ENSAE - 2ème année

Séries temporelles linéaires
Examen 2015-2016

Durée : 2 heures. Sans document.

Les exercices sont indépendants. Il est demandé de justifier les réponses de façon concise.

Exercice 1 9 points + 1 ou 2 points de bonus si les réponses sont particulièrement bien justifiées Soit n observations d'une série temporelle bivariée (Y_{1t}, Y_{2t}) pour $t = 1, \dots, n$. On considère le modèle de régression linéaire

$$Y_{2t} = aY_{1t} + b + U_t$$

où U_t est centré et non corrélé avec Y_{1t}.

1. Comment est calculé l'estimateur des moindres carrés ordinaires (MCO) $(\hat{a}_n, \hat{b}_n)$ du paramètre (a, b) ? 2 points (même si la solution explicite n'est pas donnée) Par définition, il vérifie

$$(\hat{a}_n, \hat{b}_n) = \arg\min_{(a,b)} \sum_{t=1}^{n} (Y_{2t} - aY_{1t} - b)^2 .$$

Après un calcul standard, la solution est

$$\hat{b}_n = \overline{Y_2} - \hat{a}_n \overline{Y_1}, \quad \hat{a}_n = \frac{\sum_{t=1}^{n}(Y_{2t} - \overline{Y_2})(Y_{1t} - \overline{Y_1})}{\sum_{t=1}^{n}(Y_{1t} - \overline{Y_1})^2}, \quad \overline{Y_i} = \frac{\sum_{t=1}^{n} Y_{it}}{n}.$$

2. Lorsque $n \to \infty$, comment se comporte l'estimateur MCO quand la série bivariée est stationnaire ? 2 points (même si la justification de la convergence n'est pas donnée) Si la série est stationnaire, au sens strict et au sens faible, *et ergodique*, quand $n \to \infty$ on a

$$\hat{a}_n \to a_0 = \frac{\mathrm{Cov}(Y_{1t}, Y_{2t})}{\mathrm{Var}(Y_{1t})}, \quad \hat{b}_n \to b_0 = EY_{2t} - a_0 EY_{1t}.$$

Comme U_t est centré et non corrélé avec Y_{1t}, on a

$$EY_{2t} = aEY_{1t} + b, \quad \mathrm{Cov}(Y_{1t}, Y_{2t}) = a\mathrm{Var}(Y_{1t}),$$

d'où la consistance de l'estimateur MCO, c'est-à-dire $a = a_0$ et $b = b_0$. Sous des hypothèses très générales, impliquant l'existence d'un TCL, la vitesse de convergence de l'estimateur MCO est en $\sqrt{n}$.

3. Comment se comporte l'estimateur MCO quand la série bivariée est cointégrée ? 1 point D'après le cours, on sait dans ce cas que l'estimateur MCO est super-convergent, à la vitesse n (*i.e.* $n(\hat{a}_n - a, \hat{b}_n - b)$ a une loi asymptotique non dégénérée).
4. Comment se comporte l'estimateur MCO quand la série bivariée est non stationnaire et non cointégrée ? 1 point Toujours d'après le cours, on sait dans ce cas que la régression peut être fallacieuse (spurious) et que l'estimateur MCO peut ne pas converger.
5. Comment se comporte l'estimateur MCO quand la série bivariée est non stationnaire et non cointégrée ? 1 point On est dans le cas 2, l'estimateur MCO converge vers $(a, b) = (2, 0)$
6. Comment se comporte l'estimateur MCO si

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{t} \eta_{1i} + 2t \\ \sum_{i=1}^{t} \eta_{2i} + t \end{pmatrix},$$

où (η_{1t}) et (η_{2t}) sont deux bruits blancs forts indépendants ?1 point On est dans le cas 4 de "spurious regression", l'estimateur MCO ne converge pas. D'ailleurs la régression de Y_{2t} sur Y_{1t} n'est pas constante : $Y_{2t} = aY_{1t} + b + U_t$ avec $a = 0$, $b = t$ et $U_t = \sum_{i=1}^{t} \eta_{2i}$.

7. Comment se comporte l'estimateur MCO si

$$\begin{pmatrix} Y_{1t} \\ Y_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sum_{i=1}^{t} \eta_{1i} \\ \sum_{i=1}^{t} \eta_{1i} + \eta_{2t} \end{pmatrix},$$

où (η_{1t}) et (η_{2t}) sont deux bruits blancs forts indépendants ?1 point On est dans le cas 3 de variables cointégrées, l'estimateur MCO converge à grande vitesse vers les coefficients (a, b) de la régression $Y_{2t} = aY_{1t} + b + U_t$, où $a = 1/2$, $b = 0$ et $U_t = \eta_{2t}$.

