Mathématiques objectif BAC
Fiches thématiques de 1STL*

Françoise Chancel, Hélène Dietrich, Patrick Imbert, Christine Lagrange , Philippe Pham Ba Nien, Pierre Wulveryck

†

Lycée Paul Valéry - Sète

*. This document has been written using the GNU $\mathrm{T_EX_{MACS}}$ text editor (see `www.texmacs.org`).

†. Édition du 3 juillet 2017

Table des matières

Chapitre 1
Second degré

1.1 Résoudre $ax^2+bx+c=0$; $\Delta=b^2-4ac$

$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
L'équation admet deux solutions $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	L'équation admet une seule solution $x=-\dfrac{b}{2a}$	L'équation n'admet pas de solution.

Exemples

Résoudre $x^2-7x+12=0$	Résoudre $-x^2+4x-4=0$	Résoudre $x^2+4x+10=0$
$a=1$ $b=-7$ $c=12$ $\Delta=(-7)^2-4\times1\times12=49-48$ $\Delta=1$ $x_1=\frac{7-\sqrt{1}}{2}=3$ $x_2=\frac{7+\sqrt{1}}{2}=4$	$a=-1$ $b=4$ $c=-4$ $\Delta=(4)^2-4\times(-1)\times(-4)=16-16$ $\Delta=0$ $x_1=\frac{4}{2\times1}$ $x_1=2$	$a=1$ $b=4$ $c=10$ $\Delta=4^2-4\times1\times10$ $\Delta=-24$
$S=\{3;4\}$	$S=\{2\}$	$S=\varnothing$

1.2 Étudier le signe de ax^2+bx+c en fonction de x réel

$\Delta>0$	x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
	ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	
$\Delta=0$ $\Delta<0$	ax^2+bx+c est du signe de a sur $\mathbb{R}$.						

Établir le tableau de signes de $x^2-7x+12$

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$x^2-7x+12$		0	0	

Établir le tableau de signes de $-x^2+7x-12$

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$
$-x^2+7x-12$		0	0	

Étudier le signe de x^2-4x+4 pour $x\in\mathbb{R}$
Réponse : $\Delta=16-16=0$ et $a=1>0$ donc $x^2-4x+4\geqslant0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Étudier le signe de $x^2+4x+10$ pour $x\in\mathbb{R}$
Réponse : $\Delta=16-40<0$ et $a=1>0$ donc $x^2+4x+10>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Chapitre 2
Dérivation

2.1 Savoir calculer la dérivée d'une fonction

Fonctions usuelles			
$f(x)$	D_f	$f'(x)$	Exemples
$f(x)=ax+b$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$f(x)=5$ $\quad f'(x)=...$
			$f(x)=x$ $\quad f'(x)=...$
$f(x)=x^n$ n entier naturel	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$f(x)=x^7$ $\quad f'(x)=...$
$f(x)=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	
$f(x)=\frac{1}{x^n}$ n entier naturel	$\mathbb{R}^*$	$f'(x)=-\frac{n}{x^{n+1}}$	$f(x)=\frac{1}{x^5}$ $\quad D_f=\mathbb{R}^*$ $\quad f'(x)=...$
$f(x)=\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$f(x)=\sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=...$	
$f(x)=\cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=...$	

Opérations sur les fonctions			
$f(x)$	D	$f'(x)$	Exemples
$f(x)=k\cdot u(x)$ k coefficient réel	D_u	$f'(x)=k\cdot u'(x)$	$f(x)=4x^5$
$f(x)=u(x)+v(x)$	$D_u\cap D_v$	$f'(x)=u'(x)+v'(x)$	$f(x)=12x^2+4x^5+2$
$f(x)=u(x)\cdot v(x)$	$D_u\cap D_v$	$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$	$f(x)=x\sqrt{x}$; $x>0$
$f(x)=\frac{1}{u(x)}$		$f'(x)=-\frac{u'(x)}{u^2(x)}$	
$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$		$f'(x)=-\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$	$f(x)=\frac{3x+1}{4x^2+2}$ $u(x)=$ $\quad u'(x)=$ $v(x)=$ $\quad v'(x)=$

Fonctions programme terminale			
$f(x)$	D	$f'(x)$	Exemples

2.2 Utilisation de la dérivée

2.2.1 Étude des variations d'une fonction

Question	Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.
Que dois-je faire ?	1- Calculer f' la fonction dérivée de f.
	2- Étudier le signe de $f'(x)$ sur son ensemble de définition.
	3- Établir le tableau de variations sur son ensemble de définition.

