



CALCOLO DEGLI AUTOVALORI E FONDAMENTI DELLA MATEMATICA NUMERICA (il metodo delle potenze)

In questa lezione iniziamo a trattare, da un punto di vista numerico, il problema del calcolo degli autovalori di una matrice. In particolare, verrà un primo metodo numerico per il calcolo degli autovalori, noto come metodo delle potenze. Il metodo delle potenze è impiegato per determinare esclusivamente gli autovalori estremi di una matrice, ovvero quelli aventi modulo massimo, modulo minimo oppure, più in generale, l'autovalore più vicino a un prefissato numero complesso.

Analizziamo quindi il funzionamento del metodo delle potenze e comprendiamo il motivo del suo nome. L'obiettivo di tale metodo è approssimare l'autovalore di modulo massimo di una matrice, unitamente al corrispondente autovettore.

La prima ipotesi che si assume, nel metodo delle potenze, è che la matrice A , di cui vogliamo calcolare gli autovalori, sia diagonalizzabile. Ciò implica che A non è una matrice arbitraria, ma è una matrice che può essere trasformata in forma diagonale mediante una trasformazione X della seguente forma

$$\exists X \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ t.c. } X^{-1}AX = \Lambda,$$

dove la matrice Λ è diagonale ed ha come elementi diagonali $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

e X è la matrice degli autovettori.

Supponiamo che esista una matrice reale $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, avente lo stesso numero di righe e colonne della matrice A , tale che $X^{-1}AX = \Lambda$, Λ è una matrice diagonale i cui elementi diagonali sono gli autovalori della matrice A . Poiché si tratta di una trasformazione di similitudine, la matrice Λ condivide gli stessi autovalori della matrice A . In particolare, gli autovalori di A coincidono con gli elementi sulla diagonale principale di Λ .

Assumiamo, quindi, che la matrice A sia diagonalizzabile, nel senso sopra indicato e che la matrice X rappresenta la matrice degli autovettori di A . In effetti, per definizione di autovalore e autovettore, vale la seguente relazione

$$A\mathbf{x}^{(k)} = \lambda_k \mathbf{x}^{(k)},$$

dove λ_k è l'autovalore k -esimo e $\mathbf{x}^{(k)}$ è l'autovettore k -esimo associato a λ_k . La matrice X è la matrice che ha come colonna k -esima, il k -esimo autovettore

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1^{(k)} & & \\ \vdots & & \\ \mathbf{x}_n^{(k)} & & \end{pmatrix},$$

dove $x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ sono le componenti del k -esimo autovettore.

Riassumendo, le ipotesi che facciamo sono le seguenti:

- la matrice A è diagonalizzabile $X^{-1}AX = \Lambda$, con $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,
- X è la matrice degli autovettori $X = (\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)})$.

Supponiamo inoltre che la matrice A non sia una matrice qualunque tra quelle diagonalizzabili, ma che appartenga a una classe particolare di matrici diagonalizzabili che soddisfano la seguente condizione sugli autovalori

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$



In altre parole, si assume che il modulo dell'autovalore λ_1 sia strettamente maggiore rispetto a quello di tutti gli altri autovalori della matrice A , mentre i restanti sono ordinati in modo decrescente in base al loro modulo. Più precisamente, la condizione cruciale è che esista almeno un autovalore, il cui modulo sia strettamente maggiore rispetto a quello di tutti gli altri. Non è necessario che gli autovalori restanti siano distinti tra loro; ciò che è rilevante è la presenza di un autovalore dominante in modulo. Successivamente, si può anche assumere, senza perdita di generalità, che gli altri autovalori siano ordinati in senso decrescente rispetto al modulo.

In presenza di una situazione di questo tipo, ovvero quando esiste un autovalore dominante in modulo rispetto agli altri, è possibile costruire un algoritmo noto come metodo delle potenze, il quale opera nel modo seguente.

