Macroéconomie 2
Le modèle de base d'équilibre général
D(S)GE

Franck Malherbet
(CREST-ENSAE)

Année Universitaire 2020-2021

- Dans ce chapitre, on développe un premier modèle d'équilibre général.
- Il s'agit d'un modèle de type D(S)GE (**D**ynamic **G**eneral **E**quilibrium), *ie.* le modèle n'a pas de composante **S**tochastique (prochain chapitre).
- Il s'agit d'un modèle où :
  - tous les agents sont identiques
  - tous les marchés sont concurrentiels
- Est-ce réaliste ? Non !
- L'objectif n'est pas de construire un modèle réaliste mais d'incorporer dans un cadre d'équilibre général deux arbitrages essentiels :
  1. consommation aujourd'hui c_t vs. consommation demain c_{t+1}
  2. consommation c_t vs. loisir ℓ_t

- L'approche de la macroéconomie retenue dans ce chapitre peut se résumer de la façon suivante :

  "*Tous les modèles sont faux mais certains sont utiles*"

- Le cadre d'analyse que nous allons développer repose sur le modèle de croissance optimale.

- Il a été développé par :
  - Franck Ramsey (1928)
  - John von Neumann (1945)
  - David Cass (1965), Tjalling Koopmans[1] (1965)

1. co-lauréat (avec Leonid V. Kantorovich) du prix Nobel d'Economie en 1975.

- Le modèle de croissance optimale est **le** cadre d'analyse de référence (**B***enchmark*) de la macro moderne.

- Il constitue un **point d'ancrage** dans la litérature car de nombreux modèles empruntent à ce cadre de référence :

  1. Modèles de croissance endogène
     $\hookrightarrow$ Benchmark + externalités
  2. Modèles de cycles réels
     $\hookrightarrow$ Benchmark + chocs agrégés de productivité
  3. Modèles nouveaux keynésiens
     $\hookrightarrow$ Benchmark + chocs agrégés de productivité + rigidités
  4. Modèles à agents hétérogènes
     $\hookrightarrow$ Benchmark + marchés incomplets

- Dans ce chapitre :
  - Equilibre général avec offre de travail inélastique
  - Equilibre général avec fiscalité
  - Equilibre général avec offre de travail endogène

- Dans le prochain chapitre :
  - Modèle canonique de cycles réels
  - Modèles de cycles réels et imperfections sur le marché du travail

- Présentation dans les **manuels usuels** :
  - Blanchard et Fischer (1989)
  - Barro et Sala-i-Martin (2004)
  - Acemoglu (2009)
  - Romer (2012)

Le modèle complet

- Jusqu'à présent on a étudié les décisions de consommation/épargne du ménage en **équilibre partiel**.
- On s'intéresse désormais au modèle complet, *i.e.* le modèle dynamique d'équilibre général.
- On considère une économie fermée avec deux types d'agents privés [2] :
  - un grand nombre de ménages identiques,
  - un grand nombre d'entreprises identiques.
- Un seul type de bien (*bien à tout faire*), utilisé pour :
  1. la consommation,
  2. l'investissement.
- Il n'y a pas de croissance démographique, et la taille de la population est normalisée à l'unité.

2. Il n'y a pas de gouvernement dans notre économie simplifiée.

- **Quatre marchés :**
  - marché des biens,
  - marché du travail,
  - marché du capital,
  - marché des prêts.
- **Marché des biens :**
  - *offre* des entreprises,
  - *demande* des ménages.
- **Marché du travail :**
  - *offre* des ménages,
  - *demande* des entreprises.

- **Marché du capital :**
  - *offre* des ménages,
  - *demande* des entreprises.

- **Marché des prêts :**
  - *offre* des ménages,
  - *demande* des ménages.

- **L'économie est concurrentielle** (CPP), *i.e.* :
  1. atomicité,
  2. homogénéité,
  3. transparence,
  4. libre entrée et sortie,
  5. libre circulation des facteurs de production.

- Aucun agent ne peut influencer les prix, *i.e.* les agents considèrent les prix comme des données (*price taker*).

- Le bien final sert de numéraire.
- On note :
  - R_t, le coût réel d'usage du capital,
  - w_t, le salaire réel,
  - r_t, le taux d'intérêt réel.
- On procède en trois principales étapes :
  1. Hypothèses
  2. Planificateur
  3. Equilibre décentralisé

Préférences des agents

- Un agent représentatif dérive son utilité instantanée $u(c_t)$ de la consommation c_t à chaque date t.
- La fonction d'utilité $u(c_t)$ a les **propriétés usuelles** [3] :
  - $u'(c) > 0$
  - $u''(c) \leq 0$
  - $\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$
  - $\lim_{c \to \infty} u'(c) = 0$
- Le consommateur choisit la **séquence de consommation** $\{c(t) \geq 0, t \geq 0\}$ qui maximise la somme actualisée des utilités instantanées :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\rho} \right)^t u(c_t) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

où β désigne le facteur d'escompte.

3. Pour une discussion détaillée sur les propriétés de la fonction d'utilité voir par exemple : Wakker (2008), Explaining the Characteristics of the Power (CRRA) Utility Family, Health Economics.

Technologie de production

- En négligeant le progrès technique, la fonction de production agrégée s'écrit :

$$Y_t = F\left[K_t, L_t, t\right]$$

avec :

  - Y_t, la production à la date t,
  - K_t, le capital physique à la date t,
  - L_t, le travail à la date t.

