eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Radici di equazioni non lineari
Lezione 1.6b

Ordine di convergenza di un metodo iterativo

Ordine di convergenza di un metodo iterativo (definizione)

- Ordine di convergenza = velocità di convergenza
- Data un successione $\{x_n\}$ che converge ad α
- Successione converge ad α con **ordine 1** se

$$\exists c < 1 \text{ t.c. } \underbrace{|\alpha - x_{n+1}|}_{\text{Errore di approx al passo } n+1} \leq c \underbrace{|\alpha - x_n|}_{\text{Errore di approx al passo } n} \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

- L'errore diminuisce ad ogni iterazione
- Successione converge ad α con **ordine p>1** se

$$\exists c > 0 \text{ t.c. } |\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

- Più p è grande, maggiore sarà la velocità di convergenza
- Convergenza più rapida (i.e. meno iterazioni n) con un ordine maggiore

Ordine di convergenza dei metodi per la ricerca degli zeri

- **Metodi locali:** considerazione che valgono se

x_0 **è «vicino» ad** α

Metodo di bisezione
Metodo delle corde $\Rightarrow$ $p = 1$ $\Rightarrow$ **Convergenza lineare**

Metodo delle secanti $\Rightarrow$ $p \simeq 1.63$ $\Rightarrow$ **Convergenza super-lineare** $\Longleftrightarrow$ $f'(\alpha) \neq 0$ radice semplice

Metodo di Newton $\Rightarrow$ $p = 2$ $\Rightarrow$ **Convergenza quadratica** $\Longleftrightarrow$ $f'(\alpha) \neq 0$ radice semplice

Ordine di convergenza delle iterazioni di punto fisso

- Caratterizzare la convergenza delle iterazioni di punto fisso
- Sotto le ipotesi del Teorema di esistenza dei punti fissi

$$\text{Se } g(x) \text{ è continua e } g(I) \subset I,\ \exists g'(x) \text{ con } |g'(x)| \leq K < 1$$
$$\text{allora } \exists! \alpha \in I \text{ t.c. } g(\alpha) = \alpha$$

- Si ha che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\alpha - x_{n+1}}{\alpha - x_n} = g'(\alpha)$$

- Passando da limite a una relazione asintotica $n \geq \bar{n}$

$$\alpha - x_{n+1} \simeq g'(\alpha)(\alpha - x_n)$$

- Le iterazioni di **punto fisso convergono linearmente (ordine 1)** $c = g'(\alpha)$

Ordine di convergenza delle iterazioni di punto fisso

- Sotto le ipotesi del Teorema di esistenza dei punti fissi
- Le iterazioni di **punto fisso convergono linearmente (ordine 1)**

$$\alpha - x_{n+1} \simeq g'(\alpha)(\alpha - x_n)$$

- Più $|g'(\alpha)|$ è piccolo, più rapidamente avremo convergenza
- Se $g'(\alpha) = 0$ si può verificare che il metodo di **punto fisso è di ordine 2**

$$|\alpha - x_{n+1}| \leq cost(\alpha - x_n)^2$$