



RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI: METODI ITERATIVI (Metodi iterativi classici: Jacobi, Gauss-Seidel)

Abbiamo esaminato nella lezione precedente come è possibile ottenere metodi iterativi per la risoluzione di un sistema lineare, scomponendo la matrice A del sistema come la differenza tra due matrici P e N . A partire da questa scomposizione, che abbiamo denominato splitting, abbiamo generato una famiglia di metodi iterativi, analizzandone successivamente la convergenza.

In questa lezione, inizieremo a considerare esempi specifici di metodi iterativi, ossia strategie concrete per la scelta delle matrici P e N , e, di conseguenza, il tipo di successione che desideriamo determinare. Partiremo dall'analisi dei metodi iterativi classici, tra cui quelli di Jacobi, Gauss-Seidel e rilassamento (SOR).

Iniziamo con il metodo iterativo di Jacobi. Per definire questo metodo, possiamo immaginare la matrice A come composta da tre sottomatrici

$$A = D + E + F,$$

la sua parte diagonale D , la parte sotto-diagonale E (ovvero la parte triangolare inferiore) e la parte sopra-diagonale F (la parte triangolare superiore). Dunque, D è la diagonale di A

$$D = \text{diag}(a_{ii}),$$

dove abbiamo indicato con questa notazione che D è una matrice diagonale, di dimensioni $n \times n$, che ha sulla diagonale principale in posizione i -esima, l'elemento a_{ii} che è un elemento diagonale della matrice A . La matrice triangolare inferiore E , di dimensioni $n \times n$, ha elementi e_{ij} definiti come segue

$$e_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i > j \\ 0 & i \leq j \end{cases}.$$

In altre parole, gli elementi di E corrispondono agli stessi elementi di A quando l'indice di riga i è maggiore dell'indice di colonna j , mentre sono uguali a zero quando $i \leq j$. Quindi, E è una matrice piena, ma ha solo valori non nulli nella parte sotto-diagonale.

Infine, la matrice F , anch'essa di dimensioni $n \times n$, è una matrice triangolare superiore, e avrà come elementi gli stessi valori di A nella parte triangolare superiore, mentre gli elementi nella parte diagonale e nella parte triangolare inferiore saranno uguali a zero

$$f_{ij} = \begin{cases} 0 & i \geq j \\ a_{ij} & i < j \end{cases}.$$

Ovvero, gli elementi di F sono gli stessi elementi di A se i è maggiore di j , ovvero se l'indice di riga è maggiore dell'indice di colonna, e sono uguali a zero se $i \leq j$.

In sintesi:

- Matrice D : è una matrice diagonale, di dimensioni $n \times n$, che ha sulla diagonale principale gli elementi diagonali della matrice A ;



- Matrice E : è una matrice completa (di dimensioni $n \times n$), ma con valori diversi da zero esclusivamente nella parte sotto-diagonale. Gli altri elementi (diagonale e sopra-diagonale) sono uguali a zero;
- Matrice F : è una matrice completa di dimensioni $n \times n$, ma è triangolare superiore. Gli elementi nella parte triangolare superiore corrispondono agli stessi valori di A , mentre gli elementi nella parte diagonale e nella parte triangolare inferiore sono pari a zero.

Dunque, possiamo vedere come, in questo caso, si definiscono le matrici di splitting P ed N per la realizzazione del metodo di Jacobi. Ricordando che

$$A = P - N,$$

e prendendo P uguale a D (matrice diagonale) e N uguale a $D - A$ (che sarà a sua volta uguale a $-(E + F)$), otteniamo

$$P = D, \quad N = D - A = -(E + F).$$

Pertanto, tale scelta risulta essere quella adottata nel caso del metodo di Jacobi.

