Approfondissements du modèle de Ramsey-Cass-Koopmans

Ce corrigé est largement inspiré des éléments de correction fournis par les professeurs responsables du cours. Pour toute remarque, contacter `assistant-macro@ensae.fr`

1 Modèle de Ramsay, offre de travail et fiscalité

On s'intéresse à une variante du modèle de Ramsey en temps discret où l'offre de travail est endogène. L'économie est concurrentielle. En chaque point du temps, un ménage représentatif décide de sa consommation, de son offre de travail et de sa détention d'actifs. L'utilité instantanée du ménage est donnée par :

$$u(c_t, h_t) = \ln c_t + \alpha \left(\frac{(\bar{h} - h_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma} \right), \alpha > 0, \gamma \geq 0$$

où $\bar{h}$ est la dotation totale en temps du ménage. La contrainte budgétaire instantanée de ce ménage est donnée par :

$$a_{t+1} = (1 + r_t)a_t + (1 - \tau_h)w_t h_t - (1 + \tau_c)c_t + T_t$$

où a est la richesse, c la consommation, h le nombre d'heures travaillées, r et w indiquent le taux d'intérêt et le salaire horaire, τ_c et τ_h indiquent les taxes sur la consommation et sur le travail, et T est un transfert forfaitaire qui redistribue le produit de l'impôt à chaque ménage. Les entreprises évoluent dans un environnement concurrentiel (i.e. elles prennent le prix des facteurs comme une donnée) et produisent avec la technologie Cobb-Douglas suivante :

$$y_t = k_t^\theta h_t^{1-\theta}, 0 < \theta < 1$$

On suppose enfin que le stock de capital se déprécie au taux $\delta > 0$.

1. A partir des conditions d'optimalité de l'entreprise représentative, calculez la valeur du taux d'intérêt r et du salaire w en fonction du ratio produit/heures (y/h).

Le profit de la firme s'écrit : r=z-delta égalité des taux de rémunération entre prêts aux ménages et prêts aux entreprises

$$\pi_t = k_t^\theta h_t^{1-\theta} - w_t h_t - (r_t + \delta)k_t$$

où $r_t + \delta$ est le coût réel d'usage du capital. Les conditions du premier ordre du programme statique de la firme vérifient :

$$\begin{aligned} \theta k_t^{\theta-1} h_t^{1-\theta} = r_t + \delta \quad &\Leftrightarrow \quad r_t = \theta \left(\frac{k_t}{h_t}\right)^{\theta-1} - \delta \\ (1-\theta)k^\theta h^{-\theta} = w_t \quad &\Leftrightarrow \quad w_t = (1-\theta)\left(\frac{k_t}{h_t}\right)^\theta \end{aligned} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} r_t = \theta \left(\dfrac{y_t}{h_t}\right)^{\frac{\theta-1}{\theta}} - \delta \\ w_t = (1-\theta)\left(\dfrac{y_t}{h_t}\right) \end{cases}$$

car $y_t = k_t^\theta h_t^{1-\theta} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{k_t}{h_t} = \left(\dfrac{y_t}{h_t}\right)^{\frac{1}{\theta}}$

2. Ecrivez le Lagrangien correspondant au programme d'optimisation du ménage et dérivez les conditions d'optimalité pour la consommation et les heures travaillées. On note $\tau = (\tau_c + \tau_h)/(1+\tau_c)$ le taux effectif d'imposition. La condition nécessaire sur les heures travaillées peut se réécrire comme :

$$\frac{\alpha c_t}{(\bar{h}-h)^\gamma} = w_t\left(\frac{1-\tau_h}{1+\tau_c}\right) = w_t(1-\tau)$$

Interprétez cette condition. Ecrivez l'offre de travail comme une fonction de w et τ, et discutez des effets de γ sur l'offre de travail du ménage.

Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \Big[\ln c_t + \alpha\left(\frac{(\bar{h}-h_t)^{1-\gamma}}{1-\gamma}\right) + \lambda_t[(1+r_t)a_t + (1-\tau_h)w_t h_t - (1+\tau_c)c_t + T_t - a_{t+1}]\Big]$$

Les conditions nécessaires pour l'optimalité sont :

$$\begin{array}{rcll}
\dfrac{1}{c_t} & = & \lambda_t(1+\tau_c) & (1) \\
\alpha(\bar{h}-h_t)^{-\gamma} & = & \lambda(1-\tau_h)w_t & (2) \\
\lambda_t & = & \beta\lambda_{t+1}(1+r_{t+1}) & (3) \\
\lim_{t\to\infty} \beta^t\lambda_t a_{t+1} & = & 0 & \text{(condition de transversalité)}
\end{array}$$

En combinant (1) et (3), on obtient l'équation d'Euler (ou règle de Keynes-Ramsey) :

$$\frac{1}{c_t(1+\tau_c)} = \beta\frac{1}{c_{t+1}(1+\tau_c)}(1+r_{t+1}) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta(1+r_{t+1})$$

En notant ρ le taux de préférence pour le présent tel que $\beta = \frac{1}{1+\rho}$, on peut à partir de la dernière relation approcher au premier ordre :

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1+r_{t+1}}{1+\rho} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(1+\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t}\right) = \ln(1+r_{t+1}) - \ln(1+\rho) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c_{t+1}-c_t}{c_t} \approx r_{t+1} - \rho$$

comme $\ln(1+x) \approx x$ pour x petit.
En combinant (1) et (2), on obtient la condition d'offre de travail :

$$\underbrace{\frac{\alpha c_t}{(\bar{h}-h_t)^\gamma}}_{\text{taux marginal de substitution } = -\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}(\bar{h}-ht)} = \frac{\partial u/\partial(\bar{h}-ht)}{\partial u/\partial c}} = \underbrace{w_t}_{\text{productivité marginale du travail}} \underbrace{\left(\frac{1-\tau_h}{1+\tau_c}\right)}_{1-\tau}$$

où τ est le taux effectif d'imposition :

$$\tau = 1 - \left(\frac{1-\tau_h}{1+\tau_c}\right) = \frac{\tau_c+\tau_h}{1+\tau_c}$$

