# Théorème de Riesz-Markov

Pierre Perruchaud

Décembre 2016

Étant donné un espace topologique $S$, on note $\mathcal{C}_c(S)$ l'algèbre des fonctions réelles continues à support compact sur $S$, muni de la norme uniforme. On note $\mathcal{C}_c^+(S)$ le cône convexe des fonctions $f \in \mathcal{C}_c(S)$ partout positives.

On trouvera dans ce document une preuve du résultat suivant.

**Théorème 0.1** (de représentation de Riesz-Markov)**.**

*Soit $S$ un espace topologique séparé localement compact.*

*Soit $\Phi : \mathcal{C}_c^+(S) \to \mathbb{R}_+$ une application $R_+$-linéaire, c'est-à-dire telle que $\Phi(\lambda f + \mu g) = \lambda \Phi f + \mu \Phi g$ pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$ et $f, g \in \mathcal{C}_c^+(S)$.*

*Alors il existe une unique mesure borélienne quasi-régulière localement finie $\mu$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}_c^+(S)$,*

$$\Phi f = \int_S f \mathrm{d}\mu.$$

On dit que la mesure $\mu$ représente la forme $\Phi$.

**Corollaire 0.2.**

*Soit $S$ un espace topologique séparé localement compact.*

*Soit $\Phi : \mathcal{C}_c(S) \to \mathbb{R}$ une application linéaire positive, c'est-à-dire telle que $\Phi f \geq 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}_c^+(S)$.*

*Alors il existe une unique mesure borélienne quasi-régulière localement finie $\mu$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(S)$, $\Phi f = \int_S f \mathrm{d}\mu$.*

**Corollaire 0.3.**

*Soit $S$ un espace topologique séparé localement compact.*

*Soit $\Phi : \mathcal{C}_c(S) \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue.*

*Alors il existe une unique mesure signée borélienne quasi-régulière localement finie $\mu$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(S)$, $\Phi f = \int_S f \mathrm{d}\mu$.*

La démonstration du théorème 0.1 s'appuie sur un certain nombre de résultats de théorie de la mesure et de topologie cités en annexe. Elle se veut complète et efficace, peut-être au détriment d'une certaine pédagogie.

## 1 Démonstration

Introduisons tout d'abord quelques notations. Dans toute la suite, $\mathcal{U}$ désignera un ouvert, $K$ un compact, $F$ un fermé.

Pour tout $f \in \mathcal{C}_c(S)$ :

- $0 \leq f$ (resp. $f \leq 1$) signifie $f(x) \geq 0$ (resp. $f(x) \leq 1$) pour tout $x \in S$ ;
- pour tout $E \subset S$, $E \leq f$ (resp. $f \leq E$) signifie $\mathbb{1}_E(x) \leq f(x)$ (resp. $f(x) \leq \mathbb{1}_E(x)$) pour tout $x \in S$ ;
- pour tout $E \subset S$, $f < E$ signifie $f \leq E$ et $\mathrm{Supp}(f) \subset E$.

## 1.1 Construction d'une mesure

On appelle mesure extérieure sur un ensemble $S$ toute application $\mu^* : \mathcal{P}(S) \to [0; +\infty]$ vérifiant
— $\mu^*(\varnothing) = 0$ ;
— si $A \subset B \subset S$, alors $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ;
— pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $S$, $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$.

L'intérêt d'un tel objet vient du théorème 3.4, qui énonce que la restriction d'une mesure extérieure à une tribu bien choisie est une mesure. Construisons donc une mesure extérieure sur $S$.

On pose, pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset S$, puis pour tout sous-ensemble $E \subset S$,

$$\mu^*_U(\mathcal{U}) := \sup_{0 \leq f < \mathcal{U}} \Phi f$$

$$\mu^*(E) := \inf_{\mathcal{U} \supset E} \mu^*_U(\mathcal{U})$$

**Théorème 1.1.** *L'application $\mu^*$ ainsi définie est une mesure extérieure.*

*Démonstration.*

Notons que si $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ sont deux ouverts de $S$, alors $\mu^*_U(\mathcal{U}) \leq \mu^*_U(\mathcal{V})$ ; on en déduit que $\mu^*(\mathcal{U}) = \mu^*_U(\mathcal{U})$ pour tout ouvert $\mathcal{U} \subset S$. On a évidemment $\mu^*(\varnothing) = \mu^*_U(\varnothing) = 0$ et $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ pour tous $A \subset B \subset S$. On doit donc, pour montrer que $\mu^*$ est une mesure extérieure, prouver la propriété de sous-additivité dénombrable.

