ENSAE 2A

Séries temporelles linéaires

TD n°7

Pour toute remarque, contacter `jerome.trinh@ensae.fr`

Exercice 1 :

On considère un processus X stationnaire vérifiant le modèle ARMA(1,1) canonique

$$(1-\phi L)X_t = (1-\theta L)\epsilon_t$$

où ϵ_t est un bruit blanc de variance σ^2_ϵ, $|\theta|<1$, $|\phi|<1$ et les polynômes retards sont premiers entre eux.
On s'intéresse pour $t \in \mathbb{Z}$ à la prévision linéaire optimale d'horizon 1

$${}_tX_{t+1} = \text{EL}(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \dots)$$

Q1. Montrer qu'il existe une série absolument convergente $\sum_k a_k$ telle que ${}_tX_{t+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k X_{t+1-k}$ et donner son terme général.

On a $(1-\phi L)X_t = (1-\theta L)\epsilon_t \quad \Leftrightarrow \quad X_t = \phi X_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$
Et donc pour tout $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
{}_tX_{t+1} &= \text{EL}(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \dots)\\
&= \text{EL}(\phi X_t + \epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t|X_t, X_{t-1}, \dots)\\
&= \phi X_t - \theta\epsilon_t
\end{aligned}$$

car $\text{Vect}(\epsilon_t, \dots) = \text{Vect}(X_t, \dots)$.
Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\epsilon_t &= (1-\theta L)^{-1}(1-\phi L)X_t\\
&= (1-\phi L)(1-\theta L)^{-1}X_t\\
&= (1-\phi L)\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\theta^k L^k\right)X_t \qquad \text{car } |\theta|<1\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\theta^k X_{t-k} - \sum_{k=0}^{+\infty}\phi\theta^k X_{t-k-1}\\
&= X_t + \sum_{k=1}^{+\infty}\theta^k X_{t-k} - \sum_{k=1}^{+\infty}\phi\theta^{k-1}X_{t-k}\\
&= X_t + \sum_{k=1}^{+\infty}\theta^{k-1}(\theta-\phi)X_{t-k}
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
{}_tX_{t+1} &= (\phi-\theta)X_t - \theta\sum_{k=1}^{+\infty}\theta^{k-1}(\theta-\phi)X_{t-k}\\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\theta^k(\phi-\theta)X_{t-k}\\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\theta^{k-1}(\phi-\theta)X_{t+1-k}
\end{aligned}$$

et on pose donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_k = \theta^{k-1}(\phi-\theta)$$

La série $\sum_{k\geq 1} a_k$ est alors absolument convergente car $|\theta|<1$ (car le modèle est sous forme canonique).

Q2. L'observation de $(X_t)_{t<0}$ étant impossible, on définit pour $t \in \mathbb{N}$ la prévision linéaire empirique ${}_t\hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k}$.
Exprimer ${}_t\hat{X}_{t+1}$ en fonction de X_t et ${}_{t-1}\hat{X}_t$.

On a a pour tout $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} {}_t\hat{X}_{t+1} &= (\phi-\theta)X_t + \sum_{k=2}^{t+1} \theta^{k-1}(\phi-\theta)X_{t+1-k} \\ &= (\phi-\theta)X_t + \sum_{k=1}^{t} \theta^{k}(\phi-\theta)X_{t-k} \\ &= (\phi-\theta)X_t + \theta\sum_{k=1}^{t} \theta^{k-1}(\phi-\theta)X_{t-k} \\ &= (\phi-\theta)X_t + \theta_{t-1}\hat{X}_t \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit au final :

$${}_t\hat{X}_{t+1} = \phi X_t - \theta(X_t -_{t-1} \hat{X}_t)$$

On retrouve l'expression de la prévision linéaire de l'ARMA(1,1) avec l'erreur de prévision passée comme innovation passée.

Q3. On définit $e_t = \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathsf{E}\left[\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right]$ l'erreur relative de la prévision tronquée.
Exprimer e_{t+1} en fonction de e_t.

On a pour tout $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} e_{t+1} &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathsf{E}\left[\left(X_{t+1} - {}_t\hat{X}_{t+1}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathsf{E}\left[\left((X_{t+1} - \phi X_t) + \theta(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t)\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathsf{E}\left[\left((\epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t) + \theta(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t)\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathsf{E}\left[(\epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t)^2 + 2\theta(\epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t)(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t) + \theta^2(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t)^2\right] \\ &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\left[\mathsf{V}(\epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t) + 2\theta\mathsf{E}\left((\epsilon_{t+1} - \theta\epsilon_t)(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t)\right) + \theta^2\mathsf{E}\left((X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t)^2\right)\right] \end{aligned}$$

On a $\mathsf{E}(\epsilon_{t+1}, X_t) = 0$, $\mathsf{E}(\epsilon_t, X_t) = \sigma_\epsilon^2$ et $\mathsf{E}(\epsilon_{t+k}, {}_t\hat{X}_{t+l}) = 0 \ \ \forall k, l$ donc

$$\begin{aligned} e_{t+1} &= (1+\theta^2) - 2\theta^2 + \theta^2 e_t \\ &= 1 - \theta^2 + \theta^2 e_t \end{aligned}$$

Q4. Calculer $\gamma_X(0)$ puis e_0.
En déduire l'expression de $(e_t)_t$.