Esaminiamo ora il procedimento mediante il quale si ottiene la successione iterativa generata dal metodo di Jacobi. Ricordiamo che il metodo iterativo generico è stato definito come

Assegnato $\mathbf{x}^{(0)}$, si generi una successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ risolvendo

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad k \geq 0,$$

allora per le scelte

$$P = D, \quad N = D - A = -(E + F),$$

avremo che

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = (D - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}, \quad k \geq 0,$$

Esaminiamo adesso le formule algebriche del metodo di Jacobi. In altre parole, intendiamo comprendere come tale metodo consenta di generare la successione iterativa $\mathbf{x}^{(k)}$ e, in particolare, come permetta di calcolare le componenti $x_i^{(k+1)}$ al passo $k + 1$ in funzione delle componenti $x_i^{(k)}$ del passo k , a partire da un vettore iniziale $\mathbf{x}^{(0)}$ supposto noto. Procediamo dunque a tradurre algebricamente la relazione precedente in termini di componenti. Se caratterizziamo questa relazione

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = (D - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b},$$

in termini di componenti, torniamo che

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i,$$

dove a_{ii} sono gli elementi diagonali di D . Inoltre, la sommatoria è espressa con j diverso da i in quanto stiamo escludendo la matrice diagonale, ed è presa con il segno negativo poiché stiamo considerando $-A$. In altre parole, stiamo quindi scrivendo l'equazione per la i -esima componente, che corrisponde all'identità vettoriale $D\mathbf{x}^{(k+1)} = (D - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$. Dividendo la relazione $a_{ii}x_i^{(k+1)} = - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i$ per a_{ii} , che deve essere diverso da zero, poiché l'ipotesi che abbiamo fatto per garantire il corretto funzionamento del metodo iterativo è che P sia non singolare (e in questo caso $P = D$, e la non singolarità di D equivale ad assumere che tutti gli elementi diagonali siano diversi da zero), otteniamo la formula generale



$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad i = 1, \dots, n, \quad k \geq 0,$$

che ci dice qual è la componente i -esima del nuovo vettore $\mathbf{x}^{(k+1)}$.

Ora ci proponiamo di individuare la matrice di interazione del metodo di Jacobi cercando le condizioni che garantiscano la convergenza del metodo iterativo di Jacobi. Per calcolare la matrice di iterazione B , dobbiamo determinare

$$B = P^{-1}N.$$

In particolare, nel caso del metodo di Jacobi, otteniamo

$$B_J = -D^{-1}(E + F),$$

dove B_J rappresenta la matrice di iterazione di Jacobi. Ora desideriamo comprendere quando questa matrice di iterazione ha un raggio spettrale minore di uno, ossia quando

$$\rho(B_J) < 1.$$

Questo esprime la condizione (necessaria e sufficiente) per la convergenza del metodo di Jacobi. Esiste anche una condizione solo sufficiente affinché il metodo di Jacobi converga sicuramente, che si verifica quando la matrice A è a dominanza diagonale stretta. Ricordiamo che una matrice è a dominanza diagonale stretta se, per ogni riga, gli elementi diagonali, presi in valore assoluto, sono strettamente maggiori della somma di tutti gli elementi extra-diagonali, anch'essi presi in valore assoluto.

Esaminiamo ora come generalizzare il metodo di Jacobi ad altri metodi iterativi, che, a parità di proprietà sulla matrice A , in generale convergeranno più rapidamente del metodo di Jacobi. La prima generalizzazione riguarda il cosiddetto metodo di Gauss-Seidel (GS).

Nel metodo di Gauss-Seidel, la matrice P di iterazione non è più limitata alla sola parte diagonale della matrice A , ma comprende anche la parte sotto-diagonale. In altre parole, P è una matrice completa che ha elementi uguali a zero al di sopra della diagonale principale

$$P = D + E$$

Pertanto, il metodo di Gauss-Seidel utilizza per la matrice P informazioni non solo dalla diagonale, ma anche dalla parte inferiore della matrice. Di conseguenza, ricordando che $A = P - N$ (con $A = D + E + F$) e avendo effettuato la scelta $P = D + E$, la matrice N sarà

$$N = -F.$$

La relazione vettoriale iterativa per il metodo di GS è quindi

$$(D + E)\mathbf{x}^{(k+1)} = -F\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b} \quad k \geq 0.$$

Vediamo adesso in termini di componenti come caratterizzare il metodo GS. Desideriamo quindi trovare la relazione che permette di legare fra loro la nuova componente al passo $k + 1$ alle vecchie componenti al passo k . Riscrivendo la relazione $(D + E)\mathbf{x}^{(k+1)} = -F\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$ in termini di componenti, ed andando a caratterizzare E ed F correttamente, troviamo la seguente relazione algebrica

$$\sum_{j \leq i} a_{ij} x_j^{(k+1)} = - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i.$$

