



eCAMPUS
UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.1a

Matrici simmetriche e definite positive, raggio spettrale,
errori assoluti ed errori relativi



Risoluzione di sistemi lineari: metodi iterativi

- **Matrici simmetriche definite positive (SDP)**
- Il concetto di **raggio spettrale** di una matrice
 - ✓ Raggio spettrale per matrici SDP
 - ✓ **Differenza tra matrici e vettori**
 - ✓ Concetto di **misura**
 - ✓ **Errore assoluto ed errore relativo** (caso vettoriale)

Risoluzione di sistemi lineari (matrici **SDP**)

- Classe particolare di matrici: **S**immetriche e **D**efinite **P**ositive (SDP)
- Sia $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ed $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, la matrice A si dice **SDP** se

- è **simmetrica**

$$A = A^T$$

- vale la proprietà di **positività** $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0$

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Ax} > 0$$

Risoluzione di sistemi lineari (matrici SDP)

- Caratteristica fondamentale delle matrici SDP è

$$\lambda = \lambda(A) > 0$$

- Gli **autovalori** di una matrice A sono le soluzioni di

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Risoluzione di sistemi lineari (Raggio spettrale)

- Concetto di **raggio spettrale** $\rho(B)$ per una generica matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\rho(B) = \max_i |\lambda_i(B)|$$

$\lambda_i(B)$ è il generico autovalore di B

- Si può verificare che la norma 2 è la radice di $\rho(B^T B)$

$$\|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^T B)}$$

- La matrice $B^T B$ è una matrice SDP

$$\rho(B^T B) = \max_i |\lambda_i(B^T B)| = (\|B\|_2)^2$$

Risoluzione di sistemi lineari (Raggio spettrale)

➤ Esempio:

$$B^T B = \begin{pmatrix} 26 & 17 \\ 17 & 25 \end{pmatrix} \quad \text{SDP}$$

$$\det(B^T B - \lambda I) = 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = 8.493 \\ \lambda_2 = 42.507 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Reali} \\ \text{e positivi} \end{array}$$

➤ La norma 2 $\equiv \|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^T B)} = \sqrt{\lambda_2} = 6.52$

➤ Il raggio spettrale $\equiv \rho(B^T B) = \max |\lambda(B^T B)| = 42.507 = \lambda_2$

$$\|B\|_2 = \sqrt{\rho(B^T B)}$$