



eCAMPUS
UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Radici di equazioni non lineari

Lezione 1.7b

Criteri di arresto per i metodi iterativi

Analisi sul Residuo e Incremento (ricerca delle radici)

- Quando i criteri di arresto introdotti sono efficaci $\Rightarrow e_n < \epsilon$

$$f(\alpha) = 0 \xrightarrow{\text{Metodo}} \{x_n\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

- Domanda: $\exists n$ t.c. $x_n \simeq \alpha \Rightarrow e_n = |\alpha - x_n| < \epsilon$

- x_n soluzione approssimata al passo n
- α soluzione esatta della radice

- Due criteri di arresto introdotti:

$$r_n = |f(x_n)| \quad \text{Residuo}$$

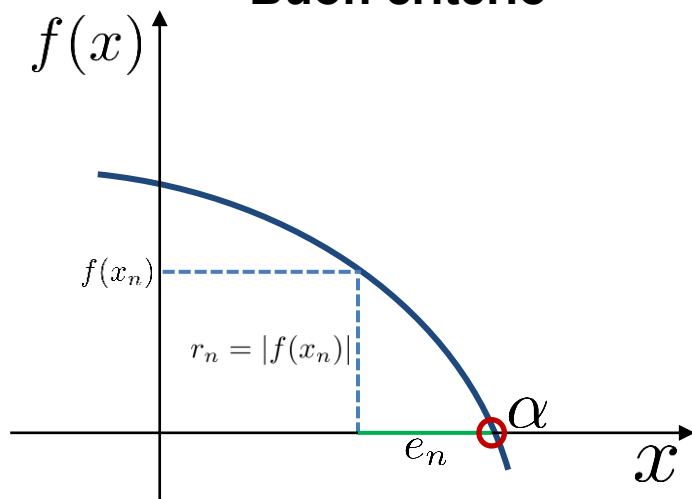
$$\delta x = |x_{n+1} - x_n| \quad \text{Incremento}$$

Analisi sul Residuo (ricerca delle radici)

➤ Quando il criterio di arresto sul residuo è efficace $\Rightarrow e_n = |\alpha - x_n| < \epsilon$

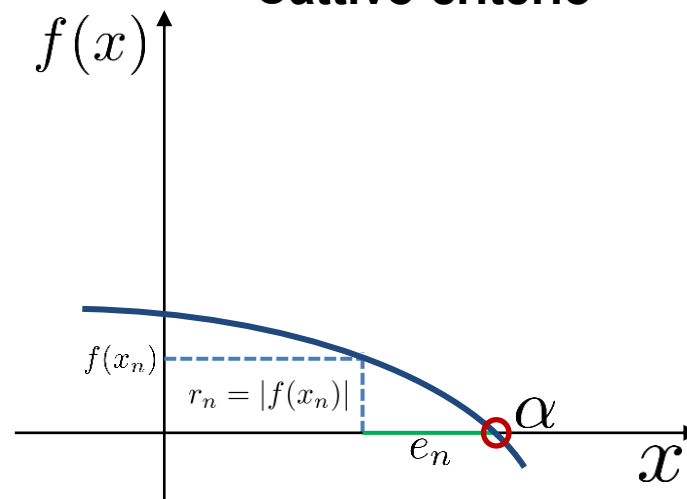
$$f(x) = 0 \Rightarrow r_n = |f(x_n)| < \epsilon$$

Buon criterio



In questo caso riesco a garantire che ad un residuo piccolo corrisponde un errore piccolo

Cattivo criterio



In questo caso riesco a garantire che a un residuo piccolo **NON** ho un errore piccolo

Analisi sul Residuo (ricerca delle radici)

- Arrivare a una formula che ci permetta di trattare tutti i casi
- Partiamo dall'identità

$$f(x_n) = f(x_n) - f(\alpha) \quad \leftarrow f(\alpha) = 0$$

- Applico il Teorema del valor medio

$$f(x_n) - f(\alpha) \stackrel{\downarrow}{=} f'(\xi_n)(x_n - \alpha) \quad \rightarrow \quad \alpha - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)}$$

$$e_n = |\alpha - x_n| = \left| \frac{f(x_n)}{f'(\xi_n)} \right| \simeq \frac{1}{|f'(\alpha)|} |f(x_n)|$$

$$e_n \simeq \frac{1}{|f'(\alpha)|} r_n$$

**Relazione tra
residuo ed errore**

Analisi sul Residuo (ricerca delle radici)

