Mouvement brownien sur une variété riemannienne
Rapport de stage de M1

Pierre PERRUCHAUD
Sous la direction de Jürgen ANGST

Juin-juillet 2014

Introduction

Ce rapport rend compte du stage de M1 que j'ai effectué sous la direction de Jürgen Angst (Université de Rennes 1). On y trouvera une construction du mouvement brownien sur une variété riemannienne due à Eells, Elworthy et Malliavin, que l'on peut trouver dans l'ouvrage de référence de E. Hsu [2 HSU].

Dans cette optique, la première partie expose certains prérequis, essentiellement les cours obligatoires en L3 et M1 à l'ENS de Lyon, ainsi qu'une certaine connaissance du mouvement brownien (le cours de processus stochastiques d'Emmanuel Jacob suffisant amplement, par exemple).

Les deuxième et troisième parties, largement indépendantes, introduisent des outils respectivement géométriques et probabilistes nécessaires à la mise en œuvre de la construction proprement dite, abordée dans la quatrième et dernière partie. Il s'agit respectivement d'une introduction à la géométrie riemannienne et de la construction du formalisme des équations différentielles stochastiques.

Pour une construction purement formelle du mouvement brownien, on pourra consulter l'article de Bär et Pfäffle [1 BÄR+] ; pour une introduction à la construction telle qu'elle est présentée ici, l'article de Manton [3 MANTON] est très approprié.

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

ENS DE LYON

Table des matières

1 Prérequis et notations

Pour la partie géométrique de ce rapport, on ne considèrera comme connues à une exception près que les notions vues par tous les étudiants du M1 de l'ENS de Lyon. Cela regroupe les cours de calcul différentiels 1 et 2 2012-2013 et le cours de géométrie avancée de Jean-Claude Sikorav 2013 [6 Sikorav], contenant principalement les concepts de variétés différentiables et de plans tangents ainsi que les outils élémentaires associés aux applications différentiables. On aura aussi besoin succintement de la dérivée de Lie et de formes volumes. La variable $\mathcal{M}$ désignera toujours, sauf indication contraire, une variété lisse de dimension d.

Le cours de géométrie différentielle d'Olivier Druet 2014 sert de base à la partie 2. Il n'est pas indispensable à la lecture, mais je me suis permis de peu (parfois même de ne pas) détailler les preuves vues dans le cadre de ce cours. De plus, les propriétés de l'ensemble des tenseurs constituent l'exception évoquée et ne sont que rappelées brièvement ci-après.

Définition 1.1.

Étant donnée une carte locale ϕ d'une variété $\mathcal{M}$ de dimension d, on dispose d'un système de coordonnées local $(x_\alpha)_\alpha = \left(\left(\phi^{-1}\right)^\alpha\right)_\alpha$ sur $\mathcal{M}$. Dans ce cas, $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ désigne le vecteur $\mathrm{d}\phi_x(e_\alpha)$ où $(e_\alpha)_\alpha$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$, et $(\mathrm{d}x^\alpha)_\alpha$ la base duale de $\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right)_\alpha$.

Définition 1.2 (Tenseurs)**.**

On appelle tenseur *sur un espace vectoriel E une application $(p+q)$-linéaire $t : E^p \times (E^*)^q \to \mathbb{R}$.*

On appelle champ de tenseurs *de type (p,q) et de classe $\mathcal{C}^k$, ou plus simplement tenseur sur une variété $\mathcal{M}$ un ensemble de couples $T = \{(x, T_x), x \in \mathcal{M}\}$ où T_x est un tenseur de type (p,q) sur $T_x\mathcal{M}$ et tel que T est $\mathcal{C}^k$. On note $T^{(p,q)}\mathcal{M}$ l'ensemble des tenseurs de type (p,q) sur $\mathcal{M}$.*

L'ensemble des tenseurs est muni du produit tensoriel $T, U \mapsto T \otimes U$ tel que :

$$T \otimes U(X_1, \cdots, X_{p+p'}, \eta^1, \cdots, \eta^{q+q'}) = T(X_1, \cdots, X_p, \eta^1, \cdots, \eta^q)U(X_{p+1}, \cdots, X_{p+p'}, \eta^{q+1}, \cdots, \eta^{q+q'})$$

On utilisera les conventions de sommation d'Einstein ; si un symbole est répété en indice et en exposant, on somme sur l'indice en question. Les exposants sont des coordonnées de vecteurs, les indices des coordonnées de forme vectorielle. Ainsi, $\eta(X) = \eta_i X^i = \sum_i \eta_i X^i$ représente la forme linéaire η appliquée à X dans un certain système de coordonnées. On peut donc écrire, pour un tenseur T générique, $T = T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_q}}$.

On utilisera aussi la notation C^J_I pour la contraction définie par :

$$(C^J_I T)^{j_1 \cdots j_{J-1} j_{J+1} \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_{I-1} i_{I+1} \cdots i_p} = T^{j_1 \cdots j_{J-1} \alpha j_{J+1} \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_{I-1} \alpha i_{I+1} \cdots i_p}.$$

Pour ce qui est des probabilités, on demandera plus de prérequis ; on supposera connus la définition du mouvement brownien et les propriétés élementaires de son comportement local et à grande échelle, ainsi que quelques résultats classiques de martingales à temps continu, tels que que le théorème suivant.

Théorème 1.1.

Soit M une martingale. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i. *M_t converge en norme L^1 vers une variable aléatoire M_∞ ;*

ii. *il existe une variable aléatoire $M_\infty \in L^1$ telle que $M_t = \mathbb{E}\left[M_\infty | \mathcal{F}_t\right]$;*

iii. *la famille $\{M_t\}_t$ est uniformément intégrale.*

Dans ce cas, la convergence a lieu au sens presque sûr.

Si de plus la martingale est bornée au sens L^p, alors M_∞ est dans L^p et la convergence a lieu pour cette norme.

Dans ce rapport, toutes les filtrations seront considérées comme complètes et continues à droite, c'est-à-dire respectivement :

1. que tout ensemble $E \subset \Omega$ tel que $E_- \subset E \subset E_+$ avec $E_-, E_+ \in \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{P}(E_+ \setminus E_-) = 0$ appartient à $\mathcal{F}_t$;
2. que pour tout t, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$

pour un espace filtré $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$.

On étend la définition de l'espace de Wiener.

Définition 1.3 (Espace de Wiener)**.**
On appele espace de Wiener *l'espace* $\mathbf{W} = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathcal{M})$*, ou parfois* $\mathbf{W} = \mathcal{C}\left(\mathbb{R}, \overline{\mathcal{M}}\right)$*.*

On a ici noté $\overline{\mathcal{M}}$ *le compactifié d'Alexandrov de* $\mathcal{M}$*, c'est-à-dire l'ensemble* $\mathcal{M} \cup \{\infty\}$ *muni de la topologie des ouverts de* $\mathcal{M}$ *auxquels on adjoint les ensembles* ${}^cK \cup \{\infty\}$ *où* K *est un compact de* $\mathcal{M}$*.*

Il est muni de la plus petite filtration complète continue à droite telle que $\{X_u \in A\} \in \mathcal{F}_t$ *pour tout* $u < t$ *et pour tout* A *borélien de* $\mathcal{M}$*.*

On notera, pour un processus X à temps continu, indifférement $X(t)$ ou X_t sa valeur au temps t. Étant donné un temps d'arrêt T, on notera X^T le processus stoppé défini par $X_t^T = X_{t\wedge T}$.

2 Géométrie riemanienne

2.1 Connexion

Étant donné un champ de vecteurs X sur une variété $\mathcal{M}$, essayons de le dériver en x dans une direction v. On voudrait poser :

$$\mathrm{d}X_x(v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left(X(\gamma(\varepsilon)) - X(\gamma(0))\right)$$

où γ est une courbe tracée sur M telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = v$. Or, la différence n'est pas bien définie, puisque $X(x)$ et $X(y)$ n'appartiennent pas au même espace vectoriel si x et y sont distincts.

Lorsque l'on n'est plus dans le cadre euclidien, il faut choisir la manière dont on dérive les champs de vecteurs. Pour cela, on choisit une application qui, étant donnés deux champs de vecteurs X et Y, à un point x de M associe la dérivée de X selon $Y(x)$. Une telle application est appelée connexion.

Si F est un fibré de $\mathcal{M}$, on note $\Gamma^n F$ l'ensemble des sections de classe $\mathcal{C}^n$ de F. En particulier, $\Gamma^\infty(T\mathcal{M})$ est l'ensemble des champs de vecteurs lisses sur $\mathcal{M}$. Si l'exposant est omis, les sections considérées seront lisses.

Définition 2.1 (Connexion)**.**
Soit $D : \Gamma(T\mathcal{M})^2 \to \Gamma(T\mathcal{M})$*. On dit que* D *est une* connexion *si elle vérifie les propriétés suivantes pour tout* $X, Y \in \Gamma(T\mathcal{M})$ *et tout* $f \in \mathcal{C}^\infty$ *:*
— $D(fX, Y) = fD(X, Y)$ *;*
— $D(X, fY) = fD(X, Y) + (X \cdot f)Y$*.*

La première condition nous assure que la dérivée de X selon $Y(x)$ ne dépend de X qu'en x, et de Y qu'au voisinage de x pour la seconde. On n'aura donc pas de scrupules par la suite à parler de $D_u V$ pour un vecteur u et un champ de vecteurs V défini localement, voire le long d'une courbe ayant u pour dérivée. On peut aussi noter que la dérivation classique dans les espaces euclidiens est bien une connexion.

On peut écrire les coordonnées de la connexion dans une carte locale. Si l'on définit les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k par :

$$D\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k},$$

on déduit alors des propriétés précédentes :

$$D(X,Y) = \left(X^i \partial_i Y^k + \Gamma^k_{ij} X^i Y^j\right) \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

La donnée d'une connexion permet de comparer deux vecteurs tangents en deux points différents de la variété par ce que l'on appelle le transport parallèle. Soit en effet $\gamma : [0,T] \to \mathcal{M}$ un chemin $\mathcal{C}^1$ partant de x. Soit X_0 un vecteur tangent en x. On peut alors trouver deux champs de vecteurs X et Γ tels que :

— $X(x) = X_0$;
— $\Gamma(\gamma(t)) = \gamma'(t)$ pour tout $t \in [0,T]$;
— $D(\Gamma, X)(\gamma(t)) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$.

On dit que $X \circ \gamma$ est le transport parallèle de X_0 le long de γ. Il s'agit dans une carte de la solution de l'équation différentielle :

$$\dot{Z}^k(t) + \Gamma^k_{ij} \gamma'(t)^i Z^j(t) = 0$$

ce qui montre que l'on a existence et unicité locales. Plus généralement, le transport parallèle $(\Phi^\gamma_t)_t$ le long de γ est la famille d'applications qui à $X(\gamma(0))$ associe $X(\gamma(t))$ pour tout $X_0 \in T_x\mathcal{M}$. C'est une famille d'isomorphismes de $T_x\mathcal{M}$ dans $T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$.

Ce transport permet ainsi de comparer deux vecteurs de deux plans tangents différents en se donnant un chemin reliant ces deux points. On retrouve alors la connexion en écrivant l'accroissement qui n'avait pas de sens plus haut :

$$D(X,Y)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \Big(\left(\Phi^\gamma_\varepsilon\right)^{-1} Y(\gamma(\varepsilon)) - Y(\gamma(0)) \Big)$$

où $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = X(x)$.

Une fois que l'on dispose d'une connexion, on peut étendre la notion de dérivation ainsi définie à l'ensemble des tenseurs :

Définition 2.2.

Soient D une connexion, et X un champ de vecteurs. Il existe une unique application D_X définie sur l'ensemble des tenseurs lisses telle que :

i. $D_X f = X \cdot f$ *pour toute fonction f lisse ;*
ii. $D_X Y = D(X,Y)$ *pour tout champ de vecteurs Y lisse ;*
iii. $D_X T$ *est du même type que T ;*
iv. $D_X(T_1 \otimes T_2) = D_X T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes D_X T_2$ *;*
v. $D_X(C^j_i T) = C^j_i D_X T$.

On notera alors ∇T la dérivation définie par :

$$\nabla T(X, Y_1, \cdots, Y_p, \eta^1, \cdots, \eta^q) := D_X T(Y_1, \cdots, Y_p, \eta^1, \cdots, \eta^q).$$

Si $T = T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \mathrm{d}x^{i_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{i_p} \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x_{j_q}}$ dans une carte, alors :

$$\begin{aligned}
(D_X T)^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} &= X^i \partial_i T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} \\
&\quad - X^i \Gamma^\alpha_{i,i_1} T^{j_1 \cdots j_q}_{\alpha i_2 \cdots i_p} - \cdots - X^i \Gamma^\alpha_{i,i_p} T^{j_1 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_{p-1}\alpha} \\
&\quad + X^i \Gamma^{j_1}_{i,\alpha} T^{\alpha j_2 \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_p} + \cdots + X^i \Gamma^{j_q}_{i,\alpha} T^{j_1 \cdots j_{q-1}\alpha}_{i_1 \cdots i_p}
\end{aligned}$$

dans la même base.

Définition 2.3 (Géodésique).

On appelle géodésique *une courbe x de classe $\mathcal{C}^1$ d'accélération nulle le long d'elle-même, c'est-à-dire telle que $D_{x'(t)}x'(t) = 0$. Une telle courbe $x : [0, T[\to \mathcal{M}$ est solution dans toute carte de l'équation $(x^k)''(t) + \Gamma^k_{ij}(x^i)'(x^j)' = 0$.*

On notera γ^X la géodésique issue de X.

Un point de départ x et une direction v définissent donc une géodésique (au moins localement) ; il s'agit de l'unique géodésique partant de x et ayant v pour vecteur tangent en 0. Si cette courbe est définie jusqu'en 1, alors on note $\mathrm{Exp}_x(v)$ sa valeur en 1. L'application $\mathrm{Exp}_x : T_x\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ est donc bien définie sur un voisinage de 0, et on l'appelle l'application exponentielle.

Définition 2.4 (Torsion).

On appelle torsion *et on note T le tenseur défini par $T(X, Y, \eta) = \eta\,(D_X Y - D_Y X - [X, Y])$. S'il est nul, on dit que la connexion est sans torsion.*

Dans une carte, la torsion a pour coordonnées $\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$, et ainsi une connexion sans torsion vérifie $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Si l'on interprète $T(X, Y, \eta)$ comme $\eta(T(X, Y))$ (on abusera allègrement de cette notation), la torsion mesure la transformation autour de l'axe de déplacement opérée par le transport parallèle ; une connexion avec torsion fait tourner les repères autour de la courbe à la manière d'un tire-bouchon. En effet, si X et Y sont deux vecteurs tangents à $\mathcal{M}$ en x, soit $Y(t) := \Phi_t^{\gamma^X}(Y)$ le transport parallèle de Y le long de de la géodésique issue de X. On peut s'attendre à ce que l'extrémité de Y se déplace à une vitesse $D_X Y$, dans un certain sens. En fait, si $\gamma(\eta, \varepsilon) := \gamma^{Y(\varepsilon)}(\eta)$ est le chemin tracé par un point à une distance η de γ^X dans la direction $Y(\varepsilon)$, sa dérivée double en η et ε est effectivement $D_X Y$. À l'ordre suivant, cette quantité diffère de la géodésique issue de X d'une quantité $\varepsilon\eta T(X, Y)$, selon la figure 1.

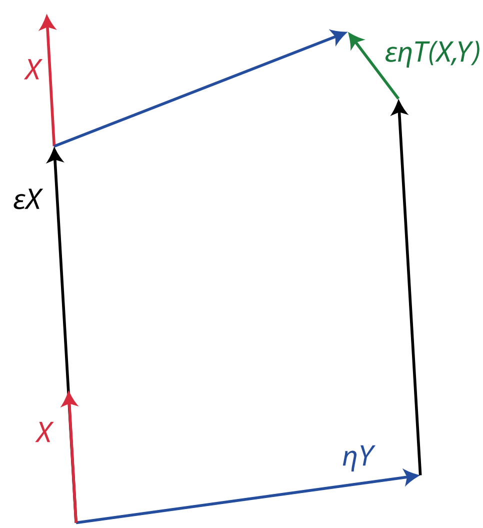

Figure 1 – Variation d'un vecteur lors d'un transport parallèle

Définition 2.5 (Courbure).

Soit D une connexion sans torsion.

On appelle courbure de Riemann *et on note $\mathcal{R}$ le tenseur défini par :*

$$\mathcal{R}(X, Y, Z, \eta) = \eta\left(D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X,Y]} Z\right).$$

Si l'on voit de même $\mathcal{R}(X, Y, Z, \eta)$ sous la forme $\eta(\mathcal{R}(X, Y, Z))$, cette courbure a des manifestations assez intuitives. Je présente ici deux interprétations que j'aime garder à l'esprit quand je considère cet objet. On manipulera dans la suite deux champs de vecteurs X et Y de crochet de Lie nul, qui représentent donc des coordonnées partielles.