*Étape 1.* Soit $(\mathcal{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'ouverts de $S$. Soit $f \in \mathcal{C}_c(S)$ une fonction telle que $0 \leq f < \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$.

Puisque $\mathrm{Supp}(f)$ est compact, et d'après le théorème 3.3, il existe des fonctions $\rho_0, \cdots, \rho_k \in \mathcal{C}_c(S)$ telles que $0 \leq \rho_i < \mathcal{U}_i$ et $\sum_{0\leq i\leq k} \rho_i(x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{Supp}(f)$. Ainsi, on peut donc majorer l'image de $f$ :

$$\Phi f = \Phi(f\rho_0) + \cdots + \Phi(f\rho_k) \leq \mu^*(\mathcal{U}_0) + \cdots + \mu^*(\mathcal{U}_k) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(\mathcal{U}_n).$$

Ceci valant pour tout $f$, on a montré que $\mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(\mathcal{U}_n)$.

*Étape 2.* Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous-ensembles de $S$. Soit $\varepsilon > 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ouvert $\mathcal{U}_n \supset A_n$ tel que $\mu^*(\mathcal{U}_n) \leq \mu^*(A_n) + 2^{-n}\varepsilon$. On sait alors que

$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(\mathcal{U}_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\varepsilon \leq 2\varepsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n).$$

Ceci valant pour tout $\varepsilon$, on a montré $\mu^*(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu^*(A_n)$, c'est-à-dire la sous-additivité dénombrable de $\mu^*$, ce qui conclut la démonstration. □

Définissons une sous-partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(S)$ par la propriété suivante :

$$\mathcal{F} = \{A \subset S \,|\, \forall B \subset S, \mu^*(B) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*({}^cA \cap B)\}.$$

Alors, d'après le théorème 3.4, $\mathcal{F}$ est une tribu et $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+, A \mapsto \mu^*(A)$ est une mesure.

**Théorème 1.2.** *La tribu $\mathcal{F}$ contient les ouverts.*

La mesure $\mu$ est donc, à restriction près, borélienne, et les fonctions continues sont mesurables par rapport à cette tribu.

*Démonstration.*

Notons que par sous-additivité, on sait déjà que $\mu^*(B) \leq \mu^*(A\cap B) + \mu^*({}^cA \cap B)$ pour tous ensembles $A$ et $B$. Il suffit donc de montrer que $\mu^*(\mathcal{U} \cap A) + \mu^*({}^c\mathcal{U} \cap A) \leq \mu^*(A)$ où $\mathcal{U}$ est ouvert et $A$ quelconque. Prouvons tout d'abord que pour tous ouverts $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$,

$$\mu^*(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \mu^*({}^c\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq \mu^*(\mathcal{V}).$$

Soit $f \in \mathcal{C}_c(S)$ telle que $0 \leq f < \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. Soit $g \in \mathcal{C}_c(S)$ telle que $0 \leq g < {}^c\mathrm{Supp}(f) \cap \mathcal{V}$. Alors $f + g$ vérifie $0 \leq f + g < \mathcal{V}$ et

$$\Phi f + \Phi g = \Phi(f + g) \leq \mu^*(\mathcal{V})$$

d'où, en considérant la borne supérieure sur $g$,

$$\Phi f + \mu^*({}^c\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq \Phi f + \mu^*({}^c\mathrm{Supp}(f) \cap \mathcal{V}) \leq \mu^*(\mathcal{V})$$

et enfin, en prenant le supremum selon $f$,

$$\mu^*(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \mu^*({}^c\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \leq \mu^*(\mathcal{V}).$$

On conclut alors en considérant un ouvert $\mathcal{U}$ et un ensemble $A$. On constate que

$$\mu^*(\mathcal{U} \cap A) + \mu^*({}^c\mathcal{U} \cap A) \leq \inf_{\mathcal{V} \supset A} (\mu^*(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) + \mu^*({}^c\mathcal{U} \cap \mathcal{V})) \leq \inf_{\mathcal{V} \supset A} \mu^*(\mathcal{V}) = \mu^*(A),$$

et le résultat est démontré. $\square$

## 1.2 Compatibilité

On cherche à montrer dans cette partie que la mesure ainsi construite représente bien $\Phi$. Montrons tout d'abord un lemme.

