



METODI NUMERICI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Esercizi di fine nucleo: parte 1)

- **Esercizio 1 – Metodo di Eulero in avanti**

Si consideri il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y'(x) = y(1 - y) & x \in (0, 2] \\ y(0) = 0.5 \end{cases}$$

1. Calcolare la soluzione esatta $y(x)$ del problema
2. Discretizzare l'intervallo $I = [0, 2]$ con un passo $h = 0.25$. Scrivere la corrispondente successione di nodi $\{x_k\}$.
3. Applicare il metodo di Eulero in avanti (EA), riportando e specificando la formula iterativa di EA per l'equazione con $h = 0.25$
4. Calcolare la soluzione numerica u_k per ogni nodo x_k e riportare i valori nei nodi su una tabella. Calcolare per ogni nodo l'errore relativo e assoluto rispetto alla soluzione esatta $y(x)$. Commentare i risultati ottenuti.

- **Esercizio 2 – Metodo di Eulero in avanti**

Si consideri il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y'(x) = ry \left(1 - \frac{y}{K}\right) & x \in (0, 5] \\ y(0) = y_0 \end{cases}, \quad (1)$$

dove $r = 1.5$, $K = 10$ ed $y_0 = 1$.

1. Discretizzare l'intervallo $I = [0, 5]$ con un passo $h = 0.5$. Scrivere la corrispondente successione di nodi $\{x_k\}$;
2. Applicare il metodo di Eulero in avanti (EA), riportando e specificando la formula iterativa di EA per l'equazione (1);
3. Calcolare la soluzione numerica u_k per ogni nodo x_k e riportare i valori nei nodi su una tabella;
4. Rappresentare su un grafico qualitativo per i punti (x_k, u_k) .

- **Esercizio 3 – Metodo di Eulero all'indietro**

Si consideri il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y'(x) = 2y(x) + x^2 & x \in (0, 3] \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

1. Calcolare la soluzione esatta $y(x)$ del problema



2. Discretizzare l'intervallo $I = [0,3]$ con un passo $h = 0.5$. Scrivere la corrispondente successione di nodi $\{x_k\}$.
3. Applicare il metodo di Eulero all'indietro con passo $h = 0.5$ per approssimare la soluzione, esplicitando la formula iterativa. Poiché il metodo è implicito, risolvere l'equazione non lineare per u_{k+1} tramite il metodo di Newton.
4. Calcolare la soluzione numerica u_k per ogni nodo x_k e riportare i valori nei nodi su una tabella. Calcolare per ogni nodo l'errore relativo e assoluto rispetto alla soluzione esatta $y(x)$. Commentare i risultati ottenuti.

- **Esercizio 4 – Metodo di Eulero all'indietro**

Si consideri il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y'(x) = \sin(y(x)) + x & x \in (0,4] \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

1. Discretizzare l'intervallo $I = [0,4]$ con un passo $h = 1$. Scrivere la corrispondente successione di nodi $\{x_k\}$.
5. Applicare il metodo di Eulero all'indietro, scrivendo la formula implicita per u_{k+1} .
6. Usare il metodo di Newton per trovare u_{k+1} a ogni passo k .
7. Calcolare e riportare in una tabella i valori u_k per tutti i nodi x_k .
8. (opzionale) Confrontare con la soluzione numerica ottenuta tramite metodo di Eulero in avanti. Commentare i risultati ottenuti.