ENSAE 2A

Séries temporelles linéaires

TD n$^\circ 2$

Pour toute remarque, contacter jerome.trinh@ensae.fr

Exercice 1 :

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire du second ordre tel que la matrice de variance du vecteur $(X_{t-1},\ldots,X_{t-m+1})$ soit inversible pour $m\in\mathbb{N}^*$.

On note H_m l'espace de Hilbert engendré par $\{1,X_{t-1},\ldots,X_{t-m+1}\}$ et, pour toute variable aléatoire Y, $\widetilde{Y}$ sa projection sur H_m. On considère $\rho(m)=\mathbb{C}\text{orr}\left(X_t-\widetilde{X_t},X_{t-m}-\widetilde{X_{t-m}}\right)$ le coefficient d'auto-corrélation partielle d'ordre m de X et on note $r(m)$ le coefficient de X_{t-m} dans la régression de X_t sur $(1,X_{t-1},\ldots,X_{t-m})$. L'objectif est de montrer que $\rho(m)=r(m)$.

Q1. On note pour tout $t\in\mathbb{Z}$

$$\widetilde{X_t}=a_0+a_1X_{t-1}+\ldots+a_{m-1}X_{t-m+1}$$
$$\widetilde{X_{t-m}}=b_0+b_1X_{t-1}+\ldots+b_{m-1}X_{t-m+1}$$

a) Montrer que $(a_1,\ldots,a_{m-1})=(b_{m-1},\ldots,b_1)$

$\widetilde{X_t}$ est la projection orthogonale de X_t sur $H_m=\text{Vect}(1,X_{t-1},\ldots,X_{t-m+1})$ donc par définition $(X_t-\widetilde{X_t})$ est orthogonal à H_m, et en particulier la première condition d'orthogonalité

$$(X_t-\widetilde{X_t})\perp 1 \;\Leftrightarrow\; \mathbb{E}(X_t-\widetilde{X_t})=0$$

donc

$$\widetilde{X_t}=a_0+a_1X_{t-1}+\ldots+a_{m-1}X_{t-m+1}$$
$$\mathbb{E}(X_t)=\mathbb{E}(\widetilde{X_t})=a_0+a_1\mathbb{E}(X_{t-1})+\ldots+a_{m-1}\mathbb{E}(X_{t-m+1})$$

comme $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ (ci-après (X_t)) est stationnaire, $\mathbb{E}(X_t)=\mathbb{E}(X_s)\ \forall(t,s)\in\mathbb{Z}^2$ donc

$$a_0=(1-a_1-\ldots-a_{m+1})\mathbb{E}(X_t)$$

On a également les m conditions d'orthogonalités restantes

$$\forall j=1,\ldots,m-1:\;\;(X_t-\widetilde{X_t})\perp X_{t-j}\;\Leftrightarrow\;\mathbb{E}\left[(X_t-\widetilde{X_t})X_{t-j}\right]=0$$

soit

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(X_tX_{t-j}) & = & \mathbb{E}(\widetilde{X_t}X_{t-j})\\
& = & \mathbb{E}(a_0X_{t-j}+a_1X_{t-1}X_{t-j}+\ldots+a_{m-1}X_{t-m+1}X_{t-j})\\
& = & a_0\mathbb{E}(X_{t-j})+a_1\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j})+\ldots+a_{m-1}\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j})\\
& = & (1-a_1+\ldots+a_{m-1})\mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-j})+a_1\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j})+\ldots\\
& & +\,a_{m-1}\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j})\\
& = & \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-j})+a_1[\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j})-\mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-j})]+\ldots\\
& & +\,a_{m-1}[\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j})-\mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-j}]
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}(X_tX_{t-j})-\mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-j}) & = & a_1[\mathbb{E}(X_{t-1}X_{t-j})-\mathbb{E}(X_{t-1})\mathbb{E}(X_{t-j})]+\ldots\\
& & +\,a_{m-1}[\mathbb{E}(X_{t-m+1}X_{t-j})-\mathbb{E}(X_{t-m})\mathbb{E}(X_{t-j}]
\end{array}$$

