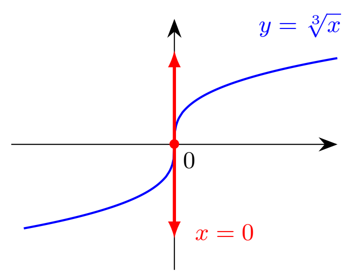
Lors d'une période temporelle, une somme placée est multipliée nominalement par $1+r$ et le niveau général des prix l'est par $1+i$, si bien que le pouvoir d'achat associé à la somme est multiplié par $\frac{1+r}{1+i}$. On en déduit la formule donnée.

Dans le cas où le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers a, la fonction f n'est pas dérivable en a mais on dit tout de même que sa courbe représentative admet une *tangente verticale* au point d'abscisse a, qui est la droite d'équation $x = a$.

Exemple. La fonction racine cubique $f : x \mapsto \sqrt[3]{x}$ vérifie

$$\frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}^2} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$$

donc sa courbe représentative admet une tangente verticale au point d'abscisse 0. On peut représenter cette tangente avec des flèches s'éloignant du point $(0,0)$ pour la distinguer de l'axe des ordonnées (voir ci-contre).



2.3 Nombre dérivé à gauche et à droite en un point

Comme la notion de continuité, on peut ne parler de dérivabilité qu'*à gauche* ou *à droite* d'un point :

Définition 8 (Nombres dérivés de f à gauche et à droite de a)**.**
Si f est définie à gauche (resp. à droite) de a, on dit que f est *dérivable à gauche (resp. à droite) en a* si le taux d'accroissement

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

de f entre a et $a+h$ admet une limite finie lorsque $h \to 0^-$ (resp. lorsque $h \to 0^+$) ou, ce qui revient au même, si le taux d'accroissement

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

de f entre a et x admet une limite finie lorsque $x \to a^-$ (resp. lorsque $x \to a^+$). Dans ce cas, on note

$$f_g'(a) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$\text{(resp.} \quad f_d'(a) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}),$$

et on appelle cette limite le *nombre dérivé à gauche (resp. à droite) de f en a.*

Il est clair que f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et vérifie $f_g'(a) = f_d'(a)$, auquel cas ce nombre est aussi égal à $f'(a)$. Comme dans le cours sur les limites, on signalera dans la suite du cours les résultats qui restent valables pour des dérivées à gauche et à droite, en laissant au lecteur le soin d'en adapter la démonstration.

Exemple. D'après l'exemple étudié page 9, la fonction valeur absolue est dérivable à gauche et à droite en 0 ; son nombre dérivé à gauche en 0 est égal à −1 et son nombre dérivé à droite en 0 vaut 1.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+2|x|}$ vérifie

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{1-2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2}{1-2x} = 2,$$

donc elle est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 2$.
Par ailleurs, f vérifie

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-2}{1-2x} = -2,$$

donc elle est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -2$.

On peut alors parler de *demi-tangente* à une courbe à gauche ou à droite du point d'abscisse a, que l'on définit intuitivement comme la droite épousant la courbe au voisinage à gauche (resp. à droite) de a :

Définition 9 (Demi-tangentes à la courbe représentative de f en a)**.**
Si f est dérivable à gauche en a, on appelle *demi-tangente à gauche* à la courbe représentative de f au point d'abscisse a la demi-droite définie par le système

$$\begin{cases} y = f(a) + f'_g(a)(x-a) \\ x \leqslant a \end{cases}$$

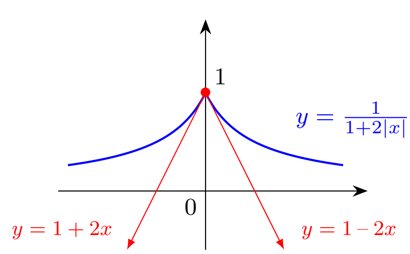
Si f est dérivable à droite en a, on appelle *demi-tangente à droite* à la courbe représentative de f au point d'abscisse a la demi-droite définie par le système

$$\begin{cases} y = f(a) + f'_d(a)(x-a) \\ x \geqslant a \end{cases}$$

On représente généralement les demi-tangentes avec des flèches s'éloignant du point en lequel elles sont considérées, comme ci-dessous.

Exemple. Ainsi, la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+2|x|}$ étudiée en haut de cette page admet pour demi-tangentes à gauche et à droite en 0 les demi-droites définies par

$$\begin{cases} y = 1+2x \\ x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{(à gauche)} \quad \text{et} \quad \begin{cases} y = 1-2x \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{(à droite).}$$

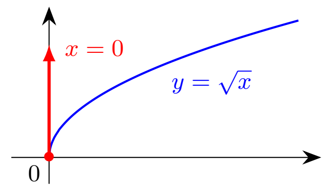


Dans le cas où le taux d'accroissement de f entre a et x tend vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers a^- (resp. a^+), on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une *demi-tangente verticale* à gauche (resp. à droite) en a.

Exemple. La fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ vérifie

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

donc sa courbe représentative admet une demi-tangente verticale à droite au point d'abscisse 0. C'est d'ailleurs l'un des détails qu'il est important de faire figurer sur la courbe de la fonction racine carrée !



2.4 Dérivabilité et continuité

Il existe un lien entre la dérivabilité d'une fonction et sa continuité :

Proposition 10. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Démonstration de la proposition 10 — Supposons f dérivable en a. Alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a),$$

or

$$f(x) = f(a) + \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

pour tout $x \in I$ tel que $x \neq a$, si bien que

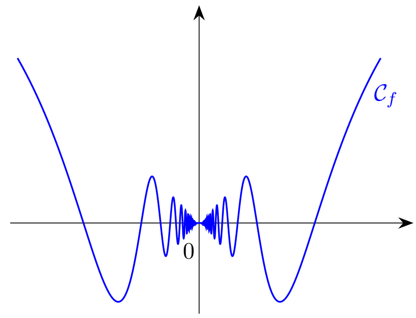
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) + f'(a)\cdot 0 = f(a),$$

d'où la continuité de f en a. $\square$

La fonction valeur absolue est le contre-exemple canonique d'une fonction continue mais non dérivable en 0 – contre-exemple qu'il est important de garder en tête pour ne pas commettre de confusion sur le sens de l'implication donnée par la proposition 10 ! La dérivabilité est donc une notion *plus forte que la continuité* : une fonction qui est dérivable en un point y est nécessairement continue, mais la réciproque n'est pas vraie.

Exemple. La fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$



est continue en 0 (c'est une conséquence du théorème des gendarmes, voir page **??**). En revanche, elle n'est pas dérivable en 0 puisque le taux d'accroissement

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

n'admet pas de limite lorsque $x \to 0$.

Les fluctuations de f excluent l'existence d'une tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

Graphiquement, le fait pour une fonction f d'être dérivable en a signifie :

- Que la courbe représentative de f ne possède pas d'« aspérité » en a (contrairement à la fonction valeur absolue en 0).
- Que f ne réalise pas de fluctuations trop rapides au voisinage de a (contrairement à la fonction étudiée dans l'exemple précédent).
- Que f ne croît ou ne décroît pas avec une vitesse infinie au voisinage de a (contrairement à la fonction racine cubique en 0).

En anglais, une fonction dérivable est aussi dite smooth, *c'est-à-dire « lisse ».*

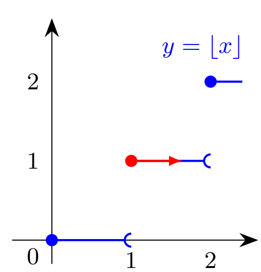
Le lien entre continuité et dérivabilité est aussi vérifié pour la dérivabilité à gauche ou à droite :

Proposition 11. Si f est dérivable à gauche (resp. à droite) en a, alors f est continue à gauche (resp. à droite) en a.

Exemple. La fonction partie entière admet un nombre dérivé à droite en 1 égal à 0 puisque

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{\lfloor x \rfloor - \lfloor 1 \rfloor}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} 0 = 0,$$

mais elle n'est pas dérivable à gauche en 1 puisqu'elle n'est pas continue à gauche en ce point.



3 Fonction dérivée

On rappelle une nouvelle fois que I est un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$.

Définition 12 (Fonction dérivée)**.** Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est *dérivable sur* I (ou tout simplement *dérivable* s'il n'y a pas d'ambiguïté), et on appelle *fonction dérivée* (ou simplement *dérivée*) de f la fonction

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

On étend cette définition au cas où I est une *réunion* d'intervalles ouverts. On l'adapte aussi à celui où I est un intervalle fermé, en remplaçant la condition de dérivabilité par la condition de dérivabilité à gauche ou à droite sur les bornes de l'intervalle.

Par exemple, une fonction définie sur $[0,1]$ est dite *dérivable sur* $[0,1]$ si et seulement si elle est dérivable à droite en 0, dérivable en tout point $x \in]0,1[$ et dérivable à gauche en 1.

Examinons une série d'exemples importants.

Exemple 13 (Dérivée d'une fonction affine)**.** Si $f : x \mapsto ax+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h} = \frac{ah}{h} = a \xrightarrow[h \to 0]{} a,$$

donc f est dérivable en x et $f'(x) = a$. Ainsi, la dérivée de f est constante et égale à a.

C'est graphiquement raisonnable : la droite représentative de f étant dans ce cas sa propre tangente en tout point, son coefficient directeur a est la dérivée de f sur $\mathbb{R}$ tout entier.

En particulier, la dérivée d'une fonction constante est nulle (c'est le cas $a = 0$).

Exemple 14 (Dérivée de la fonction carré)**.** Si $f : x \mapsto x^2$ est la fonction carré, on a vu page 9 que pour tout $a \in \mathbb{R}$ on a $f'(a) = 2a$, si bien que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $f' : x \mapsto 2x$.

Cet exemple peut être généralisé :

Exemple 15 (Dérivée d'une fonction puissance)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Cherchons à déterminer la dérivée de la fonction puissance $f : x \mapsto x^n$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \neq a$, on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^n - a^n}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-k-1}$$

d'après la formule de Bernoulli, or chacun des n termes de la somme tend vers $a^k a^{n-k-1} = a^{n-1}$ lorsque $x \to a$, d'où

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-k-1} \xrightarrow[x\to a]{} na^{n-1}.$$

Ainsi, f est dérivable en a et $f'(a) = na^{n-1}$. On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa dérivée est donnée par $f' : x \mapsto nx^{n-1}$.

On pouvait alternativement s'intéresser au taux d'accroissement

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^n - a^n}{h}$$

en développant le numérateur grâce à la formule du binôme, puis faire tendre h vers 0 pour – évidemment – trouver le même résultat.

Exemple 16 (Dérivée de la fonction racine carrée)**.** La fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ vérifie pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{a})^2} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{2\sqrt{a}},$$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (et non sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'on a vu dans la section précédente qu'elle n'était pas dérivable en 0), et sa dérivée sur cet intervalle est donnée par $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Cette conclusion est conforme avec le fait que la fonction racine carrée croît « constamment, mais de moins en moins vite ».

Exemple 17 (Dérivée de la fonction sin)**.** Si $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} \\
&= \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= \sin(x)\frac{\cos(h)^2-1}{(\cos(h)+1)h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\sin(x)\frac{\sin^2(h)}{(\cos(h)+1)h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\sin(x)\frac{\sin(h)}{\cos(h)+1}\frac{\sin(h)}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h} \\
&\xrightarrow[h\to 0]{} -\sin(x)\cdot\frac{0}{1+1}\cdot 1 + \cos(x)\cdot 1 = \cos(x),
\end{aligned}$$

donc sin est dérivable en x et $\sin'(x) = \cos(x)$. Ainsi, sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$. On peut montrer de même que cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\cos' = -\sin$.

Il est intéressant de prendre un instant pour considérer le graphe des fonctions cos et sin page **??** et constater que la vitesse de croissance de sin en un point $x \in \mathbb{R}$ est bien donnée par $\cos(x)$, et celle de cos par $-\sin(x)$.

On se livre dans ce calcul à quelques contorsions pour faire apparaître le terme $\frac{\sin(h)}{h}$ de limite connue. En particulier, le passage de la deuxième à la troisième ligne de calcul est rendu possible en faisant apparaître une quantité conjuguée qui permet ensuite d'utiliser la relation fondamentale de la trigonométrie.

Exemple 18 (Dérivée de la fonction inverse)**.** On considère la fonction inverse $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \frac{\frac{a-x}{ax}}{x - a} = -\frac{1}{ax} \xrightarrow[x \to a]{} -\frac{1}{a^2},$$

donc f est dérivable en $a \in \mathbb{R}^*$ et vérifie $f'(a) = -\frac{1}{a^2}$.
La fonction inverse est donc dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, et sa dérivée est donnée par $f' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Exemple 19 (Dérivée de la fonction exponentielle)**.** On admet la relation

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$$

On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\exp(x + h) - \exp(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \frac{e^h - 1}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} e^x,$$

donc exp est dérivable en x et $\exp'(x) = e^x$. Ainsi, exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Ce résultat est établi dans l'exercice **??** page **??** (chapitre sur l'exponentielle), ou dans l'exercice **??** page **??** (chapitre sur les séries). C'est pour assurer sa validité que l'on a imposé $\exp(1) = e$ en définissant la fonction exponentielle.

Remarque — *Le résultat que nous venons de présenter comme un simple exemple est en réalité d'une importance fondamentale. Le fait que la fonction exponentielle soit égale à sa propre dérivée explique l'omniprésence de cette fonction dans certains domaines des mathématiques modernes tels que la théorie des équations différentielles et des systèmes dynamiques.*

Il est à noter que la fonction exponentielle est parfois définie *par la propriété que nous venons d'établir, c'est-à-dire comme l'unique fonction égale à sa dérivée et prenant la valeur* 1 *en* 0 *; il y a d'ailleurs fort à parier que c'est la définition qui vous en a été donnée en classe de Terminale ! On montrera page 43 que* exp *est effectivement l'unique fonction vérifiant ces conditions.*

Une fois encore, il est intéressant de contempler le graphe de la fonction exponentielle page **??** *et de remarquer que la vitesse de croissance de cette fonction au point d'abscisse x est donnée par la valeur de la fonction elle-même, ce qui explique son régime de croissance explosif donné par le théorème des croissances comparées.*

On retrouve la fonction exponentielle dans des domaines aussi variés que les probabilités, l'analyse complexe, la théorie des groupes ou l'analyse de Fourier, dans lesquels on exploite à la fois ses propriétés différentielles et son caractère de morphisme *transformant les sommes en produits. Les théories associées, développées depuis le XIX*$^{\text{ème}}$ *siècle, tendent à faire oublier le rôle subalterne initialement tenu par l'exponentielle dans une pratique mathématique longtemps centrée sur la résolution d'équations algébriques, et donc, comme on l'a vu dans le chapitre* **??***, sur l'utilisation des logarithmes.*

4 Dérivée d'une combinaison de fonctions

Il est fréquent que l'on cherche à dériver des fonctions définies comme combinaison de fonctions usuelles, et revenir pour cela à la définition du nombre dérivé à partir du taux d'accroissement peut s'avérer très fastidieux. On peut heureusement contourner cette difficulté grâce à une série de résultats permettant d'exprimer la dérivée d'une combinaison de fonctions à l'aide des dérivées de celles-ci. Il est d'usage de présenter ces formules dans le cas de fonctions dérivables notées u et v (plutôt que f et g). On se donne donc pour toute la section deux fonctions u et v définies sur I.

Toutes les formules données dans cette section se transposent *mutatis mutandis* aux dérivées à gauche et à droite.

4.1 Dérivée d'une combinaison linéaire

Proposition 20 (Dérivée d'une combinaison linéaire de fonctions). Si u et v sont dérivables sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $u+v$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (u+\lambda v)'(x) = u'(x) + \lambda v'(x),$$

c'est-à-dire que $(u+\lambda v)' = u' + \lambda v'$.

Démonstration de la proposition 20 — Si u et v sont dérivables sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in I$ on a

$$\begin{aligned}\frac{(u+\lambda v)(x+h) - (u+\lambda v)(x)}{h} &= \frac{u(x+h) + \lambda v(x+h) - u(x) - \lambda v(x)}{h} \\ &= \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lambda \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} u'(x) + \lambda v'(x),\end{aligned}$$

donc la fonction $u + \lambda v$ est dérivable en x et son nombre dérivé en x vaut $u'(x) + v'(x)$, ce qu'il fallait démontrer. □

En particulier, en prenant $\lambda = 1$ on trouve que si u et v sont dérivables sur I, alors $u+v$ l'est et $(u+v)' = u' + v'$: *la dérivée d'une somme est la somme des dérivées*. En prenant $u = 0$, on trouve ensuite que si v est dérivable sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λv l'est et $(\lambda v)' = \lambda v'$: *on peut sortir une constante multiplicative d'une dérivée.*

La proposition 20 se résume en disant que *la dérivée transforme une combinaison linéaire en une combinaison linéaire*. Elle se généralise à des combinaisons linéaires de plus de deux fonctions :

On dira en deuxième année que la dérivation est une *application linéaire*.

Proposition 21 (Dérivée d'une combinaison linéaire générale)**.** Si $u_1, \dots, u_n$ sont n fonctions définies et dérivables sur I et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, alors la fonction $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right)'(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k'(x),$$

c'est-à-dire que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right)' = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k'.$$

La démonstration de cette propriété s'effectue par récurrence sur n à partir de la proposition 20. Elle est laissée au lecteur.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x^2 - 3\sin(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable en tant que combinaison linéaire des fonctions dérivables $x \mapsto x^2$ et sin, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 2x - 3\cos(x)$ par linéarité de la dérivation.

