eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

Lezione 6.2a

Differenze finite in avanti, all'indietro e centrate

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

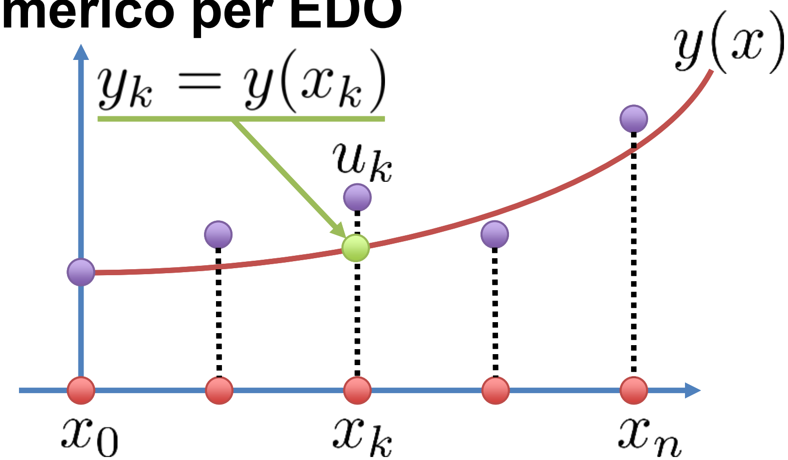
- **E**quazioni **D**ifferenziali **O**rdinarie **(EDO)**

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

- **Metodi numerici** per la risoluzione numerica di EDO
  - ✓ Processo di discretizzazione (**nodi equispaziati**)
  - ✓ **Rapporto incrementale** e sviluppi di Taylor
  - ✓ **Differenze finite in avanti, all'indietro e centrate**
  - ✓ Metodi di Eulero

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Quadro generale di un **metodo numerico per EDO**



Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \end{cases}$$

Problema numerico

$$\begin{cases} G(u_{k-1}, u_k, u_{k+1}) = F[f(x_k, u_k), f(x_{k+1}, u_{k+1})) \\ u_0 = y_0 \end{cases} \quad k = 1, \ldots, n$$

- **Costruire soluzione numerica** $\{u_k\}$ che approssima $y(x_k)$ nei nodi x_k

$$\{u_0, u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n\} \qquad \{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\}$$

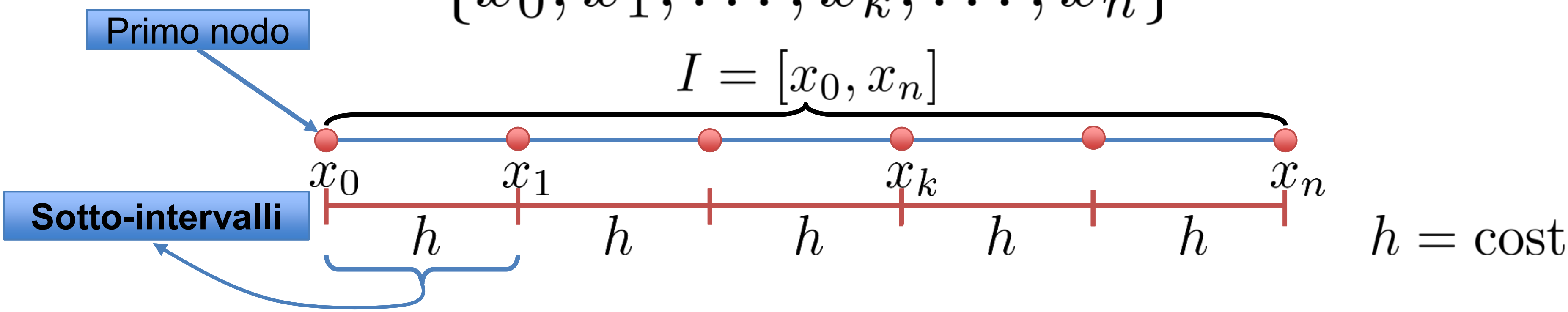
$$\boxed{u_k \simeq y_k = y(x_k)}$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

➢ Processo di generazione dell'insieme dei nodi $\{x_k\}$

Discretizzazione dell'intervallo I

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n\}$$



➢ Ipotesi di **nodi equispaziati**

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + h} \qquad k \geq 0, \quad h > 0$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Per **costruire la funzione** $G(u_{k-1}, u_k, u_{k+1})$, ricordiamo che

$$y'(x_k) \approx G(y_{k-1}, y_k, y_{k+1})$$

- **Obiettivo:** approssimare la derivata $y'(x_k)$ in un nodo x_k

Si utilizza la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(h)}{h}$$

- **Sviluppo in serie di Taylor** della funzione $y(x)$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Sviluppo in serie di Taylor <u>in avanti</u>** della funzione $y(x)$

2° ordine

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \boxed{\frac{y''(\xi)}{2}h^2}$$

$$\xi \in (x, x+h)$$

Resto dello sviluppo

- Specificando lo sviluppo per $x = x_k$ e ricordando $x_{k+1} = x_k + h$

$$y_{k+1} = y_k + y'(x_k)h + \frac{y''(\xi_k)}{2}h^2 \qquad \xi_k \in (x_k, x_{k+1})$$

$$\Downarrow$$

(DF in avanti) Differenza Finita in avanti

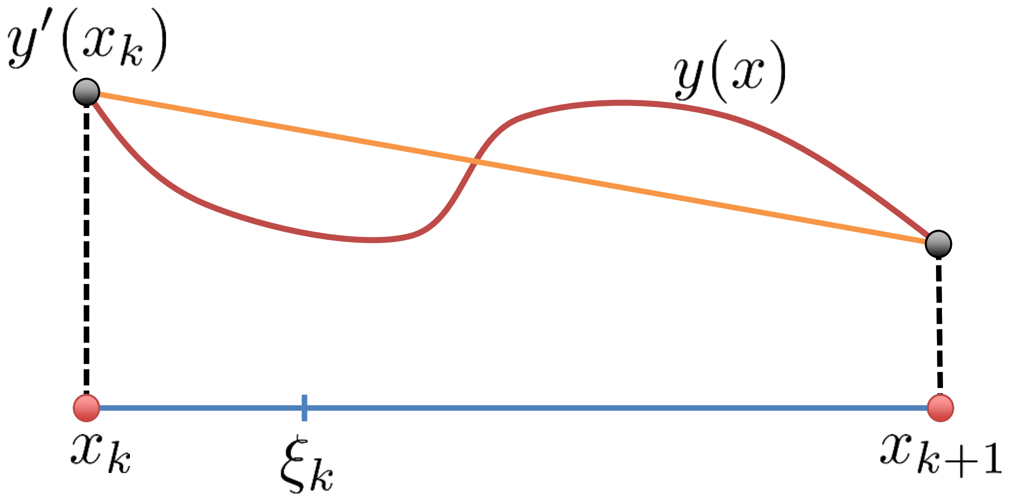
$$\boxed{y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}} + \underbrace{\boxed{\frac{y''(\xi_k)}{2}h}}_{O(h)}$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

(DF in avanti) Differenza Finita in avanti

$$y'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_k}{h} + O(h)$$

➢ Calcolare la derivata prima $y'(x_k)$ con le DF in avanti equivale a sostituire $y'(x_k)$ con il coeff. angolare della retta tra x_k, x_{k+1}



Tangente alla curva

⇩

Secante tra i due punti