

## Macroéconomie 1 (6/6)

# Politique budgétaire dans le modèle à générations imbriquées (Weil)

Olivier Loisel

ENSAE

Septembre — Décembre 2022

## But, motivation, et limites du chapitre

- Ce chapitre présente le modèle à générations imbriquées et étudie les effets de la politique budgétaire dans ce modèle.
- Contrairement au modèle de Cass-Koopmans-Ramsey, ce modèle ne suppose pas les générations liées par altruisme et héritage : quelles en sont les conséquences pour la politique budgétaire ?
- Comme au chapitre 5, on se restreint à l'analyse des dépenses publiques
  - n'affectant pas la fonction de production,
  - n'affectant pas l'utilité de la consommation,
  - financées par impôt forfaitaire ou par émission de dette (en supposant que le risque de défaut souverain est nul).
- Comme au chapitre 5, on se restreint à l'analyse positive (et non normative) des effets de la politique budgétaire.

# Le modèle à générations imbriquées dans la littérature

- Premières versions en **temps discret** : Allais (1947), Samuelson (1958), Diamond (1965).
- Première version en **temps continu** : Blanchard (1985), qui suppose que la durée de vie des ménages est **finie**.
- Dans ce chapitre, on considère la version en temps continu de Weil (1989), qui suppose que la durée de vie des ménages est **infinie**, ce qui rend cette version plus simple que celle de Blanchard (1985).
- Lorsque le taux de croissance de la population est nul, cette version coïncide avec le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey.

# Allais, Blanchard

- **Maurice F. C. Allais** : économiste français, né en 1911 à Paris, mort en 2010 à Saint-Cloud, professeur à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris à partir de 1944, lauréat du prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en 1988 "*for his pioneering contributions to the theory of markets and efficient utilization of resources*".
- **Olivier J. Blanchard** : économiste français, né en 1948 à Amiens, professeur au MIT depuis 1983.

# Diamond, Samuelson

- **Peter A. Diamond** : économiste américain, né en 1940 à New York, professeur au MIT depuis 1966, lauréat (avec Dale T. Mortensen et Christopher A. Pissarides) du prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en 2010 "*for their analysis of markets with search frictions*".
- **Paul A. Samuelson** : économiste américain, né en 1915 à Gary, mort en 2009 à Belmont, professeur au MIT à partir de 1940, lauréat du prix de la Banque de Suède en sciences économiques en mémoire d'Alfred Nobel en 1970 "*for the scientific work through which he has developed static and dynamic economic theory and actively contributed to raising the level of analysis in economic science*".

## Aperçu général du modèle \*

- Les entreprises louent du capital (détenu par les ménages) et emploient du travail (fourni par les ménages) pour produire des biens.
- Les biens produits par les entreprises sont utilisés pour
  - la consommation des ménages,
  - la consommation du gouvernement,
  - l'investissement en nouveau capital.
- Le taux d'épargne (quantité de biens épargnés—investis par les ménages / quantité de biens consommés ou épargnés—investis par les ménages) est endogène, choisi optimalement par les ménages.
- Le capital évolue dans le temps en fonction de l'investissement et de la dépréciation du capital.

(Dans les pages dont le titre est suivi d'un astérisque, en bleu : ajouts par rapport au chapitre 5 ; en rouge : remplacements par rapport au chapitre 5.)

# Bien, agents privés, marchés \*

- Le bien, les agents privés et les marchés sont identiques à ceux du chapitre 5, à une exception près.
- Cette exception concerne les ménages : dans le modèle à générations imbriquées, il existe différentes générations de ménages, qui ne sont pas liées entre elles par héritage et altruisme.
- Comme au chapitre 5, il y a donc, dans ce modèle,
  - un seul type de bien,
  - deux sortes d'agents privés (ménages, entreprises),
  - cinq marchés (biens, travail, capital, prêts, dette publique).

# Variables exogènes \*

## ● Ni flux ni stocks :

- temps continu, indicé par  $t$ ,
- prix des biens  $\equiv$  numéraire = 1,
- (grand) nombre d'entreprises  $I$ .

## ● Flux :

- offre de travail = 1 par tête,
- dépenses publiques  $G_t$ ,
- impôts forfaitaires  $T_t$ .

## ● Stocks :

- capital agrégé initial  $K_0 > 0$ ,
- population  $L_t = L_0 e^{nt}$ , où  $L_0 > 0$  et  $n \geq 0$ ,
- paramètre de productivité  $A_t = A_0 e^{gt}$ , où  $A_0 > 0$  et  $g \geq 0$ ,
- montant réel total initial d'actifs  $e_\nu^v = 0$  d'un ménage né à la date  $\nu$ ,
- montant réel initial de la dette publique  $D_0$ .



## Variables endogènes \*

### ● Prix :

- coût réel d'usage du capital  $z_t$ ,
- salaire réel  $w_t$ ,
- taux d'intérêt réel  $r_t$ .

### ● Quantités — flux :

- production agrégée  $Y_t$ ,
- demande de travail agrégée  $N_t$ ,
- consommation  $c_t^\nu$  d'un ménage né à la date  $\nu$ .

### ● Quantités — stocks :

- capital agrégé  $K_t$  (sauf en  $t = 0$ ),
- montant réel d'actifs privés  $b_t^\nu$  d'un ménage né à la date  $\nu$ ,
- montant réel total d'actifs  $e_t^\nu$  d'un mén. né à la date  $\nu$  (sauf en  $t = \nu$ ),
- montant réel de la dette publique  $D_t$  (sauf en  $t = 0$ ).

# Agrégation des variables individuelles

- Pour toute variable individuelle  $x_t^\nu$ , on définit la variable agrégée

$$\bar{X}_t \equiv x_t^0 L_0 + \int_0^t x_t^\nu \dot{L}_\nu d\nu$$

ainsi que la variable agrégée par tête  $\bar{x}_t \equiv \frac{\bar{X}_t}{L_t}$ .

