Introduction à Dynare (2)

Extensions du modèle RBC

Ce corrigé est largement inspiré des éléments de correction fournis par les professeurs responsables du cours.
Pour toute remarque, contacter `assistant-macro@ensae.fr`

1 Coût d'ajustement du capital

On suppose que la loi d'accumulation du capital par le ménage représentatif prend la forme :

$$k_t = (1-\delta)k_{t-1} + \left(1 - \frac{\phi}{2}\left(\frac{i_t}{i_{t-1}} - 1\right)^2\right) i_t$$

a) Interpréter l'équation d'accumulation du capital.

Lorsque l'investissement varie, $\frac{i_t}{i_{t-1}} \neq 1$ donc $\left(1 - \frac{\phi}{2}\left(\frac{i_t}{i_{t-1}} - 1\right)^2\right) i_t < i_t$ et les dépenses d'investissement s'accumulent moins efficacement dans le capital productif. Lorsque les ménages sont incités à détenir plus de capital, leur intérêt est d'augmenter progressivement leur niveau d'investissement et inversement. On peut interpréter cette spécification en disant que, lorsqu'une entreprise investit beaucoup d'un seul coup ou, inversement, diminue brusquement son investissement, cela entraine des dépenses supplémentaires pour l'installation du capital du fait, par exemple, du désordre occasionné par ces changements. D'un point de vue microéconomique, l'hypothèse d'un coût d'ajustement sur l'investissement est contestable : une usine peut au contraire avoir intérêt à regrouper dans le temps ses investissements importants de façon à optimiser les travaux d'installation du nouveau capital. D'un point de vue macroéconomique, cette hypothèse augmente la persistance de l'investissement dans le modèle et lui permet ainsi de mieux reproduire les données.

b) Dériver les nouvelles conditions d'optimalité en introduisant la variable $q_t = \frac{\mu_t}{\lambda_t}$ où μ_t est le multiplicateur de Lagrange de la contrainte d'accumulation du capital et λ_t celui de la contrainte budgétaire.

Par rapport au modèle de base, on ne peut plus exprimer i_t en fonction de k_t et k_{t-1} dans le Lagrangien correspondant au programme du ménage représentatif. On est obligé d'inclure explicitement comme une contrainte supplémentaire dans le Lagrangien la technologie d'accumulation du capital (ou comme une infinité de contraintes puisqu'elle s'applique à chaque date $t+j$, $j \geq 0$), et de dériver une condition d'optimalité par rapport à i_t. Soit μ_t le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte à la date t. Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \left[\log c_{t+j} + \chi \frac{(1-n_{t+j})^{1-\eta}}{1-\eta} + \lambda_{t+j}(w_{t+j}n_{t+j} + r_{t+j}k_{t+j-1} - c_{t+j} - i_{t+j}) \right.$$
$$\left. + \mu_{t+j}\left((1-\delta)k_{t+j-1} + \left(-\frac{\phi}{2}\left(\frac{i_{t+j}}{i_{t+j-1}} - 1\right)^2\right) i_{t+j} - k_{t+j}\right)\right]$$

Les conditions d'optimalité par rapport à c_t et n_t sont inchangées. La condition d'optimalité par rapport à i_t est :

$$-\lambda_t + \mu_t\left(1 - \frac{\phi}{2}\left(\frac{i_t}{i_{t-1}} - 1\right)^2 - \phi\left(\frac{i_t}{i_{t-1}} - 1\right)\frac{i_t}{i_{t-1}}\right) + \beta E_t\left[\mu_{t+1}\phi\left(\frac{i_{t+1}}{i_t} - 1\right)\left(\frac{i_{t+1}}{i_t}\right)^2\right] = 0$$

et celle par rapport à k_t est :

$$\beta E_t[\lambda_t r_{t+1}] - \mu_t + \beta E_t[\mu_{t+1}(1-\delta)] = 0$$

Avec la notation $q_t = \frac{\mu_t}{\lambda_t}$ et en se rappelant que $\lambda_t = \frac{1}{c_t}$, la première peut s'écrire :

$$q_t\left(1 - \frac{\phi}{2}\left(\frac{i_t}{i_{t-1}} - 1\right)^2 - \phi\left(\frac{i_t}{i_{t-1}} - 1\right)\frac{i_t}{i_{t-1}}\right) + \beta\phi E_t\left[\frac{c_t}{c_{t+1}}q_{t+1}\left(\frac{i_{t+1}}{i_t} - 1\right)\left(\frac{i_{t+1}}{i_t}\right)^2\right] = 1$$

et la seconde :

$$q_t = \beta E_t\left[\frac{c_t}{c_{t+1}}(r_{t+1} + (1-\delta)q_{t+1})\right]$$

On peut vérifier facilement que, pour $\phi = 0$, on retrouve le modèle RBC de base.

c) Mettre à jour le fichier .mod (en fixant $\phi = 2.5$).

