DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

Lezione 6.4b

Convergenza per i metodi di Eulero in avanti ed Eulero all’indietro

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Consideriamo la seguente EDO

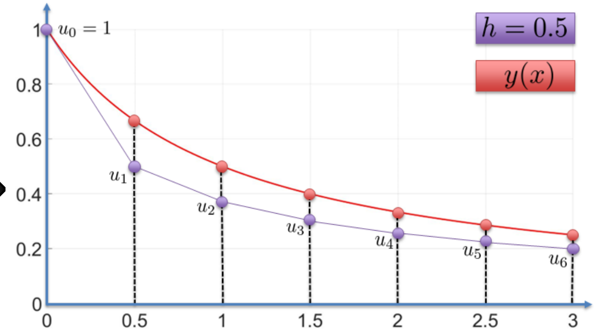
$$\begin{cases} y'(x) = -y^2 & x \in (0,3] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Applicando **Eulero in Avanti** (EA)

$$u_{k+1} = u_k + hf(x_k, u_k) \qquad k \geq 0$$

$h = 1.5 \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} x_k = -\infty$

$h = 0.5 \Longrightarrow$

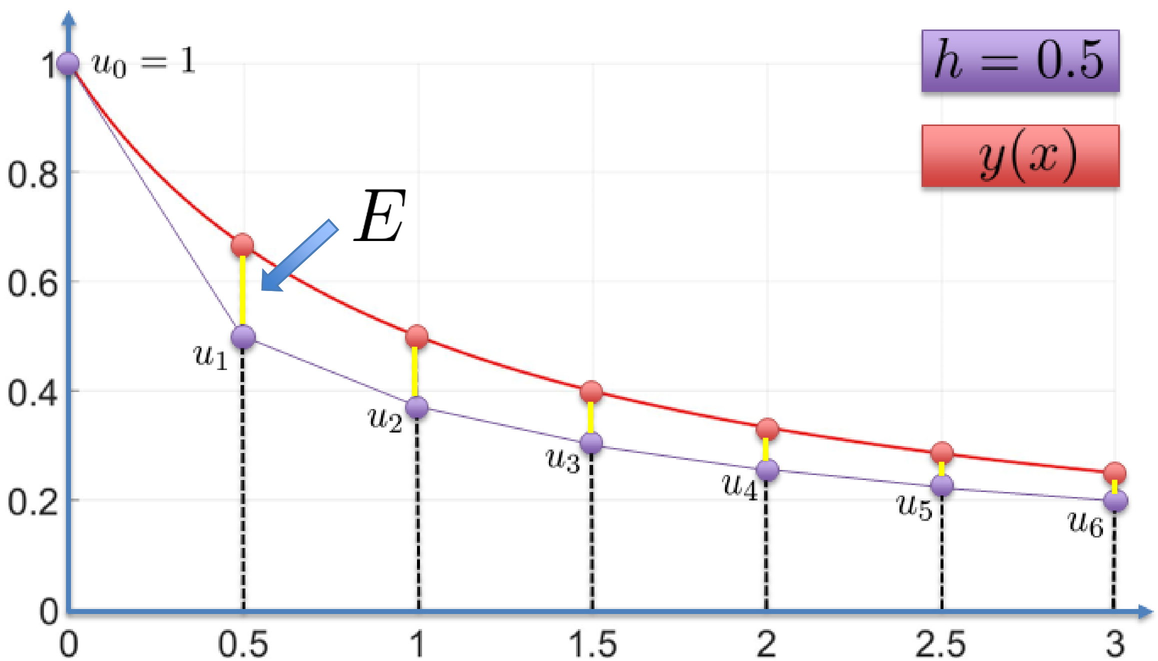


h	E
0.5	0.1667
0.25	0.0573
0.125	0.0252
0.0625	0.0120

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- L'errore di approssimazione E è <u>il massimo commesso</u> nei vari nodi

$$E = \max_{k=0,\dots,n} |y_k - u_k| = \max_{k=0,\dots,n} \left|\frac{1}{1+x_k} - u_k\right|$$



h	E
0.5	0.1667
0.25	0.0573
0.125	0.0252
0.0625	0.0120

Per h che si dimezza si <u>dimezza anche l'errore</u>

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Per il **metodo di EA** (esplicito)

