ENSAE 2A

Séries temporelles linéaires

TD n°1

Pour toute remarque, contacter jerome.trinh@ensae.fr

Exercice 1 :

Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc. Dans chacune des questions suivantes, on définit à partir de ce bruit blanc une suite (X_t) avec $t \in \mathbb{Z}$ ou $t \in \mathbb{N}$. Selon que le bruit blanc est fort ou faible, discuter la stationnarité de (X_t) au sens strict et au second ordre, ainsi que l'ergodicité. Donner la moyenne et l'autocovariance de (X_t), lorsqu'elles existent.

Q1. $\forall t \in \mathbb{Z},\ \ X_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$

Si $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ (ci-après (ϵ_t)) est un bruit blanc fort, i.e. (ϵ_t) iid $(0, \sigma^2)$, alors (ϵ_t) est strictement stationnaire et ergodique[a]. De plus, (X_t) est une transformation fixe de (ϵ_t) donc $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ (ci-après (X_t)) est également strictement stationnaire et ergodique (théorème ergodique[b]).

- $\mathsf{E}(\epsilon_t) = 0\ \forall t \Rightarrow \mathsf{E}(X_t) = 0$ donc (X_t) est centré
- $\mathsf{V}(X_t) = \mathsf{V}(\epsilon_t) + \mathsf{V}(\epsilon_{t-1}) - 2\mathsf{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) = 2\sigma^2 < \infty$ car $\mathsf{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t-1}) = 0$ donc (X_t), déjà strictement stationnaire, est aussi stationnaire au second ordre
- $\mathsf{Cov}(X_t, X_{t-1}) = \mathsf{Cov}(\epsilon_t - \epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1} - \epsilon_{t-2}) = -\mathsf{Cov}(\epsilon_{t-1}, \epsilon_{t-1}) = -\sigma^2$
  $\mathsf{Cov}(X_t, X_{t-h}) = 0,\ \forall\ h \geq 2$

Si (ϵ_t) est un bruit blanc faible, c'est-à-dire $\mathsf{E}(\epsilon_t) = 0$ et $\mathsf{V}(\epsilon_t) = \sigma^2\ \forall t$, $\mathsf{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_s) = 0\ \forall t \neq s$, les calculs de moyenne et de variance précédents sont valables, ce qui montre que (X_t) est stationnaire au second ordre.

a. ch1 slide 41 : Une suite stationnaire est ergodique si la moyenne des valeurs d'une trajectoire est égale à la valeur moyenne d'une variable sur l'ensemble des trajectoires (cas général de la loi des grands nombres)

b. ch1 slides 43 et 44 : toute transformation fixe d'une suite stationnaire ergodique reste stationnaire et ergodique

Q2. $\forall t \in \mathbb{Z},\ \ X_t = \epsilon_t\epsilon_{t-1}$

Si (ϵ_t) est un bruit blanc fort, donc strictement stationnaire et ergodique, alors (X_t) est aussi strictement stationnaire et ergodique comme transformation fixe de (ϵ_t) (théorème ergodique).

- $\mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}(\epsilon_t\epsilon_{t-1}) = \mathsf{E}(\epsilon_t)\mathsf{E}(\epsilon_{t-1})$ car ϵ_t et ϵ_{t-1} sont non-corrélés (car indépendants), donc $\mathsf{E}(X_t) = 0\ \forall t$.
- $\mathsf{V}(X_t) = \mathsf{E}(\epsilon_t^2\epsilon_{t-1}^2) - \mathsf{E}(\epsilon_t\epsilon_{t-1})^2 = \mathsf{E}(\epsilon_t^2\epsilon_{t-1}^2) = \mathsf{E}(\epsilon_t^2)\mathsf{E}(\epsilon_{t-1}^2)$ car ϵ_t et ϵ_{t-1} sont indépendants, donc $\mathsf{V}(X_t) = (\sigma^2)^2 < \infty$.
- $\mathsf{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathsf{E}[(\epsilon_t\epsilon_{t-1} - \mathsf{E}(\epsilon_t\epsilon_{t-1}))(\epsilon_{t+h}\epsilon_{t+h-1} - \mathsf{E}(\epsilon_{t+h}\epsilon_{t+h-1}))] = \mathsf{E}(\epsilon_t\epsilon_{t-1}\epsilon_{t+h}\epsilon_{t+h-1})$ donc
  $\mathsf{Cov}(X_t, X_{t+h}) = 0\ \forall h \neq 0$ car ϵ_t et ϵ_{t+h} sont non-corrélés (car indépendants) $\forall h \neq 0$

