



METODI NUMERICI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Convergenza per i metodi di Eulero in avanti ed Eulero all'indietro)

Nelle precedenti lezioni sono stati introdotti i metodi di Eulero in avanti (EA) e di Eulero all'indietro (EI) come primi metodi numerici per la risoluzione di equazioni differenziali ordinarie (EDO). In questa lezione, esamineremo il comportamento di questi due metodi in termini di convergenza.

Iniziamo l'analisi con un esempio, considerando un caso specifico di EDO

$$\begin{cases} y'(x) = -y^2 & x \in (0, 3] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

In questo caso, la funzione è definita come $f(x, y) = -y^2$, l'intervallo considerato è $I = [0, 3]$ e il dato iniziale, nel punto $x_0 = 0$, è $y_0 = y(0) = 1$. Osserviamo che si tratta di un problema non lineare e autonomo. È non lineare poiché la funzione f dipende in modo quadratico dall'incognita y , ed è autonomo poiché il termine a destra, ovvero f , dipende esclusivamente da y e non da x .

Questo problema è relativamente semplice da risolvere analiticamente. La soluzione esatta è data da:

$$y(x) = \frac{1}{x + 1},$$

ottenuta applicando la procedura di risoluzione per separazione delle variabili. In questo caso, quindi, non sarebbe necessario risolvere numericamente il problema, poiché la soluzione esatta è nota. Tuttavia, a scopo didattico, analizzeremo comunque la risoluzione numerica del problema, al fine di studiare il comportamento della soluzione ottenuta con i metodi numerici.

Suddividiamo l'intervallo $I = [0, 3]$ in due sotto-intervalli di ampiezza costante $h = 1.5$, ottenendo $n = 2$ suddivisioni

$$x_{k+1} = x_k + h \quad h = 1.5 \quad k = 0, 1.$$

Quindi i nodi $\{x_k\}$ saranno

$$\{x_0 = 0, x_1 = x_0 + 1.5 = 0 + 1.5 = 1.5, x_2 = x_1 + 1.5 = 1.5 + 1.5 = 3\},$$

$$\{x_0 = 0, x_1 = 1.5, x_2 = 3\}.$$

Il punto iniziale è

$$x_0 = 0, \quad u_0 = y_0 = y(x_0) = y(0) = 1.$$

Applicando la formula di EA

$$\text{EA (esplicito)} \quad u_{k+1} = u_k + hf(x_k, u_k) \quad k = 0, 1,$$

per $k = 0$, otteniamo

$$u_1 = u_0 + hf(x_0, u_0) \quad k = 0,$$

da cui, ricordando che in questo caso $f(x, y) = f(y) = -y^2$ e quindi $f(x_0, u_0) = f(u_0) = -u_0$ con $u_0 = 1$, si ricava

$$x_1 = 1.5,$$

$$u_1 = u_0 + hf(u_0) = u_0 - hu_0^2 = 1 + 1.5(-1) = -0.5 = -\frac{1}{2} \quad k = 0,$$

Dunque, $u_1 = -0.5$ è il valore assunto dalla soluzione numerica nel punto $x_1 = 1.5$. Proseguiamo applicando la formula di EA e otteniamo, per $k = 1$

