RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI: METODI ITERATIVI (Matrici simmetriche definite positive, raggio spettrale, errori assoluti e relativi)

In questa lezione introduttiva al terzo nucleo, verrà nuovamente esaminato il concetto di norma di matrici, con particolare attenzione ad un caso specifico riguardante le matrici simmetriche definite positive (SDP). Inoltre, introdurremo il concetto di raggio spettrale di una matrice, specificandolo per le matrici SDP. Infine, verrà introdotto il concetto di errore assoluto ed errore relativo per vettori e matrici, strumenti utili per il confronto tra questi oggetti. In particolare, verranno analizzate la differenza tra matrici, la differenza tra vettori e le relative misure di tali differenze.

Iniziamo quindi con il considerare una classe particolare di matrici: quella delle matrici simmetriche e definite positive (SDP). Una matrice quadrata di dimensione n (quindi con n righe e n colonne) si dirà SDP se soddisfa le seguenti proprietà di Simmetria e Positività:

- Simmetria: se $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ è una matrice simmetrica allora
$$A^T = A.$$
- Positività: per ogni vettore $\boldsymbol{x}$ di n componenti (quindi $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$) diverso da zero, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$, il prodotto scalare tra $\boldsymbol{x}$ e $A\boldsymbol{x}$ è positivo
$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) > 0, \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}.$$
Ricordando che il prodotto scalare, che può essere indicato attraverso l'espressione
$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x},$$
dove $\boldsymbol{x}^T$ è un vettore riga e $\boldsymbol{x}$ è un vettore colonna (e quindi il prodotto di un vettore riga per un vettore colonna), è un numero reale. Quindi, il prodotto scalare non è altro che la somma fatta su entrambi gli indici di riga i e di colonna j
$$(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$
Se il prodotto scalare così calcolato è sempre positivo, per ogni vettore $\boldsymbol{x}$ diverso da zero, diremo che la matrice A è definita positiva
$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}, A \in \mathbb{R}^{n\times n} \quad (A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}.$$

Una caratteristica fondamentale delle matrici SDP è la positività della parte reale dei loro autovalori. Pertanto, se λ rappresenta un generico autovalore della matrice A, si ha che la parte reale di λ soddisfa la seguente condizione
$$\lambda = \lambda(A) > 0.$$
Ricordiamo che gli autovalori di una matrice A sono le soluzioni della equazione non lineare
$$\det(A - \lambda I) = 0,$$
dove I è la matrice identità (ovvero la matrice con tutti gli elementi diagonali uguali a 1 e gli elementi fuori diagonale uguali a 0).

Introduciamo ora il concetto di raggio spettrale di una generica matrice B (non necessariamente SDP). Il raggio spettrale di B è definito come il massimo dei moduli degli autovalori di B
$$\rho(B) = \max_i |\lambda_i(B)|,$$

dove $\lambda_i(B)$ indica il generico autovalore di B.
Inoltre, si può verificare che la norma 2 di una generica matrice B è la radice quadrata del raggio spettrale di B per B^T, ovvero

$$\|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^T B)}.$$

Se dunque consideriamo una matrice B e la sua trasposta B^T, il prodotto $B^T B$ genera una nuova matrice. Si può verificare che questa nuova matrice $B^T B$ risulta essere SDP. Calcolando il raggio spettrale di $B^T B$,

$$\rho(B^T B) = \max|\lambda(B^T B)|,$$

ossia il massimo valore assoluto tra i suoi autovalori, e successivamente estraendone la radice quadrata, si ottiene la norma 2 della matrice.
Verifichiamolo attraverso un esempio. Sia $B^T B$ la matrice

$$B^T B = \begin{pmatrix} 26 & 17 \\ 17 & 25 \end{pmatrix},$$

i cui autovalori (facilmente calcolabili tramite l'equazione $\det(B^T B - \lambda I) = 0$ sono

$$\lambda_1 = 8.493 \quad e \quad \lambda_2 = 42.507,$$

entrambi reali e positivi. Da un lato, la norma due di B è

$$\|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^T B)} = \sqrt{\lambda_2} = 6.52.$$

Dall'altro lato, il raggio spettrale di $B^T B$ è $\lambda_2 = 42.507$

$$\rho(B^T B) = \max|\lambda(B^T B)| = 42.507 = \lambda_2,$$

la cui radice quadrata $\sqrt{\lambda_2} = 6.52$ corrisponde esattamente alla norma 2 di B.
Le matrici SDP, quindi, permettono di caratterizzare il loro raggio spettrale come norma due della matrice stessa.
Inoltre, possiamo osservare che, se A è simmetrica allora

$$A^T = A.$$

Se andiamo a moltiplicare A per A^T, troviamo una matrice A^2 (nel caso in cui A sia simmetrica).

$$A^T A = A^2 \quad \Leftrightarrow \quad A^T = A.$$

A^2 è una matrice SDP. Inoltre, gli autovalori di A^2 sono gli autovalori di A al quadrato

$$\lambda(A^2) = [\lambda(A)]^2.$$

Quest'ultima è una proprietà generale delle potenze di matrici. Gli autovalori della potenza p-esima di una matrice non sono altro che gli autovalori della matrice di partenza alla potenza p.
Andando a calcolare la norma 2 della matrice A, essa risulta essere la radice quadrata del raggio spettrale di $A^T A$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{\rho(A^2)} = \sqrt{[\rho(A)]^2} = \rho(A).$$

