① Stabilire se $W \leq \mathbb{R}^2$ con $W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y - 3x = 1 \}$

Poiché $\mathbb{R}^2$ è spazio vettoriale con 0 vettore nullo $\Rightarrow$ provo se $0 \in W$:

sia quindi $w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2(0) - 3(0) \neq 1 \Rightarrow$ quindi $W \not\leq \mathbb{R}^2$ poiché W non ammette il vettore nullo.

② Stabilire se $W \leq \mathbb{R}^2$ con $W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2y - 3x = 0 \}$

W può essere sottospazio in quanto ammette 0 come elemento nullo.

Siano $w_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ $w_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2(x_1 + x_2) - 3(y_1 + y_2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{2x_1 - 3y_1}_{w_1} + \underbrace{2x_2 - 3y_2}_{w_2} = 0$ è vero

Sia $\lambda \in K$: $\lambda(w) \in W \Rightarrow w = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda(w) = \lambda x + \lambda y \Rightarrow 2(\lambda x) - 3(\lambda y) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda(2x - 3y) = 0$ è vero. Quindi $W \leq \mathbb{R}^2$ è sottospazio

③ Stabilire se $W \leq \mathbb{R}^2$ con $W = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \land y \geq 0 \}$

W è spazio vettoriale in quanto ammette $0 \in W \Rightarrow x = 0 \land y = 0$

Sia $w_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ e $w_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow (x_1 + x_2) \leq 0 \land (y_1 + y_2) \geq 0$ è vero $\forall x, y \in W$

Sia $\lambda \in K$ e $w = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow$ noto che $\forall \lambda \geq 0$ $\lambda(x) \leq 0 \land \lambda(y) \geq 0$ è vero ma non $\forall \lambda \leq 0$

poiché la seconda proprietà non è verificata $\Rightarrow W \not\leq \mathbb{R}^2$

④ Stabilire se $W \leq \mathbb{R}^3$ con $W = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - x = 7 \}$

$W \not\leq \mathbb{R}^3$ in quanto non ammette l'elemento nullo.

⑤ Stabilire se $W \leq \mathbb{R}^3$ con $W = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \}$

$0 \in W$ in quanto $2(0) + 3(0) - 0 = 0 \Rightarrow$ potrebbe essere sottospazio

Sia quindi $w_1 = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$ $w_2 = \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix}$ e verifico se $w_1 + w_2 \in W$: $w_1 + w_2 = \begin{bmatrix} x_1' + x_1'' \\ x_2' + x_2'' \\ x_3' + x_3'' \end{bmatrix}$

$\Rightarrow 2(x_1' + x_2'') + 3(x_2' + x_2'') - (x_3' + x_3'') = 7 \Leftrightarrow 2x_1' + 2x_2'' + 3x_2' + 3x_2'' - x_3' + x_3'' = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{2x_1' + 3x_2' - x_3'}_{w_1} + \underbrace{2x_1'' + 3x_2'' - x_3''}_{w_2} = 0$ vero

Assumiamo adesso che $\forall \lambda \in K : \lambda(w) \in W$:

sia allora $w = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda(w) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \Rightarrow 2(\lambda x_1) + 3(\lambda x_2) - (\lambda x_3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\lambda x_1 + 3\lambda x_2 - \lambda x_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda(2x_1 + 3x_2 - x_3) = 0$ è vero $\forall \lambda \in K$

quindi $W \leq \mathbb{R}^3$ è sottospazio

(6) Stabilire se $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ siano l. dipendenti o meno

Sia $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \Leftrightarrow a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_1 \\ 3a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_3 \\ 0 \\ 2a_3 \end{bmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 + a_3 \\ a_1 + a_2 \\ 3a_1 + a_2 + 2a_3 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ 3a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} a_1 = -a_3 \\ a_2 = -a_1 \\ 2a_3 = -3a_1 - a_2 \end{cases} \begin{cases} a_1 = -a_3 \\ a_2 = -a_1 \\ 2a_3 = -2a_1 \end{cases} \begin{cases} a_1 = -a_3 \\ a_2 = -a_1 \\ \frac{\cancel{2}a_3}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{2}a_3}{\cancel{2}} \end{cases} \begin{cases} a_1 = a_3 \\ a_2 = -a_1 \\ a_3 = -a_3 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_3 = -a_1 \\ a_2 = -a_1 \\ a_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v = \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_1 \\ -a_1 \end{bmatrix}$ è soluzione non nulla $\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sono l. dipendenti

(7) Dimostrare che $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $v_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono base di $\mathbb{R}^2$. Trovare poi le componenti di $v_3 = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}$ rispetto la base.

Dimostriamo che $a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0 \Rightarrow a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 + 5a_2 \\ 2a_1 + a_2 \end{bmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 5a_2 = 0 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} a_1 = -5a_2 \\ -10a_2 + a_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} // \\ \frac{-9a_2 = 0}{-9} \end{cases} \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow v_1, v_2$ sono l. indipendenti ✓

Dimostro che siano un sistema di generatori: $a_1 v_1 + a_2 v_2 = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5a_2 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_1 + 5a_2 \\ 2a_1 + a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 5a_2 = a \\ 2a_1 + a_2 = b \end{cases} \begin{cases} a_1 = a - 5a_2 \\ 2a - 4a_2 = b \end{cases} \begin{cases} a_1 = \frac{5b - a}{9} \\ a_2 = \frac{2a - b}{9} \end{cases} \Rightarrow \mathrm{span}\{v_1, v_2\}$ ✓

Adesso trovo le componenti di v_3 ponendo $a = 11$, $b = 4 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}$ ✓