- On suppose que $F()$ est une fonction de production néoclassique, et vérifie les **quatre hypothèses** suivantes :

Hypothèse 1 :

  - Il faut au moins une unité de capital ou de travail pour produire.

$$F(0, L) = F(K, 0) = 0$$

Hypothèse 2 :

- La fonction $F : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathbb{C}^2$.
- La fonction F possède des productivités marginales positives et décroissantes par rapport à chaque facteur de production :

$$\begin{aligned} F_K(K,L) &\equiv \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0,\ F_L(K,L) \equiv \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0 \\ F_{KK}(K,L) &\equiv \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0,\ F_{LL}(K,L) \equiv \frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0 \end{aligned}$$

Hypothèse 3 :

- La fonction F est à rendements d'échelle constants, *i.e.* homogène de degré 1 :

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L) \text{ pour tout } \lambda > 0$$

Hypothèse 4 :

- La fonction F satisfait **les conditions d'Inada** (Inada, 1963) :

$$\begin{aligned}
\lim_{K \to 0} (F_K(K, L)) &= \lim_{L \to 0} (F_L(K, L)) = \infty \\
\lim_{K \to \infty} (F_K(K, L)) &= \lim_{L \to \infty} (F_L(K, L)) = 0
\end{aligned}$$

- On définit désormais la fonction f comme :

$$Y_t = F\left(K_t, L_t\right) = L_t F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) = L_t f\left(k_t\right)$$

où f est la forme intensive de la fonction de production.

$$y_t \equiv \frac{Y_t}{L_t} = f\left(k_t\right)$$

avec $k_t \equiv K_t / L_t$.

- Les hypothèses sur F impliquent :
    - $f'\left(k\right) > 0,\ f''\left(k\right) < 0,\ \forall k \in [0, \infty)$
    - $\lim_{k \to \infty} f'\left(k\right) = 0,\ \lim_{k \to 0} f'\left(k\right) = \infty$
    - $f\left(0\right) = 0$

- Les productivités marginales du capital et du travail vérifient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} &= L_t F'\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right)\frac{1}{L_t} = f'(k_t) \\ \frac{\partial Y_t}{\partial L_t} &= F\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right) + L_t F'\left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right)\left(-\frac{K_t}{L_t^2}\right) = f(k_t) - k_t f^{'}(k_t) \end{aligned}$$

- Le capital se déprécie au taux $\delta \in (0, 1)$ à chaque période.

- La loi d'évolution du stock de capital vérifie alors :

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + I_t$$

où I_t désigne l'investissement brut agrégé à la période t.

Le problème du planificateur

- Le planificateur maximise l'utilité intertemporelle de l'agent sous la contrainte de ressource agrégée de l'économie.

- Dans une économie fermée sans gouvernement, le produit est soit consommé, soit investit, ie. :

$$Y_t = C_t + I_t$$

- En remplaçant dans la loi d'évolution du stock de capital, on obtient :

$$K_{t+1} = (1 - \delta) K_t + Y_t - C_t$$

ou encore sous **forme intensive** :

$$k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + f(k_t) - c_t$$

- L'allocation Pareto efficace consiste à maximiser l'utilité de l'agent sous contrainte de faisabilité.
- Le programme du planificateur (contrôle-état) :

$$\max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sous les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} c_t + k_{t+1} &= (1-\delta) k_t + y_t \\ c_t &\geq 0, \; k_{t+1} \geq 0, \; k_0 > 0 \end{aligned}$$

- Le Lagrangien associé à ce programme s'écrit :

$$\mathcal{L}_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left[u(c_t) + \lambda_t \left((1-\delta) k_t + f(k_t) - c_t - k_{t+1} \right) \right]$$

- Les conditions du premier ordre sont données par :

$$\begin{aligned} u^{'}(c_t) - \lambda_t &= 0 \\ -\lambda_t + \beta\lambda_{t+1}\left(1 - \delta + f^{'}(k_{t+1})\right) &= 0 \end{aligned}$$

- L'allocation optimale des ressources est caractérisée par :
  1. L'équation d'Euler :

$$u^{'}(c_t) = \beta u^{'}(c_{t+1})\left(1 - \delta + f^{'}(k_{t+1})\right)$$

  2. La condition de transversalité :

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t \lambda_t k_{t+1} = 0$$

  3. La loi d'évolution du stock de capital :

$$k_{t+1} = (1-\delta)\,k_t + f(k_t) - c_t, \text{ avec } k_0 > 0 \text{ donné.}$$

- L'allocation optimale des ressources est donnée par **la dynamique jointe** de la consommation c, et du capital k, qui sont solutions des deux équations de récurrence suivantes :

$$u^{'}\left(c_t\right) = \beta u^{'}\left(c_{t+1}\right)\left(1-\delta+f^{'}\left(k_{t+1}\right)\right) \tag{1}$$

$$k_{t+1} = \left(1-\delta\right)k_t + f\left(k_t\right) - c_t \tag{2}$$

- On adjoint à ces deux équations, deux conditions aux bornes :

$$\begin{array}{rcl} \lim\limits_{t\to\infty} \beta^t u'\left(c_t\right)k_{t+1} & = & 0 \\ k_0 & > & 0 \end{array}$$

- Une fois que l'on connaît $\{c_t, k_t, t \geq 0\}$, il est possible de calculer les autres variables d'intérêt.

- L'économie converge vers un état stationnaire $\{c^*, k^*\}$ où les valeurs de la consommation et du capital sont **constantes**, *ie.* :

$$\Delta c_t = \Delta k_t = 0$$

- L'analyse de la dynamique transitoire de $\{c_t, k_t, t \geq 0\}$ est identique à celle du modèle de croissance optimale (*cf. cours de croissance*) :
  1. Elle doit tenir compte du fait que :
     - c_t est une *variable de contrôle* qui peut s'ajuster instantanément.
     - k_t est une *variable d'état* dont la valeur est prédéterminée en t et dont la dynamique est donnée par (2).
  2. Il n'existe qu'une seule trajectoire de $\{c_t, k_t, t \geq 0\}$ qui converge vers l'état stationnaire tel que :
     - c_0 saute instantanément et c_t, converge vers l'état stationnaire c^*.
     - k_0 est donné et k_t, converge vers l'état stationnaire k^*.
  3. La fonction qui exprime la valeur initiale de c en fonction de k est le sentier selle ou bras stable du diagramme des phases.

