



eCAMPUS
UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.1b

Matrici simmetriche e definite positive, raggio spettrale,
errori assoluti ed errori relativi

Risoluzione di sistemi lineari (Raggio spettrale)

- Raggio spettrale di una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ SDP è la norma 2

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

- Se A simmetrica $A^T = A \longrightarrow A^T A = A^2$

- Inoltre $\lambda(A^2) = [\lambda(A)]^2$

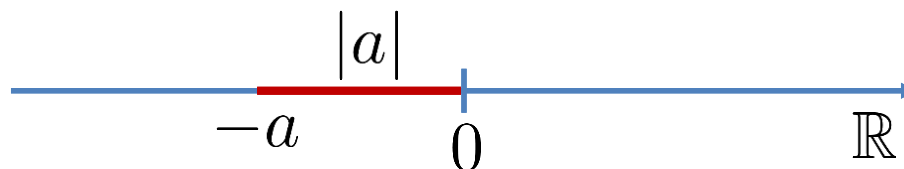
$$\longrightarrow \|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)} \sqrt{\rho(A)^2} = \rho(A)$$

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max_i |\lambda_i(A)|$$

Risoluzione di sistemi lineari (valore assoluto)

- Introduciamo il concetto di differenza/errore tra vettori e matrici
- Per un numero reale $a \in \mathbb{R}$ la sua misura (lunghezza) è

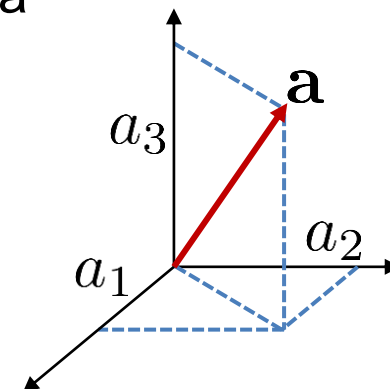
$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$



Risoluzione di sistemi lineari (misura/norma vettoriale)

- Per un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ il modulo di \mathbf{a} è la sua norma

$$\|\mathbf{a}\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2}$$



- Per una matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la misura è $\|A\|$

dove $\|\mathbf{a}\|$ una generica norma per un vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$

**Norme
matriciali**

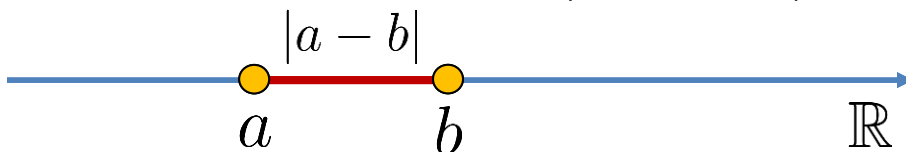
INDOTTE DA

**Norme
Vettoriali**

Risoluzione di sistemi lineari (errore assoluto e relativo)

- Concetto di distanza tra numero/vettori/matrici
- Necessario per misurare gli errori (tra soluzione esatta e approssimata)
- Se $a, b \in \mathbb{R}$ la loro distanza assoluta è il modulo

Errore assoluto $|a - b|$



The diagram shows a horizontal blue line representing the real number line \mathbb{R} . Two points, a and b , are marked on the line with yellow dots. A red line segment connects the two dots, representing the distance between them. Above the red segment, the expression $|a - b|$ is written, indicating the absolute error.

- Se b è un'approssimazione di a la differenza relativa è

Errore relativo $\frac{|a - b|}{|a|}$

Risoluzione di sistemi lineari (errore assoluto e relativo)

- Possiamo introdurre il concetto di errore assoluto e relativo per vettori
- Se $a, b \in \mathbb{R}^n$, ($a \neq 0$)

Errore assoluto $\|a - b\|$

Errore relativo $\frac{\|a - b\|}{\|a\|}$