# Plan du chapitre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Conditions d'équilibre sur  $\kappa_t$  et  $\gamma_t$
- ④ Détermination de l'équilibre
- ⑤ Effets de la politique budgétaire
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

# Conditions d'équilibre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
  - Comportement des ménages
  - Comportement du gouvernement
  - Comportement des entreprises
  - Equilibre des marchés
- ③ Conditions d'équilibre sur  $\kappa_t$  et  $\gamma_t$
- ④ Détermination de l'équilibre
- ⑤ Effets de la politique budgétaire
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

## Utilité intertemporelle des ménages \*

- A la date  $\nu$ , l'**utilité intertemporelle** du ménage représentatif de la génération née à la date  $\nu$  est

$$U_\nu \equiv \int_\nu^{+\infty} e^{-\rho(t-\nu)} [\ln(c_t^\nu) + v(g_t)] dt$$

où

- $g_t \equiv \frac{G_t}{L_t}$  est, par hypothèse, indépendant de l'âge,
  - $\rho$  est le taux de préférence pour le présent ( $\rho > 0$ ),
  - $v$  est la fonction d'utilité instantanée des dépenses publiques.
- 
- La fonction d'utilité instantanée de la consommation  $u$  est donc telle que l'élasticité de substitution intertemporelle est constante, égale à 1.
- 
- “L'actualisation” de l'utilité instantanée au taux  $\rho$ , plutôt que  $\rho - n$ , et l'hypothèse  $e_\nu^\nu = 0$  traduisent l'**absence de lien intergénérationnel**.

## Actifs des ménages \*

- Comme au chapitre 5, chaque ménage peut détenir trois types d'actifs :
  - prêts aux autres ménages,
  - titres de propriété sur le capital,
  - dette publique.
- Comme au chapitre 5, les ménages doivent à l'équilibre être indifférents entre ces trois types d'actifs, donc

$$\begin{aligned} r_t &\equiv \text{taux d'intérêt réel sur les prêts aux ménages} \\ &= \text{taux de rendement réel des titres de propriété} \\ &= \text{taux d'intérêt réel sur la dette publique.} \end{aligned}$$

# Contrainte budgétaire des ménages I

- La **contrainte budgétaire instantanée** du ménage représentatif de la génération née à la date  $\nu$  est

$$\dot{e}_t^\nu = w_t - t_t + r_t e_t^\nu - c_t^\nu,$$

le salaire  $w_t$  et l'impôt forfaitaire  $t_t \equiv \frac{T_t}{L_t}$  étant indépendants de l'âge (le premier par résultat, le second par hypothèse).

- En réarrangeant les termes et en multipliant par l'exponentielle, on obtient

$$\left[ \dot{e}_t^\nu - r_t e_t^\nu \right] e^{-\int_\nu^t r_\tau d\tau} = (w_t - t_t - c_t^\nu) e^{-\int_\nu^t r_\tau d\tau}.$$

## Contrainte budgétaire des ménages II

- En intégrant entre  $\nu$  et  $T$  et en utilisant  $e_\nu^\nu = 0$ , on obtient alors

$$e_T^\nu e^{-\int_\nu^T r_\tau d\tau} = \int_\nu^T (w_t - t_t - c_t^\nu) e^{-\int_\nu^t r_\tau d\tau} dt.$$

- En passant à la limite  $T \rightarrow +\infty$ , on obtient la **contrainte budgétaire intertemporelle** du ménage représentatif né en  $\nu$

$$\int_\nu^{+\infty} c_t^\nu e^{-\int_\nu^t r_\tau d\tau} dt \leq \int_\nu^{+\infty} (w_t - t_t) e^{-\int_\nu^t r_\tau d\tau} dt$$

$$\text{si et seulement si} \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \left( e_T^\nu e^{-\int_\nu^T r_\tau d\tau} \right) \geq 0$$

(**contrainte de solvabilité** du ménage représentatif né en  $\nu$ ).



## Problème d'optimisation des ménages

- Le problème d'optimisation du ménage représentatif né en  $\nu$  est donc le suivant : à la date  $\nu$ , pour  $(r_t, w_t, g_t, t_t)_{t \geq \nu}$  et  $e_\nu^\nu = 0$  donnés,

$$\max_{(c_t^\nu)_{t \geq \nu}, (e_t^\nu)_{t > \nu}} \int_\nu^{+\infty} e^{-\rho(t-\nu)} [\ln(c_t^\nu) + \nu(g_t)] dt$$

sous les contraintes

- ①  $\forall t \geq \nu, c_t^\nu \geq 0$  (contrainte de positivité de la consommation),
- ②  $\forall t \geq \nu, \dot{e}_t^\nu = w_t - t_t + r_t e_t^\nu - c_t^\nu$  (contrainte budgétaire instantanée),
- ③  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( e_t^\nu e^{-\int_\nu^t r_\tau d\tau} \right) \geq 0$  (contrainte de solvabilité).

# Résolution du problème d'optimisation des ménages I

- La résolution de ce problème d'optimisation aboutit, par des calculs similaires à ceux du chapitre 2, aux conditions suivantes sur  $(c_t^\nu)_{t \geq \nu}$  et  $(e_t^\nu)_{t > \nu}$  :

①  $\frac{\dot{c}_t^\nu}{c_t^\nu} = r_t - \rho$  (**équation d'Euler**),

②  $\dot{e}_t^\nu = w_t - t_t + r_t e_t^\nu - c_t^\nu$  (contrainte budgétaire instantanée),

③  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( e_t^\nu e^{-\int_\nu^t r_\tau d\tau} \right) = 0$  (**condition de transversalité**).

## Résolution du problème d'optimisation des ménages II

- Les conditions 2 et 3 impliquent que la contrainte budgétaire intertemporelle est saturée à toute date après la naissance :  $\forall t \geq \nu$ ,

$$\int_t^{+\infty} c_s^\nu e^{-\int_t^s r_\tau d\tau} ds = e_t^\nu + h_t$$

où  $h_t \equiv \int_t^{+\infty} (w_s - t_s) e^{-\int_t^s r_\tau d\tau} ds$  est la valeur actualisée à la date  $t$  des revenus futurs nets d'impôt (indépendante de l'âge).