Exemple. La fonction polynomiale $f : x \mapsto x^5 - 3x^4 + 2x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables (les fonctions puissances $x \mapsto x^5$, $x \mapsto x^4$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto 1$), et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 2.$$

Sur une copie, on s'empêchera autant que possible d'utiliser des notations pratiques mais formellement incorrectes telles que

$$(x^2 - 3\sin(x))' = (x^2)' - 3(\sin(x))'.$$

On réservera ces notations peu rigoureuses au brouillon.

En effet, si la fonction $x \mapsto x^2$ peut se dériver, ce n'est pas le cas du réel x^2 ; écrire $(x^2)'$ n'a donc pas de sens.

4.2 Dérivée d'un produit

Proposition 22 (Dérivée d'un produit de fonctions)**.** Si u et v sont dérivables sur I, alors uv est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

c'est-à-dire que $(uv)' = u'v + uv'$.

Démonstration de la proposition 22 — Supposons u et v dérivables sur I et fixons $x \in I$. Pour tout $y \in I$ différent de x on a

$$\begin{aligned}\frac{(uv)(y)-(uv)(x)}{y-x} &= \frac{(u(y)-u(x))v(y)+u(x)(v(y)-v(x))}{y-x}\\ &= \frac{u(y)-u(x)}{y-x}v(y) + u(x)\frac{v(y)-v(x)}{y-x},\end{aligned}$$

or

$$\frac{u(y)-u(x)}{y-x} \xrightarrow[y\to x]{} u'(x) \quad \text{et} \quad \frac{v(y)-v(x)}{y-x} \xrightarrow[y\to x]{} v'(x)$$

car u et v sont dérivables en x, et

$$v(y) \xrightarrow[y\to x]{} v(x)$$

puisque v est continue (car dérivable) en x, si bien que

$$\frac{(uv)(y)-(uv)(x)}{y-x} \xrightarrow[y\to x]{} u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

! La dérivée du produit uv n'est donc **pas**, en général, égale au produit $u'v'$ des dérivées de u et de v.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto xe^x$ s'écrit sous la forme $f = uv$ avec $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto e^x$. Les deux fonctions u et v étant dérivables, f l'est aussi et on a

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\\ &= 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+1)e^x.\end{aligned}$$

En pratique, il n'est pas nécessaire de faire mention explicitement de fonctions u et v lorsque l'on calcule la dérivée d'un produit – mais si l'on tient à le faire, il est obligatoire de les *introduire* !

4.3 Dérivée d'un quotient

Proposition 23 (Dérivée de l'inverse d'une fonction)**.** Si v est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, alors la fonction $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \qquad \left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)},$$

c'est-à-dire que $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$.

Démonstration de la proposition 23 — Supposons que v est dérivable sur I et ne s'annule pas sur I, puis fixons $x \in I$. Pour tout $y \in I$ différent de x on a

$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(y) - \left(\frac{1}{v}\right)(x)}{y-x} = \frac{\frac{1}{v(y)} - \frac{1}{v(x)}}{y-x} = \frac{\frac{v(x)-v(y)}{v(x)v(y)}}{y-x} = \frac{1}{v(x)v(y)}\,\frac{v(x)-v(y)}{y-x},$$

or

$$\frac{1}{v(x)v(y)} \xrightarrow[y\to x]{} \frac{1}{v(x)^2}$$

puisque v est continue (car dérivable) en x, et

$$\frac{v(x)-v(y)}{y-x} = -\frac{v(y)-v(x)}{y-x} \xrightarrow[y\to x]{} -v'(x)$$

puisque v est dérivable en x. On a donc

$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(y) - \left(\frac{1}{v}\right)(x)}{y-x} \xrightarrow[y\to x]{} -\frac{v'(x)}{v^2(x)},$$

donc $\frac{1}{v}$ est dérivable en x et son nombre dérivé en x vaut

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)},$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction dérivable ne s'annulant pas, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}.$$

Exemple 24 (Dérivée d'une fonction puissance d'exposant négatif). Si $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ comme inverse d'une fonction dérivable ne s'annulant pas, et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f'(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

On retrouve notamment le fait que la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

En écrivant $f'(x) = -nx^{-n-1}$, on comprend qu'une puissance négative « se dérive comme une puissance positive », ce qui facilite grandement les calculs ! Par exemple, la dérivée de la fonction $x \mapsto x^{-3}$ est $x \mapsto -3x^{-4}$.

Proposition 25 (Dérivée d'un quotient de fonctions). Si u et v sont dérivables sur I et si v ne s'annule pas sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad \left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

c'est-à-dire que $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Démonstration de la proposition 25 — Supposons que u et v sont dérivables sur I et que v ne s'y annule pas. En écrivant $\frac{u}{v}$ sous la forme $u \cdot \frac{1}{v}$, c'est-à-dire comme produit de la fonction dérivable u et de la fonction $\frac{1}{v}$, elle aussi dérivable d'après la proposition 23, on obtient que $\frac{u}{v}$ est dérivable par la proposition 22. Cette dernière proposition donne par ailleurs

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u'\left(\frac{1}{v}\right) + u\left(\frac{1}{v}\right)',$$

soit, d'après la proposition 23 :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'}{v} - uv'\frac{1}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2},$$

ce qu'il fallait démontrer. □

! La dérivée du quotient $\frac{u}{v}$ n'est donc **pas** égale (en général) au quotient $\frac{u'}{v'}$ des dérivées de u et de v.

Le quotient $\frac{u'}{v'}$ n'a par ailleurs aucune raison d'être bien défini puisque v' peut s'annuler sur I.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Exemple 26 (Dérivée de tan)**.** La fonction $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est dérivable en tout point de son domaine de définition en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Sa dérivée est donnée par

$$\tan' = \frac{\sin' \cdot \cos - \sin \cdot \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

Notons que la fonction $\frac{\cos^2+\sin^2}{\cos^2}$ se réécrit aussi $1+\frac{\sin^2}{\cos^2} = 1+\tan^2$. On retient donc deux formes pour la dérivée de tan :

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

4.4 Dérivée d'une fonction composée

On considère à nouveau une fonction f définie sur I, et on se donne à présent une fonction g définie sur un intervalle ouvert $J \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans I, si bien que l'on peut considérer la composée $f \circ g$.

Proposition 27 (Dérivée d'une fonction composée)**.** Si f est dérivable sur I et si g est dérivable sur J, alors $f \circ g$ est dérivable sur J et on a

$$\forall x \in J, \quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x),$$

c'est-à-dire que $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

On donne trois preuves de ce résultat. Les deux premières donnent une idée de la raison pour laquelle la formule est vraie, mais seule la troisième est parfaitement rigoureuse en toute généralité.

Démonstration de la proposition 27 (démonstration heuristique) — Examinons tout d'abord une preuve essentiellement intuitive utilisant la notation de Leibniz introduite page 9.

Imaginons une perturbation $\mathrm{d}x$ de la variable x et étudions la variation $\mathrm{d}(f \circ g)$ de la quantité $f(g(x))$ en réponse à cette perturbation. Cette dernière variation « passe par une variation de g » : la perturbation $\mathrm{d}x$ de x est transformée en une perturbation $\mathrm{d}g = g'(x)\mathrm{d}x$ de la quantité $g(x)$, qui est elle-même transformée en une perturbation

$$\mathrm{d}(f \circ g) = f'(g(x))\mathrm{d}g = f'(g(x))g'(x)\mathrm{d}x$$

de la quantité $f(g(x))$. On a donc

$$\frac{\mathrm{d}(f \circ g)}{\mathrm{d}x} = f'(g(x))g'(x),$$

d'où l'égalité attendue. □

En référence à la « réaction en chaîne » mise en évidence par ce raisonnement, les mathématiciens anglo-saxons donnent le nom de chain rule *à la règle de dérivation des fonctions composées.*

En formalisant légèrement cette preuve pour éviter le recours aux accroissements infinitésimaux $\mathrm{d}x, \mathrm{d}g$ et $\mathrm{d}(f \circ g)$ auxquels nous n'avons pas donné de sens rigoureux, on obtient la démonstration suivante :

Démonstration de la proposition 27 (si g est injective) — Supposons g injective et fixons $x \in J$. Pour tout $y \in J$ tel que $y \neq x$, on peut écrire

$$\frac{f(g(y)) - f(g(x))}{y - x} = \frac{f(g(y)) - f(g(x))}{g(y) - g(x)} \cdot \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \tag{2}$$

puisque $g(y) - g(x) \neq 0$ (là intervient l'hypothèse sur l'injectivité de g !). Or f est dérivable en $g(x)$ et $g(y) \to g(x)$ lorsque $y \to x$ (car g est dérivable, et donc continue, en x), d'où

$$\frac{f(g(y)) - f(g(x))}{g(y) - g(x)} \xrightarrow[y \to x]{} f'(g(x)).$$

Mémoriser cette preuve et/ou la précédente n'est pas très difficile et permet de retrouver la formule donnant $(f \circ g)'$ sans risque d'erreur.

Par ailleurs,

$$\frac{g(y) - g(x)}{y - x} \xrightarrow[y \to x]{} g'(x)$$

puisque g est dérivable en x, donc

$$\frac{f(g(y)) - f(g(x))}{y - x} \xrightarrow[y \to x]{} f'(g(x))g'(x),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Pour rendre cette démonstration valable sans l'hypothèse d'injectivité sur g, on remplace le nombre $\frac{f(g(y))-f(g(x))}{g(y)-g(x)}$ par la dérivée $f'(g(x))$ (qui en est la limite lorsque $g(y) \to g(x)$) dans l'égalité (2). On obtient alors la preuve suivante, qui peut être sautée en première lecture.

Démonstration de la proposition 27 (démonstration rigoureuse) — Soit $x \in J$. On définit la fonction τ sur J par

$$\forall y \in J, \quad \tau(y) = \begin{cases} \dfrac{f(y) - f(g(x))}{y - g(x)} & \text{si } y \neq g(x) \\ f'(g(x)) & \text{sinon.} \end{cases}$$

La lettre τ (« tau ») est généralement utilisée pour représenter un taux (notamment, comme ici, un taux d'accroissement), mais aussi, parfois, un temps particulier (c'est-à-dire une valeur de la variable réelle t représentant le temps) auquel une condition donnée est réalisée.

La fonction τ est continue en tout point de $J \setminus \{a\}$. Par définition du nombre dérivé $f'(g(x))$, elle l'est aussi en x ; ainsi, τ est continue sur J. Pour tout $x \in I$, on vérifie alors que le taux d'accroissement

$$\frac{(f \circ g)(y) - (f \circ g)(x)}{y - x} = \frac{f(g(y)) - f(g(x))}{y - x}$$

se réécrit

$$\frac{f(g(y)) - f(g(x))}{y - x} = \tau(g(y))\frac{g(y) - g(x)}{y - x}. \tag{3}$$

En effet, cette équation est évidemment vraie si $g(y) \neq g(x)$ puisqu'alors elle se réécrit comme l'égalité (2) de la page précédente, et elle l'est aussi si $g(y) = g(x)$ puisqu'alors les deux termes qu'elle relie sont nuls.

Comme g est dérivable en a et comme g et τ sont continues, on a

$$\tau(g(y))\,\frac{g(y) - g(x)}{y - x} \xrightarrow[y \to x]{} \tau(g(x))g'(x),$$

donc (3) implique que $f \circ g$ est dérivable en x et que son nombre dérivé en x vaut $\tau(g(x))g'(x) = f'(g(x))g'(x)$, ce qu'il fallait démontrer. □

> **Exemple.** La fonction $h : x \mapsto \sin(3x)$ s'écrit sous la forme $f \circ g$ avec $f = \sin$ et $g = 3\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ (c'est-à-dire $g : x \mapsto 3x$). Elle est donc dérivable comme composée de fonctions dérivables, et sa dérivée est donnée par
>
> $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = f'(g(x))g'(x) = \cos(3x) \cdot 3 = 3\cos(3x).$$

On a vu au chapitre **??** que la courbe de h est obtenue en « lisant la courbe de sin trois fois plus vite », ce qui multiplie par 3 la vitesse de variation des sinusoïdes décrits par la fonction. La présence du facteur 3 devant le cos dans l'expression de $h'(x)$ n'est donc pas surprenante !

De manière générale, il est bon de retenir que si f est dérivable, la fonction $h : x \mapsto f(\alpha x)$ admet pour dérivée $h' : x \mapsto \alpha f'(\alpha x)$. En particulier, la fonction $x \mapsto f(-x)$ admet pour dérivée $x \mapsto -f'(-x)$.

Exemple. La fonction $h : x \mapsto e^{-x^2}$ s'écrit sous la forme $f \circ g$ avec $f = \exp$ et $g : x \mapsto -x^2$. Elle est donc dérivable comme composée de fonctions dérivables, et sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(g(x))g'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-x^2}.$$

Pour appliquer la règle de dérivation des fonctions composées à l'expression $f(g(x))$, il suffit de dériver tout d'abord f sans se poser de question, comme si $g(x)$ était une variable, pour obtenir le nombre $f'(g(x))$, puis de multiplier par la dérivée du terme intérieur $g(x)$. Réaliser cette opération mentale permet de ne pas avoir à expliciter les fonctions f et g ni à se référer à la formule explicite lors des calculs.

Exemple. La fonction $h : x \mapsto \sqrt{1+e^x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables (on note que $x \mapsto 1 + e^x$ est à valeurs dans $]1, +\infty]$, intervalle sur lequel la fonction racine carrée est dérivable). Pour calculer sa dérivée, on calcule mentalement ou au brouillon

$$h'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}}_{\substack{\text{dérivée de la fonction} \\ \text{racine carrée en} \\ 1+e^x}} \cdot \underbrace{(1+e^x)'}_{\substack{\text{dérivée du} \\ \text{terme intérieur}}} = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}},$$

Rappelons qu'il n'est pas question de faire figurer sur une copie l'expression « $(1+e^x)'$ » !

et on écrit directement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{1+e^x}}.$$

Exemple 28 (Dérivée d'une fonction puissance quelconque)**.**
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on sait que l'on peut définir la fonction puissance α-ième $f : x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par l'expression

$$\forall x > 0, \quad f(x) = x^\alpha := e^{\alpha \ln(x)}.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables, et on a :

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = e^{\alpha \ln(x)} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Ainsi, les fonctions puissances quelconques se dérivent en utilisant la même formule que les fonctions puissances entières !

Exemple. En utilisant la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ et la règle de dérivation des fonctions composées, on retrouve le résultat de la proposition 23 selon lequel si v est une fonction dérivable sur I et ne s'y annule pas, alors $\frac{1}{v}$ est dérivable et

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2} \cdot v' = -\frac{v'}{v^2}.$$

De même, si $n \geqslant 1$ et si v est dérivable sur I, alors v^n l'est et

$$(v^n)' = nv^{n-1} \cdot v'.$$

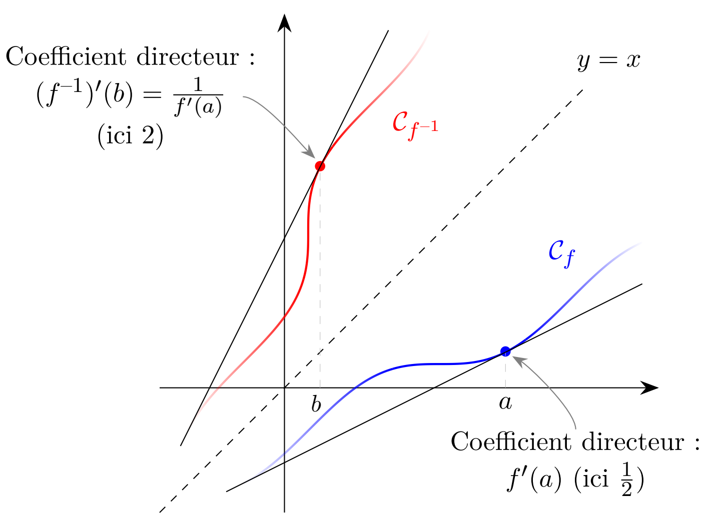
4.5 Dérivée d'une bijection réciproque

Proposition 29 (Dérivée d'une bijection réciproque)**.** Supposons f continue sur l'intervalle I et bijective de I sur son image $J := f(I)$. Si f est dérivable en un point $a \in I$, alors sa bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $b := f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$, et on a alors

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Rappelons que d'après le théorème de la bijection et l'exercice **??** page **??**, la bijectivité d'une fonction continue f sur l'intervalle I est équivalente au fait que f est strictement monotone sur I.

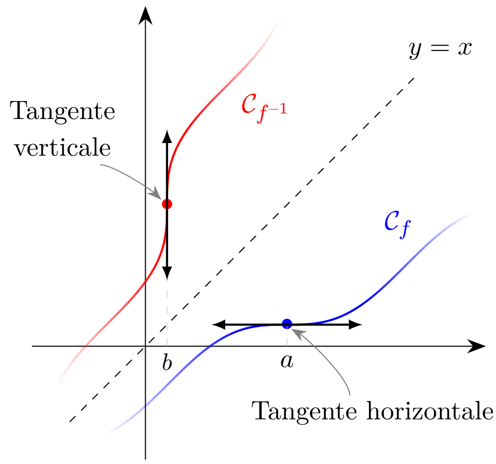
Cette formule traduit simplement le fait que la tangente à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ au point d'abscisse b est symétrique de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a : les coefficients directeurs des deux tangentes, égaux respectivement $(f^{-1})'(b)$ et $f'(a)$, sont donc inverses l'un de l'autre.



