2.3 Suites récurrentes linéaires doubles

Notion hors-programme

Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ne figurent pas au programme de B/L. Elles apparaissent toutefois fréquemment dans les problèmes de probabilités – ainsi, il faut le dire, que dans quelques exercices hors-programme malencontreusement posés à l'oral de certaines écoles de statistiques... Avoir quelques connaissances théoriques sur le sujet ne peut donc pas faire de mal !

On croise parfois des suites vérifiant une relation de récurrence qui permet d'exprimer u_{n+2} en fonction des termes u_{n+1} et u_n. Le cas le plus simple est celui des *suites récurrentes linéaires doubles* :

Définition A (Suites récurrentes linéaires doubles). Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *récurrente linéaire double*, ou *récurrente linéaire d'ordre* 2, s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$ tels que l'on ait :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \tag{1}$$

Dans toute la suite de cette section, on se donne $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$.

Il est intuitivement clair qu'une suite vérifiant la relation (1) est entièrement déterminée par ses deux premiers termes : en effet, connaître u_0 et u_1 permet de trouver u_2 grâce à l'équation (1), ce qui permet ensuite de trouver u_3, puis u_4 et ainsi de suite. On en déduit la proposition suivante :

Proposition B. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les équations $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$ ainsi que la relation (1).

On pourra s'entraîner à démontrer ce résultat de façon rigoureuse par récurrence double, en établissant pour tout $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}_n$: « le terme u_n existe et est défini de manière unique ».

L'exemple le plus célèbre de suite récurrente double est sans doute le suivant :

Exemple C (Suite de Fibonacci). La suite de Fibonacci est la suite définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Ses premiers termes sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

On trouve mention de cette suite sous la forme d'un problème récréatif posé par Fibonacci dans l'ouvrage *Liber abaci* (« Livre du calcul ») :

> *Quelqu'un a déposé un couple de lapins dans un certain lieu, clos de toutes parts, pour savoir combien de couples seraient issus de cette paire en une année, car il est dans leur nature de générer un autre couple en un seul mois, et qu'ils enfantent dans le second mois après leur naissance.*

Dans le modèle de population décrit ci-dessus, on suppose tacitement que les lapins sont immortels et éternellement fertiles. L'accroissement de population $u_{n+2} - u_{n+1}$ entre le $(n+1)$-ième et le $(n+2)$-ième mois depuis le début de l'expérience est donc exactement égal au nombre de couples fertiles au $(n+2)$-ième mois, c'est-à-dire au nombre u_n de couples présents au n-ième mois, d'où la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Le problème envisagé par Fibonacci consiste à calculer le terme u_{12}. Nous répondrons à cette question dans quelques lignes.

Leonardo Fibonacci (1175 – 1250), mathématicien italien connu pour « sa » fameuse suite (déjà étudiée par le mathématicien indien Piṅgala plusieurs siècles avant notre ère), a aussi joué un rôle considérable dans le développement des mathématiques en popularisant l'usage des chiffres arabes en Occident.

Il est possible de connaître l'expression explicite du terme général d'une suite linéaire double vérifiant la relation (1). La méthode consiste à étudier les solutions d'une équation du second degré bien choisie :

Proposition D (Expression explicite d'une suite récurrente linéaire double). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire double vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n, \tag{1}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$. On considère l'équation du second degré

$$x^2 = ax + b, \tag{2}$$

appelée *équation caractéristique associée à la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors :

- Si l'équation caractéristique (2) admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n.$$

- Si l'équation caractéristique (2) admet une unique solution réelle x_1, alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda x_1^n + \mu n x_1^n.$$

- Si l'équation caractéristique (2) admet deux solutions complexes conjuguées distinctes $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$ (avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$), alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n \cos(n\theta) + \mu r^n \sin(n\theta).$$

On a déjà rencontré la lettre λ, qui désigne généralement une constante réelle indéterminée. La lettre μ joue le même rôle ; il s'agit d'un « mu » minuscule (la majuscule associée, M, est l'ancêtre du M de l'alphabet latin). On utilise aussi μ pour noter le préfixe micro *: par exemple, 1µm est un micromètre (ou* micron*), c'est-à-dire un millionième de mètre.*