On a pour $t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) &= \mathsf{V}(X_t) \\ &= \mathsf{E}(X_t^2) \ \text{ comme } \mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}\left((1-\phi L)^{-1}(1-\theta L)\epsilon_t\right) = 0 \\ &= \mathsf{E}\left((\phi X_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_X(0) &= \mathsf{E}\left(\phi^2 X_{t-1}^2 + 2\phi X_{t-1}(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}) + (\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})^2\right) \\
&= \phi^2 \mathsf{E}(X_{t-1}^2) + 2\phi\left[\mathsf{E}(X_{t-1}\epsilon_t) - \theta\mathsf{E}(X_{t-1}\epsilon_{t-1})\right] + \mathsf{E}\left((\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1})^2\right) \\
&= \phi^2 \mathsf{V}(X_{t-1}) + 2\phi\left(0 - \theta\sigma_\epsilon^2\right) + \mathsf{V}(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}) \\
&= \phi^2\gamma_X(0) - 2\phi\theta\sigma_\epsilon^2 + (1+\theta^2)\sigma_\epsilon^2
\end{aligned}$$

Et comme $|\phi| < 1$ (car le modèle est sous forme canonique), on a finalement

$$\gamma_X(0) = \frac{1 - 2\phi\theta + \theta^2}{1-\phi^2}\sigma_\epsilon^2$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
e_0 &= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathsf{E}\left[\left(X_0 - {}_{-1}\hat{X}_0\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{\sigma_\epsilon^2}\mathsf{E}\left(X_0^2\right) \quad \text{car } {}_{-1}\hat{X}_0 = \mathsf{EL}(X_0|\emptyset) = \mathsf{E}(X_0) = 0 \\
&= \frac{\gamma_X(0)}{\sigma_\epsilon^2} \\
&= \frac{1 - 2\phi\theta + \theta^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}$$

Or

$$e_{t+1} = 1 - \theta^2 + \theta^2 e_t \quad \Leftrightarrow \quad e_{t+1} - 1 = \theta^2(e_t - 1) = \theta^{2(t+1)}(e_0 - 1) \quad \Leftrightarrow \quad e_t = 1 + \theta^{2t}(e_0 - 1)$$

donc

$$e_t = 1 + \theta^{2t}\left(\frac{1 - 2\phi\theta + \theta^2}{1-\phi^2} - 1\right) \quad \text{et finalement} \quad e_t = 1 + \theta^{2t}\frac{(\phi-\theta)^2}{1-\phi^2}$$

Q5. Que dire de l'erreur de la prévision tronquée $\mathsf{E}\left[\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right]$ lorsque $t \to +\infty$?

On voit que $\lim\limits_{t\to+\infty} e_t = 1$ car $|\theta| < 1$, et donc $\mathsf{E}\left[\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right] \xrightarrow[t\to+\infty]{} \sigma_\epsilon^2$, où σ_ϵ^2 est aussi l'erreur de prévision non tronquée (en effet $\mathsf{E}\left[(X_t - {}_{t-1}X_t)^2\right] = \mathsf{E}[\epsilon_t^2] = \mathsf{V}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$). Donc plus on a d'observations, moins la troncation détériore la prévision.

Exercice 2 :

On considère un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ vérifiant le modèle ARIMA(p,d,q) canonique

$$(I-L)^d\Theta(L)X_t = \Delta(L)\epsilon_t$$

de conditions initiales Z données[1] et orthogonales à $(\epsilon_t)_{t\geq 0}$, bruit blanc de variance σ_ϵ^2. On s'intéresse à la prévision linéaire optimale d'horizon $h \geq 0$

$${}_tX_{t+h} = \mathsf{EL}(X_{t+h}|X_t, X_{t-1}, \ldots, X_0, Z)$$

Q1. Montrer que $({}_tX_{t+h})_{h>q}$ suit la récurrence linéaire de polynôme $(1-L)^d\Theta(L)$.