**Lemme 1.3.**
*Soit $f \in \mathcal{C}_c(S)$ vérifiant $0 \leq f \leq 1$. Alors*

$$\mu(\{f = 1\}) \leq \Phi f \leq \mu(\mathrm{Supp}(f)),$$

$$\mu(\{f = 1\}) \leq \int_S f \mathrm{d}\mu \leq \mu(\mathrm{Supp}(f)).$$

En particulier, ceci prouve que $\mu$ est localement finie. En effet, si $K$ est compact, il existe d'après le théorème 3.2 une fonction $K \leq f < S$ et $\mu(K) \leq \mu(\{f = 1\}) \leq \Phi f < \infty$. En supposant le lemme démontré, on a donc construit une mesure $\mu$ borélienne localemement finie, qui induit une forme $\mathbb{R}_+$-linéaire de $\mathcal{C}_c^+(S)$ dans $\mathbb{R}_+$ ; on montrera dans la suite de cette partie que cette forme coïncide avec $\Phi$.

*Démonstration — Lemme 1.3.*
La seconde propriété est élémentaire :

$$\mu(\{f = 1\}) = \int_S \mathbb{1}_{f=1} \mathrm{d}\mu \leq \int_S f \mathrm{d}\mu \leq \int_S \mathbb{1}_{\mathrm{Supp}(f)} \mathrm{d}\mu = \mu(\mathrm{Supp}(f)).$$

Montrons donc la première : soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{array}{rcl}\mu(\{f = 1\}) & \leq & \mu(\{(1+\varepsilon)f > 1\}) \\ & = & \sup\limits_{0 \leq g < \{(1+\varepsilon)f > 1\}} \Phi g \\ & \leq & \sup\limits_{0 \leq g < \{(1+\varepsilon)f > 1\}} (1+\varepsilon)\Phi f \\ & = & (1+\varepsilon)\Phi f\end{array}$$

et la minoration est prouvée lorsque $\varepsilon$ tend vers 0.

Soit maintenant $\mathcal{U} \supset \mathrm{Supp}(f)$ un ouvert. Ainsi, $0 \leq f < \mathcal{U}$ et $\Phi f \leq \mu(\mathcal{U})$ ; la majoration est prouvée en passant à l'infimum sur les ouverts $\mathcal{U}$. $\square$

Le lemme nous permet alors de conclure.

Soit $f \in \mathcal{C}_c^+(S)$. Soit $\varepsilon > 0$. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_n := 0 \vee \frac{1}{\varepsilon}(f - n\varepsilon) \wedge 1 \in \mathcal{C}_c^+(S)$ de sorte que $f = \varepsilon \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, où $f_n = 0$ à partir d'un certain rang $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}
\Phi f - \int_S f \mathrm{d}\mu &= \varepsilon \sum_{0\leq n\leq N_\varepsilon} \left(\Phi f_n - \int_S f_n \mathrm{d}\mu\right) \\
&\leq \varepsilon \sum_{0\leq n\leq N_\varepsilon} (\mu(\mathrm{Supp}(f_n)) - \mu(\{f_n = 1\})) \\
&= \varepsilon \sum_{0\leq n\leq N_\varepsilon} \left(\mu\left(\overline{\{f > n\varepsilon\}}\right) - \mu\left(\{f \geq (n+1)\varepsilon\}\right)\right) \\
&= \varepsilon \cdot \mu \left( \bigcup_{0\leq n\leq N_\varepsilon} \overline{\{f > n\varepsilon\}} \setminus \{f \geq (n+1)\varepsilon\} \right) \\
&\leq \varepsilon\mu\left(\mathrm{Supp}(f)\right)
\end{aligned}$$

d'où $\Phi f \leq \int_S f \mathrm{d}\mu$ puisque $\varepsilon > 0$ est quelconque et $\mathrm{Supp}(f)$ est compact donc de mesure finie. Réciproquement,

$$\begin{aligned}
\int_S f \mathrm{d}\mu - \Phi f &= \varepsilon \sum_{0\leq n\leq N_\varepsilon} \left(\int_S f_n \mathrm{d}\mu - \Phi f_n\right) \\
&\leq \varepsilon \sum_{0\leq n\leq N_\varepsilon} (\mu(\mathrm{Supp}(f_n)) - \mu(\{f_n = 1\})) \\
&\leq \varepsilon\mu\left(\mathrm{Supp}(f)\right)
\end{aligned}$$

d'où $\Phi f \geq \int_S f \mathrm{d}\mu$. On a donc conclu : pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^+(S)$,

$$\Phi f = \int_S f \mathrm{d}\mu.$$

## 1.3 Propriétés de la mesure

Il reste, pour achever la démonstration du théorème 0.1, à montrer que $\mu$ est quasi-régulière, et qu'elle est unique.

