Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Radici di equazioni non lineari

Lezione 1.2b

Introduzione e metodo di Bisezione

Metodo di Bisezione (descrizione qualitativa)

- La **proprietà di cambiamento di segno** è alla base del Metodo di Bisezione
- Sfruttiamo questo principio per **costruire una successione di intervalli** sempre più piccoli, fino a isolare la radice cercata
- **Metodo di Bisezione** può descriversi nel seguente modo:

1. Consideriamo $f(x)$ continua in $[a, b]$ in cui $f(a)f(b) < 0$ $\boxed{\alpha \in (a, b) | f(\alpha) = 0}$
2. Poniamo:

$$a_1 = a \qquad b_1 = b$$

Inizializzazione dell'algoritmo

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Punto medio dell'intervallo

3. Valutiamo i segni di $f(c_1), f(a_1), f(b_1)$
4. Scegliamo i nuovi estremi di ricerca della radice α in $[a_1, c_1]$oppure $[c_1, b_1]$
5. Calcolo il nuovo punto medio come fatto nel passo 2.

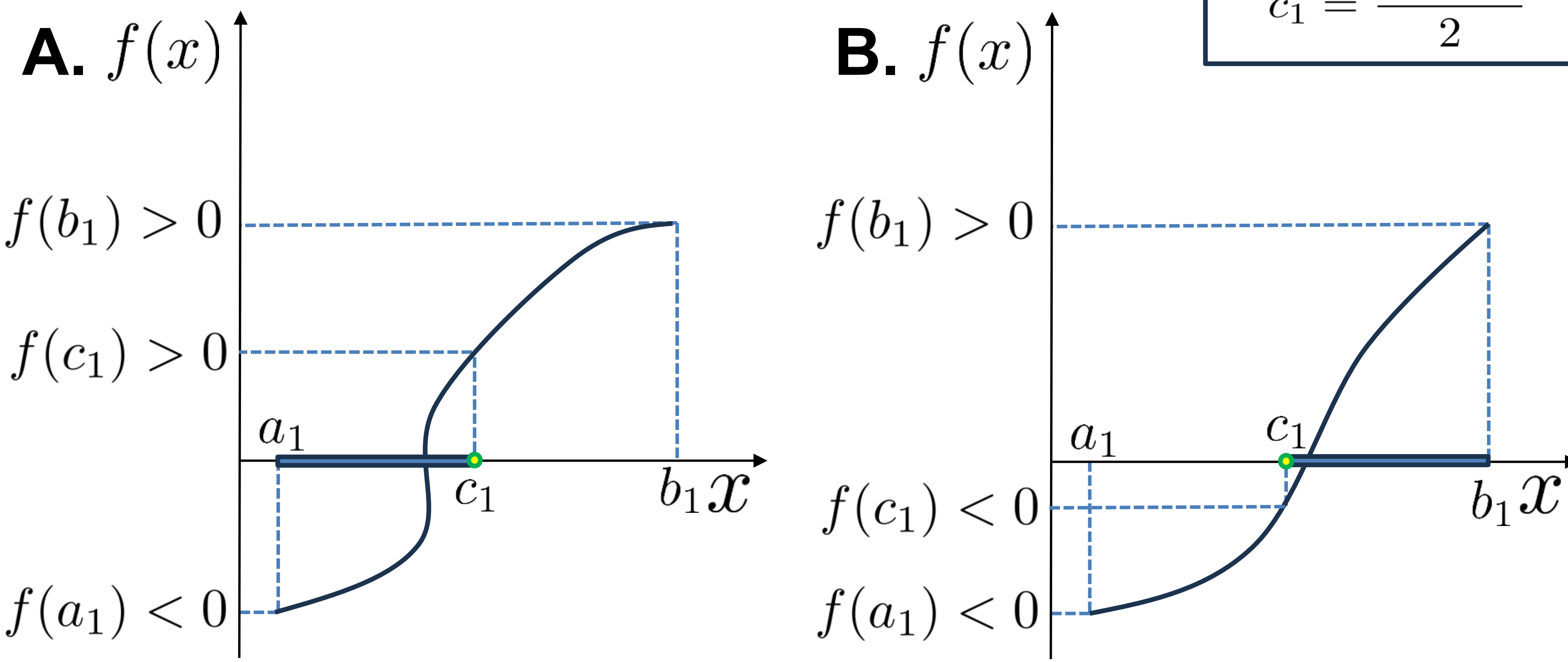
Metodo di Bisezione (descrizione geometrica)

$$f(x)$$
$$f(a)f(b) < 0$$
$$\alpha \in (a,b) | f(\alpha) = 0$$
$$a_1 = a \qquad b_1 = b$$
$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