Exemple 2.1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 + 12x + 1$.
Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

Solution

Exemple 2.2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 1$.
Étudier les variations de la fonction f sur son ensemble de définition.

Solution

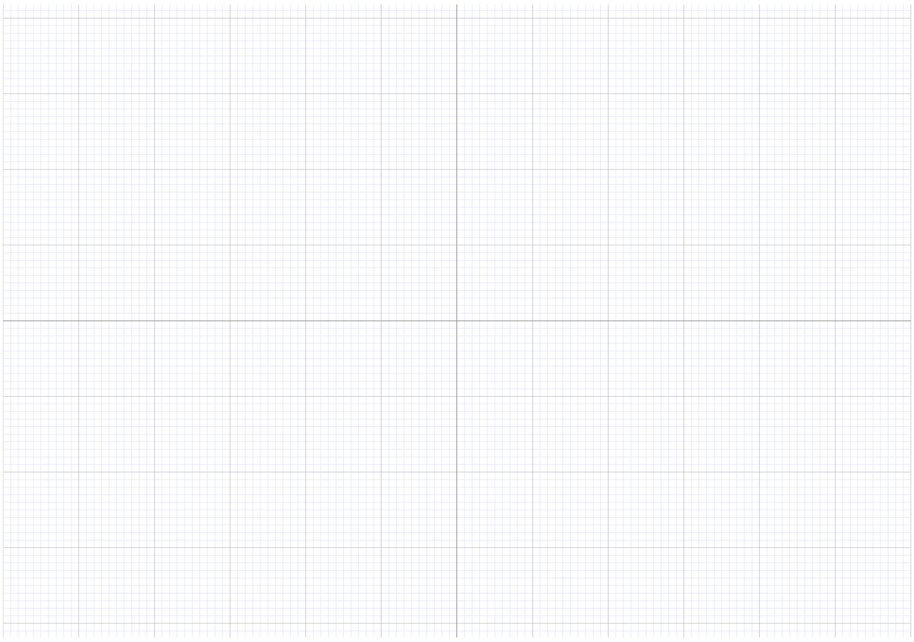
2.2.2 Notion de tangente

Exemple 2.3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2$.

a) Étudier les variations de f.

b) Calculer $f'(1)$.

c) Construire la droite passant par $M(1; f(1))$ de coefficient directeur $f'(1)$. C'est la tangente à C_f au point d'abscisse $x = 1$.



2.2.3 Vitesse instantanée

Exemple 2.4. Une particule se déplace d'une façon rectiligne en fonction du temps (exprimé en secondes). Sa position x en fonction du temps t est donné par : $x(t) = 2t^3 - 12t^2 + 20t + 6$
$x(t)$ est exprimé en mètres.

a) Donner la position de la particule au bout de 2 secondes.

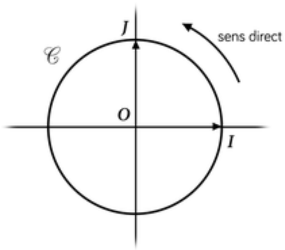
b) Sa vitesse instantanée au bout de 2 secondes est donné par : $v(2) = x'(2)$. Calculer cette vitesse instantanée.

