eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

# Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

## Lezione 6.6b

Il metodo di Heun e La proprietà di assoluta stabilità

# Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Introduciamo i concetti di **stabilità** e **convergenza** per i metodi EDO

**Stabilità:** metodo numerico è stabile
se fornisce **soluzioni limitate** la cui **sensibilità rispetto ai dati**
è paragonabile al problema di Cauchy

**Convergenza:** metodo numerico è convergente
quando la **soluzione numerica tende alla soluzione esatta**
al diminuire del passo di discretizzazione

- Analizziamo in dettagli in concetto di Stabilità

**Stabilità assoluta**

# Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

➢ Consideriamo il **problema modello**

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) & 0 < x < \infty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Soluzione esatta

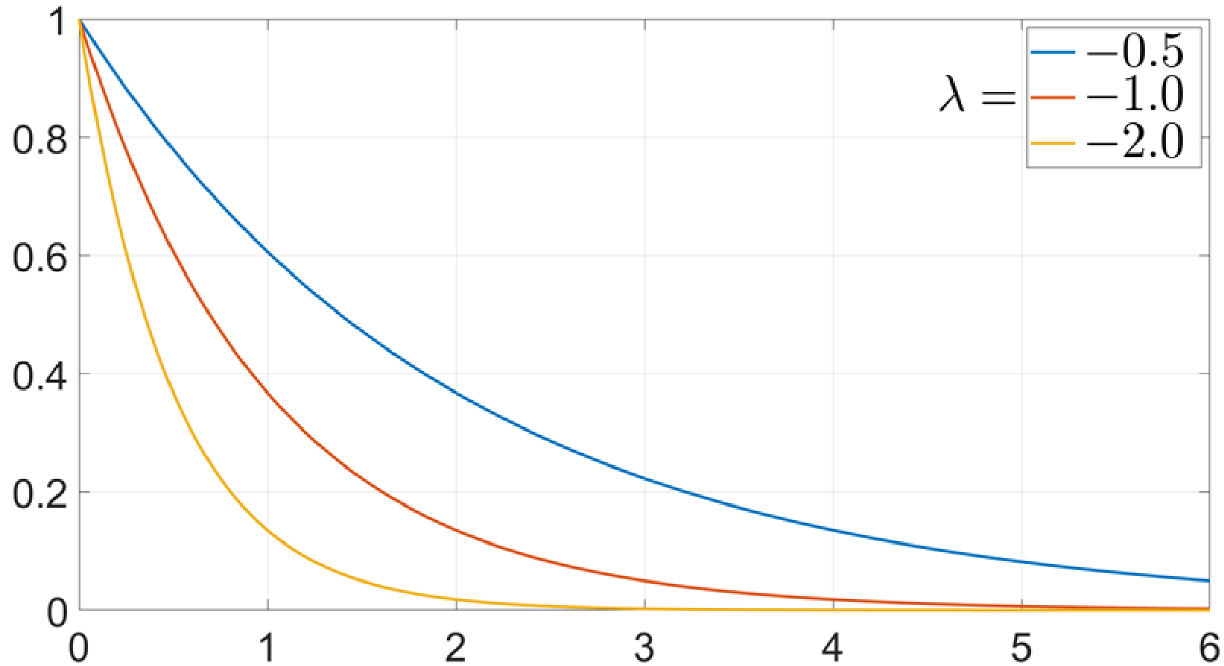
$$y(x) = e^{\lambda x}$$

$$I = [0, \infty)$$

$$x_0 = 0,\ u_0 = 1$$

$$\lambda < 0$$

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0$$



# Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- La **stabilità del metodo numerico** per EDO si valuta

Comportamento del metodo
nell'<u>approssimare le soluzioni del problema modello</u>

$$\lim_{x \to \infty} y(x) = 0 \qquad\qquad x_k \to \infty$$

- Un metodo numerico è detto **assolutamente stabile**

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) & 0 < x < \infty \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x_k \to \infty} u_k = 0}$$

# Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Assoluta stabilità per **Eulero in Avanti (EA)** esplicito

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) \\ x_0 = 0,\ y_0 = 1 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\textbf{EA}} \quad \frac{u_k - u_{k-1}}{h} = \lambda u_{k-1} \quad k \geq 1$$

$$u_0 = 1$$

- Possiamo risolvere l'equazione analiticamente

$$u_k = (1 + h\lambda) u_{k-1} \Longrightarrow u_{k-1} = (1 + h\lambda) u_{k-2} \quad \cdots$$

$$\cdots \Longrightarrow u_k = (1 + h\lambda)^k u_0 = (1 + h\lambda)^k \quad k = 0, 1, \ldots$$

