METODI NUMERICI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Stabilità, consistenza e convergenza dei metodi numerici)

In questa lezione, affronteremo finalmente i temi della stabilità, della consistenza e della convergenza per le equazioni differenziali ordinarie (EDO) risolte numericamente. Nella lezione precedente, abbiamo introdotto il concetto di stabilità assoluta, che riguarda il comportamento asintotico della soluzione numerica quando x_k tende all'infinito. In particolare, si desiderava che le soluzioni numeriche tendessero a zero quando applicate alla risoluzione di un problema modello $y' = \lambda y$ (con $\lambda < 0$), la cui soluzione esatta è $y = e^{\lambda x}$, che tende a zero per $x \to \infty$ se λ è negativo. In questa lezione, tratteremo il problema in termini più generali, fornendo definizioni di stabilità (senza riferirci esclusivamente alla stabilità assoluta). Successivamente, esamineremo come questa condizione sia funzionale per ottenere la condizione di convergenza del metodo numerico.
Iniziamo, quindi, rivisitando il concetto di stabilità assoluta applicato al primo modello

$$y' = \lambda y, \qquad \lambda < 0.$$

Nella precedente lezione abbiamo definito un metodo numerico assolutamente stabile se, fissato $h > 0$, quindi fissato il passo di discretizzazione, u_k tende a zero quando x_k tende all'infinito

$$u_k \to 0 \quad \text{per} \quad x_k \to +\infty.$$

Molto schematicamente, possiamo pensare che questa proprietà abbia a che vedere con un comportamento della soluzione numerica in cui l'intervallo di integrazione è illimitato e il passo è fissato. La Figura 1 mostra questo comportamento, riportando un esempio di soluzione esatta e una sua rappresentazione numerica nei nodi x_k. Per soddisfare l'assoluta stabilità, stiamo richiedendo che, per h fissato e intervallo di integrazione illimitato, la soluzione numerica tenda a zero.
Un concetto diverso di stabilità è la zero stabilità o stabilità senza ulteriori specificazioni. In questo caso, siamo interessati a studiare il comportamento della soluzione su un intervallo fissato di ampiezza fissa quando h, il parametro di discretizzazione, tende a zero. In altre parole, quando il numero di punti di discretizzazione o nodi aumenta. In questo contesto, parleremo di zero stabilità. La definizione euristica è la seguente: un metodo numerico è zero-stabile se, fissato l'intervallo di integrazione $I = [x_0, x_f]$, dove x_0 è il punto iniziale e x_f è il secondo estremo di integrazione della EDO, il metodo fornisce soluzioni numeriche limitate da una costante che può dipendere da x_f, ma non dipenderà da h, ovvero

$$|u_k| \leq C(x_f) \qquad \forall x_k, \quad \forall h < h_0.$$

In altri termini, pretendiamo che esistano una costante C e un h_0 opportuni tali che, se h è minore di h_0, quindi per h sufficientemente piccoli, per ogni valore di x, la soluzione numerica u_k sia limitata da questa costante C. Dunque, stiamo pretendendo che la soluzione numerica resti al di sotto di una costante C, indipendentemente dal numero di nodi utilizzati nell'intervallo I. Questo è il motivo per cui viene definita come zero stabilità: perché vale anche nel limite in cui h tende a 0.
Diamo la definizione rigorosa di stabilità per un generico problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f\big(x, y(x)\big) & \forall x \in I = (x_0, x_f] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Un metodo numerico è zero stabile se a piccole perturbazioni del dato iniziale corrispondono variazioni piccole o controllabili nella soluzione. In altri termini, questo vuol dire che la soluzione numerica non è eccessivamente sensibile alle variazioni dei dati. Più precisamente, se v_0 è un dato iniziale e $\{v_k\}$ la soluzione corrispondente nell'intervallo I, e se supponiamo di perturbare il dato iniziale, da v_0 a $w_0 =$

