



METODI NUMERICI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Principi della risoluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie)

Nel precedente nucleo, dedicato all'introduzione delle equazioni differenziali ordinarie (EDO), abbiamo osservato, attraverso alcuni esempi, che spesso non è possibile ottenere un'espressione esplicita in forma chiusa per la soluzione di una EDO. Esistono numerosi casi in cui la soluzione non può essere espressa in forma esplicita, ma solo in forma implicita. Di fatto, la soluzione esatta di una EDO è ottenibile in modo diretto solo per alcune classi particolari di equazioni.

Le equazioni differenziali rappresentano il linguaggio matematico attraverso cui discipline come la fisica, l'ingegneria e molte altre scienze applicate modellizzano i fenomeni reali. In questi contesti applicativi, la soluzione esiste e possiamo garantirne l'esistenza, anche se non è possibile esprimerla nemmeno in forma implicita.

Per queste ragioni, diventa essenziale introdurre metodi numerici per la risoluzione delle EDO. Tali metodi consentono di ottenere sempre una soluzione approssimata, indipendentemente dalla complessità dell'equazione differenziale considerata, permettendo così di affrontare anche problemi particolarmente articolati.

In questa lezione introdurremo i principi fondamentali per la risoluzione numerica delle EDO. I metodi numerici per la risoluzione delle EDO sono strumenti quantitativi e universalmente validi, poiché possono essere applicati a equazioni di tipo arbitrario, a condizione che sia garantita l'esistenza della soluzione.

Iniziamo ora l'analisi dei principi fondamentali alla base della risoluzione numerica delle EDO. Ci concentreremo sul caso delle equazioni del primo ordine, assumendo che siano, a priori, non lineari e formulate in forma normale. Pertanto, il nostro obiettivo sarà quello di presentare l'approccio risolutivo per un'equazione generica del tipo

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

con la condizione aggiuntiva $y(x_0) = y_0$ che permette di chiudere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \end{cases}$$

L'intera trattazione potrà essere ripresa, quasi integralmente, anche per l'analisi dei sistemi di EDO (che non tratteremo nel corso), estendendo così il discorso dal caso di un'unica equazione a quello di più equazioni simultanee. Inoltre, poiché un'equazione differenziale di ordine superiore al primo può, in generale, essere ricondotta a un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, i metodi esposti risultano applicabili anche alla risoluzione di equazioni differenziali, sia lineari che non lineari, di ordine pari o superiore al secondo.

Iniziamo dunque con l'analisi delle EDO non lineari del primo ordine, esaminando i principi fondamentali su cui si basano i metodi numerici per la loro risoluzione. A tal fine, sarà necessario introdurre gli strumenti teorici e computazionali essenziali per la formulazione e l'implementazione di tali metodi.

La strategia generale consiste nel suddividere l'intervallo di integrazione, del problema di Cauchy, $I \subset \mathbb{R}$ della retta reale, introducendo dei punti x_k , definiti nodi

$$\{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}.$$



Tali nodi vengono utilizzati per generare sotto-intervalli aventi come estremi i punti x_k . Questo processo di suddivisione dell'intervallo I in sotto-intervalli determinati dai nodi x_k , è comunemente denominato discretizzazione dell'intervallo I . Il processo di discretizzazione ha inizio con l'identificazione dell'estremo sinistro x_0 , che funge da primo nodo e può essere interpretato come il valore dell'ascissa corrispondente al dato iniziale. La suddivisione si conclude con x_n , che rappresenta l'estremo destro dell'intervallo di integrazione I .

L'obiettivo di un generico metodo numerico per le EDO consiste nell'associare a ciascun nodo x_k un valore incognito u_k che approssimi la soluzione esatta $y(x)$ dell'equazione differenziale, ovvero

$$u_k \simeq y_k = y(x_k),$$

dove abbiamo indicato con y_k il valore che la funzione esatta $y(x)$ della EDO assume nel punto x_k , ovvero $y_k = y(x_k)$.

Pertanto, risolvere numericamente l'equazione differenziale implica generare un vettore di valori u_k , ciascuno dei quali rappresenta un'approssimazione della soluzione nel nodo corrispondente x_k

$$\{u_0, u_1, \dots, u_k, \dots, u_n\}.$$

Quindi, l'intervallo di riferimento è rappresentato da $\{x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_n\}$, la soluzione esatta è $y(x)$, e il metodo numerico fornirà un insieme di valori u_k , che costituiscono le approssimazioni della soluzione esatta della EDO nei nodi x_k .