(X_t) est donc également stationnaire au second ordre.

Si (ϵ_t) est un bruit blanc faible, donc ϵ_t et ϵ_{t-1} sont non corrélés mais pas indépendants, alors on ne peut rien dire car on peut définir un bruit blanc faible (ϵ_t) tel que $\mathsf{V}(X_t)$ dépend de t[a] et donc tel que (X_t) n'est pas stationnaire.

a. par exemple $\epsilon_t = Y_t(\Pi_{k=0}^{t-1}|Y_k|)$ avec $\epsilon_0 = Y_0$ et $(Y_k)_{k\in\mathbb{Z}^+}$ iid $\mathcal{N}(0,1)$. Donc
$\mathsf{E}(\epsilon_t) = \mathsf{E}(Y_t)\Pi_{k=0}^{t-1}\mathsf{E}(|Y_k|) = 0$ par indépendance des Y_k
$\mathsf{V}\epsilon_t = \mathsf{E}(Y_t^2)\Pi_{k=0}^{t-1}\mathsf{E}(Y_k^2) = 1 < \infty$
$\mathsf{Cov}(\epsilon_t, \epsilon_{t+h}) = \mathsf{E}\left(Y_t(\Pi_{k=0}^{t-1}|Y_k|) \times Y_{t+h}(\Pi_{k=0}^{t+h-1}|Y_k|)\right) = \mathsf{E}(Y_t) \times \mathsf{E}(\dots) = 0$ toujours par indépendance des Y_k
Or $\mathsf{V}(X_t) = \mathsf{E}(\epsilon_t^2\epsilon_{t-1}^2) = \mathsf{E}\left(Y_t^2\Pi_{k=0}^{t-1}Y_k^4\right) = 1 \times 3^t = 3^t$ car $\mathsf{E}(Y_t^4) = 3$ (kurtosis d'une $\mathcal{N}(0,1)$). Donc la variance dépend de t et le processus n'est pas stationnaire.

Q3. X_0 indépendant de (ϵ_t) et $\forall t > 0, X_t - X_{t-1} = \epsilon_t$

(X_t) est une marche aléatoire, donc on a

- $\mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}(X_{t-1}) = \mathsf{E}(X_0)\ \ \forall t \in \mathbb{N}$
- $X_t = \sum_{i=1}^t \epsilon_i + X_0$ donc
  $\mathsf{V}(X_t) = \mathsf{V}\left(\sum_{i=1}^t \epsilon_i + X_0\right) = \sum_{i=1}^t \mathsf{V}(\epsilon_i) + \mathsf{V}(X_0) = t\sigma^2 + \mathsf{V}(X_0)$ dépend de t donc (X_t) n'est pas stationnaire.

Q4. *(Optionnel)* $\forall t \in \mathbb{N}, X_t = \sum_{i=0}^t \lambda^i(\epsilon_{t-i} - \epsilon_{t-i-1})$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$

On a pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$X_t = \sum_{i=0}^t \lambda^i \epsilon_{t-i} - \sum_{i=0}^t \lambda^i \epsilon_{t-i-1} = \epsilon_t + \sum_{i=1}^t \lambda^i \epsilon_{t-i} - \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i \epsilon_{t-i-1} + \lambda^t \epsilon_{-1} = \epsilon_t + \sum_{i=1}^t \lambda^i \epsilon_{t-i} - \sum_{i=1}^t \lambda^{i-1} \epsilon_{t-i} - \lambda^t \epsilon_{-1}$$