- L'équation d'Euler implique que  $\forall s \geq t \geq \nu$ ,  $c_s^\nu = c_t^\nu e^{\int_t^s (r_\tau - \rho) d\tau}$ .
- De ces deux résultats, on déduit que la consommation individuelle à une date donnée est proportionnelle à la richesse intertemporelle individuelle à cette même date (ce qui est une conséquence de l'hypothèse  $\theta = 1$ ) :

$$c_t^\nu = \rho(e_t^\nu + h_t).$$

## Contrainte budgétaire du gouvernement \*

- Comme au chapitre 5, avec  $d_t \equiv \frac{D_t}{L_t}$ , la **contrainte budgétaire instantanée** du gouvernement est

$$\dot{d}_t = (r_t - n)d_t + g_t - t_t,$$

sa **contrainte budgétaire intertemporelle** (supposée saturée) est

$$d_0 = \int_0^{+\infty} (t_t - g_t) e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} dt$$

et sa **contrainte de solvabilité** (également saturée) est

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ d_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} \right] = 0.$$

## Comportement des entreprises et équilibre des marchés \*

- Les entreprises sont modélisées comme au chapitre 2, donc leur comportement est caractérisé par les mêmes conditions du premier ordre qu'au chapitre 2.
- Les conditions d'équilibre des marchés s'écrivent :
  - pour le marché des biens :  $Y_t = \bar{C}_t + G_t + \dot{K}_t + \delta K_t$ ,
  - pour le marché du travail :  $N_t = L_t$ ,
  - pour les marchés du capital et des prêts :  $\bar{B}_t = K_t$ ,
  - pour le marché de la dette publique :  $\bar{E}_t = \bar{B}_t + D_t$ .

# Conditions d'équilibre sur $\kappa_t$ et $\gamma_t$

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Conditions d'équilibre sur  $\kappa_t$  et  $\gamma_t$ 
  - Obtention de la condition terminale
  - Obtention de l'équation différentielle en  $\dot{\kappa}_t$
  - Obtention de l'équation différentielle en  $\dot{\gamma}_t$
- ④ Détermination de l'équilibre
- ⑤ Effets de la politique budgétaire
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

## Aperçu général de la résolution du modèle \*

- Comme aux chapitres 2, 3, 4 et 5, on détermine d'abord les trajectoires d'équilibre  $(s_t)_{t \geq 0}$  et  $(f_t)_{t \geq 0}$  d'un stock et d'un flux clefs à l'aide
  - d'une équation diff. en  $\dot{s}_t$ , obtenue à partir de la contrainte budgétaire instantanée des ménages ou de la condition d'équilibre sur le marché des biens (le "ou" étant une conséquence de la loi de Walras),
  - d'une équation diff. en  $\dot{f}_t$ , obtenue à partir de l'équation d'Euler,
  - d'une condition initiale sur  $s_0$ ,
  - d'une cond. terminale, obtenue à partir de la cond. de transversalité.
- On détermine ensuite les trajectoires d'équilibre des autres variables, à partir de  $(s_t)_{t \geq 0}$  et  $(f_t)_{t \geq 0}$ , à l'aide des autres conditions d'équilibre.
- Dans ce chapitre,  $s_t = \kappa_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}$  et  $f_t = \gamma_t \equiv \frac{\bar{c}_t}{A_t} = \frac{\bar{c}_t}{A_t L_t}$ , comme dans les chapitres 2, 3 et 5 (à l'hétérogénéité des ménages près).

# Obtention de la condition terminale I

- On admet que  $e_t^\nu$ , où  $\nu \leq t$ , est une fonction décroissante de  $\nu$  à  $t$  donné (chaque génération naissant sans actif et accumulant de plus en plus d'actifs au fur et à mesure qu'elle vieillit).
- La condition de transversalité  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( e_t^\nu e^{-\int_\nu^t r_\tau d\tau} \right) = 0$  pour  $\nu = 0$  s'écrit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( e_t^0 e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} \right) = 0$$

et implique

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \bar{e}_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} \right) = 0$$

du fait que  $\bar{e}_t \leq e_t^0$ .



## Obtention de la condition terminale II

- Or la contrainte de solvabilité du gouv.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ d_t e^{-\int_0^t (r_\tau - n) d\tau} \right] = 0$  implique

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( d_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} \right) = 0.$$

- Donc, en utilisant la condition d'équilibre sur le marché de la dette publique ( $\bar{e}_t = \bar{b}_t + d_t$ ), la condition de transversalité se réécrit

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( \bar{b}_t e^{-\int_0^t r_\tau d\tau} \right) = 0.$$

- En utilisant  $\bar{b}_t = k_t \equiv \frac{K_t}{L_t}$ , on obtient alors, de la même façon qu'au chapitre 2,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \kappa_t e^{-\int_0^t [f'(\kappa_\tau) - (g + \delta)] d\tau} \right\} = 0.$$

# Obtention de l'équation différentielle en $\dot{\kappa}_t$ I

- On montre en annexe que

$$\dot{\bar{e}}_t = \dot{\bar{e}}_t - n\bar{e}_t.$$

- Dans le membre de droite de cette égalité,
  - le premier terme représente la variation de  $\bar{e}_t$  dans la **marge intensive** (le stock d'actifs de chaque génération croît dans le temps),
  - le second terme représente la variation de  $\bar{e}_t$  dans la **marge extensive** (de nouvelles générations naissent sans actif).
- Donc la contrainte budgétaire instantanée  $\dot{e}_t^\nu = w_t - t_t + r_t e_t^\nu - c_t^\nu$  du ménage représentatif né en  $\nu$  s'agrège comme

$$\dot{\bar{e}}_t = w_t - t_t + (r_t - n)\bar{e}_t - \bar{c}_t.$$

## Obtention de l'équation différentielle en $\dot{\kappa}_t$ II

- En utilisant  $\bar{e}_t = \bar{b}_t + d_t$  et la contrainte budgétaire instantanée du gouvernement  $\dot{d}_t = (r_t - n)d_t + g_t - t_t$ , on obtient alors

