ENSAE 2A

Séries temporelles linéaires

TD n°3

Pour toute remarque, contacter jerome.trinh@ensae.fr

Exercice 1 : On considère deux processus stationnaires du second ordre X et Y vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + aX_t + U_t \\ X_t &= \phi_2 X_{t-1} + V_t \end{cases}$$

où U et V sont deux bruits blancs non corrélés de variances respectives σ_U^2 et σ_V^2.
On suppose en outre que $0 < |\phi_1| < 1$ et $0 < \phi_2 < 1$.

Q1. Soit $W = (I - \phi_2 L)(I - \phi_1 L) \circ Y$.
Montrer que W est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance γ_W.
En déduire que W est un processus MA que l'on déterminera.

W est stationnaire comme composition d'un polynôme et d'une série stationnaire. Par ailleurs, on peut réécrire les dynamiques de X et Y de la manière suivante :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \begin{cases} (I - \phi_1 L) Y_t &= aX_t + U_t \\ (I - \phi_2 L) X_t &= V_t \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} W_t &= (I - \phi_2 L)(I - \phi_1 L) Y_t \\ &= (I - \phi_2 L)(aX_t + U_t) \\ &= aV_t + U_t - \phi_2 U_{t-1} \end{aligned}$$

donc, pour $h \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \mathsf{Cov}(W_t, W_{t+h}) &= \mathsf{Cov}(aV_t + U_t - \phi_2 U_{t-1}, aV_{t+h} + U_{t+h} - \phi_2 U_{t+h-1}) \\ &= \begin{cases} \mathsf{V}(aV_t + U_t - \phi_2 U_{t-1}) & \text{si } h = 0 \\ \mathsf{Cov}(U_t, -\phi_2 U_t) & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases} \\ \gamma_W(h) &= \begin{cases} a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2) \sigma_U^2 & \text{si } h = 0 \\ -\phi_2 \sigma_U^2 & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

On a $\gamma_W(h) = 0 \ \forall h > 1$, donc la fonction d'autocovariance de W est celle d'un MA(1). Comme il est stationnaire, W peut donc s'exprimer comme $W = (I - \theta L)\epsilon$ où $\theta \in]-1, 1[$ et ϵ est un bruit blanc. Si on note $\mathsf{V}(\epsilon_t) = \sigma_\epsilon^2$, on a donc forcément

$$\begin{aligned} \mathsf{Cov}((I - \theta L)\epsilon_t, (I - \theta L)\epsilon_{t+h}) &= \gamma_W(h) \\ \begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma_\epsilon^2 & \text{si } h = 0 \\ -\theta \sigma_\epsilon^2 & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases} &= \begin{cases} a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2) \sigma_U^2 & \text{si } h = 0 \\ -\phi_2 \sigma_U^2 & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (1 + \theta^2)\sigma_\epsilon^2 &= a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2)\sigma_U^2 \\ -\theta \sigma_\epsilon^2 &= -\phi_2 \sigma_U^2 \end{cases}$$

On a donc $\sigma_\epsilon^2 = \phi_2 \sigma_U^2 / \theta$.
De plus, en divisant la première ligne par la seconde et posant $\alpha = \frac{a^2 \sigma_V^2 + (1 + \phi_2^2)\sigma_U^2}{\phi_2 \sigma_U^2} > 0$, on obtient l'équation du second degré pour θ :

$$\theta^2 - \alpha\theta + 1 = 0$$

Le discriminant est :

$$\begin{aligned}\Delta &= \alpha^2-4\\ &= (\alpha-2)(\alpha+2)\\ &= \frac{a^2\sigma_V^2+(1+\phi_2^2)\sigma_U^2-2\phi_2\sigma_U^2}{\phi_2\sigma_U^2}(\alpha+2)\\ &= \frac{a^2\sigma_V^2+(1-\phi_2^2)\sigma_U^2}{\phi_2\sigma_U^2}(\alpha+2)\quad >0 \text{ comme } |\phi_2^2|<1\end{aligned}$$

L'équation admet donc deux racines conjuguées θ_1 et θ_2. Par ailleurs, on sait que le produit des racines vaut $\theta_1\theta_2 = \frac{1}{1} = 1$ donc l'une est de module supérieure à 1 et l'autre de module inférieure à 1. Si W est un MA(1), θ est forcément celle de module inférieure à 1, soit

$$\theta = \frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$$

Q2. Montrer que Y est en général un processus ARMA que l'on déterminera.