Ce que l'on peut noter, comme $\text{Cov}(X_t,X_{t-h})=\gamma_X(h)\ \forall h\in\mathbb{Z}$ car (X_t) est stationnaire

$$\gamma_X(j)=a_1\gamma_X(j-1)+\ldots+a_{m-1}\gamma_X(j-m+1)\;\;\forall j=1,\ldots,m-1$$

ou encore matriciellement

$$\begin{pmatrix}\gamma_X(1)\\ \vdots\\ \gamma_X(m-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \dots & \gamma_X(m-2)\\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \dots & \gamma_X(m-1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_X(m-2) & \gamma_X(m-1) & \dots & \gamma_X(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_{m-1}\end{pmatrix}$$

soit

$$\begin{pmatrix}\gamma_X(1)\\ \vdots\\ \gamma_X(m-1)\end{pmatrix} = \Gamma_{m-1}\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_{m-1}\end{pmatrix} \tag{1}$$

où

$$\Gamma_{m-1} = \begin{pmatrix}\gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \dots & \gamma_X(m-2)\\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \dots & \gamma_X(m-1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \gamma_X(m-2) & \gamma_X(m-1) & \dots & \gamma_X(0)\end{pmatrix} = \mathbb{V}(X_{t-1},\dots,X_{t-m+1}) \;\; \forall\, t$$

De la même manière on a $(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}) \perp 1$ donc, comme

$$\widetilde{X_{t-m}} = b_0 + b_1 X_{t-1} + \ldots + b_{m-1} X_{t-m+1}$$

on a

$$b_0 = (1 - b_1 - \ldots - b_{m-1})\mathbb{E}(X_t)$$

et aussi

$$\forall j = 1,\dots,m-1 : \;\; (X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}) \perp X_{t-j} \;\Leftrightarrow\; \mathbb{E}\left[(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})X_{t-j}\right] = 0$$

on obtient donc, de manière analogue à précedemment

$$\gamma_X(m-j) = b_1\gamma_X(j-1) + \ldots + b_{m-1}\gamma_X(j-m+1) \;\; \forall j = 1,\dots,m-1$$

ou matriciellement (en rangeant les j de façon décroissante)

$$\begin{pmatrix}\gamma_X(1)\\ \vdots\\ \gamma_X(m-1)\end{pmatrix} = \Gamma_{m-1}\begin{pmatrix}b_{m-1}\\ \vdots\\ b_1\end{pmatrix} \tag{2}$$

Par hypothèse, Γ_{m-1} est inversible, donc (1) et (2) conduisent à

$$\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_{m-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_{m-1}\\ \vdots\\ b_1\end{pmatrix}$$

b) Montrer que $\mathbb{V}(\widetilde{X_t}) = \mathbb{V}(\widetilde{X_{t-m}})$.
En déduire que $\mathbb{V}(X_t - \widetilde{X_t}) = \mathbb{V}(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})$.

Pour tout $t \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(\widetilde{X_t}) & = & \mathbb{V}(a_1 X_{t-1} + \ldots + a_{m-1} X_{t-m+1}) \\
& = & \mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m+1} \end{pmatrix}\right) \text{ où } \cdot \text{ est l'opérateur du produit scalaire} \\
& = & \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_{m-1} \end{pmatrix} \mathbb{V}\begin{pmatrix} X_{t-1} \\ \vdots \\ X_{t-m+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{m-1} \end{pmatrix} \\
& = & \begin{pmatrix} b_{m-1} & \ldots & b_1 \end{pmatrix} \mathbb{V}\begin{pmatrix} X_{t-m+1} \\ \vdots \\ X_{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} \text{ car } \left\{ \begin{array}{l} \text{cf. Q1a} \\ (X_t) \text{ est stationnaire} \end{array} \right. \\
& = & \mathbb{V}\left(\begin{pmatrix} b_{m-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{t-m+1} \\ \vdots \\ X_{t-1} \end{pmatrix}\right) \\
& = & \mathbb{V}(b_1 X_{t-1} + \ldots + b_{m-1} X_{t-m+1}) \\
& = & \mathbb{V}(\widetilde{X_{t-m}})
\end{array}$$

