



CALCOLO DEGLI AUTOVALORI E FONDAMENTI DELLA MATEMATICA NUMERICA (Richiami sul calcolo degli autovalori di una matrice)

In questa lezione affronteremo il problema della ricerca e determinazione degli autovalori di una matrice. Il calcolo degli autovalori rappresenta un tema di grande rilevanza in numerosi ambiti della matematica, della fisica, della meccanica e, più in generale, delle scienze applicate.

Dall'algebra lineare sono note le formule esplicite per il calcolo degli autovalori. Tuttavia, è altrettanto noto che, nella pratica, tali formule risultano spesso di complessità troppo elevata per essere applicate in modo diretto ed efficiente. Per questo motivo, si rende necessario introdurre metodi alternativi, che consentano un calcolo più efficace e rapido degli autovalori di una matrice generica.

Inizieremo la nostra trattazione richiamando le equazioni fondamentali relative al calcolo degli autovalori. Sia A una matrice quadrata di ordine n (ossia, di n righe ed n colonne) a coefficienti reali. Diciamo che $\lambda \in \mathbb{C}$ (ovvero, in generale un numero complesso) è un autovalore della matrice A se esiste un vettore $x \in \mathbb{C}^n$, diverso dal vettore nullo ($x \neq 0$), detto autovettore, tale che

$$Ax = \lambda x.$$

In generale l'autovalore λ è un numero complesso ed anche l'autovettore ad esso associato è un vettore di componenti complesse. Richiamiamo quindi di seguito brevemente la definizione e le principali proprietà dei numeri complessi.

I numeri complessi \mathbb{C} costituiscono un'estensione dell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$) e sono stati introdotti per permettere la determinazione di tutte le soluzioni delle equazioni polinomiali. Ad esempio, l'equazione

$$x^2 + 1 = 0,$$

non ammette soluzioni nell'insieme dei numeri reali, poiché in tale insieme non esistono numeri il cui quadrato sia negativo. A tal fine si introduce il numero i , detto unità immaginaria, che soddisfa la seguente proprietà

$$i^2 = -1,$$

In particolare, l'unità immaginaria i è una soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$.

Un generico numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è formato da due parti, una parte reale $a \in \mathbb{R}$ e una parte immaginaria $b \in \mathbb{R}$, ed è definito dalla seguente espressione

$$z = a + ib,$$

con a e b numeri reali e i detta unità immaginaria.

Le operazioni di somma algebrica e di prodotto tra numeri complessi si eseguono secondo le regole consuete dell'algebra, tenendo conto della relazione fondamentale $i^2 = -1$.

Analogamente a come i numeri reali possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta, i numeri complessi sono associati in modo univoco ai punti di un piano, detto piano complesso (o piano di Gauss), in cui l'asse orizzontale è denominato asse reale e l'asse verticale asse immaginario. In particolare, al numero complesso $z = a + ib$ corrisponde il punto del piano di Gauss con coordinate cartesiane (a, b) .



Si definisce complesso coniugato \bar{z} di un numero complesso $z = x + iy$ come

$$\bar{z} = x - iy.$$

Un vettore complesso $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ e una matrice $Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sono, rispettivamente, un vettore e matrice i cui elementi appartengono all'insieme dei numeri complessi: $z_k \in \mathbb{C}$ e $Z_{kj} \in \mathbb{C}$.

Si definiscono vettore complesso coniugato $\bar{\mathbf{z}}$ e matrice complessa coniugata \bar{Z} , rispettivamente del vettore \mathbf{z} e della matrice Z , il vettore e la matrice ottenuti sostituendo a ciascun elemento, z_k e Z_{kj} , il suo complesso coniugato, \bar{z}_k e \bar{Z}_{kj}

