RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (campo di direzioni, isocline ed EDO lineari del primo ordine omogenee)

Nelle lezioni precedenti abbiamo iniziato a trattare le equazioni differenziali ordinarie (EDO) di ordine n, ossia equazioni che coinvolgono, oltre alla variabile indipendente x, una funzione $y(x)$, che rappresenta l'incognita del problema, e le sue derivate $y^{(n)}$ rispetto alla variabile x. In particolare, abbiamo visto alcuni esempi di EDO e abbiamo introdotto il problema in termini generali. In questa lezione, intendiamo restringere l'analisi al caso delle EDO del primo ordine ($n = 1$), che contengono la variabile x, la funzione incognita $y(x)$ e la sua derivata prima $y'(x)$. In particolare, ci concentreremo sulle equazioni scritte in forma normale, caratterizzando alcuni aspetti geometrici di questo tipo di problema. Introdurremo il campo di direzioni di una EDO e il concetto di isoclina. Successivamente, per una classe particolare di EDO del primo ordine, le EDO lineari del primo ordine omogenee, forniremo una rappresentazione per la soluzione esatta.

In generale, una EDO del primo ordine ($n = 1$) può essere scritta nella forma
$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$
dove x è la variabile indipendente, y l'incognita (funzione di x) e y' la derivata prima della y rispetto a x. La F è una relazione funzionale che lega fra loro gli elementi x, y e y'. Diremo che una EDO è scritta in forma normale quando assume la seguente rappresentazione
$$y'(x) = f(x, y).$$

In altre parole, l'EDO è in forma normale quando la derivata prima di y rispetto a x è isolata (a sinistra) ed è espressa da una funzione f che lega tra loro la variabile indipendente x e la variabile dipendente y (ovvero l'incognita del problema).

Una particolare sottoclasse di equazioni del primo ordine scritte in forma normale è quella delle EDO autonome, che si presentano nella seguente forma

$$y'(x) = f(y).$$
In questo caso, la derivata prima y' dipende esclusivamente dalla funzione y e non più dalla variabile indipendente x. In altri termini, la funzione f non dipende dalla variabile x. Pertanto, si stabilisce una relazione che lega direttamente la derivata prima y' alla funzione incognita y. Più precisamente, in questo caso, la funzione $f(y)$ descrive esattamente la derivata prima della funzione incognita y.
Vogliamo ora caratterizzare alcuni elementi geometrici associati allo studio delle equazioni differenziali del primo ordine scritte in forma normale. Introduciamo, pertanto, alcune notazioni che ci aiuteranno a rappresentare la soluzione $y(x)$.
Iniziamo osservando che, dalla relazione

$$y'(x) = f(x, y),$$
che descrive una generica EDO del primo ordine scritta in forma normale (e non necessariamente autonoma), se consideriamo un punto p nel piano xy, con coordinate (x_p, y_p), e calcoliamo in questo punto il valore della funzione f, otteniamo il valore
$$f(x_p, y_p).$$

Possiamo osservare che, in virtù della rappresentazione $y'(x) = f(x, y)$, il valore $f(x_p, y_p)$ rappresenta il coefficiente angolare della curva $y'(x)$ (ovvero della tangente alla curva integrale $y(x)$ nel punto (x_p, y_p).

Definiamo campo di direzione di una EDO la collezione di vettori tangenti, in ogni punto, alle curve integrali dell'equazione. Ricordiamo che le curve integrali della soluzione sono funzioni, come abbiamo visto nella lezione precedente, desunte dall'equazione differenziale

$$y'(x) = f(x, y),$$

da cui possiamo ricavare l'integrale generale, ovvero una famiglia di soluzioni dipendenti da una costante C. Per ogni particolare scelta del parametro C, otteniamo una curva integrale. Pertanto, troviamo per ogni C una funzione della variabile x nel piano xy. Se consideriamo, per ciascuna curva integrale, una serie di punti in cui i vettori determinano localmente la tangente alla curva nei punti presi in esame, otteniamo il cosiddetto campo di direzioni.

