ENSAE - 2ème année

Séries temporelles linéaires
Examen 2018-2019

Durée : 2 heures. Sans document.

Les exercices sont indépendants. Il est demandé de justifier les réponses de façon concise.

Exercice 1 Soit $(u_t)_{t\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées telles que $Eu_t = m$ et $\mathrm{Var}(u_t) = \sigma^2$ existent. On définit la suite $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ par $X_0 = 0$ et $X_t = \rho X_{t-1} + u_t$ pour $t \geq 1$.

1. La suite $(u_t)_{t\in\mathbb{N}}$ est-elle toujours ergodique ? A quelle condition est-elle un bruit blanc ? Quelle est la limite presque sûre de $\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} u_t^2$ quand $n \to \infty$?
2. On note $\mu_t = EX_t$. Exprimer μ_t en fonction de ρ, m et μ_{t-1}, puis en fonction de ρ, m et t.
3. La figure 1 représente une trajectoire $X_0, X_1, \dots, X_n$ de longueur $n = 300$. A la vue de ce graphique, pouvez-vous rejeter l'hypothèse que $m = 0$? Pouvez-vous rejeter l'hypothèse que $\rho = 1$? Est-il nécessaire de faire des tests statistiques pour cela ?

Exercice 2 Soit $(\epsilon_{1t}, \epsilon_{2t}, \epsilon_{3t})'$ un bruit blanc fort de variance identité I_3, et $X_t = (X_{1t}, X_{2t}, X_{3t})'$ satisfaisant

$$\begin{cases} X_{1t} &= aX_{3t} + \epsilon_{1t} \\ X_{2t} &= bX_{1t} + \epsilon_{2t} \\ X_{3t} &= cX_{3,\,t-1} + \epsilon_{3t}. \end{cases}$$

1. On suppose dans cette question que $|c| < 1$.

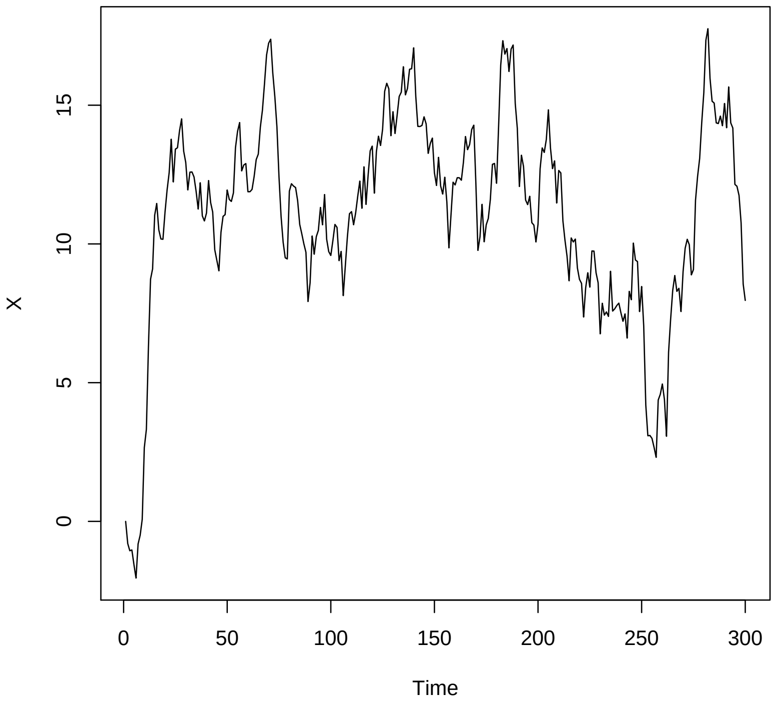

FIGURE 1 – Trajectoire de la série (X_t).

(a) Ecrire ce système sous forme VAR(1) en précisant la variance du bruit et montrer qu'il satisfait la condition d'existence d'une solution stationnaire et non anticipative.

(b) Le vecteur $(X_{1t}, X_{2t})'$ cause-t-il X_{3t} au sens de Granger ? Pour quelles valeurs de a, b et c la variable X_{3t} cause-t-elle le vecteur $(X_{1t}, X_{2t})'$ au sens de Granger ? A-t-on causalité instantanée entre X_{1t} et $(X_{2t}, X_{3t})'$?

2. On suppose dans cette question que $c = 1$. Ecrire ce système sous forme à correction d'erreur VECM. Pour quelles valeurs de a et b le processus X_t est-il cointégré ? Quel est son rang de cointégration ?

Exercice 3 Il arrive souvent que l'on veuille prévoir une séries temporelle Y_t en fonction de ses valeurs passées et également d'une variable X_t dite "exogène". Ceci peut se faire à l'aide de modèles appelés ARMAX, dont nous considérons dans cet exercice la version la plus simple.

Soit (ϵ_t) un bruit blanc et (X_t) une série temporelle univariée telle que X_t soit observable avant la variable d'intérêt Y_t. On suppose que la série bivariée (X_t, ϵ_t) est strictement stationnaire et ergodique, avec $EX_t^2 < \infty$, et on considère le modèle AR(1)-X

$$Y_t = aY_{t-1} + bX_t + c + \epsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

1. On suppose $|a| < 1$, mais on n'impose aucune contrainte sur b et c. Donner la solution Y_t stationnaire et ergodique de l'équation AR(1)-X. On suppose que ϵ_t est indépendant de $\{X_u, u \leq t; \epsilon_u, u < t\}$. Quelle est la meilleure prévision de Y_t en fonction de $\{X_u, u \leq t; Y_u, u < t\}$? Quelle est la variance du terme d'erreur ?

2. On étudie dans cette question les conséquences de l'oubli de la variable exogène. On suppose que $X_t = \eta_t + d\eta_{t-1}$ avec $|d| < 1$ et (η_t) un bruit blanc fort de variance σ_η^2, indépendant du bruit fort (ϵ_t) de variance σ_ϵ^2. Posons $Z_t = bX_t + \epsilon_t$.

   (a) Déterminer la fonction d'autocovariance de (Z_t). Quel est le modèle ARMA suivi par Z_t ? Quel est le modèle ARMA suivi par Y_t ?

   (b) Quelle est approximativement la variance du terme d'erreur du modèle ARMA suivi par (Y_t) quand $|b|$ est très grand ? Quelle est alors la conséquence de l'oubli de la variable exogène pour la prévision de Y_t ?

3. On étudie dans cette question les conséquences de l'oubli de la dynamique de Y_t. Pour que les calculs soient simples, on suppose maintenant que la suite (X_t) est iid indépendante de (ϵ_t). Dans le modèle de régression

$$Y_t = \tilde{b}X_t + \tilde{c} + e_t,$$

   où e_t est centré et non corrrélé avec X_t, que valent $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ et la variance de e_t ? Quelle est alors la conséquence de l'oubli de la dynamique de Y_t ? Pour estimer les paramètres de ce modèle, peut-on faire confiance aux sorties des logiciels de régression usuels ?