Annexe

- L'état stationnaire $\{c^*, k^*\}$ est déterminé par :

$$\begin{aligned} 1 &= \beta\left(1-\delta+f^{'}(k^*)\right) \\ c^* &= f(k^*)-\delta k^* \end{aligned}$$

- La règle d'or d'accumulation du capital (Phelps, 1966)[4] est le stock de capital stationnaire k^*_{or} qui maximise la consommation stationnaire :

$$f'(k^*_{or})-\delta=0 \Leftrightarrow f'(k^*_{or})=\delta$$

- Le planificateur suit une régle d'or modifiée :

$$f^{'}(k^*)=\delta+\frac{1}{\beta}-1=\delta+\rho>\delta$$

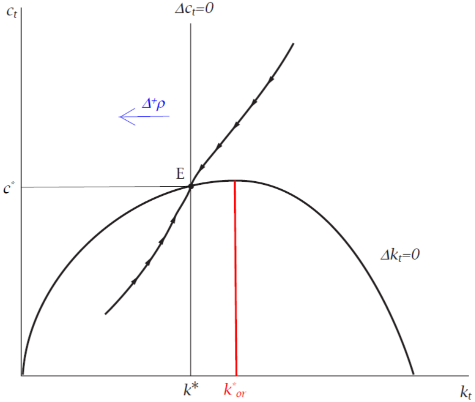
où ρ est le taux de préférence pour le présent.

4. Phelps, 1966, Golden Rules of Economic Growth : Studies of Efficient and Optimal Investment, W. W. Norton, New York.

- Les deux relations précédentes...
  1. Règle d'or
  $$f'\left(k^*_{or}\right) = \delta$$
  2. Règle d'or modifiée
  $$f^{'}\left(k^*\right) = \delta + \rho$$
- ...impliquent que :
  $$k^* < k^*_{or}$$
- Ainsi, le niveau de capital stationnaire, k^* ne maximise pas la consommation d'état stationnaire car la consommation future est escomptée au taux ρ.
- Au contraire d'autres modèles macro (Solow, 56, Diamond, 65), il n'est possible d'être dans une situation de sur-accumulation du capital, *ie.* il n'y a pas d'inefficience dynamique.

- Le niveau de capital à l'état stationnaire, k^*, **décroît** avec le taux de préférence pour le présent ρ.

- L'intersection des deux droites de stationnarité détermine l'état stationnaire ou régulier de l'économie (règle d'or modifiée).



Economie décentralisée

- On s'intéresse désormais à l'économie décentralisée.
- Dans une telle économie :
  - les firmes **louent** le capital aux menages et **embauchent** des travailleurs afin de maximiser leur profit.[5]
  - les ménages **ajustent** leur détention d'actifs sans risque afin de maximiser leur utilité intertemporelle de la consommation.
- A niveau micro, le salaire et le taux d'intéret sont donnés, ie. les agents sont preneur de prix (*price taker*).
- Au niveau macro, le salaire et le taux d'intéret s'ajustent afin d'équilibrer le marché du travail et le marché du capital.

5. Dans ce modèle, les ménages détiennent le capital qu'ils louent ensuite aux entreprises.

- Chaque ménage peut prêter et emprunter au taux sans risque r_t mais le ménage représentatif à une position nette nulle à l'équilibre.

- Chaque ménage peut louer le capital aux entreprises au prix R_t.

- A l'équilibre, les ménages doivent être indifférents entre ces deux formes de placement, *ie.* le taux d'intérêt réel sur les prêts aux ménages doit être égal aux taux de rendement réel des titres de propriétés :

$$r_t = R_t - \delta$$

- A chaque période t, la firme cherche à maximiser ses profits :

$$\max_{\{K_t, L_t\}} \Pi(K_t, L_t) = F(K_t, L_t) - R_t K_t - w_t L_t$$

où R_t est le coût d'usage du capital.

- A l'optimum, on a :
  - $R_t = F_K(K_t, L_t) = f'(k_t)$
  - $w_t = F_L(K_t, L_t) = f(k_t) - k_t f'(k_t)$

- **Remarques :**
  - En l'absence de coût d'ajustement sur le capital, le programme de la firme est statique.
  - La constance des rendements d'echelle de la fonction de production implique que les profits sont nuls à l'équilibre.

- A la date t :
  - l'agent détient une quantité a_t d'actif sans risque qu'il peut louer à la firme au prix R_t.
  - l'agent offre de manière inélastique une unité de travail et obtient un salaire w_t.
- La contrainte de budget instantanée de l'agent vérifie donc :

$$c_t + i_t = R_t a_t + w_t$$

- L'investissement accroît le patrimoine de l'agent de la façon suivante :

$$a_{t+1} = (1 - \delta)\, a_t + i_t$$

- **Rappel :** L'accumulation du patrimoine de l'agent se fait sous forme de capital physique.

- La loi d'évolution du patrimoine de l'agent est alors donnée par :

$$a_{t+1} = (1 + r_t)\, a_t + w_t - c_t$$

où r_t est le taux d'intérêt sans risque entre les dates t et $t+1$ avec $r_t = R_t - \delta$.

- En procédant comme auparavant (*cf. chapitre 1*), la contrainte bugétaire intertemporelle de l'agent vérifie :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{c_t}{\prod_{s=1}^{t}(1 + r_s)} + \lim_{t\to\infty} \frac{a_{t+1}}{\prod_{s=1}^{t}(1 + r_s)} = a_0 + \sum_{t=0}^{\infty} \frac{w_t}{\prod_{s=1}^{t}(1 + r_s)}$$

avec $\lim_{t\to\infty} \frac{a_{t+1}}{\prod_{s=1}^{t}(1+r_s)} = 0$.

