Macroéconomie 2
Choix de consommation et d'épargne

Franck Malherbet
(CREST-ENSAE)

Année Universitaire 2020-2021

Organisation du cours

1. Partie 1 :
   1. Chapitre 1 : Choix de consommation et d'épargne en équilibre partiel
      - Choix de consommation (deux périodes)
      - Choix de consommation (généralisation à n périodes)
   2. Chapitre 2 : Modèle de croissance optimale et extensions
      - Modèle de Ramsey
      - Modèle de Ramsey et fiscalité
      - Modèle de Ramsey et offre de travail endogène
   3. Chapitre 3 : Modèles de cycles réels
      - Enjeux et contexte
      - Modèle canonique de cycles réels
      - Modèle de cycles réels et marché du travail
2. Partie 2 (Eleni Iliopoulos) :
   1. Extensions du modèle canonique de cycles réels
   2. Applications

Organisation du cours

1. Contact :

   Partie 1 : franck.malherbet@ensae.fr

   Partie 2 : eleni.iliopulos@univ-evry.fr

2. Bibliographie indicative :

   - Romer, Advance macroeconomics, Mcgraw-Hill (2012)
   - Acemoglu, Modern Economic Growth, MIT Press (2009)
   - Blanchard et Fischer, Lectures on Macroeconomics, MIT Press (1989)

- Pourquoi étudier les choix de consommation et d'épargne ?

- La consommation représente une **composante majeure** du PIB dans la plupart des économies développées :
  1. $> 50\%$ en France
  2. $> 60\%$ aux Etats-Unis
  3. $> 50\%$ Euro-zone

- La consommation joue un rôle dans la croissance comme dans les fluctuations.

  1. **Croissance :** La répartition des ressources entre consommation et investissement est un facteur essentiel des niveaux de vie à long terme (*cf. par exemple modèle de Solow*)

  2. **Fluctuations :** La consommation joue un rôle déterminant dans la mesure où elle représente la plus grande part de la demande de biens et services, *i.e.* pour comprendre l'effet des chocs (par exemple technologiques), il faut comprendre les réactions de la consommation.

TABLEAU 1.1
Les composantes du PIB en France et en zone euro (2014)

	France		Zone euro	
	mds €	% PIB	mds €	% PIB
PIB	2 132,4	100,0	10 129,3	100,0
Consommation privée	1 184,0	55,5	5 653,9	55,8
Investissement brut	393,2	18,4	1 974,0	19,5
Dépense publique	594,5	27,9	2 127,3	21,0
Exportations nettes	-39,3	-1,8	374,1	3,7
Exportations	611,8	28,7	4 498,9	44,4
Importations	651,1	30,5	4 124,7	40,7

Sources : INSEE (France) et AWM database (zone euro).

Table 3-1 The Composition of U.S. GDP, 2014

		Billions of Dollars	Percent of GDP
	GDP (Y)	17,348	100.0
1	Consumption (C)	11,865	68.3
2	Investment (I)	2,782	16.0
	Nonresidential	2,233	12.9
	Residential	549	3.1
3	Government spending (G)	3,152	18.1
4	Net exports	−530	−3.1
	Exports (X)	2,341	13.5
	Imports (IM)	−2,871	−16.6
5	Inventory investment	77	0.4

Source: Survey of Current Business, July 2015, Table 1-1-5.

- Les choix de consommation et d'épargne sont au coeurs des modèles macro modernes :
  - Croissance optimale : Ramsey (1928), Cass (1965) et Koopmans (1965)
  - Générations imbriquées : Diamond (1965), ...
  - Croissance endogène : Romer (1986, 1990), Lucas (1988), ...
  - Fluctuations : Kydland et Prescott (1982), Long et Plosser (1983), ...
- **Références bibliographiques :**
  - Macroéconomie Approfondie, Romer, chap. 7
  - Macroéconomie : Modèles dynamiques, Gauthier, chap. 4
  - Fluctuations et politiques macroéconomiques, Challe, chap. 2

- On considère un cadre d'analyse intertemporel, *i.e.* un cadre où les décisions impliquent un arbitrage entre le présent et le futur.

- La plupart des décisions économiques sont de ce type :
  - choix de consommation
  - choix d'éducation
  - politique fiscale
  - ...