**Théorème 1.4.** *La mesure $\mu$ est quasi-régulière.*

*Démonstration.*

On a montré que $\mu$ est borélienne, et par construction $\mu(A) = \inf_{\mathcal{U}\supset A} \mu(\mathcal{U})$. Il reste donc à montrer que $\mu(\mathcal{U}) = \sup_{K\subset\mathcal{U}} \mu(K)$ où $\mathcal{U}$ est un ouvert quelconque et $K$ parcourt les compacts de $\mathcal{U}$. Tout d'abord, si $0 \leq f < \mathcal{U}$,

$$\Phi f = \int_S f \mathrm{d}\mu \leq \mu(\mathrm{Supp}(f)) \leq \sup_{K\subset\mathcal{U}} \mu(K)$$

et on en déduit $\mu(\mathcal{U}) \leq \sup_{K\subset\mathcal{U}} \mu(K)$ en passant à la borne supérieure sur $f$. Réciproquement, si $K \subset \mathcal{U}$ est compact, il existe d'après le théorème 3.2 une fonction $K \leq f < \mathcal{U}$, et

$$\mu(K) \leq \mu(\{f = 1\}) \leq \Phi f \leq \mu(\mathcal{U})$$

d'où $\sup_{K\subset\mathcal{U}} \mu(K) \leq \mu(\mathcal{U})$, ce qui prouve $\mu(\mathcal{U}) = \sup_{K\supset\mathcal{U}} \mu(K)$ et conclut la démonstration. □

Il est clair qu'une mesure quasi-régulière $\nu$ sur $S$ est caractérisée par ses valeurs sur les compacts, puisque $\nu(A) = \inf_{\mathcal{U}\supset A} \sup_{K\subset\mathcal{U}} \nu(K)$. Il devient alors naturel de s'intéresser au résultat suivant.

**Théorème 1.5.** *Si $\nu$ resprésente $\Phi$ et $\nu(\mathcal{U}) = \sup_{K\subset\mathcal{U}} \nu(K)$, alors*

$$\nu(K) = \inf_{K\leq f} \Phi f.$$

En particulier, si deux mesures quasi-régulières représentent $\Phi$, elles coïncident sur les compacts, donc sont égales. Ceci montre l'unicité de la mesure, et conclut la démonstration du théorème 0.1.

*Démonstration.*
Soit $\nu$ une telle mesure. Un sens de l'inégalité est trivial :

$$\nu(K) \leq \int_S f \mathrm{d}\nu = \Phi f$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(S)$ telle que $K \leq f$, et $\nu(K) \leq \inf_{K\leq f} \Phi f$.

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème 3.1, il existe un ouvert $\mathcal{U}$ d'adhérence compacte tel que $K \subset \mathcal{U}$. Ainsi, $\mathcal{U} \setminus K$ est un ouvert de mesure finie, donc il existe un compact $K' \subset \mathcal{U} \setminus K$ tel que

$$\nu(K') + \varepsilon \geq \nu(\mathcal{U} \setminus K).$$

D'après le théorème 3.2, il existe $K \leq f < \mathcal{U} \setminus K'$ et

$$\Phi f \leq \nu(\mathcal{U} \setminus K') = \nu(\mathcal{U}) - \nu(K') = \nu(\mathcal{U} \setminus K) + \nu(K) - \nu(K') \leq \nu(K) + \varepsilon.$$

En passant à l'infimum sur $f$, on obtient $\inf_{K\leq f\leq 1} \Phi f \leq \nu(K) + \varepsilon$. Ceci valant pour tout $\varepsilon > 0$, on a montré que $\inf_{K\leq f\leq 1} \Phi f \leq \nu(K)$, et l'égalité est montrée. □

# 2 Corollaires

## 2.1 Représentation des formes linéaires positives

Rappelons le corollaire 0.2. Soit $S$ un espace topologique séparé localement compact, et $\Phi : \mathcal{C}_c(S) \to \mathbb{R}_+$ une forme linéaire positive. Alors $\Phi$ est représentée de manière unique par une mesure borélienne quasi-régulière localement finie.