Vediamo alcuni semplici esempi per capire come caratterizzare le curve integrali e il campo di direzioni. Iniziamo, considerando, per esempio, l'equazione differenziale

$$y' = y.$$

Questa è una EDO scritta in forma normale e, in particolare, è un'equazione di tipo autonomo. Le curve integrali di questa equazione sono date dalle funzioni $y(x)$, ognuna delle quali dipende da un parametro. Pertanto, abbiamo un numero infinito di curve integrali. Il campo di direzioni è l'insieme dei vettori che, in ogni punto, descrivono localmente il comportamento della tangente alla curva nel punto stesso (si veda Figura 1(a)).
Consideriamo un'altra equazione del primo ordine scritta in forma normale

$$y' = 1 + y^2.$$

La Figura 1(b) rappresenta le curve integrali e l'insieme dei vettori che definiscono il campo di direzioni della EDO $y' = 1 + y^2$. Si osservi che in corrispondenza di ogni punto della curva, troviamo un vettore che descrive localmente la tangente alla curva integrale.
Introduciamo ora il concetto di isoclina, al fine di associare alle EDO del primo ordine un ulteriore elemento geometrico che ne faciliti la rappresentazione. Definiamo isoclina una curva sulla quale y' è costante, ovvero l'insieme dei punti $(x, y(x))$ del piano xy in cui $f(x, y(x))$ è costante.
Vediamo un semplice esempio: le isocline dell'equazione

$$y' = 1 + y^2,$$

corrispondono al luogo di punti del piano xy sui quali $f = 1 + y^2$ è costante. In particolare, se y è costante, $1 + y^2$ sarà costante. Dunque, troviamo come isocline tutte le rette parallele all'asse delle x (si veda Figura 2(a)) perché esse sono caratterizzate dall' avere y costante e di conseguenza $f(x, y)$ costante.
Consideriamo ora un'altra EDO del tipo

$$y' = x^2 - y^2.$$

Questa non è un'equazione scritta in forma autonoma, ma è un'equazione scritta in forma normale, poiché y' è isolata a sinistra ed è espressa in funzione di x e y. La Figura 2(b) rappresenta l'insieme di vettori che descrive il campo di direzioni di questa EDO. In questo caso, le isocline sono descritte da una famiglia di iperboli equilatere.

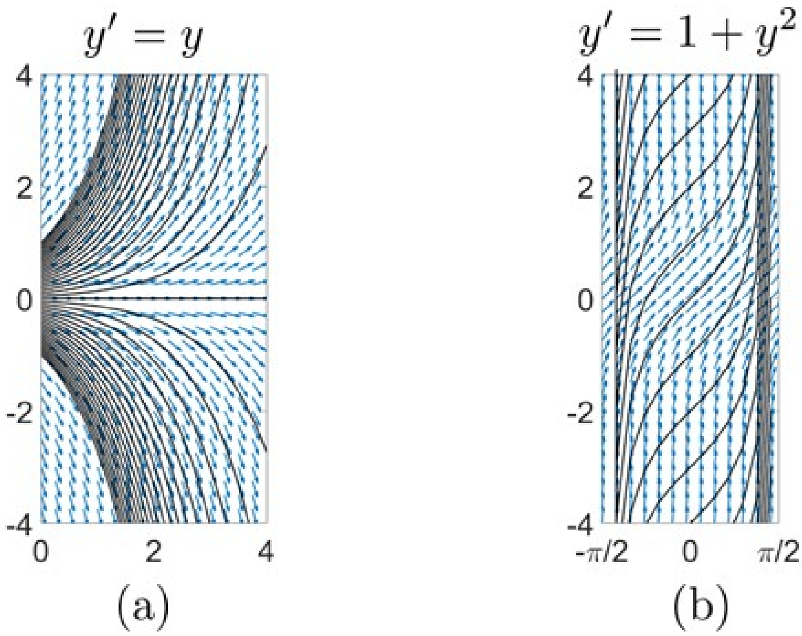

Figura 1: Curve integrali e campo di direzioni (a) $y' = y$; (b) $y' = 1 + y^2$.