On procède en **deux étapes** :

1. Cadre d'analyse simple à deux périodes

2. Cadre d'analyse général en horizon fini et infini

Un modèle simple à deux périodes

- On a deux périodes $t = 0$ et $t = 1$.
- On note c_t consommation à la période t.
- Préferences :

$$U(c_0, c_1) = u(c_0) + \beta u(c_1)$$

- $u(\cdot)$ est la **fonction d'utilité instantanée**.
  - u est croissante, $u'(c) > 0$.
  - u est concave, $u''(c) \leq 0$.
  - La concavité traduit la préférence des agents à lisser la consommation au cours du temps.
  - La fonction $u()$ satisfait les **conditions d'Inada** (1963) :

$$\lim_{x \to +\infty} u'(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0} u'(x) = +\infty$$

- $\beta \in (0,1)$ est *le facteur* d'escompte :

$$\beta = \frac{1}{1+\rho}$$

où $\rho > 0$ indique le taux d'escompte (subjectif) ou taux de préférence pour le présent.

- Plus ρ est grand, moins le ménage apprécie la consommation future relativement à la consommation présente.

- Le facteur β mesure la patience du ménage, *i.e.* plus β est petit (ρ grand), plus le ménage est impatient.

- Les courbes d'indifférence sont déterminées par l'ensemble des sequences de consommation (c_0, c_1) qui offre le même niveau d'utilité $\overline{U}$, soit :

$$U(c_0, c_1) = u(c_0) + \beta u(c_1) = \overline{U}$$

- Le long de la courbe d'indifférence :

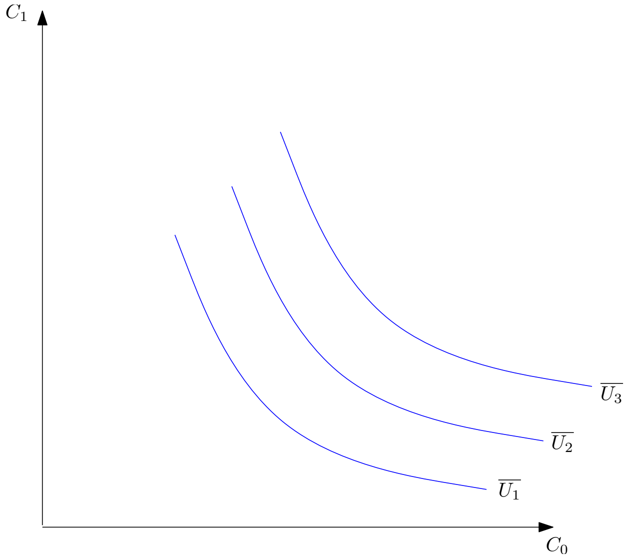
$$u'(c_0)\mathrm{d}c_0 + \beta u'(c_1)\mathrm{d}c_1 = 0$$

- On peut alors définir le **taux marginal de substitution intertemporelle** comme :

$$-\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}c_0} = \frac{\frac{\partial U(c_0,c_1)}{\partial c_0}}{\frac{\partial U(c_0,c_1)}{\partial c_1}} = \frac{u'(c_0)}{\beta u'(c_1)}$$

- Ce taux représente le supplément de consommation future qui compense une réduction unitaire de la consommation courante, à utilité inchangée.

Famille de courbes d'indifférence



- **Exemple :** Fonction d'utilité logarithmique :

$$U(c_0, c_1) = \ln(c_0) + \beta \ln(c_1)$$

avec :

$$\frac{\partial u(c_t)}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t}; \frac{\partial^2 u(c_t)}{\partial c_t^2} = -\frac{1}{c_t^2}$$

- Le taux marginal de substitution intertemporelle vérifie :

$$\frac{1}{c_0}\mathrm{d}c_0 + \frac{\beta}{c_1}\mathrm{d}c_1 = 0 \Leftrightarrow -\frac{\mathrm{d}c_1}{\mathrm{d}c_0} = \frac{c_1}{\beta c_0}$$

- On considère une économie simplifiée :
  - pas de production (implicite)
  - pas d'offre de travail
  - marché du travail *concurrentiel*

- A chaque période t, les ménages recoivent un revenu/dotation.

- On note w_t le revenu (salaire réel) de la période t.