Les taxes introduisent un coin fiscal entre le taux marginal de substitution (consommation, loisir) et la productivité marginale du travail. Une hausse du taux effectif d'imposition τ correspond à un prix plus élevé de la consommation et/ou à un rendement plus faible du travail (i.e. un prix plus faible du loisir). Pour un taux de salaire w donné, les agents répondent à ce coin fiscal plus important en réduisant la consommation et les heures travaillées. Des relations précédentes, la fonction d'offre de travail $h(w,\tau)$ est donnée par :

$$h_t = \bar{h} - \left(\frac{\alpha c_t}{w_t(1-\tau)}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Le terme $\dfrac{1}{\gamma}$ affecte positivement l'élasticité de Frisch, i.e. la réponse en pourcentage de l'offre de travail à un pourcent de hausse du salaire ou de baisse de la fiscalité lorsque l'utilité marginale de la richesse est constante. On ne mesure donc ici qu'un effet de substitution à richesse donnée. Pour rappel, la calibration de cette élasticité est un point extrêmement important pour valider empiriquement les prédictions des modèles de cycles réels (cf. cours).

3. Utilisez les conditions d'optimalité précédentes pour établir une relation théorique entre les heures travaillées h, le taux d'imposition τ et le ratio c/y. Montrez que lorsque $\gamma = 1$, cette relation se ramène à une expression simple où la plupart du temps travaillé, $h/\bar{h}$, est une fonction de τ et c/y. Cette équation est identique à l'équation (8) de l'article de Prescott (2004) [1].

En utilisant l'expression de la productivité marginale du travail (en fonction de la productivité moyenne y/h), on a simplement :

$$\frac{\alpha c_t}{(\bar{h}-h)^{\gamma}} = w_t(1-\tau) = (1-\theta)\frac{y_t}{h_t}(1-\tau) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h_t}{(\bar{h}-h_t)^{\gamma}} = \frac{(1-\theta)(1-\tau)}{\alpha}\left(\frac{c_t}{y_t}\right)^{-1}$$

Si l'on retient une fonction d'utilité log-log, i.e. $\gamma = 1$, comme chez Prescott (2004), on obtient alors :

$$\frac{1}{\frac{\bar{h}}{h_t}-1} = \frac{(1-\theta)(1-\tau)}{\alpha\frac{c_t}{y_t}} \quad \Leftrightarrow \frac{\bar{h}}{h_t} = \frac{(1-\theta)(1-\tau)+\alpha\frac{c_t}{y_t}}{(1-\theta)(1-\tau)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h_t}{\bar{h}} = \frac{1-\theta}{1-\theta+\frac{\alpha}{1-\tau}\frac{c_t}{y_t}}$$

On retrouve la relation (8), page 5 de Prescott (2004). La part du temps passée à travailler dépend du ration c_t/y_t, du taux de taxe effectif τ et des paramètres α et θ. (voir l'article pour plus de détail)

4. Analysez comment la taxe τ affecte la consommation, le stock de capital et le produit à l'état régulier de l'économie.

À l'état régulier de l'économie (on admettra que les variables sont constantes dans ce cas), à partir de l'approximation à l'ordre 1 de la règle de Keynes-Ramsey et en utilisant les conditions du premier ordre du programme de l'entreprise, on a :

$$\frac{c_{t+1}-c_t}{c_t} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^* = \rho \quad \Leftrightarrow \quad \theta\left(\frac{k^*}{h^*}\right)^{\theta-1} - \delta = \rho \quad \text{donc} \quad \frac{k^*}{h^*} = \left(\frac{\rho+\delta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta-1}}$$

1. Prescott E. (2004), Why do Americans work so much more than Europeans ?, *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 28(1) oo.2-13

À l'équilibre du marché des capitaux on a $k_t = a_t$, donc l'accumulation du capital vérifie :

$$k_{t+1} = (1+r_t)k_t + (1-\tau_h)w_t h_t - (1+\tau_c)c_t + T_t$$

On suppose par ailleurs que le budget du gouvernement est équilibré de telle sorte que $T_t = \tau_c c_t + \tau_h w_t h_t$, la loi d'évolution du stock de capital vérifie donc :

$$k_{t+1} = (1+r_t)k_t + w_t h_t - c_t$$

Comme les facteurs sont rémunérés à leur productivité marginale, on a :

$$\begin{aligned} r_t &= \theta k_t^{\theta-1} h_t^{1-\theta} - \delta \\ w_t &= (1-\theta) k_t^{\theta} h_t^{-\theta} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= k_t + \theta k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} - \delta k_t + (1-\theta) k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} - c_t \\ &= k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} + (1-\delta)k_t - c_t \end{aligned}$$

A l'état régulier,

$$k^* = k^{*\theta} h^{*1-\theta} + (1-\delta)k^* - c^* \quad \Leftrightarrow \quad \frac{c^*}{h^*} = \left(\frac{k^*}{h^*}\right)^{\theta} - \delta \left(\frac{k^*}{h^*}\right)$$

Finalement la condition d'offre de travail optimale implique à l'état régulier :

$$\frac{\bar{h}}{h^*} = 1 + \frac{\alpha \frac{c^*}{y^*}}{(1-\theta)(1-\tau)} = 1 + \frac{\alpha c^*}{(1-\theta)(1-\tau) k^{*\theta} h^{*1-\theta}} = 1 + \frac{\alpha \frac{c^*}{h^*}}{(1-\theta)(1-\tau)\left(\frac{k^*}{h^*}\right)^{\theta}}$$