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= [z_1, \dots, z_n], & z_k &= x_k + iy_k, \quad k = 1, \dots, n, \text{ (vettore complesso),} \\ \bar{\mathbf{z}} &= [\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n], & \bar{z}_k &= x_k - iy_k, \quad k = 1, \dots, n, \text{ (vettore complesso coniugato),} \\ Z &= \begin{pmatrix} z_{11} & \dots & z_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{n1} & \dots & z_{nn} \end{pmatrix}, & z_{kj} &= x_{kj} + iy_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, n \text{ (matrice complessa),} \\ \bar{Z} &= \begin{pmatrix} \bar{z}_{11} & \dots & \bar{z}_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{z}_{n1} & \dots & \bar{z}_{nn} \end{pmatrix}, & \bar{z}_{kj} &= \bar{x}_{kj} + i\bar{y}_{kj}, \quad k, j = 1, \dots, n \text{ (matrice complessa coniugata).} \end{aligned}$$

Una matrice complessa generica $Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$ si dice hermitiana se coincide con la propria trasposta coniugata, ovvero

$$Z \text{ hermitiana} \Leftrightarrow Z = (\bar{Z})^T = Z^H.$$

Dopo questa breve digressione sui numeri complessi, torniamo alla definizione di autovalore e autovettore di una matrice A

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x},$$

dove λ è un autovalore della matrice A , e \mathbf{x} è l'autovettore associato a λ . È importante osservare che gli autovettori sono definiti a meno di un fattore moltiplicativo scalare. Infatti, se \mathbf{x} soddisfa la relazione $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, allora anche ogni vettore della forma $\alpha\mathbf{x}$, con $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, soddisfa la stessa equazione

$$A(\alpha\mathbf{x}) = \alpha A\mathbf{x} = \alpha\lambda\mathbf{x} = \lambda(\alpha\mathbf{x}).$$

Se l'autovettore \mathbf{x} fosse noto, il calcolo dell'autovalore λ risulterebbe estremamente semplice. In tal caso, infatti, è possibile ricorrere al cosiddetto quoziente di Rayleigh, che fornisce la seguente espressione per l'autovalore

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^H A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{x}} = \frac{\sum_{i,j} \bar{x}_i a_{ij} x_j}{\sum_i \bar{x}_i x_i},$$

dove \mathbf{x}^H denota il trasposto coniugato del vettore \mathbf{x} , ovvero

$$\mathbf{x}^H = [\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n]^T.$$

Questa formula permette di determinare il corrispondente autovalore nel caso in cui l'autovettore sia già noto.

Per giungere alla formula del quoziente di Rayleigh a partire dalla conoscenza dell'autovettore \mathbf{x} , è sufficiente osservare quanto segue. A partire dalla relazione $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, moltiplichiamo entrambi i membri a sinistra per \mathbf{x}^H , ottenendo

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x}^H A \mathbf{x} = \mathbf{x}^H \lambda\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^H \mathbf{x},$$

Il termine $\mathbf{x}^H A \mathbf{x}$ rappresenta il prodotto scalare tra il vettore \mathbf{x}^H e il vettore $A\mathbf{x}$ (che, per ipotesi, è pari a $\lambda\mathbf{x}$). Analogamente $\mathbf{x}^H \mathbf{x}$, è il prodotto scalare del vettore \mathbf{x} con sé stesso, ed è quindi uguale al quadrato



della norma del vettore \mathbf{x} . Di conseguenza, si tratta di una quantità reale e strettamente positiva (poiché $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$). È pertanto lecito dividere ambo i membri dell'equazione $\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^H \mathbf{x}$ per $\mathbf{x}^H \mathbf{x}$, ottenendo

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{x}}.$$

Esplicitando ora l'identità appena ottenuta, ovvero sviluppando i prodotti scalari in forma di somma sugli indici di riga i e di colonna j , si ottiene

$$\lambda = \frac{\mathbf{x}^H \mathbf{A} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{x}} = \frac{\sum_{i,j} \bar{x}_i a_{ij} x_j}{\sum_i \bar{x}_i x_i}.$$

Tale espressione esplicita conferma la definizione del quoziente di Rayleigh, ottenuto combinando i singoli termini dei prodotti scalari coinvolti.

