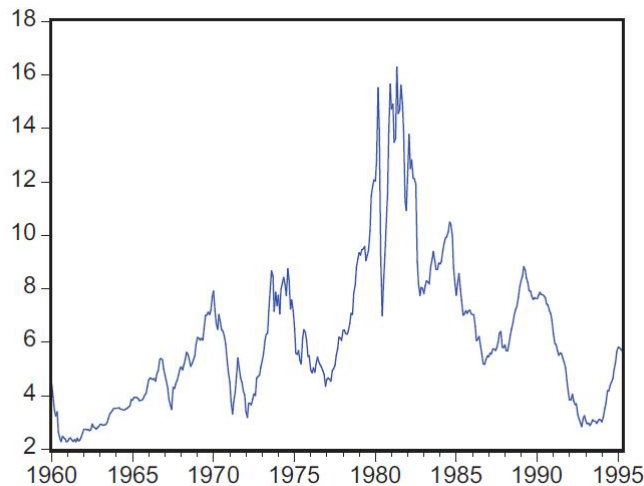


ENSAE 2A  
Séries temporelles linéaires  
**Corrigé TD n°6**

Pour toute remarque, contacter [jerome.trinh@ensae.fr](mailto:jerome.trinh@ensae.fr)

**Exercice 1 (Optionnel) :**

On considère la série du taux des bons du Trésor à 3 mois (en lissage) aux Etats-Unis pour la période 1960m1-1995m4 (Graphique 1). Les graphiques 2 et 3 représentent la fonction d'autocorrélation totale et partielle de cette variable et sa différence première.



GRAPHIQUE 1 – Taux des bons du Trésor à 3 mois

Q1. Commenter ces graphiques.

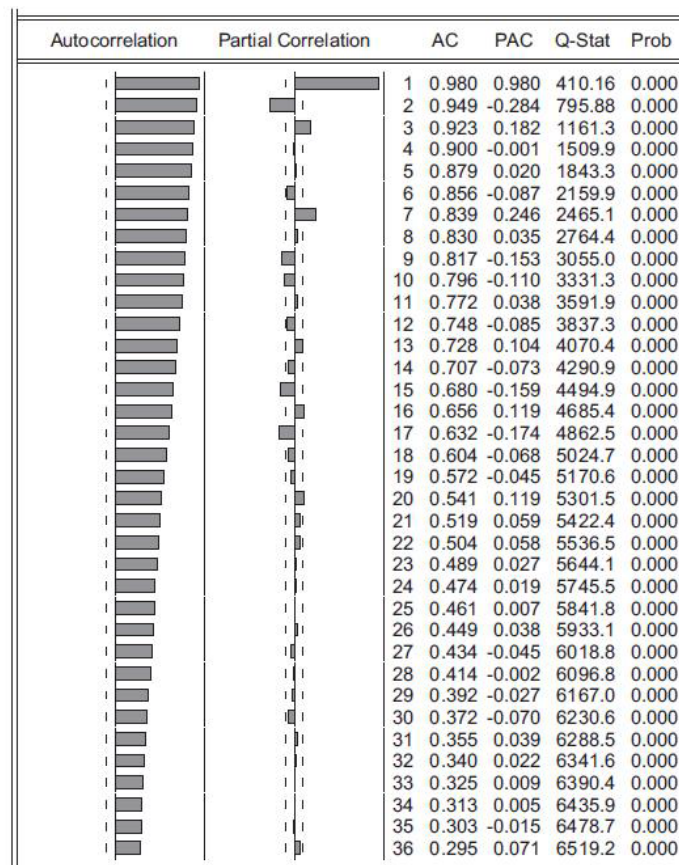
D'après le graphique 1, il ne semble pas que la série varie autour d'une tendance linéaire déterministe. Elle a donc peu de chance d'être stationnaire. Au mieux, il semble qu'il y ait une tendance croissante jusqu'en 1982 puis une tendance décroissante, ce qui nous laisse penser à modéliser la série selon un modèle non linéaire. Le graphique 2 montre une autocorrélation au premier ordre très élevée et proche de un (égale à 0.980) et donc une autocorrélation totale qui décroît très lentement. Un test de type Dickey-Fuller ou Phillips-Perron permettra de tester s'il est égal à un ou non. Cela est cohérent avec le commentaire du graphique précédent sur le risque de non stationnarité de la série. Il est cependant possible que l'autocorrélation soit très forte sans pour autant que la série soit non stationnaire, on utilisera donc un test de seconde génération (KPSS par exemple) pour tester cela.

Partie 1 : Un test de Dicket-Fuller augmenté est considéré dans un premier temps

Q2. Quelle(s) spécification(s) vous semblent-elles le mieux adaptées ?

On ne dégage pas une tendance strictement croissante ou décroissante sur l'ensemble de la période observée, on se placera donc dans le cas avec constante non nulle et sans tendance du test de Dickey-Fuller augmenté (ADF).

Q3. Les résultats suivants sont obtenus lorsque le nombre maximal de retard est 14 (et en utilisant le critère de Schwarz). Déterminer la statistique de test et commenter ces résultats.



GRAPHIQUE 2 – Fonction d'autocorrélation (partielle) de la variable en niveau

Paramètre	Estimation	Err. Std	t-stat.	p-valeur
$\phi$	-0.0161	0.0090	-1.7902	0.0741
$c$	0.1022	0.0605	1.6896	0.0919
$\alpha_1$	0.3508	0.0472	7.4312	0.000
$\alpha_2$	-0.2155	0.0497	-4.3291	0.0000
$\alpha_3$	0.0255	0.0506	0.5057	0.6134
$\alpha_4$	-0.1033	0.0504	-2.0469	0.0413
$\alpha_5$	0.1537	0.0494	3.1055	0.0020
$\alpha_6$	-0.2555	0.0472	-5.4038	0.0000

Les valeurs critiques sont données par -3.445 (1%), -2.868 (5%), et -2.570(10%).

Ces résultats proviennent de l'estimation du modèle ADF suivant pour la série  $(X_t)$  :

$$\Delta X_t = c + \phi X_t + \sum_{k=1}^6 \alpha_k \Delta X_{t-k} + u_t$$

La statistique de test est donc la t-stat associée à l'estimateur du coefficient  $\phi$ , soit -1.7902. Elle est supérieure aux valeurs critiques associées au test à 1%, 5% ou 10%, on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse nulle de racine unitaire, donc de non stationnarité de la série à 1%, 5% ou 10%. Le test ADF conclut donc à la non stationnarité de la série en niveau.

Partie 2 : Dans un deuxième temps, on conduit les tests de Phillips-Perron.

