

Mélange exponentiel des flots de contact d'Anosov

Pierre PERRUCHAUD ^{*}
Encadré par Sébastien GOUËZEL [†]

26 août 2016

Résumé

En suivant l'article [Liv04], on prouve la décroissance exponentielle des corrélations pour un flot de contact Anosov lisse sur une variété compacte (théorème 2.10). Ce théorème s'applique en particulier au flot géodésique sur le fibré tangent unitaire d'une variété riemannienne compacte à courbure sectionnelle strictement négative.

Il s'appuie sur l'étude spectrale du générateur du flot, d'abord par un argument de compacité, puis en exploitant la non-intégrabilité issue de la structure de contact.



^{*}pierre.perruchaud@ens-lyon.fr

[†]sebastien.gouezel@univ-nantes.fr

Table des matières

Introduction	3
1 Autour du théorème	3
1.1 Théorie ergodique	3
1.2 Géométrie Anosov	5
1.3 Mélange pour les systèmes hyperboliques	6
1.4 Plan de preuve	8
2 Mélange exponentiel et résolution	8
2.1 Cadre	9
2.2 Espaces et opérateurs	10
2.3 Mélange exponentiel et expression fonctionnelle	13
2.4 Résolution formelle	15
3 Théorie spectrale des semigroupes contractants	21
3.1 Spectre d'un opérateur fermé	21
3.2 Spectre discret et spectre essentiel	22
3.3 Semigroupe contractant	22
3.4 Expression de la résolvante	24
4 Spectre essentiel et argument d'Hennion	25
4.1 Inégalités de Lasota-Yorke	26
4.2 Compacité de la résolvante	28
4.3 Théorème de Hennion	32
4.4 Spectre essentiel du générateur	33
5 Spectre discret et inégalité de Dolgopyat	34
5.1 Reformulation du problème	35
5.2 Inégalité de Dolgopyat	36
5.3 Non intégrabilité et distance temporelle	38
5.4 Spectre imaginaire pur	41

Introduction

On s'intéresse dans ce rapport au mélange exponentiel dans les flots de contact d'Anosov. La motivation première est de comprendre les propriétés ergodiques du flot géodésique sur une variété compacte à courbure sectionnelle strictement négative, afin d'avoir une intuition quant à celles du mouvement brownien cinétique, voir par exemple [ABT15]. Dans cette optique, j'ai travaillé avec Jürgen Angst et Ismaël Bailleul¹ et réfléchi à une possible adaptation à un cadre probabiliste, pour l'instant sans succès.

La démarche de ce rapport suit de près l'article [Liv04], et y joint quelques notions complémentaires, de théorie spectrale en particulier. Ce document ne constitue pas en l'état une preuve complète, mais il permet de se faire une idée assez précise de son déroulement.

Après une partie de mise en contexte, qui consiste principalement en quelques rapides notions de théories ergodiques, et en particulier celles qui concernent les systèmes Anosov, on décrira les principaux objets de la preuve, et on pourra conclure en supposant un bon comportement de ces objets. Une troisième partie, indépendante des autres, propose quelques résultats de théorie spectrale élémentaire, dont une introduction aux semigroupes contractants. Enfin, les deux dernières parties constituent l'étude du spectre du générateur du flot, et constituent le cœur de la démonstration.

1 Autour du théorème

On essaie dans cette partie de comprendre les motivations de ce théorème. La partie 1.1 décrit ce qu'est le mélange exponentiel, tandis que la partie 1.3 motive les hypothèses du théorème. On finira par un plan de preuve.

1.1 Théorie ergodique

Les propriétés ergodiques ont une interprétation probabiliste riche que je me propose de développer en introduction, afin de motiver la preuve qui fait l'objet du rapport. On trouvera chez [Hal56] une rapide promenade en théorie ergodique.

Un système dynamique est un triplet (\mathcal{M}, T, μ) où \mathcal{M} est un espace compact, T une transformation continue de \mathcal{M} , et μ une mesure de probabilité borélienne sur \mathcal{M} invariante par T , c'est-à-dire telle que $T_*\mu = \mu$. En termes probabilistes, on peut se donner un espace compact \mathcal{M} , une variable aléatoire X_0 à valeurs dans l'espace $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}))$, dont on note μ la loi, et une transformation $T : X \rightarrow X$ continue donc mesurable, telle que si l'on pose $X_n = T^n X_0$, les variables $(X_n)_{n \geq 0}$ ont même loi. Elles ne sont bien sûr pas indépendantes si X_0 n'est pas constante presque sûrement. Il est plus simple de supposer que X_0 est l'identité, sur l'espace de probabilité $(\mathcal{M}, \mathcal{B}(\mathcal{M}), \mu)$, ce que l'on fait à partir de maintenant.

L'idée de la théorie ergodique est d'imaginer que si la transformation T dilate assez les erreurs, la suite $(X_n)_n$, à X_0 fixé, a un comportement aléatoire. Par exemple, plaçons-nous à X_0 fixé et supposons qu'un physicien connaisse X_0 avec une certaine imprécision. On appelle \tilde{X}_0 la mesure faite. S'il itère la transformation considérée, la suite $(\tilde{X}_n)_n$ semble déterministe sur les premiers termes, puis l'erreur augmente et rend \tilde{X}_N , pour N grand, très aléatoire. On a alors envie d'imaginer que lorsque l'erreur tend vers 0, on peut tout de même récupérer à l'infini certaines quantités probabilistes.²

On imagine donc que X_0 est fixé mais que \tilde{X}_0 n'est proche de X_0 qu'à une erreur aléatoire près. Pour N grand, et si T dilate suffisamment les erreurs, \tilde{X}_N n'est pas *a priori* particulièrement proche d'une constante déterministe; on peut imaginer que \tilde{X}_0 et \tilde{X}_N sont presque indépendantes. On a envie de considérer $(\tilde{X}_n)_n$ comme une suite de variables asymptotiquement indépendantes et identiquement distribuées.

1. Université de Rennes 1

2. Ce point de vue est celui de l'auteur et n'engage que sa responsabilité.

Le point de vue probabiliste nous incline à chercher une loi des grands nombres et un théorème central limite dans ce cadre. Malheureusement, puisque les variables $(X_n)_n$ n'appartiennent pas à un espace vectoriel, on ne peut pas parler de leur moyenne. Une idée, très utilisée en géométrie, est de s'intéresser non pas à notre espace \mathcal{M} , mais à un ensemble de fonctions liées à la structure de \mathcal{M} : en pratique, on va considérer l'ensemble $\mathcal{C}^0(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ des fonctions continues — donc bornées — de \mathcal{M} dans \mathbb{R} . Les variables que l'on va donc considérer ne sont plus les $(X_n)_n$, mais les $(f(X_n))_n$, pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{M}, \mathbb{R})$.

L'équivalent de la loi des grands nombres devrait s'énoncer ainsi : pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, on a la convergence presque sûre

$$\frac{1}{n} (f(X_0) + f(X_1) + \cdots + f(X_{n-1})) \rightarrow \mathbb{E}[f(X_0)] = \int f d\mu.$$

On rappelle que ce résultat ne peut pas reposer sur une indépendance au sens classique : le membre de gauche est une fonction déterministe de X_0 !

Le théorème ergodique de Birkhoff énonce exactement que presque sûrement, la somme de gauche tend en fait non pas vers une constante, mais vers une variable aléatoire. Il s'agit de $\mathbb{E}[f(X_0)|\mathcal{F}_T]$, où \mathcal{F}_T est la tribu des événements invariants, c'est-à-dire la tribu des boréliens A tels que $T^{-1}A = A$. Le véritable résultat est donc le suivant : pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{M}, \mathbb{R})$, la convergence suivante a lieu au sens presque sûr.

$$\frac{1}{n} (f(X_0) + f(X_1) + \cdots + f(X_{n-1})) \rightarrow \mu(f|\mathcal{F}_T)(X_0)$$

En particulier, le cas des mesures dont la tribu invariante est triviale, c'est-à-dire ne contient que des éléments de mesure nulle ou pleine, joue un rôle très important dans l'étude des systèmes dynamiques. Dans ce cas, (X_0) vérifie en effet un type loi des grands nombres, puisque $\mu(f|\mathcal{F}_T)$ est alors égal à $\mu(f)$.

Le théorème central limite est une propriété plus complexe à vérifier. On cherche des conditions suffisantes sur (\mathcal{M}, T, μ) telles que l'on ait pour tout $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{M}, \mathbb{R})$ d'intégrale $\int f d\mu = 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (f(X_0) + f(X_1) + \cdots + f(X_{n-1})) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

où la convergence a lieu en loi, $\sigma^2 \geq 0$ et $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ est la loi gaussienne centrée de variance σ^2 .

Il est difficile de donner de telles conditions explicites. L'article [Gou15] donne, dans un cas particulier éclairant, une preuve du théorème central limite sous cette forme selon une méthode très proche de celle utilisée dans ce rapport : il s'agit de considérer les propriétés spectrales de l'opérateur $f \mapsto f \circ T$. De façon complémentaire, on trouvera dans [Liv96] une preuve d'un théorème central limite dans une certaine classe de systèmes hyperboliques basée sur la propriété de mélange exponentiel, propriété que l'on se donne pour objectif de montrer pour les flots d'Anosov de contact.

On dit que le système considéré a la propriété de mélange exponentiel si pour un certain $0 < \alpha < 1$, il existe $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telles que pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\alpha(\mathcal{M}, \mathbb{R})$,

$$|\mathbb{E}[f(X_0)g(X_n)] - \mathbb{E}[f(X_0)]\mathbb{E}[g(X_n)]| \leq C \|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} \|g\|_{\mathcal{C}^\alpha} \lambda^n.$$

Elle est plus forte que la propriété de mélange, qui exprime que $\mathbb{E}[f(X_0)g(X_n)] \rightarrow \mathbb{E}[f(X_0)]\mathbb{E}[g(X_n)]$ pour $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{M}, \mathbb{R})$. On peut la voir comme une propriété d'indépendance asymptotique, avec une borne explicite.

En résumé, la propriété de mélange exponentiel pour les flots d'Anosov de contact laisse espérer un résultat de type théorème central limite, que ce soit en exploitant les idées utilisées pour prouver ce résultat, selon la méthode de Nagaev-Guivarc'h employée dans [Gou15], ou en appliquant le type de raisonnement de [Liv96], qui utilise la décorrélation exponentielle comme hypothèse cruciale.

1.2 Géométrie Anosov

Décrivons succinctement les propriétés vérifiées par un flot d'Anosov, afin de comprendre pourquoi il est naturel de s'attendre à des propriétés ergodiques dans ce cadre. Soit \mathcal{M} une variété lisse compacte munie d'un flot lisse $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$. On suppose \mathcal{M} munie d'une métrique riemannienne g .

On trouvera la plupart des résultats présentés dans cette partie dans [KH97], dans les chapitres traitant des systèmes hyperboliques. On ne donnera que peu de démonstrations; le cas échéant, elles auront pour objectif principal de donner une intuition du comportement de ces objets.

Définition 1.1.

On dit que T est un flot d'Anosov pour g s'il existe $\mu > 0$ et en tout point $x \in \mathcal{M}$ une décomposition $T_x \mathcal{M} = E_x^u \oplus E_x^c \oplus E_x^s$ tels que :

- $(T_t)_* E^\alpha = E^\alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ — ce qui permet de définir pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{M}$ la différentielle partielle $(d^\alpha T_t)_x : E_x^\alpha \rightarrow E_{T_t x}^\alpha$ qui coïncide avec $(dT_t)_x$;
- (distribution centrale) E_x^c est la droite engendrée par $\frac{\partial}{\partial t} T_t x$;
- (distribution stable) la famille $(\|(d^s T_t)_x\| e^{\mu t})_{t,x}$ est uniformément bornée pour $x \in \mathcal{M}$ et $t \geq 0$;
- (distribution instable) la famille $(\|(d^u T_{-t})_x\| e^{\mu t})_{t,x}$ est uniformément bornée pour $x \in \mathcal{M}$ et $t \geq 0$.

Par $(T_t)_* E^\alpha = E^\alpha$, on entend que la propriété est vérifiée pour E^u , E^c et E^s .

En termes plus visuels, un flot d'Anosov contracte et dilate exponentiellement selon les directions stables et instables. On appelle ces systèmes où l'on a contraction et dilatation *systèmes hyperboliques*.

Cette description infinitésimale du flot nous laisse supposer que les points y proches de $x \in \mathcal{M}$ dans la direction stable tendent vers x dans un certain sens. C'est le phénomène décrit par le théorème suivant.

Théorème 1.2.

Soit $x \in \mathcal{M}$. Il existe trois sous-variétés W^u , W^c et W^s passant par x telles que

- la variété W^u (resp. W^c , resp. W^s) est tangente à la distribution E^u (resp. E^c , resp. E^s);
- $W^c = \{T_t x : |t| < \varepsilon\}$ pour un certain $\varepsilon > 0$;
- pour tout $0 < \lambda < \mu$ et $y \in W^s$ (resp. $y \in W^u$), $d(T_t x, T_t y) = o(e^{-\lambda t})$ (resp. $d(T_{-t} x, T_{-t} y) = o(e^{-\lambda t})$) lorsque t tend vers l'infini.

Ces sous-variétés sont uniques, au sens où si d'autres sous-variétés \widetilde{W}^u , \widetilde{W}^c et \widetilde{W}^s vérifient les mêmes propriétés, alors il existe un ouvert \mathcal{U} contenant x tel que $W^\alpha \cap \mathcal{U} = \widetilde{W}^\alpha \cap \mathcal{U}$.

Autrement dit, ces distributions sont localement intégrables, et leurs intégrales vérifient les propriétés ci-dessus. Les sous-variétés ainsi définies héritent d'une structure de variété riemannienne, et ainsi l'exponentielle \exp_x^u est définie pour tout vecteur de E_x^u de norme assez petite. Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, on note $W_x^u(\varepsilon)$ l'image par \exp_x^u du disque ouvert de $T_x \mathcal{M}$ de rayon ε . On définit de même $W_x^c(\varepsilon)$ et $W_x^s(\varepsilon)$.

Si $W_x^u(\varepsilon)$ est défini, alors pour tout $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, il existe un voisinage de x dont on peut pour chaque point y définir $W_y^u(\varepsilon')$; autrement dit, le supremum ε_x des ε pour lequel $W_x^u(\varepsilon)$ est défini est une fonction semicontinue inférieurement de x . Par compacité, il existe donc un $\varepsilon_0 > 0$ tel que $W_x^u(\varepsilon_0)$ est défini pour tout x . Le même raisonnement est bien sûr valable pour W^s .

On ne peut en général pas recoller ces sous-variétés en une sous-variété globale. Cependant, on peut malgré tout construire des objets plus faibles, qui seront des variétés injectivement immergées.

Théorème 1.3.

Soit $x \in \mathcal{M}$. Soit $0 < \lambda < \mu$. On dispose des égalités suivantes.

$$\begin{aligned} W_x^s &:= \{y \in \mathcal{M} \mid d(T_t x, T_t y) \rightarrow 0\} = \{y \in \mathcal{M} \mid d(T_t x, T_t y) = o(e^{-\lambda t})\} \\ &= \bigcup_{t \geq 0} T_{-t} W_{T_t x}^s(\varepsilon_0) \end{aligned}$$

Cet ensemble, appelé variété stable de x , est une variété lisse injectivement immergée, qui hérite de la structure riemannienne de \mathcal{M} . Dotée de cette métrique, elle est complète. On note δ^s la distance induite par la restriction de la structure riemannienne.

On définit de même l'ensemble

$$\begin{aligned} W_x^u &:= \{y \in \mathcal{M} \mid d(T_{-t}x, T_{-t}y) \rightarrow 0\} = \{y \in \mathcal{M} \mid d(T_{-t}x, T_{-t}y) = o(e^{-\lambda t})\} \\ &= \bigcup_{t \geq 0} T_t W_{T_{-t}x}^s(\varepsilon_0). \end{aligned}$$

Les variétés stables et instables faibles sont définies par $W_x^{uc} := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} T_t W_x^u$ et $W_x^{sc} := \bigcup_{t \in \mathbb{R}} T_t W_x^s$. Elles sont de même lisses, injectivement immergées et complètes.

Ces variétés, bien que lisses, ne dépendent pas de manière lisse de leur point base. Il s'agit malgré tout de feuilletages, et on peut exprimer leur régularité. Soit d_s la dimension de E^s et d_u celle de E^u .

Théorème 1.4.

Les familles W^u et W^{sc} définissent deux feuilletages τ -hölériens transverses pour un certain $0 < \tau < 1$. C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathcal{M}$, il existe un voisinage de x homéomorphe par une application τ -bihölérienne à un ouvert de \mathbb{R}^d où la famille W^u est envoyée sur la famille $(\mathbb{R}^{d_u} \times \{x\})_{x \in \mathbb{R}^{d_s+1}}$ et la famille W^{sc} sur la famille $(\{y\} \times \mathbb{R}^{d_s+1})_{y \in \mathbb{R}^{d_u}}$.

Les familles W^s et W^{uc} définissent deux feuilletages τ -hölériens transverses pour un certain $0 < \tau < 1$. C'est-à-dire que pour tout $x \in \mathcal{M}$, il existe un voisinage de x homéomorphe par une application τ -bihölérienne à un ouvert de \mathbb{R}^d où la famille W^s est envoyée sur la famille $(\mathbb{R}^{d_s} \times \{x\})_{x \in \mathbb{R}^{d_u+1}}$ et la famille W^{uc} sur la famille $(\{y\} \times \mathbb{R}^{d_u+1})_{y \in \mathbb{R}^{d_s}}$.

De plus, les distributions E^u et E^s sont uniformément τ -hölériennes.

Le dernier outil dont on aura besoin est la notion d'holonomies. On les définit dans le théorème ci-dessous, et on énonce immédiatement un résultat de régularité.

Théorème 1.5.

Soit $\delta > 0$. Soient $x, y \in \mathcal{M}$ tels que $\delta^u(x, y) < \delta$ et soient $V_x \ni x$ et $V_y \ni y$ deux sous-variétés transverses à E^u .

Pour δ suffisamment petit indépendant de toutes les autres variables choisies, il existe $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, $0 < \eta < \delta$ tels que pour tout $x' \in V_x$, $d(x, x') < \varepsilon$, il existe un unique $y' \in V_y$ tel que $y' \in W_x^u(\eta)$ et $d(y, y') < \varepsilon'$. En particulier, si $x' = x$, alors $y' = y$.

Cette propriété définit une fonction $\Psi_{V_x \rightarrow V_y}^u : V_x \rightarrow V_y$ appelée holonomie instable de V_x vers V_y . On définit de même les holonomies stables, instable faible et stable faibles.

Théorème 1.6.

Il existe un $0 < \tau < 1$ tel qu'en cas d'existence, les holonomies $\Psi_{W_x^{sc}(\varepsilon) \rightarrow W_y^{sc}(\varepsilon)}^u$ sont τ -hölériennes. De plus, elles sont absolument continues, et leur jacobien est τ -hölérien.

On dispose de la même régularité pour les holonomies $\Psi_{W_x^{uc}(\varepsilon) \rightarrow W_y^{uc}(\varepsilon)}^s$.

1.3 Mélange pour les systèmes hyperboliques

Comme on l'a vu en introduction, les systèmes qui, en un certain sens, dilatent les erreurs, peuvent présenter des propriétés ergodiques intéressantes. Parmi les systèmes dilatants les plus simples, on trouve le cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} muni de la mesure de Lebesgue et de la transformation $T : x \mapsto 2x$.

On peut montrer que ce système est isomorphe à l'espace produit $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ muni de sa topologie produit et de la loi d'une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $\frac{1}{2}$, avec l'opérateur de décalage $d : (x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_1, x_2, x_3, \dots)$. On dispose en fait de l'isomorphisme explicite $(x_0, x_1, x_2, \dots) \mapsto \sum x_{k-1} 2^{-k}$. On montre sans difficulté que ce dernier système mélange exponentiellement, c'est donc le cas du premier.