Cette relation se comprend bien en écrivant que le passage de $\mathcal{C}_f$ à $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ « échange les rôles de x et y », et qu'au point (a, b) on a donc

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}} = \frac{1}{f^{-1}(b)}.$$

On voit par ailleurs graphiquement que la condition $f'(a) = 0$ se traduit par l'existence d'une tangente verticale à la courbe de f^{-1} au point d'abscisse b, ce qui explique que f^{-1} ne soit pas dérivable en ce point.



Démonstration de la proposition 29 — Supposons que f soit dérivable en a et que $f'(a) \neq 0$, c'est-à-dire que $f'(f^{-1}(b)) \neq 0$. Comme f^{-1} est continue (d'après le théorème de la bijection), on a $f^{-1}(y) \xrightarrow[y \to b]{} f^{-1}(b) = a$, et donc

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}$$
$$= \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} \xrightarrow[y \to b]{} \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} = \frac{1}{f'(a)} \quad \text{puisque } f'(a) \neq 0.$$

Si $f'(a) = 0$, les mêmes manipulations montrent que

$$\left| \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} \right| = \left| \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(b))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}} \right| \xrightarrow[y \to b]{} +\infty.$$

et donc que f^{-1} n'est pas dérivable en b. □

Faire systématiquement référence à un point a et son image b n'est pas commode pour calculer la dérivée d'une fonction réciproque. On réécrit donc la proposition 29 sous la forme suivante :

Proposition 30 (Dérivée d'une bijection réciproque (deuxième version))**.** Supposons f continue sur l'intervalle I et bijective de I sur son image $J := f(I)$. Alors f^{-1} est dérivable en tout point $x \in J$ tel que f soit dérivable en $f^{-1}(x)$ et vérifie $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$, et on a alors

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

En particulier, si f est dérivable sur I tout entier et si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Un moyen mnémotechnique pour retrouver cette formule est d'écrire que $f(f^{-1}(x)) = x$ et de dériver cette relation pour obtenir

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot f^{-1}(x) = 1, \quad \text{d'où} \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Il s'agit bien d'une simple astuce mnémotechnique et non d'une démonstration rigoureuse de la proposition 30 puisque l'on suppose que f^{-1} est dérivable au moment d'appliquer la formule de dérivation d'une fonction composée !

On en déduit un certain nombre de dérivées usuelles :

Exemple 31 (Dérivée de la fonction $\ln$)**.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp'(x) = e^x > 0$. On en déduit que la fonction $\exp^{-1} = \ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{x}.$$

Exemple 32 (Dérivée de la fonction racine cubique)**.** La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f' : x \mapsto 3x^2$. Cette dérivée ne s'annule qu'en 0, si bien que la bijection réciproque de f, c'est-à-dire la fonction racine cubique $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, est dérivable en tout point $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt[3]{x} \neq 0$, c'est-à-dire en tout point de $\mathbb{R}^*$, et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}.$$

Le fait que la fonction racine cubique ne soit pas dérivable en 0 apparaît comme la conséquence géométrique logique du fait que la dérivée de la fonction cube s'annule en 0.

Ce résultat pouvait être retrouvé sur $\mathbb{R}_+^*$ en dérivant la fonction $f^{-1} : x \mapsto x^{\frac{1}{3}}$ grâce au résultat donné dans l'exemple 28 pour obtenir $(f^{-1}) : x \mapsto \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.

Exemple 33 (Dérivée de la fonction $\arctan$)**.** Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan'(x) = 1+\tan^2(x) > 0$. On en déduit que la fonction $\arctan$, dont on rappelle qu'il s'agit de la réciproque de la restriction de $\tan$ à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \big(\tan(\arctan(x))\big)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Jetez un coup d'œil au graphe de la fonction $\arctan$ page **??** pour vérifier que son régime de croissance est bien conforme à ce résultat !

Exemple 34 (Dérivée de la fonction arcsin)**.** Pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin'(x) = \cos(x) \neq 0$. On en déduit que la fonction arcsin, dont on rappelle qu'il s'agit de la réciproque de la restriction de sin à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, est dérivable sur $]-1,1[$ et vérifie

$$\begin{aligned}\forall x \in]-1,1[, \quad \arcsin'(x) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\arcsin(x))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

On a utilisé l'égalité $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-\sin(\arcsin(x))^2}$, que l'on obtient à partir de la relation

$$\cos(\arcsin(x))^2 + \sin(\arcsin(x))^2 = 1$$

en utilisant le fait que $\cos(\arcsin(x)) \geqslant 0$ qui résulte de la définition d'arcsin puisque $\arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On montre de même que la fonction $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ est dérivable sur $]-1,1[$ et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Une fois encore, contempler le graphe de la fonction arcsin page **??** et celui de la fonction arccos page **??** permet de vérifier que rien ne nous choque dans ces résultats.

4.6 Établir la dérivabilité d'une fonction

Les résultats de stabilité évoqués dans les sections ci-dessus permettent de répondre aisément à une question très fréquente dans les sujets de concours :

Méthode 35 (Justifier la dérivabilité d'une fonction)**.** Lorsque l'on cherche à montrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle, il est souvent suffisant, comme pour la continuité, de remarquer qu'elle s'écrit comme combinaison de fonctions dérivables (par addition, soustraction, produit, quotient, composition ou passage à la réciproque).

Lorsque la dérivabilité de la fonction en un point n'est pas claire, il convient de revenir à la définition de la dérivabilité par le taux d'accroissement. Si la fonction est définie de façon différente de part et d'autre du point, il faut vérifier qu'elle est dérivable à droite et à gauche en le point considéré et que les nombres dérivés correspondants coïncident.

Exemple. La fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+e^x}}{1+x^2}$$

est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. En effet, son numérateur $x \mapsto \sqrt{1+e^x}$ est une composée de fonctions dérivables (puisque $x \mapsto 1+e^x$ est à valeurs dans $[1,+\infty[$, intervalle sur lequel la fonction racine carrée est dérivable), et son dénominateur $x \mapsto 1+x^2$ est une fonction polynomiale strictement positive.

Exemple. Montrons que la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} \cos(x) & \text{si } x < 0 \\ e^x - x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.

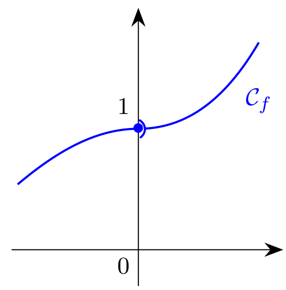
Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ comme fonction trigonométrique, et sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions dérivables. Il reste à établir sa dérivabilité en 0. On écrit pour cela

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\cos(x)-1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} \cos'(0) = 0$$

et

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{e^x-x-1}{x} = \frac{e^x-1}{x} - 1 \xrightarrow[x\to 0^+]{} \exp'(0) - 1 = 0,$$

donc f admet le même nombre dérivé à gauche et à droite en 0 (qui vaut 0). Elle est donc dérivable en 0, et $f'(0) = 0$. Ainsi, f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.



Le recollement en 0 des deux morceaux de courbe « se fait de façon dérivable ».

!

Lorsque f est définie de deux façons différentes de part et d'autre d'un point, il ne suffit pas de vérifier que « les deux morceaux sont dérivables » mais aussi que leur recollement n'induit pas d'angle de f dans la courbe. On étudie pour cela les nombres dérivés à gauche et à droite dudit recollement comme dans l'exemple précédent.

5 Tableaux récapitulatifs

Il est fondamental pour calculer aisément des dérivées de connaître par cœur les dérivées des fonctions usuelles. Nous les rappelons dans le tableau ci-dessous. Pour toute fonction f, on a noté $\mathcal{D}_f$ le domaine de définition de f et $\mathcal{D}_{f'}$ le *domaine de dérivabilité* de f, défini comme l'ensemble des points $x \in \mathcal{D}_f$ tels que f soit dérivable en x.

Le tableau contient certaines redondances correspondant à des fonctions particulièrement importantes, en l'occurrence la fonction inverse et la fonction racine carrée (qui sont des cas particuliers de fonctions puissances). On a aussi omis certaines fonctions intéressantes mais hors-programme *stricto sensu* comme arcsin et arccos.

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x)$
Constante $c \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-nx^{-n-1} = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^a = e^{a\ln(x)}$ $(a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	ax^{a-1}
$\exp(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\exp(x)$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

⚠ Ici $\mathcal{D}_f \neq \mathcal{D}_{f'}$!

On rappelle aussi l'expression des dérivées de combinaisons de fonctions dérivables u et v, valables dès lors que ces expressions ont un sens. Les trois dernières lignes sont des cas particuliers importants de la formule donnant la dérivée d'une fonction composée ; il est bon de les mémoriser dès maintenant car elles nous seront d'une grande utilité lorsque nous calculerons des intégrales.

Expression de $f(x)$	Expression de $f'(x)$
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$
$u(x)v(x)$	$u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$
$\dfrac{1}{v(x)}$	$-\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$
$u(v(x))$	$u'(v(x))\cdot v'(x)$
$e^{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$\ln(u(x))$ (avec $u>0$)	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$
$u^2(x)$	$2u(x)u'(x)$
$u^n(x)$ $(n\in\mathbb{N}^*)$	$nu^{n-1}(x)u'(x)$

6 Accroissements finis

Nous savons à présent calculer un grand nombre de dérivées. Il est temps de découvrir leur usage principal : l'étude du sens de variation des fonctions, et plus généralement de leurs accroissements. On présente dans cette section deux théorèmes aux conséquences profondes qui permettent de faire le lien entre le concept éminemment *local* de dérivée et le comportement *global* d'une fonction sur un intervalle.

Dans toute la suite, on fixe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$.

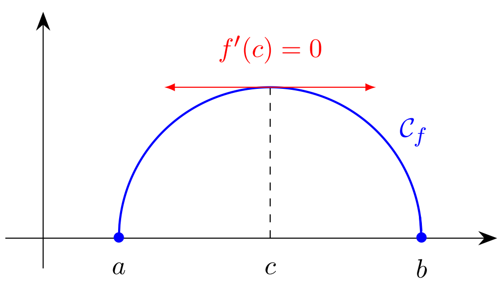
6.1 Le théorème de Rolle

Le premier théorème, peu impressionnant à première vue, constitue pourtant l'ingrédient principal d'un certain nombre de résultats puissants.

Théorème 36 (Théorème de Rolle)**.** Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

L'importance de ce théorème dans les cours de mathématiques sur la dérivation prête à sourire lorsque l'on sait que Michel Rolle (1652 – 1719) fut un farouche opposant du calcul infinitésimal, dont il tenta durant des années de démontrer l'incohérence logique. Rolle est aussi connu pour avoir popularisé la notation $\sqrt[n]{\cdot}$ pour les racines n-ièmes.

Ce théorème expose simplement le fait selon lequel la courbe d'une fonction dérivable vérifiant $f(a) = f(b)$ admet une tangente horizontale en au moins un point d'abscisse située strictement entre a et b. C'est très raisonnable : il est graphiquement clair qu'une telle courbe doit nécessairement « rebrousser chemin » entre a et b, et que le point auquel un tel changement de direction a lieu est bien un point où la dérivée de f s'annule. La figure suivante illustre à la fois le théorème de Rolle et ses hypothèses minimales :



En effet, la fonction représentée est continue sur $[a, b]$ et est dérivable sur $]a, b[$ (mais pas en a ni en b puisque sa courbe représentative admet des demi-tangentes verticales en ces points), et on a bien $f(a) = f(b)$.

!

Attention aux hypothèses !

Il n'est pas rare qu'un examinateur demande de rappeler les hypothèses du théorème de Rolle (ou du théorème des accroissements finis que nous présenterons dans quelques pages). Il importe donc de les connaître parfaitement, de les citer systématiquement à l'écrit comme à l'oral, et de savoir montrer qu'elles sont toutes nécessaires, c'est-à-dire de disposer de contre-exemples montrant que le théorème devient faux si on lève l'une ou l'autre desdites hypothèses.

Pour démontrer le théorème de Rolle, on a besoin d'un lemme présentant un fort intérêt intrinsèque :

Lemme 37 (Condition nécessaire à l'existence d'un extremum).
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Si $c \in]a,b[$ est tel que f admet un maximum ou un minimum en c, alors $f'(c)=0$.

Le point c est donc le *lieu* d'un extremum (c'est-à-dire d'un maximum ou d'un minimum) de f, et $f(c)$ est la *valeur* de cet extremum. Attention à ne pas confondre ces deux notions !

Insistons très lourdement sur le fait que le point c est supposé appartenir à l'intervalle **ouvert** $]a,b[$ (donc $c \neq a$ et $c \neq b$).

Démonstration du lemme 37 — Plaçons-nous dans les conditions de l'énoncé et supposons que f atteint un maximum en $c \in]a,b[$ (le cas d'un minimum est similaire).
Comme f est dérivable sur $]a,b[$, f est dérivable au point c. Or pour tout $x \in [a,b]$ on a $f(x) \leqslant f(c)$ puisque f atteint un maximum en c, donc

$$\forall x \in [a,c[\,, \quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0$$

et donc, par passage à la limite,

$$f'(c) = f'_g(c) = \lim_{\substack{x\to c \\ x<c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0.$$

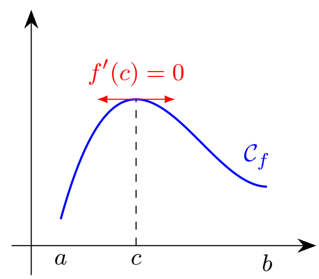
Mais on a aussi

$$\forall x \in]c,b], \quad \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$$

et donc, par passage à la limite,

$$f'(c) = f'_d(c) = \lim_{\substack{x\to c \\ x>c}} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0.$$

On en déduit que $f'(c)=0$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$



La preuve revient à dire que les taux d'accroissement « à gauche de c » sont positifs et que ceux « à droite de c » sont négatifs, et donc que $f'(c)$, qui est la limite commune de ces taux d'accroissement, est nécessairement nul.

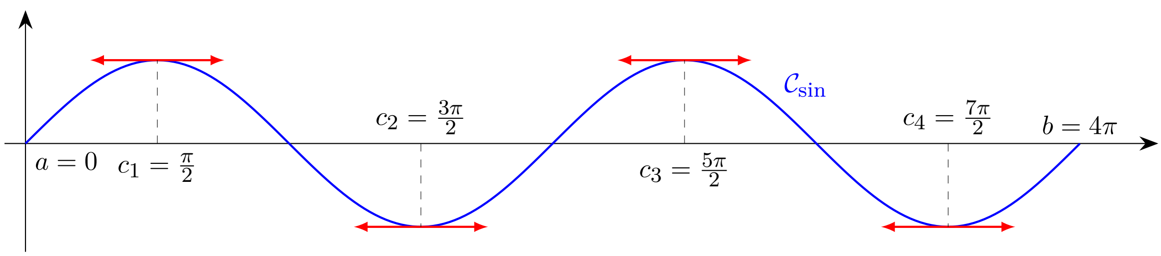
On peut maintenant établir le théorème de Rolle.

Démonstration du théorème 36 — Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème de Rolle. Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, elle y est bornée et elle atteint ses bornes d'après le théorème des bornes atteintes. Si son minimum et son maximum sur $[a,b]$ sont égaux, alors f est constante sur $[a,b]$ et sa dérivée sur $]a,b[$ est donc nulle, si bien que la conclusion du théorème est vraie. On suppose donc à présent que ces deux valeurs sont différentes, c'est-à-dire que $\min_{[a,b]} f < \max_{[a,b]} f$.

Comme $f(a) = f(b)$, le minimum ou le maximum de f sur $[a, b]$ ne peuvent tous deux être atteints en a ou b (sans quoi il seraient égaux). Ainsi, l'un d'entre eux est nécessairement atteint en un point intérieur $c \in]a, b[$. Or le lemme 37 indique que la dérivée de f en ce point est nulle, d'où le résultat du théorème de Rolle. □

Bien sûr, il est possible que le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$ soient tous les deux atteints en un point de $]a, b[$. Dans ce cas, le lemme 37 donne l'existence de deux points d'annulation de f'.

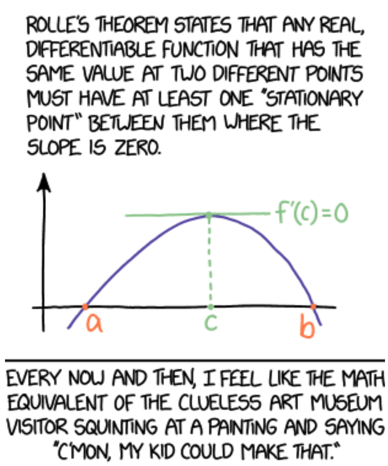
Remarque — *Comme le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème de Rolle est un théorème d'*existence *qui ne spécifie ni la valeur de c ni son unicité. On peut considérer la fonction* sin *sur* $[0, 4\pi]$ *pour se convaincre du fait que c n'est pas unique* a priori *:*



Exemple. La fonction f définie sur $[0, \pi]$ par

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{1 + x^2}$$

est continue sur $[0, \pi]$ en tant que quotient de fonctions continues et dérivable sur $]0, \pi[$ en tant que quotient de fonctions dérivables, et elle vérifie $f(0) = f(\pi) = 0$. Le théorème de Rolle implique donc qu'il existe $c \in]0, \pi[$ tel que $f'(c) = 0$.



