RADICI DI EQUAZIONI NON LINEARI (Metodi Numerici per il calcolo delle radici)

In questa lezione introdurremo metodi numerici più avanzati rispetto al metodo di bisezione. Quest'ultimo, infatti, si basa esclusivamente sul cambiamento di segno della funzione $f(x)$, senza considerare il valore effettivo della funzione nei punti esaminati. I metodi che presenteremo, invece, sfrutteranno informazioni aggiuntive: alcuni utilizzeranno direttamente i valori della funzione $f(x)$ in determinati punti, o addirittura impiegando anche la derivata prima di $f(x)$. Tra questi metodi si distinguono, come casi particolari:

- Il metodo delle corde
- Il metodo delle secanti
- Il metodo di Newton

Questa famiglia di metodi si basa sul seguente principio. Data una funzione $f(x)$, di cui vogliamo calcolare o, meglio, approssimare, la radice α, ovvero il punto di intersezione di f con l'asse x (o asse delle ascisse). A tale scopo, costruiamo una successione $\{x_n\}$ che converge alla radice α. Supponiamo di avere un valore x_n appartenente alla successione in costruzione e analizziamo il processo che consente di determinare il nuovo valore x_{n+1}. L'obiettivo è quindi quello di comprendere il meccanismo che permette di passare dall'iterazione n all'iterazione $n+1$. Per procedere, calcoliamo il valore della funzione nel punto x_n, ovvero $f(x_n)$. A partire da questo valore, consideriamo una retta con una determinata pendenza che passa per il punto $(x_n, f(x_n))$. L'intersezione di questa retta con l'asse x definisce il nuovo valore x_{n+1}. Il processo consiste dunque nel determinare x_{n+1} iterativamente:

- Dato x_n , calcolare $f(x_n)$;
- Tracciare una retta di pendenza opportuna passante per il punto $(x_n, f(x_n))$;
- Individuare l'intersezione di questa retta con l'asse x e porre tale valore uguale a x_{n+1}.

Questo procedimento può essere iterato indefinitamente, permettendo di passare da x_{n+1} a x_{n+2}, e così via, secondo lo stesso criterio.

Un elemento essenziale di questo metodo è la pendenza q_n della retta utilizzata. Tale pendenza può, in linea di principio, dipendere dal valore x_n. Si può scegliere di mantenerla costante e fissarla a un valore q, oppure di modificarla dinamicamente in funzione di x_n. La scelta della pendenza dipenderà dal metodo specifico adottato, come vedremo nei casi seguenti. Se risolviamo questo classico problema di geometria analitica, ovvero determiniamo il punto di intersezione della retta con l'asse x, otteniamo la soluzione x_{n+1}, che risulta essere:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{q_n} \qquad \forall n \geq 0$$

Abbiamo dunque determinato un metodo per generare una successione di valori $\{x_n\}$ basandoci su un approccio puramente geometrico, sfruttando il valore della funzione f nel punto x_n. Abbiamo inoltre individuato una formula generale che consente di passare da x_n a x_{n+1}, la quale dipende essenzialmente dalla pendenza q_n della retta considerata. È dunque evidente che questo procedimento definisce una famiglia di metodi, caratterizzata dall'uso di una retta passante per i punti $(x_n, f(x_n))$ e x_{n+1}, con pendenza q_n. Una volta specificato il criterio con cui determinare q_n, il metodo numerico risulta completamente definito. Di seguito, esaminiamo tre esempi, in ciascuno dei quali specificheremo la forma di q_n.

Esaminiamo il primo metodo, noto come metodo delle corde, il più semplice tra quelli considerati. Sia $f(x)$ una funzione arbitraria definita nell'intervallo $[a, b]$. Nel caso del metodo delle corde, si assume che la retta utilizzata abbia una pendenza costante. Ovvero, $q_n = q$ è fissato per ogni iterazione n. Quindi, $q_n = q$ è indipendente da n. In particolare, la pendenza q è stabilita dai valori della funzione agli estremi dell'intervallo, ossia $f(a)$ e $f(b)$. In questo modo, stiamo consideriamo la retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, ovvero la corda dell'intervallo $[a, b]$, che mantiene una pendenza costante per tutta la procedura iterativa. Analizziamo ora il funzionamento dettagliato del metodo.