Pour résumer on a à l'état régulier :

$$\begin{aligned} \frac{k^*}{h^*} &= \left(\frac{\rho+\delta}{\theta}\right)^{\frac{1}{\theta-1}} \\ \frac{c^*}{h^*} &= \left(\frac{k^*}{h^*}\right)^{\theta} - \delta \left(\frac{k^*}{h^*}\right) \\ \frac{\bar{h}}{h^*} &= 1 + \frac{\alpha \frac{c^*}{h^*}}{(1-\theta)(1-\tau)\left(\frac{k^*}{h^*}\right)^{\theta}} \end{aligned}$$

A l'état stationnaire les ratios $\frac{k^*}{h^*}$ et $\frac{c^*}{h^*}$ sont constants et indépendants de la taxe τ. La dernière équation indique que h^* diminue lorsque τ augmente. La consommation stationnaire et le stock de capital stationnaire diminue alors dans les mêmes proportions. Ainsi la fiscalité et en particulier la fiscalité du travail affecte l'état stationnaire du modèle contrairement à ce que l'on obtient lorsque l'offre de travail est exogène (cf. cours chapitre 2 slide 48).

2 Modèle de Ramsay, offre de travail et incertitude

On s'intéresse à une variante du modèle de Ramsey en temps discret où l'offre de travail est endogène. L'environnement est stochastique, i.e. l'économie est soumise à des chocs de productivité agrégés. L'économie est concurrentielle. L'économie est composée d'un ménage représentatif et d'une entreprise représentative. À chaque date le ménage consomme c_t, offre à l'entreprise une quantité de travail n_t, rémunérée au salaire w_t et investi i_t de façon à accumuler du capital productif. La loi d'évolution du capital est donnée par :

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t, \ \ 0 < \delta < 1$$

où δ est le taux de dépréciation du capital. L'utilité instantanée du ménage est donnée par :

$$u(c_t, n_t) = \ln c_t + \chi\left(\frac{(1-n_t)^{1-\eta}}{1-\eta}\right), \ \ \chi > 0, \ \ \eta \geq 0$$

où la dotation en temps du ménage est normalisée à l'unité. On notera r_t le taux d'intérêt et R_t le coût d'usage du capital. La fonction de production est de la forme :

$$y_t = a_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}, \ \ 0 < \alpha < 1$$

où la productivité totale des facteur a_t suit en logarithme un processus autorégressif d'ordre un de la forme :

$$\boxed{\ln a_t = \rho \ln a_{t-1} + \varepsilon_t, \ \ \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon)}$$

1. Ecrivez le programme du ménage et dérivez les conditions du premier ordre correspondantes.

Le programme du ménage consiste à maximiser son espérance d'utilité en tenant compte (i) de la contrainte budgétaire et (ii) de la contrainte technologique d'accumulation du capital :

$$\begin{array}{rl} \max\limits_{\{c_t, n_t, k_{t+1}\}_{t\geq 0}} & \mathrm{E}_0 \sum\limits_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln c_t + \chi \dfrac{(1-n_t)^{1-\eta}}{1-\eta}\right] \\ \text{s.c.} & c_t + i_t = w_t n_t + R_t k_t \\ & k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t \end{array}$$

En combinant les deux contraintes :

$$k_{t+1} = w_t n_t + R_t k_t - c_t + (1-\delta)k_t$$

Le Lagrangien dynamique associé à ce programme vérifie :

$$\mathcal{L} = \mathrm{E}_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[\ln c_t + \chi \frac{(1-n_t)^{1-\eta}}{1-\eta} + \lambda_t [w_t n_t + R_t k_t - c_t + (1-\delta)k_t - k_{t+1}]\right]$$

Et les conditions d'optimalité vérifie :

$$\begin{array}{rcrcll} \partial\mathcal{L}/\partial c_t = 0 & \Leftrightarrow & \dfrac{1}{c_t} & = & \lambda_t & (1) \\ \partial\mathcal{L}/\partial n_t = 0 & \Leftrightarrow & \chi(1-n_t)^{-\eta} & = & \lambda_t w_t & (2) \\ \partial\mathcal{L}/\partial k_{t+1} = 0 & \Leftrightarrow & \lambda_t & = & \beta E_t[\lambda_{t+1}(R_{t+1} + 1 - \delta)] & (3) \\ \partial\mathcal{L}/\partial \lambda_t = 0 & \Leftrightarrow & k_{t+1} & = & w_t n_t + R_t k_t - c_t + (1-\delta)k_t & (4) \\ \text{(contrainte de transversalité)} & & \lim\limits_{t\to\infty} \beta^t \lambda_t k_{t+1} & = & 0 & \end{array}$$

En éliminant le multiplicateur de Lagrange λ_t, on obtient la condition d'Euler et la condition d'offre de travail :

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & \beta \mathrm{E}_t \left[\dfrac{c_t}{c_{t+1}}(R_{t+1} + 1 - \delta)\right] \\ \chi(1-n_t)^{-\eta} & = & \dfrac{w_t}{c_t} \end{array}$$

2. Ecrivez le programme de l'entreprise et dérivez les conditions du premier ordre correspondantes.

Le programme de l'entreprise est statique, on a :

$$\max_{\{n_t,k_t\}} \pi_t = a_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - w_t n_t - R_t k_t$$

Les conditions du premier ordre vérifie :

$$\begin{array}{rcl} \alpha a_t k_t^{\alpha-1} n_t^{1-\alpha} & = & R_t \\ (1-\alpha) a_t k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} & = & w_t \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} R_t & = & \alpha \dfrac{y_t}{k_t} \\ w_t & = & (1-\alpha)\dfrac{y_t}{n_t} \end{array}$$