$$\dot{\bar{b}}_t = w_t - g_t + (r_t - n)\bar{b}_t - \bar{c}_t.$$

- Puis, en utilisant  $\bar{b}_t = k_t$ , de la même façon qu'au chapitre 2,

$$\dot{\kappa}_t = f(\kappa_t) - \gamma_t - \chi_t - (n + g + \delta)\kappa_t$$

$$\text{où } \chi_t \equiv \frac{g_t}{A_t} = \frac{G_t}{A_t L_t}.$$

- Cette équation différentielle implique l'équilibre sur le marché des biens :

$$\dot{K}_t = Y_t - \bar{C}_t - G_t - \delta K_t \text{ (conséquence de la loi de Walras).}$$

## Obtention de l'équation différentielle en $\dot{\gamma}_t$ I

- En agrégeant  $c_t^y = \rho(e_t^y + h_t)$ , on obtient  $\bar{c}_t = \rho(\bar{e}_t + h_t)$ .
- On montre par ailleurs en annexe que  $\dot{h}_t = r_t h_t - (w_t - t_t)$ .
- En utilisant ces deux derniers résultats et  $\dot{\bar{e}}_t = w_t - t_t + (r_t - n)\bar{e}_t - \bar{c}_t$ , on obtient  $\dot{\bar{c}}_t = \rho(\dot{\bar{e}}_t + \dot{h}_t) = \rho(r_t - n)\bar{e}_t - \rho\bar{c}_t + \rho r_t h_t = (r_t - \rho)\bar{c}_t - n\rho\bar{e}_t$ .
- D'où l'équation d'Euler agrégée

$$\frac{\dot{\bar{c}}_t}{\bar{c}_t} = r_t - \rho - n\rho \frac{\bar{e}_t}{\bar{c}_t}.$$

- Le taux de croissance de la consommation agrégée par tête  $\bar{c}_t$  est donc inférieur au taux de croissance  $r_t - \rho$  de la consommation de chaque génération existante.

## Obtention de l'équation différentielle en $\dot{\gamma}_t$ II

- La différence entre ces deux taux de croissance,

$$n\rho \frac{\bar{e}_t}{\bar{c}_t} = n\rho \frac{\bar{e}_t - e_t^t}{\bar{c}_t} = n \frac{\bar{c}_t - c_t^t}{\bar{c}_t},$$

est due à l'arrivée de nouvelles générations qui consomment moins que les générations existantes ( $c_t^t < \bar{c}_t$ ) car elles naissent sans actif ( $e_t^t = 0$ ).

- En utilisant  $\bar{e}_t = \bar{b}_t + d_t$  et  $\bar{b}_t = k_t$ , on peut, de la même façon qu'au chapitre 2, réécrire l'équation d'Euler agrégée comme

$$\frac{\dot{\gamma}_t}{\gamma_t} = f'(\kappa_t) - (\rho + g + \delta) - n\rho \frac{\kappa_t + \phi_t}{\gamma_t}$$

$$\text{où } \phi_t \equiv \frac{d_t}{A_t} = \frac{D_t}{A_t L_t}.$$

## Conditions d'équilibre sur $\kappa_t$ et $\gamma_t$ \*

- Les deux équations différentielles, la condition initiale et la condition terminale déterminant  $(\kappa_t)_{t \geq 0}$  et  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  sont donc les suivantes :

$$\dot{\kappa}_t = f(\kappa_t) - \gamma_t - \chi_t - (n + g + \delta) \kappa_t,$$

$$\frac{\dot{\gamma}_t}{\gamma_t} = f'(\kappa_t) - (\rho + g + \delta) - n\rho \frac{\kappa_t + \phi_t}{\gamma_t},$$

$$\kappa_0 = \frac{K_0}{A_0 L_0},$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\{ \kappa_t e^{-\int_0^t [f'(\kappa_\tau) - (g + \delta)] d\tau} \right\} = 0,$$

$$\text{où } \phi_t = \int_t^{+\infty} (\psi_\tau - \chi_\tau) e^{-\int_t^\tau [f'(\kappa_s) - (n + g + \delta)] d\tau}, \text{ avec } \psi_t \equiv \frac{t_t}{A_t} = \frac{T_t}{A_t L_t}.$$

# Détermination de l'équilibre

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Conditions d'équilibre sur  $\kappa_t$  et  $\gamma_t$
- ④ Détermination de l'équilibre
  - Etat régulier pour  $\chi_t$  constant
  - Possibilité d'inefficience dynamique pour  $\chi_t$  constant
  - Trajectoire d'équilibre pour  $\chi_t$  constant
- ⑤ Effets de la politique budgétaire
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

## Etat régulier pour $\chi_t$ constant I

- Dans la suite de ce chapitre, sauf mention contraire, on se limite au cas où la dette publique est constamment nulle :  $d_0 = 0$  et  $\forall t \geq 0, t_t = g_t$ .
- On suppose provisoirement que  $\forall t \geq 0$ , (i)  $\chi_t = \chi > 0$  et (ii) les ménages anticipent que  $\forall \tau \geq t, \chi_\tau = \chi$ .
- Notons  $\mu_\kappa$  et  $\mu_\gamma$  les valeurs respectives de  $\frac{\dot{\kappa}_t}{\kappa_t}$  et  $\frac{\dot{\gamma}_t}{\gamma_t}$  à l'**état régulier** ( $\equiv$  situation dans laquelle  $\kappa_0$  est tel que, à l'équilibre, toutes les quantités sont non nulles et croissent à taux constants).
- A l'état régulier, l'équation différentielle en  $\dot{\gamma}_t$  se réécrit comme  $f'(\kappa_t) - n\rho \frac{\kappa_t}{\gamma_t} = \mu_\gamma + \rho + g + \delta$ , ce qui implique que
  - 1 soit  $\mu_\gamma = \mu_\kappa = 0$ ,
  - 2 soit  $\mu_\gamma > \mu_\kappa > 0$ ,
  - 3 soit  $\mu_\gamma < \mu_\kappa < 0$ .