Sia $\mathbf{q}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ è un vettore arbitrario assegnato con norma (2 o euclidea) unitaria

$$\mathbf{q}^{(0)} \text{ t.c. } \|\mathbf{q}^{(0)}\|_2 = 1.$$

Per ogni intero $k = 1, 2, \dots$, si genera una successione di vettori e scalari secondo le seguenti relazioni iterative

$$\begin{aligned} \mathbf{z}^{(k)} &= A\mathbf{q}^{(k-1)}, \\ \mathbf{q}^{(k)} &= \frac{\mathbf{z}^{(k)}}{\|\mathbf{z}^{(k)}\|_2}, \\ \lambda^{(k)} &= (\mathbf{q}^{(k)})^T A\mathbf{q}^{(k)}. \end{aligned}$$

Consideriamo il caso $k = 1$, ovvero il primo passo del metodo delle potenze. A partire dal vettore iniziale assegnato $\mathbf{q}^{(0)}$, con norma euclidea unitaria $\|\mathbf{q}^{(0)}\|_2 = 1$, si esegue il primo passo dell'algoritmo. Nello specifico, si calcola

$$\mathbf{z}^{(1)} = A\mathbf{q}^{(0)},$$

ottenendo un vettore $\mathbf{z}^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ che, in generale, non ha norma unitaria. Si procede quindi alla normalizzazione di $\mathbf{z}^{(1)}$ rispetto alla norma euclidea

$$\mathbf{q}^{(1)} = \frac{\mathbf{z}^{(1)}}{\|\mathbf{z}^{(1)}\|_2},$$

ottenendo così un nuovo vettore unitario $\mathbf{q}^{(1)}$. Esso rappresenta l'immagine del vettore $\mathbf{q}^{(0)}$ per mezzo dell'operatore A , normalizzata rispetto alla norma 2.

Infine, si definisce la quantità scalare $\lambda^{(1)}$ come

$$\lambda^{(1)} = (\mathbf{q}^{(1)})^T A\mathbf{q}^{(1)},$$

che costituisce un'approssimazione dell'autovalore dominante della matrice A al primo passo dell'iterazione. Successivamente, si utilizza $\mathbf{q}^{(1)}$ come input del secondo passo $k = 2$ del metodo delle potenze e si ripete il processo iterativamente.

Andiamo a esaminare ora l'evoluzione geometrica del metodo delle potenze. Supponendo di partire da un vettore iniziale $\mathbf{q}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ e applicando la matrice A a questo vettore, si ottiene un nuovo vettore $\mathbf{q}^{(1)} = A\mathbf{q}^{(0)}$. Iterando ulteriormente il processo, si ha il vettore $\mathbf{q}^{(2)} = A\mathbf{q}^{(1)} = A^2\mathbf{q}^{(0)}$ e, in generale, al passo k

$$\mathbf{q}^{(k)} = A^k\mathbf{q}^{(0)}.$$

Pertanto, l'algoritmo genera una successione di vettori ottenuti tramite applicazioni successive della matrice A al vettore iniziale $\mathbf{q}^{(0)}$. Continuando questo processo, fino al limite, troviamo un vettore che



ha la stessa direzione e lo stesso verso del primo autovettore della matrice A , ovvero $\mathbf{x}^{(1)}$. In particolare, questo vettore sarà la potenza “infinita” (in maniera formale) della matrice A applicata a $\mathbf{q}^{(0)}$

$$\mathbf{q}^{(0)} \rightarrow \mathbf{q}^{(1)} = A\mathbf{q}^{(0)} \rightarrow \mathbf{q}^{(2)} = A\mathbf{q}^{(1)} = A^2\mathbf{q}^{(0)} \rightarrow \mathbf{q}^{(3)} = A\mathbf{q}^{(2)} = A^3\mathbf{q}^{(0)} \rightarrow \dots$$

Generiamo in questo modo le potenze di ordine arbitrario della matrice applicate al vettore $\mathbf{q}^{(0)}$. I vettori così ottenuti, tramite l'applicazione delle potenze di A , convergono a un autovettore di A .

