ENSAE - 2ème année

Séries temporelles linéaires
**QCM 2020**

— Questions une étoile

1) Soit $(\epsilon_t)$ un bruit blanc fort. On dit que les ordres d'un ARMA sont minimaux si ces ordres ne peuvent pas être plus petits. Le processus défini par

$$X_t = \epsilon_t \epsilon_{t-1} \epsilon_{t-2}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

(a) n'est pas un ARMA

(b) est un AR(2) (d'ordre minimal)

(c) est un bruit blanc faible

(d) est une MA(2) (d'ordre minimal)

Réponse : (c), car il est stationnaire (par le théorème ergodique), centré, et de fonction d'autocovariance $\gamma_X(h) = \mathrm{Cov}(\epsilon_t\epsilon_{t-1}\epsilon_{t-2}, \epsilon_{t-h}\epsilon_{t-h-1}\epsilon_{t-h-2})$ qui vaut 0 pour $h \neq 0$ et $(E\epsilon_1^2)^3$ pour $h = 0$.

1) Soit $(\epsilon_t)$ un bruit blanc fort Gaussien $\mathcal{N}(0,1)$. On dit que les ordres d'un ARMA sont minimaux si ces ordres ne peuvent pas être plus petits. Le processus défini par

$$X_t = \epsilon_t^2 \epsilon_{t-1}^2 - 1, \quad t \in \mathbb{Z},$$

est

(a) une MA(1) (d'ordre minimal)

(b) un bruit blanc fort Gaussien

(c) un bruit blanc faible

(d) un processus que ne satisfait pas de représentation ARMA

Réponse : (a) car il est stationnaire (par le théorème ergodique), centré, et sa fonction d'autocovariance

$$\gamma_X(h) = \mathrm{Cov}(\epsilon_t^2\epsilon_{t-1}^2, \epsilon_{t-h}^2\epsilon_{t-h-1}^2)$$

vaut 0 pour $|h| > 1$, vaut $(E\epsilon_1^2)^2 E\epsilon_1^4 - 1 = 2$ pour $|h| = 1$, et $(E\epsilon_1^4)^2 - 1 = 8$ pour $h = 0$.

1) Soit $(\epsilon_t)$ un bruit blanc fort. On dit que les ordres d'un ARMA sont minimaux si ces ordres ne peuvent pas être plus petits. Le processus défini par

$$X_t = \epsilon_t \epsilon_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z},$$

est

(a) une MA(1) (d'ordre minimal)

(b) un AR(1) (d'ordre minimal)

(c) un bruit blanc faible

(d) un processus que ne satisfait pas de représentation ARMA

Réponse : (c) car il est à stationnaire (par le théorème ergodique), centré, et sa fonction d'autocovariance $\gamma_X(h) = \text{Cov}(\epsilon_t \epsilon_{t-1}^2, \epsilon_{t-h}\epsilon_{t-h-1}^2)$ vaut 0 pour $h \neq 0$ et $E\epsilon_1^4 E\epsilon_1^2$ pour $h = 0$.

2) Soit $(\epsilon_t)$ un bruit blanc fort, $\rho$, $a$, $b$ et $c$ des coefficients. On veut tester l'hypothèse $H_0 : \rho = 1$ et $a = 0$ dans le modèle

$$X_t = \rho X_{t-1} + c + at + \epsilon_t + b\epsilon_{t-1}.$$

En théorie, quel est le test le mieux adapté ?

(a) le test de Dickey-Fuller augmenté (ADF) avec tendance

(b) le test de Dickey-Fuller augmenté (ADF) avec constante mais sans tendance

(c) le test KPSS

(d) le test de Perron-Philipps

Réponse : (d), c'est le test de Perron et Philipps car le terme d'erreur n'est pas AR (comme pour ADF) mais MA.

2) Soit $(\epsilon_t)$ un bruit blanc fort, $\rho$, $c$ et $b$ des coefficients, $|b| < 1$. On veut tester l'hypothèse $H_0 : \rho = 1$ et $c = 0$ dans le modèle

$$X_t = \rho X_{t-1} + c + \epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} b^i \epsilon_{t-i}.$$

En théorie, quel est le test le mieux adapté ?

(a) le test de Dickey-Fuller avec tendance

(b) le test de Dickey-Fuller augmenté (ADF) avec constante mais sans tendance

(c) le test KPSS

(d) le test de Perron-Philipps avec tendance

Réponse : (b), c'est le test ADF avec constante et sans tendance car il n'y a pas de tendance déterministe dans le modèle et le terme d'erreur est un AR(1).

2) Soit $(\epsilon_t)$ et $(\eta_t)$ deux bruits blancs forts indépendants, $\rho$, $a$ et $b$ des coefficients, $b \neq 0$. On veut tester l'hypothèse $H_0 : \rho = 1$ dans le modèle

$$X_t = (\rho - 1) \sum_{i=0}^{t} \eta_i + \epsilon_t + a + bt.$$

En théorie, quel est le test le mieux adapté ?

(a) le test de Dickey-Fuller avec tendance

(b) le test de Dickey-Fuller augmenté (ADF) avec constante mais sans tendance

(c) le test KPSS avec tendance

(d) le test de Perron-Philipps avec tendance

Réponse : (c), c'est le test KPSS car la nulle correspond à un modèle trend-stationnaire avec tendance déterministe.

3) Soit $(\epsilon_t)$ et $(\eta_t)$ deux bruits blancs indépendants. On pose

$$X_t = \epsilon_t + \eta_{t-1}, \qquad Y_t = \eta_t.$$

Au sens de Granger

(a) $X_t$ cause $Y_t$

(b) il y a causalité instantanée entre $X_t$ et $Y_t$

(c) $\epsilon_t$ cause $X_t$

(d) $Y_t$ cause $X_t$

Réponse : (d) car $\hat{X}_{t|\{X_u,u<t\}} = 0 \neq \hat{X}_{t|\{X_u,Y_u,u<t\}} = Y_{t-1}$.

3) Soit $(\epsilon_t)$ et $(\eta_t)$ deux bruits blancs indépendants. On pose

$$X_t = \epsilon_t + \eta_{t-1}, \qquad Y_t = \epsilon_t.$$

Au sens de Granger

(a) $X_t$ cause $Y_t$

(b) il y a causalité instantanée entre $X_t$ et $Y_t$

(c) $\epsilon_t$ cause $Y_t$

(d) $Y_t$ cause $X_t$

Réponse : (b) car $\hat{X}_{t|\{X_u,Y_u,u<t\}} = 0 \neq \hat{X}_{t|\{X_u,Y_u,u<t,Y_t\}} = Y_t$.

3) Soit $(\epsilon_t)$ et $(\eta_t)$ deux bruits blancs indépendants. On pose

$$X_t = \eta_t + \epsilon_{t-1}, \qquad Y_t = \epsilon_t.$$

Au sens de Granger

(a) $X_t$ cause $Y_t$

(b) il y a causalité instantanée entre $X_t$ et $Y_t$

(c) $\epsilon_t$ cause $X_t$

(d) $Y_t$ ne cause pas $X_t$

Réponse : (c) car $\hat{X}_{t|\{X_u, u<t\}} = 0 \neq \hat{X}_{t|\{X_u, \epsilon_u, u<t\}} = \epsilon_{t-1}$.

4) Soit le VAR(1) de dimension 3, $X_t = (X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})'$, de la forme

$$X_t = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} X_{t-1} + \epsilon_t$$

avec $(\epsilon_t)$ un bruit blanc de variance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Au sens de Granger

(a) $(X_{2t}, X_{3t})$ cause $X_{1t}$

(b) il y a causalité instantanée entre $(X_{1t}, X_{3t})$ et $X_{2t}$

(c) $X_{1t}$ cause $(X_{2t}, X_{3t})$

(d) $X_{2t}$ cause $(X_{1t}, X_{3t})$

Réponse : (c) car $E((X_{2t}, X_{3t}) \mid X_{1,t-1}) = (X_{1,t-1}, 0) + 1/2(X_{2,t-1}, X_{3,t-1})$.

