Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

Introduction au problème inverse

P.-O. Vandanjon, O. Abraham

Intervenant n° 1 : Odile Abraham

Date : 27 février 2015

L'esprit de recherche au cœur des réseaux

LCPC Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

Introduction au problème inverse

- O. Abraham
  - le dragon
  - généralités (pour les problèmes discrets)
  - illustration géophysique appliquée
- S. Palma Lopes : Tomographie de résistivité électrique appliquée au génie civil (pour info)
- P.-O. Vandanjon : Un cas de problème inverse – l'identification du modèle dynamique du compacteur

Introduction au problème inverse

- Principales sources et supports utilisés
  - Cours de Richard Lagabrielle
    - richard.lagabrielle@wanadoo.fr
  - Introduction au problème inverse de Pierre Argoul
    - pierre.argoul@lami.enpc.fr LAMI ENPC
  - William Menke (Geophysical data analysis : discrete inverse therory, Academic Press, Inc., 1989)
  - Applications – Section Reconnaissance et Géophysique (Ifsttar, Nantes)

LCPC Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

Introduction au problème inverse

Ensemble de méthodes pour extraire des informations utiles sur le monde à partir de mesures physiques

Problème inverse

Problème direct

entrées

modèles

sorties

fonctionnelles

confiance

Identification de paramètres

linéarisation

Résolution et erreur

Matrice de covariance

Problème linéaire

Matrice inverse généralisée

Matrices de résolution

Problème sous-déterminé

Propagation de l'erreur

Information a priori

Problème sur-déterminé

Introduction au problème inverse

Problème direct

paramètres du modèle → modèle → prédiction des données

cause → → effet

Problème inverse

données → modèle → estimation des paramètres du modèle

effet → → cause

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

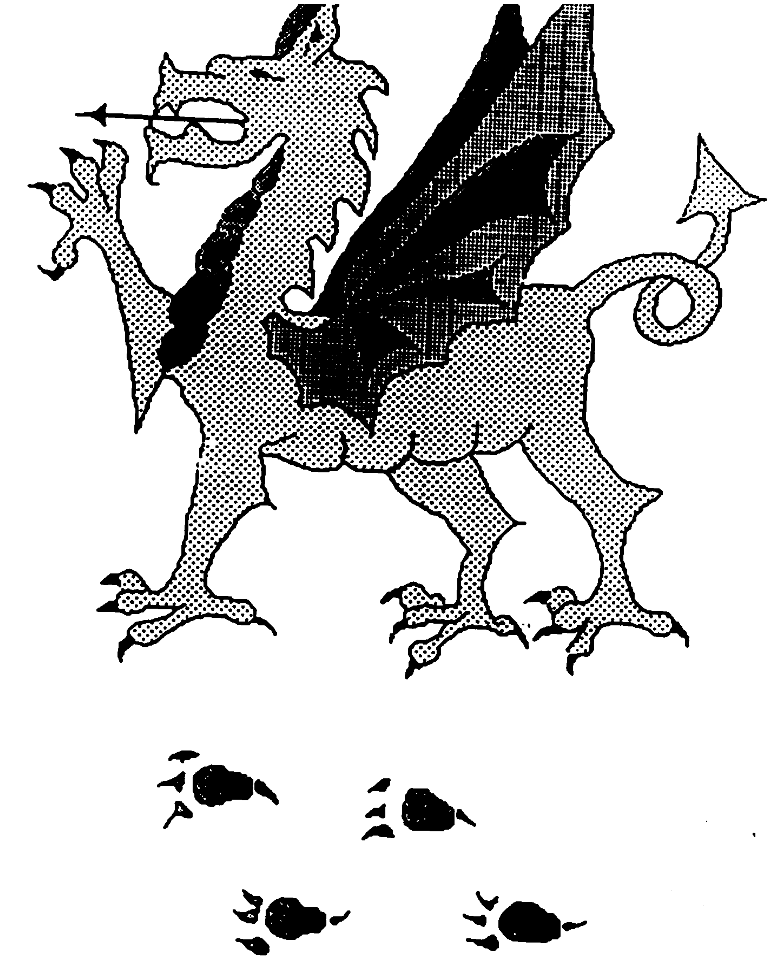
Le dragon

DRAGON cause

?

EMPREINTES effet

© R. Lagabrielle



Problème direct

- quelles traces va imprimer le dragon ?

modèle

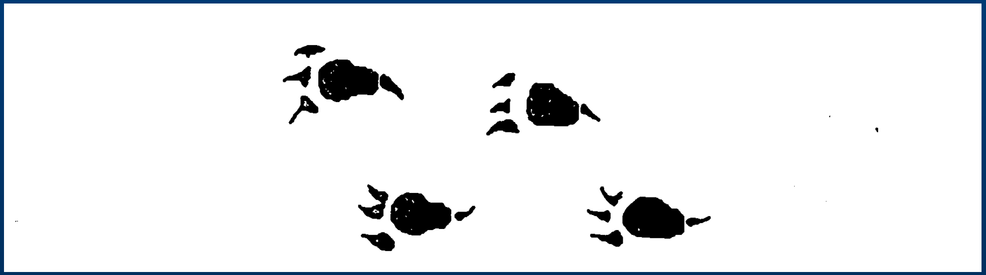
Le dragon

QUOI ??? Cause

?

modèle

EMPREINTES effet



Problème inverse

- d'où viennent ces traces ?
  - si aucune information a priori : détermination du poids peut-être possible...
  - information a priori : animal
  - 4 pattes : vertébré
  - 4 doigts : oiseau
  - les oiseaux n'ont que deux pattes : animal mythique

1846 : Découverte de la planète Neptune par des calculs analytiques

Problème inverse

cause ?

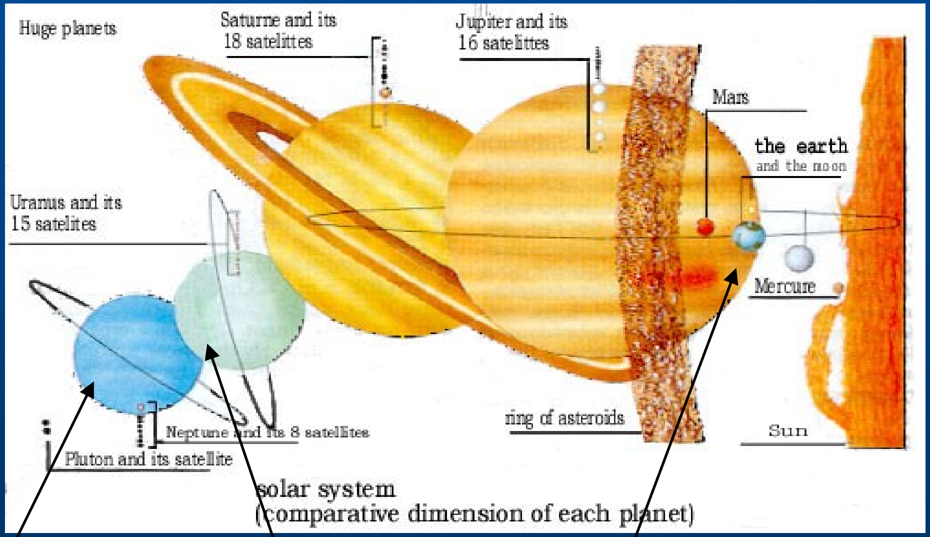
planète Neptune

modèle

lois de Képler

effet (connu, observé)

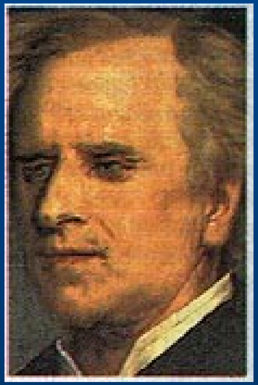
perturbations
de la trajectoire d'Uranus