In conclusione, la norma 2 di A, matrice SDP, è il raggio spettrale di A, ovvero il massimo dei suoi autovalori

$$\|A\|_2 = \rho(A) = \max|\lambda(A)|.$$

Consideriamo il seguente esempio, prendendo in esame la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

che è una matrice simmetrica (perché gli elementi extra diagonali sono uguali). I suoi autovalori sono

$$\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad e \quad \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Allora la norma due di questa matrice, dovendo essere uguale al massimo dagli autovalori, sarà uguale al secondo autovalore

$$\|A\|_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Passiamo ora ad introdurre un secondo concetto che verrà utilizzato per confrontare vettori e matrici, ovvero il concetto di differenza fra matrici, differenza fra vettori e la relativa misura della differenza.
Se consideriamo un numero reale $a \in \mathbb{R}$, la sua lunghezza (o la sua misura) è il valore assoluto del numero stesso, ovvero $|a|$

$$\text{valore assoluto: } |a| = \begin{cases} a, & se\ a \geq 0 \\ -a, & se\ a < 0 \end{cases}$$

a se a è maggiore uguale zero, $-a$ se a è minore di zero. Dunque, se prendiamo ad esempio un numero reale a negativo la sua misura, il valore assoluto, sarà la distanza che lo separa dall'origine.
Se adesso consideriamo un vettore $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$, il modulo di $\boldsymbol{a}$ è la sua norma che può essere espressa tramite la norma 2 (o norma euclidea), ovvero la somma dei quadrati delle componenti, il tutto sotto radice quadrata

$$||a||_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Abbiamo infatti visto precedentemente che il concetto di norma per un vettore non è unico. Dunque, ogni norma esprime un concetto alternativo di misura del vettore $\boldsymbol{a}$. In maniera analoga, se consideriamo una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la norma è anch'essa un elemento che permette di caratterizzare in qualche maniera la misura della matrice.
Introduciamo ora il concetto di distanza tra numeri, vettori e matrici. Questo concetto riveste un ruolo fondamentale nell'analisi dei metodi numerici (ed in particolare per i metodi numerici iterativi per la risoluzione di sistemi lineari), poiché spesso è necessario misurare gli errori, ossia determinare la distanza tra la soluzione esatta di un problema (generalmente non accessibile) e la soluzione approssimata, ottenuta attraverso un metodo numerico. Per quantificare tale errore, è indispensabile disporre di strumenti adeguati che consentano di effettuare una stima precisa.
Se due elementi a e b sono numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$, la loro distanza assoluta è il modulo della loro differenza, cioè il valore assoluto della differenza

$$\text{errore assoluto: } \quad |a-b|.$$

Tale differenza rappresenta l'errore assoluto tra i due numeri reali.

Spesso risulterà utile misurare la distanza relativa, ovvero la distanza normalizzata. Questa si ottiene calcolando la distanza assoluta e dividendo il risultato per il valore assoluto di a

$$\text{errore relativo: } \quad \frac{|a-b|}{|a|}.$$

Tale differenza percentuale rappresenta l'errore relativo tra i due numeri reali.
L'errore relativo è un aspetto fondamentale poiché consente di comprendere l'ordine di grandezza degli errori. Ad esempio, se una misura è espressa in metri, un errore di 1 cm potrebbe essere accettabile, in quanto rientra nell'ordine di un errore percentuale. Tuttavia, se la misura è espressa in centimetri, un errore di 1 cm potrebbe risultare significativo e non tollerabile.

Possiamo quindi distinguere due tipologie di errore: errore assoluto ed errore relativo. L'errore assoluto è definito come la differenza tra il valore misurato e il valore esatto, mentre l'errore relativo si ottiene dividendo l'errore assoluto per il valore esatto, esprimendo così l'errore in termini di frazione o percentuale rispetto al valore reale.

In maniera analoga possiamo introdurre il concetto di differenza assoluta, differenza relativa fra due vettori. Se $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ sono due vettori ed uno dei due è diverso da zero ($\boldsymbol{a} \neq 0$), $\boldsymbol{a}$ meno $\boldsymbol{b}$ in una specifica norma misurerà la distanza assoluta

$$\text{errore assoluto: } \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|,$$

ovvero, un errore assoluto tra il vettore $\boldsymbol{a}$ e il vettore $\boldsymbol{b}$. Questa è una misura della lunghezza del vettore differenza fra i due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. La misura relativa è la misura assoluta diviso la norma del vettore che si prende come riferimento (per esempio $\boldsymbol{a}$)

$$\text{errore relativo: } \frac{\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|}{\|\boldsymbol{a}\|}.$$

Quindi ancora una volta stiamo normalizzando la stima della differenza fra la soluzione attesa e la soluzione calcolata. Ovvero stiamo esprimendo un errore relativo (percentuale).
Lo stesso tipo di approccio può essere seguito per il caso delle matrici. Se $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sono due matrici, di n righe e n colonne, e $A \neq 0$, la distanza di A da B, in una certa norma, esprime l'errore assoluto, mentre la distanza di A da B divisa per la norma di A, esprime l'errore relativo tra le due matrici.

$$\text{errore assoluto: } \|A - B\|, \qquad \text{errore relativo: } \frac{\|A - B\|}{\|A\|}.$$