Si x est un point de la variété et Z un vecteur tangent en ce point, alors on peut transporter ce vecteur parallèlement le long d'une boucle élémentaire selon le flot de X puis Y et inversement, comme selon la figure 2. Si on se déplace à vitesse X pendant un temps η et à vitesse Y pendant un temps ε, le vecteur Z a varié, une fois revenu à son point de départ, de $-\varepsilon\eta\mathcal{R}(X, Y, Z)$ au premier ordre.

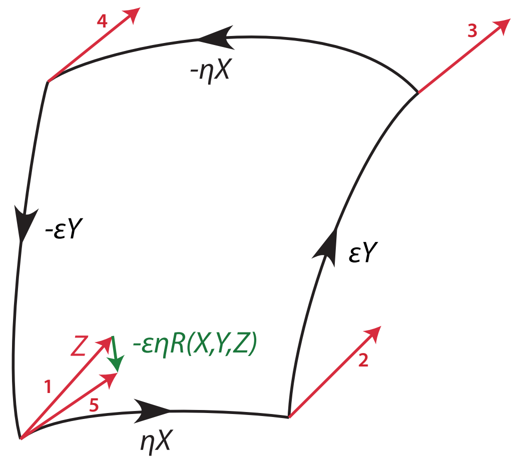

Figure 2 – Transport parallèle le long d'une boucle

Une deuxième interprétation intéressante consiste à considérer deux géodésiques issues de x et $\gamma^{Y(x)}(\varepsilon)$ et de vecteurs directeurs $X(x)$ et $\Phi_\varepsilon^{\gamma^Y}(X(x))$. Alors si l'on compare les vecteurs vitesse de ces courbes après un temps η, la différence est de l'ordre de $\varepsilon\eta\mathcal{R}(X, Y, X)$ (voir figure 3).

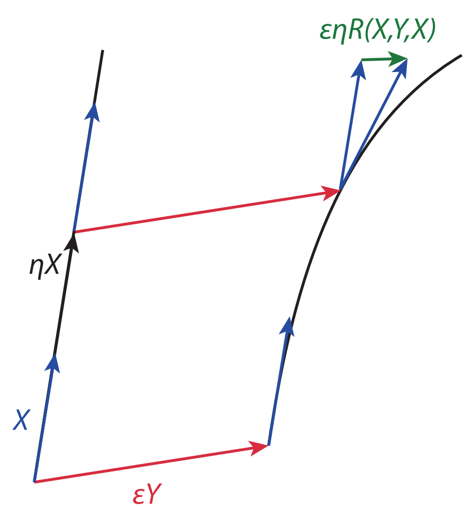

Figure 3 – Éloignement des géodésiques

2.2 Fibré des repères

Une dynamique sur une variété est souvent plus simple à appréhender avec la donnée d'une orientation en chaque point. La définition suivante est destinée à combler ce manque.

Définition 2.6 (Fibré des repères)**.**
Soit $\mathcal{M}$ une variété de dimension d. On note $F\mathcal{M}$ et on appelle fibré des repères *l'ensemble des couples (x,u) tels que $x \in \mathcal{M}$ et u est un isomorphisme vectoriel de $\mathbb{R}^d$ dans $T_x\mathcal{M}$.*

Localement, $F\mathcal{M}$ est $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphe à $U \times GL_d(\mathbb{R})$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. C'est donc une variété lisse de dimension $d + d^2$.

On note π la projection de $F\mathcal{M}$ sur $\mathcal{M}$ qui à (x,u) associe x. On confondra souvent (x,u) et u.

Intuitivement, on va chercher à envoyer un mouvement brownien euclidien dans une variété *via* l'application u. Pour cela, on demandera que la dérivée du processus euclidien soit envoyée par u sur celle du processus sur la variété. C'est en fait une condition de roulement sans glissement.

Ce qui précède n'a pas de sens pour un mouvement brownien, bien entendu, mais on peut déjà s'attacher à formaliser cette ambition pour une courbe $\mathcal{C}^1$. On va donc chercher à comprendre comment se déplacer sur le fibré des repères en transportant parallèlement l'isomorphisme. On suppose à présent que $\mathcal{M}$ est munie d'une connexion D.

Définition 2.7 (Relèvement)**.**
Soit $\gamma : [0,T[\to \mathcal{M}$ un chemin $\mathcal{C}^1$.

On dit que $\Gamma : [0,T[\to F\mathcal{M}$ est un relèvement horizontal *de γ si $\pi \circ \Gamma = \gamma$ et si pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, Γz est le transport parallèle de $\Gamma(0)z$ le long de γ.*

Soit (x,u) un point de $F\mathcal{M}$.

Soit X un vecteur de $T_x\mathcal{M}$. Si Γ est un relèvement de γ tel que $\gamma'(0) = X$ et $\Gamma(0) = (x,u)$, on dit que $\Gamma'(0)$ est le relevé horizontal *de X en (x,u), noté X^* lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le point (x,u).*

Définition 2.8 (Champs horizontaux et verticaux)**.**
Soit (X,U) un vecteur tangent à $F\mathcal{M}$.
- *Si $X = 0$, (X,U) est dit vertical.*
- *S'il existe $\overline{X}$ tel que $(X,U) = \overline{X}^*$, (X,U) est dit horizontal.*
- *$T_{(x,u)}\mathcal{M} = V_{(x,u)}\mathcal{M} \oplus H_{(x,u)}\mathcal{M}$ où $V_{(x,u)}\mathcal{M}$ (resp. $H_{(x,u)}\mathcal{M}$) est l'ensemble des vecteurs verticaux (resp. horizontaux).*

Une base de $V_{(x,u)}\mathcal{M}$ est donnée par les $V_{ij}(x,u) = \left(0, (u \circ \gamma_{ij})'(0)\right)$ où $\gamma_{ij} :]-\varepsilon, \varepsilon[\to GL_d(\mathbb{R})$ avec $\gamma_{ij}(0) = I$ et $\gamma_{ij}'(0)^{\alpha\beta} = \delta_i^\alpha \delta_j^\beta$.

Une base de $H_{(x,u)}\mathcal{M}$ est donnée par les $H_i(x,u) = u(e_i)^*$ où $(e_i)_i$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

Une courbe dont le vecteur dérivé est toujours horizontal transporte donc parallèlement son repère, tandis que si le vecteur dérivé est vertical, on modifie le repère sans se déplacer sur la variété. On peut alors faire rouler sans glissement une variété munie d'une connexion le long d'un chemin $\mathcal{C}^1$.

Définition 2.9 (Développement $\mathcal{C}^1$)**.**
Soit $\gamma : [0,T[\to \mathbb{R}^d$ un chemin $\mathcal{C}^1$, et (x,u) un point de $F\mathcal{M}$.

Il existe un unique chemin $\alpha : [0,\varepsilon[\to F\mathcal{M}$ tel que :

$$\alpha(0) = (x,u)$$
$$\alpha'(t) = \left(\alpha(t)\gamma'(t)\right)^*$$

Ce chemin est appelé développement *de γ.*

L'existence et l'unicité sont locales.

2.3 Géométrie riemannienne

Définition 2.10 (Variété riemannienne).

Une variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$ *est une variété* $\mathcal{M}$ *munie d'un tenseur* g *(que l'on supposera par la suite lisse) tel que* g_x *soit un produit scalaire en chacun de ses plans tangents* $T_x\mathcal{M}$*.*

Le produit scalaire de u et v sera aussi noté $\langle u, v\rangle_g$; on l'appelle la métrique de $\mathcal{M}$.

Un exemple classique et très utile est le cas d'une sous-variété de $\mathbb{R}^n$; dans ce cas, g_x est la restriction du produit scalaire ambient au plan tangent à x vu comme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. De même, une sous-variété d'une variété riemannienne dispose naturellement d'une structure de variété riemannienne.

On dit que $i : (\mathcal{M}, g) \to (\mathcal{N}, h)$ est une isométrie si i est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme et que l'on a $\langle u, v\rangle_g = \langle di_x(u), di_x(v)\rangle_h$. Le théorème suivant est un analogue du théorème de Whitney pour les variétés riemanniennes.

Théorème 2.1 (Plongement de Nash).

Toute variété riemannienne $(\mathcal{M}, g)$ *est isomorphe à une sous-variété de* $\mathbb{R}^n$*, c'est-à-dire qu'il existe un plongement* $i : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ *de classe* $\mathcal{C}^k$ *si* $\mathcal{M}$ *est* $\mathcal{C}^k$ *tel que* $\langle u, v\rangle_g = \langle di_x(u), di_x(v)\rangle_{\mathbb{R}^n}$*.*

Définition 2.11 (Connexion de Lévi-Civita).

Étant donnée une métrique g *sur une variété* $\mathcal{M}$*, il existe une unique connexion* D *sans torsion compatible avec la métrique, c'est-à-dire telle que :*

$$D_Z g(X, Y) = g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y)$$

On l'appelle connexion de Lévi-Civita.

Ses symboles de Christoffel sont donnés dans une base par :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}\right)$$

Cette métrique a des propriétés remarquables, en particulier sa compatibilité avec la métrique rend isométriques les isomorphismes du transport parallèle, ce qui nous intéressera plus tard, et motive la définition suivante :

Définition 2.12 (Fibré orthonormal).

On appelle fibré orthonormal *et on note* $O\mathcal{M}$ *la sous-variété de* $F\mathcal{M}$ *constituée des couples* (x, u) *tels que* u *est une isométrie.*

La compatibilité avec la métrique affirme que si l'on développe une courbe $\mathcal{C}^1$ en partant d'un couple (x, u) tel que u est une isométrie, le mouvement α ainsi défini est en fait tracé sur le fibré orthonormal. La notion de relèvement orthonormal est donc légitime ; il suffit de remplacer $F\mathcal{M}$ par $O\mathcal{M}$ dans la définition 2.9.

3 Équations différentielles stochastiques

Dans cette section, on cherchera à donner un sens à une équation différentielle ordinaire perturbée par un bruit aléatoire. Par exemple, on modélise l'évolution d'une population par l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}(t) = \alpha(t)n(t) - \delta(t)n(t)$$

où n est l'effectif de la population en fonction du temps t, et α et δ les taux de naissance et de mort. Des variations aléatoires de l'environnement pourraient *a priori* influer sur ces paramètres, et on aimerait définir une nouvelle équation :

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}(t) = \left(\alpha(t) - \delta(t) + \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right) n(t)$$

pour une fonction W aléatoire qui modéliserait l'évolution des conditions météorologiques, par exemple.

La perturbation aléatoire par excellence, et celle qu'il est logique d'employer ici, est le mouvement brownien. Cependant, celui-ci n'est dérivable nulle part ; on va donc chercher à introduire une formulation faible de ces équations.

3.1 Intégrale de Stieltjes

L'intégrale d'une grandeur le long d'un chemin déterministe est intuitive si le chemin est assez régulier. Par exemple, si l'on intègre une fonction H continue contre un chemin A continûment dérivable à valeurs réeles, on définit l'intégrale suivante :

$$\int_a^b H(s)\mathrm{d}A(s) := \int_a^b H(s)A'(s)\mathrm{d}s$$

où le terme de droite est une intégrale de Lebesgue réelle.

Cette intégrale s'étend de manière naturelle à une plus grande classe de fonctions, que l'on appelle les fonctions à variations finies.

Définition 3.1 (Variations)**.**

Soit $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, et posons $S(t) = \sup \sum_{0 \leq i < n} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$ où la borne supérieure est prise sur les subdivisions $0 = t_0 < \cdots < t_n = t$ de $[0, t]$. La fonction S est la variation totale *de A.*

Si $S(t)$ est fini pour tout t, on dit que A est à variations finies*. Si S est bornée, A est dite à* variations bornées.

Intuitivement, la définition suivante donne une notion d'intégrale naturelle.

Définition 3.2.

Soient A à variations finies et H continue. La somme $\sum_{0 \leq i < n} H(t_i) \left(A(t_{i+1}) - A(t_i)\right)$ admet une limite lorque le pas de la subdivision tend vers 0. Cette limite est appelée intégrale de Stieltjes de H contre A, et notée $\int_0^t H(s)\mathrm{d}A(s)$, ou encore $H \cdot A$ lorsqu'elle est vue en tant que fonction de t.

Cependant, il est possible d'étendre très largement la classe d'intégrandes en ne diminuant que légèrement la classe des intégrateurs. En effet, le théorème suivant permet d'interpréter certaines fonctions à variations finies comme une mesure signée.

Théorème 3.1.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante continue à droite. Il existe alors une unique mesure borélienne μ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\mu([0, t]) = f(t)$.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction à variations finies continue à droite. Il existe alors une unique mesure borélienne signée μ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $\mu([0, t]) = f(t)$.

Démonstration.

La première partie découle du théorème de Carathéodory. La seconde provient du fait qu'une fonction est à variations finies si et seulement si elle est différence de fonctions croissantes ; S et $S - A$ conviennent, par exemple, et sont continues à droite. La différence des mesures induites convient alors.

L'unicité se déduit du fait que si deux mesures signées σ-finies coïncident sur un ensemble de parties d'un espace mesurable, elles coïncident sur la tribu engendrée par cet ensemble. □

Ainsi, on choisira plutôt l'intégrale suivante [1].

1. La première intégrale définie est appelée intégrale de Riemann-Stieltjes, la seconde intégrale de Lebesgue-Stieltjes. Cependant, étant donné qu'elles coïncident sur leurs domaines communs, la littérature précise rarement celle employée.

Théorème 3.2 (Intégrale de Stieltjes)**.**

Soit une fonction $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ à variations finies continue à droite. Soit une fonction $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mesurable localement bornée.

On appelle intégrale de Stieltjes *et on note $H \cdot A$ la fonction définie par :*

$$(H \cdot A)(t) := \int_0^t H(s)\mathrm{d}A(s) = \int_0^t H(s)\mathrm{d}\mu(s)$$

où μ est la mesure signée associée à A par le théorème précédent.

Proposition 3.1.

Soient A et B deux fonctions à variations finies et f et g deux fonctions mesurables localement bornées. On note S la variation totale de A.

i. L'intégrale de Stieltjes est linéaire en l'intégrande et en l'intégrateur ;

ii. $\left|\int_0^t f(s)\mathrm{d}A(s)\right| \leq \int_0^t |f(s)|\,\mathrm{d}S(s)$ *;*

iii. $g \cdot A$ *est à variations finies et* $f \cdot (g \cdot A) = (fg) \cdot A$ *;*

iv. $A(t)B(t) = A(0)B(0) + \int_0^t A(s)\mathrm{d}B(s) + \int_0^t B(s_-)\mathrm{d}A(s)$.

Démonstration.

i. exercice ;

ii. exercice ;

iii. cf ii., puis on vérifie l'égalité pour $f = \mathbb{1}_{[0,t]}$;

iv. c'est une application du théorème de Fubini, en constant que les deux termes sont égaux à $\mu \otimes \eta([0, t])$ si μ et η sont associées à A et B.

□

Malheureusement, le mouvement brownien n'est pas un processus à variations finies. Le théorème suivant en donne une preuve très générale :

Théorème 3.3.

Une martingale continue à variations finies est constante.

Démonstration.

On traite d'abord le cas d'une martingale continue M à variations bornées, disons par V. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(M_t - M_0)^2\right] &= \mathbb{E}\left[(M_{t_n} - M_{t_{n-1}})^2 + \cdots + (M_{t_1} - M_{t_0})^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_i \left|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right| \times \left(\left|M_{t_n} - M_{t_{n-1}}\right| + \cdots + \left|M_{t_1} - M_{t_0}\right|\right)\right] \\
&\leq V\mathbb{E}\left[\sup_i \left|M_{t_{i+1}} - M_{t_i}\right|\right]
\end{aligned}$$

Or, le terme de droite tend vers 0 lorsque le pas de la subdivision tend vers 0 par continuité de M et convergence dominée. Ainsi, $M_t = M_0$ pour tout t.

Si M est à variations finies, on pose $\tau_n = \inf\{t \mid S_t > n\}$ où S est la variation totale de M. C'est un temps d'arrêt, ainsi M^{τ_n} est une martingale continue à variations bornées donc constante. On en conclut que M est constante en faisait croître n. □

3.2 Variation quadratique

Si l'on ne peut pas trouver de martingale continue à variations finies, on va cependant s'attacher à parler de variation quadratique pour une martingale continue générique, dans le sens suivant. [2]

Définition 3.3 (Variations quadratiques)**.**

Soit X un processus réel. Pour une subdivision $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots\}$ de $\mathbb{R}_+$ de pas $|\Delta| = \min t_{i+1} - t_i$, on définit :

$$V_t^{\Delta}(X) = \sum_{0 \le i < k} \left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)^2 + (X_t - X_{t_k})^2$$

où $t_k \le t < t_{k+1}$. Notons que V est continu si X l'est.

