Piet Helzel
70482464

1) $f(x) = \ln\left(\frac{8}{7\sin^2(x)+12}\right)$

Die Sinusfunktion ist stetig und, da das Produkt von stetigen Funktionen stets auch stetig ist, ist auch $\sin^2(x)$ stetig. Auch nach Multiplikation mit dem Koeffizienten 7 und Addition von der Konstanten 12 bleibt die Funktion stetig, da konstante Funktionen immer stetig sind.
Der komplette Bruch $\frac{8}{7\sin^2(x)+12}$ ist auch stetig, da $\sin^2(x) \in [0,1]$ ist, der Nenner somit nie gleich null sein kann, und der Quotient aus zwei Funktionen auch stetig ist (vorausgesetzt der Nenner ist nicht gleich null).
Die elementare Funktion $\ln(x)$ ist ebenfalls stetig.
Da die Komposition aus zwei stetigen Funktionen stetig ist gilt

$$\left(\ln \circ \left(\frac{8}{7\sin^2(x)+12}\right)\right)(x) = f(x)$$

und $f(x)$ ist somit stetig.

2) $f(x) = \begin{cases} x^2+5x-4 & \text{für } x \geq -6 \\ -2x-10 & \text{für } x < 6 \end{cases}$

$$f(-6) = (-6)^2 + 5 \cdot (-6) - 4 = 36 - 30 - 4 = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to -6 \\ x > -6}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -6 \\ x > -6}} (x^2+5x-4) = (-6)^2 + 5 \cdot (-6) - 4 = 36-30-4 = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to -6 \\ x < -6}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -6 \\ x < -6}} (x^2+5x-4) = -2 \cdot (-6) - 10 = 12 - 10 = 2$$

Da $f(x)$, der links- und der rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen, ist die Funktion f am Punkt $x = -6$ stetig.

3) a) Die Aussage ist falsch. Die Tatsache, dass für zwei $x \in \mathbb{D}$ $f(-x) = f(x)$ gilt, sagt noch nichts über den Verlauf der Funktion im Ganzen aus. Definiere man die Funktion f z.B. wie folgt:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| = 4 \\ 0 & \text{für } |x| = 7 \\ x^3 & \text{sonst} \end{cases}$$

Offensichtlich kann diese Funktion nicht gerade sein, da x^3 eine ungerade Funktion ist. Es gilt also:

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{4, -4, 7, -7\}$$

Dennoch gilt $f(4) = f(-4)$ und $f(7) = f(-7)$.
Somit ist die Aussage falsch.

b) Die Aussage ist wahr. Dies lässt sich mit dem Zwischenwertsatz begründen:
Für immer größere $|x|$ dominiert der Summand mit dem größten Exponenten von x den Verlauf der Funktion $f(x)$ immer mehr. Da dieser höchste Exponent ungerade ist, dann gilt entweder

$$f(x) \to \infty \text{ und } f(-x) \to -\infty \text{ für } |x| \to \infty$$

oder

$$f(x) \to -\infty \text{ und } f(-x) \to \infty \text{ für } |x| \to \infty.$$

Somit gibt es definitiv $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b < 0$.
Laut dem Zwischenwertsatz existiert somit ein $c \in \mathbb{R}$, sodass $a < c < b$ und $f(c) = 0$. Damit ist die Aussage wahr.

4)

a) Für $\mathbb{D} \cap [0, \pi]$:

Untersuchung der Stetigkeit an der Definitionslücke $\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \tan(x)$$

Wegen $f(x) \to \infty$ für $x \to \frac{\pi}{2}, x > 0$ existiert der Grenzwert nicht. Es handelt sich um eine Polstelle.
f kann im Intervall $\mathbb{D} \setminus [0, \frac{\pi}{2}]$ also nicht stetig sein.

b) Für $\mathbb{D} \cap [\pi, 2\pi]$:

Untersuchung an der Definitionslücke $\frac{3}{2}\pi$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{3}{2}\pi \\ x > \frac{3}{2}\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{3}{2}\pi \\ x > \frac{3}{2}\pi}} \cos(x) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{3}{2}\pi \\ x < \frac{3}{2}\pi}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{3}{2}\pi \\ x < \frac{3}{2}\pi}} \cos(x) = \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$$

Die links- und rechtsseitigen Grenzwerte stimmen überein. Somit ist f auf $\mathbb{D} \setminus [\pi, 2\pi]$ stetig.

c) Für $\mathbb{D}$:

Da f im Intervall $\mathbb{D} \setminus [0, \pi] \subseteq \mathbb{D}$ nicht stetig ist, dann ist f auch auf dem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{D}$ nicht stetig.