eCAMPUS UNIVERSITÀ | DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

Lezione 5.1b

Equazioni differenziali ordinarie: introduzione

Risoluzione di EDO (Notazioni introduttive)

- Esempio: **EDO del moto rettilineo**

EDO

$$y'(t) = 2\sin(t)$$

Infinite soluzioni →

Integrale Generale

$$y(t) = -2\cos(t) + C$$

EDO + C.I.

EDO $$y'(t) = 2\sin(t)$$

C.I. $$y(0) = y_0$$

unica soluzione →

Integrale Particolare

$$y(t) = y_0 + 2[1 - \cos(t)]$$

- La **Condizione Iniziale (C.I.)** determina univocamente C

Integrale Generale:
insieme delle soluzioni di una EDO definito a meno di costanti

Integrale Particolare:
una soluzione di una EDO fissando le costanti

Risoluzione di EDO (Il problema di Cauchy)

- **EDO + C.I.** definisce il **problema di Cauchy**

Esempio: **EDO del moto rettilineo**

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sin(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

- **Problema di Cauchy** per una generica **EDO (di ordine 1)**

$$\begin{cases} y'(t) = f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Ordine 1
Ordine massimo della derivata

Risoluzione di EDO (Seconda legge di Newton)

- Esempio di **EDO di ordine 2**: La **legge del modo di Newton**

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$\mathbf{F}$ forza che agisce su un corpo
massa m e accelerazione $\mathbf{a}$ del corpo

$$my''(t) = F(t)$$

$$y''(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

Ordine 2
Ordine massimo della derivata

- **Determinare la posizione** $y(t)$ del corpo, al tempo t
- Ponendo la velocità $v(t) = y'(t)$ $\Rightarrow$ $mv'(t) = F(t)$

Risoluzione di EDO (Seconda legge di Newton)

- **Soluzione/Integrale generale** per integrazione

$$mv'(t) = F(t) \xrightarrow{\text{soluzione}} v(t) = \frac{1}{m}\int F(\tau)d\tau + C_1$$

- Indicando con $G(t)$ la generica primitiva $G(t) = \int F(\tau)d\tau$

$$\Rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{m}G(t) + C_1$$

- Dalla relazione $y'(t) = v(t)$ per integrazione

$$\Rightarrow \quad y(t) = \int \left[\frac{1}{m}G(\tau) + C_1\right] d\tau + C_2$$

Integrale Generale

$$y(t) = \frac{1}{m}H(t) + C_1 t + C_2$$

Integrale Particolare

$$v(0) = v_0 \Rightarrow C_1$$

$$y(0) = y_0 \Rightarrow C_2$$

Risoluzione di EDO (Sviluppo di una biomassa)

- Biomassa $m(t)$ al tempo t : evoluzione di una popolazione di batteri

$$m'(t) = Km(t)$$

- Velocità di crescita proporzionale alla massa
- Obiettivo: determinare la funzione incognita $m(t)$

Integrale generale $\rightarrow$ $m(t) = Ce^{Kt}$

- Problema di Cauchy

$$\begin{cases} m'(t) = km(t) \\ m(0) = m_0 \end{cases} \longrightarrow C = m_0$$

Integrale particolare $\rightarrow$ $m(t) = m_0 e^{Kt}$