Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

Lezione 6.4a

Convergenza per i metodi di Eulero in avanti ed Eulero all'indietro

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **E**quazioni **D**ifferenziali **O**rdinarie **(EDO) numericamente**

$$u_{k+1} = g(u_k, u_{k+1})$$

- **Metodi di Eulero** in avanti (**EA**) e all'indietro (**EI**)
  - ✓ **Esempio di applicazione** di EA ed EI
  - ✓ **Errore di approssimazione**
  - ✓ Andamento errore in funzione di h
  - ✓ **Equazione non lineare** per EI

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Esempio:** consideriamo le seguente EDO (non lineare, autonoma)

$$\begin{cases} y'(x) = -y^2 & x \in (0,3] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$f(x,y) = -y^2 \quad I = [0,3] \quad x_0 = 0, \; y_0 = y(0) = 1$$

- **Soluzione esatta** (tramite separazione delle variabili) analitica è

$$y(x) = \frac{1}{x+1}$$

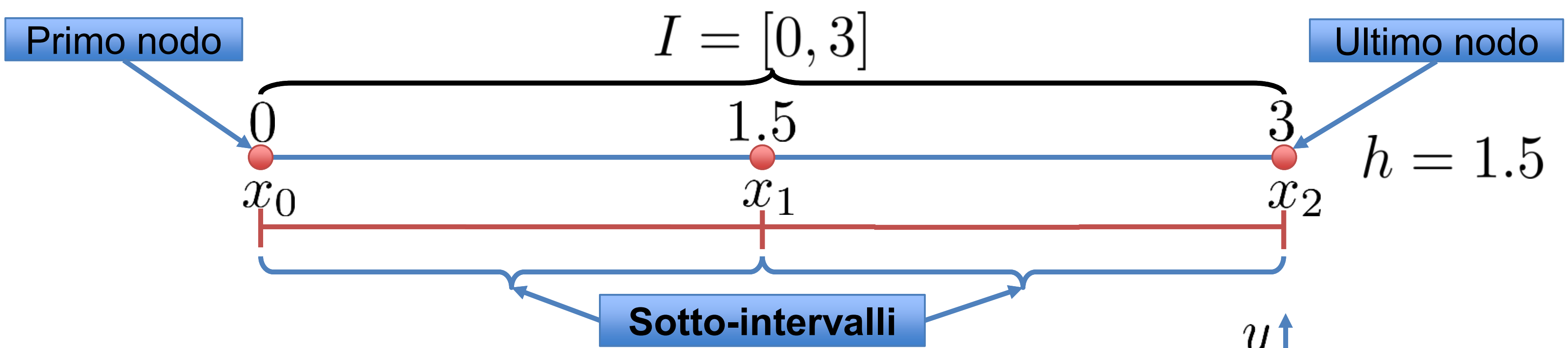
- Analizziamo la **risoluzione numerica** di questa EDO

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

1. Discretizzazione dell'intervallo $I = [0, 3]$

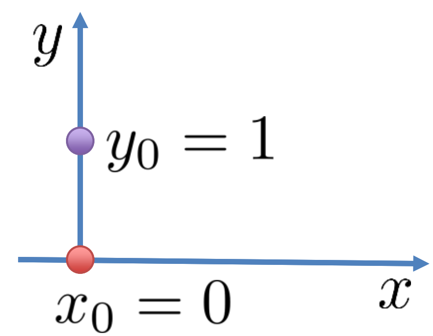
due sotto-intervalli <u>equispaziati</u> con $h = 1.5$ $\quad x_{k+1} = x_k + h, \; k = 0, 1$

$$\{x_0 = 0, x_1 = x_0 + h = 1.5, x_2 = x_1 + h = 3\}$$



- Il dato iniziale è

$$x_0 = 0, \; y_0 = y(x_0) = y(0) = 1$$



Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Applicando la formula di **Eulero in avanti** (EA)

