

Percolation continue

Rapport de stage de L3

Pierre PERRUCHAUD

Sous la direction de Jean-Baptiste GOUÉRE

Introduction

Lors de ce stage, mon but a été d'étudier la percolation continue sur \mathbb{R}^d . Pour cela, j'ai été amené à m'intéresser succinctement à la percolation discrète sur \mathbb{Z}^d , en m'appuyant en particulier sur le livre *Percolation* de Geoffrey GRIMMETT. J'ai ensuite étudié la percolation continue sur \mathbb{R}^d avec rayon aléatoire, à l'aide du livre *Continuum Percolation* de MEESTER et ROY. Ces deux modèles sont développés dans la première partie, conjointement puisque les résultats et démonstrations sont dans l'ensemble assez proche. La deuxième partie de ce rapport est consacrée à la percolation en grande dimension, j'y détaille les résultats principaux de l'article *Continuum Percolation and Euclidean Minimal Spanning Trees in High Dimension* de Mathew PENROSE.

Table des matières

Introduction	1
1 Résultats classiques	2
1.1 Introduction	2
1.2 Probabilité critique dans le modèle discret	2
1.3 Densité critique dans le modèle continu	3
1.4 Unicité de la composante connexe infinie	4
2 Percolation en grande dimension	5
2.1 Résultats	5
2.2 Couplage	6
2.3 Démonstration de la propriété	6
2.4 Démonstration du théorème	7
Références	9

1 Résultats classiques

1.1 Introduction

On se place dans \mathbb{R}^d , sur lequel on distribue un processus de Poisson ponctuel d'intensité λ . On associe ensuite à chaque point une boule de rayon aléatoire de loi μ , indépendamment les uns des autres et du processus de Poisson. En pratique, on dispose d'un processus de Poisson ponctuel X sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ de mesure d'intensité $\lambda \ell_d \times \mu$ (où ℓ_d est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d), et on vérifie que les propriétés précédentes sont vérifiées. On a alors construit un modèle de *percolation continue*, que l'on appelle le modèle booléen.

On note $x = (c(x); r(x))$ (centre et rayon) pour $x \in X$ et $\Sigma = \bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(c(x), r(x))$. On s'intéressera à cette dernière variable aléatoire, en particulier, s'il existe une composante connexe infinie (comprendre non bornée), on dit qu'il y a *percolation*. On se donne aussi une variable aléatoire ρ indépendante de X de loi μ .

Il est parfois plus simple de se placer dans un cas discret. On se place alors sur \mathbb{Z}^d muni de l'ensemble \mathbb{E}^d des arêtes joignant deux points distants de 1 en norme euclidienne. Ce réseau est noté \mathbb{L}^d . Chaque arête est ouverte avec probabilité p , et fermée avec probabilité $1 - p$; on peut passer d'un point à un l'autre si l'arête qui les relie est ouverte, ce qui nous donne un sous-graphe aléatoire dont les arêtes sont les arêtes ouvertes de \mathbb{L}^d . On dispose alors d'un modèle de *percolation discrète*, dans lequel on s'intéressera aux propriétés des composantes connexes. La plupart des résultats de percolation discrète ont un équivalent en percolation continue.

On notera $C(x)$ la composante connexe de x , C celle de zéro; en effet, puisque l'espace est invariant par translation, elle est représentative de toutes les composantes connexes. On pose aussi X l'ensemble des arêtes ouvertes de \mathbb{L}^d .

1.2 Probabilité critique dans le modèle discret ¹

Définition 1.2.1.

On note $\theta_d(p)$ ou $\theta(p)$ la probabilité que C soit infinie.

Proposition 1.2.1.

La probabilité $\theta_d(p)$ est croissante en fonction de p .

Proposition 1.2.2.

Il y a percolation si et seulement si $\theta_d(p) > 0$.

Il n'y a pas percolation si et seulement si $\theta_d(p) = 0$.

On a donc percolation avec probabilité zéro ou un.

Ainsi, il existe $0 \leq p_c \leq 1$ tel que :

- si $p < p_c$, on n'a pas percolation;
- si $p > p_c$, on a percolation.

On appelle cette probabilité la *probabilité critique*. Sa valeur n'est connue que pour $d = 2$.

La fin de cette partie est consacrée à démontrer le résultat suivant :

Théorème 1.2.1.

