



**eCAMPUS**  
UNIVERSITÀ

**DiSTA**

**Corso: Analisi Numerica**

**Docente: Roberto Piersanti**

# **Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie**

## **Lezione 5.6b**

Condizioni di risolubilità del problema di Cauchy

## Risoluzione di EDO (Problema di Cauchy)

- Caratterizzare quando un Problema di Cauchy ammette soluzione
- Condizioni generali per garantire

**Esistenza ed unicità della soluzione**  
**di un problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \end{cases}$$

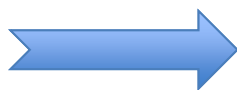
- $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  funzione incognita,  $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funzione assegnata
- $y_0$  dato iniziale,  $x_0$  valore iniziale

## Risoluzione di EDO (Problema di Cauchy)

- Risolvere il Problema di Cauchy  $\longleftrightarrow$  trovare la soluzione particolare

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \end{cases}$$

- La **soluzione particolare** che soddisfa  $y(x_0) = y_0$
- Condizioni di esistenza e unicità



**Condizioni su  $f(x, y)$  che garantiscano l'esistenza e unicità del problema di Cauchy**

## Risoluzione di EDO (Condizioni di esistenza e unicità)

➤ Le condizioni su  $f(x, y)$  per garantire l'esistenza e unicità sono:

1.  $f(x, y)$  è continua rispetto a  $x$  e  $y$

2.  $f(x, y)$  è lipschitziana in  $y$

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall x \in I \quad \forall y_1, y_2$$

➤ Se **1.** e **2.** sono verificate allora la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \end{cases}$$

$y(x)$  **esiste ed è unica**

$$\forall x_0 \in I$$

## Risoluzione di EDO (Condizioni di esistenza e unicità)

➤ Esempio

$$\begin{cases} y'(x) = xy(x) & x \in (0, 1.5) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$



$$y(x) = e^{x^2/2}$$

➤ In questo caso quindi  $f(x, y) = xy(x) = xe^{x^2/2}$

1.  $f(x, y)$  è continua rispetto a  $x$  e  $y$



2.  $f(x, y)$  è lipschitziana in  $y$



$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 1.5|y_1 - y_2|$$

## Risoluzione di EDO (La condizione di lipschitzianità)

- La lipschitzianità potrebbe non essere semplice per una funzione  $f(x, y)$
- Sfruttiamo una **proprietà più forte** che garantisce la lipschitzianità

✓  $f(x, y)$  è derivabile in  $y$  con  
derivata continua



✓  $f(x, y)$  è lipschitziana in  $y$

$f \in C^1 \longrightarrow f$  è lipschitziana