Neptune

Uranus

La Terre



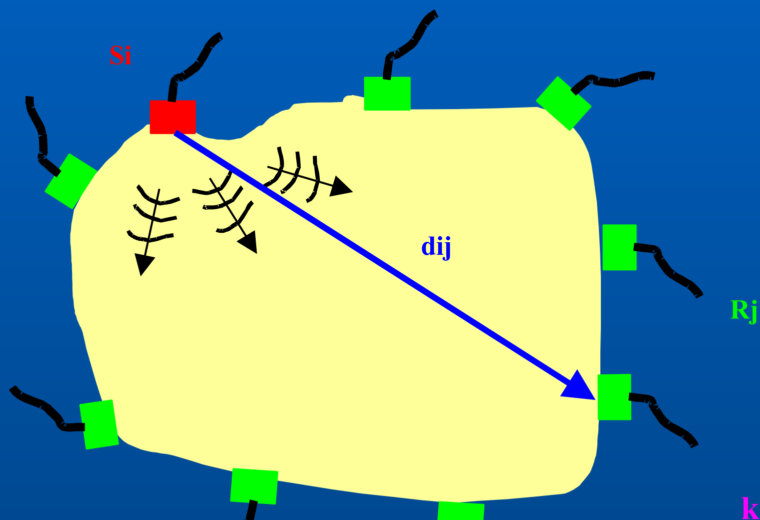
Urbain Le Verrier
1811-1877

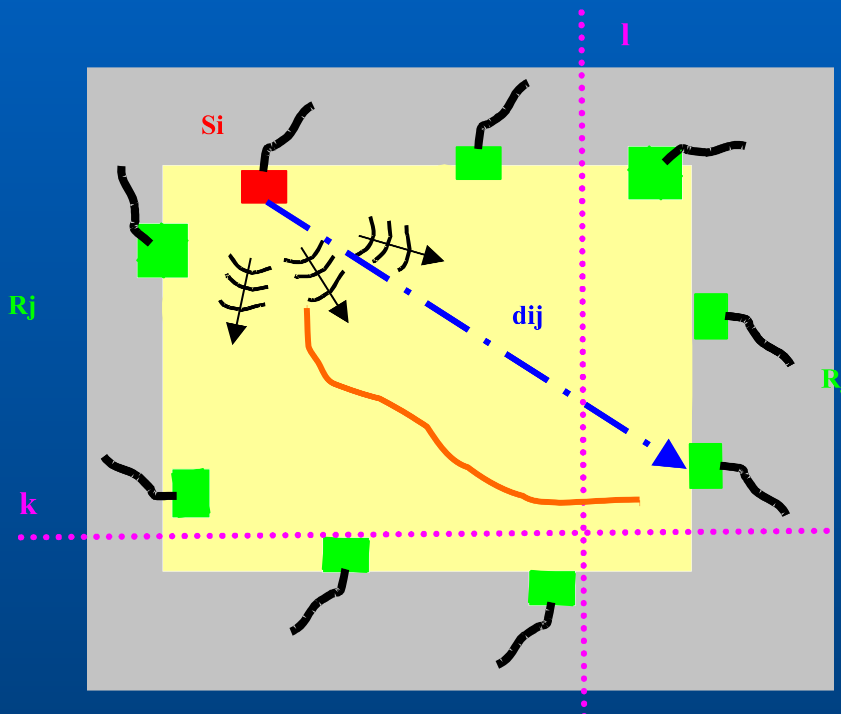
John Couch Adams
1819-1892

Tomographie sismique

- Tomographie sismique: Gaudin B., Magnin O., Abraham O., *Contribution de la tomographie sismique à la conception et à l'optimisation des fondations d'un ouvrage exceptionnel en site difficile : Le pont sur le bras de la Plaine (Ile de la Réunion),* Journées AGAP Qualité, LCPC, Nantes, France, pp73-76, 2002.

Tomographie sismique





Données :
- Coordonnées des Si et Rj ⇒ dij
- Temps t(Si,Rj)

Résultats :
- Vitesses V(k,l)

$$t(Si, Rj) = \int_{rai} \frac{1}{V(x(s), y(s))} ds = \int_{rai} S(x(s), y(s)) ds$$

LCPC Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

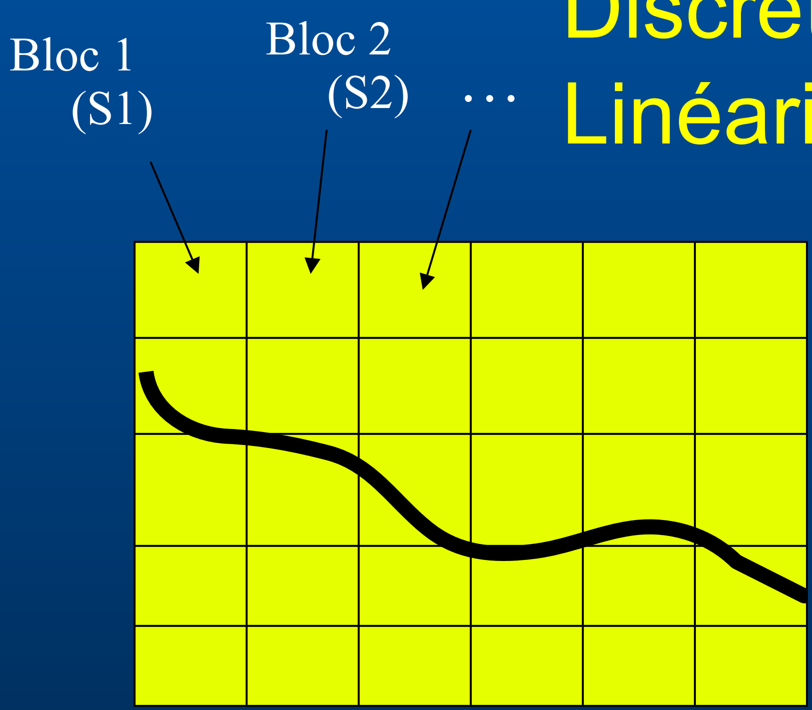
Généralités

$$t(Si, Rj) = \int_{rai} \frac{1}{V(x(s), y(s))} ds = \int_{rai} S(x(s), y(s)) ds$$

Minimisation de t_{obs} - t_{cal}

Discrétisation du problème continu

Linéarisation



$$(t_{obs} - t_{cal})_i = \sum_{j=1}^{n_B} x_{ij} \frac{\Delta V_j}{V_j^2}$$

$$d = G m$$

Généralités

- Problème inverse $F(d,m)=0$
  - séparation données et observables $d-g(m)=0$
  - problème linéaire (explicite) $d-Gm=0$

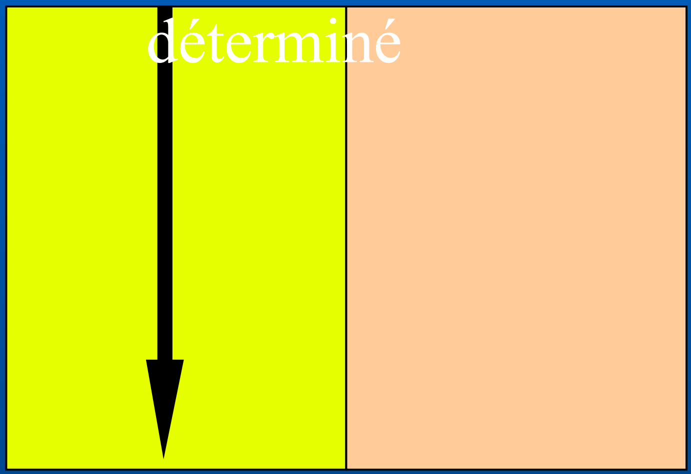
- En général $p \neq n$ et $\mathbf{G}^{-1}$ n'existe pas
- Si $p<n$ (moins de données que d'inconnues) le problème est sous-déterminé
- Si $p>n$ (plus de données que d'inconnues) le problème est sur-déterminé (ou sous et sur déterminé)

Si $p=n$, il arrive souvent que $\det(G)\approx 0$

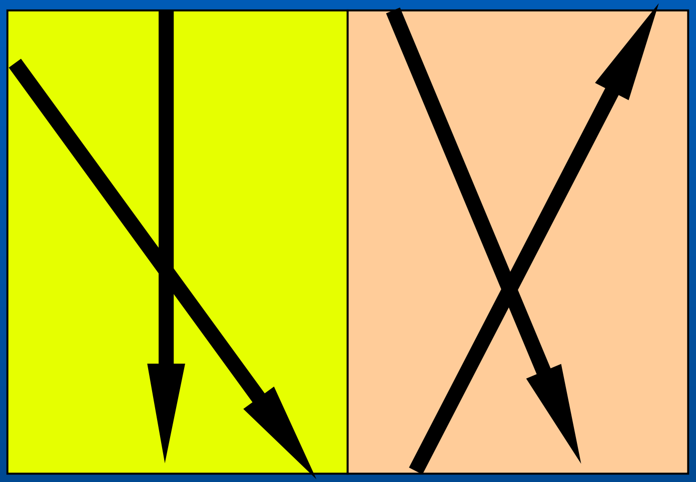
G (pxn)
p données
n inconnues

Généralités

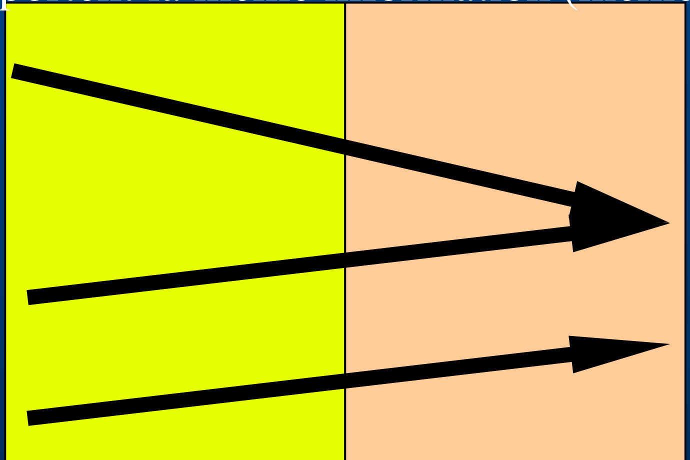
- sous-déterminé



- sur -déterminé



- sous (vitesse individuelle) et sur (vitesse moyenne) déterminé
    - les rayons portent la même information (même chemin)