In particolare, nel nodo x_0 il valore u_0 sarà esattamente y_0

$$u_0 = y_0 = y(x_0),$$

ovvero il dato iniziale del problema di Cauchy. Nel nodo x_1 dovremmo calcolare una soluzione numerica $u_1 \simeq y_1 = y(x_1)$. In generale, nel generico nodo x_k , si avrà una soluzione approssimata, denotata con u_k , che si avvicinerà alla soluzione esatta $y_k = y(x_k)$ della EDO, ovvero

$$u_k \simeq y_k = y(x_k),$$

dove y_k rappresenta il valore della soluzione esatta nel punto x_k .

In sintesi, nell'utilizzo di metodi numerici, alla soluzione esatta $y(x)$, che passa attraverso i punti $x_0, \dots, x_k, \dots, x_n$ si sostituisce un insieme di valori u_k , che sono utilizzati come approssimazioni di y_k , i valori che la soluzione esatta $y(x)$ assume nei nodi x_k , ovvero $y_k = y(x_k)$.

Il problema a questo punto consiste nel determinare come generare i valori u_k . Sappiamo quindi che è necessario:

- Definire i nodi x_k che discretizzeranno l'intervallo I ;
- Introdurre i valori u_k , che saranno soluzioni di un problema che chiameremo *problema numerico*, il quale costituirà un'approssimazione del problema esatto rappresentato dalla EDO.

Vediamo quindi come procedere per trovare la soluzione numerica, che è rappresentata dal vettore dei valori

$$\{u_0 = y_0, u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_n\}.$$

L'idea fondante è quella di generare un nuovo problema

$$\text{Approx}[y'(x_k)] \simeq \text{Approx}[f(x_k, y_k)], \quad k = 0, \dots, n,$$

che sostituisca l'equazione differenziale

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

con un'equazione che valga non per tutte le x possibili dell'intervallo I , ma esclusivamente per i nodi/punti x_k , così che si avranno un numero finito di relazioni. A tale scopo, si sostituisce alla derivata prima $y'(x)$ una sua approssimazione nei nodi x_k

$$y'(x) \Rightarrow \text{Approx}[y'(x_k)], \quad k = 0, \dots, n$$



e alla funzione $f(x, y)$ una sua approssimazione nei nodi (x_k, y_k)

$$f(x, y) \Rightarrow \text{Approx}[f(x_k, y_k)], \quad k = 0, \dots, n.$$

Questa strategia rappresenta, in maniera molto astratta, il nostro punto di partenza: generare una nuova equazione per ogni nodo x_k . Tale equazione sarà ottenuta dalla equazione di partenza $y'(x) = f(x, y(x))$, approssimando sia i termini a sinistra che quelli a destra della EDO.

Una prima tipologia di approssimazione consiste nel considerare un'approssimazione dell'equazione $y'(x) = f(x, y(x))$ nel generico nodo x_k (ovvero $y'(x_k) = f(x_k, y_k)$, dove $y_k = y(x_k)$) del tipo

$$G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1}) \simeq f(x_k, y_k) \quad k = 1, \dots, n,$$

dove a destra non viene effettuata alcuna approssimazione di f nel punto (x_k, y_k) e si prende esattamente il valore di $f(x_k, y_k)$, mentre a sinistra si approssima la derivata prima tramite un termine $G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1})$. Infatti, a sinistra di $y'(x) = f(x, y(x))$ è necessario introdurre un'approssimazione di $y'(x_k)$. Questa approssimazione può essere basata su una funzione G che utilizza non solo il valore di y_k nel nodo x_k (cioè $y_k = y(x_k)$), ma anche i valori adiacenti, come y_{k-1} e y_{k+1} (ovvero, i valori di y nei nodi adiacenti, x_{k-1} e x_{k+1} , quindi $y_{k-1} = y(x_{k-1})$ e $y_{k+1} = y(x_{k+1})$). Vedremo nel seguito come costruire la funzione G in dettaglio. Per ora, ci basta considerare che la funzione G dovrà "assomigliare" (e quindi approssimare) a $y'(x_k)$

$$G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1}) \simeq y'(x_k).$$

Vedremo che sarà possibile costruire la funzione G utilizzando, ad esempio, rapporti incrementali, attraverso i metodi di Eulero in avanti e all'indietro, nonché il metodo del punto medio, che verranno introdotti più avanti nel corso. Questi metodi potranno essere formulati come espressioni particolari della rappresentazione $G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1})$.

