Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistemi lineari
Lezione 2.1b

Richiami su matrici e vettori

Richiami di algebra lineare (diversi tipi di norme)

- Dato $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ la misura è $||a||$ **Norma vettoriale**
- La norma 2 non è l'unica misura di $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
- **Norma 1** di un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ è definita come

$$||\mathbf{a}||_1 = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$ → **Norma 1**

- Generalizzando si può definire la norma $p \in [1, \infty]$

$$||\mathbf{a}||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p}$$ → **Norma *p***

- Ritroviamo la norma 1 con $p = 1$ e la norma 2 $p = 2$
- **Norma ∞** di un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$:

$$||\mathbf{a}||_\infty = \max_{1<k\leq n} |a_k|$$ → **Norma ∞**

Richiami di algebra lineare (diversi tipi di norme: esempio)

- Esempio: $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n (n = 3)$

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$||\mathbf{a}||_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2} = (1 + 4 + 9)^{1/2} = \sqrt{14} \simeq 3.74$$

$$||\mathbf{a}||_1 = \sum_{k=1}^{n} |a|_k = |1| + |2| + |-3| = 6$$

$$||\mathbf{a}||_\infty = \max_{1<k\leq n} |a_k| = \max(|1|, |2|, |-3|) = 3$$

Richiami di algebra lineare (prodotto scalare)

- **Prodotto scalare euclideo:** relazione tra due vettori e produce uno scalare
- Dati $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ il loro prodotto scalare è

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n = \mathbf{a}\mathbf{b}^T$$

- Esempio:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = -4$$

- **Osservazione:** la norma 2 è il prodotto scalare del vettore per se stesso

$$||\mathbf{a}||_2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{1/2}$$

Norma 2 è la norma indotta dal prodotto scalare euclideo

Richiami di algebra lineare (norma matriciale)

- Determinare la lunghezza/misura di matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ la misura è } ||A||$$

Norma matriciale

- Indicando con $||\mathbf{a}||_p$ una generica norma per un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$
- In corrispondenza di $||\mathbf{a}||_p$, la **norma matriciale** è

$$||A||_p = \max_{||\mathbf{a}||_p = 1} ||A\mathbf{a}||_p \qquad p \in [1, \infty]$$

- $||A\mathbf{a}||$ è la norma di un vettore
- Il massimo dei valori di $||A\mathbf{a}||$ che si ottengono al variare di $\mathbf{a}$

Norme matriciali → **INDOTTE DA** → **Normi vettoriali**

Richiami di algebra lineare (norme matriciali)

Norme matriciali → INDOTTE DA → **Normi vettoriali**

Norma 1 matriciale → $$||A||_1 = \max_k \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}|$$

Fisso la k-esima colonna, sommo le colonne $|a_{jk}|$

Norma ∞ matriciale → $$||A||_\infty = \max_j \sum_{k=1}^{n} |a_{kj}|$$

Fisso la k-esima riga, sommo le righe $|a_{kj}|$

- Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$||A||_1 = \max\{|1| + |5|, |-3| + |4|\} = 7$$

$$||A||_\infty = \max\{|1| + |-3|, |5| + |4|\} = 9$$