LCPC Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

Généralités

Les points d'achoppement pour la théorie inverse

- La plupart des problèmes inverses en science conduisent à des problèmes mathématiques qui sont **mal** ou **incorrectement posés** au sens de Hadamard.

Hadamard : le concept d'un problème bien posé

Les caractéristiques d'un problème bien posé :

- **L'existence**
- **L'unicité**
- **La stabilité de la solution**

L'instabilité — **De « petits » changements sur les données d'entrée peuvent entraîner de « grands » changements sur la solution**

Tykhonov & Morozov : Problèmes incorrectement posés : théorie et applications   Masson 1991

- Le choix du critère d'optimisation (avec la procédure de régularisation adaptée)
  Choix des paramètres de régularisation

Généralités – Problème linéaire

- Problème linéaire $d - Gm = 0$
  - minimisation au sens des moindres carrés

$$E = (d - Gm)^T (d - Gm) \qquad \frac{\partial E}{\partial m_i} = 0 \rightarrow G^T Gm - G^T d = 0$$

    - on suppose que $(G^T G)^{-1}$ existe

$$m_{est} = (G^T G)^{-1} G^T d$$

Cette solution n'est souvent pas la seule (cas sous déterminé)

  - on en cherche une de longueur $m m^T$ minimale avec la contrainte $d - Gm = 0$
    - on suppose que $(G G^T)^{-1}$ existe

$$m_{est} = G^T (G G^T)^{-1} d$$

  - si matrice mal conditionnée (problème mixte) : régularisation
    - Moindre carrés pondérés $m_0 = 0$
    - on cherche m qui minimise :

$$\|d - Gm\|^2 + \lambda^2 \|m - m_o\|^2$$

Problème linéaire, cas général

$$\left\| d - Gm \right\|^2 + \lambda^2 \left\| m - m_o \right\|^2$$

La solution de ce problème de minimisation est :

$$m_{est} = m_0 + \left(G^t G + \lambda^2 I \right)^{-1} G^t \left(d - G m_0 \right)$$

m_0 est le vecteur qui décrit un modèle dont on pense qu'il est proche de la solution cherchée (information a priori).

λ^2 est un paramètre de pondération (moindres carrés pondérés) choisi pour régulariser le problème.

Problème linéaire, cas général

Signification du choix de λ^2

1. Si λ^2 est grand, on trouve :

$$m_{est} = m_0 + (G^t G + \lambda^2 I)^{-1} G^t (d - G m_0)$$

$$m_{est} \approx m_0$$

Le modèle estimé est peu influencé par les données, il est proche du modèle a priori. On a une faible confiance dans la valeur de l'information contenue dans les données. L'erreur sur les données ne se propage pas vers le modèle estimé, $m \neq m_{est}$, la résolution est mauvaise.

Problème linéaire, cas général

Signification du choix de λ^2

2. Si λ^2 est petit, on trouve :

$$m_{est} = m_0 + (G^t G + \lambda^2 I)^{-1} G^t (d - G m_0)$$

$$m_{est} \approx (G^t G)^{-1} G^t d$$

Le modèle estimé est peu influencé par les informations a priori. Il dépend fortement des données. On a confiance dans la valeur de l'information contenue dans les données, l'erreur sur les données se propage vers le modèle estimé, $m \approx m_{est}$, la résolution est bonne .

LCPC Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

Problème linéaire, cas sans bruit

$$m_{est} = \left(G^t G + \lambda^2 I\right)^{-1} G^t d$$

Résolution

$$m_{est} = Hd = \underline{HG}\, m$$

matrice de résolution

si HG = I $\quad m_{est} = m \quad$ résolution parfaite

Problème linéaire, cas avec bruit

$$m_{est} = (G^t G + \lambda^2 I)^{-1} G^t d$$

Erreur

$$\Delta m_{est} = H \Delta d$$

$$m_{est} = (G^t G + \lambda^2 I)^{-1} G^t d$$

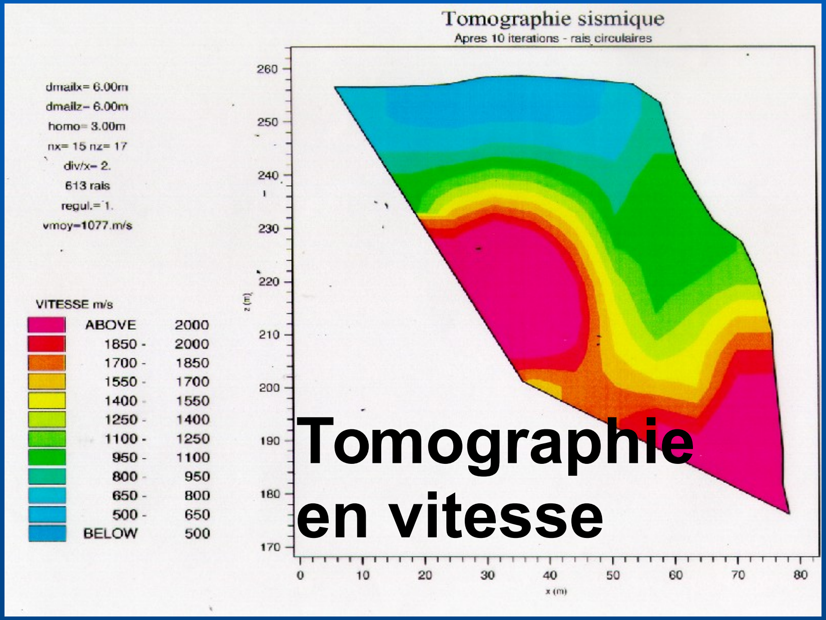
si $\Delta d \Delta d^t = \sigma^2 I$

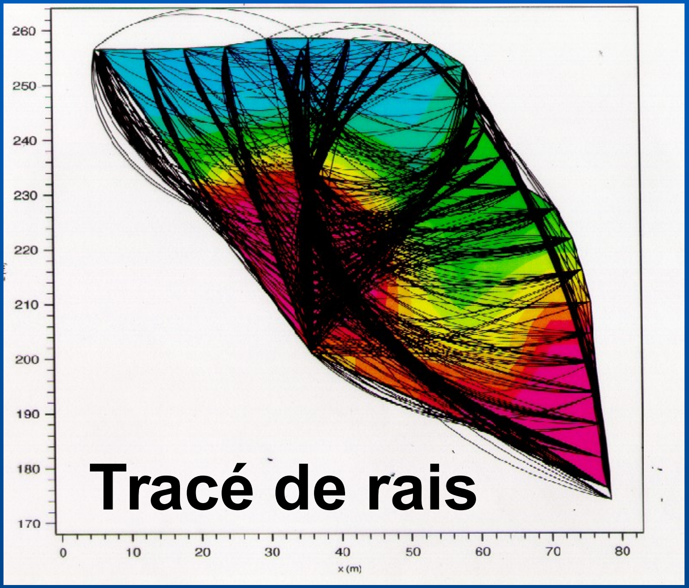
$$\Delta m \Delta m^t = \sigma^2 H H^t$$