1. Z est donc un vecteur comprenant $d + d\Theta$ valeurs initiales de X et $d\Delta$ valeurs initiales de ϵ.

Notons $(1-x)^d\Theta(x) = \sum_{i=0}^{p+d} \alpha_i x^i$ avec $\alpha_0 = 1$ et $\Delta(x) = \sum_{i=0}^{q} \delta_i x^i$. Alors pour tout $h \geq 0$:

$$\begin{array}{rcl} (1-L)^d\Theta(L)X_{t+h} & = & \Delta(L)\epsilon_{t+h} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{p+d} \alpha_i L^i X_{t+h} & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{q} \delta_i L^i \epsilon_{t+h} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{p+d} \alpha_i X_{t+h-i} & = & \displaystyle\sum_{i=0}^{q} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \\ X_{t+h} & = & \displaystyle -\sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i X_{t+h-i} + \sum_{i=0}^{q} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \end{array}$$

et donc pour tout $h > q$:

$$\begin{array}{rcl} {}_tX_{t+h} & = & \mathsf{EL}(X_{t+h}|X_t,\ldots,X_0,Z) \\ & = & \displaystyle -\sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \mathsf{EL}(X_{t+h-i}|X_t,\ldots,X_0,Z) + \sum_{i=0}^{q} \delta_i \mathsf{EL}(\epsilon_{t+h-i}|X_t,\ldots,X_0,Z) \\ & = & -\sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \ \ {}_tX_{t+h-i} \quad \text{car } \epsilon \text{ est l'innovation de } X \end{array}$$

donc

$$(1-L)^d\Theta(L)_tX_{t+h} = 0$$

Ainsi à t fixé, $({}_tX_{t+h})_{h>q}$ suit la récurrence linéaire de polynôme $(1-L)^d\Theta(L)$. En effet, si $h > q$, on n'observe plus de résidus.

Application numérique : En déduire $({}_tX_{t+h})_{h\in\mathbb{N}}$ pour $h \geq 1$ en fonction de X_t et ${}_tX_{t+1}$ lorsque $d = 1$, $\Theta(l) = (1 - \frac{1}{2}L)$ et $\Delta(L) = 1 - \frac{4}{5}L$.

$\Theta(x) = (1-\frac{1}{2}x)$ et $\Delta(x) = (1-\frac{4}{5}x)$ ont leur racine différente l'une de l'autre et de module strictement supérieure à 1 (respectivement 2 et $\frac{5}{4}$), donc la représentation ARIMA(1,1,1) suivante pour X_t est bien canonique :

$$(1-L)(1-\frac{1}{2}L)X_t = (1-\frac{4}{5}L)\epsilon_t$$

On a donc :

$$\begin{array}{rcl} (1-L)(1-\frac{1}{2}L)X_t & = & (1-\frac{4}{5}L)\epsilon_t \\ (1-\frac{3}{2}L+\frac{1}{2}L^2)X_t & = & (1-\frac{4}{5}L)\epsilon_t \\ X_t & = & \frac{3}{2}X_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2} + \epsilon_t - \frac{4}{5}\epsilon_{t-1} \end{array}$$

Comme cette représentation est canonique, ϵ est l'innovation de X donc pour $h \geq 2$

$${}_tX_{t+h} = \frac{3}{2}{}_tX_{t+h-1} - \frac{1}{2}{}_tX_{t+h-2}$$

On sait d'après la démonstration précédente que $({}_tX_{t+h})_{h\geq 2}$ suit la récurrence linéaire d'ordre 2 de polynôme $(1-L)(1-\frac{1}{2}L)$, donc on a pour la suite $({}_tX_{t+h})_{h\geq 0}$ définie par

$${}_tX_{t+h} = \left\{ \begin{array}{cl} \frac{3}{2}{}_tX_{t+h-1} - \frac{1}{2}{}_tX_{t+h-2} & \forall h \geq 2 \\ {}_tX_{t+1} & \text{si } h = 1 \\ X_t & \text{si } h = 0 \end{array} \right.$$

le polynôme caractéristique $F^2(1-L)(1-\frac{1}{2}L) = (F-1)(F-\frac{1}{2})$ (où $F = L^{-1}$) dont les racines sont 1 et $\frac{1}{2}$, et donc le terme général

$$\forall h \geq 2, \;\; {}_tX_{t+h} = \alpha 1^h + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^h = \alpha + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^h$$

Les termes initiaux de la suite récurrente sont pour $h = 2$:

$$\alpha + \frac{1}{4}\beta = \frac{3}{2}{}_tX_{t+1} - \frac{1}{2}{}_tX_t = \frac{3}{2}{}_tX_{t+1} - \frac{1}{2}X_t$$

et pour $h = 3$:

$$\alpha + \frac{1}{8}\beta = \frac{3}{2}{}_tX_{t+2} - \frac{1}{2}{}_tX_{t+1} = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}{}_tX_{t+1} - \frac{1}{2}X_t\right) - \frac{1}{2}{}_tX_{t+1} = \frac{7}{4}{}_tX_{t+1} - \frac{3}{4}X_t$$