Si $d \geq 2$, la probabilité critique est non triviale ($0 < p_c < 1$). ³

1. La probabilité critique se traitant de manière assez différente pour les modèles discret et continu, je suis obligé de séparer les sections.

2. Elle vaut $\frac{1}{2}$. Ce résultat ne sera pas démontré ici, mais est basé sur l'existence d'un réseau dual aux propriétés intéressantes.

3. Dans le cas $d = 1$, on a bien sûr $p_c = 1$.

On montre assez facilement que $p_c > 0$ en sachant que si C est infinie, alors il existe pour tout n un chemin de longueur n issu de 0. Or, le nombre de chemins issus de l'origine est majoré grossièrement par $(2d)^n$, et ainsi la probabilité d'avoir un chemin de longueur n issu de l'origine est majorée par $(2dp)^n$. Si $2dp < 1$, C est donc finie.

Pour montrer $p_c < 1$, la proposition suivante est très utile :

Proposition 1.2.3.

La probabilité $\theta_d(p)$ croît avec la dimension. Ainsi, p_c décroît avec la dimension.

Ainsi, il suffit de traiter le cas de la dimension 2. On construit alors le graphe dual de \mathbb{L}^2 : il s'agit de $\mathbb{L}^2 + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, où une arête du dual est fermée si et seulement si celle qu'elle coupe dans \mathbb{L}^2 est ouverte. En considérant le résultat intuitif décrit ci-dessous, on peut alors conclure.

Proposition 1.2.4.

Une composante connexe est finie si et seulement si il existe un cycle du graphe dual qui l'entoure.

En effet, on montre par un argument similaire à celui décrit plus haut qu'à condition de choisir une zone assez grande contenant l'origine, il y a une probabilité non-nulle pour que l'on n'ait pas de cycle ouvert du dual qui l'entoure. Puisque, de plus, on peut ouvrir toutes les arêtes de cette zone avec probabilité non-nulle et de manière indépendante, la probabilité que C soit infinie est non-nulle.

1.3 Densité critique dans le modèle continu

Dans le cas continu, il n'existe pas toujours de densité critique. On a par exemple le résultat suivant :

Proposition 1.3.1.

L'espace entier est recouvert si et seulement si ρ n'admet pas de moment d'ordre d .

Ceci découle du :

Lemme.

La fraction d'espace recouvert est presque sûrement $1 - e^{-\lambda \pi_d \mathbb{E}[\rho^d]}$ où π_d est le volume de la boule unité en dimension d .

Ces résultats étant assez isolés du reste de mon stage, je les détaillerai uniquement lors de ma soutenance.

On peut malgré tout montrer que pour tout μ tel que $\mu \setminus \{0\} \neq \emptyset$, on a le résultat suivant :

Théorème 1.3.1.

Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que si $\lambda > \lambda_0$, alors il y a percolation presque sûrement.

Pour cela, on construit un modèle de percolation discrète. On place un réseau \mathbb{L}^d dans \mathbb{R}^d , et on considère qu'une arête est ouverte si ses extrémités sont dans la même composante connexe. Alors on peut choisir pour chaque arête e une zone $O(e)$ proche de celle-ci telle que les événements « l'arête e est ouverte uniquement grâce aux points de X situés dans $O(e)$ » soient indépendants et aient une probabilité de se réaliser qui tend uniformément vers 1 quand λ tend vers l'infini. On choisit alors λ assez grand pour avoir percolation dans le modèle discret décrit par les événements ci-dessus, et ainsi on a percolation dans le modèle continu.

Le théorème suivant est plus ardu à démontrer :

Théorème 1.3.2.

Si ρ admet un moment d'ordre $2d - 1$, alors il existe λ_0 tel que si $\lambda < \lambda_0$, alors il n'y a pas percolation.

On passe par l'étude d'un processus de branchement en discrétisant la distribution des rayons. Supposons que ρ ne prenne que des valeurs entières presque sûrement.

On dit qu'une boule est descendant de première génération d'une autre si leur intersection est non-vide et qu'elle n'est pas contenue dans cette dernière. Le nombre de descendants de rayon j d'une boule isolée de rayon i suit donc une loi de Poisson de paramètre $\lambda \mathbb{P}(\rho = j) \pi_d ((i + j)^d - \max(0, i - j)^d)$.

