ENSAE - 2ème année

Séries temporelles linéaires
Examen 2020-2021

Durée : 2 heures. Sans document et calculatrice.

Les exercices sont indépendants. Il est demandé de justifier les réponses de façon concise.

Exercice 1 (graphiques)

1. Pour chacune des trajectoires (a), (b), (c) et (d) de la figure 1, quelle est la transformation la plus adaptée pour rendre la série stationnaire :
   — la différentiation ordinaire $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$?
   — la différentiation saisonnière $\nabla_s X_t = X_t - X_{t-s}$ avec un s à préciser ?
   — aucune car la série semble déjà stationnaire ?
2. Quelle est la définition de la fonction d'autocorrélation ? de la fonction d'autocorrélation partielle ? Sous quelles hypothèses ces fonctions sont-elles définies ? Quel modèle ARMA est compatible avec les autocorrélogrammes de la figure 2 ?
3. La figure 3 représente les autocorrélations et autocorrélations partielles empiriques d'une série $X_1, \ldots, X_n$ avec $n = 60$. Comment sont calculées les autocorrélations empiriques ? Que représentent les pointillés sur la figure ?
4. Quel modèle ou quels modèles ARMA semblent les plus plausibles pour la série dont les autocorrélogrammes sont donnés par la figure 3 ?

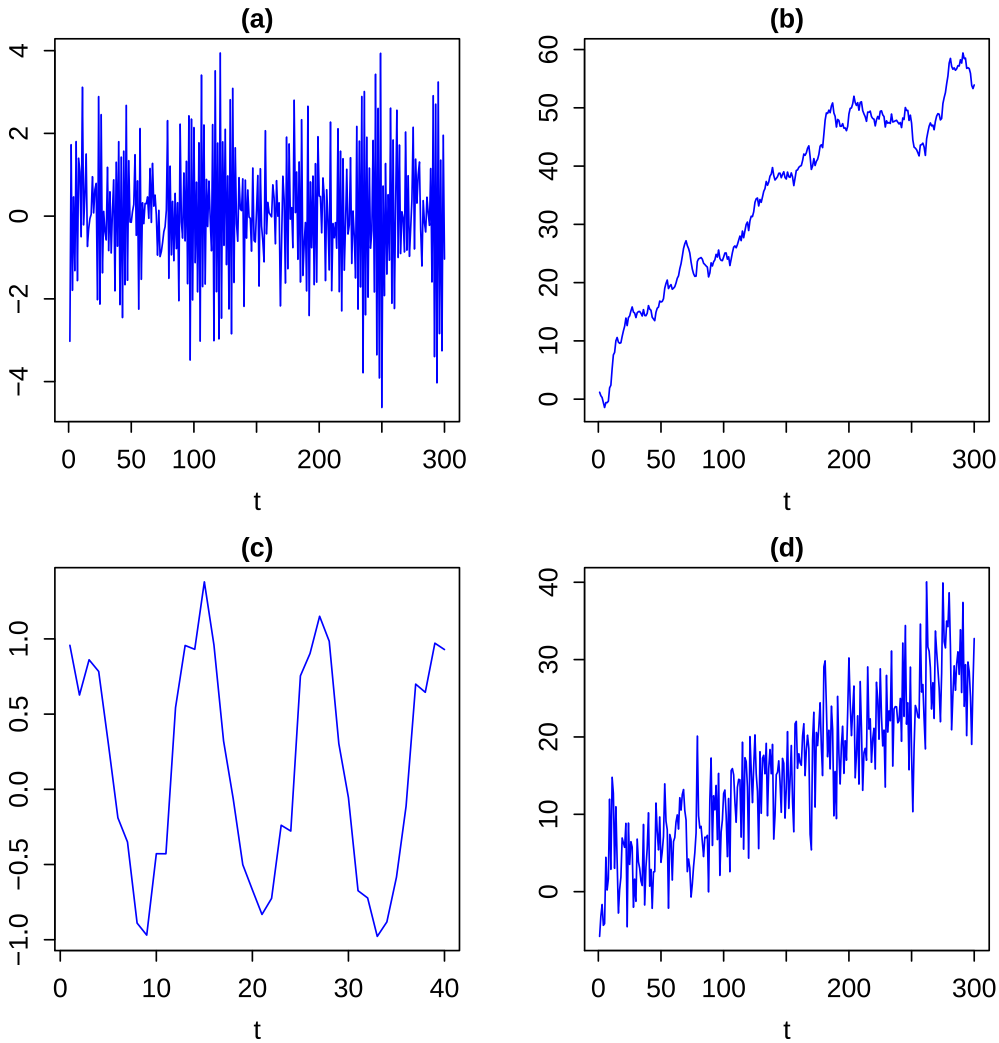

FIGURE 1 – Trajectoire de 4 séries.

