



METODI NUMERICI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Metodo di Eulero in avanti ed Eulero all'indietro)

In questa lezione, si prosegue l'analisi relativa alla risoluzione numerica delle equazioni differenziali ordinarie (EDO), tematica che abbiamo iniziato ad affrontare nelle precedenti lezioni. A titolo introduttivo, si fornirà un breve riepilogo del problema oggetto di studio, nonché dei primi metodi numerici per la risoluzione delle EDO presentati nelle lezioni iniziali di questo nucleo. Successivamente, saranno presentati in dettaglio i metodi di Eulero in avanti e di Eulero all'indietro, classificandoli rispettivamente come metodi ad un passo espliciti e impliciti.

Consideriamo il problema della risoluzione di EDO della forma

$$y' = f(x, y(x)), \quad x \in I \subset \mathbb{R},$$

dove y rappresenta la funzione incognita, ovvero la variabile dipendente, mentre x è la variabile indipendente, che si suppone appartenere a un intervallo I della retta reale \mathbb{R} , il quale può essere sia limitato che illimitato. Inoltre, si assume che l'intervallo I contenga un punto x_0 , definito punto iniziale, e che in tale punto la funzione y assuma un valore noto, detto valore iniziale, espresso come

$$y_0 = y(x_0).$$

Questo definisce in modo univoco il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)), & x \in I \subset \mathbb{R} \\ y_0 = y(x_0) & x_0 \in I \end{cases}.$$

Pertanto, ci troviamo di fronte a un'equazione che esprime la relazione tra la derivata prima di y rispetto a x e una funzione assegnata f , che dipende sia dalla variabile indipendente x che dalla variabile dipendente $y(x)$.

Nel precedente modulo, dedicato all'introduzione delle EDO, abbiamo osservato che, in generale, risolvere analiticamente il problema di Cauchy (ossia trovare un'espressione esplicita in forma chiusa per la soluzione y in funzione dei dati iniziali) risulta difficile. È emerso che, in tali casi, è preferibile ricorrere all'approccio della risoluzione numerica.

L'ipotesi fondamentale che abbiamo formulato affinché il problema di Cauchy ammetta una soluzione unica è che la funzione f sia lipschitziana. In altre parole, f è lipschitziana se esiste una costante positiva L (con $L > 0$) tale che

$$\exists L > 0 \text{ t.c. } |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L|y_2 - y_1| \quad \forall x \in I \quad \forall y_1, y_2.$$

Stiamo richiedendo che la differenza dei valori assunti dalla funzione f , in corrispondenza dello stesso valore della variabile indipendente x e di due valori distinti della variabile dipendente y , sia minore o uguale di una costante L moltiplicata per la differenza tra i due valori di y , ossia $y_2 - y_1$. Un caso in cui questa ipotesi è certamente verificata, è quando f è una funzione di classe C^1 (ovvero continua e con derivata prima continua) rispetto a entrambe le variabili x e y . Se $f \in C^1$ possiamo affermare con certezza che il problema di Cauchy avrà una soluzione unica nell'intervallo I .

In realtà, abbiamo osservato che per la sola equazione differenziale

$$y' = f(x, y(x)), \quad x \in I \subset \mathbb{R},$$



esistono infinite soluzioni, che sono dette integrale generale della EDO. Tuttavia, fra tutte queste possibili soluzioni, se selezioniamo quella funzione che, nel punto x_0 , passa per y_0 , ossia che soddisfa la condizione iniziale, allora la soluzione del problema di Cauchy è unica ed è chiamata integrale particolare. Pertanto, $y(x)$ rappresenta la soluzione (o integrale particolare) esatta del problema di Cauchy.

Per approssimare numericamente la funzione $y(x)$, che raramente è nota in forma esplicita, iniziamo con la partizione dell'intervallo I in sotto-intervalli. A questo scopo, introduciamo una sequenza di punti x_k (con $k = 0, 1, 2, \dots, n$) che chiameremo nodi

$$\{x_k\}: \text{ nodi, } k = 0, \dots, n.$$

Inoltre, indichiamo con h l'ampiezza tra due nodi consecutivi, che supponiamo costante, ovvero

$$x_{k+1} = x_k + h.$$

Per ogni nodo, vogliamo determinare un insieme di valori che rappresentano l'approssimazione della funzione $y(x)$ in corrispondenza di questi punti. In altre parole, l'obiettivo è approssimare la funzione $y(x)$ attraverso dei valori $y(x_k)$. Pertanto, per ogni nodo x_k , introduciamo un valore u_k , che rappresenta l'approssimazione della funzione $y(x)$ in quel punto, ovvero