On a

$$(I-\phi_2L)(I-\phi_1L)Y = (I-\theta L)\epsilon$$

À supposer que $\theta \neq \phi_1$ et $\theta \neq \phi_2$, Y est donc un processus ARMA(2,1) (sinon, c'est un AR(1)). De plus, puisque ϕ_1, ϕ_2 et θ sont à l'intérieure du cercle unité, cette représentation est canonique.

Q3. Déterminer la prévision optimale $Y_t^* = \mathsf{EL}(Y_t|Y_{t-1},\ldots)$ et la variance de l'erreur de prévision $Y_t - Y_t^*$.

Puis que la représentation ARMA(2,1) précédente de Y est canonique, ϵ est son innovation. Donc

$$\mathsf{V}(Y_t-Y_t^*) = \sigma_\epsilon^2 = \frac{2\phi_2\sigma_U^2}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}$$

Par ailleurs, comme $\theta \in]-1,1[$,

$$(I-\theta L)^{-1}(I-\phi_2L)(I-\phi_1L)Y = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\theta^kL^k\right)(I-\phi_2L)(I-\phi_1L)Y = \epsilon$$

Soit

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\theta^k(Y_{t-k}-(\phi_1+\phi_2)Y_{t-k-1}+\phi_1\phi_2Y_{t-k-2}) = \epsilon_t$$

$$\begin{aligned} Y_t-(\phi_1+\phi_2)Y_{t-1}+\phi_1\phi_2Y_{t-2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\theta^k(Y_{t-k}-(\phi_1+\phi_2)Y_{t-k-1}+\phi_1\phi_2Y_{t-k-2}) &= \epsilon_t\\ Y_t-(\phi_1+\phi_2-\theta)Y_{t-1}+(\phi_1\phi_2-\theta(\phi_1+\phi_2)+\theta^2)Y_{t-2} &\\ +(\phi_1\phi_2-\theta(\phi_1+\phi_2)+\theta^2)\theta Y_{t-3}+(\phi_1\phi_2-\theta(\phi_1+\phi_2)+\theta^2)\theta^2Y_{t-4}+\ldots &= \epsilon_t\end{aligned}$$

donc

$$Y_t = (\phi_1+\phi_2-\theta)Y_{t-1}-(\phi_1\phi_2-\theta(\phi_1+\phi_2)+\theta^2)\sum_{k=2}^{+\infty}\theta^{k-2}Y_{t-k}+\epsilon_t$$

On a alors la prévision optimale :

$$Y_t^* = (\phi_1+\phi_2-\theta)Y_{t-1}-(\phi_1\phi_2-\theta(\phi_1+\phi_2)+\theta^2)\sum_{k=2}^{+\infty}\theta^{k-2}Y_{t-k}$$

Exercice 2 :

On considère un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifiant

$$X_t - \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} = \epsilon_t, \ \ \forall t \in \mathbb{Z}$$

où (ϵ_t) est un bruit blanc faible de variance σ^2.

Q1. Soit $\Phi(L) = 1 - \frac{7}{2}L + \frac{3}{2}L^2$. Factoriser Φ et décomposer Φ^{-1} en éléments simples. Développer chaque élément simple en série entière de L ou L^{-1}.

Le discriminant de $\Phi(L)$ est $\Delta = \frac{49}{4} - 6 = \frac{25}{4} > 0$, donc $\Phi(L)$ a pour racines $\frac{7/2-\sqrt{25/4}}{3} = \frac{1}{3}$ et $\frac{7/2+\sqrt{25/4}}{3} = 2$, donc

