RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Verso una risoluzione effettiva del problema di Cauchy: il metodo delle isocline)

In questa lezione, proseguiamo la nostra discussione sulle equazioni differenziali ordinarie (EDO) e sui metodi di risoluzione. Prima di proseguire, è opportuno fare una sintesi dei casi trattati finora, in modo da avere un quadro chiaro prima di addentrarci nella trattazione delle metodologie di approssimazione numerica, che sarà affrontata in dettaglio nel prossimo nucleo di questo corso. Nella seconda parte di questa lezione, presenteremo il metodo delle isocline, un approccio qualitativo per lo studio delle soluzioni delle equazioni differenziali.
Iniziamo riassumendo dunque le classi di EDO viste fino ad ora.

- **Le equazioni lineari di tipo omogeneo**
$$y' + P(x)y = 0,$$
dove P è una funzione continua della variabile x. Questa equazione ha come soluzione
$$y = e^{-A(x)} \qquad A(x) = \int P(\xi)d\xi + C,$$
che corrisponde all'integrale generale. Per trovare la soluzione particolare bisognerà prescrivere, ad esempio, il dato iniziale.
- **Le equazioni lineari di tipo non omogeneo**
$$y' + P(x)y = Q(x),$$
dove Q è una funzione continua rispetto alla variabile x. L'integrale generale è
$$y = e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int Q(\xi)e^{A(\xi)}d\xi \qquad A(x) = \int P(\xi)d\xi + C,$$
dove alla soluzione del caso omogeneo $y = e^{-A(x)}$ si aggiunge un termine perturbativo che tiene conto della presenza del termine $Q(x)$. Pertanto, se $Q(x) = 0$, otteniamo la soluzione dell'EDO omogenea. Naturalmente, se desiderassimo determinare la soluzione particolare che, in un punto x_0, assume un valore specifico, ciò richiederebbe di determinare la primitiva e, in particolare, gli estremi dell'integrazione.
- **Le equazioni a variabili separabili**
$$y'(x) = Q(x)R(y),$$
dove Q è una funzione che dipende solo da x ed R una funzione che dipende soltanto da y. Dunque, le variabili sono effettivamente separate nell'ipotesi in cui la funzione $R(y)$ sia non nulla. Quindi, supponendo $R(y) \neq 0$, l'integrale generale si trova calcolando due primitive
$$\int \frac{dy}{R(y)} = \int Q(x)dx + C,$$
ovvero, la primitiva di $1/R(y)$ e la primitiva di $Q(x)$ più una costante arbitraria C derivante dall'integrazione.
- **Le equazioni non lineari omogenee**
$$y' = f\big(x, y(x)\big),$$
in cui la funzione f gode della proprietà di omogeneità

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0.$$

Abbiamo visto come queste equazioni si possono ricondurre attraverso una trasformazione di variabile

$$v = \frac{y}{x},$$

in una equazione differenziale a variabili separabili per la nuova variabile incognita v.

A valle della trattazione delle equazioni differenziali non lineari omogenee, abbiamo osservato che non sempre è possibile esprimere la soluzione del problema $y(x)$ in maniera esplicita in funzione di x. Pertanto, i casi che genericamente potremmo definire di difficile soluzione sono

1. **Casi in cui la soluzione esiste ma non si conosce una forma esplicita** del tipo
$$y(x) = \cdots.$$
In particolare, abbiamo analizzato l'esempio
$$y' = \frac{y - x}{y + x},$$
il cui integrale generale è dato da
$$\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + \operatorname{atan}\frac{y}{x} = C\,,$$
In questo caso, è impossibile esplicitare y come funzione di x. L'integrale generale, pertanto, non può più essere rappresentato come una funzione $y(x)$ esplicita, ma come una relazione funzionale che lega tra loro x e y. Questo rappresenta, dunque, un caso particolare di una classe di situazioni nelle quali non è possibile ottenere una rappresentazione esplicita della dipendenza di y dalla variabile x.

2. **Casi in cui la soluzione esiste, ma non è rappresentabile nemmeno in forma implicita.** In questi casi, la soluzione esiste e sappiamo che esiste, ad esempio, perché f è lipschitziana rispetto all'argomento y ed è continua rispetto a y. Sebbene la soluzione dell'EDO esista e sia unica, non è possibile rappresentarla nemmeno sotto forma implicita.
Ad esempio, l'equazione
$$\boldsymbol{y' = e^{-x^2}},$$
ammette un interale generale di questo tipo
$$y(x) = \int e^{-x^2}\,dx + C.$$
Poiché in questo caso dovremmo calcolare una primitiva di e^{-x^2}, questa può essere espressa soltanto tramite uno sviluppo in serie di Taylor. Di conseguenza, non è più nemmeno possibile ottenere una relazione di dipendenza funzionale implicita tra y e x.