$$x_2 = 3,$$

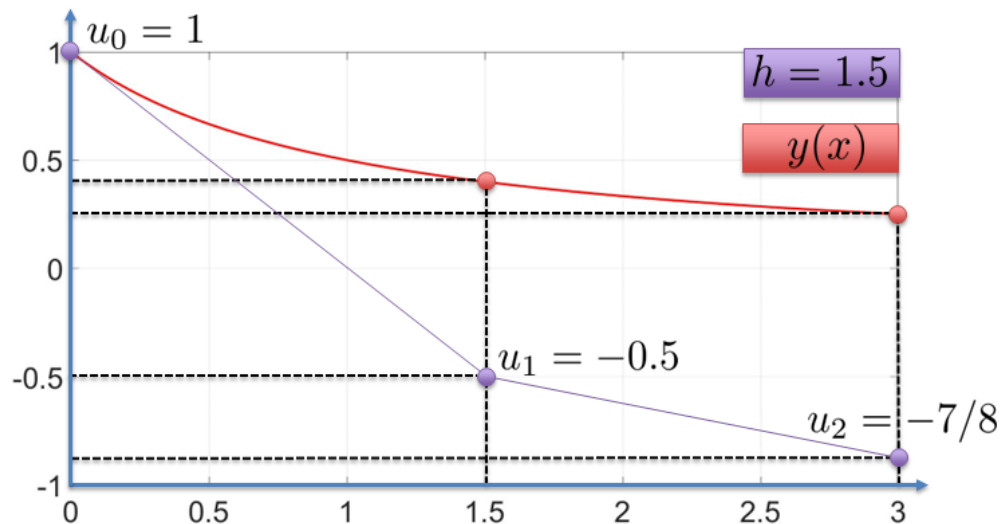


Figura 1: Grafico della soluzione esatta $y(x)$ per il caso di esempio, mostrata nell'intervallo $[0,3]$, insieme alla soluzione numerica calcolata utilizzando il metodo di EA per $h = 1.5$.

$$u_2 = u_1 + hf(u_1) = u_1 - hu_1^2 = -0.5 - 1.5(0.5)^2 = -0.875 = -\frac{7}{8} \quad k = 1,$$

Non è difficile constatare che, in questo caso, la soluzione numerica ottenuta non converge alla soluzione esatta del problema. Infatti, osserviamo che

$$\begin{aligned} x_1 = 1.5, \quad u_1 &= -\frac{1}{2} & y(x_1) &= \frac{1}{1+x_1} = \frac{2}{5}, \\ x_2 = 3, \quad u_2 &= -\frac{7}{8} & y(x_2) &= \frac{1}{1+x_2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

I valori ottenuti dalla soluzione numerica risultano significativamente diversi da quelli derivanti dalla soluzione esatta. Se proseguissimo nel calcolo, estendendo l'analisi oltre l'intervallo $[0,3]$ fino a un dominio infinito, osserveremmo che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = -\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} y(x_k) = 0.$$

Quindi, da un lato, la soluzione esatta $y(x) = \frac{1}{1+x}$ tende a zero, mentre, dall'altro, la soluzione numerica ottenuta diverge verso l'infinito. Dunque, sebbene il metodo di EA (esplicito) sia del tutto ragionevole, in quanto derivato dallo sviluppo di Taylor al primo ordine, possono emergere delle criticità legate alle modalità scelte per approssimare il problema di Cauchy. In questo caso specifico, stiamo osservando che il metodo di EA, invece di convergere alla soluzione esatta - sebbene il concetto di convergenza non sia stato ancora formalmente definito (per ora possiamo considerarlo in senso intuitivo ed euristico come $u_k \approx y_k = y(x_k)$) mostra un comportamento divergente.

La causa di questo comportamento patologico risiede nella scelta del parametro h , utilizzato per la discretizzazione dell'intervallo $I = [0,3]$. In particolare, l'ampiezza del passo, pari a $h = 1.5$, risulta eccessivamente grande.

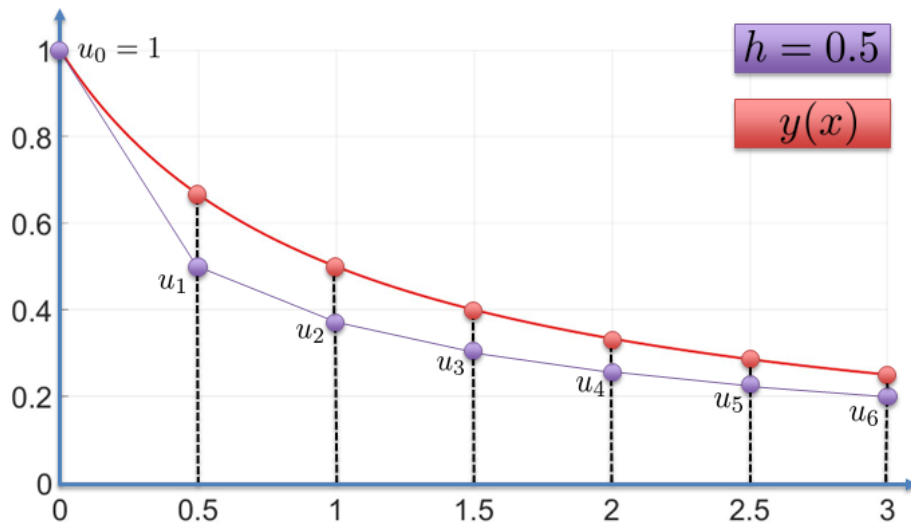


Figura 2: Grafico della soluzione esatta $y(x)$ per il caso di esempio, mostrata nell'intervallo $[0,3]$, insieme alla soluzione numerica calcolata utilizzando il metodo di EA per $h=0.5$.