Il se trouve que l'on peut montrer le mélange exponentiel pour des systèmes proches de celui-ci, où la structure algébrique est moins présente. Toute fonction $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telle que $T(x+1) = T(x) + 2$ et $T' > 1$ induit une transformation du tore $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \text{Leb})$. Cette application ne préserve pas la mesure ; cependant, [Gou15] montre qu'il existe $C > 0$ et $0 < \lambda < 1$ telle que pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{C})$ telles que $\int f d\text{Leb} = 0$,³

$$\left| \int_{\mathbb{R}/\mathbb{Z}} f(g \circ T^n) d\text{Leb} \right| \leq C |f|_{\mathcal{C}^1} |g|_{\mathcal{C}^1} \lambda^n.$$

On constate en lisant cette preuve que l'hypothèse cruciale pour montrer le mélange exponentiel que vérifie T est la propriété de dilatation uniforme $T' \geq \alpha > 1$. C'est pourquoi l'on s'intéresse particulièrement aux flots d'Anosov, qui vérifient cette hypothèse. Notons que pour préserver la mesure, il est nécessaire pour un flot de contracter uniformément selon une autre direction.

On peut avec légitimité se demander si tout flot d'Anosov mélange exponentiellement. On peut avec tout autant de légitimité s'interroger sur la présence de l'hypothèse de contact dans le titre.

Il existe un exemple simple de flot d'Anosov qui ne mélange pas exponentiellement. Définissons sur le tore $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ la transformation T induite par la transformation linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

En diagonalisant la matrice, on montre que T est ce que l'on appelle un difféomorphisme d'Anosov. En notant $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, la différentielle dT stabilise les distributions $E_x^s = \left\langle \phi \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle$ et $E_x^u = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_1} - \phi \frac{\partial}{\partial x_2} \right\rangle$, et réalise une multiplication par $1 + \phi > 1$ et $0 < 2 - \phi < 1$ sur ces espaces. On va transformer ce difféomorphisme en un flot qui ne vérifie pas de propriété de mélange.

On construit la suspension de ce difféomorphisme, illustrée dans la figure 1. Il s'agit du quotient \mathcal{M} de la variété $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ par l'action libre propre du groupe \mathbb{Z} définie par

$$n \cdot (x, t) = (T^n x, t + n).$$

Intuitivement, il s'agit de la variété obtenue en recollant les extrémités du cylindre $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ selon le difféomorphisme T (voir figure 1). Le flot $T_t : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} : (x, s) \mapsto (x, t + s)$ passe au quotient, et \mathcal{M} munie de ce flot est d'Anosov.

Les propriétés ergodiques de ce flot sont faibles ; en effet, il préserve la décomposition en tranches $(\{t = t_0\})_{t_0 \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}}$. En particulier, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ constante sur les tranches, c'est-à-dire telle que $f(x) = f(t(x))$,

$$\int_{\mathcal{M}} f \cdot (f \circ T_n) = \int_{\mathcal{M}} f^2 = \|f\|_2^2$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ainsi on ne peut espérer que le système soit mélangeant, et encore moins exponentiellement.

Le problème rencontré ici est l'intégrabilité de la distribution $E^u \oplus E^s$. Une intégrale de cette distribution ne sera que transportée par le flot, comme dans l'exemple. Au contraire, l'article [Cou07] affirme que le système mélange dès que toute fonction presque partout constante sur les feuilles stables et instables est en fait presque partout constante sur tout le système. On peut s'attendre à ce que si $E^u \oplus E^s$ est non-intégrable dans un sens assez fort, tous points de \mathcal{M} peuvent être reliés en suivant cette distribution, et ainsi faire ainsi rentrer cette catégorie de dynamiques dans les hypothèses de l'article [Cou07].

Pour s'assurer que $E^u \oplus E^s$ n'est pas intégrable, l'hypothèse la plus radicale est de demander que ce champ d'hyperplans soit une structure de contact. C'est le choix fait par C. Liverani dans son article, et c'est dans ce cadre que l'on montre la décroissance exponentielle des corrélations, sous la forme du théorème 2.10.

3. Ce résultat n'est pas directement prouvé dans cet article, mais il en est un corollaire facile.

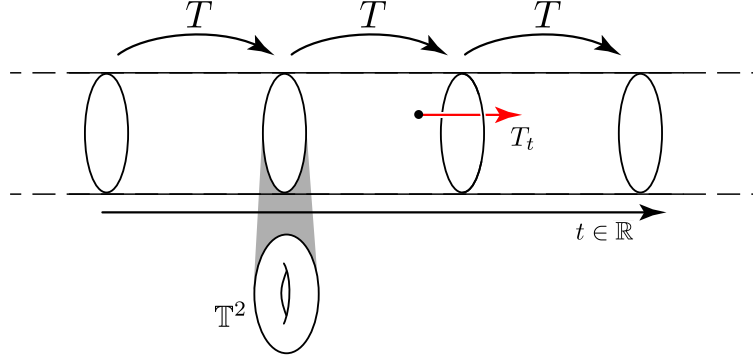


FIGURE 1 – Suspension de T

1.4 Plan de preuve

On cherche à prouver la décroissance exponentielle des corrélations pour un flot lisse $(T_t)_t$ d'Anosov de contact sur une variété \mathcal{M} lisse connexe compacte.

On introduira l'opérateur \mathcal{L}_t qui à une fonction scalaire f associe $f \circ T_{-t}$. Malheureusement, cet opérateur n'a pas de bonnes propriétés sur les espaces de fonctions régulières classiques, hölderiens ou \mathcal{C}^k par exemple. On définira donc un espace de distributions dépendant de la géométrie du système; on pourra y penser comme l'ensemble des fonctions β -höldériennes selon la direction instable et dual- β -höldériennes selon la direction stable. Sur cet espace, les $(\mathcal{L}_t)_t$ définissent un semigroupe contractant. On peut donc s'intéresser à son générateur X , qui n'est en fait, pour des fonctions suffisamment régulières, que la dérivation dans le sens inverse du flot. Ces définitions constituent la partie 2.2.

On montrera que le mélange exponentiel est en fait une conséquence de la décroissance exponentielle de $t \mapsto \mathcal{L}_t f$ pour la norme de cet espace lorsque $\int_M f = 0$. Il devient alors naturel de s'intéresser à son spectre, et d'essayer de montrer que son rayon spectral est strictement plus petit que 1. Gardant l'image $\mathcal{L}_t = e^{tX}$ en tête, on peut essayer de montrer que le spectre de X est contenu dans un demiplan $\{\Re z \leq -\sigma_0\}$, avec $\sigma_0 > 0$; on sait en fait déjà que le spectre de X est à partie réelle négative, puisque c'est le générateur d'un semigroupe contractant. On pourra ensuite conclure, ainsi que le montre la partie 2.4. Il s'agit donc de prouver ce résultat sur le spectre de X .

On montre dans la partie 4 que le spectre essentiel de X est strictement à gauche de l'axe imaginaire. Pour cela, et très grossièrement parlant, on utilise le fait que, à une perturbation compacte près, \mathcal{L}_t a une norme qui décroît en $e^{-\lambda\beta t}$, où λ est l'exposant d'Anosov du système, tandis que β est le paramètre de régularité qui apparaît dans l'espace de fonctions.

On s'intéresse ensuite dans la partie 5 aux valeurs propres discrètes de X . Puisqu'elles sont en nombre fini sur les compacts, il suffit de montrer qu'elle ne peuvent s'accumuler à l'infini près de l'axe imaginaire. En gardant en tête l'image de la suspension du difféomorphisme d'Anosov, on peut imaginer que ces valeurs propres éventuelles correspondent à des fonctions qui se mélangent peu et sont transportées selon une dynamique proche d'une translation uniforme. On interprétera alors la structure de contact pour en tirer des estimations de non-intégrabilité du système, et l'inégalité de Dolgopyat issue de ces estimations prouvera l'absence de valeurs spectrales de grande partie imaginaire lorsque la partie réelle est petite.

2 Mélange exponentiel et résolution

Décrivons les objets principaux que l'on utilisera dans la preuve. La partie 2.1 décrit les variétés et flots que l'on étudie dans ce théorème. La partie 2.2 définit le semigroupe $(\mathcal{L}_t)_t$ de transport selon le flot, dont l'étude du spectre est notre préoccupation principale; on aura besoin pour cela de définir un espace

de distributions propre à notre système. Une fois ce lexique introduit, on pourra formuler le théorème 2.10 de mélange exponentiel, et proposer une démonstration formelle dans la partie 2.4 en supposant connus un certain nombre de résultats spectraux.

2.1 Cadre

Soit \mathcal{M} une variété lisse munie d'un flot lisse $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Il est engendré par le champ de vecteurs $-X$ lisse, où $-X(x) := \frac{d}{dt}|_{t=0} T_t x$.⁴ Explicitons les hypothèses du résultat démontré dans ce rapport.

La définition d'un flot d'Anosov est donnée en 1.1. Si \mathcal{M} est compacte et si g et g' sont deux métriques riemanniennes sur \mathcal{M} , il existe une constante $A > 0$ telle que $\frac{1}{A}g(v, v) \leq g'(v, v) \leq Ag(v, v)$, et ainsi T est d'Anosov pour g si et seulement si T est d'Anosov pour g' , avec les mêmes objets caractéristiques.

Si H est un champ d'hyperplans sur \mathcal{M} de dimension $2d+1$, on dit que H est une structure de contact si on peut écrire localement $H = \ker \alpha$ où α est une forme différentielle telle que $(d\alpha)^d \wedge \alpha$ ne s'annule pas. Si H est une structure de contact sur \mathcal{M} , on dit que T est un flot de contact pour H si $(T_t)_* H = H$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Enfin, on dit que T est un flot de contact d'Anosov sur \mathcal{M} munie de g et H si T est de contact et d'Anosov et que $-X$ est transverse à H (condition de compatibilité des structures). On ne s'intéressera dans toute la suite qu'à des variétés compactes connexes.

Nous allons essayer dans cette partie d'éclairer les interactions entre la géométrie hyperbolique et la structure de contact. Commençons par un résultat qui facilitera grandement la manipulation des quantités en jeu.

Proposition 2.1.

Si T est un flot de contact d'Anosov sur \mathcal{M} , la structure de contact H de \mathcal{M} est héritée d'une forme de contact α préservée par T . Autrement dit, il existe une forme de contact α telle que $H = \ker \alpha$ et $(T_t)^ \alpha = \alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

On peut en fait choisir α telle que $-X$ soit son champ de Reeb associé, c'est-à-dire que $\alpha(-X) \equiv 1$ et $d\alpha(-X) = 0$.

Notons que cela impose à la variété d'être orientable, ce qui n'est pas le cas si l'on suppose le flot non Anosov ou non contactomorphe.

Démonstration. Il faut et il suffit de choisir pour tout $x \in \mathcal{M}$ l'unique forme linéaire α_x s'annulant sur $H(x)$ et telle que $\alpha_x(-X(x)) = 1$.

Cette forme est bien définie en tout point puisque H et $-X$ sont transverses. La régularité de α découle de celles de H et $-X$. Enfin, puisque T préserve $-X$ et la structure de contact, T préserve α . \square

On peut alors énoncer le résultat suivant :

Proposition 2.2.

Pour tout $x \in \mathcal{M}$, $H_x = E_x^u \oplus E_x^s$, et $d\alpha_x$ restreinte à E_x^u et E_x^s est nulle. On dit que ces espaces sont lagrangiens dans $(H_x, d\alpha_x)$.

Démonstration.

Soit $x \in \mathcal{M}$, $v \in E_x^s$. Alors :

$$|\alpha_x(v)| = |(T_t^* \alpha)_x(v)| = |\alpha_{T_t x}((d^s T_t)_x(v))| \leq \|\alpha\|_\infty \|(d^s T_t)_x\| |v| \leq Ae^{-\mu t} \|\alpha\|_\infty |v| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

d'où $v \in \ker \alpha_x$.

Ainsi, $E_x^s \subset \ker \alpha = H_x$, et par le même raisonnement sur la distribution instable, $E_x^u \oplus E_x^s \subset H_x$. Puisque ces deux espaces ont même codimension, on a bien la décomposition annoncée.

4. Cette convention peu usuelle sera utile par la suite.

De plus, si $x \in \mathcal{M}$, $v, w \in E_x^s$ et de même que précédemment :

$$|d\alpha_x(v, w)| = |(T_t^* d\alpha)_x(v, w)| \leq \|\alpha\|_\infty \|(d^s T_t)_x\|^2 |v| |w| \leq A e^{-2\mu t} \|\alpha\|_\infty |v| |w| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$$

pour une constante A donnée par la condition d'Anosov ; $d\alpha$ est donc nulle sur E_x^s , et sur E_x^u en reversant le temps. \square

Aucun des objets définis précédemment ne dépend de la métrique choisie. On peut donc choisir une métrique lisse arrangeante. On la choisit telle que *i)* $g(-X, -X) = 1$, *ii)* H_x et $\langle -X \rangle$ sont orthogonaux pour g et *iii)* les volumes symplectique et riemanniens sur H_x coïncident.

On est donc ramené au cas d'une variété lisse \mathcal{M} compacte connexe de dimension $2d + 1$ munie d'un flot lisse T , d'une métrique riemannienne g et d'une forme de contact α telle que :

- le flot T est d'Anosov pour g , avec des distributions E^u , E^c et E^s , un exposant $\mu > 0$ et une constante $A > 0$ qui borne les familles stables et instables considérées dans la définition 1.1 ;
- le flot T préserve α , autrement dit $(T_t)^* \alpha = \alpha$; *a fortiori*, T est de contact pour la structure $H := \ker \alpha$;
- en tout point, le flot est transverse à la structure de contact, c'est-à-dire $T_x \mathcal{M} = \langle -X(x) \rangle \oplus H_x$ pour tout $x \in \mathcal{M}$;
- α et g définissent le même volume sur \mathcal{M} et $\alpha(-X) = g(-X, -X) \equiv 1$;
- En tout point $x \in \mathcal{M}$, $H_x = E_x^s \oplus E_x^u$ et E_x^s , E_x^u sont lagrangiens dans $(H_x, d\alpha_x)$.

2.2 Espaces et opérateurs

2.2.1 Espace des distributions

Pour étudier le flot sur \mathcal{M} , il va être très pratique de travailler avec des distances adaptées au problème. Définissons sur \mathcal{M} deux familles de distances dynamiques :

$$d_\pm^\sigma(x, y) := \int_0^\infty e^{\sigma s} d(T_{\pm s} x, T_{\pm s} y) ds$$

pour tout $\sigma \in \mathbb{R}$.

En général, ces distances sont des pseudodistances, c'est-à-dire qu'elles prennent leurs valeurs dans $[0, \infty]$. Pour qu'elles soient effectivement des distances, il suffit par exemple que l'on ait $\sigma < 0$, puisque la compacité de la variété permet alors de borner $d(\cdot, \cdot)$ par une constante, et ainsi de s'assurer la convergence de l'intégrale.

Ces distances ont un comportement très agréable le long du flot, comme le montre la

Proposition 2.3.

Pour tout $t \geq 0$, $d_+^\sigma(T_t x, T_t y) \leq e^{-\sigma t} d_+^\sigma(x, y)$ et $d_-^\sigma(T_{-t} x, T_{-t} y) \leq e^{-\sigma t} d_-^\sigma(x, y)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} d_+^\sigma(T_t x, T_t y) &= \int_0^\infty e^{\sigma s} d(T_{t+s} x, T_{t+s} y) ds = \int_t^\infty e^{\sigma(s-t)} d(T_s x, T_s y) ds \\ &\leq e^{-\sigma t} \int_0^\infty e^{\sigma s} d(T_s x, T_s y) ds = e^{-\sigma t} d_+^\sigma(x, y) \end{aligned}$$

La preuve de l'autre inégalité est identique. \square

Pour avoir contraction le long du flot, on choisit un exposant λ strictement positif. Fixons définitivement $0 < \lambda < \mu$, où μ est l'exposant d'Anosov de T .

Proposition 2.4.

La pseudodistance $d_s := d_+^\lambda$ (resp. $d_u := d_-^\lambda$) restreinte à une variété stable forte (resp. instable forte) est une distance lisse équivalente à la distance riemannienne δ^u de cette même variété, pour la métrique induite par g . Si deux points n'appartiennent pas à la même variété stable forte (resp. instable forte), alors il sont à distance infinie pour d_s (resp. pour d_u).

De plus, pour tous points x et y dans la même variété stable (resp. instable), on a dans le sens des $t \geq 0$:

$$d_s(T_t x, T_t y) \leq e^{-\lambda t} d_s(x, y)$$

(resp. $d_u(T_{-t} x, T_{-t} y) \leq e^{-\lambda t} d_u(x, y)$ pour tout $t \geq 0$).

Le flot que l'on se propose d'étudier se comporte mal vis-à-vis des normes géométriques usuelles. Il convient alors d'introduire des espaces de fonctions plus complexes, définis par dualité, qui seront donc des espaces de distributions.

On choisira autant que possible les lettres grecques ($\varphi, \psi \dots$) pour les fonctions test, et les lettres latines ($f, g \dots$) pour les distributions.

Définition 2.5.

Pour chaque $0 < \beta \leq 1$, on définit les seminormes et normes

$$H_{s,\beta}(\varphi) := \sup_{0 < d_s(x,y) < 1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d_s(x,y)^\beta}$$

$$|\varphi|_{s,\beta} := |\varphi|_\infty + H_{s,\beta}(\varphi)$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ continûment dérivable de \mathcal{M} dans \mathbb{C} .

On note $\mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}^0(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ le complété de $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ pour la norme $|\cdot|_{s,\beta}$; il s'agit moralement des fonctions continues β -hölderiennes le long des feuilles stables.

Notons que $\mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ n'est pas l'espace des fonctions continûment dérivables, mais bien des fonctions lipschitziennes pour d_s .

Définition 2.6.

Pour chaque $0 < \beta \leq 1$, on définit les seminormes instables et stables

$$\|f\|_u := \sup_{0 < d_u(x,y) < 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{d_u(x,y)^\beta}$$

$$\|f\|_s := \sup_{\varphi} \int_{\mathcal{M}} f \varphi$$

$$\|f\| := \|f\|_u + \|f\|_s$$

où le supremum est pris sur $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, $|\varphi|_{s,\beta} \leq 1$, et ce pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$.

On note $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})^*$ le complété de $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ pour la norme $\|\cdot\|$; on peut y penser très grossièrement comme l'ensemble des distributions β -hölderiennes le long des feuilles instables et β -hölderienne duales le long des feuilles stables.

Notons que via $f \mapsto (\varphi \mapsto \int_{\mathcal{M}} f \varphi)$, $(\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C}), \|\cdot\|)$ s'injecte continûment dans $(\mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})^*, |\cdot|_{s,\beta}^*)$. Ainsi, cette application se prolonge à \mathcal{B} , et on peut évaluer $f \in \mathcal{B}$ en $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. On notera logiquement et abusivement $\int_{\mathcal{M}} f \varphi$ cette valeur.

2.2.2 Semigroupes associés au flot

On s'intéresse au transport des densités, c'est à dire à la famille d'opérateurs $\mathcal{L}_t : f \mapsto f \circ T_{-t}$. On veut étudier le comportement de \mathcal{L}_t sur l'espace \mathcal{B} , il va donc falloir donner un sens à ces opérateurs.

On définit sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ les opérateurs suivants :

$$T_t : \varphi \mapsto \varphi \circ T_t$$

$$\mathcal{L}_t : f \mapsto f \circ T_{-t}$$

Théorème 2.7. *Pour tout $t \geq 0$, T_t et \mathcal{L}_t vérifient les inégalités suivantes, valables sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$:*

$$\begin{aligned} H_{s,\beta}(T_t \varphi) &\leq e^{-\lambda \beta t} H_{s,\beta}(\varphi) \text{ et } |T_t \varphi|_\infty \leq |\varphi|_\infty \\ \|\mathcal{L}_t f\|_u &\leq e^{-\lambda \beta t} \|f\|_u \text{ et } \|\mathcal{L}_t f\|_s \leq \|f\|_s \end{aligned}$$

d'où

$$|T_t \varphi|_{s,\beta} \leq |\varphi|_{s,\beta} \text{ et } \|\mathcal{L}_t f\| \leq \|f\|.$$

En particulier, pour tout $t \geq 0$, T_t (resp. \mathcal{L}_t) se prolonge uniquement à $\mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ (resp. \mathcal{B}) en un opérateur borné, et les mêmes inégalités restent valables sur ces espaces.

Notons, avant de commencer la preuve, que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, on peut utiliser l'expression $T_t \varphi = \varphi \circ T_t$. En effet, soit $(\varphi_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ qui converge vers $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ au sens de la norme $|\cdot|_{s,\beta}$. Alors $T_t \varphi_n \rightarrow T_t \varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ au sens de la norme $|\cdot|_{s,\beta}$, donc *a fortiori* au sens de la convergence uniforme. Or, $\varphi_n \circ T_t \rightarrow \varphi \circ T_t \in \mathcal{C}^0(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ au sens de la convergence uniforme ; par unicité, $T_t \varphi = \varphi \circ T_t$.

