eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

# Radici di equazioni non lineari

## Lezione 1.6a

Ordine di convergenza di un metodo iterativo

# Ricerca degli zeri per equazioni non lineari

- Obiettivo: **ordine di convergenza di un metodo iterativo**
  - Caratterizzare la velocità di convergenza di un metodo iterativo
  - **Concetto:** ordine di un metodo iterativo

**Convergenza** $\{x_n\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

- Caratterizzeremo i metodi visti in precedenza
  - Metodo di bisezione
  - Metodo delle corde, secanti e Newton
  - Iterazioni di punto fisso

# Ricerca degli zeri per equazioni non lineari

- Ricerca degli zeri/radici per funzioni $f(x) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \alpha \text{ t.c. } f(\alpha) = 0$

**Metodo di bisezione**

$$x_n = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \forall n \geq 0$$

**Famiglia di metodi:** Corde, Secanti, Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{q_n} \qquad \forall n \geq 0$$

**Iterazioni di punto fisso**

$$x_{n+1} = g(x_n) \qquad \forall n \geq 0$$

$$g(\alpha) = \alpha \quad g(x) = x$$
$$f(\alpha) = 0 \quad f(x) = x - g(x)$$

**Convergenza** $\{x_n\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$

**Obiettivo:** quantificare l'ordine/velocità di convergenza del metodo

# Ordine di convergenza di un metodo iterativo (definizione)

- Ordine di convergenza = velocità di convergenza
- Data un successione $\{x_n\}$ che converge ad $\alpha$
- Successione converge ad $\alpha$ con **ordine 1** se

$$\exists c < 1 \text{ t.c. } |\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n| \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

$\boxed{\textbf{Errore di approx al passo } n+1} \leq c \boxed{\textbf{Errore di approx al passo } n}$

- L'errore diminuisce ad ogni iterazione
- Successione converge ad $\alpha$ con **ordine p>1** se

$$\exists c > 0 \text{ t.c. } |\alpha - x_{n+1}| \leq c|\alpha - x_n|^p \qquad \forall n \geq \bar{n}$$

- Più $p$ è grande, maggiore sarà la velocità di convergenza
- Convergenza più rapida (i.e. meno iterazioni $n$) con un ordine maggiore

# Ordine di convergenza dei metodi per la ricerca degli zeri

- **Metodi locali:** considerazione che valgono se

**$x_0$ è «vicino» ad $\alpha$**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Metodo di bisezione**<br>**Metodo delle corde** | $\Rightarrow$ $p = 1$ $\Rightarrow$ | **Convergenza lineare** | | |
| **Metodo delle secanti** | $\Rightarrow$ $p \simeq 1.63$ $\Rightarrow$ | **Convergenza super-lineare** | $\Longleftrightarrow$ | $f'(\alpha) \neq 0$<br>radice semplice |
| **Metodo di Newton** | $\Rightarrow$ $p = 2$ $\Rightarrow$ | **Convergenza quadratica** | $\Longleftrightarrow$ | $f'(\alpha) \neq 0$<br>radice semplice |