$$\Phi(L) = (1-3L)(1-\frac{1}{2}L)$$

On souhaite décomposer $\Phi(L)^{-1}$ en éléments simples, c'est-à-dire écrire $\Phi(L)^{-1}$ de la forme :
$\Phi(L)^{-1} = A(1-3L)^{-1} + B(1-\frac{1}{2}L)^{-1}$
d'où $\Phi(L)^{-1} = \dfrac{A - \frac{1}{2}AL + B - 3BL}{(1-3L)(1-\frac{1}{2}L)} = \dfrac{A + B - (\frac{1}{2}A + 3B)L}{(1-3L)(1-\frac{1}{2}L)}$
Comme $\Phi(L)^{-1} = \dfrac{1}{(1-3L)(1-\frac{1}{2}L)}$, on a par identification

$$\begin{cases} A+B=1 \\ \frac{1}{2}A+3B=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1-A \\ \frac{1}{2}A + 3(1-A) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{5} \\ A = \frac{6}{5} \end{cases}$$

donc

$$\Phi(L)^{-1} = \frac{6}{5}(1-3A)^{-1} - \frac{1}{5}(1-\frac{1}{2}L)^{-1}$$

Comme $\frac{1}{2} < 1$, on a alors

$$(1-\frac{1}{2}L)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}L^k$$

et comme $3 > 1$, à l'inverse

$$(1-3L)^{-1} = (-3L)^{-1}(1-\frac{1}{3}F)^{-1} = -\frac{1}{3}L^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k}L^{-k} = -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}(L^{-1})^k = -\sum_{k=-\infty}^{-1}3^kL^k$$

Q2. Montrer qu'il existe une suite (a_k) de réels telle que $X_t = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\epsilon_{t-k}$. Montrer que (ϵ_t) n'est **pas** l'innovation de (X_t).

Définissons

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{5}\frac{1}{2^k} & \text{si } k \geq 0 \\ -\frac{6}{5}3^k & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors par construction,

$$\Phi(L)^{-1} = -\frac{6}{5}\sum_{k=-\infty}^{-1}3^kL^k - \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}L^k = \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(-\frac{6}{5}3^kL^k\right) + \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\frac{1}{2^k}L^k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}a_kL^k$$

Comme $\Phi(L)X_t = \epsilon_t$ et que $\phi(L)$ est inversible, on a

$$X_t = \phi(L)^{-1}\epsilon_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \epsilon_{t-k}$$

Par ailleurs, pour $t \in \mathbb{Z}$ et $j \geq 1$ on a $\mathsf{Cov}(\epsilon_t, X_{t-j}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mathsf{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-j-k}) = a_{-j}\sigma_\epsilon^2 \neq 0$ car ϵ est un bruit blanc. Donc ϵ n'est **pas** l'innovation de X.

Q3. Montrer qu'il existe un polynôme ϕ^* de degré 2 dont toutes les racines sont hors du disque unité et un bruit blanc (η_t) tels que

$$\Phi^*(L)X_t = \eta_t, \ \ \forall t \in \mathbb{Z}$$

En déduire qu'il existe une suite (b_k) telle que

$$X_t = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \eta_{t-k}, \ \ \forall t \in \mathbb{Z}$$

et que (η_t) est l'innovation linéaire de (X_t).

On considère le polynôme $\Phi^*(L) = (1 - \frac{1}{3}L)(1 - \frac{1}{2}L)$, dont toutes les racines sont hors du cercle unité par construction. Notons $\eta = \Phi^*(L)X$, donc

$$\begin{array}{rcl}
\eta_t & = & \Phi^*(L)X_t \\
\eta_t & = & \Phi^*(L)\Phi(L)^{-1}\epsilon_t \\
 & = & (1-\frac{1}{3}L)(1-\frac{1}{2}L)(1-3L)^{-1}(1-\frac{1}{2}L)^{-1}\epsilon_t \\
 & = & (1-\frac{1}{3}L)(1-3L)^{-1}\epsilon_t \\
 & = & (1-\frac{1}{3}L)\left(-\sum_{k=-\infty}^{-1} 3^k L^k\right)\epsilon_t \\
 & = & \left(-\sum_{k=-\infty}^{-1} 3^k L^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} 3^{k-1}L^{k+1}\right)\epsilon_t \\
 & = & -\sum_{k=-\infty}^{-1} 3^k \epsilon_{t-k} + \sum_{k=-\infty}^{-1} 3^{k-1}\epsilon_{t-k-1} \\
 & = & -\sum_{k=-\infty}^{-1} 3^k \epsilon_{t-k} + \sum_{k=-\infty}^{0} 3^{k-2}\epsilon_{t-k} \\
 & = & 3^{-2}\epsilon_t + \sum_{k=-\infty}^{-1} (3^{k-2} - 3^k)\epsilon_{t-k} \\
\eta_t & = & \dfrac{1}{9}\epsilon_t - \dfrac{8}{9}\sum_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{3^k}\epsilon_{t+k}
\end{array}$$

