Piet Helzel
70482464

1) $f(x) = 3x^4 \ln(x^3)$

Erste und zweite Ableitung bilden:

$g(x) = 3x^4$ $\qquad h(x) = \ln(x^3)$

$g'(x) = 12x^3$ $\qquad h'(x) = 3x^2 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{3x^2}{x^3} = \frac{3}{x}$

$f'(x) = g(x)\cdot h'(x) + g'(x)\cdot h(x)$

$f'(x) = 3x^4 \cdot \frac{3}{x} + 12x^3 \cdot \ln(x^3)$

$f'(x) = 9x^3 + 12x^3 \ln(x^3)$

$f'(x) = 3x^3(3 + 4\ln(x^3))$

$i(x) = 3x^3$ $\qquad j(x) = 3 + 4\ln(x^3)$

$i'(x) = 9x^2$ $\qquad j'(x) = 4 \cdot 3x^2 \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{12x^2}{x^3} = \frac{12}{x}$

$f''(x) = i(x)\cdot j'(x) + i'(x)\cdot j(x)$

$f''(x) = 3x^3 \cdot \frac{12}{x} + 9x^2 \cdot (3 + 4\ln(x^3))$

$f''(x) = \frac{36x^3}{x} + 27x^2 + 36x^2 \ln(x^3)$

$f''(x) = 63x^2 + 36x^2 \ln(x^3)$

$f''(x) = 9x^2(7 + 4\ln(x^3))$

Extrema:

Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$3x^3(3 + 4\ln(x^3)) = 0$ $\quad \Rightarrow x = 0$, aber $\ln(0)$ ist undefiniert, also kein Kandidat

$3 + 4\ln(x^3) = 0 \quad |-3 \quad |:4$

$\ln(x^3) = -\frac{3}{4} \quad | e^{()}$

$x^3 = e^{-3/4} \quad | \sqrt[3]{\ }$

$x = \sqrt[3]{e^{-3/4}} = e^{-\frac{3}{12}} = e^{-\frac{1}{4}}$

$x = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$

$x = \frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ ist der einzige Kandidat für Extrema

Hinreichende Bedingung: $f''(x) \neq 0$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right) = 9\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)^2 \left(7 + 4\ln\left(\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right)^3\right)\right)$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right) = 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \left(7 + 4\ln\left(\left(e^{-\frac{1}{4}}\right)^3\right)\right)$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right) = 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \left(7 + 4\ln\left(e^{-\frac{3}{4}}\right)\right)$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right) = 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \left(7 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)\right)$$

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt[4]{e}}\right) = 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 4 \quad = \frac{36}{\sqrt{e}}$$

$f''\left(\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}\right) = \frac{36}{\sqrt{e}} \quad \neq 0$, es handelt sich um ein Extremum.

Wendepunkt:

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$9x^2\left(7 + 4\ln\left(x^3\right)\right) = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = 0$$

$$7 + 4\ln\left(x^3\right) = 0 \qquad | -7 \quad | :4$$

$$\ln\left(x^3\right) = -\frac{7}{4} \qquad | e^{()}$$

$$x^3 = e^{-\frac{7}{4}} \qquad | \sqrt[3]{\ }$$

$$x = e^{-\frac{7}{12}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt[12]{e^7}}$$

Die Kandidaten für Wendepunkte liegen bei

$x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{1}{\sqrt[12]{e^7}}$

2) $f(x) = e^x$

Die Steigung dieser Funktion ist positiv, da $f'(x) = e^x$ immer positiv ist. Auch die Krümmung ist positiv, da $f''(x) = e^x$ auch immer positiv ist.

