RADICI DI EQUAZIONI NON LINEARI (Iterazioni di punto fisso)

In questa lezione affronteremo il problema della ricerca dei punti fissi per equazioni non lineari.

Cominciamo affrontando il problema della ricerca dei punti fissi per funzioni reali a variabile reale. Inizialmente, introduciamo il problema dal punto di vista analitico. Consideriamo una funzione $g(x)$ definita su un intervallo I e cerchiamo una soluzione α del problema

$$g(x): I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ si cerca } \alpha \; t.c.$$
$$g(\alpha) = \alpha.$$

Cerchiamo dunque un valore della variabile indipendente α tale che la funzione g assuma lo stesso valore, ovvero $g(\alpha) = \alpha$. Se esiste un tale valore, lo definiamo punto fisso della funzione g, poiché in quel punto la variabile indipendente e la variabile dipendente coincidono.

Dal punto di vista geometrico, trovare i punti fissi di g equivale a determinare le ascisse dei punti in cui il grafico di g interseca la bisettrice del primo e terzo quadrante, ossia la retta $y = x$. Naturalmente, possono esistere più punti fissi: in alcuni casi, all'interno dell'intervallo I, la curva di g può intersecare la bisettrice $y = x$ in due o più punti.

Ora vogliamo caratterizzare l'esistenza dei punti fissi dal punto di vista analitico. A tale scopo, consideriamo una funzione g definita su un intervallo I e costruiamo il quadrato che ha I come lato sia lungo l'asse delle ascisse che lungo l'asse delle ordinate. Un classico risultato dell'analisi, noto come Teorema di Esistenza dei Punti Fissi, afferma che: se g è una funzione continua e l'immagine di g, ossia $g(I)$, è contenuta in I (ossia, i valori assunti da g rientrano nell'intervallo I), allora esiste almeno un punto fisso. Inoltre, se g è derivabile e il valore assoluto della sua derivata prima è limitato superiormente da una costante K, con $K < 1$, su tutto l'intervallo I, allora il punto fisso esiste ed è unico.

$$Se \; g(x) \text{ è continua e } g(I) \subset I \; allora \; \exists \alpha \in I \; t.c. \; g(\alpha) = \alpha$$
$$Se \; \exists g'(x) \; e \; |g'(x)| \leq K < 1 \; in \; I \; allora \; \exists! \, \alpha \in I \; t.c. \; g(\alpha) = \alpha$$

Consideriamo l'intervallo I in cui la funzione g è definita e l'insieme $g(I)$, che rappresenta i valori assunti da g per $x \in I$. Questo insieme è detto intervallo immagine, poiché raccoglie tutti i valori che la funzione assume nell'intervallo di partenza. Da ora in poi considereremo sempre situazioni in cui è definito un intervallo di riferimento I e una funzione g continua che soddisfa la condizione $g(I) \subset I$, ovvero una funzione contrattiva e non espansiva. In questo caso, siamo certi che esiste un punto $\alpha \in I$ tale che $g(\alpha) = \alpha$. Inoltre, se g è derivabile e la sua derivata prima, in valore assoluto, è minore o uguale a una costante $K < 1$ per ogni $x \in I$, allora il punto fisso esiste ed è unico. L'ipotesi che $g(I)$ sia contenuto in I garantisce che il grafico della funzione g intersechi la retta $y = x$. L'ascissa del punto di intersezione corrisponde esattamente a ciò che abbiamo definito come punto fisso della funzione g.