En soustrayant la seconde condition à la première on obtient :

$$\frac{1}{8}\beta = -\frac{1}{4}{}_tX_{t+1} + \frac{1}{4}{}_tX_t \;\; \Leftrightarrow \;\; \beta = 2(X_t - {}_tX_{t+1})$$

et donc à partir de la première condition :

$$\alpha = -\frac{1}{4}\beta + \frac{3}{2}{}_tX_{t+1} - \frac{1}{2}X_t = 2{}_tX_{t+1} - X_t$$

Le terme général de $({}_tX_{t+h})_{h\geq 0}$ devient donc pour tout $h \geq 0$:

$${}_tX_{t+h} = 2{}_tX_{t+1} - X_t + 2(X_t - {}_tX_{t+1})\left(\frac{1}{2}\right)^h = X_t\left(\frac{1}{2^{h-1}} - 1\right) + {}_tX_{t+1}\left(2 - \frac{1}{2^{h-1}}\right)$$

On a donc plus particulièrement :

$$\forall h \geq 1, \;\; {}_tX_{t+h} = X_t\left(\frac{1}{2^{h-1}} - 1\right) + {}_tX_{t+1}\left(2 - \frac{1}{2^{h-1}}\right)$$

Q2. Soit $e_h = X_{t+h} - {}_tX_{t+h}$ l'erreur de prévision d'horizon $h \geq 0$.

a) Montrer que $e_h \in \text{Vect}(\epsilon_{t+1}, \ldots, \epsilon_{t+h})$ pour $h \geq 0$.

ϵ est l'innovation de X, donc $X_{t+h} \in \text{Vect}(\epsilon_{t+h}, \ldots, \epsilon_0)$.
Pour $h \geq 0$, ${}_tX_{t+h} = \text{EL}(X_{t+h}|X_t, \ldots, X_0) \in \text{Vect}(\epsilon_t, \ldots, \epsilon_0) \subset \text{Vect}(\epsilon_{t+h}, \ldots, \epsilon_0)$ est la projection orthogonale de X_{t+h} sur $\text{Vect}(\epsilon_t, \ldots, \epsilon_0)$, donc l'erreur associée $e_h = X_{t+h} - {}_tX_{t+h}$ se trouve dans un espace vectoriel orthogonal à $\text{Vect}(\epsilon_t, \ldots, \epsilon_0)$, tout en se trouvant dans $\text{Vect}(\epsilon_{t+h}, \ldots, \epsilon_0)$.
Or ϵ est un bruit blanc, donc $(\epsilon_{t+h}, \ldots, \epsilon_0)$ est une famille orthogonale, et donc dans $\text{Vect}(\epsilon_{t+h}, \ldots, \epsilon_0)$, l'orthogonal de $\text{Vect}(\epsilon_t, \ldots, \epsilon_0)$ est $\text{Vect}(\epsilon_{t+h}, \ldots, \epsilon_{t+1})$. Comme e_h appartient à cet espace orthogonal, on a donc bien :

$$e_h \in \text{Vect}(\epsilon_{t+h}, \ldots, \epsilon_{t+1}), \;\; h \geq 0$$

L'erreur de prévision est une combinaison linéaire de l'innovation hors échantillon.

b) Montrer qu'il existe une suite $(a_h)_h$ telle que

$$\forall h \geq 0, e_h = a_0\epsilon_{t+h} + \ldots + a_{h-1}\epsilon_{t+1}$$

et que $(a_h)_{h\geq q}$ suit la récurrence de polynôme $(1-L)^d\Theta(L)$.

En remarquant que si $h \leq q$, ${}_tX_{t+h} = -\sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \ {}_tX_{t+h-i} + \sum_{i=0}^{q} \mathbb{1}_{h \leq i \leq q} \delta_i \epsilon_{t+h-i}$, on a pour tout $h \geq 0$:

$$\begin{aligned}
e_h &= X_{t+h} - {}_tX_{t+h} \\
&= -\sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i X_{t+h-i} + \sum_{i=0}^{q} \delta_i \epsilon_{t+h-i} + \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \ {}_tX_{t+h-i} - \sum_{i=0}^{q} \mathbb{1}_{h \leq i \leq q} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \\
&= \sum_{i=1}^{p+d} \alpha_i \left({}_tX_{t+h-i} - X_{t+h-i} \right) + \sum_{i=0}^{\min(h-1,q)} \delta_i \epsilon_{t+h-i}
\end{aligned}$$