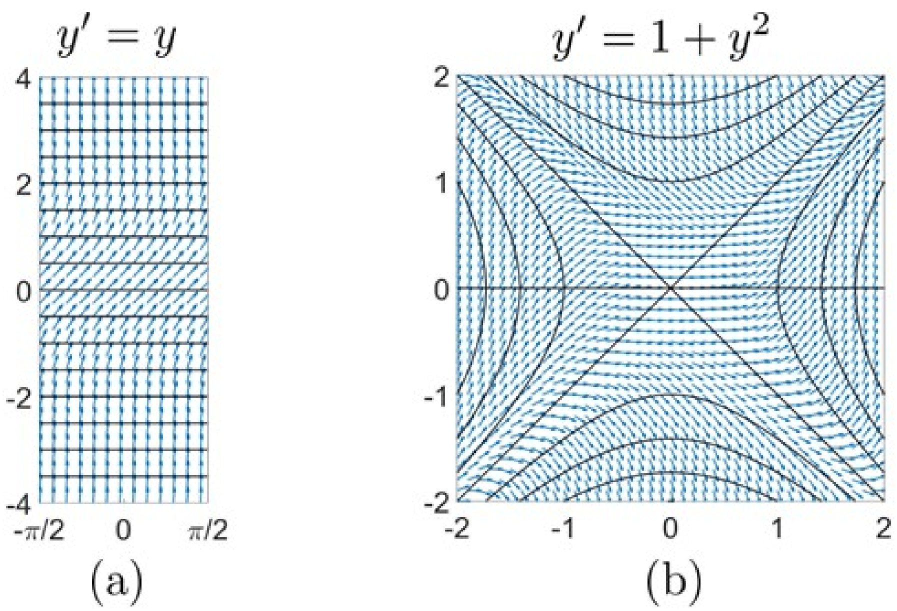

Figura 2: Campo di direzioni ed isocline. (a) $y' = 1 + y^2$, (b) $y' = x^2 - y^2$.

Abbiamo quindi esaminato alcune definizioni che caratterizzano gli elementi geometrici associati alle equazioni differenziali. Tali definizioni sono valide per un'equazione differenziale arbitraria scritta in forma normale.

Ora vogliamo isolare una serie di famiglie di EDO particolari e, per ciascuna di esse, cercare degli strumenti matematici che ci permettano di rappresentare la soluzione in forma esplicita. In altre parole, l'obiettivo è trovare delle relazioni esplicite che legano y alla variabile indipendente x.

Inizieremo con il caso delle equazioni differenziali lineari del primo ordine. Esaminiamo dunque come si può caratterizzare un'equazione differenziale del primo ordine. Consideriamo il caso generale

$$y' = f(x, y),$$

dove supporremo che f dipenda linearmente da y. Non importa quale sia la dipendenza dalla variabile x, la quale potrebbe anche essere di tipo non lineare, ma è fondamentale che la dipendenza di f da y sia lineare. Sotto queste ipotesi, l'equazione differenziale lineare del primo ordine, nel caso più generale, si può scrivere in questa maniera

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

dove $P(x)$, che moltiplica y, appare solo linearmente (ovvero, non compaiono né potenze di y né funzioni non lineari del tipo esponenziale, logaritmico, trigonometrico, razionale, ecc.). Inoltre, $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni continue arbitrarie, e dipendono esclusivamente dalla variabile x. Infine, supponiamo che x vari sull'intervallo $I = (a, b)$, dove a e b sono gli estremi dell'intervallo I. Questa è la prima famiglia di equazioni differenziali di cui vogliamo occuparci.
Iniziamo ad occuparci del caso omogeneo, ovvero il caso in cui

