RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Integrale generale, integrale particolare e curva integrale)

Nella lezione precedente abbiamo introdotto le equazioni differenziali ordinarie (EDO), attraverso la presentazione di alcuni esempi. In questa lezione, intendiamo introdurre una terminologia che permetta di condurre un'analisi complessiva delle EDO. L'obiettivo è esprimere le equazioni differenziali in una forma generale.
La forma generale di un'equazione differenziale di ordine n è una relazione del tipo

$$F\big(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0,$$

dove x è la variabile indipendente, $y(x)$ è la funzione incognita e $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$ sono le sue derivate fino all'ordine n rispetto alla variabile x. Questa relazione, posta uguale a zero, descrive in modo generale la EDO di ordine n generico. L'ordine della EDO corrisponde all'ordine della derivata più alta presente nella relazione differenziale. L'aggettivo ordinaria viene utilizzato in quanto nella relazione sono presenti esclusivamente derivate ordinarie (rispetto a x) della funzione incognita y.
Definiamo ora il concetto di soluzione di una EDO. La soluzione (o integrale) di una EDO, definita su un intervallo $I \subset \mathbb{R}$, è una funzione $y(x)$, che è n-volte differenziabile nell'intervallo I, tale che

$$F\big(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \qquad \forall x \in I.$$

Pertanto, $y = y(x)$ è una soluzione della EDO se, sostituita nella relazione funzionale insieme a tutte le sue derivate fino all'ordine n, soddisfa l'equazione differenziale per ogni x appartenente all'intervallo I.
Vediamo alcuni esempi. L'equazione

$$y' + y = 0 \qquad \text{EDO del } 1^{\circ}\text{ordine},$$

è un'equazione differenziale del primo ordine, perché interviene la sola derivata prima. L'equazione

$$y''(x) - 3xy' = x^2 \qquad \text{EDO del } 2^{\circ}\text{ordine},$$

è una EDO di ordine due, perché interviene la derivata seconda. Infine, l'equazione

$$xy''' + 2(y')^2 + \log(y) = 0 \qquad \text{EDO del } 3^{\circ}\text{ordine},$$

è un'equazione differenziale del terzo ordine perché interviene la derivata terza.
Questi tre esempi permettono anche di introdurre il concetto di equazione differenziale lineare e non lineare. Un'equazione differenziale lineare è un'equazione in cui la funzione $y(x)$ e tutte le sue derivate rispetto a x appaiono in maniera lineare. Al contrario, un'equazione differenziale non lineare è un'equazione in cui y e alcune delle sue derivate (ovvero, almeno una delle sue derivate) intervengono in modo non lineare. In particolare, le prime due equazioni sono lineari

$$y' + y = 0,$$
$$y''(x) - 3xy' = x^2,$$

poiché y e y' nella prima, e y'' e y' nella seconda, appaiono in maniera lineare. Non è rilevante la presenza di relazioni non lineari della variabile indipendente x; ciò che conta è che y, y' e y'' non compaiono in modo non lineare. La terza equazione, invece, è non lineare

$$xy''' + 2(y')^2 + \log(y) = 0,$$

poiché y interviene in modo non lineare tramite il suo logaritmo, e anche y' interviene non linearmente, tramite il termine $(y')^2$.

Consideriamo adesso alcune classi di equazioni di forma particolare e analizziamo, per ciascuna di esse, come affrontare il problema della loro risoluzione. Pertanto, il passo successivo consiste nella descrizione di alcune classi di EDO di forma particolare.
La prima classe di EDO è quella delle equazioni di tipo

$$y' = g(x),$$

dove la funzione g è indipendente da y. In questa equazione, compare la derivata prima della funzione incognita y a sinistra, mentre a destra compare una funzione g che dipende esclusivamente dalla variabile indipendente x. Questo tipo di problema è noto come integrazione indefinita. Pertanto, la soluzione consiste nel calcolare una primitiva della funzione $g(x)$, ottenendo l'integrale della forma