La Figura 1 mostra graficamente la soluzione esatta $y(x)$ per questo esempio di EDO nell'intervallo $[0,3]$, insieme alla soluzione numerica calcolata utilizzando il metodo di EA per $h = 1.5$. Sia la soluzione esatta che quella numerica partono dal punto iniziale $u_0 = y_0 = 1$, ma già nel punto $x_1 = 1.5$ si osserva una differenza significativa rispetto al valore previsto dalla soluzione esatta.

Riducendo il passo a $h = 0.5$, e quindi utilizzando un passo di discretizzazione che è un terzo di quello precedente ($h = 1.5$), avremmo (rifacendo gli stessi calcoli fatti in precedenza) che

$$\begin{aligned}
 x_0 &= 0, & u_0 &= 1 \\
 x_1 &= 0.5, & u_1 &= u_0 - hu_0^2 = 1 - 0.5(1)^2 = \frac{1}{2} & k=0, \\
 x_2 &= 1, & u_2 &= u_1 - hu_1^2 = 0.5 - 0.5(0.5)^2 = \frac{3}{8} & k=1, \\
 x_3 &= 1.5, & u_3 &= u_2 - hu_2^2 = \frac{3}{8} - 0.5\left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{39}{128} & k=2, \\
 x_4 &= 2, & u_4 &= u_3 - hu_3^2 = \frac{39}{128} - 0.5\left(\frac{39}{128}\right)^2 = \frac{648}{2509} & k=3, \\
 x_5 &= 2.5, & u_5 &= u_4 - hu_4^2 = \frac{621}{2761} & k=4, \\
 x_6 &= 3, & u_6 &= u_5 - hu_5^2 = \frac{425}{2129} & k=5,
 \end{aligned}$$

La Figura 2 mostra che, per la scelta di $h = 0.5$, il comportamento della soluzione numerica risulta qualitativamente molto più soddisfacente rispetto a quello ottenuto con $h = 1.5$. In questo modo, abbiamo compreso che riducendo il passo h , l'approssimazione della soluzione numerica migliora significativamente.

Andiamo a esaminare in dettaglio come l'errore di approssimazione della soluzione numerica dipende dal valore di h . Nell'esempio che abbiamo proposto, abbiamo condotto un'analisi utilizzando solo due



valori di h . Possiamo ora ripetere il procedimento provando diversi valori di h , al fine di comprendere meglio l'errore che si introduce man mano che h diventa sempre più piccolo, ossia quando i nodi si avvicinano progressivamente nell'intervallo I . In altre parole, stiamo osservando come l'errore varia quando la distanza tra un nodo e il successivo tende a ridursi sempre di più.

Riportiamo di seguito una tabella contenente i valori numerici corrispondenti ai diversi valori di h , insieme al relativo errore commesso dalla soluzione numerica nell'approssimare la soluzione esatta.

Passo di discretizzazione h	Errore E
0.5	0.1667
0.25	0.0573
0.125	0.0252
0.0625	0.0120

L'errore di approssimazione, in questo caso, è espresso come l'errore massimo commesso nei vari nodi, ovvero la differenza massima, tra tutti i nodi, tra il valore della soluzione numerica e il valore esatto della funzione

$$E = \max_{k=0,\dots,n} |y_k - u_k| = \max_{k=0,\dots,n} \left| \frac{1}{x_k + 1} - u_k \right|,$$

dove in esempio particolare $y_k = \frac{1}{x_k + 1}$. Quindi, fissato il nodo x_k , calcoliamo la differenza tra la soluzione esatta y_k , che nel nodo x_k , per questo esempio specifico, vale $y_k = \frac{1}{x_k + 1}$, e la soluzione numerica u_k . Successivamente, prendiamo il massimo di queste differenze in valore assoluto $|y_k - u_k|$ tra tutti i possibili k , ottenendo così l'errore massimo di approssimazione.