« I mean, if it's that easy to get a theorem named for you... "A straight line that passes through the center of a [...] circle always divides the circle into two equal halves." *Can I have that one ? »* © xkcd.com

6.2 Le théorème des accroissements finis

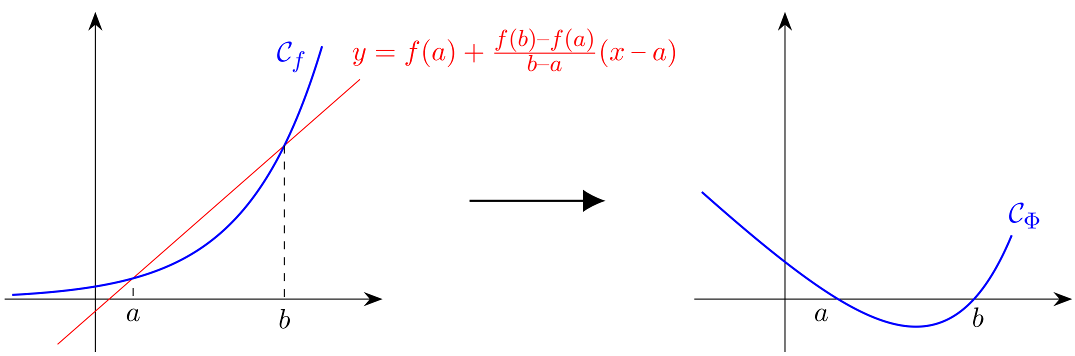
Le résultat que nous allons présenter maintenant résulte du théorème de Rolle et constitue le résultat le plus important de ce chapitre.

Théorème 38 (Théorème des accroissements finis)**.**
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

Démonstration du théorème 38 — Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème. L'idée pour le démontrer est d'appliquer le théorème de Rolle à une fonction Φ obtenue en « redressant la courbe de f » pour avoir $\Phi(a) = \Phi(b)$. Plus précisément, on définit Φ en considérant en chaque point la différence d'ordonnée entre $\mathcal{C}_f$ et sa sécante aux points d'abscisses a et b :

Le théorème de Rolle n'est pas directement applicable à f puisque rien ne garantit que $f(a)$ soit égal à $f(b)$.



On introduit donc la fonction Φ définie sur $[a,b]$ par

$$\forall x \in [a,b], \quad \Phi(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right).$$

Cette fonction est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ comme différence de fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ (la fonction f et une fonction affine). Par ailleurs, on vérifie que $\Phi(a) = \Phi(b)$: en effet, on a d'une part

$$\Phi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0$$

et d'autre part

$$\Phi(b) = f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b)-f(a)-(f(b)-f(a)) = 0.$$

Ainsi, la fonction Φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur $[a,b]$. Il existe donc $c \in]a,b[$ tel que $\Phi'(c) = 0$, c'est-à-dire tel que

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0, \quad \text{soit} \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

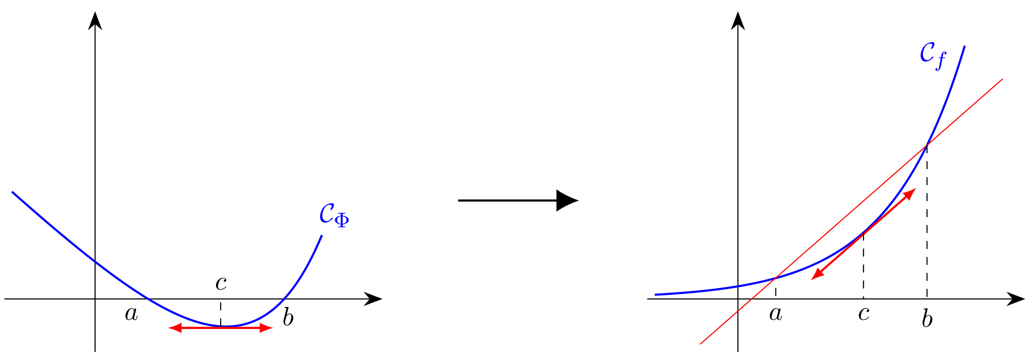
ce qu'il fallait démontrer. □

Assurez-vous que vous comprenez pourquoi

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

pour tout $x \in]a,b[$!

Le théorème des accroissements finis possède une interprétation graphique simple : il stipule qu'il existe un point $c \in]a,b[$ (le point vérifiant $\Phi'(c) = 0$ donné par le théorème de Rolle) en lequel la tangente à la courbe représentative de f est parallèle à la droite sécante qui relie les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.



Notons que le théorème des accroissements finis apparaît comme une généralisation du théorème de Rolle puisque si $f(a) = f(b)$, l'égalité

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \text{se réécrit} \quad f'(c) = 0.$$

Le théorème des accroissements finis indique que sous les hypothèses qui sont les siennes, « tout taux d'accroissement est un nombre dérivé ». Ce principe ouvre la voie à l'étude des accroissements et des variations de f à partir de la connaissance de f' ; nous détaillons cette étude dans les pages suivantes.

6.3 Dérivée et sens de variation

Le moment est venu de libérer le lecteur d'une tension insoutenable et de faire le lien tant attendu entre le sens de variation de f et le signe de sa dérivée.

On considère un intervalle ouvert non vide I et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

Théorème 39 (Dérivée et sens de variation)**.** Si f est dérivable sur I, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$) pour tout $x \in I$.

Démonstration du théorème 39 — Supposons f dérivable sur I. On traite le cas croissant – la preuve dans le cas décroissant est similaire.

Démontrons tout d'abord que si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ alors f est croissante. On suppose donc que f' est positive sur I, et on se donne $a, b \in I$ tels que $a < b$. Comme f est dérivable sur I, elle y est aussi continue, donc elle est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Le théorème des accroissements finis donne alors l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a),$$

or $f'(c) \geqslant 0$ et $b - a > 0$ donc $f(b) - f(a) \geqslant 0$, soit $f(b) \geqslant f(a)$. Comme a et b sont quelconques, f est croissante sur I.

Réciproquement, supposons f croissante. Pour tout $x \in I$, on a alors

$$f'(x) = f'_d(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

or pour tout $h > 0$ on a $f(x+h) - f(x) \geqslant 0$ par croissance de f, donc $f'(x)$ apparaît comme la limite d'un quotient de quantités positives et est donc positif. Ainsi, f' est positive sur I, ce qu'il fallait démontrer. □

Ce théorème, déjà connu (mais admis) au lycée, nous dote d'un outil extrêmement utile et puissant pour étudier le sens de variation d'une fonction.

Méthode 40 (Étudier le sens de variation d'une fonction par dérivation)**.** Pour étudier le sens de variation d'une fonction f dérivable sur un intervalle I, on calcule f'. Alors f est croissante sur tous les intervalles $J \subset I$ sur lesquels f' est positive, et décroissante sur tous les intervalles $J \subset I$ sur lesquels f' est négative.

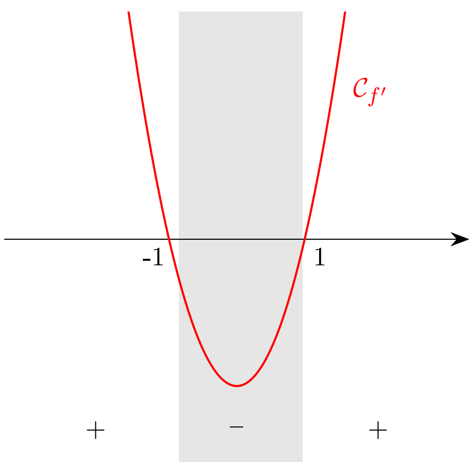
Exemple. Étudions les variations de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$ sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, et sa dérivée est donnée par $f' : x \mapsto 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$f'(x) \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 1 \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-1, 1].$$

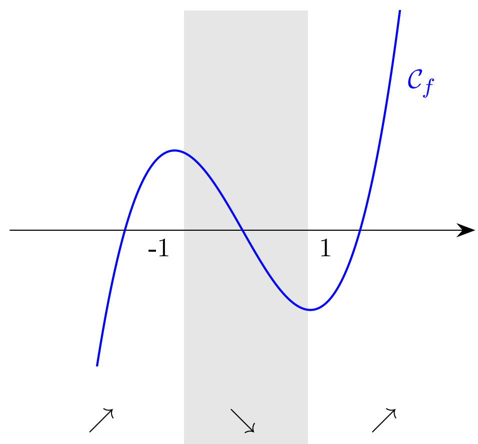
Notons que l'on s'intéresse au *signe* de $f'(x)$ et non aux solutions de l'équation $f'(x) = 0$!

Ainsi, le théorème 39 implique que la fonction f est croissante sur $]-\infty, -1[$, décroissante sur $]-1, 1[$ et croissante sur $]1, +\infty[$.

La figure suivante illustre cet exemple :



Graphe et signe de $f' : x \mapsto 3x^2 - 3$



Graphe et sens de variation de $f : x \mapsto x^3 - 3x$

Citons avant d'aller plus loin un corollaire direct du théorème 39 :

Proposition 41 (Fonctions de dérivée nulle)**.** Si f est dérivable sur I, alors f est constante sur I si et seulement si sa dérivée est nulle.

Démonstration de la proposition 41 — On sait déjà que la dérivée d'une fonction constante est nulle. Réciproquement, si f est dérivable sur I et de dérivée nulle, alors elle est à la fois croissante et décroissante sur I d'après le théorème 39, donc elle y est constante. $\square$

Cette équivalence est souvent utilisée dans son sens indirect : elle permet d'établir qu'une fonction est constante en montrant que sa dérivée est nulle.

Exemple 42 (Définition de l'exponentielle par une équation différentielle)**.** Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et telle que $f(0) = 1$. On veut montrer que $f = \exp$. Pour cela, on pose $g(x) = e^{-x} f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison de fonctions dérivables, et on a

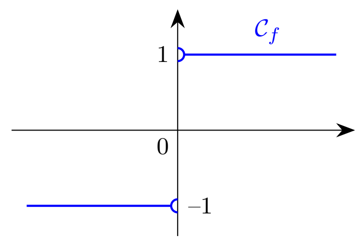
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f'(x) = -e^{-x} f(x) + e^{-x} f(x) = 0.$$

Ainsi g est constante d'après la proposition 41. Pour trouver sa valeur, on écrit que $g(0) = e^{-0} f(0) = 1$, ce qui donne pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $g(x) = 1$, soit $f(x) = e^x$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque — *Attention, l'hypothèse selon laquelle I est un* intervalle *est essentielle pour que la proposition 41 soit valide ! En effet, on vérifie sans difficulté que l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

est dérivable et de dérivée nulle en tout point de $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est évidemment pas constante.



Lorsque f' est à valeurs *strictement* positives (resp. strictement négatives) sur I, la démonstration du théorème 39 s'adapte pour montrer que f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I. Toutefois, la réciproque n'est pas vraie : il arrive, comme dans le cas de la fonction $x \mapsto x^3$, que f' s'annule de façon ponctuelle sans que l'existence de ces *points critiques* ne compromette le caractère strictement monotone de f. Plus précisément, on a le résultat suivant :

Théorème 43 (Dérivée et stricte monotonie)**.** Si f est dérivable sur I et si f' est strictement positive (resp. strictement négative) sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Démonstration du théorème 43 — La démonstration, dont le détail est laissé au lecteur, consiste à noter $x_1, \ldots, x_n \in I$ les points d'annulation de f' sur I ordonnés de façon croissante, puis à appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $I \cap]-\infty, x_1[$, sur

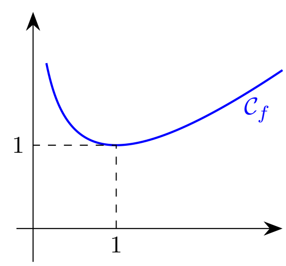
Cette démonstration montre que l'on peut aussi autoriser f à ne pas être dérivable en un les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ pour $i \in [\![1, n-1]\!]$ et sur l'intervalle $I \cap]x_n, +\infty[$ comme dans la démonstration du théorème 39 pour montrer que f est strictement croissante sur ces intervalles, et donc strictement croissante sur I dans son ensemble puisque f est continue. □

nombre fini de points de I tout en conservant la validité du résultat, pourvu que f soit continue sur I.

Exemple 44 (Une inégalité classique)**.** La fonction $f : x \mapsto x - \ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme différence de fonctions dérivables, et sa dérivée $f' : x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$ est strictement négative sur $]0, 1[$, nulle en 1 et strictement positive sur $]1, +\infty[$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $]0, 1[$ et strictement croissante sur $]1, +\infty[$. On synthétise ces informations dans le tableau de signes et de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$1 - \ln(1) = 1$	$\nearrow$	$+\infty$

Cette étude donne une idée de l'allure du graphe de f :



où l'on a fait figurer les limites $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la deuxième étant issue d'un résultat de croissance comparée. Les sens de variation indiqués dans le tableau sont à comprendre au sens strict.

On déduit de cette étude l'inégalité $f(x) \geqslant 1$, soit $x \geqslant \ln(x) + 1$, valable pour tout $x > 0$. Cette inégalité très classique se réécrit souvent sous la forme

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) \leqslant x - 1 \quad \text{ou} \quad \forall y > -1, \quad \ln(1 + y) \leqslant y.$$

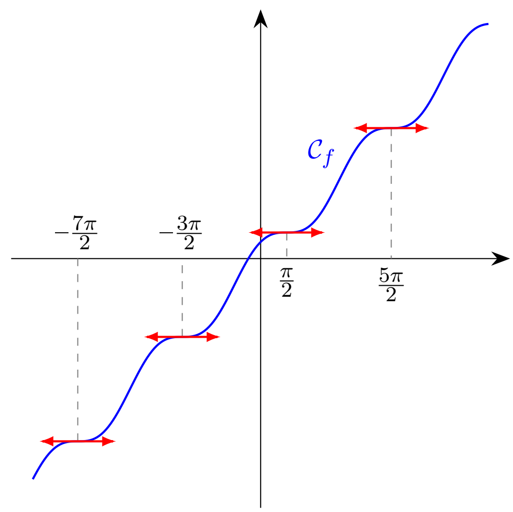
De nombreux sujets invitent à la redémontrer ; il convient dans ce cas d'introduire la fonction f et d'en mener l'étude comme ci-dessus.

Exemple. Nous avons établi avec une certaine quantité d'efforts page **??** la stricte monotonie de la fonction $f : x \mapsto x - \sqrt{1+x}$ sur $\mathbb{R}_+$. Nous pourrions désormais trivialiser ce résultat en remarquant que f est dérivable comme combinaison de fonctions dérivables (puisque $1+x$ appartient au domaine de dérivabilité de la fonction racine carrée pour tout $x \geqslant 0$), et que l'on a :

$$\forall x \geqslant 0, \quad f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \geqslant \frac{2\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}} > 0,$$

ce qui permet de conclure que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto x+\cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables, et sa dérivée $f' : x \mapsto 1-\sin(x)$ est strictement positive hors de l'ensemble $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$. On ne peut pas directement utiliser le théorème 43 puisque $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$ n'est pas fini, mais si I est un intervalle ouvert *borné* on voit que la restriction de f à I est une fonction dérivable de dérivée strictement positive, cette fois, hors d'un nombre *fini* de points, si bien que f est strictement croissante sur I d'après le théorème 43. Le choix de I étant arbitraire, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



En général, il ne sera pas nécessaire de faire référence à un intervalle ouvert I comme nous l'avons fait plus haut, et on pourra directement conclure à la stricte monotonie de f lorsque les points d'annulation de f' sont « isolés » comme ici.

Notons que les théorèmes 39 et 43 sont valables lorsque l'intervalle I n'est pas supposé ouvert, la dérivée de f sur les bornes de l'intervalle étant alors à comprendre au sens de la dérivée à droite ou à gauche selon les cas. Il est en revanche toujours important que I soit un intervalle : la fonction inverse a par exemple une dérivée strictement négative sur $\mathbb{R}^*$, mais elle n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

6.4 L'inégalité des accroissements finis

Une autre conséquence importante du théorème des accroissements finis est un résultat permettant de contrôler les accroissements de la fonction f sur un intervalle en bornant les valeurs prises par sa dérivée.

Théorème 45 (Inégalité des accroissements finis)**.** Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que la fonction dérivée f' est minorée par un réel m et majorée par un réel M sur $]a,b[$. Alors

$$m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a).$$

Démonstration du théorème 45 — Sous les hypothèses du théorème, il existe d'après le théorème des accroissements finis un $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a).$$

Or on a $m \leqslant f'(c) \leqslant M$, donc, comme $b-a>0$,

$$m(b-a) \leqslant f'(c)(b-a) \leqslant M(b-a),$$

d'où le résultat. □

On applique souvent l'inégalité des accroissements finis pour majorer en valeur absolue une réponse de la quantité $f(x)$ à une variation de la variable x. On utilise alors la forme alternative suivante, qui découle simplement du théorème 45 avec $M \geqslant 0$ et $m=-M$:

Cette inégalité permet donc de faire le lien entre la réponse macroscopique $\Delta f = f(b)-f(a)$ à l'impulsion macroscopique $\Delta x = b-a$ d'une part, et les réponses infinitésimales $\mathrm{d}f$ à des impulsions infinitésimales $\mathrm{d}x$ d'autre part ; c'est le principe de « passage du local au global » que nous évoquions en introduction de cette section.