Pour mettre à jour le fichier .mod à partir du modèle de base, on déclare une nouvelle variable endogène q, un nouveau paramètre ϕ, auquel on donne la valeur numérique $\phi = 2.5$. Dans le modèle, on remplace l'équation d'Euler standard par la nouvelle condition d'optimalité du capital et on ajoute la condition d'optimalité par rapport à it. Enfin, la présence d'un coût d'ajustement ne change pas l'état stationnaire du modèle (le vérifier avec les deux équations ci-dessus) ; il faut seulement déclarer le niveau de la nouvelle variable q à l'état stationnaire ($q = 1$) dans le bloc `steady_state_model`;.

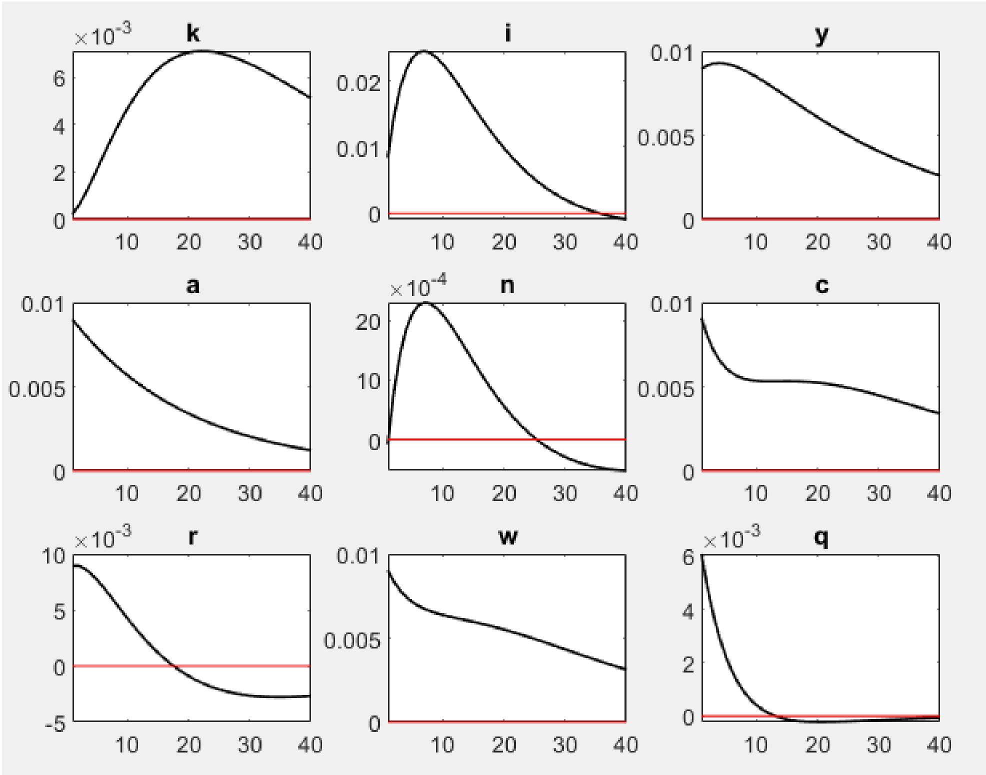
(En partant du ficher "rbc.mod")

```
var k i y a n c r w q;
...
parameters bet del alp nss khi eta rho phi;
...
model;
1/c*q=bet*(r(1)+(1-del)*q(1))/c(1);
1=q*(1-phi/2*(i/i(-1)-1)^2-phi*(i/i(-1)-1)*i/i(-1))+bet*phi*c/c(1)*q(1)*(i(1)/i-1)*(i(1)/i)^2;
...
steady_state_model;
...
q=1;
end;
...
```

d) Afficher les irfs et comparer avec ceux du modèle RBC de base.

(Au préalable, supprimer toutes les lignes de commandes après `check;`)

```
options_.loglinear=1;
stoch_simul(order=1,irf=40);
```



On a l'effet attendu sur l'investissement i : suite à un choc de productivité, les agents sont incités à détenir plus de capital, mais l'investissement se fait progressivement avant de diminuer et retourner vers son état stationnaire.

e) Calculer la volatilité relative de l'investissement et le coefficient de corrélation de l'investissement avec la production impliqués par le modèle pour $\phi = 0, 0.5, 2.5, 6$.

```
...
%stoch_simul(order=1,irf=40);
close all
phirange=[0;.5;2.5;6];
stdi_stdy=nan(4,1);
corriy=nan(4,1);
for ind=1:4
phi=phirange(ind);
stoch_simul(order=1,irf=30,hp_filter=1600);
stdi_stdy(ind)=sqrt(oo_.var(2,2)/oo_.var(3,3));
corriy(ind)=oo_.var(2,3)/sqrt(oo_.var(2,2)*oo_.var(3,3));
end
disp(' ')
disp('phi std(i)/std(y) corr(i,y)')
disp([phirange stdi_stdy corriy])
```