Q4. Rappeler le principe du test de Phillips-Perron.

Autocorrelation	Partial Correlation	AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1 0.273	0.273	31.714	0.000
		2 -0.117	-0.206	37.526	0.000
		3 -0.103	-0.009	42.059	0.000
		4 -0.042	-0.033	42.822	0.000
		5 0.055	0.064	44.129	0.000
		6 -0.181	-0.260	58.211	0.000
		7 -0.192	-0.048	74.148	0.000
		8 0.103	0.148	78.766	0.000
		9 0.208	0.093	97.602	0.000
		10 0.068	-0.045	99.597	0.000
		11 -0.006	0.070	99.614	0.000
		12 -0.106	-0.122	104.55	0.000
		13 0.034	0.065	105.05	0.000
		14 0.171	0.151	117.97	0.000
		15 -0.102	-0.140	122.55	0.000
		16 0.009	0.171	122.59	0.000
		17 0.098	0.045	126.84	0.000
		18 0.098	0.023	131.11	0.000
		19 -0.021	-0.133	131.30	0.000
		20 -0.240	-0.079	156.96	0.000
		21 -0.161	-0.071	168.64	0.000
		22 -0.003	-0.044	168.65	0.000
		23 -0.007	-0.024	168.67	0.000
		24 -0.048	-0.026	169.73	0.000
		25 -0.015	-0.052	169.83	0.000
		26 0.066	0.033	171.81	0.000
		27 0.133	-0.013	179.85	0.000
		28 0.048	0.015	180.89	0.000
		29 -0.063	0.065	182.69	0.000
		30 -0.051	-0.058	183.87	0.000
		31 -0.054	-0.033	185.23	0.000
		32 -0.028	-0.021	185.58	0.000
		33 -0.062	-0.020	187.33	0.000
		34 -0.049	0.012	188.44	0.000
		35 -0.038	-0.090	189.12	0.000
		36 -0.030	-0.021	189.53	0.000

GRAPHIQUE 3 – Fonction d'autocorrélation (partielle) de la variable en première différence

C'est un test semi-paramétrique qui suppose le modèle suivant (dans notre cas avec constante et sans tendance) :

$$X_t = c + \rho X_t + u_t$$

où  $u_t$  est un terme d'erreur très général dont on note :

- la variance marginale  $\sigma_u^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_{t=1}^n u_t^2$  p.s.
- la variance de long terme  $\vartheta_u^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} V\{n^{-1/2} \sum_{t=1}^n u_t\}$

Une statistique de test de l'hypothèse nulle de racine unitaire pour  $(X_t)$  est

$$Z_t = \frac{\hat{\sigma}_u \hat{\rho}_n - 1}{\hat{\vartheta}_u \hat{\sigma}_{\hat{\rho}_n}} - \frac{n \hat{\sigma}_{\hat{\rho}_n}}{2 \hat{\sigma}_u \hat{\vartheta}_u} (\hat{\vartheta}_u^2 - \hat{\sigma}_u^2)$$

qui suit sous  $H_0$  la seconde loi asymptotique de Dickey-Fuller (celle de la statistique DF construite sur la t-stat).

Q5. Commenter les résultats

Paramètre	Estimation	Err. Std	t-stat.	p-valeur
$\phi$	-01.0197	0.0095	-2.0712	0.0389
$c$	0.1242	0.0645	1.9248	0.0549
$\sigma_u^2$	0.3024			
$\vartheta_u^2 - \hat{\sigma}_u^2$	0.3869			
$Z_t$	-2.3302			

Les valeurs critiques sont données par -3.445 (1%), -2.868 (5%), et -2.570(10%).

La statistique de test  $Z_t$  est supérieure aux valeurs critiques associées au test à 1%, 5% ou 10%, on ne peut donc pas rejeter l'hypothèse nulle de racine unitaire, donc de non stationnarité de la série à 1%, 5% ou 10%. Le test PP conclut donc aussi à la non stationnarité de la série en niveau.

Partie 3 : Dans un troisième temps, on utilise un test KPSS. On obtient les résultats suivants.

Paramètre	Estimation	Err. Std	t-stat.	p-valeur
$c$	6.1516	0.1362	45.1540	0.0000
$LM_c$	0.7167			

Les valeurs critiques sont données par 0.739 (1%), 0.463 (5%), et 0.347 (10%).

Q6. Commenter les résultats.

Pour ce test, l'hypothèse nulle est la stationnarité de la série et la statistique de test  $LM_c$  une statistique du multiplicateur de Lagrange. Cette dernière est supérieure aux valeurs critiques associées au test à 5%, on peut donc rejeter l'hypothèse nulle de stationnarité à 5%. Le test KPSS conclut donc aussi à la non stationnarité de la série en niveau.

Q7. Que peut-on en conclure en comparant ces résultats avec ceux des deux parties précédentes ?

Les trois tests, ADF et PP pour ceux de première génération et KPSS pour celui de seconde génération, concluent tous à la non stationnarité de la série en niveau pour la période observée.

### Exercice 2 :

L'objectif de cet exercice est d'étudier les propriétés statistiques du modèle de dividendes escomptés (Divident Discount Model). Soit  $r_{t+1}$  :

$$r_{t+1} = \frac{P_{t+1} + D_{t+1} - P_t}{P_t}$$

où  $P_t$  est le prix d'un actif à la date  $t$  et  $D_t$  est le montant des dividendes payés à la date  $t$ .

Ce modèle suppose que :

$$E[r_{t+1}] = r, \quad \forall t$$

La valeur fondamentale de l'actif est alors donnée par :

$$P_t = \frac{1}{1+r} E_t[P_{t+1} + D_{t+1}]$$

Partie I : Détermination de la relation de long terme.

Q1. Ecrire le prix  $P_t$  en fonction de tous les dividendes futures (lorsque  $T \rightarrow \infty$ ).

On peut écrire :

$$\begin{aligned} P_t &= \frac{1}{1+r} E_t[P_{t+1} + D_{t+1}] \\ &= \frac{1}{(1+r)} E_t \left[ \frac{1}{(1+r)} E_{t+1} [P_{t+2} + D_{t+2}] + D_{t+1} \right] \\ &= \dots \\ &= \sum_{i=1}^{T-1} \frac{E_t[D_{t+i}]}{(1+r)^i} + \frac{1}{(1+r)^T} E_t[P_{t+T} + D_{t+T}] \end{aligned}$$

Lorsque  $T \rightarrow \infty$ ,

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[D_{t+i}]}{(1+r)^i} + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+r)^T} E_t[P_{t+T} + D_{t+T}]$$

Q2. Montrer que la valeur fondamentale s'écrit

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[D_{t+i}]}{(1+r)^i}$$

en imposant une condition de transversalité (à déterminer). Interpréter cette condition.