- Supponiamo $f(a_1) < 0,\ f(b_1) > 0$

A. Se $f(c_1) > 0$ il cambio di segno di $f(x)$ avviene in (a_1, c_1)

B. Se $f(c_1) < 0$ il cambio di segno di $f(x)$ avviene in (c_1, b_1)



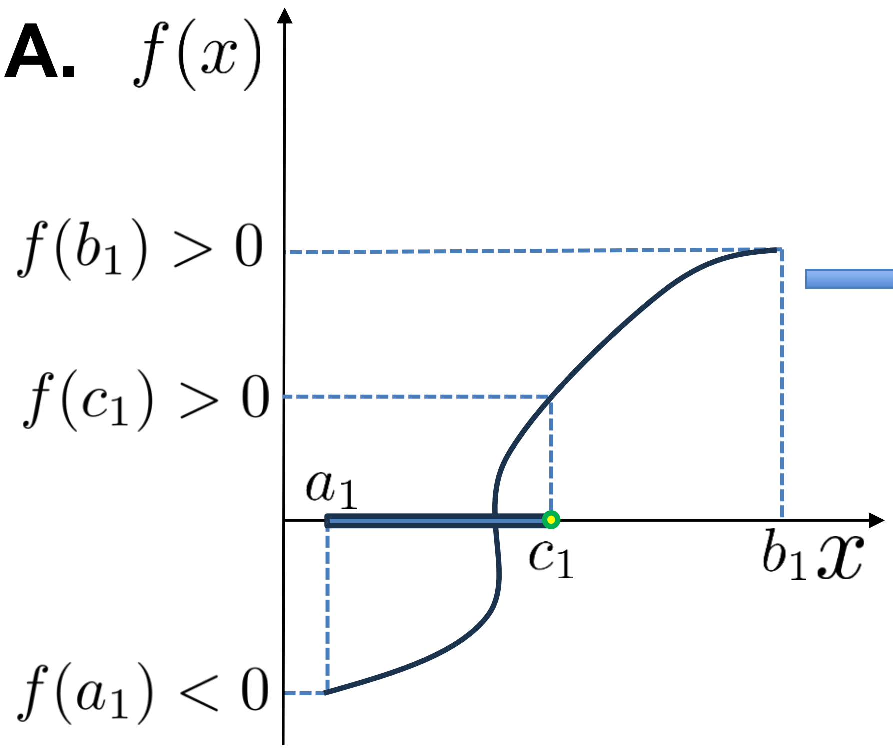
Metodo di Bisezione (descrizione geometrica)

$$f(x)$$
$$f(a)f(b) < 0$$
$$\alpha \in (a,b) | f(\alpha) = 0$$
$$a_1 = a \qquad b_1 = b$$
$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

- Supponiamo $f(a_1) < 0,\ f(b_1) > 0$

A. Se $f(c_1) > 0$ il cambio di segno di $f(x)$ avviene in (a_1, c_1)

➡ Restringiamo la ricerca di α ad (a_1, c_1)



$$f(a_1)f(c_1) < 0$$
$$\alpha \in (a_1, c_1) | f(\alpha) = 0$$

$$a_2 = a_1 \qquad b_2 = c_1$$

Aggiornamento dell'intervallo

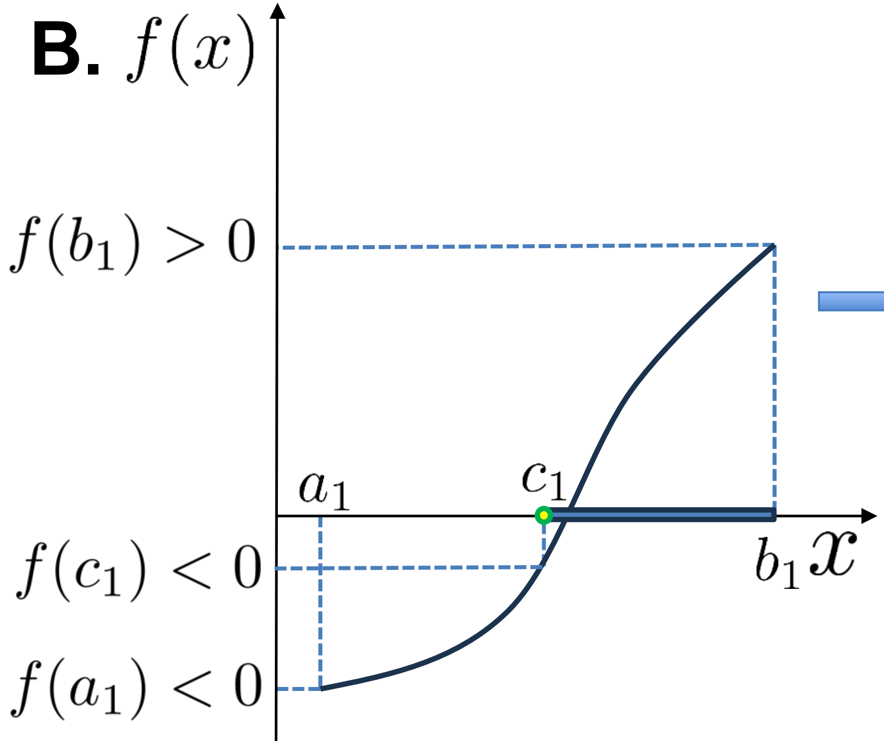
Metodo di Bisezione (descrizione geometrica)

$$f(x)$$
$$f(a)f(b) < 0$$
$$\alpha \in (a,b) | f(\alpha) = 0$$
$$a_1 = a \qquad b_1 = b$$
$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

