



METODI NUMERICI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Esercizi di fine nucleo: parte 2)

- **Esercizio 1 – Metodo di Cranck-Nicholson**

Si consideri il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y'(x) = y^2 - \sin(x) & x \in (0,3] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

1. Discretizzare l'intervallo $I = [0,3]$ con un passo $h = 0.5$. Scrivere la corrispondente successione di nodi $\{x_k\}$;
2. Applicare il metodo di Cranck-Nicholson (CN), riportando e specificando la formula iterativa di CN per l'equazione con $h = 0.5$;
3. Usare il metodo di Newton per trovare u_{k+1} a ogni passo k ;
4. Calcolare e riportare in una tabella i valori u_k per tutti i nodi x_k .

- **Esercizio 2 – Metodo di Cranck-Nicholson**

Si consideri il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y'(x) = \cos(x) - y & x \in (0,2] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Calcolare la soluzione esatta $y(x)$;
2. Discretizzare l'intervallo $I = [0,2]$ con un passo $h_1 = 1$ e per $h_2 = 0.5$. Scrivere le corrispondenti successioni di nodi $\{x_k\}$;
3. Scrivere la formula iterativa del metodo di Cranck-Nicholson, specificando la formula iterativa di CN per l'equazione differenziale in esame;
4. Risolvere con il metodo di Newton l'equazione implicita in ogni passo k .
5. Riportare i valori delle soluzioni numeriche per h_1 e h_2 su una tabella e calcolare i rispettivi errori assoluto e relativo rispetto alla soluzione esatta $y(x)$.

- **Esercizio 3 – Metodo del punto medio**

Si consideri il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y'(x) = xy^2 & x \in (0,2] \\ y(0) = 0.5 \end{cases},$$

1. Discretizzare l'intervallo $I = [0,2]$ con un passo $h = 0.25$. Scrivere la corrispondente successione di nodi $\{x_k\}$;
2. Trovare il valore u_1 utilizzando il metodo di Heun;
3. Applicare il metodo del punto medio con passo $h = 0.25$ per approssimare la soluzione, esplicitando la formula iterativa.
4. Calcolare la soluzione numerica u_k per ogni nodo x_k e riportare i valori nei nodi su una tabella.



- **Esercizio 4 – Metodo di Heun**

Si consideri il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y'(x) = x + y & x \in (0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

1. Calcolare la soluzione esatta $y(x)$;
2. Discretizzare l'intervallo $I = [0,1]$ con un passo $h = 0.25$. Scrivere la corrispondente successione di nodi $\{x_k\}$;
5. Applicare il metodo di Heun, scrivendo la formula iterativa per u_{k+1} nel caso in esame;
6. Calcolare e riportare in una tabella i valori u_k per tutti i nodi x_k
7. (opzionale) Confrontare con la soluzione numerica ottenuta tramite metodo di Eulero in avanti. Commentare i risultati ottenuti.