Au contraire, l'expression $f \circ T_{-t}$ n'a pas de sens pour $f \in \mathcal{B}$. Il faudra donc veiller à ne pas utiliser cette formulation.

Démonstration.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} H_{s,\beta}(T_t \varphi) &= \sup_{0 < d_s(x,y) < 1} \frac{|T_t \varphi(x) - T_t \varphi(y)|}{d_s(x,y)^\beta} = \sup_{0 < d_s(x,y) < 1} \frac{|\varphi(T_t x) - \varphi(T_t y)|}{d_s(x,y)^\beta} \\ &\leq \sup_{0 < d_s(x,y) < 1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{d_s(T_{-t} x, T_{-t} y)^\beta} \leq \sup_{0 < d_s(x,y) < 1} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{(e^{\lambda t} d_s(x,y))^\beta} = e^{-\lambda \beta t} H_{s,\beta}(\varphi) \end{aligned}$$

La seconde inégalité sur φ est évidente (c'est même une égalité), et on a bien $|T_t \varphi|_{s,\beta} \leq |\varphi|_{s,\beta}$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. La preuve de l'inégalité $\|\mathcal{L}_t f\|_u \leq e^{-\lambda \beta t} \|f\|_u$ est identique à celle qui précède. Montrons la seconde inégalité. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$; alors

$$\int_{\mathcal{M}} (\mathcal{L}_t f) \varphi = \int_{\mathcal{M}} f(T_{-t} x) \varphi(x) dx = \int_{\mathcal{M}} f(x) \varphi(T_t x) dx,$$

le jacobien de T_t étant exactement 1, puisque T_t préserve la forme de contact, qui caractérise le volume.

$$\int_{\mathcal{M}} (\mathcal{L}_t f) \varphi = \int_{\mathcal{M}} f(T_t \varphi) \leq \|f\|_s |T_t \varphi|_{s,\beta} \leq \|f\|_s |\varphi|_{s,\beta}$$

et ainsi, en passant au supremum sur φ , on obtient $\|\mathcal{L}_t f\|_s \leq \|f\|_s$, d'où l'on déduit $\|\mathcal{L}_t f\| \leq \|f\|$. \square

On a démontré au passage le théorème facile mais fondamental suivant.

Théorème 2.8.

Pour tout $f \in \mathcal{B}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$,

$$\int_{\mathcal{M}} (\mathcal{L}_t f) \varphi = \int_{\mathcal{M}} f (T_t \varphi)$$

où l'on entend encore $\int_{\mathcal{M}} f \varphi$ comme l'évaluation de $f \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})^*$ en $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$.

Théorème 2.9.

La famille $(T_t)_{t \geq 0}$ (resp. $(\mathcal{L}_t)_{t \geq 0}$) est un semigroupe continu d'opérateurs contractants, au sens de la définition 3.13.

Démonstration.

La démonstration s'appuie sur le théorème 3.14, démontré plus tard.

Il suffit de montrer que l'espace des $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ (resp. $f \in \mathcal{B}$) telles que $T_t \varphi \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \varphi$ (resp. $\mathcal{L}_t f \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f$) est dense, puisque cet espace est fermé et que $t \mapsto T_t \varphi$ (resp. $t \mapsto \mathcal{L}_t f$) est continue pour tout φ (resp. f) dans cet ensemble.

Montrons que $t \mapsto \varphi \circ T_t$ est continue en 0 pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Il suffit de montrer que $\varphi \circ T_t \rightarrow \varphi$ en norme $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$.

$$|\varphi(T_t x) - \varphi(x)| = \left| \int_0^t d\varphi_{T_s x} (-X(T_s x)) ds \right| \leq \int_0^t \|d\varphi\|_\infty |X|_\infty ds \rightarrow 0$$

et

$$|(dT_t \varphi)_x(u) - d\varphi_x(u)| \leq \sup_{\xi \neq \xi' \in T\mathcal{M}} \frac{|d\varphi(\xi) - d\varphi(\xi')|}{D(\xi, \xi')} \cdot \sup_{\xi \in T\mathcal{M}, \|\xi\| \leq 1} D(dT_t \xi, \xi) \cdot \|u\| \rightarrow 0$$

où D est la distance riemannienne sur $T\mathcal{M}$, et puisque $T_t \rightarrow \text{id}$ au sens \mathcal{C}^1 .

De même, $\mathcal{L}_t f \rightarrow f$ au sens de la norme \mathcal{C}^1 donc de la norme $\|\cdot\|$. □

2.3 Mélange exponentiel et expression fonctionnelle

Énonçons enfin le théorème de décorrélation exponentielle.

Théorème 2.10 (Mélange exponentiel).

Soient une variété \mathcal{M} riemannienne de contact et un flot $(T_t)_{t \geq 0}$ de contact d'Anosov, tous deux supposés lisses. D'après la partie 2.1, il existe une unique forme de contact α sur \mathcal{M} qui induise sa structure de contact et telle que le champ de vecteurs $-X$ associé à (T_t) vérifie $\alpha(-X) \equiv 1$.

Soit $0 < \gamma < 1$. Il existe deux constantes $C > 0$ et $\sigma > 0$ telles que pour toutes fonctions γ -hölériennes $f, g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$, les corrélations décroissent selon

$$\left| \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f \cdot (g \circ T_t) - \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f \right) \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} g \right) \right| \leq C |f|_{\mathcal{C}^\gamma} |g|_{\mathcal{C}^\gamma} e^{-\sigma t}$$

où on intègre selon le volume symplectique, et V est le volume de \mathcal{M} .

On montrera en pratique le résultat suivant, dont le théorème se déduit par approximation.

Théorème 2.11.

On se place sous les mêmes hypothèses, et on fixe $\beta > 0$ assez petit.

Il existe $C > 0$ et $\sigma_0 > 0$ tels que pour tous $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ et $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$,

$$\left| \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f \cdot (\varphi \circ T_t) - \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f \right) \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} \varphi \right) \right| \leq C |f|_{\mathcal{C}^1} |\varphi|_{s, \beta} e^{-\sigma t}.$$

On peut préciser que pour $\sigma > 0$ donné par le théorème 2.11, on dispose d'un σ_γ explicite pour le théorème 2.10 : $\sigma_\gamma = \frac{\gamma\sigma}{2-\gamma}$.

Ces théorèmes sont déduits de résultats sur les opérateurs et espaces définis plus haut ; le résultat central de ce rapport est plutôt le suivant.

Théorème 2.12.

Soit \mathcal{M} une variété munie d'un flot $(T_t)_{t \geq 0}$ de contact d'Anosov. On suppose que \mathcal{M} et T vérifient les hypothèses de la fin de la partie 2.1 et on définit les objets de la partie 2.2.

Pour $\beta > 0$ assez petit, il existe deux constantes $C > 0$ et $\sigma > 0$ telles que pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ telle que $\int_{\mathcal{M}} f = 0$,

$$\|\mathcal{L}_t f\| \leq C \|f\|_{\mathcal{C}^1} e^{-\sigma t}.$$

Sa démonstration sera donc l'objectif de ce travail. Elle est rédigée dans la partie suivante, en supposant connus quelques résultats sur le spectre du générateur de \mathcal{L} . Ces deux résultats sont détaillés dans les parties 4 et 5.

Prouvons les théorèmes 2.11 puis 2.10 en admettant le théorème précédent. On s'appuiera sur le lemme suivant. On ne le démontre pas, mais il suffit de le montrer dans le cadre vectoriel par convolution avec un noyau \mathcal{C}_c^∞ , puis de l'étendre à l'aide d'une partition de l'unité.

Lemme 2.13.

Soit \mathcal{M} une variété riemannienne compacte et $0 < \gamma < 1$. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit et $f \in \mathcal{C}^\gamma(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, il existe une fonction $f_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ telle que

- $|f - f_\varepsilon|_\infty \leq C_L \|f\|_{\mathcal{C}^\gamma} \varepsilon^\gamma$;
- $|f_\varepsilon|_\infty \leq C_L \|f\|_\infty$;
- $H_1(f_\varepsilon) \leq C_L \|f\|_{\mathcal{C}^\gamma} \varepsilon^{\gamma-1}$;

où $H_1(f_\varepsilon)$ est la seminorme 1-hölderienne de f_ε .

Démonstration.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Posons $F = \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f$, pour avoir $\int_{\mathcal{M}} (f - F\mathbb{1}) = 0$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f \cdot (\varphi \circ T_t) - \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f \right) \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} \varphi \right) \right| &= \left| \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_t f \cdot \varphi - \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_t(F\mathbb{1}) \cdot \varphi \right| \\ &= \left| \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_t (f - F\mathbb{1}) \cdot \varphi \right| \\ &\leq \frac{1}{V} \|\mathcal{L}_t (f - F\mathbb{1})\| \|\varphi\|_{s,\beta} \\ &\leq \frac{C}{V} \|f - F\mathbb{1}\|_{\mathcal{C}^1} e^{-\sigma t} \|\varphi\|_{s,\beta} \\ &\leq \frac{2C}{V} \|f\|_{\mathcal{C}^1} \|\varphi\|_{s,\beta} e^{-\sigma t} \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration du théorème 2.11.

Si maintenant on a choisi $0 < \gamma < 1$, alors pour toutes fonctions $f, g \in \mathcal{C}^\gamma(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, on dispose pour

$0 < \varepsilon$ assez petit de f_ε et g_ε vérifiant les hypothèses du lemme. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f \cdot (g \circ T_t) - \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f \right) \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} g \right) \right| &\leq \left| \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f \cdot (g \circ T_t) - \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f_\varepsilon \cdot (g_\varepsilon \circ T_t) \right| \\
&+ \left| \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f_\varepsilon \cdot (g_\varepsilon \circ T_t) - \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f_\varepsilon \right) \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} g_\varepsilon \right) \right| \\
&+ \left| \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f_\varepsilon \right) \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} g_\varepsilon \right) - \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f \right) \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} g \right) \right| \\
&\leq |f - f_\varepsilon|_\infty |g|_\infty + |f_\varepsilon|_\infty |g - g_\varepsilon|_\infty \\
&+ \frac{2C}{V} |f|_{\mathcal{C}^1} |\varphi|_{s,\beta} e^{-\sigma t} \\
&+ |f_\varepsilon - f|_\infty |g_\varepsilon|_\infty + |f|_\infty |g_\varepsilon - g|_\infty \\
&\leq C_L \varepsilon^\gamma |f|_{\mathcal{C}^\gamma} |g|_\infty + C_L^2 \varepsilon^\gamma |f|_\infty |g|_{\mathcal{C}^\gamma} \\
&+ \frac{2C}{V} C_L^2 (\varepsilon^{\gamma-1})^2 |f|_{\mathcal{C}^\gamma} |g|_{\mathcal{C}^\gamma} e^{-\sigma t} \\
&+ C_L^2 \varepsilon^\gamma |f|_{\mathcal{C}^\gamma} |g|_\infty + C_L \varepsilon^\gamma |f|_\infty |g|_{\mathcal{C}^\gamma} \\
&\leq 2(C_L + C_L^2) |f|_{\mathcal{C}^\gamma} |g|_{\mathcal{C}^\gamma} \varepsilon^\gamma \\
&+ \frac{2C}{V} C_L^2 |f|_{\mathcal{C}^\gamma} |g|_{\mathcal{C}^\gamma} \varepsilon^{2\gamma-2} e^{-\sigma t}
\end{aligned}$$

Lorsque $t > 0$ est assez grand, $\varepsilon = e^{-\frac{\sigma}{2-\gamma}t}$ satisfait les hypothèses du lemme, et on peut poursuivre la série d'inégalités.

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f \cdot (g \circ T_t) - \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f \right) \left(\frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} g \right) \right| &\leq 2(C_L + C_L^2) |f|_{\mathcal{C}^\gamma} |g|_{\mathcal{C}^\gamma} e^{-\frac{\gamma\sigma}{2-\gamma}t} \\
&+ \frac{2C}{V} C_L^2 |f|_{\mathcal{C}^\gamma} |g|_{\mathcal{C}^\gamma} e^{-\frac{\sigma(2\gamma-2)}{2-\gamma}t} e^{-\sigma t} \\
&\leq C' |f|_{\mathcal{C}^\gamma} |g|_{\mathcal{C}^\gamma} e^{-\frac{\gamma\sigma}{2-\gamma}t}
\end{aligned}$$

et quitte à modifier la constante pour tenir compte des temps petits, on a prouvé le théorème 2.10. \square

2.4 Résolution formelle

Il parait important, arrivé à ce point, de réduire le problème à l'étude du spectre du générateur X de \mathcal{L} . Malheureusement, cela implique de mobiliser un certain nombre de notions qui ne seront définies que dans la partie 3 ; le lecteur non familier avec la théorie spectrale pourra revenir sur cette partie après avoir lu l'exposé succinct qui la suit.

Soit X le générateur de \mathcal{L} . Supposons démontrés les résultats suivants :

- pour tout $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $a = \Re z > 0$, la résolvante R_z est bien définie et elle vaut $R_z f = \int_0^\infty e^{-zt} \mathcal{L}_t f dt$; en particulier, sa norme est inférieure à $\frac{1}{a}$ (théorème 3.18) ;
- le spectre essentiel de X est inclus dans l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} | \Re z \leq -\lambda\beta\}$ (théorème 4.15) ;
- l'espace fermé $\{f \in \mathcal{B} | \int_{\mathcal{M}} f = 0\}$ est stable par X , et X restreint à cet espace n'a pas de valeur spectrale imaginaire pure ;
- il existe $B > 1$ et $0 < \nu < 1$ tels que les valeurs spectrales de X sont à l'extérieur de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} | \Re z \geq -(\nu^{-1} - 1) \text{ et } |\Im z| > B\}$ (corollaire 5.2) ;
- il existe $B > 1$, $0 < \nu < 1$ et $c > 0$ tels que pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ et de partie imaginaire $|b| > B$, et tout $n \geq c \ln |b|$, la résolvante R_z de X vérifie $\|R_z^n\| \leq \left(\frac{\nu}{a}\right)^n$ (théorème 5.1).

Ces résultats dépendent crucialement de $\beta > 0$: ils ne sont valables que lorsqu'il est assez petit. On fixe pour le reste de cette partie un tel β , que l'on explicitera en début de partie 4.

On rappelle le résultat que l'on veut démontrer.

Théorème 2.14.

Soit \mathcal{M} une variété munie d'un flot $(T_t)_{t \geq 0}$ de contact d'Anosov. On suppose que \mathcal{M} et T vérifient les hypothèses de la fin de la partie 2.1 et on définit les objets de la partie 2.2.

Il existe deux constantes $C > 0$ et $\sigma > 0$ telles que pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ telle que $\int_{\mathcal{M}} f = 0$,

$$\|\mathcal{L}_t f\| \leq C \|f\|_{\mathcal{C}^1} e^{-\sigma t}.$$

On cherche d'abord une expression pour $(\mathcal{L}_t)_t$ qui exploite les propriétés de la résolvante. Pour cela, on a besoin d'un lemme technique.

Lemme 2.15.

Pour tout $f \in \mathcal{D}(X^k)$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(X)$,

$$R_z f = \frac{1}{z} f + \frac{1}{z^2} X f + \cdots + \frac{1}{z^k} X^{k-1} f + \frac{1}{z^k} R_z X^k f.$$

En particulier, pour $f \in \mathcal{D}(X^2)$, $R_z f = \frac{1}{z} f + \frac{1}{z^2} X f + \frac{1}{z^2} R_z X^2 f$.

Démonstration.

Soit $f \in \mathcal{D}(X^k)$.

$$\left(\text{id} - \frac{1}{z} X \right) \left(\text{id} + \frac{1}{z} X + \cdots + \frac{1}{z^{k-1}} X^{k-1} \right) f = \left(\text{id} - \frac{1}{z^k} X^k \right) f$$

d'où

$$\frac{1}{z} f + \frac{1}{z^2} X f + \cdots + \frac{1}{z^k} X^{k-1} f = R_z f - \frac{1}{z^k} R_z X^k f.$$

□

Le théorème suivant exprime alors $(\mathcal{L}_t)_t$ sous la forme d'une intégrale.

Théorème 2.16.

Pour tout $t \geq 0$, $f \in \mathcal{D}(X^2) \cap \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ et $a > 0$,

$$\mathcal{L}_t f = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(R_{a+ib} - \frac{1}{a+ib} \text{id} \right) f e^{(a+ib)t} db + \frac{1}{2\pi t} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(a+ib)t}}{(a+ib)^2} f db.$$

En particulier, les fonctions considérées sont intégrables.

L'intérêt de ce théorème réside dans l'apparition d'un facteur e^{at} dans l'expression de \mathcal{L}_t . Démontrons ce théorème avant d'exploiter ce résultat.

Démonstration.

Soit $a > 0$ et $f \in \mathcal{D}(X) \cap \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Soit $x \in \mathcal{M}$.

La fonction $t \mapsto \mathbb{1}_{t \geq 0} e^{-at} \mathcal{L}_t f(x)$ est L^1 et L^∞ . En particulier, sa transformée de Fourier au sens L^2 est bien définie et coïncide avec sa transformée de Fourier au sens L^1 . Il s'agit de

$$b \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ibt} \mathbb{1}_{t \geq 0} e^{-at} \mathcal{L}_t f(x) dt = R_{a+ib} f(x).$$

Or, d'après le lemme 2.15,

$$|R_z f(x)| \leq \frac{1}{|z|} (|f(x)| + |R_z X f(x)|) \leq \frac{1}{|z|} \left(|f(x)| + \frac{1}{a} |X f(x)| \right)$$

et ainsi, $b \mapsto R_{a+ib}f(x)$ est L^2 . En particulier, $t \mapsto \mathbb{1}_{t \geq 0} e^{-at} \mathcal{L}_t f(x)$ est égale presque partout à sa transformée de Fourier inverse. On note \mathcal{F} la transformée de Fourier L^2 , $\overline{\mathcal{F}}$ la transformée de Fourier inverse.

$$\begin{aligned}
\mathbb{1}_{t \geq 0} e^{-at} \mathcal{L}_t f(x) &\stackrel{p.p.}{=} \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}} \left(L^2\text{-}\lim_B b \mapsto \mathbb{1}_{|b| < B} R_{a+ib} f(x) \right) \\
&\stackrel{p.p.}{=} \frac{1}{2\pi} L^2\text{-}\lim_B \int_{-B}^B e^{itb} R_{a+ib} f(x) db \\
&\stackrel{p.p.}{=} \frac{1}{2\pi} L^2\text{-}\lim_B \left(\int_{-B}^B e^{itb} \left(R_{a+ib} - \frac{1}{a+ib} \right) f(x) db + \int_{-B}^B e^{itb} \frac{1}{a+ib} f(x) db \right) \\
&\stackrel{p.p.}{=} \frac{1}{2\pi} L^2\text{-}\lim_B \left(\int_{-B}^B e^{itb} \left(R_{a+ib} - \frac{1}{a+ib} \right) f(x) db - \int_{-B}^B \frac{e^{itb}}{it} \frac{-i}{(a+ib)^2} f(x) db \right. \\
&\quad \left. + \frac{e^{itB}}{it} \frac{1}{a+ib} f(x) - \frac{e^{-itB}}{it} \frac{1}{a-ib} f(x) \right)
\end{aligned}$$

Or, $R_z f - \frac{1}{z} f = \frac{1}{z^2} X f + \frac{1}{z^2} R_z X^2 f$ donc la première intégrale est L^1 donc converge. Ces quatre termes convergent pour tout $t \neq 0$ fixé : la limite presque sûre et la limite L^2 coïncident, et on a l'égalité presque sûre

$$\mathbb{1}_{t \geq 0} e^{-at} \mathcal{L}_t f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itb} \left(R_{a+ib} - \frac{1}{a+ib} \right) f(x) db + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itb}}{t} \frac{1}{(a+ib)^2} f(x) db.$$

Puisque ces deux termes sont continus en t sur \mathbb{R}_+^* , on a en fait égalité pour tout $t > 0$:

$$\mathcal{L}_t f(x) = \frac{e^{at}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itb} \left(R_{a+ib} - \frac{1}{a+ib} \right) f(x) db + \frac{e^{at}}{2\pi t} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{itb}}{(a+ib)^2} f(x) db.$$

et puisque le raisonnement ne dépend pas de x , on a l'égalité sur tout \mathcal{M} à $t > 0$ fixé. \square

On pourra exploiter ce résultat si l'on arrive à décaler le contour d'intégration vers les a négatifs. C'est le mécanisme qu'utilise le théorème 2.18. Puisque le contour passe par l'infini, on a besoin d'une estimation sur la résolvante à l'infini, donnée par le lemme suivant.

