Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.5b

Il metodo di rilassamento SOR e la matrice di precondizionamento

Risoluzione di sistemi lineari (un quadro generale)

- Reinterpretare i **metodi iterativi** visti finora (**Jacobi, GS, SOR**)
- Introduzione di **un quadro più generale**
- Riscrittura dei metodi iterativi in una **forma più astratta**

1. Residuo al passo k

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$$

2. Formula generale del metodo iterativo

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \qquad k \geq 0$$

Risoluzione di sistemi lineari (formula generale)

- Sommando e sottraendo la matrice P alla matrice N

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = \boxed{N}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

$$\Rightarrow P\mathbf{x}^{(k+1)} = (N - P)\mathbf{x}^{(k)} + P\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$$

- Splitting $A = P - N$

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = P\mathbf{x}^{(k)} + \overbrace{\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}}^{\mathbf{r}^{(k)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P\underbrace{(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)})}_{\delta\mathbf{x}^{(k+1)}} = \mathbf{r}^{(k)}}$$

Risoluzione di sistemi lineari (matrice di precondizionamento)

- Formulazione che evidenzia il passaggio dal residuo all'iterata $k+1$

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{r}^{(k)}$$

- Attraverso la matrice P : **matrice di precondizionamento**

- I metodi visti finora possono essere riscritti tramite

  - **Jacobi:** $P_J = D$
  - **GS:** $P_{GS} = D + E$
  - **SOR:** $P_{SOR} = (D + \omega E)/\omega$

- Metodi **caratterizzati** ora **dalla matrice di precondizionamento**

Risoluzione di sistemi lineari (precondizionatore)

- Corrispondenza biunivoca tra la scelta di P e il metodo iterativo

Precondizionatore P ⟷ **Metodo iterativo**

- La matrice di iterazione è $B = I - P^{-1}A$

- Criteri per determinare P :

  1. <u>Minimizzare il raggio spettrale</u> $\rho(B)$ della matrice B
  2. <u>Ridurre il costo</u> per risolvere

$$P(\delta\mathbf{x}^{(k+1)}) = \mathbf{r}^{(k)}$$

Ad ogni passo risolvo un sistema lineare che dipende da P

Risoluzione di sistemi lineari (esempi di precondizionatori)

- Ridurre il costo ⟺ tanto più semplice risulta P

- Esempi di precondizionatori

1. Diagonali:

$$P_J = \mathrm{diag}(a_{ii})$$

2. Diagonale in norma 2:

$$P_2 = \mathrm{diag}(c_i) \qquad c_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{1/2}$$

3. Fattorizzazioni incomplete:

$$ILU\,,\ IC$$ ⟺ **Matrici sparse**