Soient donc $S$ et $\Phi$ vérifiant ces hypothèses. Alors la restriction de $\Phi$ à $\mathcal{C}_c^+(S)$ est $\mathbb{R}_+$-linéaire, et d'après le théorème 0.1, il existe une mesure borélienne quasi-régulière localement finie telle que $\Phi f = \int_S f \mathrm{d}\mu$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^+(S)$. Ainsi, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, les fonctions $|f|$ et $|f| - f$ sont dans $\mathcal{C}_c^+(S)$, et

$$\Phi f = \Phi|f| - \Phi\left(|f| - f\right) = \int_S |f| \mathrm{d}\mu - \int_S \left(|f| - f\right) \mathrm{d}\mu = \int_S f \mathrm{d}\mu.$$

On a ainsi existence. L'unicité est facilement vérifiée ; en effet, toute autre mesure $\nu$ borélienne quasi-régulière localement finie resprésentant $\Phi$ doit aussi représenter sa restriction à $\mathcal{C}_c^+(S)$, et $\mu = \nu$ d'après le théorème 0.1.

## 2.2 Représentation des formes linéaires positives

Le corollaire 0.3 est plus délicat ; rappelons-en l'énoncé. Soit $S$ un espace topologique séparé localement compact, et $\Phi : \mathcal{C}_c(S) \to \mathbb{R}$ continue pour la norme infinie. Alors $\Phi$ est représentée de manière unique par une mesure signée borélienne quasi-régulière localement finie.

Soient donc $S$ et $\Phi$ vérifiant ces hypothèses. On définit $|\Phi| : \mathcal{C}_c^+(S) \to \mathbb{R}_+$ par

$$|\Phi| f = \sup_{|g|\leq f} \Phi g$$

où le supremum est pris sur les fonctions $g \in \mathcal{C}_c(S)$ telles que $|g(x)| \leq f(x)$ pour tout $x \in S$. Notons que $|0| \leq f$, donc $|\Phi|$ est bien à valeurs positives, et que $|g|_\infty \leq |f|_\infty < \infty$ lorsque $|g| \leq f$, donc le supremum est toujours fini puisque $\Phi$ est continue.

**Théorème 2.1.** *Les applications $|\Phi|$ et $|\Phi| - \Phi : \mathcal{C}_s^+(S) \to R_+$ sont bien définies et $\mathbb{R}_+$-linéaires.*

*Démonstration.*
On montre tout d'abord que $|\Phi|$ est $\mathbb{R}_+$-linéaire. Si $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $f \in \mathcal{C}_c^+(S)$, alors

$$|\Phi|(\lambda f) = \sup_{|g| \leq \lambda f} \Phi g = \sup_{|g| \leq f} \Phi(\lambda g) = \lambda \sup_{|g| \leq f} \Phi f = \lambda |\Phi| f.$$

Soient maintenant $f_1$ et $f_2$ deux fonctions de $\mathcal{C}_c^+(S)$. On pose $f = f_1 + f_2$. Si $g_1, g_2 \in \mathcal{C}_c(S)$ vérifient $|g_1| \leq f_1$ et $|g_2| \leq f_2$, alors $|g_1 + g_2| \leq f_1 + f_2$ et

$$\Phi g_1 + \Phi g_2 \leq \Phi(g_1 + g_2) \leq |\Phi|(f_1 + f_2),$$

d'où, en considérant la borne supérieure sur $g_1$ et $g_2$, $|\Phi| f_1 + |\Phi| f_2 \leq |\Phi| f$. Réciproquement, si $g \in \mathcal{C}_c(S)$ vérifie $|g| \leq f$, on pose $g_1 := f_1 g / f$ et $g_2 := f_2 g / f$, avec la convention $g_1 = 0$ là où $f$ (donc $g$) s'annule. On vérifie que les fonctions $g_1$ et $g_2$ appartiennent alors à l'ensemble $\mathcal{C}_c(S)$. De plus, elles vérifient $|g_1| \leq f_1$ et $|g_2| \leq f_2$ avec $g = g_1 + g_2$. On peut écrire

$$\Phi g = \Phi g_1 + \Phi g_2 \leq |\Phi| f_1 + |\Phi| f_2$$

et en prenant le supremum sur $g$, $|\Phi| f \leq |\Phi| f_1 + |\Phi| f_2$. On a donc vérifié que $|\Phi|$ est $\mathbb{R}_+$-linéaire.
L'application $|\Phi| - \Phi$ est bien définie, puisque pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^+(S)$, $|f| \leq f$ d'où

$$(|\Phi| - \Phi)\, f \geq \Phi f - \Phi f = 0.$$

Elle est $\mathbb{R}_+$-linéaire puisque $\Phi$ est linéaire et $|\Phi|$ est $\mathbb{R}_+$-linéaire. □