È dunque evidente che, se l'autovettore \mathbf{x} fosse noto, il calcolo dell'autovalore λ risulterebbe estremamente semplice. Tuttavia, determinare un autovettore \mathbf{x} è, in generale, un problema complesso quanto quello del calcolo dell'autovalore λ stesso. Nonostante ciò, vedremo in seguito che la relazione di Rayleigh potrà essere impiegata per ottenere approssimazioni numeriche degli autovalori di una matrice, risultando quindi uno strumento utile in contesti algoritmici.

Passiamo ora a esaminare quello che viene definito polinomio caratteristico di una matrice. Un numero λ è un autovalore della matrice A se, e solo se, si verifica la seguente equivalenza

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

dove I è la matrice identità di dimensione $n \times n$. Infatti, richiedere che $\mathbf{A} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$, implica che $\mathbf{A} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} = \mathbf{0}$, ovvero $\mathbf{A} \mathbf{x} - \lambda \mathbf{I} \mathbf{x} = \mathbf{0}$, da cui raccogliendo il vettore \mathbf{x} , si ottiene

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

dove $\lambda \mathbf{I}$ è una matrice diagonale i cui elementi lungo la diagonale principale sono pari a λ , mentre tutti gli altri elementi fuori diagonale sono nulli.

La relazione

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

è una relazione vettoriale. Affinché questo sistema ammetta soluzioni non banali, cioè con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, è necessario che la matrice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ non sia invertibile, ossia singolare. Ciò equivale a richiedere che il determinante della matrice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ sia nullo

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Questa condizione rappresenta il criterio fondamentale per la determinazione degli autovalori di una matrice. Infatti, definendo $P_A(\lambda)$ il determinante di $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$, allora la relazione

$$P_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0,$$

definisce $P_A(\lambda)$, ossia il polinomio caratteristico associato alla matrice A . Notiamo che la matrice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ risulta dalla matrice A per sottrazione dell'elemento λ su tutta la diagonale principale

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

In altri termini, si prende la matrice A e agli elementi diagonali si sottrae λ .

Pertanto, gli autovalori di una matrice A sono le radici del polinomio caratteristico $P_A(\lambda)$. L'equazione

$$P_A(\lambda) = 0$$

è detta equazione caratteristica della matrice A .



Questa osservazione consente di affermare che la matrice A può avere al massimo n autovalori distinti, poiché il polinomio caratteristico $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ è un polinomio di grado n nella variabile λ . Infatti, il teorema fondamentale dell'algebra garantisce che un polinomio di grado n ammette esattamente n soluzioni nel campo complesso, contate con la dovuta molteplicità. Pertanto, se tutte le radici fossero semplici, si avrebbe un numero massimo di n autovalori distinti.

Inoltre, la matrice A è singolare se e solo se $\lambda = 0$ è soluzione dell'equazione caratteristica, ovvero se lo zero è un autovalore di A . Di conseguenza, le matrici singolari sono caratterizzate dalla presenza di almeno un autovalore nullo. È importante sottolineare che, nell'ambito della ricerca degli autovalori di una matrice A , non si presuppone a priori che gli autovalori siano necessariamente diversi da zero.

Procediamo ora con alcune ulteriori definizioni e notazioni.

Indichiamo con $\sigma(A)$ lo spettro della matrice A , ovvero l'insieme formato da tutti gli autovalori di A

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},$$

dove gli autovalori λ_i ($i = 1, \dots, n$) possono includere valori nulli e possono presentarsi con molteplicità maggiore di uno.

Ricordiamo inoltre la definizione, che abbiamo già introdotto nelle precedenti lezioni, di $\rho(A)$ raggio spettrale della matrice A

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|,$$

ovvero il massimo dei moduli degli autovalori della matrice A .

Infine, ricordiamo che per il determinante A abbiamo la seguente caratterizzazione

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i,$$

ovvero il determinante di A è il prodotto degli autovalori della matrice A . In particolare, osserviamo che, se almeno un autovalore λ_i , della matrice A , è nullo, allora la matrice A è singolare. Naturalmente vale anche il viceversa. Pertanto, la presenza di un autovalore nullo rappresenta una condizione necessaria e sufficiente per la singolarità della matrice A .