4) Soit le VAR(1) de dimension 3, $X_t = (X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})'$, de la forme

$$X_t = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} X_{t-1} + \epsilon_t$$

avec $(\epsilon_t)$ un bruit blanc de variance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Au sens de Granger

(a) $(X_{2t}, X_{3t})$ cause $X_{1t}$

(b) il y a causalité instantanée entre $(X_{1t}, X_{3t})$ et $X_{2t}$

(c) $X_{1t}$ cause $(X_{2t}, X_{3t})$

(d) $X_{2t}$ cause $(X_{1t}, X_{3t})$

Réponse : (d) car $E((X_{1t}, X_{3t}) \mid X_{1,t-1}) = (0, X_{2,t-1}) + 1/2(X_{1,t-1}, X_{3,t-1})$.

4) Soit le VAR(1) de dimension 3, $X_t = (X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})'$, de la forme

$$X_t = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} X_{t-1} + \epsilon_t$$

avec $(\epsilon_t)$ un bruit blanc de variance

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Au sens de Granger

(a) $(X_{2t}, X_{3t})$ cause $X_{1t}$

(b) il y a causalité instantanée entre $(X_{1t}, X_{3t})$ et $X_{2t}$

(c) $X_{1t}$ cause $(X_{2t}, X_{3t})$

(d) $X_{2t}$ cause $(X_{1t}, X_{3t})$

Réponse : (a) car $E(X_{1t} \mid (X_{1,t-1}, X_{3,t-1})) = X_{3,t-1} + 1/2X_{1,t-1}$.

5) On dit que les ordres d'un ARMA sont minimaux si ces ordres ne peuvent pas être plus petits. Soit $\rho_X$ la fonction d'autocorrélation d'un processus $(X_t)$ stationnaire au second ordre.

Si $\rho_X(-2) = 0.1$ et $\rho_X(h) = 0$ pour $h < -2$, alors

(a) $X_t$ suit un AR(2) (d'ordre minimal)

(b) $X_t$ suit une MA(3) (d'ordre minimal)

(c) $X_t$ suit une MA(2) (d'ordre minimal)

(d) c'est impossible

Réponse : (c) cette fonction d'autocorrélation est compatible avec le modèle $X_t = \epsilon_t + b_1\epsilon_{t-1} + b_2\epsilon_{t-2}$ avec $b_1$ et $b_2$ tels que $b_2/(1 + b_1^2 + b_2^2) = 0.1$.

5) On dit que les ordres d'un ARMA sont minimaux si ces ordres ne peuvent pas être plus petits. Soit $r_X$ la fonction d'autocorrélation partielle d'un processus $(X_t)$ stationnaire au second ordre.

Si $r_X(2) = 0.1$ et $r_X(h) = 0$ pour $h > 2$, alors

(a) $X_t$ suit un AR(2) (d'ordre minimal)

(b) $X_t$ suit une MA(3) (d'ordre minimal)

(c) $X_t$ suit un AR(3) (d'ordre minimal)

(d) c'est impossible

Réponse : (a) cette fonction d'autocorrélation partielle est compatible avec le modèle $X_t - a_1X_{t-1} - 0.1X_{t-2} = \epsilon_t$.

5) On dit que les ordres d'un ARMA sont minimaux si ces ordres ne peuvent pas être plus petits. Soit $\rho_X$ la fonction d'autocorrélation d'un processus $(X_t)$ stationnaire au second ordre.

Si $\rho_X(h) = 1.6\rho_X(h-1) - 0.64\rho_X(h-2)$ pour $h > 0$, alors

(a) $X_t$ suit un AR(2) (d'ordre minimal)

(b) $X_t$ suit une MA(3) (d'ordre minimal)

(c) $X_t$ suit un AR(3) (d'ordre minimal)

(d) c'est impossible

Réponse : (a) cette fonction d'autocorrélation est compatible avec le modèle $X_t - 1.6X_{t-1} + 0.64X_{t-2} = \epsilon_t$.

6) Soit $(\epsilon)_t$ un bruit blanc. On part des valeurs initiales $X_0 = X_{-1} = 0$ et on génère $X_t = a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + c + \epsilon_t$ pour $t \geq 1$. La figure 1 peut représenter une trajectoire du processus $(X_t)$ lorsque

(a) $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{4}$ et $c = 0.1$

(b) $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{4}$ et $c = 0.1$

(c) $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $c = 0.1$

(d) $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ et $c = 0.1$

Réponse : (c) les autres étant stationnaires.

6) Soit $(\epsilon)_t$ un bruit blanc. On part des valeurs initiales $X_0 = X_{-1} = 0$ et on génère $X_t = a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + c + \epsilon_t$ pour $t \geq 1$. La figure 2 peut représenter une trajectoire du processus $(X_t)$ lorsque

(a) $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ et $c = 1$

(b) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $c = 1$

(c) $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $c = 1$

(d) $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{4}$ et $c = 1$

Réponse : (d) les autres étant non stationnaires avec tendances déterministes.

6) Soit $(\epsilon)_t$ un bruit blanc. On part des valeurs initiales $X_0 = X_{-1} = 0$ et on génère $X_t = a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + c + \epsilon_t$ pour $t \geq 1$. La figure 3 peut représenter une trajectoire du processus $(X_t)$ lorsque

(a) $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$ et $c = 1$

(b) $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $c = 1$

(c) $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{4}$ et $c = 1$

(d) $a_1 = 1$, $a_2 = -\frac{1}{4}$ et $c = 0$

Réponse : (c), puisque (a) et (b) sont non stationnaires avec tendances déterministes et (d) a une moyenne nulle.

7) A la vue des autocorrélogrammes de la Figure 4, quel modèle semble le plus adapté ?

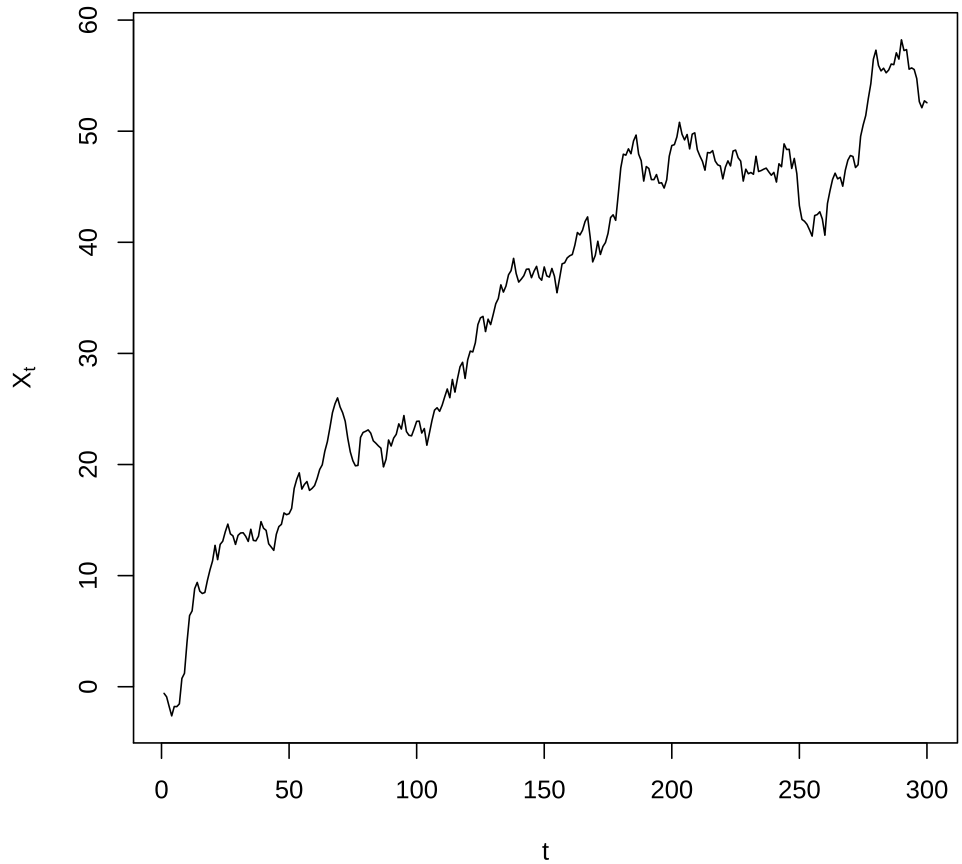


FIGURE 1 – Simulation du processus $(X_t)$.