(ou utiliser la sommation d'Abel)
donc

$$X_t = \epsilon_t + \sum_{i=1}^t (\lambda^i - \lambda^{i-1})\epsilon_{t-i} - \lambda^t \epsilon_{-1}$$

On a donc, si (ϵ_t) est un bruit blanc :

- $\mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}(\epsilon_t) + \sum_{i=1}^t (\lambda^i - \lambda^{i-1})\mathsf{E}(\epsilon_{t-i}) - \lambda^t \mathsf{E}(\epsilon_{-1}) = 0$
- $\mathsf{V}(X_t) = \mathsf{V}(\epsilon_t) + \sum_{i=1}^t \mathsf{V}((\lambda^i - \lambda^{i-1})\epsilon_{t-i}) + \mathsf{V}(\lambda^t \epsilon_{-1})$ par non corrélation des (ϵ_t), donc

$$\begin{array}{rcl}
\mathsf{V}(X_t) & = & \sigma^2 \left(1 + \sum_{i=1}^t (\lambda^i - \lambda^{i-1})^2 + \lambda^{2t}\right) \\
 & = & \sigma^2 \left(1 + (\lambda - 1)^2 \sum_{i=1}^t (\lambda^{i-1})^2 + \lambda^{2t}\right) \\
 & = & \sigma^2 \left(1 + (\lambda - 1)^2 \sum_{i=0}^{t-1} \lambda^{2i} + \lambda^{2t}\right) \\
\text{si } \lambda = -1, \quad \mathsf{V}(X_t) & = & \sigma^2 (2 + 4t) \\
\text{si } \lambda = 1, \quad \mathsf{V}(X_t) & = & 2\sigma^2 \\
\text{si } |\lambda| \neq 1, \quad \mathsf{V}(X_t) & = & \sigma^2 \left(1 + (1-\lambda)^2 \dfrac{1 - \lambda^{2t}}{1 - \lambda^2} + \lambda^{2t}\right) \\
 & = & \sigma^2 \left(1 + \dfrac{(1-\lambda)(1-\lambda^{2t})}{1+\lambda} + \lambda^{2t}\right) \\
\mathsf{V}(X_t) & = & 2\sigma^2 \dfrac{1 + \lambda^{2t+1}}{1+\lambda}
\end{array}$$

finalement,

$$\mathsf{V}(X_t) = \begin{cases} \sigma^2(2+4t) & \text{si } \lambda = -1 \\ 2\sigma^2 & \text{si } \lambda = 1 \\ 2\sigma^2 \dfrac{1+\lambda^{2t+1}}{1+\lambda} & \text{si } |\lambda| \neq 1 \end{cases}$$

(X_t) est donc potentiellement stationnaire si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 0$.
Si $\lambda = 1$ alors $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \epsilon_t - \epsilon_{-1}$, et donc (X_t) est stationnaire au second ordre ($\mathsf{E}(X_t) = 0$ et $\mathsf{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \sigma^2 \mathbb{1}_{h=0} + \sigma^2$ ne dépendent pas de t), et aussi strictement si le bruit est fort (car c'est une somme de séries strictement stationnaires et indépendantes). Si le bruit est fort, (X_t) n'est pas ergodique car

$$\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n X_t \xrightarrow{\text{p.s.}} -\epsilon_{-1} \neq \mathsf{E}(X_t) = 0$$

Notez que cela ne contredit pas le théorème ergodique car X_t n'est pas une fonction (fixe, indépendante de t) de (ϵ_t).
Si $\lambda = 0$, alors $\forall t \in \mathbb{Z}, X_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1}$ donc (X_t) est strictement stationnaire et ergodique dans le cas d'un bruit blanc fort, stationnaire au second ordre dans le cas d'un bruit blanc faible (cf. Q1).