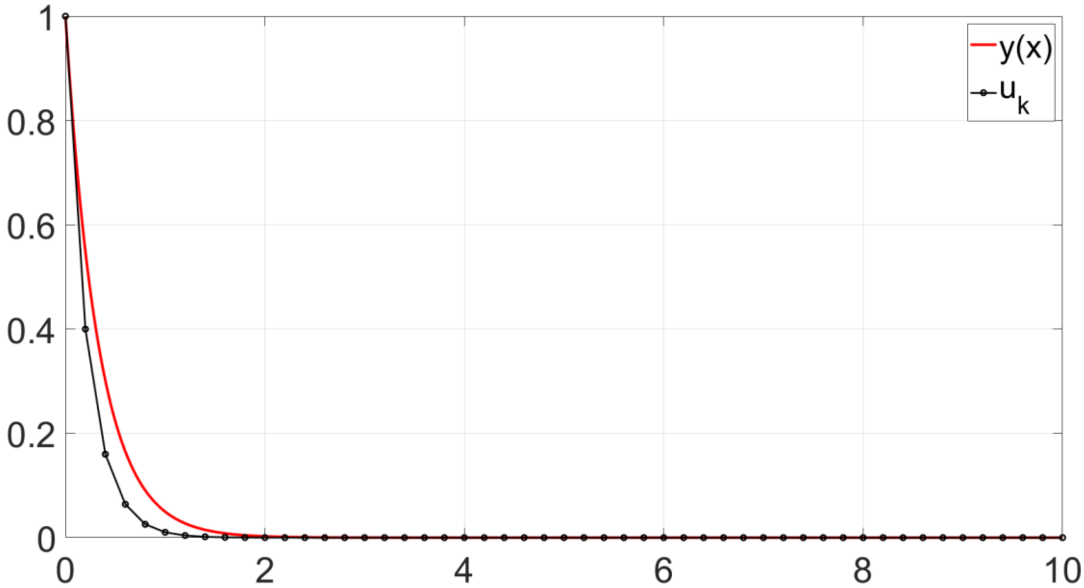

Figura 1: Esempio di soluzione numerica u_k e soluzione esatta $y(x)$, per un metodo numerico con condizioni che soddisfano l'assoluta stabilità.

$v_0 + \epsilon$ (dove ϵ è una perturbazione) allora la soluzione numerica e $\{w_k\}$ dovrà rispondere in maniera controllata a tale perturbazione. Considerando il dato iniziale perturbato w_0

$$w_0 = v_0 + \epsilon,$$

per il quale corrisponde la soluzione $\{w_k\}$ nell'intervallo I, vogliamo che esista una costante C positiva, dipendente a priori dall'intervallo (quindi dipendente a priori da x_f) tale che la differenza fra le soluzioni v_k e w_k corrispondenti ai due diversi dati v_0 e w_0, ovvero ai due dati iniziali diversi, sia minore o uguale alla costante C moltiplicata per ϵ, per ogni k tale che x_k appartenga all'intervallo I. In formula, questo si esprime come

$$\exists C > 0 \quad \text{t. c.} \quad |v_k - w_k| \leq C\epsilon \qquad \forall k \quad \text{t. c.} \quad x_k \in I.$$

Tradotto in altri termini, se i dati iniziali variano di poco, ovvero differiscono di ϵ l'uno dall'altro, le due soluzioni numeriche corrispondenti dovranno variare di poco. In altre parole, le due soluzioni numeriche dovranno differire in valore assoluto di una costante C moltiplicata per ϵ, con la costante C fissata e non dipendente da h.

Abbiamo dato quindi il concetto di zero stabilità, che rappresenta per il problema numerico ciò che il concetto di stabilità rappresenta per un problema differenziale. Infatti, parlare di un problema ben posto equivale essenzialmente a richiedere che la soluzione esista, sia unica e dipenda continuamente dai dati, ovvero sia stabile. La zero stabilità traduce essenzialmente l'ipotesi di buona posizione del problema numerico, ovvero il metodo numerico è stabile (zero stabile) se è ben posto.

Abbiamo visto la definizione di zero stabilità per un metodo numerico. Siamo ora interessati a comprendere quando un metodo numerico converge, ovvero quando le soluzioni prodotte tendono alle soluzioni esatte. Andiamo quindi a esaminare in che modo la stabilità influisce sulla convergenza.

