Samenvatting Statistiek en Kansrekening

De voorwaardelijke kans van B gegeven A is: $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)}$.

De kans op a beinvloed de kans op b niet als:P(A|B)=P(A) en P(B|A)=P(B)

Twee gebeurtenissen heten onderling onafhankelijk als $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

Frequentiequotiënt (het aantal maal dat gebeurtenis A bij N herhalingen optreed)
$fq(A) = \frac{N(A)}{N}$ $\qquad$ $fq\ (A \cup B) = fq\ (A) + fq(B)$
Een stochastische variabele (s.v.) is een reële functie op de uitkomstenruimte. De uitkomstenruimte en de kansmaat staan model voor een experiment en een s.v. X voor een daarbij verrichte waarneming, zoals bijvoorbeeld het aantal defecte lampen in 100 onderzochte lampen.

$$P(A|B) = 1 - P(\bar{A}|B)$$

A = de tv, B = de auto en de kans dat gezinnen met tv ook een auto hebben P(B|A).
B gegeven A

Discrete kansverdeling:

Een s.v. is discreet als deze eindig veel of aftelbaar oneindig veel waarden kan aannemen.

De verdelingsfunctie F_X van een discrete s.v. X is de functie:

$F_X(x) = P(X \leq x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

F is monotoon niet dalend als $x \leq y \rightarrow F(x) \leq F(y)$

$$\lim_{n \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} F(x) = 1$$

$P(X = x) = F(x) - \lim_{h \uparrow 0} F(x + h)$: de spronghoogte van F in het punt x.

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

In de tabel is slechts $p \leq 0.5$. willen we een binomiale kans van p > 0.5 berekenen voor een B(n, p), dan dienen we over te gaan op n-X. Als X B(n, p)-verdeeld is, dan is n - X ook binomiaal verdeeld en wel B(n, 1 – p). immers telt n – X dan het aantal mislukkingen en de kans op een mislukking is 1 – p.

Hypergeometrische verdeling:

Deze verdeling komt aan de orde bij een aselecte steekproef zonder teruglegging. Uit een verzameling van N elementen, waarvan er r een zeker kenmerk bezitten wordt zonder teruglegging een aselecte steekproef van omvang n getrokken. Zij X het aantal elementen inde steekproef met het betreffende kenmerk. Als uitkomstenruimte S nemen we alle deelverzamelingen met n verschillende elementen uit de totale verzameling van N elementen.

Een s.v. X bezit een hypergeometrische verdeling indien

$$P(X = x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{N-r}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Een handige manier om de formule te onthouden en toepassen is een 2 X 2-tabel:

	B	niet B	
A	X	n – x	n
niet A	r – x	N –n – r + x	N - n
	R	N – r	N

Poisson – verdeling: gebruikt wanneer kans op aantal gebeurtenissen in een tijdbestek

Geometrische verdeling: Een s.v. bezit een geometrische verdeling met parameter 0 < P <1 indien $P(X = x) = p(1-p)^{x-1} \quad x = 1,2, \ldots.$

Deze verdeling wordt gebruikt als verdeling van het aantal proeven tot en met de proef waarbij het eerste succes optreedt in een rij van o.o. experimenten. Treedt het eerste succes op bij het x^e experiment dan bestaan de eerste x-1 experimenten uit mislukkingen gevolgd door succes bij x^e. bij succeskans p en x o.o. experimenten heeft bovengenoemde gebeurtenis een kan $p(1 - p)^{x-1}$.

$$P(X > x) = \sum_{j=x+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p\,\frac{(1-p)^{x+1-1}}{1-(1-p)} = (1-p)^x, \qquad x = 1,2, \ldots.$$

Als X een geometrische verdeling heeft met parameter p, geldt voor ieder tweetal natuurlijke x en y

$$P(X > x + y | X > x) = \frac{P(X > x = y \; en \; X > x)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x = y)}{P(X > x)} = \frac{(1-p)^{x+y}}{(1-p)^x}$$
$$= (1-p)^y = P(X > y)$$

Deze formule wordt ook wel getypeerd met de geheugenloosheid van de geometrische verdeling.