## Etat régulier pour $\chi_t$ constant II

- A l'état régulier, on peut réécrire l'équation différentielle en  $\dot{\kappa}_t$  comme  $\gamma_t = f(\kappa_t) - (n + g + \delta + \mu_\kappa) \kappa_t - \chi$  puis, en dérivant cette égalité par rapport au temps, obtenir  $\mu_\kappa f'(\kappa_t) - \mu_\gamma \frac{\gamma_t}{\kappa_t} = \mu_\kappa (n + g + \delta + \mu_\kappa)$ .
- Cette dernière égalité est compatible avec le cas 1 mais pas avec les cas 2 et 3.
- Donc  $\mu_\kappa = \mu_\gamma = 0$  :  $\kappa_t$  et  $\gamma_t$  sont constants à l'état régulier.
- En remplaçant  $\dot{\kappa}_t$  par 0 dans l'équation différentielle en  $\dot{\kappa}_t$ , on obtient

$$\gamma_t = f(\kappa_t) - (n + g + \delta) \kappa_t - \chi,$$

qui correspond à une **courbe en cloche** dans le plan  $(\kappa_t, \gamma_t)$ .

## Etat régulier pour $\chi_t$ constant III

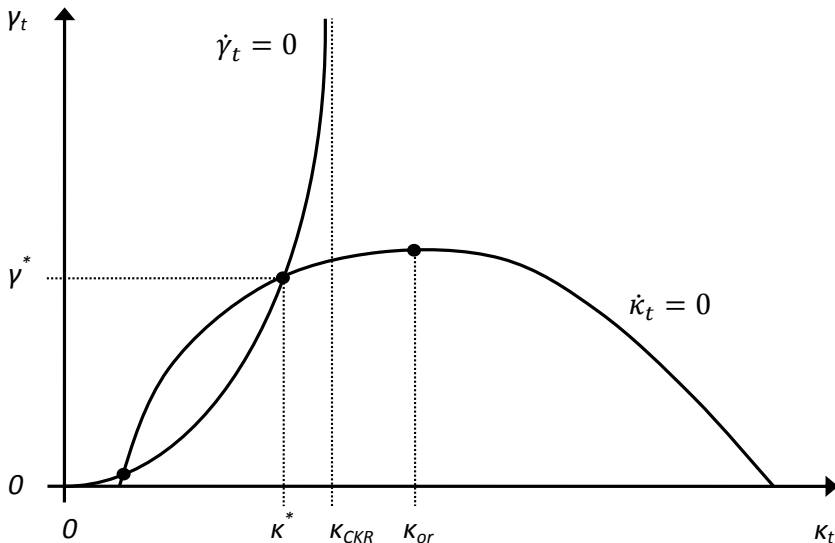
- En remplaçant  $\dot{\gamma}_t$  par 0 dans l'équation différentielle en  $\dot{\gamma}_t$ , on obtient

$$\gamma_t = \frac{n\rho\kappa_t}{f'(\kappa_t) - (\rho + g + \delta)},$$

qui correspond, dans le plan  $(\kappa_t, \gamma_t)$ , à une **courbe croissante**, convexe, partant de l'origine, de dérivée nulle à l'origine, admettant pour asymptote la droite verticale d'équation  $f'(\kappa_t) = \rho + g + \delta$ .

- Pour  $\chi$  suffisamment faible, ces deux courbes ont deux **points d'intersection**, correspondant aux deux valeurs possibles de  $(\kappa_t, \gamma_t)$  à l'état régulier.
- On note  $(\kappa^*, \gamma^*)$  celle de ces deux valeurs qui correspond au point d'intersection situé le plus au nord-est.

## Etat régulier pour $\chi_t$ constant IV



## Faits stylisés de Kaldor (1961)

- A l'état régulier, comme le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey, le modèle à générations imbriquées de Weil (1989) ne rend donc compte que des cinq premiers **faits stylisés de Kaldor (1961)** :
  - ① la production par tête croît :  $\frac{\dot{y}_t}{y_t} = g \geq 0$ ,
  - ② le stock de capital par tête croît :  $\frac{\dot{k}_t}{k_t} = g \geq 0$ ,
  - ③ le taux de rendement du capital est constant :  $r_t = f'(\kappa^*) - \delta$ ,
  - ④ le ratio capital / production est constant :  $\frac{K_t}{Y_t} = \frac{\kappa^*}{f(\kappa^*)}$ ,
  - ⑤ les parts de rémunération du travail et du capital dans la production sont constantes :  $\frac{w_t L_t}{Y_t} = \frac{f(\kappa^*) - \kappa^* f'(\kappa^*)}{f(\kappa^*)}$  et  $\frac{z_t K_t}{Y_t} = \frac{\kappa^* f'(\kappa^*)}{f(\kappa^*)}$ ,
  - ⑥ ~~le taux de croissance de la production par tête varie entre les pays.~~

# Possibilité d'inefficience dynamique pour $\chi_t$ constant I

- La valeur  $\kappa_{CKR} > \kappa^*$  de  $\kappa_t$  sur la droite verticale est définie par

$$f'(\kappa_{CKR}) = \rho + g + \delta$$

et correspond à la valeur de  $\kappa_t$  à l'état régulier dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey avec  $\theta = 1$ , i.e. avec  $u(c) = \ln(c)$ .

- La valeur  $\kappa_{or}$  de  $\kappa_t$  maximisant la courbe en cloche est définie par

$$f'(\kappa_{or}) = n + g + \delta$$

(**règle d'or d'accumulation du capital** du modèle de Solow-Swan).