L'erreur de prévision s'exprime comme une prévision linéaire utilisant le même modèle ARIMA(p,d,q) que (X_t). Or l'erreur de prévision est nulle lorsque la date à prédire est dans l'échantillon :

$$X_{t+h-i} - {}_tX_{t+h-i} = \begin{cases} 0 & \text{si } h \leq i \\ e_{h-i} & \text{si } h > i \end{cases}$$

donc

$$e_h = -\sum_{i=1}^{\min(h-1,p+d)} \alpha_i e_{h-i} + \sum_{i=0}^{\min(h-1,q)} \delta_i \epsilon_{t+h-i}$$

Comme $e_h \in \text{Vect}(\epsilon_{t+h}, \ldots, \epsilon_{t+1}), \ \ h \geq 0$, il existe donc un vecteur $(a_0, \ldots, a_{h-1})'$ tel que :

$$e_h = \sum_{i=0}^{h-1} a_i \epsilon_{t+h-i}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
e_h &= -\sum_{i=1}^{\min(h-1,p+d)} \alpha_i \sum_{j=0}^{h-i-1} a_j \epsilon_{t+h-i-j} + \sum_{i=0}^{\min(h-1,q)} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \\
&= -\sum_{i=1}^{\min(h-1,p+d)} \alpha_i \sum_{l=i}^{h-1} a_{l-i} \epsilon_{t+h-l} + \sum_{i=0}^{\min(h-1,q)} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \\
&= -\sum_{l=1}^{h-1} \sum_{i=1}^{\min(h-1,p+d,l)} \alpha_i a_{l-i} \epsilon_{t+h-l} + \sum_{i=0}^{\min(h-1,q)} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \\
&= -\sum_{l=1}^{h-1} \left(\sum_{i=1}^{\min(l,p+d)} \alpha_i a_{l-i} \right) \epsilon_{t+h-l} + \sum_{i=0}^{\min(h-1,q)} \delta_i \epsilon_{t+h-i} \\
&= \sum_{l=0}^{\min(h-1,q)} \left(\delta_i - \sum_{i=1}^{\min(l,p+d)} \alpha_i a_{l-i} \right) \epsilon_{t+h-l} - \sum_{l=\min(h-1,q)+1}^{h-1} \left(\sum_{i=1}^{\min(l,p+d)} \alpha_i a_{l-i} \right) \epsilon_{t+h-i}
\end{aligned}$$

On a donc par identification $e_h = \sum_{i=0}^{h-1} a_i \epsilon_{t+h-i}$ où

$$\begin{cases} a_0 &= 1 \\ a_h &= \delta_i - \sum_{i=1}^{\min(h-1,p+d)} \alpha_i a_{h-i} \quad \text{si } 1 < h < q \\ a_h &= -\sum_{i=1}^{\min(h-1,p+d)} \alpha_i a_{h-i} \quad \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, dans le cas $h \geq q$, la suite $(a_h)_{h \geq q}$ suit la récurrence linéaire de polynôme $(1-L)^d \Theta(L)$.

Application numérique : Calculer $(a_h)_h$ dans l'exemple précédent.

On a tout d'abord (cf. Q1)

$$e_1 = \left(\frac{3}{2}X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} + \epsilon_{t+1} - \frac{4}{5}\epsilon_t\right) - \left(\frac{3}{2}X_t - \frac{1}{2}X_{t-1} - \frac{4}{5}\epsilon_t\right) = \epsilon_{t+1}$$

donc on a bien $a_0 = 1$.
De même,

$$e_2 = \frac{3}{2}e_1 + \epsilon_{t+2} - \frac{4}{5}\epsilon_{t+1} = \epsilon_{t+2} + \left(\frac{3}{2}a_0 - \frac{4}{5}\right)\epsilon_{t+1}$$

donc on a bien $a_1 = \frac{3}{2}a_0 - \frac{4}{5} = \frac{7}{10}$.
Puis pour $h \geq 3$, on a montré que $(a_h)_h$ suivait la récurrence linéaire de polynôme $(1-L)^d\Theta(L)$, donc on a $a_h = \frac{3}{2}a_{h-1} - \frac{1}{2}a_{h-2}$. On a aussi montré précédement qu'une telle suite a pour polynôme caractéristique $(F-1)(F-\frac{1}{2})$, pour racines 1 et $\frac{1}{2}$ et pour terme général, avec α et β deux constantes et $h \geq 0$

$$a_h = \alpha + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^h$$

On a aux valeurs initiales

$$\begin{cases} h=0: & \alpha+\beta = 1 \\ h=1: & \alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{7}{10} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \alpha = \frac{2}{5} \text{ et } \beta = \frac{3}{5}$$

et donc finalement

$$\forall h \geq 0, a_h = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{1}{2^h}$$

c) Calculer les variances des erreurs de prévisions $(\mathsf{V}(e_h))_{h\in\mathbb{N}}$ et en donner un équivalent pour $h \to +\infty$ lorsque $d \geq 1$