- Les ménages peuvent **librement prêter ou emprunter sur les marchés financiers**.
- Les marchés financiers sont parfaits et on note r le taux d'intérêt réel.
- Les contraintes budgétaires **à chaque période** vérifient :

$$\begin{aligned} c_0 + s &= w_0 \\ c_1 &= (1+r)s + w_1 \end{aligned}$$

où s représente l'épargne.

- En éliminant s dans les contraintes de budget précédentes, on obtient la contrainte budgétaire intertemporelle :

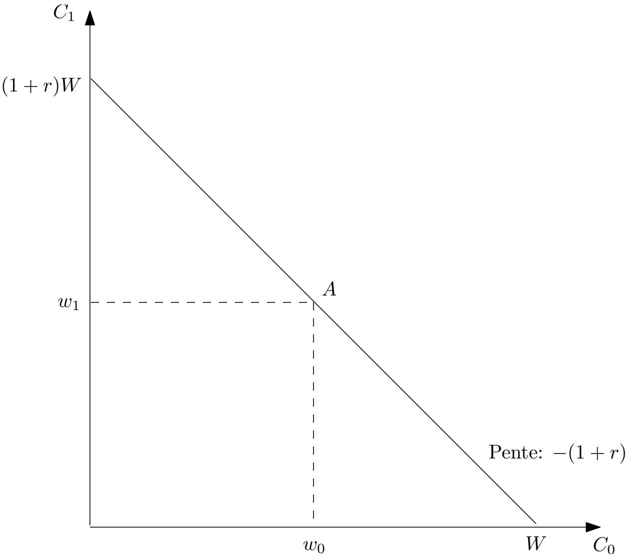
$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = w_0 + \frac{w_1}{1+r} \equiv W$$

- Par définition, la somme actualisée des revenus est la richesse des agents (**W**ealth).

- La somme actualisée des consommations est égale à la somme actualisée des revenus.

- **Remarque :** $\frac{1}{1+r}$ est le coût d'opportunité (en termes de consommation en $t = 0$) d'une unité de consommation à la date $t = 1$.

Contrainte budgétaire intertemporelle



- Le choix optimal du ménage consiste à choisir la séquence de consommation (c_0, c_1) en tenant compte de la *contrainte budgétaire intertemporelle*, soit :

$$\max_{(c_0,c_1)} u(c_0) + \beta u(c_1)$$

sous la contrainte

$$c_0 + \frac{c_1}{1+r} = w_0 + \frac{w_1}{1+r} = W$$

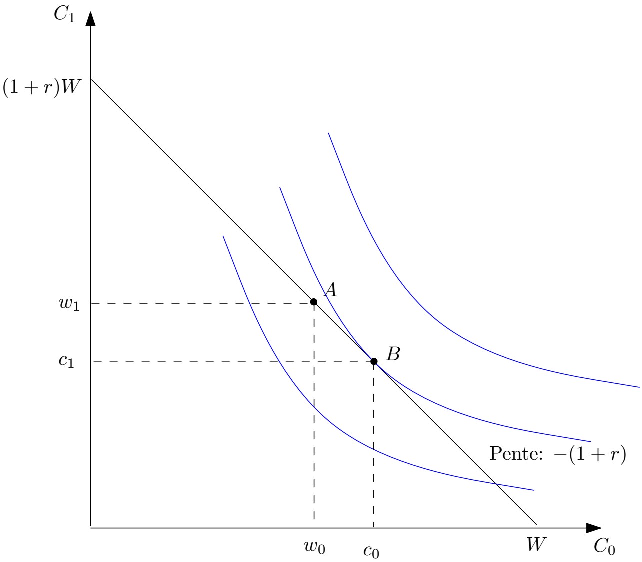
- Comme $c_1 = (1+r)(W - c_0)$, le programme peut se réécrire :

$$\max_{c_0} u(c_0) + \beta u((1+r)(W - c_0))$$

- La condition du premier ordre (c1o) vérifie :

$$u'(c_0) = \beta(1+r)u'(c_1)$$

Choix Optimal



- La c1o peut se réécrire comme :

$$\underbrace{\frac{u'(c_0)}{\beta u'(c_1)}}_{\text{TMSI}} = 1 + r$$

- Cette relation est l'équation d'Euler ou règle de Keynes-Ramsey.

- D'après l'équation d'Euler, on a **deux forces** qui jouent en sens opposés :

  - Plus le taux de préférence pour le présent ρ est élevé (β faible), moins l'agent est disposé à renoncer à consommer aujourd'hui pour consommer plus demain.