On dit que X est à variations quadratiques finies *s'il existe un processus $\langle X, X\rangle$ tel que pour tout t, $V_t^{\Delta_n}$ converge en probabilité vers $\langle X, X\rangle_t$ pour toute suite de subdivisions $(\Delta_n)_{n\ge 0}$ dont le pas tend vers* 0*.*

Un processus à variations quadratiques finies n'est pas un processus dont les réalisations sont des chemins à variations quadratiques finies ; plus fort encore, le mouvement brownien est un exemple de processus à variations quadratiques finies dont les réalisations sont presque sûrement à variations quadratiques infinies.

Théorème 3.4.

Une martingale continue bornée M est à variations quadratiques finies. Le processus $\langle M, M\rangle$ est l'unique processus continu croissant adapté nul en zéro tel que $M^2 - \langle M, M\rangle$ est une martingale.

De plus, V^{Δ} converge uniformément sur les compacts vers $\langle M, M\rangle$ en probabilité lorsque $|\Delta|$ tend vers 0*.*

Démonstration.

La démonstration présentée ici est très proche de celle décrite par le livre de Revuz et Yor [5 Revuz+].

Soit M une martingale continue bornée. On va montrer que $\mathbb{E}\left[\left|V_t^{\Delta} - V_t^{\Delta'}\right|^2\right]$ tend vers zéro avec $|\Delta| + |\Delta'|$, ce qui fera de $\left(V_t^{\Delta_n}\right)_n$ une suite de Cauchy au sens L^2 si $|\Delta_n| \longrightarrow 0$.

Fixons une subdivision $\Delta = \{t_k\}_k$ de $\mathbb{R}_+$. Soit $s < t$; on vérifie que :

$$\mathbb{E}\left[V_t^{\Delta} - V_s^{\Delta} \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[(M_t - M_s)^2 \mid \mathcal{F}_s\right] \tag{1}$$

Ainsi, si l'on pose $X = V^{\Delta} - V^{\Delta'}$, X est une martingale, et on peut appliquer le résultat précédent à X et $\Delta\Delta' = \Delta \cup \Delta'$:

$$\mathbb{E}\left[X_t^2\right] = \mathbb{E}\left[V_t^{\Delta\Delta'}(X)\right] \le 2\mathbb{E}\left[V_t^{\Delta\Delta'}(V^{\Delta}) + V_t^{\Delta\Delta'}(V^{\Delta'})\right]$$

Il suffit donc de montrer que $\mathbb{E}\left[V_t^{\Delta\Delta'}(V^{\Delta})\right]$ tend vers 0 avec $|\Delta| + |\Delta'|$. Notons $\{s_k\}_k$ les éléments de $\Delta\Delta'$, et n_k les indices tels que $t_{n_k} \le s_k < t_{n_k+1}$. Supposons désormais, sans perte de généralité, que $t \in \Delta$.

$$\begin{aligned} V_{s_{k+1}}^{\Delta} - V_{s_k}^{\Delta} &= (M(s_{k+1}) - M(t_{n_k}))^2 - (M(s_k) - M(t_{n_k}))^2 \\ &= (M(s_{k+1}) - 2M(t_{n_k}) + M(s_k))\,(M(s_{k+1}) - M(s_k)) \end{aligned}$$

2. Toute cette partie peut se généraliser à certains processus discontinus, de manière assez naturelle. Cependant, cette étude n'est pas faite ici ; tout d'abord parce que les calculs en sont simplifiés, et ensuite parce que l'extension aux variétés est plus naturelle dans un cadre continu, puisque la structure euclidienne des variétés n'est qu'infinitésimale.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_k \left(V^\Delta_{s_{k+1}} - V^\Delta_{s_k}\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_k \left(M(s_{k+1}) - 2M(t_{n_k}) + M(s_k)\right)^2 \left(M(s_{k+1}) - M(s_k)\right)^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_k \left|M(s_{k+1}) - 2M(t_{n_k}) + M(s_k)\right|^2 \cdot \sum_k \left(M(s_{k+1}) - M(s_k)\right)^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_k \left|M(s_{k+1}) - 2M(t_{n_k}) + M(s_k)\right|^2 \cdot V_t^{\Delta\Delta'}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sup_k \left|M(s_{k+1}) - 2M(t_{n_k}) + M(s_k)\right|^4\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\left(V_t^{\Delta\Delta'}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Or, $\sup_k \left|M(s_{k+1}) - 2M(t_{n_k}) + M(s_k)\right|^4$ tend vers 0 presque sûrement puisque M est continue, et est bornée, puisque M l'est. Ainsi, le premier facteur tend vers 0, et il suffit de montrer que le second est borné pour conclure. On peut se contenter de montrer que $\mathbb{E}\left[\left(V_t^\Delta\right)^2\right]$ est borné lorsque $|\Delta|$ tend vers 0.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(V_t^\Delta\right)^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_k \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)^2\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[2\sum_k \sum_{l>k} \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)^2 \left(M_{t_{l+1}} - M_{t_l}\right)^2 + \sum_k \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)^4\right] \\
&= \mathbb{E}\left[2\sum_k \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)^2 \sum_{l>k} \left(M_{t_{l+1}} - M_{t_l}\right)^2 + \sum_k \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)^4\right] \\
&= \mathbb{E}\left[2\sum_k \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)^2 \left(M_t - M_{t_{k+1}}\right)^2 + \sum_k \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)^4\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[2\sup_k \left(M_t - M_{t_{k+1}}\right)^2 \cdot \sum_k \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)^2\right] \\
&+ \mathbb{E}\left[\sup_k \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)^2 \cdot \sum_k \left(M_{t_{k+1}} - M_{t_k}\right)^2\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[8K^2 V_t^\Delta + 4K^2 V_t^\Delta\right] \\
&= 12K^2 \mathbb{E}\left[V_t^\Delta\right] \\
&= 12K^2 \mathbb{E}\left[(M_t - M_0)^2\right] \\
&\leq 12K^2 \cdot 4K^2 \\
&= 48K^4 \\
&< \infty
\end{aligned}$$

où K est tel que $M \leq K$ presque sûrement.

Ainsi, il existe $\overline{V}_t$ vers lequel V_t^Δ converge au sens L^2 lorsque le pas de la subdivision tend vers 0. Or, d'après le lemme de Doob :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\leq t} \left|V_s^\Delta - V_s^{\Delta'}\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\left|V_t^\Delta - V_t^{\Delta'^2}\right|\right]$$

et ainsi, V^Δ converge uniformément sur les compacts vers $\overline{V}$ en norme L^2 donc en probabilité.

Montrons maintenant que la limite ainsi construite vérifie bien les propriétés attendues. Soit $\Delta^n = \frac{1}{2^n}\mathbb{N}$. La suite $\left(V^{\Delta^n}\right)_n$ converge uniformément en norme L^2 sur les compacts, on peut donc en extraire une suite $\left(V^k\right)_k$ qui converge uniformément sur les compacts vers V presque sûrement (extraction diagonale).

Elle est croissante sur $\Delta = \bigcup_n \Delta^n$, puisque les V^n le sont à partir d'un certain rang. De plus, c'est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue elle-même, et ainsi croissante sur $\mathbb{R}$. En prenant la limite dans (1), on déduit que $M^2 - V$ est une martingale.

L'unicité vient du théorème 3.3. □

Ce théorème est très puissant, mais ne couvre pas encore nos besoins. En fait, l'hypothèse « bornée » doit pouvoir être affaiblie à une borne en fonction du temps. On va donc définir certains objets dont on espère que la variation quadratique sera bien définie.

Définition 3.4 (Martingale locale, semimartingale)**.**

On dit qu'un temps d'arrêt T réduit le processus X si $X^T \mathbb{1}_{T>0}$ est une martingale uniformément intégrable.

On appelle martingale locale continue *un processus M tel qu'il existe une suite de temps d'arrêts $0 = \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots$ réduisant M tels que $\tau_n \longrightarrow \infty$.*

On appelle semimartingale continue *un processus $X = M + A$ tel que M est une martingale locale continue et A un processus adapté continu à variations finies.*

On peut retirer l'hypothèse d'uniforme intégrabilité qui n'est pas indispensable ici, quitte à ajouter les temps d'atteinte de $\pm n$. Elle est cependant utile. On note aussi que d'après le théorème 3.3, on a unicité si on impose $A_0 = 0$.

Réciproquement, on pourra revenir aux martingales à l'aide du théorème suivant.

Théorème 3.5.

Soit M une martingale locale.

M est une martingale si et seulement si pour tout a, $\{X_T | T \text{ est un temps d'arrêt } < a\}$ est uniformément intégrable.

Démonstration.

Soit M une martingale, $a > 0$ et $T < a$ un temps d'arrêt.

$$\mathbb{E}\left[|M_T|\right] = \mathbb{E}\left[|M_T^a|\right] = \mathbb{E}\left[|M_\infty^a|\right] = \mathbb{E}\left[|M_a|\right] < \infty$$

et $\{X_T\}_{T<a}$ est borné au sens L^1, donc uniformément intégrable.

Réciproquement, soit M une martingale locale réduite par $(T_n)_n$ telle que pour tout a, $\{X_T\}_{T<a}$ est uniformément intégrable.

Il suffit, pour montrer que M est une martingale, de montrer que pour tout $t > 0$, $M_t^{T_n}$ converge vers M_t au sens L^1. En effet, on aura alors :

$$\mathbb{E}\left[|M_t|\right] = \mathbb{E}\left[\left|M_t - M_t^{T_n}\right|\right] + \mathbb{E}\left[\left|M_t^{T_n}\right|\right] < \infty$$

et pour $s < t$:

$$\mathbb{E}\left[M_t | \mathcal{F}_s\right] = \lim_n \mathbb{E}\left[M_t^{T_n} \middle| \mathcal{F}_s\right] = \lim_n M_s^{T_n} = M_s$$

où les limites sont au sens L^1.

Or, on a déjà $M_t^{T_n} \to M_t$ presque sûrement, et puisque $\{M_{t\wedge T_n}\}_n$ est uniformément intégrable et que M_t est intégrable, on a la convergence au sens L^1. □

Le théorème suivant est enfin assez général pour pouvoir traiter le mouvement brownien :

Théorème 3.6.
Soit $X = M + A$ *une semimartingale continue.* X *est à variations quadratiques finies, et* $\langle X, X\rangle = \langle M, M\rangle$*. C'est l'unique processus continu croissant nul en zéro tel que* $M^2 - \langle M, M\rangle$ *soit une martingale locale.*
De plus $V^{\Delta}(X)$*, converge uniformément sur les compacts vers* $\langle X, X\rangle$ *en probabilité.*

Ce théorème s'appuie sur le lemme suivant :

Lemme 3.7.
Si M *est une martingale continue bornée et* T *un temps d'arrêt,* $\left\langle M^T, M^T\right\rangle = \langle M, M\rangle^T$*.*

On aura besoin par la suite d'une structure hilbertienne. On introduit donc l'opérateur bilinéaire suivant :

Théorème 3.8 (Crochet de semimartingales)**.**
Soient X *et* Y *deux semimartingales continues. Il existe un unique processus* $\langle X, Y\rangle$ *continu à variations finies nul en zéro tel que* $XY - \langle X, Y\rangle$ *soit une semimartingale continue. On l'appelle* crochet *de* X *et* Y*.*
De plus, $V^{\Delta}(X, Y)$ *converge uniformément sur les compacts vers* $\langle X, Y\rangle$ *en probabilité, où :*

$$V_t^{\Delta}(X, Y) = \sum_{0\leq i<k} \left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)\left(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}\right) + \left(X_t - X_{t_k}\right)\left(Y_t - Y_{t_k}\right).$$

Démonstration.
Le processus $\frac{1}{4}\big(\langle X+Y, X+Y\rangle - \langle X-Y, X-Y\rangle\big)$ vérifie ce qui précède. On peut noter pour s'en convaincre que $4V^{\Delta}(X, Y) = V^{\Delta}(X+Y) - V^{\Delta}(X-Y)$. □

Bien évidemment, on aura besoin de connaître la valeur du crochet du mouvement brownien. C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 3.9.
Soit B *un mouvement brownien dans* $\mathbb{R}^n$*.*

$$\left\langle B^i, B^j\right\rangle_t = \delta^{ij} t$$

Démonstration.
Il suffit de constater que $(B_t B'_t)_{t\geq 0}$ et $(B_t^2 - t)_{t\geq 0}$ sont des martingales si B et B' sont des mouvements browniens indépendants. □

On aura besoin par la suite de travailler en dimension plus grande ; la définition suivante nous y aidera.

Définition 3.5.
Une variable aléatoire X *à valeurs dans un espace vectoriel* E *de dimension finie est une semimartingale continue si son image par toute forme linéaire l'est (dans* $\mathbb{R}^d$*, si ses coordonnées le sont).*
Soit X *(resp.* Y*) une semimartingale continue à valeurs dans* $M_{m,d}(\mathbb{R})$ *(resp.* $M_{d,n}(\mathbb{R})$*).*
On note $\langle X, Y\rangle$ *le processus de* $M_{m,n}(\mathbb{R})$ *tel que* $\langle X, Y\rangle^i_j = \left\langle X^i_\alpha, Y^\alpha_j\right\rangle$*.*

3.3 Intégrale d'Itō

L'intégrale d'Itō, qui nous intéressera tout au long de ce rapport, sera construite ainsi.

Théorème 3.10.

Soit M une martingale continue bornée L^2 de $\mathbb{R}$ et H un intégrande réel raisonnable. Il existe une unique martingale continue $H \cdot M$ bornée L^2 issue de 0 telle que :

$$\langle H \cdot M, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle$$

pour toute martingale continue N L^2 .

Ici, borné L^2 est à comprendre dans le sens suivant.

Définition 3.6.

Un processus X est dit borné au sens L^2 si $\sup_t \mathbb{E}\left[X_t^2\right] < \infty$.

Théorème 3.11.

Soit M une martingale bornée L^2. M est alors fermée par une variable M_∞ de carré intégrable, et on définit sa norme comme suit.

$$\|M\|_{\mathbb{H}}^2 := \mathbb{E}\left[M_\infty^2\right] = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[M_t^2\right]$$

L'espace $\mathbb{H}$ des martingales bornées L^2 est un espace de Hilbert muni de cette norme, et le sous-ensemble $\mathcal{C}\mathbb{H}$ des éléments continus de $\mathbb{H}$ est fermé, de même que le sous-ensemble $\mathcal{C}\mathbb{H}_0$ des éléments issus de zéro de $\mathcal{C}\mathbb{H}$.

Démonstration.

Montrons tout d'abord la première égalité.

$$\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}\left[M_\infty^2 - M_t^2\right]\right| &= \mathbb{E}\left[\left|M_\infty^2 - \mathbb{E}\left[M_\infty|\mathcal{F}_t\right]^2\right|\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left|M_\infty\left(M_\infty - \mathbb{E}\left[M_\infty|\mathcal{F}_t\right]\right)\right|\right] \\
&= \mathbb{E}\left[M_\infty^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\left(M_\infty - \mathbb{E}\left[M_\infty|\mathcal{F}_t\right]\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \mathbb{E}\left[M_\infty^2\right]^{\frac{1}{2}} \mathbb{E}\left[\left(M_\infty - M_t\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\xrightarrow[t\to\infty]{} 0
\end{aligned}$$

Ainsi, si M^n est une suite de Cauchy dans $\mathbb{H}$, M_∞^n est une suite de Cauchy dans L^2, qui converge donc vers M_∞, et M^n converge vers $\left(\mathbb{E}\left[M_\infty|\mathcal{F}_t\right]\right)_t$ dans $\mathcal{H}$.

Soit maintenant M^n une suite de martingales de $\mathcal{C}\mathbb{H}$ (resp. $\mathcal{C}\mathbb{H}_0$) convergeant vers $M \in \mathbb{H}$. Soit $T > 0$; d'après l'inégalité de Doob :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T} \left|M_t^n - M_t\right|^2\right] \le 4\mathbb{E}\left[\left|M_T^n - M_T\right|^2\right] \le 4\left\|M^n - M\right\|_{\mathbb{H}}^2$$

et on peut extraire de $\left(\sup_{0\le t\le T} \left|M_t^n - M_t\right|\right)_n$ une suite convergente presque sûrement ; le processus limite est donc continu (resp. continu issu de zéro). □

On définit maintenant la classe des intégrandes.

Définition 3.7.

Un processus X est dit progressivement mesurable si sa restriction à $[0,t]$ est $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-mesurable.

Un processus progressivement mesurable est donc adapté, et réciproquement, un processus adapté continu à droite ou à gauche est progressivement mesurable, puisque ses valeurs sur $[0,t]$ ne dépendent que d'un nombre dénombrable de valeurs.

Définition 3.8.
Soit $M \in \mathcal{C}\mathbb{H}$. On dit qu'un processus progressivement mesurable H est dans $\mathcal{L}^2(M)$ si :

$$\|H\|_M^2 := \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \mathrm{d}\left\langle M, M\right\rangle_s\right] < \infty$$

On définit alors $L^2(M)$ par quotient pour faire de cette quantité une norme.

On peut alors démontrer l'existence d'une intégrale d'Itō.