Il existe donc deux mesures (positives) boréliennes quasi-régulières localement finies $|\mu|$ et $\nu$ telles que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^+(S)$,

$$\int_S f \mathrm{d}|\mu| = |\Phi| f \text{ et } \int_S f \mathrm{d}\nu = (|\Phi| - \Phi)\, f.$$

**Théorème 2.2.**
*En notant $\|\cdot\|$ la norme d'opérateur, $\frac{1}{2}\nu(S) \leq |\mu|(S) = \|\Phi\|$. En particulier, ces mesures sont finies.*

Concluons l'existence en admettant pour l'instant ce théorème. On peut poser $\mu$ la mesure signée $|\mu| - \nu$, qui est donc borélienne quasi-régulière et localement finie. Ainsi, pour tout $f \in \mathcal{C}_c^+(S)$,

$$\Phi f = |\Phi| f - (|\Phi| - \Phi)\, f = \int_S f \mathrm{d}|\mu| - \int_S f \mathrm{d}\nu = \int_S f \mathrm{d}\mu,$$

et pour tout $f \in \mathcal{C}_c(S)$,

$$\Phi f = \Phi |f| - \Phi(|f| - f) = \int_S |f| \mathrm{d}\mu - \int_S (|f| - f)\, \mathrm{d}\mu = \int_S f \mathrm{d}\mu.$$

On montre maintenant le théorème.

*Démonstration.*
Notons tout d'abord que si $\eta$ est une mesure (positive) quasi-régulière sur $S$, alors la masse totale de la mesure est donnée par $\eta(S) = \sup_{0 \leq f \leq 1} \int_S f \mathrm{d}\eta$. En effet, on sait que $\eta(S) = \sup_K \eta(K)$, où $K$ parcourt les compacts de $S$. Or, pour tout compact $K$, il existe d'après le théorème 3.2 une fonction $K \leq f \leq 1$ dans $\mathcal{C}_c(S)$ ; réciproquement, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c(S)$ vérifiant $0 \leq f \leq 1$, $\int_S f \mathrm{d}\eta \leq \eta(\mathrm{Supp}(f))$. Ainsi,

$$\sup_K \eta(K) \leq \sup_{0 \leq f \leq 1} \int_S f \mathrm{d}\eta \leq \sup_K \eta(K),$$

et $\eta(S) = \sup_{0\le f\le 1} \int_S f\mathrm{d}\eta$ comme annoncé.

On en déduit la masse de $|\mu|$.

$$|\mu|(S) = \sup_{0\le f\le 1} \int_S f\mathrm{d}|\mu| = \sup_{0\le f\le 1} |\Phi| f = \sup_{0\le f\le 1} \sup_{|g|\le f} \Phi g = \sup_{|g|\le 1} \Phi g = \|\Phi\|$$

Majorons la masse de $\nu$ ; soit $f \in \mathcal{C}_c(S)$ telle que $0 \le f \le 1$.

$$\int_S f\mathrm{d}\nu = (|\Phi| - \Phi)\, f = \sup_{|g|\le f} \Phi g - \Phi f \le \sup_{|g|\le 1} \Phi g + \|\Phi\| \le \|\Phi\| + \|\Phi\| = 2\|\Phi\|,$$

ce qui conclut la démonstration du théorème. □

Il reste enfin à montrer l'unicité de cette mesure. La démonstration est essentiellement indépendante de l'existence ; mettons l'emphase sur ce point en reformulant le résultat d'unicité.

Soient $S$ un espace topologique séparé localement compact, et $\Phi : \mathcal{C}_c(S) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Soient $\mu$ et $\nu$ deux mesures signées boréliennes quasi-régulières localement finies qui représentent $\Phi$. Il nous faut montrer que $\mu = \nu$.