Incominciamo a definire in modo rigoroso che cosa si intende per convergenza di un metodo numerico. Se u_k è la soluzione numerica e y è la soluzione esatta del generico problema di Cauchy, allora diciamo

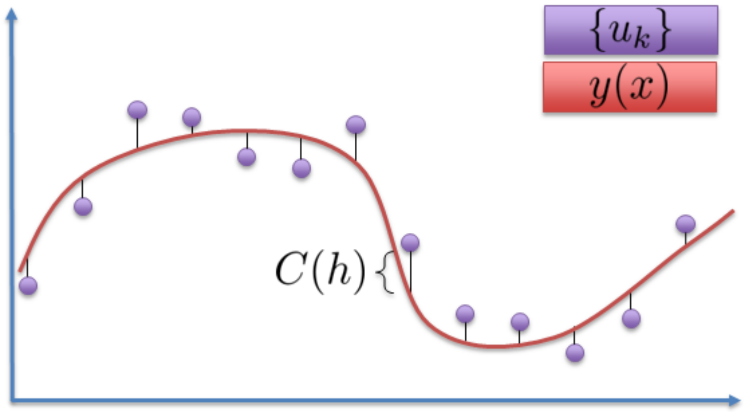

Figura 2: Rappresentazione schematica del concetto di convergenza $|u_k - y(x_k)| \leq C(h)$, mostrando la soluzione esatta $y(x)$ e i valori della soluzione numerica nei nodi u_k.

che la successione $\{u_k\}$ converge a y se, e solo se, per ogni nodo x_k nell'intervallo I, si ha che la differenza tra u_k e $y(x_k)$, in valore assoluto, è minore o uguale a una certa costante $C(h)$ (che dipende da h) e tale che questa differenza tende a zero per $h \to 0$

$$|u_k - y(x_k)| \leq C(h) \to 0 \quad \text{per} \quad h \to 0.$$

Quindi, vogliamo essere sicuri che, al tendere di h a zero, i valori u_k tendano a $y(x_k)$. La Figura 2 esprime graficamente questo concetto, mostrando la soluzione esatta e i valori della soluzione numerica nei nodi. Come si può notare, per ogni nodo la differenza tra il valore assunto dalla soluzione numerica e il valore della soluzione esatta nel nodo deve essere maggiorabile con una costante positiva $C(h)$, che dipende da h e tende a zero per $h \to 0$. Pertanto, quando h diventa piccolo, ovvero quando il numero di nodi diventa grande, queste distanze devono progressivamente assottigliarsi e, al limite, tendere a zero. Questo rappresenta il concetto rigoroso di convergenza per la soluzione numerica di un problema di Cauchy.

Abbiamo quindi visto la stabilità (o zero stabilità) e abbiamo introdotto la definizione di convergenza. Ci chiediamo ora se tutti i metodi stabili siano anche convergenti. In altre parole, la domanda che poniamo è: la stabilità implica la convergenza?

$$\text{stabilità} \quad \Longrightarrow \quad \text{convergenza ?} \quad \text{NO}$$

In generale, la risposta è no. Quindi, non è sufficiente che un metodo sia stabile affinché sia anche convergente. Tuttavia, la combinazione di stabilità e consistenza garantisce la convergenza

$$\text{stabilità} + \text{consistenza} \quad \Longrightarrow \quad \text{convergenza ?} \quad \text{SI}$$

Se abbiamo un metodo stabile e consistente, allora avremo garantita la convergenza. Siamo dunque indotti a introdurre il concetto di consistenza per un metodo numerico.

In estrema sintesi, la convergenza è la proprietà per cui la soluzione numerica tende alla soluzione esatta quando h tende a zero; la stabilità (o zero stabilità) è la caratteristica per cui la soluzione numerica, pur in presenza di dati iniziali differenti, produce soluzioni la cui differenza è controllata da una costante moltiplicativa della differenza nei dati iniziali. La consistenza, invece, è l'attitudine del metodo numerico a rappresentare correttamente il problema originale. In particolare, quando si sostituisce la derivata prima con un rapporto incrementale, è necessario che questa sostituzione sia fatta in modo consistente, cioè in modo corretto rispetto al problema continuo. La consistenza, che andremo ora a esprimere in maniera rigorosa, è quella proprietà che, unita alla stabilità, garantisce la convergenza.

