# RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (EDO lineari del primo ordine ed EDO non lineari a variabili separabili)

Nella lezione precedente è stata avviata l'analisi di una specifica classe di equazioni differenziali ordinarie (EDO) del primo ordine, in particolare le EDO lineari di primo ordine. A tal fine, è stata introdotta la loro formulazione generale

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

dove $P(x)$ è una funzione lineare della variabile $x$. Inoltre, $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni continue che dipendono esclusivamente dalla variabile $x$. Abbiamo specificato questa classe di equazioni al caso omogeneo, ovvero con $Q(x) = 0$. Per le EDO lineari del primo ordine omogenee, è stato osservato che l'integrale generale è espresso in forma esplicita attraverso la seguente relazione

$$y(x) = Ce^{-A(x)} \qquad A(x) = \int P(x)dx.$$

Infine, abbiamo considerato il problema di Cauchy per l'equazione differenziale omogenea del primo ordine

$$\begin{cases} y' + P(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

la cui soluzione particolare è

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} \qquad A(x) = \int_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi.$$

In questa lezione si proseguirà l'analisi delle EDO lineari del primo ordine, prendendo in esame il caso non omogeneo, ovvero con $Q(x) \neq 0$. Successivamente, sarà introdotta una seconda classe di EDO, costituita dalle equazioni differenziali non lineari del primo ordine a variabili separabili.

Iniziamo dunque l'analisi della classe delle EDO lineari del primo ordine non omogenee, ovvero il caso in cui $Q(x) \neq 0$

$$Q(x) \neq 0 \qquad \text{CASO NON} - \text{OMOGENEO}.$$

In questo caso $Q(x)$ è una funzione continua della variabile $x$ e indipendente da $y$. La soluzione del relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

è la seguente

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{A(\xi)} d\xi\,, \quad A(x) = \int_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi \quad [\Longrightarrow A'(x) = P(x)].$$

Osserviamo che, nel caso in cui $Q(x) = 0$, la soluzione coinciderebbe esattamente con quella dell'equazione omogenea analizzata in precedenza. Tuttavia, a causa della presenza del termine $Q(x)$, compare un contributo aggiuntivo. Questo termine è dato da

$$e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{A(\xi)} d\xi.$$

La soluzione risulta, dunque, sostanzialmente più complessa. Procediamo ora a verificare a posteriori la correttezza della soluzione, dimostrando che essa soddisfa effettivamente il problema di Cauchy. In particolare, calcoliamo la derivata prima $y'$ e sommiamo il termine $yP(x)$, verificando che il risultato ottenuto coincide esattamente con $Q(x)$. Inoltre, vedremo che questa verifica a posteriori conferma

anche che la funzione $y$ soddisfa non solo l'equazione differenziale assegnata, ma anche la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.
Procediamo alla verifica a posteriori, considerando l'ipotesi di soluzione

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{A(\xi)} dt.$$

Calcolando la derivata prima di $y(x)$, si ottiene

$$y'(x) = -y_0 A'(x) e^{-A(x)} - A'(x) e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{A(\xi)} d\xi + e^{-A(x)} Q(x) e^{A(x)},$$

dove abbiamo applicato le regola di derivazione di funzioni composite per l'esponenziale $y_0 e^{-A(x)}$, la cui derivata è $-y_0 A'(x) e^{-A(x)}$. Inoltre, per il termine $e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{A(\xi)} d\xi$, abbiamo applicato la regola della derivata del prodotto di funzioni

$$f_1(x) f_2(x) = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x),$$

dove abbiamo posto $f_1(x) = e^{-A(x)}$ e $f_2(x) = \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{A(\xi)} d\xi$, tenendo conto che la derivata dell'integrale $f_2'(x)$ ha come risultato l'integrando valutato nel punto $x$. Ricordando adesso che