On obtient le tableau suivant :

phi	std(i)/std(y)	corr(i,y)
0	4.0081	0.9818
0.5000	3.2307	0.9508
2.5000	2.4035	0.8377
6.0000	1.7950	0.7226

On voit que plus le paramètre régissant coût d'ajustement du capital est élevé, moins l'investissement est volatile et moins il est corrélé à la production.
(*Remarque :* dans le cas $\phi = 0$, on retrouve d'après les IRFs qualitativement le modèle RBC de base)

2 Petite économie ouverte

On suppose que le ménage représentatif peut épargner b_t^* sous forme d'actifs étrangers rémunérés à un taux constant par période $r^* - 1$.

Remarques :
Supposer que l'économie est ouverte signifie que le pays dont l'économie est modélisée peut échanger avec le reste du monde. Il peut théoriquement s'agir d'échanges de biens et services (importations et exportations), d'échanges de capitaux ou encore de flux migratoires. Dans le modèle simple considéré, nous supposons que seuls sont possibles les flux de capitaux. L'hypothèse de petite économie ouverte consiste à supposer que le reste du monde n'est pas impacté par l'économie de notre pays.
Concrètement, le ménage représentatif a maintenant accès à un marché financier sur lequel sont échangés des titres émis‘par l'étranger et rémunérés à un taux d'intérêt constant $r^* = 1$ par période (r^* est le facteur d'intérêt). Ces titres sont des prêts à échéance une période accordés par leurs aquéreurs à leurs émetteurs. Soit b_t^* le montant de titres étrangers (exprimé en unités de biens de consommation) achetés par le ménage représentatif en période t. Dans le modèle, b^* peut aussi bien être positif que négatif. Dans ce dernier cas, le ménage représentatif est endetté vis-à-vis de l'étranger.

a) Écrire la nouvelle contrainte budgétaire du ménage.

À une date donnée t, le ménage épargne b_t^* sous forme de titres étrangers et reçoit le remboursement de son épargne de la période précédente b_{t-1}^* plus les intérêts afférents $(r_{t-1}^*)b_{t-1}^*$. Par rapport au modèle de base, la contrainte budgétaire en t devient donc :

$$c_t + i_t + b_t^* \leq w_t n_t + r_t k_{t-1} + r^* b_{t-1}^*$$

et le Lagrangien : $\mathcal{L} = E_t \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \Bigg[\log c_{t+j} + \chi \dfrac{(1-n_{t+j})^{1-\eta}}{1-\eta}$

$$+\lambda_{t+j}(w_{t+j}n_{t+j} + r_{t+j}k_{t+j-1} - c_{t+j} - k_{t+j} + (1-\delta)k_{t+j-1} + r^* b_{t+j-1}^* - b_{t+j}^*)\Bigg]$$

b) Dériver la nouvelle condition d'optimalité.

Il faut ajouter au modèle la condition d'optimalité par rapport à b_t^* : le ménage représentatif choisit le niveau d'épargne en titres étrangers qui maximise son utilité intertemporelle sous contrainte. On trouve :

$$-\lambda_t + \beta E_t[\lambda_{t+1} r^*] = 0$$

soit :

$$\frac{1}{c_t} = \beta r^* E_t \left[\frac{1}{c_{t+1}}\right]$$

c) Déterminier la contrainte de long terme portant sur le facteur d'intérêt r^*.

À l'état stationnaire, cette équation implique $r^* = 1$. Bien que r^* représente un taux d'intérêt décidé à l'étranger, $\frac{1}{\beta}$ est sa seule valeur compatible avec l'existence d'un équilibre de long terme dans le modèle. En effet, il ne peut pas y avoir d'opportunité d'arbitrage à l'équilibre : tous les placements ont la même rentabilité.

d) Mettre à jour le fichier .mod (en fixant $\bar{b}^* = 0$).

