Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistemi lineari
Lezione 2.2b

Richiami sui sistemi lineari

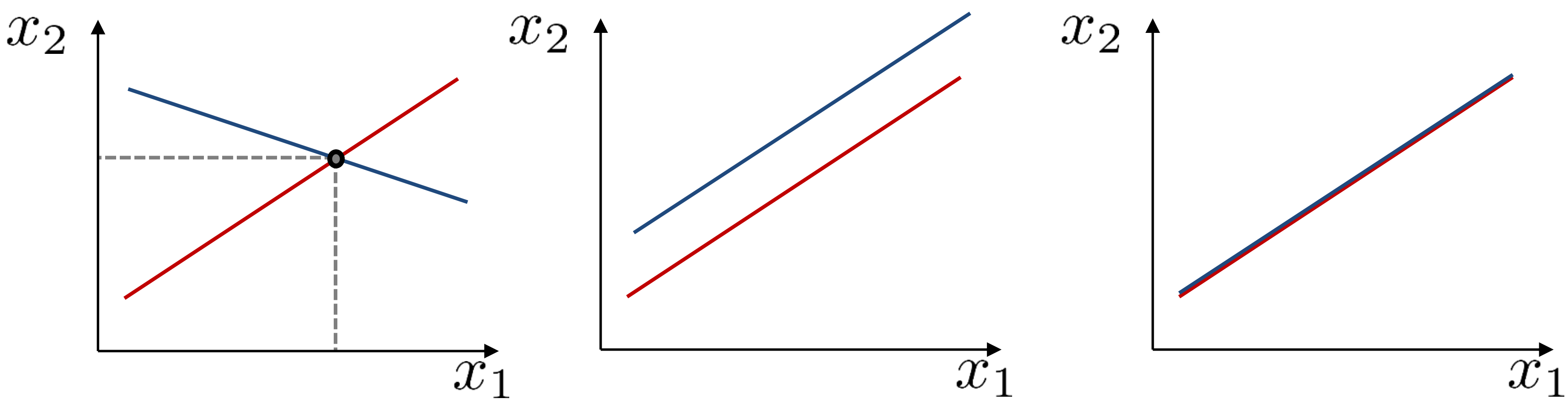
Richiami sui sistemi lineari (esistenza e unicità)

➢ Un sistema di n equazioni in n incognite (con matrice $n \times n$) può avere:

- Un'unica soluzione
- Nessuna soluzione
- Infinite soluzioni

➢ Esempio: sistema 2×2 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ = Due rette nel piano $\mathbb{R}^2$

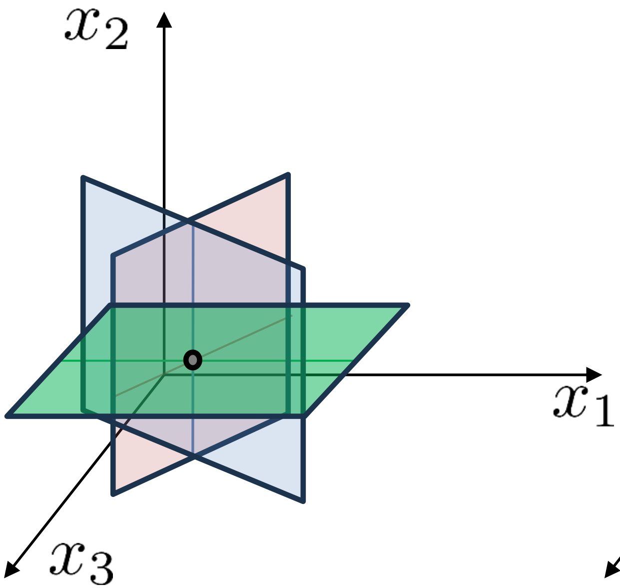
Unica soluzione **Nessuna soluzione** **Infinite soluzioni**