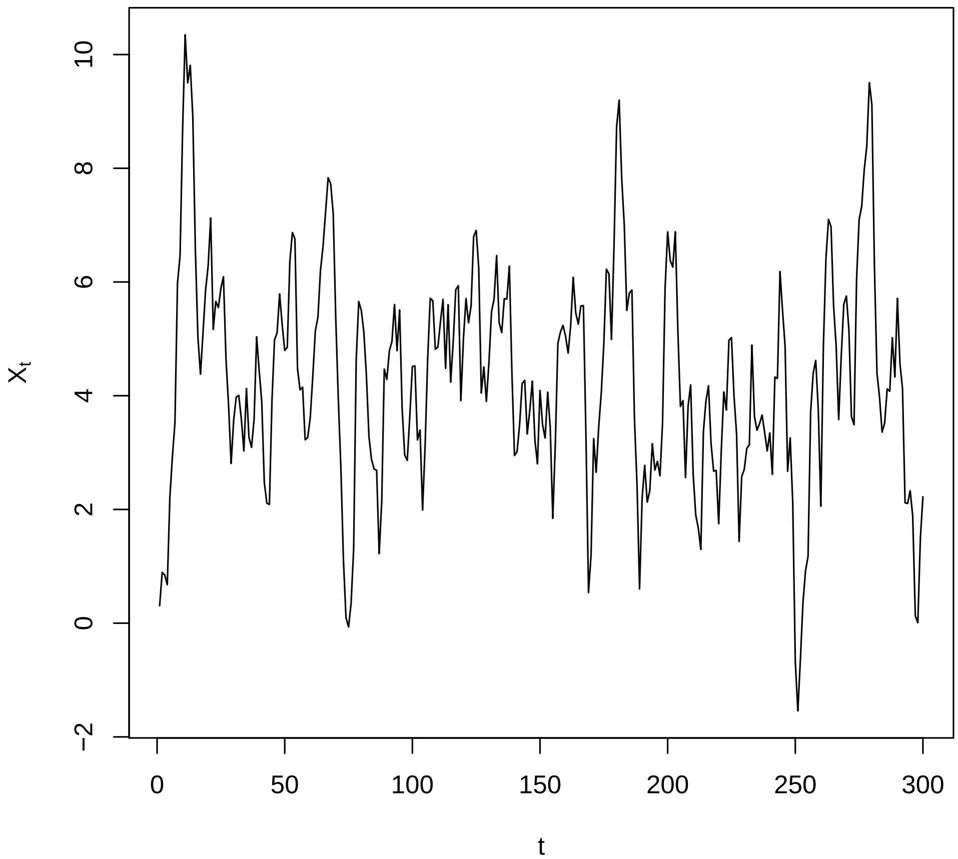


FIGURE 2 – Simulation du processus $(X_t)$.

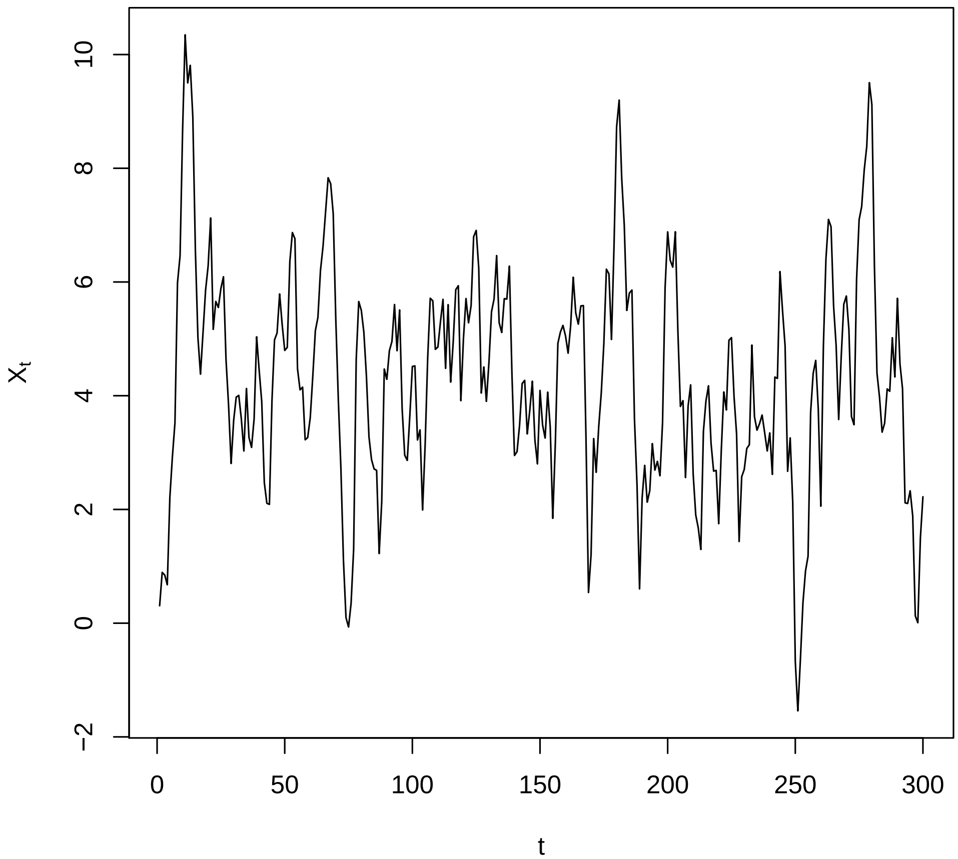


FIGURE 3 – Simulation du processus $(X_t)$.

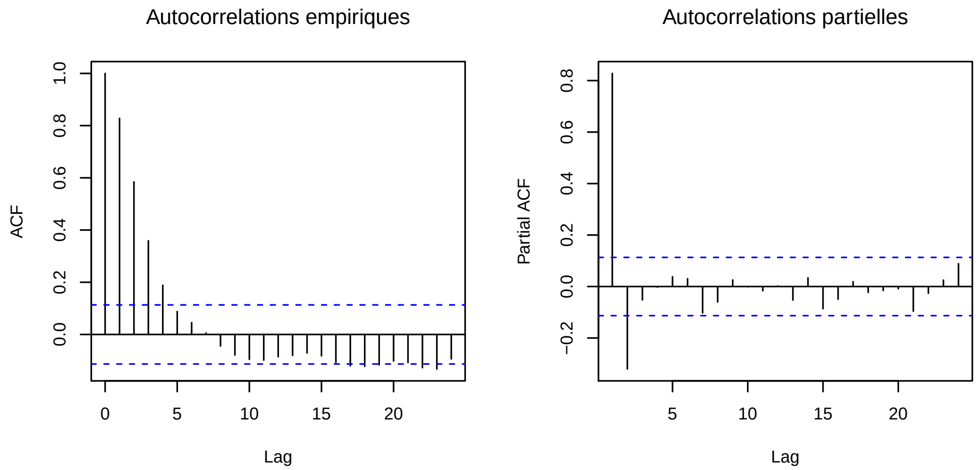


FIGURE 4 – Autocorrélogramme et autocorrélogramme partiel empiriques.

(a) un AR(1)
(b) un AR(2)
(c) un MA(5)
(d) un ARMA(3,5)

Réponse : (b), un AR(2) car les autocorrélations partielles s'annulent à partir du retard 3.

7) A la vue des autocorrélogrammes de la Figure 5, quel modèle semble le plus adapté ?
   (a) un AR(1)
   (b) un AR(2)
   (c) une MA(2)
   (d) un ARMA(3,5)

   Réponse : (b), un AR(2) car les autocorrélations partielles s'annulent à partir du retard 3.

7) A la vue des autocorrélogrammes de la Figure 6, quel modèle semble le plus adapté ?
   (a) un AR(2)
   (b) un AR(3)
   (c) une MA(10)
   (d) un ARMA(3,10)

   Réponse : (b), un AR(3) car les autocorrélations partielles s'annulent à partir du retard 4.