Théorème 3.12.
Soit $M \in \mathcal{C}\mathbb{H}$ et $H \in L^2(M)$. Il existe un unique $H \cdot M \in \mathcal{C}\mathbb{H}_0$ tel que :

$$\langle H \cdot M, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle$$

pour tout $N \in \mathcal{C}\mathbb{H}$.
L'application $K \to K \cdot M$ est alors une isométrie de $L^2(M)$ dans $\mathcal{C}\mathbb{H}_0$.

Il s'agit de la première version de l'intégrale d'Itō de H contre M. La définition définitive sera donnée au 3.10.

On aura besoin pour la démonstration de ce théorème d'un lemme de contrôle ; il s'agit de l'inégalité suivante.

Théorème 3.13 (Inégalité de Kunita-Watanabe)**.**
Soient H et K progessivement mesurables et M et N deux martingales locales continues. Soient $p, q \geq 1$ conjugués.

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\infty |H_s|\,|K_s|\,\mathrm{d}\,|\langle M, N\rangle|_s\right] \leq \left\|\left(\int_0^\infty H_s^2 \mathrm{d}\left\langle M, M\right\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p \left\|\left(\int_0^\infty K_s^2 \mathrm{d}\left\langle N, N\right\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_q$$

où $|\langle M, N\rangle|$ désigne la variation totale de $\langle M, N\rangle$.

C'est un corollaire direct du théorème suivant.

Théorème 3.14.
Soient H et K progressivement mesurables et M et N deux martingales locales continues. Soit $t \leq \infty$. Alors l'inégalité suivante est valable presque sûrement.

$$\int_0^t |H_s|\,|K_s|\,\mathrm{d}\,|\langle M, N\rangle|_s \leq \left(\int_0^t H_s^2 \mathrm{d}\left\langle M, M\right\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t K_s^2 \mathrm{d}\left\langle N, N\right\rangle_s\right)^{\frac{1}{2}}$$

Démonstration.
Montrons tout d'abord que $\left(\langle M, N\rangle_s^t\right)^2 \leq \langle M, M\rangle_s^t \langle N, N\rangle_s^t$, où $\langle A, B\rangle_s^t = \langle A, B\rangle_t - \langle A, B\rangle_s$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $P_t(\lambda) = \langle N, N\rangle_t \lambda^2 + 2\langle M, N\rangle_t \lambda + \langle M, M\rangle_t \lambda = \langle M + \lambda N, M + \lambda N\rangle_t$ est croissant en fonction de t. Or, le minimum de $4(P_t - P_s)$ est $\langle M, M\rangle_s^t \langle N, N\rangle_s^t - \left(\langle M, N\rangle_s^t\right)^2$, ce qui prouve le résultat attendu.

On suppose ensuite que $H = H_0 \mathbb{1}_{\{0\}} + \sum_i H_i \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}$ avec H_i $\mathcal{F}_t$-mesurable, et de même pour K avec les mêmes $(t_i)_i$.

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^t H_s K_s \mathrm{d}\left\langle M,N\right\rangle_s\right| &= \left|\sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} H_s K_s \mathrm{d}\left\langle M,N\right\rangle_s\right| \\
&\leq \sum_i |H_{t_i}||K_{t_i}| \left|\int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathrm{d}\left\langle M,N\right\rangle_s\right| \\
&= \sum_i |H_{t_i}||K_{t_i}| \left\langle M,N\right\rangle_{t_i}^{t_{i+1}} \\
&\leq \sum_i |H_{t_i}||K_{t_i}| \left(\left\langle M,M\right\rangle_{t_i}^{t_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\left\langle N,N\right\rangle_{t_i}^{t_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_i |H_{t_i}|^2 \left\langle M,M\right\rangle_{t_i}^{t_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i |K_{t_i}|^2 \left\langle N,N\right\rangle_{t_i}^{t_{i+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^t |H_s|^2 \mathrm{d}\left\langle M,M\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |K_s|^2 \mathrm{d}\left\langle N,N\right\rangle\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Par densité de ces applications dans l'espace des fonctions $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t])$-mesurables, on montre que l'inégalité ci-dessus est valable pour tout couple H, K progressivement mesurable. On conclut par :

$$\int_0^t |H_s|\,|K_s|\,\mathrm{d}\left|\left\langle M,N\right\rangle\right|_s = \left|\int_0^t S_s\,|H_s|\,|K_s|\,\mathrm{d}\left\langle M,N\right\rangle_s\right|$$

où S_s est la dérivée de Radon-Nikodym de $\mathrm{d}\left|\left\langle M,N\right\rangle\right|$ par rapport à $\mathrm{d}\left\langle M,N\right\rangle$. □

On est maintenant à même de démontrer le théorème 3.12.

Démonstration.
L'unicité découle du lemme 3.3.
L'existence est une conséquence du théorème de Riesz. On définit une forme linéaire ϕ sur $\mathcal{C}\mathbb{H}_0$ par :

$$\phi(N) = \mathbb{E}\left[\left(H \cdot \left\langle M,N\right\rangle\right)_\infty\right]$$

Or, $\phi(N) \leq \|N\|_{\mathbb{H}}\,\|H\|_M$ d'après l'inégalité de Kunita-Watanabe. Ainsi, ϕ est continue et d'après le théorème de représentation des formes linéaires de Riesz, il existe une martingale $K \cdot M \in \mathcal{C}\mathbb{H}_0$ telle que $\phi(N) = \mathbb{E}\left[(K \cdot M)_\infty N_\infty\right]$.

Il suffit alors de montrer que $X = (K \cdot M)\,N - K \cdot \left\langle M,N\right\rangle$ est une martingale pour conclure quant à l'existence. Soit T un temps d'arrêt ; on montre facilement, puisque toutes les martingales considérées sont uniformément intégrables, que :

$$\mathbb{E}\left[(K \cdot M)_T N_T\right] = \mathbb{E}\left[(K \cdot M)_\infty N_T\right] = \mathbb{E}\left[(K \cdot M)_\infty N_\infty^T\right] = \mathbb{E}\left[K \cdot \left\langle M,N\right\rangle_T\right]$$

Autrement dit, $\mathbb{E}\left[X_T\right] = 0$ pour tout temps d'arrêt T.
Ainsi, si $A \in \mathcal{F}_s$ avec $s < t$, on peut écrire :

$$\mathbb{E}\left[X_t \mathbb{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[X_t \mathbb{1}_A + X_s \mathbb{1}_{^cA}\right] - \mathbb{E}\left[X_s \mathbb{1}_{^cA}\right] = \mathbb{E}\left[X_T\right] - \mathbb{E}\left[X_s \mathbb{1}_{^cA}\right] = \mathbb{E}\left[X_s - X_s \mathbb{1}_{^cA}\right] = \mathbb{E}\left[X_s \mathbb{1}_A\right]$$

Le processus X est donc une martingale, ce qui conclut l'existence.

Enfin, $\|K \cdot M\|_{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{E}\left[(K \cdot M)_\infty^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(K^2 \cdot \left\langle M,M\right\rangle\right)_\infty\right] = \|K\|_M^2$, et la transformation ainsi décrite est bien une isométrie. □

Proposition 3.2.

Soient $M \in \mathcal{C}\mathbb{H}$, $H \in L^2(M)$, $K \in L^2(H \cdot M)$ et T un temps d'arrêt.

i. $KH \in L^2(M)$ *et* $K \cdot (H \cdot M) = KH \cdot M$ *;*

ii. $(H \cdot M)^T = H \cdot (M^T) = H\mathbb{1}_{[0,T]} \cdot M$.

Démonstration.

La première propriété provient de la propriété équivalente pour l'intégrale de Stieltjes.

La seconde est une conséquence de $M^T = \mathbb{1}_{[0,T]} \cdot M$, qui se déduit lui-même de la propriété équivalente de Stieltjes. □

On élargit alors la classe des intégrateurs en ne diminuant que légèrement la classe des intégrandes.

Définition 3.9.

Soit M une martingale locale continue. Un processus H appartient à $L^2_{loc}(M)$ s'il existe une suite de temps d'arrêts $(T_n)_n$ tendant presque sûrement vers l'infini et telle que $\mathbb{E}\left[\int_0^{T_n} H_s^2 \mathrm{d}\left\langle M, M\right\rangle_s\right] < \infty$ pour tout n.

Un processus H est dit localement borné s'il est progressivement mesurable et qu'il existe une suite de temps d'arrêts $(T_n)_n$ tendant presque sûrement vers l'infini et une suite de constantes déterministes $(C_n)_n$ telles que H^{T_n} est borné par C_n pour tout n.

Définition 3.10 (Intégrale d'Itō)**.**

Soit M une martingale locale continue et $H \in L^2_{loc}(M)$. Il existe une unique martingale locale continue $H \cdot M$ issue de zéro telle que :

$$\langle H \cdot M, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle$$

pour toute martingale locale continue N.

*Soit $Z = M + A$ une semimartingale continue et H localement borné. L'*intégrale d'Itō *de H contre Z est le processus :*

$$H \cdot Z = H \cdot M + H \cdot A$$

où le premier terme est un intégrale du type précédent, et le second une intégrale de Stieltjes.

Démonstration.

La démonstration s'appuie solidement sur la propriété 3.2 ii. □

Proposition 3.3.

Soient M une semimartingale continue, H et K localement bornés et T un temps d'arrêt.

i. $KH \in L^2(M)$ *et* $K \cdot (H \cdot M) = KH \cdot M$ *;*

ii. $(H \cdot M)^T = H \cdot (M^T) = H\mathbb{1}_{[0,T]} \cdot M$ *;*

iii. si $Z = A$ (resp. $Z = M$), alors $H \cdot M$ est à variations finies (resp. une martingale locale).

Bien sûr, cette intégrale peut être vue comme une limite de sommes de Riemann.

Théorème 3.15.

Soit X une semimartingale continue et H un processus localement borné. On pose, pour une subdivision $\Delta = \{t_n\}_n$ de $\mathbb{R}_+$:

$$S_t^{\Delta} = \sum_{i<k} H_{t_i}\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right) + H_{t_k}\left(X_t - X_{t_k}\right).$$

où N est tel que $t_k \leq t < t_{k+1}$.

Si H est continu à gauche et si $(\Delta_n)_n$ est une suite de subdivisions de $\mathbb{R}_+$ dont le pas tend vers 0, alors S^{Δ_n} converge uniformément sur les compacts vers $H \cdot X$ en probabilité.

C'est un corollaire du théorème suivant :

Théorème 3.16.

Soit X une semimartingale continue et $(H_n)_n$ une suite de processus localement bornés convergeant point par point vers 0 presque sûrement.

S'il existe H localement bornée qui majore cette suite presque sûrement, alors $(H_n \cdot X)_n$ converge uniformément sur les compacts vers 0 en probabilité.

Démonstration.

L'idée fondamentale est que si T réduit une martingale locale M, alors $(H^n)^T$ tend vers zéro dans $L^2(M)$ donc $(H^n \cdot M)$ converge vers zéro dans $\mathcal{C}\mathbb{H}_0$, par isométrie. Ensuite, on recolle les processus stoppés.

Adjoindre un processus à variations finies préserve la convergence, puisqu'on est alors dans le cadre du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Quant à la démonstration du corollaire, on peut noter que si H est bornée, alors les processus considérés vérifient les hypothèses du théorème. On conclut ensuite par localisation. □

3.4 Formule d'Itō et applications

Une large partie de ce rapport consistera à manipuler des intégrales d'Itō. Pour cela, un premier outil est le théorème suivant.

Théorème 3.17 (Intégration par partie)**.**

Soient X et Y deux semimartingales continues. Le processus XY est alors une semimartingale continue, et :

$$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s \mathrm{d}X_s + \langle X, Y \rangle_t$$

Démonstration.

Soit $\Delta = \{t_i\}_i$ une subdivision de $[0, t]$.

$$\begin{aligned} X_t Y_t - X_0 Y_0 &= \sum_i \left(X_{t_{i+1}} Y_{t_{i+1}} - X_{t_i} Y_{t_i} \right) \\ &= \sum_i \left(\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i} \right) \left(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i} \right) + X_{t_i}(Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i}) + (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) Y_{t_i} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, en passant à la limite en probabilité, on a le résultat attendu. □

On peut alors s'offrir l'outil fondamental du calcul stochastique.

Théorème 3.18 (Formule d'Itō)**.**

Soit X une semimartingale continue de $\mathbb{R}^d$ et f une fonction à valeurs réelles $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^d$. Le processus $f(X)$ est alors une semimartingale continue, et :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \partial_i f(X_s) \mathrm{d}X_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_{ij} f(X_s) \mathrm{d} \left\langle X^i, X^j \right\rangle_s$$

Démonstration.

Supposons le résultat vrai pour une fonction f. Si on note $\left(f^i\right)_i$ les applications coordonnées, on vérifie pour tout i :

$$
\begin{aligned}
f(X_t)f^i(X_t) &= f(X_0)f^i(X_0) + \int_0^t f(X_s)\mathrm{d}f^i(X_s) + \int_0^t f^i(X_s)\mathrm{d}f(X_s) + \left\langle f(X), f^i(X)\right\rangle_t \\
&= f(X_0)f^i(X_0) \\
&+ \int_0^t f(X_s)\mathrm{d}X_s^i + \int_0^t f^i(X_s)\partial_\alpha f(X_s)\mathrm{d}X_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t f^i(X_s)\partial_{\alpha\beta} f(X_s)\mathrm{d}\left\langle X^\alpha, X^\beta\right\rangle_s \\
&+ \int_0^t \partial_\alpha f(X_s)\mathrm{d}\left\langle X^\alpha, X^i\right\rangle_t \\
&= \left(ff^i\right)(X_0) + \int_0^t \partial_\alpha\left(ff^i\right)(X_s)\mathrm{d}X_s^\alpha \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \left(f^i\partial_{\alpha\beta}f + \delta_\alpha^i\partial_\beta f + \delta_\beta^i\partial_\alpha f\right)(X_s)\mathrm{d}\left\langle X^\alpha, X^\beta\right\rangle_s \\
&= \left(ff^i\right)(X_0) + \int_0^t \partial_\alpha\left(ff^i\right)(X_s)\mathrm{d}X_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{\alpha\beta}\left(ff^i\right)(X_s)\mathrm{d}\left\langle X^\alpha, X^\beta\right\rangle_s
\end{aligned}
$$

et on a le résultat pour ff^i. Puisque la formule est linéaire et valable pour les constantes, elle est valable pour tout polynôme.

Ainsi, si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions polynomiales telle que toutes les dérivées jusqu'à l'ordre deux convergent vers celles de f, on peut passer à la limite dans l'égalité grâce au théorème 3.16, et conclure la preuve. $\square$

Nous sommes maintenant armés pour la suite du rapport. Le résultat suivant complète notre boîte à outils.

Théorème 3.19 (Théorème de Lévy)**.**
Une martingale locale continue X de $\mathbb{R}^d$ est un mouvement brownien si et seulement si $\mathrm{d}\left\langle X^i, X^j\right\rangle_t = \delta^{ij}\mathrm{d}t$.

Démonstration.
On a vu le sens direct avec le théorème 3.9. Pour le sens indirect, soit X une semimartingale continue de $\mathbb{R}^d$ vérifiant $\mathrm{d}\left\langle X^i, X^j\right\rangle_t = \delta^{ij}\mathrm{d}t$ et ξ un vecteur de $\mathbb{R}^d$.

Posons $f^\xi(Y,t) = \exp\left(\mathrm{i}\xi\cdot Y + \frac{1}{2}|\xi|^2 t\right)$ définie sur $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}_+$, et $M_t^\xi = f(X_t,t)$. Comme son nom l'indique, M^ξ est une martingale locale. En effet :

$$
\begin{aligned}
M_t^\xi &= M_0^\xi + \int_0^t \partial_\alpha f^\xi(X_s,s)\mathrm{d}X_s^\alpha + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{\alpha\beta} f^\xi(X_s,s)\mathrm{d}\left\langle X^\alpha, X^\beta\right\rangle_s + \int_0^t \partial_t f^\xi(X_s,s)\mathrm{d}s \\
&= M_0^\xi + \mathrm{i}\left({}^t\xi\right)_\alpha\int_0^t f^\xi(X_s,s)\mathrm{d}X_s^\alpha \\
&- \frac{1}{2}\left({}^t\xi\right)_\alpha\left({}^t\xi\right)_\beta\int_0^t f^\eta(X_s,s)\mathrm{d}\left\langle X^\alpha, X^\beta\right\rangle_s + \frac{1}{2}|\xi|^2\int_0^t f^\xi(X_s,s)\mathrm{d}s \\
&= M_0^\xi + \mathrm{i}\left({}^t\xi\right)_\alpha\int_0^t f^\xi(X_s,s)\mathrm{d}X_s^\alpha
\end{aligned}
$$

où ∂_α désigne la dérivée selon la α^{e} coordonnée spatiale.

Puisque cette martingale locale est bornée sur les compacts, c'est une martingale d'après le théorème 3.5.