Exercice 2 :

La somme de deux processus stationnaires est-elle stationnaire ?

En général, la somme de deux processus stationnaire n'est pas stationnaire. Par exemple, considérons (X_t) et (Y_t) stationnaires. On a donc :

- $\mathsf{E}(X_t + Y_t) = \mathsf{E}(X_t) + \mathsf{E}(Y_t) = \mathsf{E}(X_0) + \mathsf{E}(Y_0)$ ne dépend pas de t.
- Pour les covariances :

$$\begin{aligned} \mathsf{Cov}(X_t + Y_t, X_{t+h} + Y_{t+h}) &= \mathsf{Cov}(X_t, X_{t+h}) + \mathsf{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) + \mathsf{Cov}(X_t, Y_{t+h}) + \mathsf{Cov}(Y_t, X_{t+h}) \\ &= \gamma_X(h) + \gamma_Y(h) + \mathsf{Cov}(X_t, Y_{t+h}) + \mathsf{Cov}(Y_t, X_{t+h}) \end{aligned}$$

qui n'est généralement pas indépendant de t, sauf dans le cas où termes de covariances sont nuls ou indépendants de t. La somme de deux processus stationnaires **non corrélés** ou dont la covariance ne dépend pas de t est donc stationnaire.

<u>Contre-exemple (optionnel) :</u>
Par exemple, considérons (X_t) stationnaire d'espérance nulle et (Y_t) tel que $Y_t = (-1)^t X_t$, alors

- $\mathsf{E}(Y_t) = 0$
- $\mathsf{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \mathsf{Cov}\left((-1)^t X_t, (-1)^{t+h} X_{t+h}\right) = (-1)^t (-1)^{t+h} \mathsf{Cov}(X_t, X_{t+h})$
  $\mathsf{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = (-1)^{2t}(-1)^h \gamma_X(h) = (-1)^h \gamma_X(h)$ ne dépend pas de t, donc (Y_t) est stationnaire.

Considérons maintenant leur somme :

$$X_t + Y_t = \begin{cases} 2X_t & \text{si } t \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et donc $\mathsf{V}(X_t + Y_t) = 4\gamma_X(0)\mathbb{1}_{t \in 2\mathbb{Z}}$ dépend de t, donc $(X_t + Y_t)$ n'est pas stationnaire.

Exercice 3 :

On s'intéresse à la régression linéaire affine d'un processus stationnaire au second ordre univarié $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sur l'espace de Hilbert H engendré par $\{1, X_{t-1}, X_{t-2}, ..., X_{t-p}\}, p \geq 1$.

Q1. Écrire les conditions d'orthogonalité

Si on appelle $\hat{X}_t = \mathsf{EL}(X_t | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-p})$ la meilleure approximation linéaire de X_t sur l'espace de Hilbert H engendré par $\{1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}\}$ avec $p \geq 1$, alors la meilleure projection linéaire de X_t est celle dont $X_t - \hat{X}_t$ est orthogonale à H. On a donc les $p+1$ conditions orthogonales suivantes :

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}[X_t - \hat{X}_t] = 0 \\ &\mathsf{E}[(X_t - \hat{X}_t) X_{t-j}] = 0 \quad \text{pour } j = 1, \ldots, p \end{aligned}$$

Q2. Montrer que les coefficients de la régression linéaire affine

$$\mathsf{EL}(X_t | 1, X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}) = a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j}$$

satisfont

$$a_0 = \mathsf{E}(X_1)\left(1 - \sum_{j=1}^{p} a_j\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{\Omega a} = \gamma$$

où

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix},\ \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \dots & \gamma_X(p-1) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \dots & \gamma_X(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_X(p-1) & \gamma_X(p-2) & \dots & \gamma_X(0) \end{pmatrix} \text{ et } \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \gamma_X(2) \\ \vdots \\ \gamma_X(p) \end{pmatrix}$$

