RADICI DI EQUAZIONI NON LINEARI (Ordine di convergenza di un metodo iterativo)

In questa lezione analizzeremo in modo rigoroso la velocità di convergenza dei metodi studiati nelle lezioni precedenti, caratterizzandoli in base al loro ordine. L'ordine di un metodo è strettamente legato alla sua velocità di convergenza e rappresenta un aspetto fondamentale nella valutazione dell'efficacia di un algoritmo. Introdurremo quindi il concetto generale di ordine di un metodo iterativo nell'approssimazione di una radice α.

Definiamo ora il concetto di velocità di convergenza e ordine di un metodo numerico. Consideriamo una successione $\{x_n\}$ che converge a α. È importante sottolineare che non è necessario che questa successione provenga da uno dei metodi analizzati in precedenza; la definizione è di carattere generale. Diremo che la successione converge a α con ordine uno se esiste una costante $c < 1$ tale che

$$|\ \alpha - x_{n+1}\ | \leq c\ |\ \alpha - x_n\ | \text{ per ogni } n \geq \bar{n}.$$

Stiamo quindi affermando che, a partire da un certo indice $\bar{n}$, ossia per valori sufficientemente grandi dell'indice di iterazione, l'errore all'iterazione $n+1$ è minore o uguale all'errore nella iterazione precedente, moltiplicato per una costante $c < 1$. In altre parole, stiamo indicando che l'errore diminuisce a ogni iterazione. In questo caso, diremo che la successione converge con ordine uno. Il valore di $c \in (0,1)$ (sempre positivo essendo il rapporto di due quantità positive), fornisce una misura della velocità di convergenza. Intuitivamente, più piccolo è c, quindi più vicino a zero, più rapida sarà la convergenza. Al contrario, più c si avvicina a uno, più la convergenza sarà lenta.

Se vogliamo una successione $\{x_n\}$ che converga con un ordine maggiore di uno, possiamo definire il suo ordine $p > 1$ come segue. Esiste una costante $c > 0$ tale che

$$|\ \alpha - x_{n+1}\ | \leq c\ |\ \alpha - x_n\ |^p \text{ per ogni } n \geq \bar{n}$$

È chiaro, quindi, che più grande è p, maggiore sarà la velocità di convergenza della successione verso la soluzione del problema. In altre parole, con un ordine di convergenza maggiore, l'approssimazione della radice diventa molto più rapida.

Vediamo ora come si comportano i metodi analizzati in precedenza, per la ricerca degli zeri di funzioni non lineari, in termini di ordine di convergenza, ossia per quanto riguarda p. È importante sottolineare che ciò è valido se x_0 è sufficientemente vicino a α; se si parte troppo lontani da α, il comportamento potrebbe essere diverso. Quindi tutti questi metodi sono locali.

- Il metodo di bisezione e il metodo delle corde convergono linearmente con $p = 1$ (convergenza lineare).
- Il metodo delle secanti converge con p>1, in particolare con $p \simeq 1.63$. Notiamo inoltre che il metodo delle secanti richiede due punti di partenza, e quindi entrambi devono essere vicini alla radice. Inoltre, è necessario che si verifichi $f'(\alpha) \neq 0$ (cioè, α sia una radice semplice) affinché si abbia una convergenza super-lineare.

- Il metodo di Newton, nelle stesse ipotesi (vicinanza del punto iniziale e radice semplice, ovvero $f'(\alpha)$, converge con ordine $p = 2$ (convergenza quadratica).

Esaminiamo ora come caratterizzare la convergenza delle iterazioni di punto fisso e determinare la velocità di convergenza. In particolare, ci concentreremo sui fattori geometrici che permettono di descrivere con precisione la rapidità con cui questa successione converge verso il punto fisso α.
Sotto le ipotesi del Teorema di Esistenza dei punti fissi,

$$Se\ g(x) \text{ è continua e } g(I) \subset I\ allora\ \exists \alpha \in I\ t.c.\ g(\alpha) = \alpha$$
$$Se\ \exists g'(x)\ e\ |g'(x)| \leq K < 1\ in\ I\ allora\ \exists!\, \alpha \in I\ t.c.\ g(\alpha) = \alpha$$

allora le interazioni di punto fisso convergono ad α (unico punto fisso di g nell'intervallo I). Inoltre, si ha questo rapporto di limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = g'(\alpha).$$