Chapitre 3
Trigonométrie

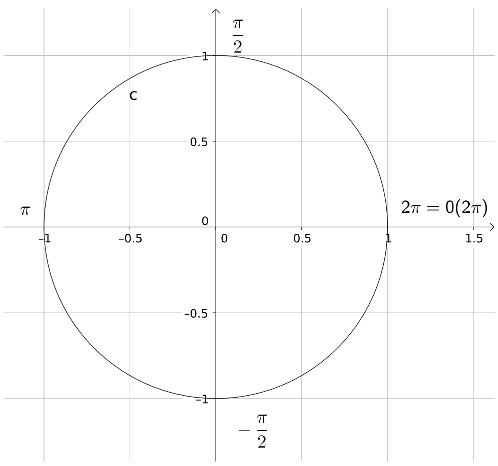
3.1 Mesure en radians d'un angle orienté

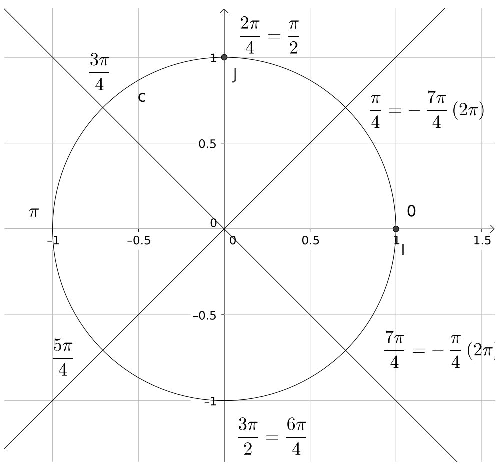
3.1.1 Cercle trigonométrique

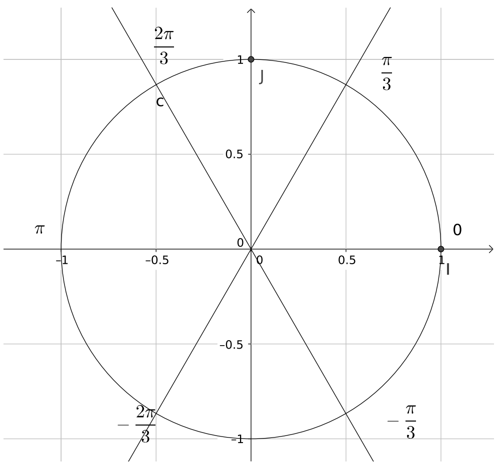
C'est le cercle de centre O, de rayon 1 et orienté dans le sens direct.

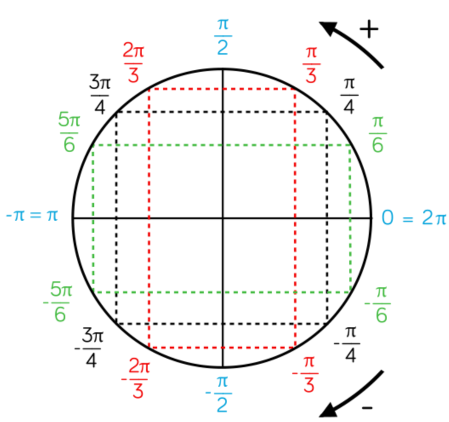


3.1.2 Mesure d'un arc orienté







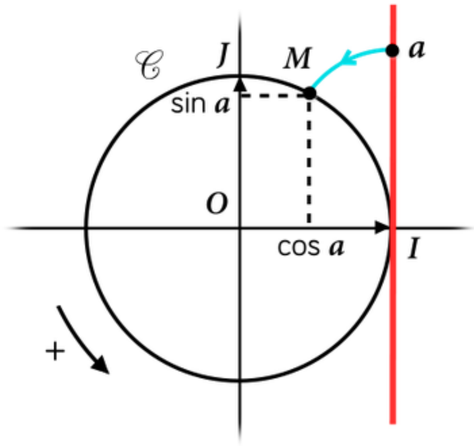


3.2 Cosinus et sinus d'un angle orienté

3.2.1 Définitions

$(O;\vec{\mathrm{OI}};\vec{\mathrm{OJ}})$est un repère orthonormé.
$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique.

x est une mesure de l'angle orienté $(\vec{\mathrm{OI}};\vec{\mathrm{OM}})$
x est la mesure de l'arc IM
x est la mesure du segment (orienté) $[Ia]$



