eCAMPUS UNIVERSITÀ | DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistemi lineari

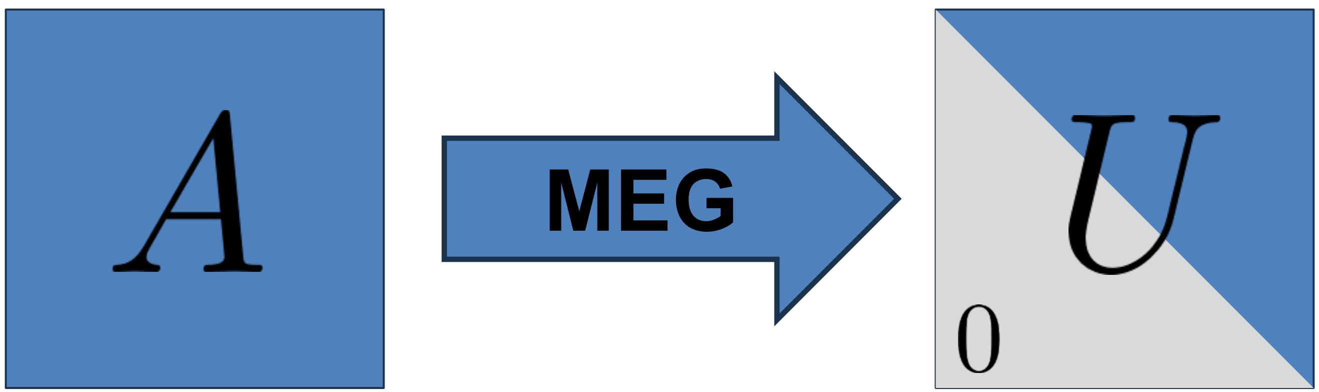
Lezione 2.3b

Metodi numerici diretti: sostituzioni in avanti e indietro

Risoluzione di sistemi lineari (Metodi diretti)

- **Metodi diretti:** si basano sul **Metodo di Eliminazione di Gauss (MEG)**
- Risolve un sistema lineare, con A matrice «piena» (tutti elementi non nulli), trasformandolo in un <u>sistema equivalente</u> con U (Upper) <u>triangolare superiore</u>

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad\qquad U\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

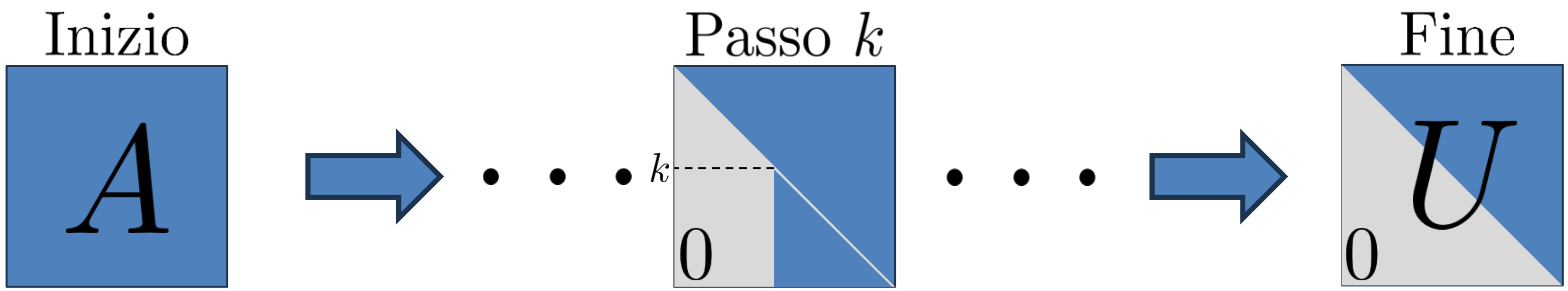


- Sistema è equivalente perché $\mathbf{x}$ è la stessa, ma cambiano

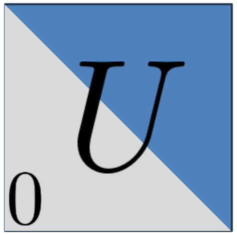
$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(A, \mathbf{b}) \qquad U = U(A) \qquad u_{km} = 0 \quad k > m$$

Risoluzione di sistemi lineari (Principio fondamentale del MEG)

- Costruire U tramite una serie di trasformazioni applicate alla A



- Ad ogni passo k, la matrice avrà tutti 0 sotto la diagonale principale fino alla riga k-esima
- Processo iterativo fino a raggiungere la forma triangolare superiore
- Alla fine dovremo risolvere un sistema triangolare superiore



