DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

Lezione 6.1b

Principi della risoluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

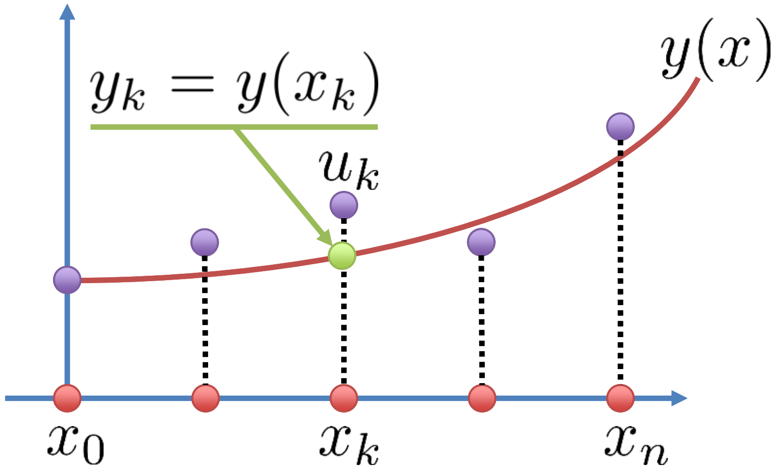
- **Risolvere numericamente una EDO** $y'(x) = f(x, y(x))$ **,** $y(x_0) = y_0$

1. **Discretizzazione dell'intervallo** I

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\}$$

2. **Soluzione numerica** $\{u_k\}$ che approssima la soluzione $y(x_k)$

$$\{u_0, u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n\}$$



- **Osservazione:** per costruzione

$$u_0 = y_0 = y(x_0)$$

- In generale, per un nodo x_k

$$u_k \simeq y_k = y(x_k)$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

Soluzione numerica $\{u_k\}$ che approssima la soluzione $y(x_k)$

Soluzioni di un problema numerico

- **Problema numerico** che costituirà un'**approssimazione della EDO**
- Calcolare il vettore $\{u_k\} \Longrightarrow u_k \simeq y_k = y(x_k)$
- **Idea:** generare un nuovo problema

$$\mathrm{Approx}[y'(x_k)] \simeq \mathrm{Approx}[f(x_k, y_k)]$$

$$k = 0, \ldots, n$$

Approssimazione del problema matematico

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

$$\text{Approx}[y'(x_k)] \simeq \text{Approx}[f(x_k, y_k)] \quad \approx \quad y'(x) = f(x, y(x))$$

1. Approssimazione della derivata prima nei nodi x_k

$$y'(x) \to \text{Approx}[y'(x_k)] \qquad k = 0, \dots, n$$

2. Approssimazione delle funzione f nei nodi (x_k, y_k)

$$f(x, y) \to \text{Approx}[f(x_k, y_k)] \qquad k = 0, \dots, n$$

➢ Obiettivo: generare una nuova equazione per ogni nodo x_k

- approssimando il <u>termine di sinistra</u> $y'(x)$
- approssimando il <u>termine di destra</u> $f(x, y)$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Prima tipologia** di approssimazione di $y'(x) = f(x, y(x))$

$$G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1}) \simeq f(x_k, y_k) \qquad k = 1, \ldots, n$$

- Termine di destra $f(x, y)$ **non viene approssimato** nei punti x_k, y_k

- Termine di sinistra $y'(x)$ tramite un termine G

$$y'(x_k) \approx G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1})$$

È possibile costruire G utilizzando
dei **rapporti incrementali (metodi di Eulero)**

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- <u>**Seconda tipologia**</u> **di approssimazione** di $y'(x) = f(x, y(x))$

$$G(y_k, y_{k+1}) \simeq F[f(x_k, y_k), f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

- <u>Termine di sinistra</u> $y'(x)$ si approssima utilizzando y_k, y_{k+1}

- <u>Termine di destra</u> $f(x, y)$ si approssima tramite F

$$f(x_k, y_k) \approx F[f(x_k, y_k), f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

$$\Downarrow$$

metodo dei Trapezi

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

➢ Nelle espressioni **1.** e **2.** compare ancora la soluzione esatta $y_k = y(x_k)$

1. $G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1}) \boxed{\simeq} f(x_k, y_k)$

2. $G(y_k, y_{k+1}) \boxed{\simeq} F[f(x_k, y_k), f(x_{k+1}, y_{k+1})]$

➢ Si vuole assumere queste espressioni nel metodo numerico, allora

Soluzione numerica $u_k \longrightarrow y_k$ **Soluzione esatta**

$G(u_{k-1}, u_k, u_{k+1}) \boxed{=} f(x_k, u_k)$

$G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1}) \boxed{\simeq} f(x_k, y_k)$

$= \longrightarrow \simeq$

Soluzione numerica
risolve esattamente 1. e 2.