Pour mettre à jour le fichier .mod, il faut déclarer la nouvelle variable b^* et le nouveau paramètre r^* en lui donnant la valeur $\frac{1}{\beta}$. Il faut ajouter au modèle la condition d'optimalité ci-dessus et mettre à jour l'équation donnant l'équilibre sur le marché des biens. En effet, cette équation est obtenue en équilibre général à partir de la contrainte budgétaire du ménage (voir TD1). En petite économie ouverte, on a :

$$c_t + i_t + b_t^* = w_t n_t + r_t k_{t-1} + r^* b_{t-1}^*$$

Or l'entreprise, supposée en concurrence parfaite, ne fait pas de profit. Donc $y_t = w_t n_t + r_t k_{t-1}$ et :

$$c_t + i_t + b_t^* - r^* b_{t-1}^* = y_t$$

Ensuite, on remarque que le modèle statique ne détermine pas le niveau de b^* à l'état stationnaire ; on choisit de le fixer à 0 de sorte que l'état stationnaire des autres variables du modèle ne soit pas affecté. On ajoute donc $b^* = 0$ dans le bloc `steady_state_model;`.
(En partant du ficher "rbc.mod")

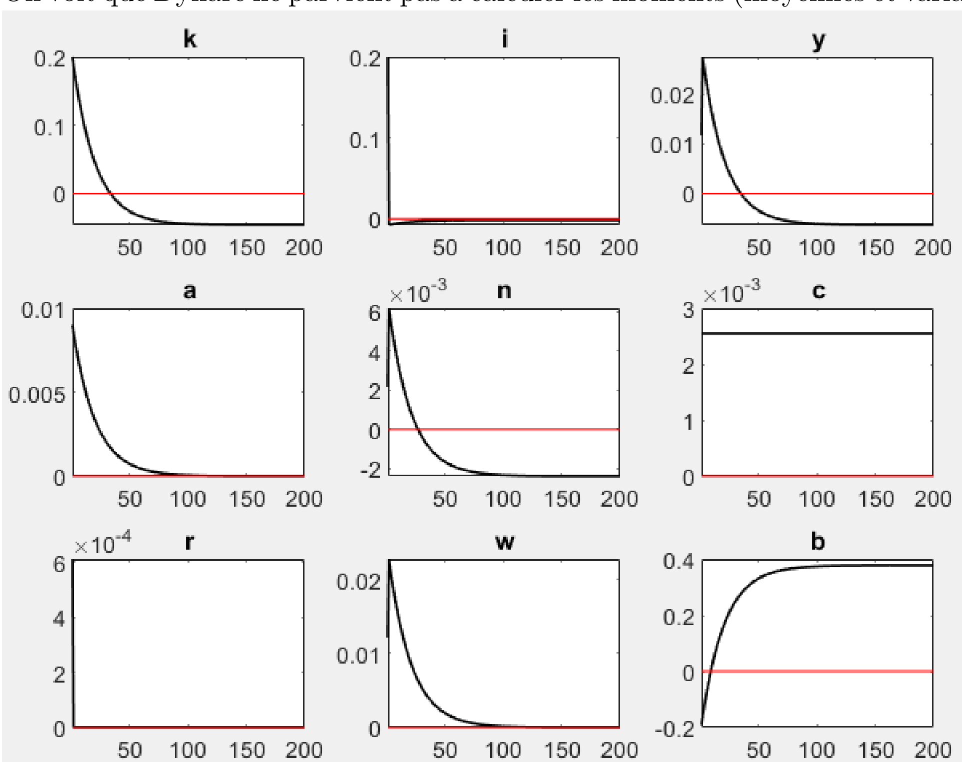
```
var k i y a n c r w b;
...
parameters bet del alp nss khi eta rho rst;
...
rst=1/bet;

model;
1/c=bet*(r(1)+1-del)/c(1);
1/c=bet*rst/c(1);
...
b=y-c-i+rst*b(-1);
end;
...
steady_state_model;
...
b=0;
end;
...
```

e) Calculer les moments théoriques impliqués par le modèle et simuler les irfs sur 200 périodes.

(tout supprimer après `check;`)

```
stoch_simul(irf=200);
THEORETICAL MOMENTS
VARIABLE            MEAN   STD. DEV.    VARIANCE
k                    NaN         NaN         NaN
i                    NaN         NaN         NaN
y                    NaN         NaN         NaN
a                 1.0000      0.0288      0.0008
n                    NaN         NaN         NaN
c                    NaN         NaN         NaN
r                 0.0454      0.0006      0.0000
w                 1.7797      0.0737      0.0054
b                    NaN         NaN         NaN
```

On voit que Dynare ne parvient pas à calculer les moments (moyennes et variances) de certaines variables.



De plus, les irfs ne reviennent pas tous à 0, c'est-à-dire qu'une déviation du modèle ne retourne pas vers l'état stationnaire.

f) Commenter. Afficher les valeurs propres du modèle.