Se si isola l'elemento diagonale i dalla prima sommatoria, possiamo verificare che



$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad i = 1, \dots, n \quad k \geq 0.$$

Il termine $\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)}$ rappresenta la novità rispetto al metodo di Jacobi. Infatti, il metodo di Jacobi corrisponderebbe esattamente alla stessa relazione, ma con $x_j^{(k)}$ al posto di $x_j^{(k+1)}$. Osserviamo inoltre, che questo nuovo termine rappresenta le componenti che sono già state calcolate per $j = 1, \dots, i-1$. Per esempio, fissato una certa componente, per esempio $i = 10$, tutte le componenti di indice inferiore a 10 sono già state determinate, e pertanto possono essere utilizzate per calcolare la decima componente. In questo modo, stiamo sfruttando le componenti non appena vengono generate, il che implica che il metodo di GS ha una dinamica di aggiornamento delle componenti della soluzione certamente superiore e più evoluta rispetto a quella del metodo di Jacobi. Per le componenti che non sono ancora disponibili (quindi dalla $i+1$ in poi), queste vengono lasciate al passo precedente (ovvero il passo k), il che giustifica la presenza della seconda sommatoria $\sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}$.

Poiché la matrice P nel caso di GS è una matrice triangolare inferiore, la soluzione del sistema può essere calcolata attraverso il metodo delle sostituzioni in avanti, che abbiamo già visto nell'ambito dei sistemi triangolari. Pertanto, questa relazione algebrica sulle componenti coincide, di fatto, con la relazione che si otterrebbe se partendo dalla matrice triangolare inferiore si applicasse la formula risolutiva delle sostituzioni in avanti, che abbiamo trattato nel nucleo precedente.

La matrice di iterazione di GS è

$$B_{GS} = P^{-1}N = -(D + E)^{-1}F.$$

Esaminiamo adesso le condizioni sulla matrice A che ne garantiscano la convergenza per il metodo di GS. Si individuano tre classi di matrici per le quali il metodo GS converge certamente:

1. Matrici a dominanza diagonale stretta: analogamente al caso del metodo di Jacobi, se A presenta dominanza diagonale stretta, il metodo di GS converge sicuramente.
2. Matrici simmetriche definite positive (SDP): se la matrice A è SDP, il metodo di GS converge. Tale proprietà non si estende, invece, al metodo di Jacobi, in quanto esistono casi in cui matrici SDP non inducono successioni convergenti mediante Jacobi.
3. Matrici simmetriche definite positive tridiagonali: questa tipologia è particolarmente interessante poiché ricorre con frequenza nelle applicazioni ingegneristiche. Una matrice tridiagonale è caratterizzata dal fatto di avere elementi non nulli esclusivamente sulla diagonale principale, nonché sulle diagonali immediatamente superiore e inferiore. Una matrice tridiagonale diventa simmetrica se gli elementi sopra la diagonale principale sono i trasposti di quelli posti al di sotto. Richiedendo inoltre che la matrice sia definita positiva, si ottiene la condizione $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} > 0$ ($\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$). Se la matrice A possiede tali caratteristiche (tridiagonale e SDP), non solo il metodo di GS converge, ma è possibile caratterizzare anche il suo raggio spettrale, ossia il raggio spettrale della relativa matrice di iterazione. In particolare, si ha che



$$\rho(B_{GS}) = [\rho(B_J)]^2.$$

dove $\rho(B_{GS})$ e $\rho(B_J)$ rappresentano, rispettivamente, il raggio spettrale delle matrici di iterazione dei metodi di GS e di Jacobi. Poiché la convergenza richiede che il raggio spettrale sia minore di uno, elevare al quadrato tale valore implica un risultato più piccolo; di conseguenza, il raggio spettrale della matrice di iterazione di GS è inferiore a quello della matrice di iterazione di Jacobi. Essendo la velocità di convergenza direttamente correlata alla dimensione del raggio spettrale, il metodo di GS, a priori, presenta prestazioni migliori rispetto al metodo di Jacobi.