Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica

Lezione 4.8b

Operazioni floating point

Fondamenti della matematica numerica (precisione di macchina)

- **L'errore** relativo e assoluto **di round-off**

$$|x - \mathrm{fl}^t(x)| \leq \frac{1}{2}\beta^{e-t}$$

$$\boxed{\frac{|x - \mathrm{fl}^t(x)|}{|x|} \leq \frac{1}{2}\beta^{1-t}}$$

- Due ingredienti della stima sono β e t
- t ⇨ l'errore diminuisce al crescere delle cifre significative (precisione)

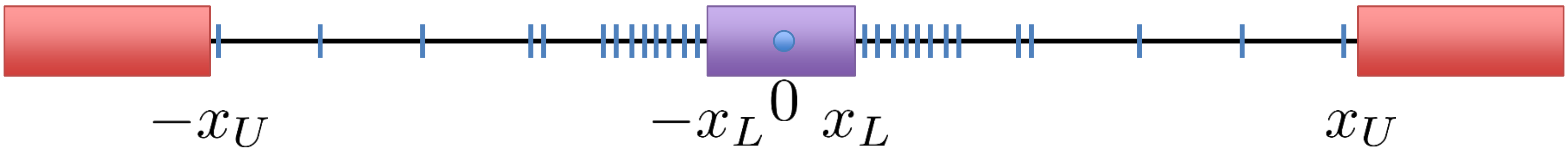
Più t è grande più piccolo sarà l'errore relativo che si origina quando si rappresenta un qualunque numero reale.

$$u = \frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

u **Precisione di macchina**

Fondamenti della matematica numerica (operazioni di macchina)

- Esaminiamo come il calcolatore esegue operazioni utilizzando $\mathrm{fl}^t(x)$



- Prendendo $x, y \in \mathbb{F}$

$$\text{2 possibili casi} \begin{cases} z = x \diamond y \in \mathbb{F} \\ z = x \diamond y \in \mathbb{R}/\mathbb{F} \end{cases} \qquad \diamond \to +, -, \times, /$$

- Caso in cui $z = x \diamond y \in \mathbb{R}/\mathbb{F}$

1. ***Overflow*** $\quad |z| > x_U$
2. ***Underflow*** $\quad |z| < x_L$
3. $x_L < |z| < x_U$

Fondamenti della matematica numerica (operazioni di macchina)

- **Esempio:**

$$\beta = 10, \;\; t = 3, \;\; L = -50, \;\; U = 50$$

$$x = (0.235)_{10} \qquad\qquad y = (0.900)_{10}$$

$$x + y = (1.135)_{10} = (0.113\boxed{5})_{10} \cdot 10^1 \notin \mathbb{F} \;\longrightarrow\; \mathrm{fl}^3(x+y) \in \mathbb{F}$$

- **Esempio:**

$$x = (0.235)_{10} \cdot 10^{40} \qquad\qquad y = (0.900)_{10} \cdot 10^{20}$$

$$x \times y = (0.470)_{10} \cdot 10^{59} \notin \mathbb{F} \;\longrightarrow\; \text{Overflow}$$

Fondamenti della matematica numerica (operazioni di macchina)

- **Operazioni di macchina** (somma, differenza, prodotto, divisione)

$$\oplus, \quad \ominus, \quad \otimes, \quad \oslash$$

- Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e le loro rappresentazioni di macchina $\mathrm{fl}^t(x), \mathrm{fl}^t(y) \in \mathbb{F}$

$$x \to x_M = \mathrm{fl}^t(x), \qquad y \to y_M = \mathrm{fl}^t(y)$$

$$x_M + y_M = z_M \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{fl}^t(z_M) \in \mathbb{F}$$

Addizione di Macchina → $x \oplus y = \mathrm{fl}^t[\mathrm{fl}^t(x) + \mathrm{fl}^t(t)] \in \mathbb{F}$

Fondamenti della matematica numerica (operazioni di macchina)

Addizione di Macchina	$\longrightarrow x \oplus y = fl^t[fl^t(x) + fl^t(t)] \in \mathbb{F}$
Sottrazione di Macchina	$\longrightarrow x \ominus y = fl^t[fl^t(x) - fl^t(t)] \in \mathbb{F}$
Prodotto di Macchina	$\longrightarrow x \otimes y = fl^t[fl^t(x) \times fl^t(t)] \in \mathbb{F}$
Divisione di Macchina	$\longrightarrow x \oslash y = fl^t[fl^t(x) / fl^t(t)] \in \mathbb{F}$

➢ Effetto di tali operazioni nella **propagazione degli errori** di round-off

$$x \in \mathbb{R} \to \epsilon(x) = \frac{|x - fl^t(x)|}{|x|} \qquad y \in \mathbb{R} \to \epsilon(y) = \frac{|y - fl^t(y)|}{|y|}$$

$$\epsilon(x \odot y) = \frac{|(x \diamond y) - (x \odot y)|}{|x + y|} \qquad \begin{array}{l} \odot = \oplus, \ominus, \otimes, \oslash \\ \diamond = +, -, \times, / \end{array}$$

Fondamenti della matematica numerica (condizionamento opz.)

- È possibile esprimere $\epsilon(x \odot y)$ in funzione di $\epsilon(x)$ e $\epsilon(y)$

$$\epsilon(x \oplus y) \leq C_1 \epsilon_{max}(x, y) \qquad \epsilon(x \otimes y) \leq C_2 \epsilon_{max}(x, y)$$
$$\epsilon(x \ominus y) \leq C_3 \epsilon_{max}(x, y) \qquad \epsilon(x \oslash y) \leq C_3 \epsilon_{max}(x, y)$$

$$\epsilon_{max}(x, y) = \max[\epsilon(x), \epsilon(y)]$$

- **Condizionamento di un operazione macchina:** $\oplus, \ominus, \otimes, \oslash$

  a piccoli errori su x e y corrispondono piccoli errori sulle operazioni

$\oplus, \otimes, \oslash$ **Ben condizionata**

$\ominus$ **Mal condizionata** se $|x| \simeq |y|$

Loss of significance error