- Abbiamo trovato una **relazione tra residuo ed errore**

$$e_n \simeq \frac{1}{|f'(\alpha)|} r_n$$

- $\frac{1}{|f'(\alpha)|}$ parametro di possibile amplificazione dell'errore

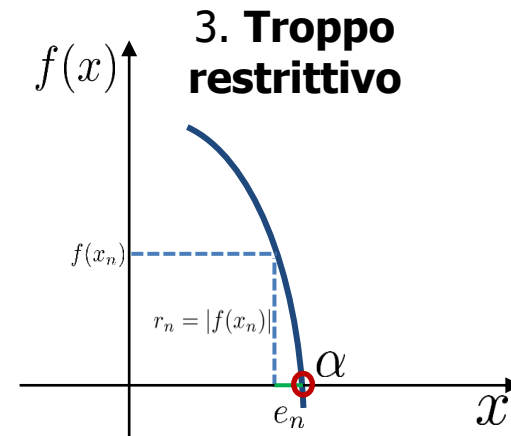
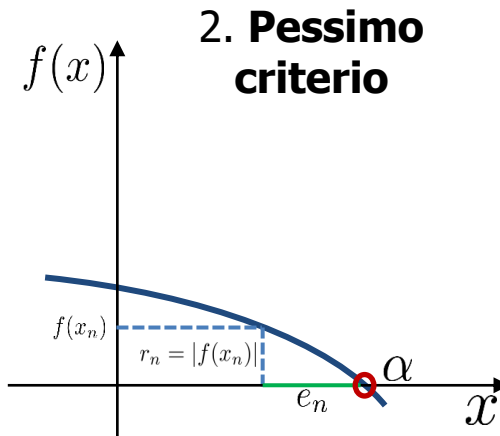
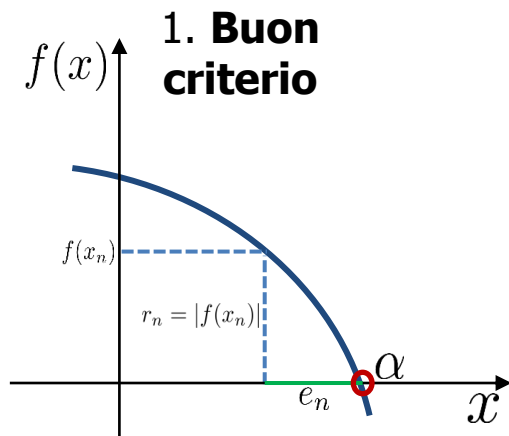
- Casi limite

1. $f'(\alpha) \sim 1$ criterio sul residuo è un **buono**
2. $f'(\alpha) \ll 1$ criterio sul residuo è un **pessimo**
3. $f'(\alpha) \gg 1$ criterio sul residuo è **troppo restrittivo**

Analisi sul Residuo (ricerca delle radici)

➤ Casi limite

1. $f'(\alpha) \sim 1$ criterio sul residuo è un **buono**
2. $f'(\alpha) \ll 1$ criterio sul residuo è un **pessimo**
3. $f'(\alpha) \gg 1$ criterio sul residuo è **troppo restrittivo**

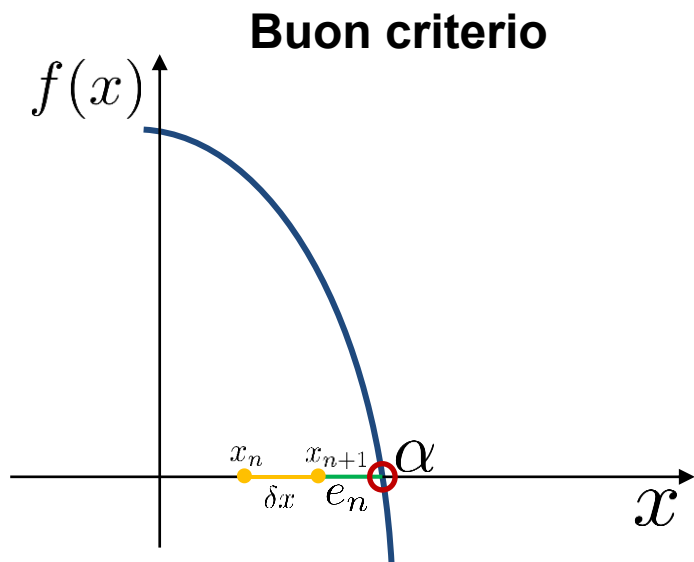


$$e_n \simeq \frac{1}{|f'(\alpha)|} r_n$$

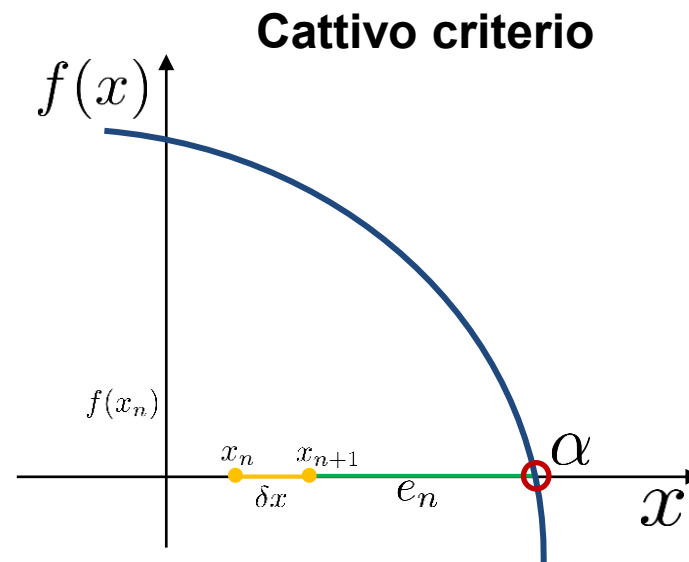
Analisi incrementale (ricerca delle radici)

➤ Quando il test di arresto sull'incremento è efficace ➡ $e_n = |\alpha - x_n| < \epsilon$

$$\delta x = |x_{n+1} - x_n|$$



A un incremento piccolo corrisponde
un errore piccolo



A un incremento piccolo corrisponde
un errore grande