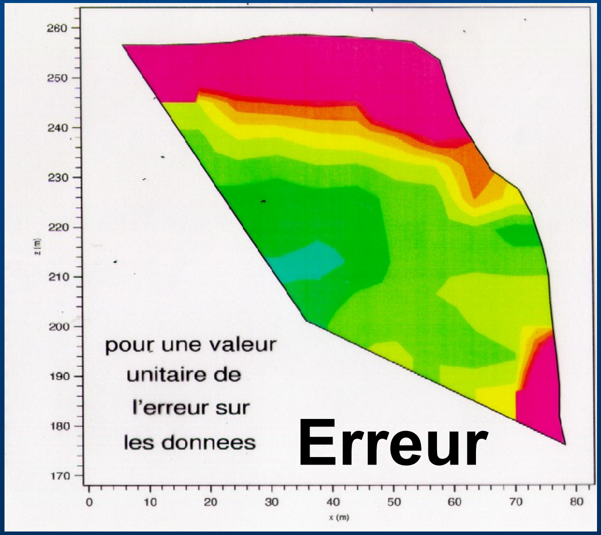
Tomographie sismique

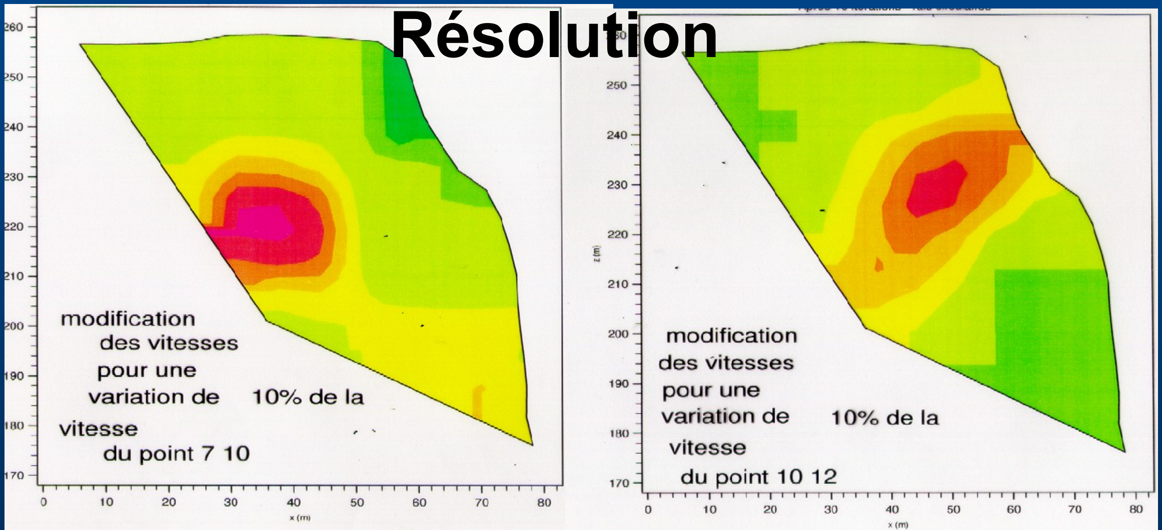
- Tomographie sismique: Gaudin B., Magnin O., Abraham O., *Contribution de la tomographie sismique à la conception et à l'optimisation des fondations d'un ouvrage exceptionnel en site difficile : Le pont sur le bras de la Plaine (Ile de la Réunion),* Journées AGAP Qualité, LCPC, Nantes, France, pp73-76, 2002.