Il problema che ora vogliamo affrontare è come approssimare il punto fisso, ovvero come costruire una successione numerica che converga al valore α, punto fisso della funzione g. Esaminiamo il problema in modo generale: data una funzione $g(x)$ che soddisfa le ipotesi del Teorema di Esistenza dei Punti Fissi, vogliamo determinare α, ovvero il valore in cui il grafico di g interseca la retta $y = x$. Una strategia classica consiste nel generare una successione di punti $\{x_n\}$ tale che

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

In altre parole, per avvicinarci alla soluzione dell'equazione $x = g(x)$, possiamo adottare un approccio iterativo. Partendo da un valore iniziale x_0, calcoliamo il successivo x_1 ponendo $x_1 = g(x_0)$. Successivamente, utilizziamo x_1 come nuovo punto di partenza e calcoliamo $x_2 = g(x_1)$, proseguendo in questo modo in maniera iterativa. Questa costruzione genera una successione $\{x_n\}$ che, sotto opportune condizioni, converge al punto fisso α.

Vediamo come si traduce questa relazione ricorsiva dal punto di vista geometrico. Supponiamo di avere un valore x_n che rappresenta un'approssimazione di α al passo n-esimo. Per calcolare $x_{n+1} = g(x_n)$, dobbiamo individuare il punto sulla curva $g(x)$ corrispondente a x_n. A questo punto, per ottenere x_{n+1}, proiettiamo il valore $g(x_n)$ sulla bisettrice del primo e terzo quadrante $y = x$, poiché la soluzione del punto fisso è proprio l'intersezione tra la curva $g(x)$ e la retta $y = x$. Questo valore di $g(x_n)$ che proiettiamo sulla bisettrice, rappresenta il nuovo valore x_{n+1} che poi riportiamo sull'asse delle ascisse.

Successivamente, possiamo ripetere il processo iterando la formula $x_{n+1} = g(x_n)$, ovvero $x_{n+2} = g(x_{n+1})$ e così via. La formula iterativa

$$x_{n+1} = g(x_n), \quad \forall n \geq 0$$

è chiamata iterazione di punto fisso, e descrive il processo geometrico di avvicinamento al punto fisso α. Geometricamente, questa procedura somiglia a una sorta di "ragnatela" che si costruisce attraverso una serie di segmenti che si avvicinano sempre più alla retta $y = x$. Man mano che procediamo con le iterazioni, la successione $\{x_n\}$ converge al punto fisso α, a condizione che x_0 non sia troppo lontano da α.

Vediamo ora un esempio numerico per calcolare un punto fisso di una funzione del tipo

$$f(x) = x - \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}.$$

Come si vede, questa è una funzione razionale. Vogliamo calcolare gli zeri di questa funzione, ovvero trovare i valori di x t.c.

$$f(x) = 0.$$

Notiamo che per la struttura particolare di questa funzione, possiamo caratterizzare gli zeri come, di fatto, punti fissi di un'applicazione. Se infatti definiamo

$$g(x) = \frac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1},$$

questo implica

$$f(x) = x - g(x)$$

Da cui si ricava

$$f(x) = 0 \iff x = g(x).$$

Quindi, in questo caso, cercare gli zeri di f equivale a cercare i punti fissi dell'applicazione $g(x)$.