Supponiamo di avere un punto x_n e analizziamo il procedimento per determinare x_{n+1}. Consideriamo il valore della funzione nel punto x_n , ovvero $f(x_n)$, e tracciamo una retta passante per il punto $(x_n, f(x_n))$ con una pendenza fissata q. Questa retta sarà parallela alla corda che collega i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, avendo la stessa pendenza q. Il punto di intersezione di questa retta con l'asse x determina il nuovo valore x_{n+1} .

La pendenza q_n nel caso del metodo delle corde è costante e vale

$$q_n = q = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ovvero il rapporto incrementale della funzione f nell'intervallo $[a, b]$. Di conseguenza la formula ricorsiva del metodo delle corde è

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{q} = x_n - \frac{b - a}{f(b) - f(a)} f(x_n) \qquad \forall n \geq 0$$

Il metodo delle corde rappresenta un caso particolare della famiglia di metodi precedentemente descritta, in quanto utilizza una retta di pendenza costante, determinata dal rapporto incrementale della funzione f nell'intervallo $[a, b]$. Tra i metodi di questa famiglia, il metodo delle corde è il più semplice da concepire e implementare.

Analizziamo ora come modificare il metodo delle corde per ottenere metodi numerici più sofisticati. Se, invece di utilizzare un rapporto incrementale fissato, adottassimo un rapporto incrementale variabile, la corda non manterrebbe una pendenza costante, ma la sua inclinazione cambierebbe a ogni iterazione. Questo approccio consente di sfruttare più informazioni sul comportamento della funzione $f(x)$, migliorando la velocità di convergenza del metodo verso la radice α.

La pendenza della retta può essere determinata in modi diversi:

1. Utilizzando il rapporto incrementale tra gli ultimi due punti calcolati, ottenendo un metodo che sfrutta informazioni aggiornate a ogni iterazione. Questa strategia sarà la base del Metodo delle Secanti.

2. Impiegando la derivata prima della funzione nel punto corrente, generando così un metodo che utilizza la pendenza locale della funzione. Questa strategia sarà la base del Metodo di Newton.

Analizziamo entrambe queste strategie nel dettaglio.

Il metodo delle secanti rappresenta un'estensione del metodo delle corde, in cui la pendenza della retta non è fissa ma varia a ogni iterazione. Consideriamo una funzione arbitraria $f(x)$ che interseca l'asse delle ascisse x in un punto α e due valori iniziali x_{n-1} e x_n. Per costruire il metodo:

1. si calcola la retta secante passante per i punti $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ e $(x_n, f(x_n))$. Ovvero, andiamo a prendere la retta la cui pendenza è individuata dalla differenza di valori di f negli estremi $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ e $(x_n, f(x_n))$. Abbiamo di fatto sostituito ad $[a, b]$ gli ultimi valori generati $[x_{n-1}, x_n]$;
2. Si determina l'intersezione della secante con l'asse x, individuando il nuovo valore x_{n+1};
3. Il processo viene iterato, utilizzando i due ultimi valori calcolati per aggiornare la secante e trovare successivamente x_{n+2} e così via.

Nel caso del metodo delle secanti q_n, che dipende da n, è il coefficiente angolare della retta secante generica, ed è dunque uguale a

$$q_n = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$

Da cui si ottiene la formula iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{q_n} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n) \qquad \forall n \geq 1$$

Osserviamo, con attenzione, che in questo caso la formula iterativa parte da $n = 1$. Infatti, a differenza del metodo delle corde, che richiede un solo valore iniziale x_0, il metodo delle secanti necessita di due valori iniziali x_0 e x_1 per poter calcolare la prima iterazione del metodo.

Il metodo di Newton rappresenta un'ulteriore evoluzione del metodo delle secanti, in cui la secante viene sostituita dalla tangente alla funzione nel punto x_n. Se la secante permette di esprimere il comportamento della curva meglio di quanto non faccia la corda, è sicuro che la tangente permette di descrivere la pendenza della curva nella maniera più accurata possibile. Poiché la tangente descrive con maggiore precisione il comportamento locale della curva rispetto alla secante, questo metodo fornisce una convergenza più rapida.