- L'agent représentatif maximise son utilité intertemporelle :

$$\mathcal{U}_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u\left(c_t\right)$$

sous les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= \left(1 + r_t\right) a_t + w_t - c_t \\ c_t &\geq 0,\ a_{t+1} \geq 0,\ a_0 > 0 \end{aligned}$$

- Le Lagragien associé à ce programme vérifie :

$$\mathcal{L}_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(u\left(c_t\right) + \lambda_t \left(\left(1 + r_t\right) a_t + w_t - c_t - a_{t+1}\right)\right)$$

- Les conditions du premier ordre vérifient :

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \lambda_t \\ -\lambda_t + \beta\lambda_{t+1}(1 + r_{t+1}) &= 0 \end{aligned}$$

- La solution du problème d'optimisation du consommateur est caractérisée par :
  1. L'équation d'Euler :

  $$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1 + r_{t+1})$$

  2. La condition de transversalité :

  $$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)\, a_{t+1} = 0$$

  ▸ Annexe

  3. La loi d'évolution du patrimoine :

  $$a_{t+1} = (1 + r_t)\, a_t + w_t - c_t$$

Définition : Un équilibre concurrentiel est caractérisé par le vecteur :

$$\{c_t, a_t, y_t, k_t, L_t, w_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$$

de telle sorte que :

1. $\{c_t, a_t\}_{t=0}^{\infty}$ soient solution du programme du ménage étant donné a_0 et $\{w_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$,
2. $\{y_t, k_t, L_t\}_{t=0}^{\infty}$ soient solution du programme de la firme étant donné $\{w_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$,
3. pour $\{w_t, R_t\}_{t=0}^{\infty}$, tous les marchés s'appurent :
   - $y_t = c_t + i_t$
   - $k_t = a_t$
   - $L_t = 1$

- **Rappel :** On sait d'après le programme de la firme que :

$$\begin{aligned} R_t &= f'(k_t) \\ w_t &= f(k_t) - k_t f'(k_t) \end{aligned}$$

- On a donc :

$$r_t = f'(k_t) - \delta$$

- A partir de la contrainte de budget instantanée, on a :

$$a_{t+1} = (1 + r_t)\, a_t + w_t - c_t$$

- Comme $k_t = a_t$, cela est équivalent à :

$$\begin{aligned} k_{t+1} &= (1 + r_t)\, k_t + w_t - c_t \\ &= \left(1 + f'(k_t) - \delta\right) k_t + f(k_t) - k_t f'(k_t) - c_t \\ &= (1 - \delta)\, k_t + f(k_t) - c_t \end{aligned}$$

- De la même manière, l'équation d'Euler pour le problème du consommateur vérifie :

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \beta u'(c_{t+1})(1 + r_{t+1}) \\ &= \beta u'(c_{t+1})\left(f'(k_{t+1}) + 1 - \delta\right) \end{aligned}$$

- L'allocation des ressources pour l'équilibre concurrentiel est donc caractérisé par :

$$k_{t+1} = (1-\delta)k_t + f(k_t) - c_t \tag{3}$$

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})\left(f'(k_{t+1}) + 1 - \delta\right) \tag{4}$$

- L'équilibre concurrentiel coincide donc avec l'allocation optimale des ressources choisit par le planificateur.

- Ce résultat est la conséquence des deux théorèmes fondamentaux du bien-être[6].

6. Pour rappel :
- Premier théorème : Tout équilibre concurrentiel est un optimum de Pareto.
- Second théorème : Tout optimum de Pareto peut-être decentralisé sous la forme d'un équilibre concurrentiel.

- L'optimalité sociale de l'équilibre concurrentiel dans ce modèle est une conséquence du **premier théorème du bien-être**.
- Selon ce théorème si :
  - il n'y a pas d'externalité,
  - les marchés sont en concurrence pure et parfaite,
  - l'information est parfaite,
  - le nombre d'agent est fini,

  alors l'équilibre concurrentiel (décentralisé) est un optimum de Pareto.
- **Définition :** Un **optimum de Pareto** est un état de la société dans lequel on ne peut pas améliorer le bien-être d'un individu sans (au moins) détériorer celui d'un autre.

- L'optimalité de l'équilibre décentralisé repose donc sur des hypothèses très fortes (irréalistes ?) :
  - concurrence pure et parfaite,
  - absence d'externalités,
  - absence de biens publics,
  - etc...

- L'optimalité de l'équilibre décentralisé est avant tout un **résultat théorique** qui s'avère utile comme situation de référence.

- L'équilibre concurrentiel étant socialement optimal, il ne peut pas y avoir d'inefficience dynamique due à une sur-accumulation du capital comme dans d'autres modèles.

- Notons r^*, le taux d'intérêt à l'état stationnaire.
- L'équation d'Euler à l'état stationnaire se réécrit :

$$\begin{aligned} u'(c^*) &= \beta u'(c^*)\left(f'(k^*) + 1 - \delta\right) \\ 1 &= \beta(1 + r^*) \end{aligned}$$

- Ainsi, à l'état stationnaire, le taux d'intérêt est égal au taux de préférence pour le présent :

$$r^* = \rho$$

- On a vu que la différence entre r_t et ρ conditionnait le profil de consommation des agents. La condition $r^* = \rho$ indique donc qu'à l'état stationnaire la consommation des agents est parfaitement lissée.

Les effets de la fiscalité

- On introduit désormais la fiscalité dans le modèle de la section précédente.
- Il est possible de distinguer **deux situations** :
  1. La fiscalité est "non distorsive" : Les taxes sont forfaitaires, *ie.* indépendantes des revenus des ménages.
  2. La fiscalité est "distorsive" : Les taxes dépendent des revenus des ménages.
- On s'intéresse à la deuxième situation, et l'on suppose que les taxes peuvent dépendre :
  1. des revenus du capital.
  2. des revenus du travail.

- On suppose une taxe linéaire sur les revenus du capital.

- Pour l'agent, le rendement net d'une unité de capital est alors :

$$(1-\tau)r_t$$

- La taxe τ peut représenter l'imposition légale mais également l'imposition implicite (coût administratif, corruption, etc...).

- On suppose que le produit de l'imposition est redistribué sous forme de transfert forfaitaire.

- On note ω_t ce transfert.