Théorème 46 (Inégalité des accroissements finis, forme alternative)**.** Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a,b[$. Alors

$$|f(b)-f(a)| \leqslant M|b-a|.$$

Remarque — *La majoration de f' sur $]a,b[$ étant valable sur tout sous-intervalle ouvert de $[a,b]$, sous les hypothèses du théorème ci-dessus on a $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$ pour tous $x,y \in [a,b]$. On dit que f est M-*lipschitzienne *sur $[a,b]$ (voir l'exercice* **??** *page* **??** *pour plus d'informations sur les fonctions lipschitziennes).*

Il est fréquent que des sujets invitent à détailler des applications classiques de l'inégalité des accroissements finis, dont nous détaillons quelques exemples ci-dessous.

Exemple. On souhaite établir l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x - y|.$$

Pour cela, il suffit d'écrire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, en appliquant l'inégalité des accroissements finis entre x et y à la fonction dérivable sin qui vérifie $|\sin'| = |\cos| \leqslant 1$, on trouve

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leqslant 1 \cdot |x - y| \quad \text{soit} \quad |\sin(x) - \sin(y)| \leqslant |x - y|.$$

Le principe qui sous-tend l'inégalité des accroissements finis est simple : la fonction sin « ne varie jamais à une vitesse supérieure à 1 », donc la variation de sin entre x et y est au plus égale à $1 \cdot |x - y|$.

Exemple. On souhaite établir la double inégalité suivante :

$$\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \ln\left(1 + x^2\right) \leqslant x.$$

Elle est tout d'abord vraie pour $x = 0$. Fixons à présent $x > 0$. La fonction $f : t \mapsto \ln\left(1 + t^2\right)$ est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, et sa dérivée est donnée par

$$\forall t \in \,]0, x[, \quad f'(t) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

Or pour tout $t \geqslant 0$, on a d'une part $\frac{2t}{1+t^2} \geqslant 0$, et d'autre part

$$1 - \frac{2t}{1 + t^2} = \frac{1 + t^2 - 2t}{1 + t^2} = \frac{(1 - t)^2}{1 + t^2} \geqslant 0,$$

d'où $\frac{2t}{1+t^2} \leqslant 1$. Ainsi, on a :

$$\forall t \in \,]0, x[, \quad 0 \leqslant f'(t) \leqslant 1,$$

si bien que l'inégalité des accroissements finis appliquée à f entre 0 et x donne

$$0 \leqslant f(x) - f(0) \leqslant 1 \cdot (x - 0) \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant \ln\left(1 + x^2\right) \leqslant x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Alternativement, il aurait été possible d'établir l'inégalité de gauche en invoquant la croissance de la fonction ln, et celle de droite en étudiant la fonction $g : x \mapsto x - \ln\left(1 + x^2\right)$ par dérivation pour montrer qu'elle ne prend des valeurs positives.

Exemple. On veut établir l'inégalité suivante :

$$\forall n \geqslant 1, \forall x, y \in [1, +\infty[, \quad |\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \leqslant \frac{1}{n}|x - y|. \tag{4}$$

Pour cela, on fixe tout d'abord $n \geqslant 1$, puis on remarque que la fonction racine n-ième $f : t \mapsto \sqrt[n]{t} = x^{\frac{1}{n}}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et que sa dérivée est $f' : t \mapsto \frac{1}{n}t^{-\frac{n-1}{n}}$, si bien que

$$\forall t \geqslant 1, \quad |f'(t)| = \frac{1}{n}\left|\frac{1}{t^{\frac{n-1}{n}}}\right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

On obtient alors directement l'inégalité (4) en considérant deux réels $x, y \in [1, +\infty[$ et en appliquant l'inégalité des accroissements finis à f entre x et y.

Remarquons pour finir que l'inégalité des accroissements finis permet de formaliser un certain nombre d'intuitions graphiques portant sur le comportement asymptotique de f :

Exemple. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' \geqslant 1$. On veut montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ – ce qui semble graphiquement raisonnable en considérant l'interprétation de f' comme « vitesse de croissance de f » !

Pour ce faire, on utilise une version unilatère de l'inégalité des accroissements finis : si $x > 0$, comme f est continue sur $[0, x]$, dérivable sur $]0, x[$ et vérifie $f'(t) \geqslant 1$ pour tout $t \in]0, x[$, on a

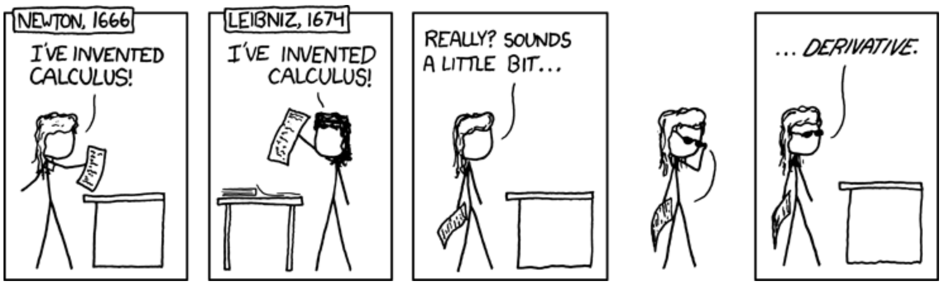
En cas de doute sur la validité du résultat, on pourra redémontrer cette version de l'inégalité en se ramenant au théorème des accroissements finis.

$$f(x) - f(0) \geqslant 1 \cdot (x - 0) = x, \quad \text{soit} \quad f(x) \geqslant x + f(0).$$

En faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient par comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Plus généralement, il faut penser au théorème et à l'inégalité des accroissements finis dès que l'on cherche à faire le lien entre les accroissements ou variations de f et les valeurs de sa dérivée f'.

EXERCICES DU CHAPITRE 10



©xkcd.com

Le terme calculus *désigne en anglais le calcul différentiel et intégral. Le terme* derivative *est ici employé en son sens de « peu original, inspiré de quelque chose qui existe déjà ».*

Solutions des exercices page 74.

1 COMPRÉHENSION DU COURS

Exercice 1 (Calculer un nombre dérivé). On considère la fonction polynomiale $f : x \mapsto x^4$ définie sur $\mathbb{R}$. Retrouver par un calcul sur le taux d'accroissement (donc sans utiliser la formule donnant f') que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 4$.

Exercice 2 (Déterminer l'équation d'une tangente.). Donner l'équation des tangentes à la courbe de la fonction cos aux points d'abscisses $-\frac{\pi}{2}$, 0, $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}$, puis représenter ces tangentes ainsi que le graphe de cos sur un schéma.

Indication : on commencera par tracer les tangentes.

Exercice 3 (Comprendre la notion de dérivée). Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ?

(*i*) Si $f(a) = g(a)$, alors $f'(a) = g'(a)$.

(*ii*) Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$, alors $f'(a) = g'(a)$.

(*iii*) Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$, alors $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in I$.

(*iv*) Si $f'(a) = g'(a)$, alors $f(a) = g(a)$.

(*v*) Si $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in I$, alors $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in I$.

Exercice 4 (Calculer des dérivées). Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité des fonctions définies par les expressions suivantes, puis calculer leur dérivée.

(i) $f(x) = -5$

(ii) $f(x) = 3x - 2$

(iii) $f(x) = x^6 + 4x^5 - 2x + 1$

(iv) $f(x) = x\ln(x)$

(v) $f(x) = \cos^2(x)$

(vi) $f(x) = \sin^3(x)$

(vii) $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$

$(viii)$ $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$

(ix) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{x^k}{k}$

(x) $f(x) = \dfrac{2x+1}{3x-1}$

(xi) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x^2+2x+1}$

(xii) $f(x) = \sqrt{2+3x}$

$(xiii)$ $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{e^x}}$

(xiv) $f(x) = x^2 e^{x^2+1}$

(xv) $f(x) = e^{2x} + e^{x^2}$

(xvi) $f(x) = \ln(1+x)$

$(xvii)$ $f(x) = \ln\big(1+x^2\big)$

Exercice 5 (Calculer la dérivée d'une bijection réciproque). Montrer que arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et calculer sa dérivée.

Exercice 6 (Calculer la dérivée d'une fonction composée). Soit $\alpha > 0$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \alpha^x$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable et calculer sa dérivée.

Exercice 7 (Déterminer un domaine de dérivabilité). En quels points de $[-1,2]$ la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} [-1,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} |x|^3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 2-x & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array}$$

est-elle dérivable ?

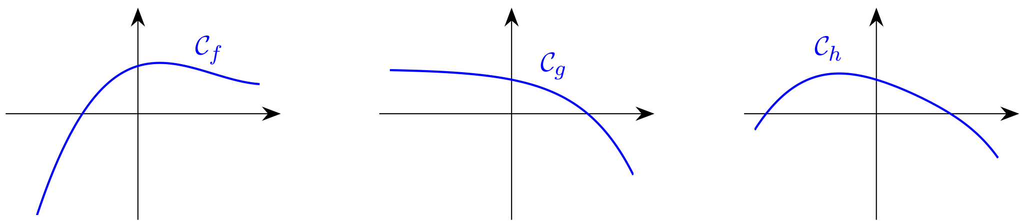
Exercice 8 (Montrer qu'une fonction est dérivable). Montrer que la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin^2(x)e^x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

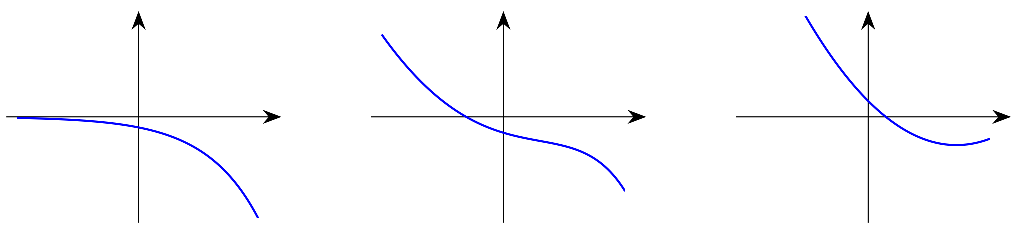
est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 (Étudier les variations d'une fonction grâce à sa dérivée). Étudier les variations de la fonction $f : x \mapsto -x^3 - x^2 + 5x - 3$.

Exercice 10 (Relier l'allure des courbes de f et de f'). On a représenté ci-dessous les graphes de trois fonctions dérivables f, g et h :



On donne à présent les graphes des fonctions f', g' et h' (dans le désordre) :



Dire à quelle fonction correspond chacun de ces trois graphes.

Exercice 11 (Esquisser le graphe d'une fonction). Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'allure de son graphe.

Exercice 12 (Utiliser le théorème des accroissements finis). Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. En considérant la fonction $g := \ln \circ f$, montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left(\frac{f'(c)}{f(c)}(b-a)\right).$$

Exercice 13 (Utiliser l'inégalité des accroissements finis). Soit $x > 0$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction racine carrée entre 1 et $1+x$, montrer que $\sqrt{1+x} \geqslant 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 14 (Utiliser l'inégalité des accroissements finis). Montrer que $|\arctan(x)| \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 ENTRAÎNEMENT

Exercice 15. En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ $\quad(iii)$ $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln(3-2x)}{x-1}$ $\quad(v)$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos(e^x)-1}{e^x}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x+1}-e^{3x+1}}{2x}$ $\quad(iv)$ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$ $\quad(vi)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\ln(x)\ln(1-x)$

Exercice 16. Soit $a\in\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur un voisinage de a et dérivable en a. On suppose que $f'(a)>0$. Montrer qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que

$$\forall x\in\,]a-\varepsilon,a[\,,\quad f(x)<f(a)\quad\text{et}\quad\forall x\in\,]a,a+\varepsilon[\,,\quad f(a)<f(x).$$

Exercice 17. Soit $a\in\mathbb{R}$ et soit f une fonction définie sur un voisinage de a.

1. Supposons que f est dérivable en a. Montrer que
$$f'(a)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}.$$
2. Montrer que la réciproque du résultat précédent est fausse, au sens où l'existence d'une limite finie pour la quantité $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ n'implique pas nécessairement que f est dérivable en a.
3. Supposons f continue. Montrer que f est dérivable en a si et seulement s'il existe $\ell\in\mathbb{R}$ tel que
$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ :\ \forall(h,k)\in\,]0,\delta[^2,\quad\left|\frac{f(a+h)-f(a-k)}{h+k}-\ell\right|\leqslant\varepsilon,$$
et que dans ce cas on a $f'(a)=\ell$.

Exercice 18. Soit $a\in\mathbb{R}$. Montrer qu'une fonction f définie sur un voisinage V de a est dérivable en a si et seulement s'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ ainsi qu'une fonction $h:V\to\mathbb{R}$ de limite nulle en a tels que

$$\forall x\in V,\quad f(x)=f(a)+\lambda(x-a)+(x-a)h(x),$$

et que dans ce cas on a $f'(a)=\lambda$.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que :

1. Si f est paire, alors f' est impaire.
2. Si f' est impaire, alors f est paire.

Exercice 20.

1. Si $x \in \mathbb{R}$, rappeler la relation donnant $\cos(x)$ comme un sinus.
2. En considérant la relation $\sin' = \cos$ connue, montrer que $\cos' = -\sin$.

Exercice 21. Montrer sur le modèle de l'exemple 17 page 18 que la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\cos' = -\sin$.

Exercice 22. Pour les fonctions f et les points a considérés :

- Dire si f est dérivable en a.
- Si f n'est pas dérivable en a, dire si f est dérivable à gauche et/ou à droite en a.
- Donner l'équation de la tangente ou de la (des) demi-tangentes à la courbe représentative de f au point d'abscisse a.

(i) $f : x \mapsto x^5 + 2x$ et $a = -1$

(ii) $f = \sin$ et $a = \pi$

(iii) $f : x \mapsto \sqrt{e^{x^2} - 1}$ et $a = 0$

(iv) $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ et $a = 1$

(v) $f : x \mapsto \arctan\left(x^2\right)$ et $a = 0$

(vi) $f : x \mapsto \ln\left(\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)$ et $a = \frac{\pi}{2}$

Exercice 23. Soient I, J, K des intervalles ouverts non vides et soient $f : K \to \mathbb{R}$, $g : J \to K$ et $h : I \to J$ des fonctions dérivables. Montrer que la composée $f \circ g \circ h$ est dérivable et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in I, \quad (f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))g'(h(x))h'(x).$$

Exercice 24. Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ et soient f, g, h des fonctions définies et dérivables sur I. Montrer que le produit fgh est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

Exercice 25 (Règle de l'Hôpital). On présente dans cet exercice une méthode d'étude de certaines formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$.
Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ et dérivables en a telles que $f(a) = g(a) = 0$.

1. Supposons que $g'(a) \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

2. Supposons que g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a mais que $g'(a) = 0$ et que $f'(a) \neq 0$. Montrer que

$$\lim_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty.$$

3. Déterminer les limites suivantes :

(i) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(x)}{e^x - 1}$ $\qquad$ (iii) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + \tan(x) - \cos(x)}$ $\qquad$ (iv) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x)}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$

Ce résultat porte le nom de Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital (1661–1704). L'auteur véritable de cette règle est Jean Bernoulli (1667 – 1748), membre d'une grande famille de mathématiciens suisses, à qui L'Hôpital payait une pension mensuelle en échange de rapports réguliers sur les progrès du calcul infinitésimal. Bien que L'Hôpital ait reconnu la paternité de ce résultat à Bernoulli dès sa publication, on persiste encore aujourd'hui à donner à la règle le nom du marquis (c'est une nouvelle occurrence de la loi d'éponymie de Stigler*, voir page* **??***).*

Exercice 26. Soit $n \geqslant 0$.

1. Rappeler l'expression sous forme de somme de la quantité $(a+1)^n$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. En dérivant l'égalité obtenue à la question 1, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

3. Proposer une autre méthode de calcul de la somme ci-dessus.

Exercice 27. On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^x. \end{array}$$

1. Montrer que f est dérivable et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, noté $\widetilde{f}$.
3. La fonction $\widetilde{f}$ est-elle dérivable à droite en 0 ?

Exercice 28. On considère la fonction

$$f:\ \left[-\tfrac{\pi}{2},0\right[\cup\left]0,\tfrac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^{-\frac{1}{|x|}}\ln\left(|\sin(x)|\right).$$

1. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, que l'on notera $\widetilde{f}$.
2. La fonction $\widetilde{f}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 29. Donner le domaine de définition et le domaine de dérivabilité des fonctions définies par les expressions suivantes, puis calculer leur dérivée.

(i) $f(x) = x\ln(x) - x$	(v) $f(x) = \arctan(e^x)$	(ix) $f(x) = \ln(\lvert x\rvert)$
(ii) $f(x) = 2^x - 5^x$	(vi) $f(x) = \sin(\cos(\tan(x)))$	(x) $f(x) = \lvert x\rvert\sin(x)$
(iii) $f(x) = x\arctan(x)$	(vii) $f(x) = e^{e^x}$	(xi) $f(x) = \frac{1}{\ln(\lvert x\rvert)}$
(iv) $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$	$(viii)$ $f(x) = x^2\sin(x)\cos(x)$	(xii) $f(x) = \ln(\lvert\cos(x)\rvert)$

Exercice 30 (Deux formules de trigonométrie).

