

SÉRIES TEMPORELLES LINÉAIRES
Examen 2015-2016

Durée : 2 heures. Sans document.

Les exercices sont indépendants. Il est demandé de justifier les réponses de façon concise.

Exercice 1 Soit n observations d'une série temporelle bivariée (Y_{1t}, Y_{2t}) pour $t = 1, \dots, n$. On considère le modèle de régression linéaire

$$Y_{2t} = aY_{1t} + b + U_t$$

où U_t est centré et non corrélé avec Y_{1t} .

1. Comment est calculé l'estimateur des moindres carrés ordinaires (MCO) (\hat{a}_n, \hat{b}_n) du paramètre (a, b) ?
2. Lorsque $n \rightarrow \infty$, comment se comporte l'estimateur MCO quand la série bivariée est stationnaire ?
3. Comment se comporte l'estimateur MCO quand la série bivariée est cointégrée ?
4. Comment se comporte l'estimateur MCO quand la série bivariée est non stationnaire et non cointégrée ?
5. Comment se comporte l'estimateur MCO si

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{1t} \\ 2\eta_{1t} + \eta_{2t} \end{pmatrix},$$

où (η_{1t}) et (η_{2t}) sont deux bruits blancs forts indépendants ?

6. Comment se comporte l'estimateur MCO si

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^t \eta_{1i} + 2t \\ \sum_{i=1}^t \eta_{2i} + t \end{pmatrix},$$

où (η_{1t}) et (η_{2t}) sont deux bruits blancs forts indépendants ?

7. Comment se comporte l'estimateur MCO si

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sum_{i=1}^t \eta_{1i} \\ \sum_{i=1}^t \eta_{1i} + \eta_{2t} \end{pmatrix},$$

où (η_{1t}) et (η_{2t}) sont deux bruits blancs forts indépendants ?

Exercice 2 Soit (ϵ_t) et (η_t) deux bruits blancs forts indépendants de variances strictement positives, et

$$\begin{cases} X_t = \epsilon_t + a\eta_t + b\eta_{t-1} \\ Y_t = \eta_t. \end{cases}$$

1. La série (Y_t) cause-t-elle la série (X_t) au sens de Granger ?
2. La série (X_t) cause-t-elle la série (Y_t) au sens de Granger ?
3. A-t-on causalité instantanée entre les séries (X_t) et (Y_t) au sens de Granger ?

Exercice 3 Soit $X_t = \eta_t \eta_{t-3}$, où (η_t) est un bruit blanc fort de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Le processus X_t est-il stationnaire ? est-il ergodique ?
2. Quel type de modèle ARMA suit le processus X_t ? Quel type de modèle ARMA suit le processus X_t^2 ?
3. Soit les observations X_1, \dots, X_n . Comment sont calculées les autocorrélations empiriques $\hat{\rho}_X(h)$ de ces observations (avec $0 \leq h < n$) ? Vers quoi converge $\hat{\rho}_X(h)$ lorsque $n \rightarrow \infty$?
4. Quelle est la loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\rho}_X(h)$? Comparer avec celle des autocorrélations empiriques d'un bruit blanc fort.