De marginale verdeling van X verkrijg je uit:$P(X = x) = \sum_y P(X = x \; en \; Y = y)$.
En die van Y uit: $P(Y = y) = \sum_x P(X = x \; en \; Y = y)$

x\y	1	2	3	4	P(X=x)
1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.4
2	0.1	0.1	0.1	0	0.3
3	0.1	0.1	0	0	0.2
4	0.1	0	0	0	0.1
P(Y=y)	0.4	0.3	0.2	0.1	

$P(X = x \; en \; Y = y) = P(Y = y | X = x) P(X = x) = P(X = x | Y = y) P(Y = y)$

We willen E(X + Y) berekenen, gebruikmakend van de simultane kansverdeling van X en Y volgt dan:$E(X + Y) = 2 * P(X = 1 \; en \; Y = 1) + 3 * P(X = 1 \; en \; Y = 2) + \cdots$
$+ 8 * P(X = 4 \; en \; Y = 4) = 2 * 0.1 + 3 * 0.1 + \cdots + 8 * 0 = 4$.

Zijn o.o. als voor iedere $x_1, \ldots x_n$ geldt.

$P(X_1 = x_1 \; en \ldots en \; X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \ldots P(X_n = x_n)$.

Het symmetriepunt is de centrale waarde, dus geeft de verwachting de centrale waarde aan.

Variantie:$\sigma^2_X = \sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

Vb: X loopt van 2 tot 6 en de kans is bij elk 0.25;$\text{Var}(X) = E\{(X - EX)^2\} = E\{(X - 4)^2\} = (2 - 4)^2 * 0.25 + (3 - 4)^2 * 0.25 + (4 - 4)^2 * 0.25 + (5 - 4)^2 * 0.25 + (6 - 4)^2 * 0.25 = 2.5$

$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ waarbij $\bar{X} = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} X_i$: steekproefgemiddelde

$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2\mathrm{cov}(X_1, X_2)$

Als Var(X + Y) = 0 dan zijn X en Y sterk afhankelijk bij hogere getallen worden ze minder afhankelijk.

Standaardafwijking is de wortel van de variantie ook wel σ

Covariantie:

De covariantie van de (discrete) s.v.-en X en Y is gedefinieerd door:

$$cov(X,Y) = E\{(X - EX)(Y - EY)\} = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\}$$

Als X en Y gewoonlijk gelijktijdig grote en kleine waarden m.b.t. hun verwachtingen aannemen, dan is de cov(X, Y) > 0, en wel groter naarmate dit verschijnsel sterker is, maar als relatief grote waarden van X in de regel samengaan met relatief kleine waarden van Y en vice versa, dan is cov(X, Y) < 0, en wel kleiner naarmate dit verschijnsel sterker is.

Laat X, Y en Z (discrete) s.v. –en zijn en zij $a \in \mathbb{R}$. Dan geldt

- cov(X,Y) = E(XY) – (EX)(EY)
- cov(X,Y) = cov(Y,X)
- cov(X,X) = Var(X)
- X,Y o.o. → cov(X,Y) = 0 → X en Y zijn ongecorreleerd
    - Deze stelling kan niet andersom

Correlatiecoëfficiënt:

De correlatiecoefficient ρ(X,Y) van de (discrete) s.v. –en X en Y is

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}$$

$$\rho(aX + b, cY + d) = \begin{cases} \rho(X,Y) & als\ ac > 0 \\ -\rho(X,Y) & als\ ac < 0 \end{cases}$$

$$-1 \leq \rho \leq 1$$

$$\rho(X,Y) = 1 \leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1\ voor\ zekere\ a > 0$$

$$\rho(X,Y) = -1 \leftrightarrow P(Y = aX + b) = 1\ voor\ zekere\ a < 0$$

Hoe verder het correlatiecoefficient af ligt hoe beter de punten rond de lijn liggen. Bij 1 lopen de punten op de lijn en bij 0.1 kan je geen lijn onderscheiden.

Voorwaardelijke kansverdeling, voorwaardelijke verwachting:

$$E(X|Y=y) = \sum xP(X=x|Y=y)$$

$$g(y) = E(X|Y=y)$$

De functie g(y) geeft de verwachte waarde van X wanneer Y gelijk is aan y.