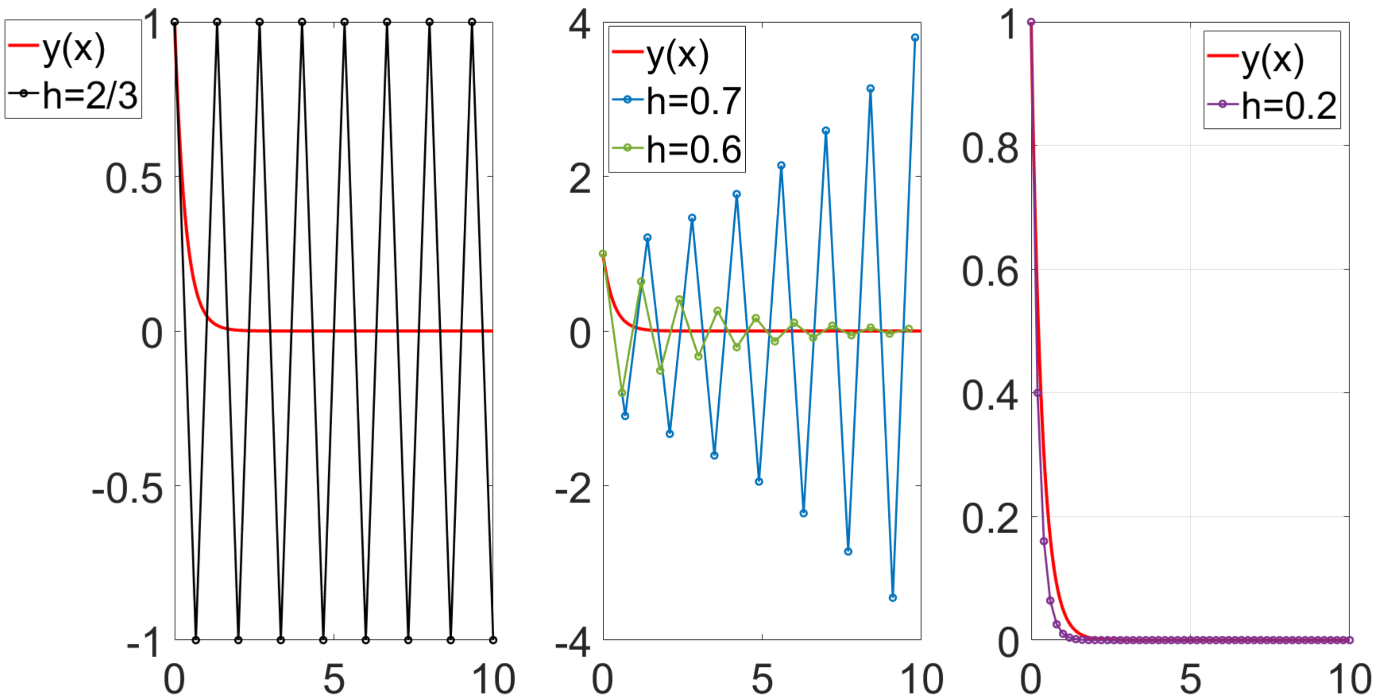
$$\lim_{x_k \to \infty} u_k = 0 \Longrightarrow (1 + h\lambda)^k \to 0 \Longleftrightarrow \boxed{h < \frac{2}{|\lambda|}}$$

# Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Assoluta stabilità per **Eulero in Avanti (EA)** <u>esplicito</u> $\lambda = -3$

$$h < \frac{2}{|\lambda|}$$

EA è **<u>condizionatamente</u>** assolutamente stabile



# Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Assoluta stabilità per **Eulero all'Indietro (EI)** <u>implicito</u>

$\forall h$ → EI è **<u>incondizionatamente</u>** assolutamente stabile

- Assoluta stabilità per **Crack-Nicholson (CN)** <u>implicito</u>

$\forall h$ → CN è **<u>incondizionatamente</u>** assolutamente stabile

- Assoluta stabilità per **Heun** <u>esplicito</u>

$h < \dfrac{2}{|\lambda|}$ → Heun è **<u>condizionatamente</u>** assolutamente stabile

- Assoluta stabilità per il **Punto Medio (PM)** <u>esplicito</u>

$\nexists h$ → PM è **<u>incondizionatamente</u>** assolutamente **instabile**