



METODI NUMERICI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Differenze finite in avanti, all'indietro e centrate)

Nella lezione precedente è stato introdotto il quadro astratto generale per la costruzione di un metodo numerico finalizzato alla risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie (EDO). In particolare, è stato evidenziato che l'obiettivo di un metodo numerico per le EDO consiste nel sostituire al generico problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I' \end{cases}$$

una formulazione discreta del tipo

$$\begin{cases} G(u_{k-1}, u_k, u_{k+1}) = F[f(x_k, u_k), f(x_{k+1}, u_{k+1})]. \\ u_0 = y_0 \end{cases} \quad k = 1, \dots, n,$$

che ne consenta la risoluzione approssimata. Nello specifico, le funzioni G e f vengono considerate nella stessa forma definita dalla EDO di partenza, con la differenza che i valori u_{k-1}, u_k, u_{k+1} al posto di y_{k-1}, y_k, y_{k+1} . Inoltre, la funzione F rappresenta una relazione che coinvolge i valori $f(x_k, y_k)$ e $f(x_{k+1}, y_{k+1})$. Le incognite u_k del problema numerico corrispondono ai valori che approssimano la soluzione esatta $y(x)$ dell'equazione differenziale, ovvero

$$u_k \simeq y_k = y(x_k),$$

dove y_k indica il valore assunto dalla soluzione esatta $y(x)$ nel punto x_k , ossia $y_k = y(x_k)$. L'insieme dei punti x_k , detti nodi

$$\{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\},$$

costituisce il processo discretizzazione (o suddivisione) dell'intervallo di integrazione $I \subset \mathbb{R}$ del problema di Cauchy. Tali nodi vengono utilizzati per suddividere I in sotto-intervalli, i cui estremi sono proprio i punti x_k .

In questa lezione esamineremo in dettaglio la costruzione delle funzioni G e F , nonché il processo di generazione dell'insieme dei nodi x_k che discretizzano l'intervallo I .

Per discretizzare l'intervallo I in nodi x_k , faremo l'ipotesi di considerare nodi equispaziati. Sebbene questa assunzione non sia indispensabile, essa risulta utile per semplificare l'esposizione e le formule che derivano da essa. Pertanto, supponiamo che tutti i nodi siano separati da una distanza costante h , cioè

$$x_{k+1} = x_k + h \quad k \geq 0, \quad h > 0.$$

È importante sottolineare che l'ipotesi di nodi equispaziati non è in alcun modo vincolante. Infatti, è possibile derivare nuovamente tutte le formule che presenteremo anche nel caso di nodi non equispaziati. Di conseguenza, quanto costruito in questa sede può essere facilmente generalizzato anche al caso di nodi non equispaziati.

Per costruire la funzione $G(u_{k-1}, u_k, u_{k+1})$, è utile ricordare che essa rappresenta un'approssimazione della derivata prima y' . L'obiettivo è quello, quindi, di approssimare la derivata prima di una funzione $y(x)$ in un punto/nodo generico x_k , utilizzando i valori dei nodi adiacenti, come ad esempio x_{k-1}, x_k, x_{k+1} . A tal fine, ci basiamo sulla definizione stessa della derivata prima di una funzione: la derivata prima della funzione y , in un punto x , è il limite del rapporto incrementale della funzione in tale punto



$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

Anticipiamo che, per rappresentare la derivata prima $y'(x)$ utilizzeremo in particolare lo sviluppo di Taylor della funzione $y(x)$, con l'obiettivo di costruire la funzione G . Il processo che seguiremo per approssimare y' sarà denominato processo delle Differenze Finite (DF), e le formule che otterremo costituiranno le formule alle DF, le quali sono basate su rapporti incrementali.

Una volta discretizzato l'intervallo I e definita la funzione G avremo quindi a disposizione tutti gli elementi necessari per ottenere il metodo numerico.

Andiamo, pertanto, ad applicare gli sviluppi in serie di Taylor. Ricordiamo che gli sviluppi di Taylor ci permettono di rappresentare una funzione $y(x)$ in un punto $x+h$ attraverso la seguente espressione

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{y''(\xi)}{2}h^2, \quad 2^\circ \text{ ordine},$$

dove $\frac{y''(\xi)}{2}h^2$ rappresenta il termine di resto dello sviluppo, con ξ che indica un punto generico (non noto) nell'intervallo $\xi \in (x, x+h)$. Questo è noto, in particolare, come sviluppo di Taylor in avanti al secondo ordine. Tale sviluppo ci consente di esprimere la funzione y nel punto $x+h$ in termini di y in un punto vicino, attraverso la derivata prima y' .

Possiamo utilizzare anche uno sviluppo di Taylor al terzo ordine (ovvero, proseguire con lo sviluppo) e ottenere

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{y''(x)}{2}h^2 + \frac{y'''(\xi)}{6}h^3, \quad 3^\circ \text{ ordine},$$

dove ξ è un punto generico che si trova nell'intervallo $\xi \in (x, x+h)$.