Lorsque  $T \rightarrow \infty$ , on a  $1/(1+r)^i \rightarrow 0$ . De plus, on suppose que le prix de l'actif et les dividendes ont des valeurs finies, ce que l'on peut interpréter par une condition de valeurs non-explosives (par exemple une absence d'un schéma de Ponzi). On a donc la condition de transversalité suivante :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+r)^T} E_t[P_{t+T} + D_{t+T}] = 0$$

On a finalement l'expression de la valeur fondamentale :

$$P_t = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{E_t[D_{t+i}]}{(1+r)^i}$$

Q3. On suppose que le processus des dividendes est défini par un processus AR(1) :

$$D_{t+1} = (1+\mu)D_t + \epsilon_{t+1}$$

où  $\mu$  est le taux de croissance constant et  $\epsilon_t$  est un bruit blanc (faible) satisfaisant  $E_t[\epsilon_{t+1+i}] = 0 \quad \forall i > 0$ .

— Montrer que la valeur fondamentale de l'actif à la date  $t$ ,  $P_t$ , s'écrit comme une fonction des dividendes payés à la date  $t$  et des paramètres du modèle  $r$  et  $\mu$ . Sous quelle(s) condition(s) ?

Comme  $E_t[\epsilon_{t+1+i}] = 0 \quad \forall i > 0$ , le processus des dividendes donne :

$$E_t[D_{t+i}] = (1 + \mu)^i D_t \quad \forall i > 0$$

Donc la valeur fondamentale de  $P_t$  devient :

$$P_t = D_t \sum_{i=1}^{\infty} \left( \frac{1 + \mu}{1 + r} \right)^i = D_t \left( \frac{1 + \mu}{1 + r} \right) \frac{1 - \left( \frac{1 + \mu}{1 + r} \right)^{\infty}}{1 - \frac{1 + \mu}{1 + r}} = D_t \left( \frac{1 + \mu}{r - \mu} \right) \left[ 1 - \left( \frac{1 + \mu}{1 + r} \right)^{\infty} \right]$$

Si  $r > \mu$  on a  $\left( \frac{1 + \mu}{1 + r} \right)^{\infty} \rightarrow 0$  et donc :

$$P_t = D_t \left( \frac{1 + \mu}{r - \mu} \right)$$

— Après une transformation logarithmique, interpréter la relation précédente comme une relation de cointégration. Expliquer.

En notant  $p_t = \log P_t$  et  $d_t = \log D_t$ , la relation précédente s'écrit :

$$p_t = a + b d_t$$

où  $a = \frac{1 + \mu}{r - \mu}$  et  $b = 1$ . En d'autres termes, le ratio entre la variation du prix et celle des dividendes est constante à long terme – cette relation pouvant s'interpréter comme :

$$p_t = a + b d_t + u_t$$

avec  $u_t = 0 \quad \forall t$ .

Partie II : Test et estimation de la relation de long terme.

La relation (théorique) de long terme est donnée par :

$$p_t = \gamma + d_t + u_t \quad (1)$$

où  $p_t$  (respectivement,  $d_t$ ) est le logarithme du prix de l'actif (respectivement, des dividendes) et  $\gamma$  est la constante déterminée dans la partie I.

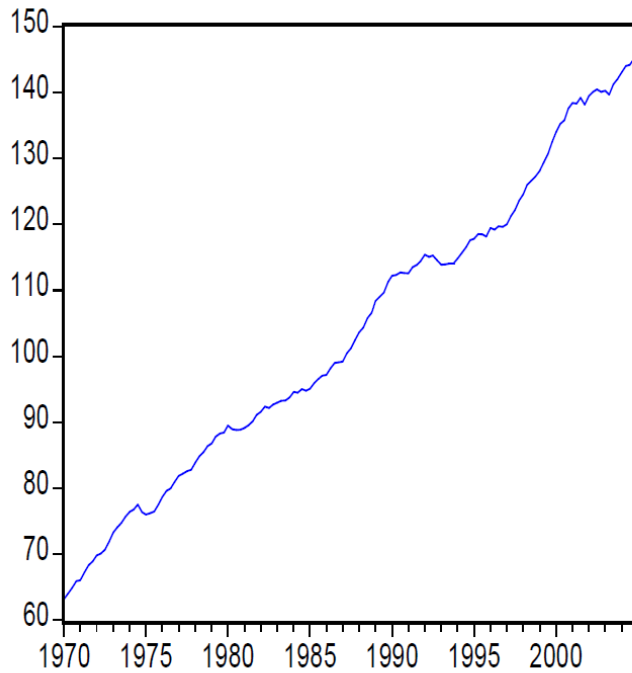
On s'intéresse à l'estimation de cette relation (de long terme) à partir données mensuelles pour les Etats-Unis et le Royaume-Uni (la période est 1971m1-2009m12) – voir Graphique 6. Les tests de racine unitaire montrent que l'on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle de non stationnarité du logarithme des variables étudiées pour les Etats-Unis et le Royaume-Uni. En d'autres termes,  $p_t$  et  $d_t$  sont  $I(1)$ .

Q4. Un économètre souhaite tester la présence d'une relation de cointégration. Pourquoi ? Expliquer.

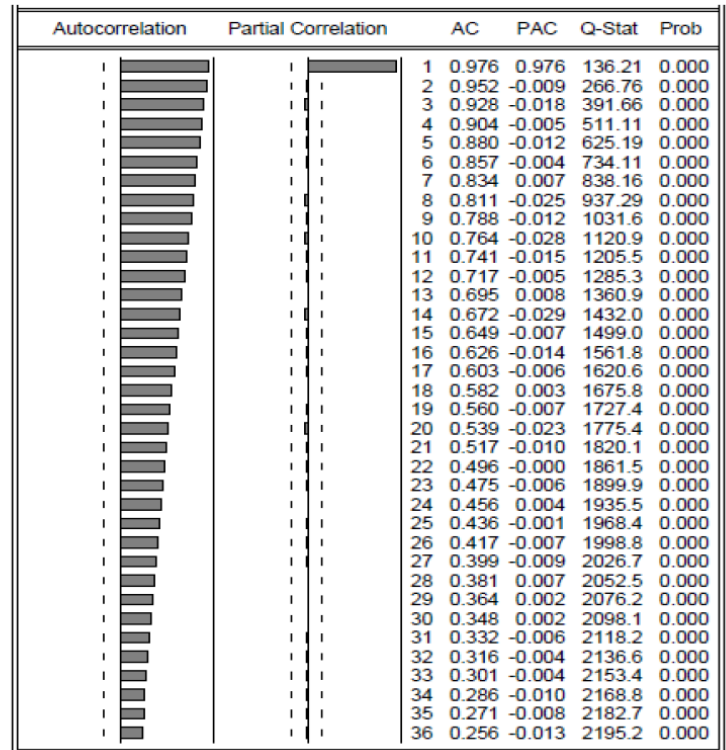
Si les deux variables sont  $I(1)$ , on veut savoir s'il existe une combinaison linéaire de ces deux variables qui est stationnaire. Les variables seraient alors cointégrées. A contrario, s'il n'existe pas une telle relation, on se confronte au problème de régression fictive ("spurious regression") : si les résidus de la régression d'une variable sur l'autre ne sont pas stationnaires, les statistiques de tests usuels telle que les tests de significativité suivent des lois non standards sous l'hypothèse nulle associée, ce qui peut conduire au rejet de cette dernière alors qu'elle ne devraient pas l'être.