Per h che si dimezza si dimezza anche l'errore → **Comportamento lineare rispetto ad h**

- EA è basato sulle **Differenze Finite (DF) in avanti**

(DF in avanti) Differenza Finita in avanti

$$y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + O(h)$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Consideriamo la seguente EDO

$$\begin{cases} y'(x) = -y^2 & x \in (0,3] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Applicando **Eulero all'indietro** (EI)

$$u_{k+1} = u_k + hf(x_{k+1}, u_{k+1})$$

$$u_{k+1} = u_k + h\boxed{u_{k+1}^2} \qquad k = 0, \ldots, n-1$$

- In questo caso il termine u^2 è valutato in $k+1$

$$\Rightarrow F(z) = z + hz^2 - u_k = 0$$

Equazione non lineare

$$z = u_{k+1}$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Utilizzando **EI**, ad ogni passo k, si deve risolvere

$$F(z) = z + hz^2 - u_k = 0$$

Equazione non lineare

$$z = u_{k+1}$$

- Possiamo utilizzare il **metodo di Newton,** per determinare z

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{F\left(z^{(m)}\right)}{F'\left(z^{(m)}\right)} \qquad F'(z) = 1 + 2hz$$

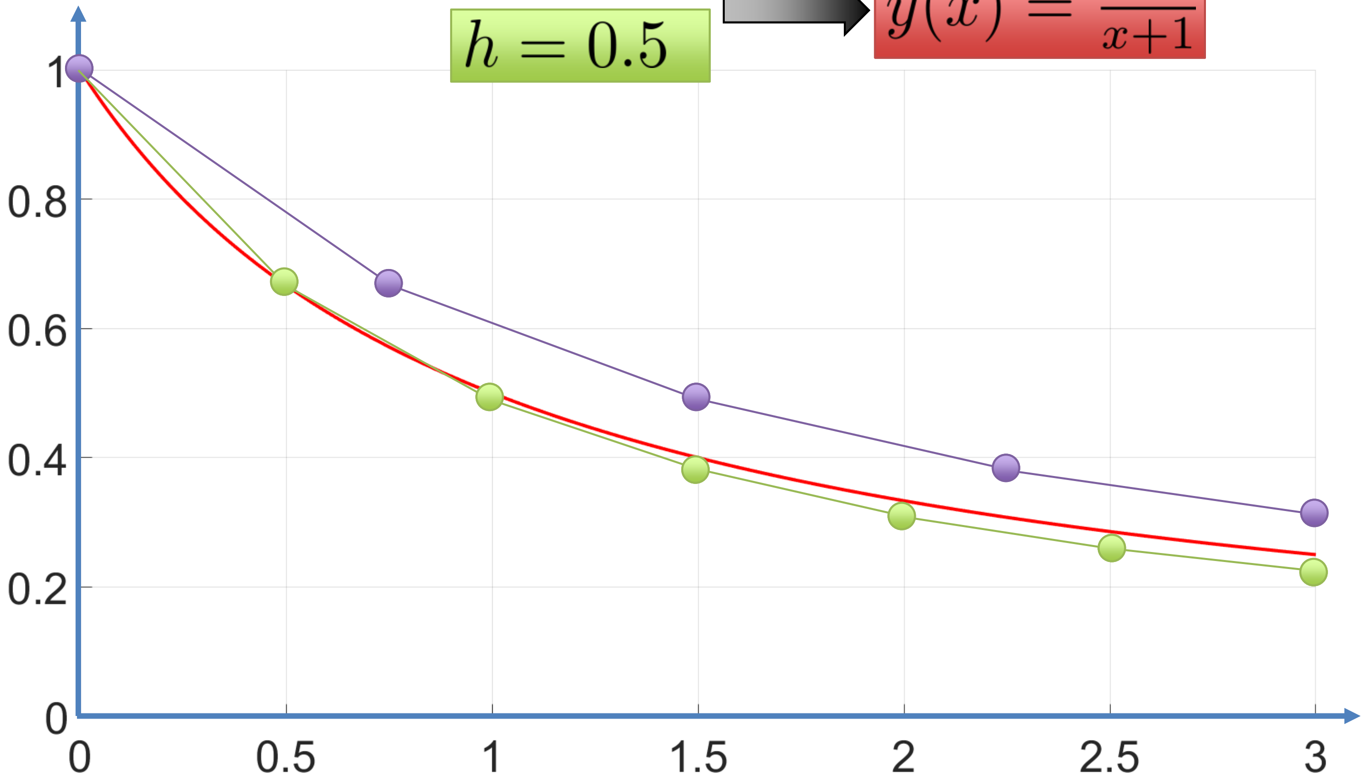
- Risolvendo il metodo di Newton si ricava la radice