Grâce à la commande `check;`, on peut voir que le modèle a une valeur propre de module égal à 1 :

```
EIGENVALUES:
          Modulus              Real         Imaginary

        3.185e-14         3.185e-14                 0
             0.95              0.95                 0
                1                 1                 0
             1.02              1.02                 0
          1.86e+18         -1.86e+18                 0


There are 2 eigenvalue(s) larger than 1 in modulus
for 2 forward-looking variable(s)

The rank condition is verified.
```

Dans Dynare, ceci ne provoque pas d'erreur par rapport aux conditions de Blanchard et Kahn mais est problématique : le modèle a une racine unitaire et n'est donc pas stationnaire. En effet, il manque au modèle une force de rappel : si les ménages sont transitoirement incités épargner plus sous forme de titres étrangers, rien ne les incite ensuite de façon endogène à baisser cette épargne vers son niveau initial – la rémunération de cette épargne étant toujours la même.

g) On suppose que le taux d'intérêt étranger varie en fonction de la quantité d'actifs étrangers détenus suivant

$$r^* = \frac{1}{\beta} + \exp(-b_t^*) - 1$$

Interpréter l'équation de r_t^*, mettre à jour le fichier .mod et conclure.

Une possibilité pour sortir de cette situation consiste à postuler de manière ad hoc que le taux r^* dépend négativement du niveau d'épargne :

$$r^* = \frac{1}{\beta} + \exp(-b_t^*) - 1$$

Ainsi, plus le ménage détient de titres étrangers, moins ceux-ci sont rémunérateurs. Inversement, plus le ménage est endetté vis-à-vis de l'étranger ($b^* < 0$), plus les prêteurs étrangers vont exiger un taux d'intérêt élevé. On peut donc interpréter le terme $-\exp(-b_t^*) - 1$ comme une prime de risque sur le taux d'intérêt étranger. Pour mettre à jour le fichier .mod, il faut déclarer à présent r^* comme une variable et non un paramètre, déclarer sa valeur à l'état stationnaire $r^* = \frac{1}{\beta}$ dans le bloc `steady_state_model;` et enfin ajouter l'équation ci-dessus dans le bloc `model;`.

```
var k i y a n c r w b rst;
...
%parameters bet del alp nss khi eta rho rst;
parameters bet del alp nss khi eta rho;
...
%rst=1/bet;

model;
...
rst=1/bet+exp(-b)-1;
```

```
end;
...
steady_state_model;
...
rst=1/bet;
end;
...
```

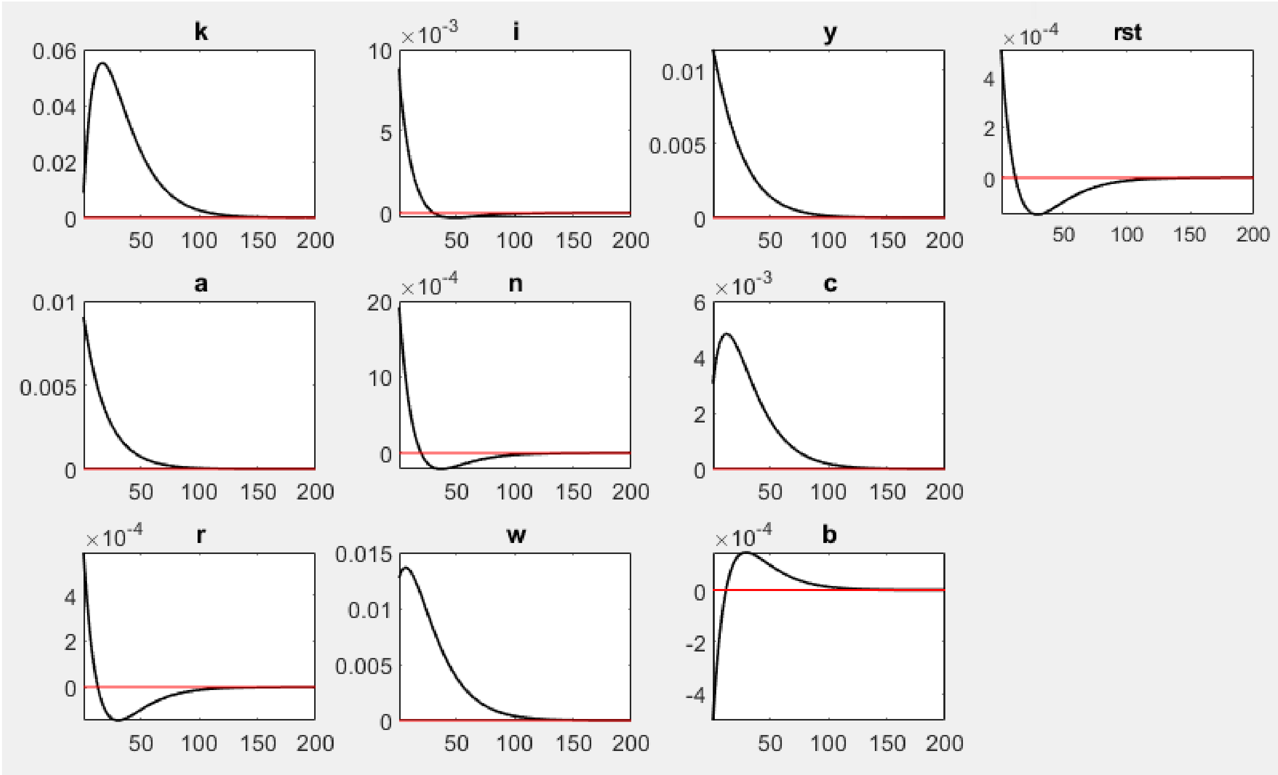
La racine unitaire a bien disparu :

```
EIGENVALUES:
         Modulus              Real         Imaginary

       2.751e-16         2.751e-16                 0
          0.9354            0.9354                 0
            0.95              0.95                 0
           1.091             1.091                 0
         1.85e+18        -1.85e+18                 0


There are 2 eigenvalue(s) larger than 1 in modulus
for 2 forward-looking variable(s)

The rank condition is verified.
```