Infatti, si può dimostrare che il limite di $\frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n}$ per $n \to \infty$ è esattamente uguale al valore della derivata prima di g nel punto fisso α. Se passiamo dalla relazione di limite ad una relazione diciamo asintotica (cioè, per un n sufficientemente grande, $n \geq \bar{n}$) è chiaro che avremo

$$\frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} \simeq g'(\alpha) => \ \alpha - x_{n+1} \simeq g'(\alpha)\,(\alpha - x_n)$$

quindi siamo in presenza di una relazione di convergenza del tipo di quella che abbiamo definito essere una relazione di convergenza lineare. In altri termini, stiamo dicendo che le interazioni di punto fisso convergono al punto fisso dell'applicazione g linearmente. Inoltre, $g'(\alpha)$ sta giocando il ruolo che giocava la nostra costante c nella definizione vista in precedenza per i metodi per le radici di equazioni non lineari.
Il metodo di punto fisso è un metodo di ordine 1, ovvero converge linearmente, con $c = g'(\alpha)$. Più $g'(\alpha)$ è piccolo in valore assoluto, più rapidamente avremo convergenza. Possiamo chiederci, cosa succede quando $g'(\alpha) = 0$. In questo caso si può verificare che il metodo di punto fisso è di ordine 2 (cioè, converge quarticamente), ovvero

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq cost(\alpha - x_n)^2$$

Quindi, in definitiva abbiamo visto che le interazioni di punto fisso per la ricerca dei punti fissi definiscono una successione convergente di ordine uno nell'ipotesi del Teorema di esistenza dei punti fissi. Inoltre, la successione diventa di ordine due nel caso in cui $g'(\alpha) = 0$. In definitiva, abbiamo dimostrato che le interazioni di punto fisso convergono al punto fisso dell'applicazione g linearmente. Inoltre, sussiste la relazione

$$|\ \alpha - x_{n+1}\ | \leq g'(\alpha)\ |\ \alpha - x_n\ | \text{ per ogni } n \geq \bar{n}.$$

dove $g'(\alpha)$ gioca il ruolo che giocava la costante c nella definizione vista per i metodi per la ricerca delle radici di equazioni non lineari. Quindi, il metodo di punto fisso è un metodo di ordine 1, ovvero converge linearmente, con $c = g'(\alpha)$. Inoltre, se $g'(\alpha) = 0$, si può verificare che il metodo di punto fisso è di ordine 2 (cioè, convergenza quadratica), ovvero

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq cost(\alpha - x_n)^2$$

Quindi, in conclusione abbiamo mostrato che le interazioni di punto fisso definiscono una successione convergente di ordine 1, sotto le ipotesi del Teorema di esistenza dei punti fissi. Inoltre, la successione diventa di ordine 2 nel caso in cui $g'(\alpha) = 0$.

Vediamo di seguito alcuni esempi di convergenza che effettivamente mettono in evidenza questi comportamenti.

CASO 1: Vediamo un caso (si veda Figura 1, Caso 1) in cui $0 < g'(\alpha) < 1$. Se partiamo da un certo valore (x_1) della variabile, procedendo con le iterazioni di punto fisso, andiamo sulla curva, poi sulla bisettrice e torniamo verso l'asse reale, trovando (x_2). Rifacciamo lo stesso procedimento, trovando (x_3). Come si vede, questo è un caso in cui stiamo convergendo in maniera monotona al punto fisso α. Ovvero più interazioni facciamo, più ci avviciniamo alla soluzione, anche in segno: il segno dell'errore resta costante, e, in particolare, è sempre positivo: $|\alpha - x_1| > |\alpha - x_2| > |\alpha - x_3| > 0$.

CASO 2: vediamo cosa succede quando $-1 < g'(\alpha) < 0$, ovvero negativo (si veda Figura 1, Caso 2). In questo caso, g è una funzione decrescente. Vediamo le interazioni di punto fisso in questo caso: partiamo da (x_1), andiamo sulla curva, andiamo sulla bisettrice e poi torniamo sull'asse x: questo sarà il punto (x_2). Poi ritorniamo sulla curva, andiamo sulla bisettrice e ritorniamo sull'asse reale, trovando il punto (x_3). Vediamo che la convergenza è ancora soddisfatta, perché siamo nelle condizioni di garantire la convergenza, ma non è più monotona. In effetti osserviamo che una iterata sta a destra di α e la seguente sta a sinistra di α, e la seguente ancora sta a destra e così via. Quindi c'è un comportamento di convergenza oscillante rispetto alla posizione del punto fisso.

