



**eCAMPUS**  
UNIVERSITÀ

**DiSTA**

**Corso: Analisi Numerica**

**Docente: Roberto Piersanti**

# **Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica**

## **Lezione 4.4b**

Il metodo delle potenze inverse e il metodo QR

## Calcolo degli autovalori di una matrice (il metodo QR)

- Il metodo delle potenze (e delle potenze inverse)

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Determina gli autovalori  $\lambda \in \mathbb{C}$  estremi di  $A$ :

- autovalore di **modulo massimo**
- autovalore di **modulo minimo**
- autovalore **in modulo più vicino a**  $\mu \in \mathbb{C}$

- Per poter calcolare l'intero spettro  $\sigma(A)$  della matrice  $A$



**Metodo QR**

- Metodo QR è basato sulle **trasformazioni di similitudine**

## Calcolo degli autovalori di una matrice (il metodo QR)

➤ **Trasformazione di similitudine:** sia  $P$  invertibile ed  $A$  arbitraria

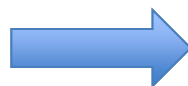
$$S = P^{-1}AP$$

➤  $S$  è simile ad  $A$

$$\sigma(S) = \sigma(A)$$

➤ **Idea del metodo QR:** si trasforma  $A$  in una matrice più semplice

- Triangolare
- Diagonale



Autovalori sono  
gli **elementi presenti sulla  
diagonale principale**

➤ **Metodo QR** è una **successione di trasformazioni di similitudine**

## Calcolo degli autovalori di una matrice (il metodo QR)

- Concetto di **matrici ortogonali**  $P$

$$P^{-1} = P^T$$

- Utilizzando **matrici ortogonali nelle trasformazioni di similitudine**

**Condizionamento del problema**  
del calcolo degli autovalori rimane invariato

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Autovalori di  $A$  subiscono variazioni contenute  
in presenza di piccole perturbazioni

## Calcolo degli autovalori di una matrice (il metodo QR)

- **Metodo QR:** successione di trasformazioni di similitudine utilizzando matrici ortogonali  $Q^{(k)} \longrightarrow Q^{(k)-1} = Q^{(k)T}$

- **L'algoritmo del QR**

$$T^{(0)} = A$$

$$k = 1, 2, \dots \left\{ \begin{array}{l} Q^{(k)} R^{(k)} = T^{(k-1)} \\ T^{(k)} = R^{(k)} Q^{(k)} \end{array} \right. \leftarrow \begin{array}{l} \text{Trasformazione QR} \\ R^{(k)} \text{ è una matrice} \\ \text{triangolare superiore} \end{array}$$

- Viene generata una successione di matrici  $\{T^{(k)}\}$

$T^{(k)}$  matrici ortogonalmente simili ad  $A$

$T^{(k)} \quad k \rightarrow \infty \Longrightarrow$  triangolare superiore

## Calcolo degli autovalori di una matrice (il metodo QR)

➤ Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda_1| = 7.0747, \quad |\lambda_2| = 3.1879, \quad |\lambda_3| = 0.8868$$

➤ Dopo  $k = 20$  iterazioni

$$T^{(20)} = \begin{pmatrix} \boxed{7.04} & 1.45 \cdot 10^{-6} & 2.19 \cdot 10^{-15} \\ 1.45 \cdot 10^{-6} & \boxed{-3.18} & -1.95 \cdot 10^{-11} \\ 1.06 \cdot 10^{-17} & -1.95 \cdot 10^{-11} & \boxed{-0.88} \end{pmatrix}$$

➤ Se la matrice  $A$  è simmetrica  $A = A^T$

$$T^{(k)} \text{ } k \rightarrow \infty \longrightarrow \text{matrice diagonale}$$