  - Plus le taux d'intérêt, r, est élevé, plus l'agent est incité à réduire sa consommation courante, *i.e.* épargner plus pour consommer plus dans le futur.

- Lorsque $\beta(1+r)=1$, l'équation d'Euler vérifie :

$$u'(c_0) = u'(c_1) \Leftrightarrow c_0 = c_1$$

- Dans ce cas, la consommation est parfaitement lissée entre les deux périodes. Une condition nécessaire est donnée par :

$$\beta(1+r) = \frac{1+r}{1+\rho} = 1.$$

- Cette condition n'est satisfaite que si :

$$r = \rho$$

- **En résumé :**
  - Si $r = \rho$ alors $c_0 = c_1$: Lissage de la consommation.
  - Si $r < \rho$ alors $c_0 > c_1$: La consommation décroit dans le temps.
  - Si $r > \rho$ alors $c_0 < c_1$: La consommation croît dans le temps.

- Ces conditions jouent un rôle central dans tous les modèles macro où les choix de consommation sont endogènes.

- La séquence de consommation optimale $\{c_0, c_1\}$ est définie par la **règle de Keynes-Ramsey** et la **contrainte de budget intertemporelle** :

$$\begin{aligned} u'(c_0) &= \frac{1+r}{1+\rho} u'(c_1) \\ c_0 + \frac{c_1}{1+r} &= W \end{aligned}$$

- On a un système de deux équations à deux inconnues (c_0, c_1) qui définit la consommation à chaque période :

$$c_t(\rho, r, W) \quad \text{pour tout } t$$

- **Remarque :** Lorsque les marchés financiers sont parfaits, la consommation dépend de la richesse totale **W** et non de la séquence des revenus w_t.

- **Exemple :** On considère la fonction d'utilité suivante :

$$u(c) = \begin{cases} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} & \text{si } \sigma \neq 1, \sigma \geq 0 \\ \ln(c) & \text{si } \sigma = 1 \end{cases}$$

- Cette fonction d'utilité est de type :
  - CRRA pour **C**onstant **R**elative **R**isk **A**version.
  - CIES pour **C**onstant **I**ntertemporal **E**lasticity of **S**ubstitution.

- σ est le coefficient d'aversion relatif pour le risque.

- Le *coefficient d'aversion relatif pour le risque d'Arrow-Pratt* vérifie de manière générale :

$$\sigma(c) = -\frac{u''(c)c}{u'(c)} \geq 0$$

- Lorsque la fonction d'utilité est CRRA, ce coefficent est constant.

- Lorsque $\sigma \rightarrow 1$, alors la fonction d'utilité instantanée se réécrit $\ln(c)$. En effet en appliquant la **règle de L'Hôpital**, on a [1] :

$$\lim_{\sigma \to 1} \frac{c^{1-\sigma}}{1-\sigma} = \lim_{\sigma \to 1} \frac{-\ln(c)\, e^{(1-\sigma)\ln(c)}}{-1} = \lim_{\sigma \to 1} c^{1-\sigma} \ln(c) = \ln(c)$$

- Lorsque $\sigma = 0$, les agents sont neutres aux risques et la fonction d'utilité est linéaire.

- σ s'interprète également comme l'inverse de l'élasticité instantanée de substitution intertemporelle (IES).

1. Rappel : $a^x = e^{x\ln(a)}$; $\frac{\partial a}{\partial x} = \ln(a)e^{x\ln(a)}$

- Lorsque σ est faible :
  - IES est élevée.
  - Faible courbure de la fonction d'utilité ($u''()$ est petite).
  - La consommation est très sensible au changement de r.

- Avec une fonction CRRA, la règle de Keynes-Ramsey se réécrit :

$$\frac{c_0}{c_1} = \left(\frac{1+r}{1+\rho}\right)^{-\frac{1}{\sigma}}, \text{ avec } \sigma > 0$$

- Lorsque r augmente, deux effets :
  - **ER :** L'effet de revenu dépend du statut de l'agent :
    - Si emprunteur, l'agent se sent plus pauvre (pertes).
    - Si prêteur, l'agent se sent plus riche (gains).

  - **ES :** L'effet de substitution incite à épargner plus (emprunter moins).