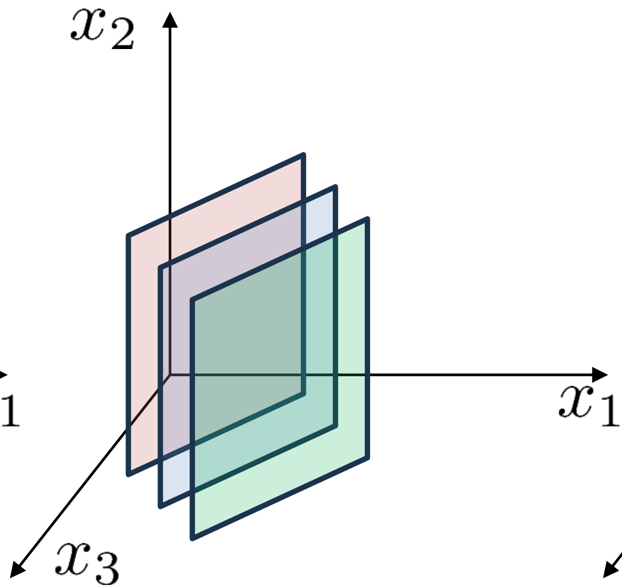
Richiami sui sistemi lineari (esistenza e unicità)

➢ Esempio: sistema 3×3 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ = Tre piani nello spazio $\mathbb{R}^3$

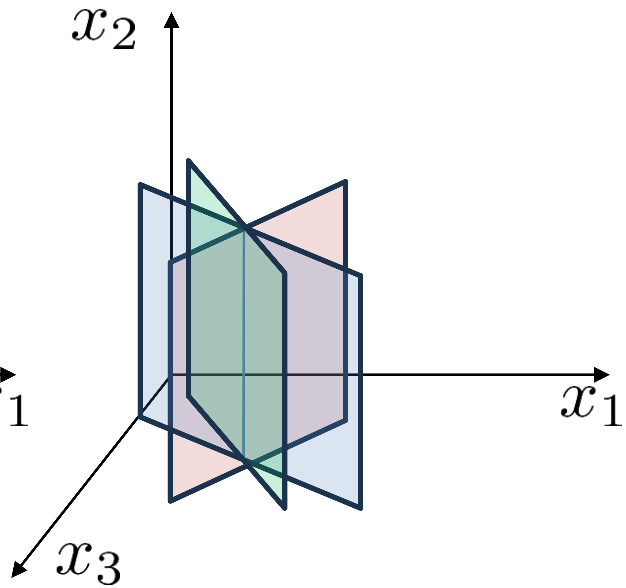
Unica soluzione



Nessuna soluzione



Infinite soluzioni



Richiami sui sistemi lineari (esistenza e unicità)

- Un sistema arbitrario ammette soluzione ed è unica se:

1. A è non singolare: $\det(A) \neq 0$

2. $A\mathbf{z} = \mathbf{0} \iff \mathbf{z} = \mathbf{0}$: Sistema omogeneo ha come unica soluzione la soluzione nulla

3. Rango di A è uguale al rango di $(A|\mathbf{b})$= n dim. del sistema

   Rango: ordine massimo di determinanti non nulli estratti da A

$$n = \mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A|\mathbf{b}) \qquad A|\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Richiami sui sistemi lineari (il determinante)

- A è non singolare: $\det(A) \neq 0$, dove il determinante è definito

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij} & n > 1 \end{cases}$$

- C_{ij} è il cofattore di a_{ij} $\Rightarrow$ $C_{ij} = -1^{(i+j)} \det(A_{ij})$
- $\det(A_{ij})$ determinante che si ottiene togliendo la i riga e j colonna

$$\boxed{n = 1} \qquad \det(A) = a_{11}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{n = 2} \qquad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\boxed{n = 3} \qquad \begin{aligned} \det(A) = a_{11}(-1)^2(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + \\ + a_{21}(-1)^3(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + \\ + a_{31}(-1)^4(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) \end{aligned}$$