eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica

Lezione 4.7b

La rappresentazione di macchina

Fondamenti della matematica numerica (base binaria, 2)

- La **rappresentazione posizionale binaria** $\beta = 2$

$$x = \pm\,(0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p\alpha_{p+1}\ldots)_2 \cdot 2^q$$

$$x = \pm\left(\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \cdot 2^k\right)_2 \cdot 2^q$$

$$\alpha_k = \{0, 1\}$$

- **Rappresentazione esadecimale** $\beta = 16$

$$\alpha_k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

$$0 \leq \alpha_k \leq \beta - 1$$

Fondamenti della matematica numerica (base binaria, 2)

- Conversione dalla base binaria a quella decimale

Binaria $\beta = 2$ $\longleftrightarrow$ Decimale $\beta = 10$

- Esempio

$$\beta = 2 \qquad x = 10.11 = \underbrace{(0.1011)_2}\cdot 2^{10} \rightarrow \underbrace{(10)_2 = 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = (2)_{10}}$$

Sposta di 2 posizioni
Le cifre significative

$$(0.1011)_2 = \underbrace{1\cdot 2^{-1}}_{1/2} + 0\cdot 2^{-2} + \underbrace{1\cdot 2^{-3}}_{1/8} + \underbrace{1\cdot 2^{-4}}_{1/16} = \left(\frac{11}{16}\right)_{10}$$

$$\Rightarrow \quad x = (10.11)_2 = \left(\frac{11}{16}2^2\right)_{10} = (2.75)_{10}$$

Fondamenti della matematica numerica (virgola mobile)

- In generale i numeri reali hanno infinite cifre dopo la virgola
- Calcolatore non ha infinita memoria

  → **Calcolatore non può includere tutte le cifre significative**

- Calcolatore **arrotonda (troncando) i numeri**

↓

Calcolatore utilizza i numeri macchina

↓

Rappresentazione in virgola mobile (floating point)

Fondamenti della matematica numerica (virgola mobile)

- Consideriamo il numero x

$$x = \pm \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \beta^{-k} \right)_{\beta} \cdot \beta^e = \pm(\alpha_1 \beta^{-1} + \cdots + \alpha_{t-1}\beta^{-t+1} + \cdots) \cdot \beta^e$$

- Rappresentazione normalizzata

$$x = \pm(0.\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{t-1}\alpha_t\alpha_{t+1} \ldots)_{\beta} \cdot \beta^e$$

- Definizione: **rappresentazione floating point** (virgola mobile)

$$\mathrm{fl}^t(x) = \pm(0.\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{t-1}\tilde{\alpha}_t)_{\beta} \cdot \beta^e$$

$$\tilde{\alpha}_t = \begin{cases} \alpha_t & 0 \le \alpha_{t+1} < \beta/2 \\ 1 + \alpha_t & \beta/2 \le \alpha_{t+1} \le \beta \end{cases}$$

Fondamenti della matematica numerica (virgola mobile)

- **Rappresentazione floating point** (virgola mobile):

Rappresentazione con
t cifre significative

$$\mathrm{fl}^t(x) = \pm(0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}\boxed{\tilde{\alpha}_t})_\beta \cdot \beta^e$$

Cifra di round off

- **Esempi**:

$$x = \pi = 3.14159265128\ldots$$

$$\mathrm{fl}^6(x) = \pi = +0.314159 \cdot 10^1$$

$$y = -0.00666666666666\overline{6}$$

$$\mathrm{fl}^7(y) = -0.6666667 \cdot 10^{-2}$$

Fondamenti della matematica numerica (numeri macchina)

➢ Definizione di numero macchina, con una **nomenclatura rigorosa**

$$\mathrm{fl}^t(x) = \pm(0.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}\alpha_t)_\beta \cdot \beta^e$$

$\mathrm{fl}^t(x)$

- ✓ Segno: $\pm$
- ✓ Mantissa: $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{t-1}\alpha_t$
- ✓ Base: β
- ✓ Esponente (caratteristica): e

$\pm$	α_1	α_2			α_t	e

$$0 \leq \alpha_k \leq \beta - 1 \qquad 0 > L \leq e \leq U > 0$$

Limite inferiore (L) — Limite superiore (U)