Corso: Analisi Numerica

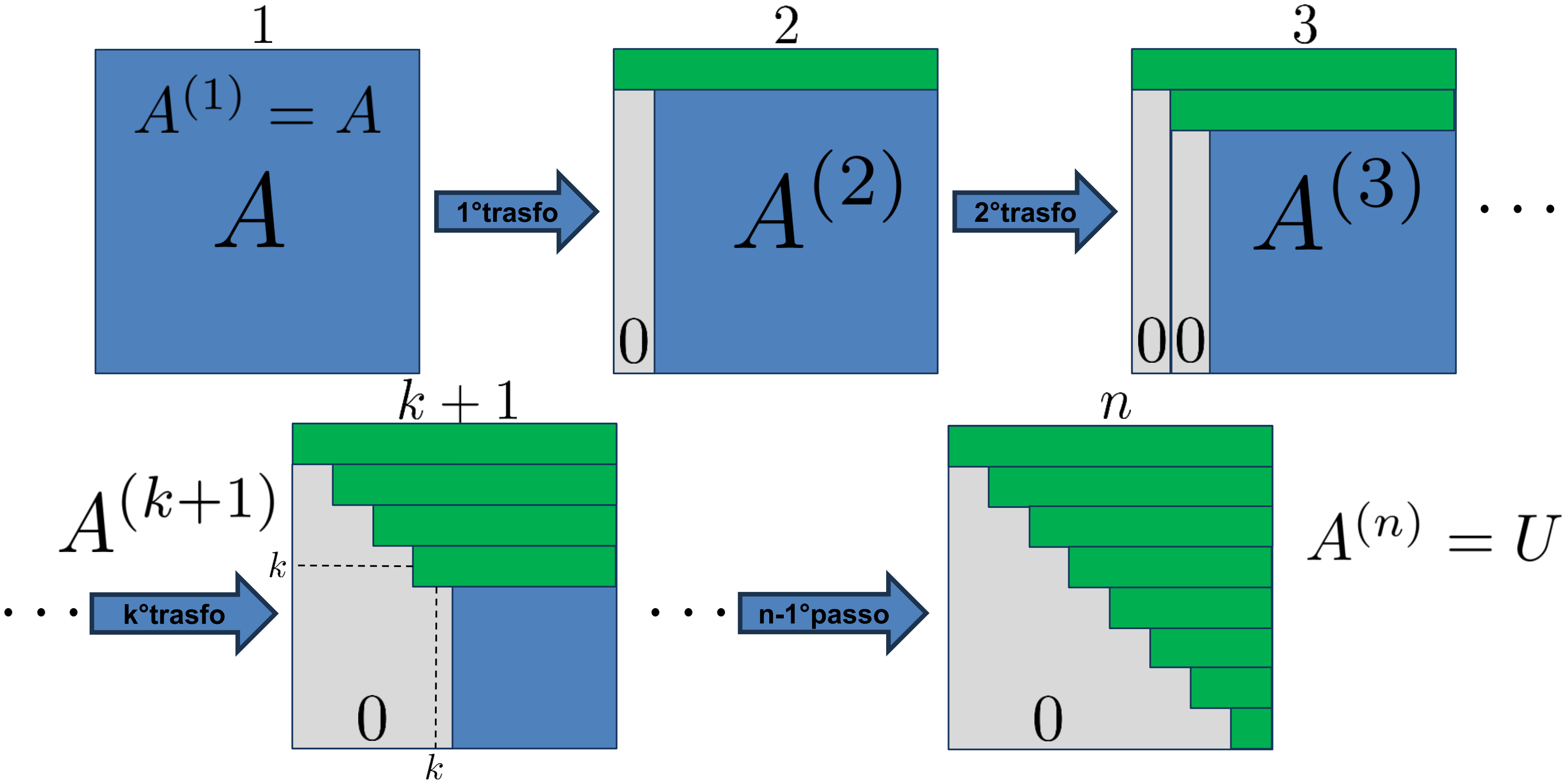
Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistemi lineari
Lezione 2.4b