On a pour $h \geq 0$,

$$\mathsf{V}(e_h) = \mathsf{V}\left(\sum_{k=0}^{h-1} a_k\epsilon_{t+h-k}\right) = \sum_{k=0}^{h-1} a_k^2 \mathsf{V}(\epsilon_{t+h-k}) = \left(\sum_{k=0}^{h-1} a_k^2\right)\sigma_\epsilon^2$$

$\mathsf{V}(e_h)$ croît donc avec h : il faut se limiter à des horizons de prévisions raisonnables.

<u>*Application numérique :*</u> Calculer $(\mathsf{V}(e_h))_{h\in\mathbb{N}}$ dans l'exemple précédent.

On a ici pour $h \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}(e_h) &= \sum_{i=0}^{h-1}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{1}{2^i}\right)^2 \sigma_\epsilon^2 \\
&= \sum_{i=0}^{h-1}\left(\frac{4}{25} + \frac{12}{25}\frac{1}{2^i} + \frac{9}{25}\frac{1}{4^i}\right)^2 \sigma_\epsilon^2 \\
&= \sigma_\epsilon^2\left[\frac{4}{25}h + \frac{12}{25}\frac{1-\frac{1}{2^h}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{9}{25}\frac{1-\frac{1}{4^h}}{1-\frac{1}{4}}\right] \\
&= \sigma_\epsilon^2\left[\frac{4}{25}h + \frac{12}{25}\left(\frac{1}{2^{h-1}} - 2\right) + \frac{12}{25}\left(1 - \frac{1}{4^h}\right)\right]
\end{aligned}$$

donc

$$\mathsf{V}(e_h) = \sigma_\epsilon^2 \left[\frac{4}{25}h + \frac{12}{25}\left(3 - \frac{1}{2^{h-1}} - \frac{1}{4^h}\right)\right]$$

d) En supposant que ϵ est un bruit blanc gaussien, déterminer un intervalle de prévision d'horizon $h \geq 1$ fiable à 95%.

On a pour tout $h \geq 0$, $e_h = \sum_{i=0}^{h-1} a_i \epsilon_{t+h-i}$, et ϵ est un bruit blanc gaussien. Comme la combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes et normales suit aussi une loi normale d'espérance et de variance égale à celles de cette même combinaison, on a donc

$$X_{t+h} - {}_tX_{t+h} = e_h \sim \mathcal{N}\left(0, (\sum_{i=0}^{h-1} a_i^2)\sigma_\epsilon^2\right)$$

Par conséquent un intervalle de confiance $I_\alpha(h)$ d'horizon h, qui est tel que

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in I_\alpha(h)) = 1 - \alpha$$

est

$$I_a(h) = \left[{}_tX_{t+h} \pm q_{1-\alpha/2}^{\mathcal{N}(0,1)} \sqrt{\sum_{i=0}^{h-1} a_i^2 \sigma_\epsilon^2}\right]$$

où $q_{1-\alpha/2}^{\mathcal{N}(0,1)}$ désigne le quantile à $1 - \frac{\alpha}{2}$ de la loi normale centrée réduite.

Application numérique : Donner l'intervalle d'horizon 2 à 95% lorsque $X_t = 12$, ${}_tX_{t+1} = 10$ et $\sigma_\epsilon^2 = 1$.

On a

$${}_tX_{t+2} = X_t\left(\frac{1}{2} - 1\right) + {}_tX_{t+1}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = -12 \times \frac{1}{2} + 10 \times \frac{3}{2} = 9$$

et

$$\mathsf{V}(e_2) = (a_0^2 + a_1^2)\sigma_\epsilon^2 = \left(1 + (\frac{7}{10})^2\right) \times 1 = 1.49 \approx 1.22^2$$

donc

$$I_{95\%}(2) \approx [6.6075, 11.392]$$

Exercice 3 (Optionnel) :

On considère 2 processus stationnaires (X_1, X_2) vérifiant

$$\begin{cases} (I - \rho_1 L)X_1 &= U_1 \\ (I - \rho_2 L)X_2 &= U_2 \end{cases}$$

où $(\rho_1, \rho_2) \in]-1, 1[^2$ et U_1 (resp. U_2) est un bruit blanc de variance σ_1^2 (resp. σ_2^2), U_1 et U_2 étant non corrélés (à toute date).