- L'ampleur relative de ces deux effets dépend du coefficient d'aversion au risque σ, *ie.* plus σ est proche de 0, plus l'IES est forte.

- Lorsque $\sigma = 0$, i.e. que les agents sont neutres aux risques, la règle de Keynes-Ramsey implique :

$$\begin{cases} c_0 = W, c_1 = 0 & \text{si } r < \rho \\ c_0 = 0, c_1 = (1+r)W & \text{si } r > \rho \\ c_0 \in (0, W) \text{ and } c_1 = (1+r)(W - c_0) & \text{si } r = \rho \end{cases}$$

- L'élasticité de substitution intertemporelle est *infinie*, *i.e.* :

$$\frac{1}{\sigma} \to \infty$$

- Suite à une hausse de r, on distingue **trois cas** :

  1. Le ménage n'a pas d'épargne ($c_0 = w_0$). Il n'y a pas d'effet de revenu et seulement un effet de substitution entre consommation présente et consommation future.
  2. Le ménage est prêteur ($c_0 < w_0$). Il y a un effet revenu positif et un effet de substitution.
  3. Le ménage est emprunteur ($c_0 > w_0$). Il y a un effet de revenu négatif et un effet de substitution.

- Le tableau ci-dessous résume les trois cas :

	$c_0 = w_0$		$c_0 < w_0$		$c_0 > w_0$	
	c_0	c_1	c_0	c_1	c_0	c_1
Effet de revenu	0	0	$+$	$+$	$-$	$-$
Effet de substition	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
Effet total	$-$	$+$	?	$+$	$-$	?

- Le modèle à **deux périodes** montre que la séquence optimale de consommation est déterminée par :
  - La règle de Keynes-Ramsey.
  - La contrainte budgétaire intertemporelle.
- Ce résultat reste valable lorsque :
  - Le nombre de périodes est **supérieur à deux**, y compris lorsque le nombre de périodes $n \to \infty$.
  - Le temps est continu (cf. modèles de croissance).

Généralisation du cadre d'analyse

- On considère désormais un environement où **l'horizon est long ($n > 2$) et le temps discret** [2], $t \geq 0$.

- L'hypothèse d'horizon infini peut se justifier car il existe par exemple :
  - une incertitude sur la date de la mort des agents,
  - de l'altruisme intergénérationnel (ménage dynastique).

- On considère des ménages identiques (hypothèse d'agent représentatif) et vivant n périodes (indéfiniement).

- On suppose par ailleurs que la f**onction d'utilité instantanée** est logarithmique :

$$u(c_t) = \ln c_t$$

2. Voir par exemple Acemoglu (2009), section 5.5 pour le lien entre le cas discret et le cas continu.

- L'utilité intertemporelle du ménage représentatif à partir de la date t vérifie :

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_t &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k \ln c_{t+k} \\ &= \ln c_t + \left(\frac{1}{1+\rho}\right) \ln c_{t+1} + \ldots + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^n \ln c_{t+n}\end{aligned}$$

où :

- n, horizon du ménage,
- c_t, consommation à la période t,
- ρ, taux de préférence pour le présent.

- La contrainte budgétaire instantanée du ménage vérifie :

$$\underbrace{c_t + \underbrace{a_{t+1} - a_t}_{\text{épargne financière}} = \underbrace{\underbrace{r_t a_t}_{\text{revenu du patrimoine}} + \underbrace{w_t}_{\text{revenu salarial}}}_{\text{revenu disponible}}}$$

où :

  - a_t, est le patrimoine du ménage (stock),
  - $s_t = a_{t+1} - a_t$, est l'épargne financière (flux).

- Le cumul des flux d'épargne constitue le patrimoine.

- La solvabilité du ménage requiert que soit satisfaite sa contrainte budgétaire intertemporelle.

- Les contraintes de chaque période s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
c_t + a_{t+1} &= (1 + r_t)\, a_t + w_t && (1)\\
c_{t+1} + a_{t+2} &= (1 + r_{t+1})\, a_{t+1} + w_{t+1} && (2)\\
&\dots\\
c_{t+n} &= (1 + r_{t+n})\, a_{t+n} + w_{t+n}
\end{aligned}
$$

- On remarque que $a_{t+n+1} = 0$, pourquoi ?
  - On ne peut avoir $a_{t+n+1} > 0$ car la **consommation n'est pas valorisée** au delà de $t + n$.
  - On ne peut avoir $a_{t+n+1} < 0$ car il n'y a **pas de revenus salariaux** au delà de $t + n$, et personne n'accepterait de préter à un ménage sur le point de disparaître.

