DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica

Lezione 4.3a

Il metodo delle potenze

Calcolo degli autovalori di una matrice

- **Calcolo degli autovalori da un punto di vista numerico**

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

- Primo metodo numerico: **<u>metodo delle potenze</u>**

  - ✓ **Ipotesi** del metodo delle potenze
  - ✓ **L' algoritmo** del metodo delle potenza
  - ✓ **Descrizione geometrica**
  - ✓ Convergenze e **velocità di convergenza**

Calcolo degli autovalori di una matrice (metodo delle potenze)

- Metodo delle potenze

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Determina gli autovalori $\lambda \in \mathbb{C}$ estremi di A:
- autovalore di **modulo massimo**
- autovalore di **modulo minimo**
- autovalore **in modulo più vicino a** $\mu \in \mathbb{C}$

- Ipotesi (**1., 2., 3.**)del metodo delle potenze:

1. La matrice A sia diagonalizzabile

$$\exists X \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ t.c. } X^{-1}AX = \Lambda$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \qquad \boxed{\lambda(\Lambda) = \lambda(A)}$$

2. Matrice di trasformazione Xè la **matrice degli autovettori**

Calcolo degli autovalori di una matrice (metodo delle potenze)

2. Matrice di trasformazione X è la **matrice degli autovettori** A

Definizione di autovettore:

$$A\mathbf{x}^{(k)} = \lambda_k \mathbf{x}^{(k)}$$

$\mathbf{x}^{(k)}$ **autovettore**
λ_k **autovalore**

$$X = \begin{pmatrix} \cdots & \begin{matrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{matrix} & \cdots \end{pmatrix}$$

Nella colonna k-esima
Il k-esimo autovettore

3. Gli autovalori di A sono **ordinati in modo decrescente:**

$$|\lambda_1| \boxed{>} |\lambda_2| \geq |\lambda_3| > \cdots \geq |\lambda_n|$$

Esiste un **autovalore dominante**

Calcolo degli autovalori di una matrice (metodo delle potenze)

- Sotto queste tre condizioni

  1. $\exists X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ t.c. $X^{-1}AX = \Lambda$ $\quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
  2. $X = (\ldots, \mathbf{x}^{(k)}, \ldots)$ $\quad A\mathbf{x}^{(k)} = \lambda_k \mathbf{x}^{(k)}$
  3. $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| > \cdots \geq |\lambda_n|$

- Si può costruire il seguente **metodo numerico**

$$\text{dato } \mathbf{q}^{(0)} \text{ t.c. } \|\mathbf{q}^{(0)}\|_2 = 1$$

$$k = 1, 2, \ldots \begin{cases} \mathbf{z}^{(k)} = A\mathbf{q}^{(k-1)} \\ \mathbf{q}^{(k)} = \dfrac{\mathbf{z}^{(k)}}{\|\mathbf{z}^{(k)}\|_2} \\ \lambda^{(k)} = \mathbf{q}^{(k)^T} A \mathbf{q}^{(k)} \end{cases}$$

Calcolo degli autovalori di una matrice (metodo delle potenze)

- Evoluzione geometrica del metodo delle potenze

$$\mathbf{q}^{(\mathbf{0})} \in \mathbb{R}^n \qquad \underbrace{\mathbf{q}^{(1)} = A\mathbf{q}^{(0)} \qquad \mathbf{q}^{(2)} = A\mathbf{q}^{(1)}}$$

$$\mathbf{q}^{(2)} = A(A\mathbf{q}^{(0)}) = A^2\mathbf{q}^{(0)})$$

Continuando iterativamente

$$\mathbf{q}^{(k)} = A^k\mathbf{q}^{(0)}$$

Genera una **successione di vettori** tramite <u>applicazioni successive di A</u> al vettore iniziale $\mathbf{q}^{(\mathbf{0})}$

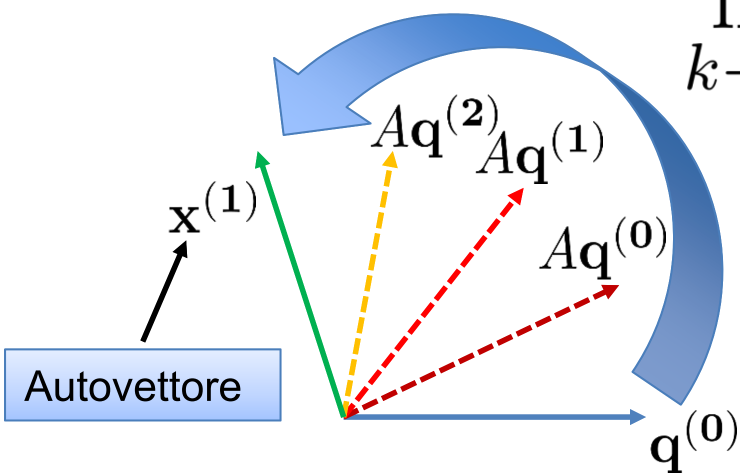
Calcolo degli autovalori di una matrice (metodo delle potenze)

➢ Evoluzione geometrica del metodo delle potenze

$$\mathbf{q}^{(\mathbf{0})} \in \mathbb{R}^n \qquad \mathbf{q}^{(k)} = A^k \mathbf{q}^{(0)}$$

Genera una **successione di vettori** tramite applicazioni successive di A al vettore iniziale $\mathbf{q}^{(\mathbf{0})}$

$$\lim_{k \to \infty} \mathbf{q}^{(k)} = \mathbf{x}^{(1)}$$



$$\lambda^{(k)} = {\mathbf{q}^{(k)}}^T A\mathbf{q}^{(k)}$$

$$\lambda_1 = \frac{{\mathbf{x}^{(1)}}^T A\mathbf{x}^{(1)}}{{\mathbf{x}^{(1)}}^T \mathbf{x}}$$

Quoziente di Rayleigh