$$A'(x) = P(x),$$

possiamo mettere in evidenza $A'(x)$, ovvero $P(x)$, e troviamo

$$y'(x) = -P(x) \left[ b e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{A(\xi)} d\xi \right] + Q(x),$$

da cui possiamo osservare che il termine tra parentesi quadre è esattamente $y(x)$, ovvero $y(x) = b e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{A(\xi)} d\xi$. Abbiamo quindi ricavato che

$$y'(x) = -P(x) y + Q(x),$$

verificando la tesi

$$y'(x) + P(x) y = Q(x).$$

Infine, se andiamo a sostituire alla variabile dipendente $x$ il coefficiente $x_0$, in questa rappresentazione

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{A(\xi)} d\xi,$$

troviamo

$$y(x_0) = y_0 e^{-A(x_0)} + e^{-A(x_0)} \int_{x_0}^{x_0} Q(\xi) e^{A(\xi)} d\xi = y_0 e^0 + 0 = b,$$

in cui abbiamo tenuto conto che l'integrale sull'intervallo che ha estremi coincidenti è uguale a zero e $A(x_0) = 0$. Pertanto, abbiamo anche verificato la condizione iniziale che $y(x_0) = y_0$. In definitiva, abbiamo verificato a posteriori che la funzione

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{A(\xi)} d\xi,$$

è la soluzione del problema di Cauchy per EDO lineari del primo ordine nel caso non omogeneo. Si può anche dimostrate che questa è l'unica soluzione del problema di Cauchy.
Abbiamo dunque ottenuto una caratterizzazione esplicita della soluzione del problema omogeneo e non omogeneo lineare del primo ordine, esprimendo $y$ in maniera esplicita in funzione di $x$. Ora ci proponiamo di analizzare alcuni esempi di EDO di questo tipo, al fine di illustrare come l'applicazione della formula generale permetta di individuare immediatamente una soluzione del problema.
Come primo esempio, consideriamo l'equazione differenziale

$$xy' + (1-x)y = e^{2x} \qquad \text{con} \quad x \in (0, +\infty).$$

Osserviamo che l'equazione in esame è una EDO lineare del primo ordine non omogenea. Poiché l'intervallo di definizione è $x \in (0, +\infty)$, la variabile $x$ risulta sempre positiva. Pertanto, è possibile dividere per $x$ e procedere alla risoluzione dell'equazione

$$y' + \frac{1-x}{x}y = \frac{e^{2x}}{x},$$

da cui segue che

$$y'(x) + P(x)y = Q(x), \qquad P(x) = \frac{1}{x} - 1, \quad Q(x) = \frac{e^{2x}}{x}.$$

L'equazione in esame rappresenta dunque un caso particolare di EDO non omogenea appartenente alla classe precedentemente analizzata. A questo punto, occorre verificare che le funzioni $P(x)$ e $Q(x)$ soddisfino le ipotesi generali assunte in precedenza, ovvero che entrambe siano continue nell'intervallo $(0, +\infty)$. Tale condizione risulta effettivamente verificata. Possiamo quindi applicare la teoria generale, che garantisce l'esistenza e l'unicità di una funzione $y(x)$ che soddisfi la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$, dove $x_0$ è un punto generico appartenente all'intervallo di definizione $(0, +\infty)$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ è un valore reale arbitrario. In particolare, nel caso specifico in cui $x_0 = 1$, risulta garantita l'esistenza di un'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x) \\ y(1) = y_0 \end{cases}.$$