Les moments théoriques sont bien calculés :

```
APPROXIMATED THEORETICAL MOMENTS
VARIABLE          MEAN  STD. DEV.   VARIANCE
k               6.3818     0.3092     0.0956
i               0.1595     0.0196     0.0004
y               0.8776     0.0414     0.0017
a               1.0004     0.0288     0.0008
n               0.3300     0.0042     0.0000
c               0.7180     0.0268     0.0007
r               0.0454     0.0014     0.0000
w               1.7816     0.0710     0.0050
b               0.0000     0.0012     0.0000
rst             1.0204     0.0012     0.0000
```

Et les IRFs reviennent bien à 0 :



3 Taxe sur le travail

On suppose que le ménage représentatif paie une taxe proportionnelle (de taux $\tau = 0.50$) sur son salaire au gouvernement qui la lui reverse forfaitairement sous forme de transfert.

a) Écrire la nouvelle contrainte budgétaire du ménage.

Contrainte budgétaire du ménage en t :

$$c_t + i_t \leq (1 - \tau)w_t n_t + r_t k_{t-1} + T_t$$

où T_t désigne les transferts forfaitaires de la part du gouvernement.

b) Dériver la nouvelle condition d'optimalité.

Nouvelle condition d'optimalité par rapport à n_t :

$$\chi(1 - n_t)^{-\eta} c_t = (1 - \tau)w_t$$

On remarque par ailleurs que l'équilibre sur le marché des biens est inchangé par rapport au modèle sans taxe. En effet : $y_t = w_t n_t + r_t k_{t-1}$ et $T_t = \tau w_t n_t$ donc la contrainte budgétaire du ménage donne :

$$c_t + i_t = w_t n_t - \tau w_t n_t + r_t k_{t-1} + \tau w_t n_t$$

$$c_t + i_t = y_t$$

c) Mettre à jour le fichier .mod en laissant Dynare calculer l'état stationnaire numériquement (`initval;...end;` puis `steady;`).

Pour résoudre le modèle statique dans sa version de base, on a supposé le niveau à l'état stationnaire de n connu et égal à $\frac{1}{3}$, puis on en a déduit une valeur pour χ. Ici, on suppose que le gouvernement a décidé une taxe, mais le paramètre χ, propre à la fonction d'utilité des ménages, est inchangé. Le niveau de long terme de n ne peut donc plus être égal à $\frac{1}{3}$. Comme on ne sait pas le calculer analytiquement en fonction des paramètres du modèle, on laisse Dynare le calculer numériquement. Pour cela, on retire le bloc `steady_state_model;` et on déclare des valeurs initiales pour toutes les variables du modèle dans un bloc `initval;... end;`. La commande `steady;` placée après ce bloc lance le calcul numérique de l'état stationnaire à partir des valeurs déclarées. Pour que Dynare trouve la solution, il faut que ces valeurs initiales soient suffisamment proches de l'état stationnaire à trouver. On utilisera donc les valeurs de l'état stationnaire du modèle sans taxe comme condition initiale.

(à partir du fichier "rbc.mod", supprimer à partir du bloc `steady_state_model;`)

```
...
parameters bet del alp nss khi eta rho tau;
...
tau=0.5;

model;
1/c=bet*(r(1)+1-del)/c(1);
(1-tau)*w=khi*c/(1-n)^eta;
k=(1-del)*k(-1)+i;
y=a*k(-1)^alp*n^(1-alp);
log(a)=rho*log(a(-1))+epsilon;
w=(1-alp)*y/n;
r=alp*y/k(-1);
y=c+i;
end;

initval;
a=1;
r=1/bet-1+del;
n=nss;
k=(alp/r)^(1/(1-alp))*n;
y=k^alp*n^(1-alp);
w=(1-alp)*y/n;
i=del*k;
c=y-i;
end;
steady;
```

d) Commenter l'impact sur l'état stationnaire.

```
STEADY-STATE RESULTS:

k          3.81452
i          0.0953631
y          0.52488
a          1
n          0.197605
c          0.429517
r          0.0454082
w          1.77966
```