Exercice 2 Soit (ϵ_t) et (η_t) deux bruits blancs forts indépendants de variances strictement positives, et

$$\begin{cases} X_t = \epsilon_t + a\eta_t + b\eta_{t-1} \\ Y_t = \eta_t. \end{cases}$$

1. La série (Y_t) cause-t-elle la série (X_t) au sens de Granger ? 2 points On a $E(X_t \mid \{X_u, Y_u, u < t\}) = bY_{t-1} \neq E(X_t \mid \{X_u, u < t\})$ dans le cas $b \neq 0$. La série (Y_t) cause donc la série (X_t) au sens de Granger lorsque $b \neq 0$.
2. La série (X_t) cause-t-elle la série (Y_t) au sens de Granger ? 1 point On a $E(Y_t \mid \{X_u, Y_u, u < t\}) = 0 = E(Y_t \mid \{Y_u, u < t\})$, donc la série (X_t) ne cause pas (Y_t) au sens de Granger.
3. A-t-on causalité instantanée entre les séries (X_t) et (Y_t) au sens de Granger ? 1 point On a $E(X_t \mid \{X_u, Y_u, u < t\}, Y_t) = aY_t + bY_{t-1} \neq E(X_t \mid \{X_u, Y_u, u < t\})$ lorsque $a \neq 0$, donc il y a causalité instantanée entre les séries (Y_t) et (X_t) dans ce cas.

Exercice 3 Soit $X_t = \eta_t \eta_{t-3}$, où (η_t) est un bruit blanc fort de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Le processus X_t est-il stationnaire ? est-il ergodique ? 1 point Par application directe du théorème ergodique, le processus X_t est stationnaire et ergodique.
2. Quel type de modèle ARMA suit le processus X_t ? Quel type de modèle ARMA suit le processus X_t^2 ? 2 points Le processus X_t est un bruit blanc, car il est stationnaire centré et non corrélé (il est même semi-fort car $E(X_t \mid \{X_u, u < t\}) = 0$). Le processus X_t^2 est stationnaire au second ordre et $\mathrm{Cov}(X_t^2, X_{t-h}^2) = 0$ pour $h > 3$, donc c'est une moyenne mobile d'ordre 3.
3. Soit les observations $X_1, \dots, X_n$. Comment sont calculées les autocorrélations empiriques $\hat{\rho}_X(h)$ de ces observations (avec $0 \leq h < n$) ? Vers quoi converge $\hat{\rho}_X(h)$ lorsque $n \to \infty$? 2 points Les autocorrélations empiriques sont définies par $\hat{\rho}_X(h) = \hat{\gamma}_X(h)/\hat{\gamma}_X(0)$ avec

$$\hat{\gamma}_X(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (X_t - \overline{X}_n)(X_{t-|h|} - \overline{X}_n)$$

pour $|h| < n$, avec $\overline{X}_n = \sum_{t=1}^{n} X_t / n$. D'après le théorème ergodique, lorsque $n \to \infty$, on a $\hat{\rho}_X(h) \to \rho_X(h)$, qui vaut 0 pour $h \neq 0$ et 1 pour $h = 1$.

4. Quelle est la loi asymptotique de $\sqrt{n}\hat{\rho}_X(h)$? Comparer avec celle des autocorrélations empiriques d'un bruit blanc fort. 2 points Pour $h \neq 0$, une extension du TCL donne

$$\sqrt{n}\hat{\rho}_X(h) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_h^2/\gamma_X^2(0))$$

avec $\gamma_X(0) = E\eta_t^2\eta_{t-3}^2 = 1$ et

$$\begin{aligned}
\sigma_h^2 &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\sqrt{n}\hat{\gamma}_X(h) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{t,s=1}^{n} \mathrm{Cov}\left(X_t X_{t-|h|}, X_s X_{s-|h|}\right) \\
&= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \mathrm{Cov}\left(X_1 X_{1-|h|}, X_{1+\ell} X_{1+\ell-|h|}\right) \\
&= EX_1^2 X_{1-|h|}^2 = E\eta_1^2\eta_{1-3}^2\eta_{1-|h|}^2\eta_{1-|h|-3}^2 \\
&= \begin{cases} 1 \text{ lorsque } |h| \neq 3, \\ 3 \text{ lorsque } |h| = 3. \end{cases}
\end{aligned}$$

Avec un bruit blanc fort la variance asymptotique vaut toujours 1.