Lemme 2.17.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\omega > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $-\omega \leq a \leq 1$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\|R_{a+ib}\| \leq C(1 + |b|^\varepsilon).$$

Démonstration.

Soient $B > 1$, $c > 0$ et $0 < \nu < 1$ des constantes données par les hypothèses faite en début de sous-partie. Soit $\nu < \nu' < 1$, et posons $\omega = \frac{1}{\nu'} - 1$, de façon à ce que $|a-1| \leq \frac{1}{\nu'}$. Montrons la majoration annoncée pour $-\omega \leq a \leq 1$ et $|b| > B$. Puisque R_{a+ib} est continue sur le rectangle $[-\omega, 1] + i[-B, B]$, on aura alors conclu.

On aimerait pouvoir écrire $R_{a+ib} = (\text{id} + (a-1)R_{1+ib})^{-1} R_{1+ib}$ et utiliser les majorations que l'on connaît sur R_{1+ib} . On va donc prouver ce résultat.

Soit n le plus petit entier tel que $n \geq c \ln |b|$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} \|(a-1)^k R_{1+ib}^k\| &\leq \sum_{0 \leq k < n} |a-1|^k \left(\frac{1}{1}\right)^k + \sum_{k \geq n} |a-1|^k \left(\frac{\nu}{1}\right)^k \\
&\leq \sum_{0 \leq k < n} \frac{1}{\nu'^k} + \sum_{k \geq n} \left(\frac{\nu}{\nu'}\right)^k \\
&\leq \frac{(\nu')^{-n} - 1}{(\nu')^{-1} - 1} + \left(1 - \frac{\nu}{\nu'}\right)^{-1} \\
&\leq \frac{(\nu')^2}{1 - \nu'} (\nu')^{-c \ln |b|} + \left(1 - \frac{\nu}{\nu'}\right)^{-1} \\
&\leq \frac{(\nu')^2}{1 - \nu'} |b|^{c \ln(1/\nu')} + \left(1 - \frac{\nu}{\nu'}\right)^{-1} \\
&\leq C(|b|^{c \ln(1/\nu')} + 1)
\end{aligned}$$

et ainsi, la série est sommable et $(\text{id} + (a-1)R_{1+ib})^{-1}$ est bien définie. De plus, pour ν' suffisamment proche de 1, $c \ln(1/\nu') < \varepsilon$ et sa norme est de l'ordre de $|b|^\varepsilon$.

On constate que

$$(\text{id} + (a-1)R_{1+ib})^{-1} R_{1+ib}((a + ib) \text{id} - X) = \text{id}$$

et

$$((a + ib) \text{id} - X)(\text{id} + (a-1)R_{1+ib})^{-1} R_{1+ib} = \text{id}.$$

donc on a bien l'égalité annoncée ; on peut alors majorer la norme de R_{a+ib} .

$$\|R_{a+ib}\| \leq \|(\text{id} + (a-1)R_{1+ib})^{-1}\| \|R_{1+ib}\| \leq C(1 + |b|^\varepsilon) \cdot 1 \leq C(1 + |b|^\varepsilon)$$

□

On peut alors donner un premier résultat de décroissance.

Théorème 2.18.

Il existe $\sigma_0 > 0$ et $C > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{D}(X^2) \cap \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ vérifiant $\int_{\mathcal{M}} f = 0$,

$$\|\mathcal{L}_t f\| \leq C (\|Xf\| + \|X^2 f\|) e^{-\sigma_0 t}.$$

Démonstration.

Soit un tel $f \in \mathcal{D}(X^2) \cap \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ d'intégrale 0. Soit $\sigma_0 > 0$ vérifiant le lemme 2.17 pour un $0 < \varepsilon < 1$ quelconque, et tel que $z \mapsto R_z f$ soit analytique sur un ouvert contenant $\{z \in \mathbb{C} | \Re z \geq -\omega\}$. Pour tout $t > 0$,

$$\mathcal{L}_t f = \frac{1}{2i\pi} \int_{1+i\mathbb{R}} \left(R_z f - \frac{1}{z} f\right) e^{zt} dz + \frac{1}{2i\pi t} \int_{1+i\mathbb{R}} \frac{e^{zt}}{z^2} f dz.$$

On cherche à décaler le contour d'intégration vers la gauche, afin de faire apparaître un terme exponentiel décroissant. On déplace le contour selon la figure 2, où le point en 0 représente un résidu. Puisque les fonctions considérées sont méromorphes sur un ouvert contenant $\{z \in \mathbb{C} | \Re z \geq -\omega\}$ et n'admettent de pôle qu'en 0, il suffit de montrer que les intégrales sur $[-\sigma_0, 1] + iB$ tendent vers 0 lorsque B tend vers $\pm\infty$. Or, d'après le lemme 2.15,

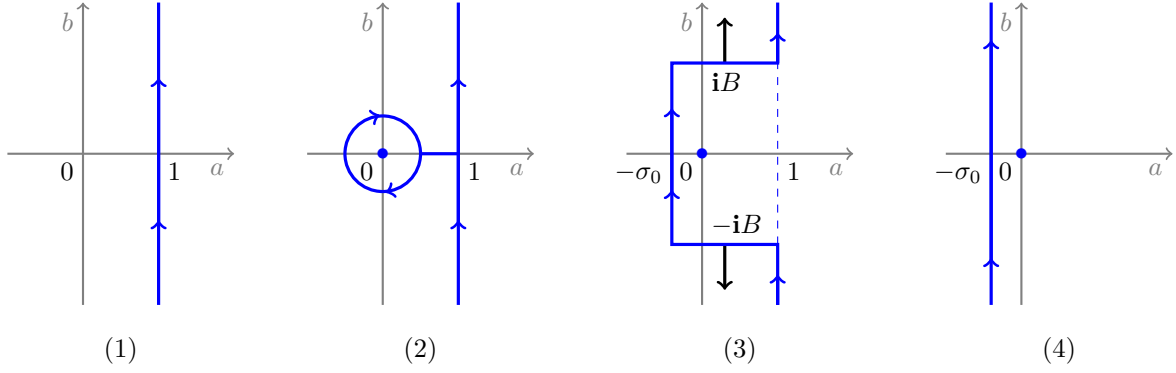


FIGURE 2 – Gestion du contour

$$\begin{aligned}
\left\| \int_{[-\sigma_0, 1] + iB} \left(R_z f - \frac{1}{z} f \right) e^{zt} dz \right\| &\leq \int_{-\sigma_0}^1 \left\| \frac{1}{(a + iB)^2} Xf + \frac{1}{(a + iB)^2} R_{a+iB} X^2 f \right\| e^t da \\
&\leq (1 + \sigma_0) \frac{1}{|B|^2} (\|Xf\| + C(1 + |B|^\varepsilon) \|X^2 f\|) e^t \\
&\xrightarrow{|B| \rightarrow \infty} 0
\end{aligned}$$

et

$$\left\| \int_{[-\sigma_0, 1] + iB} \frac{e^{zt}}{z^2} f dz \right\| \leq \int_{-\sigma_0}^1 \left\| \frac{1}{(a + iB)^2} f \right\| e^t da \leq (1 + \sigma_0) \frac{1}{|B|^2} \|f\| e^t \xrightarrow{|B| \rightarrow \infty} 0$$

Ainsi, on peut appliquer le théorème des résidus pour obtenir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_t f &= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\sigma_0 + i\mathbb{R}} \left(R_z f - \frac{1}{z} f \right) e^{zt} dz + \frac{1}{2i\pi t} \int_{-\sigma_0 + i\mathbb{R}} \frac{e^{zt}}{z^2} f dz + \text{Res}_0 \left(-\frac{e^{zt}}{z} \right) f + \text{Res}_0 \left(\frac{e^{zt}}{z^2 t} \right) f \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\sigma_0 + i\mathbb{R}} \left(R_z f - \frac{1}{z} f \right) e^{zt} dz + 0 - f + f \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{-\sigma_0 + i\mathbb{R}} \left(R_z f - \frac{1}{z} f \right) e^{zt} dz
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que $R_z f$ est analytique sur un voisinage ouvert de $\{z \in \mathbb{C} | \Re z \geq -\omega\}$.

En effet, l'intégrale est nulle puisque l'on peut encore décaler le contour d'après le même résultat, et faire tendre l'intégrale vers 0.

$$\left\| \int_{-\sigma_0 + i\mathbb{R}} \frac{e^{zt}}{z^2} f dz \right\| = \left\| \int_{-A + i\mathbb{R}} \frac{e^{zt}}{z^2} f dz \right\| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-At}}{1 + b^2} \|f\| db \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0.$$

On peut alors enfin majorer la norme de $\mathcal{L}_t f$ en utilisant les lemmes 2.15 et 2.17 et conclure la preuve.

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_t f\| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\sigma_0 t}}{|-\sigma_0 + b|^2} (\|Xf\| + C(1 + |b|^\varepsilon) \|X^2 f\|) db \\
&\leq \left(\left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{db}{\sigma_0^2 + b^2} \right) \|Xf\| + \left(\frac{C}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{1 + |b|^\varepsilon}{\sigma_0^2 + b^2} db \right) \|X^2 f\| \right) e^{-\sigma_0 t} \\
&\leq C' (\|Xf\| + \|X^2 f\|) e^{-\sigma_0 t}
\end{aligned}$$

□

Cette décroissance s'étend sans difficulté aux fonctions $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. On utilise le lemme d'approximation suivant.

Lemme 2.19.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(X^2) \cap \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ telle que

- $\|f - f_\varepsilon\|_s \leq \varepsilon |f|_{\mathcal{C}^1}$;
- $\|Xf_\varepsilon\| \leq \frac{C_L}{\varepsilon} |f|_{\mathcal{C}^1}$;
- $\|X^2f_\varepsilon\| \leq \frac{C_L}{\varepsilon^2} |f|_{\mathcal{C}^1}$;

où $C_L > 0$ ne dépend ni de f ni de ε .

Démonstration.

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ à support compact inclus dans $(0, 1)$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \phi = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\phi_\varepsilon : t \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \phi(\frac{t}{\varepsilon})$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, et posons $f_\varepsilon = \int_0^\infty \phi_\varepsilon(s) \mathcal{L}_s f ds \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. On a bien $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(X)$, puisque

$$\left\| \frac{1}{t} (\mathcal{L}_t f_\varepsilon - f_\varepsilon) - \int_0^\infty -\phi'_\varepsilon(s) \mathcal{L}_s f ds \right\| \leq \int_0^\infty \left| \frac{1}{t} (\phi_\varepsilon(s-t) - \phi_\varepsilon(s)) + \phi'_\varepsilon(s) \right| \|\mathcal{L}_s f\| ds \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

et ainsi, $Xf_\varepsilon = \int_0^\infty -\phi'_\varepsilon(s) \mathcal{L}_s f ds$ et de même $X^2f_\varepsilon = \int_0^\infty \phi''_\varepsilon(s) \mathcal{L}_s f ds$. On a donc directement les majorations

$$\begin{aligned} \|Xf\| &\leq \int_0^\infty |\phi'_\varepsilon(s)| \|\mathcal{L}_s f\| ds \leq \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon^2} \left| \phi' \left(\frac{1}{\varepsilon} s \right) \right| \|f\| ds \leq \frac{1}{\varepsilon} |\phi'|_\infty \|f\| \\ \text{et } \|X^2f\| &\leq \int_0^\infty |\phi''_\varepsilon(s)| \|\mathcal{L}_s f\| ds \leq \int_0^\infty \frac{1}{\varepsilon^3} \left| \phi'' \left(\frac{1}{\varepsilon} s \right) \right| \|f\| ds \leq \frac{1}{\varepsilon^2} |\phi''|_\infty \|f\|. \end{aligned}$$

Or, $\|f\|_u \leq C |f|_{\mathcal{C}^1}$ et $\|f\|_s \leq V |f|_\infty \leq V |f|_{\mathcal{C}^1}$ où V est le volume de \mathcal{M} , donc $\|f\| \leq C' |f|_{\mathcal{C}^1}$ et on a conclu en ce qui concerne les inégalités sur Xf_ε et X^2f_ε .

Enfin, majorons la norme stable de la différence ; il suffit de majorer la norme infinie.

$$|f - f_\varepsilon|_\infty \leq \int_0^\infty \phi_\varepsilon(s) |\mathcal{L}_s f - f|_\infty ds \leq \int_0^\infty \phi_\varepsilon(s) s |df(-X)|_\infty ds \leq \varepsilon |f|_{\mathcal{C}^1},$$

ce qui conclut. □

On peut enfin conclure quant au théorème 2.12.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(X)$ une approximation donnée par le lemme 2.19, pour une certaine constante $C_L > 0$.

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}_t f\| &= \|\mathcal{L}_t f\|_u + \|\mathcal{L}_t f\|_s \\ &\leq e^{-\lambda\beta t} \|f\|_u + \|\mathcal{L}_t(f - f_\varepsilon)\|_s + \|\mathcal{L}_t f_\varepsilon\|_s \\ &\leq C' e^{-\lambda\beta t} |f|_{\mathcal{C}^1} + \|f - f_\varepsilon\|_s + C (\|Xf_\varepsilon\| + \|X^2f_\varepsilon\|) e^{-\sigma_0 t} \\ &\leq C' e^{-\lambda\beta t} |f|_{\mathcal{C}^1} + \varepsilon |f|_{\mathcal{C}^1} + CC_L \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2} \right) |f|_{\mathcal{C}^1} e^{-\sigma_0 t} \end{aligned}$$

et ainsi, pour $\varepsilon = e^{-\frac{1}{3}\sigma_0 t}$,

$$\|\mathcal{L}_t f\| \leq C' |f|_{\mathcal{C}^1} e^{-\lambda\beta t} + (1 + 2CC_L) |f|_{\mathcal{C}^1} e^{-\frac{1}{3}\sigma_0 t}$$

et le théorème est prouvé pour tout $\sigma \leq \beta\lambda, \frac{1}{3}\sigma_0$.

3 Théorie spectrale des semigroupes contractants

On trouvera dans cette partie les résultats essentiels de théorie spectrale utilisés dans ce rapport. On ne donne que peu de démonstrations, en particulier en ce qui concerne le spectre essentiel. On s'intéressera tout particulièrement aux opérateurs fermés, et en particulier aux générateurs de semigroupes contractants. La référence utilisée pour le spectre des opérateurs compacts est le livre [Kat84], tandis que l'on se base sur [Dyn65] pour les semigroupes contractants. Cette dernière référence contentera particulièrement les probabilistes.

Soit \mathcal{B} un espace de Banach (complexe).

Définition 3.1.

Un opérateur sur \mathcal{B} est une application linéaire $X : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{B}$, où $\mathcal{D}(X)$ est un sous-espace vectoriel de \mathcal{B} appelé domaine de X . L'opérateur est noté X , mais dépend radicalement de son domaine.

On dit que X est fermé si son graphe l'est. Ceci est équivalent à dire que pour tous éléments $f_n \in \mathcal{D}(X)$, si $f_n \rightarrow f \in \mathcal{B}$ et $Xf_n \rightarrow g \in \mathcal{B}$, alors $f \in \mathcal{D}(X)$ et $Xf = g$.

Il est souvent pratique de se ramener à des espaces complets et à des applications continues. Le théorème suivant va nous y aider. Sa démonstration est un exercice facile.

Théorème 3.2.

Soit X un opérateur fermé et posons, pour tout $f \in \mathcal{D}(X)$, $\|f\|_X = \|f\| + \|Xf\|$.

L'espace $(\mathcal{D}(X), \|\cdot\|_X)$ ainsi construit est complet, et $X : (\mathcal{D}(X), \|\cdot\|_X) \rightarrow (\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ est continue.

Afin de distinguer plus facilement ces espaces, on comprendra $\mathcal{D}(X)$ comme le sous-espace vectoriel de $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$, et \mathcal{B}_X comme l'espace de Banach que l'on vient de définir.

Soit $X : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{B}$ un opérateur fermé. On notera id_X l'inclusion continue $\mathcal{B}_X \hookrightarrow \mathcal{B}$, et $\text{id}_{\mathcal{B}}$ (resp. $\text{id}_{\mathcal{B}_X}$) l'identité de \mathcal{B} (resp. \mathcal{B}_X).

3.1 Spectre d'un opérateur fermé

Définition 3.3.

Un complexe $z \in \mathbb{C}$ est une valeur spectrale de X si $z \text{id}_X - X : \mathcal{B}_X \rightarrow \mathcal{B}$ n'admet pas d'inverse continu. On note $\sigma(X)$ l'ensemble des valeurs spectrales de X .

Si $z \notin \sigma(X)$, on note $R_z : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_X$ et on appelle résolvante l'inverse de $z \text{id}_X - X$.

Une définition équivalente consiste à dire que $z \in \mathbb{C}$ est une valeur spectrale si et seulement si $z \text{id}_{\mathcal{B}} - X : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{B}$ n'admet pas d'inverse continu. Ma préférence est de travailler avec des espaces complets, où l'on peut employer un certain nombre de résultats généraux, tels que le lemme 3.5.

Définition 3.4.

Par convention, on dit que X a une valeur spectrale en l'infini si X n'est pas un opérateur borné défini sur \mathcal{B} tout entier. On notera alors $\hat{\sigma}(X) \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ l'ensemble des valeurs spectrales contenant éventuellement l'infini.

Le lemme suivant, apparemment trivial, est très fertile dans l'étude du spectre. On en liste quelques applications.

Lemme 3.5.

Soit T un opérateur défini sur \mathcal{B} tout entier. Si $\|T\| < 1$, alors $\text{id} - T$ est inversible, d'inverse $\sum_{n \geq 0} T^n$.

Proposition 3.6.

Si X est un opérateur borné, alors toute valeur spectrale z vérifie $|z| \leq \|X\|$.

Théorème 3.7.

Le spectre d'un opérateur fermé est fermé.

3.2 Spectre discret et spectre essentiel

Définition 3.8.

Soit X un opérateur fermé sur \mathcal{B} .

On dit que $\lambda \in \sigma(X)$ appartient au spectre discret si λ est isolé dans le spectre et s'il existe deux sous-espaces fermés E et F de \mathcal{B} tels que :

- $\mathcal{B} = E \oplus F$;
- pour tout $f \in \mathcal{D}(X)$, si $f \in E$ alors $Xf \in E$, et de même pour F ;
- λ n'est pas valeur spectrale de la restriction $X : \mathcal{D}(X) \cap E \rightarrow E$;
- F est de dimension finie.

On appelle spectre essentiel et on note $\sigma_{ess}(X)$ les valeurs spectrales qui n'appartiennent pas au spectre discret. Si ∞ est valeur spectrale, on la considère comme une valeur spectrale essentielle.

Définition 3.9.

Soit X un opérateur borné de domaine \mathcal{B} .

On appelle rayon spectral de X et on note $\rho(X)$ le supremum des $|\lambda|$, où λ parcourt le spectre de X .

On appelle rayon spectral essentiel de X et on note $\rho_{ess}(X)$ le supremum des $|\lambda|$, où λ parcourt le spectre essentiel de X .

Dans notre preuve, mais aussi dans un certain nombre de problèmes, l'intérêt d'effectuer cette distinction est de pouvoir restreindre grossièrement le spectre essentiel d'un opérateur, avant d'utiliser des techniques plus subtiles pour traiter presque individuellement des valeurs spectrales dont on sait qu'elles sont isolées.

On utilisera effectivement le théorème 3.10 dans la preuve, mais l'intérêt du théorème 3.11 est plutôt didactique.

Théorème 3.10.

Soit X un opérateur borné de domaine \mathcal{B} .

$$\rho(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|X^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n \geq 1} \|X^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Théorème 3.11.

Soit X un opérateur borné de domaine \mathcal{B} .

Alors $\rho_{ess}(X)$ est l'infimum des $r > 0$ tels qu'il existe deux sous-espaces fermés E et F de \mathcal{B} vérifiant

- $\mathcal{B} = E \oplus F$;
- E et F sont stables par X ;
- l'opérateur $X_E : E \rightarrow E, f \mapsto Xf$ a un rayon spectral plus petit que r ;
- F est de dimension finie.

On conclut par un résultat qui nous permettra souvent de nous ramener à l'étude du spectre de la résolvante R_z , qui est beaucoup plus agréable en général.

Théorème 3.12.

Soit X un opérateur fermé, et $z \notin \sigma(X)$.