GRAPHIQUE 4 – Produit intérieur brut

Valeurs observées (échelle 1e.-10)

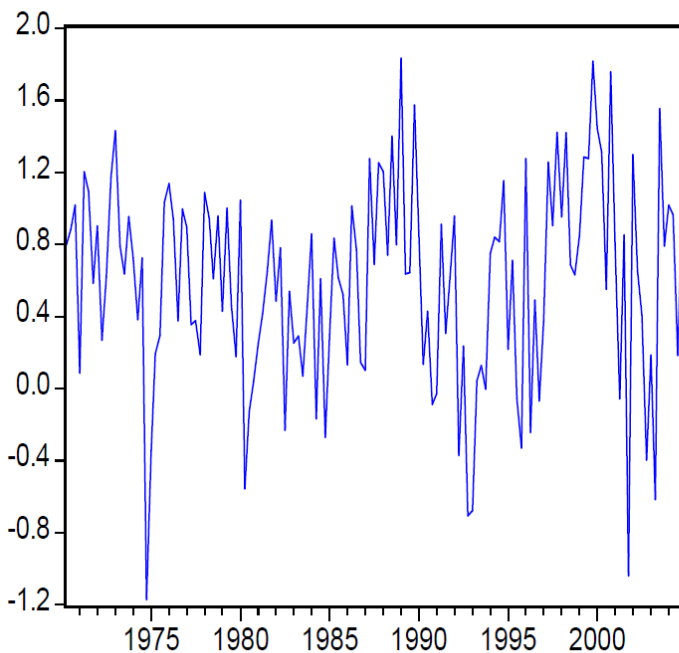


Fonction d'autocorrélation (partielle)

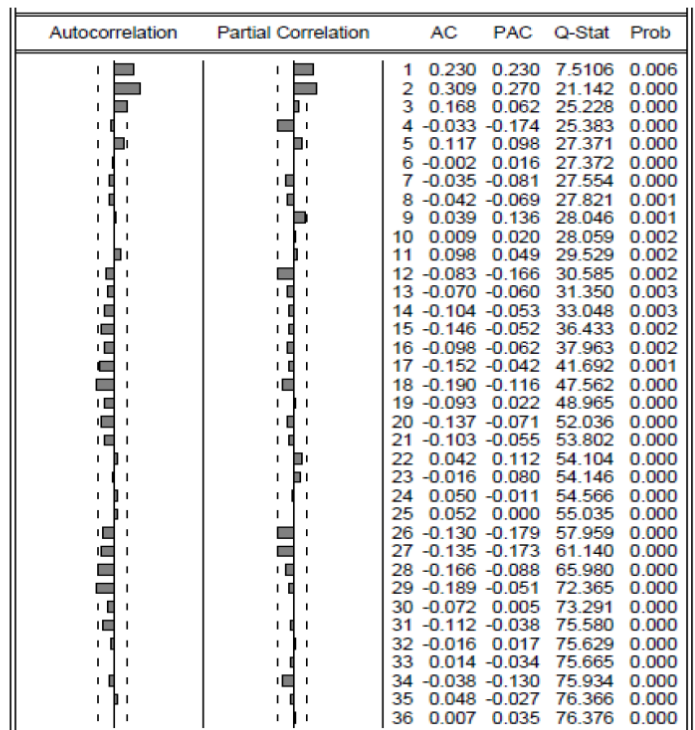


GRAPHIQUE 5 – Produit intérieur brut (en première différence)