Sa fonction d'autocovariance d'ordre h est :

$$\mathsf{Cov}(\eta_t, \eta_{t-h}) = \mathsf{Cov}(\frac{1}{9}\epsilon_t - \frac{8}{9}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}\epsilon_{t+k}, \frac{1}{9}\epsilon_{t-h} - \frac{8}{9}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}\epsilon_{t-h+k})$$

Pour $h = 0$,

$$\mathsf{V}(\eta_t) = \mathsf{V}(\frac{1}{9}\epsilon_t - \frac{8}{9}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}\epsilon_{t+k}) = \frac{1}{9^2}\sigma_\epsilon^2 + \frac{8^2}{9^2}\sigma_\epsilon^2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^{2k}} = \frac{1}{9^2}\sigma_\epsilon^2 + \frac{8^2}{9^2}\sigma_\epsilon^2\frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{9}\sigma_\epsilon^2$$

Pour $h > 0$,

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cov}(\eta_t, \eta_{t-h}) &= \mathsf{Cov}(\frac{1}{9}\epsilon_t - \frac{8}{9}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}\epsilon_{t+k}, \frac{1}{9}\epsilon_{t-h} - \frac{8}{9}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}\epsilon_{t-h+k}) \\
&= \mathsf{Cov}(\frac{1}{9}\epsilon_t, -\frac{8}{9}\frac{1}{3^h}\epsilon_t) + \mathsf{Cov}(-\frac{8}{9}\frac{1}{3}\epsilon_{t+1}, -\frac{8}{9}\frac{1}{3^{1+h}}\epsilon_{t+1}) + \ldots \\
&= -\frac{8}{9^2 * 3^h}\sigma_\epsilon^2 + \frac{8^2}{9^2}\frac{1}{3^h}\sum_{k=1}^{+\infty}\mathsf{Cov}(\frac{1}{3^k}\epsilon_{t+k}, \frac{1}{3^k}\epsilon_{t+k}) \\
&= -\frac{8}{9^2 * 3^h}\sigma_\epsilon^2 + \frac{8^2}{9^2}\frac{1}{3^h}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^{2k}}\sigma_\epsilon^2 \\
&= -\frac{8}{9^2 * 3^h}\sigma_\epsilon^2 + \frac{8^2}{9^2}\frac{1}{3^h}\frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\sigma_\epsilon^2 \\
&= -\frac{8}{9^2 * 3^h}\sigma_\epsilon^2 + \frac{8}{9^2 * 3^h}\sigma_\epsilon^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme $\mathsf{E}(\eta_t) = 0$, η est donc un bruit blanc de variance $\frac{1}{9}\sigma_\epsilon^2$.
Par ailleurs, Φ^* a toutes ses racines de modules strictement supérieure à 1, il admet donc un développement en série entière à indice positifs uniquement, à savoir :

$$\Phi^*(L)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k L^k$$

En effet, la décomposition de $\phi^*(L)^{-1}$ en éléments simple donne :

$$\Phi^*(L)^{-1} = (1 - \frac{1}{3}L)^{-1}(1 - \frac{1}{2}L)^{-1} = A(1 - \frac{1}{3}L)^{-1} + B(1 - \frac{1}{2}L)^{-1} = \frac{A + B - \frac{1}{2}AL - \frac{1}{3}BL}{(1 - \frac{1}{3}L)^{-1}(1 - \frac{1}{2}L)}$$

où $\left\{\begin{array}{l} A + B = 1 \\ \frac{1}{2}A + \frac{1}{3}B = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A = 1 - B \\ \frac{1}{2}(1 - B) + \frac{1}{3}B = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} A = -2 \\ B = 3 \end{array}\right.$
et $(1 - \frac{1}{3}L)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k}L^k$ et $(1 - \frac{1}{2}L)^{-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}L^k$
donc

$$\Phi^*(L)^{-1} = -2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k}L^k + 3\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}L^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{2^k} - \frac{2}{3^k}\right)L^k$$

