



**eCAMPUS**  
UNIVERSITÀ

**DiSTA**

**Corso: Analisi Numerica**

**Docente: Roberto Piersanti**

# **Radici di equazioni non lineari**

## **Lezione 1.6b**

Ordine di convergenza di un metodo iterativo

## Ordine di convergenza di un metodo iterativo (definizione)

- Ordine di convergenza = velocità di convergenza
- Data un successione  $\{x_n\}$  che converge ad  $\alpha$
- Successione converge ad  $\alpha$  con **ordine 1** se

$$\exists c < 1 \text{ t.c. } |\alpha - x_{n+1}| \leq c |\alpha - x_n| \quad \forall n \geq \bar{n}$$

$$\underbrace{|\alpha - x_{n+1}|}_{\text{Errore di approx al passo } n+1} \leq c \underbrace{|\alpha - x_n|}_{\text{Errore di approx al passo } n}$$

- L'errore diminuisce ad ogni iterazione
- Successione converge ad  $\alpha$  con **ordine  $p > 1$**  se

$$\exists c > 0 \text{ t.c. } |\alpha - x_{n+1}| \leq c |\alpha - x_n|^p \quad \forall n \geq \bar{n}$$

- Più  $p$  è grande, maggiore sarà la velocità di convergenza
- Convergenza più rapida (i.e. meno iterazioni  $n$ ) con un ordine maggiore

## Ordine di convergenza dei metodi per la ricerca degli zeri

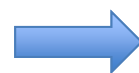
➤ **Metodi locali:** considerazione che valgono se

$x_0$  è «vicino» ad  $\alpha$

**Metodo di bisezione**  
**Metodo delle corde**



$$p = 1$$



**Convergenza  
lineare**

**Metodo delle secanti**



$$p \simeq 1.63$$



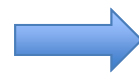
**Convergenza  
super-lineare**

$\longleftrightarrow$   
 $f'(\alpha) \neq 0$   
radice semplice

**Metodo di Newton**



$$p = 2$$



**Convergenza  
quadratica**

$\longleftrightarrow$   
 $f'(\alpha) \neq 0$   
radice semplice

## Ordine di convergenza delle iterazioni di punto fisso

- Caratterizzare la convergenza delle iterazioni di punto fisso
- Sotto le ipotesi del Teorema di esistenza dei punti fissi

Se  $g(x)$  è continua e  $g(I) \subset I$ ,  $\exists g'(x)$  con  $|g'(x)| \leq K < 1$   
allora  $\exists! \alpha \in I$  t.c.  $g(\alpha) = \alpha$

- Si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = g'(\alpha)$$

- Passando da limite a una relazione asintotica  $n \geq \bar{n}$

$$\alpha - x_{n+1} \simeq g'(\alpha)(\alpha - x_n)$$

- Le iterazioni di **punto fisso convergono linearmente (ordine 1)**  $c = g'(\alpha)$

## Ordine di convergenza delle iterazioni di punto fisso

- Sotto le ipotesi del Teorema di esistenza dei punti fissi
- Le iterazioni di **punto fisso convergono linearmente (ordine 1)**

$$\alpha - x_{n+1} \simeq g'(\alpha)(\alpha - x_n)$$

- Più  $|g'(\alpha)|$  è piccolo, più rapidamente avremo convergenza
- Se  $g'(\alpha) = 0$  si può verificare che il metodo di **punto fisso è di ordine 2**

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq \text{cost}(\alpha - x_n)^2$$