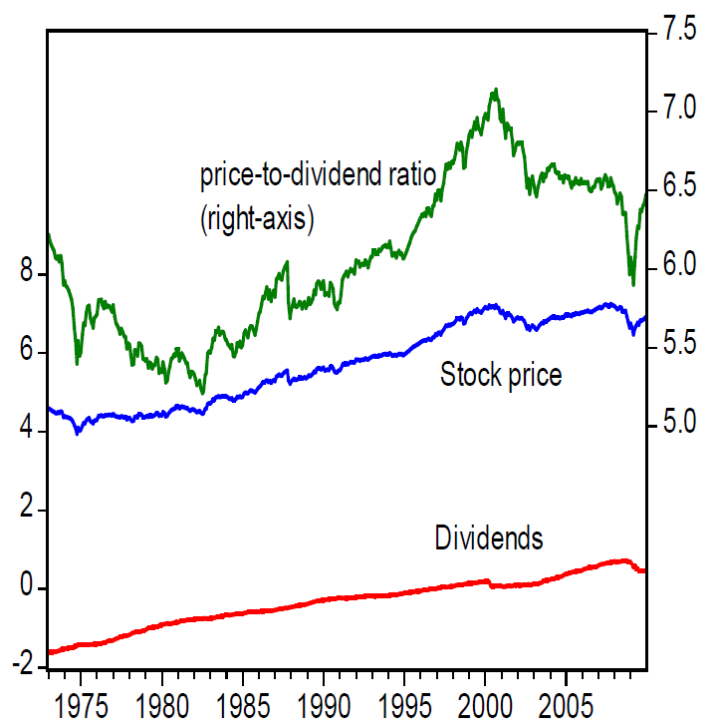
Valeurs observées



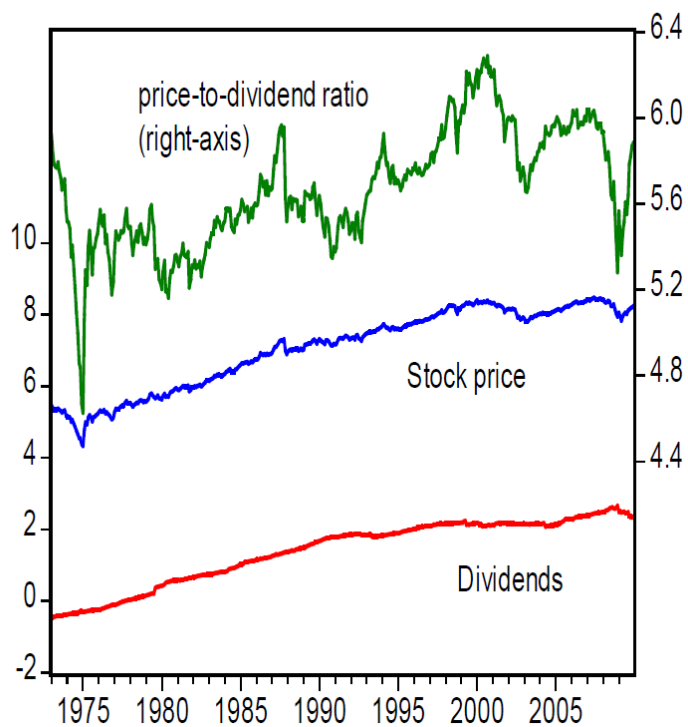
Fonction d'autocorrélation (partielle)



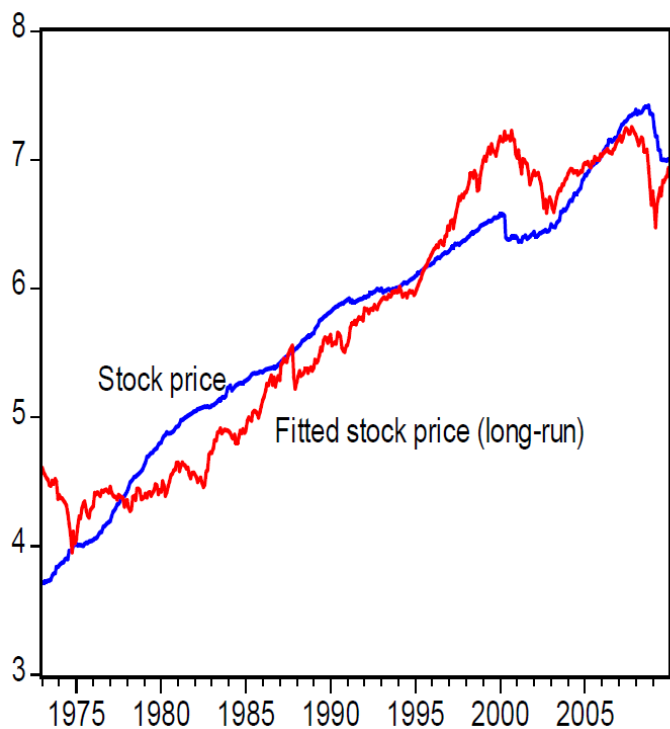
GRAPHIQUE 6 – Relation entre prix et dividendes  
**Marché américain**



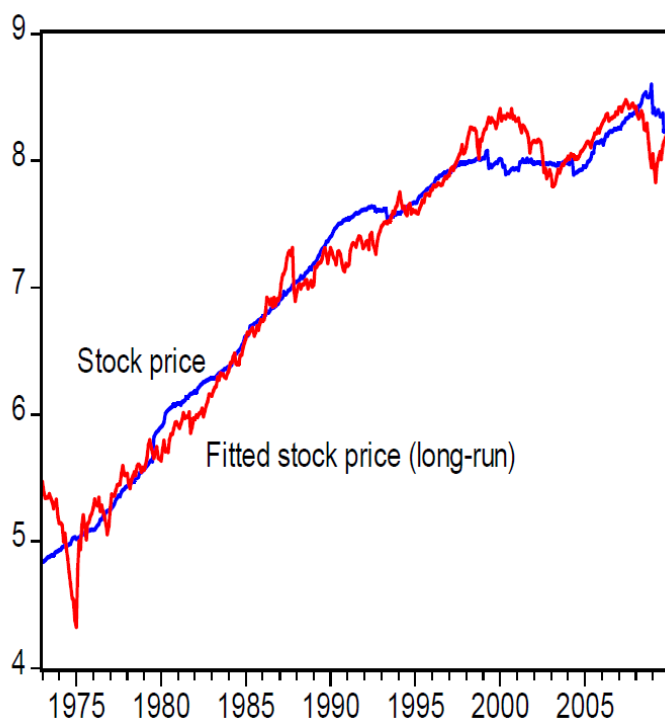
**Marché anglais**



GRAPHIQUE 7 – Ajustement de la relation de long terme  
**Marché américain**



**Marché anglais**





Q5. Dans cette perspective, il suggère de procéder de deux manières :

- Méthode 1 : Estimer la relation (1) par la méthode des moindres carrés ordinaires et tester si les résidus estimés sont  $I(1)$  ou  $I(0)$ .
- Méthode 2 : Estimer la relation suivante

$$p_t = \gamma + \beta d_t + u_t \quad (2)$$

et tester si les résidus estimés sont  $I(1)$  ou  $I(0)$ . La méthode 1 est donc un cas particulier où l'on impose une restriction théorique ( $\beta = 1$ ).

À partir des résidus estimés, cet économètre conduit des tests augmentés de Dickey-Fuller en utilisant la spécification suivante :

$$\Delta \hat{u}_t = \psi \hat{u}_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \alpha_i \Delta \hat{u}_{t-i} + \epsilon_t$$

Les résultats suivants sont obtenus.

Résultats pour les Etats-Unis				
Méthodes	Estimation de $\psi$	Err. Std.	t-stat.	p-value
1	-0.0045	0.0045	-1.0025	0.3166
2	-0.0186	0.0070	-2.6534	0.0083
Résultats pour le Royaume-Uni				
Méthodes	Estimation de $\psi$	Err. Std.	t-stat.	p-value
1	-0.0287	0.0109	-2.6255	0.0090
2	-0.0690	0.0158	-4.3575	0.0000

- Ecrire le test d'hypothèses et préciser l'interprétation de l'hypothèse nulle (respectivement, alternative).

On teste l'hypothèse nulle  $\psi = 0$  : c'est un test ADF pour  $\hat{u}_t$  dont la statistique de l'hypothèse est la t-stat associée à  $\hat{\psi}$ , donc de l'hypothèse nulle de non-stationnarité des résidus des méthodes (1) et (2) contre l'hypothèse alternative de stationnarité. Cela revient ici à tester l'hypothèse nulle de non-cointégration contre l'hypothèse alternative d'une relation de cointégration.

- Sachant que les valeurs critiques sont -2.5702 (1%), -1.9415 (5%) et -1.616 (10%), interpréter les résultats précédents.