De plus, on a $\forall t$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}(X_t) & = & \mathbb{V}(\widetilde{X_t} + X_t - \widetilde{X_t}) \\
& = & \mathbb{V}(\widetilde{X_t}) + \mathbb{V}(X_t - \widetilde{X_t}) + 2\mathsf{Cov}(\widetilde{X_t}, X_t - \widetilde{X_t}) \\
& = & \mathbb{V}(\widetilde{X_t}) + \mathbb{V}(X_t - \widetilde{X_t}) + 2\left[\mathbb{E}(\widetilde{X_t}(X_t - \widetilde{X_t})) - \mathbb{E}(\widetilde{X_t})\mathbb{E}(X_t - \widetilde{X_t})\right] \\
& & \text{comme } (X_t - \widetilde{X_t}) \perp \widetilde{X_t} \Rightarrow \mathbb{E}(\widetilde{X_t}(X_t - \widetilde{X_t})) = 0, \text{ et } \mathbb{E}(X_t - \widetilde{X_t}) = 0 \\
\mathbb{V}(X_t) & = & \mathbb{V}(\widetilde{X_t}) + \mathbb{V}(X_t - \widetilde{X_t})
\end{array}$$

On peut donc écrire

$$\mathbb{V}(\widetilde{X_t}) + \mathbb{V}(X_t - \widetilde{X_t}) = \mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(X_{t-m}) = \mathbb{V}(\widetilde{X_{t-m}}) + \mathbb{V}(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})$$

et donc

$$\mathbb{V}(X_t - \widetilde{X_t}) = \mathbb{V}(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})$$

Q2. On note pour tout $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = c_0 + c_1 X_{t-1} + \ldots + c_m X_{t-m} + u_t$$

où u_t est orthogonal à $1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m}$; ainsi par définition $r(m) = c_m$.

a) Montrer que $X_t - \widetilde{X_t} = c_m(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}) + u_t$.

En notant que

$$\widetilde{X_t} = \mathsf{EL}(X_t | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1}) \quad \text{et} \quad \widetilde{X_{t-m}} = \mathsf{EL}(X_{t-m} | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1})$$

on a alors

$$\begin{array}{rcl}
\widetilde{X_t} & = & \mathsf{EL}(c_0 + c_1 X_{t-1} + \ldots + c_m X_{t-m} + u_t | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m+1}) \\
& = & c_0 + c_1 X_{t-1} + \ldots + c_{m-1} X_{t-m+1} + c_m \mathsf{EL}(X_{t-m} | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t+m-1}) + 0 \\
& & \text{car } \mathsf{EL}(u_t | 1, X_{t-1}, \ldots X_{t-m+1}) = 0 \\
\widetilde{X_t} & = & c_0 + c_1 X_{t-1} + \ldots + c_{m-1} X_{t-m+1} + c_m \widetilde{X_{t-m}}
\end{array}$$

Par conséquent

$$X_t - \widetilde{X_t} = c_m(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}) + u_t$$

b) En déduire que $\mathbb{E}\left((X_t - \widetilde{X_t})(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})\right) = c_m \mathbb{V}\left(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}\right)$.

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left((X_t - \widetilde{X_t})(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})\right) &= \mathbb{E}\left(c_m(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})^2 + u_t(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})\right) \\
&= c_m \mathbb{E}\left((X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})^2\right) + \mathbb{E}\left(u_t(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})\right)
\end{aligned}$$

Par définition $u_t \in H_{m+1}^{\perp}$.
Par ailleurs, $X_{t-m} \in H_{m+1}$ et $\widetilde{X_{t-m}} \in H_{m+1}$ donc $X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}} \in H_{m+1}$
On a donc $u_t \perp X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}$, donc $\mathbb{E}\left(u_t(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})\right) = 0$
De plus, puisque $\mathbb{E}(X_{t-m}) = \mathbb{E}(\widetilde{X_{t-m}}) \Leftrightarrow \mathbb{E}\left(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}\right) = 0$ donc

$$\mathbb{E}\left((X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})^2\right) = \mathbb{E}\left((X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})^2\right) - \mathbb{E}\left(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}\right)^2 = \mathbb{V}\left(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}\right)$$

d'où

$$\mathbb{E}\left((X_t - \widetilde{X_t})(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})\right) = c_m \mathbb{V}\left(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}\right)$$

Q3. En déduire que $\rho(m) = r(m)$. À quel théorème d'économétrie cette égalité correspond-elle ?