$$\underbrace{u_{k+1} = g(u_k) \qquad g(u_k) = u_k + hf(x_k, u_k)}$$

$$\boxed{u_{k+1} = u_k + hf(x_k, u_k)} \qquad k = 0, 1$$

$$\boxed{u_0 = 1}$$

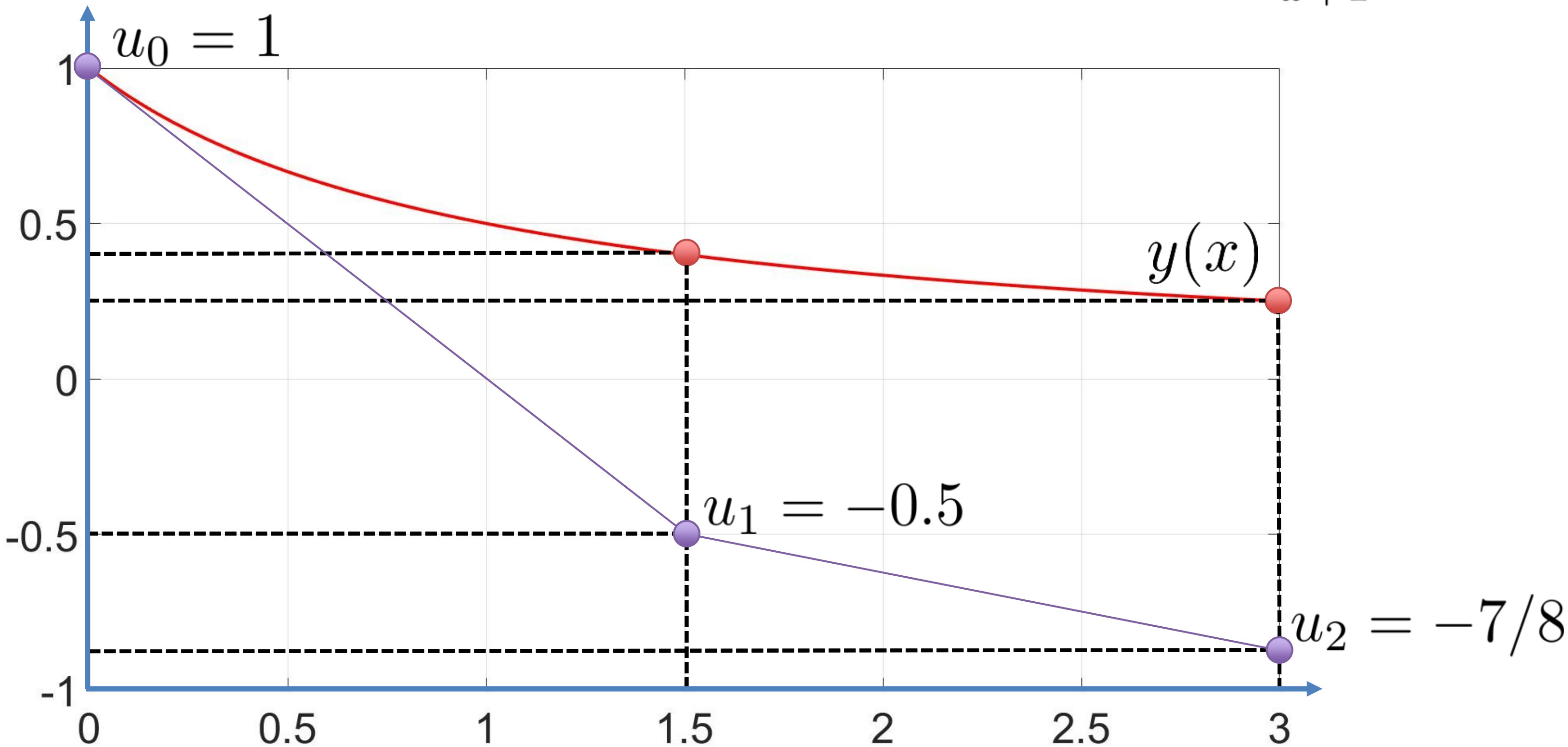
$$u_{k+1} = u_k - 1.5u_k^2$$

$$\boxed{k = 0} \Rightarrow u_1 = u_0 + hf(x_0, u_0) = u_0 - hu_0^2 \Rightarrow \boxed{u_1 = -0.5}$$

$$\boxed{k = 1} \Rightarrow u_2 = u_1 + hf(x_1, u_1) = u_1 - hu_1^2 \Rightarrow \boxed{u_2 = -7/8}$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