Consideriamo una funzione $f(x)$ derivabile nel dominio considerato e un punto x_n. Supponiamo che $f(x)$ abbia una radice: interseca l'asse reale in un punto α. Per costruire il metodo:

1- Dato x_n, si calcola $f(x_n)$;
2- Si calcola la tangente alla curva $f(x)$ nel punto $(x_n, f(x_n))$;
3- Si determina l'intersezione della tangente con l'asse x, individuando il nuovo valore x_{n+1};
4- Si itera il processo, utilizzando sempre la tangente nel punto più recente per migliorare l'approssimazione di α.

Il vantaggio del metodo di Newton rispetto ai metodi precedenti è evidente anche a livello grafico. Tracciare la tangente alla curva nel punto x_n fornisce un'informazione estremamente precisa sulla

pendenza locale della funzione, consentendo un rapido avvicinamento al punto di intersezione con l'asse x, ossia alla radice α della funzione f.
Nel metodo di Newton, la pendenza della retta tangente è data dalla derivata prima della funzione nel punto x_n , ovvero

$$q_n = f'(x_n) = \frac{df}{dx}(x_n).$$

La formula iterativa del metodo di Newton è:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{q_n} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \forall n \geq 0$$

È importante sottolineare che, per la prima volta, viene introdotto l'uso della derivata prima della funzione. Fino a questo punto, i metodi precedenti si basavano esclusivamente sui valori della funzione $f(x)$ nei punti iterati, mentre ora si sfrutta anche l'informazione sulla variazione locale della funzione. Di conseguenza, affinché il metodo di Newton sia applicabile, la funzione f deve essere continua e derivabile. In particolare, affinché il metodo di Newton sia effettivamente applicabile è necessario che $f(x)$ sia derivabile in un intorno della radice. Inoltre, poiché ad ogni iterazione si divide per $f'(x_n)$, è fondamentale che la derivata non si annulli nei punti considerati, altrimenti il metodo degenererebbe, generando divisioni per zero e compromettendo la convergenza.

Abbiamo analizzato diversi metodi per la ricerca degli zeri di funzioni non lineari, esaminandone il comportamento geometrico. In particolare, abbiamo formulato considerazioni euristiche e intuitive sulla velocità di convergenza di queste successioni verso la radice. Ad esempio, ci aspettiamo che il metodo di Newton, quando applicabile, converga più rapidamente del metodo delle secanti, il quale a sua volta risulta più veloce del metodo delle corde. Questo perché sono basati su concetti geometrici sempre più sofisticati. E quindi sono in gerarchia da questo punto di vista.

Nelle lezioni successive di questo nucleo, definiremo in dettaglio il concetto di velocità di convergenza. Ovvero, ci proporremo di caratterizzare i metodi in base al loro ordine. In particolare, questo ordine sarà legato alla velocità di convergenza. Anticipiamo in questa fase conclusiva della lezione che il metodo di Newton è il metodo della famiglia dei metodi (Corde, Secanti e Newton) che converge con una velocità superiore. In particolare, esso converge quadraticamente se $f'(\alpha) \neq 0$ (ovvero α è una radice semplice).

Vogliamo ora approfondire la caratterizzazione della proprietà di convergenza del metodo di Newton, esaminando la relazione di limite. Si può infatti verificare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{(\alpha - x_n)^2} = \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} = cost.$$

Da questo limite si nota che per avere convergenza quadratica del metodo di Newton si deve suppone che $f'(\alpha) \neq 0$ (ovvero che la radice sia una radice semplice). Infatti, se $f'(\alpha) = 0$ questa relazione non avrebbe senso, in quanto si dividerebbe per zero. Inoltre, per condurre questa analisi di convergenza (anche detta analisi dell'errore), è necessario supporre che f sia derivabile due volte in α, ossia che esista $f''(\alpha)$.

Se, invece, α è una radice multipla (cioè, $f'(\alpha) = 0$), questa relazione non ha senso, poiché il denominatore sarebbe zero. In questo caso, si osserva che l'ordine di convergenza del metodo di Newton diventa 1 (detta convergenza lineare). Tuttavia, se si conosce a priori la molteplicità della radice α, possiamo modificare il metodo di Newton come segue

$$x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad \forall n \geq 0$$

dove m è la molteplicità di α. Parleremo di una radice α di molteplicità m se tutte le derivate di f, calcolate in α, fino all'ordine $m - 1$ sono uguali a zero. Conoscendo a priori la molteplicità m della radice α, possiamo modificare il metodo di Newton inserendo questa costante m, e in tal caso il metodo di Newton modificato continuerà a convergere quadraticamente.