eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica

Lezione 4.4a

Il metodo delle potenze inverse e il metodo QR

Calcolo degli autovalori di una matrice

- Calcolo degli autovalori da un punto di vista numerico

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- **metodo delle potenze inverse, metodo QR**

  ✓ Potenze inverse per λ più vicino al numero μ

  ✓ Potenze inverse per λ di modulo minimo

  ✓ Trasformazioni di similitudine ed ortogonali

  ✓ Il metodo QR per determinare lo spettro di A

Calcolo degli autovalori di una matrice (potenze inverse)

- Consideriamo un numero complesso $\mu \in \mathbb{C}$, $(\mu \notin \sigma(A))$ definiamo

$$M_\mu = A - \mu I$$

- Se $\lambda_i \in \sigma(A)$, lo spettro di M_μ risulta

$$\sigma(M_\mu) = \{\lambda_1 - \mu, \ldots, \lambda_n - \mu\}$$

$$M_\mu^{-1} = (A - \mu I)^{-1}$$

$$\sigma(M_\mu^{-1}) = \{(\lambda_1 - \mu)^{-1}, \ldots, (\lambda_n - \mu)^{-1}\}$$

Autovalore di modulo massimo di M_μ^{-1} corrisponde:

$$\lambda_i \text{ t.c. } |\lambda_i - \mu| = \text{minimo}$$

Calcolo degli autovalori di una matrice (potenze inverse)

- Applicando il **metodo delle potenze** a $M_\mu^{-1} = (A - \mu I)^{-1}$

Si ottiene una success. di $\lambda^{(k)}$ che converge a
λ_i più vicino a μ

- Ponendo

$$\mu = 0 \longrightarrow M_0^{-1} = A^{-1}$$

- Supponendo che $\lambda_i \in \sigma(A)$ di modulo minimo sia unico

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2 > \ldots| \geq |\lambda_{n-1}| \boxed{>} |\lambda_n|$$

Il metodo delle potenze applicato a $M_0 = A^{-1}$ approssima
$\lambda_n \in \sigma(A)$ di modulo minimo

Calcolo degli autovalori di una matrice (potenze inverse)

- **L'algoritmo** del metodo delle potenze (inverse) a $M_\mu^{-1} = (A - \mu I)^{-1}$

$$\text{dato } \mathbf{q}^{(0)} \text{ t.c. } \|\mathbf{q}^{(0)}\|_2 = 1$$

$$k = 1, 2, \ldots \begin{cases} (A - \mu I)\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{q}^{(k-1)} \\ \mathbf{q}^{(k)} = \dfrac{\mathbf{z}^{(k)}}{\|\mathbf{z}^{(k)}\|_2} \\ \eta^{(k)} = \mathbf{q}^{(k)T} A \mathbf{q}^{(k)} \end{cases}$$

$$\neq \boxed{\mathbf{z}^{(k)} = A\mathbf{q}^{(k-1)}}$$

$$A \rightarrow (A - \mu I)^{-1}$$

- Per calcolare $\mathbf{z}^{(k)}$ è necessario risolvere un sistema lineare $\forall k$

$$(A - \mu I)\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{q}^{(k-1)}$$

- M. potenze-inverse **computazionalmente più oneroso** del M. potenze

Calcolo degli autovalori di una matrice (potenze inverse)

- Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 7.0747, \quad \lambda_2 = 3.1879, \quad \lambda_3 = -0.8868$$

- L'autovalore di modulo minimo è $\lambda_3 = -0.89 \rightarrow |\lambda_3| = 0.89$
- L'autovettore associato a λ_3 è $\mathbf{x}_3 = [0.155, -0.824, 0.545]^T$
- Partendo dal vettore $\mathbf{q}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1, 1, 1]^T$

Dopo $k = 5$ iterazioni

$$\eta^{(5)} = -0.886$$

$$\mathbf{q}^{(5)} = [0.156, -0.824, 0.544]^T$$