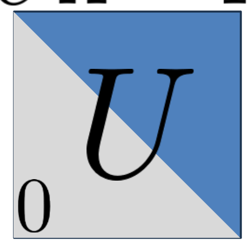
$$U\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

Risoluzione di sistemi lineari (Sistemi triangolari)

- Come risolvere sistemi triangolari (superiori e inferiori)

Triangolari superiori

$$U\mathbf{x} = \mathbf{f}$$

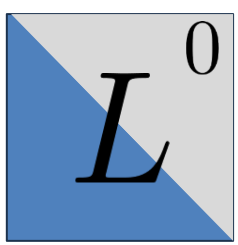


$U = \text{Upper}$

$$=\quad \begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n = f_1 \\ \qquad\quad\; u_{22}x_2 + \cdots + u_{2n}x_n = f_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad u_{nn}x_n = f_n \end{cases}$$

Triangolari inferiori

$$L\mathbf{x} = \mathbf{f}$$



$L = \text{Lower}$

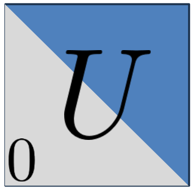
$$=\quad \begin{cases} l_{11}x_1 = f_1 \\ l_{21}x_1 + u_{22}x_2 = f_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{nn}x_n = f_n \end{cases}$$

Risoluzione di sistemi lineari (sostituzioni all’indietro)

✓ Risolvere $U\mathbf{x} = \mathbf{f}$: si parte dall’ultima equazione e si calcola x_n e si procede a ritroso fino alla prima equazione

Sistemi Triangolari superiori

$$U\mathbf{x} = \mathbf{f}$$



$U = \mathrm{Upper}$

$$= \begin{cases} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + \cdots + u_{1n}x_n = f_1 \\ \vdots \\ u_{n-1,n-1}x_{n-1} + u_{n-1,n}x_n = f_{n-1} \\ u_{nn}x_n = f_n \end{cases}$$

➢ Per la componente n ed $n-1$ ⟹

$$x_n = \frac{f_n}{u_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{f_{n-1} - u_{n-1,n}x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

❑ Formula compatta (**sostituzioni all’indietro**)

Backward substitution

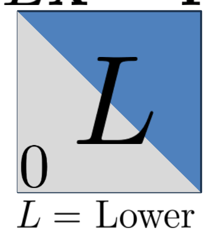
$$\begin{cases} x_n = \dfrac{f_n}{u_{nn}} \\ x_k = \dfrac{f_k - \sum_{m=k+1}^{n} u_{km}x_m}{u_{kk}} \end{cases} \qquad k = n-1, \ldots, 1$$

Risoluzione di sistemi lineari (sostituzioni in avanti)

✓ Risolvere $L\mathbf{x} = \mathbf{f}$: si parte dalla prima equazione e si calcola x_1 , e si procede in avanti fino all'ultima equazione

Sistemi Triangolari inferiori

$$L\mathbf{x} = \mathbf{f}$$



$$\begin{cases} l_{11}x_1 = f_1 \\ l_{21}x_1 + u_{22}x_2 = f_2 \\ \vdots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + l_{nn}x_n = f_n \end{cases}$$

➢ Per la componente 1 ed 2

$$x_1 = \frac{f_1}{l_{11}} \qquad x_2 = \frac{f_2 - l_{21}x_1}{u_{22}}$$

❑ Formula compatta (**sostituzioni in avanti**)

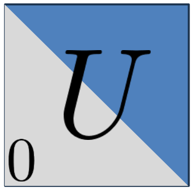
Forward substitution

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{f_1}{l_{11}} \\ x_k = \dfrac{f_k - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}x_m}{u_{kk}} \end{cases} \qquad k = 2, \ldots, n$$

Risoluzione di sistemi lineari (sostituzioni avanti/indietro)

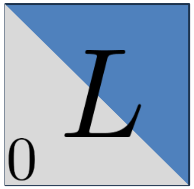
✓ Abbiamo visto due modi semplici per risolvere un sistema triangolare

Sistemi Triangolari Superiori
$U\mathbf{x} = \mathbf{f}$



Sostituzioni all'indietro

Sistemi Triangolari inferiori
$L\mathbf{x} = \mathbf{f}$



Sostituzioni in avanti

✓ <u>OSSERVAZIONI</u>:

1. E' lecito dividere per gli elementi diagonali di U (o L) dato che:
$$\det(U) \neq 0 \;\Rightarrow\; \det(U) = \prod_{k=1} u_{kk} \neq 0 \;\Rightarrow\; u_{kk} \neq 0 \;\; \forall k$$
2. Si può verificare che le sostituzioni in avanti/indietro richiedono:

$$\boxed{n^2 \quad \text{operazioni}}$$