En posant $F_z : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ tel que $F_z(w) = z - \frac{1}{w}$, alors F_z réalise des bijections

$$\widehat{\sigma}(\text{id}_X \circ R_z) \xrightarrow{F_z} \widehat{\sigma}(X) \text{ et } \widehat{\sigma}_{ess}(\text{id}_X \circ R_z) \xrightarrow{F_z} \widehat{\sigma}_{ess}(X).$$

3.3 Semigroupe contractant

Soit \mathcal{B} un espace de Banach, et $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_t)_{t \geq 0}$ une famille d'opérateurs bornés de domaine \mathcal{B} .

Définition 3.13.

On dit que \mathcal{L} est un semigroupe sur \mathcal{B} si $\mathcal{L}_{t+s} = \mathcal{L}_t \mathcal{L}_s$ pour tous temps positifs t et s .

Il est dit contractant si $\|\mathcal{L}_t\| \leq 1$ pour tout $t \geq 0$.

Il est dit continu si $t \mapsto \mathcal{L}_t f$ est continue sur \mathbb{R}_+ pour tout point f de \mathcal{B} .

On suppose à partir de maintenant que $(\mathcal{L}_t)_{t \geq 0}$ est un semigroupe contractant.

Puisque l'on s'intéresse à la dépendance de \mathcal{L}_t en temps, on aimerait se ramener au cas où le semigroupe considéré est continu ; c'est le but de la proposition suivante.

Définition 3.14.

Soit \mathcal{B}_0 l'ensemble des éléments $f \in \mathcal{B}$ tels que $\mathcal{L}_t f \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f$.

Alors \mathcal{B}_0 est un sous-espace de Banach de \mathcal{B} stable par \mathcal{L} et \mathcal{L} est un semigroupe contractant continu sur \mathcal{B}_0 .

Démonstration.

C'est un sous-espace vectoriel de \mathcal{B}_0 , stable pour \mathcal{L} puisque pour tout $f \in \mathcal{B}_0$ et $t \geq 0$:

$$\|\mathcal{L}_s(\mathcal{L}_t f) - (\mathcal{L}_t f)\| = \|\mathcal{L}_t(\mathcal{L}_s f - f)\| \leq \|\mathcal{L}_s f - f\| \xrightarrow[s \rightarrow 0]{} 0$$

De plus, \mathcal{B}_0 est fermé ; en effet, si $f \in \overline{\mathcal{B}_0}$, alors pour tout $g \in \mathcal{B}_0$:

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} \|\mathcal{L}_t f - f\| &\leq \limsup_{t \rightarrow 0} (\|\mathcal{L}_t f - \mathcal{L}_t g\| + \|\mathcal{L}_t g - g\| + \|g - f\|) \\ &\leq 2\|f - g\| + \limsup_{t \rightarrow 0} \|\mathcal{L}_t g - g\| = 2\|f - g\| \end{aligned}$$

et ainsi, en prenant la limite quand $g \rightarrow f$, $\|\mathcal{L}_t f - f\| \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.

Enfin, pour $f \in \mathcal{B}_0$, $t \mapsto \mathcal{L}_t f$ est continue. En effet, soient $t, s \geq 0$:

$$\|\mathcal{L}_t f - \mathcal{L}_s f\| = \|\mathcal{L}_{t \wedge s}(\mathcal{L}_{|t-s|} f - f)\| \leq \|\mathcal{L}_{|t-s|} f - f\| \xrightarrow[|t-s| \rightarrow 0]{} 0$$

□

Définition 3.15.

On note $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{B}_0$ le sous-espace des éléments $f \in \mathcal{B}$ tels que $\frac{1}{t}(\mathcal{L}_t f - f)$ admet une limite.

Puisque \mathcal{B}_0 est fermé et stable par \mathcal{L} , cette limite, notée Xf , appartient à \mathcal{B}_0 . On a ainsi défini un opérateur $X : \mathcal{D}(X) \rightarrow \mathcal{B}_0$. On l'appelle générateur du semigroupe \mathcal{L} .

En général, cet espace n'est pas fermé. En fait, on montre dans la prochaine proposition que $\mathcal{D}(X)$ est toujours dense dans \mathcal{B}_0 .

On peut imaginer que $\mathcal{L}_t = e^{tX}$, l'image est fertile. Elle rend par exemple crédible le premier point, dont découlent les autres.

Proposition 3.16.

1. Pour tout $f \in \mathcal{D}(X)$, la fonction $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{B}_0, t \mapsto \mathcal{L}_t f$ est \mathcal{C}^1 , et $\frac{d}{dt} \mathcal{L}_t f = \mathcal{L}_t(Xf)$.
Ainsi, $\mathcal{L}_t f - f = \int_0^t \mathcal{L}_s(Xf) ds$ pour tout $f \in \mathcal{D}(X)$ et $t \geq 0$.
2. L'espace $\mathcal{D}(X)$ est stable par \mathcal{L} , et $X(\mathcal{L}_t f) = \mathcal{L}_t(Xf)$ pour $f \in \mathcal{D}(X)$.
3. L'inclusion $\mathcal{D}(X) \subset \mathcal{B}_0$ est dense ; en fait, $\overline{\mathcal{D}(X)} = \mathcal{B}_0$ puisque \mathcal{B}_0 est fermé.
4. X est fermé.

Démonstration.

On utilisera souvent, dans la suite, le fait que $\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \Phi(s) ds \rightarrow \Phi(0)$ pour Φ continue à valeurs dans un espace de Banach. Ceci se déduit du cas réel par

$$\left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \Phi(s) ds - \Phi(0) \right\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \|\Phi(s) - \Phi(0)\| ds \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \|\Phi(0) - \Phi(0)\| = 0$$

1. Soit $f \in \mathcal{D}(X)$ et $0 \leq s \leq t$.

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{s-t} (\mathcal{L}_s f - \mathcal{L}_t f) - \mathcal{L}_t(Xf) \right\| &= \left\| \mathcal{L}_s \left(\frac{1}{s-t} (f - \mathcal{L}_{t-s} f) - \mathcal{L}_{t-s} Xf \right) \right\| \\ &\leq \left\| \frac{1}{t-s} (\mathcal{L}_{t-s} f - f) - Xf \right\| + \|Xf - \mathcal{L}_{t-s} Xf\| \end{aligned}$$

Lorsque $s \uparrow t$, le premier terme tend vers 0 par définition de X , et le second parce que $Xf \in \mathcal{B}_0$.

De même, si $s \downarrow t$ avec $0 \leq t \leq s$, on montre que $\frac{1}{s-t} (\mathcal{L}_s f - \mathcal{L}_t f) \rightarrow \mathcal{L}_t(Xf)$.

Ainsi, $t \mapsto \mathcal{L}_t f$ est \mathcal{C}^1 , et $\frac{d}{dt} \mathcal{L}_t f = \mathcal{L}_t(Xf)$.

2. Fixons $f \in \mathcal{D}(X)$ et $t \geq 0$.

$$\frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{L}_\varepsilon(\mathcal{L}_t f) - (\mathcal{L}_t f)) = \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{L}_{t+\varepsilon} f - \mathcal{L}_t f)$$

donc, en passant à la limite quand $\varepsilon \downarrow 0$, $\mathcal{L}_t f \in \mathcal{D}(X)$ et $X(\mathcal{L}_t f) = \frac{d}{dt} \mathcal{L}_t f$.

3. Soit $f \in \mathcal{B}_0$. Posons, pour tout $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \mathcal{L}_t f dt$. Il suffira pour conclure de montrer que $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(X)$, puisque $f_\varepsilon \rightarrow \mathcal{L}_0 f = f$.

Soit $t > 0$:

$$\frac{1}{t} \mathcal{L}_t f_\varepsilon - f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{t} \int_\varepsilon^{\varepsilon+t} \mathcal{L}_s f ds - \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{L}_s f ds \right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{L}_\varepsilon f - f)$$

ainsi, $Xf_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{L}_\varepsilon f - f)$ est bien défini et $f_\varepsilon \in \mathcal{D}(X)$.

4. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}(X)$ tels que $f_n \rightarrow f \in \mathcal{B}$ et $Xf_n \rightarrow g \in \mathcal{B}$.

D'après ce qui précède, $\mathcal{L}_t f_n - f_n = \int_0^t \mathcal{L}_s(Xf_n) ds = \int_0^t \mathcal{L}_s g_n ds$. Or :

$$\left\| \frac{1}{t} (\mathcal{L}_t f_n - f_n) - \frac{1}{t} (\mathcal{L}_t f - f) \right\| \leq \frac{2}{t} \|f_n - f\| \rightarrow 0$$

et

$$\left\| \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{L}_s g_n ds - \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{L}_s g ds \right\| \leq \frac{1}{t} \int_0^t \|\mathcal{L}_s(g_n - g)\| ds \leq \|g_n - g\| \rightarrow 0$$

On a donc, en passant à la limite :

$$\frac{1}{t} (\mathcal{L}_t f - f) = \lim_n \frac{1}{t} (\mathcal{L}_t f_n - f_n) = \lim_n \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{L}_s g_n ds = \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{L}_s g ds$$

Et enfin, lorsque $t \rightarrow 0$, $\frac{1}{t} (\mathcal{L}_t f - f) = \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{L}_s g ds \rightarrow g$ donc $f \in \mathcal{D}(X)$ et $Xf = g$. □

3.4 Expression de la résolvante

Théorème 3.17.

Soit (\mathcal{L}_t) un semigroupe contractant de générateur X sur \mathcal{B} . Soit $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $a = \Re z > 0$.

Soit $f \in \mathcal{B}$ et $g \in \mathcal{B}$. Alors $f \in \mathcal{D}(X)$ et $zf - Xf = g$ si et seulement si $f = \int_0^\infty e^{-zt} \mathcal{L}_t g dt$.

Démonstration.

Si $f = \int_0^\infty e^{-zt} \mathcal{L}_t g dt$, alors,

$$\mathcal{L}_t f - f = \int_0^\infty e^{-zs} \mathcal{L}_{t+s} g ds - \int_0^\infty e^{-zs} \mathcal{L}_s g ds = \int_t^\infty (e^{-z(s-t)} - e^{-zs}) \mathcal{L}_s g ds - \int_0^s e^{-zs} \mathcal{L}_s g ds$$

d'où $f \in \mathcal{D}(X)$ et

$$Xf = \int_0^\infty ze^{-zs} \mathcal{L}_s g \, ds - e^{-z0} \mathcal{L}_0 g = zf - g.$$

Réciproquement, si $f \in \mathcal{D}(X)$ et $zf - Xf = g$, alors, en notant $\hat{g} = \int_0^\infty e^{-zt} \mathcal{L}_t g \, dt$ et en posant $\Phi_t = \mathcal{L}_t(f - \hat{g})$, on a

$$\dot{\Phi}_t = \mathcal{L}_t X(f - \hat{g}) = \mathcal{L}_t(z(f - \hat{g}) - (g - g)) = z\Phi_t$$

d'où $\Phi_t = e^{zt} \Phi_0$, et ainsi

$$\|f - \hat{g}\| = \|\Phi_0\| = e^{-at} \|\Phi_t\| \leq e^{-at} \|f - \hat{g}\| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

en utilisant le fait que \mathcal{L}_t est contractant, et on a bien $f = \hat{g}$ comme attendu. \square

Corollaire 3.18.

Si (\mathcal{L}_t) est un semigroupe contractant sur \mathcal{B} et X est son générateur, alors z n'est pas valeur spectrale de X pour tout $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $a = \Re z$ strictement positive. De plus, la résolvante s'exprime explicitement pour tout $f \in \mathcal{B}$ par

$$R_z f = \int_0^\infty e^{-zt} \mathcal{L}_t f \, dt$$

et pour tout $n \geq 0$,

$$R_z^n f = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \mathcal{L}_t f \, dt.$$

Démonstration.

D'après le théorème, l'application $f \mapsto zf - Xf$ est inversible par $g \mapsto \int_0^\infty e^{-zt} \mathcal{L}_t g \, dt$, qui est de norme inférieure à $\frac{1}{a}$. Ainsi, z n'est pas valeur spectrale, et $R_z g = \int_0^\infty e^{-zt} \mathcal{L}_t g \, dt$.

Pour l'expression de R_z^n , le résultat est déjà montré pour $n = 1$. Supposons la formule valable pour un n donné.

$$\begin{aligned} R_z^{n+1} f &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-zt} e^{-zs} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} \mathcal{L}_t \mathcal{L}_s f \, ds \, dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-z(t+s)} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} \mathcal{L}_{t+s} f \, ds \, dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^u e^{-zu} \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} \mathcal{L}_u f \, ds \, du \\ &= \int_0^\infty e^{-zu} \frac{u^n}{n!} \mathcal{L}_u f \, du \end{aligned}$$

où toutes les intégrales sont bien définies et intervertibles, et en posant $(s, u) = (s, s + t)$. \square

4 Spectre essentiel et argument d'Hennion

Avant de commencer cette partie, il est crucial de fixer définitivement un $\beta > 0$. Soit τ un exposant hölderien pour lequel les hypothèses des théorèmes 1.4 et 1.6 sont vérifiées. On se place dans cette partie et jusqu'à la fin du rapport dans le cas où $0 < \beta < \tau^2$.

On cherche dans cette section à borner le spectre essentiel de X . Pour cela, on va étudier le spectre essentiel de la résolvante R_z . Dans toute cette partie, on s'intéressera au cas où z est à partie réelle strictement positive.

Les méthodes d'étude du spectre essentiel consistent moralement à étudier le spectre discret à transformation compacte près. On utilisera en l'occurrence le résultat d'Hennion suivant.⁵

Théorème 4.1 (Hennion).

*Soit \mathcal{B} un espace de Banach, et $R : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ un opérateur borné.
Soit $\iota : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}_w$ une injection continue qui rende $\hat{R} := \iota \circ R$ compacte.
S'il existe deux suites positives $(A_n)_{n \geq 0}$ et $(B_n)_{n \geq 0}$ telles que*

$$\|R^n f\| \leq (A_n)^{1/n} \|f\| + B_n \|f\|_w$$

pour tout $n \geq 0$ et $f \in \mathcal{B}$, alors $\rho_{ess}(R) \leq \liminf_n A_n$.

En gardant à l'esprit le résultat classique $\rho(R) = \lim_n \|R^n\|^{1/n}$, on peut interpréter le terme de norme $\|\cdot\|_w$ comme la contribution d'une partie compacte que l'on néglige dans l'étude du spectre essentiel.

Ce théorème, d'analyse spectrale pure, est démontré dans la partie 4.3.

La suite de cette partie est donc dédiée à vérifier les hypothèses de ce théorème. On cherche un espace \mathcal{B}_w muni d'une norme plus faible que celle de \mathcal{B} , telle que R_z vu comme un opérateur de \mathcal{B} vers \mathcal{B}_w soit compact, et sur lequel on dispose d'inégalités de la forme requise. On parle d'inégalités de Lasota-Yorke.

Commençons par la définition de l'espace \mathcal{B}_w ; la section 4.1 traitera des inégalités de Lasota-Yorke, la section 4.2 de la compacité de la résolvante. On pourra alors conclure dans la partie 4.4 quant au spectre de X .

Définition 4.2.

On note $\|\cdot\|_w$ la norme sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ définie par

$$\|f\|_w = \sup_{\varphi} \int_{\mathcal{M}} f \varphi$$

où le supremum est pris sur $\varphi \in \mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, $|\varphi|_{s,1} \leq 1$.

On appelle $(\mathcal{B}_w, \|\cdot\|_w)$ le complété de $(\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C}), \|\cdot\|_w)$.

Cette définition fait de $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}_w$ une injection continue de norme 1.

4.1 Inégalités de Lasota-Yorke

On cherche dans cette partie à montrer sur R_z une inégalité de type Lasota-Yorke. On commence par en donner une version continue, sur le semigroupe $(\mathcal{L}_t)_t$.

Théorème 4.3.

Pour tout $0 < \beta' < \beta$ et $f \in \mathcal{B}$, la famille des \mathcal{L}_t vérifie

$$\|\mathcal{L}_t f\| \leq C e^{-\lambda \beta' t} \|f\| + C \|f\|_w$$

où $C > 0$ ne dépend pas de f ni de t .

Démonstration.

On sait déjà, d'après le théorème 2.7, que $\|\mathcal{L}_t f\|_u \leq e^{-\lambda \beta t} \|f\|_u$. Il faut donc contrôler la norme stable de l'opérateur.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Soit $\tilde{\varphi} \in \mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ que l'on choisira proche de φ dans un certain sens.

5. Le théorème original d'Hennion, présenté dans [Hen93], n'est pas précisément le théorème cité, mais on y trouve les mêmes articulations. Ce type de raisonnement est appelé argument d'Hennion dans la littérature.

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_t f \cdot \varphi \right| &\leq \left| \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_t f \cdot (\varphi - \tilde{\varphi}) \right| + \left| \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_t f \cdot \tilde{\varphi} \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathcal{M}} f \cdot T_t (\varphi - \tilde{\varphi}) \right| + \|\mathcal{L}_t f\|_w |\tilde{\varphi}|_{s,1} \\
&\leq \|f\|_s |T_t (\varphi - \tilde{\varphi})|_{s,\beta} + \|f\|_w |\tilde{\varphi}|_{s,1} \\
&\leq \|f\|_s |\varphi - \tilde{\varphi}|_{\infty} + \|f\|_s e^{-\lambda\beta t} H_{s,\beta} (\varphi - \tilde{\varphi}) + \|f\|_w |\tilde{\varphi}|_{s,1}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que \mathcal{L}_t est contractant sur \mathcal{B}_w , qui se prouve exactement de la même manière que sur \mathcal{B} , comme vu au théorème 2.7.

On cherche donc $\tilde{\varphi}$ uniformément proche de φ , dont la norme stable soit contrôlée par celle de φ . Admettons le lemme 4.4, qui prouve ce type d'estimées, et soit $0 < \varepsilon < 1$.

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_t f \cdot \varphi \right| &\leq \|f\|_s |\varphi - \varphi_{\varepsilon}|_{\infty} + \|f\|_s e^{-\lambda\beta t} H_{s,\beta} (\varphi - \varphi_{\varepsilon}) + \|f\|_w |\varphi_{\varepsilon}|_{s,1} \\
&\leq \|f\|_s H_{s,\beta} (\varphi) \varepsilon^{\beta} + \|f\|_s e^{-\lambda\beta t} H_{s,\beta} (\varphi) + \|f\|_s e^{-\lambda\beta t} ((1 + C_L \varepsilon) H_{s,\beta} (\varphi) + C_L |\varphi|_{\infty}) \\
&\quad + \|f\|_w |\varphi_{\varepsilon}|_{\infty} + \|f\|_w H_{s,1} (\varphi_{\varepsilon}) \\
&\leq \|f\|_s |\varphi|_{s,\beta} (\varepsilon^{\beta} + e^{-\lambda\beta t} + e^{-\lambda\beta t} (1 + C_L \varepsilon + C_L)) + \|f\|_w |\varphi|_{\infty} + \|f\|_w C_L \varepsilon^{-1} |\varphi|_{\infty} \\
&\leq \|f\|_s |\varphi|_{s,\beta} (\varepsilon^{\beta} + e^{-\lambda\beta t} (2 + 2C_L)) + \|f\|_w |\varphi|_{s,\beta} (1 + C_L \varepsilon^{-1})
\end{aligned}$$

En fixant $\varepsilon = e^{-\lambda t}$, on obtient enfin

$$\|\mathcal{L}_t f\|_s \leq \|f\|_s e^{-\lambda\beta' t} \cdot e^{-\lambda(\beta-\beta')t} (3 + 2C_L) + \|f\|_w (1 + C_L e^{\lambda t})$$

On conclut par découpage du temps. Soit $T > 0$ indépendant de t et f tel que $3 + 2C_L \leq e^{\lambda(\beta-\beta')T}$, pour lequel on se ramène à la majoration

$$\|\mathcal{L}_T f\|_s \leq \|f\|_s e^{-\lambda\beta' T} + \|f\|_w (1 + C_L e^{\lambda T}),$$

puis, pour $kT \leq t < (k+1)T$,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{L}_t f\|_s &\leq \|\mathcal{L}_{t-kT} f\|_s e^{-\lambda\beta' kT} + \|f\|_w (1 + C_L e^{\lambda T}) \left(1 + e^{\lambda\beta' T} + \dots + e^{-\lambda\beta' (k-1)T}\right) \\
&\leq \|f\|_s e^{-\lambda\beta' t} (3 + 2C_L) + \|f\|_w (1 + C_L e^{\lambda T}) \left(1 + \dots + e^{-\lambda\beta' kT}\right) \\
&\leq \|f\|_s e^{-\lambda\beta' t} (3 + 2C_L) + \|f\|_w (1 + C_L e^{\lambda T}) \left(1 - e^{-\lambda\beta' T}\right)^{-1} \\
&\leq C \|f\|_s e^{-\lambda\beta' t} + C \|f\|_w
\end{aligned}$$

On a donc, en sommant avec la partie instable, le résultat attendu. \square

Voici le lemme d'approximation utilisé dans la preuve.

