Specifiche di un problema, spazio di ricerca di un problema, classificazione di problemi generali

Piersilvio Spicoli

Dipartimento di Informatica – Bari

1. Specifica del problema

Un problema è composto principalmente da due fasi di risoluzione:

a) La concettualizzazione, che consente di effettuare una specifica del problema senza tener conto dei metodi utilizzati per risolverlo (astrazione sui dati e sulle funzioni)
b) La realizzazione, da cui si passa dalla specifica del problema alle scelte per i metodi da utilizzare, trasformando dunque l'algoritmo risolutivo individuato in soluzione.

Durante la fase di concettualizzazione, si ha il compito di produrre una specifica del problema: Tale specifica serve proprio per definire al meglio tutte le proprietà non note del problema e la facilità di individuazione dell'algoritmo risolutivo. Una buona specifica contiene:

a) La scelta dell'input, che definisce lo spazio dei dati in input che il problema può ricevere e si stabiliscono le loro tipologie e caratteristiche.
b) Lo scopo della risoluzione, che definisce lo spazio dei dati di soluzione che il problema deve produrre
c) Le relazioni che intercorrono i dati in input e i dati in output, detta anche "relazione caratteristica"
d) La scelta dell'output, che stabilisce lo spazio dei dati in output che può produrre il problema durante la ricerca della soluzione

Def: $la\ specifica\ di\ un\ problema$ è $una\ quintupla < I, S, R, O, Q >$:

a) $I = spazio\ input$
b) $S\ =\ spazio\ soluzioni\ attendibili$
c) $R \subseteq I\ x\ S\ la\ relazione\ caratteristiche\ su\ dati\ in\ input\ e\ dati\ attendibili\ soluzione$
d) $O = spazio\ output$
e) $Q\ =\ la\ regola\ che\ definisce\ la\ relazione\ r$

Il risultato dell'utilizzo di tale specifica fornisce un'istanza del problema, e si ottiene ogni volta scegliendo i dati in input. Se l'istanza prodotta rispetta la regola imposta nella specifica, allora tale istanza è detta soluzione del problema.

2. Classificazione dei problemi

Prima di procedere alla risoluzione di un problema, durante la fase di concettualizzazione bisogna capire a quale classe di appartenenza il problema ne deriva (che tipo di problema è?). Tali classi di appartenenza hanno a disposizione proprietà comuni per la loro risoluzione. Li vedremo in seguito.

2.1. Problema di ricerca

Fra tutte le possibili soluzioni siamo interessati a conoscere una qualunque (compreso anche quando non esista) di quella singola istanza prodotta dalla specifica del problema. Definiamo formalmente la specifica di un problema di ricerca:

Def: $< I, S, R, S \cup \{\perp\}, qric >$:

a) lo spazio in output è composto dallo spazio delle soluzioni attendibili unito all'assenza di soluzioni
b) qric è la regola definita sulla relazione r, dove r_{qric} è composta da ogni coppia contenuta in r e una coppia <i, ⊥> dove i è l'istanza del problema che non produce soluzioni.

2.1.1. Esempio: “il problema delle n-regine”

“Dato un intero positivo n, determinare il posizionamento di n-regine in una scacchiera NxN dove ogni regina non minacci nessun’altra.”

La specifica del problema è la seguente: $< N^+, D, R, D \cup \{\perp\}, qric >$:

a) N^+ è l’insieme dei numeri positivi
b) D è l’insieme delle disposizioni delle regine che non si minacciano fra loro
c) R_{qric} è la relazione che contiene ogni coppia <x, y> in cui $x \in N^+$ e y è una disposizione di x regine nella scacchiera x*x in cui nessuna regina minaccia le altre

2.2. Problema di decisione

La soluzione è vera o falsa a seconda che il dato in input soddisfi o meno la proprietà definita nella regola della specifica. Definiamo formalmente la specifica di tale problema:

Def: $< I, S, R, \{true, false\}, qdec >$:

1) r_{qdec} stabilisce per ogni istanza i prodotta dalla specifica “true” se esiste una soluzione alla quale <i, s> appartenga alla relazione r, “false” altrimenti

dalla specifica del problema si evince che un problema di decisione è una “generalizzazione” di un problema di ricerca. Infatti, esso può essere risolto trasformandolo in un problema di ricerca dove in assenza di soluzioni associamo il simbolo ⊥ = false, altrimenti true oppure per mezzo di un approccio non costruttivo, ossia trovare una soluzione al problema senza risolvere il problema di ricerca.