Applicando il quoziente di Rayleigh, introdotto nella lezione precedente, si osserva che, se $\mathbf{x}^{(1)}$ è un autovettore di A (o un vettore proporzionale a un autovettore, dato che gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa), allora il valore

$$\lambda_1 = \frac{\mathbf{x}^{(1)T} A \mathbf{x}^{(1)}}{\mathbf{x}^{(1)T} \mathbf{x}^{(1)}},$$

che corrisponde al primo autovalore λ_1 . Questo spiega perché, nelle iterazioni precedenti, si è calcolato il quoziente di Rayleigh applicato al vettore $\mathbf{q}^{(k)}$ alla generica iterazione k . L'obiettivo di tale procedimento è che i vettori $\mathbf{q}^{(k)}$ convergano alla direzione del primo autovettore, ovvero all'autovettore associato all'autovalore di modulo massimo. Di conseguenza, il quoziente di Rayleigh calcolato su questi vettori converge all'autovalore di modulo massimo. In altre parole, la successione dei valori complessi ottenuti dai quozienti di Rayleigh, calcolati su vettori $\mathbf{q}^{(k)}$ che tendono alla direzione del primo autovettore, converge all'autovalore di modulo massimo.

Procediamo ora con alcune osservazioni riguardanti il metodo delle potenze

Osservazione 1: La normalizzazione di $\mathbf{q}^{(k)}$, definita come

$$\mathbf{q}^{(k)} = \frac{\mathbf{z}^{(k)}}{\|\mathbf{z}^{(k)}\|_2},$$

ossia la divisione di $\mathbf{z}^{(k)}$ per la sua norma euclidea, è fondamentale per evitare problemi di overflow quando $|\lambda_1| > 1$ (cioè, quando il modulo di λ_1 è maggiore di uno) o di underflow quando $|\lambda_1| < 1$ (cioè, quando il modulo di λ_1 è minore di uno). Definiremo in modo dettagliato, nelle prossime lezioni, i concetti di overflow e underflow. Per ora osserviamo che, se si applicano ripetutamente le potenze di A a un vettore che converge all'autovettore associato all'autovalore di modulo massimo, i quozienti di Rayleigh saranno proporzionali a potenze di λ_1 . Nel caso $|\lambda_1| > 1$, tali potenze crescono illimitatamente, causando quello che viene detto overflow numerico. Al contrario, se $|\lambda_1| < 1$ le potenze tendono a zero, decrescono illimitatamente, provocando problemi di underflow. La normalizzazione previene entrambi questi fenomeni. Ossia previene che i valori calcolati per $\lambda^{(k)} = (\mathbf{q}^{(k)})^T A \mathbf{q}^{(k)}$ crescano o decrescano in modo incontrollato.

Osservazione 2: il prodotto scalare

$$\lambda^{(k)} = (\mathbf{q}^{(k)})^T A \mathbf{q}^{(k)},$$

corrisponde, per le considerazioni precedenti, al quoziente di Rayleigh calcolato sui vettori $\mathbf{q}^{(k)}$, i quali convergono alla direzione del primo autovettore.

Il metodo delle potenze è un metodo iterativo in quanto, ad ogni passo k , si determina un vettore $\mathbf{q}^{(k)}$ e un numero complesso $\lambda^{(k)}$, che convergano rispettivamente al primo autovettore e al primo autovalore della matrice A .

Analizziamo ora la velocità di convergenza del metodo delle potenze. In altre parole, quanto rapidamente converge il metodo delle potenze.



Supponiamo che il vettore iniziale $\mathbf{q}^{(0)}$ sia espresso come

$$\mathbf{q}^{(0)} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n,$$

dove $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ sono gli autovettori della matrice A e $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sono dei coefficienti. Stiamo quindi considerando $\mathbf{q}^{(0)}$ come una combinazione lineare degli autovettori \mathbf{x}_i con coefficienti α_i , per $i = 1, \dots, n$, al fine di rappresentare il vettore iniziale $\mathbf{q}^{(0)}$. Supponiamo inoltre che $\alpha_1 \neq 0$ e che gli autovettori \mathbf{x}_i siano normalizzati, ovvero

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \|\mathbf{x}_i\|_2 = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Definiamo inoltre

