Piet Helzel
70482464

1)

a) $f(x) = \frac{x^{11} - 8x^5}{x^7 + 4x}$

$f(-x) = \frac{(-x)^{11} - 8(-x)^5}{(-x)^7 + 4(-x)} = \frac{-x^{11} + 8x^5}{-x^7 - 4x} = \frac{x^{11} - 8x^5}{x^7 + 4x} > f(x)$

f ist also gerade.

b) $f(x) = x^5 \cdot x^k = x^{5+k}$

f ist genau dann gerade, wenn der Exponent 5+k gerade ist, und genau dann ungerade, wenn 5+k ungerade ist. Somit gilt:

f ist gerade für alle ungeraden k.
f ist ungerade für alle geraden k.

2) Ein solches Polynom ist

$f(x) = x^{420} + 69.$

x^{420} ist garantiert für alle $x \in \mathbb{R}$ größer oder gleich null, da der Exponent gerade ist. Es gilt also:

$x^{420} = (-x)^{420}$ für $x \in \mathbb{R}$

Wird diese Funktion nun um 69 nach oben verschoben, ist der Wert für $x = 0^{420} + 69 = 69$ und damit positiv. Das Polynom f hat die geforderten Eigenschaften.

3) Berechnung mit Horner-Schema:

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 13x^2 - 64x - 48$$

$x=-1$ ist hier die offensichtlichste Nullstelle.

	1	4	-13	-64	-48
-1		-1	-3	16	48
	1	3	-16	-48	0

Daraus folgt: $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 16x - 48)(x+1)$

Hier ist nun $x=-3$ eine Nullstelle. Also:

	1	3	-16	-48
-3		-3	0	48
	1	0	-16	0

Somit ist $f(x) = (x^2 - 16)(x+1)(x+3)$

Die restlichen Nullstellen lassen sich wie folgt ermitteln:

$$x^2 - 16 = 0 \quad | +16$$
$$x^2 = 16 \quad | \sqrt{}$$
$$x = \pm 4$$

Die Nullstellen lauten also $\{-1, -3, -4, 4\}$.

4) $\exp(\cot(4x-3)) = 1$

$$e^{\cot(4x-3)} = 1 \quad | \ln$$

$$\cot(4x-3) = \ln(1)$$

$$\cot(4x-3) = 0$$

Es gilt:

$$\cot(a) = 0 \quad \text{für} \quad a_k = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{Z}$$

x kann somit wie folgt ermittelt werden:

$$4x - 3 = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad | +3$$

$$4x = \frac{\pi + 6}{2} + k\pi \quad | :4$$

$$x = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi+6}{2} + k\pi\right)$$

$$x = \frac{\pi+6}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

$$x = \frac{\pi + 6 + 2k\pi}{8} = \frac{\pi(2k+1)+6}{8}$$

Als Lösungsmenge folgt:

$$\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi(2k+1)+6}{8} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$