La proprietà di consistenza esprime la vicinanza dello schema numerico al problema di partenza. Consideriamo un problema matematico originario che possiamo identificare come

$$F(u,d)=0 \qquad \text{problema matematico},$$

dove u è la soluzione esatta e d è l'insieme dei dati del problema. La relazione F esprime una relazione funzionale tra i dati e la soluzione. Il metodo numerico può essere espresso in maniera molto astratta come

$$F_h(u_h,d)=0 \qquad \text{metodo numerico},$$

dove u_h è la soluzione numerica corrispondente. Il metodo numerico si dice consistente se, nel momento in cui sostituiamo la soluzione esatta u all'interno dello schema numerico, l'errore che si genera risulta piccolo. In tal caso, diremo che il metodo numerico è consistente.
Introduciamo adesso l'errore di consistenza

$$\tau_h(u)=F_h(u,d) \quad \text{Errore di consistenza},$$

definito come il valore $\tau_h(u)$ che si ottiene nello schema del metodo numerico quando andiamo a sostituire la soluzione u del problema matematico nella relazione F_h che definisce il metodo numerico. L'errore di consistenza rappresenta una misura dell'errore introdotto nel momento in cui si richiede alla soluzione esatta di adattarsi allo schema di approssimazione numerica. In termini più rigorosi, l'errore di consistenza, o errore di troncamento, corrisponde al residuo generato imponendo alla soluzione u di soddisfare lo schema numerico.
Nel caso dei metodi ad un passo introdotti per le EDO abbiamo che

$$\frac{u_{k+1}-u_k}{h}=\Phi(h;\ u_k,u_{k+1}) \qquad (1),$$

dove per i metodi di Eulero avanti (EA), Eulero all'indietro (EI) e Crank-Nicolson (CN) si ha

$$\Phi(h;\ u_k,u_{k+1})=\begin{cases} f(x_k u_k) & \text{EA} \\ f(x_{k+1}u_{k+1}) & \text{EI} \\ \frac{1}{2}[f(x_k u_k)+f(x_{k+1}u_{k+1})] & \text{CN} \end{cases}.$$

Definiamo l'errore di troncamento locale in questo caso, inserendo la soluzione esatta y e analizzando l'effetto della sua applicazione allo schema numerico nel nodo generico x_k. Sostituendo nella relazione

$$\frac{u_{k+1}-u_k}{h}-\Phi(h;\ u_k,u_{k+1})=0,$$

al posto di u, la soluzione esatta y, otteniamo

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}-\Phi(h;\ y_k,y_{k+1})=\tau_{k+1}(h;y).$$

Questa relazione non sarà più uguale a zero, ma risulterà pari a un termine, che sperabilmente sarà piccolo, e che chiameremo $\tau_{k+1}(h;y)$, in cui il pedice $k+1$ indica che l'espressione $\tau_{k+1}(h;y)$ è calcolare in x_{k+1}. Pertanto, $\tau_{k+1}(h;y)$ rappresenta l'errore di troncamento locale o di consistenza del metodo numerico, mentre y è la soluzione esatta del problema di Cauchy.
Dalla definizione di errore di troncamento locale, è possibile introdurre l'errore di troncamento globale o errore di consistenza. A tal fine, è sufficiente prendere il massimo dei valori assunti da $\tau_k(h;y)$ per ogni punto x_k

$$\tau(h)=\max_k |\tau_k(h;y)|,$$

dove $\tau(h)$ è l'errore di troncamento globale o errore di consistenza. Diremo che il metodo è consistente se e solo se il limite di $\tau(h)$ è uguale zero quando h tende a zero

$$\text{metodo (1) è cosistente} \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{h\to 0}\tau(h)=0.$$