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(k)} = \frac{\mathbf{q}^{(k)}}{\alpha_1 \lambda_1^k}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

dove $\mathbf{q}^{(k)}$ è il vettore calcolato al passo k nel metodo delle potenze e α_1 è il coefficiente noto dalla rappresentazione di $\mathbf{q}^{(0)}$. Si può dimostrare che il limite di $\tilde{\mathbf{q}}^{(k)}$, per k che tende all'infinito, è uguale a $\pm \mathbf{x}_1$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{\mathbf{q}}^{(k)} = \pm \mathbf{x}_1.$$

Di conseguenza, è vero che $\tilde{\mathbf{q}}^{(k)}$ sta convergendo alla direzione del primo autovettore \mathbf{x}_1 . Inoltre, $|\lambda^{(k)} - \lambda_1|$ è dell'ordine di $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = O\left(\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k\right).$$

Questo significa che, considerando la differenza in valore assoluto (ossia in modulo, dato che i valori possono essere complessi) tra il k -esimo quoziente di Rayleigh e il primo autovalore λ_1 , tale differenza è limitata superiormente da una costante moltiplicata per $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$. Poiché λ_1 è il più grande (in modulo) di tutti gli autovalori, allora quantità $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ avrà un modulo strettamente minore di uno. Inoltre, dato che stiamo elevando questo modulo alla k , $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$, stiamo costruendo una successione di potenze con base $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 1$ ed è allora chiaro che queste potenze $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$ tenderanno a zero quando k tenderà all'infinito.

Inoltre, è possibile anche fornire una stima della convergenza dell'autovettore. Considerando la norma 2 della differenza tra $\tilde{\mathbf{q}}^{(k)}$ e il primo autovettore \mathbf{x}_1 , si ha

$$\|\tilde{\mathbf{q}}^{(k)} - \mathbf{x}_1\|_2 \leq \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k \sqrt{\sum_{i=2}^n \left(\frac{\alpha_i}{\alpha_1}\right)^2},$$

dove la norma è limitata superiormente dal prodotto tra di $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$ e una quantità data dalla radice quadrata della somma dei quadrati dei rapporti $\frac{\alpha_i}{\alpha_1}$, con α_i coefficienti dello sviluppo del vettore iniziale $\mathbf{q}^{(0)}$ nella base degli autovettori \mathbf{x}_i . In conclusione, abbiamo dimostrato che il metodo delle potenze converge e ne abbiamo anche caratterizzato la velocità di convergenza.

Possiamo riassumere questi risultati affermando che

il metodo delle potenze converge alla coppia $(\lambda_1, \mathbf{x}_1)$ con velocità lineare rispetto a $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$.



Infatti, ad ogni iterazione l'errore si riduce, a priori, di un fattore $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$, e, dopo k iterazioni, l'errore si è ridotto di $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$. Di conseguenza, si ha convergenza lineare e il fattore di convergenza, ovvero il tasso di diminuzione dell'errore, è limitato superiormente da $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$.

Inoltre, se la matrice di partenza è non solo diagonalizzabile, ma anche simmetrica (e quindi certamente diagonalizzabile, poiché si può utilizzare la base dei suoi autovettori), si può dimostrare che la velocità di convergenza è quadratica rispetto a $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$. In particolare, una velocità di convergenza quadratica significa che, anziché avere una stima dell'errore del tipo di $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^k$, si ottiene una stima del tipo di $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}$.

Ciò implica che ad ogni iterazione l'errore viene ridotto di un fattore pari a $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^2$. Poiché $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right| < 1$, allora risulta evidente che $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^2$ è più piccolo di quanto lo sia $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$, garantendo quindi una convergenza più rapida.

In conclusione, il metodo delle potenze, nel caso di matrici diagonalizzabili e sotto le ipotesi fin qui esposte, converge all'autovettore dominante con velocità lineare, con fattore di convergenza pari a $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$.

Inoltre, se la matrice è non solo diagonalizzabile ma anche simmetrica, la convergenza risulta essere di ordine quadratico.