Lemme 4.4.

Il existe une constante $C_L > 0$ telle que pour tout $0 < \varepsilon < 1$ et toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, on peut construire une approximation $\varphi_{\varepsilon} \in \mathcal{C}_s^{\beta}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ qui vérifie

$$1. \quad |\varphi - \varphi_{\varepsilon}|_{\infty} \leq \varepsilon^{\beta} H_{s,\beta}(\varphi);$$

2. $|\varphi_\varepsilon|_\infty \leq |\varphi|_\infty$;
3. $H_{s,\beta}(\varphi_\varepsilon) \leq (1 + C_L \varepsilon) H_{s,\beta}(\varphi) + C_L |\varphi|_\infty$;
4. $H_{s,1}(\varphi_\varepsilon) \leq C_L \varepsilon^{-1} |\varphi|_\infty$.

Ce résultat est prouvé en effectuant une moyenne le long de la direction stable sur une boule de rayon ε . Les deux premières inégalités sont alors intuitives ; pour les suivantes, la métrique non-euclidienne joue un rôle plus important. La démonstration, qui ne fait appel qu'à des notions de géométrie riemannienne, n'est pas faite ici.

On déduit directement du théorème la proposition suivante, qui convient à nos besoins.

Corollaire 4.5 (Inégalité de Lasota-Yorke).

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $a = \Re z > 0$ et $0 < \beta' < \beta$, R_z vérifie

$$\|R_z^n f\| \leq \frac{C}{(a + \lambda\beta')^n} \|f\| + \frac{C}{a^n} \|f\|_w$$

où $C > 0$, ne dépendant pas de f ni de z , est la même constante que dans l'inégalité sur \mathcal{L}_t .

Démonstration.

On rappelle que le corollaire 3.18 donne l'expression suivante pour la résolvante, valable pour tout $f \in \mathcal{B}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$R_z^n f = \int_0^\infty e^{-zt} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \mathcal{L}_t f dt.$$

L'inégalité attendue découle alors directement de l'inégalité sur \mathcal{L}_t .

$$\begin{aligned} \|R_z^n f\| &\leq \int_0^\infty e^{-at} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \|\mathcal{L}_t f\| dt \\ &\leq \int_0^\infty e^{-at} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left(C \|f\| e^{-\lambda\beta' t} + C \|f\|_w \right) dt \\ &= C \|f\| \int_0^\infty e^{-(a+\lambda\beta')t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt + C \|f\|_w \int_0^\infty e^{-at} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ &= \frac{C}{(a + \lambda\beta')^n} \|f\| + \frac{C}{a^n} \|f\|_w \end{aligned}$$

□

4.2 Compacité de la résolvante

On veut prouver que la résolvante, vue comme un opérateur de \mathcal{B} vers \mathcal{B}_w , est compacte. Plusieurs indices laissent supposer que ce résultat pourrait être vrai. Tout d'abord, l'injection classique $\mathcal{C}^{0+1}(\mathcal{M}, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{C}^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ est compacte, donc l'injection duale $(\mathcal{C}^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C}))^* \hookrightarrow (\mathcal{C}^{0+1}(\mathcal{M}, \mathbb{C}))^*$ l'est aussi, où $\mathcal{C}^{0+1}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ représente les fonctions 1-hölderiennes de \mathcal{M} dans \mathbb{C} . De plus, l'expression de la résolvante R_z sous la forme intégrale $\int_0^\infty e^{-zt} \mathcal{L}_t dt$ nous invite à penser que l'on lisse la distribution dans la direction du flot. Enfin, la régularité hölderienne dans le sens instable peut laisser espérer un théorème d'Ascoli dans cette direction.

Ces arguments sont les trois mécanismes principaux utilisés dans la preuve qui suit. On la décompose en deux sections : l'introduction d'opérateurs duaux, qui traduiront les mécanismes que l'on vient de décrire en termes d'applications continues ; et la preuve de compacité en elle-même, basée sur des variations des inclusions compactes hölderiennes classiques.

Fixons dans toute cette sous-partie un complexe $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $a = \Re z > 0$.

4.2.1 Opérateurs de moyennisation

On a déjà vu lors du théorème 2.8 que les opérateurs \mathcal{L}_t et T_t étaient duaux, dans le sens où pour tout $f \in \mathcal{B}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$,

$$\int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_t f \cdot \varphi = \int_{\mathcal{M}} f \cdot T_t \varphi$$

en employant encore la convention d'écriture $\int_{\mathcal{M}}$ pour l'évaluation de $f \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})^*$ en φ .

On en déduit aisément que pour tout $f, \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ et tout $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $a = \Re z$ strictement positive,

$$\int_{\mathcal{M}} R_z f \cdot \varphi = \int_{\mathcal{M}} \left(\int_0^\infty e^{-zt} \mathcal{L}_t f dt \right) \cdot \varphi = \int_{\mathcal{M}} f \cdot \left(\int_0^\infty e^{-zt} T_t \varphi dt \right).$$

Or, $\left| \int_0^\infty e^{-zt} T_t \varphi dt \right|_{s, \beta} \leq \frac{1}{a} |\varphi|_{s, \beta}$; l'opérateur R_z^* , naturellement défini par dualité sur \mathcal{B}^* , admet donc sur $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ une expression simple, qui se prolonge sur $\mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Explicitement, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, $R_z^* \varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ et

$$R_z^* \varphi = \int_0^\infty e^{-zt} T_t \varphi dt.$$

Il nous faudra de plus des opérateurs de moyennisation, qui serviront à exploiter la régularité hölde-rienne le long des feuilles instables. Commençons par quelques définitions.

On rappelle que δ^u est la distance induite par la structure riemannienne sur W^u , où $\delta^u(x, y) = \infty$ si x et y n'appartiennent pas à la même feuille instable. On note $B_x^u(r)$ la boule ouverte de W_x^u centrée en x et de rayon r pour la distance que l'on vient de définir. Soit enfin $Z_r^u(x)$ l'inverse du volume riemannien de $B_x^u(r)$.

On définit pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ et $0 < \varepsilon < 1$ l'opérateur suivant.

$$\mathbb{A}_\varepsilon^u f(x) := Z_\varepsilon^u(x) \int_{B_x^u(\varepsilon)} f(\xi) d\xi = \int_{W_x^u} Z_\varepsilon^u(x) f(\xi) \mathbb{1}_{\delta^u(x, \xi) < \varepsilon} d\xi$$

De cette façon, $\mathbb{A}_\varepsilon^u \mathbb{1} = \mathbb{1}$.

On cherche à définir l'opérateur dual pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Soit, à $x, \xi \in \mathcal{M}$ fixés dans la même variété instable, l'holonomie $\Psi_{x \rightarrow \xi}^u : W_x^{sc} \rightarrow W_\xi^{sc}$ définie sur un voisinage de x . On sait que le jacobien de cette holonomie est bien défini. On admet le lemme suivant.

Lemme 4.6.

Pour toute fonction continue $F : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\int_{\mathcal{M}} \left(\int_{W_x^u} F(x, \xi) \mathbb{1}_{\delta^u(x, \xi) < \varepsilon} d\xi \right) dx = \int_{\mathcal{M}} \left(\int_{W_x^u} F(\xi, x) \mathbb{1}_{\delta^u(x, \xi) < \varepsilon} J\Psi_{x \rightarrow \xi}^u(x) d\xi \right) dx.$$

On peut donc définir l'opérateur $\mathcal{A}_\varepsilon^u$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ par

$$\mathcal{A}_\varepsilon^u \varphi(x) := \int_{B_x^u(\varepsilon)} Z_\varepsilon^u(\xi) \varphi(\xi) J\Psi_{x \rightarrow \xi}^u(x) d\xi = \int_{W_x^u} Z_\varepsilon^u(\xi) \varphi(\xi) J\Phi_{x \rightarrow \xi}^u(x) \mathbb{1}_{\delta^u(x, \xi) < \varepsilon} d\xi.$$

On constate que pour tout $f, \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\varepsilon^u f \cdot \varphi &= \int_{\mathcal{M}} \left(\int_{W_x^u} Z_\varepsilon^u(x) f(\xi) \mathbb{1}_{\delta^u(x, \xi) < \varepsilon} d\xi \right) \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left(\int_{W_x^u} Z_\varepsilon^u(\xi) \varphi(\xi) \mathbb{1}_{\delta^u(x, \xi) < \varepsilon} J\Phi_{x \rightarrow \xi}^u(x) d\xi \right) f(x) dx \\ &= \int_{\mathcal{M}} f \cdot \mathcal{A}_\varepsilon^u \varphi, \end{aligned}$$

et ces opérateurs sont donc duaux, dans un sens faible. On note au passage que cela implique que $\mathcal{A}_\varepsilon^u$ préserve l'intégrale.⁶

On aimerait prolonger ces opérateurs à des espaces de fonctions ou de distributions plus grands. Ces prolongements ne sont pas évidents, et il faut prendre garde aux espaces sur lesquels ils sont définis : c'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 4.7.

Soit $0 < \varepsilon < 1$.

Il existe $C > 0$ tel que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, on ait $|\mathcal{A}_\varepsilon^u \varphi|_{s,\beta} \leq C |\varphi|_{s,1} + C |\mathrm{d}\varphi(X)|_\infty$. Ainsi, on peut prolonger cet opérateur en $\mathcal{A}_\varepsilon^u : \mathcal{C}_{sc}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ continu, où \mathcal{C}_{sc}^1 est le complété de $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ pour la norme $|\varphi|_{sc,1} := |\varphi|_{s,1} + |\mathrm{d}\varphi(X)|_\infty$.

Il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, on ait $|\mathbb{A}_\varepsilon^u f - f|_{(\mathcal{C}_s^\beta)^*} \leq C \varepsilon^\beta \|f\|$. Ainsi, on peut prolonger cet opérateur en $\mathbb{A}_\varepsilon^u : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})^*$ continu.

Ces opérateurs sont duaux dans le sens où, si $f \in \mathcal{B}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_{sc}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, alors

$$\int_{\mathcal{M}} \mathbb{A}_\varepsilon^u f \cdot \varphi = \int_{\mathcal{M}} f \cdot \mathcal{A}_\varepsilon^u \varphi.$$

Autrement dit, l'opérateur naturel $(\mathcal{A}_\varepsilon^u)^* : \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})^* \rightarrow \mathcal{C}_{sc}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})^*$ coïncide avec \mathbb{A}_ε^u sur \mathcal{B} , et en particulier sa restriction est à valeurs dans $\mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})^*$.

Réciproquement, l'opérateur naturel $(\mathbb{A}_\varepsilon^u)^* : \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})^{**} \rightarrow \mathcal{B}^*$ coïncide avec $\mathcal{A}_\varepsilon^u$ sur $\mathcal{C}_{sc}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, et en particulier sa restriction est à valeurs dans $\mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$.

Démonstration.

Le résultat de dualité se déduit aisément des résultats et considérations précédentes. On admet la continuité de $\mathcal{A}_\varepsilon^u$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$,

$$\int_{\mathcal{M}} (\mathbb{A}_\varepsilon^u f - f) \cdot \varphi \leq V |\mathbb{A}_\varepsilon^u f - f|_\infty |\varphi|_\infty \leq V \|f\|_u \varepsilon^\beta |\varphi|_\infty \leq V \varepsilon^\beta \|f\| |\varphi|_{s,\beta}$$

où V est le volume riemannien de \mathcal{M} , et ainsi, $|\mathbb{A}_\varepsilon^u f - f|_{(\mathcal{C}_s^\beta)^*} \leq V \varepsilon^\beta \|f\|$. □

4.2.2 Régularisation

Le résultat que l'on cherche à montrer est le suivant.

Théorème 4.8.

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$,

$$|\mathcal{A}_\varepsilon^u R_z^* \varphi|_{\mathcal{C}^\beta} \leq C |\varphi|_{s,1}.$$

Ce théorème se déduit immédiatement des lemmes suivants :

Lemme 4.9.

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1$,

$$|R_z^* \varphi|_{sc,1} \leq C |\varphi|_{s,1}$$

Lemme 4.10.

On dispose pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ des inégalités suivantes, où C ne dépend pas de φ :

$$— H_{u,\beta}(\mathcal{A}_\varepsilon^u \varphi) \leq \frac{C}{\varepsilon} |\varphi|_\infty ;$$

6. Il s'agit en fait d'un moyen mnémotechnique : \mathbb{A} préserve $\mathbb{1}$, \mathcal{A} préserve \int .

- $H_{s,\beta}(\mathcal{A}_\varepsilon^u \varphi) \leq C |\varphi|_{s\mathbb{C},1}$;
- $|X(\mathcal{A}_\varepsilon^u \varphi)|_\infty \leq C |\varphi|_{s\mathbb{C},1}$.

Ces estimations délicates ne sont pas démontrées. Le premier lemme se déduit du fait que R_z^* est continu sur $\mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ et réalise une intégrale le long du flot.

Le second est plus subtil. La première estimation vient de la régularité hölderienne de $J\Phi_{x \rightarrow \xi}^u(x)$, tandis que les autres termes sont régularisés par l'intégrale. La seconde utilise les holonomies stables pour se ramener aux cas où φ est régulière, et compense les erreurs commises par décalage dans la direction du flot. La troisième exploite la régularité déjà existante de φ dans la direction du flot et de celle de $J\Phi_{x \rightarrow \xi}^u(x)$ dans cette même direction.

Remarquons, et cet argument est très important, que le résultat du théorème 4.8 a été démontré pour β , mais sa démonstration est valable pour tout $0 < \beta < \tau^2$. En particulier, *on dispose de la même majoration pour tout $\beta < \beta' < \tau^2$.*

4.2.3 Compacité de la résolvante

Ces résultats de régularisation sont maintenant suffisants pour s'attaquer au problème initial de la compacité de la résolvante.

Théorème 4.11.

Soit $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $a = \Re z > 0$. Alors la résolvante $\tilde{R}_z : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_w$ est compacte.

Démonstration.

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de distributions de la boule unité de \mathcal{B} , et montrons que $(R_z f_n)$ admet une valeur d'adhérence dans \mathcal{B}_w . Pour cela, on montre qu'à extraction près, il s'agit d'une suite de Cauchy. Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{M}} (R_z f_n - R_z f_m) \cdot \varphi \right| &\leq \left| \int_{\mathcal{M}} R_z \mathbb{A}_\varepsilon^u (f_n - f_m) \cdot \varphi \right| + \left| \int_{\mathcal{M}} \left(\text{id}_{\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C}_s^\beta)^*} - \mathbb{A}_\varepsilon^u \right) (f_n - f_m) \cdot R_z^* \varphi \right| \\ &\leq \|R_z \mathbb{A}_\varepsilon^u f_n - R_z \mathbb{A}_\varepsilon^u f_m\|_w \cdot |\varphi|_{s,1} \\ &\quad + \left| \left(\text{id}_{\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{C}_s^\beta)^*} - \mathbb{A}_\varepsilon^u \right) (f_n - f_m) \right|_{(\mathcal{C}_s^\beta)^*} \cdot |R_z^* \varphi|_{s,\beta} \end{aligned}$$

et ainsi,

$$\|R_z f_n - R_z f_m\|_w \leq \|R_z \mathbb{A}_\varepsilon^u f_n - R_z \mathbb{A}_\varepsilon^u f_m\|_w + C\varepsilon^\beta \|f_n - f_m\|.$$

On a montré dans le paragraphe précédent que pour tout $0 < \beta' < \tau^2$, l'application $\mathcal{A}_\varepsilon^u R_z^* : \mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^{\beta'}(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ est continue. En fixant $\beta < \beta' < \tau$, et en sachant que $\mathcal{C}^{\beta'}(\mathcal{M}, \mathbb{C}) \hookrightarrow \mathcal{C}^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ est compacte, on se ramène à $\mathcal{A}_\varepsilon^u R_z^* : \mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ compacte.

Par dualité, $R_z^{**} (\mathcal{A}_\varepsilon^u)^* : \mathcal{C}^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})^* \rightarrow \mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})^* = \mathcal{B}_w$ est compacte. Or, pour $f \in \mathcal{B}$,

$$g := (\mathcal{A}_\varepsilon^u)^* f = \mathbb{A}_\varepsilon^u f \in \mathcal{C}_s^\beta(\mathcal{M}, \mathbb{C})^* \subset \mathcal{B}_w$$

et pour $g \in \mathcal{B}_w$,

$$R_z^{**} g = R_z g \in \mathcal{B}_w.$$

Ainsi, $R_z \mathbb{A}_\varepsilon^u : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_w$ est compacte, et à extraction près, $(R_z \mathbb{A}_\varepsilon^u f_n)_{n \geq 0}$ converge.

Par extraction diagonale, à extraction près, $(R_z \mathbb{A}_{1/k}^u f_n)_n$ converge pour tout $k \geq 1$, et ainsi, pour tout $k \geq 1$,

$$\limsup_{n,m \rightarrow \infty} \|R_z f_n - R_z f_m\|_w \leq \limsup_{n,m \rightarrow \infty} \left\| R_z \mathbb{A}_{1/k}^u f_n - R_z \mathbb{A}_{1/k}^u f_m \right\|_w + \limsup_{n,m \rightarrow \infty} 2C \left(\frac{1}{k} \right)^\beta = 2C \frac{1}{k^\beta}$$

et ceci valant pour tout $k \geq 1$, $\limsup_{n,m} \|R_z f_n - R_z f_m\|_w = 0$ le long de cette sous-suite, qui est donc de Cauchy et converge.

On vient de prouver le théorème. □

4.3 Théorème de Hennion

Rappelons le théorème à démontrer.

Théorème 4.12 (Hennion).

Soit \mathcal{B} un espace de Banach, et R un opérateur borné sur \mathcal{B} .

Soit $\iota : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}_w$ une injection continue qui rende $\tilde{R} := \iota \circ R$ compacte.

S'il existe deux suites positives $(A_n)_{n \geq 0}$ et $(B_n)_{n \geq 0}$ telles que

$$\|R^n f\| \leq (A_n)^n \|f\| + B_n \|f\|_w$$

pour tout $n \geq 0$ et $f \in \mathcal{B}$, alors $\rho_{ess}(R) \leq \liminf_n A_n$.

La démonstration du théorème s'appuie sur un théorème de Nussbaum, que l'on ne démontrera pas ici ; on trouve une preuve de ce résultat dans l'article [Nus70].

Théorème 4.13 (Nussbaum).

Soit \mathcal{B} un espace de Banach, et R un opérateur borné sur \mathcal{B} .

Soit $r_n > 0$ l'infimum des rayons $r > 0$ tels que l'image par R^n de la boule unité puisse être recouverte d'un nombre fini de boules de rayon r , c'est-à-dire

$$r_n = \inf \{ r > 0 \mid \exists k \in \mathbb{N}, \exists f_1, \dots, f_k \in \mathcal{B}, R^n B_0(1) \subset B_{f_1}(r) \cup \dots \cup B_{f_k}(r) \}$$

où $B_f(r)$ est la boule ouverte de centre f et de rayon r .

Alors $\lim_n r_n^{1/n} = \inf_n r_n^{1/n} = \rho_{ess}(R)$.

Nous avons alors toutes les armes pour démontrer le théorème de Hennion.

Démonstration.

Soient $\iota : \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{B}_w$ et R vérifiant les hypothèses du théorème.

Soit $r_n > 0$ défini comme dans le théorème de Nussbaum. Un contrôle exponentiel sur r_n se traduira en une majoration de $\rho_{ess}(R)$; fixons donc $n > 0$, et recouvrons l'image de la boule unité. On notera $B_f(r) \subset \mathcal{B}$ (resp. $B_f^w(r) \subset \mathcal{B}_w$) la boule ouverte centrée en f de rayon r pour la norme $\|\cdot\|$ (resp. $\|\cdot\|_w$).

Soit $\varepsilon > 0$, que l'on choisira assez petit par la suite. L'opérateur $\tilde{R} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_w$ étant compact, il existe $f_1, \dots, f_k \in B_0(1)$ telles que $\tilde{R}B_0(1)$ est recouverte par les boules $B_{\tilde{R}f_i}^w(\varepsilon)$.