On a donc

$$X_t = \Phi^*(L)^{-1}\eta_t$$

et $\forall t \in Z,\ \ \forall j \geq 1,\ \ \mathsf{Cov}(\eta_t, X_{t-j}) = \mathsf{Cov}(\eta_t, \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{2^k} - \frac{2}{3^k}\right)\eta_{t-k-j}) = 0$ Donc η est bien l'innovation de X.

Q4. Montrer que la régression linéaire optimale de X_t sur son passé n'est pas $\frac{7}{2}X_{t-1} - \frac{3}{2}X_{t-2}$.

Par définition de l'innovation on a pour tout $t \in \mathbb{Z},\ \ \eta_t = X_t - \mathsf{EL}(X_t|X_{t-1}, \ldots)$. Donc la régression linéaire optimale de X_t sur son passé s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathsf{EL}(X_t|X_{t-1},\ldots) &= X_t - \eta_t \\
&= X_t - \Phi^*(L)X_t \\
&= X_t - (1-\frac{1}{3}L)(1-\frac{1}{2})X_t \\
&= \frac{5}{6}X_{t-1} - \frac{1}{6}X_{t-2} \\
&\neq \frac{7}{2}X_{t-1} - \frac{3}{2}X_{t-2} \quad \text{en général}
\end{aligned}$$

Exercice 3 (Optionnel) :

Les modèles "all-pass" sont des ARMA(p,p) causaux pour lesquels les racines du polynômes AR sont les inverses des racines du polynômes MA. Ces modèles ont des comportements parfois surprenants, très différents des ARMA forts usuels.

Considérons l'exemple le plus simple de processus all-pass, défini par

$$X_t - aX_{t-1} = \eta_t - \frac{1}{a}\eta_{t-1}, \quad |a| < 1 \;\; (\eta_t) \sim \mathsf{IID}(0, \sigma^2) \tag{1}$$

Q1. On pose

$$U_t = \eta_t - \frac{1}{a}\eta_{t-1}$$

Montrer que (U_t) est un processus stationnaire et qu'il a la même fonction d'autocorrélation que le processus (Z_t) défini par

$$Z_t = \eta_t - a\eta_{t-1}$$

On a $\mathsf{E}(U_t) = 0$, $\mathsf{V}(U_t) = \gamma_U(0) = \sigma^2\left(1+\frac{1}{a^2}\right)$ et $\mathsf{Cov}(U_t, U_{t-h}) = \gamma_U(h) = \begin{cases} -\frac{1}{a}\sigma^2 & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases}$. Ces moments ne dépendent pas de t donc (U_t) est stationnaire au second ordre.

On a alors

$$\rho_U(h) = \frac{\gamma_U(h)}{\gamma_U(0)} = \begin{cases} -\frac{a}{1+a^2} & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases}$$

On voit facilement que :

$\mathsf{E}(Z_t) = 0$, $\mathsf{V}(Z_t) = \gamma_Z(0) = \sigma^2\left(1+a^2\right)$ et $\mathsf{Cov}(Z_t, Z_{t-h}) = \gamma_Z(h) = \begin{cases} -a\sigma^2 & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases}$

d'où

$$\rho_Z(h) = \frac{\gamma_Z(h)}{\gamma_Z(0)} = \begin{cases} -\frac{a}{1+a^2} & \text{si } |h| = 1 \\ 0 & \text{si } |h| > 1 \end{cases} = \rho_U(h)$$

Q2. Soit le processus (W_t) satisfaisant

$$W_t = U_t + \sum_{j=1}^{\infty} a_j U_{t-j}$$

Sous quelles conditions ce processus est-il stationnaire au second ordre ?