Osserviamo che se $\lambda \in \mathbb{C}$ è un autovalore di una matrice A , cioè $\lambda \in \sigma(A)$, allora anche il complesso coniugato di λ , indicato con $\bar{\lambda}$, appartiene allo spettro di A , $\bar{\lambda} \in \sigma(A)$

$$\lambda \in \mathbb{C}: \lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A).$$

Ciò deriva dal fatto che stiamo considerando matrici a coefficienti reali. Pertanto, il polinomio caratteristico associato è un polinomio a coefficienti reali. È noto che un polinomio a coefficienti reali di grado n che possiede una radice complessa, necessariamente ammette anche la radice complessa coniugata. Da ciò consegue che gli autovalori complessi di matrici reali si presentano sempre in coppie coniugate. Ovvero, se λ è un autovalore complesso, allora anche il suo complesso coniugato $\bar{\lambda}$ è un autovalore della matrice.

Nel caso in cui la matrice A sia triangolare, si dimostra facilmente che gli elementi sulla diagonale principale corrispondono agli autovalori della matrice stessa. Questa affermazione risulta immediata considerando che il determinante di una matrice triangolare è pari al prodotto degli elementi sulla diagonale principale. Poiché, d'altra parte, il determinante di una matrice è anche uguale al prodotto dei



suoi autovalori (contati con la dovuta molteplicità), si conclude che gli elementi diagonali di A coincidono con i suoi autovalori

$$A \text{ triangolare} \Rightarrow \lambda_i = a_{ii}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dopo questo breve richiamo introduttivo alle principali definizioni relative all'analisi spettrale delle matrici, ovvero allo studio dello spettro e quindi dell'insieme degli autovalori, passiamo ad alcuni esempi concreti. A scopo didattico, prenderemo in esame matrici di dimensioni contenute, ad esempio 2×2 o 3×3 , in modo da poter effettuare i calcoli manualmente e verificare direttamente le proprietà discusse nei casi specifici.

Consideriamo, ad esempio, la matrice 3×3 così costituita

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico è determinato a partire dalla relazione $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$. Quindi, la matrice $A - \lambda I$ risulta

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 10 - \lambda & 2 & 3 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda \end{bmatrix},$$

da cui, imponendo che il determinante di $A - \lambda I$ sia uguale a zero, si trova l'equazione caratteristica $\det(A - \lambda I) = 0$.

Sviluppando il determinante, per esempio, per righe o per colonne, si ottiene

$$(10 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} + 3 \det \begin{pmatrix} -1 & 2 - \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava il polinomio caratteristico

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 59\lambda - 73,$$

che ha come radici $P_A(\lambda) = 0$

$$\lambda_1 = 9.69, \quad \lambda_{2,3} = 2.66 \pm i0.69,$$

i quali rappresentano i tre autovalori della matrice A di partenza, approssimati trascurando le cifre decimali successive alla seconda. Il primo autovalore λ_1 è reale, mentre λ_2 è un autovalore complesso; di conseguenza, esiste anche il corrispondente autovalore complesso coniugato λ_3 .

È evidente che, partendo da matrici di dimensioni ridotte, ad esempio 2×2 o 3×3 , è possibile effettuare i calcoli manualmente, applicando direttamente la definizione di autovalore, costruendo il polinomio caratteristico e determinando infine le radici dell'equazione caratteristica. Tuttavia, nel caso di matrici di dimensioni grandi, tali definizioni assumono un valore prevalentemente teorico, poiché la determinazione del polinomio caratteristico richiede il calcolo del determinante di $A - \lambda I$, ovvero di un polinomio di grado elevato, la cui risoluzione implica la soluzione di equazioni algebriche di alto grado. Questo procedimento risulta oneroso e può risultare numericamente instabile. Infatti, occorrerebbe prima costruire l'equazione caratteristica tramite il calcolo di determinanti, e successivamente applicare metodi di ricerca delle radici, analoghi a quelli utilizzati per equazioni non lineari. Per questi motivi, nel caso generale, è opportuno introdurre tecniche e informazioni supplementari che consentano un calcolo più efficiente e stabile degli autovalori.