



**eCAMPUS**  
UNIVERSITÀ

**DiSTA**

**Corso: Analisi Numerica**

**Docente: Roberto Piersanti**

# **Radici di equazioni non lineari**

## **Lezione 1.6a**

Ordine di convergenza di un metodo iterativo

## Ricerca degli zeri per equazioni non lineari

➤ Obiettivo: **ordine di convergenza di un metodo iterativo**

- Caratterizzare la velocità di convergenza di un metodo iterativo
- **Concetto:** ordine di un metodo iterativo

**Convergenza**  $\{x_n\} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$

➤ Caratterizzeremo i metodi visti in precedenza

- Metodo di bisezione
- Metodo delle corde, secanti e Newton
- Iterazioni di punto fisso

## Ricerca degli zeri per equazioni non lineari

➤ Ricerca degli zeri/radici per funzioni  $f(x) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha$  t.c.  $f(\alpha) = 0$

**Metodo di  
bisezione**

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \forall n \geq 0$$

**Famiglia di metodi:**  
Corde, Secanti, Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{q_n} \quad \forall n \geq 0$$

**Iterazioni di  
punto fisso**

$$x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall n \geq 0$$

$$\begin{array}{ll} g(\alpha) = \alpha & g(x) = x \\ f(\alpha) = 0 & f(x) = x - g(x) \end{array}$$

**Convergenza**

$$\{x_n\} \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$$

**Obiettivo:** quantificare l'ordine/velocità di convergenza del metodo

## Ordine di convergenza di un metodo iterativo (definizione)

- Ordine di convergenza = velocità di convergenza
- Data un successione  $\{x_n\}$  che converge ad  $\alpha$
- Successione converge ad  $\alpha$  con **ordine 1** se

$$\exists c < 1 \text{ t.c. } |\alpha - x_{n+1}| \leq c |\alpha - x_n| \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$\underbrace{|\alpha - x_{n+1}|}_{\text{Errore di approx al passo } n+1} \leq c \underbrace{|\alpha - x_n|}_{\text{Errore di approx al passo } n}$$

- L'errore diminuisce ad ogni iterazione
- Successione converge ad  $\alpha$  con **ordine  $p > 1$**  se

$$\exists c > 0 \text{ t.c. } |\alpha - x_{n+1}| \leq c |\alpha - x_n|^p \quad \forall n \geq \bar{n}$$

- Più  $p$  è grande, maggiore sarà la velocità di convergenza
- Convergenza più rapida (i.e. meno iterazioni  $n$ ) con un ordine maggiore

## Ordine di convergenza dei metodi per la ricerca degli zeri

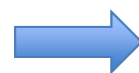
➤ **Metodi locali:** considerazione che valgono se

$x_0$  è «vicino» ad  $\alpha$

**Metodo di bisezione**  
**Metodo delle corde**



$$p = 1$$



**Convergenza  
lineare**

**Metodo delle secanti**



$$p \simeq 1.63$$



**Convergenza  
super-lineare**

$\longleftrightarrow$   
 $f'(\alpha) \neq 0$   
radice semplice

**Metodo di Newton**



$$p = 2$$



**Convergenza  
quadratica**

$\longleftrightarrow$   
 $f'(\alpha) \neq 0$   
radice semplice