La mesure signée $\mu$ est borélienne quasi-régulière localement finie ; il existe donc deux mesures (positives) $\mu^+$ et $\mu^-$ boréliennes quasi-régulières localement finies telles que $\mu = \mu^+ - \mu^-$. On construit de même $\nu^+$ et $\nu^-$. Définissons les formes $F, G : \mathcal{C}_c^+(S) \to \mathbb{R}_+$ par

$$Ff := \int_S f\mathrm{d}\mu^+ + \int_S f\mathrm{d}\nu^- \text{ et } Gf := \int_S f\mathrm{d}\nu^+ + \int_S f\mathrm{d}\mu^-.$$

Ce sont des formes $R_+$-linéaires, représentées respectivement par les mesures (positives) boréliennes quasi-régulières localement compactes $\mu^+ + \nu^-$ et $\nu^+ + \mu^-$.

Or, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^+(S)$,

$$\begin{aligned} Ff &= \int_S f\mathrm{d}\mu^+ + \int_S f\mathrm{d}\nu^- = \left(\int_S f\mathrm{d}\mu + \int_S f\mathrm{d}\mu^-\right) + \int_S f\mathrm{d}\nu^- \\ &= \Phi f + \int_S f\mathrm{d}\nu^- + \int_S f\mathrm{d}\mu^- \\ &= \left(\int_S f\mathrm{d}\nu^+ - \int_S f\mathrm{d}\nu^-\right) + \int_S f\mathrm{d}\nu^- + \int_S f\mathrm{d}\mu^- = \int_S f\mathrm{d}\nu^+ + \int_S f\mathrm{d}\mu^- \\ &= Gf. \end{aligned}$$

Ces deux formes $\mathbb{R}_+$-linéaires sont égales ; la mesure qui les représente est donc unique sous les hypothèses du théorèmes 0.1 qui sont vérifiées ici, et $\mu^+ + \nu^- = \nu^+ + \mu^-$. Il suffit alors de constater que

$$\mu = \mu^+ - \mu^- = \nu^+ - \nu^- = \nu$$

pour conclure quand à l'unicité de la mesure et achever la démonstration du corollaire 0.3.

# 3 Prérequis

## 3.1 Topologie

**Théorème 3.1.**

*Soit $S$ un espace topologique séparé localement compact, $K$ un compact de $S$.*

*Il existe un compact $K'$ tel que $K \subset \mathring{K}'$. De manière équivalente, il existe un ouvert $\mathcal{U} \supset K$ d'adhérence compacte.*

**Théorème 3.2** (Lemme d'Urysohn)**.**

*Soit $S$ un espace topologique séparé localement compact. Soient $K$ et $\mathcal{U}$ un compact et un ouvert tels que $K \subset \mathcal{U}$.*

*Alors il existe $f \in \mathcal{C}_c(S)$ telle que $K \leq f < \mathcal{U}$.*

**Théorème 3.3** (Partitions de l'unité)**.**

*Soit $S$ un espace topologique séparé localement compact. Soit $K \subset S$ un compact recouvert par une famille d'ouverts $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$.*

*Alors il existe des fonctions $\rho_1, \cdots, \rho_n \in \mathcal{C}_c(S)$ et des indices $i_1, \cdots, i_n \in I$ tels que*

- *pour tout $1 \leq k \leq n$, $0 \leq \rho_k < \mathcal{U}_{i_k}$ ;*
- *pour tout $x \in K$, $\sum_{1 \leq k \leq n} \rho_k(x) = 1$.*

### 3.2 Théorie de la mesure

**Théorème 3.4** (Carathéodory)**.**

*Soit $S$ un ensemble muni d'une mesure extérieure $\mu^*$. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(S)$ définie par*

$$\mathcal{F} = \{E \subset S \,|\, \forall A \subset S, \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap {}^cE)\}\,.$$

*Alors $\mathcal{F}$ est une tribu et $\mu : \mathcal{F} \to R_+, E \mapsto \mu^*(E)$ est une mesure sur $(S, \mathcal{F})$.*

## 4 Références

Ce document a été écrit sans référence. Le lecteur intéressé pourra cependant trouver une preuve de ce résultat dans l'ouvrage de D. Cohn ou celui de P. Halmos, s'intitulant tous deux *Measure Theory.*

Les prérequis utilisés sont des faits bien connus, dont les énoncés et références associées pourront par exemple se trouver sur Wikipédia, au voisinage des articles *Espace localement compact*, *Lemme d'Urysohn*, *Partition de l'unité*, *Mesure extérieure* ou de leurs homologues anglophones.