E(X) = E{E(X|Y)} = $\sum_{i=1}^{n} E(X|Y=i)P(Y=i)$

Laat X en Y (discrete s.v. –en zijn. Dan is Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))

Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(Y|X))

Continue Kansverdelingen:

de verdelingsfunctie F van een s.v. X met kansdichtheid f is: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$ $\qquad f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$

Simultane kansverdeling: Marginale kansdichtheid van X dan geldt $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y)f_X(x)$$

De verwachting van een continue s.v. met kansdichtheid f wordt gegeven door

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

Voor de verdelingsfunctie van F van X betekent symmetrie als F(c + X) = 1-F(c - X).

$E(\bar{X}) = \mu \text{ en } Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

Bij continue s.v. –en X en Y is de voorwaardelijke kansdichtheid van X gegeven Y=y gedefinieerd door: $F(x|Y=y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$

Hier in is f(x, y) de simultane kansdichtheid van X en Y en $f_Y(y)$ de marginale kansdichtheid van Y. De voorwaardelijk verwachting is gewoon de verwachting behorende bij de voorwaardelijke kansdichtheid.

$EX = E\{E(X|Y)\}$ $\qquad$ Var(X) = E(Var(X|Y)) + Var(E(X|Y))

$$E\{E(X|Y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E(X|Y=y) f_Y(y) dy$$

De kansdichtheid van $f_{(X+Y)}(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$.

Uniforme of homogene kansverdeling: Als notatie gebruiken we X~U(a, b) om aan te geven dat X een uniforme verdeling op (a, b) heeft.

$E(X) = \frac{b+a}{2}$ en $Var(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2$.

Exponentiële verdeling met parameter λ:

$P(X > x) = e^{-\lambda x},\ x \geq 0$

Erlang verdeling met parameters n en λ:

We krijgen dan met behulp van de convolutie-formule de kansdichtheid van Z = X + Y (voor z > 0) $f_Z(z) = \lambda^2 z e^{-\lambda z}$

$f_X(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!}\ voor\ x \geq 0\ (en\ f_X(x) = 0\ voor\ x < 0)$

Poisson-verdeeld met parameter μ = λt in tijdsvak van [0, t] ,dit wordt ook wel het Poisson-proces genoemd.

Gamma verdeling met parameters p en λ:

De gamma verdeling is een directe generalisatie van de Erlang verdeling door de beperking tot een gehele waarden weg te laten. De kansdichtheid wordt gegeven door:

$$f(x; p, \lambda) = \frac{\lambda^p x^{p-1} e^{-\lambda x}}{\int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t}\, dt}\ voor\ x \geq 0\ (en\ f(x; p, \lambda) = 0\ voor\ x < 0)$$

De intergraal $\int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t}\, dt$ wordt afgekort tot Γ(p), de zogenaamde Gamma functie, waaraan de verdeling zijn naam ontleent.

$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t}\, dt = (n-1)!$

Wanneer parameters onbekend zijn heb je een grotere kans een schattingsfout te maken dan wanneer je gebruik maakt van Erlang of Exponentiele verdelingen.

Normale verdeling met parameters μ en σ^2:

De normale verdeling wordt ook wel Gauss, Laplace of De Moivre door hun harde werk aan deze verdeling.

De kansdichtheid φ van de standaard normale verdeling is gegeven door

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

We noteren de standaardnormale verdeling met N(0, 1). Met X~N(0, 1) geven we aan dat X standaardnormaal verdeeld is.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx = 1$$

De verdelingsfunctie Φ van N(0, 1)-verdeling is:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$$

$$\Phi'(x) = \varphi(x)$$

Een standaardnormale verdeling is symmetrisch met symmetriepunt 0.

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$$

De verdelingsfunctie F van X is:

$$F(x) = P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

De kansdichtheid f van X:

$$f(x) = F'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

$E(X) = \mu$ $\qquad$ $Var(X) = \sigma^2$

Standaardiseren : X~N(μ, σ^2) dan $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

Laat $X_1,\ldots X_n$ o.o. zijn, $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, i = 1,….,n, dan is

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ $\quad$ *en* $\quad$ $\bar{X} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.