Soit à présent $s < t$ et A un élément de $\mathcal{F}_s$. On calcule la fonction caractéristique de $X_t - X_s$ conditionnellement à A.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \exp\left(i\xi \cdot (X_t - X_s)\right)\right] &= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A f(X_t,t) f(X_s,s)^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left|\xi\right|^2(t-s)\right)\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left|\xi\right|^2(t-s)\right)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A f(X_s,s)^{-1}\mathbb{E}\left[f(X_t,t)|\mathcal{F}_s\right]\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left|\xi\right|^2(t-s)\right)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A f(X_s,s)^{-1} f(X_s,s)\right] \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}\left|\xi\right|^2(t-s)\right)\mathbb{P}\left(A\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $X_t - X_s$ est une gaussienne de variance $t-s$ indépendante de $\mathcal{F}_s$, et X est un mouvement brownien. □

3.5 Équations différentielles stochastiques

Reprenons l'équation proposée en introduction :

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}(t) = \left(\alpha(t) - \delta(t) + \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right) n(t).$$

où n est l'inconnue et W un mouvement brownien. Un pas pour donner un sens faible à cette équation pourrait être :

$$n_t = n_0 + \int_0^t \left(\alpha(s) - \delta(s)\right) n_s \mathrm{d}s + \int_0^t n_s \mathrm{d}W_s$$

dans laquelle tous les termes sont définis. La convention probabiliste est plutôt de la noter sous cette forme :

$$\mathrm{d}n_t = \left(\alpha(t) - \delta(t)\right) n_t \mathrm{d}t + n_t \mathrm{d}W_t.$$

Donnons un sens à la notion de solution de cette équation.

Définition 3.11 (Fonction prévisible)**.**
Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbf{W} \to E$ mesurable par rapport à la tribu engenrée par les $\{t > T\} \times \{\omega(U) \in \mathcal{A}\}$, où $\mathcal{A}$ est un borélien de E et $U < T$, est dite prévisible*.*

Il faut penser que les éléments de E associent un vecteur vitesse à un vecteur aléatoire ; on prendra dans cette partie $E = GL_{n,d}(\mathbb{R})$.

Soit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ complète continue à droite. Soit Z une semimartingale continue de $\mathbb{R}^d$, X_0 une variable de $\mathbb{R}^n$ $\mathcal{F}_0$-mesurable et f prévisible à valeurs dans $GL_{n,d}(\mathbb{R})$. On considère l'équation suivante :

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X)\mathrm{d}Z_t$$

avec X_0 comme condition initiale.

Définition 3.12.

On dit que (X', Z') *définis sur un espace filtré standard* $\left(\Omega', (\mathcal{F}'_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}'\right)$ *est une solution de l'équation si* (Z', X'_0) *a la loi de* (Z, X_0)*, et :*

$$X'^i_t = X'^i_0 + \int_0^t f^i_\alpha(u, X')\mathrm{d}Z'^\alpha_u.$$

où le membre de droite est une intégrale d'Itō.

Une solution est dite forte si elle est adaptée à la plus petit filtration complète continue à droite pour laquelle Z' *est mesurable. On notera cette filtration* $\left(\mathcal{F}^{Z'}_t\right)_{t\geq 0}$.

Puisque l'on n'a besoin que de la loi de Z et X_0, on peut considérer Z comme une variable muette. On utilise cette convention dans la définition suivante.

Définition 3.13.

Une solution (X, Z) *est unique presque sûrement si pour toute solution* (X', Z) *définie sur le même espace avec* $X_0 = X'_0$ *presque sûrement, alors* X *et* X' *sont indistinguables (ici, égaux presque sûrement puisque* X *et* X' *sont continus).*

Une solution (X, Z) *est unique en loi si pour tout solution* (X', Z') *éventuellement définie sur un autre espace, alors* X *et* X' *sont égaux en loi.*

On a pour ce type d'équation un théorème d'existence et d'unicité très proche du théorème de Cauchy-Lipchitz. Sa démonstration est elle aussi basée sur un théorème de point fixe.

Théorème 3.20.

Soit l'équation différentielle stochastique $\mathrm{d}X_t = f(t, X)\mathrm{d}Z_t$ *avec* $f(\cdot, C)$ *continue pour* C *constante,* f *globalement lipchitzienne et une condition initiale* X_0 *de carré intégrable.*[3] *Alors cette équation admet une solution, forte et unique presque sûrement et en loi.*

La condition de Lipschitz évoquée est la suivante :

Définition 3.14.

Une fonction f *prévisible est dite localement lipschitzienne si pour tout* T *et* $M > 0$*, il existe* K *tel que* $|f(t, w_1) - f(t, w_2)| \leq K \|w_1 - w_2\|_{\infty,t}$ *pour tout* $t \leq T$ *et* $\|w_i\|_{\infty,t} \leq M$.

Elle est globalement lipschitzienne si K *est indépendant de* T *et* M.

Dans toute la démonstration, les constantes ne dépendent que de la dimension des espaces.

Le lemme suivant fournit la domination pour le théorème de point fixe :

Lemme 3.21.

Soient $Z = M + A$ *une semimartingale continue,* H *un processus continu adapté et* τ *un temps d'arrêt. Alors il existe une constante* C *telle que :*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq\tau}\left|\int_0^t H_s \mathrm{d}Z_s\right|^2\right] \leq C\mathbb{E}\left[\int_0^\tau H_s^2 \mathrm{d}Q_s\right]$$

où $Q_t = t + \langle M, M\rangle_t + |A|_t + |A|_t^3$ *et* $|A|$ *est la variation totale de* A.

Démonstration.

On peut se contenter de montrer le résultat pour H et Z unidimensionnels, le resultat restera valable, quitte à augmenter la constante.

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On a alors :

3. Il n'y a pas d'hypothèse supplémentaire sur Z puisqu'on la considère continue, ce qui est déjà très contraignant.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t H_s \mathrm{d}Z_s\right|^2\right] \le 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t H_s \mathrm{d}M_s\right|^2\right] \\
+ 2\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t H_s \mathrm{d}A_s\right|^2\right]
\end{aligned}
$$

On majore le premier terme grâce au lemme de Doob.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t H_s \mathrm{d}M_s\right|^2\right] &\le 4\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T H_s \mathrm{d}M_s\right|^2\right] \\
&= 4\mathbb{E}\left[\langle H\cdot M, H\cdot M\rangle_T\right] \\
&= 4\mathbb{E}\left[H^2\cdot\langle M, M\rangle_T\right] \\
&\le 4\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 \mathrm{d}Q_s\right]
\end{aligned}
$$

La seconde majoration utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t H_s \mathrm{d}A_s\right|^2\right] &\le \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t |H|_s \,\mathrm{d}\,|A|_s\right)^2\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le T}\left(\int_0^t |H|_s^2 \,(1+|A|^2)\mathrm{d}\,|A|_s\right)\left(\int_0^t \frac{1}{1+|A|^2}\mathrm{d}\,|A|_s\right)\right] \\
&\le \frac{\pi}{2}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T H_s^2 \mathrm{d}Q_s\right)\right]
\end{aligned}
$$

On a ainsi le résultat attendu pour T.
Soit maintenant un temps d'arrêt τ, et $\tau_n = \tau\wedge n$. On peut alors écrire :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le \tau_n}\left|\int_0^t H_s \mathrm{d}Z_s\right|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\le t\le n}\left|\int_0^t H_s \mathrm{d}Z_s^\tau\right|^2\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\int_0^n H_s^2 \mathrm{d}Q_s^\tau\right] \\
&\le \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau_n} H_s^2 \mathrm{d}Q_s\right]
\end{aligned}
$$

On peut alors faire tendre n vers l'infini pour conclure par convergence monotone. □

Démontrons maintenant le théorème 3.20.

Démonstration.

Posons $(X^n)_n$ une suite de processus définis par $X^0 \equiv X_0$ et :

$$X_t^{n+1} = X_0 + \int_0^t f(t, X^n)\mathrm{d}Z_s.$$

Puisque Q est continue et strictement croissante, elle admet un inverse η. Notons $\Phi_T(U, V)$ la quantité $\mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq \eta_T} |U_t - V_t|^2\right]$, et montrons par récurrence l'inégalité suivante :

$$\Phi_t(X^{n+1}, X^n) \leq \frac{K^n N^n}{n!}\Phi_t(X^1, X^0)$$

pour une certaine constante K et tout $0 < t \leq T$.

$$\begin{aligned}
\Phi_t(X^{n+2}, X^{n+1}) &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq \eta_t} \left|X_u^{n+2} - X_u^{n+1}\right|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq u\leq \eta_t} \left|\int_0^u \left(f(s, X^{n+1}) - f(s, X^n)\right)\mathrm{d}Z_s\right|^2\right] \\
&\leq C\mathbb{E}\left[\int_0^{\eta_t} \left(f(s, X^{n+1}) - f(s, X^n)\right)^2 \mathrm{d}Q_s\right] \\
&= C\mathbb{E}\left[\int_0^t \left(f(\eta_u, X^{n+1}) - f(\eta_u, X^n)\right)^2 \mathrm{d}u\right] \\
&\leq C'\mathbb{E}\left[\int_0^t \sup_{0\leq s\leq \eta_u} \left|X_s^{n+1} - X_s^n\right|^2 \mathrm{d}u\right] \\
&= C'\int_0^t \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq s\leq \eta_u} \left|X_s^{n+1} - X_s^n\right|^2\right] \mathrm{d}u \\
&= C'\int_0^t \Phi_u(X^{n+1}, X^n)\mathrm{d}u \\
&\leq C'\int_0^t \frac{K^n u^n}{n!}\Phi_u(X^1, X^0)\mathrm{d}u \\
&\leq C'\frac{K^n}{n!}\Phi_t(X^1, X^0)\int_0^t u^n \mathrm{d}u \\
&\leq C'\frac{K^n t^{n+1}}{(n+1)!}\Phi_t(X^1, X^0)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a la majoration pour K assez grand. De plus, on vérifie que :

$$\Phi_t(X^1, X^0) \leq C'''t\mathbb{E}\left[|X_0|^2 + \|f(\cdot, 0)\|_{\infty,T}^2\right]$$

On a donc, quitte à modifier K :

$$\Phi_t(X^n, X^{n-1}) \leq \frac{K^n t^n}{n!}\mathbb{E}\left[|X_0|^2 + \|f(\cdot, 0)\|_{\infty,T}^2\right]$$

Montrons alors que $(X^n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur $[0, \eta_T]$ presque sûrement. En posant $u_n = \left\|X^{n+1} - X^n\right\|_{\infty,\eta_T}$, on peut écrire, pour N assez grand :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{n\geq N} u_n\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{n\geq N} 2^n u_n \times \frac{1}{2^n}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\left(\sum_{n\geq N} 2^{2n} u_n^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n\geq N} \frac{1}{2^{2n}}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[\sqrt{\sum_{n\geq N} 4^n u_n^2}\right] \\
&\leq \mathbb{E}\left[1 + \sum_{n\geq N} 4^n u_n^2\right] \\
&= 1 + \sum_{n\geq N} \mathbb{E}\left[4^n u_n^2\right] \\
&\leq 1 + \sum_{n\geq N} \frac{(4K'T)^n}{n!} \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

Ainsi, $(X^n)_{n\geq 0}$ est presque sûrement une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}([0,\eta_T],\mathbb{R})$, et converge donc en norme infinie sur ce compact vers un processus X. Puisque ce résultat est valable pour tout T et que $\eta_T \xrightarrow[T\to\infty]{} \infty$, X est défini sur $\mathbb{R}$.

Puisque $X^{n+1} = X_0 + X^n \cdot Z$ et d'après le théorème 3.16, X est une solution de l'équation. C'est une solution forte, puisque tous les X^n sont mesurables pour la filtration $\left(\mathcal{F}_t^Z\right)_{t\geq 0}$.

Soit maintenant une solution Y de cette équation définie sur le même espace filtré. On a alors, d'après le calcul précédent :

$$
\begin{aligned}
\Phi_T(X,Y) &= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq \eta_T} |X_t - Y_t|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\sup_{0\leq t\leq \eta_T} \left|\int_0^t (f(s,X) - f(s,Y))\,\mathrm{d}Z_s\right|^2\right] \\
&\leq C' \int_0^T \Phi_u(X,Y)\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

Ainsi, d'après le lemme de Grönwall, cette quantité est nulle, et les solutions sont égales. On a donc unicité presque sûre.

Soient désormais (X^1, Z^1) et (X^2, Z^2) deux solutions de cette équation sur deux espaces filtrés $\left(\Omega^i, \left(\mathcal{F}_t^i\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}^i\right)$ différents. Soit $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}\right)$ l'espace de Wiener sur $\mathbb{R}$ muni de sa filtration canonique. On munit cet espace de la mesure $\mathbb{P}$ associée à la loi de Z, et on note X la solution de l'équation définie par la construction ci-dessus.

Les variables Z^i sont à valeurs dans Ω, et ainsi $X(Z^i)$ est une variable aléatoire sur $\left(\Omega^i, \left(\mathcal{F}_t^i\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}^i\right)$ solution de l'équation de générateur Z^i ; par unicité, $X(Z^i) = X^i$ presque sûrement, et puisque Z^1 et Z^2 ont même loi, X^1 et X^2 ont même loi. On a donc unicité en loi.

□

Ce théorème peut être étendu à des hypothèses sensiblement plus faibles. La démonstration qui suit n'est qu'esquissée.

Théorème 3.22.
Soit l'équation différentielle $\mathrm{d}X_t = f(t, X)\mathrm{d}Z_t$ *avec* $f(\cdot, C)$ *continue pour* C *constante,* $f(t, \cdot)$ *localement lipchitzienne et une condition initiale* X_0 *quelconque. Alors on a une solution à cette équation définie jusqu'à son temps d'explosion, forte et unique presque sûrement et en loi.*

On parle de temps d'explosion e pour X si $X_t \xrightarrow[t\to e]{} \infty$. Ainsi, le théorème affirme que si X n'est défini que jusqu'à un temps $e < \infty$ sur un certain événement, alors X tend vers l'infini en e sur cet événement.

Heuristiquement, le caractère lipschitzien local en espace est traité en considérant les temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t > 0 \mid |X_t| > n\}$ et en stoppant les processus à ces temps. On prolonge alors f en dehors de la sphère de rayon n par une fonction globalement lipschitzienne, et on peut appliquer le premier théorème. On construit une solution globale en concaténant, en constatant que $e = \lim_{n\to\infty} \tau_n$ est un temps d'explosion pour X. Pour la localité en temps, le même raisonnement en considérant les temps déterministes n conclut.

On cherche ensuite des solutions de l'équation pour $\tilde{X}_0^n = X_0$ si $|X_0| \leq n$, $\tilde{X}_0^n = x$ sinon, pour un x fixé. Ces solutions existent, puisque les X_0^n ainsi définis sont de carré intégrable ; de plus, ce sont des solutions de l'équation pour X_0 sur l'événement $\{|X_0| \leq n\}$. Ainsi, la limite presque sûre de ces processus donne la solution recherchée.

3.6 Processus de diffusion

Toute cette section s'attache à comprendre la möelle markovienne du mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$. Puisque ce processus est markovien, il suffit de comprendre son comportement local en tout point pour avoir une idée de son comportement global. Évidemment, il n'est pas question de parler de dérivée au sens propre, mais on peut tout de même s'intéresser à la quantité suivante, en particulier pour ε petit :

$$\frac{X_\varepsilon - X_0}{\varepsilon}$$

où X est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$.

On déduit la formule suivante de la formule d'Itō :

$$\mathbb{E}\left[\frac{f(X_\varepsilon) - f(X_0)}{\varepsilon}\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \frac{1}{2}\Delta f(X_0)$$

qui donne une idée du comportement infinitésimal du mouvement brownien. Essayons d'intégrer cette formule. Choisissons $T > 0$; on aimerait pouvoir écrire quelque chose de l'ordre de :

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N-1} \left(f(X_{(i+1)\varepsilon}) - f(X_{i\varepsilon})\right)\right] \sim \varepsilon \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2}\Delta f(X_{i\varepsilon})$$

où $N = \left\lfloor \frac{T}{\varepsilon} \right\rfloor$. Il découle en fait facilement de la formule d'Itō non seulement que

$$\mathbb{E}\left[f(X_t) - f(X_0)\right] = \int_0^t \frac{1}{2}\Delta f(X_s)\mathrm{d}s$$

mais même que $f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t \frac{1}{2}\Delta f(X_s)\mathrm{d}s$ est une martingale si f est lisse.

Il ne faut voir cette équation que comme une réécriture d'une propriété locale du mouvement brownien, qui, associée à la propriété de Markov, donne une idée très précise du comportement du mouvement. En fait, cette section démontre le théorème suivant :

Théorème 3.23.

Soit L un opérateur différentiel raisonnable. Il existe alors une unique semimartingale continue X telle que le processus M^f tel que $M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)\mathrm{d}s$ soit une martingale locale pour tout $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lisse. De plus, X est markovien.

