# RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Condizione di risolubilità del problema di Cauchy)

In questa lezione proseguiamo con la trattazione delle equazioni differenziali ordinarie (EDO) del primo ordine di tipo omogeneo. In particolare, vediamo come operare, trasformando le variabili, per arrivare a una rappresentazione della soluzione. Successivamente, caratterizzeremo le condizioni generali che permettano di garantire l'esistenza e, possibilmente, l'unicità della soluzione di un generico problema di Cauchy.

Iniziamo riprendendo la trattazione delle EDO del primo ordine di tipo omogeneo, le quali sono espresse nella seguente forma

$$y' = f(x, y) = f(\alpha x, \alpha y).$$

Inoltre, se scegliamo $\alpha$

$$\alpha = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0,$$

supponendo $x$ non nullo, possiamo riscrivere l'equazione nella seguente forma

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Introduciamo ora una nuova funzione incognita $v$

$$v = \frac{y}{x} \qquad \text{nuova funzione incognita.}$$

In questo modo, l'equazione diventa

$$y' = f(1, v).$$

Cerchiamo ora di esprimere il termine di sinistra $y'$ in funzione di $v$. Allora, dato che

$$v = \frac{y}{x} \;\Rightarrow\; y = vx,$$

e derivando $y = vx$ rispetto a $x$, possiamo rappresentare l'equazione interamente nella variabile $v$

$$y = vx \;\Rightarrow\; y' = v'x + v,$$

da cui, essendo $y' = f(1, v)$, troviamo

$$v'x + v = f(1, v).$$

Abbiamo quindi trovato una nuova equazione, che non dipende più da $y$, ma dalla nuova variabile $v$ che abbiamo introdotto. Riscrivendo questa nuova equazione, osserviamo che

$$x\frac{dv}{dx} = f(1, v) - v = F(v),$$

dove abbiamo esplicitato la derivata $v'$ e abbiamo portato a destra la dipendenza da $v$. Osserviamo che l'espressione che abbiamo a destra dell'uguale dipende solo dalla $v$. Quindi possiamo ridefinire tutto il termine di destra come $F(v)$, ottenendo questa nuova rappresentazione

$$x\frac{dv}{dx} = F(v),$$

la quale ci fa scoprire che possiamo ridurre l'equazione differenziale omogenea considerata ad una nuova equazione differenziale a variabili separabili. Possiamo quindi isolare la $v$ a sinistra e la $x$ a destra

$$\frac{dv}{F(v)} = \frac{dx}{x},$$

e applicare la procedura di risoluzione delle equazioni a variabili separabili
$$\int \frac{dv}{F(v)} = \int \frac{dx}{x} + C,$$
e concludere che la primitiva di $1/F(v)$ è uguale alla primitiva di $1/x$, a meno di una costante $C$ che deriva dal processo di integrazione.
Il vantaggio di questa trasformazione di variabili è stato quello di ridurre un'equazione omogenea arbitraria a un'equazione a variabili separabili, per la quale esiste una tecnica di risoluzione ben definita.
Consideriamo adesso un esempio di equazione omogenea
$$y' = \frac{y-x}{y+x},$$
che possiamo riscrivere, mettendo in evidenza $y/x$, nel seguente modo
$$y' = \frac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}.$$
Introducendo la nuova variabile $v = y/x$, da cui $y' = (vx)'$, e ripetendo la derivazione vista in precedenza, troviamo
$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{v-1}{v+1},$$
da cui
$$x\frac{dv}{dx} = \frac{v-1}{v+1} - v = -\frac{v^2+1}{v+1}.$$
Essendo questa EDO a variabili separabili, possiamo applicare le relative tecniche risolutive, da cui
$$\int \frac{v+1}{v^2+1}dv = -\int \frac{1}{x}dx + C.$$
Separando in due termini l'integrale di sinistra e integrando l'integrale di destra, troviamo che
$$\int \frac{v}{v^2+1}dv + \int \frac{1}{v^2+1}dv = -\log|x| + C.$$
I due integrali a sinistra dell'uguale sono adesso di facile integrazione. Il primo integrale è
$$\int \frac{v}{v^2+1}dv = \frac{1}{2}\int \frac{2v}{v^2+1}dv = \frac{1}{2}\int \frac{\xi'(v)}{\xi(v)}dv = \frac{1}{2}\log(v^2+1),$$
dove abbiamo moltiplicato e diviso per 2, posto $\xi(v) = v^2 + 1$ e sfruttato la proprietà dell'integrazione di funzioni composte, tenendo conto che il numeratore è la derivata del denominatore. Il secondo è un integrale notevole
$$\int \frac{1}{v^2+1}dv = \operatorname{atan} v.$$
In definitiva, abbiamo quindi trovato che
$$\frac{1}{2}\log(v^2+1) + \operatorname{atan} v = -\log|x| + C,$$
da cui sostituendo $v = y/x$, si ricava
$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) + \operatorname{atan}\frac{y}{x} = -\log|x| + C.$$
Attraverso alcune semplici manipolazioni algebriche, segue che
$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - \frac{1}{2}\log x^2 + \operatorname{atan}\frac{y}{x} = -\log|x| + C,$$

