eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistemi lineari

Lezione 2.4a

Il Metodo di Eliminazione di Gauss

Risoluzione di sistemi lineari (Metodo di Eliminazione di Gauss)

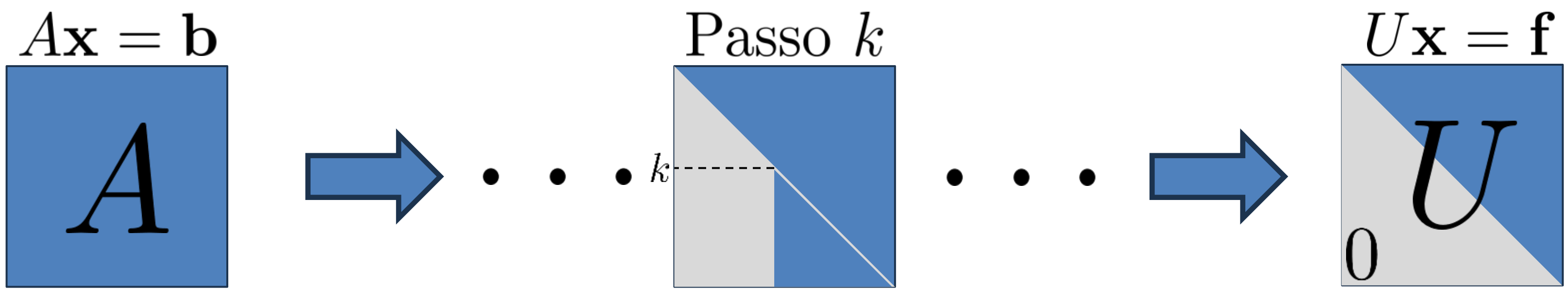
- Risoluzione numerica di **sistemi di equazioni lineari**

- Metodo di eliminazione di Gauss (MEG) per matrici piene

  - ✓ **Obiettivo del MEG**
  - ✓ **Esempio** per una matrice 3×3
  - ✓ **Idea generale del MEG**
  - ✓ **Livello algebrico** del MEG e **formule iterative**

Risoluzione di sistemi lineari (Metodo di Eliminazione di Gauss)

- **Obiettivo** del Metodo di Eliminazione di Gauss (**MEG**):



- Sistema equivalente: non abbiamo cambiato la soluzione $\mathbf{x}$
- Quali sono le operazioni ammissibili che garantiscono la stessa $\mathbf{x}$?

1. Aggiungere una riga come combinazione lineare delle altre
2. Moltiplicare una riga per un coefficiente

MEG sfrutta queste proprietà per **non alterare la soluzione**

Risoluzione di sistemi lineari (MEG: esempio)

- Come opera il MEG nel caso

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} = A^{(1)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(1)} = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & \text{(I)} \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 & \text{(II)} \\ -x_1 - 3x_2 = 2 & \text{(III)} \end{cases} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- $A^{(1)}$ prima matrice e $\mathbf{b}^{(1)}$ termine noto del MEG
- **Prima trasfo del MEG:** eliminiamo x_1 dalla (II) e (III) equazione

$$\text{(II)}' = \text{(II)} - 2\text{(I)} = \cancel{2x_1} + 2x_2 + 3x_3 - \cancel{2(x_1} + 2x_2 + x_3) = 3 - 2$$

$$\text{(III)}' = \text{(III)} + \text{(I)} = \cancel{x_1} + 2x_2 + x_3 + (\cancel{-x_1} - 3x_2) = 2 + 0$$

$$\Rightarrow \quad A^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)} = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & \text{(I)} \\ \mathbf{0} \quad -2x_2 + x_3 = 3 & \text{(II)}' \\ \mathbf{0} \quad\quad x_2 + x_3 = 2 & \text{(III)}' \end{cases}$$

Risoluzione di sistemi lineari (MEG: esempio)

- **Procedura del MEG**: determinare m_{i1} della (I) t.c.

$$(\mathrm{II})' = (\mathrm{II}) - m_{21}(\mathrm{I})$$
$$(\mathrm{III})' = (\mathrm{III}) - m_{31}(\mathrm{I})$$

→ **Termini nulli per x_1 nelle $(\mathrm{II})'$ e $(\mathrm{III})'$**

- In questo caso $m_{21} = 2,\ m_{31} = -1$
- Nuovo sistema è

$$A^{(2)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(2)} = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & (\mathrm{I}) \\ \mathbf{0} \quad -2x_2 + x_3 = 3 & (\mathrm{II})' \\ \mathbf{0} \quad x_2 + x_3 = 2 & (\mathrm{III})' \end{cases}$$

$$\mathbf{X}$$
$$A^{(2)} \neq A^{(1)}$$
$$\mathbf{b}^{(2)} \neq \mathbf{b}^{(1)}$$

- **Seconda trasfo del MEG:** eliminiamo x_2 dalla $(\mathrm{III})'$ equazione

$$(\mathrm{III})'' = (\mathrm{III})' - m_{31}(\mathrm{II})' \qquad m_{31} = -\frac{1}{2}$$

Risoluzione di sistemi lineari (MEG: esempio)

- Dopo le trasformazioni, il nuovo sistema lineare è

$$A^{(3)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(3)} = \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 & \text{(I)} \\ \mathbf{0} \quad -2x_2 + x_3 = 3 & \text{(II)}' \\ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} & \text{(III)}'' \end{cases} \qquad \mathbf{b}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

- Abbiamo una matrice triangolare superiore $A^{(3)} = U$, $\mathbf{b}^{(3)} = \mathbf{f}$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$U\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad \Longrightarrow \quad \textit{Sostituzioni all'indietro}$$