Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

Lezione 5.6b

Condizioni di risolubilità del problema di Cauchy

Risoluzione di EDO (Problema di Cauchy)

- Caratterizzare quando un Problema di Cauchy ammette soluzione
- Condizioni generali per garantire

<u>Esistenza ed unicità</u> della soluzione di un problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \end{cases}$$

- $y : I \to \mathbb{R}$ funzione incognita, $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione assegnata
- y_0 dato iniziale, x_0 valore iniziale

Risoluzione di EDO (Problema di Cauchy)

- Risolvere il Problema di Cauchy $\Leftrightarrow$ trovare la soluzione particolare

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \end{cases}$$

- La **soluzione particolare** che soddisfa $y(x_0) = y_0$
- Condizioni di esistenza e unicità

$\Rightarrow$ **Condizioni su $f(x, y)$ che garantisco l'esistenza e unicità del problema di Cauchy**

Risoluzione di EDO (Condizioni di esistenza e unicità)

- Le condizioni su $f(x,y)$ per garantire l'esistenza e unicità sono:

1. $f(x,y)$ **è <u>continua</u> rispetto a** x **e** y

2. $f(x,y)$ **è <u>lipschitziana</u> in** y

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall x \in I \ \forall y_1, y_2$$

- Se **1.** e **2.** sono verificate allora la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \end{cases}$$

$y(x)$ **esiste ed è unica**

$$\forall x_0 \in I$$

Risoluzione di EDO (Condizioni di esistenza e unicità)

- Esempio

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) & x \in (0, 1.5) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

soluzione $\Rightarrow$ $$y(x) = e^{x^2/2}$$

- In questo caso quindi $f(x,y) = xy(x) = xe^{x^2/2}$

1. $f(x,y)$ **è <u>continua</u> rispetto a** x **e** y ✓

2. $f(x,y)$ **è <u>lipschitziana</u> in** y ✓

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq 1.5|y_1 - y_2|$$

Risoluzione di EDO (La condizione di lipschitzianità)

- La lipschitzianità potrebbe non essere semplice per una funzione $f(x,y)$

- Sfruttiamo una **proprietà più forte** che garantisce la lipschitzianità

✓ $f(x,y)$ **è derivabile in** y **con derivata continua**

✓ $f(x,y)$ **è lipschitziana in** y

$$f \in C^1 \longrightarrow f \text{ è lipschitziana}$$