Abbiamo dunque visto due esempi in cui per entrambi i casi la convergenza è garantita, perché per entrambi $|g'(x)| < 1$, ma abbiamo visto che in funzione del segno di $g'(\alpha)$ la convergenza può essere monotona oppure non monotona.

Vediamo adesso cosa succede quando la convergenza non esiste, quindi quando $|g'(x)| > 1$. Vediamo ancora geometricamente su alcuni casi cosa può succedere.

CASO 3: Riferendoci alla Figura 2 (Caso 3), notiamo che questo è un esempio nel quale ci aspettiamo una non convergenza perché il punto fisso α esiste, ma notiamo che $|g'(\alpha)| > 1$. In questo caso specifico è anche maggiore di 1 come segno: $g'(\alpha) > 1$. Partiamo da un valore già molto vicino al valore α; quindi, ci aspetteremo di convergere intuitivamente al punto α, ma la teoria ci dice in questo caso che non possiamo convergere. In effetti, applicando le iterazioni di punto fisso in questo caso si trovano i punti $(x_1), (x_2), (x_3)$. Osserviamo che non solo non convergiamo, ma addirittura ci allontaniamo in maniera monotona: cioè, ad ogni passo stiamo generando un errore sempre più grande.

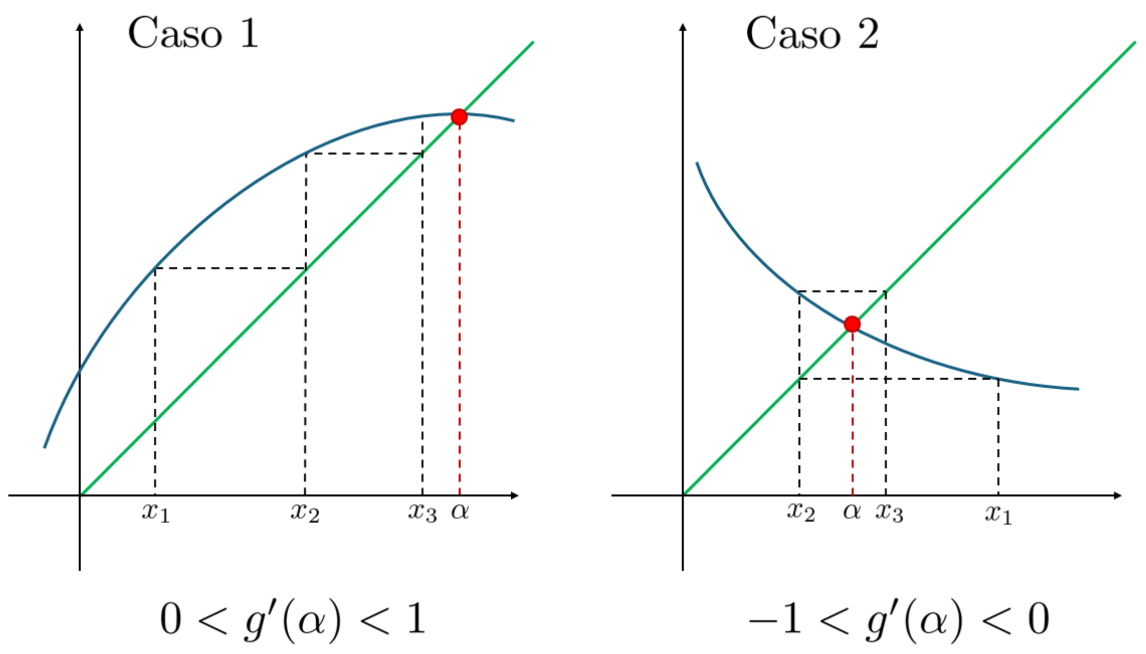

Figura 1: Caso 1 con $g'(\alpha) \in (0,1)$ e Caso 2 con $g'(\alpha) \in (-1,0)$.