La t-stat associée à  $\hat{\psi}$  est inférieure aux valeurs critiques à 1%, 5% et 10% pour tous les modèles sauf pour la méthode (1) (avec pré-spécification du vecteur de cointégration) pour les Etats-Unis, où la t-stat est supérieure aux trois valeurs critiques. Pour la méthode (1) des Etats-Unis, on conclut donc à l'absence d'une relation de cointégration, tandis que pour la méthode (2) des Etats-Unis et pour les deux modèles du Royaume-Uni, on conclut à la présence d'une relation de cointégration.

### Partie III : Modèles à correction d'erreurs

L'existence d'une relation de cointégration suggère d'adopter une modélisation à correction d'erreur pour les liens entre le prix d'un actif et les dividendes :

$$\Delta p_t = c_1 + \lambda_1(p_{t-1} - \alpha - \beta d_{t-1}) + \sum_{j=1}^J \psi_{1,j} \Delta p_{t-j} + \sum_{k=0}^K \psi_{2,k} \Delta d_{t-k} + \epsilon_{1,t}$$

ou (en imposant la contrainte  $\beta = 1$ )

$$\Delta p_t = c_2 + \lambda_2(p_{t-1} - c - d_{t-1}) + \sum_{j=1}^J \psi_{11,j} \Delta p_{t-j} + \sum_{k=0}^K \psi_{22,k} \Delta d_{t-k} + \epsilon_{2,t}$$

Q6. Interpréter ces deux équations.

- La combinaison linéaire de  $\{p_{t-1}, 1, d_{t-1}\}$  associée aux  $\lambda_i$  représentent les résidus de la relation de long terme liant  $p_t$  et  $d_t$ . Pour le premier modèle, il n'y a pas de contrainte sur les coefficients tandis que pour la seconde on impose un effet de  $d_t$  sur  $p_t$  égale à 1, ce sont donc les cas analogues aux méthodes (2) et (1) détaillées à la partie précédente.  $\lambda_i$  représente donc **la dynamique de long terme** dans la variation de  $p_t$  à travers l'effet de l'écart de  $p_{t-1}$  à sa relation de long terme avec  $d_{t-1}$ . S'il est positif, cet écart a un effet du même signe sur  $\Delta p_t$  qui fait donc augmenter  $p_t$  : l'effet est donc permanent. S'il est négatif, cet écart a un effet opposé sur  $\Delta p_t$  qui fait retourner  $p_t$  vers sa relation de long terme : l'effet est donc transitoire, et la valeur de  $\lambda_i$  en contrôle la vitesse d'ajustement.
- Les coefficients  $\psi$  sont les effets des variations passées de  $p_t$  et de  $d_t$  sur la variation contemporaine de  $p_t$ . Ils représentent donc la **dynamique de court terme** dans la variation de  $p_t$ .

Q7. Comment peut-on estimer ce modèle ?

Plusieurs méthodes sont possibles :

- On peut estimer conjointement la dynamique de long-terme et de court-terme grâce à un Maximum de vraisemblance non-linéaire (Johansen)
- On peut estimer en deux étapes (Engle-Granger) :
  - premièrement la relation de long terme et déterminer les résidus estimés  $\hat{u}_t$
  - deuxièmement le modèle à correction d'erreur sous la forme, par exemple pour le premier modèle :

$$\Delta p_t = c_1 + \lambda_1 \hat{u}_{t-1} + \sum_j \psi_{1,j} \Delta p_{t-j} + \sum_k \psi_{2,k} \Delta d_{t-k} + \epsilon_{1,t}$$

Le modèle est alors linéaire.

Q8. L'estimation de ces modèles conduit aux résultats suivants :

### Résultats pour les Etats-Unis

Paramètre	Estimation	Err. Std	t-stat.	p-valeur
$c_1$	0.0046	0.0024	1.8444	0.0658
$\lambda_1$	-0.0162	0.0067	-2.4315	0.0154
$\psi_{2,0}$	0.5354	0.2073	2.5834	0.0101
$\psi_{2,1}$	-0.3722	0.2071	-1.7976	0.0729
$c_2$	0.0049	0.0024	1.9468	0.0500
$\lambda_2$	-0.0058	0.0044	-1.2914	0.1972
$\psi_{22,0}$	0.4908	0.2084	2.3547	0.0190
$\psi_{22,1}$	-0.3871	0.2089	-1.8530	0.0645

### Résultats pour le Royaume-Uni

$c_1$	0.0053	0.0027	1.9573	0.0509
$\lambda_1$	-0.0549	0.0139	-3.9503	0.0001
$\psi_{1,1}$	0.1557	0.0473	3.2928	0.0011
$\psi_{1,2}$	-0.1018	0.0473	-2.1520	0.0319
$\psi_{1,3}$	-0.1145	0.0470	2.4334	0.0154
$c_2$	0.076	0.0029	2.5632	0.0107
$\lambda_2$	-0.0322	0.0099	-2.2486	0.0012
$\psi_{11,1}$	0.1472	0.0474	3.1064	0.0020
$\psi_{11,2}$	-0.1132	0.474	-2.3872	0.0174
$\psi_{11,3}$	0.1140	0.0473	2.4061	0.0165
$\psi_{22,0}$	-0.2657	0.1384	-1.9191	0.0556

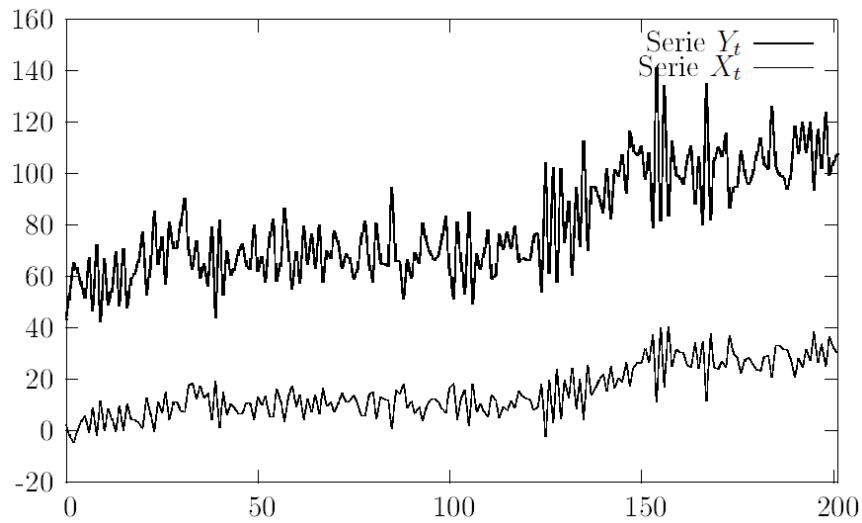
Interpréter ces résultats.