- La contrainte budgétaire instantanée s'écrit :

$$a_{t+1} = a_t + r_t(1-\tau)a_t + w_t - c_t + \omega_t$$

- L'agent représentatif maximise son utilité intertemporelle

$$\mathcal{U}_t = \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sous les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= a_t(1 + r_t(1-\tau)) + w_t - c_t + \omega_t \\ c_t &\geq 0,\ a_{t+1} \geq 0,\ a_0 > 0 \end{aligned}$$

- En procédant comme précédemment, on voit que la présence d'une taxe distorsive sur le capital modifie la condition de Keynes-Ramsey qui s'écrit désormais :

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1 + r_{t+1}(1-\tau))$$

- En supposant la **fonction d'utilité CRRA**, on a :

$$\left(\frac{c_{t+1}}{c_t}\right)^{\sigma} = \beta\left(1 + r_{t+1}(1-\tau)\right)$$

- En première approximation [7], lorsque r et ρ ne sont pas trop grands, la règle de Keynes-Ramsey se réécrit :

$$\frac{c_{t+1} - c_t}{c_t} \simeq \frac{1}{\sigma}\left(r_{t+1}(1-\tau) - \rho\right)$$

- La taxe incite les ménages à consommer plus aujourd'hui (baisse du rendement de l'épargne) et moins demain.

- Le profit des firmes **ne dépend pas** de la taxe. La demande de capital et de travail vérifie toujours :

$$\begin{aligned} r_t &= f'(k_t) - \delta \\ w_t &= f(k_t) - k_t f'(k_t) \end{aligned}$$

7. $\ln(1+x) \simeq x$, lorsque x n'est pas trop grand.

- Comme précédemment, la solution du problème d'optimisation du consommateur est caractérisée par :

1. L'équation d'Euler :

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1 + (f'(k_{t+1}) - \delta)(1 - \tau))$$

2. La condition de transversalité :

$$\lim_{t \to \infty} \beta^t u'(c_t) k_{t+1} = 0$$

3. La loi d'évolution du stock de capital :

$$k_{t+1} = (1 - \delta) k_t + f(k_t) - c_t$$

- Ces équations déterminent la *dynamique jointe* de la consommation et du capital.

- A l'état régulier de l'économie le couple $\{c^*, k^*\}$ est solution de :

$$\begin{aligned} 1 &= \beta\left(1 + \left(f'\left(k^*\right) - \delta\right)\left(1 - \tau\right)\right) \\ c^* &= f\left(k^*\right) - \delta k^* \end{aligned}$$

- Le stock de capital stationnaire, k^* vérifie :

$$f'\left(k^*\right) = \frac{\rho}{1-\tau} + \delta$$

- k^* décroît avec la taxe distorsive sur le capital, τ, *ie.* :

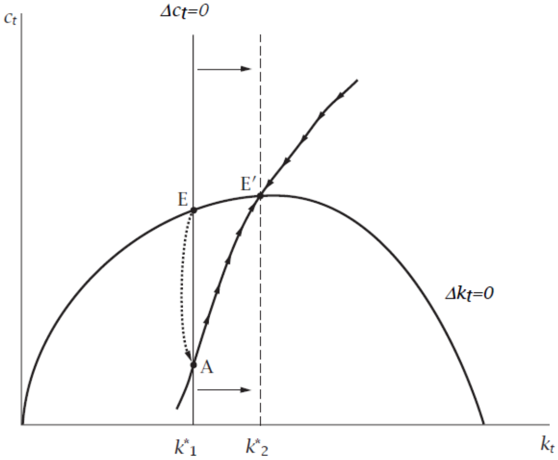
$$\frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\rho}{f''\left(k^*\right)\left(1-\tau\right)^2} < 0$$

- Par suite, le produit stationnaire $y^* = f(k^*)$ et la consommation stationnaire $c^* = f(k^*) - \delta k^*$ diminuent avec la taxe τ :

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}\tau} &= f'(k^*)\frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}\tau} < 0 \\
\frac{\mathrm{d}c^*}{\mathrm{d}\tau} &= \left(f'(k^*) - \delta\right)\frac{\mathrm{d}k^*}{\mathrm{d}\tau} < 0
\end{aligned}
$$

- **Remarques :** La fiscalité distorsive sur le capital affecte à la fois le stock de capital **et** la consommation stationnaires.

- Dynamique transitoire d'une **baisse** de τ qui augmente le stock de capital statonnaire de k_1^* à k_2^*.



- La baisse de τ induit un déplacement de $\Delta c_t = 0$ vers la droite.

- Au moment de la variation de τ, **le stock de capital ne peut pas changer de façon discontinue**, i.e. k est égal à la valeur de k^* sur l'ancien sentier de croissance équilibrée.

- La consommation peut en revanche **varier brusquement** au moment du choc, i.e. c baisse immédiatement amenant l'économie sur un nouveau sentier selle.

- A partir du point A, c et k augmentent progressivement jusqu'à atteindre les valeurs qui correspondent au nouveau sentier de croissance équilibrée avec $k_2^* > k_1^*$ et $c_1^* < c_2^*$.

- Que se passe-t-il si on taxe les revenus du travail ?
- Supposons désormais qu'il existe une taxe linéaire sur les revenus du travail de telle sorte que le revenu net du ménage soit donné par :

$$(1-\tau)w_t$$

- Comme précédemment, le produit de l'imposition est redistribué sous forme de transfert forfaitaire aux ménages.
- La contrainte budgétaire instantanée du ménage vérifie :

$$a_{t+1} = a_t(1+r_t) + w_t(1-\tau) - c_t + \omega_t$$

- L'agent représentatif maximise son utilité intertemporelle

$$\mathcal{U}_t = \max_{\{c_t, k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

sous les contraintes suivantes :

$$\begin{array}{rcl} a_{t+1} & = & a_t(1+r_t) + w_t(1-\tau) - c_t + \omega_t \\ c_t & \geq & 0, \ a_{t+1} \geq 0, \ a_0 > 0 \end{array}$$

- On voit que la présence d'une taxe distorsive sur le travail ne modifie pas la condition de Keynes-Ramsey qui s'écrit :

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})(1 + r_{t+1})$$

- On peut facilement montrer que les trajectoires d'équilibre de k_t et c_t sont identiques à celle du modèle de base (le modèle sans taxe).