$$z = u_{k+1}$$

$$F(u_{k+1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{k+1}$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- La soluzione con EI ed $h = 0.75$ $h = 0.5$ → $y(x) = \frac{1}{x+1}$

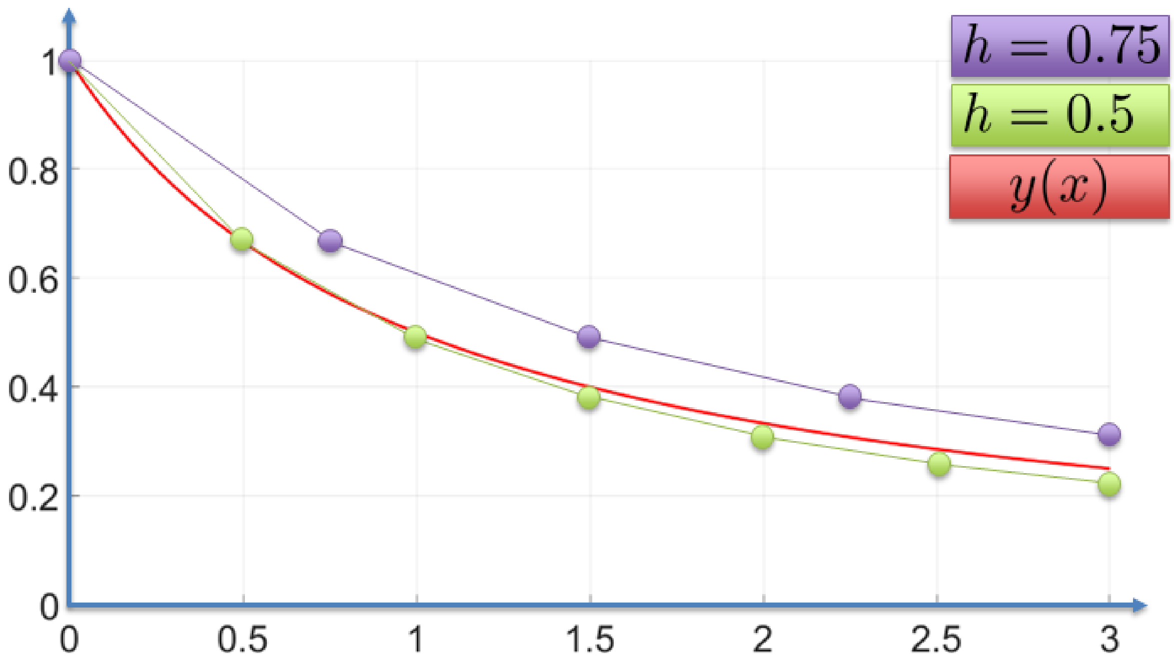


- Riducendo h <u>l'approssimazione numerica migliora </u>significativamente

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- L'errore di approssimazione E è il massimo commesso nei vari nodi

$$E = \max_{k=0,\dots,n} \left| \frac{1}{1+x_k} - u_k \right|$$



h	E
0.5	0.0697
0.25	0.0396
0.125	0.0212
0.0625	0.0110

Per h che si dimezza si dimezza anche l'errore

(DF all'indietro) Differenza Finita all'indietro $\Rightarrow O(h)$