In questi casi che quindi genericamente potremmo definire di difficile risoluzione è possibile ricorrere a due possibili strategie:

- **Studio qualitativo della soluzione**. Cercare di introdurre degli strumenti che permettano di ottenere una rappresentazione indicativa del comportamento delle curve integrali.

- **Metodi numerici**. Introdurre una metodologia numerica robusta, che possa essere applicata a qualsiasi EDO per la quale sia nota l'esistenza della soluzione, e che ci consenta di ottenere soluzioni approssimate ma quantitative, anche per equazioni di forma particolarmente complessa.

In questa lezione, esamineremo nel dettaglio un possibile metodo di tipo qualitativo per lo studio della soluzione delle equazioni differenziali: il cosiddetto metodo delle isocline. Il prossimo nucleo di questo corso sarà, invece, dedicato alla trattazione dei metodi numerici per la risoluzione delle EDO.
Il metodo delle isocline fornisce un'idea grafica del comportamento della soluzione del problema di Cauchy in esame. Ricordiamo che le isocline sono i luoghi del piano in cui la funzione f è costante, ossia i punti (x, y) del piano xy per i quali $f(x, y)$ assume un valore costante.
Considerando la generica equazione

$$y' = f(x, y),$$

si determina la famiglia delle isocline

$$f(x, y) = c,$$

dove c è una generica costante. Successivamente, si procede a graficare un numero sufficientemente grande di isocline (che sono evidentemente infinite, poiché corrispondono ai diversi valori della costante arbitraria c). Infine, partendo da una isoclina particolare, ad esempio quella caratterizzata dalla costante c_0, si tracciano una serie di segmenti che congiungono l'isoclina alle sue vicine. L'unione di tutti questi segmenti fornirà un'idea grafica del comportamento di una curva integrale.
Vediamo un esempio. Consideriamo l'equazione differenziale

$$y' = x^2 + y^2.$$

In questo caso

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Di conseguenza le isocline da graficare sono

$$x^2 + y^2 = c \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Le isocline, in questo caso, sono una famiglia di cerchi concentrici con centro nell'origine. Per ciascun valore di c, troviamo i quadrati dei raggi di questi cerchi.
Partiamo quindi da una particolare isoclina, quella per esempio caratterizzata dalla costante c_0

$$f(x, y) = c_0,$$

e procediamo quindi a graficare lungo questa isoclina specifica i segmenti di retta con coefficiente angolare pari a c_0. In altre parole, tracciamo segmenti che appartengono a una retta che, in ogni punto, ha una pendenza pari a c_0. Poi ripetiamo il procedimento per tutte le altre isocline.

Per l'esempio appena considerato, prendiamo l'isoclina corrispondente $c_0 = 1$ e, in ogni punto di questa specifica isoclina, tracciamo un segmento di retta con pendenza pari a 1. In questo caso, i segmenti saranno paralleli alla bisettrice del primo quadrante (si veda Figura 1). Successivamente, ripetiamo il procedimento per l'isoclina più vicina (fra quelle che abbiamo già graficato) a quella di partenza, ossia, per esempio, l'isoclina corrispondente a $c = 0.5$. In questo caso, tracciamo dei segmenti con coefficiente angolare pari a 0.5. Continuando questo processo, per ogni isoclina graficata, è possibile ottenere una rappresentazione grafica del comportamento delle curve integrali. Infine, per ottenere la curva integrale particolare passante per il punto (x_0, y_0), consideriamo l'isoclina che passa per il punto (x_0, y_0), quindi quella che è caratterizzata dalla relazione

