eCAMPUS UNIVERSITÀ | DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

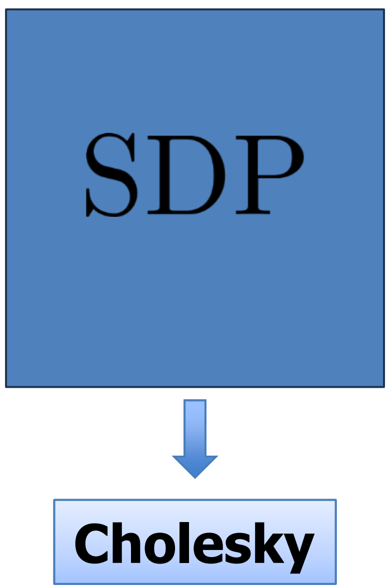
# Risoluzione di sistemi lineari

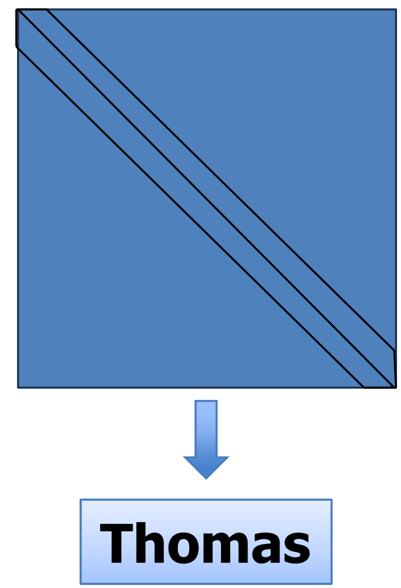
## Lezione 2.7b

Fattorizzazioni di Cholesky e Thomas

## Risoluzione di sistemi lineari (Casi particolari di fattorizzazione)

- Due casi particolarmente rilevanti di fattorizzazione LU
  - Sistema con matrice Simmetrica Definita Positiva(SDP)
  - Sistema con matrice Tridiagonale



# Risoluzione di sistemi lineari (Fattorizzazione di Cholesky)

- Se $A$ è SDP allora esiste una matrice triangolare $H$ inferiore t.c.

$$A = HH^T$$

- In questo caso

$$L = H \longrightarrow \text{Triangolare inferiore}$$
$$U = H^T \longrightarrow \text{Triangolare superiore}$$

$$HH^T\mathbf{x} = \mathbf{b} \longrightarrow \begin{cases} H\mathbf{y} = \mathbf{b} & \textit{Sostituzioni in avanti} \\ H^T\mathbf{x} = \mathbf{y} & \textit{Sostituzioni all'indietro} \end{cases}$$

**Fattorizzazione di Cholesky** $\longrightarrow$ $2n^2$ operazioni

# Risoluzione di sistemi lineari (Matrice Tridiagonali)

- Una matrice tridiagonale $T$ presenta la seguente struttura

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \dots & b_{c-1} & a_n \end{pmatrix}$$

- Ha elementi non nulli solo nelle tre diagonali:
  - ✓ diagonale principale $\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_n]^T$
  - ✓ secondaria inferiore $\mathbf{b} = [b_2, \dots, b_{n-1}]^T$
  - ✓ secondaria superiore $\mathbf{c} = [c_2, \dots, c_{n-1}]^T$

# Risoluzione di sistemi lineari (Fattorizzazione di Thomas)

- Una matrice tridiagonale $T$ presenta ha la seguente fattorizzazione

$$T = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & b_n & \alpha_n \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

- Abbiamo quindi solo due successioni di elementi da determinare

$$\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]^T$$
$$\beta = [\beta_1, \dots, \beta_{n-1}]^T$$

# Risoluzione di sistemi lineari (Fattorizzazione di Thomas)

- Per risolvere

$$T\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad T = LU$$

$$LU\mathbf{x} = \mathbf{f} \longrightarrow \begin{cases} L\mathbf{y} = \mathbf{f} & \textit{Sostituzioni in avanti} \\ U\mathbf{x} = \mathbf{y} & \textit{Sostituzioni all'indietro} \end{cases}$$

- Da cui troviamo

$$L\mathbf{y} = \mathbf{f} \begin{cases} y_1 = \dfrac{f_1}{\alpha_1} \\ y_i = \dfrac{f_i - b_i(y_{i-1})}{\alpha_i} \end{cases} \quad i = 2, \ldots, n \qquad U\mathbf{x} = \mathbf{y} \begin{cases} x_n = \dfrac{x_n}{y_n} \\ x_j = y_j - \beta_j x_{j+1} \end{cases} \quad j = n-1, \ldots, 1$$

$$\longrightarrow \boxed{\sim n \text{ operazioni}}$$