Come si osserva, per $h = 0.5$ l'errore E è circa del 16%. Per $h = 0.25$, l'errore E scende al 5%, per $h = 0.125$ l'errore E si riduce al circa 2%, e infine, per $h = 0.0625$, l'errore E raggiunge circa l'1%.

Se provassimo a condurre un'analisi analitica del comportamento dell'errore, osserveremmo che al dimezzarsi di h corrisponde anche un dimezzamento qualitativo dell'errore. Questo significa che l'errore di approssimazione è lineare rispetto a h : quando riduciamo h , l'errore si riduce in maniera proporzionale, ovvero si riduce di una quantità sostanzialmente costante, con un comportamento lineare rispetto a h . Questo comportamento non deve sorprendere, poiché abbiamo visto che il metodo di Eulero esplicito è stato ricavato sostituendo la derivata prima della funzione y nel punto x_k con il suo sviluppo di Taylor al primo ordine rispetto a h . Ritroviamo quindi, anche nella soluzione numerica, il comportamento che abbiamo osservato riguardo a $y'(x_k)$ quando questa viene approssimata con una differenza finita (DF) in avanti.

Osserviamo ora cosa accade nel caso in cui si utilizzi il metodo di EI, che, come abbiamo visto, è un metodo implicito. In particolare, siamo interessati a capire perché effettivamente questo metodo implicito richieda uno sforzo maggiore per essere risolto rispetto al metodo esplicito di EA.

Riprendiamo l'esempio specifico considerato

$$\begin{cases} y'(x) = -y^2 & x \in (0, 3) \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Il metodo di EI, ricordando la formula

$$u_{k+1} = u_k + hf(x_{k+1}, u_{k+1}),$$

produce la seguente successione

$$u_{k+1} = u_k - hu_{k+1}^2 \quad k = 0, \dots, n-1.$$

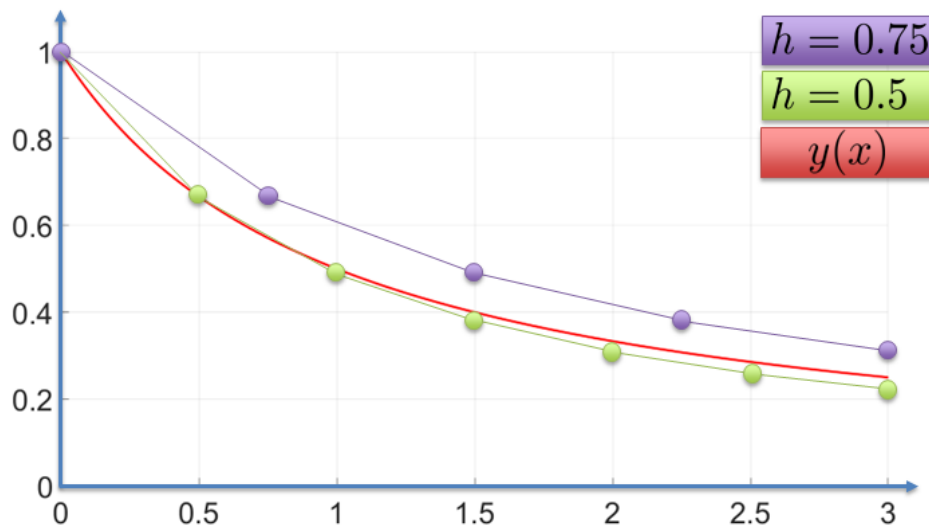


Figura 3: Andamento dell'approssimazione numerica ottenuta con il metodo El, utilizzando un passo di discretizzazione $h=0.75$ ed $h=0.5$, confrontato con la soluzione esatta $y(x)$.