Ce processus est appelé diffusion de générateur L.

L'opérateur L doit être lisse, et ne comporter que des termes d'ordre un et deux, mais surtout être elliptique. Il peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$Lf = b^i \partial_i f + \frac{1}{2} a^{ij} \partial_{ij} f$$

où b est un vecteur réel et a une matrice symétrique positive, tous deux variant de manière lisse. Il existe alors une unique racine carrée symétrique positive σ de a, au sens où $a = \sigma\sigma^*$. On définit aussi $\Gamma(f,g) = L(fg) - fLg - gLf$, qui s'exprime en coordonnées par $\Gamma(f,g) = a^{ij}\partial_i f \partial_j g$ Ces notations seront conservées au fil de cette section. Le lemme technique suivant sera utile par la suite :

Lemme 3.24.

Si a varie de manière $\mathcal{C}^2$, σ est localement lipschitzienne.

Démonstration.

On suppose tout d'abord que a est définie positive et que $C = \sup_{x,i,j} \left\| \nabla^2 a^{ij}(x) \right\|$ (norme d'application bilinéaire) est fini. Dans ce cas, σ est dérivable, et on montre :

$$\sup_x \left| \nabla \sigma_j^i(x) \right|_2 \leq \sqrt{2C}$$

(norme 2).

Soit tout d'abord f une fonction de $\mathbb{R}^n$ à valeurs positives, et x et y dans $\mathbb{R}^n$. Il existe z tel que :

$$0 \leq f(y) = f(x) + \partial_k f(x)(y-x)^k + \frac{1}{2}\partial_{kl} f(z)(y-x)^k(y-x)^l$$

et ainsi, pour $z = x - \frac{1}{C}\nabla f(x)$ (le point minimum de cette fonction) :

$$0 \leq f(x) + \frac{1}{C}\left|\nabla f(x)\right|_2^2 + \frac{1}{C^2} C \left|\nabla f(x)\right|_2^2$$

d'où :

$$\left|\nabla f(x)\right|_2 \leq \sqrt{2Cf(x)}.$$

Supposons ensuite que a, et donc σ, est diagonale en x.

$$\begin{aligned}
a^{ij}(x) &= \delta^{\alpha\beta}\sigma_\alpha^i(x)\sigma_\beta^j(x) \\
\partial_{kl} a^{ij}(x) &= \delta^{\alpha\beta}\left(\partial_{kl}\sigma_\alpha^i(x)\sigma_\beta^j(x) + \sigma_\alpha^i(x)\partial_{kl}\sigma_\beta^j(x)\right) \\
&= \partial_{kl}\sigma_j^i(x)\sigma_j^j(x) + \sigma_i^i(x)\partial_{kl}\sigma_i^j(x) \\
&= \partial_{kl}\sigma_j^i(x)\left(\sigma_j^j(x) + \sigma_i^i(x)\right)
\end{aligned}$$

On pose alors $f_{\pm}(x) = a(e_i \pm e_j, e_i \pm e_j)$, de manière à remplir les hypothèses de l'étape précédente. Ainsi, $|\nabla f_{\pm}(x)|_2 \leq \sqrt{8Cf_{\pm}(X)}$.

$$\begin{aligned}
4\left|\nabla a^{ij}(x)\right|_2 &= |\nabla f_+(x) - \nabla f_-(x)|_2 \\
&\leq \sqrt{8C}\left(\sqrt{f_+(x)} - \sqrt{f_-(x)}\right) \\
&\leq \sqrt{16C}\sqrt{f_+(x) - f_-(x)} \\
&= \sqrt{16C}\sqrt{a^{ii}(x) + a^{jj}(x)} \\
&\leq \sqrt{32C}\left(\sqrt{a^{ii}(x)} + \sqrt{a^{jj}(x)}\right) \\
&\leq 4\sqrt{2C}\left(\sigma_i^i(x) + \sigma_j^j(x)\right)
\end{aligned}$$

et ainsi, d'après la première égalité :

$$\left|\nabla \sigma_j^i\right| \leq \sqrt{2C}.$$

Si enfin a n'est pas symétrique en x, ${}^tOaO$ l'est pour un O orthonormal. Ainsi, $\left|\nabla\left({}^tO\sigma O\right)_j^i(x)\right|_2 \leq \sqrt{2C}$ et $\left|\nabla\sigma_j^i(x)\right|_2 \leq \sqrt{2C}n$.

Une fois ce résultat établi, soient x et y deux points de $\mathbb{R}^n$ et $a_n = a + \frac{1}{n}id$. On note C_n la constante associée à la restriction à un compact de a_n, qui tend vers C la constante équivalente pour a.

Il existe $z_n \in [x, y]$ tel que :

$$\left|(\sigma_n)_j^i(x) - (\sigma_n)_j^i(y)\right| = \left|\nabla\sigma_j^i(z) \cdot (x-y)\right| \leq \sqrt{2C_n}n\,|x-y|$$

et en passant à la limite, σ_j^i est $\sqrt{2C}n$-lipschitzienne sur le compact considéré, et σ est localement lipschitzienne. □

Le théorème central de la construction des processus de diffusion est le suivant :

Théorème 3.25.
Le processus X est une diffusion de générateur L si et seulement si il existe un mouvement brownien B tel que $X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s)\mathrm{d}B_s$, éventuellement sur un espace de probabilité plus fin à préciser. Autrement dit :

$$X_t^i = X_0^i + \int_0^t b^i(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma_j^i(X_s)\mathrm{d}B_t^j$$

avec la même réserve sur l'espace.

En particulier, un processus est un mouvement brownien si et seulement si c'est une $\frac{1}{2}\Delta$-diffusion.

Le théorème 3.22 nous prouvera alors l'existence et l'unicité en loi d'un tel processus, à l'aide du lemme technique.

Démonstration.
Démontrons tout d'abord le sens indirect.

Soit B un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$ et X tel que $X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(X_s)\mathrm{d}B_s$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lisse.

$$
\begin{aligned}
f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t \partial_i f(X_s) \mathrm{d}X_s^i + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{ij} f(X_s) \mathrm{d}\left\langle X^i, X^j \right\rangle_s \\
&= f(X_0) + \int_0^t \partial_i f(X_s) b^i(X_s) \mathrm{d}s + \int_0^t \partial_i f(X_s) \sigma_\alpha^i(X_s) \mathrm{d}B_s^\alpha \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{ij} f(X_s) \sigma_\alpha^i(X_s) \sigma_\beta^j(X_s) \mathrm{d}\left\langle B^\alpha, B^\beta \right\rangle_s \\
&= f(X_0) + \int_0^t \partial_i f(X_s) b^i(X_s) \mathrm{d}s + \int_0^t \partial_i f(X_s) \sigma_\alpha^i(X_s) \mathrm{d}B_s^\alpha \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{ij} f(X_s) \left(\delta^{\alpha\beta} \sigma_\alpha^i \sigma_\beta^j\right)(X_s) \mathrm{d}s \\
&= f(X_0) + \int_0^t \left(b^i(X_s)\partial_i f(X_s) + \frac{1}{2} a^{ij}(X_s) \partial_{ij} f(X_s) \right) \mathrm{d}s + \int_0^t \partial_i f(X_s) \sigma_\alpha^i(X_s) \mathrm{d}B_s^\alpha \\
&= f(X_0) + \int_0^t Lf(X_s) \mathrm{d}s + M_t^f
\end{aligned}
$$

où $M^f = \sigma_\alpha^i(X)\partial_i f(X) \cdot B^\alpha$ est une martinale locale, et ainsi X est une diffusion de générateur L.

Soit à présent un processus de diffusion X de générateur L. Soient f^i les applications coordonnées de $\mathbb{R}^n$. On a alors :

$$
f^i(X_t) = f^i(X_0) + \int_0^t L(f^i)(X_s) \mathrm{d}s + M_t^{f^i}
$$

On a $L(f^i) = b^i$. Il reste donc à montrer que $M_t^{f^i} = \int_0^t \sigma_\alpha^i(X_s) \mathrm{d}B_s^\alpha$ pour un B brownien bien choisi. [4]

Puisque σ est symétrique positive, elle réalise un isomorphisme du complémentaire orthogonal E de son noyau. Ainsi, on définit une application linéaire σ^{-1} par $\sigma^{-1}(x) = 0$ si $\sigma(x) = 0$ et $\sigma^{-1}(x) = y$ si $\sigma(y) = x$ et x et y sont dans E. Posons $B_t^\alpha = \int_0^t \left(\sigma^{-1}\right)_i^\alpha (X_s) dM_s^{f^i} + (I-P)_i^\alpha \, dW_s^i$ pour un mouvement brownien W indépendant (on traitera plus tard la difficulté dans le cas général de trouver un tel W), et montrons que B est un mouvement brownien. Pour cela, on va calculer son crochet puis invoquer le théorème de Lévi, puisque B est une martingale locale. Il suffit de connaître le crochet de $(M^{f^i})_i$, qui apparaît naturellement dans l'expression suivante :

$$
\begin{aligned}
f^i(X_t) f^j(X_t) &= f^i(X_0) f^j(X_0) + \int_0^t f^i(X_s) \mathrm{d}f^j(X_s) + \int_0^t f^j \mathrm{d}f^i(X_s) \\
&+ \left\langle f^i(X), f^j(X) \right\rangle_t \\
&= f^i(X_0) f^j(X_0) + \int_0^t f^i(X_s) dM_s^{f^j} + \int_0^t f^j(X_s) dM_s^{f^i} \\
&+ \int_0^t f^i(X_s) L f^j(X_s) \mathrm{d}s + \int_0^t f^j(X_s) L f^i(X_s) \mathrm{d}s \\
&+ \left\langle M^{f^i}, M^{f^j} \right\rangle_t
\end{aligned}
$$

4. Le résultat démontré ci-dessous est en fait la partie émergée d'un iceberg appelé représentation des martingales, qui consiste à écrire une martingale comme une intégrale contre un mouvement brownien. La démonstration n'a rien de plus compliquée que ce qui est exposé ici.

Or, on peut aussi écrire :

$$f^i(X_t)f^j(X_t) = f^i(X_0)f^j(X_0) + \int_0^t L(fg)(X_s)\mathrm{d}s + M_t^{f^i f^j}$$

Et ainsi, en identifiant les parties à variations bornées, on trouve :

$$\begin{aligned}
\left\langle M^{f^i}, M^{f^j} \right\rangle_t &= \int_0^t \Gamma(f^i, f^j)(X_s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t a^{\alpha\beta}(X_s)\partial_\alpha f^i(X_s)\partial_\beta f^j(X_s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t a^{ij}(X_s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

On peut donc calculer le crochet de B :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left\langle B^\alpha, B^\beta \right\rangle_t &= \left(\sigma^{-1}\right)_i^\alpha (X_t) \left(\sigma^{-1}\right)_j^\beta (X_t)\mathrm{d}\left\langle M^{f^i}, M^{f^j} \right\rangle_t \\
&+ (I-P)_i^\alpha (X_t) (I-P)_j^\beta (X_t)\mathrm{d}\left\langle W^i, W^j \right\rangle_t \\
&= \left[\left(\sigma^{-1}\right)_i^\alpha \left(\sigma^{-1}\right)_j^\beta a^{ij}\right](X_t)\mathrm{d}t \\
&+ \left[(I-P)_i^\alpha (I-P)_j^\beta \delta^{ij}\right](X_t)\mathrm{d}t \\
&= \left[P_i^\alpha P_j^\beta \delta^{ij}\right](X_t)\mathrm{d}t \\
&+ \left[(I-P)_i^\alpha (I-P)_j^\beta \delta^{ij}\right](X_t)\mathrm{d}t \\
&= \left[(I-P+P)_i^\alpha (I-P+P)_j^\beta \delta^{ij}\right]\mathrm{d}t \\
&= \delta^{\alpha\beta}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Lévi, B est un mouvement brownien et :

$$\begin{aligned}
\int_0^t \sigma_\alpha^i(X_s)\mathrm{d}B_s^\alpha &= \int_0^t \sigma_\alpha^i(X_s)\left(\sigma^{-1}\right)_j^\alpha dM_s^{f^j} \\
&= \int_0^t P_j^i(X_s)dM_s^{f^j} \\
&= \int_0^t dM_s^{f^i}
\end{aligned}$$

En effet, on montre que $(I-P)_i^\alpha \cdot M^{f^i} = 0$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left\langle {}^t\left((I-P)M\right),\left((I-P)M\right)\right\rangle_t &= {}^t\left(I-P\right)^i_\alpha \left(I-P\right)^\alpha_j \mathrm{d}\left\langle {}^t M_i, M^j\right\rangle_t \\
&= \left(I-P\right)^i_j \mathrm{d}\left\langle {}^t M_i, M^j\right\rangle_t \\
&= \left(I-P\right)_{ij} a^{ij}\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned}
$$

en notant $M = \left(M^{f^i}\right)$.

Le processus s'écrit donc $X^i_t = X^i_0 + \int_0^t b^i(X_s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma^i_\alpha(X_s)\mathrm{d}B^\alpha_s$.

A priori, il n'y a aucune raison pour qu'un mouvement brownien indépendant W soit défini sur cet espace de probabilité. On agrandit donc l'espace de la manière suivante : si le mouvement X est défini sur un espace filtré $\left(\Omega, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$, on définit un nouvel espace $\left(\Omega\times\mathbf{W}, \left(\mathcal{F}_t\otimes\mathcal{G}_t\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\otimes\mathbb{Q}\right)$ où $\left(\mathbf{W}, \left(\mathcal{G}_t\right)_{t\geq 0}, \mathbb{Q}\right)$ est l'espace de Wiener avec sa filtration canonique muni de la loi d'un mouvement brownien. Le processus X s'étend naturellement à cet espace, en posant $\tilde{X}(\omega,\omega') = X(\omega)$, et on dispose d'un mouvement brownien indépendant W donné par $W(\omega,\omega') = \omega'$.

On a bien sûr égalité en loi de X et $\tilde{X}$, mais on a aussi beaucoup plus fort, puisque les espaces filtrés $\left(\Omega, \left(\mathcal{F}_t\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ et $\left(\Omega\times\mathbf{W}, \left(\mathcal{F}_t\otimes\{\mathcal{W}\}\right)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\otimes\mathbb{1}\right)$ sont virtuellement les mêmes. On se place alors sur cet espace le long de la démonstration. Le résultat démontré est alors qu'il existe un espace qui affine le premier tel que la représentation pésentée soit valable. □

On a démontré au cours de cette preuve un cas particulier du lemme suivant, très utile en pratique :

Lemme 3.26.
Soit X une L-diffusion et f et g deux fonctions lisses de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

$$
\mathrm{d}\left\langle f(X), g(X)\right\rangle_t = \mathrm{d}\left\langle M^f, M^g\right\rangle_t = \Gamma\left(f,g\right)\mathrm{d}t
$$

Les diffusions vérifient la propriété de Markov forte, dans le sens suivant.

Théorème 3.27.
Si X est une L-diffusion, alors pour τ un temps d'arrêt borné, $X_{\tau+\cdot} = \left(X_{\tau+t}\right)_t$ est une L-diffusion pour $\left(\mathcal{F}_{\tau+t}\right)_t$ indépendante de $\mathcal{F}_\tau$ avec $X_{\tau+\cdot}(0) = X(\tau)$.

4 Calcul stochastique sur une variété

4.1 Équations différentielles stochastiques sur une variété

Si l'on cherche à définir intrinsèquement une équation différentielle stochastique sur une variété, il faut définir une intégrale stochastique. On se base pour cela sur la formule d'Itō, dont découle facilement le lemme suivant.

Lemme 4.1.
Soient une semimartingale continue X de $\mathbb{R}^n$ et un processus continu adapté H de $M_{d,n}(\mathbb{R})$. Alors $Z = H\cdot X$ si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
f(Z_t) &= f(Z_0) + \int_0^t \partial_i f(Z_s)(H^i_\alpha)_s \mathrm{d}X^\alpha_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_{ij} f(Z_s)(H^i_\alpha)_s (H^j_\beta)_s \mathrm{d}\left\langle X^\alpha, X^\beta\right\rangle_s \\
&= f(Z_0) + \int_0^t \left(\mathrm{d}f_{Z_s} \circ H\right)_s \mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\int_0^t \left(\mathrm{d}^2 f_Z(H_\alpha, H_\beta)\right)_s \mathrm{d}\left\langle X^\alpha, X^\beta\right\rangle_s
\end{aligned}
$$

pour toute fonction lisse f.

Cette caractérisation se généralise immédiatement à un processus H à valeurs dans les applications linéaires de $\mathbb{R}^d$ dans $T_Z\mathcal{M}$. Cependant, ce n'est pas une intégrale des plus faciles à manipuler ; on définit donc l'intégrale de Stratonovich comme suit.