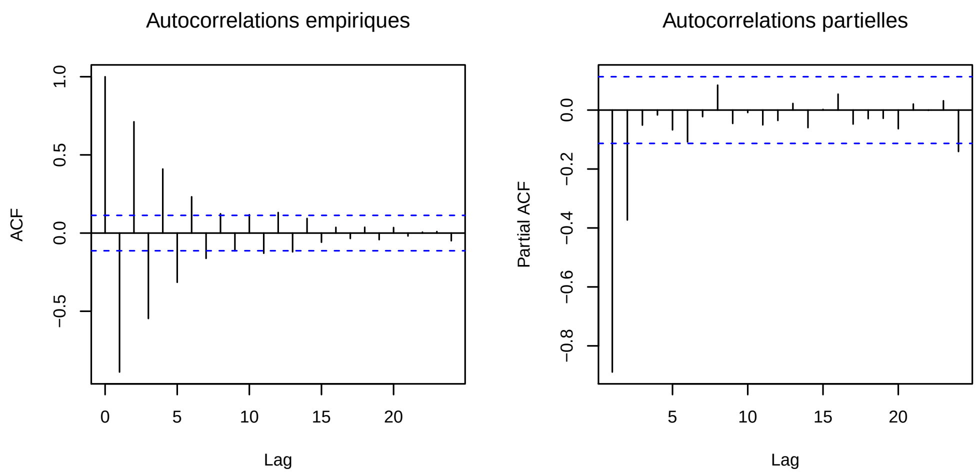


FIGURE 5 – Autocorrélogramme et autocorrélogramme partiel empiriques.

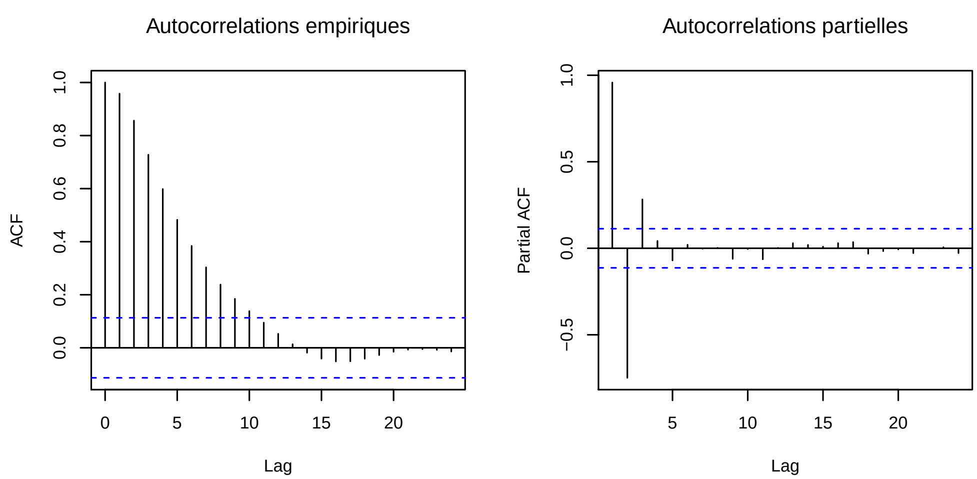


FIGURE 6 – Autocorrélogramme et autocorrélogramme partiel empiriques.

8) Soit $\epsilon_t = (\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}, \epsilon_{3t})'$ un bruit blanc fort et $(X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})'$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_{1t} & = & \frac{1}{2}X_{3,t-1} + \epsilon_{1t} \\ X_{2t} & = & X_{1t} + \epsilon_{2t} \\ X_{3t} & = & X_{3,\, t-1} + \epsilon_{3t}. \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un système

(a) VAR(3) stationnaire

(b) cointégré avec rang de cointégration 1 (la seconde équation étant une relation de cointégration)

(c) cointégré avec $X_{1t} - \frac{1}{2}X_{3t} \sim I(0)$ et $X_{2t} - \frac{1}{2}X_{3t} \sim I(0)$

(d) "spurious" VECM

Réponse : (c), le système est I(1) car la troisième équation est une marche aléatoire, $X_{1t} - \frac{1}{2}X_{3t} = \epsilon_{1t} - \frac{1}{2}\epsilon_{3t}$ et $X_{2t} - \frac{1}{2}X_{3t} = \epsilon_{1t} + \epsilon_{2t} - \frac{1}{2}\epsilon_{3t}$ sont bien des relations de cointégration.

8) Soit $(\epsilon_t)_{t\geq 1}$, où $\epsilon_t = (\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}, \epsilon_{3t})'$, un bruit blanc fort et $(X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})'$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_{1t} & = & X_{2t} + \epsilon_{1t} \\ X_{2t} & = & \frac{1}{2}X_{3,t-1} + \epsilon_{2t} \\ X_{3t} & = & \sum_{i=1}^{t} \epsilon_{3i} \end{array} \right.$$

pour $t \geq 1$. Il s'agit d'un système

(a) VAR(3) stationnaire

(b) cointégré avec rang de cointégration 1 (la première équation étant une relation de cointégration)

(c) cointégré avec $X_{1t} - \frac{1}{2}X_{3t} \sim I(0)$ et $X_{2t} - \frac{1}{2}X_{3t} \sim I(0)$

(d) "spurious" VECM

Réponse : (c), le système est I(1) car la troisième équation est une marche aléatoire, $X_{2t} - \frac{1}{2}X_{3t} = X_{2t} - \frac{1}{2}X_{3,t-1} - \frac{1}{2}\epsilon_{3t} = \epsilon_{2t} - \frac{1}{2}\epsilon_{3t}$ et $X_{1t} - \frac{1}{2}X_{3t} = \epsilon_{1t} + \epsilon_{2t} - \frac{1}{2}\epsilon_{3t}$ sont bien des relations de cointégration.

8) Soit $(\epsilon_t)_{t\geq 1}$, où $\epsilon_t = (\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}, \epsilon_{3t})'$, un bruit blanc fort et $(X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})'$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X_{1t} & = & X_{2t} + \epsilon_{1t} \\ X_{2t} & = & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t-1} \epsilon_{3i} + \epsilon_{2t} \\ X_{3t} & = & \sum_{i=1}^{t} \epsilon_{3i} \end{array} \right.$$

pour $t \geq 1$. Il s'agit d'un système

(a) VAR(3) stationnaire

(b) cointégré avec rang de cointégration 1 (la première équation étant une relation de cointégration)

(c) cointégré avec $X_{1t} - X_{2t} \sim I(0)$ et $X_{3t} - 2X_{1t} \sim I(0)$

(d) "spurious" VECM

Réponse : (c), le système est I(1) car la troisième équation est une marche aléatoire,

$$X_{3t} - 2X_{1t} = \sum_{i=1}^{t} \epsilon_{3i} - \sum_{i=1}^{t-1} \epsilon_{3i} - 2\epsilon_{1t} - 2\epsilon_{2t} = \epsilon_{3t} - 2\epsilon_{1t} - 2\epsilon_{2t}$$

est bien une seconde relation de cointégration.

9) On veut expliquer une variable $y_t$ à l'aide d'un vecteur $X_t$ de variables explicatives, mais les données sont indicées par le temps ($Z_t = (y_t, X_t')'$ est une série temporelle). On décide quand même de faire une régression de $y_t$ sur $X_t$

(a) il ne faut jamais faire ce type régression fallacieuse (de spurious régression)

(b) je remplace cette obsolète régression linéaire par un algorithme moderne de deep learning, et ça marche

(c) cela peut avoir du sens, sous certaines conditions, et ne pas fonctionner sous d'autres conditions

(d) cela n'a pas de sens, il faut toujours un modèle de séries temporelles pour $Z_t$

Réponse : (c) ca peut marcher dans un cadre stationnaire ou pour des séries cointégrées, mais les $t$-tests sont faux

9) Soit $Z_t = (y_t, X_t')'$ une série temporelle, où $y_t$ est une variable aléatoire réelle et $X_t$ est un vecteur de variables explicatives. On décide de régresser $y_t$ sur $X_t$

(a) si $y_t$ est I(1) et $X_t$ est I(0) alors ca ne peut pas marcher, ma régression est fallacieuse (spurious)

(b) je remplace cette obsolète régression linéaire par un algorithme moderne de deep learning, et ça marche

(c) cela ne peut jamais avoir de sens, il faut impérativement mettre un modèle VECM sur $Z_t$

(d) si la série $Z_t$ est cointégrée la régression ne permet pas d'estimer de relation de long terme

