



eCAMPUS
UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistemi lineari

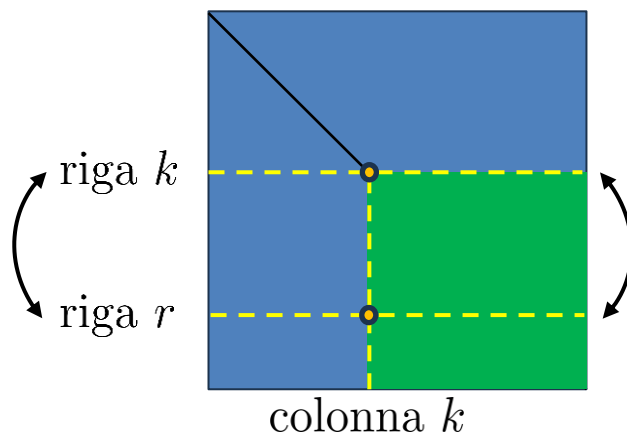
Lezione 2.6b

Tecniche di Pivotazione

Risoluzione di sistemi lineari (Pivotazione Parziale)

- **Pivotazione Parziale:** serve per evitare $a_{kk}^{(k)} = 0$,
- Prima del passaggio da $A^{(k)} \rightarrow A^{(k+1)}$ si cerca $r \geq k$ t.c.
$$|a_{rk}^{(k)}| = \max_{k \leq s \leq n} |a_{sk}^{(k)}|$$
- Si scambiano tra loro le righe r -esima e k -esima

Passo k
del MEG



$|a_{rk}^{(k)}|$
Elemento di modulo
massimo sulla colonna
 k -esima

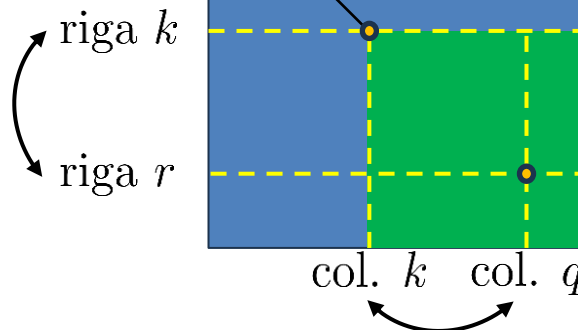
Risoluzione di sistemi lineari (Pivotazione Totale)

- **Pivotazione Totale:** coinvolge le righe e le colonne
- Prima del passaggio da $A^{(k)} \rightarrow A^{(k+1)}$ si cercano $r, q \geq k$ t.c.

$$|a_{rq}^{(k)}| = \max_{s \geq k, p \leq n} |a_{sp}^{(k)}|$$

- Si scambiano tra loro le righe r e k + le colonne q e k

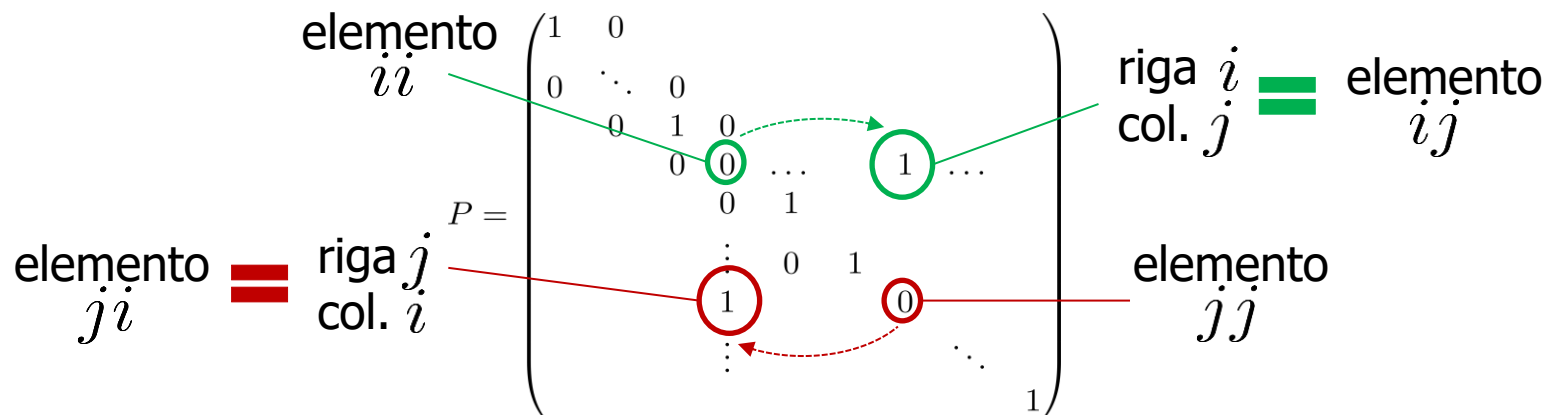
Passo k
del MEG



$|a_{rq}^{(k)}|$
Elemento di modulo
massimo su tutta la
sotto-matrice

Risoluzione di sistemi lineari (La matrice di Permutazione)

- Come la Pivotazione (parziale) modifica l'algebra del MEG (e la LU)
- Lo scambio di righe i e j equivale a moltiplicare a sx di A per P



- P è chiamata **Matrice di Permutazione**

$$PA \Rightarrow \text{scambia le righe } i \text{ e } j \text{ della matrice } A$$

Risoluzione di sistemi lineari (MEG modificato)

- Come la **Pivotazione parziale** modifica l'algebra del MEG (e la LU)
- Introduciamo $P^{(k)}$ la matrice di permutazione al passo k

$$\text{Passo 1 del MEG} \quad P^{(1)} A \rightarrow M^{(1)} P^{(1)} A$$

$$\text{Passo 2 del MEG} \quad P^{(2)} A^{(1)} \rightarrow M^{(2)} P^{(2)} M^{(1)} P^{(1)} A$$

- Ricorsivamente, completando tutti gli $n - 1$ passi del MEG

$$U = M^{(n-1)} P^{(n-1)} \dots M^{(1)} P^{(1)} A$$

- Ponendo $P = P^{(n-1)} \dots P^{(1)}$
 $\rightarrow L = P \left(M^{(n-1)} P^{(n-1)} \dots M^{(1)} P^{(1)} \right)^{-1}$ $\left. \vphantom{\begin{matrix} P \\ L \end{matrix}} \right\} \boxed{LU = PA}$

Risoluzione di sistemi lineari (MEG modificato)

- Per risolvere

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Utilizzando il MEG modificato con la Pivotazione parziale

$$PA = LU$$

- Abbiamo

$$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b} \Rightarrow LU\mathbf{x} = P\mathbf{b} = \mathbf{c}$$

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{c} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{c} & \text{Sostituzioni in avanti} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} & \text{Sostituzioni all'indietro} \end{cases}$$