Tomographie sismique





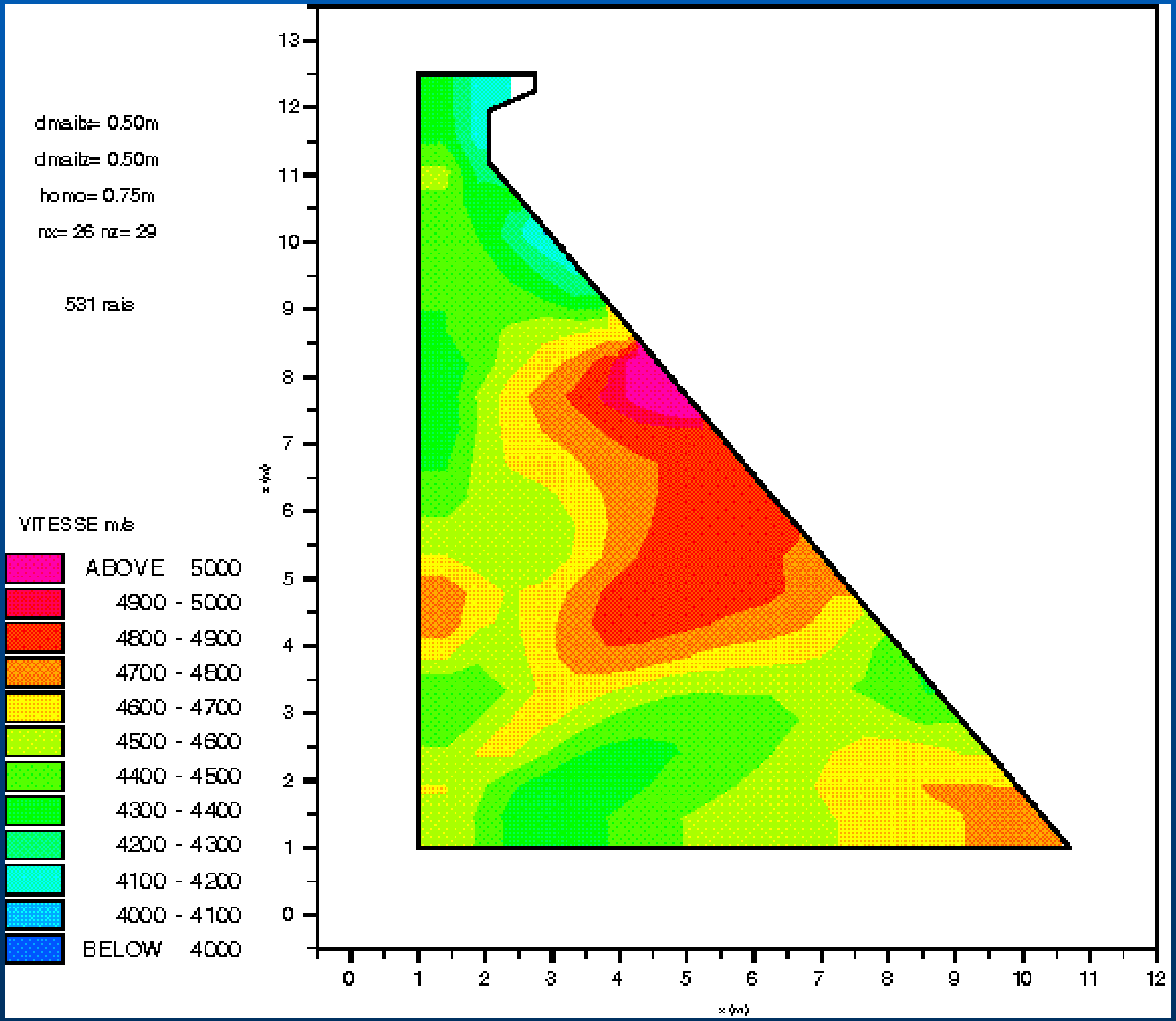




Tomographie sismique

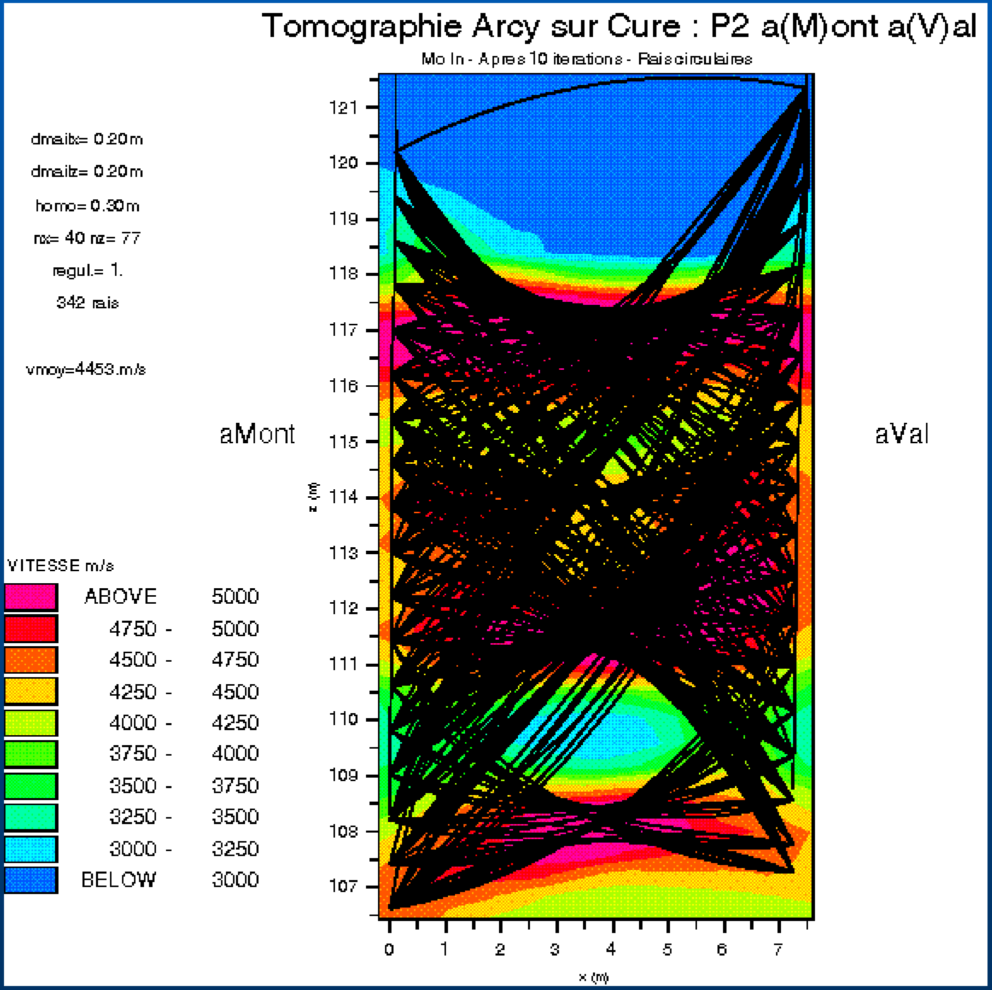
- Barrage de Sorin

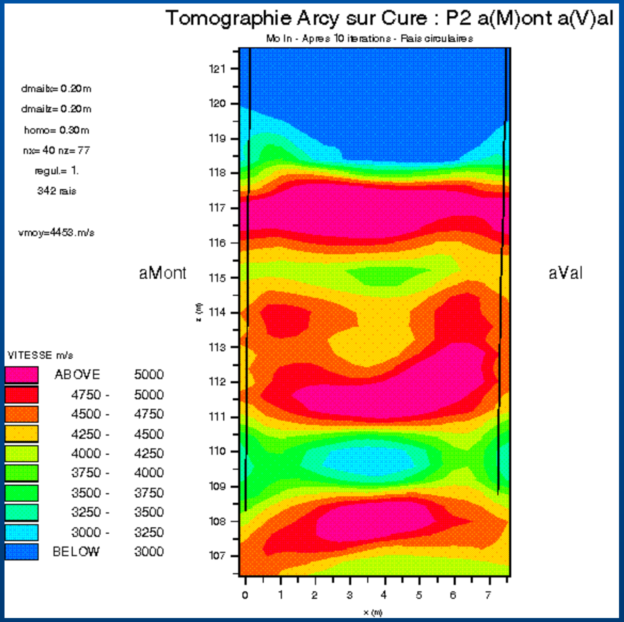
Tomographie sismique



Tomographie sismique

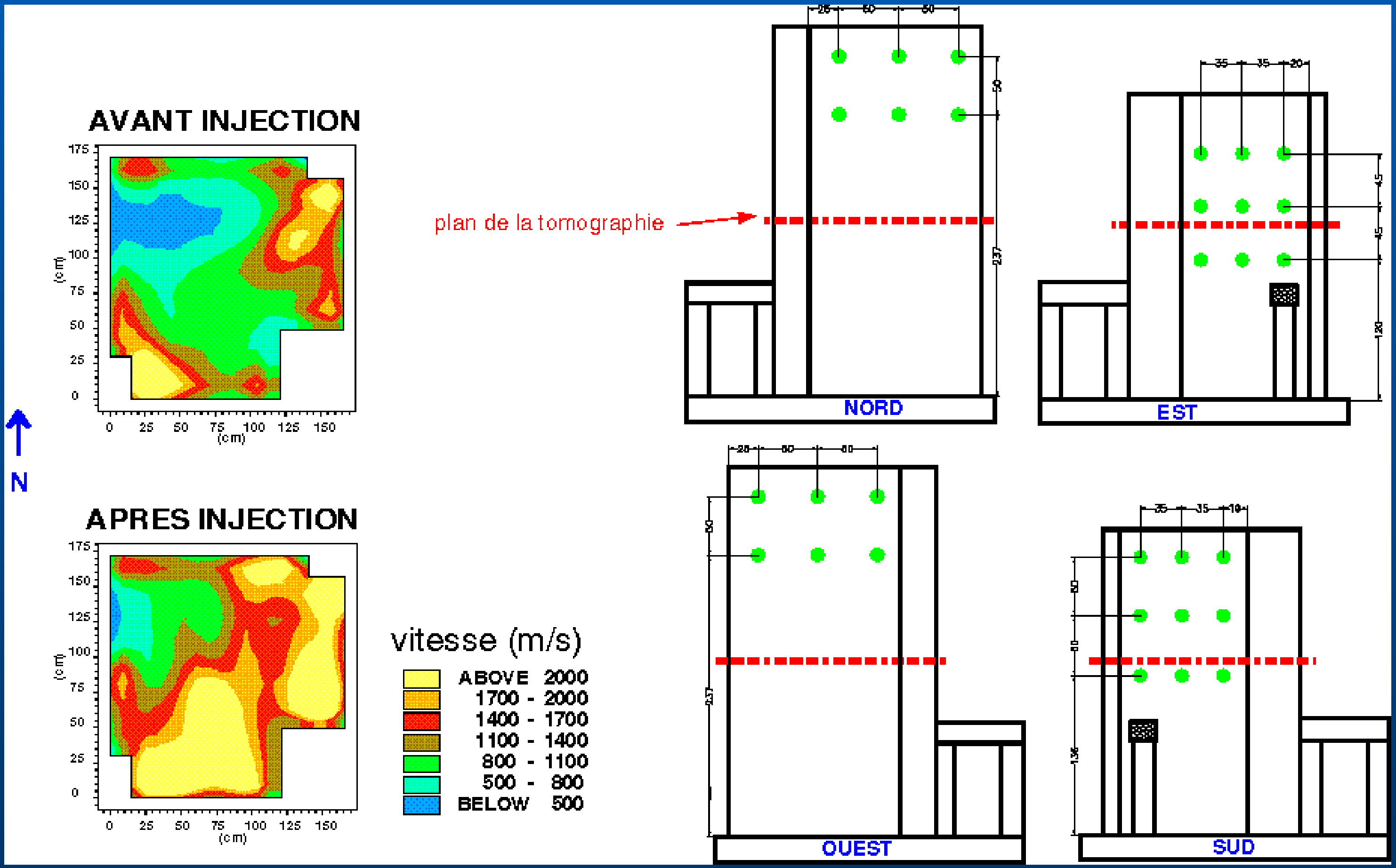
- couverture en rais





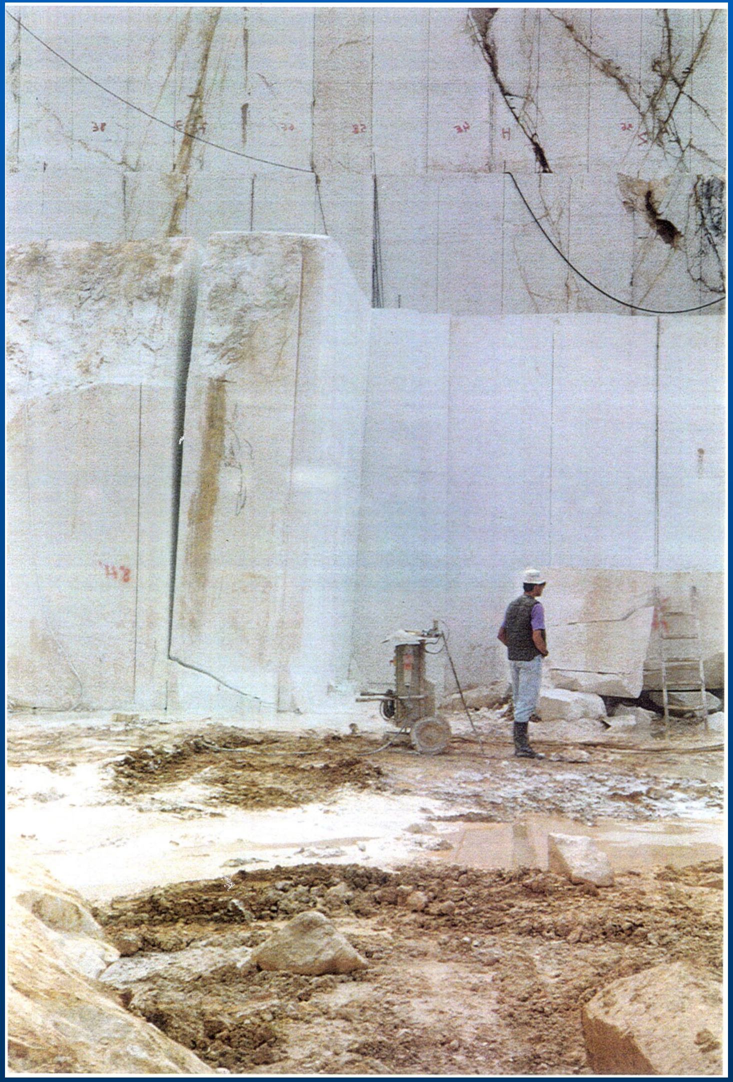
Tomographie sismique

- Contrôle d'injection



