Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

# Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

## Lezione 5.4b

EDO lineari del primo ordine ed EDO non lineari a variabili separabili

# Risoluzione di EDO 1°ordine non lineari a variabili separabili

- Classe di EDO del 1° ordine non lineari a variabili separabili
- Esempio: **Equazione della logistica**

  Descrive la dinamica di crescita di una popolazione con risorse limitate

$$y'(t) = \frac{K}{L} y(L - y) \qquad\qquad y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

- $y(t)$ dimensione della popolazione al tempo $t$
- $K > 0$ prolificità della specie
- $L > 0$ popolazione allo stato stazionario

# Risoluzione di EDO (Equazione della logistica)

- EDO del 1° ordine **non lineare** a variabili separabili

$$y'(t) = \frac{K}{L} y(L - y)$$

- EDO in forma normale ed autonoma

$$y'(t) = f(y)$$

**Termine che dipende da $t$**

**Termine che dipende da $y$**

- **Obiettivo:** separare le variabili $y$ e $t$

**Isolare $y$ da un lato e $t$ dall'altro lato**

# Risoluzione di EDO (Equazione della logistica)

- **Obiettivo:** separare le variabili $y$ e $t$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{K}{L} y(L-y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{L}{y(L-y)} dy = K dt$$

- Integrando ambo i membri

$$\int \frac{L}{y(L-y)} dy = \int K dt = Kt + C$$

# Risoluzione di EDO (Equazione della logistica)

- Integrando ambo i membri

$$\int \underbrace{\frac{L}{y(L-y)}}_{\frac{1}{y}-\frac{1}{L-y}} dy = Kt + C$$

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{L-y} \\[2ex] \int \frac{1}{y} dy = \log(y) + cost \end{array}\right\} \Rightarrow \log\left(\frac{y}{L-y}\right) = Kt + C$$

- Applicando l'esponenziale ( $C_1 = e^C$)

$$\Rightarrow \frac{y}{L-y} = C_1 e^{Kt} \Rightarrow \boxed{y(t) = C_1 \frac{Le^{Kt}}{1 + C_1 e^{Kt}}}$$

# Risoluzione di EDO (Equazione della logistica)

$$y(t) = C_1 \frac{Le^{Kt}}{1 + C_1 e^{Kt}} \qquad L = C_1 = 1$$