$$Q(x) = 0 \qquad \text{CASO OMOGENEO.}$$

In questo caso, abbiamo la sottofamiglia di equazioni

$$y' + P(x)y = 0.$$

Come si nota, si tratta di un'equazione di tipo lineare poiché la dipendenza dalla y è lineare. Supponendo che

$$y(x) \neq 0 \quad \forall x \in I,$$

possiamo dividere $y' + P(x)y = 0$ per y e ricondurre l'equazione alla forma

$$\frac{y'}{y} = -P(x).$$

Se facciamo l'ulteriore ipotesi che y sia una funzione positiva, possiamo proseguire con il nostro procedimento di risoluzione della EDO in esame. In particolare, risolvere l'EDO significa trovare una rappresentazione di y in funzione della variabile x. Dunque, abbiamo

$$-P(x) = \frac{y'}{y},$$

dove abbiamo semplicemente riscritto l'equazione scambiando fra loro i due membri. Ricordiamo adesso che

$$\frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(\log y),$$

ovvero, che $\frac{y'}{y}$ è la derivata rispetto a x del logaritmo di y, $\log y$. Da questa relazione si evince anche il motivo per cui abbiamo supposto che y fosse positiva: per poter applicare la funzione logaritmica. Pertanto, abbiamo che

$$-P(x) = \frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(\log y).$$

Calcolando la primitiva di ambo i membri, troviamo che

$$\log y = -\int P(x)dx + C,$$

dove C è una costante arbitraria. Ricordiamo anche che il logaritmo è l'inverso della funzione esponenziale, ovvero

$$\log e^x = x \qquad e^{\log x} = x.$$

Di conseguenza, applicando l'esponenziale a sinistra e a destra di $\log y = -\int P(x)dx + C$, ovvero

$$y = e^{\log y} = e^{-\int P(x)dx + C},$$

possiamo neutralizzare l'effetto del logaritmo e mettere in evidenza soltanto la funzione y, ottenendo

$$y(x) = e^{-A(x)} \qquad A(x) = \int P(x)dx + C,$$

da cui è possibile ricavare l'integrale generale

$$y(x) = Ce^{-A(x)} \qquad A(x) = \int P(x)dx,$$

dove abbiamo ridefinito e^C come costante arbitraria. Questo è quindi l'integrale generale per l'equazione differenziale lineare dal primo ordine omogenea del tipo

$$y' + P(x)y = 0.$$

Per passare dall'integrale generale a una soluzione particolare, è necessario specificare il valore della costante C. In particolare, sappiamo che il problema di Cauchy consiste nel determinare la funzione y in modo che, in un certo punto x_0 che chiamiamo punto iniziale, essa assuma un valore specifico y_0. Andiamo quindi a risolvere il problema di Cauchy per l'equazione differenziale omogenea del primo ordine

$$\begin{cases} y' + P(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Si tratta quindi di completare l'equazione differenziale $y' + P(x)y = 0$ con un'equazione algebrica supplementare, ossia $y(x_0) = y_0$.

Per ricavare la formula esplicita dell'integrale particolare, andiamo a sostituire, nella rappresentazione dell'integrale generale

$$y(x) = Ce^{-A(x)} \qquad A(x) = \int_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi,$$

l'informazione $y(x_0) = y_0$ e quindi

$$y(x_0) = Ce^{-A(x_0)} \qquad A(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} P(\xi)d\xi,$$

da cui otteniamo

$$A(x_0) = \int_{x_0}^{x_0} P(\xi)d\xi = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(x_0) = Ce^0 = y_0 \quad \Longrightarrow \quad C = y_0,$$

poiché l'integrale da x_0 a x_0 è uguale a zero (ovvero, la primitiva di P vale zero nel punto $x = x_0$) e quindi $C = y_0$. Ora che abbiamo determinato la costante C, possiamo scrivere la soluzione particolare del problema di Cauchy per l'equazione differenziale omogenea del primo ordine come

$$y(x) = y_0 e^{-A(x)} \qquad A(x) = \int_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi.$$