Il Metodo di Eliminazione di Gauss

Risoluzione di sistemi lineari (MEG: idea generale)

- Procedura generale per una matrice piena $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$



Risoluzione di sistemi lineari (MEG a livello algebrico)

- Osserviamo come il MEG si riflette a livello algebrico
- Al passo k, $A^{(k-1)} \to A^{(k)}$, abbiamo il sistema

$$A^{(k)}\mathbf{x} = \mathbf{b}^{(k)} \qquad k = 1, \dots, n$$

(2) $A^{(1)} \to A^{(2)}$

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ & & & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{(k)} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{sopra-indice} \\ \\ \\ \leftarrow \text{riga } k \\ \\ \\ \end{array}$$

- **Tutti zeri** sotto la diagonale principale fino alla riga $k-1$

Risoluzione di sistemi lineari (MEG: formule iterative)

- Il passaggio $A^{(k)} \rightarrow A^{(k+1)}$ è effettuato dalle formule

$$k = 1, \ldots, n-1$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} & i, j = k+1, \ldots, n \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} & i = k+1, \ldots, n \\ m_{ik} = \dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & i = k+1, \ldots, n \end{cases}$$

- Stiamo dividendo per $a_{kk}^{(k)}$

$$\Rightarrow \boxed{a_{kk}^{(k)} \neq 0}$$

Risoluzione di sistemi lineari (MEG: risolvere il sistema finale)

- Ultimo passo del MEG: al passo n, $A^{(n-1)} \rightarrow A^{(n)}$

$$A^{(n)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Matrice triangolare superiore

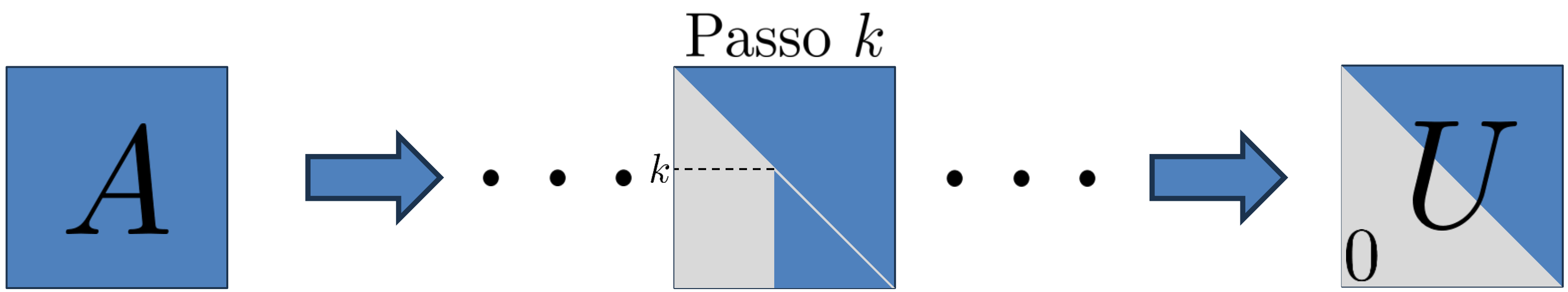
- Il sistema da risolvere sarà

$$A^{(n)}\mathbf{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}}_{U} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_1^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} = \mathbf{b}^{(n)}$$

$\Rightarrow$ $U\mathbf{x} = \mathbf{f}$

Risoluzione di sistemi lineari (MEG: costo computazionale)

- MEG è un metodo diretto $k = 1, \ldots, n$, $A = A^{(1)} \rightarrow A^{(n)} = U$



- Si può verificare che il **costo computazionale del MEG**, ovvero il numero di operazioni necessarie, risulta

$$\frac{2}{3}n^3$$