eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.4a

Metodi iterativi classici: Jacobi e Gauss-Seidel

Risoluzione di sistemi lineari: metodi iterativi

- **Metodi iterativi classici basati sullo splitting**

$$A = P - N$$

- Esempi specifici di metodi iterativi

  - ✓ Strategie per la scelta di P ed N
  - ✓ **Metodo di Jacobi**
  - ✓ **Metodo di Gauss Seidel**

Risoluzione di sistemi lineari (scomposizione di Jacobi)

- Scomposizione della matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in tre sottomatrici

$$A = D + E + F$$

- D parte diagonale di A
- E parte triangolare inferiore di A
- F parte triangolare superiore di A

Risoluzione di sistemi lineari (scomposizione di Jacobi)

$$A = D + E + F$$

- $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la diagonale di A

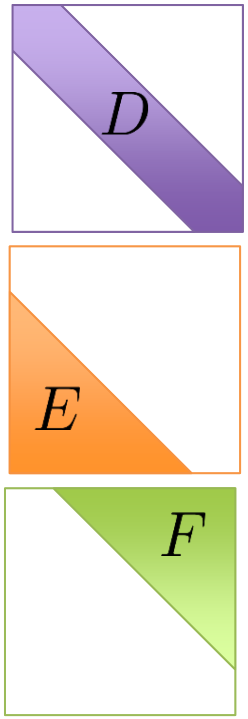
$$D = \mathrm{diag}(a_{ii})$$

- $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la triangolare inferiore di A

$$E = \begin{cases} e_{ij} = a_{ij} & i > j \\ e_{ij} = 0 & i \leq j \end{cases}$$

- $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è la triangolare superiore di A

$$F = \begin{cases} f_{ij} = 0 & i \geq j \\ f_{ij} = a_{ij} & i < j \end{cases}$$



Risoluzione di sistemi lineari (successione di Jacobi)

- Le matrici di splitting del metodo di Jacobi sono

$$A = \boxed{P}\boxed{-\ N} \qquad A = \boxed{D} + \boxed{E + F}$$

$$\Rightarrow \quad P = D \qquad N = D - A = -(E + F)$$

- La successione iterativa di Jacobi

$$P\mathbf{x}^{(k+1)} = N\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \qquad k \geq 0$$

Dato $\mathbf{x}^{(0)}$, si generi una successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ risolvendo

$$D\mathbf{x}^{(k+1)} = (D - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b} \qquad k \geq 0$$

Risoluzione di sistemi lineari (matrice di iter. di Jacobi)

- Riscrivendo per componenti la $D\mathbf{x}^{(k+1)} = (D - A)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b}$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad i = 1, \ldots, n, \; k \geq 0$$

- La matrice di iterazione $B = P^{-1}N$ del metodo di Jacobi è

$$\boxed{B_J = -D^{-1}(E + F)}$$

- Condizione di convergenza per il metodo di Jacobi è

$$\|B_J\| < 1 \iff \rho(B_J) < 1$$