3. Ecrivez l'équilibre sur le marché des biens, puis l'équilibre décentralisé du modèle.

En équilibre général, tous les flux doivent avoir une contrepartie. On utilise la contrainte budgétaire des ménages :

$$c_t + i_t = w_t n_t + R_t k_t$$

Comme les rendements d'échelle de la fonction de production de l'économie sont constants, on a :

$$y_t = \frac{\partial y_s}{\partial n_s}|_{n_s=n_t} n_t + \frac{\partial y_s}{\partial k_s}|_{k_s=k_t} k_t = (1-\alpha) k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} n_t + \alpha k_t^{\alpha-1} n_t^{1-\alpha} k_t$$

En utilisant les conditions d'optimalité du programme de l'entreprise, on a :

$$y_t = w_t n_t + R_t k_t$$

On obtient donc l'équilibre sur le marché des biens :

$$y_t = c_t + i_t$$

Le revenu des ménages se divise entre consommation et épargne.
L'équilibre général du modèle est donc donné à chaque période par la séquence $X_t = \{c_t, n_t, y_t, R_t, w_t, k_t, i_t, a_t\}$ et est définit par le système d'équations suivant :

Equation d'Euler (EE)	$1 = \beta \mathrm{E}_t \left[\dfrac{c_t}{c_{t+1}} (R_{t+1} + 1 - \delta) \right]$
Heures travaillées (H)	$\chi(1-n_t)^{-\eta} = \dfrac{w_t}{c_t}$
Fonction de production (Y)	$y_t = a_t k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$
Coût réel du capital (CC)	$R_t = \alpha \dfrac{y_t}{k_t}$
Salaire réel (W)	$w_t = (1-\alpha)\dfrac{y_t}{n_t}$
Investissement (I)	$i_t = k_{t+1} - (1-\delta) k_t$
Marché des biens (GM)	$y_t = c_t + i_t$
Chocs de productivité (T)	$\ln a_t = \rho \ln a_{t-1} + \varepsilon_t$

4. Expliquez pourquoi dans le modèle l'équilibre décentralisé est identique à l'allocation optimale choisie par le planificateur.

L'économie est concurrentielle, il n'y a pas d'externalité, ni d'imperfection. Les deux théorèmes du bien-être s'appliquent donc.

5. Définissez l'état régulier du modèle. En quoi cela est-il utile ?

L'état régulier est une situation dans laquelle X_0 est tel que les quantités sont non nulles et croissent à taux constants.

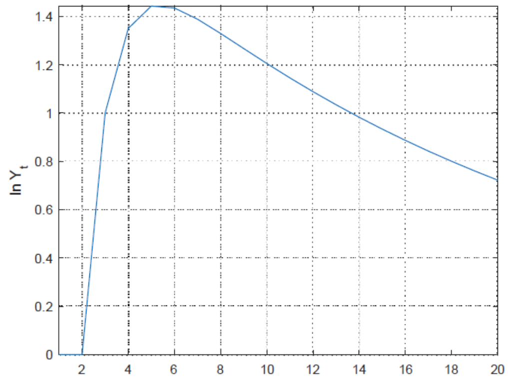
$$\begin{array}{lll} (\mathrm{T}) \Leftrightarrow & \ln \frac{a_t}{a_{t-1}} = (\rho - 1)\ln a_{t-1} - \varepsilon_t & \text{est donc constant. En différenciant,} \\ \Leftrightarrow & 0 = \ln \frac{a_t}{a_{t-1}} - \ln \frac{a_{t-1}}{a_{t-2}} = (\rho - 1)\ln \frac{a_{t-1}}{a_{t-2}} - \Delta\varepsilon_t & \\ \Leftrightarrow & \Delta\varepsilon_t = (\rho - 1)\ln \frac{a_{t-1}}{a_{t-2}} & \text{est donc constant.} \end{array}$$

De plus, $\Delta\varepsilon_t = 0$, car si ce n'était pas le cas, $|\varepsilon_t|$ croîtrait infiniment avec t, $\mathrm{V}(\varepsilon_t)$ dépendrait donc de t, ce qui contredirait $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon)$. Donc ε_t est constant, en même égal à 0, car $\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0$.
On a donc : $\ln a_t = \rho \ln a_{t-1} \Leftrightarrow \forall t,\ a_t = a = 1$ constant
Il n'y a donc plus d'incertitude, donc :
(EE) $\Leftrightarrow \frac{c_{t+1}}{c_t} = \beta(R_{t+1} + 1 - \delta)$ est constant, donc $\forall t,\ R_t = R$ est constant.
(CC) $\Rightarrow \frac{y_t}{k_t} = \frac{R}{\alpha}$ est donc constant. Par ailleurs, (I) $\Leftrightarrow \frac{i_t}{k_t} = \frac{k_{t+1}}{k_t} - \delta$ est constant, donc d'après (GM), $\frac{c_t}{k_t} = \frac{y_t}{k_t} - \frac{i_t}{k_t}$ est aussi constant. $\frac{y_t}{c_t} = \frac{y_t}{k_t}\frac{k_t}{c_t}$ est donc aussi constant.
(H) et (W) $\Rightarrow \chi n_t (1 - n_t)^{-\eta} = (1-\alpha)\frac{y_t}{c_t}$ est par conséquent constant. La fonction $n_t \mapsto \chi n_t (1 - n_t)^{-\eta}$ étant bijective car strictement croissante en n_t (commme produit de deux fonctions stritement croissantes en n_t), $\forall t\ n_t = n$ est constant.
D'après (Y) $\Leftrightarrow \frac{y_t}{k_t} = a\left(\frac{k_t}{n_t}\right)^\alpha$ donc $\frac{k_t}{n_t}$ est constant, donc $\forall t\ k_t = k$ est constant. Donc $y_t = ak^\alpha n^{1-\alpha} = y$ est constant. Donc d'après (GM) c est constant, d'après (W) w est constant, d'après (I) i est constant. On a donc à l'état régulier, $\forall t\ X_t = X = \{c, n, y, R, w, k, i, a\}$.
L'état régulier de l'économie peut donc s'écrire :

$$\begin{array}{cc} \text{Equation d'Euler} & 1 = \beta(R + 1 - \delta) \\ \text{Heures travaillées} & \chi(1-n)^{-\eta} = \dfrac{w}{c} \\ \text{Fonction de production} & y = ak^\alpha n^{1-\alpha} \\ \text{Coût réel du capital} & R = \alpha\dfrac{y}{k} \\ \text{Salaire réel} & w = (1-\alpha)\dfrac{y}{n} \\ \text{Investissement} & i = \delta k \\ \text{Marché des biens} & y = c + i \\ \text{Chocs de productivité} & a = 1 \end{array}$$

Ces équations nous donnent les "moments" de long terme de l'économie qui sont essentiels lors de la phase de calibration du modèle (cf.cours).