À moins que le processus ne soit dégénéré, on a $\mathbb{V}\left(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}\right) > 0$ et donc

$$\begin{aligned}
r(m) &= c_m \\
&= \frac{\mathbb{E}\left((X_t - \widetilde{X_t})(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})\right)}{\mathbb{V}\left(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}\right)} \\
&= \frac{\mathbb{E}\left((X_t - \widetilde{X_t} - [\mathbb{E}(X_t) - \mathbb{E}(\widetilde{X_t})])(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}} - [\mathbb{E}(X_{t-m}) - \mathbb{E}(\widetilde{X_{t-m}})])\right)}{\sqrt{\mathbb{V}\left(X_t - \widetilde{X_t}\right)}\sqrt{\mathbb{V}\left(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}\right)}} \\
& \quad \text{car} \begin{cases} \mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\widetilde{X_t}) \ \forall\ t \\ \mathbb{V}(X_t - \widetilde{X_t}) = \mathbb{V}(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}) \text{ (cf. Q1b)} \end{cases} \\
&= \frac{\text{Cov}\left((X_t - \widetilde{X_t})(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}})\right)}{\sqrt{\mathbb{V}\left(X_t - \widetilde{X_t}\right)}\sqrt{\mathbb{V}\left(X_{t-m} - \widetilde{X_{t-m}}\right)}} \\
r(m) &= \rho(m)
\end{aligned}$$

L'autocorrélation partielle de X_t d'ordre m, c'est-à-dire la corrélation entre les projections de X_t et de X_{t-m} sur $H_m^{\perp}$, soit le coefficient de la régression de la projection de X_t sur $H_m^{\perp}$ sur la projection de X_{t-m} sur $H_m^{\perp}$, s'obtient aussi en calculant le coefficient de X_{t-m} dans la régression de X_t sur $1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-m}$. Il s'agit d'un cas particulier du théorème de Frisch-Waugh.

Rappel d'économétrie :
(Théorème de Frisch-Waugh) Soit le modèle de régression linéaire de Y sur X_1 et X_2 tel que

$$Y = X_1\beta_1 + X_2\beta_2 + u$$

L'estimateur de β_2 sera le même que dans le modèle de régression linéaire suivant :

$$M_{X_1}Y = M_{X_1}X_2\beta_2 + M_{X_1}u$$

où $M_{X_1} = I - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'$ est la matrice de projection sur le complément orthogonal de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de X_1.
En pratique, en remarquant que $M_{X_1}Z = Z - X_1(X_1'X_1)^{-1}X_1'Z$ est le vecteur des résidus de la régression d'un vecteur Z sur X_1, le théorème signifie qu'estimer le coefficient associé à X_2 dans la régression de Y sur X_1 et X_2 revient à estimer le coefficient de la régression des résidus de la régression de Y sur X_1 sur les résidus de la régression de X_2 sur X_1.

Exercice 2 :

On considère le processus défini par $\forall\ t \in \mathbb{Z}$, $X_t = \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}$ où $(\epsilon)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible et $\theta \in]-1, +1[$.

Q1. Montrer que X est stationnaire au second ordre et calculer sa fonction d'autocovariance.

- $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\epsilon_t) - \theta\mathbb{E}(\epsilon_{t-1}) = 0$ ne dépend pas de t
- $\mathbb{V}(X_t) = \mathbb{V}(\epsilon_t) + \theta^2\mathbb{V}(\epsilon_{t-1}) = (1+\theta^2)\sigma^2$ ne dépend pas de t
- $\text{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \text{Cov}(\epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-h} - \theta\epsilon_{t-h-1}) = \begin{cases} -\theta\sigma^2 & \text{si } h \pm 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases}$

  ne dépend pas de t

donc $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire au second ordre et a pour fonction d'auto-covariance

$$\gamma_X(h) = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ -\theta\sigma^2 & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases}$$

Q2. Soient $\phi_T, \phi_{T-1}, \ldots, \phi_1$ les coefficients de la régression linéaire $\hat{X}_{T+1}$ de X_{T+1} sur $(X_T, X_{T-1}, \ldots, X_1)$. Écrire les conditions d'orthogonalité entre $\left(X_{T+1} - \hat{X}_{T+1}\right)$ et $X_T, \ldots, X_1$.
En déduire que $(\phi_1, \ldots, \phi_T)$ vérifie

$$\begin{cases} (1+\theta^2)\phi_T - \theta\phi_{T-1} &= -\theta & \text{si } k = T \\ -\theta\phi_{k-1} + (1+\theta^2)\phi_k - \theta\phi_{k+1} &= 0 & \text{si } k \in \{2, \ldots, T-1\} \\ (1+\theta^2)\phi_1 - \theta\phi_2 &= 0 & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

