DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica

Lezione 4.1b

Richiami sul calcolo degli autovalori di una matrice

Calcolo degli autovalori (criterio fondamentale)

- Autovalore $\lambda \in \mathbb{C}$ della matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \Longleftrightarrow (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrice identità

- Il sistema lineare $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ammette soluzioni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\Updownarrow$$

Criterio fondamentale
per la determinazione degli autovalori

Calcolo degli autovalori (equazione caratteristica)

- **Polinomio caratteristico** della matrice A

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

- La matrice $A - \lambda I$ risulta

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

- Gli <u>autovalori</u> λ di A sono le **radici del polinomio caratteristico**

$$P_A(\lambda) = 0$$

Equazione caratteristica

Calcolo degli autovalori (autovalori di matrici singolari)

- L'equazione caratteristica ha al massimo n radici distinte

$$P_A(\lambda) = 0$$

Al massimo n autovalori

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

dato che $P_A(\lambda)$ è un polinomio di grado n

- Inoltre, la matrice A è singolare $\Longleftrightarrow$ $\lambda = 0$ è soluzione di $P(\lambda) = 0$

Le matrici singolari sono caratterizzate dalla presenza di almeno un autovalore nullo

Calcolo degli autovalori (spettro di una matrice)

- **Spettro**: l'insieme di tutti gli autovalori λ di una matrice A

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$$

$$\lambda_i \in \mathbb{C} : \lambda_i \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda}_i \in \sigma(A)$$

- **Raggio spettrale di una matrice**

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

Massimo dei moduli degli autovalori

- **Determinante di una matrice**

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

Se $\lambda = 0$ la matrice A è singolare

Calcolo degli autovalori (di matrici triangolari)

- Se A è **triangolare** gli autovalori $\lambda = a_{ii}$ sono sulla diagonale

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

- Esempio: $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A - \lambda I = \begin{pmatrix} 10-\lambda & 2 & 3 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Longrightarrow \quad P_A(\lambda) = \lambda^3 - 15\lambda^2 + 59\lambda - 73 = 0$$

$$\lambda_1 = 9.69, \qquad \lambda_{2,3} = 2.66 \pm i0.69$$