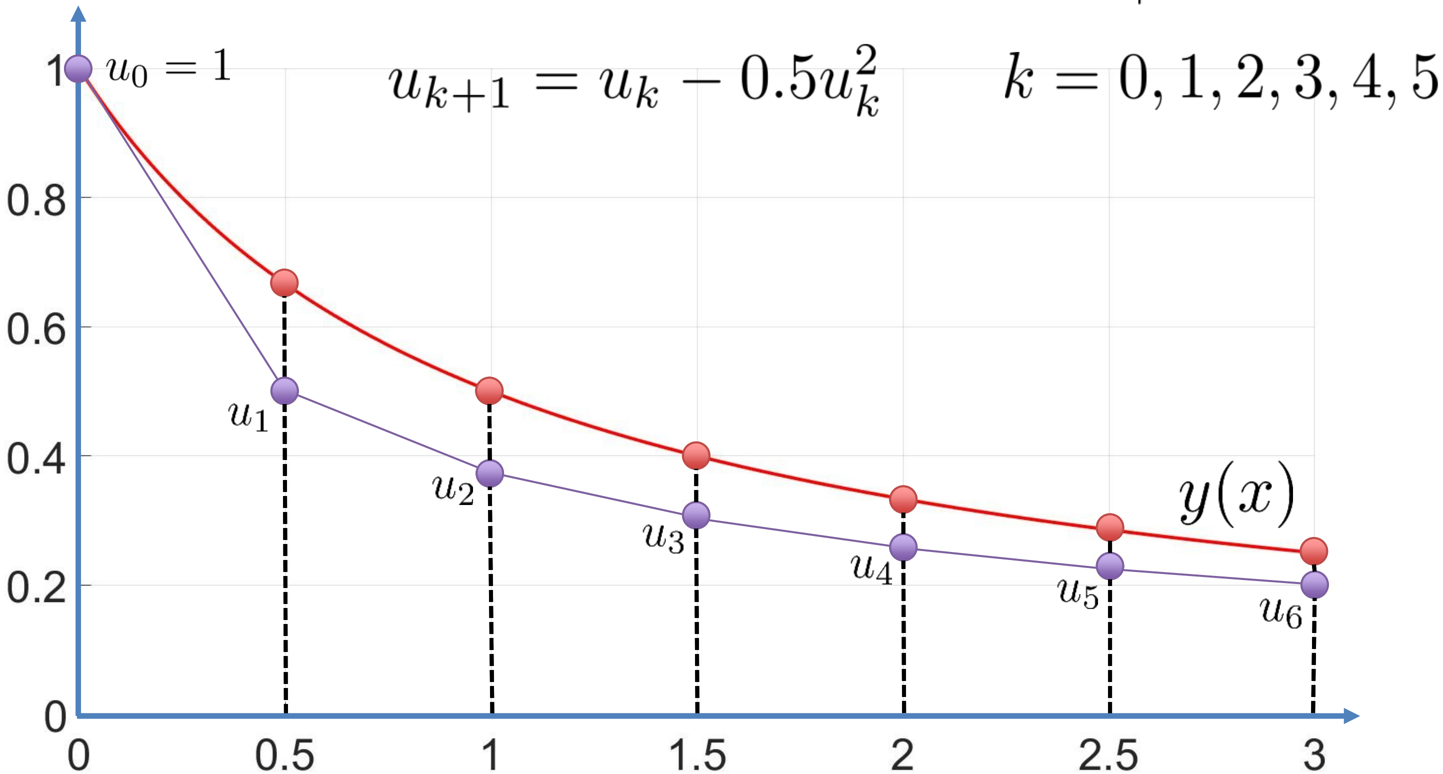
- La soluzione con EA ed $h = 1.5$ **non converge** a $y(x) = \frac{1}{x+1}$



$$\lim_{k\to\infty} x_k = -\infty$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- La soluzione con EA ed $h = 0.5$ $\longrightarrow$ $y(x) = \frac{1}{x+1}$



- Riducendo h l'approssimazione numerica migliora significativamente