Ricordando la formula generale per l'integrale particolare

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{A(\xi)} d\xi \qquad A(x) = \int_{x_0}^{x} P(\xi) d\xi,$$

e specificandola al caso in esame in cui $P(x) = \frac{1}{x} - 1$, troviamo

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} P(\xi) d\xi = \int_1^x \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) d\xi = \int_1^x \frac{1}{\xi} d\xi - \int_1^x d\xi = \log \xi|_1^x - \xi|_1^x = \log x - (x-1),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che $\int_1^x \frac{1}{\xi} d\xi = \log x - \log 1 = \log x$ e $\int_1^x d\xi = x - 1$. Di coseguenza

$$e^{-A(x)} = e^{x-1-\log x} = \frac{e^{x-1}}{x},$$

in cui abbiamo tenuto conto che l'esponenziale del logaritmo di $x$ è uguale a $x$ ($e^{-\log x} = e^{(-1)\log x} = [e^{\log x}]^{-1} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$). Inoltre, in maniera analoga

$$e^{A(\xi)} = e^{1-\xi+\log \xi} = \xi e^{1-\xi}.$$

Pertanto, ricordando che $Q(x) = \frac{e^{2x}}{x}$, otteniamo

$$y(x) = y_0 \frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^{x-1}}{x} \int_1^x \frac{e^{2\xi}}{\xi} \xi e^{1-\xi} d\xi,$$

da cui segue che

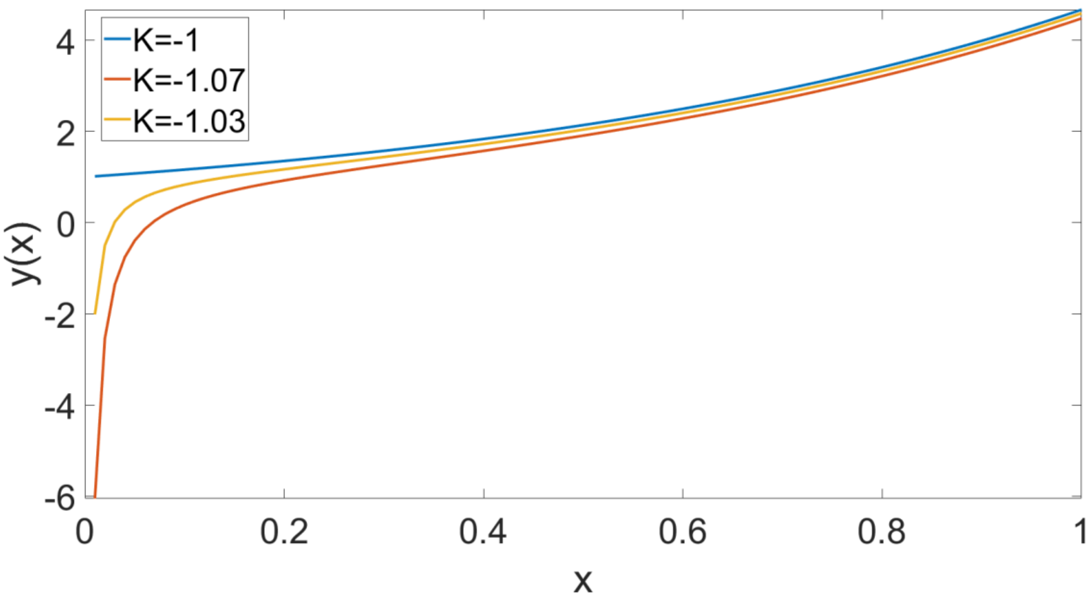


*Figura 1: Andamento della funzione* $y(x) = \frac{e^{2x}+Ke^{x}}{x}$ *al variare del parametro K.*

$$
\begin{aligned}
y(x) &= y_0\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^x}{x}\frac{1}{e}\int_1^x e^{\xi+1}dt = y_0\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^x}{x}\frac{1}{e}\, e\int_1^x e^{\xi}d\xi = y_0\frac{e^{x-1}}{x} + \frac{e^x}{x}(e^x - e) \\
&= y_0\frac{e^x}{ex} + \frac{e^x}{x}(e^x - e) = \frac{e^x}{x}\left(\frac{y_0}{e} + e^x - e\right) = \frac{e^x}{x}\left(\frac{y_0}{e} - e\right) + \frac{e^x}{x}e^x = \frac{e^x}{x}\left(\frac{y_0}{e} - e\right) + \frac{e^{2x}}{x} \\
&= \frac{e^x\left(\frac{y_0}{e} - e\right) + e^{2x}}{x}.
\end{aligned}
$$