$$f(x, y) = c = f(x_0, y_0),$$

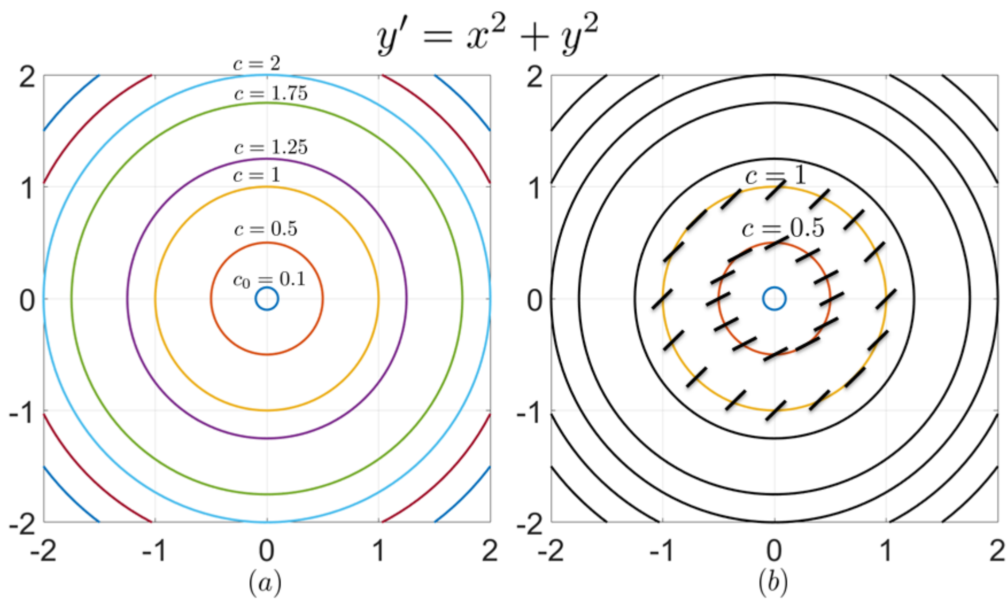

Figura 1: Metodo delle isocline per la EDO $y' = x^2 + y^2$. (a) alcune isocline della EDO $y' = x^2 + y^2$; (b) inizio del processo per le isocline $c = 1$ e $c = 0.5$.

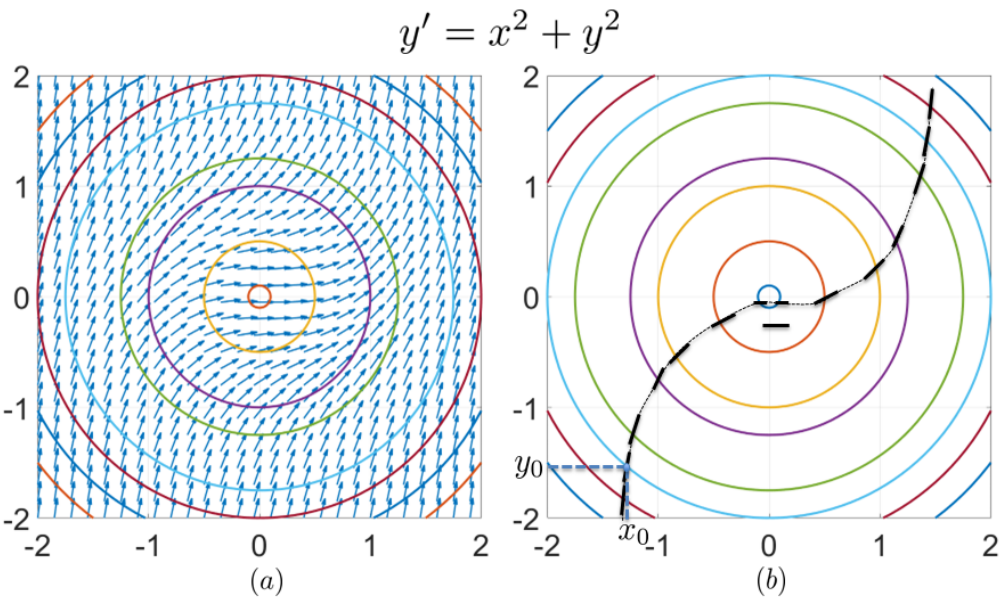

Figura 2: Metodo delle isocline per la EDO $y' = x^2 + y^2$. (a) campo di direzioni e alcune isocline della EDO $y' = x^2 + y^2$; (b) una curva integrale ottenuta con il metodo delle isocline $c = 1$ e $c = 0.5$.

e tracciamo la retta di pendenza $c = f(x_0, y_0)$ uscente da (x_0, y_0). I punti di intersezione di tale retta con le isocline immediatamente adiacenti forniscono i nuovi punti da cui partire per re-inizializzare il processo che abbiamo dettagliato in precedenza. Vogliamo quindi ottenere un andamento qualitativo