Specifichiamo queste formule di Taylor prendendo al posto di x un valore di un generico nodo x_k . Quindi prendiamo

$$x = x_k,$$

e, sulla base della definizione introdotta per i nodi equispaziati $x_{k+1} = x_k + h$ ($k \geq 0$), otteniamo che

$$x+h = x_k + h = x_{k+1}.$$

Pertanto, possiamo scrivere la formula dello sviluppo di Taylor al secondo ordine $y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{y''(\xi)}{2}h^2$ precisando lo sviluppo per la scelta $x = x_k$ (e ricordando che $y_k = y(x_k)$ per un generico nodo x_k)

$$y_{k+1} = y_k + h y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_k),$$

dove ξ_k è un punto generico nell'intervallo (x_k, x_{k+1}) . Da questa formula, isolando a sinistra $y'(x_k)$ e dividendo entrambi i membri per h , otteniamo

$$y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - h \frac{y''(\xi_k)}{2}.$$

Questa relazione ci dice che, se nel punto x_k sostituiamo la derivata prima con il rapporto incrementale in avanti, utilizzando y_{k+1} e y_k , commettiamo un errore che è proporzionale a h (se la funzione y ha una derivata seconda limitata). Poiché l'errore è dell'ordine di h , denotato come $O(h)$, tanto più piccolo è h , tanto più piccolo sarà l'errore.

$$y'(x_k) - \frac{y_{k+1} - y_k}{h} = O(h).$$

In questo caso, utilizziamo la seguente notazione: diciamo che stiamo impiegando la DF in avanti, poiché stiamo rappresentando la derivata prima come un rapporto incrementale in avanti rispetto ai punti, ovvero stiamo utilizzando y_{k+1} e y_k . Di conseguenza, la formula (o schema) delle DF in avanti è



$$y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + O(h).$$

Osserviamo che calcolare la derivata prima con la DF in avanti significa sostituire, nel punto x_k , la derivata prima della funzione con il coefficiente angolare della retta che congiunge il punto x_k con il successivo x_{k+1} . In altri termini, stiamo sostituendo la tangente alla curva nel punto x_k con la secante che unisce i due punti x_k e x_{k+1} .

In alternativa allo sviluppo di Taylor in avanti, possiamo utilizzare lo sviluppo di Taylor al secondo ordine all'indietro

$$y(x - h) = y(x) - y'(x)h + \frac{y''(\xi)}{2}h^2, \quad 2^\circ \text{ ordine},$$

dove ξ è un punto generico nell'intervallo $(x - h, x)$. Quindi stiamo essenzialmente riproponendo lo sviluppo di Taylor in avanti, ma sostituendo h con $-h$. Poniamo particolare attenzione ai segni perché in questo caso abbiamo un $-h$ che compare a moltiplicare $y'(x)$.

Specificando lo sviluppo di Taylor al secondo ordine all'indietro per $x = x_k$

$$x = x_k \Rightarrow x - h = x_{k-1},$$

e ricordando che $y_k = y(x_k)$ per un generico nodo x_k , otteniamo

$$y_{k-1} = y_k - hy'(x_k) + h^2 \frac{y''(\xi_{k-1})}{2},$$

dove ξ_{k-1} è un punto intermedio all'intervallo $\xi_{k-1} \in (x_{k-1}, x_k)$. Isolando $y'(x_k)$ a sinistra e dividendo ambo i membri per h , si ottiene

$$y'(x_k) = \frac{y_k - y_{k-1}}{h} + h \frac{y''(\xi_{k-1})}{2}.$$

In questo modo, abbiamo ottenuto la formula (o schema) delle DF all'indietro, poiché stiamo utilizzando il rapporto incrementale all'indietro (ovvero, stiamo utilizzando i punti y_{k-1} e y_k). Anche nel caso delle DF all'indietro, l'errore è dell'ordine di h , cioè $O(h)$

$$y'(x_k) = \frac{y_k - y_{k-1}}{h} + O(h).$$

In questo caso, stiamo sostituendo alla derivata prima nel punto x_k (ovvero alla tangente nel punto x_k) il coefficiente angolare della secante passante per i punti x_{k-1} e x_k . Pertanto, siamo esattamente in linea con le considerazioni fatte in precedenza per la DF in avanti; l'unica differenza consiste nel cambiamento di prospettiva.

Si può estendere questa procedura a casi di ordine superiore, ossia a sviluppi di ordine maggiore rispetto al secondo, in particolare al terzo. In tale contesto, è possibile adottare una rappresentazione mediante le DF centrate.

