RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI: METODI DIRETTI (Fattorizzazioni di Cholesky e Thomas)

In questa lezione, esamineremo l'applicazione della fattorizzazione LU a due casi particolarmente rilevanti, ossia quello delle matrici simmetriche e definite positive e il caso di un sistema con matrice tridiagonale. Se la matrice A è simmetrica e definita positiva (SDP), la fattorizzazione assume una forma particolarmente semplice, conosciuta come fattorizzazione di Cholesky. Mentre, nel caso di sistema con matrice tridiagonale, parleremo di fattorizzazione di Thomas.

Sia $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, una matrice quadrata di dimensione n e sia $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ un vettore colonna. Tale matrice A, si dice SDP se vale

$$A = A^T,$$

che è la proprietà di simmetria, ed inoltre, si ha

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0 \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{x} \neq 0.$$

La fattorizzazione di Cholesky stabilisce che, se A è SDP, allora esiste una matrice triangolare inferiore H tale che

$$A = HH^T.$$

In questo caso, anziché esprimere A come il prodotto di una matrice triangolare inferiore L e una matrice triangolare superiore U, otteniamo A come il prodotto di H e la sua trasposta H^T. La matrice H è triangolare inferiore, mentre la sua trasposta è evidentemente triangolare superiore.

Il vantaggio principale di questa fattorizzazione è che, invece di calcolare due matrici separate L e U, ne calcoliamo una sola, H, e successivamente otteniamo la sua trasposta. Quest'ultima operazione è, di fatto, priva di costi aggiuntivi, in quanto può essere ottenuta semplicemente trasponendo gli elementi di H.

A questo punto, una volta ottenuta la fattorizzazione di Cholesky, possiamo utilizzarla per risolvere i sistemi lineari associati. Se desideriamo risolvere

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

con

$$A = HH^T,$$

otteniamo la risoluzione di due sistemi

$$\begin{cases} H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\ H^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \end{cases}.$$

Pertanto, procediamo risolvendo prima il sistema $H\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$, per poi risolvere $H^T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. In questo modo otteniamo due sistemi triangolari, uno inferiore e l'altro superiore. Il costo complessivo di questa operazione è

$$\frac{n^3}{12} \text{ operazioni.}$$

Stiamo considerando il costo necessario per calcolare la matrice H, e quindi per effettuare la fattorizzazione della matrice A, al quale va aggiunto il costo complessivo per la risoluzione dei due sistemi finali. Ciò che è importante osservare è che il costo totale dell'operazione risulta essere circa la metà di quello richiesto per la fattorizzazione LU del MEG su una matrice A arbitraria.

Vogliamo ora esaminare come questa tecnica di fattorizzazione possa essere applicata alla risoluzione di un altro tipo di sistema molto semplice, ossia un sistema con matrice tridiagonale. Una matrice tridiagonale presenta tre diagonali: quella principale, quella secondaria inferiore e quella secondaria superiore

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & b_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Denoteremo con a_i gli elementi della diagonale principale, con b_i quelli della diagonale secondaria inferiore e con c_i quelli della diagonale secondaria superiore. In questo caso, non è necessario utilizzare indici aggiuntivi, poiché non sussistono ambiguità. Al di fuori di queste tre diagonali, gli altri elementi della matrice sono tutti nulli.
Per una matrice T di questo tipo, otteniamo una fattorizzazione che si presenta nella forma seguente

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & b_n & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con una matrice L inferiore con soltanto due diagonali, quella principale i cui elementi sono $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, da determinare, e quella secondaria con gli stessi elementi di prima, quindi $b_2, \dots, b_n$. La matrice superiore U ha gli elementi diagonali uguali a 1 e sulla diagonale secondaria superiore sono $\beta_1, \dots, \beta_n$, da determinare.
Quindi, abbiamo soltanto due successioni di elementi da determinare: $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$. Se andiamo ad eguagliare gli elementi della matrice di partenza T con quelli che otteniamo moltiplicando la matrice inferiore L e la matrice superiore U, troviamo le formule che consentono di calcolare $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ (dettagliate nell' Approfondimento di questa lezione)
Infine, possiamo utilizzare questa rappresentazione per risolvere un sistema con T matrice tridiagonale. Quindi, il sistema di partenza è

$$T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f},$$

ed T è una matrice tridiagonale. Definendo L il fattore triangolare inferiore e U il fattore triangolare superiore, abbiamo due sistemi da risolvere

$$\begin{cases} L\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f} \\ U\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \end{cases}.$$