$$y(x) = \int g(x)dx + C,$$

dove ricordiamo che la primitiva è definita a meno di una costante arbitraria dovuta al processo di integrazione. Chiameremo questa soluzione $y(x)$ l'integrale generale della EDO $y' = g(x)$. Stiamo quindi ritrovando una definizione che avevamo già introdotto in precedenza attraverso alcuni esempi, ma ora la presentiamo in una forma più generale. L'integrale generale dipende infatti da una costante $C \in \mathbb{R}$, la quale può assumere tutti i valori reali. Il grafico di una qualsiasi di queste soluzioni, ottenuta per uno specifico valore della costante C, è chiamato curva integrale. Pertanto, la curva integrale rappresenta una delle possibili soluzioni del problema, ovvero dell'integrale generale, quando la costante C è fissata a un determinato valore. L'integrale particolare è quello che si ottiene specificando il valore C, ovvero richiedendo che sia soddisfatta una condizione iniziale, per esempio, la condizione del tipo

$$y(x_0) = y_0,$$

dove x_0 e y_0 siano valori assegnati.
Abbiamo quindi introdotto i concetti di integrale generale, curva integrale e integrale particolare, quest'ultimo corrispondente alla soluzione ottenuta quando viene applicata una condizione iniziale.
Ad esempio, l'EDO del tipo

$$y' = x,$$

ha un integrale generale che è dato da

$$y = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

dove C è una costante reale arbitraria. Le soluzioni sono dunque delle parabole che differiscono tra loro per il valore della costante C. Le curve integrali sono i grafici di ciascuna delle soluzioni dell'integrale generale, corrispondenti a diversi valori della costante C (si veda Figura 1). Se desiderassimo determinare un integrale particolare, dovremmo assegnare un punto x_0, per esempio in questo caso (come mostrato nella Figura 1), prendendo $x_0 = 0$ e un punto y_0. La curva che rappresenta l'integrale particolare corrisponde a individuare quale tra tutte le curve, partendo da x_0, assume il valore y_0. Questa curva rappresenta quindi l'integrale particolare, che è determinato dai valori specifici del parametro C.
Un altro esempio di EDO è rappresentato dalla seguente equazione:

$$y' = y,$$

che corrisponde al caso generale dell'esempio che abbiamo trattato nella lezione precedente sulla biomassa. Basta, infatti, prendere in $m' = Km$, $m = y$ e $K = 1$. L'integrale generale di questa equazione è dato da