Aucune information n'est donnée sur la méthode de sélection des variables. Supposons par exemple qu'un critère d'information a été utilisé.

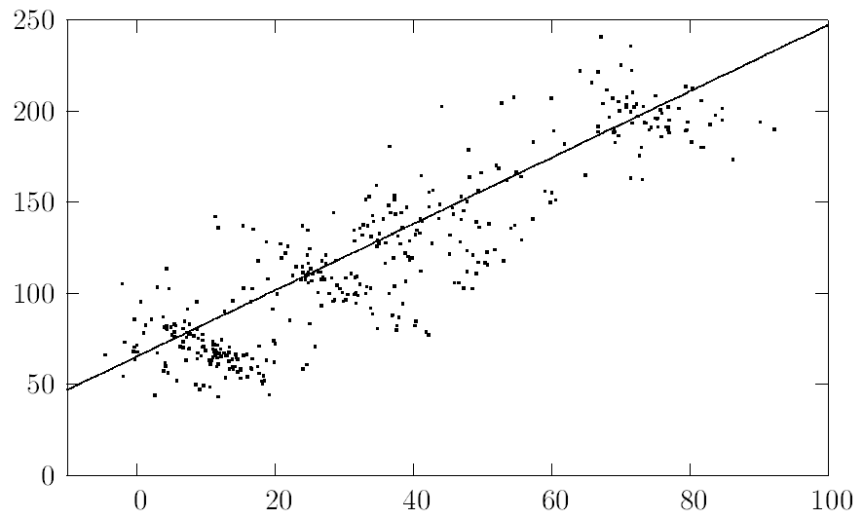
- Pour les Etats-Unis, on voit pour le premier modèle que  $\lambda_1$  est négatif et significatif. Il y a donc une dynamique de long terme où les écarts à la relation de long terme sont transitoires. Concernant la dynamique de court terme, seuls les retards de  $\Delta d_t$  sont sélectionnés, et seul le retard d'ordre 0 est significatif. On a donc  $\Delta d_t$  la variation contemporaine des dividendes seulement qui a un effet direct positif sur  $\Delta p_t$ . Pour le second modèle,  $\lambda_2$  n'est pas significatif. Il n'y a donc pas de dynamique de long terme, ce qui semble cohérent avec la partie précédente où il y avait absence d'une relation de cointégration pour ce cas. La dynamique de court terme est similaire à celle du premier modèle.
- Pour le Royaume-Uni, les deux modèles estiment un  $\lambda_i$  négatif et significatif. Cela semble cohérent avec la présence d'une relation de cointégration évoquée dans la partie précédente, et l'écart à la relation de long terme a comme pour les Etats-Unis un effet transitoire. Par contre, seuls  $\Delta p_t$  et ses retards ont été sélectionnés et sont significatifs jusqu'à l'ordre 2. Le second modèle sélectionne un  $\Delta d_t$  mais l'effet n'est pas significatif. La dynamique de court terme ne vient donc que du  $\Delta p_t$  contemporain et de ses retards.

### Exercice 3 :

Le graphique 8 représente une série bivariable  $(Y_t, X_t)$  pour  $t = 1, \dots, 200$ . Le graphique 9 représente le nuage des points  $(Y_t, X_t)$ , et la droite de régression de  $Y_t$  sur  $X_t$ .



GRAPHIQUE 8 – Série bivariable  $(X_t, Y_t)$



GRAPHIQUE 9 – Nuage des points  $(X_t, Y_t)$  et droite de régression  $Y_t = 56 + 1.8X_t$

Q1. Commenter les graphiques 8 et 9.

Sur le graphique 8 on remarque que les 2 séries  $X_t$  et  $Y_t$  ne semblent pas stationnaires (absence d'une tendance linéaire déterministe), mais paraissent varier simultanément. Le graphique 9 confirme une forte corrélation positive entre  $X_t$  et  $Y_t$ . Il apparaît que  $Y_t$  est proche  $1.8X_t + 56$ . On peut soupçonner une relation de cointégration entre ces 2 variables. Cela ne prouve cependant rien, à cause du risque de régression fictive dans le cas où les résidus de la droite de régression ne seraient pas stationnaires.

Q2. Quels sont les tests réalisés dans les tableaux 1, 2, 3, 4 et 5 ? Quels sont les modèles estimés ?

Les tests réalisés dans les tableaux 1, 2, 3 et 4 sont des tests ADF de racine unitaire sur respectivement les séries  $X$ ,  $\Delta X$ ,  $Y$ ,  $\Delta Y$ . c'est-à-dire des tests de l'hypothèse  $H_0 : \pi = 0$  dans un modèle ECM, pour  $x \in \{X, \Delta X, Y, \Delta Y\}$  de la forme :

$$\Delta x_t = \pi x_{t-1} + \sum_{i=1}^4 \pi_i \Delta x_{t-i} + \nu_0 + \nu_1 t + \epsilon_t$$

Le tableau 5 teste le rang de cointégration du processus  $(X_t, Y_t)$ , soit le rang de la matrice  $\lambda \Pi$  dans la régression du modèle VECM de la forme :

$$\begin{pmatrix} \Delta X_t \\ \Delta Y_t \end{pmatrix} = \lambda \Pi \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \\ 1 \end{pmatrix} + \Psi \begin{pmatrix} \Delta X_{t-1} \\ \Delta Y_{t-1} \end{pmatrix} + U_t$$

L'hypothèse de rang nul de cointégration est rejetée à 5% (la  $p$ -value est proche de 0), mais celle de rang égal à 1 ne l'est pas.  $(X_t)$  et  $(Y_t)$  sont donc cointégrées de rang 1.

Q3. Le modèle bivarié estimé est

$$\begin{pmatrix} \Delta X_t \\ \Delta Y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 3.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.5 & -0.07 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.01 & 0.01 \\ 0.99 & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta X_{t-1} \\ \Delta Y_{t-1} \end{pmatrix}$$

Comment s'appelle ce modèle ? Quelle est la relation de long terme entre  $X_t$  et  $Y_t$  ?

C'est un modèle vectoriel à correction d'erreur (VECM) qui fait apparaître un rang 1 de cointégration (le nombre de lignes de la matrice  $\Pi$  – ici le vecteur – de cointégration, conclu par le test de Johansen au tableau 5). La relation de long terme est  $X_t = 0.5Y_t + 0.07$ , ou encore  $Y_t = 2X_t - 0.14$ , ce qui est assez proche (pour la pente) de la droite de régression de  $Y_t$  sur  $X_t$ .

