Piet Hetzel
70482464

1) $f(x) = \frac{x^3 \cdot \cos(x)}{5\sin(x)}$

$g(x) = x^3 \cdot \cos(x)$

$g'(x) = x^3 \cdot \frac{d}{dx}\cos(x) + \frac{d}{dx}x^3 \cdot \cos(x)$

$g'(x) = -x^3 \sin(x) + 3x^2 \cdot \cos(x)$

$h(x) = 5 \cdot \sin(x)$

$h'(x) = 5 \cdot \cos(x)$

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}$

$f'(x) = \frac{(-x^3 \sin(x) + 3x^2 \cdot \cos(x)) \cdot 5\sin(x) - x^3 \cdot \cos(x) \cdot 5\cos(x)}{25\sin^2(x)}$

$f'(x) = \frac{-\cancel{5}x^3 \sin^2(x) + \overset{3}{\cancel{15}}x^2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) - \cancel{5}x^3 \cdot \cos^2(x)}{\cancel{2}5\sin^2(x)}$

$f'(x) = \frac{-x^3 \cancel{\sin^2(x)}}{5\cancel{\sin^2(x)}} + \frac{3x^2 \cdot \cos(x) \cdot \cancel{\sin(x)}}{5\sin^{\cancel{2}}(x)} - \frac{x^3 \cdot \cos^2(x)}{5\sin^2(x)}$

$f'(x) = \frac{-x^3}{5} + \frac{3x^2 \cdot \cos(x)}{5\sin(x)} - \frac{x^3 \cdot \cos^2(x)}{5\sin^2(x)}$

2) $f(x) = \frac{1}{8}\cos(-2x+15)\cdot e^{-12x^2}$

$g(x) = \frac{1}{8}\cos(-2x+15)$

$g'(x) = \frac{d}{dx}(-2x+15)\cdot \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{d}{dx}\cos(x)\right)(-2x+15)$

$g'(x) = -2\cdot\frac{1}{8}\cdot(-\sin(-2x+15))$

$g'(x) = \frac{1}{4}\sin(-2x+15)$

$h(x) = e^{-12x^2}$

$h'(x) = \frac{d}{dx}(-12x^2)\cdot\frac{d}{dx}(e^x)(-12x^2)$

$h'(x) = -24x\cdot e^{-12x^2}$

$f(x) = g(x)\cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x)\cdot h(x) + g(x)\cdot h'(x)$

$f'(x) = e^{-12x^2}\left(\frac{1}{4}\sin(-2x+15)\right) - 24x\cdot e^{-12x^2}\left(\frac{1}{8}\cos(-2x+15)\right)$

$f'(x) = e^{-12x^2}\left(\frac{1}{4}\sin(-2x+15) - 24x\cdot\frac{1}{8}\cos(-2x+15)\right)$

$f'(x) = e^{-12x^2}\left(\frac{1}{4}\sin(-2x+15) - 3x\cdot\cos(-2x+15)\right)$

3) a) Die Aussage ist falsch. Da eine ungerade Funktion immer punktsymmetrisch zum Ursprung ist muss sie auf jeden Fall eine Nullstelle bei $x=0$ besitzen (diese Tatsache ergibt sich daraus, dass 0 die einzige Zahl ist, für die $x=-x$ gilt). Die weiteren Nullstellen ergeben sich ebenfalls aus der Definition ungerader Funktionen:

$$f \text{ ist ungerade} \Leftrightarrow f(x) = -f(-x)$$

Somit gibt es zu jeder Nullstelle x eine weitere Nullstelle $-x$. Für die Anzahl Nullstellen n gilt somit:

$$n \in \{2k+1 : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

n ist also immer um eins größer als ein Vielfaches von 2, und somit eine ungerade Zahl.

b) Die Aussage ist wahr. Mithilfe einer nicht stetigen Funktion kann dies leicht gezeigt werden:

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ -1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$
und $a = -1$, $b = 1$.

Damit gilt
$f(a) = 1 > 0$
$f(b) = -1 < 0$
Dennoch hat diese Funktion keine Nullstellen, da sie nur die beiden Funktionswerte 1 und -1 annehmen kann.

4) $f(x) = a^x$

Da e^x und $\ln(x)$ die Umkehrfunktion voneinander sind, kann dieser Term wie folgt geschrieben werden:

$$f(x) = e^{\ln(a) \cdot x}$$

Nun kann nach der Kettenregel abgeleitet werden:

$$f'(x) = \frac{d}{dy}(\ln(a) \cdot x) \cdot \frac{d}{dy}(e^x)(\ln(a) \cdot x)$$

$$f'(x) = \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x}$$

Analog zum ersten Schritt kann der Exponentialterm wieder vereinfacht werden:

$$f'(x) = \ln(a) \cdot e^{\ln(a) \cdot x} = \ln(a) \cdot a^x \qquad \text{q.e.d.}$$