DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.2a

Il numero di condizionamento:
stabilità della risoluzione di un sistema lineare

Risoluzione di sistemi lineari: metodi iterativi

- **Stabilità nella risoluzione di un sistema lineare**

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Il concetto di **condizionamento** di un problema numerico

  ✓ Analisi dell'errore alla variazione dei dati $A, \mathbf{b}$

  ✓ **Numero di condizionamento** di una matrice

  ✓ Analisi di **stabilità** di un sistema lineare

  ✓ Relazione tra **stabilità e condizionamento**

Risoluzione di sistemi lineari (sistema perturbato)

- Obiettivo: studiare la sensibilità della soluzione $\mathbf{x}$ del sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

rispetto a perturbazioni nei dati $A, \mathbf{b}$

- Consideriamo la matrice A^* e vettore termine noto $\mathbf{b}^*$ perturbati

$$A^* = A + \delta A \qquad \mathbf{b}^* = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

- δA e $\delta\mathbf{b}$ rappresentano le perturbazioni sui dati:

  - Rappresentazione su un calcolatore (da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{F}$)
  - Misure sperimentali sono soggette a errori

Risoluzione di sistemi lineari (sistema perturbato)

- In corrispondenza del sistema perturbato la soluzione $\mathbf{x}$ cambia

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow A^* = A + \delta A \quad \mathbf{b}^* = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}$$

$$\Rightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x}$$

- Il nuovo sistema perturbato da risolvere è quindi

$$\boxed{(A + \delta A)(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \delta\mathbf{b}}$$

- Stimare $\delta\mathbf{x}$ in funzione di $\delta A, \delta\mathbf{b}$

Risoluzione di sistemi lineari (condizionamento di $\mathbf{A}$)

- Problema: stimare $\delta\mathbf{x}$ in funzione di $\delta A, \delta\mathbf{b}$

$$(A+\delta A)(\mathbf{x}+\delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}+\delta\mathbf{b}$$

- Stimare l'errore sulla soluzione in relazione all'errore sui dati

- Misurare gli errori ⇨ norma di vettori $\|\mathbf{a}\|$ e matrici $\|A\|$

- Introduciamo il **numero di condizionamento** della matrice A

$$\boxed{K(A) = \|A\|\|A^{-1}\|}$$

- <u>Dipende dalla norma</u> e $K(A) \in \mathbb{R}$ ⇨ $K(A) \geq 1$

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\|\|A^{-1}\| = K(A)$$