DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica

Lezione 4.3b

Il metodo delle potenze

Calcolo degli autovalori di una matrice (metodo delle potenze)

- Il metodo delle potenze **genera una successione di vettori** $\{\mathbf{q}^{(k)}\}$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{x}_1 \qquad \lambda^{(k)} = \mathbf{q}^{(k)^T} A \mathbf{q}^{(k)}$$

$$\lim_{k\to\infty} \lambda^{(k)} = \lambda_1 \qquad \boxed{A\mathbf{x}^{(1)} = \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)}}$$

- **Velocità di convergenza** del metodo delle potenze

  Ipotesi:

$$\mathbf{q}^{(0)} = \alpha_1 \mathbf{x}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{x}^{(2)} + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}^{(n)}$$

$$\alpha_1 \neq 0 \qquad \|\mathbf{x}^{(i)}\|_2 = 1 \ \forall i = 1, \ldots, n$$

Calcolo degli autovalori di una matrice (metodo delle potenze)

- Definiamo

Vettore calcolato al passo

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(k)} = \frac{\mathbf{q}^{(k)}}{\alpha_1 \lambda_1^k} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

- Si può dimostrare che

$$\lim_{k \to \infty} \tilde{\mathbf{q}}^{(k)} = \pm \mathbf{x}^{(1)}$$

$$\boxed{A\mathbf{x}^{(1)} = \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)}}$$

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = O\left(\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^k \right)$$

Calcolo degli autovalori di una matrice (metodo delle potenze)

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right)$$

- Dato che $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k \to 0 \qquad k \to \infty$$

- Inoltre si ha

$$\|\tilde{\mathbf{q}}^{(k)} - \mathbf{x}_1\|_2 \leq Cost \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$$

Il metodo delle potenze converge a $\left(\lambda_1, \mathbf{x}^{(1)}\right)$ **linearmente**

Calcolo degli autovalori di una matrice (metodo delle potenze)

Il metodo delle potenze converge a $\left(\lambda_1, \mathbf{x}^{(1)}\right)$ linearmente

$$\|\tilde{\mathbf{q}}^{(k)} - \mathbf{x}_1\|_2 \leq Cost \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$$

- Ad ogni iterazione, l'errore si abbatte di $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$
- Dopo k iterazioni, l'errore si è ridotto di $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$
- Inoltre, se A è anche simmetrica allora $\|\tilde{\mathbf{q}}^{(k)} - \mathbf{x}_1\|_2 \leq Cost \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{\boxed{2k}}$

Calcolo degli autovalori di una matrice (metodo delle potenze)

- Essendo un metodo iterativo → definire **criterio di attesto**
- **Stima a posteriori:** garantire che dopo una certa iterazione l'errore è sotto una certa soglia prefissata

- Supponiamo che $(\widehat{\lambda}, \widehat{\mathbf{x}})$ siano i valori che approssimano $(\lambda, \mathbf{x})$

Residuo $\widehat{r} = A\widehat{x} - \widehat{\lambda}\widehat{\mathbf{x}}$ $\qquad A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

- Vale la stima a posteriori

$$\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\widehat{\lambda} - \lambda| \leq \frac{\|\widehat{\mathbf{r}}\|_2}{\|\widehat{\mathbf{x}}\|_2}$$