On défini $Z = X_1 + X_2$; on cherche à déterminer la prévision optimale de Z_{t+1} fondée sur l'observation de (X_1, X_2) aux dates $T, T-1, \ldots$.

Q1. Montrer que pour tout $(t, t') \in \mathbb{Z}^2$, $X_{1,t}$ est non corrélé à $X_{2,t'}$.
Déterminer $Z_{T+1}^{*X} = \mathsf{EL}(Z_{T+1} | X_{1,T}, X_{2,T}, X_{1,T-1}, X_{2,T-1}, \ldots)$ et la variance V_X de l'erreur de prévision associée en fonction de (σ_1^2, σ_2^2).

$(I-\rho_1 L)X_{1,t} = U_{1,t}$ avec $|\rho| < 1$ donc $X_{1,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_1^k U_{1,t-k}$. De la même manière pour X_2, on a $X_{2,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_2^k U_{2,t-k}$. Leur covariance est donc nulle puisque pour tout (t,t'), $\mathsf{Cov}(U_{1,t}, U_{2,t'}) = 0$ (U_1 et U_2 non corrélés à toute date).
Par ailleurs, on a

$$Z_{T+1} = \rho_1 X_{1,T} + \rho_2 X_{2,T} + U_{1,T+1} + U_{2,T+1}$$

Comme $(\rho_1, \rho_2) \in]-1,1[^2$, X_1 et X_2 sont exprimés sous forme canonique et U_1 et U_2 sont leurs innovations respectives. Ainsi

$$Z_{T+1}^{*X} = \mathsf{EL}(X_{1,T+1} + X_{2,T+1} | X_{1,T}, X_{2,T}, X_{1,T-1}, X_{2,T-1}, \ldots) = \rho_1 X_{1,T} + \rho_2 X_{2,T}$$

et la variance de l'erreur de prévision

$$V_X = \mathsf{V}\left(Z_{T+1} - Z_{T+1}^{*X}\right) = \mathsf{V}(U_{1,T+1} + U_{2,T+1}) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

Q2. Montrer que Z satisfait une relation de la forme

$$\Theta(L)Z = \Delta(L)\xi$$

où Θ et Δ sont des polynômes (de degrés finis) et ξ est un bruit blanc.
En déduire que Z est un processus ARMA. A quel condition Z est-il un AR pur ?

On a

$$\begin{aligned} Z_t &= X_{1,t} + X_{2,t} \\ (1-\rho_1 L)(1-\rho_2 L)Z_t &= (1-\rho_1 L)(1-\rho_2 L)(X_{1,t} + X_{2,t}) \\ &= (1-\rho_1 L)(1-\rho_2 L)((1-\rho_1 L)^{-1} U_{1,t} + (1-\rho_2 L)^{-1} U_{2,t}) \\ &= (1-\rho_2 L)U_{1,t} + (1-\rho_1 L)U_{2,t} \end{aligned}$$

soit matriciellement

$$(I-\rho_1 L)(I-\rho_2 L)Z = (I-\rho_2 L)U_1 + (I-\rho_1 L)U_2$$

La partie de gauche est un AR(2). La partie de droite est quant à elle un MA(1), car on peut montrer facilement que les autocovariances sont nulles à partir de l'ordre 2. Il existe donc $\theta \in]-1,1[$ tel que

$$(I-\theta L)\xi = (I-\rho_2 L)U_1 + (I-\rho_1 L)U_2$$

où

$$\xi = (I-\theta L)^{-1}(I-\rho_2 L)U_1 + (I-\rho_1 L)U_2$$

est un bruit blanc de variance σ_ξ^2.
À la même manière qu'à la TD3 ex1 Q1, on peut poser $A = (I-\rho_2 L)U_1 + (I-\rho_1 L)U_2$, et on a donc

$$\begin{cases} \mathsf{V}[(1-\theta L)\xi_t] = \mathsf{V}(A_t) \\ \mathsf{Cov}[(1-\theta L)\xi_t, (1-\theta L)\xi_{t+1}] = \mathsf{Cov}(A_t, A_{t+1}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_\xi^2 = (1+\rho_2^2)\sigma_1^2 + (1+\rho_1^2)\sigma_2^2 \\ -\theta\sigma_\xi^2 = -\rho_2\sigma_1^2 - \rho_1\sigma_2^2 \end{cases}$$

