



**eCAMPUS**  
UNIVERSITÀ

**DiSTA**

**Corso: Analisi Numerica**

**Docente: Roberto Piersanti**

# **Risoluzione di sistemi lineari**

## **Lezione 2.3a**

Metodi numerici diretti: sostituzioni in avanti e indietro



## Risoluzione di sistemi lineari (Introduzione: Metodi diretti)

- Risoluzione numerica di **sistemi di equazioni lineari**
- Introduzione: la necessità di metodi numerici
  - ✓ **La regola di Cramer**
  - ✓ **Metodi Diretti e Metodi Iterativi**
  - ✓ **Introduzione al Metodo di Eliminazione di Gauss**
  - ✓ **Algoritmo delle sostituzioni in avanti e all'indietro**

## Risoluzione di sistemi lineari (La regola di Cramer)

- Risultato classico dell'algebra lineare: **La regola di Cramer**
- Consideriamo un sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \det(A) \neq 0$$

- Soluzione unica del sistema è

$$x_i = \frac{\det A^{(i)}}{\det A} \qquad i = 1, \dots, n$$

- $A^{(i)}$  si ottiene da  $A$  sostituendo la  $i$ -esima colonna con  $\mathbf{b}$

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

## Risoluzione di sistemi lineari (Metodi numerici)

- Perché utilizzare metodi numerici per la risoluzione di sistemi lineari?
- La regola di Cramer richiede un numero eccessivo di operazioni

$$x_i = \frac{\det A^{(i)}}{\det A} \quad i = 1, \dots, n$$

- Richiede il calcolo di  $n + 1$  determinanti della matrice  $A$
- Si può dimostrare che il calcolo del  $\det(A)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  richiede

**$n!$  operazioni**

- Dimostrazione partendo dalla formula di Laplace

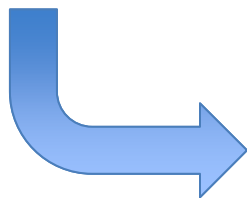
## Risoluzione di sistemi lineari (Metodi numerici)

- Numero di operazioni per calcolare la sol. del sistema con Cramer è:

$$n! \text{ operazioni} \quad n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \quad n \in \mathbb{N}, n \neq 0$$

- Se  $n$  è «grande»  $n!$  è un numero estremamente elevato
- Supponendo di utilizzare un calcolatore che effettua un miliardo di operazioni al secondo

$$v = 10^9 \text{ opz/s (1 Giga flops)} \quad t = \frac{\# \text{ operazioni}}{v}$$



$$\begin{array}{ll} n = 10, & t \sim 0.04 \text{ s} \\ n = 15, & t \sim 5.8 \text{ h} \\ n = 20, & t \sim 1620 \text{ anni} \end{array}$$



## Risoluzione di sistemi lineari (Metodi diretti)

- Approssimazione numerica: risoluzione numerica dei sistemi lineari
- Due tipi di metodologie:

Metodi diretti

Metodi iterativi

- **Metodi diretti:** si basano sul **Metodo di Eliminazione di Gauss**

Un procedimento che permette di ottenere la soluzione del sistema lineare in un **numero finito di passi**

- **Metodi iterativi:** costruiscono una **successione di vettori** t.c.

$$Ax = b \quad \longrightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x} \quad ||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}|| < \epsilon$$