Piet Helzel
70482464

1)

a) $f(x) = \frac{x^{11} - 8x^5}{x^7 + 4x}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^{11} - 8(-x)^5}{(-x)^7 + 4(-x)} = \frac{-x^{11} + 8x^5}{-x^7 - 4x} = -\frac{x^{11} - 8x^5}{x^7 + 4x}$$

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$

$\Rightarrow$ f ist ungerade.

b) $f(x) = x^5 \cdot x^k = x^{5+k}$

f ist genau dann gerade, wenn der Exponent $5+k$ gerade ist, und genau dann ungerade, wenn $5+k$ ungerade ist. Somit gilt:

f ist gerade für alle ungeraden k.
f ist ungerade für alle geraden k.

2) Ein solches Polynom ist

$$f(x) = x^{420} + 69.$$

x^{420} ist garantiert für alle $x \in \mathbb{R}$ größer oder gleich null, da der Exponent gerade ist. Es gilt also:

$$x^{420} = (-x)^{420} \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

Wird diese Funktion nun um 69 nach oben verschoben, ist der Wert für $x = 0^{420} + 69 = 69$ und damit positiv. Das Polynom f hat die geforderten Eigenschaften.

3) Berechnung mit Horner-Schema:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 64x - 48$$

$x = -1$ ist hier die offensichtlichste Nullstelle.

	1	4	-13	-64	-48
-1		-1	-3	16	48
	1	3	-16	-48	0

Daraus folgt: $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 16x - 48)(x+1)$

Hier ist nun $x = -3$ eine Nullstelle. Also:

	1	3	-16	-48
-3		-3	0	48
	1	0	-16	0

Somit ist $f(x) = (x^2 - 16)(x+1)(x+3)$

Die restlichen Nullstellen lassen sich wie folgt ermitteln:

$$\begin{aligned} x^2 - 16 &= 0 \quad | +16 \\ x^2 &= 16 \quad | \sqrt{} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Die Nullstellen lauten also $\{-1, -3, -4, 4\}$.

4) $\exp(\cot(4x-3)) = 1$

$$e^{\cot(4x-3)} = 1 \quad | \ln$$

$$\cot(4x-3) = \ln(1)$$

$$\cot(4x-3) = 0$$

Es gilt:

$\cot(a)=0$ für $a_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

x kann somit wie folgt ermittelt werden:

$$4x-3 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad |+3$$

$$4x = \frac{\pi+6}{2} + k\pi \quad |:4$$

$$x = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi+6}{2} + k\pi\right)$$

$$x = \frac{\pi+6}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi+6+2k\pi}{8} = \frac{\pi(2k+1)+6}{8}$$

Als Lösungsmenge folgt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi(2k+1)+6}{8} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$