Posons $a_0 = 1$, donc on a $W_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j U_{t-j}$. On a alors :

$\mathsf{E}(W_t)=0$, $\mathsf{V}(W_t)=\sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}a_j^2$ et $\mathsf{Cov}(W_t,W_{t+h})=\sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}a_ja_{j+h}$ ne dépendant pas de t et finis si on impose :

$$\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|<\infty$$

Q3. On suppose par la suite que $a_j=a^j$ pour $j>0$. Écrire W_t sous la forme d'une moyenne mobile infinie par rapport à (η_t).

On a

$$W_t=\sum_{j=0}^{\infty}a^jU_{t-j}=\sum_{j=0}^{\infty}a^j\left(\eta_{t-j}-\frac{1}{a}\eta_{t-j-1}\right)=n_t+\sum_{j=1}^{\infty}a^j\eta_{t-j}+\sum_{j=0}^{\infty}a^{j-1}\eta_{t-j-1}$$

donc

$$W_t=\eta_t+\sum_{j=1}^{\infty}(a^j-a^{j-2})\eta_{t-j}$$

Q4. Déterminer la fonction d'autocovariance de W_t.

Notons $b_0=1$ et $b_j=a^j-a^{j-2}$ pour $j\geq 1$. Pour $h>0$, on a alors :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cov}(W_t,W_{t-h}) &= \mathsf{Cov}\left(\sum_{j=0}^{h-1}b_j\eta_{t-j}+\sum_{j=h}^{\infty}b_j\eta_{t-j},\sum_{j=0}^{\infty}b_j\eta_{t-j-h}\right)\\
&= \mathsf{Cov}\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_{j+h}\eta_{t-j-h},\sum_{j=0}^{\infty}b_j\eta_{t-j-h}\right)\\
&= \sigma^2\sum_{j=0}^{\infty}b_jb_{j+h} \quad = \quad \gamma_W(h)\\
&= \sigma^2\left(a^h-a^{h-2}+\sum_{j=1}^{\infty}(a^j-a^{j-2})(a^{j+h}-a^{j+h-2})\right)\\
&= \sigma^2a^h\left(1-a^{-2}+\sum_{j=1}^{\infty}a^{2j}(1-a^{-2})^2\right)\\
&= \sigma^2a^h\left(1-a^{-2}+\sum_{j=1}^{\infty}a^{2j}(1-2a^{-2}+a^{-4})\right)\\
&= \sigma^2a^h\left(1+a^{-2}-2a^{-2}+\sum_{j=1}^{\infty}a^{2j}-2\sum_{j=1}^{\infty}a^{2(j-1)}+\sum_{j=1}^{\infty}a^{2(j-2)}\right)\\
&= \sigma^2a^h\left(\sum_{j=-1}^{\infty}a^{2j}-2\sum_{j=0}^{\infty}a^{2(j-1)}+\sum_{j=1}^{\infty}a^{2(j-2)}\right)
\end{aligned}$$

ou encore

$$\mathsf{Cov}(W_t,W_{t-h})=\sigma^2a^h\left(\sum_{j=0}^{\infty}a^{2(j-1)}-2\sum_{j=0}^{\infty}a^{2(j-1)}+\sum_{j=0}^{\infty}a^{2(j-1)}\right)=0$$

Donc $\gamma_W(h)=0\ \ \forall h>0$. Si (W_t) est stationnaire, W_t est alors un bruit blanc faible.

Q5. En déduire que X_t est un bruit blanc. Dans le cas où (η_t) est Gaussien, le bruit blanc est-il fort ?

On a, comme $|a| < 1$:

$$X_t = (1-a)^{-1}(\eta_t - \frac{1}{a}\eta_{t-1}) = (1-a)^{-1}U_t = \sum_{j=0}^{\infty} a^j U_{t-j} = W_t$$

Donc X_t est un bruit blanc faible.
Si (η_t) est Gaussien, (X_t) est aussi Gaussien comme combinaison linéaire d'un processus Gaussien. Dans ce cas particulier, X_t est donc un bruit blanc fort.

Q6. Le processus all-pass du graphique 1 vous semble-t-il être un bruit blanc fort ?

