Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistemi lineari
Lezione 2.2a

Richiami sui sistemi lineari

Risoluzione di sistemi lineari (Introduzione e richiami)

- Risoluzione numerica di **sistemi di equazioni lineari**

- Richiami su aspetti essenziali dell'algebra lineare:
  - ✓ Sistema di equazioni lineari (**definizione**)
  - ✓ **Forma vettoriale** di un sistema lineare
  - ✓ **Esistenza e unicità** della soluzione del sistema
  - ✓ Matrice non singolare (**il determinante**)

Richiami sui sistemi lineari (definizione di sistema)

- Un sistema lineare è un **insieme di equazioni algebriche** che coinvolgono un certo numero di incognite

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

- Dove:

n numero delle incognite

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ **incognite da determinare** del sistema

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots a_{n1}, \ldots a_{nn}$ coefficienti delle equazioni

$b_1, b_2, \ldots, b_n$ termini noti

Richiami sui sistemi lineari (sistema in forma vettoriale)

- Riscriviamo il sistema lineare utilizzando la notazione matrice-vettore
- Introduciamo

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad A = (a_{ij})$$

Matrice dei coefficienti del sistema

$a_{i,j}$

j cresce

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

i cresce

$a_{i,j}$

- i : indice riga
- j : indice colonna

Vettore incognite

$$\mathbf{x} = (x_i) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Vettore termine noto

$$\mathbf{b} = (b_i) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Sistema lineare in forma vettoriale compatta

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Richiami sui sistemi lineari (sistema in forma vettoriale)

- Una notazione vettoriale $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ $\quad A\mathbf{x},\ \mathbf{b}$ **sono vettori**

Sistema scritto per righe → $$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

- Esempio:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 - 3x_2 = 2 \end{cases}$$

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Partendo dall'ultima equazione si trova $\mathbf{x}$