Un'altra tipologia di metodo numerico per la risoluzione delle EDO della forma $y'(x) = f(x, y(x))$, considerando un'approssimazione dell'equazione differenziale nel generico nodo x_k , ovvero $y'(x_k) = f(x_k, y_k)$ con $y_k = y(x_k)$, è la seguente

$$G(y_k, y_{k+1}) \simeq F[f(x_k, y_k), f(x_{k+1}, y_{k+1})],$$

dove, a sinistra, per la derivata prima $y'(x_k)$ vengono utilizzati solo due valori di y (anziché tre), rispettivamente nei punti x_k e x_{k+1} (quindi y_k ed y_{k+1}). Inoltre, per approssimare la funzione f , non si considera più il singolo valore $f(x_k, y_k)$, ma si utilizza una relazione F che coinvolge i valori $f(x_k, y_k)$ e $f(x_{k+1}, y_{k+1})$

$$F[f(x_k, y_k), f(x_{k+1}, y_{k+1})].$$

Si vedrà successivamente nel corso che questo tipo di approssimazione condurrà all'introduzione del cosiddetto metodo dei trapezi per l'equazione differenziale, il quale rappresenterà un caso particolare dell'espressione generale $G(y_k, y_{k+1}) \simeq F[f(x_k, y_k), f(x_{k+1}, y_{k+1})]$.

Analizziamo ora il criterio da adottare per generare un metodo numerico generico. Nelle relazioni precedenti è stato utilizzato il simbolo "circa uguale" (\simeq), poiché la derivata prima y' è stata sostituita con un'espressione che coinvolge i valori di y nei nodi, $G(y_k, y_{k+1})$, e la funzione f è stata sostituita con un'espressione che dipende dai valori di f nei nodi, $F[f(x_k, y_k), f(x_{k+1}, y_{k+1})]$. Tuttavia, in queste espressioni compaiono ancora, sia a sinistra che a destra, i valori della soluzione esatta y . Se si desidera assumere queste approssimazioni come equazioni effettivamente utilizzabili nel metodo numerico, sarà necessario sostituire la soluzione esatta y con la soluzione numerica u . In tal modo, il simbolo "circa uguale" (\simeq) verrà sostituito con un'uguaglianza ($=$), ottenendo così un'equazione da cui poter calcolare la soluzione numerica desiderata.

La soluzione numerica u è quindi quella che risolve esattamente l'equazione



$$G(y_k, y_{k+1}) \simeq F[f(x_k, y_k), f(x_{k+1}, y_{k+1})],$$

dove il simbolo "circa uguale" (\simeq) viene sostituito con un'uguaglianza ($=$)

$$G(u_k, u_{k+1}) = F[f(x_k, u_k), f(x_{k+1}, u_{k+1})].$$

La soluzione esatta y , invece, non risolve esattamente questa equazione

$$G(y_k, y_{k+1}) \simeq F[f(x_k, y_k), f(x_{k+1}, y_{k+1})],$$

poiché essa soddisfa esattamente l'equazione differenziale $y' = f(x, y(x))$.

In definitiva, la soluzione esatta y verifica l'espressione $G(y_k, y_{k+1}) \simeq F[f(x_k, y_k), f(x_{k+1}, y_{k+1})]$ soltanto in maniera approssimata. L'equazione viene invece risolta esattamente dalla soluzione numerica u , ovvero dal vettore u nei valori u_k , il quale definisce quindi l'equazione per la risoluzione numerica dell'EDO

$$G(u_k, u_{k+1}) = F[f(x_k, u_k), f(x_{k+1}, u_{k+1})].$$

Ad esempio, nella prima tipologia di approssimazione, $G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1}) \simeq f(x_k, y_k)$, la soluzione numerica u soddisferà queste equazioni in maniera esatta

$$\begin{cases} G(u_{k-1}, u_k, u_{k+1}) = f(x_k, u_k) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \quad k = 1, \dots, n,$$

dove, le funzioni G e f sono state considerate nella stessa forma scelta in precedenza, ma con la sostituzione dei valori u_{k-1}, u_k, u_{k+1} al posto di y_{k-1}, y_k, y_{k+1} . Inoltre, nella relazione che lega G a f , il simbolo "circa uguale" (\simeq) è stato sostituito con un'uguaglianza ($=$), ottenendo così l'equazione definitiva per la risoluzione numerica dell'EDO.