Se svolgiamo le operazioni indicate in precedenza, troviamo prima $\boldsymbol{y}$

$$\begin{cases} y_1 = f_1/\alpha_1 \\ y_i = \dfrac{f_i - b_i y_{i-1}}{\alpha_i} \qquad i = 2, \dots, n, \end{cases}$$

caratterizzato da una serie di operazioni che richiedono $3n - 2$ operazioni. Poi calcoliamo $\boldsymbol{x}$

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_j = y_j - \beta_j x_{j+1} \qquad j = n-1, \dots, 1, \end{cases}$$

caratterizzato da una serie di operazioni che richiedono $2n - 1$ operazioni. Il totale delle operazioni, quindi in questo caso è dell'ordine di n (per n "grande"). Riassumendo, possiamo affermare che per risolvere un sistema lineare con una matrice tridiagonale tramite l'algoritmo di Thomas, che è l'algoritmo che abbiamo appena presentato, è necessario un numero di operazioni dell'ordine di n.

Quelli che abbiamo presentato finora sono metodi diretti perché producono una soluzione direttamente con un numero finito di operazioni. Abbiamo quindi analizzato il MEG con le sue varianti che prevedono la pivotazione parziale o totale. Abbiamo visto come il MEG si possa formulare a livello angelico come metodo di fattorizzazione dalla matrice, e abbiamo visto anche come questa reinterpretazione sia particolarmente interessante perché ci consente di utilizzare la stessa fattorizzazione per risolvere tanti sistemi lineari, tutti con la stessa matrice ma con termini noti a priori differenti.

Approfondimento:

Per calcolare la matrice H di Cholesky, è possibile applicare le formule viste nei precedenti approfondimenti per la generica fattorizzazione LU. In particolare, in questo caso, si pone

$$m_{pk} = h_{pk}, \qquad u_{ij} = h_{ji},$$

Ovvero, ciò che prima veniva indicato con m, in questo caso è denotato con h, e gli elementi u_{ij} corrispondono agli elementi della matrice H^T, che sono quindi gli elementi h_{ji} . Inoltre, se applichiamo esattamente le formule precedentemente viste, otteniamo

$$h_{pp} = \sqrt{a_{pp} - \sum_{k}^{p-1} h_{pk}^2}$$

$$h_{ip} = \frac{1}{h_{pp}}\left(a_{ip} - \sum_{k=1}^{p-1} h_{ik}h_{kp}\right) \qquad i \geq p+1,$$

In questo modo, è possibile calcolare l'intera matrice H di Cholesky, che consente di effettuare la fattorizzazione della matrice A SDP.

Nella lezione principale, abbiamo visto che per calcolare la fattorizzazione di una matrice tridiagonale T, abbiamo bisogno di determinare soltanto due successioni di elementi: $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$. Se andiamo ad eguagliare gli elementi della matrice di partenza T con quelli che otteniamo moltiplicando la matrice inferiore L e la matrice superiore U, troviamo le seguenti formule che consentono di calcolare $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$. Più precisamente, otteniamo

$$\alpha_1 = a_1, \quad \beta_1 = \frac{c_1}{\alpha_1},$$

$$\alpha_k = a_k - b_k\beta_{k-1} \qquad k = 2, \dots, n,$$

$$\beta_k = \frac{c_k}{\alpha_k} \qquad k = 2, \dots, n-1.$$

Abbiamo quindi visto come scomporre una matrice tridiagonale nel prodotto di due matrici: una matrice inferiore con soltanto due diagonali e una matrice superiore, anch'essa con soltanto due diagonali. Infine, abbiamo esaminato come determinare direttamente gli elementi della fattorizzazione.