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)-\log|x|+\operatorname{atan}\frac{y}{x}=-\log|x|+C,$$
$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+\operatorname{atan}\frac{y}{x}=C.$$

Dunque, abbiamo trovato la seguente relazione

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)+\operatorname{atan}\frac{y}{x}=C,$$

che lega la soluzione $y$ incognita della equazione omogenea in esame alla variabile indipendente $x$. Se vogliamo risolvere il problema di Cauchy, dovremo specificare il valore di $y$ in un determinato punto dell'insieme di definizione, così da determinare la costante $C$.

A questo punto, possiamo osservare che siamo riusciti a derivare una formula implicita per la soluzione $y(x)$. Tuttavia, questa formula non è esplicita, in quanto non siamo in grado di esprimere $y(x)$ come una funzione esplicita di $x$. Quello che abbiamo ottenuto è una relazione di tipo funzionale, anziché una relazione integrale. Indubbiamente, abbiamo semplificato il problema, poiché siamo partiti da una relazione differenziale del tipo $y'=f(x,y(x))$ e abbiamo trasformato il problema in una relazione funzionale che mette in relazione $x$ e $y$. Tuttavia, tale relazione funzionale è di natura implicita, in quanto lega $y$ a $x$, ma non consente di esprimere $y$ in forma esplicita come funzione di $x$. La conclusione, pertanto, è che non siamo in grado, in questo caso, di esplicitare la relazione

$$y=y(x)\ \ ?\ \ \text{Impossibile !}$$

In altre parole, non siamo in grado di ricavare, come fatto finora, l'espressione della funzione incognita $y$ in termini della variabile $x$. Questa rappresentazione esplicita risulta, pertanto, impossibile da ottenere.

Questo è solo un esempio, ma non l'unico. Esistono numerosi casi di equazioni differenziali che non possono essere risolte in maniera esplicita. Sebbene sia possibile trasformarle in relazioni funzionali, la dipendenza di $y$ da $x$ non può essere espressa in forma esplicita. Di conseguenza, si ottiene una relazione non lineare tra $y$ ed $x$, che non può essere rappresentata esplicitamente.

Questo ci porterà, quindi, ad introdurre i metodi numerici di risoluzione delle EDO, poiché grazie a questi metodi è sempre possibile ottenere una soluzione (seppur approssimata) del problema, indipendentemente dal tipo di equazione differenziale di partenza, anche quando si trattano equazioni notevolmente più complesse rispetto a quelle finora analizzate.

Poiché intendiamo orientare la nostra analisi verso l'introduzione di metodi numerici per la risoluzione di qualunque tipo di EDO, è fondamentale assicurarci che l'equazione differenziale che considereremo possieda una soluzione. Pertanto, siamo interessati a caratterizzare le condizioni generali che permettano di garantire l'esistenza e, possibilmente, l'unicità della soluzione. A tal fine, discuteremo ora delle condizioni di risolubilità del problema di Cauchy.