Centrale Limietstelling: normale benaderingen

De kansverdeling van de som of het gemiddelde van een groot aantal s.v. –en lijkt heel erg op een normale verdeling.

$P(X = x) = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n}$

$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} \leq x\right) = \Phi(x)$

We kunnen de B(n, p)-verdeling voor grote n goed benaderen met N(np, np(1 – p))-verdeling, dit heet ook wel de normale benadering.

<u>Statistiek:</u> schatten

Hoogte van een histogram = $\frac{aantal\ waarnemingen\ in\ een\ klasse}{totaal\ aantal\ waarnemingen*de\ klassebreedte}$

$\bar{x}$ is de waargenomen steekproefgemiddelde: de schatting van μ.

$\bar{X}\ is\ het\ steekproefgemiddelde\ (een\ s.v. en\ geen\ getal): de\ schatter\ van\ \mu$

Model:

E($\bar{X}$) = μ Var(X) = $\frac{\sigma^2}{n}$

E(T) = θ

t = T(x_1,….., x_n) schatting van θ (getal)

T = T(x_1,….., x_n) schatter van θ (s.v.)

T = uitrekenbaar, steekproeffunctie

Behalve het steekproefgemiddelde $\bar{X}$ als schatter voor het midden van de verdeling, wordt ook nogal eens de steekproefmediaan gebruikt. De steekproefmediaan is de middelste waarneming in de rij van de geordende waarnemingen (bij een even aantal waarnemingen het gemiddelde van de middelste twee waarnemingen).

Verwachte kwadratische fout: $E(T-\theta)^2$

De schatter van T(1) is beter dan T(2) als

$$E(T(1)-\theta)^2 \leq \; E(T(2)-\theta)^2$$

Zij T een schatter van θ. Dan geldt $E(T-\theta)^2 = (ET-\theta)^2 + VarT$

We noemen $ET-\theta$ de onzuiverheid van de schatter T. deze term geeft dus aan hoe ver de centrale waarde van T (verwachting) afzit van θ.

Een schatter T heet zuiver als E(T) = θ, dus als $E(\bar{X}) = E(X_1) = p$

$$E(X_i^2) = Var(X_i) + (EX_i)^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$E\left(\overline{X^2}\right) = Var(\bar{X}) + (E\bar{X})^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2$$

Een zuivere schatter van σ^2 is S^2 wordt ook wel de steekproefvariantie genoemd.

Alternatieve verdeling:

Aantal successen / n = $\bar{X}$

Binomiale verdeling:

Schatter van Parameter (p) = X/n

Bij grote n (CLS): $\frac{X}{n} \sim N(p, \frac{p(-p)}{n})$

Poisson verdeling:

Schatter van Parameter(μ) = $\bar{X}$

Geometrische verdeling:

Schatter van Parameter(p) = $1/\bar{X}$

1/$\bar{X}$ is geen zuivere schatter van p

Exponentiële verdeling:

Schatter van Parameter(λ) = $1/\bar{X}$

Normale verdeling:

Schatter van Parameter(μ) = $\bar{X}$

Schatter van Parameter(σ^2) = $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

Als T een zuivere schatter van θ is, dan is de verwachte kwadratische fout gelijk aan de variantie van T.

Uniforme verdeling:

Parameter a is de kleinste waarneming in de formule

Parameter b is de grootste waarneming in de formule

Zuivere standaardschatters voor:

- Verwachting μ: $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i)$
- Variantie σ^2: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$
- Fractie p: $\frac{X}{n}$

Betrouwbaarheidsintervallen: Hoe kleiner we α kiezen deze te breder zal het betrouwbaarheidinterval zijn en een breed interval is niet gewenst. We kunnen α ook niet erg groot kiezen, omdat daarmee de betrouwbaarheid (zeg maar de geloofwaardigheid) van onze uit spraak een te laag niveau krijgt. Meestel nemen we 0.05 of 0.1 voor α.

Betrouwbaarheidsintervallen bij normale verdelingen met 1 steekproef:

Laat $X_1, \ldots, X_n$ o.o. zijn en N(μ, σ)-verdeeld. Dan heeft $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$ een studentverdeling met n – 1 vrijheidgraden.(Als n = 51 dan lezen we uit de tabel 50 vrijheidsgraden af)

Een enkele keer is μ wel bekent en dan is het betrouwbaarheidsinterval voor σ^2.