1. (a) Montrer à l'aide de la dérivation que $\arccos(x)+\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1,1]$.
   (b) Retrouver ce résultat à l'aide de la formule de trigonométrie donnant la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
2. (a) Montrer à l'aide de la dérivation que $\arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ est constante sur $\mathbb{R}_-^*$, où elle vaut $-\frac{\pi}{2}$, et sur $\mathbb{R}_+^*$, où elle vaut $\frac{\pi}{2}$.
   (b) Retrouver ce résultat à l'aide de la formule de trigonométrie donnant la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ en fonction de $\tan(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

Exercice 31. Étudier la fonction $f : x \mapsto 3x^5 + 5x^3 - 180x$.

« Étudier f » consiste à donner son ensemble de définition, ses limites aux bornes des intervalles constituant cet ensemble, sa périodicité et sa parité éventuelles, ainsi qu'à déterminer ses variations et les asymptotes éventuelles à sa courbe.

Exercice 32. Étudier la fonction $f : x \mapsto x - \sqrt{e^x+1}$ et donner l'allure de son graphe.

Exercice 33. Étudier la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{1-\sin(x)}$ et donner l'allure de son graphe.

Exercice 34. Étudier la fonction $f : x \mapsto \cos(2x) - 2\cos(x)$ et donner l'allure de son graphe.

Exercice 35. Étudier la fonction $f : x \mapsto \ln\big(x^4 - 2x^2 + 2\big)$.

Exercice 36. Exhiber un contre-exemple au théorème de Rolle dans chacun des trois cas suivants :

(i) $f(a) = f(b)$ et f est dérivable sur $]a, b[$ mais elle n'est pas continue sur $[a, b]$.

(ii) $f(a) = f(b)$ et f est continue sur $[a, b]$ mais elle n'est pas dérivable sur $]a, b[$.

(iii) f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ mais $f(a) \neq f(b)$.

Exercice 37. Le but de cet exercice est d'étendre le théorème de Rolle au cas où l'intervalle de définition de la fonction est infini, ainsi qu'au cas où les valeurs prises par la fonction sont remplacées par des limites (finies ou infinies).

1. (a) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère une fonction f dérivable sur $]a, b[$ et vérifiant $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
   (b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère une fonction f dérivable sur $]a, b[$ et vérifiant $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
2. (a) Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère une fonction f continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ et vérifiant $f(a) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.
   (b) On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 38. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit f une fonction dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$, il existe $c \in]a, b[$ tel que le point $(x, 0)$ du plan soit situé sur la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c.

Indication : pour x fixé, on pourra considérer la fonction $g : t \mapsto \frac{f(t)}{x-t}$.

Exercice 39. Montrer que la fonction $\arctan + 1$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

Indication : on pourra utiliser le théorème de la bijection avec la fonction $g : x \mapsto \arctan(x) + 1 - x$.

Exercice 40. Montrer que la fonction cos admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 41. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant |x - y|^2.$$

Montrer que f est constante.

Exercice 42. On considère la fonction $f : x \mapsto \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$f(x) - f(x+1) = \frac{1}{c_x^2} \exp\left(\frac{1}{c_x}\right).$$

2. En déduire la limite de la quantité $x^2 \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{1}{x+1}\right)\right)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 43 (Théorème des accroissements finis généralisés). Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, avec $a < b$. On suppose que g' ne s'annule pas sur $]a, b[$.

1. Montrer que $g(b) \neq g(a)$.
2. En considérant la fonction

$$\Phi : \begin{array}{rcl} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a)), \end{array}$$

montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) \neq 0$ et

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

3. En quoi le résultat de la question précédente est-il une généralisation du théorème des accroissements finis ?

Exercice 44. On pose $I = [1, 2]$ et on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in I \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{3 - u_n}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans I.
2. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3 - x}$ admet un unique point fixe α sur I que l'on précisera.

3. Montrer que pour tous $x, y \in I$ on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|,$$

puis que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.

Exercice 45. On donne les approximations $\ln(2) \approx 0,69$ et $\ln(3) \approx 1,10$, et on pose $I = \left[\frac{3}{2}, 2\right]$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2}{u_n} + \ln(u_n).$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2}{x} + \ln(x) \end{array}$$

et montrer que I est stable par f.

2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans I.
3. Montrer que f admet un unique point fixe α sur I.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n |u_0 - \alpha|,$$

puis que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.

Exercice 46. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -\frac{\cos(u_n)}{2}.$$

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto -\dfrac{\cos(x)}{2}$ admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$, que l'on notera α.
2. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|$.
3. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.

Exercice 47. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable vérifiant $f(0) \geqslant 0$ et $f' \geqslant f$. Montrer que f est à valeurs positives.

Indication : on pourra considérer la fonction $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$.

Exercice 48 (Équations différentielles linéaires). Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On cherche l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'*équation différentielle*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = af(x) + b. \tag{5}$$

1. On suppose que $a = 0$. Déterminer toutes les solutions de l'équation (5).
2. On suppose à présent que $a \neq 0$.
   (a) Vérifier que la fonction $g : x \mapsto e^{ax} - \frac{b}{a}$ est solution de (5).
   (b) Si f est une solution de (5), vérifier que la fonction $x \mapsto e^{-ax}(f(x) - g(x))$ est constante.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (5).

Une équation différentielle *est une équation fonctionnelle reliant la dérivée d'une fonction à la fonction elle-même. On retrouve des équations différentielles au fondement d'un grand nombre de modèles :*

- *Physiques : refroidissement d'un liquide, désintégration atomique, mouvement d'une planète en orbite autour d'une étoile...*
- *Économiques : croissance de la production, valorisation d'un capital, ajustement des prix en temps continu...*
- *Biologiques : croissance d'une population, mutation d'un gène, propagation d'un pathogène (voir l'exercice 64)...*
- *Financiers : modélisation du prix d'un actif en situation d'incertitude (l' équation différentielle est alors généralement couplée avec une composante aléatoire à temps continu nommée* mouvement brownien*, voir page* **??***).*

Si les équations différentielles linéaires de la forme (5) admettent des solutions explicites, la grande majorité des équations différentielles ne peut se résoudre de façon analytique à l'aide des fonctions usuelles du cours : c'est le cas par exemple de l'équation différentielle $xf'(x) + f'(x)^2 = e^{f(x)}$, plus souvent notée $xy' + y'^2 = e^y$. La passionnante théorie des équations différentielles (et plus largement des systèmes dynamiques, qui décrivent des grandeurs évoluant selon des lois fixées) permet malgré tout d'effectuer une étude qualitative *des solutions non explicites pour pouvoir décrire leur comportement en termes de convergence, de bornitude, d'explosion... Cette théorie ne figure cependant pas au programme de B/L.*

Exercice 49. On cherche l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad xf(x) + f'(x) = 0. \tag{6}$$

1. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $g : x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$ est solution de (6).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable solution de (6). Montrer que la fonction $h : x \mapsto f(x)e^{\frac{x^2}{2}}$ est constante.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (6).

Exercice 50 (Séries de Riemann).Soit $\alpha > 0$. On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha},$$

appelée *série de Riemann de paramètre* α.

1. Supposons tout d'abord que $\alpha > 1$.
   (a) Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a
   $$\frac{\alpha - 1}{(k+1)^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^{\alpha-1}} - \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}}.$$
   (b) En déduire que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers une limite réelle, notée $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.
2. On suppose à présent que $\alpha < 1$.
   (a) Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a
   $$(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leqslant \frac{1-\alpha}{k^\alpha}.$$
   (b) En déduire que $(u_n)_{n \geqslant 1}$ diverge vers $+\infty$.
3. Que se passe-t-il dans le cas $\alpha = 1$?

3 EXERCICES CLASSIQUES ET D'ANNALES

Exercice 51 (Somme géométrique dérivée). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite calculer la valeur de la somme

$$S(q) = \sum_{k=1}^{n} kq^{k-1}$$

pour tout $q \in \mathbb{R}$.

On définit la fonction polynomiale P par $P(q) = \sum_{k=0}^{n} q^k$ pour tout $q \in \mathbb{R}$.

1. Calculer la valeur de $S(1)$.
2. Rappeler la valeur de $P(q)$ pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
3. Montrer que la fonction $P : q \mapsto P(q)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $P' = S$.
4. En déduire la valeur de $S(q)$ pour tout $q \neq 1$.
5. Calculer la somme $A = \sum_{k=0}^{100} \frac{k}{2^k}$.

Exercice 52 (Fonctions hyperboliques). Le but de cet exercice est d'étudier des fonctions usuelles hors-programme mais souvent mobilisées dans des sujets de concours, les *fonctions hyperboliques*.

On définit la fonction *cosinus hyperbolique*

$$\begin{aligned} \mathrm{ch} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \end{aligned}$$

la fonction *sinus hyperbolique*

$$\begin{aligned} \mathrm{sh} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

et la fonction *tangente hyperbolique*

$$\begin{aligned} \mathrm{th} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\mathrm{sh}\,(x)}{\mathrm{ch}\,(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

1. Vérifier que la fonction th est bien définie.
2. Étudier la parité des fonctions ch, sh et th.

3. Montrer que $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$.
4. Montrer que ch, sh et th sont dérivables et que
$$\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}, \quad \mathrm{sh}' = \mathrm{ch} \quad \text{et} \quad \mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}.$$
5. Étudier le signe, les limites et les variations de ch, sh et th.
6. (a) Montrer que ch induit une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$, dont la réciproque $(\mathrm{ch}_{|\mathbb{R}_+})^{-1}$ est appelée *argument cosinus hyperbolique* et notée argch.
   (b) Montrer que sh induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont la réciproque sh^{-1} est appelée *argument sinus hyperbolique* et notée argsh.
   (c) Montrer que th induit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1, 1[$, dont la réciproque th^{-1} est appelée *argument tangente hyperbolique* et notée argth.
7. Donner le domaine de dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions hyperboliques réciproques argch, argsh et argth.
8. Expliciter les fonctions hyperboliques réciproques argch, argsh et argth à l'aide des fonctions usuelles.

   Indication : pour expliciter argch, par exemple, on pourra établir une équivalence du type
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \forall y \in [1, +\infty[, \quad \mathrm{ch}(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad y = g(x),$$
   où g est une fonction s'exprimant comme combinaison de fonctions usuelles. Pour ce faire, on pourra réécrire l'équation $\mathrm{ch}(x) = y$ comme une équation polynomiale du second degré.

Exercice 53 (Inégalité arithmético-géométrique).

1. Soit $\lambda \in]0, 1[$. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ on a
$$x^\lambda y^{1-\lambda} \leqslant \lambda x + (1 - \lambda) y,$$
   avec égalité si et seulement si $x = y$.

   Indication : on pourra fixer x et étudier les variations de $y \mapsto x^\lambda y^{1-\lambda} - (\lambda x + (1 - \lambda) y)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que si $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, alors
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k,$$
   avec égalité si et seulement si tous les x_k sont égaux.

Lorsque $n = 2$, la quantité $\sqrt{x_1 x_2}$ représente la longueur du côté d'un carré de même aire que le rectangle de côtés x_1 et x_2. Plus généralement, le réel $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$, appelé moyenne géométrique des réels $x_1, \ldots, x_n$, *est le côté d'un cube à n dimensions dont le volume est $\prod_{k=1}^{n} x_k$. L'exercice 53 vise à montrer que la moyenne géométrique d'un n-uplet de réels positifs est toujours majorée par sa moyenne arithmétique.*

Bien qu'elles ne soient pas au programme, les notions de cube, de pavé et de volume dans $\mathbb{R}^n$ sont les généralisations directes de celles définies et bien connues dans $\mathbb{R}^3$. Par exemple, le sous-ensemble $[0,1]^3 \times [2,5] \times [-1,1]$ de $\mathbb{R}^5$ est un *pavé* de $\mathbb{R}^5$ de côtés $1, 1, 1, 3$ et 2 et possède un volume égal à $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$.

Exercice 54 (ENS 2017). On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln(x) - x. \end{array}$$

1. Calculer $f(1)$ et $f(2)$.
2. Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$. Justifiez vos réponses.
3. Dresser, avec justifications, le tableau de variations de f.
4. Calculer l'équation de la droite Δ, tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f en $x = e$.
5. Représenter sur une même figure Δ et $\mathcal{C}$.

Exercice 55 (Ulm 2021). Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, décroissante et telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

1. Montrer que la fonction $g : x \mapsto xf(x)$ admet un maximum sur $[0,1]$. On le note $M(f)$.
2. Montrer que $0 \leqslant M(f) \leqslant 1$. Existe-t-il une fonction telle que $M(f) = 1$?
3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $f_p : x \mapsto 1 - x^p$. Calculer $M(f_p)$ et déterminer sa limite lorsque $p \to +\infty$.
4. (a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b et c pour que la fonction polynomiale $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ vérifie les hypothèses de l'énoncé.
   (b) Montrer que l'ensemble des graphes de toutes ces fonctions polynomiales remplit une zone du carré $[0,1] \times [0,1]$ que l'on déterminera graphiquement.

Exercice 56 (ENS 2021). Soit $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et dont la dérivée est continue.

1. Justifier qu'il existe $y_0 \in [-1,1]$ tel que $|h'(y_0)| = \max_{y \in [-1,1]} |h'(y)|$.
2. Justifier que pour tout $x \in [0,1]$ on a $|h(x) - h(-x)| \leqslant 2x \max_{y \in [-x,x]} |h'(y)|$.
3. Montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(-x)}{x} = 2h'(0)$.

Exercice 57 (ENSAE 2013). Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue, dérivable sur $]0,1[$. On suppose que f' est croissante sur $]0,1[$ et que $f(1) < 1$. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0,1]$.

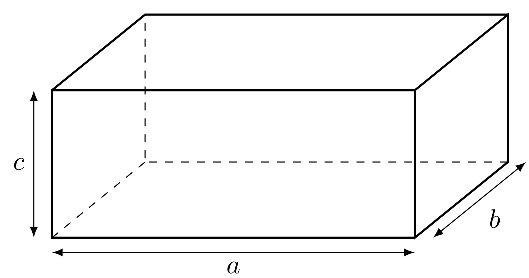
Exercice 58 (Oral HEC 2021). Soit I un intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I. Si $k \in \mathbb{R}_+^*$, on dit que f *vérifie la propriété* L_k *sur* I si on a :

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|.$$

1. Question de cours : rappeler le théorème et l'inégalité des accroissements finis.
2. (a) Montrer que les fonctions sin et cos vérifient la propriété L_1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que l'on ne peut pas trouver de réel $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la fonction racine carrée vérifie la propriété L_k sur $[0,1]$.
   (c) Montrer que s'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que f vérifie la propriété L_k sur I, alors f est continue sur I.

4 EXERCICES D'APPLICATION

Exercice 59 (Emballage de cadeau). On cherche à emballer un cadeau en forme de parallélépipède de dimensions strictement positives a, b et c :



1. Exprimer en fonction de a, b et c la surface latérale S du parallélépipède et son volume V.
2. À volume $V > 0$ donné, comment choisir a, b et c pour minimiser la surface latérale du cadeau ?
   Indication : on pourra tout d'abord considérer a fixé puis choisir b et c de sorte à minimiser la surface du cadeau, puis choisir la valeur de a permettant d'optimiser cette surface minimale.
3. À surface $S > 0$ donnée, comment choisir a, b et c de sorte à maximiser le volume du cadeau ?

   Indication : on pourra mettre en évidence un lien entre ce problème et le précédent.

Exercice 60 (Interprétation mécanique des résultats du cours). On considère un solide en déplacement le long d'un axe gradué et orienté et dont on repère la position au temps $t \in \mathbb{R}$ par un réel noté $s(t)$. On suppose que la fonction $t \mapsto s(t)$ est dérivable et on note $v : t \mapsto s'(t)$ sa dérivée. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on appelle $v(t)$ la *vitesse instantanée du solide au temps* t.

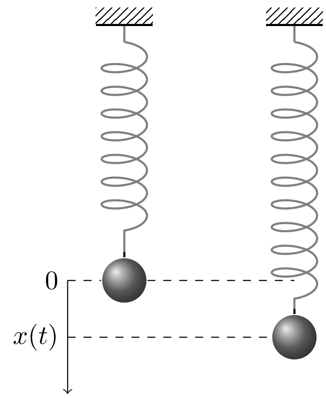
1. Donner une approximation de la position du solide au temps $t = 1,01$ lorsque $s(1) = 2$ et $v(1) = 4$.
2. Donner une fonction s correspondant à une vitesse constante égale à 3. Une telle fonction est-elle unique ?
3. Donner une fonction s associée à la fonction de vitesse instantanée $v : t \mapsto 2t$. Une telle fonction est-elle unique ?
4. Partant d'une ville A, je me déplace en voiture le long d'une route menant à une ville B distante de 100 kilomètres. De quels résultats du cours les affirmations suivantes sont-elles des corollaires ?
   (a) Si j'atteins la ville B, il existera un instant où je me serai trouvé à 50 kilomètres de la ville A.
   (b) Si je rebrousse chemin et retourne dans la ville A, il existera un instant auquel ma vitesse par rapport à l'axe de la route sera nulle.
   (c) Il existe un instant auquel mon compteur de vitesse affichera un nombre égal à ma vitesse *moyenne* sur le trajet.
   (d) Si la vitesse affichée par le compteur est toujours inférieure à 50 km/h, il me faudra au minimum 2 heures pour atteindre la ville B.
5. Imaginer un dispositif embarqué permettant d'évaluer la vitesse $v(t)$ d'une voiture à chaque instant $t \in \mathbb{R}$. Cette estimation est-elle exacte ?
6. Comment pourrait-on définir l'*accélération instantanée* $a(t)$ d'un solide au temps t ?
7. Donner une fonction s correspondant à une accélération constante égale à -10.
8. On considère une balle de tennis de masse $m = 0,06$ kilogrammes lancée verticalement à partir de l'altitude $s(0) = 1$ mètre, avec une vitesse initiale de $v(0) = 20$ mètres par seconde. On note $s(t)$ l'altitude de la balle (en mètres) au temps $t \geqslant 0$ (en secondes). La deuxième loi de Newton, ou *principe fondamental de la dynamique*, stipule que l'accélération $a(t)$ de la balle au temps t vérifie approximativement l'égalité suivante (dont l'unité est le m.s^{-2}) :

   $$a(t) \approx -10$$

   tant que la balle n'a pas touché le sol.

