Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

Lezione 6.6a

Il metodo di Heun e La proprietà di assoluta stabilità

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Metodi numerici per le E**quazioni **D**ifferenziali **O**rdinarie (EDO)

$$u_{k+1} = g(u_k, u_{k+1})$$

- **Metodo di Heun** e la proprietà di **assoluta stabilità**
  - ✓ Derivazione del **metodo di Heun**
  - ✓ Inizializzazione del metodo del punto medio
  - ✓ Concetto di **stabilità** e **convergenza**
  - ✓ **Assoluta stabilità** dei metodi numerici per EDO

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- La derivazione del **metodo di Heun** parte dalla formula

Crack-Nicholson <u>**(CN)**</u>

$$\frac{u_{k+1}-u_k}{h} = \frac{1}{2}\left[f(x_k,u_k)+f(x_{k+1},u_{k+1})\right]$$

- Metodo di CN è a un passo, del secondo ordine e **implicito**
- **Obiettivo:** <u>trasformare CN</u> in **esplicito** ⟶ modificare $f(x_{k+1},u_{k+1})$

Eulero esplicito **(EA)**

$$u_{k+1} = \underline{u_k + hf(x_k,u_k)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u_{k+1}-u_k}{h} = +\frac{1}{2}\left[f(x_k,u_k)+f(x_{k+1},\underline{u_k+hf(x_k,u_k)})\right]$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Metodo di Heun** ad <u>un passo</u>, **esplicito** e del <u>secondo ordine</u>

$$\frac{u_{k+1}-u_k}{h}=\frac{1}{2}\left[f(x_k,u_k)+f(x_{k+1},u_k+hf(x_k,u_k))\right]$$

- **Esempio:**

$$\begin{cases} y'(x)=-y^2 & x\in(0,3] \\ y(0)=1 \end{cases} \longrightarrow \quad y(x)=\frac{1}{1+x}$$

Soluzione esatta

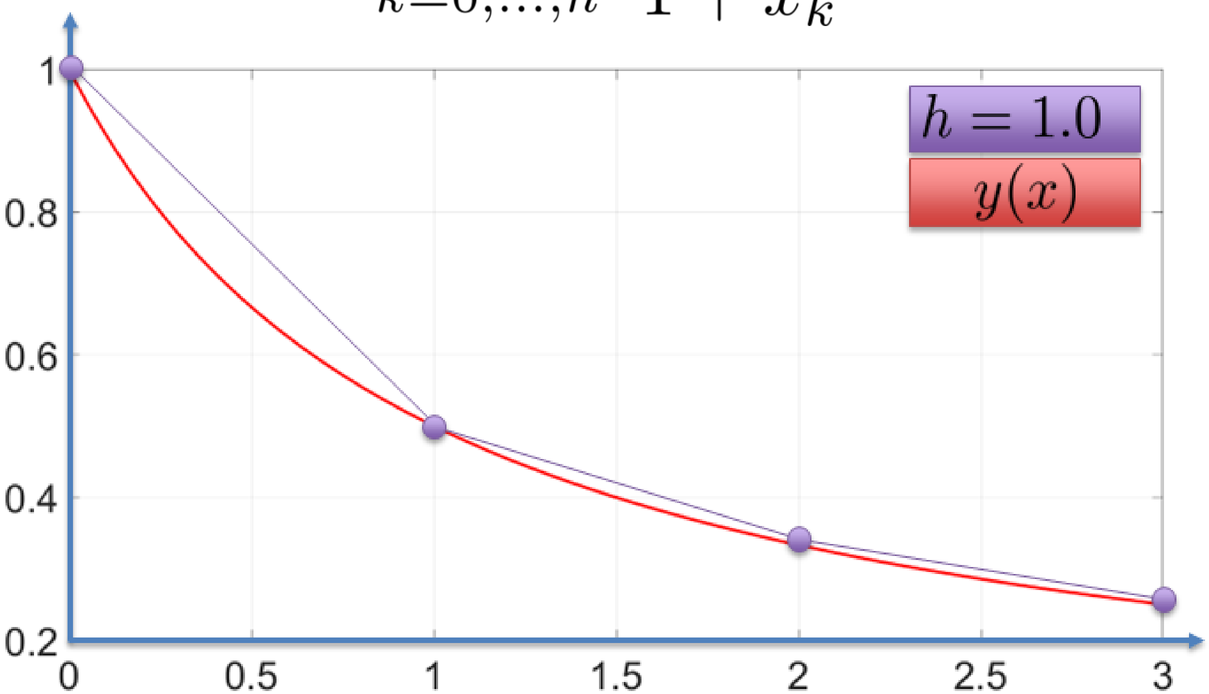
$$I=[0,3] \quad x_0=0,\ u_0=1$$

- Applichiamo **il metodo di Heun** per risolvere numericamente l'EDO

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- L'errore di approssimazione E è il massimo commesso nei vari nodi

$$E = \max_{k=0,\dots,n} \left| \frac{1}{1+x_k} - u_k \right|$$



h	E
0.5	0.0208
0.25	0.0054
0.125	0.0013
0.0625	0.0003

Per h che si dimezza <u>l'errore si riduce di un fattore 4</u>

Metodo di Heun è del <u>secondo ordine</u> $\Rightarrow O(h^2)$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Metodo di Heun** ad **un passo**, esplicito e del secondo ordine
- Può essere usato per **inizializzare** il metodo del **Punto Medio (PM)**

PM $$u_{k+1} = u_{k-1} + 2hf(x_k, u_k) \quad k = 1, \ldots, n-1$$

- ⚠ La soluzione numerica u_1 **non** può essere ricavata dal PM

$$k = 1 \Rightarrow u_2 = u_0 + 2hf(x_1, u_1)$$

- Dato u_0, per ricavare u_1 utilizziamo il metodo di Heun

$$u_1 = u_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, u_0) + f(x_1, u_0 + hf(x_0, u_0))\right]$$