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{c_1}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2}{c_2}\right)$$

Betrouwbaarheidsintervallen bij normale verdelingen met 2 steekproeven:

LET OP beide s.v. moeten dezelfde variantie hebben!!

Betrouwbaarheidsintervallen bij binomiale verdelingen:

We benaderen B(n, p) met N(np,np(1-p))

En dan krijg je:

$$\frac{X}{n} - c\frac{\sqrt{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}}{\sqrt{n}} < p < \frac{X}{n} + c\frac{\sqrt{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}}{\sqrt{n}}$$

Voorspellingsinterval:

We voorspellen hierbij een nieuw s.v. X_{n+1}

$$P\left(a(X_1, \dots, X_n) < \mathrm{X}_{n+1} < b(X_1, \dots, X_n)\right) = 1 - \alpha$$

Voor een zeer grote n lijkt het interval sterk op: $(\mu - c\sigma, \mu + c\sigma)$

$$\frac{X_{n+1} - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Toetsingstheorie:

De nulhypothese kan uit 1 parameter bestaan, ook wel de enkelvoudige nulhypothese genoemd, en kan uit meerdere parameters bestaan, ook wel de samengestelde nulhypothese.

Als we denken dat H_1 juist is dan verwerpen we de nulhypothese en als we denken dat de H_0 juist is dan accepteren we de nulhypothese. Het verwerpen van de nulhypothese is een sterke uitspraak en het accepteren van de nulhypothese een zwakke.

1. Kies een constant alpha tussen nul en 1(betrouwbaarheidsdrempel)
2. Kies een steekproeffunctie T = T$(X_1, \dots, X_n)$, de toetsingsgrootheid
3. Kies een verzameling K, het kritieke gebied in het waardebereik van T, waarvoor geld $P_\theta(T \epsilon K) \leq \alpha \text{ } voor \text{ } alle \text{ } \theta \in \Theta$
4. Verwerp de nulhypothese als $T \epsilon K$,
   Verwerp de nulhypothese niet als dit niet zo is.

De toetsinggrootheid en het kritieke gebied samen noemen we een TOETS.

De maximale kans onder de nulhypothese om de nulhypothese te verwerpen heet de onbetrouwbaarheid van de toets. De onbetrouwbaarheid moet dus altijd kleiner of gelijk aan de betrouwbaarheidsdrempel zijn.

Het kritieke gebied is het gebied wanneer we de waarde van T erg oftewel te klein vinden om nog in de nulhypothese te geloven, de waarde die K dan heeft is de kritieke waarde.

Het kiezen van T: we kiezen T zo dat T onder de nulhypothese met een kleine kans in K terecht komt en onder de alternatieve hypothese met een zo groot mogelijke kans. Daarnaast nemen we voor het kritieke gebied een zo groot mogelijk getal.

Veelal fungeert de toetsingsgrootheid T als meerinstrument om aan te geven hoever de data afwijken van wat we onder de nulhypothese kunnen verwachten. De toets neemt vaak 1 van de volgende vormen aan:

- Verwerp de nulhypothese als T kleiner of gelijk aan c; we spreken van een linkseenzijdige toets.
- Verwerp de nulhypothese als T groter of gelijk aan c; we spreken van een rechtseenzijdige toets.
- Verwerp de nulhypothese als T groter of gelijk aan c(1) is of kleiner of gelijk aan c(2) is; we spreken van een tweezijdige toets.

Normale verdeling met 1 steekproef:

Noteer T_{n-1} voor een s.v. met een t-verdeling met n-1 vrijheidsgraden. De onbetrouwbaarheid van de toetsen is steeds alpha. Als beide parameters niet bekend zijn.

