eCAMPUS UNIVERSITÀ | DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica

Lezione 4.2a

Localizzazione degli autovalori

Calcolo degli autovalori di una matrice

- Localizzazione degli autovalori

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- Strumenti per localizzare $\lambda \in \mathbb{C}$ nel piano complesso

  ✓ Localizzazione sulla **norma**

  ✓ Localizzazione sulla matrice **simmetrica e antisimmetrica**

  ✓ **Cerchi riga e cerchi colonna**

  ✓ **Teorema di Gershgorin**

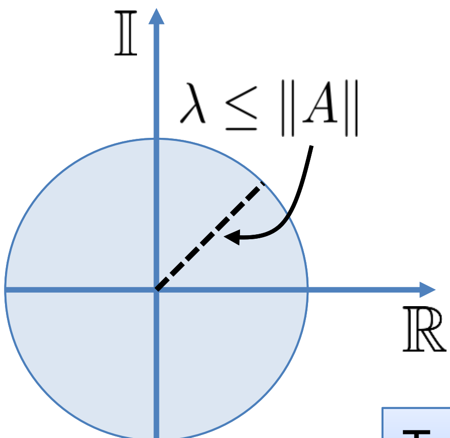
Calcolo degli autovalori di una matrice (localizzazione)

- Per il raggio spettrale $\rho(A)$ vale

Massimo dei moduli degli autovalori

$$\max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| = \rho(A) \leq \|A\|$$

Minore o uguale della norma di A



$$\lambda \leq \|A\| \qquad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

$\sigma(A)$ spettro di A

Tutti gli autovalori $\lambda \in \mathbb{C}$ di A sono all'interno del cerchio del piano complesso di raggio $\|A\|$

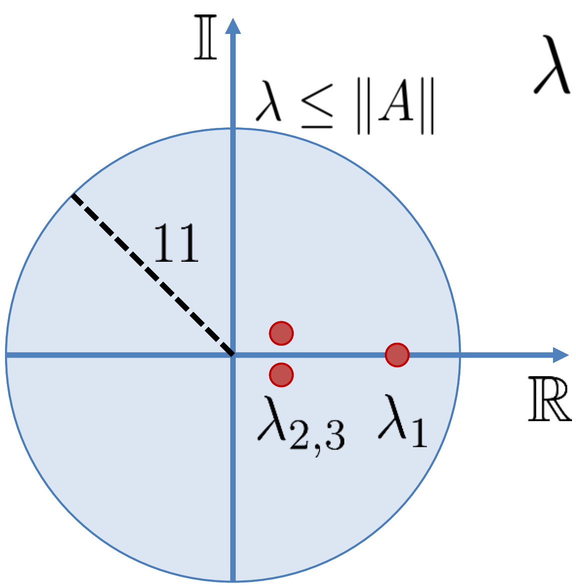
- Strumento per la ricerca degli autovalori $\lambda \in \mathbb{C}$ di A

Calcolo degli autovalori di una matrice (localizzazione)

- Esempio

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 11 & 5 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \lambda_1 = 9.69, \quad \lambda_{2,3} = 2.66 \pm i0.69$$

- Norma 1 = massimo delle somme dei valori assoluti delle colonne



$$\lambda \leq \|A\|_1 = 11 \qquad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

$$\boxed{\lambda \leq 11 \qquad \forall \lambda \in \sigma(A)}$$

$$\lambda_1 = 9.69$$

Calcolo degli autovalori di una matrice (localizzazione)

- Secondo risultato di localizzazione **più raffinato**
- Introduciamo A_S e A_{SS}

$A_S = A_S^T$ Parte simmetrica

Parte antisimmetrica $A_{SS} = -A_{SS}^T$

$$A_S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) \qquad A_{SS} = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\lambda \in \mathbb{I}$

Consente di analizzare separatamente le componenti della matrice A

$$A = A_S + A_{SS}$$

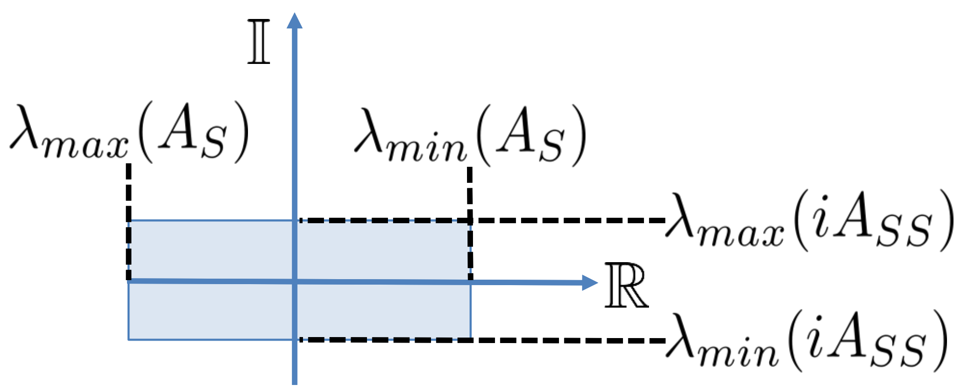
Calcolo degli autovalori di una matrice (localizzazione)

- Dalle informazioni sugli autovalori di $A = A_S + A_{SS}$

$$A_S = A_S^T \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \qquad A_S = -A_S^T \longrightarrow \lambda \in \mathbb{I}$$

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_{min}(A_S) \leq Re(\lambda(A)) \leq \lambda_{max}(A_S) \\ \lambda_{min}(iA_{SS}) \leq Im(\lambda(A)) \leq \lambda_{max}(iA_{SS}) \end{aligned}$$

<u>Limita la ricerca</u> degli autovalori a fasce verticali ed orizzontali del piano complesso



Calcolo degli autovalori di una matrice (localizzazione)

- Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 9.69, \quad \lambda_{2,3} = 2.66 \pm i0.69$$

$$A_S = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right) = \begin{pmatrix} 10 & 0.5 & 1.5 \\ 0.5 & 2 & 0 \\ 1.5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_{SS} = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1.5 & 1.5 \\ -1.5 & 0 & -1 \\ -1.5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{1,S} = 1.96, \quad \lambda_{2,S} = 2.71, \quad \lambda_{3,S} = 10.34 \qquad \lambda_{1,SS} = 0, \; \lambda_{2,SS} = i2.35, \; \lambda_{3,SS} = -i2.35$$

$$\lambda_{max}(A_S) = 10.34$$
$$\lambda_{min}(A_S) = 1.96$$

$$\lambda_{max}(iA_{SS}) = 2.35$$
$$\lambda_{min}(iA_{SS}) = -2.35$$

Calcolo degli autovalori di una matrice (localizzazione)

- Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{max}(A_S) = 10.34$$
$$\lambda_{min}(A_S) = 1.96$$

$$\lambda_{max}(iA_{SS}) = 2.35$$
$$\lambda_{min}(iA_{SS}) = -2.35$$

$$\lambda_1 = 9.69,$$
$$\lambda_{2,3} = 2.66 \pm i0.69$$