3) Um die Regel von de L'Hospital anzuwenden, muss erst geprüft werden, ob $f(x)$ und $g(x)$ die nötige Bedingung erfüllen:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0 \quad \text{oder} \quad = \pm\infty.$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} (-2e^x + 4x + 2e^{-x}) = -2e^0 + 4 \cdot 0 + 2e^{-0} = -2+2=0$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} (7\sin(x) - 7x) = 7\sin(0) - 7 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$$

Die Funktionen erfüllen die Bedingungen.
Laut de L'Hospital gilt:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f'(x) = -2e^x + 4 - 2e^{-x}$$
$$g'(x) = 7\cos(x) - 7$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-2e^x + 4 - 2e^{-x}}{7\cos(x) - 7} = \frac{-2e^0 + 4 - 2e^{-0}}{7\cos(0) - 7} = \frac{-2+4-2}{7-7} = \frac{0}{0}$$

Der Grenzwert existiert nicht, also wird erneut abgeleitet:

$$f''(x) = -2e^x + 2e^{-x}$$
$$g''(x) = -7\sin(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2e^x + 2e^{-x}}{-7\sin(x)} = \frac{-2e^0 + 2e^0}{-7\sin(0)} = \frac{-2+2}{0} = \frac{0}{0}$$

Erneutes Ableiten, da $\frac{f''(0)}{g''(0)} = \frac{0}{0}$ ist:

$$f'''(x) = -2e^x - 2e^{-x}$$
$$g'''(x) = -7\cos(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2e^x - 2e^{-x}}{-7\cos(x)} = \frac{-2e^0 - 2e^{-0}}{-7\cos(0)} = \frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$

Damit gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-2e^x + 4x + 2e^{-x}}{7\sin(x) - 7x} = \frac{4}{7}$$

4)

a) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:
Sei $f(x) = e^{-x}$. Daraus folgt:

$$f'(x) = -e^{-x}$$
$$f''(x) = e^{-x} = \text{Krümmung von } f(x)$$

$f''(x)$ ist immer positiv, da e^x für alle $x \in \mathbb{R}$ immer positiv ist. Somit hat f immer eine positive Krümmung. Betrachte nun $f(x)$:

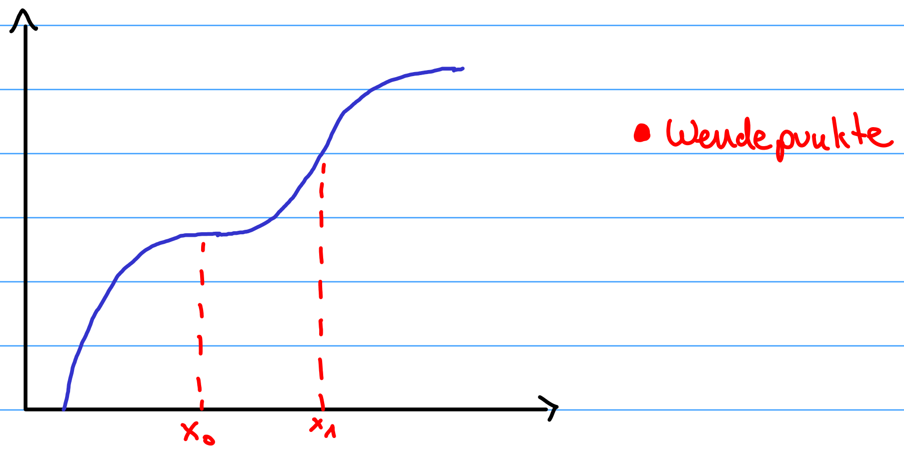
$$f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Für $x \to \infty$ strebt $e^x \to \infty$. Da e^x jedoch im Nenner steht gilt:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$$

Dies widerspricht der ursprünglichen Aussage.

b) Die Aussage ist falsch. Betrachte eine Funktion wie folgt:



Diese Funktion besitzt einen Sattelpunkt bei x_0. Ein Sattelpunkt ist immer auch gleichzeitig ein Wendepunkt. In diesem Fall geht eine Rechts- in eine Linkskrümmung über. Bei x_1 befindet sich eine weitere Wendestelle, bei der die Funktion wieder rechtsgekrümmt wird. In dem Intervall ist die Funktion jedoch monoton steigend und besitzt somit keine Extrema.