2.3. Problema di ottimizzazione

Alle soluzioni ammissibili è associata una misura, detta costo (o obbiettivo), che consente di individuare una qualunque soluzione, ossia la migliore fra le tante che rispetti i vincoli della regola definita. Formalmente:

Def: $< I, S, R, S \cup \{\perp\},\ q_{ott}(M, m, \subseteq) >$:

a) M è un insieme qualsiasi definito come “obbiettivo”
b) $m: ixs \rightarrow M$ detta anche “funzione obbiettivo” del problema, dove per una certa istanza il valore m (i, s) rappresenta una misura della soluzione s nello spazio delle soluzioni
c) ⊆ è una relazione di ordinamento sull’insieme degli obbiettivi (“migliore di”)

2.3.1. Esempio: "il problema dello zaino 0-1"

"Un ladro durante una rapina in un negozio si trova di fronte a n articoli: l'articolo i-esimo ha un valore di p_i euro e un peso di c_i chilogrammi, dove sia p_i che c_i, per semplicità, sono interi. Il ladro vuole prendere gli articoli di maggior valore ma il suo zaino può sopportare un peso massimo di B chilogrammi. Cosa gli conviene fare?"

Effettuiamo la specifica del problema: per formalizzare il problema consideriamo i primi interi positivi 2n+1 tali che:

$$P_1 \dots P_n, C_1 \dots C_n, B \text{ dove}$$

a) $P_1 \dots P_n$ sono i profitti che il ladro vuole ottenere
b) $C_1 \dots C_n$ sono i costi dei profitti ("pesi")
c) B è il bilancio medio della capienza dello zaino

Sia dunque la quintupla $< I, S, R, S \cup \{\perp\},\ q_{ott}(M, m, \subseteq) >$:

a) Lo spazio in input è composto dalla coppia di n-elementi e dalla sequenza 2n+1 di interi descritti precedentemente, ossia (n, q) t.c. q= $(P_1 \dots P_n, C_1 \dots C_n, B)$
b) Lo spazio delle soluzioni è composto da tutti gli elementi x che possono essere inseriti nello zaino: per semplicità assumiamo che tali oggetti devono essere presenti o meno nello zaino senza ripetizioni. Dunque, sia $x_i \in \{0, 1\}\ \forall i \in [1, n]$.
c) Per definire la relazione caratteristica concentriamoci sulla funzione q_{ott}:
M è definito come l'insieme di tutti i possibili elementi x_i mentre la funzione obbiettivo da ottimizzare è $\sum_{i=1}^{N} P_i * x_i$ ossia il profitto di ogni singolo elemento da inserire nello zaino. Perciò il vincolo che la regola deve imporre sull'ottimizzazione è che il costo per ogni singolo elemento da inserire in zaino deve rientrare con il budget, ossia $\sum_{i=1}^{N} c_i * x_i \leq B$.

3. Spazio di ricerca

Lo spazio di ricerca è uno strumento che serve per "caratterizzare" le possibili soluzioni ad una generica istanza di un problema, per orientare la scelta dell'algoritmo risolutivo. Per definire tale spazio bisogna definire un metodo che per ogni istanza definisce un insieme con due funzioni associate:

a) Una di ammissibilità, che verifica se un elemento di tale spazio può corrispondere ad una soluzione per l'istanza
b) Una di risposta, che permette di ottenere dagli elementi dello spazio di ricerca delle "risposte" per l'istanza

Def: Sia dunque P=$< I, S, R, S \cup \{\perp\}, Q >$ e i l'istanza del problema P di ottimizzazione o di ricerca: uno spazio di ricerca per i è costituito dall'insieme Z_i delle possibili soluzioni associate ad i con due funzioni associate:

a) Funzione di ammissibilità $a: Z_i \rightarrow \{true, false\}$
b) Funzione di risposta $o: Z_i \rightarrow s$

Dove:

1) Per ogni elemento z nello spazio di ricerca a(z) = true ⇔ o(z) è soluzione per l'istanza
2) L'istanza i ha risposta positiva ⇔ vi è almeno un elemento z per cui a(z) = true e o(z) è risposta per l'istanza

Per rappresentare gli elementi dello spazio di ricerca utilizziamo una struttura dati per la loro gestione in termini di tale struttura.