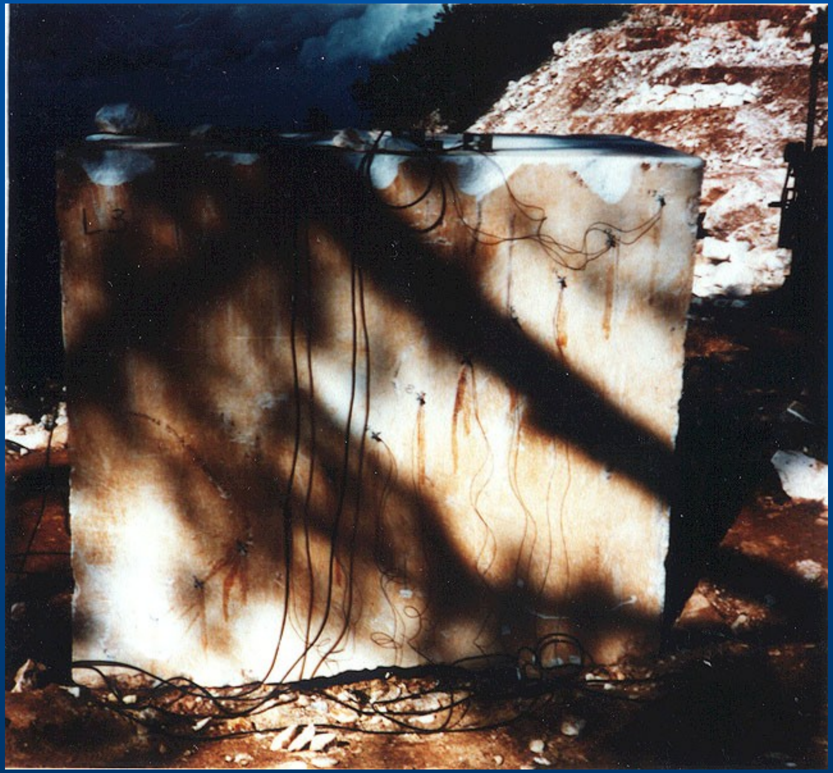
Tomographie sismique

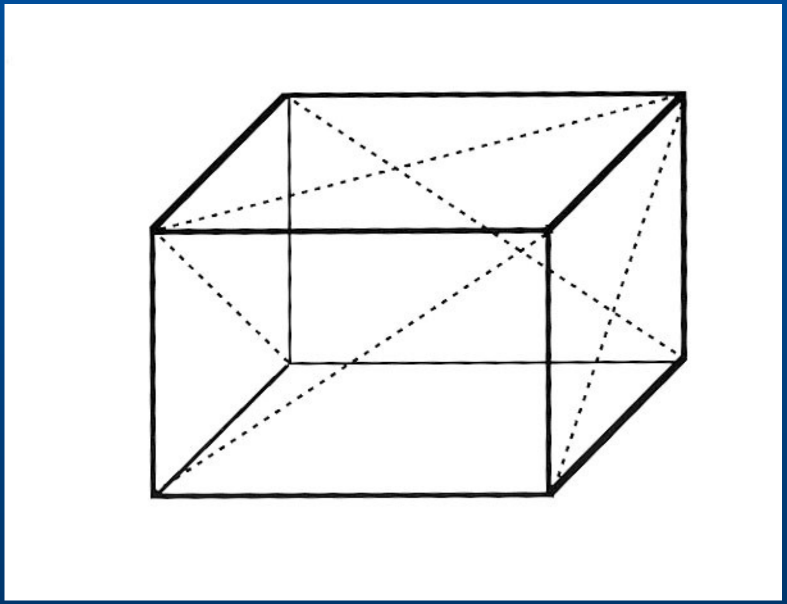
- Imagerie 3D
  - Méthode onéreuse
    - Temps de l'expérience
    - Compétence de l'opérateur
  - Domaine d'application
    - Monuments historiques
    - Appareillage dédié



Tomographie sismique

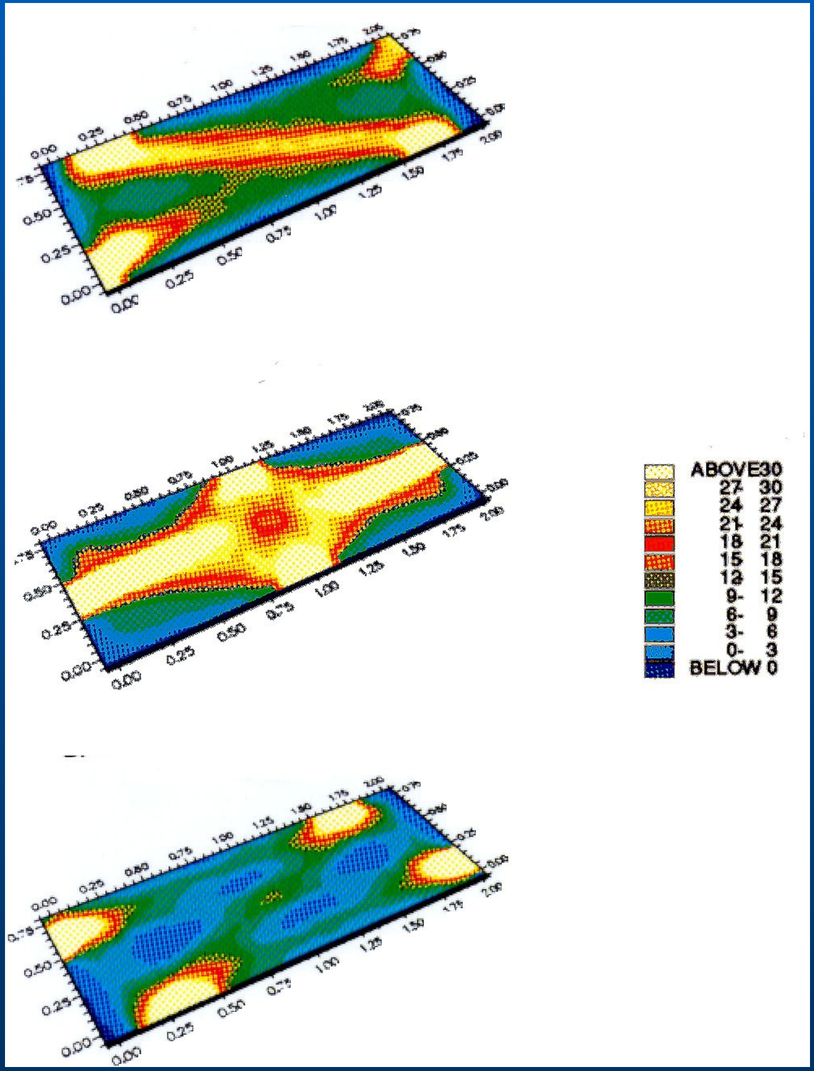
- Imagerie 3D
  - Assurer une bonne couverture en rais

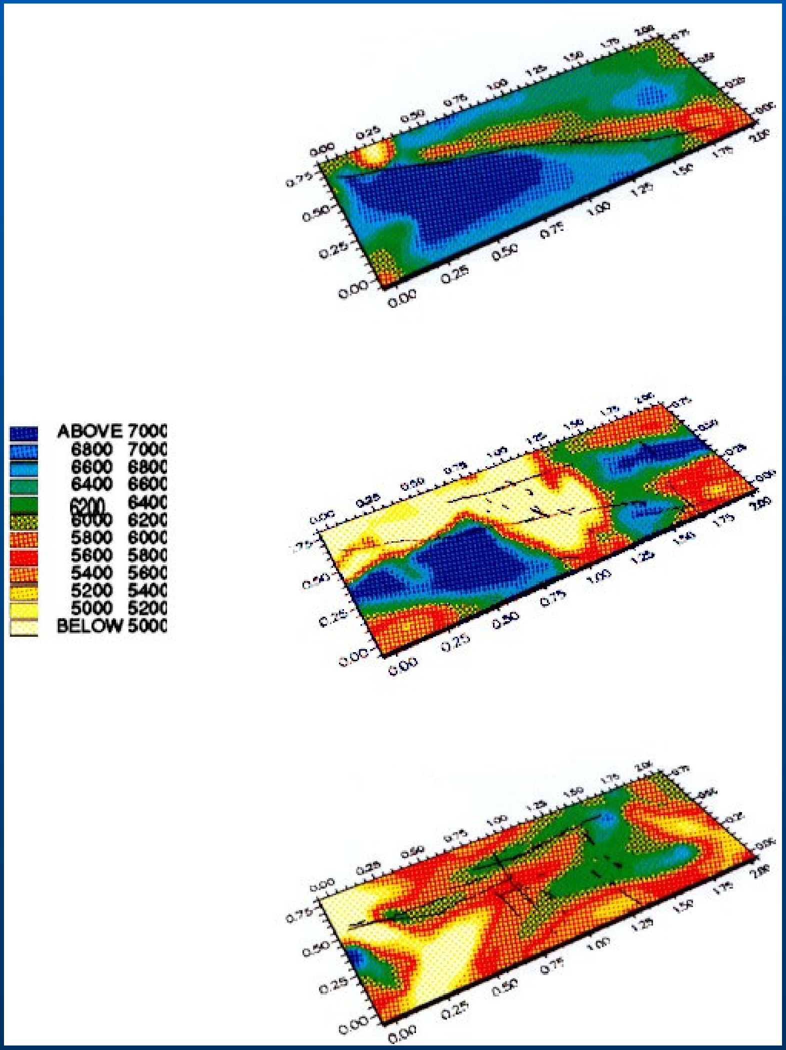




Tomographie sismique

- Imagerie 3D





Problème non linéaire

- Méthodes stochastiques : recherche globale (grand nombre de minima locaux)
  - algorithme génétique,
  - méthode du recuit simulé
  - ...
- Méthode déterministes : recherche locale

$$d_n = g(m_n)$$

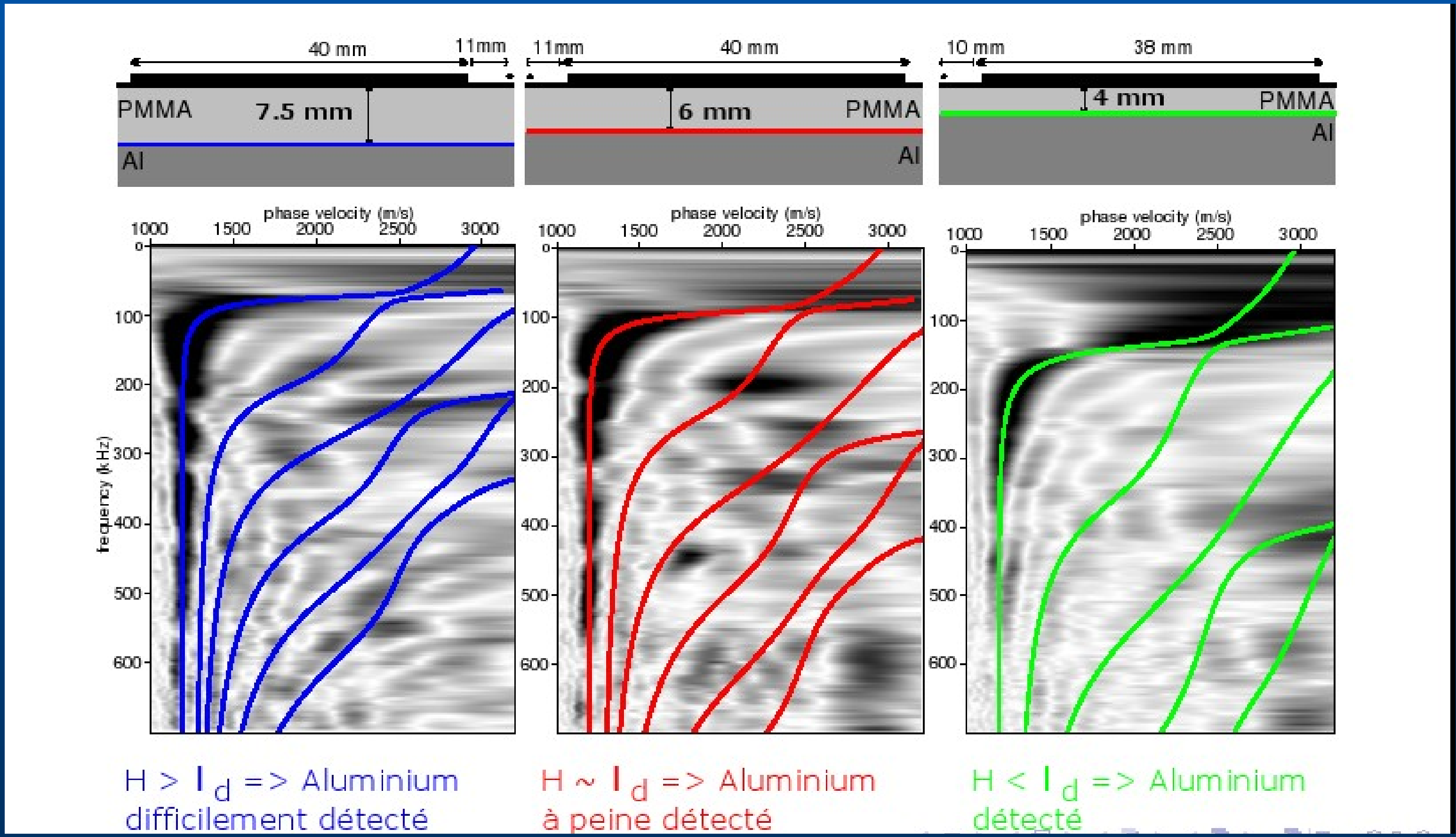
$$d_n + \delta d = g(m_n + \delta m) = g(m_n) + g'(m_n)\delta m$$

$$\delta d = G_n \delta d m_n \quad \text{avec} \quad G_n = g'(m_n)$$

on a supposé que le modèle était bon

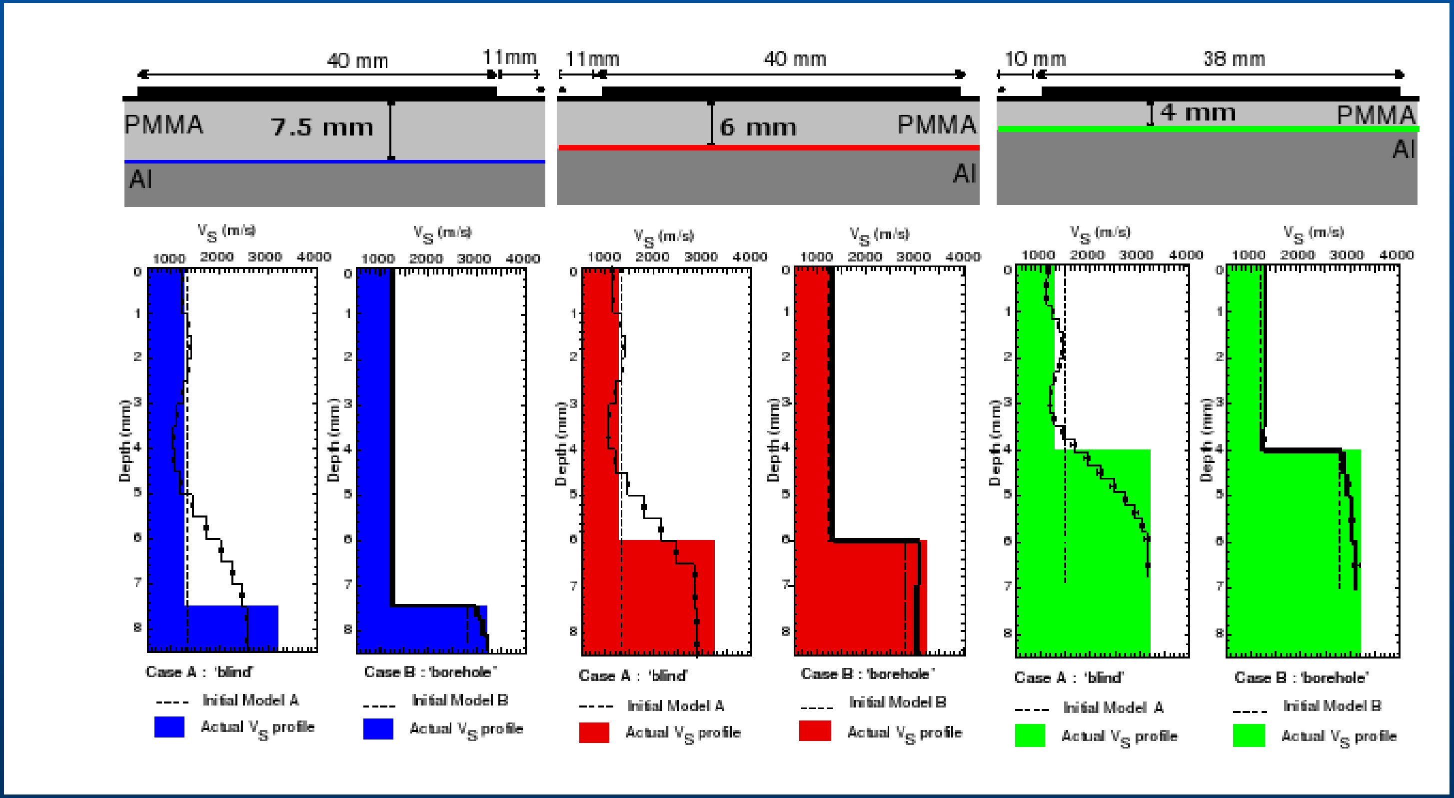
- d = g(m) *à remplacer par* d vaut à-peu-près g(m)

