eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistemi lineari
Lezione 2.3a

Metodi numerici diretti: sostituzioni in avanti e indietro

Risoluzione di sistemi lineari (Introduzione: Metodi diretti)

- Risoluzione numerica di **sistemi di equazioni lineari**

- Introduzione: la necessità di metodi numerici

  ✓ **La regola di Cramer**

  ✓ **Metodi Diretti** e **Metodi Iterativi**

  ✓ Introduzione al **Metodo di Eliminazione di Gauss**

  ✓ Algoritmo delle **sostituzioni in avanti e all'indietro**

Risoluzione di sistemi lineari (La regola di Cramer)

- Risultato classico dell'algebra lineare: **La regola di Cramer**
- Consideriamo un sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \det(A) \neq 0$$

- Soluzione unica del sistema è

$$x_i = \frac{\det A^{(i)}}{\det A} \qquad i = 1, ..., n$$

- $A^{(i)}$ si ottiene da A sostituendo la i-esima colonna con $\mathbf{b}$

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Risoluzione di sistemi lineari (Metodi numerici)

- Perché utilizzare metodi numerici per la risoluzione di sistemi lineari?
- La regola di Cramer richiede un numero eccessivo di operazioni

$$x_i = \frac{\det A^{(i)}}{\det A} \qquad i = 1, \dots, n$$

- Richiede il calcolo di $n+1$ determinanti della matrice A
- Si può dimostrare che il calcolo del $\det(A),\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ richiede

$$\boxed{n! \quad \text{operazioni}}$$

- Dimostrazione partendo dalla formula di Laplace

Risoluzione di sistemi lineari (Metodi numerici)

- Numero di operazioni per calcolare la sol. del sistema con Cramer è:

$$n! \quad \text{operazioni}$$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 \qquad n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

- Se n è «grande» $n!$ è un numero estremamente elevato

- Supponendo di utilizzare un calcolatore che effettua un miliardo di operazioni al secondo

$$v = 10^9 \text{ opz/s (1 Giga flops)} \qquad t = \frac{\#\ \text{operazioni}}{v}$$

$$\begin{array}{ll} n = 10, & t \sim 0.04 \text{ s} \\ n = 15, & t \sim 5.8 \text{ h} \\ n = 20, & t \sim 1620 \text{ anni} \end{array}$$

Risoluzione di sistemi lineari (Metodi diretti)

- Approssimazione numerica: risoluzione numerica dei sistemi lineari

- Due tipi di metodologie:

Metodi diretti | Metodi iterativi

- **Metodi diretti:** si basano sul **Metodo di Eliminazione di Gauss**

Un procedimento che permette di ottenere la soluzione del sistema lineare in un **numero finito di passi**

- **Metodi iterativi:** costruiscono una **successione di vettori** t.c.

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow \lim_{k \to \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x} \qquad ||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}|| < \epsilon$$