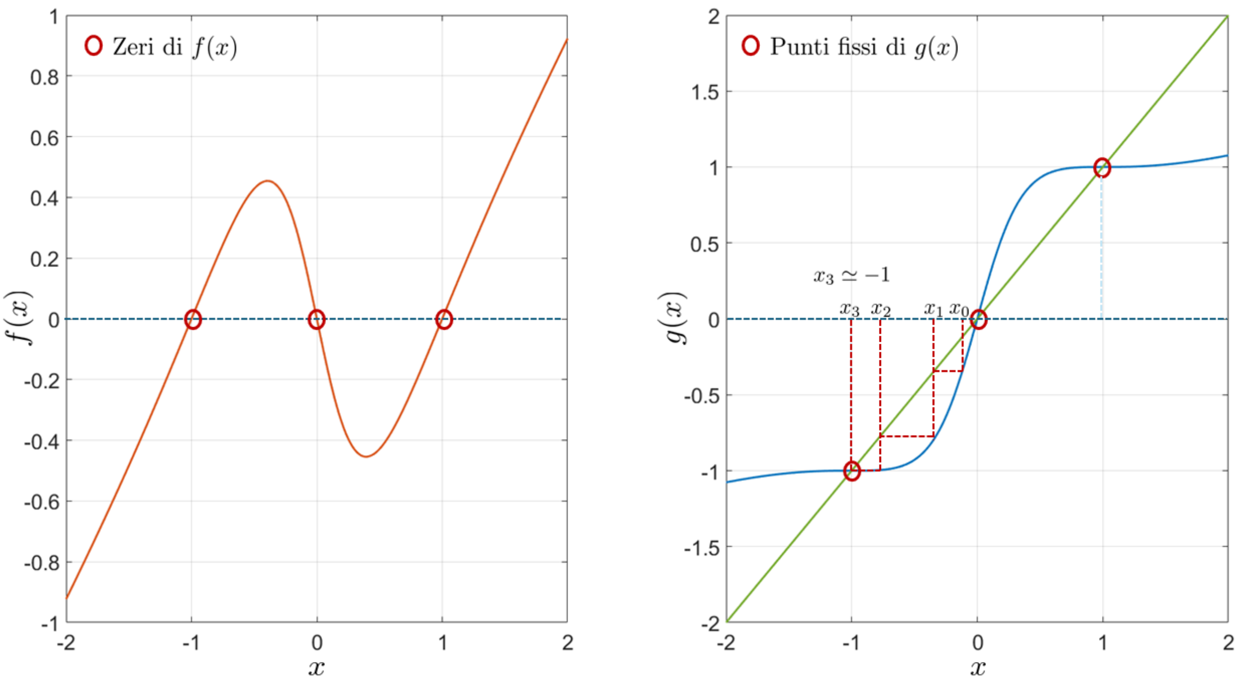

Figura 1: Grafico della funzione f(x) con rispettivi zeri della funzione (a sinistra); Grafico delle iterazioni di punto fisso per la funzione g(x) (a destra).

Le interazioni punto fisso ci suggeriscono subito un modo molto efficiente per calcolare questi punti fissi. In particolare, possiamo definire

$$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{x_n^3 + 3x_n}{3x_n^2 + 1} \qquad \forall n \geq 0.$$

Quindi possiamo utilizzare questa iterazione di punto fisso per calcolare i punti fissi di g. Essendo i punti fissi di g coincidenti con le radici di f, una volta arrivati a convergenza ai punti fissi di g avremo la certezza di essere arrivati a convergenza anche alle radici di f.
Vogliamo vedere numericamente questa storia di convergenza ai punti fissi di g e andiamo a vedere effettivamente come le iterate x_n si costituiscono in questo caso. Quindi come stiamo convergendo alle radici della funzione f.

Consideriamo allora il seguente caso specifico:
- vogliamo trovare una successione convergente per $x_0 < 0$ al punto fisso -1.

Partiamo da un valore x_0 molto vicino allo zero e andiamo a iterare. Come si vede, in Figura 1, dopo tre iterazioni di punto fisso siamo arrivati molto rapidamente in prossimità della radice -1.

Si osservi come, partendo da un valore iniziale x_0 molto vicino ad un punto fisso, lo zero, siamo finiti per convergere ad un altro punto fisso, -1.
La ragione di questo comportamento, apparentemente anomalo, è dovuta al modo di caratterizzare la convergenza dei punti fissi. Vedremo questo argomento in dettaglio nelle prossime lezioni.

Per ora, notiamo che, se andiamo a misurare la derivata prima di g nel punto fisso zero, troviamo che essa, in valore assoluto, è maggiore di uno

$$|g'(0)| > 1.$$

Questo, come vedremo nelle prossime lezioni, ci assicura che non possiamo convergere al punto fisso 0. Inoltre, si osservi che in corrispondenza del punto fisso -1, $g'(x)$ in valore assoluto è minore di uno (ed in questo caso specifico è addirittura uguale a zero)

$$|g'(-1)| = 0.$$

Questo spiegherà anche il perché si abbia una convergenza molto rapida.