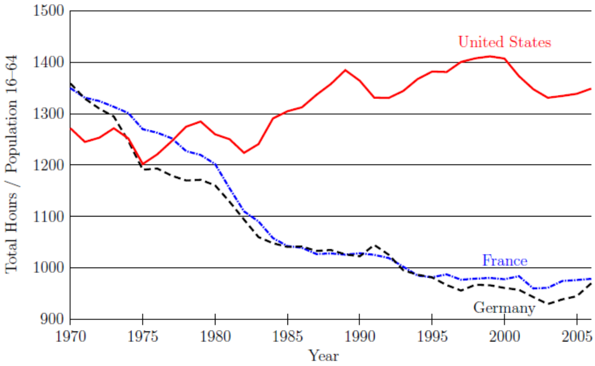
- L'équilibre du modèle est déterminé par le système d'équations de récurrence :

$$\begin{aligned} u'(c_t) &= \beta u'(c_{t+1})\left(1-\delta+f'(k_{t+1})\right) \\ k_{t+1} &= f(k_t)+(1-\delta)k_t-c_t \end{aligned}$$

- Le seul effet de la taxe est alors de réduire le salaire net.

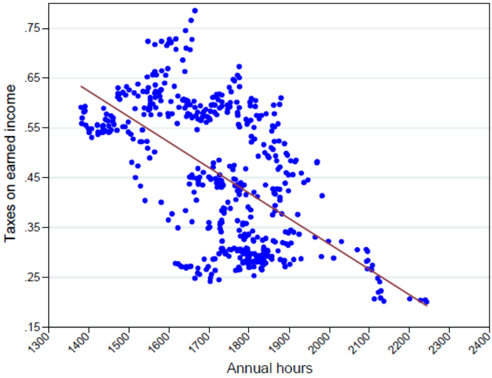
- Dans ce modèle, la taxation des revenus du travail n'affecte pas l'allocation des ressources car l'offre de travail est inélastique.

- L'hypothèse selon laquelle l'offre de travail est inélastique est très forte.
- Evolution du nombre d'heures travaillées (source : Shimer, 2009 [8]).



8. Shimer, 2009, Convergence in Macroeconomics : The Labor Wedge, American Economic Journal : Macroeconomics.

- Taxes sur les revenus salariaux (USA, JP, FR, DE, IT, SE, UK) sur la période 1956-2010. Chaque point corresponds à une observation année-pays (Source : McDaniel, 2011 [9]).



9. McDaniel, 2011, Forces Shaping Hours Worked in the OECD, 1960-2004, American Economic Journal : Macroeconomics.

- L'absence de réactions des heures travaillées est une limite importante du cadre d'analyse de base.
- On peut facilement endogénéiser l'offre de travail dans notre modèle d'équilibre général.
- On procède en deux temps :
  1. modèle simple à deux périodes
  2. modèle d'équilibre général

- Supposons pour commencer que l'économie ne dure que **deux périodes** $t = 0$ et $t = 1$.

- Les **préférences instantanées des ménages** sont données par la fonction d'utilité[10].

$$u(c_t, \ell_t)$$

- Le ménage valorise à la fois la consommation c_t et le loisir ℓ_t, et décide à chaque période :
  - de son niveau de consommation c_t,
  - de son offre de travail h_t.

- La contrainte de temps du ménage vérifie :

$$\ell_t + h_t = 1$$

10. La fonction d'utilité est croissante et concave en chacun de ses arguments : $u_c > 0$, $u_l > 0$, $u_{cc} < 0$, $u_{ll} < 0$.

- Réécrivons l'utilité instantanée du ménage comme :

$$u(c_t, 1-h_t) = \ln c_t + \phi \ln(1-h_t)$$

et l'utilité intertemporelle comme :

$$\mathcal{U}(.) = \ln c_0 + \phi \ln(1-h_0) + \beta \left[\ln c_1 + \phi \ln(1-h_1)\right]$$

où β est le facteur d'escompte.

- La contrainte budgétaire intertemporelle est donnée par :

$$\underbrace{c_0 + \frac{c_1}{1+r}}_{\text{somme actualisée des consommations}} = \underbrace{w_0 h_0 + \frac{w_1 h_1}{1+r}}_{\text{somme actualisée des revenus salariaux}}$$

- Le Lagrangien associé au programme d'optimisation s'écrit :

$$\max_{\{c_0,c_1,h_0,h_1\}} \mathcal{L} = \ln c_0 + \phi \ln(1-h_0) + \beta\left[\ln c_1 + \phi \ln(1-h_1)\right] + \lambda\left[w_0 h_0 + \frac{w_1 h_1}{1+r} - c_0 - \frac{c_1}{1+r}\right]$$

- Les conditions sur la consommation sont standards et conduisent à la règle usuelle de Keynes-Ramsey.

- Les conditons sur les heures travaillées vérifient :

$$\begin{aligned} -\frac{\phi}{1-h_0} + \lambda w_0 &= 0 \\ -\beta\frac{\phi}{1-h_1} + \lambda\frac{w_1}{1+r} &= 0 \end{aligned}$$

- En réarrangeant, on obtient la condition suivante :

$$\frac{1-h_0}{1-h_1} = \left(\frac{1+\rho}{1+r}\right)\left(\frac{w_1}{w_0}\right)$$

- L'offre de travail relative est une fonction du salaire relatif w_1/w_0.
- Si w_0 augmente par rapport à w_1, le ménage augmente son offre de travail en $t=0$ relativement à l'offre de travail en $t=1$.
- Si r augmente (ρ diminue), l'offre de travail en $t=0$ augmente relativement à l'offre de travail en $t=1$.
- Ces réactions de l'offre de travail sont connues sous le nom de substitution intertemporelle de l'offre de travail (Lucas et Rapping, 1969 [11]).

11. Lucas et Rapping, 1969, Price Expectations and the Phillips Curve, American Economic Review.

- Dans le cas général, l'agent représentatif maximise son utilité intertemporelle en choisissant à chaque période :
    1. sa consommation, c_t
    2. son offre de travail, h_t

$$\mathcal{U}_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\ln c_t - \phi \frac{h_t^{1+\frac{1}{\eta}}}{1+\frac{1}{\eta}} \right)$$

où $\eta \in (0,1)$ est un paramètre de l'offre de travail.