$$y = Ce^x,$$

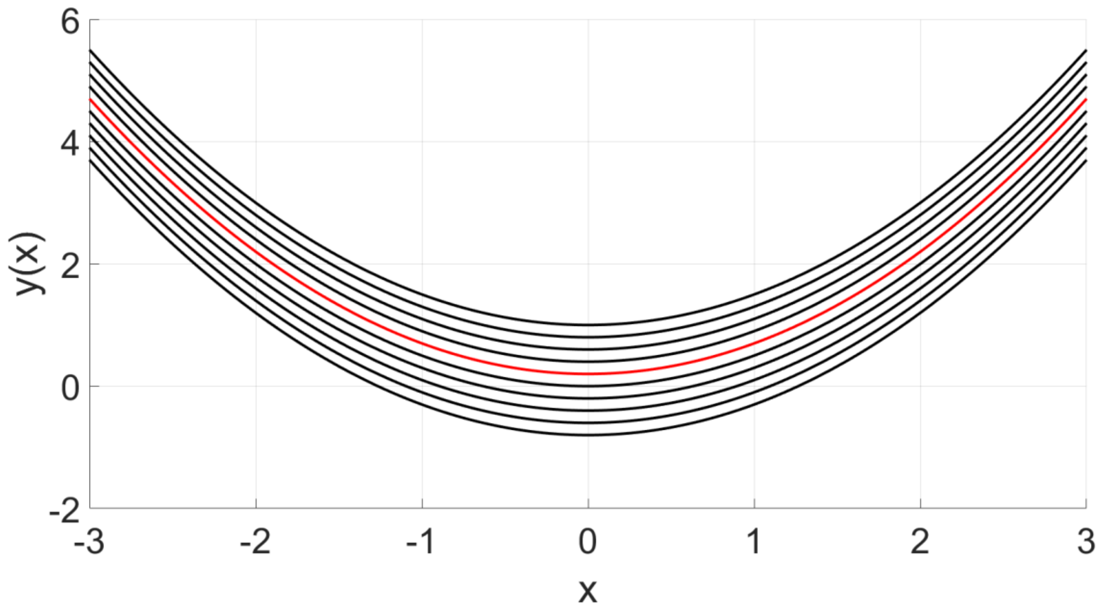

Figura 1: Curve integrali per l'EDO $y' = x$. In rosso è riportata una particolare curva integrale determinata per uno specifico valore di x_0.

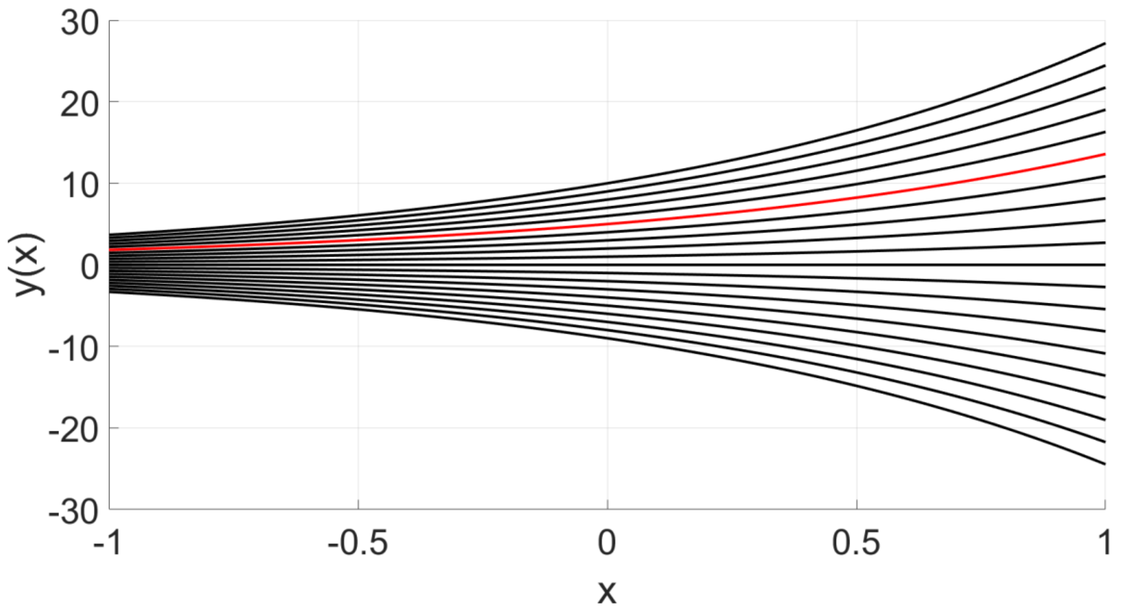

Figura 2: Curve integrali per l'EDO $y' = y$. In rosso è riportata una particolare curva integrale determinata per uno specifico valore di x_0.

dove C è una costante arbitraria di integrazione.

Andando a graficare le curve integrali (come mostrato nella Figura 2), esse rappresentano delle funzioni esponenziali del tipo Ce^x, dove C è una costante moltiplicativa. Trovare un integrale particolare equivale a fissare, ad esempio, nel punto $x_0 = 0$ un certo valore y_0 della funzione. Per esempio, fissando $y_0 = 5$, si seleziona la curva integrale che passa per il punto $(0,5)$.