## Possibilité d'inefficience dynamique pour $\chi_t$ constant II

- Dans le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey avec  $\theta = 1$ , pour que  $U_0$  prenne une valeur finie, il faut  $\rho > n$  et donc  $\kappa_{CKR} < \kappa_{or}$ .
- Dans le modèle à générations imbriquées,  $\rho > 0$  suffit pour que  $U_V^V$  prenne une valeur finie, on peut donc avoir  $\rho < n$  et  $\kappa_{CKR} > \kappa_{or}$ .
- On admet que, lorsque  $\rho < n$ , on peut obtenir  $\kappa^* > \kappa_{or}$ , i.e. il peut y avoir **inefficience dynamique**, due à une sur-accumulation du capital.
- Dans ce dernier cas, l'équilibre concurrentiel n'est **pas un optimum de Pareto**.
- Qu'il y ait inefficience dynamique ou non, le premier théorème du bien-être ne s'applique pas, notamment du fait du nombre infini d'agents (alors qu'il s'applique dans le modèle, à agent représentatif, de Cass-K.-Ramsey).

## Possibilité d'inefficience dynamique pour $\chi_t$ constant III

- L'inefficience dynamique, lorsqu'elle existe, peut s'interpréter comme la conséquence d'une **externalité pécuniaire intergénérationnelle** :
  - le stock de capital et donc les prix auxquels feront face les générations futures dépendent des décisions des générations actuelles,
  - les générations actuelles ne prennent pas en compte l'effet de leurs décisions sur le bien-être des générations futures.
- Elle donne un rôle à un **système de retraite par répartition** (consistant à transférer des biens des jeunes vers les vieilles générations à chaque date) : en décourageant l'épargne, un tel système réduit l'inefficience dynamique.
- Au contraire, un système de retraite par capitalisation (consistant à contraindre les jeunes générations à épargner pour leurs vieux jours) ne permet pas de réduire l'inefficience dynamique et peut même l'augmenter.

## Possibilité d'inefficience dynamique pour $\chi_t$ constant IV

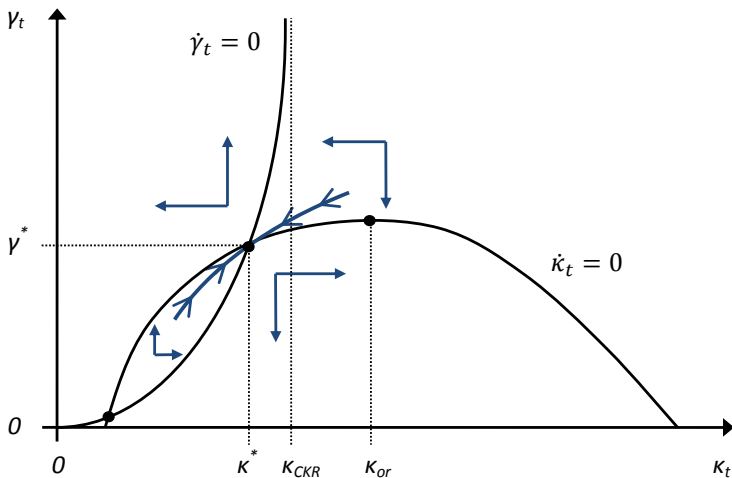
- Dans le modèle, il y a inefficience dynamique lorsque le “taux de rendement réel”,  $f'(\kappa^*) - \delta$ , est inférieur au taux de croissance du PIB,  $g + n$ .
- Lorsqu'on mesure le taux de rendement réel par le taux d'intérêt réel de la dette publique, on conclut que les principales économies industrialisées sont dynamiquement inefficientes.
- Mais lorsqu'on le mesure par le ratio du revenu du capital (moins la dépréciation) à la valeur du stock du capital, on aboutit à la conclusion opposée.
- L'existence de différentes mesures empiriques du taux de rendement réel cohérentes avec le modèle est due en particulier au fait que le modèle ne prend pas en compte l'incertitude.
- Abel, Mankiw, Summers et Zeckhauser (1989) déterminent la condition d'inefficience dynamique en présence d'incertitude et en déduisent que les principales économies industrialisées sont **dynamiquement efficaces**.



## Trajectoire d'équilibre pour $\chi_t$ constant I

- Dans la suite du chapitre, comme dans le graphique précédent, on se restreint aux valeurs des paramètres telles que  $\rho > n$ , de sorte que  $\kappa_{CKR} < \kappa_{or}$  et donc  $\kappa^* < \kappa_{or}$  (absence d'inefficience dynamique).
- Le système d'équations différentielles admet
  - un bras stable et un bras instable au voisinage du point  $(\kappa^*, \gamma^*)$ ,
  - deux bras instables au voisinage de l'autre point d'intersection des deux courbes.
- Comme aux chapitres 2 et 5, il existe donc un unique sentier, appelé “**sentier-selle**”, le long duquel  $(\kappa_t, \gamma_t)$  peut converger vers  $(\kappa^*, \gamma^*)$ .
- On admet que l'unique trajectoire d'équilibre de  $(\kappa_t, \gamma_t)$  pour un  $\kappa_0$  donné est ce sentier-selle, pourvu que  $\kappa_0$  soit supérieur à la valeur prise par  $\kappa_t$  au point d'intersection des deux courbes situé le plus au sud-ouest.

## Trajectoire d'équilibre pour $\chi_t$ constant II



# Effets de la politique budgétaire

- ① Introduction
- ② Conditions d'équilibre
- ③ Conditions d'équilibre sur  $\kappa_t$  et  $\gamma_t$
- ④ Détermination de l'équilibre
- ⑤ Effets de la politique budgétaire
  - Absence d'équivalence ricardienne
  - Effet d'une hausse non anticipée et permanente de  $\chi_t$
- ⑥ Conclusion
- ⑦ Annexe

## Absence d'équivalence ricardienne lorsque $n > 0$ I

- Dans ce slide et les trois suivants, on relâche l'hypothèse que  $d_t$  est constamment nulle.
- Compte tenu des conditions d'équilibre sur  $\kappa_t$  et  $\gamma_t$ , lorsque  $n > 0$ ,  $(\kappa_t)_{t \geq 0}$  et  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  dépendent à l'équilibre non seulement de la trajectoire des dépenses publiques  $(\chi_t)_{t \geq 0}$ , mais aussi de celle des impôts forfaitaires  $(\psi_t)_{t \geq 0}$ .
- En d'autres termes, lorsque  $n > 0$ , **l'effet des dépenses publiques sur l'économie dépend de leur mode de financement** (impôt immédiat ou emprunt remboursé par impôt futur).
- Le modèle prédit donc l'**absence d'équivalence ricardienne** lorsque  $n > 0$ .
- Ce résultat est dû au fait que, lorsque  $n > 0$ , la richesse intertemporelle agrégée par tête des ménages dépend non seulement de la trajectoire des dépenses publiques, mais aussi de celle des impôts forfaitaires.

