DIRICHLET ET LES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES

Ce devoir est facultatif et franchement subtil.

Le célèbre *théorème de la progression arithmétique*, démontré en 1838, est l'œuvre du mathématicien allemand Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Sa preuve complète est hors de portée en MPSI, mais ce devoir se propose de vous en donner une vision raisonnablement éclairante dans quelques cas simples.

Théorème (Théorème de la progression arithmétique) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. L'ensemble $\mathbb{P}(a, b)$ des nombres premiers congrus à b modulo a est infini.

En deux mots, pour montrer qu'une partie A de $\mathbb{N}^*$ est infinie, il suffit de montrer que $\displaystyle\sum_{n\in A} \frac{1}{n^s} \underset{s\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$, mais cette remarque semi-triviale ne dévoile finalement pas grand-chose des subtilités qui suivent.

1 CARACTÈRES DE DIRICHLET

Pour tout $a \in \mathbb{N}^*$, on appelle *caractère de Dirichlet modulo a* toute fonction $\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui possède les propriétés suivantes :

— χ est a-périodique,

— pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$: $\chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$,

— pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\chi(n) = 0 \iff n \wedge a \neq 1$.

1) Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et χ un caractère de Dirichlet modulo a.

a) En utilisant le théorème de Lagrange dans le groupe $\mathrm{U}\left(\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}\right)$, montrer que χ est à valeurs dans $\mathbb{U} \cup \{0\}$.

b) Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{\chi(n)}{n^s}$ converge absolument pour tout $s > 1$. On pose alors $\displaystyle L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$.

Pour des raisons techniques, on ne s'intéressera en réalité dans ce devoir qu'à des caractères de Dirichlet à valeurs réelles, i.e. à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ d'après **1)a)**.

2) Soit $a \in \mathbb{N}^*$. On pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\chi_a(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \wedge a = 1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$

a) Montrer que χ_a est un caractère de Dirichlet modulo a.

b) Montrer que si $a \in \mathbb{P}$, alors pour tout $s > 1$: $L(s, \chi_a) = \left(1 - \dfrac{1}{a^s}\right) \zeta(s)$.

On admet que pour tout $s > 1$, dans le cas général : $\displaystyle L(s, \chi_a) = \zeta(s) \prod_{\substack{p\in\mathbb{P} \\ p\,|\,a}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$.

On peut démontrer cette relation par récurrence sur le nombre de diviseurs premiers de a, mais c'est assez pénible et une récurrence du même genre sera rédigée proprement en **6)a)**.

c) Montrer que $\zeta(s) \geqslant \dfrac{1}{s-1}$ pour tout $s > 1$, puis en déduire que $L(s, \chi_a) \underset{s\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$: $\chi'_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1\ [3] \\ -1 & \text{si } n \equiv -1\ [3] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

a) Montrer que χ'_3 est un caractère de Dirichlet modulo 3.

b) Montrer que pour tout $s > 1$:

$$\sum_{p\in\mathbb{P}(3,1)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2}\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_3(p)}{p^s} + \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi'_3(p)}{p^s}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{p\in\mathbb{P}(3,2)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2}\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_3(p)}{p^s} - \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi'_3(p)}{p^s}\right).$$

Pour montrer que les ensembles $\mathbb{P}(3,1)$ et $\mathbb{P}(3,2)$ sont infinis, il suffit donc de prouver que la fonction $\displaystyle s \longmapsto \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi'_3(p)}{p^s}$ est bornée au voisinage de 1 et que $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_3(p)}{p^s} \underset{s\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

2 Un théorème d'Abel

4) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum a_n$ converge et on pose pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{et} \qquad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k.$$

a) Montrer que la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in [0,1[$.

On pose alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in [0,1]$, y compris pour $x = 1$ car $\sum a_n$ converge.

b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$: $\quad f(x) - f_n(x) = R_n x^{n+1} - (1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} R_k x^k, \quad$ puis que :

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant 2 \sup_{k\geqslant n} |R_k|.$$

c) En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$ (*théorème d'Abel*), puis que f est continue sur $[0,1]$.

5) Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que la série $\sum \frac{b_n}{n}$ converge et on pose pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$:

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k x^{k-1}.$$

a) Montrer que la série $\sum b_n x^{n-1}$ converge absolument pour tout $x \in [0,1[$.

On pose alors $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^{n-1}$ pour tout $x \in [0,1[$.

b) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g sur $[0,x]$ pour tout $x \in [0,1[$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$: $\quad \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n} x^n, \quad$ puis que $\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n}$.

