Concetti preliminari

Di seguito riportiamo i concetti teorici che ci serviranno utili a comprendere meglio tale argomento

Concetto di stima di errore (o approssimazione)

Siano α e $\bar{\bar{\alpha}}$ con $\bar{\bar{\alpha}}$ approssimazione di α:

1. Errore assoluto: $E_A = |\alpha - \bar{\bar{\alpha}}|$
2. Errore relativo: $E_R = \frac{|\alpha - \bar{\bar{\alpha}}|}{|\alpha|}$
3. Errore residuo: $E_{RES} = |f(\bar{\bar{\alpha}})|$. Questa stima potrebbe sovrastimare (se f è strettamente monotona) o sottostimare (se f è monotona) l'approssimazione dell'errore in quanto dipende dalla funzione.

Polinomio di Taylor con resto di Lagrange

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile n + 1 volte in [a, b] e continua in [a, b]. Sia $x \in (a, b)$. Allora $\forall x \in (a, b)\ \exists c \in (a, b)$ tale che $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ dove:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0) \text{ è il p. di Taylor}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \text{ è il resto di Lagrange}$$

Teorema di Fermat

Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile e sia $x_0 \in (a, b)$ un punto di massimo o minimo locale. Allora $f'(x_0) = 0$. Tali punti sono detti anche punti critici (o stazionari), in cui è presente un punto di flesso a tangente orizzontale.

Ordine di convergenza

L'Odc (ordine di convergenza) è un metodo che ci consente di quantificare la velocità con la quale un metodo converge alla radice. Sia $\{x_k\}$ una successione tale che $\lim_{k \to +\infty} x_k = \alpha$. Diremo che x_k converge ad α per p ≥ 1 se esiste un fattore asintotico di convergenza tale che $\lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = c$.

Tabella ordine di convergenza:

1. p = 1 e $c \in (0, +\infty), \mathit{Odc\ lineare}$
2. p = 1 e c = 1, Odc sublineare.
3. p > 1 e c = 1, superlineare
4. p = 2 quadratico
5. p = 3 cubico

è possibile osservare che per k sufficientemente grande si ha che $|x_{k+1} - \alpha\,| \approx c|x_k - \alpha|^p$. Tale numero è sempre più piccolo di 1 quanto p è grande. In sostanza, trascurando l'effetto di c, maggiore è l'ordine di convergenza, meno passi il metodo applicherà per trovare α (con considerazione al costo computazionale ad ogni passo).

Condizionamento di un problema

Quando dobbiamo risolvere un problema proveniente dalla macchina, dobbiamo tener conto di diverse sorgenti di errore, date per esempio da errori commessi sul risultato attraverso delle approssimazioni o incertezza sui dati in input.

Sia P un problema, x un dato in input, y una soluzione, δ una “perturbazione”. Allora

$$x \to y \qquad\qquad x + \delta x \to y + \delta y$$

P si dice ben condizionato se a piccole perturbazioni sul dato in input δx, non differisce molto dalla soluzione originale. P è mal condizionato se le soluzioni prodotte sono molto sensibili anche a piccole perturbazioni sui dati in input. È possibile quantificare il condizionamento tramite un numero, sia quindi k > 0 “piccolo” tale che:

$$E_R \; sulla \; sol. = \frac{|\delta y|}{|y|} \leq k \frac{|\delta x|}{|x|} = E_R \; sul \; dato$$

k = k(x) è detto fattore di condizionamento. Se $k \approx 1 \rightarrow$ P è ben condizionato, se $k \gg 1 \rightarrow$ P è mal condizionato.

Zero semplice

Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile in (a, b) e $\alpha \in$ [a, b] tale che $f(\alpha) = 0 \; e \; f'(\alpha) \neq 0$. Allora α è detto zero semplice di f.

Teorema di Lagrange

Sia $f: [a, b] \rightarrow R$ derivabile in [a, b]. Allora $\forall x \in [a, b] \; \exists \; c \in \; [a, b] \; tale \; che \; \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \; = \; f'(c)$. Il punto c è detto valor medio, e passa una retta tangente parallela alla secante tracciata per i punti a e b.

Interpretazioni geometriche del teorema di lagrange, fermat, zero semplice: