eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.6b

Metodi di Richardson

Risoluzione di sistemi lineari (convergenza)

- Se $\mu_k \in \mathbb{R}^+$ (autovalori di $P^{-1}A$) la convergenza di Richardson

$$\boxed{0 < \alpha < \frac{2}{\mu_{max}}}$$

- μ_{max} è il massimo autovalore di $P^{-1}A$

- Inoltre, se $A,\ P$ sono **matrici simmetriche definite positive (SDP)**

Parametro di Richardson

$$\alpha_{ott} \longrightarrow \rho_{ott} = \rho(R_{\alpha_{ott}}) \text{ è minimo}$$

Raggio spettrale

$$\alpha_{ott} = \frac{2}{\mu_{min} + \mu_{max}} \longleftrightarrow \rho_{ott} = \frac{K_2(P^{-1}A) - 1}{K_2(P^{-1}A) + 1}$$

Risoluzione di sistemi lineari (scelta dinamica di α)

- Il **metodo di Richardson** introduce un parametro α

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha \mathbf{r}^{(k)} \qquad k \geq 0$$

- Il **parametro di accelerazione** α è **costante** per ogni iterazione k

- Generalizzare per una **scelta dinamica** del parametro

$$\boxed{\alpha = \alpha_k}$$

- Una necessità: non sempre si conoscono $\mu_{min}, \; \mu_{max}$ di $P^{-1}A$

$$\alpha_{ott} = \frac{2}{\mu_{min} + \mu_{max}}$$

Risoluzione di sistemi lineari (Richardson dinamico)

- Richardson dinamico introduce un parametro α_k per ogni iterazione k

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)} \qquad k \geq 0$$

- Individuare delle strategie per ***determinare*** α_k ***automaticamente***

- Nel Richardson dinamico α_k è aggiornato

Utilizzando un criterio adattivo

$\Downarrow$

Metodo del gradiente

Risoluzione di sistemi lineari (residuo precondizionato)

- Obiettivo: α_k per massimizzare la velocità di convergenza del metodo

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha_k \mathbf{r}^{(k)}$$

- Applicando P^{-1} a sinistra e a destra

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \underbrace{P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}}_{\mathbf{z}^{(k)}}$$

Residuo precondizionato

- In maniera analoga si ricava che

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)}$$

Risoluzione di sistemi lineari (Richardson dinamico)

- Abbiamo ricavato due relazioni ricorsive

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)}$$
$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)}$$

Residuo precondizionato

$$\mathbf{z}^{(k)} = P^{-1}\mathbf{r}^{(k)}$$

- Riassumendo tutte le informazioni insieme si ha

$$\begin{cases} P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)} \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{z}^{(k)} \\ \mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A\mathbf{z}^{(k)} \end{cases} \qquad k \geq 0$$

- $P\mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{r}^{(k)}$ è un sistema lineare da risolvere