On construit alors théoriquement un processus de branchement où chaque nœud a un type entier. Étant donné un individu de type i , on lui assigne à chaque génération un certain nombre de fils de type j suivant une loi de Poisson de paramètre donné ci-dessus, et ceci pour tout j . En commençant par un ancêtre unique de type i , on peut alors montrer, en notant $\mu_{i,j}^{(n)}$ le nombre de descendants de type j dans la n^e génération :

$$\mu_{i,j}^{(n)} \leq (C\lambda \mathbb{E}[\rho^{2d-1}])^n \mathbb{P}(\rho = j) i^{d-1} j^d$$

Ainsi, si λ est assez petit pour que $C\lambda \mathbb{E}[\rho^{2d-1}]$ soit strictement inférieur à 1, alors on peut sommer sur j et n . L'espérance du nombre de descendants est finie, et ainsi le processus s'arrête avec probabilité 1.

Le dernier argument est de dire que la probabilité qu'une composante connexe soit infinie est inférieure à celle que le processus de branchement ne s'arrête pas. On détaille cet argument dans la partie 2.2.⁴ On peut alors conclure.

Pour le cas où la distribution des rayons n'est pas discrète, il suffit de constater que le processus construit en considérant $\lfloor \rho \rfloor + 1$ admet toujours un moment d'ordre $2d - 1$ et contient les composantes connexes engendrées par le processus initial.

1.4 Unicité de la composante connexe infinie

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Théorème 1.4.1.

S'il existe une composante connexe infinie, alors elle est unique presque sûrement.

Les démonstrations dans les cas continus et discrets sont assez proches. On détaille ici le modèle discret.

On s'appuie tout d'abord sur la propriété d'ergodicité suivante :

Proposition 1.4.1.

Si un événement fonction de X est invariant par translation, alors il a une probabilité de 0 ou 1.

On en déduit que le nombre de composantes connexes infinies est constant presque sûrement. On peut alors démontrer le résultat suivant :

Proposition 1.4.2.

Le nombre de composantes connexes infinies est 0, 1 ou infini.

4. J'ai choisi de traiter plus précisément la partie 2.2, parce qu'il s'agit d'arguments très similaires, et que le cas évoqué dans ladite partie est plus simple. Notamment, il n'implique qu'un type de nœud.

L'idée étant que s'il existe $K \geq 2$ composantes connexes infinies presque sûrement, alors on peut avec probabilité non-nulle connecter deux composantes connexes infinies, et ainsi obtenir $K - 1$ composantes connexes infinies, et donc aboutir à une contradiction.

On conclut alors le théorème par des arguments combinatoires. On considère les sommets appartenant à une composante connexe infinie desquels partent trois arêtes ouvertes et tels que si l'on retire ces trois arêtes, la composante connexe initiale est scindée en trois composantes connexes infinies. On appelle ces points des trifurcations⁵.

Dans le cas discret, si l'on suppose qu'il y a une infinité de composantes connexes, on peut montrer qu'avec probabilité non-nulle, le nombre de trifurcations comprises dans la boule de rayon R est à la fois de l'ordre de R^d et dominé par R^{d-1} , ce qui est absurde. En effet, chaque point ayant une certaine probabilité d'être une trifurcation, l'espérance du nombre de trifurcations est proportionnelle au volume. Pourtant, il est possible d'associer à chaque trifurcation un point de la frontière de la sphère, ce qui aboutit à une contradiction. On a ainsi démontré le théorème.

Dans le cas continu, la stratégie est très similaire. On doit par contre, à propos des trifurcations, aboutir à une majoration assez fine. On peut montrer que le nombre de trifurcation est dominé par KR^d et minoré par kR^d avec probabilité non-nulle, où $k > K$.

2 Percolation en grande dimension

Dans cette partie, on s'intéresse à la probabilité de percolation en grande dimension dans le cas où le rayon vaut $\frac{1}{2}$.

En pratique, on place un processus de Poisson d'intensité λ/π_d sur \mathbb{R}^d auquel on ajoute 0 (cela revient dans un certain sens à avoir un processus de Poisson conditionné pour avoir un point en 0). On place en chacun de ces points une boule de rayon 1, et on s'intéresse à la composante connexe de 0. En particulier, en grande dimension, on montre que la taille de cette composante connexe tend dans un certain sens vers celle d'un processus de branchement de Galton-Watson.

2.1 Résultats

Soit un processus de branchement de Galton-Watson à un ancêtre initial pour lequel le nombre de fils d'un individu suit une loi de Poisson de paramètre λ . On note T_λ le nombre total d'individus du processus, éventuellement infini.

On note $f_k^{(d)}(\lambda)$ la probabilité, en dimension d , que la composante connexe de 0 comporte k boules, et $f_k(\lambda)$ celle que T_λ soit égal à k .

On démontrera alors les résultats suivants :

Proposition 2.1.1.

On a la domination qui suit :

$$\sum_{j \leq k} f_j^{(d)}(\lambda) \geq \sum_{j \leq k} f_j(\lambda)$$

Qui est optimale au sens suivant :

$$f_k^{(d)}(\lambda) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} f_k(\lambda)$$

5. Bien qu'il s'agisse tout simplement de bifurcations...

6. Il y a donc en moyenne λ points dans une boule unité.

Théorème 2.1.1.

$$\sum_{k \geq 1} f_k^{(d)}(\lambda) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \sum_{k \geq 1} f_k(\lambda)$$

Or, on connaît la valeur de $\sum_{k \geq 1} f_k(\lambda)$, puisqu'il s'agit de la probabilité d'extinction d'un processus de Galton-Watson ; c'est donc la plus petite racine positive de $G_\lambda(t) = t$ où G_λ est la fonction génératrice de la loi de Poisson de paramètre λ . On note $\psi(\lambda)$ cette racine.

On a $G_\lambda(t) = \exp(\lambda(t - 1))$, qui admet un point fixe différent de 1 si et seulement si $\lambda > 1$. Ainsi, $\lambda_c \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 1$.

On peut aussi montrer que la densité critique pour ne plus avoir de composante connexe vacante infinie tend vers l'infini lorsque d augmente. Ainsi, pour d assez grand, il existe λ tel que l'on ait à la fois percolation et existence d'une composante connexe vacante infinie.

2.2 Couplage

Pour démontrer ces résultats, on construit un processus qui a même loi que le processus de Poisson.

On place tout d'abord un processus de Poisson sur la boule unité ; on appelle l'ensemble des points ainsi placés les fils de 0. On numérote ces descendants, et effectue pour chacun et dans l'ordre l'algorithme suivant :

1. on place un processus de Poisson sur la boule unité centrée en ce point ;
2. on retire les points qui sont dans une boule centrée en un des points déjà placés — on les appelle les fils du point considéré ;
3. on ajoute ces points à la liste des points à traiter.

On montre alors que l'ensemble des points ainsi créés a même loi que les centres de sphères de la composante connexe de 0.

On peut aussi effectuer cet algorithme commençant avec plusieurs points. C'est ce que l'on fera plus tard ; on introduit alors les notations suivantes : Z_0^d est l'ensemble des points initialement considérés et Z_{k+1}^d les fils de Z_k^d .

On constate aussi que le processus construit de la même manière sans retirer de points conduit naturellement à construire un processus de Galton-Watson, ce qui démontre immédiatement la première partie de la proposition.

2.3 Démonstration de la propriété

On constate tout d'abord que la différence $\sum_{j \leq k} f_j^{(d)}(\lambda) - \sum_{j \leq k} f_j(\lambda)$ correspond à la probabilité que retirer les points appartenant aux boules fasse passer la composante connexe de plus de $k + 1$ éléments à moins de k . En particulier, elle est inférieure à la probabilité de ne retirer aucun point lors de l'algorithme.

On s'appuiera alors principalement sur ce lemme :

Lemme.

Soient (X_1, \dots, X_n) un n -uplet de points uniformément distribués sur la boule unité. On a alors pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}(\text{Pour tout } i, j, \text{ on a : } |X_i \cdot X_j - \delta_{ij}| \leq \varepsilon) \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 1$$

où $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$.

Ainsi, si on place un fils autour d'un point, la probabilité qu'il soit à moins de 1 de son grand-père tend vers 0, puisque que la distance entre eux tend vers $\sqrt{2}$ en probabilité. En généralisant, on montre que la probabilité qu'un des $k + 1$ premiers points soit enlevé tend vers 0, et on a ainsi montré la propriété.