Réponse : (a) dans ce cas on ne va arriver à rien expliquer car la relation qui lie $y_t$ aux composantes de $X_t$ ne peut pas être stable

9) Soit $Z_t = (y_t, X_t')'$ une série temporelle, où $y_t$ est une variable aléatoire réelle et $X_t$ est un vecteur de variables explicatives. On décide de régresser $y_t$ sur $X_t$

(a) si $Z_t$ est I(0) alors ça n'a pas de sens, ma régression est fallacieuse (spurious)

(b) je remplace cette obsolète régression linéaire par un algorithme de deep learning moderne, et ça marche

(c) si $Z_t$ est I(1) alors ca marche trop bien car les estimateur sont toujours super consistants, et c'est super

(d) si la série $Z_t$ est cointégrée, la régression approxime bien les relations de long terme

Réponse : (d) dans ce cas on estime effectivement les relations de long terme de façon super consistante

10) La figure 7 représente 4 trajectoires (a), (b), (c) et (d) qui, dans le désordre, correspondent aux processus suivants

$$\begin{aligned} X_t &= 0.8X_{t-1} + 1 + \epsilon_t \\ Y_t &= Y_{t-1} + 0.1 + \epsilon_t \\ Z_t &= 0.1t + \epsilon_t \\ W_t &= -0.8W_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

où $(\epsilon_t)$ est un bruit blanc Gaussien. Un test de Dickey-Fuller donne une p-valeur de 0.5037 pour la série (b) et une p-valeur de 0.01 pour la série (d).

Assortir les processus et les trajectoires.

(1) (a)$\mapsto X$, (b)$\mapsto Y$, (c)$\mapsto W$, (d)$\mapsto Z$

(2) (a)$\mapsto W$, (b)$\mapsto Y$, (c)$\mapsto X$, (d)$\mapsto Z$

(3) (a)$\mapsto W$, (b)$\mapsto Z$, (c)$\mapsto X$, (d)$\mapsto Y$

(4) (a)$\mapsto X$, (b)$\mapsto Z$, (c)$\mapsto W$, (d)$\mapsto Y$

Réponse : (2) les séries $Y$ et $Z$ contiennent des tendances déterministes et correspondent donc à (b) et (d). La série sans racine unité est (d), donc correspond à $Z$. La série (c) a une moyenne non nulle, donc correspond à $X$

10) La figure 8 représente 4 trajectoires (a), (b), (c) et (d) qui, dans le désordre, correspondent aux processus suivants

$$\begin{aligned} X_t &= 0.7X_{t-1} + 2 + \epsilon_t \\ Y_t &= Y_{t-1} + 0.05 + \epsilon_t \\ Z_t &= 0.05t + \epsilon_t \\ W_t &= -0.7W_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

où $(\epsilon_t)$ est un bruit blanc Gaussien. Un test de Dickey-Fuller donne une p-valeur de 0.2445 pour la série (a) et une p-valeur de 0.01 pour la série (c).

Assortir les processus et les trajectoires.

(1) (a)$\mapsto Z$, (b)$\mapsto X$, (c)$\mapsto Y$, (d)$\mapsto W$

(2) (a)$\mapsto Y$, (b)$\mapsto W$, (c)$\mapsto Z$, (d)$\mapsto X$

(3) (a)$\mapsto Z$, (b)$\mapsto W$, (c)$\mapsto Y$, (d)$\mapsto X$

(4) (a)$\mapsto Y$, (b)$\mapsto X$, (c)$\mapsto Z$, (d)$\mapsto W$

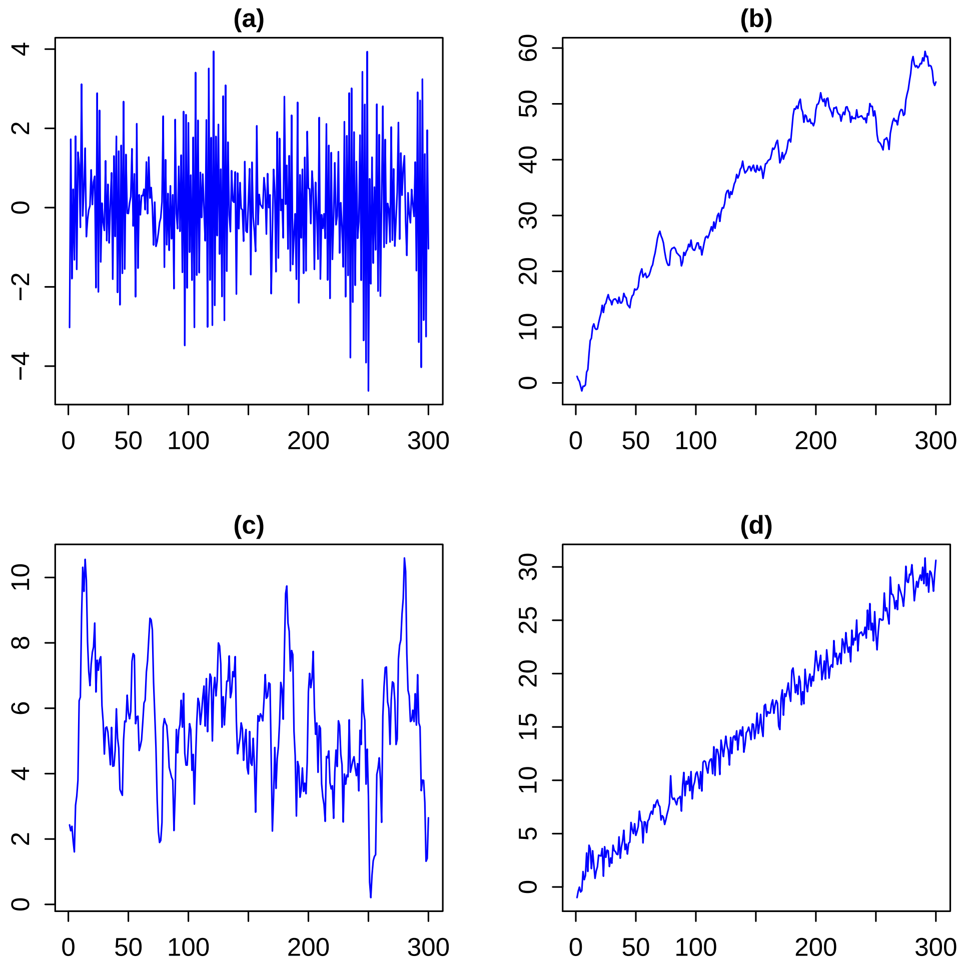


FIGURE 7 – Simulations de 4 processus.