Thèse de L. Bodet (2005)



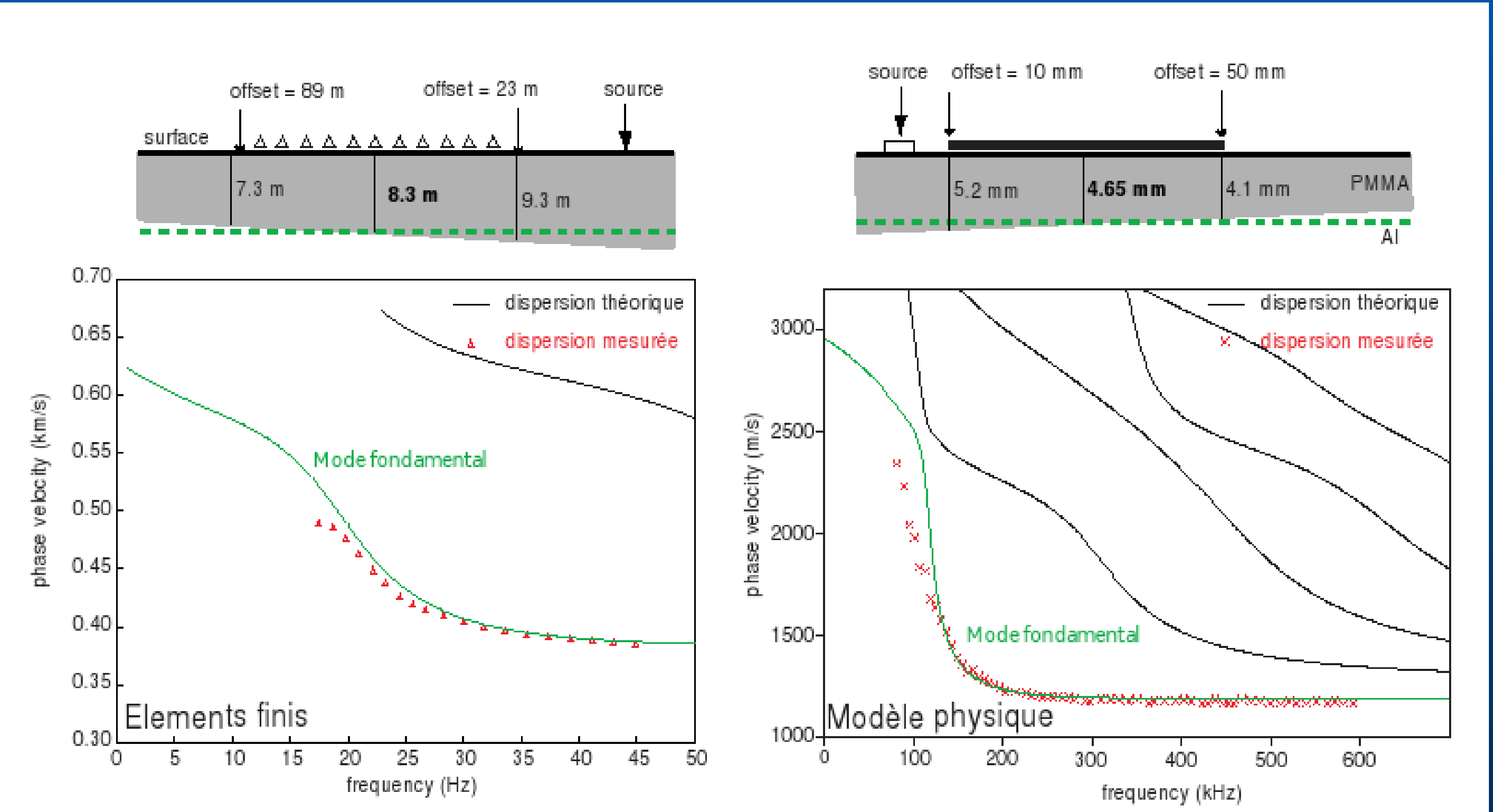
Hypothèse milieu 1D

- Problème inverse
  - profondeur d'investigation
  - offset proches
  - taille du dispositif



Ecart au milieu 1D

- Limite du modèle 1D
  - sous estimation de la vitesse en profondeur



Conclusion

La résolution d'un problème inverse peut passer par les étapes suivantes :

poser le problème direct, le résoudre avec une valeur initiale (a_0) des paramètres inconnus ;

construire la matrice G des dérivées partielles des données par rapport aux paramètres ;

le problème étant maintenant linéaire, résoudre un problème de minimisation pour calculer une variation des paramètres ;

résoudre à nouveau le problème direct avec les nouveaux paramètres ;

Conclusion

La résolution d'un problème inverse nécessite généralement le calcul des dérivées partielles des données par rapport aux paramètres afin de construire la matrice G qui peut aussi être considérée comme une matrice de sensibilité des mesures aux paramètres.

Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

Conclusion

Le formalisme mathématique auquel on a recours pour poser et résoudre un problème direct, assorti de quelques hypothèses simples (croissance stricte…) permet parfois de démontrer mathématiquement l’existence et l’unicité de la solution d’un problème inverse.

Il ne permet pas de décider de l’unicité du problème inverse pratique.

Plusieurs causes peuvent être à l’origine de la non-unicité.

Conclusion

La première cause provient du formalisme lui même ; il ne décrit pas les phénomènes réels mais il les ramène à leurs caractéristiques les plus simples : il ne faudrait pas dire « d est égal à f(m) », mais plutôt « d est à-peu-près égal à f(m) » .

Il est très important de savoir quantifier cet « à-peu-près » pour évaluer ses conséquences sur la solution du problème inverse.

Conclusion

La deuxième cause provient du fait que les données sont le plus souvent entachées d'erreur et que cette erreur se propage vers les valeurs estimées des paramètres solutions du problème inverse.

Enfin lorsque la résolution du problème inverse passe par la minimisation d'un critère quadratique, l'unicité de la solution dépend de la topologie de la surface décrivant ce critère en fonction des paramètres inconnus. Cette surface a-t-elle un seul minimum, ou présente-t-elle des extrema secondaires, est-elle creuse (dérivées secondes élevées) ou presque plate (dérivées secondes faibles) autour du minimum ?

Conclusion

Un problème inverse n'a généralement pas de solution unique, mais un ensemble de solutions ; la question posée est donc plutôt de décrire cet ensemble de solutions et d'en déterminer les propriétés communes.

Introduction au problème inverse

- O. Abraham
  - le dragon
  - généralités (pour les problèmes discrets)
  - illustration géophysique appliquée
- S. Palma Lopes : Tomographie de résistivité électrique appliquée au génie civil
- P.-O. Vandanjon : Un cas de problème inverse – l'identification du modèle dynamique du compacteur