Soit $f \in B_0(1)$. Il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $\|\tilde{R}f - \tilde{R}f_i\|_w < \varepsilon$, et on peut donc écrire

$$\begin{aligned} \|R^{n+1}f - R^{n+1}f_i\| &\leq (A_n)^n \|R(f - f_i)\| + B_n \|\tilde{R}f - \tilde{R}f_i\|_w \\ &\leq 2\|R\| (A_n)^n + B_n \|\tilde{R}\| \varepsilon \end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon > 0$ tel que $B_n \varepsilon \leq (A_n)^n$ (donc ε dépend de n mais pas de f), pour avoir

$$\|R^{n+1}f - R^{n+1}f_i\| \leq (2\|R\| + \|\tilde{R}\|) (A_n)^n = C (A_n)^n$$

Ainsi, $R^{n+1}B_0(1)$ est recouverte par les boules centrées en les $R^{n+1}f_i$ de rayon $C (A_n)^n$, qui sont en nombre fini. Ceci signifie exactement que l'on a sur r_{n+1} le contrôle exponentiel

$$r_{n+1} \leq C (A_n)^n$$

où C ne dépend pas de n .

D'après le théorème de Nussbaum, on peut donc majorer le rayon spectral essentiel

$$\rho_{ess}(R) = \liminf_n (r_n)^{1/n} \leq \liminf_n \left(C (A_{n-1})^{n-1} \right)^{1/n} = \liminf_n A_n$$

et conclure ainsi la preuve. □

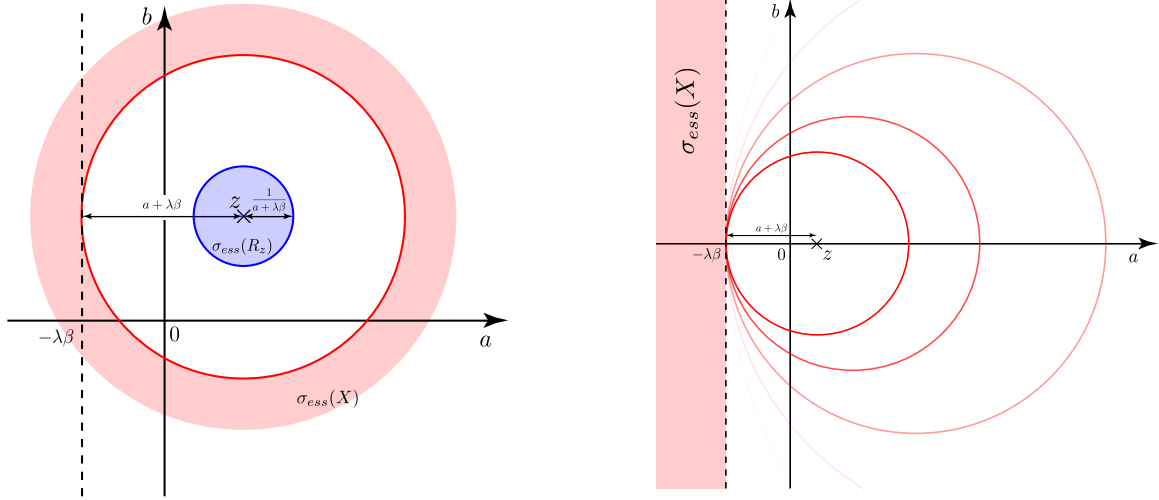


FIGURE 3 – Spectre essentiel de R_z et X

4.4 Spectre essentiel du générateur

Reprenons le raisonnement en cours dans cette partie.

On cherche à contenir le spectre essentiel de X dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C} | \Re z \leq -\lambda\beta\}$. Pour cela, on s'intéresse au spectre essentiel de R_z , directement relié à celui de X par le théorème 3.12.

On a montré dans la partie précédente le théorème 4.1 de Hennion, qui à partir de l'inégalité de Lasota-Yorke (théorème 4.5) et de la compacité de la résolvante à valeur dans un espace plus faible (théorème 4.11) majore le rayon essentiel de la résolvante. Appliqué à notre problème, le théorème nous donne exactement le résultat suivant.

Corollaire 4.14.

Le rayon spectral essentiel ρ_{ess} de la résolvante R_z vérifie, pour $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $a = \Re z > 0$,

$$\rho_{ess}(R_z) \leq \frac{1}{a + \lambda\beta}$$

Pour conclure, on veut transformer notre résultat sur R_z en une description du spectre de X . D'après le résultat 3.12, confiner le spectre essentiel de R_z à l'intérieur d'un disque centré en 0, c'est exactement restreindre celui de X à l'extérieur d'un disque centré en z . De plus, ce cercle centré en 0 est tangent à la droite $\Re z = -\lambda\beta$, comme l'indique la figure 3.

Lorsque z décrit les complexes de partie réelle strictement positive, on confine le spectre essentiel de X au demiplan des nombres complexes de partie réelle inférieure à $-\lambda\beta$. Autrement dit, et toujours selon la figure 3,

$$\sigma_{ess}(X) = \bigcap_{z | \Re z > 0} F_z \sigma_{ess}(R_z) \subset \bigcap_{z | \Re z > 0} F_z \overline{B_0} \left(\frac{1}{a + \lambda\beta} \right) = \bigcap_{z | \Re z > 0} {}^c B_z(a + \lambda\beta) = \{z \in \mathbb{C} | \Re z \leq -\lambda\beta\}.$$

On a donc démontré le

Théorème 4.15.

Le spectre essentiel $\sigma_{ess}(X)$ de X est inclus dans $\{z \in \mathbb{C} | \Re z \leq -\lambda\beta\}$.

Le spectre essentiel est alors restreint comme prévu lors de l'exposition. Il ne reste plus qu'à étudier le spectre discret ; c'est l'objectif de la partie suivante.

5 Spectre discret et inégalité de Dolgopyat

L'objectif de cette partie est de contrôler le spectre discret de X . Lors de la résolution formelle, dans la partie 2.4, on a supposé deux types de résultats, le premier concernant la résolvante à grande partie imaginaire et faible partie réelle ; le second concernant les valeurs spectrales imaginaires pures.

On attendra la dernière partie pour traiter le spectre purement imaginaire, c'est-à-dire la partie 5.4. On se concentre jusque là sur le premier point.

On veut contrôler les valeurs spectrales de X de grande partie imaginaire, et on va encore une fois s'intéresser à celles de R_z . L'objectif est d'avoir, pour $z = a + ib$ de partie imaginaire $b = \Im z$ assez grande en valeur absolue, un rayon spectral uniformément plus petit que $\frac{1}{a}$, qui est la borne donnée par la norme de R_z . On s'attend à ce type de majoration, puisque lorsque b est grand en valeur absolue, $R_z f = \int_0^\infty e^{-ibt} e^{-at} \mathcal{L}_t f dt$ ressemble à une transformée de Fourier, donc tend vers 0 en l'infini.

En s'inspirant de la formule donnée par le théorème 3.10, on va évaluer la norme de l'opérateur R_z^n pour n grand ; voici donc le résultat que l'on cherche à prouver.

Théorème 5.1.

Soit $z \in \mathbb{C}$ de parties réelle et imaginaire $a = \Re z$ et $b = \Im z$ respectivement.

Il existe des constantes $B > 1$, $c > 0$ et $0 < \nu < 1$ indépendantes de z telles que si $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$, $|b| > B$ et $n \geq c \ln |b|$, alors⁷

$$\|R_z^n\| \leq \left(\frac{\nu}{a}\right)^n.$$

Ce résultat, qui constitue le cœur de ce rapport, est assez ardu à démontrer. Il repose sur l'inégalité dite de Dolgopyat, technique et invoquant de nombreux résultats de géométrie d'Anosov et de contact.

On en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 5.2.

Il existe $B > 1$ et $0 < \nu < 1$ tels que les valeurs spectrales de X sont à l'extérieur de l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re z > -(\nu^{-1} - 1) \text{ et } |\Im z| > B\}$.

Démonstration.

En s'inspirant du raisonnement sur le spectre essentiel (voir par exemple figure 3), il suffit de montrer que pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $|b| > B$ et $a = 1$, le spectre de R_z est contenu dans un cercle de centre 0 et de rayon $\frac{\nu}{a}$. Or, pour B et ν donnés par le théorème précédent, on a d'après le théorème 3.10

$$\rho(R_z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|R_z^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\nu}{a}\right)^{n \frac{1}{n}} = \frac{\nu}{a},$$

ce qui conclut le corollaire. □

Si l'on arrive à montrer le théorème 5.1, alors on aura traité le cas des valeurs spectrales de petite partie imaginaire et de grande partie réelle.

Essayons de démontrer le théorème 5.1. Dans la partie 5.1, on se ramène à un problème de majoration d'intégrale. Ladite majoration est en fait l'inégalité de Dolgopyat, dont on donne une impression dans la partie 5.2 à l'aide des outils de la partie 5.3.

Bien qu'il soit complexe de donner une intuition des mécanismes à l'œuvre dans cette majoration, on peut dire qu'il s'agit d'un phénomène de moyennisation de type intégrale oscillante, qui repose sur la non-intégrabilité des feuilletages stable et instable, rendue quantitative par la forme de contact.

7. L'hypothèse sur a pourrait être beaucoup réduite, mais suffira amplement à la suite de la preuve (le cas $a = 1$ pourrait même être le seul effectivement utile) ; changer les bornes de l'énoncé conduirait simplement à changer aussi la valeur de $c > 0$.

5.1 Reformulation du problème

Puisque l'on aura besoin d'outils un peu particuliers, il est plus efficace de s'intéresser à la norme de $R_z^n : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_w$; on rappelle que l'espace \mathcal{B}_w , défini en 4.2, est l'espace de distributions dual de $\mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$.

Le théorème 5.1 viendra en corollaire de l'inégalité suivante : il existe $c, C > 0$, $B > 1$ et $0 < \nu < 1$ indépendants de z tels que si $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$, $|b| > B$ et $n \geq c \ln |b|$, alors pour tout $f \in \mathcal{B}$,

$$\|R_z^n f\|_w \leq C \left(\frac{\nu}{a}\right)^n \|f\|.$$

Les constantes en jeu ne sont pas les mêmes que celles annoncées dans le théorème.

Les manipulations que l'on aimerait pouvoir effectuer sont rendues délicates par l'usage des distributions ; plutôt que de raisonner par densité, il est plus aisé de se placer sur l'espace antédual des fonctions $\mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. Soit donc $\varphi \in \mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, et étudions $|(R_z^*)^n \varphi|_{s,\beta}$. On cherche une majoration du type suivant, dual de ce que l'on a trouvé plus haut.

$$|(R_z^*)^n \varphi|_{s,\beta} \leq C \left(\frac{\nu}{a}\right)^n |\varphi|_{s,1} \quad (1)$$

où les hypothèses sur z , n et les constantes sont identiques.

Puisque $H_{s,\beta}(T_t \varphi) \leq e^{-\lambda\beta t} H_{s,\beta}(\varphi)$ d'après le théorème 2.7, et en utilisant l'expression de R_z^* démontrée dans la partie 4.2.1,

$$H_{s,\beta}(R_z^* \varphi) \leq \int_0^\infty e^{-at} H_{s,\beta}(T_t \varphi) dt \leq \int_0^\infty e^{-at} e^{-\lambda\beta t} H_{s,\beta}(\varphi) dt = \frac{1}{a + \lambda\beta} H_{s,\beta}(\varphi)$$

et ainsi $H_{s,\beta}((R_z^*)^n \varphi) \leq (a + \lambda\beta)^{-n} H_{s,1}(\varphi)$.

La difficulté réside donc dans l'estimation de la norme infinie. L'inégalité de Dolgopyat comble ce manque.

Théorème 5.3 (Inégalité de Dolgopyat).

Il existe $c, C, \gamma > 0$ et $B > 1$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ et $|b| > B$, et $n \geq c \ln |b|$, on ait

$$|(R_z^*)^n \varphi|_\infty \leq C \frac{1}{a^n} |b|^{-\gamma n} |\varphi|_{s,1}.$$

Jusqu'à la fin de cette sous-partie, les constantes c, C, B, γ sont celles données par ce théorème. Elles peuvent être différentes de celles évoquées précédemment.

L'inégalité de Dolgopyat sera discutée dans la partie suivante. Supposons-la démontrée et prouvons le théorème 5.1.

Démonstration. Théorème 5.1.

On commence par montrer l'inégalité (1).

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ et $|b| > B$, et $n \geq c \ln |b|$.

$$|(R_z^*)^n \varphi|_{s,\beta} \leq \frac{1}{a^n} \left(\left(\frac{a}{a + \lambda\beta} \right)^n + C |b|^{-\gamma n} \right) |\varphi|_{s,1} \leq \frac{1}{a^n} \left((1 + a^{-1} \lambda\beta)^{-n} + C n e^{-\frac{\gamma}{c} n} \right) |\varphi|_{s,1}$$

et ainsi, pour tout $\nu < 1$ strictement plus grand que $(1 + \frac{1}{2} \lambda\beta)^{-1}$ et $e^{-\frac{\gamma}{c}}$,

$$|(R_z^*)^n \varphi|_{s,\beta} \leq C' \left(\frac{\nu}{a}\right)^n |\varphi|_{s,1}$$

où $C' > 0$ est une constante. L'inégalité (1) est donc vérifiée sous les mêmes hypothèses que l'inégalité de Dolgopyat.

On en déduit immédiatement l'inégalité duale

$$\|R_z^n f\|_w = \sup_{|\varphi|_{s,1} \leq 1} \int_{\mathcal{M}} R_z^n f \cdot \varphi = \sup_{|\varphi|_{s,1} \leq 1} \int_{\mathcal{M}} f \cdot (R_z^*)^n \varphi \leq \sup_{|\varphi|_{s,1} \leq 1} \|f\| |(R_z^*)^n \varphi|_{s,\beta} \leq C' \left(\frac{\nu}{a}\right)^n \|f\|.$$

Pour relier la norme forte de $R_z^n f$ et la norme faible de f , l'outil le plus efficace que nous ayons à disposition est l'inégalité de Lasota-Yorke, démontrée au théorème 4.5. Rappelons son contenu.

Soit $0 < \beta' < \beta$. Il existe une constante C_{LY} telle que pour tout $f \in \mathcal{B}$ et $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $a = \Re z > 0$,

$$\|R_z^n f\| \leq \frac{C_{LY}}{(a + \lambda\beta')^n} \|f\| + \frac{C_{LY}}{a^n} \|f\|_w.$$

Anisi, si $n = k + l$ où $l \geq c \ln |b|$,

$$\begin{aligned} \|R_z^n f\| &\leq \frac{C_{LY}}{(a + \lambda\beta')^k} \|R_z^l f\| + \frac{C_{LY}}{a^k} \|R_z^l f\|_w \\ &\leq \frac{C_{LY}}{(a + \lambda\beta')^k a^l} \|f\| + \frac{C_{LY} C'}{a^k} \left(\frac{\nu}{a}\right)^l \|f\|_w \\ &\leq \frac{1}{a^n} \left(C_{LY} (1 + a^{-1} \lambda\beta')^{-k} + C_{LY} C' \nu^l \right) \|f\|. \end{aligned}$$

Soit donc $c' = 2c$ et $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ et $|b| > B$, tout $n \geq c' \ln |b|$ et $f \in \mathcal{B}$, on a $l \geq \frac{n}{2} \geq c \ln |b|$, et

$$\begin{aligned} \|R_z^n f\| &\leq \frac{1}{a^n} \left(C_{LY} (1 + a^{-1} \lambda\beta')^{-k} + C_{LY} C' \nu^l \right) \|f\| \\ &\leq \frac{1}{a^n} \left(C_{LY} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \lambda\beta'\right)^{-\frac{1}{2}(n-1)} + C_{LY} C' \nu^{\frac{1}{2}n} \right) \|f\| \end{aligned}$$

z

Or, si l'on fixe $0 < \nu' < 1$ strictement plus grand que $(1 + \frac{1}{2} \lambda\beta')^{-\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{\nu}$, il existe $B' > B$ tel que pour tout $n \geq c' \ln B'$,

$$\left(\frac{1}{\nu'}\right)^n \left(C_{LY} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda\beta'\right)^{-\frac{1}{2}(n-1)} + C_{LY} C' \sqrt{\nu}^n \right) \leq C_{LY} \left(\nu' \sqrt{1 + \frac{1}{2} \lambda\beta'} \right)^{-n} + C_{LY} C' \left(\frac{\sqrt{\nu}}{\nu'}\right)^n \leq 1$$

et ainsi, pour tout $f \in \mathcal{B}$, $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $\frac{1}{2} \leq a \leq 2$ et $|b| > B'$, et $n \geq c' \ln |b|$, on obtient

$$\|R_z^n f\| \leq \left(\frac{\nu'}{a}\right)^n \|f\|,$$

ce qui était attendu et conclut la preuve. \square

5.2 Inégalité de Dolgopyat

Rappelons l'inégalité de Dolgopyat, introduite au théorème 5.3.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_s^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$ de partie réelle $a = \Re z > 0$ et $n \geq 0$. Soit $x \in \mathcal{M}$. On cherche à obtenir une majoration du type

$$|(R_z^*)^n \varphi(x)| \leq \frac{C}{a^n} |b|^{-\gamma n} |\varphi|_{s,1}.$$

Cette preuve est particulièrement technique. On ne va pas essayer d'en donner une preuve ici, mais on aimerait toucher du doigt le mécanisme qui rend cette majoration possible.

On admet que, au lieu de calculer directement la valeur de cette fonction en un point, il suffit d'exprimer son intégrale contre une fonction particulière. Soit donc $x \in \mathcal{M}$, et $f \in \mathcal{C}^\tau(W_x^u(\varepsilon), \mathbb{C})$; on cherche à évaluer cette intégrale.

$$\int_{W_x^u(\varepsilon)} (R_z^*)^n \varphi(y) f(y) dy$$

Localisons en temps et en espace, selon un noyau p à support compact en temps, et une partition de l'unité $(\rho_{i,r})_{1 \leq i \leq I_r}$ dont les supports sont de diamètre au plus r . On peut alors effectuer un changement de variables pour considérer la variable de temps proche d'un entier fixé, et intégrer sur la variété $T_k W_x^u$ dilatée par le flot.

$$\begin{aligned} & \int_{W_x^u(\varepsilon)} (R_z^*)^n \varphi(y) f(y) dy \\ &= \int_{W_x^u(\varepsilon)} \left(\int_0^\infty e^{-zt} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} (T_t \varphi)(y) dt \right) f(y) dy \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_0^\infty p(t-k) e^{-zt} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \left(\sum_{1 \leq i \leq I_r} \int_{W_x^u(\varepsilon)} \rho_{i,r}(T_t y) \varphi(T_t y) f(y) dy \right) dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-zk} \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{1 \leq i \leq I_r} \int_0^\infty \int_{W_x^u(\varepsilon)} p(t) e^{-zt} \left(1 + \frac{t}{k} \right)^{n-1} \rho_{i,r}(T_{t+k} y) \varphi(T_{t+k} y) f(y) dy dt \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} e^{-zk} \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{1 \leq i \leq I_r} \int_0^\infty \int_{T_k W_x^u(\varepsilon)} p(t) e^{-zt} \left(1 + \frac{t}{k} \right)^{n-1} \rho_{i,r}(T_t y) \varphi(T_t y) f(T_{-k} y) J^u T_{-k}(y) dy dt \end{aligned}$$

où $J^u T_t$ est le jacobien de T_t restreint à la direction instable.

L'idée est alors de voir le couple (t, y) comme une variable unique à valeur dans W_x^{uc} ; on pose $\Phi : (t, y) \mapsto T_t y$, d'image W_k^{uc} lorsque (t, y) parcourt le support de $(p, \rho_{i,r})$.

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_{T_k W_x^u(\varepsilon)} p(t) e^{-zt} \left(1 + \frac{t}{k} \right)^{n-1} \rho_{i,r}(T_t y) \varphi(T_t y) f(T_{-k} y) J^u T_{-k}(y) dy dt \\ &= \int_{W_k^{uc}} p(t(\xi)) e^{-zt(\xi)} \left(1 + \frac{t(\xi)}{k} \right)^{n-1} \rho_{i,r}(\xi) \varphi(\xi) f(T_{-k} y(\xi)) J^u T_{-k}(y(\xi)) J(\Phi^{-1})(\xi) d\xi \\ &= \int_{W_k^{uc}} p(t(\xi)) e^{-zt(\xi)} \left(1 + \frac{t(\xi)}{k} \right)^{n-1} \rho_{i,r}(\xi) \varphi(\xi) f(T_{-k} y(\xi)) J^u T_{-(k+t(\xi))}(y(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

On s'est donc ramené à une intégrale sur une portion de variété instable faible, qui augmente en volume lorsque k augmente. En un sens, cette variété s'enroule dans \mathcal{M} , et localement, elle s'apparente à un mille-feuille.