6. En général il n'est pas possible de résoudre analytiquement les modèles de cycles réels sauf à supposer que le taux de dépréciation du capital est complet ($\delta = 1$), dans ce cas la dynamique du produit est représentée sur le graphique ci-dessous :



Qu'est-ce qui explique la persistance du produit ?

Si $\delta = 1$, on peut montrer (cf. cours) que la dynamique du logarithme du produit est donnée par un processus autorégressif d'ordre 2, ou AR(2), de la forme :

$$\ln y_t = (\rho + \alpha) \ln y_{t-1} - \alpha\rho \ln y_{t-2} + \text{const} + \varepsilon_t$$

Comme le coefficient associé au premier retard est positif et celui associé au second est négatif, une perturbation entraine un profile temporel en cloche. Comme α (de l'ordre de 1/3) n'est pas très élevé, la dynamique de la production est largement déterminée par la persistance du choc technologique ρ. Si celle-ci est nulle, le processus $(\ln y_t)$ devient un AR(1). Dans ce cas, le choc initial est absorbé très rapidement. Les mécanismes endogènes du modèles ne parviennent donc pas à transformer un choc tehnologique transitoire en mouvement durable de la production. Il s'agit là d'une limite importante des modèles de cycles réels.

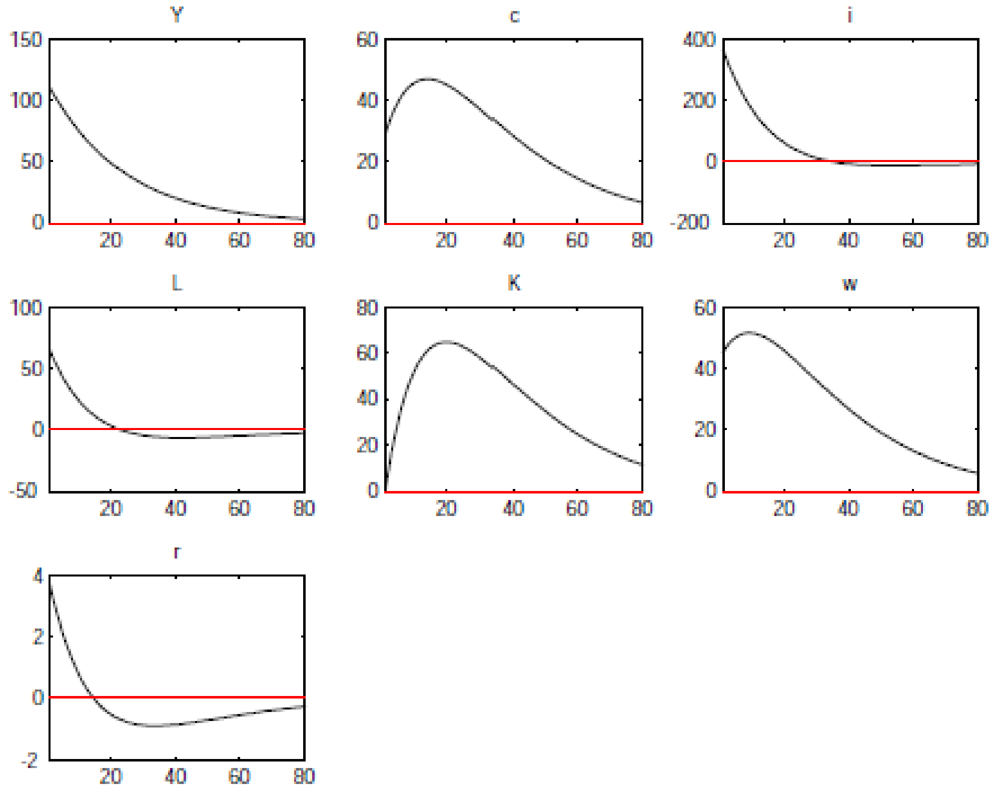
3 Modèle de cycles réels et fonctions de réponse (IRF)