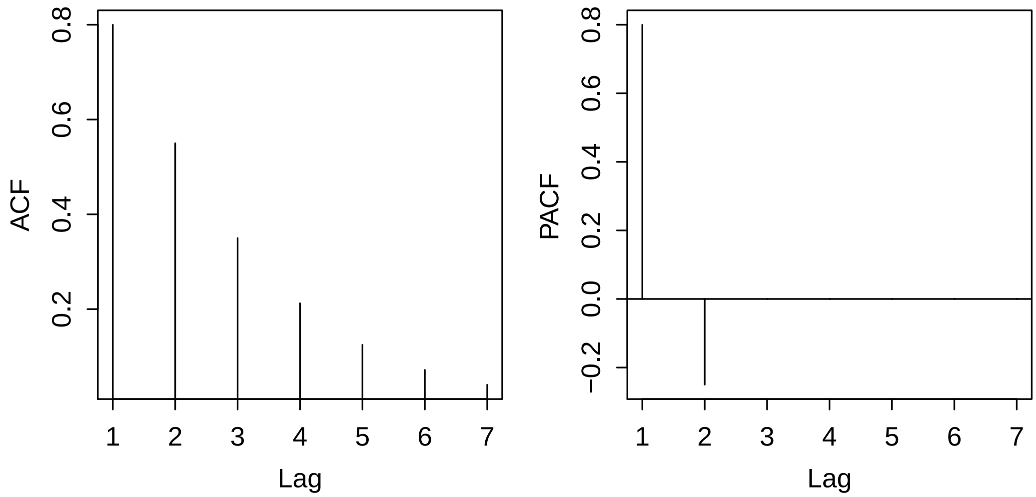

Figure 2 – Autocorrélations (ACF) et autocorrélations partielles (PACF) théoriques d'un processus.

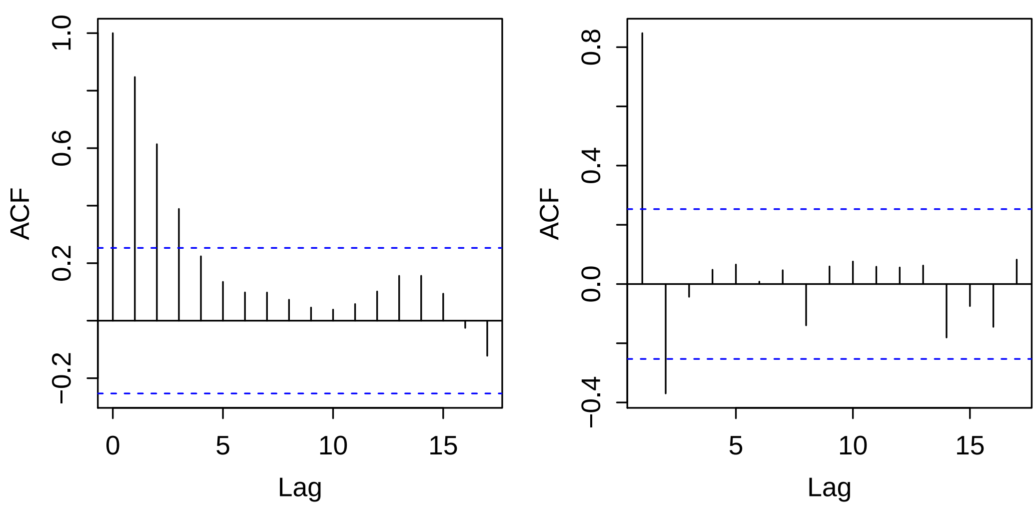

Figure 3 – Autocorrélations (ACF) et autocorrélations partielles (PACF) empiriques d'une série.

Exercice 2 (Causalité au sens de Granger) Soit $\epsilon_t = (\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}, \epsilon_{3t})'$ un bruit blanc de matrice de variance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \times & 0 & \\ & \times & \\ & & \times \end{pmatrix}.$$

où "0" représente un zéro, "$\times$" représente un nombre non nul et certains éléments de la matrice ne sont pas spécifiés. Soit $X_t = (X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})'$ satisfaisant un modèle VAR(1) stationnaire de la forme

$$X_t = AX_{t-1} + \epsilon_t, \quad A = \begin{pmatrix} \times & & 0 \\ & \times & \\ & & \times \end{pmatrix}.$$

1. Compléter la matrice A et/ou Σ par des "0" et/ou des "$\times$" pour que, au sens de Granger,
   - X_{1t} ne cause pas (X_{2t}, X_{3t}) ;
   - X_{2t} cause (X_{1t}, X_{3t}) ;
   - X_{3t} cause (X_{1t}, X_{2t}) ;
   - (X_{2t}, X_{3t}) cause X_{1t}.
2. Compléter la matrice A et/ou Σ par des "0" et/ou des "$\times$" pour que, au sens de Granger,
   - il y ait causalité instantanée entre X_{1t} et (X_{2t}, X_{3t}) ;
   - il n'y ait pas de causalité instantanée entre X_{2t} et (X_{1t}, X_{3t}).

Exercice 3 (Cointégration ou spurious régression) Soit (ϵ_t) et (η_t) deux bruits blancs forts indépendants et le système

$$\begin{cases} Y_t = aX_t + b + \eta_t \\ X_t = cX_{t-1} + d + \epsilon_t. \end{cases}$$

1. Donner des valeurs à a, b, c et d pour que le système soit cointégré.
2. Fabriquer un exemple semblable de système où la régression de Y_t sur X_t soit spurious (fallacieuse).

Exercice 4 (Processus stationnaire ou à racine unité) Soit (ϵ_t) et (η_t) deux bruits blancs forts indépendants et deux processus (X_t) et (Y_t) satisfaisant

$$\begin{cases} X_t = aX_{t-1} + b + \epsilon_t, \\ Y_t = X_t + \eta_t \text{ pour tout } t. \end{cases}$$

1. Donner une condition sur a et/ou b pour que (X_t) soit un AR(1) stationnaire causal. Quel est alors le modèle suivi par (Y_t) ?
2. On suppose maintenant que l'on observe $Y_1, \ldots, Y_n$, mais pas les X_t. Peut-on tester l'hypothèse nulle $H_0 : a = 1$? par quel type de test ? est-il plus facile de le faire quand $b \neq 0$ ou quand quand $b = 0$?