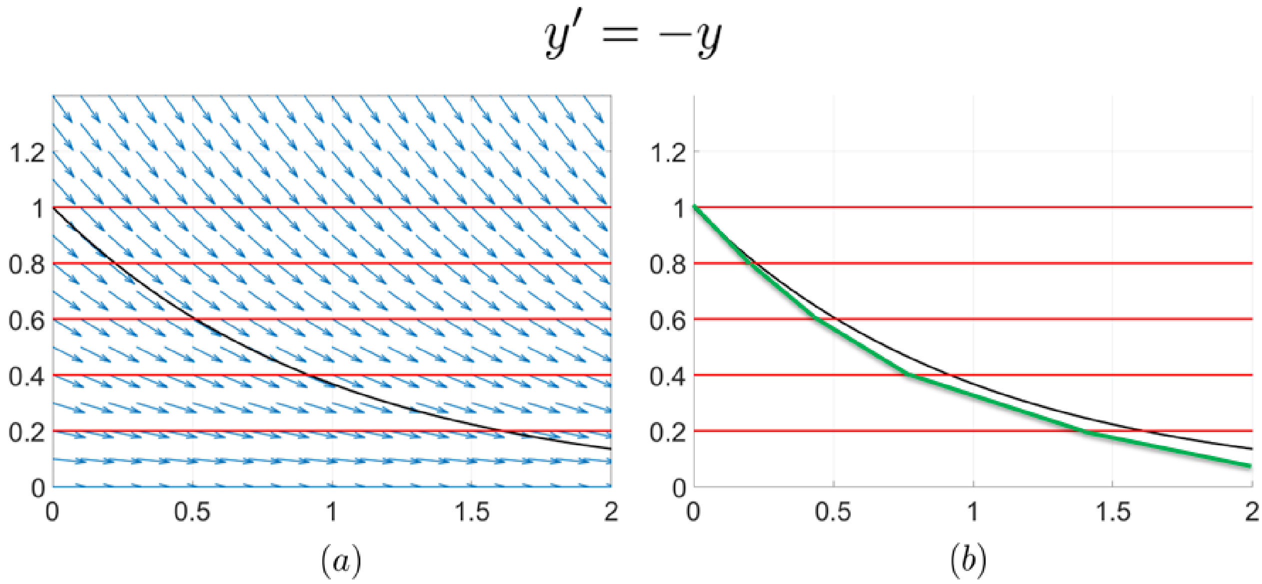

Figura 3: Metodo delle isocline per la EDO $y' = -y$. (a) campo di direzioni e alcune isocline della EDO $y' = -y$; (b) una curva integrale ottenuta con il metodo delle isocline.

della curva integrale usando il metodo delle isocline per la EDO $y' = x^2 + y^2$. Prendiamo un'isoclina particolare e un punto specifico di coordinate (x_0, y_0), e tracciamo la curva integrale che passa per questo punto utilizzando il metodo delle isocline. Iniziamo tracciando da questo punto due segmenti (uno in avanti e l'altro all'indietro, cioè verso le due isocline adiacenti, la precedente e la successiva) con coefficiente angolare $f(x_0, y_0)$, ovvero $x_0^2 + y_0^2$. Successivamente, determiniamo l'intersezione di questi segmenti con le isocline adiacenti e utilizziamo questi punti di intersezione per reiterare il procedimento (si veda Figura 2). In questo modo, possiamo ottenere, tramite un approccio puramente grafico, selezionando un certo numero di isocline e valutando il coefficiente angolare nei punti, una successione di piccoli segmenti la cui unione fornisce un'idea qualitativa del grafico della curva integrale che passa per quel punto.

Vediamo un altro esempio: una curva integrale calcolata con il metodo dell'isocline per l'equazione

$$y' = -y.$$

In questo caso particolare, ovviamente, non sarebbe necessario ottenere una rappresentazione grafica per trovare la soluzione, poiché la EDO è un'equazione differenziale lineare omogenea. La Figura 3 mostra le isocline di questa EDO e, partendo da un punto (x_0, y_0) illustra i segmenti derivanti dal procedimento del metodo delle isocline. Partendo da $y = 1$, il primo segmento ha coefficiente angolare -1, quindi un segmento diretto come la bisettrice del secondo quadrante. La nuova isoclina è 0.8, a cui corrisponde un segmento con coefficiente angolare -0.8. Successivamente, si prosegue in maniera analoga con le isocline $0.6, 0.4, 0.2$ e così via. La Figura 3 mostra questo procedimento che descrive quindi, tramite un approccio grafico, il comportamento della curva integrale che passa attraverso un particolare punto. Inoltre, in Figura 3 è mostrata anche la curva integrale esatta. Come si nota, si ottiene sicuramente una descrizione qualitativamente accettabile della curva integrale. Dal punto di vista quantitativo, naturalmente, il risultato sarà tanto più accurato quanto più vicine saranno le isocline;

quindi, quanto più piccole saranno le lunghezze dei segmenti che andiamo a considerare. Questo processo, tuttavia, è lento e piuttosto difficoltoso, poiché richiede il calcolo di molti valori per aggiornare il comportamento e far avanzare la curva integrale.

In conclusione, riassumendo, la soluzione esatta di una EDO è facilmente ottenibile soltanto per alcune classi particolari di EDO. In altri casi, è possibile ricorrere a uno studio grafico, come ad esempio quello basato sul metodo delle isocline, che tuttavia risulta essere molto laborioso e generalmente poco accurato.