Per poter applicare uno sviluppo di Taylor "centrato" nel punto x , consideriamo due sviluppi di Taylor del terzo ordine: uno in avanti nel punto $x + h$

$$y(x + h) = y(x) + y'(x)h + \frac{y''(x)}{2}h^2 + \frac{y'''(\xi)}{6}h^3,$$

e uno all'indietro nel punto $x - h$

$$y(x - h) = y(x) - y'(x)h + \frac{y''(x)}{2}h^2 - \frac{y'''(\xi)}{6}h^3.$$

Specificando questi due sviluppi rispettivamente per x_{k+1} e x_{k-1}

$$x + h = x_k + h = x_{k+1},$$

$$x - h = x_k - h = x_{k-1},$$

e ricordando che $y_k = y(x_k)$ per un generico nodo x_k , otteniamo



$$y_{k+1} = y_k + h y'(x_k) + \frac{y''(x_k)}{2} h^2 + \frac{y'''(\xi_k)}{6} h^3,$$

$$y_{k-1} = y_k - h y'(x_k) + \frac{y''(x_k)}{2} h^2 - \frac{y'''(\xi_{k-1})}{6} h^3.$$

Dove ξ_k e ξ_{k-1} sono due punti generici rispettivamente negli intervalli $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ e $\xi_{k-1} \in (x_{k-1}, x_k)$. Combinando i due sviluppi per sottrazione, otteniamo

$$y_{k+1} - y_{k-1} = 2h y'(x_k) + \frac{h^3}{6} [y'''(\xi_k) + y'''(\xi_{k-1})].$$

Da questa relazione, isolando $y'(x_k)$ e dividendo ambo i membri per $2h$, troviamo la formula che definisce le DF centrate

$$y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + \frac{h^2}{12} [y'''(\xi_k) + y'''(\xi_{k-1})].$$

Tali differenze finite sono definite centrate poiché l'approssimazione della derivata prima di y nel punto x_k avviene utilizzando i valori y_{k+1} e y_{k-1} , insieme a un doppio rapporto incrementale (ossia, si impiega $2h$ anziché h). Da questa formulazione delle DF centrate, si deduce che l'errore commesso nell'approssimare la derivata prima di y nel punto x_k è dell'ordine di h^2 , ovvero $O(h^2)$

$$y'(x_k) - \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} = \frac{h^2}{12} [y'''(\xi_k) + y'''(\xi_{k-1})] = O(h^2).$$

Pertanto, le DF centrate generano un errore di ordine quadratico rispetto a h . Mentre per le DF in avanti e all'indietro si riscontravano errori di ordine lineare rispetto a h , nel caso delle differenze finite centrate l'errore è di ordine quadratico, ossia proporzionale a h^2 .

Dunque, le DF centrate producono un errore quadratico rispetto ad h . Mentre prima per le DF in avanti e all'indietro avevamo ordini lineari rispetto ad h , questa volta per le DF centrate abbiamo degli errori che sono più piccoli, ovvero quadratici rispetto ad h .

In conclusione, riassumendo quanto esposto finora, possiamo affermare che la definizione generica di G che abbiamo introdotto in precedenza è

$$y'(x_k) \simeq G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1}),$$

dove, anziché utilizzare $y'(x_k)$ impieghiamo $G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1})$ che è definito come segue

$$G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1}) = \begin{cases} \frac{y_{k+1} - y_k}{h} & \text{DF in avanti} \\ \frac{y_k - y_{k-1}}{h} & \text{DF all'indietro,} \\ \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} & \text{DF centrate} \end{cases}$$

ovvero $\frac{y_{k+1} - y_k}{h}$ per lo schema delle DF in avanti, $\frac{y_k - y_{k-1}}{h}$ per le DF all'indietro ed infine $\frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$ per le DF centrate.

Per applicare queste formule delle DF nella costruzione di metodi numerici per le EDO, adotteremo esattamente la formula della funzione G , ma anziché calcolarla per gli argomenti y_k , la calcoleremo per gli argomenti incogniti u_k , dove u_k rappresentano le soluzioni numeriche.



Concludiamo questa lezione illustrando due esempi di questo procedimento: il metodo di Eulero in avanti (EA) e il metodo di Eulero all'indietro (EI). Il metodo EA è quello che impiega le DF in avanti e, al posto di y_{k+1} e y_k utilizza u_{k+1} e u_k , per cui

$$\text{EA: } \frac{u_{k+1} - u_k}{h} = f(x_k, u_k) \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Analogamente, il metodo EI è quello che utilizza le DF all'indietro e al posto di y_{k-1} e y_k utilizza u_{k-1} e u_k , per cui

$$\text{EI: } \frac{u_{k+1} - u_k}{h} = f(x_{k+1}, u_{k+1}) \quad k = 0, \dots, n-1,$$

dove in questo caso stiamo usando il rapporto incrementale all'indietro come elemento che approssima la derivata prima della funzione nel punto x_{k+1} .

Infine, per entrambi i casi si pone

$$u_0 = y_0,$$

dove y_0 è il dato iniziale $y_0 = y(x_0)$.

Abbiamo quindi evidenziato, su due esempi particolari (EA, EI), come introdurre un metodo numerico. Riassumo brevemente la logica, che consiste nel sostituire all'equazione

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

una rappresentazione di essa per un numero finito di punti, corrispondenti ai nodi x_k . In ogni nodo, si approssima la derivata prima della funzione y , ossia y' , utilizzando rapporti incrementali, che possono essere in avanti, all'indietro o centrati. Questi rapporti vengono ottenuti dallo sviluppo di Taylor, il quale mette in evidenza l'errore commesso nell'approssimare la derivata prima mediante un rapporto incrementale.