In conclusione, la soluzione del problema di partenza è uguale a

$$
y(x) = \frac{e^{2x} + Ke^x}{x}, \qquad K = \frac{y_0}{e} - e.
$$

Questa è una rappresentazione esplicita della soluzione del problema perché permette di caratterizzare la $y$ completamente in funzione della $x$.
Osserviamo inoltre che, per $x$ tendente a 0, la funzione $y(x)$ ammette un limite finito solo se il parametro $y_0$ è scelto in modo tale che $K = -1$. In altre parole, imponendo la condizione $K = \frac{y_0}{e} - e = -1$, si garantisce che il limite

$$
\lim_{x\to 0}|y(x)| < \infty,
$$

sia effettivamente finito.
La Figura 1 illustra l'andamento della soluzione al variare del parametro $K$. Quando $K = -1$, la soluzione ammette un limite finito per $x \to 0$. Se invece $K \neq -1$, si osserva che le curve soluzione rimangono vicine alla soluzione corrispondente a $K = -1$ per valori di $x$ maggiori di zero. Tuttavia, man mano che $x$ si avvicina a zero, tali soluzioni divergono verso meno infinito.

Abbiamo analizzato le forme risolutive delle EDO lineari del primo ordine, sia nel caso omogeneo che in quello non omogeneo. Per questa classe di equazioni, è stata individuata una relazione generale che consente di esprimere la soluzione $y$ in forma chiusa. In altri termini, qualora sia possibile determinare tutti gli elementi che compongono tale rappresentazione, ossia identificare le funzioni $P(x)$ e $Q(x)$ e successivamente calcolare gli integrali necessari, si ottiene la soluzione $y$ espressa in forma esplicita.

A differenza delle EDO lineari, non è sempre possibile ottenere soluzioni esplicite per tutte le equazioni differenziali del primo ordine. Tuttavia, esistono alcune classi di tali equazioni per le quali ciò è possibile. In particolare, le equazioni non lineari a variabili separabili rientrano tra queste, consentendo, in molti casi, di determinare esplicitamente la soluzione.
Passiamo dunque all'analisi di questa seconda classe di EDO: le equazioni differenziali non lineari del primo ordine a variabili separabili.
Prima di fornire una rappresentazione generale di questa classe di equazioni, consideriamo un caso specifico: la cosiddetta equazione della logistica. Questa equazione descrive la dinamica di crescita di una popolazione, come quella di animali o batteri, in presenza di risorse limitate. Quando le risorse disponibili sono finite, la popolazione non cresce indefinitamente, ma segue un andamento regolato da un'equazione del tipo

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = Ky\left(1 - \frac{y}{L}\right) = \frac{K}{L}y(L - y),$$

dove la funzione incognita $y(t)$ rappresenta la dimensione della popolazione al tempo $t$, ovvero il numero di individui viventi in quel momento. La variabile $t$ è la variabile indipendente, e $y(t)$ descrive l'evoluzione della popolazione nel tempo. La costante $K$ è un parametro positivo che quantifica la prolificità della specie: una specie con un'alta capacità riproduttiva avrà un valore di $K$ maggiore, mentre una specie meno prolifica avrà un valore di $K$ minore. Infine, il parametro $L$ rappresenta la popolazione stazionaria consentita dalle risorse disponibili. Infatti, poiché le risorse sono limitate, la crescita della popolazione non può essere illimitata, ma tende asintoticamente a un valore massimo, corrispondente a uno stato di equilibrio. In altre parole, $L$ descrive il livello di popolazione che si stabilizza nel tempo in presenza di risorse finite.