Définition 4.1.
Soient X une semimartingale continue de $\mathbb{R}^d$ et H une semimartingale continue de $M_{n,d}(\mathbb{R})$. On appelle intégrale de Stratonovich le processus défini par :

$$
H \circ X := H \cdot X + \frac{1}{2}\langle H, X\rangle
$$

On notera aussi $(H \circ X)_t = \int_0^t H_s \circ \mathrm{d}X_s$.

Le lemme précédent prend alors la forme suivante :

Lemme 4.2.
Soient une semimartingale continue X de $\mathbb{R}^n$ et une semimartingale continue H de $M_{d,n}(\mathbb{R})$. Alors $Z = H \circ X$ si et seulement si :

$$
\begin{aligned}
f(Z_t) &= f(Z_0) + \int_0^t \partial_i f(Z_s)(H^i_\alpha)_s \circ \mathrm{d}X^\alpha_s \\
&= f(Z_0) + \int_0^t \left(\mathrm{d}f_Z \circ H\right)_s \circ \mathrm{d}X_s
\end{aligned}
$$

pour toute fonction lisse f.

Démonstration.
Découle de la formule d'Itō, en utilisant le fait que f est $\mathcal{C}^3$. □

L'intégrale de Stratonovich un comportement proche de celui calcul différentiel classique, comme le montrent les propriétés suivantes.

Proposition 4.1.
Soient X, Y, H et K des semimartingales continues de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$.

i. *l'intégrale de Stratonovich est linéaire en l'intégrande et en l'intégrateur ;*
ii. *$H \circ X$ est une semi martingale et $K \circ (H \circ X) = KH \circ X$;*
iii. *$X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \circ \mathrm{d}Y_s + \int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}X_s$;*
iv. *$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) \circ \mathrm{d}X_s$.*

Lorsque cela a un sens, ces formules sont vraies en dimension finie. En particulier, la dernière formule donne :

$$
f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \partial_i f(X_s) \circ \mathrm{d}X^i_s = f(X_0) + \int_0^t \mathrm{d}f_{X_s} \circ \mathrm{d}X_s
$$

Malgré son apparence artificielle, l'intégrale de Stratonovich n'est pas moins naturelle qu'une autre. En effet, elle peut aussi être vue comme la limite des sommes $\sum_i H_{u_i}\left(X_{t_{i+1}} - X_{t_i}\right)$ où $2u_i = t_{i+1} + t_i$, dans un sens proche de celui de l'intégrale d'Itō.

On dit qu'un processus à valeur dans une variété est une semimartingale si son image par toute fonction réelle lisse l'est, et on peut alors définir l'intégrale stochastique suivante, très adaptée à la géométrie différentielle :

Définition 4.2 (Intégrale de Stratonovich)**.**
On note $M^n\mathcal{M}$ *et on appelle* fibré matriciel *l'ensemble des couples* (x, u) *où* u *est une application linéaire de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $T_x\mathcal{M}$*. De la même façon que* $F\mathcal{M}$*, c'est une variété de dimension* $d + dn$*.*
Soient une semimartingale continue X *de* $\mathbb{R}^n$ *et une semimartingale continue* H *de* $M^n\mathcal{M}$*. Alors* $Z = H \circ X$ *si et seulement si pour tout* t*,* $H_t \in M^n_{Z_t}\mathcal{M}$ *et :*

$$\begin{aligned} f(Z_t) &= f(Z_0) + \int_0^t \partial_i f(Z_s)(H^i_\alpha)_s \circ \mathrm{d}X^\alpha_s \\ &= f(Z_0) + \int_0^t \left(\mathrm{d}f_{Z_s} \circ H\right)_s \circ \mathrm{d}X_s \end{aligned}$$

pour toute fonction lisse f *et tout système de coordonnées local* $(x_i)_i$*.*
On appelle alors Z *l'*intégrale de Stratonovich *de* H *contre* X*.*

Une réserve est à noter : cette intégrale n'est pas définie pour tout processus H, puisqu'il faut qu'il soit à valeurs dans le bon espace tangent.

Muni de cette intégrale, on a le même formalisme pour les équations différentielles stochastiques. On s'intéressera à des équations de la forme suivante :

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X) \circ \mathrm{d}Z_t$$

où Z est une semimartingale continue de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction prévisible à valeurs dans $M^n\mathcal{M}$ et telle que $f(t, \omega) \in M^n_{\omega(t)}$ pour tout (t, ω).

Un théorème d'existence et d'unicité comparable au théorème 3.22 est toujours valable :

Théorème 4.3.
Soit l'équation différentielle $\mathrm{d}X_t = f(t, X) \circ \mathrm{d}Z_t$ *avec* $f(\cdot, C)$ *continue pour* C *constante,* $f(t, \cdot)$ *localement lipchitzienne et* X_0 *quelconque. Alors on a une solution à cette équation définie jusqu'à son temps d'explosion, forte et unique presque sûrement et en loi.*

Ici, on dit f est localement lipschitzienne si $\mathrm{d}\phi \circ f$ l'est pour toute fonction ϕ lisse de $\mathcal{M}$ dans $\mathbb{R}$.
Cependant, on va sensiblement affaiblir le théorème afin de faciliter la démonstration :

Théorème 4.4.
Soit l'équation différentielle $\mathrm{d}X_t = f(t, X_t) \circ \mathrm{d}Z_t$ *avec* f *lisse et* X_0 *quelconque. Alors on a une solution à cette équation définie jusqu'à son temps d'explosion, forte et unique presque sûrement et en loi.*

Afin de faciliter la démonstration, revenons au cadre euclidien :

Lemme 4.5.
Si X *est solution de l'équation ci-dessus et* $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ *est continûment différentiable, alors* $\phi(X)$ *est solution de* $\mathrm{d}Y_t = \int_0^t \left(\mathrm{d}\phi_{Y_t} \circ f(t, X_t)\right) \circ \mathrm{d}Z_t$*.*

Ainsi, puisque le théorème de Whitney nous donne un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathcal{M}$ vers un fermé de $\mathbb{R}^n$, on peut résoudre l'équation sur le fermé, puis en déduire une solution sur la variété. On considèrera donc, à partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce chapitre, que $\mathcal{M}$ est une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^N$ de dimension d.

Démonstration.
On prolonge f à une fonction lisse sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. L'équation se récrit en termes d'intégrale d'Itō :

$$\mathrm{d}X_t = f(t, X_t)\mathrm{d}Z_t + \partial_t f(t, X_t)\mathrm{d}\left\langle T, Z\right\rangle_t + \partial_X f(t, X_t) f(t, X_t)\mathrm{d}\left\langle Z, Z\right\rangle_t$$

où $T_t = t$ et ∂_X est la différentielle en espace de f.
Ainsi, le théorème 3.22 assure l'existence et l'unicité d'une solution dans $\mathbb{R}^n$.
Il faut maintenant montrer que le mouvement X ainsi construit reste sur la variété. Soit p l'application qui à un point de $\mathbb{R}^n$ associe le point de $\mathcal{M}$ le plus proche. Elle est bien définie et lisse sur un ouvert $\mathcal{O}$ contenant $\mathcal{M}$ (c'est la projection orthogonale). On note $h(x) = |x - p(x)|^2$, qui est elle aussi lisse sur $\mathcal{O}$. On choisit un prolongement de f sur $\mathbb{R} \times \mathcal{O}$ défini par $\tilde{f}(t, x) = f(t, p(x))$. On vérifie :

$$\mathrm{d}h_x\left(\tilde{f}_\alpha(t, x)\right) = 0$$

et ainsi, tant que X reste dans $\mathcal{O}$:

$$\mathrm{d}h(X_t) = \mathrm{d}h_{X_t}\left(\tilde{f}_\alpha(t, X_t)\right) \circ \mathrm{d}Z_t^\alpha = 0$$

On en déduit que X reste sur $\mathcal{M}$, ce qui conclut la preuve. □

On peut se demander comment représenter un processus sur une variété par une intégrale stochastique. En effet, on ne peut pas utiliser X comme intégrateur s'il est considéré comme étant à valeurs dans $\mathcal{M}$. En revanche, on peut comparer les deux points de vue grâce au lemme suivant.

Lemme 4.6.
Si X est un semimartingale continue à valeurs dans $\mathcal{M}$, alors X vérifie $\mathrm{d}X_t = P(X_t) \circ \mathrm{d}X_t$.

Il vaut voir le X de gauche comme un processus sur $\mathcal{M}$, celui de droite comme un processus euclidien, et $P(x)$ comme une application de $\mathbb{R}^N$ dans $T_x\mathcal{M}$.

Démonstration.
Posons Y le processus défini par $Y_0 = X_0$ et $\mathrm{d}Y_t = P(X_t) \circ \mathrm{d}X_t$. On ne saura pas avant la fin de la démonstration que $X = Y$; ainsi, on ne peut pas parler de $P(x)$ comme d'une fonction à valeurs dans $T_x\mathcal{M}$, puisque l'intégrale risque de ne pas être définie. On considère donc $P(x)$ comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
Y est à valeurs dans $\mathcal{M}$ d'après la démonstration du théorème 4.4 ; de plus, en notant toujours p la projection sur $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}Y_t &= \mathrm{d}p(Y_t) \\
&= (\mathrm{d}p(X_t) \circ P(X_t)) \circ \mathrm{d}X_t \\
&= (\mathrm{d}p(X_t) \circ Id) \circ \mathrm{d}X_t \\
&= \mathrm{d}p(X_t) \\
&= \mathrm{d}X_t
\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité. □

4.2 Processus de diffusion

Un processus de diffusion sur une variété n'a rien de plus complexe qu'une diffusion euclidienne ; l'objectif de cette partie est de vérifier l'existence et l'unicité d'un tel processus.

Définition 4.3.
Soit L un opérateur différentiel vérifiant les hypothèses du théorème 3.23 sur $\mathcal{M}$. Il existe alors une unique semimartingale continue X telle que le processus M^f vérifiant $M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)\mathrm{d}s$ soit une martingale locale pour tout $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ lisse. De plus, X est markovien.
Ce processus est appelé diffusion de générateur L.

On va construire un tel mouvement comme un mouvement de $\mathbb{R}^N$ qui se trouvera vivre sur la variété. Pour cela, on étend L à l'espace entier. Notons f^i les applications coordonnées de $\mathbb{R}^N$.

Posons $b^i = Lf^i$ sur la variété, que l'on prolonge à N fonctions lisses définies sur $\mathbb{R}^N$, et $a^{ij} = \Gamma\left(f^i, f^j\right)$ sur la variété, que l'on prolonge de même. On pose alors $\tilde{L} = b^i\partial_i + \frac{1}{2}a^{ij}\partial_{ij}$.

Lemme 4.7.
Soit f une fonction lisse définie sur $\mathcal{M}$ et $\tilde{f}$ un prolongement de f à $\mathbb{R}^N$.
Pour tout $x \in \mathcal{M}$, $Lf(x) = \tilde{L}\tilde{f}(x)$

Démonstration.
On choisit un système de coordonnées local $(x_\alpha)_\alpha$ de $\mathcal{M}$. On note $\overline{\partial}_\alpha$ les dérivées selon ces coordonnées, qui permettent donc d'écrire L sous la forme :

$$L = \beta^\alpha \overline{\partial}_\alpha + \frac{1}{2}\alpha^{\alpha\beta}\overline{\partial}_{\alpha\beta}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
Lf &= L\left(\tilde{f}(f^1, \cdots, f^n)\right) \\
&= \beta^\alpha \overline{\partial}_\alpha\left(\tilde{f}(f^1, \cdot, f^n)\right) + \frac{1}{2}\alpha^{\alpha\beta}\overline{\partial}_{\alpha\beta}\left(\tilde{f}(f^1, \cdot, f^n)\right) \\
&= \beta^\alpha\left(\partial_i\tilde{f}\right)(f^1, \cdot, f^n)\overline{\partial}_\alpha f^i \\
&+ \frac{1}{2}\alpha^{\alpha\beta}\left(\partial_i\tilde{f}\right)(f^1, \cdot, f^n)\overline{\partial}_{\alpha\beta}f^i \\
&+ \frac{1}{2}\alpha^{\alpha\beta}\left(\partial_{ij}\tilde{f}\right)(f^1, \cdot, f^n)\overline{\partial}_\alpha f^i\overline{\partial}_\beta f^j \\
&= Lf^i\partial_i\tilde{f} + \frac{1}{2}\Gamma\left(f^i, f^j\right)\partial_{ij}\tilde{f} \\
&= b^i\partial_i\tilde{f} + \frac{1}{2}a^{ij}\partial_{ij}\tilde{f} \\
&= \tilde{L}\tilde{f}
\end{aligned}$$

□

Une fois établi le théorème suivant, on aura existence et unicité des diffusions sur une variété :

Théorème 4.8.
Une semimartingale X de $\mathbb{R}^N$ telle que $X_0 \in \mathcal{M}$ est une L-diffusion sur $\mathcal{M}$ si et seulement si c'est une $\tilde{L}$-diffusion sur $\mathbb{R}^N$.

Démonstration.

Si X est une L-diffusion sur $\mathcal{M}$, soit $\tilde{f}$ une fonction lisse de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$. Si f est la restriction de $\tilde{f}$ à $\mathcal{M}$, $M_t^f = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s)\mathrm{d}s$ définit une martingale.

Ainsi, $M^{\tilde{f}}$ définie par $M_t^{\tilde{f}} = \tilde{f}(X_t) - \tilde{f}(X_0) - \int_0^t \tilde{L}\tilde{f}(X_s)\mathrm{d}s$ est aussi une martingale, puisque $\tilde{L}\tilde{f}(X_t) = Lf(X_t)$ pour tout t, et X est une $\tilde{L}$-diffusion sur $\mathbb{R}^n$.

Réciproquement, il suffit de montrer que si X est une $\tilde{L}$-diffusion avec $X_0 \in \mathcal{M}$, alors X est à valeurs dans $\mathcal{M}$. En effet, le raisonnement précédent donnera alors le résultat attendu.

Or, si X est une $\tilde{L}$-diffusion, il est possible d'enrichir l'espace pour trouver un mouvement brownien B tel que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}X_t &= b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\mathrm{d}B_t \\
&= b(X_t) \circ \mathrm{d}t + \sigma(X_t) \circ \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}\mathrm{d}\left\langle \sigma_\alpha(X), B^\alpha \right\rangle_t \\
&= b(X_t) \circ \mathrm{d}t + \sigma(X_t) \circ \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}\mathrm{d}\left\langle \partial_i \sigma_\alpha(X) \cdot X^i, B^\alpha \right\rangle_t \\
&= b(X_t) \circ \mathrm{d}t + \sigma(X_t) \circ \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}\mathrm{d}\left\langle \partial_i \sigma_\alpha(X) \sigma_\beta^i(X) \cdot B^\beta, B^\alpha \right\rangle_t \\
&= b(X_t) \circ \mathrm{d}t + \sigma(X_t) \circ \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}\partial_i \sigma_\alpha(X) \sigma_\beta^i(X)\mathrm{d}\left\langle B^\beta, B^\alpha \right\rangle_t \\
&= b(X_t) \circ \mathrm{d}t + \sigma(X_t) \circ \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}\left(\mathrm{d}\sigma_\alpha(X) \circ \sigma_\beta(X)\right) \circ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

On se trouve donc dans le cas du théorème 4.4, et le processus reste bien sur la variété. □

En fait, l'équation vérifiée, si on arrive à écrire l'opérateur sous une forme sympathique, est la même que dans le cas euclidien.

Théorème 4.9.

Si L est l'opérateur tel que $Lf(x) = b \cdot f(x) + \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}\sigma_\alpha \cdot \sigma_\beta \cdot f(x)$ avec β un champ de vecteurs lisse et σ une section lisse de $M^n\mathcal{M}$, alors un processus X est une L-diffusion si et seulement si il existe un mouvement brownien B — éventuellement sur un espace raffiné — tel que $\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t) \circ \mathrm{d}B_t$.

Démonstration.

Si $\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t) \circ \mathrm{d}B_t$, on vérifie que :

$$\mathrm{d}f(X_t) = (b \cdot f)(X_t)\mathrm{d}t + (\sigma_\alpha(X_t) \cdot f)(X_t)\mathrm{d}B_t^\alpha + \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}\sigma_\beta \cdot (\sigma_\alpha \cdot f)(X_t)\mathrm{d}t$$

et ainsi, c'est bien une L-diffusion.

Réciproquement, si X est une L-diffusion, c'est alors aussi une $\tilde{L}$-diffusion, où $\tilde{L}$ est construit comme ci-dessus. D'après la partie 3.6, il existe donc un mouvement brownien, éventuellement défini sur un espace raffiné, tel que $\mathrm{d}X_t = \tilde{b}(X_t)\mathrm{d}t + \tilde{\sigma}\mathrm{d}B_t$, d'où :

$$\mathrm{d}X_t = \tilde{b}(X_t)\mathrm{d}t + \tilde{\sigma}(X_t) \circ \mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}\delta^{\alpha\beta}\left(\tilde{\sigma}_\alpha \cdot \tilde{\sigma}_\beta\right)(X_t)\mathrm{d}t.$$

C'est donc une diffusion pour l'opérateur associé ; par unicité, on identifie les termes et $\mathrm{d}X_t = b(X_t)\mathrm{d}t + \sigma(X_t) \circ \mathrm{d}B_t$. □

4.3 Développements

Rappelons-nous nos espoirs lors de la construction du fibré des repères. Étant donnée une courbe $\mathcal{C}^1$ dans l'espace euclidien et une condition initiale (un point de $F\mathcal{M}$), on peut développer cette courbe sur le fibré des repères de manière à ce que le repère soit transporté parallèlement et que le point se déplace avec la même vitesse que la courbe initiale, vue par l'isométrie.