On a alors par définition $\hat{X}_{T+1} = \sum_{k=1}^{T} \phi_k X_k$ ainsi que les conditions d'orthogonalités : $\forall\ k \in \{1, \ldots, T\}$

$$\text{Cov}\left(X_{T+1} - \hat{X}_{T+1}, X_k\right) = 0$$

donc

$$\text{Cov}\left(X_{T+1} - \sum_{l=1}^{T} \phi_l X_l, X_k\right) = 0$$

$$\text{Cov}(X_{T+1}, X_k) - \sum_{l=1}^{T} \phi_l \text{Cov}(X_l, X_k) = 0$$

$$\gamma_X(T+1-k) - \sum_{l=1}^{T} \phi_l \gamma_X(l-k) = 0$$

En tenant compte de l'expression de γ_X on obtient alors

$$\begin{cases} -\theta\sigma^2 - \phi_T(1+\theta^2)\sigma^2 + \phi_{T-1}\theta\sigma^2 &= 0 \quad \text{si } k = T \\ -\phi_{k-1}\theta\sigma^2 + \phi_k(1+\theta^2)\sigma^2 - \phi_{k+1}\theta\sigma^2 &= 0 \quad \text{si } k \in \{2,\dots,T-1\} \\ \phi_1(1+\theta^2)\sigma^2 - \phi_2\theta\sigma^2 &= 0 \quad \text{si } k = 1 \end{cases}$$

et comme $\sigma^2 > 0$

$$\begin{cases} (1+\theta^2)\phi_T - \theta\phi_{T-1} &= -\theta \quad \text{si } k = T \\ -\theta\phi_{k-1} + (1+\theta^2)\phi_k - \theta\phi_{k+1} &= 0 \quad \text{si } k \in \{2,\dots,T-1\} \\ (1+\theta^2)\phi_1 - \theta\phi_2 &= 0 \quad \text{si } k = 1 \end{cases}$$

Q3. Déterminer la fonction d'autocorrélation partielle de X.

Par définition, l'autocorrélation partielle de X d'ordre T s'écrit :

$$\rho(T) = \mathbb{C}\mathrm{orr}(X_t - \mathsf{EL}(X_t|X_{t-1},\dots,X_{t-T+1}), X_{t-T} - \mathsf{EL}(X_{t-T}|X_{t-1},\dots,X_{t-T+1}))$$

(Comme $\mathbb{E}(X_t) = 0$ il n'est pas nécessaire de régresser sur $1, X_{t-1}, \dots, X_{t-T+1}$.)
Remarquons que $r(T)$ est aussi égal au coefficient de X_{t-T} dans la régression de X_t sur $X_{t-1},\dots,X_{t-T}$, mais aussi au coefficient de X_1 de la régression de X_{T+1} sur $X_T,\dots,X_1$. Donc $r(T) = \phi_1$.
Notons aussi que si on pose $\phi_0 = 0$ et $\phi_{T+1} = -1$, ϕ_t avec $t = 1,\dots,T$ satisfait l'équation d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

$$\theta\phi_{t+1} - (1+\theta^2)\phi_t + \theta\phi_{t-1} = 0 \quad \text{pour } t \in \{1,\dots,T\} \tag{3}$$

que l'on peut résoudre en résolvant le polynôme caractéristique correspondant, soit

$$X^2 - \frac{1+\theta^2}{\theta}X + 1 = 0$$

qui a pour discriminant $\Delta = \left(\frac{1+\theta^2}{\theta}\right)^2 - 4 = \frac{1-2\theta^2+\theta^4}{\theta^2} = \left(\frac{1-\theta^2}{\theta}\right)^2 > 0$ et donc les racines $r_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\theta^2}{\theta} - \frac{1-\theta^2}{\theta}\right] = \theta$ et $r_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1+\theta^2}{\theta} + \frac{1-\theta^2}{\theta}\right] = \theta^{-1}$. (3) a donc pour terme général, avec a et b constantes

$$\phi_t = a\theta^t + b\theta^{-t}$$

Grâce aux conditions aux bornes $\phi_0 = 0$ et $\phi_{T+1} = -1$ on a

$$a + b = 0 \quad \text{et} \quad a\theta^{T+1} + b\theta^{-T-1} = -1 \;\Leftrightarrow\; a = -b = \frac{\theta^{T+1}}{1-\theta^{2(T+1)}}$$

et donc

$$\phi_t = \frac{\theta^{T+1}}{1-\theta^{2(T+1)}}(\theta^t - \theta^{-t})$$

En particulier

$$\rho(T) = \phi_1 = \frac{\theta^{T+1}}{1-\theta^{2(T+1)}}(\theta - \theta^{-1}) = -\frac{\theta^T(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(T+1)}} = -\frac{\theta^T(1+\theta)(1-\theta)}{1-\theta^{2T+2}} = -\frac{\theta^2(1+\theta)}{\sum_{k=0}^{T+1}\theta^k}$$

Exercice 3 :

Soit $X_t = \eta_t\eta_{t-3}$ où (η_t) est un bruit blanc fort de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Q1. Le processus (X_t) est-il stationnaire ? est-il ergodique ?

