Piet Hetzel
70482464

1) Sei $a_n = b_n \cdot c_n$ mit

$$b_n = \frac{3}{9n^2+2n} - 5 \qquad c_n = \frac{23-20n}{5n-17}$$

Damit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} c_n\right)$$

Berechnen der Grenzwerte:

Für b_n:

b_n kann als Summe aus zwei weiteren Summen aufgefasst werden:

$$b_n = x_n + y_n$$

Dabei sei:

$$x_n = \frac{3}{9n^2+2n} \qquad y_n = -5$$

Da es sich beim Zähler von x_n um eine konstante und beim Nenner um eine streng monoton steigende Folge handelt, gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Offensichtlich gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -5$$

Damit folgt für $\lim_{n\to\infty} b_n$:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 - 5 = -5$$

Für c_n:

$$c_n = \frac{23-20n}{5n-17} = \frac{\cancel{n}\left(\frac{23}{n} - 20\right)}{\cancel{n}\left(5 - \frac{17}{n}\right)} = \frac{\frac{23}{n} - 20}{5 - \frac{17}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{23}{n} - 20\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(5 - \frac{17}{n}\right)}$$

Da n jeweils im Zähler steht und die Brüche dadurch gegen 0 streben, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{-20}{5} = -4$$

Zusammen gilt dann für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$ folgendes:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = (-5)\cdot(-4) = \underline{\underline{20}}$$

2) Um den Wert der Reihe zu bestimmen, muss zunächst festgestellt werden, ob sie konvergiert:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7+4^k}{8^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8\cdot 7 + 8\cdot 4^k}{8^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{56}{4^k}\right)+8}{\left(\frac{8^k}{4^k}\right)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{56}{4^k}\right)+8}{2^k}$$

Damit die Reihe konvergiert muss

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(\frac{56}{4^k}\right)+8}{2^k}$$

gelten. Der Zähler konvergiert für $k\to\infty$ gegen den Grenzwert 8. Der Nenner ist eine streng monoton steigende Folge. Somit konvergiert die Folge gegen 0, woraus folgt, dass die Reihe konvergiert.

Nun kann der Wert der Reihe berechnet werden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7+4^k}{8^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{7}{8^{k-1}} + \frac{4^k}{8^{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{8^{k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{8^{k-1}}$$

$$= 56 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k + 8 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{8}\right)^k$$

$$= 56 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{j+1} + 8 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}$$

$$= \frac{56}{8} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^{j} + \frac{8}{2} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j}$$

Geom. Reihe

$$= 7 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{8}} + 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{16}}$$

3) Für jede konvergente Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ (notwendige Bedingung).

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^4+1}{100k+40} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^4\left(1+\frac{1}{k^4}\right)}{k^4\left(\frac{100}{k^3}+\frac{40}{k^4}\right)}$$

$$= \frac{\lim_{k\to\infty}\left(k^4\left(1+\frac{1}{k^4}\right)\right)}{\lim_{k\to\infty}\left(k^4\left(\frac{100}{k^3}+\frac{40}{k^4}\right)\right)}$$

Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^x}$ mit $x \in \mathbb{N}$ hat immer den Wert 0.

Daraus folgt:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \frac{1}{0}$$

Dieser Term ist undefiniert. Somit divergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

4)

a) Es handelt sich um eine geometrische Reihe. Geometrische Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ konvergieren für alle $|q| < 1$. Da hier $|q| = 0,99$ gilt, konvergiert auch diese Reihe.

b) $$\frac{1}{100000} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \frac{1}{100000} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Es handelt sich um die harmonische Reihe, welche gegen unendlich divergiert.

5) Die gegebene Definition ist falsch und es ist auch möglich damit a zu beschreiben, die keinen Grenzwert haben. Grund dafür ist der Teil "dass es $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $n \geq n_0$ ...". Für die korrekte Definition muss <u>für alle</u> $n \geq n_0$ $|a-a_n| < \varepsilon$ gelten. Sonst ist es möglich, dass ein Folgeelement gleich diesem „Grenzwert" ist, danach sich aber wieder von diesem entfernt. Außerdem gibt es mit dieser Definition keinen eindeutigen Grenzwert (Ausnahme: konstante Folgen), da die Aussage für jedes $x \in (a_n)$ gilt.

Die Folge (a_n) mit $a_n = n$ illustriert dies:

$a_1 = 1, \ a_2 = 2, \ a_3 = 3, \ a_4 = 4$

Nehme man nun z.B. 3 als Grenzwert a an und somit auch 3 als n_0. Für $n = n_0$ gilt nun $|a - a_n| = |3-3| = 0 < \varepsilon$ und die Aussage ist wahr. Die Aussage ist jedoch für keine $n > n_0$ wahr und damit definitiv nicht der Grenzwert. Für jedes $a \in a_n$ lässt sich dieses Argument analog durchführen.

Korrekt wäre diese Aussage:

„Die Tatsache, dass a der Grenzwert ist, wird wie folgt beschrieben:
Für alle $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt $|a - a_n| < \varepsilon$."