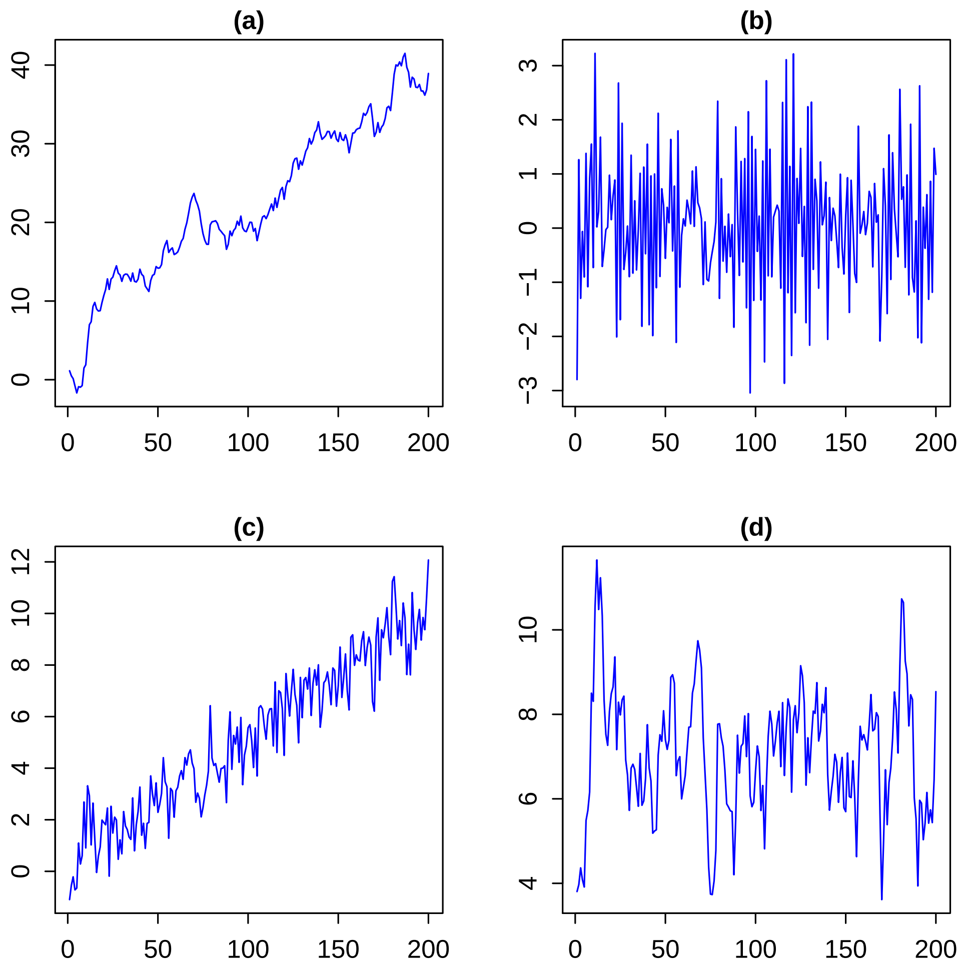


FIGURE 8 – Simulations de 4 processus.

Réponse : (2) les séries $Y$ et $Z$ contiennent des tendances déterministes et correspondent donc à (a) et (c). La série sans racine unité est (c), donc correspond à $Z$. La série (d) a une moyenne non nulle, donc correspond à $X$

10) La figure 9 représente 4 trajectoires (a), (b), (c) et (d) qui, dans le désordre, correspondent aux processus suivants

$$\begin{aligned} X_t &= 0.7X_{t-1} + 2 + \epsilon_t \\ Y_t &= Y_{t-1} + 0.05 + \epsilon_t \\ Z_t &= 0.05t + \epsilon_t \\ W_t &= -0.7W_{t-1} + \epsilon_t \end{aligned}$$

où $(\epsilon_t)$ est un bruit blanc Gaussien. Un test de Dickey-Fuller donne une p-valeur de 0.2445 pour la série (b) et une p-valeur de 0.01 pour la série (c).

Assortir les processus et les trajectoires.

(1) (a)$\mapsto W$, (b)$\mapsto Z$, (c)$\mapsto Y$, (d)$\mapsto X$

(2) (a)$\mapsto X$, (b)$\mapsto Z$, (c)$\mapsto Y$, (d)$\mapsto W$

(3) (a)$\mapsto W$, (b)$\mapsto Y$, (c)$\mapsto Z$, (d)$\mapsto X$

(4) (a)$\mapsto X$, (b)$\mapsto Y$, (c)$\mapsto Z$, (d)$\mapsto W$

Réponse : (3) les séries $Y$ et $Z$ contiennent des tendances déterministes et correspondent donc à (b) et (c). La série sans racine unité est (c), donc correspond à $Z$. La série (d) a une moyenne non nulle, donc correspond à $X$

— Questions deux étoiles

11) Soit $(\epsilon_t)$ un bruit blanc. L'équation

$$X_t - 1.6X_{t-1} + 0.64X_{t-2} = \epsilon_t + 2\epsilon_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

(a) admet une solution stationnaire causale et inversible

(b) n'admet pas de solution stationnaire

(c) admet une solution stationnaire causale mais non inversible

(d) admet une solution stationnaire non causale

Réponse : (c) car le polynôme AR admet la racine double 5/4, qui est bien à l'extérieur du cercle unité, et le polynôme MA a la racine -1/2 à l'intérieur du cercle unité

11) Soit $(\epsilon_t)$ un bruits blanc. L'équation

$$X_t + \frac{1}{4}X_{t-2} = \epsilon_t + \frac{1}{4}\epsilon_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

(a) admet une solution stationnaire causale et inversible

(b) n'admet pas de solution stationnaire

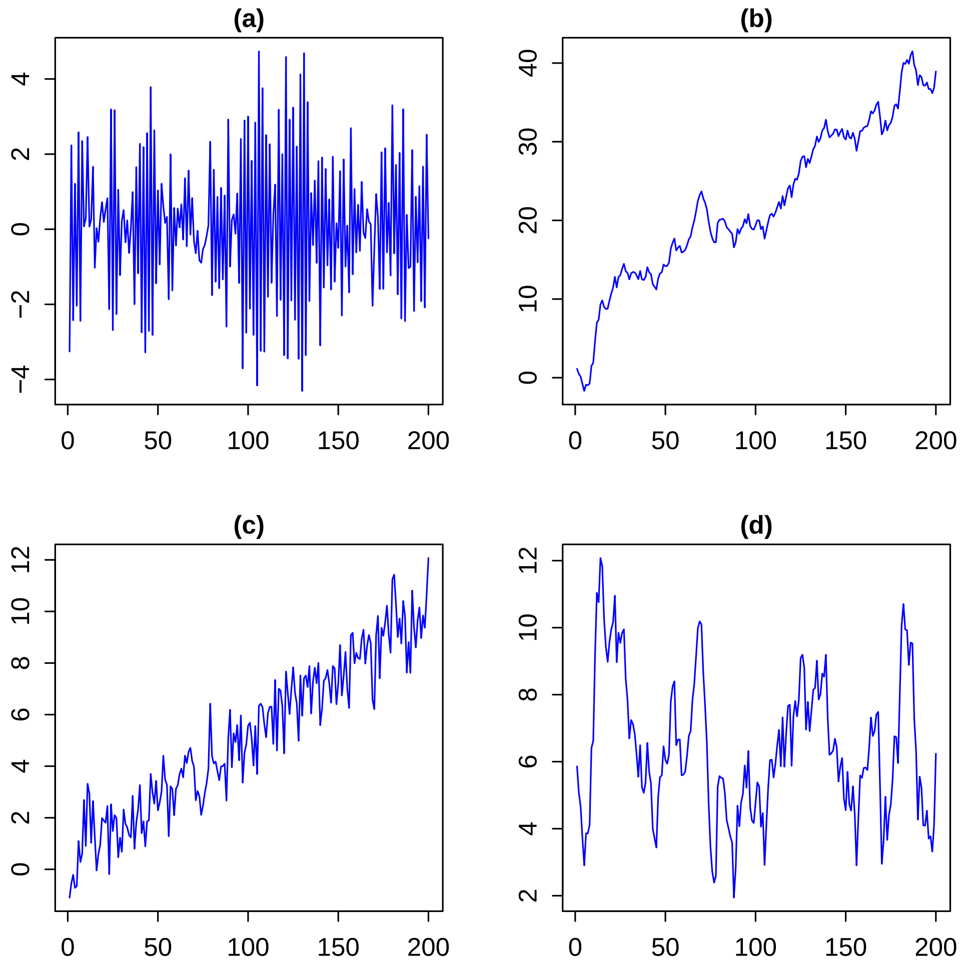


Figure 9 – Simulations de 4 processus.

(c) admet une solution stationnaire causale mais non inversible

(d) admet comme solution un bruit blanc

Réponse : (a) car le polynôme AR admet les racines 2 et -2, qui sont bien à l'extérieur du cercle unité, et le polynôme MA a la racine -4 qui est aussi à l'extérieur du cercle unité

11) Soit $(\epsilon_t)$ un bruits blanc. L'équation

$$X_t - \frac{3}{2}X_{t-1} = \epsilon_t - \frac{1}{2}\epsilon_{t-1} - \frac{1}{2}X_{t-2}, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

(a) admet une solution stationnaire causale et inversible

(b) n'admet pas de solution stationnaire

(c) admet une solution stationnaire causale mais non inversible

(d) admet comme solution un bruit blanc

Réponse : (b) car le polynôme AR admet la racine 1 qui est sur le cercle unité

12) Soit $(\epsilon_t)$ et $(\eta_t)$ deux bruits blancs forts indépendants. Pour $t \geq 2$, on pose

$$X_t = 2\sum_{i=1}^{t} \epsilon_i, \qquad Y_t = \eta_t + \sum_{i=1}^{t-1} \epsilon_i, \qquad Z_t = \sum_{i=1}^{t} \eta_i.$$

A partir de $n$ observations de ces séries, sous les conditions de régularité usuelles, soit $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{c}$ les estimateurs MCO des paramètres $a$, $b$ et $c$ dans les modèles de régressions

$$X_t = aY_t + u_t, \quad X_t = bZ_t + u_t, \quad \nabla Y_t = c\nabla Z_t + u_t,$$

où $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$. Indiquer le comportement de $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{c}$.