Vediamo cosa accade per le equazioni differenziali di ordine superiore. L'integrale generale di una EDO di ordine n dipenderà da n costanti arbitrarie. Pertanto, specificare un integrale particolare, ossia selezionare una curva integrale specifica, richiederà l'assegnazione di n condizioni iniziali.
Richiamiamo l'esempio, menzionato nella lezione precedente, relativo alla EDO del secondo ordine ($n = 2$) del tipo

$$y'' = x.$$

Questa ha un integrale generale dato da

$$y = \frac{1}{6}x^3 + C_1 x + C_2,$$

dove C_1 e C_2 sono due costanti arbitrarie. Abbiamo già visto questa EDO in un caso particolare, quello relativo alla legge di Newton. Nel caso in cui la massa sia uguale a $m = 1$, otteniamo esattamente questo tipo di EDO e di soluzione. È possibile fare una verifica a posteriori, procedendo prima con il calcolo della derivata prima di

$$y'(x) = \frac{1}{2}x^2 + C_1,$$

e successivamente calcolando la derivata seconda

$$y''(x) = x.$$

In questo modo, possiamo verificare che la soluzione soddisfa l'equazione differenziale originaria.

Consideriamo adesso un altro esempio di EDO del tipo

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y,$$

la quale ha integrali particolari dati da

$$y_1(x) = e^x \qquad y_2(x) = e^{-x},$$

e l'integrale generale (come vedremo più avanti) è una combinazione lineare di questi due interali particolari

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Questo integrale generale dipende da due costanti arbitrarie C_1 e C_2. Una curva integrale è quella che si ottiene fissando opportunamente C_1 e C_2, ossia scegliendo specifici valori per queste costanti.

Abbiamo dunque visto, nel caso delle equazioni differenziali del primo e del secondo ordine, alcuni esempi che ci permettono di introdurre i concetti di integrale generale, curve integrali e integrali particolari. Tuttavia, non è sempre vero che, dato un problema differenziale arbitrario, si possa ottenere una sola soluzione, ovvero un integrale generale, e successivamente determinare gli integrali particolari in corrispondenza di condizioni iniziali. Vediamo alcuni esempi che evidenziano possibili comportamenti patologici delle EDO, in cui il comportamento delle soluzioni può essere più complesso o differente da quanto ci si aspetterebbe in casi più standard.

Assegnare n condizioni iniziali potrebbe non specificare univocamente l'integrale. Questo è un primo esempio di comportamento patologico. Per esempio, il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases},$$

dove la EDO è $y' = 3y^{2/3}$ e $y(0) = 0$ rappresenta la condizione iniziale. Questo problema ha due integrali particolari dati da

$$y(x) = 0 \quad e \quad y(x) = x^3.$$

Infatti, è immediato verificare che $y(x) = 0$ e $y(x) = x^3$ sono entrambe soluzioni di questo problema di Cauchy. Quindi questo è un primo esempio nel quale si vede che talvolta il problema di Cauchy non definisce in maniera univoca la soluzione della EDO.

Esaminiamo ora un altro esempio di natura differente. In alcuni casi, la soluzione di un'equazione differenziale potrebbe non essere definita su tutto l'asse reale, ma esistere solamente su un intervallo limitato dell'asse $\mathbb{R}$. Consideriamo, a tal proposito, il seguente esempio

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$

Questa è una EDO del primo ordine, poiché compare solo la derivata prima della funzione incognita y, mentre non sono presenti derivate di ordine superiore. Inoltre, si tratta di un'equazione differenziale non lineare, in quanto la funzione incognita y compare in forma quadratica. Il problema è completato da un dato iniziale, ovvero la condizione $y(0) = 0$. Questo problema di Cauchy ammette un unico integrale particolare, che soddisfa sia l'equazione differenziale sia la condizione iniziale assegnata

$$y(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{cos(x)},$$

che esiste solo in un determinato intervallo e non esiste su tutta la retta reale

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

La condizione iniziale è effettivamente verificata in quanto la funzione tangente nel punto $x_0 = 0$ vale zero

$$y(0) = \tan(0) = 0.$$

Inoltre, calcolando la derivata prima della funzione tangente, si ottiene esattamente $1 + y^2$, confermando che la soluzione del problema soddisfa l'equazione differenziale assegnata.