3.1. Proprietà dello spazio di ricerca di un problema P

Esistono due criteri per determinare uno spazio di ricerca efficiente:

a) Deve caratterizzare le soluzioni ad un'istanza in modo non ridondante scegliendo opportunamente una struttura dati che escluda a priori configurazioni che non corrispondono a nessuna delle soluzioni.
b) Non deve essere una banale riformulazione del problema e della sua soluzione e ne deve nascondere le difficoltà del problema. Per far ciò, lo spazio di ricerca deve fornire una vera e propria comprensione della struttura del problema e delle sue soluzioni.

3.1.1. Esempio: Spazio di ricerca del problema delle n-regine

Assumiamo che N sia la dimensione della scacchiera che è uguale al numero di regine. Si evince che l'insieme che forma lo spazio di ricerca è l'insieme di tutte le possibili scacchiere di dimensione N in cui sono poste tutte le N regine:

a) La funzione di ammissibilità verifica se non esistono nella scacchiera due regine piazzate nella stessa riga, colonna o diagonale.
b) La funzione di risposta è la funzione identità
c) La struttura dati che può interpretare tale problema è proprio una matrice NxN con "*" che indica la posizione della regina in scacchiera.

Tale rappresentazione è migliorabile (per evitare ambiguità fra righe e colonne) utilizzando una struttura dati come un array monodimensionale: infatti per escludere configurazioni di regine che si trovino sulla stessa riga ecc.… si assume che se l'elemento in posizione i del array è h vuol dire che la regina della riga i è in colonna h. Per escludere una configurazione errata basta escludere gli array che hanno valori uguali in posizioni diverse. In poche parole, il vettore risultante avrà il valore dell'indice che corrisponde alla riga della scacchiera e gli elementi i-esimi che corrispondono al numero della colonna in cui si trova la regina. Però abbiamo ancora il problema di non riuscire a rappresentare le regine che si trovano sulle diagonali: per fare questo, la funzione di ammissibilità verifica se il generico vettore V non contenga due regine nella stessa diagonale mentre la funzione di ammissibilità ricostruisce semplicemente la corrispondente configurazione della scacchiera a partire dal generico vettore V.

3.2. Spazio di ricerca di un problema di ricerca con risposta positiva

Def: formalmente:

a) L'insieme $\{s \in S: (i, s) \in R\}$ rappresenta le soluzioni del problema P per l'istanza i, che coincide con l'insieme delle risposte.
b) L'insieme $\{s \in S: \exists z \in Z_i \; a(z) = true \; and \; o(z) = s\}$ è costituito dalle soluzioni di P per l'istanza i che sono rappresentate nello spazio di ricerca.

È possibile, inoltre, osservare che lo spazio di ricerca per un problema di ricerca non rappresenta necessariamente tutte le soluzioni all'istanza i: se esistono risposte positive basta che una sola sia rappresentata nello spazio di ricerca.

3.2. Spazio di ricerca di un problema di ottimizzazione con risposta positiva

è possibile osservare che per un problema di ottimizzazione, ottenere una risposta per una certa istanza significherebbe calcolare una soluzione ottimale: dunque lo spazio di ricerca deve includere almeno un elemento dal quale si possa ottenere una soluzione ottimale all'istanza. Formalmente:

Def:

a) L'insieme $\{s \in S: (i, s) \in R \ and \ \nexists s' \in S \ t.c \ (i, s') \in R \ and \ m(i, s') \subseteq m(i, s)\}$ rappresenta le soluzioni ottimali di P per l'istanza i, ossia le risposte a P per i.
b) Uno spazio di ricerca per i di P deve contenere la rappresentazione di almeno una tra le soluzioni ottimali se esistano, ossia l'intersezione del primo insieme definito con $\{s \in S: \exists z \in Z_i \ a(z) = true \ and \ o(z) = s\}$.

3.3. Differenza fra spazio soluzione e spazio di ricerca

a) Lo spazio delle soluzioni è una componente della specifica del problema e fa globalmente riferimento a tutte le possibili soluzioni per il problema.
b) Lo spazio di ricerca determina anche, per ogni istanza del problema, una struttura di dati e un meccanismo per verificare, tramite la formulazione della funzione di ammissibilità in termini di tale struttura, se una sua configurazione corrisponde o meno ad una soluzione per l'istanza e un metodo per derivare, tramite la formulazione della funzione di risposta, una risposta all'istanza.