## Absence d'équivalence ricardienne lorsque $n > 0$ II

- En effet, en utilisant la contrainte budgétaire intertemporelle du gouv.

$$d_t = \int_t^{+\infty} (t_s - g_s) e^{-\int_t^s (r_\tau - n) d\tau} ds,$$

on peut réécrire la richesse intertemporelle agrégée par tête des ménages

$$\bar{e}_t + h_t = \bar{b}_t + d_t + \int_t^{+\infty} (w_s - t_s) e^{-\int_t^s r_\tau d\tau} ds$$

comme

$$\bar{e}_t + h_t = \bar{b}_t + \int_t^{+\infty} (w_s - g_s) e^{-\int_t^s r_\tau d\tau} ds + \Omega_t$$

$$\text{où } \Omega_t \equiv \int_t^{+\infty} (t_s - g_s) e^{-\int_t^s (r_\tau - n) d\tau} \left[ 1 - e^{-n(s-t)} \right] ds.$$

## Absence d'équivalence ricardienne lorsque $n > 0$ III

- En notant  $T_{s/t} \equiv T_s e^{-\int_t^s r_\tau d\tau} = L_t t_s e^{-\int_t^s (r_\tau - n) d\tau}$  la valeur actualisée à la date  $t$  des impôts forfaitaires agrégés à la date  $s \geq t$ , on obtient

$$\frac{\partial \Omega_t}{\partial T_{s/t}} = \frac{1 - e^{-n(s-t)}}{L_t}.$$

- Lorsque  $n > 0$ ,  $\frac{\partial \Omega_t}{\partial T_{s/t}}$  est strictement croissant en  $s$  : plus l'impôt finançant les dépenses publiques est distant dans le futur, moins les dépenses publiques réduisent la richesse intertemporelle des générations existantes.
- La raison en est que plus cet impôt est distant dans le futur, plus il sera payé par de nouvelles générations auxquelles les générations existantes ne sont pas liées.

## Equivalence ricardienne lorsque $n = 0$

- Lorsque  $n = 0$ ,  $(\kappa_t)_{t \geq 0}$  et  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  dépendent à l'équilibre de la trajectoire des dépenses publiques  $(\chi_t)_{t \geq 0}$ , mais pas de celle des impôts forfaitaires  $(\psi_t)_{t \geq 0}$ .
- Le modèle prédit donc l'équivalence ricardienne dans ce cas particulier.
- En effet, sans arrivée de nouvelles générations, la richesse intertemporelle des générations existantes ne dépend pas de la trajectoire des impôts forfaitaires :  $\frac{\partial \Omega_t}{\partial T_{s/t}} = 0$  pour tout  $s \geq t$ .
- Le modèle coïncide alors avec le modèle de Cass-Koopmans-Ramsey dans le cas  $u(c) = \ln(c)$  et  $n = 0$ .

## Variations de $\chi_t$ dans le temps \*

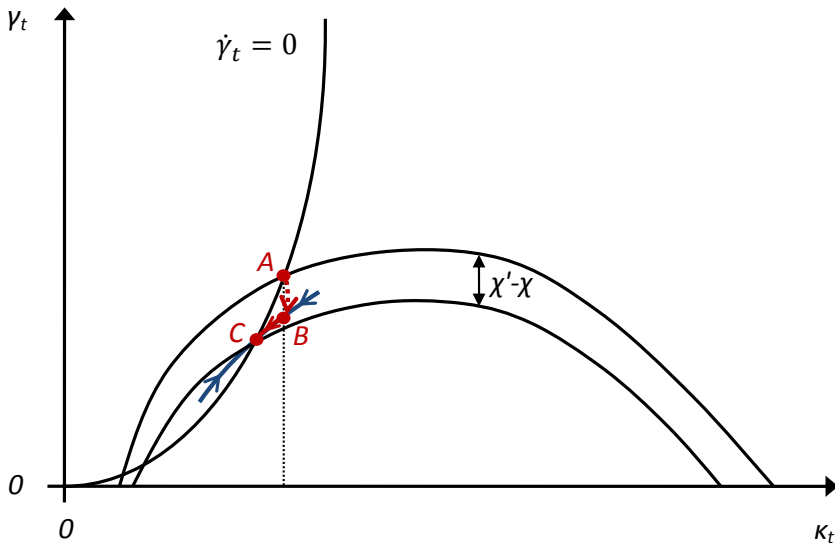
- Comme dans le chapitre 5, on suppose dans la suite de ce chapitre que
  - $\chi_t$  peut varier dans le temps,
  - ces variations peuvent être anticipées ou non par les ménages,
  - à chaque date, les ménages n'ont pas conscience qu'ils pourront être surpris, à une date ultérieure, par la valeur de  $\chi_t$  ou par l'annonce de son évolution future,
  - à chaque date où ils sont surpris par la valeur présente de  $\chi_t$  ou par l'annonce de son évolution future, les ménages résolvent leur nouveau problème d'optimisation et modifient en conséquence leur comportement présent et futur anticipé.
- Comme dans le chapitre 5,  $\kappa_t$  est une fonction continue du temps, tandis que  $\gamma_t$  et  $\dot{\gamma}_t$  ne peuvent être discontinues qu'aux dates où les ménages sont surpris par la valeur présente de  $\chi_t$  ou par l'annonce de son évolution future.



## Effet d'une hausse non anticipée et permanente de $\chi_t$ I

- On suppose maintenant qu'il existe une date  $t_0$  telle que  $t_0 > 0$  et
  - $\forall t \in [0; t_0[,$  (i)  $\chi_t = \chi$ , (ii) les ménages anticipent que  $\forall \tau \geq t$ ,  $\chi_\tau = \chi$ , et (iii) l'économie est à l'état régulier correspondant,
  - le gouv. annonce à  $t_0$ , de manière crédible, que  $\forall t \geq t_0$ ,  $\chi_t = \chi' > \chi$ ,
  - le gouv. mène, à partir de  $t_0$ , la politique budg. qu'il a annoncée à  $t_0$ .
- A partir de  $t_0$ ,  $\chi_t$  est constant et il n'y a plus de surprise, donc l'économie est sur son nouveau sentier-selle (plus bas que l'ancien).
- Le stock  $\kappa_t$  étant une fonction continue du temps, c'est le flux  $\gamma_t$  qui s'ajuste à  $t_0$  pour placer l'économie sur son nouveau sentier-selle : l'économie passe donc de A à B à  $t_0$  puis de B à C entre  $t_0$  et  $+\infty$ .
- La consommation  $\gamma_t$  diminue de plus de  $\chi' - \chi$  à long terme car la baisse du stock de capital  $\kappa_t$  réduit la valeur actualisée  $h_t$  des revenus futurs nets d'impôt en augmentant  $r_t$  et en diminuant  $w_t$ .

## Effet d'une hausse non anticipée et permanente de $\chi_t$ II



## Effet d'une hausse non anticipée et temporaire de $\chi_t$

- La partie 6 des TDs étudie l'effet d'une hausse non anticipée et **temporaire** de  $\chi_t$ .
- Le cas d'une hausse non anticipée et temporaire de  $\chi_t$  correspond au cas où il existe deux dates  $t_0$  et  $t_1$  telles que  $0 < t_0 < t_1$  et
  - $\forall t \in [0; t_0[,$  (i)  $\chi_t = \chi$ , (ii) les ménages anticipent que  $\forall \tau \geq t$ ,  $\chi_\tau = \chi$ , et (iii) l'économie est à l'état régulier correspondant,
  - le gouvernement annonce à  $t_0$ , de manière crédible, que (i)  $\forall t \in [t_0; t_1[, \chi_t = \chi' > \chi$ , et (ii)  $\forall t \geq t_1, \chi_t = \chi$ ,
  - le gouv. mène, à partir de  $t_0$ , la politique budg. qu'il a annoncée à  $t_0$ .

# Conclusion

- 1 Introduction
- 2 Conditions d'équilibre
- 3 Conditions d'équilibre sur  $\kappa_t$  et  $\gamma_t$
- 4 Détermination de l'équilibre
- 5 Effets de la politique budgétaire
- 6 Conclusion
- 7 Annexe

## Principales prédictions du modèle

- A long terme, les cinq premiers faits stylisés de Kaldor (1961) sont obtenus.
- Il peut y avoir inefficience dynamique, due à une sur-accumulation du capital, qu'un système de retraite par répartition permet de réduire.
- L'effet des dépenses publiques sur l'économie dépend de leur mode de financement (absence d'équivalence ricardienne).
- Une hausse inattendue et permanente des dépenses publiques abaisse la consommation et le stock de capital de façon permanente.

# Annexe

- ➊ Introduction
- ➋ Conditions d'équilibre
- ➌ Conditions d'équilibre sur  $\kappa_t$  et  $\gamma_t$
- ➍ Détermination de l'équilibre
- ➎ Effets de la politique budgétaire
- ➏ Conclusion
- ➐ Annexe

## Calcul de la dérivée de $\bar{e}_t$ par rapport au temps

- On écrit  $\bar{e}_t = \frac{1}{L_t}(e_t^0 L_0 + \mathcal{A}_t)$ , où  $\mathcal{A}_t \equiv \int_0^t e_t^\nu \dot{L}_\nu d\nu$ .
- En écrivant  $\mathcal{A}_t = g(t, t)$ , où  $g(u, \nu) \equiv \int_0^u e_\nu^\nu \dot{L}_\nu d\nu$ , on obtient

$$\dot{\mathcal{A}}_t = \frac{\partial g}{\partial u}(t, t) + \frac{\partial g}{\partial \nu}(t, t) = e_t^t \dot{L}_t + \int_0^t \dot{e}_t^\nu \dot{L}_\nu d\nu = \int_0^t \dot{e}_t^\nu \dot{L}_\nu d\nu$$

car  $e_t^t = 0$ .

- On en déduit

$$\begin{aligned} \dot{\bar{e}}_t &= \frac{-\dot{L}_t}{L_t^2} (e_t^0 L_0 + \mathcal{A}_t) + \frac{1}{L_t} (\dot{e}_t^0 L_0 + \dot{\mathcal{A}}_t) \\ &= \frac{-n}{L_t} (e_t^0 L_0 + \mathcal{A}_t) + \frac{1}{L_t} \left( \dot{e}_t^0 L_0 + \int_0^t \dot{e}_t^\nu \dot{L}_\nu d\nu \right) \\ &= \dot{\bar{e}}_t - n\bar{e}_t. \end{aligned}$$

## Calcul de la dérivée de $h_t$ par rapport au temps

- On écrit  $h_t = g(t, t)$ , où  $g(u, v) \equiv \int_u^{+\infty} (w_s - t_s) e^{-\int_v^s r_\tau d\tau} ds$ .
- On en déduit

$$\begin{aligned}\dot{h}_t &= \frac{\partial g}{\partial u}(t, t) + \frac{\partial g}{\partial v}(t, t) \\ &= -(w_t - t_t) e^{-\int_t^t r_\tau d\tau} + r_t \int_t^{+\infty} (w_s - t_s) e^{-\int_t^s r_\tau d\tau} ds \\ &= r_t h_t - (w_t - t_t).\end{aligned}$$