   Calculer l'altitude maximale atteinte par la balle et le temps auquel elle touchera le sol.

Exercice 61 (Un exercice de mécanique). Une boule de masse $m > 0$ est accrochée à un ressort vertical dont l'extrémité haute est fixée (voir figure ci-contre). On appelle *position d'équilibre* de la boule la position de la boule lorsque le système est au repos. À l'instant $t = 0$, on tire la boule vers le bas sur une longueur $x_0 \geqslant 0$, puis on la relâche avec une vitesse nulle. À chaque instant $t \geqslant 0$, on note $x(t)$ le déplacement de la boule vers le bas par rapport à la position d'équilibre (on a donc $x(0) = x_0$ et $x'(0) = 0$).



En négligeant les frottements, des considérations physiques permettent d'établir que x est dérivable, que x' l'est aussi et que l'on a l'équation du mouvement suivante :

$$mx''(t) = -kx(t),$$

où k est une constante positive (appelée *constante de raideur du ressort*).

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $y : t \mapsto \lambda \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$ vérifie $y(0) = x_0$ et $y'(0) = 0$.
2. Montrer que la fonction y ainsi définie vérifie $(y - x)'' = -\frac{k}{m}(y - x)$.
3. Que vaut la dérivée de la fonction $((y - x)')^2 + \frac{k}{m}(y - x)^2$?
4. En déduire que $x(t) = y(t)$ pour tout $t \geqslant 0$.
5. Les variations asymptotiques de x en fonction de t vous semblent-elles crédibles ?

Exercice 62 (Microéconomie du producteur). Une entreprise en situation de monopole vend un bien sur un marché en fixant librement son prix $p \geqslant 0$. L'entreprise dispose d'une fonction de demande D, c'est-à-dire qu'elle est capable de prédire la demande $D(p)$ (non nécessairement entière) qui lui est adressée en fonction du prix p pratiqué.

1. On considère tout d'abord que le coût marginal de production d'une unité de bien supplémentaire est nul.
   (a) Donner des exemples de situations concrètes correspondant à ce choix de modélisation.
   (b) Calculer le prix maximisant le profit pour l'entreprise dans les cas suivants :
      - (i) $D(p) = \max(100 - p, 0)$
      - (ii) $D(p) = \max(100 - 4p, 0)$
      - (iii) $D(p) = \max(200 - p, 0)$
      - (iv) $D(p) = \max(100 - p^2, 0)$
      - (v) $D(p) = \dfrac{100}{100 + p^2}$
   (c) Commenter les différences entre les résultats obtenus dans les trois premiers cas.

2. On considère à présent que le coût marginal de production d'une unité de bien supplémentaire est égal à 10 €.

   (a) Donner des exemples de situations concrètes correspondant au choix d'un coût marginal constant.

   (b) Calculer le prix maximisant le profit pour l'entreprise dans les cas suivants :

   (i) $D(p) = \max(100 - p, 0)$

   (ii) $D(p) = \max(100 - 4p, 0)$

   (iii) $D(p) = \max(200 - p, 0)$

   (iv) $D(p) = \max(500 - p^2, 0)$

   (v) $D(p) = \dfrac{100}{100 + p^2}$

3. On suppose à présent que l'entreprise fait face à un coût marginal croissant, et que le coût total de production d'une quantité $q \geqslant 0$ de bien est $C(q) = q^2$.

   (a) Donner des exemples de situations concrètes correspondant à un coût marginal croissant.

   (b) Vérifier que le coût marginal C' associé à la fonction de coût est bien croissant.

   (c) Déterminer le prix maximisant le profit du producteur et la quantité échangée associée lorsque $D(p) = \max(100 - p, 0)$.

4. On considère enfin que l'entreprise produit des biens de luxe dont le coût marginal de production est égal à 9 000 €, et que sa fonction de demande est définie par $D(p) = \max\left(5p - \frac{p^2}{3000}, 0\right)$.

   (a) Comment interpréter l'allure de la courbe de demande ?

   (b) Calculer le prix maximisant le profit du producteur.

Exercice 63 (Microéconomie du consommateur). Un consommateur peut consommer deux biens 1 et 2 en quantités respectives $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Il en retire alors un niveau de satisfaction (ou d'*utilité*) $u(x,y)$, où la fonction $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est la *fonction d'utilité de Cobb-Douglas* donnée par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad u(x,y) = x^\alpha y^\beta$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, en convenant du fait que $0^\alpha = 0^\beta = 0$.

Si $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, on définit l'*utilité marginale du bien 1* (au point (x,y)), que l'on note $u_{m,1}(x,y)$, comme le nombre dérivé de la fonction $t \mapsto u(t,y)$ en x, et on définit l'utilité marginale du bien 2 (au point (x,y)), notée $u_{m,2}(x,y)$, comme le nombre dérivé de la fonction $t \mapsto u(x,t)$ en y.

1. Interpréter les utilités marginales en termes économiques, puis les calculer.
2. À quelle condition sur α (resp. β) peut-on dire que l'utilité marginale de x (resp. y) est décroissante ? Comment interpréter cette propriété en termes économiques ?

On considère que le prix du bien 1 est $p_1 > 0$, que le prix du bien 2 est $p_2 > 0$ et que le consommateur dispose d'un revenu $R > 0$, si bien qu'il fait face à la *contrainte de budget* suivante :

$$p_1 x + p_2 y \leqslant R.$$

Le problème du consommateur revient alors à choisir le panier de biens $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ qui maximise son utilité $u(x, y)$ tout en satisfaisant la contrainte de budget.

3. Montrer que le consommateur a intérêt à saturer la contrainte de budget, c'est-à-dire à choisir un panier de biens (x, y) tel que $p_1 x + p_2 y = R$.
4. En exprimant y en fonction de x grâce à la contrainte de budget saturée, reformuler le problème comme la maximisation d'une fonction d'une variable.
5. Déterminer le panier de biens (x^*, y^*) répondant au problème du consommateur.
6. Commenter la formule donnant x^* en fonction des paramètres du modèle. On montrera notamment que la part du revenu allouée à la consommation du bien 1 à l'optimum ne dépend pas de p_1.

Exercice 64 (Un modèle épidémiologique). On souhaite étudier la propagation d'une épidémie au sein d'une population de $N > 0$ individus (N étant un nombre non nécessairement entier), composée au temps $t \geqslant 0$ d'un nombre $S(t)$ d'individus sains (aussi dits *susceptibles*) et d'un nombre $I(t) := N - S(t)$ d'individus infectés.

On modélise ici la population de façon *continue* plutôt que discrète, au sens où le nombre d'individus qui composent les différentes sous-populations évolue dans $\mathbb{R}$ plutôt que dans $\mathbb{N}$. Ce choix de modélisation, outre qu'il permet l'utilisation des dérivées, a du sens si l'on considère par exemple que la population considérée est comptée en milliards d'individus.

On modélise cette situation par des fonctions dérivables $S : \mathbb{R} \to [0, N]$ et $I := N - S$ vérifiant l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S'(t) = \gamma I(t) - \frac{\beta I(t) S(t)}{N}, \tag{$*$}$$

où $\beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$. On admet que de telles fonctions existent.

1. On interprète le paramètre β comme le taux de contact infectieux entrepris par un individu infecté et le paramètre γ comme le taux instantané de rémission d'un individu infecté. Interpréter l'équation ($*$).
2. On suppose tout d'abord que $\beta < \gamma$.
   (a) Montrer que S est croissante.
   (b) Montrer que $S'(t)$ ne peut pas admettre une limite strictement positive lorsque $t \to +\infty$.
   Indication : raisonner par l'absurde, justifier l'existence d'un $A \in \mathbb{R}$ et d'un $\varepsilon > 0$ tels que $S'(x) \geqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant A$, puis utiliser le théorème des accroissements finis entre A et x.

(c) Montrer que $S(t)$ tend vers N lorsque $t \to +\infty$.

Indication : on justifiera d'abord l'existence d'une limite pour S en $+\infty$, puis on montrera que cette limite vaut N en raisonnant par l'absurde à l'aide de l'équation $(*)$.

(d) Quelle est l'évolution à long terme du nombre d'individus infectés dans la population ?

3. On suppose à présent que $\beta > \gamma$. On suppose aussi que $S(0) \in]\frac{\gamma}{\beta}N, N[$ et on définit la fonction G de la façon suivante :

$$\forall x \in \left]\frac{\gamma}{\beta}N, N\right[, \quad G(x) = \frac{1}{\beta - \gamma}\left(\ln(N-x) - \ln\left(x - \frac{\gamma}{\beta}N\right)\right).$$

(a) On admet que $G \circ S$ est bien définie, c'est-à-dire que S prend ses valeurs dans $\left]\frac{\gamma}{\beta}N, N\right[$. Montrer que $G \circ S$ est dérivable et que $(G \circ S)' = 1$.

(b) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $(G \circ S)(t) = t + \alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, puis déterminer α en fonction de $S(0)$.

(c) En déduire la forme explicite de $S(t)$ en fonction de t, puis la limite de $S(t)$ quand $t \to +\infty$.

(d) Quelle est l'évolution à long terme du nombre d'individus infectés dans la population ?

4. À partir des deux cas considérés ci-dessus, expliquer le rôle du facteur $R_0 := \frac{\beta}{\gamma}$, appelé *nombre de reproduction de base*, dans la dynamique à long terme d'une épidémie.

5. On suppose dans un troisième temps que $\beta < \gamma$ mais que l'on parvient à vacciner une fraction $p \in [0, 1]$ de la population, ce qui conduit à rendre une proportion p des individus non atteignables par l'épidémie.

(a) Justifier que l'équation différentielle suivie par S est à présent

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad S'(t) = \gamma I(t) - \frac{\beta(1-p)I(t)S(t)}{N} = I(t)\left(\gamma - \beta(1-p)\frac{S(t)}{N}\right). \qquad (**)$$

(b) Montrer que la proportion de la population qu'il est nécessaire de vacciner pour que l'épidémie s'éteigne d'elle-même dans le cadre du modèle considéré vaut

$$p^* = 1 - \frac{1}{R_0}.$$

(c) Dans le cas de l'épidémie de COVID-19, le paramètre R_0 a parfois été estimé à $2,5$. Que vaut p dans ce cas ?

(d) Le modèle considéré est-il adapté pour décrire l'évolution de l'épidémie de COVID-19 ?

5 PLUS LOIN, PLUS FORT

Exercice 65. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Montrer que s'il existe $k < 1$ tel que $|f'| \leqslant k$, alors f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Montrer que si $|f'| < 1$ et si f admet un point fixe sur $\mathbb{R}$, alors celui-ci est unique.
   (b) Donner un exemple de fonction f tel que $|f'| < 1$ qui n'admette pas de point fixe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 66. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Montrer que s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \alpha$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha$. La courbe représentative de f admet-elle nécessairement une asymptote en $+\infty$ dans ce cas ?
2. Supposons que f admette une limite finie en $+\infty$. A-t-on nécessairement $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$?

Exercice 67 (Une réciproque partielle du théorème des accroissements finis). Soit I un intervalle ouvert et soit f une fonction dérivable sur I.

1. Est-il vrai que pour tout $c \in I$ il existe $a, b \in I$ tels que $a < c < b$ et tels que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$?
   Indication : on pourra chercher un contre-exemple avec $f = \sin$ ou $f : x \mapsto x^3$ et s'aider d'un raisonnement graphique.
2. On cherche à présent à établir une réciproque partielle du théorème des accroissements finis, qui s'énonce comme suit :

   Si $c \in I$ est tel que $f'(c) \neq \min_I f'$ et tel que $f'(c) \neq \max_I f'$, alors il existe $a, b \in I$ tels que $a < b$ et
   $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

   Cette réciproque a été démontrée en 1997 (donc très récemment !) par J. Tong et P. Braza. La preuve que nous présentons a été proposée en 2014 par C. Mortici dans un article intitulé A converse of the Mean Value Theorem made easy*.*

   Fixons donc $c \in I$ et définissons la fonction h sur I par
   $$\forall x \in I, \quad h(x) = f(x) - x f'(c).$$

   (a) Justifier que h est dérivable et calculer sa dérivée.
   (b) Supposons que h soit injective. Montrer que la dérivée de h est de signe constant sur I, puis que $f'(c)$ est un extremum (c'est-à-dire un minimum ou un maximum) de f' sur I.

(c) Montrer que si $f'(c)$ n'est pas un extremum de f' sur I, alors h n'est pas injective, puis en déduire qu'il existe bien $a, b \in I$ tels que $a < b$ et

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3. On cherche maintenant à montrer que sous une condition légèrement plus forte, on peut trouver a et b *de part et d'autre de* c vérifiant l'égalité attendue. Le résultat est le suivant :

> *Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\subset I$, que $f'(c)$ ne soit pas un extremum de f' sur $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$, et que pour tout $x \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\setminus \{c\}$ on ait $f'(x) \neq f'(c)$.*
>
> *Alors il existe $a, b \in I$ tels que $a < c < b$ et $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.*

On se place donc sous les hypothèses de cette proposition.

(a) Déduire de la question 2 qu'il existe $a, b \in]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ tels que $a < b$ et $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

(b) En appliquant le théorème des accroissements finis entre a et b, montrer que $a < c < b$.

Exercice 68. Le but de cet exercice est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solutions de l'équation fonctionnelle

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue n'est pas une variable mais une fonction.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y). \qquad \text{(M)}$$

1. Déterminer toutes les fonctions dérivables vérifiant (M).

   Indication : si f est une telle fonction, on pourra montrer que $f(0) = 0$, montrer que f' est constante et égale à $f'(0)$, puis dériver la fonction $x \mapsto f(x) - f'(0)x$ et conclure.

2. Déterminer toutes les fonctions continues vérifiant (M).

   Indication : on pourra montrer successivement que f est impaire, que $f(nx) = nf(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$ et enfin que $f(a) = af(1)$ pour tout $a \in \mathbb{Q}$, puis conclure par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

3. Déduire de la question précédente une nouvelle démonstration du fait que les seules fonctions continues $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $g(x+y) = g(x)g(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ sont nulles ou de la forme $g : x \mapsto a^x$ avec $a > 0$.

   Indication : on pourra montrer qu'une telle fonction g, si elle est non nulle, est strictement positive, puis considérer $\ln \circ g$.

Exercice 69 (Théorème de Darboux). Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Le but de cet exercice est de démontrer le *théorème de Darboux*, qui stipule qu'une fonction dérivée « vérifie la propriété des valeurs intermédiaires » :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

1. Démontrer le théorème dans le cas où f' est continue.
2. Supposons $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable, et fixons $a, b \in I$ tels que $a < b$. On veut montrer que f' prend sur $[a, b]$ toutes les valeurs comprises entre $f'(a)$ et $f'(b)$.
   (a) Traiter le cas $f'(a) = f'(b)$. On supposera par la suite que $f'(a) \neq f'(b)$.
   (b) En considérant $-f$, montrer que l'on peut supposer que $f'(a) < f'(b)$, ce que l'on fera par la suite.
   (c) Soit $y \in]f'(a), f'(b)[$. En considérant la fonction $x \mapsto f(x) - yx$, montrer que l'on peut supposer que $f'(a) > 0 > f'(b)$, ce que l'on fera par la suite, et qu'il suffit de montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
   (d) Montrer que f admet son maximum sur $[a, b]$ en un point $c \in]a, b[$ puis conclure.
3. Donner un intervalle I et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ tels que f soit dérivable sur I mais que f' ne soit pas continue sur I.
4. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f' soit la fonction partie entière ?

Exercice 70. Dans un cours de mathématiques sur la dérivation, un professeur démontre que si I est un intervalle ouvert non vide et si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable dont la dérivée est positive, alors f est croissante sur I. Il demande ensuite à ses étudiants de prouver le théorème suivant :

> *Soit I un intervalle ouvert non vide et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' soit strictement positive sur I sauf éventuellement en un nombre fini de points. Alors f est strictement croissante sur I.*

Un étudiant fournit la preuve ci-après :

> Plaçons-nous sous les hypothèses du théorème. Comme f' est positive, on sait que f est croissante sur I. Supposons qu'elle n'y soit pas strictement croissante : il existe alors $a, b \in I$ tels que $a < b$ et tels que $f(a) \geqslant f(b)$. Comme f est croissante sur I, on a aussi $f(a) \leqslant f(b)$, d'où $f(a) = f(b)$, et par suite $f(x) = f(a) = f(b)$ pour tout $x \in [a, b]$. La fonction f est donc constante sur $[a, b]$, si bien que sa dérivée est nulle sur $[a, b]$; or $[a, b]$ contient une infinité de points, ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle f' prend des valeurs strictement positives hors d'un nombre fini de points.