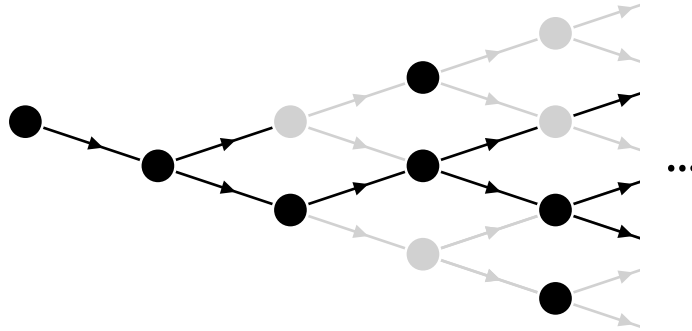
2.4 Démonstration du théorème

On définit les projections suivantes :

Définition 2.4.1.

$$L_d((x_1, \dots, x_d)) = \sqrt{d}(x_1, x_2)$$

Le but est alors de simuler un modèle de percolation discrète sur sommets du type :



Soit $B_{(i,j)}$ le carré de côté 1 de \mathbb{R}^2 centré en (i, j) . L'idée est de déclarer le sommet (i, j) réussi si les points placés dans $L_d^{-1}(B_{(i,j)})$ engendrent assez de points dans les $L_d^{-1}(B_{(i+1,j\pm 1)})$. Si on arrive à avoir percolation, alors on aura engendré un nombre infini de points dans la composante connexe de 0. Il suffit donc, pour montrer le théorème, avoir percolation avec probabilité plus grande que $1 - \psi(\lambda) - \varepsilon$ pour tout ε , puisque la proposition donne l'inégalité inverse.

En pratique, on effectue l'algorithme suivant (on fixera plus tard m , k et k_0) :

1. On place un point en 0, qui constitue l'ensemble Z_0^d .
2. Si $L_d(Z_{k_0}^d)$ admet au moins m points dans $B_{1,-1}$ et qu'aucun point n'a été retiré, alors on dit que l'étape $(0, 0)$ est un succès.
3. On considère ensuite les points dans l'ordre $(1, -1), (2, -2), (2, 0), (3, -3), (3, -1), (3, 1), (4, -4)$, etc. Voici le détail de l'étape (i, j) . Si $(i-1, j-1)$ est un succès, alors on réeffectue la marche de branchement aléatoire en considérant Z_0^d comme m points créés par l'étape $(i-1, j-1)$ dans l'ensemble $L_d^{-1}(B_{i,j})$ ⁷, mais en retirant toujours les points déjà placés pendant les processus précédents. Si $(i-1, j-1)$ a échoué et que $(i-1, j+1)$ a réussi, on adapte le même processus, et enfin, si les deux ont échoué, on ne traite pas l'étape.
4. Si $L_d(Z_k^d)$ contient assez de points dans les $B_{i+1,j\pm 1}$ et qu'aucun point n'a été retiré, alors l'étape est considérée comme réussie.

7. Par exemple les m premiers classés par module croissant.

On montre alors que la probabilité qu'un sommet soit un succès peut être rendue arbitrairement grande indépendamment de l'état des sommets situés hors d'un voisinage de celui-ci.

La probabilité qu'un point soit retiré parce qu'un des points générés pendant une étape précédente dans le traitement du même sommet en est trop proche tend vers 0 lorsque la dimension augmente d'après le lemme du 2.3.

Pour éviter qu'un point ne soit enlevé à cause de points placés lors du traitement d'un sommet précédent, on retire aussi les points dont la distance projetée par L_d est plus grande qu'un certain ρ et les points supplémentaires si le nombre de points créés excède un certain M . La probabilité de retirer un point pour l'un de ces motifs tend vers 0 quand ρ et M tendent vers l'infini. Ainsi, les sommets pouvant conduire à retirer un point sont dans un voisinage fini indépendant de d . On peut alors faire tendre la probabilité de retirer un point vers 0 lorsque d augmente d'après le lemme du 2.3, puisque l'on a alors un nombre de points borné.

Enfin, on s'appuie pour montrer que le processus engendre bien les m points attendus dans chaque carré sur le raisonnement suivant.

On considère tout d'abord plusieurs marches de branchement aléatoires assez proches, qui vont ramener la percolation en grande dimension à un modèle plus simple sur \mathbb{R}^2 .

