Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.7b

Il metodo del gradiente e i test di arresto

Risoluzione di sistemi lineari (criteri di arresto)

- Introduzione di criteri per arrestare i metodi iterativi
- L'obiettivo dei metodi iterativi è di generare una successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}} \Longrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Determinare l'iterazione $k = n$ per cui interrompere il metodo

$$k = n \Longrightarrow \|\mathbf{e}^{(n)}\| = \|\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}\| \leq \epsilon$$

- L'errore che si commette sia sotto una certa tolleranza ϵ

Risoluzione di sistemi lineari (test sul residuo)

- 1° criterio di arresto: analisi basata sul residuo
- Residuo al passo k

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$$

- Richiesta: si vuole che la norma del residuo sia inferiore di ϵ

Metodo iterativo si arresta per $\mathbf{x}^{(k)}$ → $\|\mathbf{r}^{(k)}\| < \epsilon$

- Ricordando la relazione tra residuo ed errore

$$\frac{\|\mathbf{e}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(A) \frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Numero di condizionamento

Risoluzione di sistemi lineari (test sul residuo)

- Il test sul residuo è un buon criterio di arresto quando

$$K(A) \sim 1$$

- Se $K(A)$ è piccolo anche l'errore sarà contenuto

$$\frac{\|\mathbf{e}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(A) \frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

Il criterio di arresto sul residuo funziona bene se il numero di condizionamento è basso

Risoluzione di sistemi lineari (test sull'incremento)

- 2° criterio di arresto: analisi basata sull'incremento
- L'incremento al passo $k+1$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}$$

- Richiesta: la differenza tra due iterate successive sia inferiore di ϵ

Metodo iterativo si arresta per $\mathbf{x}^{(k+1)}$ → $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < \epsilon$

- Ricordando la relazione che lega gli errori al passo k e $k+1$

$$\mathbf{e}^{(k+1)} = B\mathbf{e}^{(k)}$$

Matrice di iterazione

Risoluzione di sistemi lineari (test sull'incremento)

- Il test sull'incremento è un buon criterio di arresto quando

$$\gamma = \|B\| \sim 0$$

- Si può verificare che

$$\|\mathbf{e}^{(k+1)}\| \leq \frac{\gamma}{1-\gamma}\epsilon \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \gamma \sim 0 \longrightarrow \|\mathbf{e}^{(k+1)}\| & \text{piccolo} \\ \gamma \sim 1 \longrightarrow \|\mathbf{e}^{(k+1)}\| & \text{grande} \end{cases}$$

Il criterio di arresto sull'incremento funziona bene se la norma della matrice di iterazione è piccola