Osserviamo questo tipo di comportamento nel seguente esempio. Consideriamo la matrice reale e simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori (reali) sono

$$\lambda_1 = 7.0747, \quad \lambda_2 = -3.1879, \quad \lambda_3 = -0.8868,$$

ed il primo autovettore normalizzato è

$$\mathbf{x}_1 = [0.634, 0.505, 0.5844]^T.$$

Consideriamo inoltre la seguente matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2.48 & 5.37 & 3.52 \\ 3.19 & -0.17 & 2.73 \\ 1.65 & 1.54 & 0.69 \end{pmatrix},$$

la quale è una matrice costruita in modo tale che abbia esattamente gli stessi autovalori della matrice A . Si osservi che la matrice M non è più simmetrica. Pertanto, abbiamo costruito due matrici: una simmetrica A e l'altra non simmetrica M , che tuttavia condividono gli stessi autovalori. In particolare, il rapporto $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ è identico in entrambi i casi, poiché, avendo gli stessi autovalori, anche il loro rapporto risulta uguale. Questa coppia di matrici A e M rappresenta un buon esempio per valutare la validità del risultato teorico precedentemente enunciato, ovvero che la convergenza avviene ad ogni iterazione con un fattore di riduzione dell'errore che è $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|$ nel primo caso e $\left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^2$ nel secondo. Pertanto, ci si attende che nel secondo caso la convergenza sia significativamente più rapida rispetto al primo.

La Figura 1 mostra, in scala semilogaritmica, il numero di iterazioni e l'errore commesso rispettivamente nel caso della matrice non simmetrica M e nel caso della matrice simmetrica A . Le rette presenti nel grafico indicano le pendenze delle due curve di convergenza. Da un'analisi qualitativa si

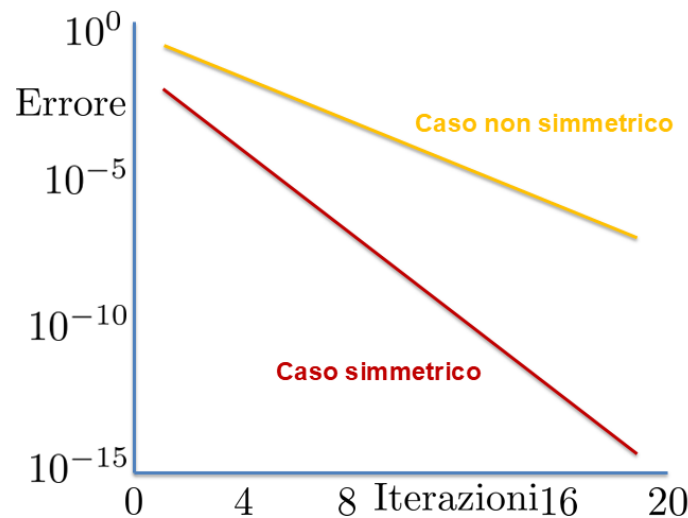


Figura 1: Numero di iterazioni e errore commesso nel metodo delle potenze, rispettivamente nel caso della matrice non simmetrica M e nel caso della matrice simmetrica A .

osserva che, nel caso della matrice non simmetrica, dopo quattro iterazioni l'errore è approssimativamente pari a 10^{-2} , dopo otto iterazioni scende a circa 10^{-4} , e dopo sedici iterazioni raggiunge l'ordine di 10^{-6} . Nel caso della matrice simmetrica, la curva dell'errore presenta una pendenza nettamente maggiore rispetto a quella del caso non simmetrico.

In conclusione, abbiamo illustrato il metodo delle potenze per il calcolo dell'autovalore di modulo massimo, evidenziando il diverso comportamento della convergenza nei casi di matrice simmetrica e non simmetrica.

Essendo il metodo delle potenze un procedimento iterativo, risulta necessario definire un criterio di arresto per stabilire quando interrompere l'esecuzione dell'algoritmo. Nei precedenti nuclei, abbiamo analizzato criteri di arresto sia per metodi iterativi applicati a sistemi lineari, sia per equazioni o sistemi non lineari. Analogamente, anche in questo contesto è fondamentale introdurre un meccanismo di arresto, ovvero una stima a posteriori, che consenta di garantire che, fermandosi a una determinata iterazione, l'errore commesso sia inferiore a una data tolleranza prefissata.