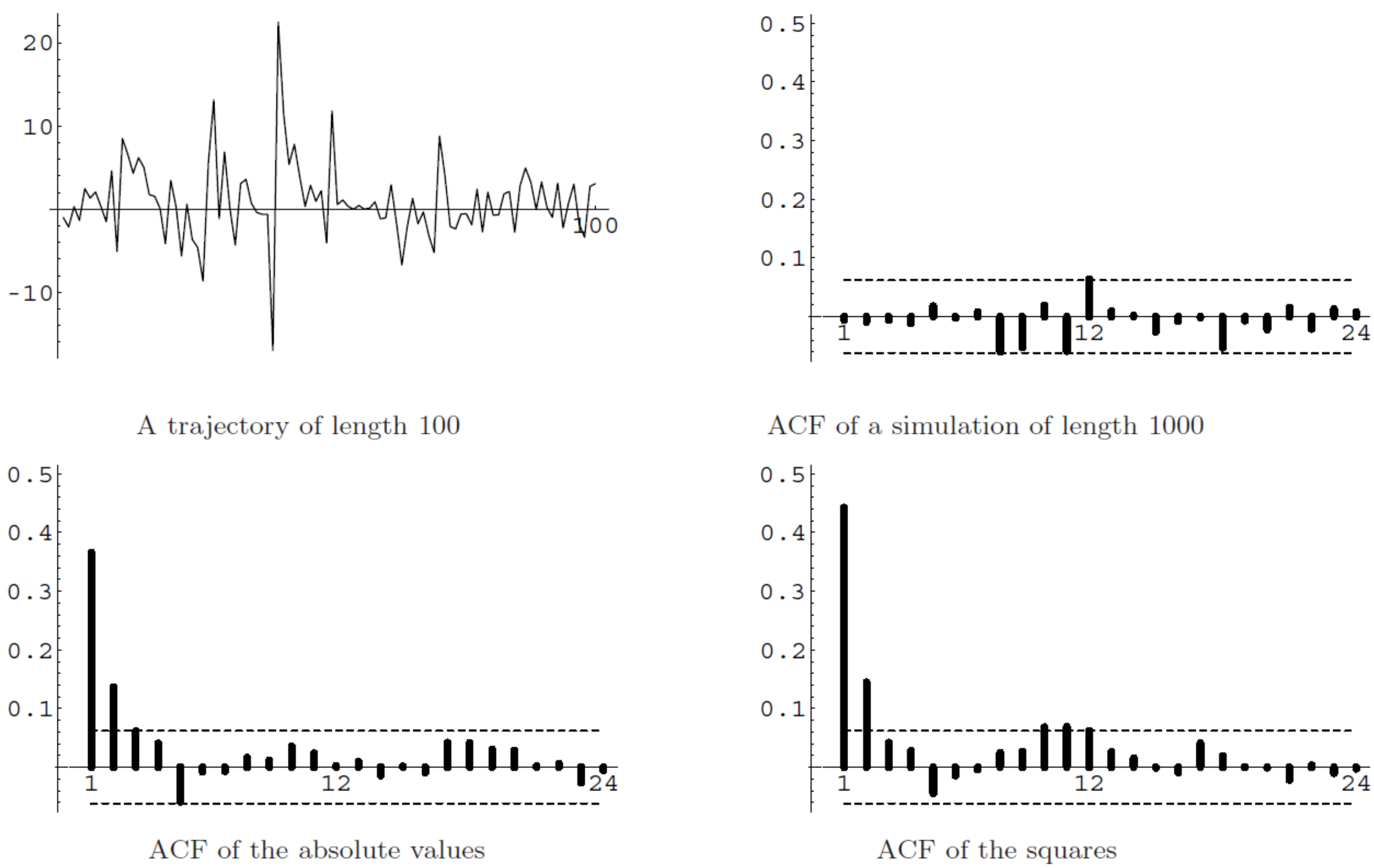

FIGURE 1 – Simulation de taille 100 du modèle (1) avec $a = 0.5$ et η_t une suite i.i.d. de loi de Student à 3 degrés de libertés, autocorrélations empiriques de X_t, de $|X_t|$ et de X_t^2

Si le processus étant un bruit blanc fort, la suite des carrés (ou encore des valeurs absolues) serait aussi constituée de variables indépendantes, et donc non corrélées, ce qui n'est visiblement pas le cas.