Si on note

$$\hat{X}_t = \mathsf{EL}(X_t|1, X_{t-1}, \dots, X_{t-p}) = a_0 + \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j}$$

la première condition d'orthogonalité se réécrit donc

$$\mathsf{E}[X_t - \hat{X}_t] = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathsf{E}\left[X_t - a_0 - \sum_{j=1}^{p} a_j X_{t-j}\right] = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathsf{E}(X_t) - a_0 - \sum_{j=1}^{p} a_j \mathsf{E}(X_{t-j}) = 0$$

Comme $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire, on a $\forall t \in \mathbb{Z},\ \mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}(X_1)$, on obtient donc

$$a_0 = \mathsf{E}(X_1)\left(1 - \sum_{j=1}^{p} a_j\right)$$

$\hat{X}_t$ s'exprime alors

$$\hat{X}_t = \mathsf{E}(X_1) + \sum_{j=1}^{p} a_j [X_{t-j} - \mathsf{E}(X_1)]$$

En remarquant que les p conditions d'orthogonalités restantes peuvent se réécrire [a], pour $k = 1, \dots, p$

$$\mathsf{E}[(X_t - \hat{X}_t)(X_{t-k} - \mathsf{E}(X_1))] = 0$$

On peut y incorporer l'expression de $\hat{X}_t$

$$\mathsf{E}\left\{\left[X_t - \mathsf{E}(X_1) - \sum_{j=1}^{p} a_j [X_{t-j} - \mathsf{E}(X_1)]\right][X_{t-k} - \mathsf{E}(X_1)]\right\} = 0$$

$$\mathsf{E}[(X_t - \mathsf{E}(X_1))(X_{t-k} - \mathsf{E}(X_1))] - \sum_{j=1}^{p} a_j \mathsf{E}[(X_{t-j} - \mathsf{E}(X_1))(X_{t-k} - \mathsf{E}(X_1))] = 0$$

soit

$$\gamma_X(k) - \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_X(j-k) = 0 \ \Leftrightarrow\ \sum_{j=1}^{p} a_j \gamma_X(j-k) = \gamma_X(k) \text{ pour } k = 1, \dots, p$$

soit matriciellement (en utilisant $\gamma_X(h) = \gamma_X(-h)\ \forall h \in \mathbb{Z}$),

$$\begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \dots & \gamma_X(p-1) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \dots & \gamma_X(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_X(p-1) & \gamma_X(p-2) & \dots & \gamma_X(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \gamma_X(2) \\ \vdots \\ \gamma_X(p) \end{pmatrix}$$

ou

$$\mathbf{\Omega a} = \gamma$$

avec

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}, \ \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) & \dots & \gamma_X(p-1) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) & \dots & \gamma_X(p-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_X(p-1) & \gamma_X(p-2) & \dots & \gamma_X(0) \end{pmatrix} \text{ et } \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_X(1) \\ \gamma_X(2) \\ \vdots \\ \gamma_X(p) \end{pmatrix}$$

---

a. car on a :
$\mathsf{E}[(X_t - \hat{X}_t)(X_{t-k} - \mathsf{E}(X_1))] = \mathsf{E}[(X_t - \hat{X}_t)X_{t-k}] - \mathsf{E}[(X_t - \hat{X}_t)\mathsf{E}(X_1))] = \mathsf{E}[(X_t - \hat{X}_t)X_{t-k}] - \mathsf{E}(X_t - \hat{X}_t)\mathsf{E}(X_1)$
et comme $\mathsf{E}(X_t - \hat{X}_t) = 0$ on a donc $\mathsf{E}[(X_t - \hat{X}_t)(X_{t-k} - \mathsf{E}(X_1))] = \mathsf{E}[(X_t - \hat{X}_t)X_{t-k}]$

Q3. Donner une condition pour que le vecteur a soit unique

Si $\mathbf{\Omega}$ est inversible, $\mathbf{a}$ est unique et vaut $\mathbf{a} = \mathbf{\Omega}^{-1}\gamma$.