Exemple : $x = \frac{\pi}{3}$
M est l'image de $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.
Les coordonnées de M dans le repère $(O;\vec{\mathrm{OI}};\vec{\mathrm{OJ}})$ sont :
$$\begin{cases} x_M = \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \\ y_M = \sin x = \sin\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

3.2.2 Valeurs remarquables

Valeurs remarquables		
$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$	$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$	$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

3.2.3 Savoir faire

Déterminer les valeurs des lignes trigonométriques suivantes :

$\cos\frac{2\pi}{3} =$ $\qquad$ $\cos\frac{3\pi}{2} =$ $\qquad$ $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) =$

$\sin\frac{5\pi}{6} =$ $\qquad$ $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) =$ $\qquad$ $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) =$

Déterminer x réel tel que

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$
$x =$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$
$x =$

$$\begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$
$x =$

$$\begin{cases} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$
$x =$

Chapitre 4
Fonctions circulaires

4.1 Définition

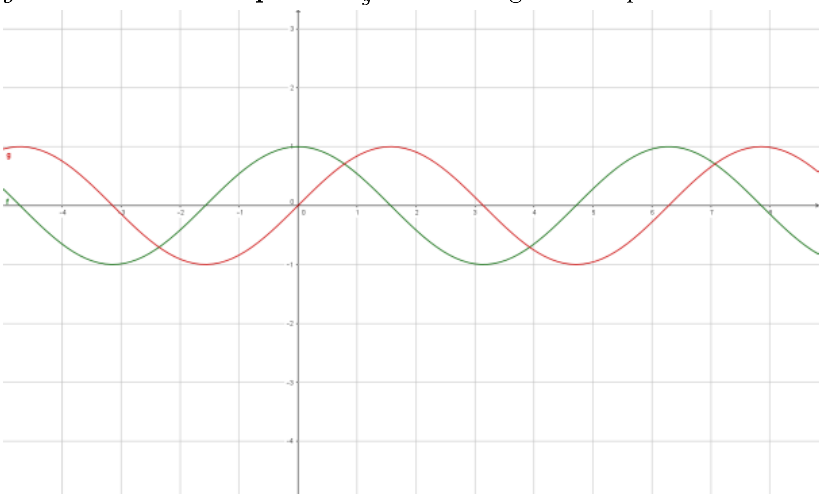
$f$et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \cos x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sin x$$

4.2 Propriétés

f et g sont **2π périodiques**.

f est une fonction **paire**. C_f admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.
g est une fonction **impaire**. C_g admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



4.3 Dérivée

f'et g' sont les fonctions dérivées de f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f'(x) = -\sin x \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \cos x$$

Chapitre 5
Suites réelles

5.1 Définition

5.1.1 Par récurrence

Pour tout $n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$ a) Calculer u_1, u_2. b) calculer u_{15} en utilisant la calculatrice (2 méthodes).

Mode suite	$\left.\begin{array}{ll} \text{4 entrer} & \to u_0 \\ {*}\,3-2\,\text{entrer} & \to u_1 \\ \text{entrer} & \to u_2 \\ & \ldots \\ \text{entrer} & \to u_{20} \end{array}\right\}$ Compter de tête

5.1.2 Par une formule explicite

Pour tout $n \in \mathbb{N}: u_n = 3n - 2$ Calculer u_0, u_1, u_2 et u_{20}.

5.2 Suite géométrique

Si en multipliant un terme par un nombre constant on obtient le terme suivant, on dit que la suite est géométrique. Ce nombre constant est la raison de la suite, on le note q [5.1].

Formules	Par récurrence	$u_{n+1} = q \cdot u_n$
	Explicite	$u_n = u_0 \cdot q^n$

Exemple 5.1.

Pour tout $n \in \mathbb{N} \begin{cases} u_0 = 350 \\ u_{n+1} = 0,7u_n \end{cases}$

a) Calculer u_1, u_2.

$u_1 =$

$u_2 =$

b) Exprimer u_n en fonction de n

$u_n =$

c) En déduire u_{20}.

$u_{20} =$

5.1. $u_{n+1} = q \cdot u_n$ donc $q = u_{n+1}/u_n$. q est donc un **quotient** d'où la lettre utilisée.

