Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

Lezione 5.6a

Condizioni di risolubilità del problema di Cauchy

Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

- **Introduzione** sulle **Equazioni differenziali ordinarie (EDO)**

- Richiamare **aspetti fondamentali delle EDO**

  ✓ Soluzione per le EDO del primo ordine omogenee

  ✓ Relazione funzionale (NON chiusa/esplicita) implicita

  ✓ Risolubilità del Problema di Cauchy

  ✓ Condizioni di **Esistenza e unicità** della sol. del

Risoluzione di EDO (Equazioni differenziali omogenee)

- Classe di EDO: equazioni differenziali omogenee del primo ordine

$$y'(x) = f(x, y)$$

- In generale non lineari e che soddisfano la **proprietà di omogeneità**

$$\boxed{f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y) \qquad \forall x, y \ \forall \alpha \neq 0}$$

- Scegliendo $\alpha = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$)

$$y'(x) = f(1, \frac{y}{x})$$

Risoluzione di EDO (Equazioni differenziali omogenee)

- Introducendo la nuova incognita v

$$v = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \quad y'(x) = f(1, \tfrac{y}{x}) = f(1, v)$$

$$\Downarrow$$

$$y = vx \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = v'x + v$$

$$\Rightarrow \quad v'x + v = f(1, v)$$

$$x\frac{dv}{dx} = f(1, v) - v = F(v) \qquad \boxed{x\frac{dv}{dx} = F(v)}$$

Risoluzione di EDO (Equazioni differenziali omogenee)

- EDO del primo ordine omogenee **come EDO a variabili separabili**

$$\boxed{x\frac{dv}{dx} = F(v)}$$

soluzione $\Rightarrow$

$$\int \frac{dv}{F(v)} = \int \frac{dx}{x} + C$$

- **Esempio**

$$y' = \frac{y-x}{y+x} \Rightarrow y' = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$$

$$\begin{cases} v = \frac{y}{x} \\ y' = (vx)' \end{cases} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} + v = \frac{v-1}{v+1} \Rightarrow$$

Risoluzione di EDO (Equazioni differenziali omogenee)

- **Esempio**

$$\int \frac{v+1}{v^2+1} dv = \int \frac{1}{x} dx + C$$

- **Risolvendo gli integrale** e con alcune manipolazioni algebriche

relazione

$$\frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + \tan \frac{y}{x} = C$$

- Abbiamo derivato una **formula implicita** (NON esplicita) per $y(x)$

$y = y(x)$? **Impossibile !**