Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.2b

Il numero di condizionamento:
stabilità della risoluzione di un sistema lineare

Risoluzione di sistemi lineari (condizionamento di $\mathbf{A}$)

- **Il numero di condizionamento** della matrice A

$$\boxed{K(A) = \|A\| \|A^{-1}\|} \Rightarrow K(A) \geq 1$$

- **Numero di condizionamento euclideo** (in norma 2)

$$K_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

- Se A è simmetrica e definita positiva (SDP)

$$\|A\|_2 = \lambda_{max} \qquad \|A^{-1}\|_2 = 1/\lambda_{min}$$

$$\Rightarrow K_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

$\lambda_{max}, \lambda_{min}$ massimo e minimo autovalore di A

Risoluzione di sistemi lineari (Analisi dell'errore)

- Stimare l'errore sulla soluzione $\delta\mathbf{x}$ in relazione all'errore sui dati $\delta A, \delta\mathbf{b}$

$$(A+\delta A)(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}+\delta\mathbf{b}$$

- Si può dimostrare che

$$\frac{\|\delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \underbrace{\frac{K(A)}{1-K(A)\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}}_{\alpha}\left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}+\frac{\|\delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}\right)$$

- L'errore relativo commesso sulla soluzione è minore uguale di una costante α moltiplicata per l'errore relativo commesso sui dati

Risoluzione di sistemi lineari (Analisi dell'errore)

- L'errore relativo commesso sulla soluzione

$$\frac{||\delta \mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||} \leq \alpha(c) \left(\frac{||\delta A||}{||A||} + \frac{||\delta \mathbf{b}||}{||\mathbf{b}||} \right)$$

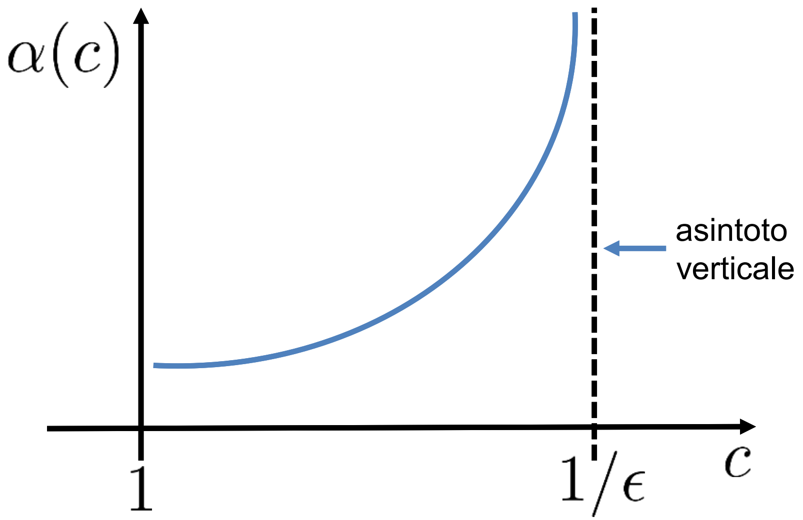
$$\alpha(c) = \frac{c}{1 - c\epsilon} \qquad c = K(A) \qquad \epsilon = \frac{||\delta A||}{||A||}$$

- Supponendo ϵ piccola

$$c = K(A) \geq 1$$

$$\alpha(1) \sim 1$$

$$\alpha(1/\epsilon) \to +\infty$$



Risoluzione di sistemi lineari (Matrice ben condizionata)

- Osserviamo che

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \alpha(c) \left(\frac{\|\delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\delta \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} \right)$$

$$c = K(A) \geq 1$$

$\alpha(1) \sim 1 \Rightarrow K(A)$ piccolo

$\alpha(1/\epsilon) \to +\infty \Rightarrow K(A)$ grande

- Se $K(A) \approx 1$ sistema è stabile (caso favorevole)
- Se $K(A) >> 1$ sistema è sensibile agli errori nei dati

Numero di condizionamento $K(A)$ piccolo $=$ matrice A è **ben condizionata**

Numero di condizionamento $K(A)$ grande $=$ matrice A **è mal condizionata**

Risoluzione di sistemi lineari (Sistema ben condizionato)

- Un sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  - **Ben condizionato** se $K(A)$ è piccolo

    Piccole perturbazioni sui dati ⇨ <u>piccole variazioni sulla soluzione</u>

  - **Mal condizionato** se $K(A)$ è grande

    Piccole perturbazioni sui dati ⇨ <u>grandi variazioni sulla soluzione</u>

- Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\frac{||\delta \mathbf{b}||}{||\mathbf{b}||} \approx 1\% \Rightarrow \frac{||\delta \mathbf{x}||}{||\mathbf{x}||} > 100\%$$

$$K(A) = 289$$