eCAMPUS UNIVERSITÀ | DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica

Lezione 4.4b

Il metodo delle potenze inverse e il metodo QR

Calcolo degli autovalori di una matrice (il metodo QR)

- Il **metodo delle potenze** (e delle potenze inverse)

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

Determina gli autovalori $\lambda \in \mathbb{C}$ estremi di A:
- autovalore di **modulo massimo**
- autovalore di **modulo minimo**
- autovalore **in modulo più vicino a** $\mu \in \mathbb{C}$

- Per poter calcolare **l'intero spettro** $\sigma(A)$ della matrice A

⬇

Metodo QR

- Metodo QR è basato sulle **trasformazioni di similitudine**

Calcolo degli autovalori di una matrice (il metodo QR)

- **Trasformazione di similitudine:** sia P invertibile ed A arbitraria

$$S = P^{-1}AP$$

- S è **simile** ad A

$$\boxed{\sigma(S) = \sigma(A)}$$

- **Idea del metodo QR:** si trasforma A in una matrice più semplice

• **Triangolare** • **Diagonale**	→ Autovalori sono gli **elementi presenti sulla diagonale principale**

- **Metodo QR** è una **successione di trasformazioni di similitudine**

Calcolo degli autovalori di una matrice (il metodo QR)

- Concetto di **matrici ortogonali** P

$$P^{-1} = P^T$$

- Utilizzando **matrici ortogonali nelle trasformazioni di similitudine**

Condizionamento del problema
del calcolo degli autovalori rimane invariato

$$\boxed{A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}}$$

Autovalori di A subiscono variazioni contenute
in presenza di piccole perturbazioni

Calcolo degli autovalori di una matrice (il metodo QR)

- **Metodo QR:** successione di <u>trasformazioni di similitudine</u> utilizzando <u>matrici ortogonali</u> $Q^{(k)} \Rightarrow {Q^{(k)}}^{-1} = {Q^{(k)}}^{T}$

- **L'algoritmo del QR**

$$T^{(0)} = A$$

$$k = 1, 2, \ldots \begin{cases} Q^{(k)} R^{(k)} = T^{(k-1)} \\ T^{(k)} = R^{(k)} Q^{(k)} \end{cases}$$

Trasformazione QR

$R^{(k)}$ è una matrice **triangolare superiore**

- Viene generata una successione di matrici $\{T^{(k)}\}$

$T^{(k)}$ **matrici ortogonalmente simili ad** A

$T^{(k)}$ $k \to \infty$ $\Rightarrow$ **triangolare superiore**

Calcolo degli autovalori di una matrice (il metodo QR)

- Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{|\lambda_1| = 7.0747, \quad |\lambda_2| = 3.1879, \quad |\lambda_3| = 0.8868}$$

- Dopo $k = 20$ iterazioni

$$T^{(20)} = \begin{pmatrix} \boxed{7.04} & 1.45 \cdot 10^{-6} & 2.19 \cdot 10^{-15} \\ 1.45 \cdot 10^{-6} & \boxed{-3.18} & -1.95 \cdot 10^{-11} \\ 1.06 \cdot 10^{-17} & -1.95 \cdot 10^{-11} & \boxed{-0.88} \end{pmatrix}$$

- Se la matrice A è simmetrica $A = A^T$

$T^{(k)}\ k \to \infty$ ➡ **matrice diagonale**