Modélisation de l'inclinaison de la Terre (20°)

Tous ce modèle a été effectué à partir du modèle du groupe quokka feal (IPCC/Modele$_3$/$Modele_3.pdf$)

On travaille dans le repère terrestre non incliné, où :

- Le vecteur direction du Soleil, non incliné, s'écrit

$$\mathbf{s}_0(t) \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\mathbf{s}_0\| = 1,$$

  où $\omega = \dfrac{2\pi}{24\,\mathrm{h}}$.

- Le vecteur normal unitaire à la surface terrestre en un point de colatitude θ et longitude φ (sans inclinaison) :

$$\mathbf{n}(\theta,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi \\ \sin\theta\,\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Inclinaison $\varepsilon = 20^\circ$ autour de l'axe X

On définit la matrice de rotation $R_X(\varepsilon)$ autour de l'axe X :

$$R_X(\varepsilon) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Pour $\varepsilon = 20^\circ$, on note numériquement

$$\cos(20^\circ) \approx 0{,}9397, \qquad \sin(20^\circ) \approx 0{,}3420,$$

mais on gardera la notation $\cos\varepsilon$ et $\sin\varepsilon$ pour plus de clarté symbolique.

1. Définition du vecteur normal incliné

On définit le vecteur normal incliné en chaque point (θ,φ) par :

$$\mathbf{n}'(\theta,\varphi) \;=\; R_X(\varepsilon)\,\mathbf{n}(\theta,\varphi).$$

Les composantes de $\mathbf{n}(\theta,\varphi)$ sont :

$$\mathbf{n}(\theta,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi \\ \sin\theta\,\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En multipliant par $R_X(\varepsilon)$, on obtient :

$$\mathbf{n}'(\theta,\varphi) \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varepsilon & -\sin\varepsilon \\ 0 & \sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi \\ \sin\theta\,\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi \\ \cos\varepsilon\,\bigl(\sin\theta\,\sin\varphi\bigr) \;-\; \sin\varepsilon\,\bigl(\cos\theta\bigr) \\ \sin\varepsilon\,\bigl(\sin\theta\,\sin\varphi\bigr) \;+\; \cos\varepsilon\,\bigl(\cos\theta\bigr) \end{pmatrix}.$$

On définit alors :

$$\begin{cases} n'_x(\theta,\varphi) \;=\; \sin\theta\,\cos\varphi, \\ n'_y(\theta,\varphi) \;=\; \cos\varepsilon\,\sin\theta\,\sin\varphi \;-\; \sin\varepsilon\,\cos\theta, \\ n'_z(\theta,\varphi) \;=\; \sin\varepsilon\,\sin\theta\,\sin\varphi \;+\; \cos\varepsilon\,\cos\theta. \end{cases}$$

2. Produit scalaire $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{s}_0$

Le vecteur Soleil non incliné reste :

$$\mathbf{s}_0(t) \;=\; \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ -\cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme la troisième composante de $\mathbf{s}_0$ est nulle, le produit scalaire ne fait intervenir que n'_x et n'_y :

$$\mathbf{n}'(\theta,\varphi)\,\cdot\,\mathbf{s}_0(t) \;=\; n'_x(\theta,\varphi)\,\big[-\sin(\omega t)\big] \;+\; n'_y(\theta,\varphi)\,\big[-\cos(\omega t)\big] \;+\; n'_z(\theta,\varphi)\,\times 0.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbf{n}'(\theta,\varphi)\,\cdot\,\mathbf{s}_0(t) &= -\big[\sin\theta\,\cos\varphi\big]\,\sin(\omega t) \;-\; \Big[\cos\varepsilon\,\sin\theta\,\sin\varphi \;-\; \sin\varepsilon\,\cos\theta\Big]\,\cos(\omega t) \\ &= -\sin\theta\,\cos\varphi\,\sin(\omega t) \;-\; \cos\varepsilon\,\sin\theta\,\sin\varphi\,\cos(\omega t) \;+\; \sin\varepsilon\,\cos\theta\,\cos(\omega t). \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon = 20°$, on peut remplacer numériquement $\cos\varepsilon \approx 0{,}9397$ et $\sin\varepsilon \approx 0{,}3420$, donnant :

$$\mathbf{n}' \cdot \mathbf{s}_0 \;\approx\; -\sin\theta\,\cos\varphi\,\sin(\omega t) \;-\; 0{,}9397\,\sin\theta\,\sin\varphi\,\cos(\omega t) \;+\; 0{,}3420\,\cos\theta\,\cos(\omega t).$$

3. Condition “jour” et expression du flux local

La condition pour qu'un point (θ,φ) soit éclairé (“jour”) est

$$\mathbf{n}'(\theta,\varphi)\,\cdot\,\mathbf{s}_0(t) \;<\; 0,$$

soit explicitement :

$$-\sin\theta\,\cos\varphi\,\sin(\omega t) \;-\; \cos\varepsilon\,\sin\theta\,\sin\varphi\,\cos(\omega t) \;+\; \sin\varepsilon\,\cos\theta\,\cos(\omega t) \;<\; 0.$$

En convention, si $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{s}_0 < 0$, on définit le flux surfacique local par

$$PS_{\mathrm{loc}}(\theta,\varphi,t) \;=\; PS\,\big[-\mathbf{n}'(\theta,\varphi)\,\cdot\,\mathbf{s}_0(t)\big].$$

Sinon (côté nocturne), $PS_{\mathrm{loc}}(\theta,\varphi,t) = 0$.