1. Commenter la preuve proposée par l'étudiant.
2. En utilisant le théorème de Darboux démontré dans l'exercice 69, compléter la preuve en une démonstration correcte.
3. Montrer que si I un intervalle ouvert non vide et si $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que f' ne s'annule pas, alors f est strictement monotone sur I.

Exercice 71 (Théorème de la limite de la dérivée). Cet exercice utilise des résultats sur les valeurs d'adhérence et les suites de Cauchy démontrés dans les exercices hors-programme du chapitre **??** (page **??** et suivantes).

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur $[a, b[$ et dérivable sur $]a, b[$. On souhaite établir le résultat suivant, connu sous le nom de *théorème de la limite de la dérivée* :

Si f' admet une limite réelle (finie) ℓ en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]a, b[$ convergeant vers a.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait
   $$a < c_n < x_n \quad \text{et} \quad f'(c_n) = \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}.$$
   (b) Montrer que
   $$\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$
2. Conclure.
3. Soit $g :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que g et g' soient lipschitziennes. Montrer que g admet un prolongement par continuité dérivable en 0.

   Indication : montrer que g et g' admettent une limite en 0 en utilisant les suites de Cauchy.

Solutions des exercices du chapitre 10

1 Compréhension du cours

Solution de l'exercice 1. Pour tout $x \neq 1$, on a

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^4-1}{x-1} = 1+x+x^2+x^3,$$

donc

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1+1+1+1 = 4.$$

Ainsi, f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4$.

Solution de l'exercice 2. La fonction $\cos$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$. Ainsi, l'équation de la tangente à la courbe de $\cos$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{2}$ est

$$y = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos'\left(-\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = x - \left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est

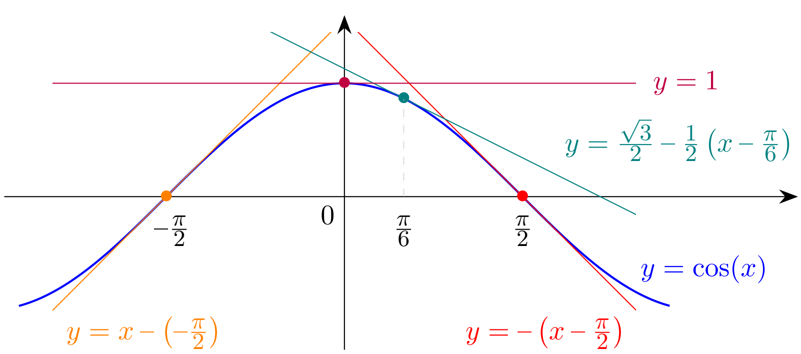
$$y = \cos(0) + \cos'(0)x = 1,$$

celle de la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{6}$ est

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right),$$

celle de la tangente au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ est

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$



Solution de l'exercice 3. (i) L'affirmation est fausse : les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ peuvent avoir un point en commun sans que leur orientation en ce point soit la même. En prenant par exemple $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto -x$ ainsi que $a = 0$, on obtient $f(a) = 0 = g(a)$ mais $f'(a) = 1 \neq -1 = g'(a)$.

(ii) L'affirmation est vraie puisque si les fonctions f et g coïncident sur I tout entier, on a

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

pour tout x assez proche de a pour que l'on ait $x \in I$ (rappelons que I est ouvert), d'où $f'(a) = g'(a)$ en passant à la limite lorsque $x \to a$.

(iii) L'affirmation est vraie : d'après le point précédent, si f et g coïncident sur I, alors f' et g' coïncident en tout point de I, c'est-à-dire sur I tout entier.

(iv) L'affirmation est fausse : les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ peuvent admettre des tangentes parallèles au point d'abscisse a sans pour autant s'y rencontrer. Par exemple, en prenant $f = \exp$ et $g = \sin$ ainsi que $a = 0$, on a $f'(a) = 1$ et $g'(a) = 1$ mais $f(a) = 1 \neq 0 = g(a)$.

(v) L'affirmation est fausse, comme on s'en convainc facilement en prenant $f = \exp$ et $g = \exp + 1$. On peut par contre montrer que si f' et g' coïncident sur I, alors f et g sont nécessairement égales à une constante additive près : en effet, on a dans ce cas $(f - g)' = f' - g' = 0$ sur I, donc $f - g$ est nécessairement constante sur I, c'est-à-dire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = g(x) + c$ pour tout $x \in I$.

Solution de l'exercice 4. (i) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction constante, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 0$.

(ii) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 3$.

(iii) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 6x^5 + 20x^4 - 2$.

(iv) La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de fonctions dérivables, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

(v) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$; elle y est dérivable comme composée de fonctions dérivables (la fonction $\cos$ et la fonction carré), ou comme produit d'une fonction dérivable ($\cos$) par elle-même. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 2\cos(x)\cos'(x) = -2\cos(x)\sin(x) = -\sin(2x).$$

(vi) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$; elle y est dérivable comme composée de fonctions dérivables (la fonction $\sin$ et la fonction cube). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 3\sin^2(x)\sin'(x) = 3\sin^2(x)\cos(x).$$

(vii) La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Elle y est dérivable comme inverse d'une fonction dérivable, et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ on a

$$f'(x) = -\frac{\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

$(viii)$ La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et y est dérivable comme quotient de fonctions dérivables. Pour tout $x \neq -1$, on a

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}.$$

(ix) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est dérivable en tant que fonction polynomiale (en effet, il s'agit d'une somme de fonctions puissances !). Par linéarité de la dérivation, on trouve que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{100} x^{k-1} = \sum_{k=0}^{99} x^k.$$

(x) La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$, et elle y est dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables. Pour tout $x \neq \frac{1}{3}$, on a

$$f'(x) = \frac{2(3x-1) - (2x+1) \cdot 3}{(3x-1)^2} = -\frac{5}{(3x-1)^2}.$$

(xi) La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ puisque $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ n'est nul que si $x = -1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ en tant que quotient de fonctions dérivables, et pour tout $x \neq -1$ on a

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+1} - \frac{1}{x^2+2x+1} = 1 - (x+1)^{-2}$$

donc

$$f'(x) = 2 \cdot (x+1)^{-3} = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Notons que l'on a réécrit l'expression $f(x)$ pour pouvoir la dériver plus facilement, mais qu'il aurait été possible d'utiliser directement la formule donnant la dérivée d'un quotient et d'écrire que pour tout $x \neq -1$ on a

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - (x^2+2x) \cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

(xii) La fonction est définie sur $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right[$, mais uniquement dérivable sur $\left]-\frac{2}{3}, +\infty\right[$ car la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0. Pour tout $x > -\frac{2}{3}$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+3x}} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{2+3x}}.$$

En toute rigueur, on devrait aussi s'assurer du fait que f n'est pas dérivable à droite en $-\frac{2}{3}$: il suffit pour cela d'écrire que

$$\frac{f(x) - f\left(-\frac{2}{3}\right)}{x - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{\sqrt{2+3x}}{x+\frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt{2+3x}}{3x+2} = \frac{3}{\sqrt{3x+2}} \xrightarrow[x \to \left(-\frac{2}{3}\right)^+]{} +\infty.$$

$(xiii)$ En remarquant que l'on peut réécrire $f : x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}$, on lit immédiatement que f est définie sur $\mathbb{R}$, qu'elle y est dérivable en tant que composée de fonctions dérivables, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}}.$$

(xiv) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et elle y est dérivable en tant que combinaison (plus précisément en tant que produit de composées !) de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 2xe^{x^2+1} + x^2 \cdot e^{x^2+1} \cdot 2x = 2x(x^2+1)e^{x^2+1}.$$

(xv) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, et elle y est dérivable en tant que somme de composées de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = 2e^{2x} + 2xe^{x^2}.$$

(xvi) La fonction f est définie sur $]-1, +\infty[$ et elle y est dérivable comme composée de fonctions dérivables. Pour tout $x > -1$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \cdot 1 = \frac{1}{1+x}.$$

$(xvii)$ La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ puisque $1+x^2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et dérivable sur cet ensemble en tant que composée de fonctions dérivables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Solution de l'exercice 5. On rappelle que $\arccos$ est la bijection réciproque de la restriction de $\cos$ à l'intervalle $]0,\pi[$. Or la fonction $\cos$ est dérivable sur cet intervalle, et pour tout $x \in]0,\pi[$ on a $\cos'(x) = -\sin(x) \neq 0$, donc $\arccos$ est elle aussi dérivable et pour tout $x \in]0,\pi[$ on a

$$\arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La troisième égalité ci-dessus découle de la relation $\sin(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\theta)}$ valable $\theta \in]0,\pi[$ (puisqu'alors $\sin(\theta) \geqslant 0$).

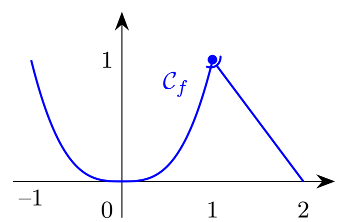
Solution de l'exercice 6. 1. Ce premier point a déjà été traité dans l'exemple 28 page 28. La fonction puissance $f : x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables, et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \exp'(\alpha\ln(x))\alpha\ln'(x) = \exp(\alpha\ln(x))\alpha\frac{1}{x} = x^\alpha\alpha\frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

2. La fonction $g : x \mapsto \alpha^x = e^{\ln(\alpha)x}$ est cette fois une fonction exponentielle. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables (la fonction $\exp$ et la fonction linéaire $x \mapsto \ln(\alpha)x$), et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = e^{\ln(\alpha)x}\ln(\alpha) = \ln(\alpha)x^\alpha.$$

Solution de l'exercice 7. La fonction f est dérivable sur $[-1,0[$ et sur $]0,1[$ en tant que composée de fonctions dérivables (la fonction valeur absolue et la fonction cube), la dérivabilité en -1 étant à comprendre au sens de la dérivabilité à droite. Elle est aussi dérivable sur $]1,2]$ en tant que fonction affine, la dérivabilité en 2 étant cette fois à comprendre au sens de la dérivabilité à gauche.



Examinons à présent le cas des deux points problématiques 0 et 1.

Le taux d'accroissement entre 0 et $x<0$ de f est donné par $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{-x^3}{x} = -x^2$, donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$

ce qui signifie que f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = 0$. Le taux d'accroissement entre 0 et $x>0$ de f est donné par $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^3}{x} = x^2$, donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

ce qui signifie que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = 0$. Ainsi, $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$, donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Par contre, on a $f'_g(1) = 3$ puisque $f(x) = x^3$ sur un voisinage à gauche de 1, et $f'_d(1) = -1$ puisque $f(x) = 2-x$ sur un voisinage à droite de 1 (cette égalité étant aussi vraie en 1 puisque $f(1) = 1 = 2-1$). Ainsi, f n'est pas dérivable en 1.

Graphiquement, le recollement en 1 des deux morceaux de courbe « se fait de façon continue mais non dérivable » (voir page précédente).

Solution de l'exercice 8. La fonction f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Il reste à démontrer sa dérivabilité en 0.

Il est important de signaler qu'il ne suffit pas de dire que « la fonction nulle est dérivable » : le fait que f prenne une valeur particulière en 0 ne signifie pas que f coïncide avec la fonction constante égale à cette valeur sur un voisinage de 0 (voir le point (i) de l'exercice 3).

On examine la limite du taux d'accroissement de f en 0 :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sin^2(x)e^x}{x^2} = \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1^2 \cdot e^0 = 1,$$

donc f est dérivable en 0 (et son nombre dérivé en 0 vaut 1).

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Solution de l'exercice 9. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale, et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = -3x^2 - 2x + 5.$$

Or l'expression polynomiale $-3x^2 - 2x + 5$ admet 1 et $-\frac{5}{3}$ pour racines. Elle est donc négative sur $\left]-\infty, -\frac{5}{3}\right]$ et $[1, +\infty[$ et positive entre $\left[-\frac{5}{3}, 1\right]$. On en déduit que f est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{5}{3}\right]$ et $[1, +\infty[$, et croissante sur $\left[-\frac{5}{3}, 1\right]$, ce que l'on résume par le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$-\frac{256}{27}$	↗	0	↘	$-\infty$

On a écrit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (puisque f est polynomiale de degré 3 et de coefficient dominant négatif) et calculé $f\left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{125}{27} - \frac{25}{9} - \frac{25}{3} - 3 = -\frac{256}{27}$ ainsi que $f(1) = 0$.

Solution de l'exercice 10. Les domaines de croissance de f correspondent aux domaines de positivité de f'. Or il semble que f soit croissante dans un premier temps, puis entame sa décroissance légèrement après 0. La fonction f' est donc positive sur $\mathbb{R}_-$ et change de signe sur $\mathbb{R}_+$: seul le troisième graphe correspond à ces caractéristiques.

La fonction g semble « de plus en plus fortement décroissante ». Sa dérivée g' doit donc être « de plus en plus négative », ce qui nous pousse à attribuer à g' le premier graphe.

La fonction h est croissante dans un premier temps, puis entame sa décroissance avant 0. La fonction h' est donc d'abord positive, puis s'annule et devient négative en un point situé avant 0 : on l'associe donc au deuxième graphe.

Solution de l'exercice 11. La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ puisque $x \neq 0$ et $\ln(x)$ existe quel que soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Sa limite en 0^+ peut être déterminée par combinaison de limites :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x = 0^+ \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty.$$

Insistons sur le fait qu'il ne s'agit pas d'un résultat de croissance comparée !

La limite de f en $+\infty$, en revanche, vaut 0 par croissance comparée.

Les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$ ne sont pas aisées à étudier par simple combinaison de fonctions monotones.

Il est sain de s'assurer de ce fait avant de lancer tête baissée dans une dérivation !

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

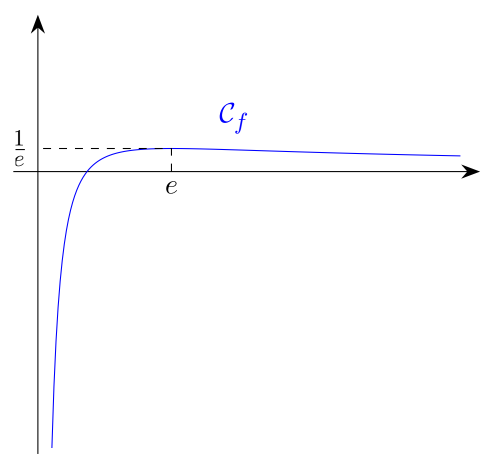
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Ainsi, si $x > 0$ on a

$$f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \ln(x) \geqslant 0 \iff x \leqslant e,$$

puisque $x^2 > 0$, ce qui montre que f est croissante sur $]0, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. La valeur de f en e, égale à $\frac{1}{e}$, et donc le maximum de f.

On déduit de ces informations l'allure du graphe de f, représenté ci-contre.



Solution de l'exercice 12. La fonction $g : x \mapsto \ln(f(x))$ est bien définie sur $[a, b]$ puisque $f(x) > 0$ pour tout $x \in [a, b]$. Elle y est continue comme composée de fonctions continues, et elle est dérivable sur $]a, b[$ comme composée de fonctions dérivables ; on a alors $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ pour tout $x \in]a, b[$.

On peut donc appliquer à g le théorème des accroissements finis, qui stipule qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g(b)-g(a) = g'(c)(b-a)$, soit

$$\ln(f(b)) - \ln(f(a)) = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a), \quad \text{ou encore} \quad \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = \frac{f'(c)}{f(c)}(b-a).$$

La relation attendue s'obtient alors en composant l'égalité obtenue par $\exp$.

Solution de l'exercice 13. La fonction racine carrée $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[1, 1+x]$ et dérivable sur $]1, 1+x[$. Sa dérivée vérifie par ailleurs

$$\forall t \in]1, 1+x[, \quad f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leqslant \frac{1}{2}.$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[1, 1+x]$ donne alors

$$f(1+x) - f(1) \leqslant \frac{1}{2}(1+x-1), \quad \text{soit} \quad \sqrt{1+x} - 1 \leqslant \frac{1}{2}x \quad \text{donc} \quad \sqrt{1+x} \leqslant 1 + \frac{x}{2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Solution de l'exercice 14. Supposons tout d'abord que $x > 0$. La fonction $\arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc notamment dérivable sur $]0, x[$ et continue sur $[0, x]$. On a par ailleurs

$$\forall t \in]0, x[, \quad |\arctan'(t)| = \left|\frac{1}{1+t^2}\right| \leqslant 1.$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à $\arctan$ entre 0 et x donne alors

$$|\arctan(x)| = |\arctan(x) - \arctan(0)| \leqslant |x - 0| = |x|,$$

d'où le résultat attendu.

L'inégalité reste évidemment vraie si $x = 0$. On l'établit pour $x < 0$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis comme dans le premier cas considéré sur l'intervalle $[x, 0]$.

Cette preuve est la traduction du fait que la courbe de la fonction $\arctan$ « ne varie jamais à une vitesse supérieure à 1 » (vitesse instantanée qu'elle atteint uniquement au point $x = 0$).

2-5 ENTRAÎNEMENT – ANNALES – APPLICATIONS – PLUS

Les solutions des exercices 15 à 71 peuvent être trouvées en scannant le code ci-contre.