3 Back to Dirichlet

On rappelle que pour tout $x \in]-1,1[$: $\quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

6) Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et χ un caractère de Dirichlet modulo a à valeurs réelles.

a) Montrer que pour tous $s > 1$ et $N \in \mathbb{N}^*$: $\quad L(s,\chi) \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant N}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) = \sum_{n\in E_N} \frac{\chi(n)}{n^s} \quad$ où E_N est l'ensemble des entiers naturels non nuls dont tout diviseur premier est strictement supérieur à N.

b) En déduire que pour tout $s > 1$: $\quad \ln L(s,\chi) = -\sum_{p\in\mathbb{P}} \ln\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)$.

c) En déduire que la fonction $s \longmapsto \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi(p)}{p^s} - \ln L(s,\chi)$ est bornée sur $]1,+\infty[$.

7) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}^*$: $\quad \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_a(p)}{p^s} \underset{s\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

8) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_3'(k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

b) Montrer que pour tous $s > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ et $p \geqslant n+1$: $\quad \sum_{k=n+1}^{p} \frac{\chi_3'(k)}{k^s} = \frac{S_p}{p^s} - \frac{S_n}{(n+1)^s} + \sum_{k=n+1}^{p-1} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right) S_k$.

c) En déduire que la série $\sum \frac{\chi_3'(n)}{n^s}$ converge pour tout $s \in]0,1]$. On pose alors $L(s,\chi_3') = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi_3'(n)}{n^s}$.

d) Montrer que $L(\cdot,\chi_3')$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

e) Simplifier $\sum_{n=1}^{+\infty} \chi_3'(n)\, x^{n-1}$ pour tout $x \in [0,1[$, puis en déduire que $L(1,\chi_3') = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+x^2}$.

f) Montrer finalement que la fonction $s \longmapsto \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_3'(p)}{p^s}$ est bornée au voisinage de 1.

4 Pour aller plus loin

À l'issue de ce travail, il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 3 et une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3. On pose à présent pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

$$\chi_4'(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 1\ [4] \\ -1 & \text{si } n \equiv -1\ [4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \chi_5'(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv \pm 1\ [5] \\ -1 & \text{si } n \equiv \pm 2\ [5] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions χ_4' et χ_5' sont alors des caractères de Dirichlet modulo 4 et 5 respectivement auquel le raisonnement qui précède peut être appliqué sans vergogne. En principe, vous avez compris que la non-nullité de $L(1, \mathrm{ch}_4')$ et $L(1, \chi_5')$ est cruciale. En l'occurrence, cette fois : $L(1, \chi_4') = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} > 0$ et $L(1, \chi_5') = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2-x^3}{1+x+x^2+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\ln 2}{4} - 1 > 0.$

Quels ensembles infinis tire-t-on de ces deux nouveaux caractères de Dirichlet ? Pour tout $s > 1$:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}(4,1)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2}\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_4(p)}{p^s} + \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_4'(p)}{p^s}\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{p \in \mathbb{P}(4,3)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2}\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_4(p)}{p^s} - \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_4'(p)}{p^s}\right)$$

donc les ensembles $\mathbb{P}(4,1)$ et $\mathbb{P}(4,3)$ sont infinis. De même, pour tout $s > 1$:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}(5,1)\cup\mathbb{P}(5,4)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2}\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_5(p)}{p^s} + \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_5'(p)}{p^s}\right) \qquad \text{et} \qquad \sum_{p \in \mathbb{P}(5,2)\cup\mathbb{P}(5,3)} \frac{1}{p^s} = \frac{1}{2}\left(\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_5(p)}{p^s} - \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\chi_5'(p)}{p^s}\right),$$

donc les ensembles $\mathbb{P}(5,1) \cup \mathbb{P}(5,4)$ et $\mathbb{P}(5,2) \cup \mathbb{P}(5,3)$ sont infinis. En réalité, les quatre ensembles $\mathbb{P}(5,1)$, $\mathbb{P}(5,2)$, $\mathbb{P}(5,3)$ et $\mathbb{P}(5,4)$ sont infinis, mais nous n'avons pas collecté assez de caractères de Dirichlet modulo 5 pour le démontrer.

La preuve générale du théorème de la progression arithmétique suit les grandes lignes du travail qui précède, mais elle leur adjoint de nouvelles idées techniques :

— une description plus poussée des caractères de Dirichlet modulo a,

— une théorie des fonctions dérivables de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, dont une définition du logarithme sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$,

— une preuve générale de la non-nullité de $L(1, \chi)$ pour tout caractère de Dirichlet distinct de χ_a.