Piet Helzel
70482464

1) $|4x+12| < \frac{1}{2}x-3$

1. Fall: $4x+12 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$$4x+12 < \frac{1}{2}x-3 \quad | -\frac{1}{2}x$$
$$3{,}5x+12 < -3 \quad | -12$$
$$3{,}5x < -15 \quad | :3{,}5$$
$$x < -\frac{30}{7}$$

Es soll gleichzeitig $x \geq -3$ und $x < -\frac{30}{7}$ ($\approx -4{,}29$) gelten, was jedoch widersprüchlich ist. Also gilt:
$\mathbb{L}_1 = \{\}$

2. Fall: $4x+12 < 0 \Rightarrow x < -3$

$$-4x-12 < \frac{1}{2}x-3 \quad | -\frac{1}{2}x$$
$$-4{,}5x-12 < -3 \quad | +12$$
$$-4{,}5x < 9 \quad | :(-4{,}5)$$
$$x > -2$$

Es soll gleichzeitig $x < -3$ und $x > -2$ gelten, was widersprüchlich ist. Es gilt also:
$\mathbb{L}_2 = \{\}$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{\}$
Es existieren keine Lösungen für $x \in \mathbb{R}$.

2) $a_n = \frac{5n+7}{n!}$

1. Untersuchung auf Monotonie

Man betrachte das Verhältnis $\frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{5(n+1)+7}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{5n+7}{n!}\right)} = \frac{\left(\frac{5n+12}{(n+1)!}\right)}{\left(\frac{5n+7}{n!}\right)} = \frac{(5n+12)\cdot n!}{(5n+7)\cdot(n+1)!}$$

$$= \frac{(5n+12)\cdot \cancel{n!}}{(5n+7)\cdot \cancel{n!}\cdot(n+1)} = \frac{5n+12}{(5n+7)(n+1)}$$

$$= \frac{5n+12}{5n^2+5n+7n+7} = \frac{5n+12}{5n^2+12n+7}$$

Für $n=1$ gilt somit: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{5\cdot 1+12}{5\cdot 1^2+12\cdot 1+7} = \frac{17}{24} < 1$

Beim Zähler handelt es sich um eine lineare, beim Nenner handelt es sich um eine quadratische Funktion. Da das Verhältnis der ersten beiden Element von (a_n) kleiner als 1 ist, und der Nenner schneller steigt als der Zähler ist das Verhältnis $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ immer kleiner als 1. Die Folge (a_n) ist somit streng monoton fallend.

2. Untersuchung auf Beschränktheit

Sowohl Zähler als auch Nenner des Terms von (a_n) sind für alle n immer größer als 0. Somit ist auch der gesamte Term größer als 0. Da die Folge jedoch streng monoton fällt ist die Funktion sowohl nach unten und nach oben beschränkt.

Das Supremum (und somit auch eine obere Schranke) liegt bei $a_1 = 12$. Da 12 ein Element der Folge ist handelt es sich auch um ein Maximum.
Das Infimum (und somit auch eine untere Schranke) ist 0, da die Folge diesen Wert nie unterschreitet, aber sich aufgrund der Monotonie immer weiter nähert. Da 0 kein Element der Folge ist, gibt es jedoch kein Minimum.

3) a) Die Aussage ist falsch. Betrachte man beispielsweise eine beliebige beschränkte Folge, für die

$$\lim_{n \to \infty} a_n = x \quad \text{mit} \quad x \in \mathbb{R} \setminus 0$$

gilt. Nun multipliziere man den Term dieser Folge mit $(-1)^n$, was den Effekt hat, dass jedes Element der Folge mit ungeradem n um die x-Achse gespiegelt wird. Da die ursprüngliche Folge beschränkt war, ist auch die an der x-Achse gespiegelte Folge beschränkt. Jedoch kann diese Folge nicht mehr konvergent sein, da es sich nun um eine Folge handelt, deren Elemente alternieren. Alle Elemente a_n mit geradem n nähern sich dem Wert x an, jene mit ungeradem n nähern sich $-x$ an. Es gibt keinen eindeutigen Grenzwert, womit die Folge nicht konvergent ist.

b) Die Aussage ist wahr. Beispiel:

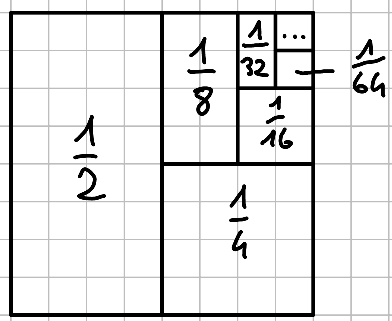
Sei (a_n) eine rekursiv definierte Folge mit

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{2^n} \end{aligned}\right\} \quad a_1 = 1,\; a_2 = 1{,}5,\; a_3 = 1{,}75,\; \ldots$$

Da jedes Element dem Vorherigen plus einer positiven Zahl entspricht, ist diese Folge streng monoton steigend.

Die Folge ist gleichzeitig konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Dieser Grenzwert erschließt sich durch die Beobachtung, dass jedes Element die Distanz des vorherigen Elements zur 2 halbiert. Dieser Vorgang lässt sich graphisch z.B. wie folgt visualisieren:



Indem die Distanz der Elemente zur 2 immer weiter halbiert wird, nähern sich die Elemente dem Grenzwert 2 zwar beliebig weit an, übersteigen ihn jedoch nie. Somit konvergiert die Folge.

4) $M = \{4 < x < 12\} \cup \{5 \leq x \leq 18\} \quad x \in \mathbb{R}$

Bildet man die Vereinigung der beiden Teilmengen ergibt sich:

$$M = \{4 < x \leq 18\}$$

Somit ergibt sich 4 als Infimum und somit größte untere Schranke. Eine weitere untere Schranke ist z.B. 1 (sowie alle Zahlen ≤ 4). Da M nur Elemente enthält, die streng größer als 4 sind, ist 4 selbst nicht Element von M. Die Menge M hat somit kein Minimum.