- Supponiamo $f(a_1) < 0,\ f(b_1) > 0$

B. Se $f(c_1) < 0$ il cambio di segno di $f(x)$ avviene in (c_1, b_1)

➡ Restringiamo la ricerca di α ad (c_1, b_1)



$$f(c_1)f(b_1) < 0$$
$$\alpha \in (c_1, b_1) | f(\alpha) = 0$$

$$a_2 = c_1 \qquad b_2 = b_1$$

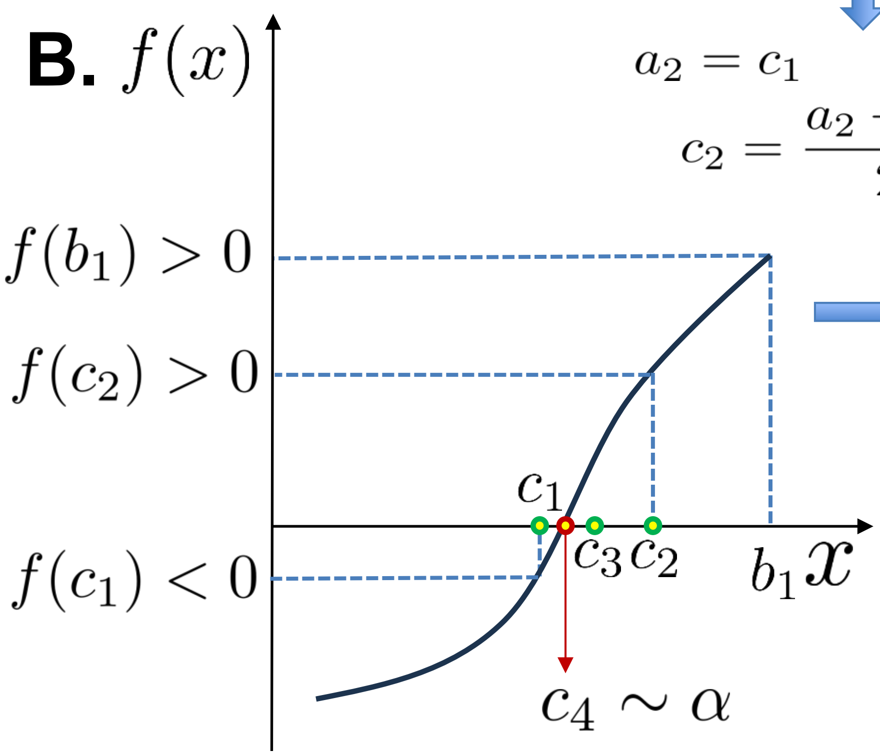
Aggiornamento dell'intervallo

Metodo di Bisezione (descrizione geometrica)

$$f(x)$$
$$f(c_1)f(b_1) < 0$$
$$\alpha \in (c_1, b_1) | f(\alpha) = 0$$

- Se $f(c_1) < 0$ il cambio di segno di $f(x)$ avviene in (c_1, b_1)

B. ⇨ Restringiamo la ricerca di α ad (c_1, b_1)



$$a_2 = c_1 \qquad b_2 = b_1$$

Aggiornamento dell'intervallo

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

Punto medio dell'intervallo

$$f(a_2)f(c_2) < 0$$
$$\alpha \in (a_2, c_2) | f(\alpha) = 0$$

Aggiornamento dell'intervallo

$$a_3 = a_2 \qquad b_3 = c_2$$

Punto medio dell'intervallo

$$c_3 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

Metodo di Bisezione (successione di punti medi)

- Ripetendo questo processo iterativamente, ad ogni passo/iterazione k , generiamo una successione di numeri reali

$$x_k = c_k = \frac{a_k + b_k}{2} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

punti medi che selezioniamo controllando il cambio di segno di $f(x)$

- Selezioniamo il nuovo intervallo, dimezzando quello precedente e verificando in quale delle due metà avviene il cambio di segno

- In questo modo si genera una successione di punti medi $\{x_k\}_{k=1}^{N}$

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \alpha$$

- Per costruzione la lunghezza degli intervalli $[a_k, b_k]$ si riduce al crescere di k il valore c_k fornisce un'approssimazione sempre più «accurata» della radice α

$$f(\alpha) = 0 \qquad c_k \sim \alpha$$