On pose $(Z_k^{d,\rho})_k$ le processus construit en supprimant les points ainsi que décrit ci-dessus. On définit $(Z_k^\infty)_k$ la marche de branchement en dimension 2 où on remplace à chaque étape un père par des fils distribués selon une loi normale de covariance I_2 , dont le nombre suit une loi de Poisson de paramètre λ . Le processus $(Z_k^{\infty,\rho})_k$ est construit de même en supprimant à chaque étapes les points x fils de a tels que $|L_d(x - a)| > \rho$.

On peut alors montrer que $(Z_k^{d,\rho})_k$ converge faiblement vers $(Z_k^{\infty,\rho})_k$ lorsque d augmente, et que celui-ci tend faiblement vers $(Z_k^\infty)_k$ lorsque ρ augmente. Pour cela, on s'appuie sur le lemme suivant.

Lemme.

Si X_d est uniformément distribué sur la boule unité de \mathbb{R}^d , alors $L_d(X_d)$ converge en loi vers la loi normale centrée en 0 de matrice de covariance I_2 .

Or, on peut montrer le résultat suivant :

Lemme.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k, k_0 et m tels que :

si $|Z_0^\infty \cap B_{0,0}| \geq m$, alors $\mathbb{P}(|Z_k^\infty \cap B_{1,1}| \geq m \text{ et } |Z_k^\infty \cap B_{1,-1}| \geq m) > 1 - \varepsilon$;
si $Z_0^\infty = \{0\}$, alors $\mathbb{P}(|Z_k^\infty \cap B_{1,1}| \geq m \text{ et } |Z_k^\infty \cap B_{1,-1}| \geq m) > 1 - \phi(\lambda) - \varepsilon$

où $B_{i,j}$ est le carré de côté 1 centré en (i, j) .

Par convergence faible, on a alors le même résultat pour $(Z_k^{d,\rho})_k$, ce qui montre, ainsi qu'annoncé, que la probabilité qu'un sommet soit un succès peut être rendue arbitrairement grande indépendamment de l'état des sommets à l'extérieur d'un certain voisinage de celui-ci, tandis que la probabilité que le sommet initial soit un succès peut être rendue arbitrairement proche de $1 - \phi(\lambda)$.

On peut alors conclure d'après le théorème énoncé dans l'article de Liggett, Schonmann et Stacey.

Théorème 2.4.1.

Soit $G = (S, A)$ un graphe dont le degré des sommets est borné.

Si une famille de variables aléatoires $(X_s)_{s \in S}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$ est telle que

$$\mathbb{P}(X_s = 1 \mid \sigma(\{X_t \mid st \notin A\})) \geq P$$

alors pour P assez grand, on peut trouver $(Y_s)_{s \in S}$ une famille de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p telle que pour tout s , $Y_s \leq X_s$ presque sûrement (quitte à modifier l'espace de probabilité considéré).

De plus, lorsque P tend vers 1, on peut faire tendre p vers 1.

On peut ainsi appliquer ce théorème à l'état des sommets, en considérant par exemple que les sommets non traités sont des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre arbitrairement grand. Pour ρ , M et d assez grand, on a donc le succès du sommet (i, j) , conditionné à l'état sommets hors d'un certain voisinage, qui peut être rendu arbitrairement probable, ou arbitrairement proche de $1 - \phi(\lambda)$ pour le premier sommet. Ainsi, on peut les minorer par des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre arbitrairement élevé ou proche de $1 - \phi(\lambda)$, qui conduisent donc à une percolation avec probabilité aussi proche de $1 - \phi(\lambda)$ que désiré. Et, puisque l'on a convergence faible, il y a percolation dans le modèle original avec même probabilité, ce qui achève la preuve du théorème.

Références

Les livres et article suivants sont les références vers lesquels mon stage était explicitement orienté.

Geoffrey GRIMMETT (1989). *Percolation*. Springer, New York.

Ronald MEESTER et Rahul ROY (1996). *Continuum Percolation*. Cambridge University Press.

Mathew PENROSE (1996). Continuum Percolation and Euclidean Minimal Spanning Trees in High Dimension. *The Annals of Applied Probability*, Vol. 6, No. 2, 528-544.

Les articles suivants sont des sources indispensables pour la preuve de certains résultats.

T. M. LIGGETT, R. H. SCHONMANN et A. M. STACY (1997). Domination by Product Measures. *The Annals of Probability*, Vol. 25, No. 1, 71-95.

Mathew PENROSE (1993). On the Spread-Out Limit for Bond and Continuum Percolation. *The Annals of Applied Probability*, Vol.3, No. 1, 253-276.