DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

Lezione 6.7b

Stabilità, consistenza e convergenza di metodi numerici ad un passo

© Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 9002752130 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Convergenza di un metodo numerico**

Convergenza: metodo numerico è convergente
quando la **soluzione numerica tende alla soluzione esatta**
al diminuire del passo di discretizzazione

- $\{u_k\}$ è la soluzione numerica ed $y(x)$ è la soluzione esatta della EDO allora diciamo che $\{u_k\}$ converge a $y(x)$ se e solo se

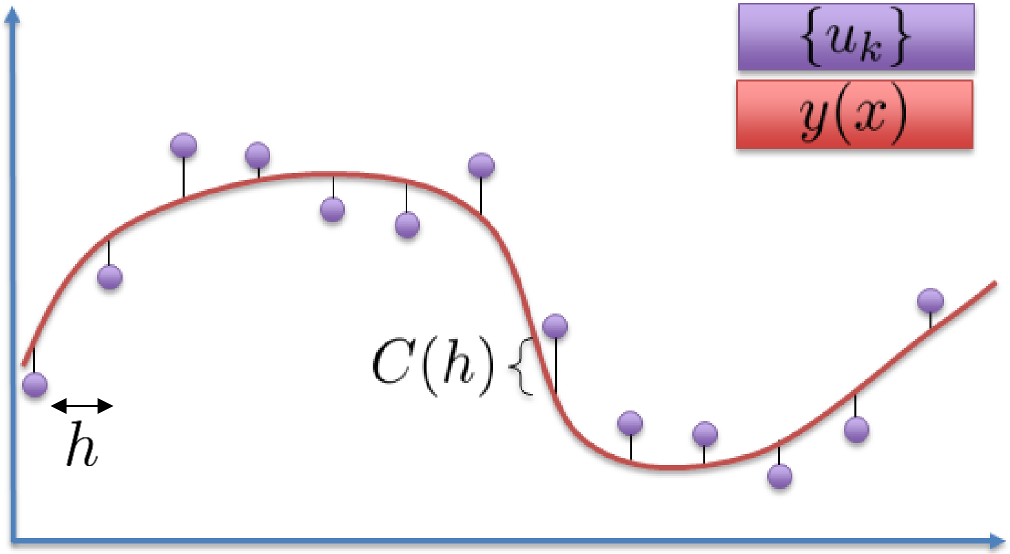
$$|u_k - y_k(x_k)| \leq C(h) \to 0 \text{ per } h \to 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{h\to 0} u_k = y(x_k) \quad \forall k$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

Convergenza: metodo numerico è convergente
quando la **soluzione numerica tende alla soluzione esatta**
al diminuire del passo di discretizzazione

$$|u_k - y_k(x_k)| \leq C(h) \to 0 \text{ per } h \to 0$$



Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Stabilità non implica convergenza

Stabilità $\not\Rightarrow$ **Convergenza**

- Stabilità + consistenza garantiscono la convergenza

Stabilità + **Consistenza** $\Rightarrow$ **Convergenza**

- **Un metodo numerico stabile e consistente è anche convergente**

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

Convergenza: proprietà che garantisce che la soluzione numerica tende alla soluzione esatta

Stabilità: la soluzione numerica, per dati inziali diversi, produce soluzioni controllate

- **Concetto di consistenza:** metodo numero consistente

Consistenza: capacità del metodo numerico di rappresentare bene il problema matematico

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Consideriamo il generico **problema matematico**

$$F(u, d) = 0$$

u soluzione

d dati

- Generico **metodo numerico**

$$F_h(u_h, d) = 0$$

u_h soluzione numerica

- **Metodo numerico è consistente** se l'errore di consistenza

$$\tau_h(u) = F_h(\boxed{u}, d) \longrightarrow \lim_{h \to 0} \tau(h) = 0$$

© Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 9002752130 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Per i metodi ad un passo:

$$\frac{u_{k+1}-u_k}{h} = \Phi(h; u_k, u_{k+1})$$

- Per Eulero avanti (**EA**), Eulero indietro (**EI**) e Cranck-Nicholson (**CN**)

$$\Phi(h; u_k, u_{k+1}) = \begin{cases} f(x_k, u_k) & \textbf{EA} \\ f(x_{k+1}, u_{k+1}) & \textbf{EI} \\ \frac{1}{2}\left[f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1})\right] & \textbf{CN} \end{cases}$$

- **Errore di consistenza (o troncamento) locale** è

$$\tau_{k+1}(h; y) = \frac{y_{k+1}-y_k}{h} - \Phi(h; y_k, y_{k+1})$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Possibile introdurre l'**errore di consistenza globale**

$$\tau(h) = \max_k |\tau_k(h; y)|$$

- Diremo che **il metodo numerico è consistente** se e solo se

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \tau(h) = 0}$$

- Un **metodo numerico è di ordine** $p \geq 1 \longrightarrow \tau(h) = O(h^p)$
- Si può dimostrare che

EA è di ordine 1	PM è di ordine 2
EI è di ordine 1	CN è di ordine 2