(X_t) étant une transformation fixe de (η_t) qui est strictement stationnaire et ergodique (car c'est un bruit blanc fort), (X_t) est aussi strictement stationnaire et ergodique

Q2. Quel modèle de type ARMA suit le processus (X_t) ? Quel type de modèle ARMA suit le processus (X_t^2) ?

On a :

- $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\eta_t\eta_{t-3}) = \mathbb{E}(\eta_t)\mathbb{E}(\eta_{t-3}) = 0$ car les (η_t) sont non corrélés.
  Cov$(X_t, X_{t-h}) = \mathbb{E}(X_t X_{t-h}) - \mathbb{E}(X_t)\mathbb{E}(X_{t-h}) = \mathbb{E}(\eta_t\eta_{t-3}\eta_{t-h}\eta_{t-h-3}) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \forall\, h \neq 0 \end{cases}$
  X_t est donc un bruit blanc, ou encore un ARMA(0,0).
- $\mathbb{E}(X_t^2) = \mathbb{V}(X_t) = 1$
  Cov$(X_t^2, X_{t-h}^2) = \mathbb{E}(X_t^2 X_{t-h}^2) - \mathbb{E}(X_t^2)\mathbb{E}(X_{t-h}^2) = \mathbb{E}(\eta_t^2\eta_{t-3}^2\eta_{t-h}^2\eta_{t-h-3}^2) - 1$
  or $\mathbb{E}(\eta_t^2\eta_{t-3}^2\eta_{t-h}^2\eta_{t-h-3}^2) = \begin{cases} \mathbb{E}(\eta_t^4)\mathbb{E}(\eta_{t-3}^4) = 3^2 & \text{si } h = 0 \\ \mathbb{E}(\eta_{t-3}^4)\mathbb{E}(\eta_t^2)\mathbb{E}(\eta_{t-6}^2) = 3 & \text{si } h = -3 \\ \mathbb{E}(\eta_t^4)\mathbb{E}(\eta_{t-3}^2)\mathbb{E}(\eta_{t-6}^2) = 3 & \text{si } h = 3 \\ \mathbb{E}(\eta_t^2)\mathbb{E}(\eta_{t-3}^2)\mathbb{E}(\eta_{t-h}^2)\mathbb{E}(\eta_{t-h-3}^2) = 1 & \forall\, h \notin \{-3, 0, 3\} \end{cases}$
  et en particulier $\mathbb{E}(\eta_t^2\eta_{t-3}^2\eta_{t-h}^2\eta_{t-h-3}^2) = 1\ \forall\, h > 3$ donc Cov$(X_t^2, X_{t-h}^2) = 0\ \forall\, h > 3$. (X_t^2) suit donc une moyenne mobile d'ordre 3.

Q3. Soit des observations de (X_t). Comment sont calculées les autocorrélations empiriques $\hat{\rho}_X(h)$ de ces observations (avec $0 \leq h < n$ et on supposera qu'on observe bien $X_{1-h}, \ldots, X_{n+h}$) ? Vers quoi converge $\hat{\rho}_X(h)$ lorsque $n \to \infty$?

Les autocorrélations empiriques sont définies par $\hat{\rho}_X(h) = \hat{\gamma}_X(h)/\hat{\gamma}_X(0)$ où on a les autocovariances empiriques

$$\hat{\gamma}_X(h) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X}_n)(X_{t-|h|} - \overline{X}_n)$$

pour $|h| < n$, avec la moyenne empirique $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$. D'après le théorème ergodique, comme (X_t) est ergodique, $\{(X_t - \overline{X}_n)(X_{t-|h|} - \overline{X}_n)\}$ l'est aussi. On a donc, $\forall\, h \in [0, n[$ et $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X}_n)(X_{t-|h|} - \overline{X}_n) &\xrightarrow{p} \mathbb{E}[(X_1 - \overline{X}_1)(X_{1-|h|} - \overline{X}_1)] \\ \hat{\gamma}_X(h) &\xrightarrow{p} \gamma_X(h) \\ \hat{\rho}_X(h) &\xrightarrow{p} \rho_X(h) = \begin{cases} 1 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Q4. Quelle est la loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\rho}_X(h)$? (on supposera qu'un TCL s'applique) Comparer avec celle des autocorrélations empiriques d'un bruit blanc fort.