(a) $\hat{a} \to 2$ et il est super-consistant, la deuxième régression est fallacieuse et $\hat{b}$ ne converge pas, $\hat{c} \to 0$ car il n'y a aucun lien entre les variables de la troisième régression

(b) $\hat{a} \to 1/2$, $\hat{b}$ ne converge pas car la régression est fallacieuse et $\hat{c} \to 1$ a la vitesse usuelle $\sqrt{n}$

(c) $\hat{a} \to 2$ et il est super-consistant, $\hat{b}$ ne converge pas car la régression est fallacieuse, et $\hat{c} \to 1$ à la vitesse usuelle $\sqrt{n}$

(d) aucun de ces estimateurs ne se comporte bien car ces 3 régressions sont fallacieuses

Réponse : (c) on note en particulier que

$$c = \frac{\mathrm{Cov}(\nabla Y_t, \nabla Z_t)}{\mathrm{Var}\nabla Z_t} = \frac{\mathrm{Cov}(\epsilon_{t-1} + \eta_t - \eta_{t-1}, \eta_t)}{\mathrm{Var}(\eta_t)} = 1.$$

12) Soit $(\epsilon_t)$ et $(\eta_t)$ deux bruits blancs forts indépendants. Pour $t \geq 2$, on pose

$$X_t = \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i, \qquad Y_t = 2\sum_{i=1}^{t-1} \epsilon_i + \eta_t, \qquad Z_t = t + \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i, \qquad W_t = 2t + \sum_{i=1}^{t} \eta_i.$$

A partir de $n$ observations de ces séries, sous les conditions de régularité usuelles, soit $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ et $\hat{d}$ les estimateurs MCO des paramètres $a$, $b$, $c$ et $d$ dans les modèles de régressions

$$X_t = aY_t + u_t, \quad Z_t = bW_t + u_t, \quad \nabla Z_t = c\nabla W_t + d + u_t,$$

où $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$. Indiquer le comportement de $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{c}$.

(a) $\hat{a} \to 1/2$ et il est super-consistant, $b := \mathrm{Cov}(Z_t, W_t)/\mathrm{Var}(W_t) = 0$ mais la régression est fallacieuse et $\hat{b}$ converge vers $1/2$, $(\hat{c}, \hat{d}) \to (0, 1)$ à la vitesse usuelle car les variables de la régression sont I(0)

(b) $\hat{a} \to 1/2$ et il est super-consistant, les deux autres régressions sont fallacieuses donc il est impossible de donner un sens aux coefficients et aux estimateurs

(c) les trois régressions sont fallacieuses donc il est impossible de donner un sens aux coefficients et aux estimateurs

(d) $\hat{a} \to 1/2$, $\hat{b}$ converge vers 0 car les variables de la régression sont indépendantes et donc non corrélées, $(\hat{c}, \hat{d}) \to (0, 1)$ car $\nabla Z_t = \epsilon_t + 1 \simeq 0\nabla W_t + 1$.

Réponse : (a) on note en particulier que

$$c = \frac{\mathrm{Cov}(\nabla Z_t, \nabla W_t)}{\mathrm{Var}\nabla W_t} = \frac{\mathrm{Cov}(1 + \epsilon_t, 2 + \eta_t)}{\mathrm{Var}(2 + \eta_t)} = 0.$$

12) Soit $(\epsilon_t)$ et $(\eta_t)$ deux bruits blancs forts indépendants. Pour $t \geq 2$, on pose

$$X_t = \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i, \qquad Y_t = 2\sum_{i=1}^{t-1} \epsilon_i + \eta_t, \qquad Z_t = t + \sum_{i=1}^{t} \epsilon_i, \qquad W_t = 2t + \sum_{i=1}^{t} \eta_i.$$

A partir de $n$ observations de ces séries, sous les conditions de régularité usuelles, soit $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ et $\hat{d}$ les estimateurs MCO des paramètres $a$, $b$, $c$ et $d$ dans les modèles de régressions

$$X_t = aY_t + u_t, \quad Z_t = bW_t + u_t, \quad \nabla X_t = c\nabla Z_t + d + u_t,$$

où $\nabla X_t = X_t - X_{t-1}$. Indiquer le comportement de $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{c}$.

(a) $\hat{a} \to 1/2$ et il est super-consistant, $b := \mathrm{Cov}(Z_t, W_t)/\mathrm{Var}(W_t) = 0$ mais la régression est fallacieuse et $\hat{b}$ converge vers $1/2$, $(\hat{c}, \hat{d}) \to (0, -1)$ à la vitesse usuelle car les variables de la régression sont I(0)

(b) $\hat{a} \to 1/2$ et il est super-consistant, les deux autres régressions sont fallacieuses donc il est impossible de donner un sens aux coefficients et aux estimateurs

(c) les trois régressions sont fallacieuses donc il est impossible de donner un sens aux coefficients et aux estimateurs

(d) $\hat{a} \to 1/2$ et il est super-consistant, $b := \mathrm{Cov}(Z_t, W_t)/\mathrm{Var}(W_t) = 0$ mais la régression est fallacieuse et $\hat{b}$ converge vers $1/2$, $(\hat{c}, \hat{d}) = (0, -1)$ car le système est dégénéré

Réponse : (d) on note en particulier que $\nabla X_t = \epsilon_t$ et $\nabla Z_t = \epsilon_t + 1$ et donc $\nabla X_t = \nabla Z_t - 1$ avec probabilité 1 (donc $(\hat{c}, \hat{d}) = (0, -1)$ exactement dès que l'échantillon contient deux $\epsilon_t$ différents).

13) Soit $\rho_X$ la fonction d'autocorrélation et $r_X$ la fonction d'autocorrélation partielle d'un processus $(X_t)$ stationnaire au second ordre.
Si $\rho_X(2) \neq 0$, $r_X(2) \neq 0$ et $\rho_X(h) = 0$, $r_X(h) = 0$ pour tout $h > 2$, alors

(a) $X_t$ suit un AR(2)

(b) $X_t$ suit un ARMA(2,2)

(c) $X_t$ suit une MA(2)

(d) c'est impossible

Réponse : (d) on ne peut avoir à la fois un AR(2) et un MA(2) (avec des ordres minimaux).

13) Soit $\rho_X$ la fonction d'autocorrélation et $r_X$ la fonction d'autocorrélation partielle d'un processus $(X_t)$ stationnaire au second ordre.
Si $\rho_X(h) - \frac{3}{2}\rho_X(h-1) + \frac{1}{2}\rho_X(h-2) = 0$ pour tout $h > 2$, alors

(a) $X_t$ suit un AR(2)

(b) $X_t$ suit un ARMA(2,2)

(c) $X_t$ suit une MA(2)

(d) c'est impossible

Réponse : (d) on aurait un ARMA(2,2) avec une racine unité dans le polynôme AR.

13) Soit $\rho_X$ la fonction d'autocorrélation et $r_X$ la fonction d'autocorrélation partielle d'un processus $(X_t)$ stationnaire au second ordre.
Si $\rho_X(h) = 1/h^2$ pour tout $h \geq 1$, $r_X(h) = 0$ pour tout $h > 3$.

(a) $X_t$ suit un AR(2)

(b) $X_t$ suit un ARMA(2,2)

(c) $X_t$ suit une MA(2)

(d) c'est impossible

Réponse : (d) les autocorrélations d'un ARMA, et donc d'un AR(2), décroissent à vitesse exponentielle.