- En combinant (1) et (2) pour éliminer a_{t+1}, on obtient :

$$
c_t + \frac{c_{t+1}}{1 + r_{t+1}} + \frac{a_{t+2}}{1 + r_{t+1}} = (1 + r_t)\, a_t + w_t + \frac{w_{t+1}}{1 + r_{t+1}}
$$

- Par itération, la contrainte se réécrit comme :

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{c_{t+k}}{\Pi_{s=1}^{k}\left(1+r_{t+s}\right)}}_{\text{valeur présente de la consommation}} = \underbrace{\left(1+r_t\right) a_t}_{\text{patrimoine et intérêts}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{w_{t+k}}{\Pi_{s=1}^{k}\left(1+r_{t+s}\right)}}_{\text{valeur présente des salaires}}$$

- **Remarques :**
  - A la période t, $(1+r_t)a_t$ est hérité du passé, *i.e.* c'est une donnée.
  - La richesse totale (W) (*i.e.* la somme du patrimoine accumulé et de la valeur présente des revenus salariaux) est égale à la valeur présente des flux de consommation.
  - On a implicitement supposé jusqu'ici que l'horizon était fini et que $a_{t+n+1} = 0$.

- Que se passe-t-il alors lorsque $n \to \infty$?

- Lorsque $n \to \infty$, il n'existe pas de niveau terminal de patrimoine que l'on pourrait égaliser à zéro.

- La contrainte budgétaire se réécrit alors comme :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{c_{t+k}}{\prod_{s=1}^{k}(1+r_{t+s})} + \lim_{n\to\infty} \frac{a_{t+n+1}}{\prod_{s=1}^{n}(1+r_{t+s})}$$
$$= (1+r_t)\, a_t + \sum_{k=0}^{n} \frac{w_{t+k}}{\prod_{s=1}^{k}(1+r_{t+s})}$$

- Lorsque l'horizon est infini, **si** l'on n'impose **aucune contrainte d'endettement**, la CBI ne contraindra pas les choix du ménage.

- Il peut alors perpétuellement consommer :
  - sans disposer d'un capital initial,
  - sans disposer de flux de revenus, *i.e.* sans travailler.

- Comment la contrainte budgétaire intertemporelle peut-elle alors contraindre les choix des ménages ?

- Condition de transversalité :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{t+n+1}}{\prod_{s=1}^{n}(1+r_{t+s})} \leq 0 \tag{C1}$$

- **Intuition :** Supposons r constant et que la condition précédente soit violée de telle sorte que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{t+n+1}}{(1+r)^n} = \mathcal{A} > 0$$

- Cette condition n'est vraie que si a_{t+n+1} croît au même rythme que $(1+r)^n$, *i.e.* une situation où le ménage réinvestirait tout son patrimoine à chaque période sans le consommer.

- Ce comportement du ménage n'est pas optimal.

- Condition d'absence de schéma de Ponzi[3] (NPG) :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{t+n+1}}{\prod_{s=1}^{n}(1+r_{t+s})} \geq 0 \qquad \text{(C2)}$$

- **Intuition :** Supposons un ménage :
  - ne travaillant jamais, $w_t = 0$, $\forall t$,
  - ne disposant d'aucun patrimoine, $a_t(1+r_t) = 0$,
  - ne consommant qu'à la date t, $c_t > 0$ et $c_{t+k} = 0, \forall k \geq 1$.

- La contrainte intertemporelle se réécrit alors :

$$c_t + \lim_{n\to\infty} \frac{a_{t+n+1}}{\prod_{s=1}^{n}(1+r_{t+s})} = 0$$

3. Charles Ponzi (né le 3 mars 1882 à Lugo, dans la province de Ravenne, en Émilie-Romagne, en Italie et mort le 18 janvier 1949 à Rio de Janeiro, au Brésil) est un escroc italien, concepteur d'un mode d'escroquerie élaboré sur une chaîne d'emprunt.

- Lorsque l'horizon est infini et si les schéma de Ponzi sont autorisés, le ménage peut s'endetter pour consommer c_t, puis de nouveau s'endetter pour rembourser la dette et les intérêts de la dette...