Augmenter de $t\%$ revient à multiplier par $1+\dfrac{t}{100}$
Diminuer de $t\%$ revient à multiplier par $1-\dfrac{t}{100}$

Exemple 5.2. Le service commercial d'un journal a constaté que chaque année il enregistre une baisse du nombre d'abonnés de 2%. En 2015, le journal comptait 4000 abonnés.

On note u_n le nombre d'abonnés en $2015+n$.

a) Calculer le nombre d'abonnés en 2016.

b) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison $q=0,98$ et $u_0=4000$

c) Déterminer u_n en fonction de n. En déduire le nombre d'abonnés en 2025.

5.3 Algorithmes

Calcul d'un terme de la suite	Calcul du premier rang N pour lequel $u_n >$ valeur ou bien $u_n <$ valeur
Exemple : $u_0 = 4000$; $u_{n+1} = 0,98u_n$	
on cherche la valeur de u_n	Même suite ; on cherche la première valeur de n pour laquelle $u_n < 3000$

```
U ⟵ 4000
Pour I allant de 1 à N
  U ⟵ 0,98U
Fin_Tant_que
```

```
N ⟵ 0
U ⟵ 4000
Tant que U ⩾ 3000
  U ⟵ 0,98U
  N ⟵ N+1
Fin_Tant_que
```

Calcul des sommes des termes de la suite

5.4 Programme de terminale

5.4.1 Limites

(u_n) est une suite géométrique de raison q positive.

$$\text{si } 0 \leqslant q < 1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

$$\text{si } q > 1 \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

5.4.2 Sommes de termes consécutifs d'une suite géométrique

$$q \neq 1 \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1\text{er terme}\cdot\frac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$$

$$q \neq 1 \qquad u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u_0 \cdot \frac{1-q^{\text{n+1}}}{1-q}$$

1. **a.** À quoi sert la ligne 8 ?
   b. La valeur affichée en exécutant cet algorithme est 12. Que signifie ce résultat ?
2. On estime que la durée de vie de l'installation sera d'environ 25 ans.
   Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{24}$ et interpréter le résultat.

Chapitre 6
Nombres complexes

6.1 Définitions

- i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.
- **Forme algébrique** d'un nombre complexe : $z = a + ib$ avec a et b réels.
  a est la **partie réelle** de z. b est la **partie imaginaire** de z.
- **Conjugué** de z, noté $\bar{z}$: $\bar{z} = a - ib$

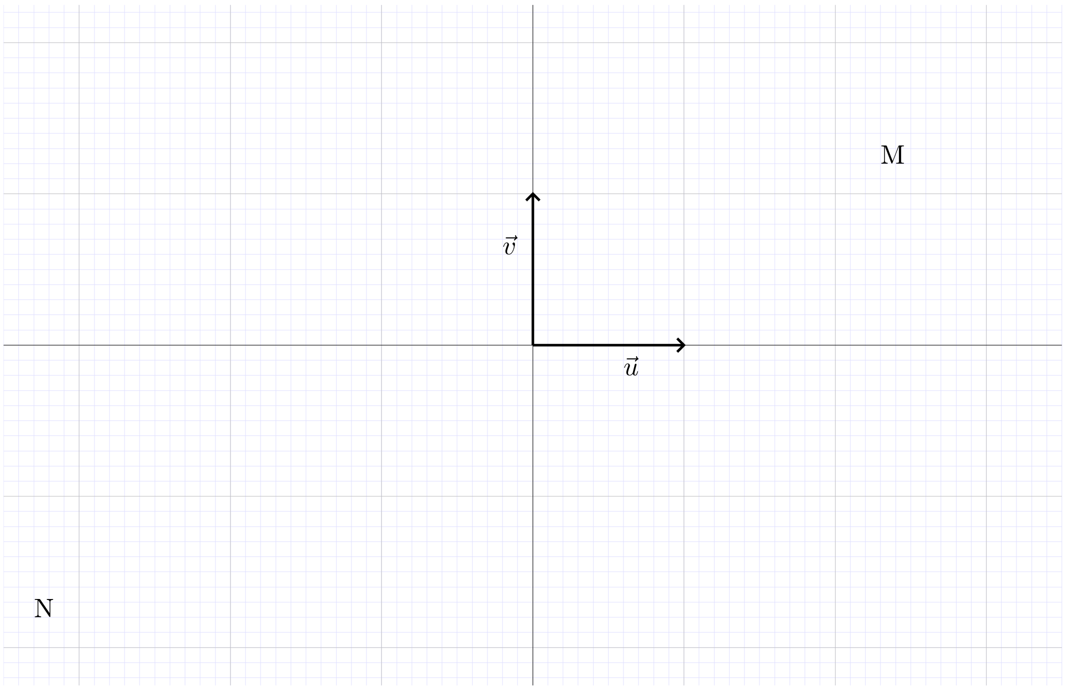
Exemple 6.1. $z = 2 + 3i$ $\bar{z} = 2 - 3i$