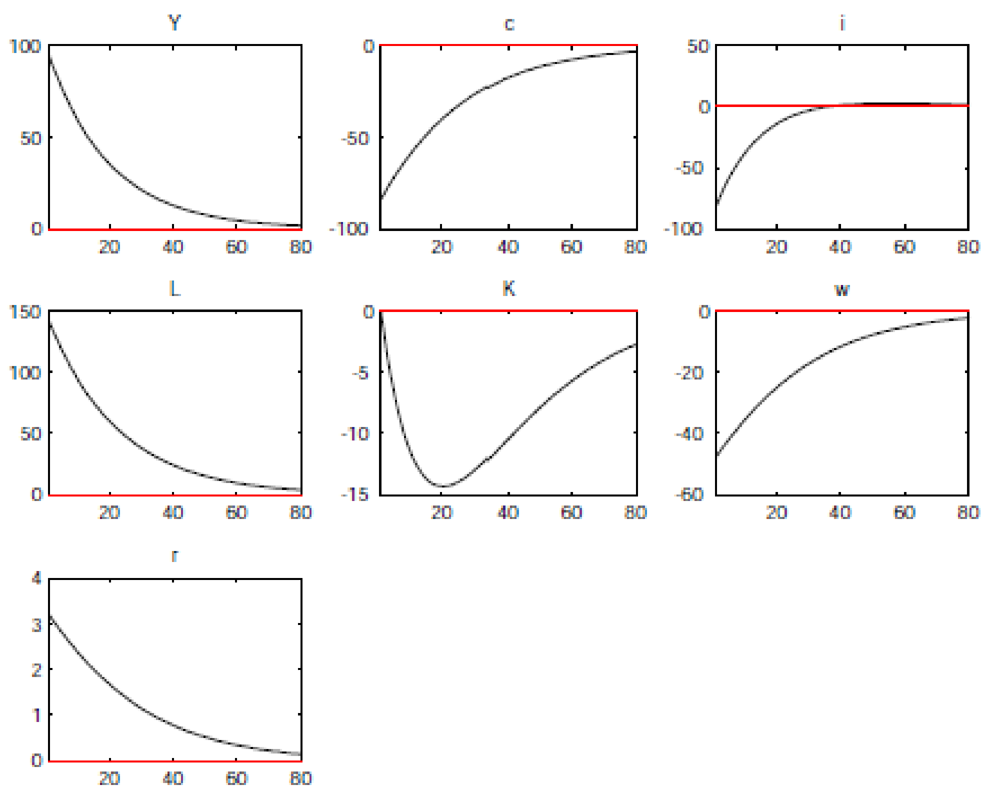
On s'intéresse à deux séries de fonctions de réponse (IRF) dans le cadre d'un modèle simple de cycles réels. Les deux séries sont représentées ci-dessous. Parmi ces deux séries, l'une correspond à un choc technologique, l'autre à un choc sur les dépenses publiques.

1. Déterminez le choc associé dans chacune des séries de fonctions de réponse. Justifiez votre réponse en décrivant les mécanismes économiques à l'œuvre.

La première série d'IRFs est générée par un choc technologique, et la seconde par une augmentation temporaire des consommations du gouvernement.

En effet lorsque la technologie s'améliore au delà de sa tendance, le produit marginal à la fois du capital et du travail augmente, ce qui induit, par le programme d'optimisation des entreprises, de plus hauts salaires et un taux d'intérêt plus élevé. Le produit doit aussi augmenter. Comme les agents préfèrent lisser leur consommation, la consommation agrégée augmente en premier lieu (proportionnellement) moins que la production, tandis que l'investissement augmente (proportionnellement) plus que la production. Le capital s'acculmule donc au cours du temps, ce qui diminue la productivité marginal du capital et donc le taux d'intérêt qui devient inférieur à son niveau à l'état régulier. Quand la technologie est presque retournée à son état stationnaire,


Y
150
100
50
0
20
40
60
80
c
60
40
20
0
i
400
200
0
-200
L
100
50
0
-50
K
80
60
40
20
0
w
60
40
20
0
r
4
2
0
-2


Y
100
50
0
20
40
60
80
c
0
-50
-100
i
50
0
-50
-100
L
150
100
50
0
K
0
-5
-10
-15
w
0
-20
-40
-60
r
4
3
2
1
0

il reste un effet de richesse dû à un niveau élevé de stock de capital. Les agents peuvent donc continuer à consommer davantage qu'à l'état stationnaire tout en travaillant moins.

Une augmentation des consommations du gouvernement quant à elle mène à une diminution des ressources disponibles pour les agents privés. Toutefois, comme les agents préfèrent lisser leur consommation, ils répondent en augmentant leur offre de travail pour augmenter la production, atténuant ainsi la diminution de la consommation et de l'investissement, sans pour autant la neutraliser. Cela implique un produit plus élevé. Le niveau plus élevé d'offre de travail diminue le niveau du salaire, tandis qu'un investissement diminué diminue le stock de capital, augmentant ainsi les taux d'intérêt.

2. Lequel de ces deux chocs vous semble le plus plausible comme moteur du cycle des affaires ? Pourquoi ?

Le choc de dépenses de consommation publique fait diminuer la consommation et augmenter la production et les heures travaillées. Cela est contre-factuel, comme dans les données la consommation est procyclique et non contracyclique. La réponse aux impulsions induite par le choc technologique sont qualitativement plus cohérente avec l'évidence empirique. Le choc technologique est donc un meilleur candidat que le choc de consommation du gouvernement comme moteur du cycle des affaires

4 Introduction à Dynare

Approximation et résolution du modèle : Le modèle RBC ne peut pas être résolu analytiquement de manière générale. Une méthode de résolution (appelée méthode des perturbations) consiste à résoudre une approximation de Taylor du modèle au voisinage de son état stationnaire.

a) Ecrire la version approximée à l'ordre 1 du modèle RBC.

L'équilibre général du modèle et l'état régulier s'écrivent respectivement :

$$
\left\{\begin{array}{lc}
\text{(EE)} & 1 = \beta \mathrm{E}_t\left[\dfrac{c_t}{c_{t+1}}(R_{t+1}+1-\delta)\right] \\
\text{(H)} & \chi(1-n_t)^{-\eta} = \dfrac{w_t}{c_t} \\
\text{(Y)} & y_t = a_t k_t^\alpha n_t^{1-\alpha} \\
\text{(CC)} & R_t = \alpha \dfrac{y_t}{k_t} \\
\text{(W)} & w_t = (1-\alpha)\dfrac{y_t}{n_t} \\
\text{(I)} & i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t \\
\text{(GM)} & y_t = c_t + i_t \\
\text{(T)} & \log a_t = \rho \log a_{t-1} + \varepsilon_t
\end{array}\right.
\quad \text{et} \quad
\left\{\begin{array}{lc}
\text{(EE*)} & 1 = \beta(1+R-\delta) \\
\text{(H*)} & \chi(1-n)^{-\eta} = \dfrac{w}{c} \\
\text{(Y*)} & y = a k^\alpha n^{1-\alpha} \\
\text{(CC*)} & R = \alpha \dfrac{y}{k} \\
\text{(W*)} & w = (1-\alpha)\dfrac{y}{n} \\
\text{(I*)} & i = \delta k \\
\text{(GM*)} & y = c + i \\
\text{(T*)} & a = 1
\end{array}\right.
$$