Pertanto, affermare che il metodo è consistente equivale a dire che il residuo generato in ogni nodo, quando si richiede alla soluzione esatta di adattarsi allo schema numerico, deve tendere a zero al tendere di h a zero.
In altri termini, stiamo affermando che il problema numerico (1) rappresenta correttamente il problema di Cauchy. Il motivo per cui si parla di errore di troncamento è legato al fatto che, nel passaggio dal problema differenziale al metodo numerico, si sostituiscono le derivate con dei rapporti incrementali, troncando l'operazione di limite. Invece di calcolare il limite, si utilizza un rapporto incrementale. L'obiettivo è che questo effetto di troncamento sia infinitesimo rispetto a h, ovvero che l'errore generato tenda a zero al tendere di h a zero.
Inoltre, un metodo numerico è di ordine p (con $p \geq 1$) se l'errore di troncamento non solo tende a zero, ma tende a zero come infinitesimo di ordine p

$$\tau(h) = O(h^p).$$

Pertanto, i metodi consistenti sono quelli il cui errore di troncamento tende a zero con h. I metodi consistenti di ordine p sono quelli in cui l'errore di troncamento è infinitesimo di ordine p. È evidente che, maggiore è l'ordine p del metodo, maggiore sarà la nostra aspettativa di convergere rapidamente alla soluzione del problema.
Utilizzando risultati classici dell'analisi, possiamo definire la consistenza del metodo numerico e l'ordine del metodo stesso. In particolare, per i metodi numerici per le EDO che abbiamo considerato, abbiamo che:

1- Eulero in avanti (EA): utilizzando lo sviluppo di Taylor in avanti abbiamo

$$y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \frac{h}{2} y''(\xi_k),$$

dove $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$. Quindi, ricordando che $y'(x_k) = f(x_k, y_k)$, segue che l'errore di troncamento locale è

$$\tau_{k+1}(h; y) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - f(x_k, y_k) = \frac{h}{2} y''(\xi_k),$$

da cui l'errore di troncamento globale è

$$\tau(h) = \frac{h}{2} \max_{x \in I} |y''(x)|.$$

Dunque, EA è un metodo consistente di ordine 1 se $y \in C^2(I)$.

1- Eulero all'indietro (EI): utilizzando lo sviluppo di Taylor all'indietro abbiamo

$$y'(x_k) = \frac{y_{k-1} - y_k}{h} - \frac{h}{2} y''(\xi_{k-1}),$$

dove $\xi_{k-1} \in (x_{k-1}, x_k)$. Quindi, l'errore di troncamento globale è

$$\tau(h) = \frac{h}{2} \max_{x \in I} |y''(x)|.$$

Dunque, EI è un metodo consistente di ordine 1 se $y \in C^2(I)$.

2- Punto medio (PM): utilizzando lo sviluppo di Taylor centrato abbiamo

$$y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} - \frac{h^2}{6} [y'''^{(\xi_{k-1})}, +y'''(\xi_k),]$$

dove $\xi_{k-1} \in (x_{k-1}, x_k)$ e $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ Quindi, l'errore di troncamento globale è

$$\tau(h) = \frac{h^2}{3} \max_{x \in I} |y'''(x)|.$$

Dunque, PM è un metodo consistente di ordine 2 se $y \in \mathrm{C}^3(I)$.

3- Crank-Nicolson (CN): utilizzando lo sviluppo di Taylor centrato abbiamo

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{1}{2}[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})] - \frac{h^2}{12} f'''\big(\xi_k, y(\xi_k)\big).$$

Quindi, l'errore di troncamento globale è

$$\tau(h) = \frac{h^2}{12} \max_{x \in I} |y'''(x)|.$$

Dunque, CN è un metodo consistente di ordine 2 se $y \in \mathrm{C}^3(I)$.

In conclusione, abbiamo esaminato come verificare la consistenza dei metodi e come calcolare gli ordini dei metodi. La consistenza e la stabilità ci garantiscono la convergenza. Inoltre, se consideriamo un metodo consistente di ordine p e stabile, allora non solo sarà convergente, ma sarà convergente con ordine p. In altre parole, la soluzione numerica tenderà alla soluzione esatta con ordine p rispetto ad h, dove h rappresenta l'ampiezza degli intervalli, ovvero la distanza tra due nodi consecutivi. Consistenza insieme a stabilità è equivalente alla convergenza. Inoltre, l'ordine dell'errore di troncamento coincide con l'ordine di accuratezza del metodo stesso

$$\tau(h) = O(h^p) \quad \Longrightarrow \quad \max_k |u_k - y_k| = O(h^p).$$