Pour $h \neq 0$ (le cas $h = 0$ est trivial), une extension du TCL donne

$$\sqrt{n}\hat{\rho}_X(h) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(\sqrt{n}\hat{\rho}_X(h))\right)$$

or

$$\begin{array}{rl}
& \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(\sqrt{n}\hat{\rho}_X(h)) \\
= & \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(\sqrt{n}\hat{\gamma}_X(h)/\hat{\gamma}_X(0)) \\
= & \lim_{n\to\infty} \mathbb{V}\left(\sqrt{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{(X_t-\overline{X}_n)(X_{t-|h|}-\overline{X}_n)}{\hat{\gamma}_X(0)}\right) \\
= & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t,s=1}^{n} \mathsf{Cov}\left(\frac{(X_t-\overline{X}_n)(X_{t-|h|}-\overline{X}_n)}{\hat{\gamma}_X(0)}, \frac{(X_s-\overline{X}_n)(X_{s-|h|}-\overline{X}_n)}{\hat{\gamma}_X(0)}\right) \\
= & \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{\ell=1-t}^{n-t} \mathsf{Cov}\left(\frac{(X_t-\overline{X}_n)(X_{t-|h|}-\overline{X}_n)}{\hat{\gamma}_X(0)}, \frac{(X_{t+\ell}-\overline{X}_n)(X_{t+\ell-|h|}-\overline{X}_n)}{\hat{\gamma}_X(0)}\right) \\
& \text{par le théorème ergodique, comme le terme } \sum_\ell \mathsf{Cov}(\cdot) \text{ est une transformation fixe de } (X_t), \\
= & \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathsf{Cov}\left(\frac{(X_1-\mathbb{E}[X_1])(X_{1-|h|}-\mathbb{E}[X_1])}{\gamma_X(0)}, \frac{(X_{1+\ell}-\mathbb{E}[X_1])(X_{1+\ell-|h|}-\mathbb{E}[X_1])}{\gamma_X(0)}\right)
\end{array}$$

Comme $\mathbb{E}[X_1]=0$ et $\gamma_X(0)=\mathbb{V}(X)=1$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(\sqrt{n}\hat{\rho}_X(h)) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \mathsf{Cov}\left(X_1X_{1-|h|}, X_{1+\ell}X_{1+\ell-|h|}\right)$$

Comme $\forall\ \ell \neq 0,\ \ \mathsf{Cov}\left(X_1X_{1-|h|}, X_{1+\ell}X_{1+\ell-|h|}\right) = \mathbb{E}(X_1X_{1-|h|}X_{1+\ell}X_{1+\ell-|h|}) = 0$,

$$\begin{array}{rcl}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{V}(\sqrt{n}\hat{\rho}_X(h)) & = & \mathbb{V}(X_1X_{1-|h|}) \\
& = & \mathbb{E}(X_1^2X_{1-|h|}^2) \\
& = & \mathbb{E}(\eta_1^2\eta_{-2}^2\eta_{1-|h|}^2\eta_{-2-|h|}^2) \\
& = & \left\{\begin{array}{ll} \mathbb{E}(\eta_1^2)\mathbb{E}(\eta_{-2}^4)\mathbb{E}(\eta_{-5}^2) & = 3 \quad \text{si } |h|=3 \\ \mathbb{E}(\eta_1^2)\mathbb{E}(\eta_{1-|h|}^2)\mathbb{E}(\eta_{-2}^2)\mathbb{E}(\eta_{-2-|h|}^2) & = 1 \quad \text{si } |h|\neq 3 \end{array}\right.
\end{array}$$

Et donc

$$\sqrt{n}\hat{\rho}_X(h) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \left\{\begin{array}{ll} 3 & \text{si } |h|=3 \\ 1 & \text{si } |h|\neq 3 \end{array}\right.\right)$$

Un bruit blanc fort a quant à lui la variance asymptotique de ses autocorrélations empiriques toujours égale à 1.