ENSAE - 2ème année

Séries temporelles linéaires
Examen 2017-2018

Durée : 2 heures. Sans document.

Les exercices sont indépendants. Il est demandé de justifier les réponses de façon concise.

Exercice 1 Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées.

1. Cette suite $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est-elle toujours strictement stationnaire ? Est-elle ergodique ? Est-elle toujours stationnaire au second ordre ? Est-elle toujours un bruit blanc ?
2. On suppose que $EX_t = m$ et $\mathrm{Var}X_t = \sigma^2$ existent, avec $\sigma^2 \neq 0$, et on pose $Y_t = X_0 - X_t$ pour $t \geq 1$.
   (a) Calculer EY_t, $\mathrm{Var}Y_t$ et $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_s)$ pour $t, s \geq 1$. La suite $(Y_t)_{t\geq 1}$ est-elle stationnaire ?
   (b) Quelle est la limite presque sûre de $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Y_t$ quand $n \to \infty$? La suite $(Y_t)_{t\geq 1}$ est-elle ergodique ?

Exercice 2 La figure 1 représente les autocorrélations et autocorrélations partielles empiriques d'une série temporelle $X_1, \dots X_n$ de longueur $n = 300$.

1. Que représentent les lignes en pointillés dans la figure ? Quel modèle proposez-vous pour la série temporelle (X_t) ?
2. Calculez les autocorrélations théoriques du modèle

$$X_t = aX_{t-q} + \epsilon_t$$

   où (ϵ_t) est un bruit blanc, $|a| < 1$ et $q \geq 1$. Donner l'estimateur des moindres carrés (MCO) du paramètre a.

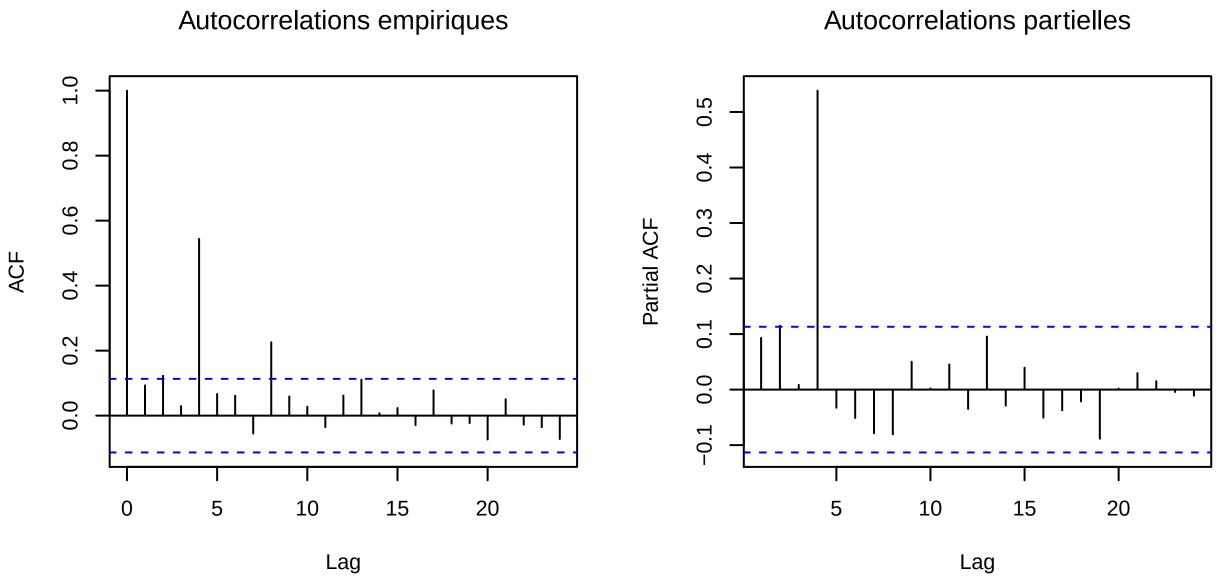

FIGURE 1 – Corrélogramme et corrélogramme partiel.

Exercice 3 Soit $(\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}, \epsilon_{3t})'$ un bruit blanc, et $X_t = (X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})'$ satisfaisant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_{1t} & = & aX_{2t} + \epsilon_{1t} \\ X_{2t} & = & bX_{3t} + \epsilon_{2t} \\ X_{3t} & = & X_{3,\,t-1} + \epsilon_{3t} \end{array} \right.$$

1. Pour quelles valeurs de a et b le processus X_t est-il cointégré ? Quel est son rang de cointégration ?
2. Ecrire ce système sous forme VAR, puis à correction d'erreur VECM.

Exercice 4 Soit le VAR(1) de dimension 3, $X_t = (X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})'$, de la forme

$$X_t = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} X_{t-1} + \epsilon_t$$

avec (ϵ_t) un bruit blanc de variance Σ. Pour quelles valeurs de a, b, c, d et Σ a-t-on à la fois

1. (X_t) est stationnaire non anticipatif ;
2. $(X_{2t}, X_{3t})'$ ne cause pas (X_{1t}) au sens de Granger ;
3. $(X_{1t}, X_{3t})'$ cause (X_{2t}) au sens de Granger ;
4. il n'y a aucune causalité instantanée entre les composantes.