ADF Test for series: X  
 sample range: [6, 400], T = 395  
 lagged differences: 4  
 intercept, time trend  
 asymptotic critical values  
 reference: Davidson, R. and MacKinnon, J. (1993),  
 "Estimation and Inference in Econometrics" p 708, table 20.1,  
 Oxford University Press, London  
 1%            5%            10%  
 -3.96        -3.41        -3.13  
 value of test statistic: -2.0726  
 regression results:

variable	coefficient	t-statistic
x(-1)	-0.0913	-2.0726
dx(-1)	-1.1006	-17.9772
dx(-2)	-0.7332	-9.5113
dx(-3)	-0.4955	-6.6643
dx(-4)	-0.2462	-4.9696
constant	3.8988	2.5586
trend	0.0200	2.2296
RSS	11368.2410	

#### OPTIMAL ENDOGENOUS LAGS FROM INFORMATION CRITERIA

sample range: [12, 400], T = 389

optimal number of lags (searched up to 10 lags of 1. differences):

Akaike Info Criterion: 6  
 Final Prediction Error: 6  
 Hannan-Quinn Criterion: 6  
 Schwarz Criterion: 4

#### PORTMANTEAU TEST with 12 lags

Portmanteau: 10.9837  
 p-Value (Chi<sup>2</sup>): 0.5303  
 Ljung & Box: 11.2199  
 p-Value (Chi<sup>2</sup>): 0.5102

TABLE 1 – X désigne la série ( $X_t$ )

ADF Test for series: X\_d1  
 sample range: [7, 400], T = 394  
 lagged differences: 4  
 intercept, time trend  
 asymptotic critical values  
 reference: Davidson, R. and MacKinnon, J. (1993),  
 "Estimation and Inference in Econometrics" p 708, table 20.1,  
 Oxford University Press, London  
 1%            5%            10%  
 -3.96        -3.41        -3.13  
 value of test statistic: -14.7210  
 regression results:

variable	coefficient	t-statistic
x(-1)	-4.0899	-14.7210
dx(-1)	1.8865	7.6711
dx(-2)	1.0472	5.5587
dx(-3)	0.4475	3.7095
dx(-4)	0.0865	1.7036
constant	0.8442	3.0266
trend	0.0025	1.0447
RSS	11356.7836	

#### OPTIMAL ENDOGENOUS LAGS FROM INFORMATION CRITERIA

sample range: [13, 400], T = 388

optimal number of lags (searched up to 10 lags of 1. differences):

Akaike Info Criterion: 5  
 Final Prediction Error: 5  
 Hannan-Quinn Criterion: 5  
 Schwarz Criterion: 3

#### PORTMANTEAU TEST with 12 lags

Portmanteau: 10.5931  
 p-Value (Chi<sup>2</sup>): 0.5641  
 Ljung & Box: 10.8265  
 p-Value (Chi<sup>2</sup>): 0.5438

TABLE 2 – X\_d1 désigne la série ( $\Delta X_t$ )

---

ADF Test for series: Y  
 sample range: [7, 400], T = 394  
 lagged differences: 4  
 intercept, time trend  
 asymptotic critical values  
 reference: Davidson, R. and MacKinnon, J. (1993),  
 "Estimation and Inference in Econometrics" p 708, table 20.1,  
 Oxford University Press, London  
 1%            5%            10%  
 -3.96        -3.41        -3.13  
 value of test statistic: -2.6141  
 regression results:

---

variable	coefficient	t-statistic
x(-1)	-0.1248	-2.6141
dx(-1)	-1.0911	-17.4095
dx(-2)	-0.7458	-9.5791
dx(-3)	-0.5071	-6.7819
dx(-4)	-0.2500	-5.0506
constant	16.2314	2.8546
trend	0.0539	2.7207
RSS	54136.8843	

---

#### OPTIMAL ENDOGENOUS LAGS FROM INFORMATION CRITERIA

sample range: [13, 400], T = 388

optimal number of lags (searched up to 10 lags of 1. differences):

Akaike Info Criterion: 6  
 Final Prediction Error: 6  
 Hannan-Quinn Criterion: 6  
 Schwarz Criterion: 4

#### PORTMANTEAU TEST with 12 lags

Portmanteau: 11.9734  
 p-Value (Chi<sup>2</sup>): 0.4478  
 Ljung & Box: 12.2212  
 p-Value (Chi<sup>2</sup>): 0.4281

TABLE 3 – Y désigne la série ( $Y_t$ )



ADF Test for series: Y\_d1  
 sample range: [7, 400], T = 394  
 lagged differences: 4  
 intercept, time trend  
 asymptotic critical values  
 reference: Davidson, R. and MacKinnon, J. (1993),  
 "Estimation and Inference in Econometrics" p 708, table 20.1,  
 Oxford University Press, London  
 1%            5%            10%  
 -3.96        -3.41        -3.13  
 value of test statistic: -14.9267  
 regression results:

variable	coefficient	t-statistic
x(-1)	-4.2163	-14.9267
dx(-1)	1.9951	7.9795
dx(-2)	1.1200	5.8616
dx(-3)	0.4851	3.9847
dx(-4)	0.0983	1.9308
constant	1.6007	2.6314
trend	0.0044	0.8364
RSS	54567.2105	

#### OPTIMAL ENDOGENOUS LAGS FROM INFORMATION CRITERIA

sample range: [13, 400], T = 388

optimal number of lags (searched up to 10 lags of 1. differences):

Akaike Info Criterion: 5  
 Final Prediction Error: 5  
 Hannan-Quinn Criterion: 5  
 Schwarz Criterion: 3

#### PORTMANTEAU TEST with 12 lags

Portmanteau: 11.6900  
 p-Value (Chi<sup>2</sup>): 0.4709  
 Ljung & Box: 11.9352  
 p-Value (Chi<sup>2</sup>): 0.4509

TABLE 4 – Y\_d1 désigne la série ( $\Delta Y_t$ )

Johansen Trace Test for: X Y  
sample range: [2, 400], T = 399  
included lags (levels): 1  
dimension of the process: 2  
trend and intercept included  
response surface computed:

-----					
r0	LR	pval	90%	95%	99%
-----					
0	7967.03	0.0000	23.32	25.73	30.67
1	3.38	0.8215	10.68	12.45	16.22

#### OPTIMAL ENDOGENOUS LAGS FROM INFORMATION CRITERIA

sample range: [11, 400], T = 390

optimal number of lags (searched up to 10 lags of levels):

Akaike Info Criterion: 1  
Final Prediction Error: 1  
Hannan-Quinn Criterion: 1  
Schwarz Criterion: 1

TABLE 5 -