	z	$\bar{z}$
partie réelle	$\mathfrak{Re}(z) =$	$\mathfrak{Re}(\bar{z}) =$
partie imaginaire	$\mathfrak{Im}(z) =$	$\mathfrak{Im}(\bar{z}) =$

remarque : Le conjugué de $\bar{z}$ ...

6.2 Interprétation géométrique

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ M est le point d'**affixe** $z = 2 + i$ (on dit aussi l'image de M est $z = 2 + i$), M' est le point d'affixe $\bar{z}$.



6.3 Définitions

Module de z : lorsque $z = a + ib$ alors $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Si l'affixe de z est M alors $|z| = \mathrm{OM}$.

Argument de z : $\arg z = \left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{OM}}\right) (2\pi)$

6.4 Forme trigonométrique

À savoir :	$\cos\theta = \dfrac{a}{\lvert z\rvert}$	$\sin\theta = \dfrac{b}{\lvert z\rvert}$	$\theta = \arg z$

La forme trigonométrique de z est :

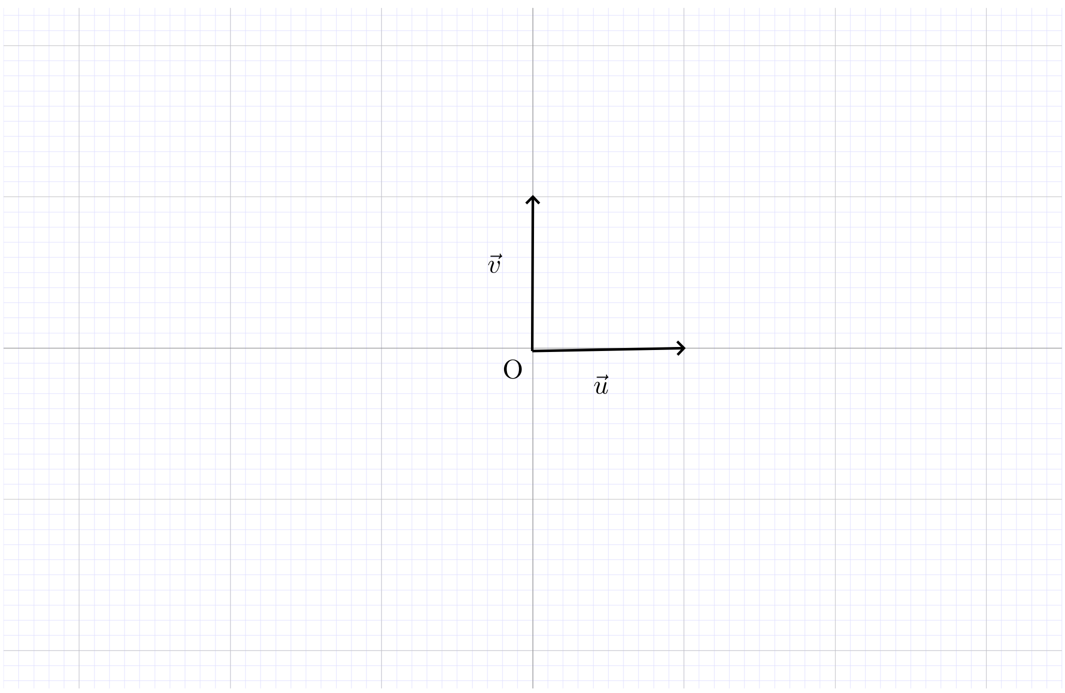
$$z = |z| (\cos\theta + i\sin\theta)$$

Exemple 6.2. Soit z un nombre complexe tel que $z = \sqrt{3} - i$. Calculer $|z|$ et $\arg z$.