$$u_k \approx y_k = y(x_k).$$

In altri termini, andiamo a rappresentare la funzione $y(x)$ attraverso valori che forniscano un'approssimazione della funzione stessa in corrispondenza dei nodi x_k , ossia $y(x_k)$. Pertanto, per ogni nodo, introduciamo dei valori u_k , che rappresentano l'approssimazione della funzione $y(x)$ in quel punto. In particolare, avremo u_0 per $y(x_0)$, u_1 per $y(x_1)$, u_2 per $y(x_2)$, e così via. In particolare, nel caso in cui h tenda a zero ($h \rightarrow 0$), vorremmo che i valori u_k tendano alla soluzione esatta $y_k = y(x_k)$. Se ciò accade, parleremo di convergenza del metodo numerico. Vedremo più avanti, in maniera rigorosa, come esprimere formalmente questo concetto.

Questo costituisce il quadro di riferimento: cercare una soluzione numerica che sia rappresentata da un vettore di valori u_k

$$\{u_k\}: \text{ soluzione numerica,}$$

ossia, un vettore le cui componenti generiche u_k sono intese come approssimazioni di $y_k = y(x_k)$

$$u_k \approx y_k = y(x_k).$$

Riprendiamo ora questo quadro di riferimento generale e procediamo con la trattazione di specifici metodi numerici per EDO. Si tratta quindi di metodi che permettono di definire una successione di valori u_k , che saranno utilizzati per rappresentare l'approssimazione della soluzione $y(x)$.

Consideriamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y(x)), & x \in I \subset \mathbb{R} \\ y_0 = y(x_0) & x_0 \in I \end{cases},$$

e discretizziamo l'intervallo I in sotto-intervalli delimitati dai nodi $\{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$. Nel caso in cui l'intervallo sia finito, arriveremo fino a x_n , ottenendo così $n + 1$ nodi totali. Per ogni nodo x_k , cerchiamo un valore incognito u_k che approssimi $y_k = y(x_k)$. Quindi, $y(x)$ rappresenta la soluzione esatta del problema di Cauchy, e il nostro obiettivo è trovare i valori $\{u_0, u_1, \dots, u_k, \dots, u_n\}$ che approssimano i valori assunti dalla soluzione esatta nei nodi $\{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$, cioè $y_0 = y(x_0), y_1 = y(x_1), \dots, y_k = y(x_k), \dots, y_n = y(x_n)$. La successione dei valori $\{u_k\}$

$$\{u_0 = u_0, u_1, \dots, u_k, \dots, u_n\},$$



(in questo caso successione finita perché stiamo considerando un intervallo I finito), si definisce soluzione numerica. Osserviamo che sarà logico richiedere che $u_0 = y_0 = y(x_0)$, ossia che u_0 sia esattamente uguale a $y_0 = y(x_0)$, in modo che u_0 coincida con il dato iniziale (che è noto) del problema di Cauchy.

Il problema essenziale consiste nel determinare come generare la soluzione numerica $\{u_k\}$, ovvero l'approssimazione numerica del problema di Cauchy assegnato. A tal fine, per ottenere la soluzione numerica, si sostituisce il problema di Cauchy con una sua approssimazione che riguarda esclusivamente i nodi $\{x_k\}$. Questa, quindi, rappresenta la prima scelta che facciamo: trattare il problema solo nei nodi, anziché in tutto l'intervallo I .

L'ipotesi più naturale, sebbene non strettamente necessaria, che consente di semplificare significativamente la trattazione, consiste nel considerare nodi equispaziati, ovvero disposti a distanza costante h . Supporremo dunque che, fissato x_0 , il nodo successivo sia definito come

$$x_1 = x_0 + h,$$

dove h è la distanza costante fra due nodi consecutivi

$$h = x_1 - x_0.$$

Specificando questa relazione per un nodo x_k generico, troviamo

$$x_{k+1} = x_k + h, \quad h = x_{k+1} - x_k, \quad k \geq 0, h > 0.$$

Dunque, h è un parametro positivo $h > 0$, che caratterizza la partizione geometrica dell'intervallo I .

I primi metodi introdotti, nella parte finale della precedente lezione, sono i metodi di Eulero in avanti ed Eulero all'indietro.

Il metodo di Eulero in avanti (EA) si ottiene sostituendo al problema di Cauchy, nel generico punto x_k ,

$$\begin{cases} y'(x_k) = f(x_k, y_k) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases},$$

la seguente relazione funzionale

$$\text{EA: } \frac{u_{k+1} - u_k}{h} = f(x_k, u_k) \quad k = 0, \dots, n-1,$$

dove $\frac{u_{k+1} - u_k}{h}$ è una approssimazione, basata sullo sviluppo di Taylor in avanti arrestato al primo ordine, della derivata prima $y'(x_k)$ nel punto x_k . Si definisce l'approssimazione

$$y'(x_k) \approx \frac{u_{k+1} - u_k}{h} \quad \text{DF in avanti}$$

come Differenza Finita (DF) in avanti, dato che è basata su rapporti incrementali in avanti.