On note $\hat{x}_t = \log \dfrac{x_t}{x}$ la déviation en pourcentage à l'état stationnaire de la variable x_t, donc $x_t = x e^{\hat{x}_t} \approx x(1+\hat{x}_t)$. On peut donc "log-linéariser" l'équilibre général du modèle autour de l'état stationnaire :

- pour l'équation d'Euler :

$$
\begin{array}{rcrcl}
(\mathrm{EE}) & \Rightarrow & 1 & \approx & \beta \mathrm{E}_t \left[\dfrac{1+\hat{c}_t}{1+\hat{c}_{t+1}} (R(1+\hat{R}_{t+1}) + 1 - \delta) \right] \\
 & & & \approx & \mathrm{E}_t \left[\dfrac{1+\hat{c}_t}{1+\hat{c}_{t+1}} (\beta(1+R-\delta) + R\beta\hat{R}_{t+1}) \right] \\
(\mathrm{EE}^*) & \Rightarrow & 1 & \approx & \mathrm{E}_t \left[\dfrac{1+\hat{c}_t}{1+\hat{c}_{t+1}} (1 + R\beta\hat{R}_{t+1}) \right] \\
 & & & & \text{comme } (1+X)^A(1+Y)^B \approx 1 + AX + BY \text{ pour } X, Y \text{ petits,} \\
 & & 1 & \approx & \mathrm{E}_t(1 + \hat{c}_t - \hat{c}_{t+1} + R\beta\hat{R}_{t+1}) \\
 & \text{donc} & \hat{c}_t & \approx & \mathrm{E}_t\hat{c}_{t+1} - R\beta\mathrm{E}_t\hat{R}_{t+1}
\end{array}
$$

- pour les heures travaillées :

$$
\begin{array}{rcrcl}
(\mathrm{H}) & \Rightarrow & \chi(1 - n(1+\hat{n}_t))^{-\eta} & \approx & \dfrac{w(1+\hat{w}_t)}{c(1+\hat{c}_t)} \approx \dfrac{w}{c}(1 + \hat{w}_t - \hat{c}_t) \\
(\mathrm{H}^*) & \Rightarrow & \chi(1 - n - n\hat{n}_t)^{-\eta} & \approx & \chi(1-n)^{-\eta}(1 + \hat{w}_t - \hat{c}_t) \\
 & & \left(1 - \dfrac{n}{1-n}\hat{n}_t\right)^{-\eta} & \approx & 1 + \hat{w}_t - \hat{c}_t \\
 & & -\eta \log\left(1 - \dfrac{n}{1-n}\hat{n}_t\right) & \approx & \log(1 + \hat{w}_t - \hat{c}_t) \\
\text{donc} & & \eta\dfrac{n}{1-n}\hat{n}_t & \approx & \hat{w}_t - \hat{c}_t
\end{array}
$$

- pour la production :

$$
\begin{array}{rcrcl}
(\mathrm{Y}) & \Rightarrow & y(1+\hat{y}_t) & \approx & a(1+\hat{a}_t)[k(1+\hat{k}_t)]^\alpha[n(1+\hat{n}_t)]^{1-\alpha} \\
 & & y(1+\hat{y}_t) & \approx & ak^\alpha n^{1-\alpha}(1+\hat{a}_t)(1+\hat{k}_t)^\alpha(1+\hat{n}_t)^{1-\alpha} \\
(\mathrm{Y}^*) & \Rightarrow & (1+\hat{y}_t) & \approx & (1+\hat{a}_t)(1+\hat{k}_t)^\alpha(1+\hat{n}_t)^{1-\alpha} \\
 & & \log(1+\hat{y}_t) & \approx & \log(1+\hat{a}_t) + \alpha\log(1+\hat{k}_t) + (1-\alpha)\log(1+\hat{n}_t) \\
\text{donc} & & \hat{y}_t & \approx & \hat{a}_t + \alpha\hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{n}_t
\end{array}
$$

- pour le coût de location du capital :

$$
\begin{array}{rcrcl}
(\mathrm{CC}) & \Rightarrow & R(1+\hat{R}_t) & \approx & \alpha\dfrac{y(1+\hat{y}_t)}{k(1+\hat{k}_t)} \\
(\mathrm{CC}^*) & \Rightarrow & R(1+\hat{R}_t) & \approx & R(1 + \hat{y}_t - \hat{k}_t) \\
\text{donc} & & \hat{R}_t & \approx & \hat{y}_t - \hat{k}_t
\end{array}
$$

- pour le salaire réel :

$$
\begin{array}{rcrcl}
(\mathrm{W}) & \Rightarrow & w(1+\hat{w}_t) & \approx & (1-\alpha)\dfrac{y(1+\hat{y}_t)}{n(1+\hat{n}_t)} \\
(\mathrm{W}^*) & \Rightarrow & w(1+\hat{w}_t) & \approx & w(1 + \hat{y}_t - \hat{n}_t) \\
\text{donc} & & \hat{w}_t & \approx & \hat{y}_t - \hat{n}_t
\end{array}
$$

- pour l'investissement :

$$
\begin{array}{rcrcl}
(\mathrm{I}) & \Rightarrow & i(1+\hat{i}_t) & \approx & k(1+\hat{k}_{t+1}) - (1-\delta)k(1+\hat{k}_t) \\
(\mathrm{I}^*) & \Rightarrow & \delta k(1+\hat{i}_t) & \approx & k(1+\hat{k}_{t+1}) - k(1 + \hat{k}_t - \delta - \delta\hat{k}_t) \\
\text{donc} & & \hat{k}_{t+1} & \approx & (1-\delta)\hat{k}_t + \delta\hat{i}_t
\end{array}
$$