$H_0 : \mu = a \qquad H_1 : \mu > a$

Verwerp H_0 als $T \geq c$ $\qquad (rechtseenzijdige\ t - toets$

Met $P(T_{n-1} \leq c) = 1 - alpha \quad (c\ opzoeken\ in\ tabel\ t - verdeling)$

$H_0 : \mu = a \qquad H_1 : \mu < a$

Verwerp H_0 als $T \leq -c$ $\qquad (linkseenzijdige\ t - toets$

Met $P(T_{n-1} \leq c) = 1 - alpha \quad (c\ opzoeken\ in\ tabel\ t - verdeling)$

$H_0 : \mu = a \qquad H_1 : \mu \neq a$

Verwerp H_0 als $T \geq c\ of\ T \leq -c \quad (tweezijdige\ t - toets$

Met $P(T_{n-1} \leq c) = 1 - \frac{alpha}{2} \quad (c\ opzoeken\ in\ tabel\ t - verdeling)$

Een eenzijdig formulering is als we op zoek zijn naar verbetering en als we willen controleren of verandering relevant is dan gebruiken we een tweezijdig toetsingsprobleem.

Noteer x_{n-1}^2 voor een s.v. met een chi-kwadraatverdeling met n-1 vrijheidsgraden. De onbetrouwbaarheid van de toetsen is steeds aplha:

$H_0: \sigma^2 = a \qquad H_1: \sigma^2 < a(linkseenzijdige\ t - toets)$

Verwerp H_0 als $\frac{(n-1)S^2}{a} \leq c$ met $P(x_{n-1}^2 \leq c) = alpha$

$H_0: \sigma^2 = a \qquad H_1: \sigma^2 \neq a(tweezijdige\ t - toets)$

Verwerp H_0 als $\frac{(n-1)S^2}{a} \geq c_1\ \ of\ \frac{(n-1)S^2}{a} \leq c_2$

met $P(x_{n-1}^2 \leq c_1) = \frac{alpha}{2},\ \ P(x_{n-1}^2 \leq c_2) = 1 - \frac{alpha}{2}$

<u>WE vatten het op tentamen zo samen:</u>

1. Kansmodel: X_1, …,X_{10} o.o. N(μ, σ^2) verdeeld met $\mu\ en\ \sigma^2$ onbekende parameters;
2. $H_0: \sigma^2 \leq 100, H_1: \sigma^2 > 100$;
3. $toetsingsgrootheid\ \frac{9S^2}{100}\ met\ S^2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \bar{X})^2$, waarbij $\bar{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$;
4. $waarde\ toetsingsgrootheid: \frac{9*195}{100} = 17.55$;
5. $kritieke\ waarde$: 16.9; kritieke gebied: $\frac{9S^2}{100} \geq 16.9$;
6. $verwerp\ H_0, want\ 17.55 > 16.9$;
7. Statistisch is aangetoond dat het bereik van de betonsterkte de door de fabrikant geclaimde waarde van 40 kg overschrijdt.

Normale verdeling met twee steekproeven:

Noteer T_{m+n-1} voor een s.v. met een t-verdeling met m+n-1 vrijheidsgraden. De onbetrouwbaarheid van de toetsen is steeds alpha.

$H_0: \mu - v = a \qquad H_1: \mu - v > a$

Verwerp H_0 als $T \geq c$ $\qquad$ $(rechtseenzijdige\ t - toets$

Met $P(T_{m+n-1} \leq c) = 1 - alpha \quad (c\ opzoeken\ in\ tabel\ t - verdeling)$

$H_0: \mu - v = a \qquad H_1: \mu - v < a$

Verwerp H_0 als $T \leq -c$ $\qquad$ $(linkseenzijdige\ t - toets$

Met $P(T_{m+n-1} \leq c) = 1 - alpha \quad (c\ opzoeken\ in\ tabel\ t - verdeling)$

$H_0: \mu - v = a \qquad H_1: \mu - v \neq a$

Verwerp H_0 als $T \geq c\ of\ T \leq -c$ $\ (tweezijdige\ t - toets$

Met $P(T_{m+n-1} \leq c) = 1 - \frac{alpha}{2} \quad (c\ opzoeken\ in\ tabel\ t - verdeling)$

Laat $X_1, \ldots, X_n$ N(μ, σ^2)-verdeeld en $Y_1, \ldots, Y_m$ N(v, σ^2)-verdeeld zijn. Waarbij alle parameters onbekend zijn. Dit bereken je dan via de F-verdeling.

$$F = \frac{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{S_X^2}{S_Y^2}\ met\ \bar{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i\ \ en\ \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_i$$