Le stime a posteriori si basano sull'utilizzo di quantità già calcolate in precedenza. Supponiamo che $(\hat{\lambda}, \hat{x})$ rappresentino un'approssimazione dell'autovalore λ e dell'autovettore x della matrice A , dove $(\hat{\lambda}, \hat{x})$ sono ottenuti tramite un determinato metodo, ad esempio il metodo delle potenze interrotto dopo un certo numero di iterazioni. Possiamo quindi definire il residuo \hat{r} , che misura la deviazione di $\hat{\lambda}$ e \hat{x} dal soddisfare esattamente la relazione di autovalore/autovalore per la matrice A , come segue

$$\hat{r} = A\hat{x} - \hat{\lambda}\hat{x}, \quad (\text{residuo}).$$

È evidente che, se $\hat{\lambda}$ e \hat{x} fossero esattamente l'autovalore e l'autovettore esatti, la differenza $A\hat{x} - \hat{\lambda}\hat{x}$ sarebbe nulla. Poiché $\hat{\lambda}$ e \hat{x} non sono esattamente l'autovalore e l'autovettore esatti, tale differenza - ovvero il vettore residuo \hat{r} - è diversa dal vettore nullo. Il vettore residuo è calcolabile, in quanto i termini $A\hat{x}$ e $\hat{\lambda}\hat{x}$ sono entrambi disponibili. Dalla conoscenza di \hat{r} si può dedurre la seguente proprietà: dato $\hat{\lambda}$, esiste un autovalore esatto $\lambda \in \sigma(A)$ tale che la distanza tra $\hat{\lambda}$ e λ è al più pari al rapporto tra la norma euclidea del residuo e la norma euclidea di \hat{x} , ovvero



$$\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\hat{\lambda} - \lambda| \leq \frac{\|\hat{\mathbf{r}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2}.$$

Alla destra di questa disuguaglianza si trovano grandezze controllabili o, meglio, calcolabili, ossia $\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{x}}$. Di conseguenza, possiamo determinare il valore della quantità $\frac{\|\hat{\mathbf{r}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{x}}\|_2}$. È quindi possibile verificare se tale quantità risulti inferiore a una tolleranza ϵ , prefissata a priori. Nel caso in cui la condizione sia soddisfatta, si può interrompere il processo iterativo, poiché l'approssimazione $\hat{\lambda}$ risulta sufficientemente vicina all'autovalore esatto λ .

Procediamo ora ad analizzare il comportamento del metodo delle potenze nell'esempio precedentemente presentato, partendo dal vettore $\mathbf{q}^{(0)}$

$$\mathbf{q}^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{3}} [1, 1, 1]^T,$$

dove la divisione per $\sqrt{3}$ è effettuata al fine di normalizzare il vettore iniziale. Dopo cinque iterazioni del metodo delle potenze applicato alla matrice A , si ottengono i seguenti valori calcolati tramite i quozienti di Rayleigh

$$\lambda^{(5)} = 7.0746, \quad \mathbf{q}^{(5)} = [0.635, 0.595, 0.583]^T,$$

Potremmo quindi prendere

$$\hat{\lambda} = \lambda^{(5)}, \quad \mathbf{q}^{(5)} = \hat{\mathbf{x}},$$

e calcolare il residuo corrispondente. Notiamo che

$$|\lambda^{(5)} - \lambda_1| = 1.17 \cdot 10^{-5},$$

mentre la norma del residuo è

$$\|\hat{\mathbf{r}}\|_2 = \|A\hat{\mathbf{x}} - \hat{\lambda}\hat{\mathbf{x}}\|_2 = 1.1 \cdot 10^{-2},$$

e quindi la stima teorica vista in precedenza (con $\|\hat{\mathbf{x}}\|_2 = 1$)

$$\min_{\lambda \in \sigma(A)} |\hat{\lambda} - \lambda| \leq \|\hat{\mathbf{r}}\|_2.$$

è soddisfatta. Infatti, questa stima indica che l'errore sull'autovalore è minore o uguale all'errore sul residuo normalizzato. Pertanto, si ha

$$1.17 \cdot 10^{-5} < 1.1 \cdot 10^{-2}.$$

quindi la stima a posteriori è certamente soddisfatta.