Exemple 6.3. On donne $|z| = 2$ et $\arg z = \dfrac{\pi}{4} (2\pi)$. Déterminer la forme algébrique de z.

Exemple 6.4. On considère le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$ et le point M d'affixe $z = \sqrt{5} + 2i$.

Faire une représentation graphique. M appartient-il au cercle de centre O et de rayon 8 ? Justifier.

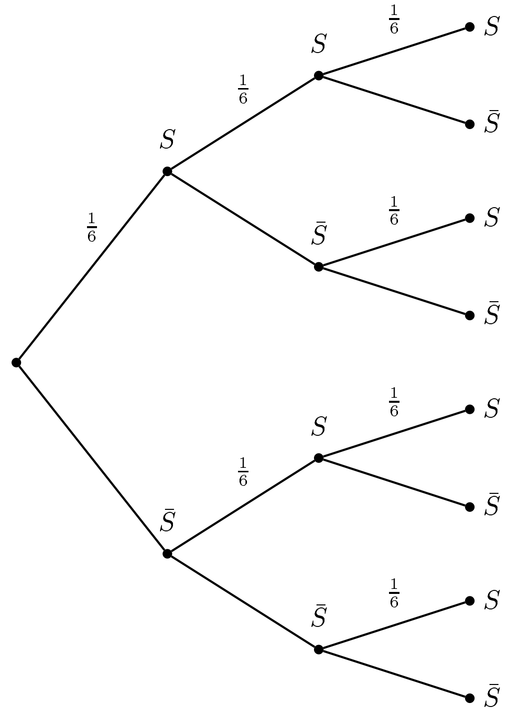


Chapitre 7
Probabilités

7.1 Variable aléatoire

Exemple 7.1. On lance un dé cubique équilibré 3 fois de manière indépendante. On s'intéresse à l'ontention de la face « 6 ». On note X la fonction qui, à 3 lancers, associe le nombre d'obtentions de la face « 6 ». X est une **variable aléatoire**.

Arbre associé à la situation : On note S : « obtenir la face « 6 » ».



X	probabilité de la branche
3	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=$
2	$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=$
2	$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=$
1	

$p(X=0)=$

Loi de probabilité

x_i	0	1	2	3
$p(X=x_i)$				

$p(X=1)=$

$p(X=2)=$

$p(X=3)=$

Espérance : c'est un *indicateur de position* (moyenne théorique)
$E(X)=x_1\cdot p(X=x_1)+x_2\cdot p(X=x_2)+x_3\cdot p(X=x_3)+x_4\cdot p(X=x_4)$

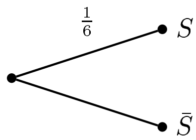
$E(X)=$

Écart-type : c'est un *indicateur de dispertion* (à la calculatrice)

$$\sigma\approx$$

7.2 Schéma de Bernoulli

Définition 7.2. *Épreuve de Bernoulli*
C'est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues (possibles).



Exemple 7.3. On lance un dé ; S : « On obtient la face 6 »

Définition 7.4. *Expérience de Bernoulli*
C'est la répétition (plusieurs fois) de manière indépendante d'une épreuve de Bernoulli.

Définition 7.5. *Loi binomiale*
C'est la loi de probabilité associée à une expérience de Bernoulli.

Exemple 7.6. On lance dix fois un dé cubique équilibré. On s'intéresse à l'obtention de la face 6. On note X la variable aléatoire qui associe à cette série de lancers le nombre face 6 obtenues.

a) X suit une loi binomiale. Indiquez les paramètres de cette loi.

b) Établir la loi de probabilité de l'expérience décrite ci-dessus.