Osserviamo che l'equazione della logistica è di natura non lineare, poiché la variabile $y$ compare in modo non lineare a causa del termine $y(L - y)$, che introduce un contributo quadratico $y^2$. Questo implica che l'equazione non appartiene alla classe delle EDO lineari. Inoltre, l'equazione è espressa in forma normale, poiché la derivata $y'$ è esplicitamente isolata nel primo membro ed è descritta da una funzione di $y$, ossia

$$f(y) = \frac{K}{L}y(L - y),$$

che non dipende esplicitamente dalla variabile indipendente $t$. Di conseguenza, questa equazione è anche un'equazione differenziale autonoma, in quanto l'evoluzione della popolazione dipende solo dal valore corrente di $y$ (variabile dipendente) e non direttamente dal tempo $t$ (variabile indipendente)
L'equazione della logistica è a variabili separabili, poiché il termine che dipende dal tempo, $t$, appare solo a sinistra dell'equazione, mentre a destra compare una funzione di $y$. L'obiettivo, quindi, è separare le variabili, isolando $y$ da un lato e $t$ dall'altro. In altre parole, vogliamo arrivare a una forma

dell'equazione in cui tutti i termini contenenti $y$ si trovano da un lato dell'equazione, e tutti i termini con $t$ dall'altro lato, così da poter integrare separatamente le due variabili. A tale scopo, riscriviamo l'equazione nel seguente modo

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{K}{L} y(L-y),$$

dove in questo caso $y' = \frac{dy}{dt}$ denota la derivata prima di $y$ rispetto al tempo $t$. Considerando ora $dy$ e $dt$ come enti autonomi, possiamo porre in evidenza $dy$ a sinistra e portare a destra $dt$, ottenendo

$$\frac{L}{y(L-y)} dy = K dt.$$

Pertanto, abbiamo espresso l'equazione della logistica in termini di infinitesimali (o differenziali). Possiamo quindi procedere con l'integrazione di entrambi i membri, ottenendo

$$\int \frac{L}{y(L-y)} dy = \int K dt,$$

da cui

$$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{L-y}\right) dy = Kt + C.$$

Possiamo suppone che $y$ sia positiva, considerazione che risulta valida poiché $y$ rappresenta il numero di elementi di una popolazione. In particolare, $y$ è necessariamente compreso tra zero e $L$, dove $L$ indica il numero massimo raggiungibile dalla popolazione, che viene raggiunto allo stato stazionario

$$0 < y < L.$$

Sotto questa ipotesi di positività $y > 0$, possiamo procedere al calcolo della primitiva della funzione $\frac{1}{y} - \frac{1}{L-y}$. Ricordando che

$$\int \frac{1}{y} dy = \log y + cost,$$

possiamo ricavare che l'integrale $\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{L-y}\right) dy$ risulta

$$\log y - \log(L-y) = \log\left(\frac{y}{L-y}\right) = Kt + C,$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo sfruttato il fatto che la differenza fra due logaritmi è il logaritmo del quoziente.
Abbiamo ottenuto un'espressione in cui, a sinistra, compare esclusivamente la variabile $y$, mentre a destra è presente unicamente la variabile $t$

$$\log\left(\frac{y}{L-y}\right) = Kt + C,$$

da cui applicando l'esponenziale ad ambo i membri, otteniamo

$$e^{\log\left(\frac{y}{L-y}\right)} = \frac{y}{L-y} = e^{Kt+C} = e^C e^{Kt},$$

ovvero

$$\frac{y}{L-y} = e^C e^{Kt},$$

da cui si ricava la soluzione (o integrale) generale dell'equazione della logistica

