Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.3a

Relazione tra residuo ed errore e
Principi dei metodi iterativi

Risoluzione di sistemi lineari: metodi iterativi

- **Relazione tra residuo ed errore**

- **Principi dei metodi iterativi**

    - ✓ Il residuo di un sistema lineare
    - ✓ Relazione tra residuo ed errore
    - ✓ Principi per costruire metodi iterativi

Risoluzione di sistemi lineari (residuo di un sistema)

- Consideriamo un generico sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Sia $\mathbf{x}^*$ una soluzione ottenuta tramite un metodo iterativo

- Definiamo $\mathbf{r}^*$ residuo associato alla soluzione $\mathbf{x}^*$

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^*$$

- Osservazione: se $\mathbf{x}^* = \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{r}^* = \mathbf{0}$

Per la soluzione esatta il residuo è nullo

Risoluzione di sistemi lineari (relazione residuo - errore)

- Obiettivo: trovare una relazione tra l'errore commesso sulla risoluzione di un sistema lineare e il residuo
- L'errore è definito come

$$\mathbf{e}^* = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$$

- Si ricava

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^* = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}^* = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = A\mathbf{e}^*$$

$$\mathbf{r}^* = A\mathbf{e}^*$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{e}^* = A^{-1}\mathbf{r}^*}$$

Risoluzione di sistemi lineari (stima dell'errore con $\mathbf{r}^*$)

- Prendendo la norma della relazione residuo-errore

$$\|\mathbf{e}^*\| = \|A^{-1}\mathbf{r}^*\| \leq \|A^{-1}\|\|\mathbf{r}^*\|$$

$$\|\mathbf{e}^*\| \leq \underbrace{\|A^{-1}\|\|\|A\|}\frac{\|\mathbf{r}^*\|}{\|A\|}$$

$$\boxed{\|\mathbf{e}^*\| \leq K(A)\frac{\|\mathbf{r}^*\|}{\|A\|}}$$

residuo relativo

- Considerando l'**errore relativo**

$$\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(A)\frac{\|\mathbf{r}^*\|}{\|A\|\|\mathbf{x}\|} \Rightarrow \boxed{\frac{\|\mathbf{e}^*\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq K(A)\frac{\|\mathbf{r}^*\|}{\|\mathbf{b}\|}}$$

Risoluzione di sistemi lineari (relazione residuo - errore)

- $K(A)$ ha il ruolo di possibile amplificatore dell'errore:
  - A ben condizionata $\Rightarrow$ $\boxed{K(A) \sim 1}$ $\Rightarrow$ residuo $\mathbf{r}^*$ piccolo, errore $\mathbf{e}^*$ piccolo
  - A mal condizionata $\Rightarrow$ $\boxed{K(A) >> 1}$ $\Rightarrow$ residuo $\mathbf{r}^*$ piccolo, errore $\mathbf{e}^*$ grande (?)

$$\frac{\|\mathbf{e}^*\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \underbrace{K(A)}\frac{\|\mathbf{r}^*\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

- Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1.2969 & 0.8648 \\ 0.2161 & 0.1441 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r}^* = \begin{bmatrix} -10^{-8} \\ 10^{-8} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.8642 \\ 0.1440 \end{bmatrix} \qquad \frac{\|\mathbf{e}^*\|}{\|\mathbf{x}\|} \approx 39\% \quad \Rightarrow \quad K_\infty(A) \approx 10^8$$