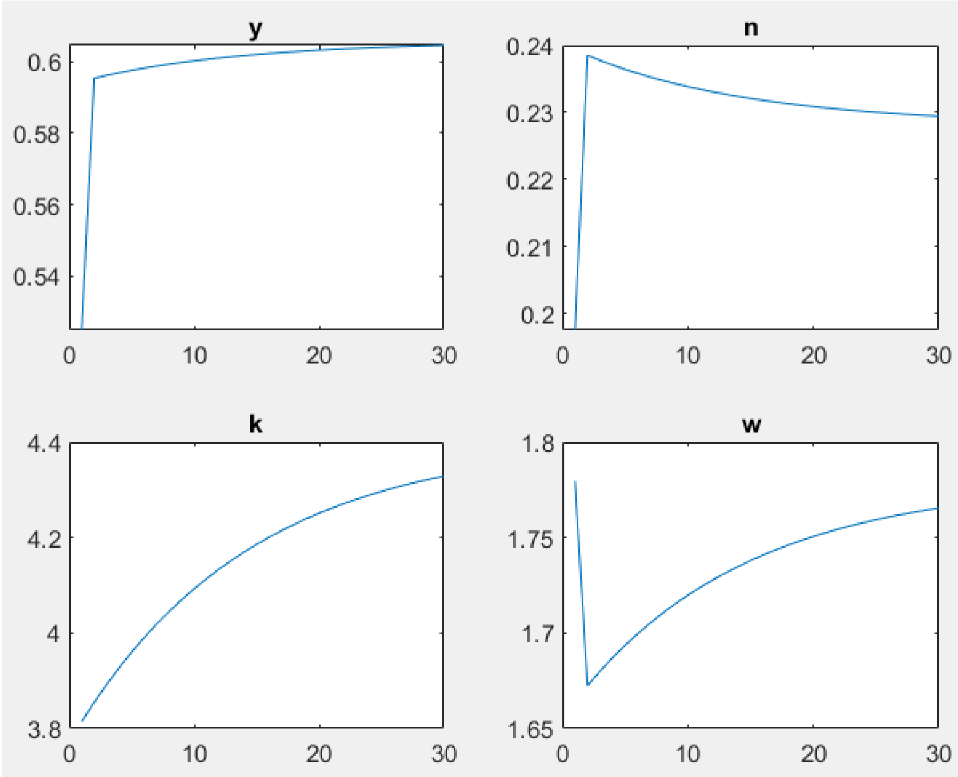
L'état stationnaire de n est plus faible que sans la taxe (où on avait $\bar{n} = 0.33$) ; celle-ci décourage l'offre de travail.

e) On suppose que l'économie est initialement à son état stationnaire déterministe. Le gouvernement décide de baisser la taxe de 10 points de façon permanente. Simuler la trajectoire déterministe de l'économie vers son nouvel état stationnaire (représenter y, n, k et w sur un graphique). Commenter.

Pour effectuer une simulation déterministe (sans chocs) du modèle, on utilise la commande `simul(periods=100);` de Dynare, précédée d'un bloc `initval;... end;` et d'un bloc `endval;... end;` pour donner respectivement les valeurs initiales et les valeurs terminales (en période 100) des variables endogènes du modèle. Ici, on fait suivre immédiatement le bloc `initval;... end;` ainsi que le nouveau bloc `endval;... end;` de la commande `steady;` pour que les valeurs initiales et terminales de la simulation soient automatiquement fixées à leur état stationnaire calculé numériquement. Entre les deux blocs, on modifie la valeur de τ ; ainsi, les deux états stationnaires calculés sont différents. Le paramètre τ garde la dernière valeur qu'on lui a affectée pour la simulation, soit 0.4.

```
...

tau=0.4;

endval;
a=1;
r=1/bet-1+del;
n=nss;
k=(alp/r)^(1/(1-alp))*n;
y=k^alp*n^(1-alp);
w=(1-alp)*y/n;
i=del*k;
c=y-i;
end;
steady;

simul(periods=100);

figure
subplot(2,2,1);plot(oo_.endo_simul(3,1:30));title('y')
subplot(2,2,2);plot(oo_.endo_simul(5,1:30));title('n')
```

```
subplot(2,2,3);plot(oo_.endo_simul(1,1:30));title('k')
subplot(2,2,4);plot(oo_.endo_simul(8,1:30));title('w')
```



La baisse de la taxe sur le travail entraine évidemment une hausse du travail et de la production. La productivité marginale du capital s'en trouve augmentée, ce qui incite l'entreprise à augmenter sa demande de capital. Enfin, le taux de salaire brut w diminue transitoirement car la baisse de la taxe entraine *ex ante* une hausse de l'offre de travail à demande constante de la part de l'entreprise.

f) Refaire l'exercice pour une taxe sur les salaires payée par l'entreprise.