In maniera analoga, il metodo di Eulero all'indietro (EI) è definito dalla seguente relazione

$$\text{EI: } \frac{u_{k+1} - u_k}{h} = f(x_{k+1}, u_{k+1}) \quad k = 0, \dots, n-1,$$

Nel metodo EI la derivata prima di y nel punto x_{k+1} è rappresentata da uno sviluppo di Taylor all'indietro arrestato al primo ordine. Abbiamo definito l'approssimazione

$$y'(x_{k+1}) \approx \frac{u_{k+1} - u_k}{h} \quad \text{DF all'indietro},$$

DF all'indietro, perché è basata su rapporti incrementali all'indietro.

Inoltre, nei metodi di Eulero, abbiamo sostituito la funzione f valutata nel nodo x_k , ovvero $f(x_k, y_k)$, con la sua approssimazione $f(x_k, u_k)$

$$f(x_k, u_k) \approx f(x_k, y_k).$$

Infine, sarà lecito supporre che la condizione iniziale sia soddisfatta esattamente, ossia

$$u_0 = y_0.$$



Iniziamo a classificare questi metodi. In particolare, osserviamo che sia il metodo di EA che quello di EI appartengono alla classe dei metodi ad un passo. I metodi ad un passo sono quei metodi in cui il valore di u_{k+1} (ovvero, il valore dell'approssimazione numerica nel nodo x_{k+1}) dipende unicamente dal valore u_k (ossia, dall'approssimazione numerica nel nodo x_k), ma non da valori precedenti della successione $\{u_k\}$. In formula, questa dipendenza si esprime come

$$u_k \rightarrow u_{k+1}.$$

Il metodo EA può essere riformulato nel modo seguente

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= g(u_k) \quad \text{dove } g(u_k) = u_k + hf(x_k, u_k), \\ \text{EA (esplicito)} \quad u_{k+1} &= u_k + hf(x_k, u_k) \quad k = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Tale riformulazione è stata ottenuta moltiplicando entrambi i membri dell'equazione di EA ($\frac{u_{k+1}-u_k}{h} = f(x_k, u_k)$) per h , e successivamente isolando il termine u_{k+1} a sinistra. Di conseguenza u_{k+1} risulta essere una funzione g ben definita e dipendente solo da u_k . Infatti, l'unico valore che appare in g della soluzione numerica è proprio u_k . Pertanto, in questo caso, si parla di un metodo esplicito, poiché u_{k+1} (la soluzione numerica al passo successivo) dipende in modo esplicito dai valori delle componenti dello stesso vettore $\{u_k\}$ nei passi precedenti.

Analogamente, il metodo EI può essere riscritto come

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= g(u_k, u_{k+1}) \quad \text{dove } g(u_k, u_{k+1}) = u_k + hf(x_{k+1}, u_{k+1}), \\ \text{EI (implicito)} \quad u_{k+1} &= u_k + hf(x_{k+1}, u_{k+1}) \quad k = 0, \dots, n-1, \end{aligned}$$

Tale riformulazione è stata ottenuta moltiplicando entrambi i membri dell'equazione di EI ($\frac{u_{k+1}-u_k}{h} = f(x_{k+1}, u_{k+1})$) per h , e successivamente isolando il termine u_{k+1} a sinistra. In questo caso, u_{k+1} risulta essere una funzione g di u_k e u_{k+1} . Pertanto, u_{k+1} compare anche a destra, come argomento incognito di f , ossia $f(x_{k+1}, u_{k+1})$, mentre il termine u_k è noto: u_{k+1} è definito implicitamente attraverso la funzione $g(u_k, u_{k+1})$. Per tale ragione, il metodo di EI è definito implicito. Pertanto, il metodo di EI costituisce una relazione non lineare a priori.

Quando si utilizzano metodi di tipo implicito, nel passaggio da x_k a x_{k+1} , il nuovo valore della soluzione u_{k+1} dipende non solo da u_k , ma anche da sé stesso (u_{k+1}) attraverso una funzione. Si tratta quindi di una relazione implicita che richiama le equazioni non lineari che abbiamo incontrato nel primo modulo di questo corso. In definitiva, si giunge a un'equazione non lineare nell'incognita u_{k+1} che dovrà essere risolta.