Notiamo che, in questo caso, il termine u^2 è valutato non più in u_k , ma in u_{k+1} . Questa espressione dà luogo a un'equazione non lineare della forma

$$F(z) = 0,$$

dove z è l'incognita u_{k+1} , e $F(z)$ è espressa come

$$F(z) = z + hz^2 - u_k = 0,$$

dove abbiamo spostato sia l'incognita $z = u_{k+1}$ che il valore noto u_k a sinistra. Pertanto, ad ogni passo k , dobbiamo risolvere un'equazione non lineare $F(z) = 0$ nell'incognita $z = u_{k+1}$.

Per la risoluzione di equazioni non lineari, possiamo utilizzare vari metodi, tra cui il metodo di Newton. Richiamiamo quindi il metodo di Newton applicato a questo caso specifico. Per la risoluzione del problema

$$F(z) = 0,$$

ovvero per determinare la radice z dell'equazione $F(z) = 0$, introduciamo una successione $\{z^{(m)}\}$, dove l'indice in alto m è utilizzato per distinguere l'indice di iterazione del metodo di Newton. L'indice m non deve essere confuso con l'indice k , utilizzato precedentemente per indicare i nodi della discretizzazione delle DF: gli indici k fanno riferimento ai nodi della discretizzazione delle DF; l'indice m è l'indice di iterazione del metodo di Newton. Ricordiamo che la formula del metodo di Newton è

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{F(z^{(m)})}{F'(z^{(m)})},$$

dove in questo caso specifico $F(z) = z + hz^2 - u_k$ e $F'(z) = 2hz + 1$, da cui si ottiene

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{z^{(m)} + h(z^{(m)})^2 - u_k}{2hz^{(m)} + 1}.$$

Questa relazione, da risolvere ad ogni passo k , è quella che consente di determinare la successione che, al tendere di m all'infinito, convergerà alla soluzione esatta del problema $F(z) = 0$, ovvero a u_{k+1} , che



rappresenta il valore della soluzione numerica nel nodo x_{k+1} . È importante sottolineare, ancora una volta, il doppio indice utilizzato: l'indice k , che si riferisce ai nodi x_k della discretizzazione dell'intervallo I , e l'indice m , che indica le iterazioni del metodo di Newton, il quale, per ciascun passo k fissato, permette di ottenere la soluzione u_{k+1} dell'equazione $F(u_{k+1}) = 0$.

Esaminiamo graficamente il comportamento del metodo di EI nel caso della EDO presa come esempio. La Figura 3 mostra l'andamento dell'approssimazione numerica ottenuta con il metodo EI, utilizzando un passo di discretizzazione $h = 0.75$, confrontato con la soluzione esatta $y(x)$. Come si osserva, la soluzione numerica mostra già un comportamento qualitativamente corretto. Riducendo il passo a $h = 0.5$, otteniamo una soluzione, utilizzando il metodo di EI, molto più accurata rispetto a $h = 0.75$. È importante ricordare che, con $h = 0.5$, anche il metodo di EA, che è esplicito, forniva soluzioni ragionevoli.

Anche per il metodo di EI conduciamo un'analisi quantitativa per esaminare il comportamento della soluzione numerica e l'errore commesso nell'approssimazione della soluzione esatta al variare del passo di discretizzazione h . A tal fine, presentiamo di seguito una tabella contenente i valori numerici relativi ai diversi valori di h e i corrispondenti errori, che indicano la deviazione della soluzione numerica rispetto a quella esatta.

Passo di discretizzazione h	Errore E
0.5	0.0697
0.25	0.0396
0.125	0.0212
0.0625	0.0110

L'errore di approssimazione è espresso come l'errore massimo commesso nei vari nodi

$$E = \max_{k=0,\dots,n} |y_k - u_k| = \max_{k=0,\dots,n} \left| \frac{1}{x_k + 1} - u_k \right|.$$

Per $h = 0.5$ l'errore E è di circa il 7%, mentre per $h = 0.25$ si riduce a circa il 4%. Ulteriormente, con $h = 0.125$, l'errore scende al 2% circa, e infine, per $h = 0.0625$, si attesta intorno all'1%. Si nota quindi che, dimezzando il valore di h , l'errore si riduce approssimativamente della metà rispetto al valore precedente. Questo indica che, anche per il metodo di EI, l'errore dipende linearmente dal passo di discretizzazione h

$$O(h).$$