$$y(t) = C_1 \frac{Le^{Kt}}{1 + C_1 e^{Kt}}, \qquad C_1 = e^C,$$

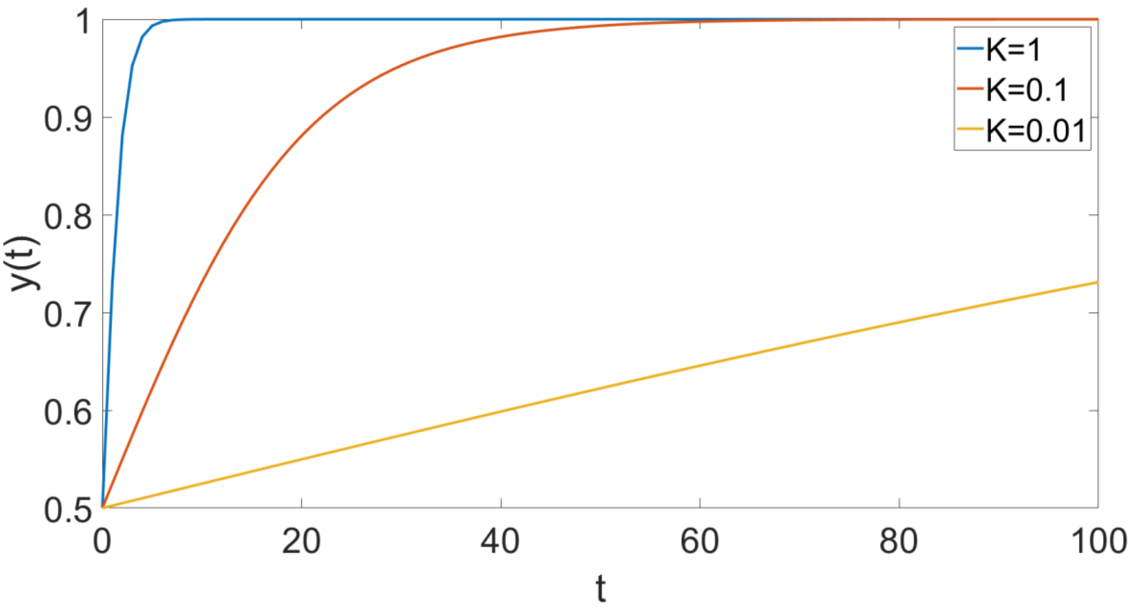


*Figura 2: Soluzioni dell'equazione della logistica al variare della prolificità della popolazione ($L = C_1 = 1$)*

dove $C_1$ è una costante positiva arbitraria. Osserviamo che la soluzione dipende da $K$ che era associato alla EDO di partenza.

La Figura 2 illustra l'andamento delle soluzioni al variare del parametro $K$, ovvero in relazione alla variazione della prolificità della popolazione. In tale figura, si è fissato $L = 1$ ($e\ C_1 = 1$) al fine di normalizzare il problema. Poiché sappiamo che la popolazione può crescere fino a $L$ (il valore massimo della popolazione allo stato stazionario), l'assunzione $L = 1$ consente di descrivere una popolazione che si sviluppa da zero fino a un massimo di 1. In questo modo, il problema viene formulato in termini percentuali. Per $K = 0.01$, corrispondente a un indice di prolificità relativamente basso, la popolazione cresce in modo pressoché lineare rispetto al tempo. Per valori di $K$ maggiori, ad esempio $K = 0.1$ e $K = 1$, la popolazione cresce molto più rapidamente e tende ad avvicinarsi all'asintoto $y = 1$, che rappresenta la soluzione di equilibrio.

L'equazione logistica rappresenta un caso particolare di equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Si tratta di un tipo di equazione che, mediante opportune manipolazioni, permette di separare la dipendenza dalla funzione incognita $y$ da quella della variabile indipendente $x$ (o $t$), ponendo la dipendenza da $y$ a sinistra e quella da $x$ (o $t$) a destra. Successivamente, mediante l'integrazione (ovvero calcolando delle primitive) su entrambi i membri, è possibile ottenere la soluzione $y$ come funzione della variabile indipendente $x$ (o $t$).