Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

Lezione 6.5a

Metodo del punto medio e il Metodo di Crank-Nicolson

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Metodi numerici per le E**quazioni **D**ifferenziali **O**rdinarie (EDO)

$$u_{k+1} = g(u_k, u_{k+1})$$

- Due strategie per **metodi di ordine superiore**
  - ✓ Metodo del **Punto Medio (PM)**
  - ✓ Andamento oscillante del PM
  - ✓ Formula dei Trapezi
  - ✓ **Metodo di Crank-Nicolson (CN)**

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Differenze finite in **avanti/indietro** e **centrate** $\text{Approx}[y'(x_k)]$

(DF in avanti) Differenza Finita in avanti	$$y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + O(h)$$
(DF all'indietro) Differenza Finita all'indietro	$$y'(x_k) = \frac{y_k - y_{k-1}}{h} + O(h)$$
(DF centrata) Differenza Finita centrata	$$y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O(h^2)$$

- L'utilizzo di **DF centrate** per le EDO, conducono al **Punto Medio**

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Metodo del Punto Medio (PM)** ➡ DF centrate $y'(x_k)$

$$\begin{cases} y'(x_k) = f(x_k, y_k) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} = f(x_k, u_k) \\ u_0 = y_0 \quad k = 1, \ldots, n-1 \end{array}}$$

- **Metodo di PM** si riformula (**nel metodo esplicito**)

$$\underbrace{u_{k+1} = g(u_{k-1}, u_k) \qquad g(u_{k-1}, u_k) = u_{k-1} + 2hf(x_k, u_k)}$$

$$\boxed{u_{k+1} = u_{k-1} + 2hf(x_k, u_k)} \qquad k = 1, \ldots, n-1$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- La condizione iniziale nel nodo x_0

$$u_0 = y_0$$

- ⚠ La soluzione numerica u_1 **non** può essere ricavata dal PM

$$k = 1 \quad \Rightarrow \quad u_2 = u_0 + 2hf(x_1, u_1)$$

- Metodo del PM **richiede due valori iniziali** u_{k-1}, u_k

$$u_{k+1} = g(u_{k-1}, u_k)$$

$$\Downarrow$$

Metodo del PM è un metodo a due passi
del secondo ordine

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Esempio:**

Soluzione esatta

$$\begin{cases} y'(x) = -xy(x) & x \in (0, 1.5] \\ y(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow y(x) = e^{x^2}/2$$

$I = [0, 1.5] \quad x_0 = 0,\ u_0 = 1 \quad + \quad x_1 = x_0 + h,\ u_1 \leftarrow$ Metodo di Heun

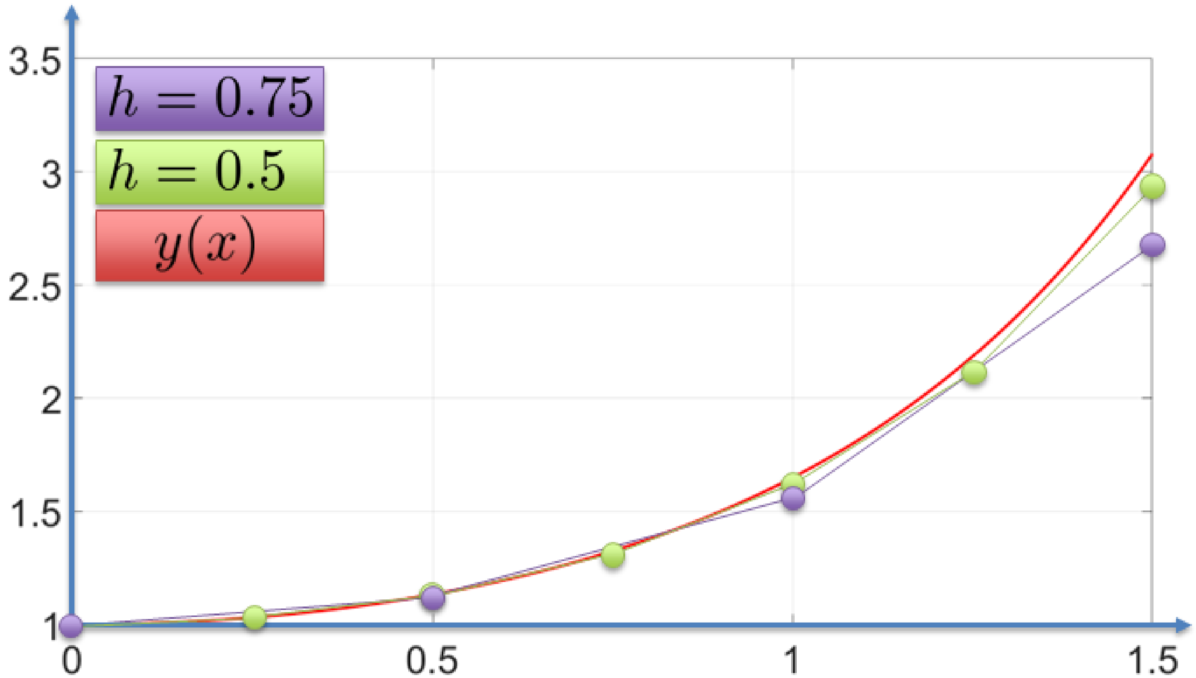
- Applicando **il metodo del Punto Medio** (PM)

$$u_{k+1} = u_{k-1} + 2hf(x_k, u_k) \qquad k \geq 1$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- L'errore di approssimazione E è <u>il massimo commesso</u> nei vari nodi

$$E = \max_{k=0,\ldots,n} \left| e^{x_k^2/2} - u_k \right|$$



h	E
0.5	0.3805
0.25	0.1305
0.125	0.0359
0.0625	0.0092

Per h che si dimezza <u>l'errore si riduce di un fattore 4</u>

(DF centrata) Differenza Finita centrata $\Rightarrow O(h^2)$