Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.7a

Il metodo del gradiente e i test di arresto

Risoluzione di sistemi lineari: metodi iterativi

- **Metodo del gradiente e test di arresto**

- Formulazione dei **metodi di tipo gradiente**
  - ✓ Criteri di scelta del parametro α_k
  - ✓ **Metodi di tipo gradiente**
  - ✓ **Criterio di arresto sul residuo**
  - ✓ **Criterio di arresto sull'incremento**

Risoluzione di sistemi lineari (criterio di scelta di α_k)

- Criteri di scelta per parametro α_k nel metodo di Richardson dinamico

$$\begin{cases} P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)} \end{cases} \qquad k \geq 0$$

- Nel caso $A,\ P$ siano **SDP** scegliamo α_k in modo che

$$||\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}||_A \text{ sia minima}$$

- L'errore in **norma A** sia il più piccolo possibile
- Notiamo che $\mathbf{x}^{(k+1)}$ dipende da α_k, quindi

$$\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)} = \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x} \to \alpha_k$$

Risoluzione di sistemi lineari (la norma energia)

- Nel caso A, P siano **SDP** scegliamo α_k in modo da

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_A \text{ sia minima}$$

- La **norma A (norma energia)** è così definita

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \qquad \|\mathbf{a}\|_A = \left(\mathbf{a}^T A \mathbf{a}\right)^{1/2}$$

Sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- <u>Osservazione</u> sul prodotto scalare:

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_A^2 = \big(\underbrace{A(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x})}_{A\mathbf{e}^{(k+1)}}, \underbrace{\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}}_{\mathbf{e}^{(k+1)}}\big)$$

Errore al passo $k+1$

Risoluzione di sistemi lineari (il minimo nel punto α_k)

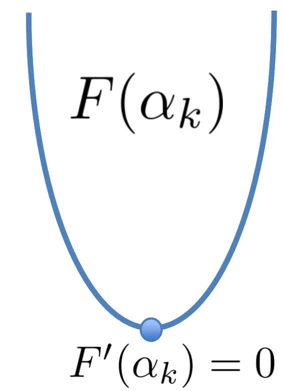
- Definiamo il prodotto scalare come la funzione $F(\alpha_k) \in \mathbb{R}^+$

$$F(\alpha_k) = \left(A\mathbf{e}^{(k+1)}, \mathbf{e}^{(k+1)}\right) = \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_A^2$$

$$\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}\|_A \text{ sia minima} \quad \Rightarrow \quad F'(\alpha_k) = 0$$

- La funzione $F(\alpha_k)$ abbia un minimo nel punto α_k
- Derivando F rispetto ad α_k si ottiene

$$\boxed{\alpha_k = \frac{\left(\mathbf{r}^{(k)}\right)^T \mathbf{z}^{(k)}}{\left(\mathbf{z}^{(k)}\right)^T A\mathbf{z}^{(k)}}}$$



Risoluzione di sistemi lineari (metodo del gradiente)

- Abbiamo un criterio di scelta automatico per α_k

$$\alpha_k = \frac{\left(\mathbf{r}^{(k)}\right)^T \mathbf{z}^{(k)}}{\left(\mathbf{z}^{(k)}\right)^T A\mathbf{z}^{(k)}}$$

- Questa scelta $=$ **Metodo del gradiente precondizionato**

$$\begin{cases} P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)} \end{cases} \qquad k \geq 0$$

- Se il **precondizionatore è la matrice l'identità** $P = I$

$\boxed{P = I} \rightarrow$ **Metodo del gradiente**