- Le schéma de Ponzi est donc le suivant :

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= -c_t{}^{4} \\ a_{t+2} &= a_{t+1}(1+r_{t+1}) = -(1+r_{t+1})\,c_t \\ a_{t+3} &= a_{t+2}(1+r_{t+2}) = -(1+r_{t+2})(1+r_{t+1})\,c_t \end{aligned}$$

$$a_{t+n+1} = -\Pi_{s=1}^{n}(1+r_{t+s})\,c_t$$

- Lorsque $n \to \infty$, on a alors :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{t+n+1}}{\Pi_{s=1}^{n}(1+r_{t+s})} = -c_t$$

4. Le ménage emprunte c_t (s'endette) pour consommer à la date t.

- Cette stratégie assure une consommation positive tout en étant compatible avec la CBI puisque :

$$c_t - c_t = 0$$

- Ainsi, si les schéma de Ponzi étaient autorisés, un ménage pourrait atteindre n'importe quel niveau de consommation quel que soit :
  - son patrimoine,
  - ses revenus.

- L'hypothèse NPG permet **d'exclure cette possibilité**. En combinant (C1) et (C2), on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{t+n+1}}{\prod_{s=1}^{n}(1+r_{t+s})} = 0$$

- La CBI est alors bien spécifiée !

- On peut désormais s'intéresser au choix de consommation d'un ménage représentatif.
- Le ménage maximise son utilité intertemporelle sous sa contrainte de budget intertemporelle.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^k \ln c_{t+k} \\ &+\lambda_t \left[(1+r_t)\, a_t + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w_{t+k}}{\prod_{s=1}^{k}(1+r_{t+s})} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{c_{t+k}}{\prod_{s=1}^{k}(1+r_{t+s})}\right]\end{aligned}$$

- Pour **deux périodes consécutives**, les c1o vérifient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial c_t} &= \frac{1}{c_t} - \lambda_t = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}_t}{\partial c_{t+1}} &= \left(\frac{1}{1+\rho}\right)\frac{1}{c_{t+1}} - \frac{\lambda_t}{1+r_{t+1}} = 0\end{aligned}$$

Annexe

- En combinant, ces deux dernières équations, on obtient la règle de Keynes-Ramsey :

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \rho}$$

- Cette relation se généralise pour d'autres fonctions d'utilité comme :

$$u'\left(c_t\right) = \frac{1}{1+\rho} u'\left(c_{t+1}\right)\left(1 + r_{t+1}\right)$$

- **Interprétation :**
  - Une augmentation des dépenses de consommation accroît l'utilité d'un montant $u'(c_t)$ à la date t.
  - Ce montant aurait pu être placé au taux r_{t+1} et ainsi accroître l'utilité future de $u'\left(c_{t+1}\right)\left(1 + r_{t+1}\right)$ actualisé au taux $\frac{1}{1+\rho}$ (facteur d'escompte subjectif).

- La règle de Keynes-Ramsey résume le phénomène de substitution intertemporelle de consommation suite à une variation du taux d'intérêt.

- Cette règle détermine la **pente du sentier de consommation**. Ainsi si $r_{t+1} > \rho$ ($r_{t+1} < \rho$), le profit de consommation est croissant (décroissant).

- Les mécanismes de ce chapitre sont centraux dans les modèles macro modernes (*i.e.* modèles à épargne endogène).

- Jusqu'à présent, on a étudié les décisions de consommation/épargne du ménage en équilibre partiel.

- Dans le prochain chapitre, on considérera le cadre d'analyse complet en équilibre général.

- On peut également écrire le problème d'optimisation du consommateur sous la forme *contrôle-état* suivante :

$$\mathcal{L}_t = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^k \left[\begin{array}{c} \ln c_{t+k} \\ +\lambda_{t+k} \left(\begin{array}{c} (1+r_{t+k})\, a_{t+k} \\ +w_{t+k} - c_{t+k} - a_{t+k+1} \end{array} \right) \end{array} \right]$$

- Les conditions du premier ordre vérifient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_t} - \lambda_t &= 0 \quad (c_t) \\ \left(\frac{1}{1+\rho} \right) \lambda_{t+1} (1 + r_{t+1}) - \lambda_t &= 0 \quad (a_{t+1}) \end{aligned}$$

- En les combinant, on retrouve la condition d'Euler :

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \rho}$$

Go Back