- L'agent est confronté aux contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} a_{t+1} &= (1+r_t)\, a_t + w_t h_t - c_t \\ c_t &\geq 0,\ a_{t+1} \geq 0,\ a_0 > 0, \ell_t + h_t = 1 \end{aligned}$$

- Le Lagragien associé à ce programme vérifie :

$$\mathcal{L}_t = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\left(\ln c_t - \phi \frac{h_t^{1+\frac{1}{\eta}}}{1+\frac{1}{\eta}} \right) + \lambda_t \left(a_t \left(1 + r_t \right) + w_t h_t - c_t - a_{t+1} \right) \right)$$

- Les conditions du premier ordre vérifient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_t} - \lambda_t &= 0 \\ -\phi h_t^{\frac{1}{\eta}} + \lambda_t w_t &= 0 \\ -\lambda_t + \beta \lambda_{t+1} \left(1 + r_{t+1} \right) &= 0 \end{aligned}$$

- Des deux premières c1o, on déduit l'offre de travail :

$$\underbrace{\phi h_t^{\frac{1}{\eta}}}_{\text{désutilité marginale}} = \underbrace{w_t \frac{1}{c_t}}_{\text{gain marginal}}$$

- L'agent augmente ses heures travaillées jusqu'au point où une unité additionnelle de travail rapporte autant en termes d'utilité de la consommation (*rhs*) qu'elle ne coûte en termes de désutilité du travail (*lhs*).

- L'offre de travail vérifie :

$$h_t = \left(\frac{w_t}{\phi c_t}\right)^{\eta}$$

- De la première et troisième c1o, on déduit de manière usuelle la condition d'Euler :

$$\frac{c_{t+1}}{c_t} = \frac{1 + r_{t+1}}{1 + \rho}$$

- Comment mesure-t-on la sensibilité de l'offre de travail au salaire ?

- **Elasticité de Frisch**[12] **:** Mesure l'élasticité de l'offre de travail au salaire en gardant l'utilité marginale de la richesse constante, *ie.* mesure l'effet de substitution.

$$\varepsilon = \frac{u_h}{h\left(u_{hh} - \frac{u_{hc}^2}{u_{cc}}\right)}$$

▸ Annexe

12. Ragnar Anton Kittil Frisch (1895-1973) était un économiste norvégien co-lauréat du premier Prix Nobel d'économie avec Jan Tinbergen en 1969.

- En appliquant la formule pour notre spécification de la fonction d'utilité

$$\begin{aligned} u_h &= -\phi h^{\frac{1}{\eta}} \\ u_{hh} &= -\frac{\phi}{\eta} h^{\frac{1}{\eta}-1} \end{aligned}$$

et en remarquant que $u_{hc} = 0$ (l'utilité est séparable) l'élasticité de Frisch vérifie :

$$\varepsilon = \frac{\phi h^{\frac{1}{\eta}}}{h \frac{\phi}{\eta} h^{\frac{1}{\eta}-1}} = \eta$$

- Le paramètre η de la fonction d'offre de travail est donc l'élasticité de Frisch.

- En quoi est-ce important ?
- Les comportements d'offre de travail, absents des modèles de base, sont au coeur des théories modernes des fluctuations.
- Pour étudier les propriétés de ces modèles, il est nécessaire d'étalonner le paramètre η.
- On peut utiliser les études empiriques disponibles pour **"caler"** ce paramètre mais les résultats de la littérature sont loin d'être consensuels (micro vs. macro).
- Les élasticités sont faibles au niveau micro (de l'ordre de 0.8) et grandes au niveau macro (de l'ordre de 2.8) [13].

13. Chetty et al., 2011, Are Micro and Macro Labor Supply Elasticities Consistent ? A Review of Evidence on the Intensive and Extensive Margins, American Economic Review.

- Dans ce chapitre, on a développé un modèle d'équilibre général simple capable de prendre en compte les choix de consommation des agents, et leurs décisions d'offre de travail.

- Dans le prochain chapitre, nous allons étendre le modèle pour prendre en compte les chocs agrégés dans l'économie, et dériver les premiers modèles de fluctuations, *ie.* modèles de cycles réels.

- Les modèles de cycles réels et leurs premières extensions sont à l'origine de ce que l'on qualifie désormais de modèles d'équiblire général dynamique stochastique (DSGE).

Diagramme des phases

- Le **diagramme des phases** permet une analyse graphique dans le plan (c_t, k_t) du système défini par les équations (1) et (2).

- On commence par découper le plan (c_t, k_t) en 4 zones en précisant le **lieu géométrique** de stationnarité de la consommation (*c-locus*) et du capital (*k-locus*) :

  - **c-locus** $= \{(c_t, k_t) | \Delta c_t = 0\}$ qui est vérifié, en utilisant la condition $f'(k^*) = \rho + \delta$, pour tout niveau de consommation tel que $k_t = k^*$.

  - **k-locus** $= \{(c_t, k_t) | \Delta k_t = 0\}$ qui est vérifié en utilisant la condition $c^* = f(k^*) - \delta k^*$, pour tous les couples $(c(t), k(t))$ qui vérifient :

$$c_t = f(k_t) - \delta k_t$$

Go Back

Diagramme des phases

- L'équation d'évolution de la consommation (1) :

$$u^{'}(c_t) = \beta u^{'}(c_{t+1})\left(1 - \delta + f^{'}(k_{t+1})\right) \tag{5}$$

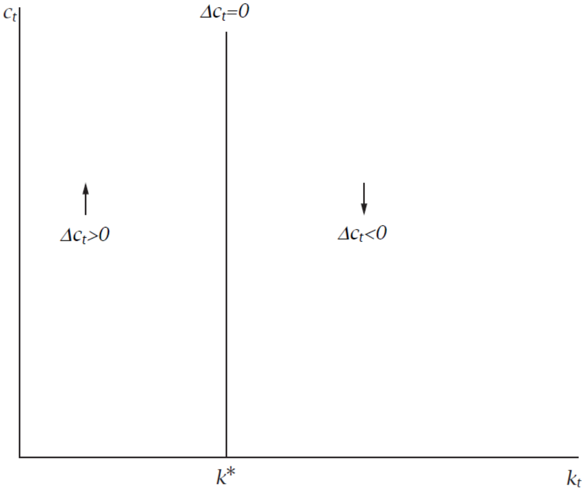
implique :

$$\begin{cases} \Delta c_t > 0 & \text{si } k_t < k^* \\ \Delta c_t = 0 & \text{si } k_t = k^* \\ \Delta c_t < 0 & \text{si } k_t > k^* \end{cases} \tag{6}$$

- Ces propriétés sont représentées sur la figure suivante.

