Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

Lezione 6.3a

Metodi di Eulero in avanti ed Eulero all'indietro

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **E**quazioni **D**ifferenziali **O**rdinarie **(EDO)**

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

- **Metodi numerici** per la risoluzione numerica di EDO
  - ✓ Riepilogo del problema
  - ✓ Primi metodi numerici introdotti
  - ✓ **Metodo di Eulero in avanti** esplicito
  - ✓ **Metodo di Eulero all'indietro** implicito

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Consideriamo il seguente **problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \subset \mathbb{R} \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \end{cases}$$

$y = y(x)$? **FORMA CHIUSA**

1. $y(x)$ **non si conosce una forma esplicita**

2. $y(x)$ **non rappresentabile neanche in forma implicita**

METODI NUMERICI PER EDO

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Le condizioni su $f(x,y)$ per garantire **l'esistenza e unicità** sono:

1. $f(x,y)$ **è <u>continua</u> rispetto a** x **e** y

2. $f(x,y)$ **è <u>lipschitziana</u> in** y

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

- Se **1.** e **2.** sono verificate allora la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \end{cases}$$

$y(x)$ **esiste ed è unica**

$$\forall x_0 \in I$$

$$f \in C^1 \longrightarrow f \text{ è lipschitziana}$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

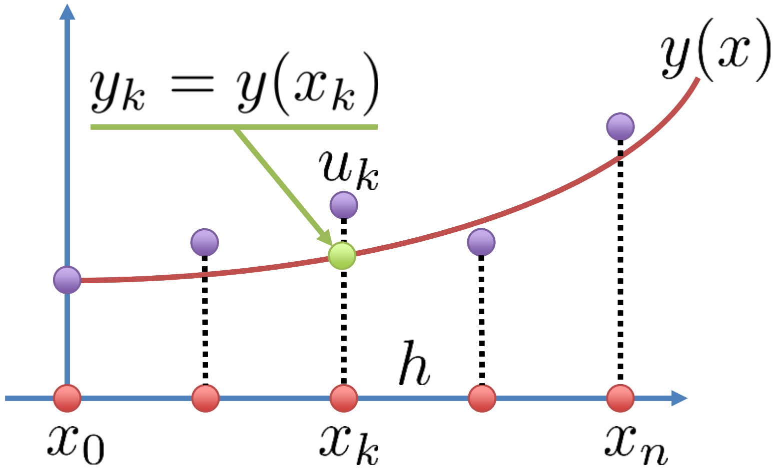
➢ **Risolvere numericamente una EDO** $y'(x) = f(x, y(x))$, $y(x_0) = y_0$

1. **Discretizzazione dell'intervallo** I

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\}$$

2. **Soluzione numerica** $\{u_k\}$ che approssima la soluzione $y(x_k)$

$$\{u_0, u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n\}$$



➢ Ipotesi di **nodi equispaziati**

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + h} \qquad k \geq 0, \quad h > 0$$

➢ **Soluzione numerica:** determinare $u_k \simeq y_k = y(x_k)$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

$$\mathrm{Approx}[y'(x_k)] \simeq \mathrm{Approx}[f(x_k, y_k)] \quad \approx \quad y'(x) = f(x, y(x))$$

1. $G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1}) \boxed{\simeq} f(x_k, y_k)$
2. $G(y_k, y_{k+1}) \boxed{\simeq} F[f(x_k, y_k), f(x_{k+1}, y_{k+1})]$

➢ Si vuole <u>assumere queste espressioni nel metodo numerico</u>, allora

Soluzione numerica $u_k \longrightarrow y_k$ **Soluzione esatta**

$G(u_{k-1}, u_k, u_{k+1}) \boxed{=} f(x_k, u_k)$

$G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1}) \boxed{\simeq} f(x_k, y_k)$

Soluzione numerica
<u>risolve esattamente 1. e 2.</u>

$$= \longrightarrow \simeq$$