Il est alors utile de se souvenir que l'on a localisé en espace; pour $r > 0$ assez petit, les holonomies stables sont bien définies sur les supports des $\rho_{i,r}$. À $0 \leq i \leq I_r$ fixé, les composantes connexes de W_k^{uc} intersectées avec le support de $p\rho_{i,r}$ sont des portions de feuilles, sur lesquelles les holonomies stables sont bien définies. On note $\mathcal{W}_{k,i}$ l'ensemble de ces composantes connexes, et on fixe dans chaque $\mathcal{W}_{k,i}$ une feuille de référence $W_{k,i}$.

Pour W et W' dans $\mathcal{W}_{k,i}$, on note $\Psi_W^{W'}$ l'holonomie stable de W vers W' .

$$\begin{aligned}
& \int_{W_k^{uc}} p(t(\xi)) e^{-zt(\xi)} \left(1 + \frac{t(\xi)}{k}\right)^{n-1} \rho_{i,r}(\xi) \varphi(\xi) f(T_{-k}u(\xi)) J^u T_{-(k+t(\xi))}(u(\xi)) d\xi \\
&= \sum_{W \in \mathcal{W}_{k,i}} \int_W p(t(\xi)) e^{-zt(\xi)} \left(1 + \frac{t(\xi)}{k}\right)^{n-1} \rho_{i,r}(\xi) \varphi(\xi) f(T_{-k}u(\xi)) J^u T_{-(k+t(\xi))}(u(\xi)) d\xi \\
&= \sum_{W \in \mathcal{W}_{k,i}} \int_W e^{-ibt(\xi)} \varphi(\xi) F_{k,i,W}(\xi) d\xi \\
&= \sum_{W \in \mathcal{W}_{k,i}} \int_{W_{k,i}} e^{-ibt(\Psi_{W_{k,i}}^W \xi)} \varphi(\Psi_{W_{k,i}}^W \xi) F_{k,i,W}(\Psi_{W_{k,i}}^W \xi) J \Psi_{W_{k,i}}^W(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

où l'on a posé $F_{k,i,W}(\xi) = p(t(\xi)) e^{-at(\xi)} \left(1 + \frac{t(\xi)}{k}\right)^{n-1} \rho_{i,r}(\xi) f(T_{-k}y(\xi)) J^u T_{-(k+t(\xi))}$.

Le terme qui nous intéresse vient d'apparaître : il s'agit de l'exponentielle oscillante. Pour b grand, si l'on arrive à montrer que $t(\Psi_{W_{k,i}}^W \xi)$ varie assez vite lorsque l'on intègre selon ξ , cette intégrale sera décroissante en une puissance dépendant de la régularité de $F_{k,i,W}$.

Si l'on ne va pas plus loin dans cette preuve, il est quand même intéressant de voir en action la non intégrabilité de $E^u \oplus E^s$, qui joue un rôle primordial dans la suite du raisonnement. C'est ce que l'on aborde dans la partie suivante.

5.3 Non intégrabilité et distance temporelle

Dans cette partie, on exploite la structure de contact préservée par le flot, afin de démontrer le théorème 5.5, central dans la démonstration de l'inégalité de Dolgopyat.

Soit $x \in \mathcal{M}$. Par définition, $T_x \mathcal{M} = E_x^u \oplus E_x^c \oplus E_x^s$, et en particulier W_x^u et W_x^{sc} (resp. W_x^{uc} et W_x^s) sont transverses en x .

Soient y et y' proches de x . Dans un voisinage de x , les variétés intégrales W_y^s et $W_{y'}^{uc}$ s'intersectent en un unique point proche de x , comme on le voit sur la figure 4 ; appelons-le z . Pour donner une image, si les feuilles étaient des sous-espaces vectoriels d'un espace \mathcal{M} , z serait la projection de y sur $(y' - x) + E_x^{uc}$ parallèlement à E_x^s : on suit la direction stable jusqu'à atteindre $W_{y'}^{uc}$.

Or, les feuilles en question ont un comportement très différent d'espaces vectoriels, puisque la distribution $E^u \oplus E^s$ n'est pas intégrable. Le point z est un des outils qui va nous permettre de mesurer ce phénomène qualitativement.

On définit le point z' de la même manière : c'est l'unique intersection dans un voisinage de x de W_y^{sc} et $W_{y'}^u$, donc le point sur lequel on aboutit en suivant la direction instable en partant de y' jusqu'à atteindre W_y^{sc} .

Reformulons tout ceci rigoureusement.

Théorème 5.4.

Soit $x \in \mathcal{M}$. Il existe $\varepsilon, \delta > 0$ tel que pour tous $y, y' \in \mathcal{M}$ à distance au plus ε de x , les points $z = \Psi_{W_y^{uc}(\delta) \rightarrow W_{y'}^{uc}(\delta)}^s(y)$ et $z' = \Psi_{W_{y'}^{sc}(\delta) \rightarrow W_y^{sc}(\delta)}^u(y')$ sont bien définis.

Ces deux points appartiennent à l'ensemble $W_y^{sc}(\delta) \cap W_{y'}^{uc}(\delta)$; or, pour δ assez petit, cet ensemble est une courbe tangente à E^c . Il existe donc un temps $\Delta(y, y')$ tel que

$$z' = T_{\Delta(y, y')} z.$$

On l'appelle distance temporelle entre y et y' .

Lorsque $y \in W_x^u(\varepsilon)$ et $y' \in W_x^s(\varepsilon)$, on s'attend à ce que les points z et z' soient proches. En fait, si la distribution $E^u \oplus E^s$ était intégrable, ils seraient confondus. Ainsi, cette distance nous permet d'estimer

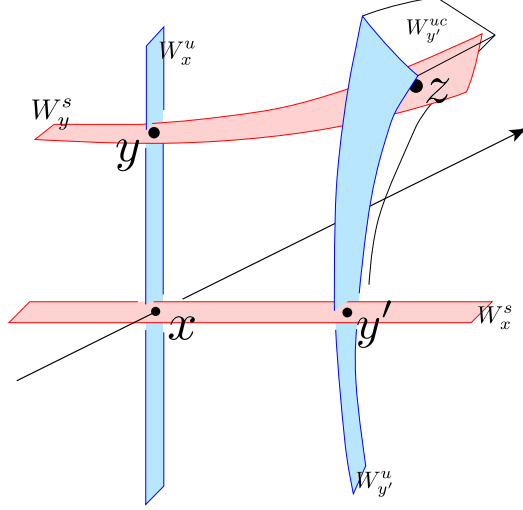


FIGURE 4 – Construction du point z

quantitativement la non intégrabilité de la distribution. Le lemme suivant, résultat principal de cette partie, donne une telle estimation.

Lemme 5.5.

Soient $x \in \mathcal{M}$, $v \in E_x^u$ et $v' \in E_x^s$.

$$\Delta(\exp_x^u v, \exp_x^s v') = d\alpha(v, v') + O\left(\|v\|^{\tau^2} \|v'\|^2 + \|v'\|^{\tau^2} \|v\|^2\right)$$

Autrement dit, il existe $C > 0$ ne dépendant d'aucune de ces variables telle que

$$|\Delta(\exp_x^u v, \exp_x^s v') - d\alpha(v, v')| \leq C\left(\|v\|^{\tau^2} \|v'\|^2 + \|v'\|^{\tau^2} \|v\|^2\right)$$

On présente les grandes lignes de la démonstration. Les premières étapes, techniques à décrire, sont illustrées figure 5. Notons aussi que l'on a représenté un espace à trois dimension, ce qui impose que les distributions stables et instables sont confondues avec les courbes tracées sur elles. Pour une illustration moins biaisée, on pourra consulter la figure 4, sur laquelle on a tenté de décrire une variété \mathcal{M} de dimension 5.

Démonstration.

Soit $x \in \mathcal{M}$.

Soit Θ l'application lisse $E_x^u \times E_x^s \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$ qui envoie (u, s, t) sur $T_t \varphi^{-1}(\varphi(\exp_x^u(u)) + \varphi(\exp_x^s(s)))$ où $\varphi : \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$ est une carte qui envoie x sur 0. Sa différentielle en 0 vérifie $d\Theta_0(u, 0, 0) = u$, $d\Theta_0(0, s, 0) = s$ et $d\Theta_0(0, 0, t) = tX$, elle est donc surjective. Les variétés considérées étant de même dimension, elle est inversible, et sa réciproque est un système de coordonnées locales. Puisque les quantités étudiées sont locales, on peut identifier la variété à un ouvert de cet espace vectoriel. On notera donc $(u, s, t) \in E_x^u \times E_x^s \times \mathbb{R}$ les points de \mathcal{M} , et on identifiera les espaces tangents. Soient donc $y = (v, 0, 0) = \exp_x^u(v)$ et $y' = (0, v', 0) = \exp_x^s(v')$.

Il faut prendre garde au fait que les variétés W^u et W^s ne sont pas les sections $E^u \times \{(s, t)\}$ et $\{u\} \times E^s \times \{t\}$. En fait, puisque les variétés faibles sont lisses, il existe deux fonctions lisses U et S telles que $W_y^{sc} = \{(U(s), s, t), s \in E_x^s, t \in \mathbb{R}\}$ et $W_{y'}^{uc} = \{(u, S(u), t), u \in E_x^u, t \in \mathbb{R}\}$.

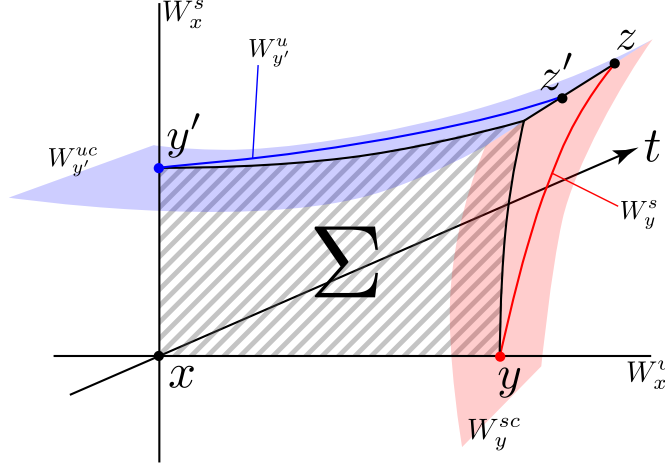


FIGURE 5 – Distance temporelle

Soit $\Phi : [0, 1]^2 \rightarrow \mathcal{M}$ telle que si $(u, s, t) = \Phi(a, b)$, alors $(u, s, t) = (aU(s), bS(u), 0)$. On peut démontrer son existence par inversion locale. On définit alors les courbes $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 comme l'image des courbes décrivant le contour du carré $[0, 1]^2$ à vitesse 1. Ce sont sur la figure 5 les courbes qui bordent l'image Σ de Φ .

Pour tout a , $\Phi(a, 0) \in W_x^u$ donc γ_1 est à valeurs dans W_x^u . De même, γ_4 est à valeurs dans W_x^s . De plus, pour tout a , $\Phi(a, 1) \in W_{y'}^{uc}$, donc γ_3 est à valeurs dans $W_{y'}^{uc}$. De même, γ_2 est à valeurs dans W_y^{sc} .

On peut projeter γ_3 sur $\Gamma_{y'}$ à valeurs dans $W_{y'}^u$ en suivant les trajectoires du flot. Puisque $\gamma_3(0) = \gamma_2(1) \in W_y^{sc}$, $\Gamma_{y'}(0)$ est aussi un point de W_y^{sc} ; il s'agit donc de z' . De même, on projette γ_2 sur Γ_y à valeurs dans W_y^s , et on constate que $\Gamma_y(1) = z$.

Par définition, la courbe Γ_c partant de z et suivant le flot pendant un temps $\Delta(y, y')$ (éventuellement négatif, on suit alors le flot inverse) relie z à z' . En fait, $\Delta(y, y') = \int_{\Gamma_c} \alpha$ puisque $\alpha(-X) \equiv 1$, et ainsi,

$$\Delta(y, y') = \int_{\Gamma_c} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha + \int_{\Gamma_y} \alpha + \int_{\Gamma_c} \alpha + \int_{\Gamma_{y'}} \alpha + \int_{\gamma_4} \alpha$$

puisque α est nulle sur les variétés stables et instables. De plus, les courbes $\Gamma_y, t \mapsto T_t z$ et γ_2 délimitent un triangle de W_y^{sc} ; choisissons un tel T_y , qui n'est pas unique *a priori*. De même, soit $T_{y'}$ un triangle de $W_{y'}^{uc}$ délimité par $\Gamma_{y'}, \gamma_3$ et $t \mapsto T_t z$. On rappelle que Σ est la surface image de $[0, 1]^2$ par Φ .

Comme on le voit sur la figure, $\Sigma \cup T_y \cup T_{y'}$ est une surface dont le bord est le contour d'intégration décrit plus haut. Ainsi, en choisissant les orientations convenables,

$$\Delta(y, y') = \int_{\gamma_1} \alpha + \int_{\Gamma_y} \alpha + \int_{\Gamma_c} \alpha + \int_{\Gamma_{y'}} \alpha + \int_{\gamma_4} \alpha = \int_{\Sigma} d\alpha + \int_{T_y} d\alpha + \int_{T_{y'}} d\alpha = \int_{\Sigma} d\alpha$$

puisque $d\alpha$ restreinte à $E^u \oplus E^c$ et $E^s \oplus E^c$ est nulle.

On s'est donc ramené à l'expression suivante :

$$\Delta(y, y') = \int_{[0, 1]^2} \Phi^* d\alpha \simeq d\alpha_0 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a}(0), \frac{\partial \Phi}{\partial b}(0) \right) = d\alpha_0(U(0), S(0)) = d\alpha_x(v, v').$$

Notons l'emploi du signe \simeq , que l'on ne précise pas plus. L'estimation annoncée vient de calculs de cette erreur, basés sur un examen précis des fonctions U et S . \square

Ce lemme permet en pratique de borner inférieurement les oscillations de l'exponentielle déjà évoquée, et de mettre en évidence un phénomène de compensation. Il permet aussi de montrer qu'une fonction constante sur les feuilles stables et instables est constante presque partout ; en effet, faire des boucles le long des feuilles stables et instables revient en fait à suivre la direction du flot. La fonction est alors constante localement, puisque l'on peut suivre sans faire varier sa valeur les distributions E^u , E^s ou E^c . Ce résultat devient très intéressant au vu du théorème suivant.

Théorème 5.6.

Soit T un flot d'Anosov sur \mathcal{M} compacte. Si toute fonction $f \in L^2(\mathcal{M}, \mathbb{C})$ constante sur W^s et W^u presque partout est constante globalement, alors T est mélangeante.

Ce théorème est démontré dans un cadre très général dans l'article (très élégant) [Cou07].

Par constante sur W^s presque partout, on entend qu'il existe un ensemble $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ de mesure pleine tel que si $x, y \in \mathcal{M}_0$ sont dans la même variété stable, alors $f(x) = f(y)$. On peut déduire du lemme 5.5 les hypothèses du théorème, et alors on a prouvé que le système est mélangeant.

On n'en dira pas plus quant à la démonstration du théorème 5.1 et de l'inégalité de Dolgopyat. La fin de la partie s'intéresse à la caractérisation du spectre imaginaire pur de X .

5.4 Spectre imaginaire pur

Le dernier résultat que l'on a annoncé lors de la résolution formelle concerne le spectre imaginaire pur de X ; il s'agit du théorème suivant.

Théorème 5.7.

Le spectre imaginaire pur de X est réduit à $\{0\}$.

De plus, \mathcal{B} se décompose en $\mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \{f \in \mathcal{B} \mid \int_{\mathcal{M}} f = 0\} = \mathbb{C}\mathbf{1} \oplus \mathcal{B}^0$, et X restreint à \mathcal{B}^0 n'a pas de valeur spectrale en 0.

Démonstration.

Soit par l'absurde $\mathbf{i}b$ une valeur spectrale de X restreint à \mathcal{B}^0 . Puisque $\mathbf{i}b$ n'appartient pas au spectre essentiel, $\mathbf{i}b$ est une valeur propre de X , et il existe $f \in \mathcal{B}^0 \setminus \{0\}$ telle que $Xf = \mathbf{i}bf$.

Montrons que $\mathcal{L}_t f = e^{\mathbf{i}bt} f$. On sait que $\frac{d}{dt} \mathcal{L}_t f = \mathcal{L}_t Xf = \mathbf{i}b \mathcal{L}_t f$; de plus, $\frac{d}{dt} (e^{\mathbf{i}bt} f) = \mathbf{i}b (e^{\mathbf{i}bt} f)$. Ainsi, ces deux fonctions sont solutions de $y' = \mathbf{i}by$ et $y(0) = f$. Par unicité, $\mathcal{L}_t f = e^{\mathbf{i}bt} f$. On en déduit immédiatement que sa norme $\|\cdot\|_u$ est nulle :

$$\|f\|_u = \|e^{\mathbf{i}bt} f\|_u = \|\mathcal{L}_t f\|_u \leq e^{-\lambda\beta t} \|f\|_u \rightarrow 0$$

Pour la norme stable, soient $\varphi, \tilde{f} \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$. On impose de plus $\int_{\mathcal{M}} \tilde{f} = 0$.

$$\left| \int_{\mathcal{M}} f \varphi \right| = \left| \int_{\mathcal{M}} e^{\mathbf{i}bt} f \varphi \right| = \left| \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}_t f \varphi \right| \leq \|f - \tilde{f}\| |T_t \varphi|_{s,\beta} + \int_{\mathcal{M}} \tilde{f} \cdot T_t \varphi$$

Or, on a prouvé dans la partie précédente que T est mélangeant : l'intégrale tend donc vers 0, et on constate en choisissant $\|f - \tilde{f}\| \rightarrow 0$ que la norme stable de f est nulle aussi. Notons que si l'on peut approcher f par des fonctions de $\mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, il n'est pas évident que ce résultat soit vrai en imposant $\int_{\mathcal{M}} \tilde{f} = 0$. Cependant, on constate facilement que si $(f_n)_n$ tend vers f avec $f_n \in \mathcal{C}^1(\mathcal{M}, \mathbb{C})$, alors $(f_n - \frac{1}{V} \int_{\mathcal{M}} f_n)_n$ en fait autant et est d'intégrale nulle.

Il y a donc absurdité, et le théorème est démontré. \square

Ce résultat étant la dernière hypothèse faite lors de la résolution formelle, il conclut alors la preuve du mélange exponentiel.

Références

- [ABT15] Jürgen Angst, Ismaël Bailleul, and Camille Tardif. Kinetic brownian motion on riemannian manifolds. *Electron. J. Probab.*, 20 :40 pp., 2015.
- [Cou07] Yves Coudene. On invariant distributions and mixing. *Ergodic Theory Dyn. Syst.*, 27(1) :109–112, 2007.
- [Dyn65] E.B. Dynkin. *Markov processes. Vols. I, II. Translated with the authorization and assistance of the author by J. Fabius, V. Greenberg, A. Maitra and G. Majone.* 1965.
- [Gou15] Sebastien Gouezel. Limit theorems in dynamical systems using the spectral method. *Hyperbolic dynamics, fluctuations and large deviations*, 89 :161–193, 2015.
- [Hal56] P.R. Halmos. Lectures on ergodic theory. (Publications of the Mathematical Society of Japan, No. 3.) The Mathematical Society of Japan VII, 99 p. (1956)., 1956.
- [Hen93] Hubert Hennion. Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens. *Proc. Am. Math. Soc.*, 118(2) :627–634, 1993.
- [Kat84] Tosio Kato. *Perturbation theory for linear operators. 2nd corr. print. of the 2nd ed.* 1984.
- [KH97] Anatole Katok and Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplement by Anatole Katok and Leonardo Mendoza.* Cambridge : Cambridge University Press, 1997.
- [Liv96] Carlangelo Liverani. Central limit theorem for deterministic systems. In *1st international conference on dynamical systems, Montevideo, Uruguay, 1995 - a tribute to Ricardo Mañé. Proceedings*, pages 56–75. Harlow : Longman, 1996.
- [Liv04] Carlangelo Liverani. On contact Anosov flows. *Ann. Math. (2)*, 159(3) :1275–1312, 2004.
- [Nus70] R.D. Nussbaum. The radius of the essential spectrum. *Duke Math. J.*, 37 :473–478, 1970.