La Figura 3 mostra il grafico della funzione $\tan(x)$, che è definita su tutta la retta reale eccetto nei punti in cui la tangente assume valori infiniti. L'intervallo di riferimento per il problema di Cauchy è $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ai cui estremi sono presenti due asintoti verticali. Si osservi che consideriamo questo intervallo poiché il punto iniziale x_0 appartiene a $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, garantendo così che la soluzione rimanga ben definita all'interno di questo dominio. Pertanto, il problema di Cauchy con la condizione assegnata in questo punto x_0 non ammette una soluzione definita su tutta la retta reale, ma solo nell'intervallo $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Questo costituisce dunque un esempio di come una EDO possa ammettere una soluzione definita solo su un intervallo della retta reale, e non su tutto il dominio reale. Ciò evidenzia il fatto che, in alcuni casi, l'esistenza della soluzione può essere limitata dalla presenza di singolarità o da altre condizioni che ne impediscono l'estensione all'intero asse reale.

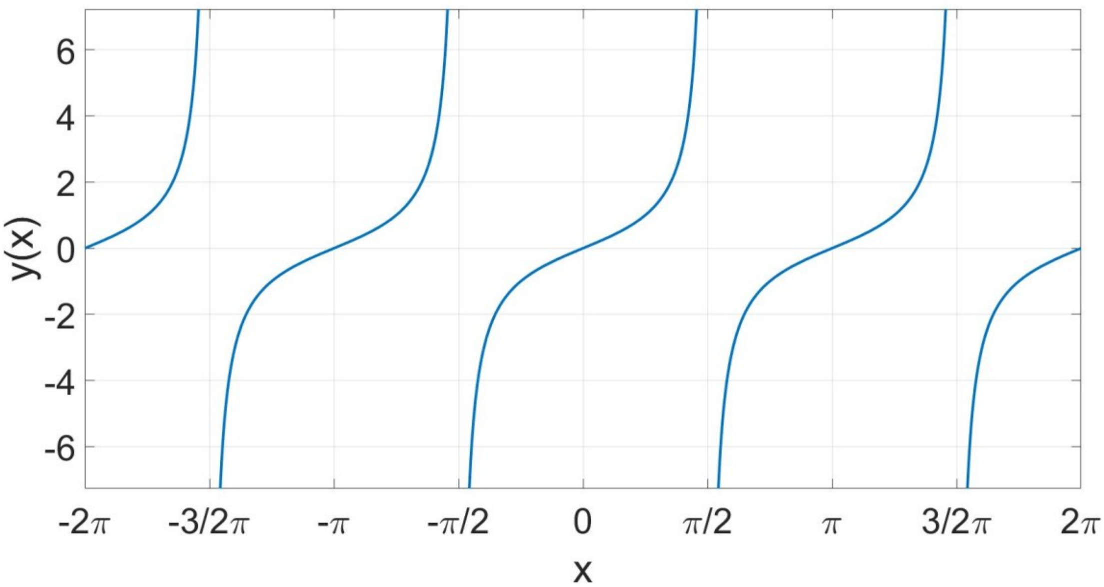

Figura 3: Grafico della funzione $tan(x)$.

Abbiamo dunque esaminato due esempi in cui il problema di Cauchy non ammette una soluzione unica. Questo evidenzia la necessità di caratterizzare correttamente le condizioni sui dati del problema affinché si possa garantire l'esistenza e l'unicità della soluzione. Sarà fondamentale determinare le condizioni sulla funzione F (ovvero, sulla relazione funzionale che lega tra loro la funzione incognita y, le sue derivate e la variabile indipendente x) che consentano di caratterizzare in modo univoco la soluzione del problema di Cauchy.

Nelle prossime lezioni procederemo considerando alcune classi di EDO specifiche e, all'interno di ciascuna di esse, cercheremo di individuare le condizioni che garantiscano l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema di Cauchy.