70482464
Piet Helzel

1)

$$f(x) = 4\sin(x) \cdot e^{-3x}$$

$$T_3(x;0) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3$$

$$f'(x) = 4\sin(x) \cdot (-3) e^{-3x} + 4\cos(x) \cdot e^{-3x}$$
$$= 4e^{-3x}(-3\sin(x) + \cos(x))$$

$$f''(x) = -12e^{-3x}(-3\sin(x) + \cos(x)) + 4e^{-3x}(-3\cos(x) - \sin(x))$$
$$= 4e^{-3x}(9\sin(x) - 3\cos(x) - 3\cos(x) - \sin(x))$$
$$= 4e^{-3x}(8\sin(x) - 6\cos(x))$$
$$= 8e^{-3x}(4\sin(x) - 3\cos(x))$$

$$f'''(x) = -24e^{-3x}(4\sin(x) - 3\cos(x)) + 8e^{-3x}(4\cos(x) + 3\sin(x))$$
$$= 8e^{-3x}(-12\sin(x) + 9\cos(x) + 4\cos(x) + 3\sin(x))$$
$$= 8e^{-3x}(13\cos(x) - 9\sin(x))$$

$$f(0) = 4\sin(0) \cdot e^{-3 \cdot 0} = 0$$

$$f'(0) = 4e^{-3 \cdot 0}(-3\sin(0) + \cos(0)) = 4 \cdot (0+1) = 4$$

$$f''(0) = 8e^{-3 \cdot 0}(4\sin(0) - 3\cos(0)) = 8 \cdot (0-3) = -24$$

$$f'''(0) = 8e^{-3 \cdot 0}(13\cos(0) - 9\sin(0)) = 8 \cdot (13-0) = 104$$

$$T_3(x;0) = 0 + \frac{4}{1!} x + \frac{-24}{2!} x^2 + \frac{104}{3!} x^3$$
$$= \frac{52}{3} x^3 - 12x^2 + 4x$$

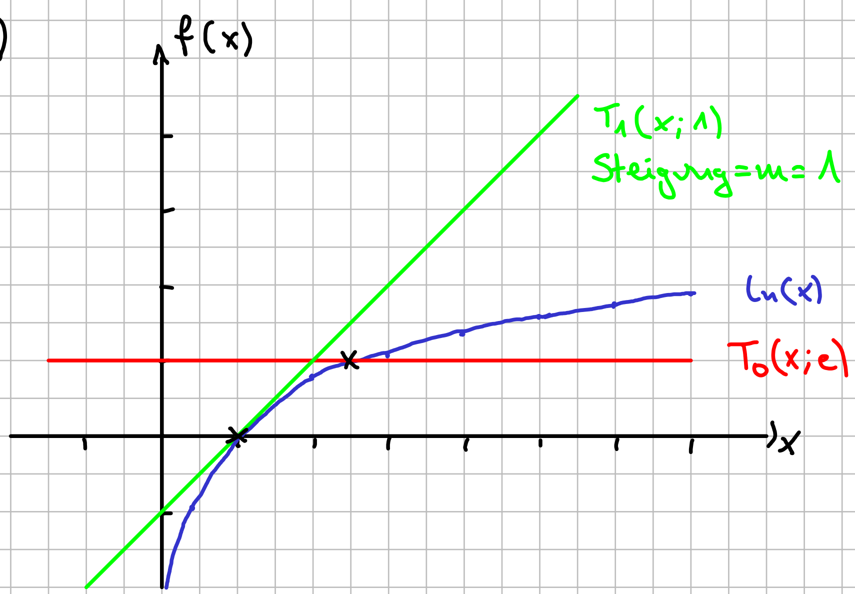
2a) An x_1, x_2 und x_5 lässt sich mit recht hoher Sicherheit ein guter Näherungswert ermitteln, da sich diese Punkte alle in relativ unmittelbarer Nähe von x_0 befinden. Das Taylorpolynom dritten Grades gibt schon Funktionswert, Steigung und Krümmung an x_0 genau an, womit die Umgebung meist sehr gut approximiert wird. x_3 und x_4 sind von x_0 jedoch so weit weg, dass der Wert des Taylorpolynoms als Näherung wahrscheinlich unbrauchbar ist.

b) Entweder muss ein passendes Restglied zum Taylorpolynom gefunden werden, welches dann den Fehler ausgleicht (z.B. Restglied nach Lagrange). Oder der Grad n von $T_n(x;x_0)$ muss ausreichend groß sein, um die Funktion auf einem größeren Bereich gut zu approximieren. Dies ist möglich, da

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \lim_{n \to \infty} T_n(x;x_0)$$

gilt (bzw. f(x) wird perfekt durch die Taylorreihe von f am Entwicklungspunkt x_0 dargestellt). Erhöht man den Grad des Taylorpolynoms, dann verbessert sich die Approximation der Funktion.

3)



$\ln(e) = 1$

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$

$l'(1) = \frac{1}{1} = 1 = m$

4)

a) Eine notwendige Bedingung für die Riemann-Integrierbarkeit ist die Beschränktheit. Für f(x) gilt jedoch:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x}$$

$\frac{1}{x}$ strebt für $x \to 0$, $x<0$ gegen $-\infty$. Somit ist f(x) nicht beschränkt und damit auch nicht Riemann-integrierbar.

b) Die Funktion ähnelt der Dirichlet-Funktion sehr, deren Riemann-Integrierbarkeit schon im Skript widerlegt wird. Dies liegt daran, dass sie weder stetig noch monoton ist und überabzählbar viele Sprungstellen hat (hinreichende Bedingungen der Riemann-Integrierbarkeit). Die Überabzählbarkeit der Sprungstellen lässt sich dadurch begründen, dass die reellen Zahlen überabzählbar sind.