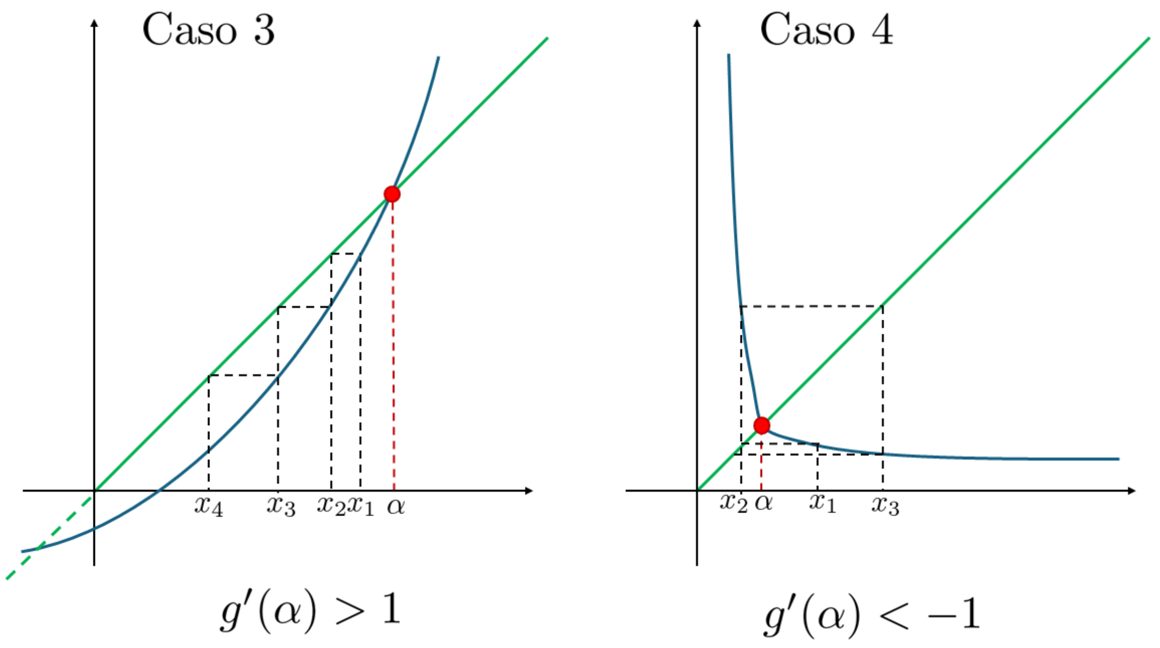

Figura 2: Caso 3 con $g'(\alpha) > 1$ e Caso 4 con $g'(\alpha) < -1$.

rispetto ad α. In effetti se calcolassimo ulteriori interazioni, ci accorgeremmo che andremo a convergere all'altro punto fisso. Se si prolunga idealmente la bisettrice, vedremo che stiamo convergendo verso un secondo punto fisso. In questo secondo punto fisso la g' ha un buon valore, ovvero $|g'| < 1$ e quindi ci aspettiamo convergenza. Questo è un caso esemplare in cui si vede che, se abbiamo due punti fissi, uno che attrae le interazioni (ovvero un punto fisso nel quale $|g'(\alpha)| < 1$), e l'altro che respinge le interazioni (ovvero un punto fisso nel quale $|g'(\alpha)| > 1$), se anche partissimo arbitrariamente vicini al punto fisso che respinge le iterazioni, ci accorgeremmo di convergere all'altro punto fisso, ovvero il primo punto fisso che attrae le iterate. Questo è conseguenza del fatto che abbiamo caratterizzato matematicamente in maniera precisa la proprietà di convergenza riconducendola al valore della derivata prima della funzione g nel punto fisso.

CASO 4: Vediamo adesso un ultimo esempio (si veda Figura 3, Caso 4), sempre di non convergenza: abbiamo un $g'(\alpha) < -1$, quindi in valore assoluto più grande di uno. La curva è decrescente e molto pendente in prossimità di α. In effetti la derivata prima nel punto fisso α è minore di -1, quindi ci aspettiamo una non convergenza. Vediamo che partendo da (x_1), un valore iniziale molto vicino al punto fisso, la nostra successione progressivamente si allontana dal punto fisso α. Più interazioni facciamo, più ci allontaniamo dal punto fisso. In questo caso riusciamo a caratterizzare il comportamento di non convergenza ancora una volta in funzione del segno della derivata prima di g nel punto α.