Ricordiamo che un problema di Cauchy in forma generale è

$$\begin{cases} y'(x)=f(x,y(x)) & \forall x\in I \\ y(x_0)=y_0 & x_o\in I \end{cases}.$$

dove

$$y: I\to\mathbb{R},$$

è la funzione incognita, ed

$$f: I\times\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},$$

è una funziona assegnata. Infine, il dato iniziale è $y_0$, ovvero il valore di $y$ che si ottiene in corrispondenza del valore iniziale $x_0$.

Risolvere il problema di Cauchy implica determinare la funzione $y$ che costituisce una soluzione particolare dell'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = f(x, y(x))$. In particolare, l'obiettivo è selezionare la soluzione particolare che, nel punto $x_0$, assume il valore $y_0$.
Cercare le condizioni generali che garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione significa determinare le condizioni su $f$ (essendo $f$ l'unico elemento libero nella forma generale $y' = f(x, y(x))$) per assicurare appunto l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema. Questa caratterizzazione di $f(x, y)$ si basa sulle seguenti due condizioni

1. la funzione $f(x, y)$ è continua rispetto ai suoi argomenti, ossia sia rispetto alla variabile x che alla variabile y;
2. la funzione $f(x, y)$ è lipschitziana in $y$, ovvero esiste una costante $L > 0$ positiva, tale che
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \forall x \in I, \forall y_1, y_2,$$
dove $y_1$ e $y_2$ sono due valori arbitrari della variabile dipendente $y$.

Se queste ipotesi (di continuità e lipschitzianità) sono verificate, allora la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x_o \in I' \end{cases}$$
esiste ed è unica. In altri termini, esiste una soluzione $y(x)$ che soddisfa questo problema $\forall x \in I$ e per ogni valore $x_0$ fissato in $I$, ovvero per ogni condizione iniziale assegnata.
In conclusione, se verifichiamo che $f$ soddisfi queste proprietà di continuità e lipschitzianità, possiamo essere certi che il problema avrà una soluzione unica nell'intervallo di definizione $I$.
Passiamo ora a esaminare un esempio che abbiamo già considerato in precedenza
$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) & x \in (0, 1.5) \\ y(0) = 1 \end{cases},$$
La soluzione di questo problema è data da
$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.$$
In questo caso la funzione $f(x, y)$ è
$$f\big(x, y(x)\big) = xe^{\frac{x^2}{2}}$$
La Figura 2 mostra l'andamento della funzione $f$ e della soluzione $y$ di questo specifico problema di Cauchy.
Essendo
$$f(x, y) = xy,$$
segue che la funzione $f$ è sicuramente continua rispetto ad entrambi gli argomenti ($x$ e $y$), poiché, rispetto a $x$, è una funzione lineare (quindi una retta e pertanto continua per $y$ fissato), e simmetricamente, rispetto a $y$, è anch'essa una retta per $x$ fissato. Inoltre, $f(x, y)$ è anche lipschitziana nell'intervallo di integrazione $I = [0,1.5]$. Infatti, possiamo verificare che
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \forall x \in I, \forall y_1, y_2,$$
e quindi
$$|xy_1 - xy_2| \leq \max_{x \in I}|x|\,|y_1 - y_2| = 1.5|y_1 - y_2| \qquad \forall x \in I, \forall y_1, y_2,$$