On a alors

$$\sigma_\xi^2 = \frac{\rho_2\sigma_1^2 + \rho_1\sigma_2^2}{\theta}$$

et

$$\theta^2 - \alpha\theta + 1 = 0$$

où $\alpha = \dfrac{(1+\rho_2^2)\sigma_1^2 + (1+\rho_1^2)\sigma_2^2}{\rho_2\sigma_1^2 + \rho_1\sigma_2^2}$. On peut montrer que $|\alpha| > 2$, le polynôme en θ a donc deux racines conjuguées, dont l'une est forcément dans $]-1,1[$ et l'autre de module supérieure à 1 comme le produit des racines est égal à 1. Celle qui nous intéresse est donc la première :

$$\theta = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2}$$

Z est donc un ARMA(2,1). De plus, on voit aisément que Z est un AR(1) si et seulement si $\theta \in \{\rho_1, \rho_2\}$. On peut aussi montrer que cela équivaut à la condition $\rho_1 = \rho_2$. En effet, on a alors

$$\rho_1^2 - \alpha\rho_1 + 1 = 0$$

en remplaçant l'expression de α,

$$\rho_1^2 + 1 = \rho_1 \frac{(1+\rho_2^2)\sigma_1^2 + (1+\rho_1^2)\sigma_2^2}{\rho_2\sigma_1^2 + \rho_1\sigma_2^2}$$

$$(1+\rho_1^2)(\rho_2\sigma_1^2 + \rho_1\sigma_2^2) = \rho_1[(1+\rho_2^2)\sigma_1^2 + (1+\rho_1^2)\sigma_2^2]$$

$$(1+\rho_1^2)\rho_2\sigma_1^2 = (1+\rho_2^2)\rho_1\sigma_1^2$$

$$\frac{1+\rho_1^2}{\rho_1} = \frac{1+\rho_2^2}{\rho_2}$$

On peut vérifier que $x \mapsto \frac{1+x^2}{x}$ est une bijection sur $]-1,1[$ donc $\rho_1 = \rho_2$. Z est donc un AR(1) si et seulement si $\rho_1 = \rho_2$.

Q3. Dans le cas général, déterminer la prévision optimale $Z_{T+1}^{*Z} = \mathsf{EL}(Z_{T+1}|Z_T, Z_{T-1}, \ldots)$ fondée sur les observations agrégées. Donner la variance V_Z de l'erreur de prévision associée en fonction de (σ_1^2, σ_2^2). Comparer V_Z et V_X et conclure.

De la même manière qu'à la TD3 ex1 Q3, la prévision optimale de Z_{T+1}^{*Z} fondée sur les (Z_t) passés s'écrit comme celle d'un ARMA(2,1) :

$$Z_{T+1}^{*Z} = (\rho_1 + \rho_2 - \theta)Z_T - (\rho_1\rho_2 - \theta(\rho_1+\rho_2) + \theta^2)\sum_{k=2}^{+\infty}\theta^{k-2}Z_{T+1-k}$$

Par ailleurs, la variance de l'erreur de prévision s'écrit :

$$V_Z = \mathsf{V}\left(Z_{T+1} - Z_{T+1}^{*Z}\right) = \mathsf{V}(\xi_{T+1}) = \frac{\rho_2\sigma_1^2 + \rho_1\sigma_2^2}{\theta}$$

que l'on peut comparer avec l'erreur de prévision fondée sur les $(X_{1,t}, X_{2,t})$ passés en écrivant :

$$\begin{array}{rcl} V_Z = \mathsf{V}\left(Z_{T+1} - Z_{T+1}^{*Z}\right) & = & \mathsf{V}\left(Z_{T+1} - Z_{T+1}^{*X} + Z_{T+1}^{*X} - Z_{T+1}^{*Z}\right) \\ & = & \mathsf{V}\left(U_{1,T+1} + U_{2,T+1} + Z_{T+1}^{*X} - Z_{T+1}^{*Z}\right) \\ & & Z_{T+1}^{*X} - Z_{T+1}^{*Z} \text{ ne dépend que de } (U_{1,T}, U_{2,T}, \ldots)\text{, donc} \\ V_Z & = & \mathsf{V}\left(U_{1,T+1} + U_{2,T+1}\right) + \mathsf{V}\left(Z_{T+1}^{*X} - Z_{T+1}^{*Z}\right) \\ & = & \mathsf{V}\left(Z_{T+1} - Z_{T+1}^{*Z}\right) + \mathsf{V}\left(Z_{T+1}^{*X} - Z_{T+1}^{*Z}\right) \\ & \geq & \mathsf{V}\left(Z_{T+1} - Z_{T+1}^{*Z}\right) \;=\; V_X \end{array}$$

De plus on peut montrer qu'il y a inégalité stricte dès que $\rho_1 \neq \rho_2$.
Ainsi, la prévision fondée sur les termes agrégés est en général moins bonne que celle fondée sur l'ensemble des termes, bien que les deux séries soient non corrélés.