Démonstration de la proposition D — On trouvera la démonstration détaillée en suivant ce lien. L'idée est la suivante :

- Dans chacun des cas, on vérifie que deux suites données sont des solutions particulières de la relation (1) (par exemple les suites de termes généraux x_1^n et x_2^n dans le premier cas).
- On montre ensuite que toutes les combinaisons linéaires (c'est-à-dire les sommes coefficientées) de ces suites sont elles aussi solutions.
- On explique enfin qu'il est possible de calibrer les coefficients λ et μ de façon à obtenir une combinaison linéaire dont les premiers termes sont u_0 et u_1, ce qui signifie d'après la proposition d'unicité (B) que cette combinaison linéaire est exactement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

On déduit de la proposition D une méthode d'étude des suites récurrentes linéaires doubles :

Méthode E (Détermination du terme général d'une suite récurrente linéaire double)**.** Pour déterminer explicitement le terme général u_n d'une suite vérifiant

$$u_0 = \alpha, \quad u_1 = \beta \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

on applique la procédure suivante :

- On résout l'équation caractéristique $x^2 = ax + b$.
- On en déduit la forme de u_n grâce à la proposition D.
- On trouve les valeurs des paramètres λ et μ en formant un système de deux équations linéaires à deux inconnues à partir des valeurs $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$.

Exemple F (Valeur explicite de la suite de Fibonacci)**.** Reprenons l'exemple de la suite de Fibonacci définie dans l'exemple C et cherchons à déterminer la valeur explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'équation caractéristique $x^2 = x + 1$ associée à la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ admet pour solutions réelles $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Les conditions initiales $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ permettent alors d'écrire

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \mu = -\lambda \\ \lambda \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} \mu = -\lambda \\ -\sqrt{5}\lambda = 1 \end{cases} \quad \text{soit encore} \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \mu = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}.$$

On en tire l'expression explicite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right). \tag{3}$$

On remarque l'apparition dans cette expression de la constante $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$, qui est le nombre d'or déjà croisé dans le chapitre sur la droite réelle.

Remarquons qu'il n'était pas évident à première vue que la relation 3 définit une suite de nombres *entiers* !

!

Après avoir déterminé les coefficients λ et μ par résolution d'un système linéaire, il n'est pas superflu de vérifier rapidement que l'expression explicite obtenue pour u_n redonne bien les valeurs attendues de u_0 et u_1.

Exemple. Déterminons l'expression explicite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ récurrente linéaire double définie par

$$u_0 = -1, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n.$$

L'équation caractéristique associée est $x^2 = x - \frac{1}{4}$, qui admet $\frac{1}{2}$

pour unique solution. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \left(\frac{1}{2}\right)^n + \mu n \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En évaluant cette égalité en $n = 0$ et en $n = 1$, on trouve

$$\begin{cases} \lambda & = -1 \\ \dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\mu}{2} & = 1 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 3 \end{cases}$$

et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3n\left(\frac{1}{2}\right)^n = (3n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Il arrive que les deux termes connus de la suite ne soient pas les deux premiers ; la méthode adoptée dans ce cas est la même, et seul le système considéré est altéré.

Exemple. Déterminons l'expression explicite de la suite récurrente linéaire double $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1, \quad u_2 = -4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -2u_{n+1} - 4u_n.$$

L'équation caractéristique $x^2 = -2x - 4$ admet deux solutions complexes conjuguées $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que l'on puisse écrire :

La méthode classique donne les solutions $-1 \pm i\sqrt{3}$, dont la forme exponentielle est celle donnée ci-contre.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n \lambda \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + 2^n \mu \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Mais alors $u_0 = \lambda$ et $u_2 = 4\lambda\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 4\mu\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -2\lambda - 2\sqrt{3}\mu$, si bien que

$$\begin{cases} \lambda & = 1 \\ -2\lambda - 2\sqrt{3}\mu & = -4 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \lambda & = 1 \\ \lambda + \sqrt{3}\mu & = 2 \end{cases}$$

d'où $\lambda = 1$ et $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$. On en déduit l'expression explicite du terme général u_n :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right).$$