1. Kansmodel: $X_1, \ldots, X_{20}$ o.o. N(μ, σ^2)-verdeeld met beide parameters onbekend;
2. H_0:$\mu \leq 0,\ H_1 > 0$;
3. Toetsingsgrootheid: $T = \bar{X}/(s/\sqrt{20})$ met $\bar{X} =$. .. en $S^2 =$. ..(net als vorige!!);
4. Onder het randpunt van H_0 heeft T een Student-verdeling met 19 vrijheidsgraden;
5. Waarde T: 3.87;
6. Kritieke waarde: 1.73; kritieke gebied: T≥1.73;
7. Verwerp nulhypothese want 3.87>1.73;
8. Statistisch is aangetoond dat er een goede reden is om aan te nemen dat de cursus tot verhoging van de testscore leidt.

Binomiale verdeling:

Omdat $P(T \geq 9; p = 0.5) = 0.011\ en\ P(T \geq 9; p = 0.5) = 0.055$, geldt als $c \geq 9$. Binnen de conditie willen we het kritieke gebied zo groot mogelijk hebben dus is de kritieke waarde c = 9.

Geldt nu ook voor $P(T \geq 9) \leq 0.05\ voor\ alle\ p \leq 0.5$? JA namelijk:
$P_{p1}(Y \geq c) \leq P_{p2}(Y \geq c)$

We verwerpen de nulhypothese dus als $T \geq 9$. De gevonden waarde van T is 8. We verwerpen de nulhypothese dus niet. Omdat het maar net boven alpha ligt zullen we toch grote twijfel omtrent de nulhypothese hebben.

<u>WE vatten het op tentamen zo samen:</u>

1. Kansmodel: X~B(10,p) met p de kans dat het nieuwe zoetje de voorkeur heeft;
2. $H_0: p \leq 0.5,\ H_1: p > 0.5$;
3. $T = X$;
4. Onder het randpunt van H_0 heeft T een B(10,0.5)-verdeling;
5. Waarde T:8;
6. Kritieke waarde:9; kritieke gebied $T \geq 9$;
7. Verwerp H_0 niet, want 8 < 9;
8. Statistisch gezien is er bij onbetrouwbaarheidsdrempel $\alpha = 0.05$ net niet voldoende bewijskracht om voorkeur voor een nieuw zoetje uit te spreken.

P-waarde:

De kans om voorbij de gevonden waarde $\bar{x}$ te komen heet de p-waarde of overschrijdingskans. Zo is bij voorbeeld hier de p-waarde voor $\bar{x}$ = 0.5

$P(\bar{X} \geq 0.5;\ \mu = 0)$ = 0.03 = α

Hierbij wordt de nulhypothese verwerpen bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 0.05 en niet verworpen bij een onbetrouwbaarheidsdrempel van 0.01. de p-waarde geeft de bewijskracht tegen de nulhypothese aan.

We verwerpen de nulhypothese als de p-waarde kleiner is dan of gelijk is aan α en wanneer de overschrijdingskans groter is dan alpha dan accepteren we de nulhypothese.

$$P(T \geq t;\ \theta = a) = rechtsoverschijdingskans$$

$$P(T \leq t;\ \theta = a) = linksoverschijdingskans$$

$$2P(T \geq t;\ \theta = a)\ en\ 2P(T \leq t;\ \theta = a) = tweezijdige\ overschijdingskans$$

Op tentamen dien je toetsingsproblemen op deze manier te structuren:

1. Formuleer een kansmodel
2. Formuleer nulhypothese en alternatieve hypothese in termen van parameters van het kansmodel
3. Formuleer een geschikte toetsingsgrootheid in termen van de voorkomende s.v. – en.
4. Geef de kansverdeling van de toetsingsgrootheid onder (het randpunt van) de nulhypothese
5. Bereken de waarde van de toetsingsgrootheid
6. Bepaal de kritieke waarde en geeft het kritieke gebied of bereken de overschrijdingskans
7. Formuleer de conclusie ontrent het al dan niet verwerpen van de nulhypothese bij de gegeven onbetrouwbaarheidsdrempel.
8. Vermeld de conclusie in gewone woorden.