Espérance	$E(X) = np$
Écart-type	$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

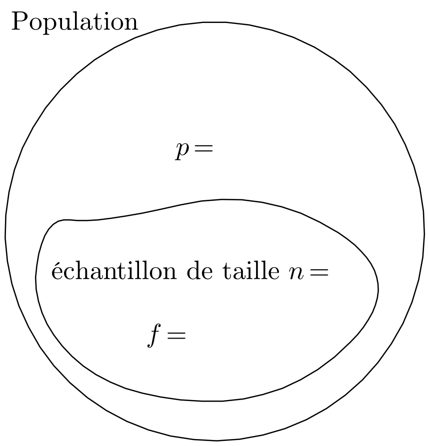
Chapitre 8

Échantillonnage

8.1 Intervalle de fluctuation

Exemple 8.1. Un laboratoire affirme que son médicament est efficace à 75%. On teste 100 personnes ayant expérimenté le médicament, 64 ont guéri.

L'affirmation du laboratoire peut-elle être remise en cause ?



Définition 8.2. *Intervalle de fluctuation au seuil de 95%.*

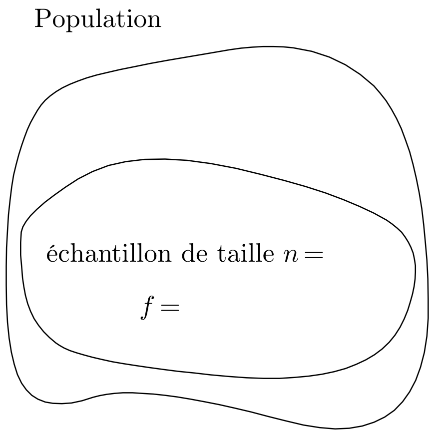
$$n \geqslant 30 \qquad\qquad 0,2 \leqslant p \leqslant 0,8$$

$$I = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} \,; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Convention 8.3. Prise de décision

8.2 Intervalle de confiance

Exemple 8.4. Sur 100 malades testés, 64 ont guéri. Déterminer l'intervalle de confiance au seuil de 95%. Interpréter



Définition 8.5. *Intervalle de confiance au seuil de 95%.*

$$n \geqslant 30$$

$$I = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} \,; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Chapitre 9
Produit scalaire

9.1 Définition

Attention : Dans toute la suite le repère utilisé est un **repère orthonormé**.

Le produit scalaire de deux vecteurs est le nombre réel noté : $\vec{u} \cdot \vec{v}$

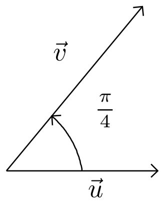
Si on connait les coordonnées de $\vec{u}(a;b)$ et $\vec{v}(a';b')$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb'$

Si on connait les normes $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ et l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$

On peut également procéder par projection orthogonale du vecteur $\vec{v}$ sur le vecteur $\vec{u}$.

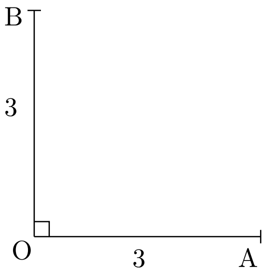
9.2 Exemples

1. $\|\vec{u}\| = 2$
   $\|\vec{v}\| = 3$



$\vec{u} \cdot \vec{v} = ...$

2.



$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = ...$

3. Sachant que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$, $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 2$, calculer une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$.

9.3 Propriétés

On liste les diverses propriétés

Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $a = 0$ et $b = 0$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Si $\vec{v} = \vec{0}$ alors

Si $\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ alors

Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ alors

9.4 Déterminer l'angle orienté formé par deux vecteurs

Utiliser la calculatrice

9.5 Applications en physique

Travail mécanique W d'une force $\vec{f}$ sur un déplacement $\vec{D}$: $W = \vec{f} \cdot \vec{D}$

Une force appliquée sur un point fixe ($\vec{D} = \vec{0}$) ne fournit aucun travail mécanique.