- pour l'équilibre sur le marché des biens :

$$\begin{array}{rcrcl}
\text{(GM)} & \Rightarrow & y(1+\hat{y}_t) & \approx & c(1+\hat{c}_t)+i(1+\hat{i}_t) \\
\text{(GM*)} & \Rightarrow & c+i+y\hat{y}_t & \approx & c(1+\hat{c}_t)+i(1+\hat{i}_t) \\
\text{donc} & \Rightarrow & y\hat{y}_t & \approx & c\hat{c}_t+i\hat{i}_t
\end{array}$$

- pour les chocs technologiques :

$$\begin{array}{rcrcl}
\text{(T)} & \Rightarrow & \log[a(1+\hat{a}_t)] & \approx & \rho\log[a(1+\hat{a}_{t-1})]+\varepsilon_t \\
 & & \log a+\log(1+\hat{a}_t) & \approx & \rho\log a+\log(1+\hat{a}_{t-1})+\varepsilon_t \\
 & & \hat{a}_t & \approx & \rho\hat{a}_{t-1}+\varepsilon_t
\end{array}$$

L'équilibre général du modèle log-linéarisé autour de l'état stationnaire s'écrit donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\hat{c}_t & \approx & \mathrm{E}_t\hat{c}_{t+1}-R\beta\mathrm{E}_t\hat{R}_{t+1} \\
\eta\dfrac{n}{1-n}\hat{n}_t & \approx & \hat{w}_t-\hat{c}_t \\
\hat{y}_t & \approx & \hat{a}_t+\alpha\hat{k}_t+(1-\alpha)\hat{n}_t \\
\hat{R}_t & \approx & \hat{y}_t-\hat{k}_t \\
\hat{w}_t & \approx & \hat{y}_t-\hat{n}_t \\
\hat{k}_{t+1} & \approx & (1-\delta)\hat{k}_t+\delta\hat{i}_t \\
y\hat{y}_t & \approx & c\hat{c}_t+i\hat{i}_t \\
\hat{a}_t & \approx & \rho\hat{a}_{t-1}+\varepsilon_t
\end{array}\right.$$

b) Quelles sont les variables d'état (prédéterminées) et les variables anticipées ?

Les variables prédéterminées sont la variable d'état $\hat{k}_t$ et la variable exogène $\hat{a}_t$. Les variables anticipées sont les valeurs futures de $\hat{c}_t$ et $\hat{r}_t$.

c) On poxe $X_t = \begin{pmatrix}\hat{k}_t & \hat{i}_t & \hat{y}_t & \hat{a}_t & \hat{n}_t & \hat{c}_t & \hat{R}_t & \hat{w}_t\end{pmatrix}'$. Ecrire le modèle linéarisé sous forme d'une équation matricielle.

On peut réarranger le système log-linéarisé :

$$\left\{\begin{array}{lcccccc}
\mathrm{E}_t\hat{c}_{t+1}-R\beta\mathrm{E}_t\hat{R}_{t+1} & -\hat{c}_t & & & & \approx & 0 \\
 & \eta\dfrac{n}{1-n}\hat{n}_t+\hat{c}_t-\hat{w}_t & & & & \approx & 0 \\
 & \alpha\hat{k}_t-\hat{y}_t+\hat{a}_t+(1-\alpha)\hat{n}_t & & & & \approx & 0 \\
 & \hat{k}_t-\hat{y}_t+\hat{R}_t & & & & \approx & 0 \\
 & -\hat{y}_t+\hat{n}_t+\hat{w}_t & & & & \approx & 0 \\
 & -\hat{k}_t & +(1-\delta)\hat{k}_{t-1}+\delta\hat{i}_{t-1} & & & \approx & 0 \\
 & i\hat{i}_t-y\hat{y}_t+c\hat{c}_t & & & & \approx & 0 \\
 & -\hat{a}_t & +\rho\hat{a}_{t-1} & & +\varepsilon_t & \approx & 0
\end{array}\right.$$

qui se réécrit :

$$F\mathrm{E}_t(X_{t+1})+GX_t+HX_{t-1}+M\varepsilon_t=0$$

où :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -R\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta\frac{n}{1-n} & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 0 & -1 & 1 & 1-\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & -y & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-\delta & \delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d) On cherche à résoudre le modèle par la méthode des coefficients indéterminés en posant $X_t = PX_{t-1} + Q\varepsilon_t$. Montrer que P est une solution d'une équation matricielle quadratique et Q d'une équation matricielle linéaire.

On a alors :

$$\begin{aligned} F(PX_t + Q\mathrm{E}_t\varepsilon_{t+1}) + GPX_{t-1} + GQ\varepsilon_t + HX_{t-1} + M\varepsilon_t &= 0 \\ FP(PX_{t-1} + Q\varepsilon_t) + GPX_{t-1} + GQ\varepsilon_t + HX_{t-1} + M\varepsilon_t &= 0 \\ (FP^2 + GP + H)X_{t-1} + [(FP + G)Q + M]\varepsilon_t &= 0 \end{aligned}$$

ce qui implique

$$FP^2 + GP + H = 0 \quad \text{et} \quad (FP + G)Q + M = 0$$

P est donc solution d'une équation matricielle quadratique et Q d'une équation matricielle linéaire.

e) Énoncer les conditions de Blanchard et Kahn qui garantissent l'existence et l'unicité d'une solution P stable.

Pour qu'il y ait une solution P unique et stable à cette équation matricielle quadratique, il faut que, en écrivant le modèle sous sa forme à espace d'état $Y_t = AY_{t-1} + B\epsilon_t$, la matrice A ait autant de valeurs propres de module supérieure à 1 qu'il y a de variables anticipées. Ce sont les conditions de Blanchard et Kahn. Dynare teste automatiquement ces conditions.