— Questions trois étoiles

14) Soit $(\epsilon_t)$ un bruit blanc fort de variance non nulle, $a$, $b$ et $c$ des coefficients. On pose

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} a^i \epsilon_{t-i} + b\epsilon_1 + c\epsilon_t.$$

Le processus $(X_t)$ est

(a) stationnaire et ergodique si et seulement si $|a| < 1$ et $b = 0$

(b) stationnaire et ergodique si et seulement si $|a| < 1$, $b = 0$ et $c = 0$

(c) stationnaire dès que $|a| < 1$

(d) tel que $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t \to 0$ quand $n \to \infty$ dès que $|a| < 1$, les bruits étant centrés.

Réponse : (a) si $|a| < 1$ et $b = 0$, il est stationnaire ergodique par le théorème ergodique. Si $b \neq 0$, le processus n'est pas stationnaire ergodique (si $|a| < 1$, la moyenne empirique $\overline{X}_n$ converge vers $b\epsilon_1$). Si $|a| \geq 1$, la série ne converge pas.

14) Soit $(\epsilon_t)$ un bruit blanc fort de variance non nulle, $a$, $b$ et $c$ des coefficients. Pour $t \geq 1$, on pose

$$X_t = \epsilon_t + a^t \epsilon_{t-1} + b\epsilon_1 + c\epsilon_t.$$

Le processus $(X_t)_{t \geq 1}$ est

(a) stationnaire et ergodique si et seulement si $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$

(b) stationnaire et ergodique si et seulement si $a = 0$ et $b = 0$

(c) stationnaire si $a = 0$

(d) tel que $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t \to 0$ quand $n \to \infty$, les bruits étant centrés.

Réponse : (b) si $a = 0$ et $b = 0$, $X_t = (1+c)\epsilon_t$ est stationnaire ergodique. Si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, le processus n'est pas stationnaire ($\mathrm{Var} X_t$ dépend de $t$).

14) Soit $(\epsilon_t)$ un bruit blanc fort de variance non nulle, $a$, $b$ et $c$ des coefficients. Pour $t \geq 1$, on pose

$$X_t = \epsilon_1 + a^t \epsilon_{t-1} + b\epsilon_1 + c\epsilon_t.$$

Le processus $(X_t)_{t \geq 1}$ est

(a) stationnaire et ergodique si et seulement si $a = 0$, $b = 0$ et $c = 0$

(b) stationnaire et ergodique si et seulement si $a = 0$ et $c = 0$

(c) stationnaire mais n'est pas ergodique si $a = 0$ et $c = 0$

(d) tel que $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t \to 0$ quand $n \to \infty$, les bruits étant centrés.

Réponse : (c) si $a = 0$ et $c = 0$, $X_t = (1+b)\epsilon_1$ est stationnaire mais n'est pas ergodique.

15) On observe $X_1, \ldots, X_n$ réalisation d'un processus strictement stationnaire ergodique ayant des moments d'ordre 2. Soit les deux prédicteurs linéaires de $X_{n+1}$ :

$$\hat{X}_{n+1}^{(1)} = \hat{\mu} \quad \text{et} \quad \hat{X}_{n+1}^{(2)} = \hat{\mu} + \hat{\rho}(X_n - \hat{\mu})$$

où $\hat{\rho}$ et $\hat{\mu}$ sont des estimateurs convergents de $\rho = \rho_X(1)$ et $\mu = EX_t$ (par exemple on peut prendre les estimateurs empiriques). Pour $n$ grand, les erreurs quadratiques de prédiction sont approximativement

$$\text{MSE}_1 = E(X_{n+1} - \mu)^2, \qquad \text{MSE}_2 = E\left\{X_{n+1} - \mu - \rho(X_n - \mu)\right\}^2.$$

Il est évident que $\text{MSE}_1 \geq \text{MSE}_2$. Calculer le ratio $\text{MSE}_2/\text{MSE}_1$ et sa valeur minimale lorsque $X_t$ suit le modèle MA

$$X_t = \epsilon_t + b\epsilon_{t-1} + c.$$

(a) la valeur minimale du ratio est 1/3

(b) la valeur minimale du ratio est 1/2

(c) la valeur minimale du ratio est 3/4

(d) aucune des autres réponses n'est correcte

Réponse : (c) on a

$$\text{MSE}_2 = \gamma_X(0) + \rho^2\gamma_X(0) - 2\rho\gamma_X(1) = \text{MSE}_1(1 - \rho^2).$$

Avec ce modèle $\rho = b/(1+b^2)$, donc le ratio est minimal quand $\rho^2$ est maximal, c'est-à-dire quand $b = 1$.

15) On observe $X_1, \ldots, X_n$ réalisation d'un processus strictement stationnaire ergodique ayant des moments d'ordre 2. Soit les deux prédicteurs linéaires de $X_{n+1}$ :

$$\hat{X}_{n+1}^{(1)} = \hat{\mu} \quad \text{et} \quad \hat{X}_{n+1}^{(2)} = \hat{\mu} + \hat{\rho}(X_n - \hat{\mu})$$

où $\hat{\rho}$ et $\hat{\mu}$ sont des estimateurs convergents de $\rho = \rho_X(1)$ et $\mu = EX_t$ (par exemple on peut prendre les estimateurs empiriques). Pour $n$ grand, les erreurs quadratiques de prédiction sont approximativement

$$\text{MSE}_1 = E(X_{n+1} - \mu)^2, \qquad \text{MSE}_2 = E\left\{X_{n+1} - \mu - \rho(X_n - \mu)\right\}^2.$$

Il est évident que $\text{MSE}_1 \geq \text{MSE}_2$. Calculer le ratio $\text{MSE}_2/\text{MSE}_1$ et sa valeur minimale lorsque $X_t$ suit le modèle

$$X_t = a\epsilon_t^2\epsilon_{t-1}^2 + b$$

où $a \neq 0$ et les variables $\epsilon_t$ sont indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

(a) la valeur minimale du ratio est 15/16

(b) la valeur minimale du ratio est 1/2

(c) la valeur minimale du ratio est 3/4

(d) aucune des autres réponses n'est correcte

Réponse : (a) on a

$$\mathrm{MSE}_2 = \gamma_X(0) + \rho^2\gamma_X(0) - 2\rho\gamma_X(1) = \mathrm{MSE}_1(1-\rho^2).$$

Avec ce modèle $\gamma_X(0) = 8a^2$, $\gamma_X(1) = 2a^2$, $\rho = 1/4$, donc le ratio est constant et vaut 15/16.

15) On observe $X_1, \ldots, X_n$ réalisation d'un processus strictement stationnaire ergodique ayant des moments d'ordre 2. Soit les deux prédicteurs linéaires de $X_{n+1}$ :

$$\hat{X}^{(1)}_{n+1} = \hat{\mu} \quad \text{et} \quad \hat{X}^{(2)}_{n+1} = \hat{\mu} + \hat{\rho}(X_n - \hat{\mu})$$

où $\hat{\rho}$ et $\hat{\mu}$ sont des estimateurs convergents de $\rho = \rho_X(1)$ et $\mu = EX_t$ (par exemple on peut prendre les estimateurs empiriques). Pour $n$ grand, les erreurs quadratiques de prédiction sont approximativement

$$\mathrm{MSE}_1 = E(X_{n+1} - \mu)^2, \qquad \mathrm{MSE}_2 = E\left\{X_{n+1} - \mu - \rho(X_n - \mu)\right\}^2.$$

Il est évident que $\mathrm{MSE}_1 \geq \mathrm{MSE}_2$. Calculer le ratio $\mathrm{MSE}_2/\mathrm{MSE}_1$ et sa valeur minimale lorsque $X_t$ suit le modèle

$$X_t = aI_tI_{t-1} + b$$

où $a \neq 0$ et les variables $I_t$ sont indépendantes et de loi de Bernoulli de paramètre $p$.

(a) la valeur minimale du ratio est 15/16

(b) la valeur minimale du ratio est 1/2

(c) la valeur minimale du ratio est 3/4

(d) aucune des autres réponses n'est correcte

Réponse : (c) on a

$$\mathrm{MSE}_2 = \gamma_X(0) + \rho^2\gamma_X(0) - 2\rho\gamma_X(1) = \mathrm{MSE}_1(1-\rho^2).$$

Avec ce modèle $\gamma_X(0) = a^2p^2(1-p^2)$, $\gamma_X(1) = a^2p^2(p-1)$, $\rho^2 = 1/(1+p)^2$, qui vaut au maximum 1/4. Le ratio est donc minoré par 3/4.