Go Back

Diagramme des phases



Go Back

Diagramme des phases

- L'équation d'évolution du stock de capital (2) :

$$k_{t+1} = (1 - \delta)\, k_t + f\,(k_t) - c_t \tag{7}$$

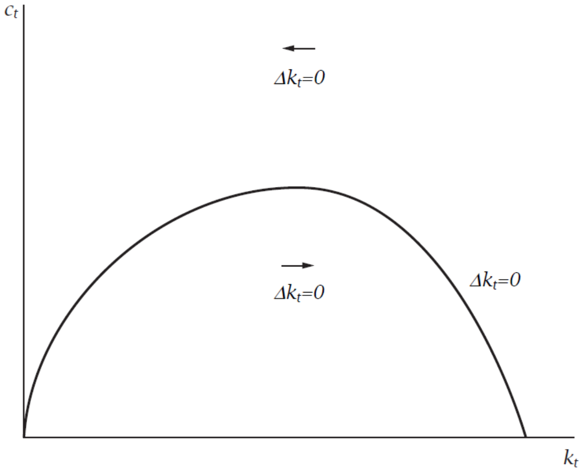
implique :

$$\begin{cases} \Delta k_t > 0 & \text{si } c_t < f(k_t) - \delta k_t \\ \Delta k_t = 0 & \text{si } c_t = f(k_t) - \delta k_t \\ \Delta k_t < 0 & \text{si } c_t > f(k_t) - \delta k_t \end{cases} \tag{8}$$

- Ces propriétés sont représentées sur la figure suivante.

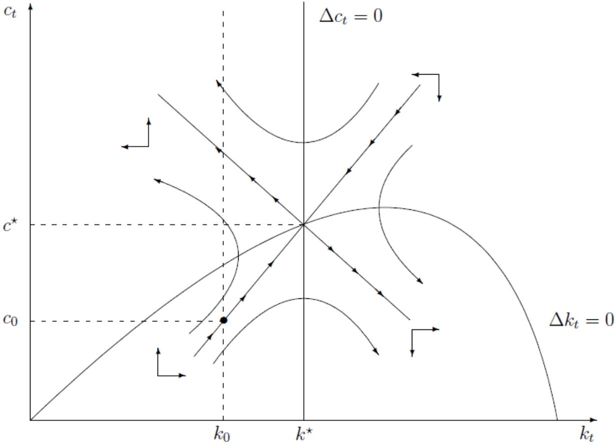
Go Back

Diagramme des phases



Go Back

Diagramme des phases



Go Back

- On peut établir une relation simple entre la condition de transversalité et la condition de Non-Ponzi Game (NPG).

- La condition d'Euler vérifie à chaque date :

$$\begin{aligned} u'(c_0) &= \beta u'(c_1)(1+r_1) \\ u'(c_1) &= \beta u'(c_2)(1+r_2) \\ u'(c_2) &= \beta u'(c_3)(1+r_3) \\ &\ldots \end{aligned}$$

- En itérant, on peut exprimer l'utilité marginale de la consommation à la date t en fonction de l'utilité marginale à la date initiale, ie. :

$$u'(c_t) = \frac{u'(c_0)}{\beta^t \prod_{s=1}^{t}(1+r_s)}$$

Go Back

- En remplaçant dans la condition de transversalité :

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)\, a_{t+1} = 0$$

- Il vient :

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)\, a_{t+1} = \lim_{t\to\infty} \beta^t \frac{u'(c_0)}{\beta^t \prod_{s=1}^{t} (1 + r_s)} a_{t+1} = 0$$

- Comme $u'(c_0)$ est fini, on retrouve alors la condition de Non-Ponzi Game (NPG) (*cf. chapitre 1*) :

$$\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(c_t)\, a_{t+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{a_{t+1}}{\prod_{s=1}^{t} (1 + r_s)} = 0$$

Go Back

- Pour une fonction d'utilité générique, $u(c_t, h_t)$, les conditions du premier ordre vérifient :

$$\begin{aligned} u_{c_t} &= \lambda_t \\ u_{h_t} &= -\lambda_t w_t \end{aligned}$$

- En négligeant l'indice de temps, t, et en remarquant que ces conditions dépendent de w et λ, on peut les réécrire de manière générique comme :

$$\begin{aligned} u_c\left(c\left(\lambda, w\right), h\left(\lambda, w\right)\right) &= \lambda \\ u_h\left(c\left(\lambda, w\right), h\left(\lambda, w\right)\right) &= -\lambda w \end{aligned}$$

- En différenciant par rapport à w, il vient :

$$\begin{aligned} u_{cc}\frac{\partial c}{\partial w} + u_{ch}\frac{\partial h}{\partial w} &= 0 \\ u_{hc}\frac{\partial c}{\partial w} + u_{hh}\frac{\partial h}{\partial w} &= -\lambda \end{aligned}$$

ie. un **système de deux équations à deux inconnues** en $\frac{\partial c}{\partial w}$ et $\frac{\partial h}{\partial w}$.

Go Back

- En résolvant, on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial w} = -\frac{\lambda u_{cc}}{u_{hh}u_{cc} - u_{hc}^2}$$

- Comme $u_h = -\lambda w \Leftrightarrow \lambda = -u_h/w$:

$$\frac{\partial h}{\partial w} = -\frac{\frac{u_h u_{cc}}{w}}{u_{hc}^2 - u_{hh}u_{cc}}$$

- Finalement, l'élasticité de Frisch vérifie :

$$\varepsilon = \frac{u_h}{h\left(u_{hh} - \frac{u_{hc}^2}{u_{cc}}\right)}$$

Go Back