eCAMPUS UNIVERSITÀ | DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.4b

Metodi iterativi classici: Jacobi e Gauss-Seidel

Risoluzione di sistemi lineari (metodo di Jacobi)

- Il metodo di Jacobi è così riassunto

$$A = D + E + F$$

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = (D - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \qquad k \geq 0$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad i = 1, \ldots, n, \; k \geq 0$$

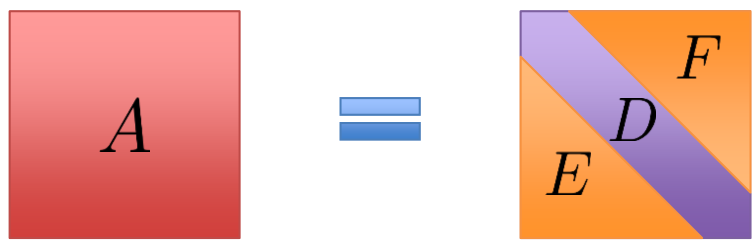
$$B_J = -D^{-1}(E + F) \qquad \rho(B_J) < 1$$

Risoluzione di sistemi lineari (generalizzazione di Jacobi)

- Generalizzare il metodo di Jacobi ad altri metodi iterativi
- Prima generalizzazione: **metodo di Gauss-Seidel (GS)**

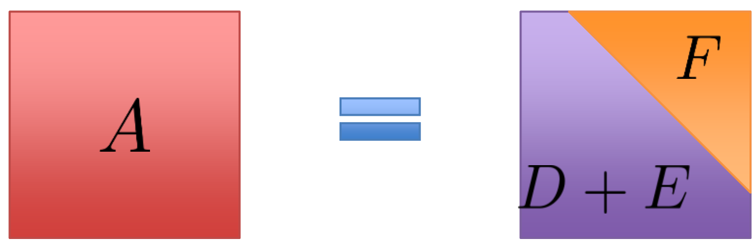
$$A = D + E + F \qquad A = P - N$$

Metodo di Jacobi



$$\boxed{P = D}$$
$$\boxed{N = -(E + F)}$$

Metodo di GS



$$\boxed{P = D + E}$$
$$\boxed{N = -F}$$

Risoluzione di sistemi lineari (successione di GS)

- Le matrici di splitting del metodo di GS sono

$$A = \boxed{P}\boxed{-\ N} \qquad A = \boxed{D + E}\boxed{+\ F}$$

$$\Rightarrow \quad P = D + E \qquad N = D - A = -F$$

- La successione iterativa di GS

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \qquad k \geq 0$$

Dato $\mathbf{x}^{(0)}$, si generi una successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ risolvendo

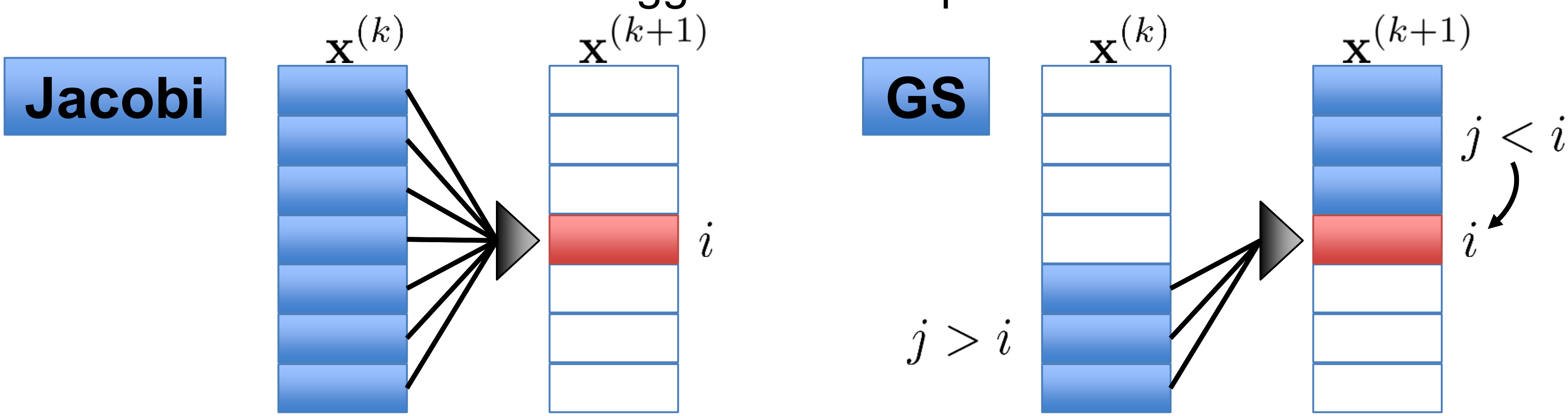
$$(D + E)\mathbf{x}^{(k+1)} = -F\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \qquad k \geq 0$$

Risoluzione di sistemi lineari (iterazioni di GS)

- Riscrivendo per componenti la $(D+E)\mathbf{x}^{(k+1)} = -F\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)}}_{\text{Termine «nuovo» rispetto a Jacobi}} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad i = 1, \ldots, n, \; k \geq 0$$

- Termine rappresenta le componenti già calcolate $j = 1, \cdots, i-1$
- GS ha una dinamica di aggiornamento più sofisticata di Jacobi



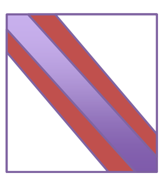
Risoluzione di sistemi lineari (convergenza di GS)

- La matrice di iterazione $B = P^{-1}N$ del metodo di GS è

$$\boxed{B_{GS} = -(D+E)^{-1}F}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x} \iff \|B_{GS}\| < 1 \iff \rho(B_{GS}) < 1$$

- Condizioni sufficienti che garantisco la convergenza di GS:
  - ✓ Matrici a dominanza diagonale stretta ← **anche per Jacobi**
  - ✓ Matrici simmetriche e definite positive (SDP)
  - ✓ Matrici SDP e tridiagonali



$$\Rightarrow \quad \rho(B_{GS}) = [\rho(B_J)]^2$$

GS più «veloce» Di Jacobi