Q4. *(Optionnel)* Considérons le processus $X_t = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ où $\omega \in (0, \pi)$ est une constante et A et B sont des variables aléatoires non corrélées, centrées et de variance σ^2. Ce processus est-il stationnaire au second ordre ? Déterminer $\mathbf{a}$ quand $p = 2$. Montrer que $X_3 = (2\cos(\omega))X_2 - X_1$. La matrice $\mathbf{\Omega}$ est-elle inversible quand $p \geq 3$?

- $\mathsf{E}(X_t) = \mathsf{E}(A)\cos(\omega t) + \mathsf{E}(B)\sin(\omega t) = 0$ donc X_t est centré.
$$\begin{aligned} \mathsf{Cov}(X_t, X_{t-h}) &= \mathsf{E}[(X_t - \mathsf{E}(X_t)(X_{t-h} - \mathsf{E}(X_{t-h})] \\ &= \mathsf{E}(X_t X_{t-h}) \\ &= \mathsf{E}\{[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)][A\cos(\omega(t-h)) + B\sin(\omega(t-h))]\} \\ &= \mathsf{E}\{A^2[\cos(\omega t)\cos(\omega(t-h))] + B^2[\sin(\omega t)\sin(\omega(t-h))] \\ &\quad + AB[cos(\omega t)\sin(\omega(t-h)) + \sin(\omega t)\cos(\omega(t-h))]\} \\ &= \mathsf{E}(A^2)[\cos(\omega t)\cos(\omega(t-h))] + \mathsf{E}(B^2)[\sin(\omega t)\sin(\omega(t-h))] \end{aligned}$$
comme $\mathsf{E}(AB) = 0$ car A et B ne sont pas corrélés. Et donc
$$\mathsf{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \sigma^2[\cos(\omega t)\cos(\omega(t-h)) + \sin(\omega t)\sin(\omega(t-h))]$$
Par ailleurs, on sait que
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
donc on a
$$\cos(\omega t)\cos(\omega(t-h)) + \sin(\omega t)\sin(\omega(t-h)) = \cos(\omega t - \omega(t-h)) = \cos(\omega h)$$
qui ne dépend pas de t, donc on a
$$\mathsf{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \gamma(h) = \sigma^2 cos(\omega h)$$
et (X_t) est stationnaire au second ordre.
- Si p = 2, on a $\mathbf{a} = \mathbf{\Omega^{-1}}\gamma$
avec $\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\cos\omega \\ \sigma^2\cos\omega & \sigma^2 \end{pmatrix}$ et $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma^2\cos\omega \\ \sigma^2\cos(2\omega) \end{pmatrix}$

donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= [(\sigma^2)^2 - (\sigma^2)^2(\cos^2\omega)]^{-1} \begin{pmatrix} \sigma^2 & -\sigma^2\cos\omega \\ -\sigma^2\cos\omega & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2\cos\omega \\ \sigma^2\cos(2\omega) \end{pmatrix} \\
&= (1-\cos^2\omega)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\cos\omega \\ -\cos\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\omega \\ \cos(2\omega) \end{pmatrix} \\
&= (1-\cos^2\omega)^{-1} \begin{pmatrix} \cos\omega[1-\cos(2\omega)] \\ -\cos^2\omega + \cos(2\omega) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En utilisant

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

On a alors

$$\mathbf{a} = \frac{2}{1-\cos(2\omega)} \begin{pmatrix} \cos\omega[1-\cos(2\omega)] \\ -\dfrac{1-\cos(2\omega)}{2} \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2\cos\omega \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $$\begin{aligned}
X_3 &= A\cos(3\omega) + B\sin(3\omega) \\
&= A\cos(2\omega+\omega) + B\sin(2\omega+\omega)
\end{aligned}$$