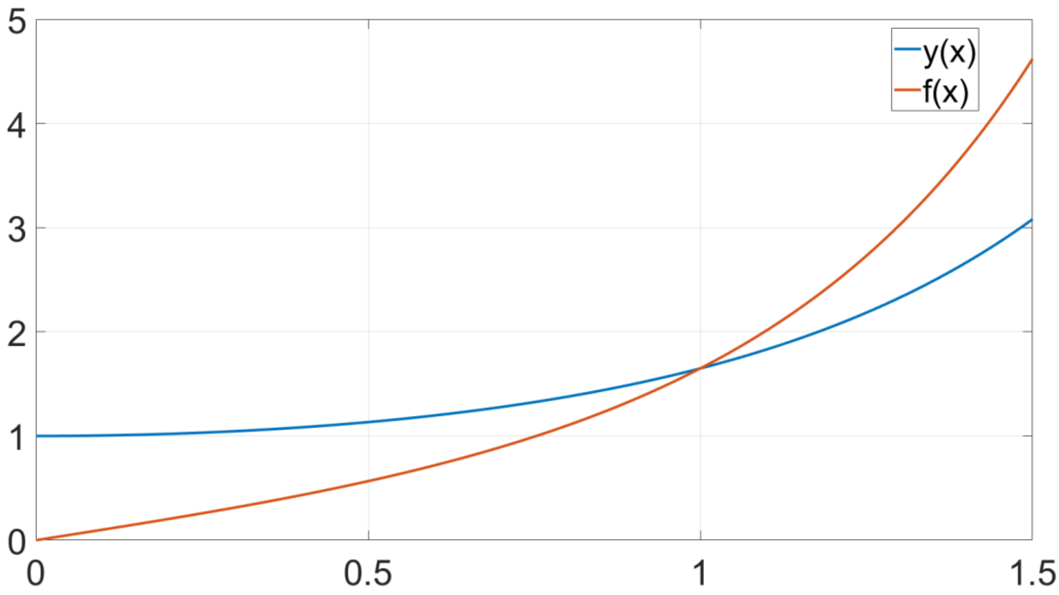


*Figura 1: Rappresentazione della funzione $f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$ e della soluzione $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ in [0,1.5].*

dove abbiamo raccolto, e portato fuori dal modulo, il massimo valore di $x$. Inoltre, poiché l'intervallo di integrazione è $I = [0,1.5]$, il massimo valore assoluto di $x$ su questo intervallo è 1.5. Pertanto, il valore 1.5 funge da costante $L$. In questo caso, la costante $L$ coincide con il secondo estremo dell'intervallo $I$. Ovviamente, questo rappresenta un caso particolare.
Abbiamo quindi trovato una costante $L = 1.5$ tale per cui, su tutto l'intervallo $I$, vale

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \qquad \forall x \in I, \forall y_1, y_2.$$

Pertanto, la funzione $f$ è lipschitziana rispetto al secondo argomento $y$ e, essendo anche continua rispetto a $x$ e $y$, possiamo concludere che il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione nell'intervallo $I$.
Per funzioni $f$ più elaborate, la verifica della proprietà di lipschitzianità potrebbe non essere semplice. Tuttavia, possiamo fare riferimento a un'altra proprietà che ci garantisce la lipschitzianità: la derivabilità della funzione $f$. Se $f$ è derivabile e la sua derivata rispetto a $y$ è continua e limitata su un intervallo, allora $f$ risulta lipschitziana su tale intervallo

$$Se\ f \in \mathrm{C}^1 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è lipschitziana,}$$

dove $\mathrm{C}^1$ è l'insieme delle funzioni continue che ammettono derivata prima continua. Infatti, applicando il teorema del valore medio per una funzione $f(t)$ di una variabile reale $t$

$$\exists t \in (t_1, t_2) \quad | \quad |f(t_2) - f(t_1)| = |f'(t)(t_2 - t_1)|,$$

da cui, prendendo il massimo del valore assoluto di $f'(t)$ (in quanto se $f$ è $\mathrm{C}^1$ il massimo esiste ed è limitato perché siamo su un intervallo limitato), troviamo

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq \max_t |f'(t)| \, |f'(t)(t_2 - t_1)|,$$

da cui ponendo

$$L = \max_t |f'(t)|,$$

che gioca il ruolo della costante di Lipchitz, ricaviamo

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq L|f'(t)(t_2 - t_1)|.$$

Questo dimostra che, se $f$ è una funzione di classe $C^1$ rispetto a $y$, allora $f$ è lipschitziana rispetto alla variabile $y$. Pertanto, in generale, per verificare la lipschitzianità della funzione $f$, sarà sufficiente accertarsi che $f$ sia derivabile con derivata prima continua rispetto al secondo argomento, ossia rispetto a $y$. Questa ipotesi è una condizione sufficiente, ma non necessaria. In altri termini, è possibile che una funzione sia lipschitziana senza essere differenziabile, ma se la funzione è differenziabile, allora questa informazione è sufficiente per concludere che $f$ è lipschitziana.