Même exercice. Le programme de l'entreprise représentative s'écrit :

$$\max_{n_t,k_{t-1}} \left(a_t k_{t-1}^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - (1+\tau)w_t n_t - r_t k_{t-1}\right)$$

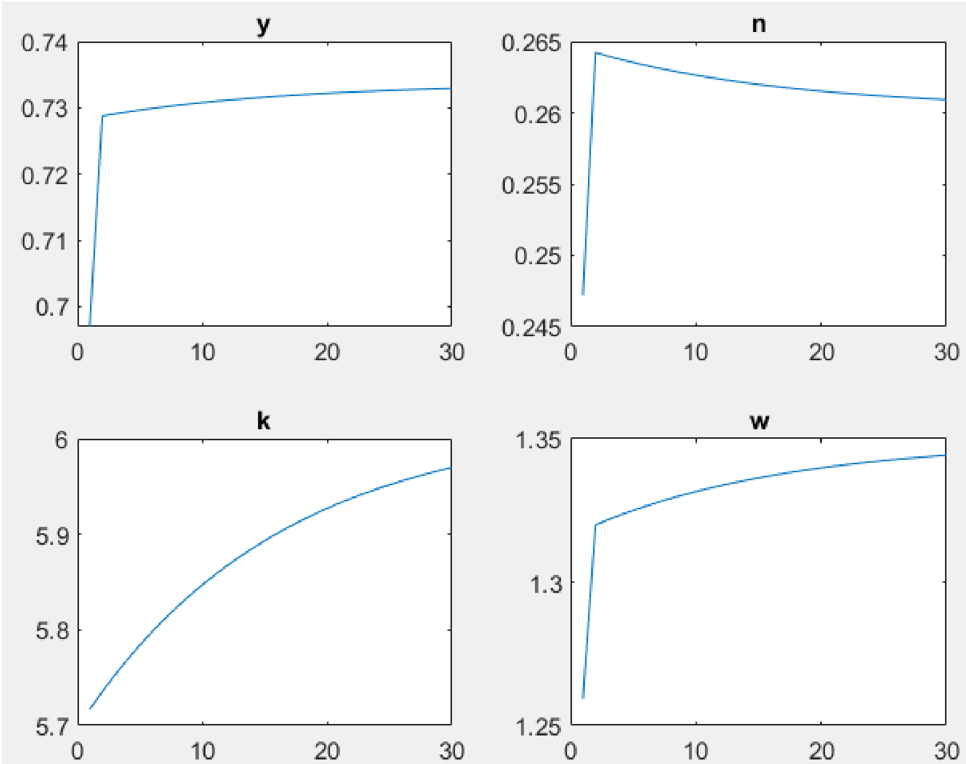
et la condition d'optimalité par rapport à sa demande de travail devient :

$$w_t = (1-\alpha)\frac{y_t}{n_t(1+\tau)}$$

(à partir du fichier "rbc.mod", supprimer à partir du bloc `steady_state_model;`)

```
...
parameters bet del alp nss khi eta rho tau;
...
tau=0.5;

model;
1/c=bet*(r(1)+1-del)/c(1);
w=khi*c/(1-n)^eta;
k=(1-del)*k(-1)+i;
```

```
y=a*k(-1)^alp*n^(1-alp);
log(a)=rho*log(a(-1))+epsilon;
(1+tau)*w=(1-alp)*y/n;
r=alp*y/k(-1);
y=c+i;
end;

initval;
a=1;
r=1/bet-1+del;
n=nss;
k=(alp/r)^(1/(1-alp))*n;
y=k^alp*n^(1-alp);
w=(1-alp)*y/n/(1+tau);
i=del*k;
c=y-i;
end;
steady;

tau=.4;
endval;
a = 1;
r = 1/bet-1+del;
n = nss;
k = (alp/r)^(1/(1-alp))*n;
y = k^alp*n^(1-alp);
w = (1-alp)*y/n/(1+tau);
i = del*k;
c = y-i;
end;
steady;

simul(periods=100);

figure
subplot(2,2,1);plot(oo_.endo_simul(3,1:30));title('y')
subplot(2,2,2);plot(oo_.endo_simul(5,1:30));title('n')
subplot(2,2,3);plot(oo_.endo_simul(1,1:30));title('k')
subplot(2,2,4);plot(oo_.endo_simul(8,1:30));title('w')
```



Même raisonnement que précédemment, sauf que cette fois-ci avec la baisse de la taxe payée par les entreprises, c'est *ex ante* la demande de travail qui augmente, à offre de travail constante.