En utilisant

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$$

On a alors

$$\begin{aligned}
X_3 &= A[\cos(2\omega)\cos(\omega) - \sin(2\omega)\sin(\omega)] + B[\sin(2\omega)\cos(\omega) + \cos(2\omega)\sin(\omega)] \\
&= A[2\cos(2\omega)\cos(\omega) - (\cos(2\omega)\cos(\omega) + \sin(2\omega)\sin(\omega))] \\
&\quad + B[2\sin(2\omega)\cos(\omega) - (\sin(2\omega)\cos(\omega) - \cos(2\omega)\sin(\omega))] \\
&= A[2\cos\omega\cos(2\omega) - \cos(2\omega-\omega)] + B[2\cos\omega\sin(2\omega) - \sin(2\omega-\omega)] \\
&= A[2\cos\omega\cos(2\omega) - \cos\omega] + B[2\cos\omega\sin(2\omega) - \sin\omega] \\
&= 2\cos\omega[A\cos(2\omega) + B\sin(2\omega)] - [A\cos\omega + B\cos\omega]
\end{aligned}$$

donc

$$X_3 = 2\cos\omega X_2 - X_1$$

i.e. X_3 est une combinaison linéaire de X_1 et X_2. Ceci montre que quand $p \geq 3$, X_t peut s'écrire en fonction de $X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}$ de plusieurs manières, donc $\mathbf{\Omega}$ n'est pas inversible.

Exercice 4 (Optionnel) :

Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus univarié stationnaire au second ordre et (a_i) un suite de réels absolument sommable, $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |a_i| < \infty$. On pose $Y_t = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X_{t-i}$.

Q1. Montrer que Y_t est bien défini, avec probabilité un, pour tout t.

On a $\mathsf{E}\left(\sum |a_i||X_{t-i}|\right) \leq \sum |a_i| \mathsf{E}|X_{t-i}|$ or $E|X_{t-i}| \leq \sqrt{\mathsf{E}(X_{t-i}^2)} = \sqrt{\mathsf{V}(X_{t-i}) + \mathsf{E}(X_{t-i})^2} < \infty$ car comme (X_t) est stationnaire, son espérance et sa variance sont constantes. On a alors $\mathsf{E}\left(\sum |a_i||X_{t-i}|\right) \leq \sum |a_i| \mathsf{E}|X_{t-i}| < \infty$ donc $\sum |a_i||X_{t-i}| < \infty$ avec probabilité 1, donc $Y_t = \sum a_i X_{t-i} \in \mathbb{R}$ avec probabilité 1.

Q2. Montrer que Y_t est bien défini dans L^2

$||Y_t||_2 = ||\sum a_i X_{t-i}||_2 \leq \sum |a_i| ||X_{t-i}||_2 = \sum |a_i| (\mathsf{E}|X_{t-i}|^2)^{1/2} = \sum |a_i| (\mathsf{E}X_{t-i}^2)^{1/2}$ donc

$||Y_t||_2 \leq \sum |a_i|(\mathsf{V}(X_t) + \mathsf{E}(X_1)^2)^{1/2} < \infty$
donc Y_t est bien défini dans L^2.

Q3. Montrer que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire au second ordre. Écrire sa moyenne m_Y et sa fonction d'autocovariance γ_Y à l'aide d'une suite (a_i), de la moyenne m_Y et la fonction d'autocovariance γ_Y de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Comme les moments d'ordre 1 et 2 sont définis (car ils sont finis), on peut écrire :

- $\mathsf{E}(Y_t) = \mathsf{E}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X_{t-i}\right) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i \mathsf{E}(X_{t-j}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i \mathsf{E}(X_1) = m_Y$ indépendant de t
- on a aussi :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) &= \mathsf{Cov}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X_{t_i}, \sum_{i\in\mathbb{Z}} a_i X_{t-h-i}\right) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_i a_j \mathsf{Cov}(X_{t-i}, X_{t-h-j}) \text{ ne dépend pas de } t \\
\gamma_Y(h) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_i a_j \gamma_X(h+j-i)
\end{aligned}$$

Donc Y_t est stationnaire au second ordre.