Nous disposons à présent d'assez d'outils pour construire un tel développement pour des semimartingales. Toute cette partie se place dans le cadre du fibré des repères, mais la construction dans le fibré orthonormal est en tout point identique.

Définition 4.4 (Développement)**.**

Soit W une semimartingale de $\mathbb{R}^d$ définie sur un espace filtré $\left(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P}\right)$ et U_0 une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$-mesurable à valeurs dans $F\mathcal{M}$. On dit qu'un processus U est le développement *de W avec condition initiale U_0 s'il vérifie :*

$$\mathrm{d}U_t = H_i(U_t) \circ \mathrm{d}W_t^i$$

avec condition initiale U_0. On notera aussi $\mathrm{d}U_t = H(U_t) \circ \mathrm{d}W_t$, en posant $H(U) = (H_i(U))_i$.

On définit aussi sa projection $X = \pi(U)$.

Théorème 4.10.

Il y a correspondance unique, étant donné U_0 et W_0, entre W, U et X.

Démonstration.

Bien sûr, étant donné W et U_0, il existe d'après la définition un unique développement U. De même, à U correspond un unique X. Seul le sens contraire pose problème.

Notons tout d'abord que si $\mathrm{d}U_t = H(U_t) \circ \mathrm{d}W_t$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\pi U\right)_t &= (\mathrm{d}\pi_{U_t} \circ H(U_t)) \circ \mathrm{d}W_t \\ &= U_t \circ \mathrm{d}W_t \end{aligned}$$

Étant donné un processus X sur $\mathcal{M}$ et une condition initiale U_0, il existe un relèvement U de celui-ci. Posons en effet $U_t = U_0 + \int_0^t P^*(X_s) \circ \mathrm{d}X_s$, où P_i^* est le relèvement horizontal de la projection P_i (voir section 4.1).

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(\pi U\right)_t &= (\mathrm{d}\pi_{U_t} \circ P^*(X_t)) \circ \mathrm{d}X_t \\ &= P(X_t) \circ \mathrm{d}X_t \\ &= \mathrm{d}X_t \end{aligned}$$

d'après le lemme 4.6.

On a donc bien existence, puisque U est un relèvement.

Étant donné un développement U de W, son antidéveloppement est unique. En effet, si on pose $Y = \pi U$:

$$\begin{aligned} \left(U_t^{-1} \circ P(Y_t)\right) \circ \mathrm{d}Y_t &= \left(U_t^{-1} \circ P(Y_t) \circ U_t\right) \circ \mathrm{d}W_t \\ &= \left(U_t^{-1} \circ U_t\right) \circ \mathrm{d}W_t \\ &= \mathrm{d}W_t \end{aligned}$$

et W est entièrement déterminé par U.

Étant donné un processus X sur $\mathcal{M}$ et une condition initiale U_0, son relèvement est unique. En effet, si U est un tel relèvement, il existe W tel que $\mathrm{d}U_t = H(U_t) \circ \mathrm{d}W_t$, et alors :

$$\begin{aligned} P^*(X_t) \circ \mathrm{d}X_t &= (P^*(X_t) \circ U_t) \circ \mathrm{d}W_t \\ &= H(U_t) \circ \mathrm{d}W_t \\ &= \mathrm{d}U_t \end{aligned}$$

et U est entièrement déteminé par X. □

4.4 Construction du mouvement brownien

La construction du mouvement brownien, et avec elle ce rapport, s'achèvera avec le théorème suivant :

Théorème 4.11 (Mouvement brownien)**.**

Soit X une semimartingale continue à valeurs dans $\mathcal{M}$.

Le processus X est une $\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{M}}$-diffusion si et seulement si c'est le développement d'un mouvement brownien de $\mathbb{R}^d$. On dit alors que X est le mouvement brownien *issu de X_0.*

Il faudra bien sûr définir un laplacien $\Delta_{\mathcal{M}}$ sur la variété.

Ces deux définitions du mouvement brownien paraissent légitimes, le fait qu'elles correspondent est la garantie d'avoir exhibé un processus intéressant. Des résultats de convergence de marches aléatoires tels que celui proposé par Pinsky [4 PINSKY] renforcent cet intérêt.

Commençons par définir le laplacien en question.

Définition 4.5 (Divergence)**.**

Soient $\mathcal{M}$ une variété munie d'une forme volume V et X un champ de vecteurs $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}$.

La divergence *de X est la fonction telle que :*

$$\mathcal{L}_X V = \operatorname{div} X \cdot V.$$

Elle s'écrit $\frac{1}{v}\partial_\alpha \left(vX^\alpha\right)$ si $V_x = v(x)\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$.

Démonstration.

On utilise l'expression de la dérivée de Lie suivante, qui rend le calcul direct.

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X T)^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p} &= X^\alpha \partial_\alpha \left(T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_p}\right) \\ &- \partial_\alpha X^{j_1} T^{\alpha j_2 \cdots j_q}_{i_1\cdots i_p} - \cdots - \partial_\alpha X^{j_q} T^{j_1\cdots j_{q-1}\alpha}_{i_1\cdots i_p} \\ &+ \partial_{i_1} X^\alpha T^{j_1\cdots j_q}_{\alpha i_2\cdots i_p} + \cdots + \partial_{i_p} X^\alpha T^{j_1\cdots j_q}_{i_1\cdots i_{p-1}\alpha} \end{aligned}$$

□

Théorème 4.12.

Si $(\mathcal{M}, g)$ est une variété riemannienne, on dispose d'une forme volume V naturelle définie par $V_x = \sqrt{|\det g|}\mathrm{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$. Elle associe à une base orthonormale un volume unitaire.

Dans ce cadre, la divergence vérifie :

$$\operatorname{div} X = C^1_1 \nabla X.$$

On peut alors aussi l'écrire $\operatorname{div} X = \partial_i X^i + \Gamma^j_{ij} X^i$.

De plus, pour toute base orthonormale $(e_i)_i$ de $T_x\mathcal{M}$, $\operatorname{div} X(x) = \delta^{ij} \langle D_{e_i} X, e_j\rangle$.

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\det g}}\partial_i\left(\sqrt{\det g}X^i\right) &= \partial_i X^i + \frac{1}{2\det g}\left(\partial_i \det g\right) X^i \\
&= \partial_i X^i + \frac{1}{2\det g}\det g \operatorname{tr}\left(g^{-1}\partial_i g\right) X^i \\
&= \partial_i X^i + \frac{1}{2}\left(g^{kl}\partial_i g_{kl}\right) X^i \\
&= \partial_i X^i + \frac{1}{2}\left(g^{kl}\left(\Gamma^{\alpha}_{ik}g_{\alpha l} + \Gamma^{\alpha}_{il}g_{k\alpha}\right)\right) X^i \\
&= \partial_i X^i + \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\alpha}_{ik}\delta^k_{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{il}\delta^l_{\alpha}\right) X^i \\
&= \partial_i X^i + \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\alpha}_{i\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}\right) X^i \\
&= \partial_i X^i + \Gamma^{j}_{ij} X^i
\end{aligned}
$$

puisque $\Gamma^{\alpha}_{ik}g_{\alpha l} + \Gamma^{\alpha}_{il}g_{k\alpha} = \partial_i g_{kl}$.

De plus, si l'on choisit comme système de coordonnées locales $(a^i)_i \mapsto \gamma^{a^i e_i}(1)$ où γ^Y décrit la géodésique issue de Y, alors $(e_i)^{\alpha} = \delta^{\alpha}_i$, $g_{kl} = \delta_{kl}$ et $\Gamma^k_{ij} = 0$. On appelle cette carte la carte exponentielle associée à $(e_i)_i$.

Ainsi, en x :

$$
\begin{aligned}
\delta^{ij}\left\langle D_{e_i}X, e_j\right\rangle &= \delta^{ij}\delta_{kl}\left(D_{e_i}X\right)^k \delta^l_j \\
&= \delta^{ij}\delta_{kl}\delta^{\alpha}_i \partial_{\alpha}X^k\delta^l_j \\
&= \partial_i X^i \\
&= \operatorname{div} X
\end{aligned}
$$

□

Définition 4.6 (Gradient)**.**

Si f est une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{M}$, on appelle gradient *de f le vecteur tel que :*

$$\langle \operatorname{grad} f(x), \cdot\rangle = \mathrm{d}f_x.$$

Il s'écrit en coordonnées $\operatorname{grad} f = g^{kl}\partial_l f \frac{\partial}{\partial x_k}$.

Démonstration.

L'expression convient, et on conclut par unicité. □

Définition 4.7 (Opérateur de Laplace-Beltrami)**.**

*Soit f une fonction $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{M}$. L'*opérateur de Laplace-Beltrami *est l'opérateur différentiel défini comme suit.*

$$\Delta_{\mathcal{M}} f(x) := \operatorname{div}\operatorname{grad} f = \delta^{ij}\mathrm{d}^2 f(e_i, e_j)$$

pour une base orthonormale de $T_x\mathcal{M}$.

Il s'écrit en coordonnées $\Delta_{\mathcal{M}} f = \frac{1}{\sqrt{G}}\partial_i\left(\sqrt{G}g^{ij}\partial_j f\right)$ où $G = |\det g|$.

Démonstration.

Les calculs sont directs ; on pourra, pour montrer $\operatorname{div}\operatorname{grad} f = \delta^{ij}\mathrm{d}^2 f(e_i, e_j)$, se placer dans une carte exponentielle. $\square$

Le problème majeur de cet opérateur est qu'il ne se met pas facilement sous la forme d'une somme de carrés. En effet, s'il s'exprime en chaque point comme la somme des carrés d'une base orthonormale, il n'existe pas de champs de vecteurs simples qui vérifient cette propriété.[5] Cependant, on dispose à présent d'un outil construit exactement pour traiter ce type de problème.

Définition 4.8 (Opérateur de Bochner)**.**

On appelle opérateur de Bochner *l'opérateur différentiel défini sur $O\mathcal{M}$ par :*

$$\Delta_{O\mathcal{M}} f(x) := \sum_i H_i \cdot (H_i \cdot f)(x)$$

pour toute fonction f $\mathcal{C}^2$ sur $O\mathcal{M}$.

Théorème 4.13.

Soit f définie sur $\mathcal{M}$ et $\tilde{f} = f \circ \pi$. Alors $\Delta_{\mathcal{M}} f = \Delta_{O\mathcal{M}} \tilde{f}$.

Démonstration.

Supposons connu le résultat suivant : si $x = \pi(u)$, alors $u(e_i) \cdot f(x) = H_i \cdot \tilde{f}(u)$.

On fixe $u \in O\mathcal{M}$, et on se place dans la carte exponentielle associée à $(u(e_i))_i$, où $(e_i)_i$ est la base canonique de $\mathbb{R}^d$.

$$\operatorname{div} X(x) = \partial_i X^i(x) = u(e_i) \cdot X^i(x) = H_i \cdot (X \circ \pi)(u)$$

$$(\operatorname{grad} f)^i(x) = \delta^{i\alpha}\partial_\alpha f(x) = \delta^{i\alpha} u(e_\alpha) \cdot f(x) = \delta^{i\alpha} H_\alpha \cdot (f \circ \pi)(u)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{\mathcal{M}} f(x) &= \operatorname{div}\operatorname{grad} f(x) \\
&= u(e_i) \cdot \left(\delta^{ij} u(e_j) \cdot f\right)(x) \\
&= \delta^{ij} H_i \cdot (H_j \cdot (f \circ \pi))(u) \\
&= \Delta_{O\mathcal{M}} \tilde{f}(u)
\end{aligned}$$

Montrons alors le résultat admis. Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{M}$ tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = u(e_i)$. Soit Γ son relèvement horizontal ; par définition, $\Gamma'(0) = H_i(u)$.

$$H_i \cdot \tilde{f}(u) = \left(\tilde{f} \circ \Gamma\right)'(0) = (f \circ \pi \circ \Gamma)'(0) = (f \circ \gamma)'(0) = u(e_i) \cdot f(x)$$

$\square$

On peut à présent s'attacher à démontrer le théorème 4.11. On l'écrit sous la forme suivante.

Théorème 4.14.

Soient W un processus de $\mathbb{R}^d$, U son développement issu de U_0 sur $O\mathcal{M}$ et X la projection de U. Les propositions suivantes sont alors équivalentes.

i. W est un mouvement brownien ;

ii. U est une $\frac{1}{2}\Delta_{O\mathcal{M}}$-diffusion ;

5. On peut montrer que les P_i associés à la projection réduisent l'opérateur, cependant on est obligé pour cela de plonger isométriquement la variété dans $\mathbb{R}^n$.

iii. X est une $\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{M}}$-diffusion.

Lorsque ces conditions sont réunies, on dit que X est un mouvement brownien sur M.

Démonstration.

Si i. alors ii.

Puisque U est le développement de W, $\mathrm{d}U_t = H(U_t) \circ \mathrm{d}W_t$ et si W est un mouvement brownien, U est une $\frac{1}{2}\Delta_{O\mathcal{M}}$-diffusion d'après la partie 4.2.

Si ii. alors iii.

Soit f lisse sur $\mathcal{M}$ et $\tilde{f} = f \circ \pi$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f(X_t) &= \mathrm{d}\tilde{f}(U_t) \\
&= \mathrm{d}M_t + \frac{1}{2}\Delta_{O\mathcal{M}}\tilde{f}(U_t)\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{d}M_t + \frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{M}}f(X_t)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

où M est une martingale ; X est bien une $\frac{1}{2}\Delta_{\mathcal{M}}$-diffusion.

Si iii. alors i.

Tout d'abord, on note que $\Gamma(f,g) = \langle \mathrm{grad}\, f, \mathrm{grad}\, g\rangle$.

Ensuite, on simplifie le calcul en considérant non seulement que $\mathcal{M}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^N$, mais aussi que sa métrique est la restriction de celle de $\mathbb{R}^N$. On a alors $\mathrm{grad}\, f^\alpha = P_\alpha$, d'où :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\left\langle X^i, X^j\right\rangle_t &= \mathrm{d}\left\langle U^i_\alpha \circ W^\alpha, U^j_\beta \circ W^\beta\right\rangle_t \\
\Gamma\left(f^i, f^j\right)\mathrm{d}t &= U^i_\alpha U^j_\beta \mathrm{d}\left\langle W^\alpha, W^\beta\right\rangle_t \\
\left\langle \mathrm{grad}\, f^i, \mathrm{grad}\, f^j\right\rangle \mathrm{d}t &= U^i_\alpha U^j_\beta \mathrm{d}\left\langle W^\alpha, W^\beta\right\rangle_t \\
\mathrm{d}\left\langle W^\alpha, W^\beta\right\rangle_t &= (U^{-1})^\alpha_i (U^{-1})^\beta_j \left\langle \mathrm{grad}\, f^i, \mathrm{grad}\, f^j\right\rangle \mathrm{d}t \\
\mathrm{d}\left\langle W^\alpha, W^\beta\right\rangle_t &= \left\langle (U^{-1})^\alpha_i P_i, (U^{-1})^\beta_j P_j\right\rangle \mathrm{d}t \\
\mathrm{d}\left\langle W^\alpha, W^\beta\right\rangle_t &= \left\langle e_\alpha, e_\beta\right\rangle \mathrm{d}t \\
\mathrm{d}\left\langle W^\alpha, W^\beta\right\rangle_t &= \delta^{\alpha\beta}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

où un malheureux incident de parcours échange les indices et exposants ; on somme tout de même.

Ainsi, W est un mouvement brownien d'après le théorème de Lévi. □

Références

[1 BÄR+] Christian BÄR et Frank PFÄFFLE. « Wiener measures on Riemannian manifolds and the Feynman-Kac formula », *Matemática Contemporânea*, 2011.

[2 HSU] Elton P. HSU. *Stochastic analysis on manifolds*, 2002. American Mathematical Society, Providence, RI.

[3 MANTON] Jonathan H. MANTON. « A Primer on Stochastic Differential Geometry for Signal Processing », *Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2013.

[4 PINSKY] Mark A. PINSKY. « Isotropic transport process on a Riemannian manifold », *Transactions of the American Mathematical Society*, 1976.

[5 REVUZ+] Daniel REVUZ et Marc YOR. *Continuous martingales and Brownian motion*, 1999. Springer-Verlag, Berlin, troisiè me édition.

[6 SIKORAV] Jean-Claude SIKORAV. « Géométrie avancée », notes de cours. ENS de Lyon, 2013.