# RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Equazioni differenziali ordinarie: introduzione)

In questa lezione si introduce lo studio del problema delle equazioni differenziali ordinarie, ovvero la risoluzione di equazioni contenenti derivate di una funzione incognita. Tale argomento riveste un ruolo centrale all'interno di questo corso, analogamente a quanto trattato nei nuclei dedicati alla risoluzione dei sistemi lineari. La trattazione riguardante le equazioni differenziali ordinarie verrà avviata richiamando alcuni aspetti fondamentali dell'analisi matematica, necessari per lo studio di tali problemi. Successivamente, si affronterà il tema dell'approssimazione numerica delle soluzioni di queste equazioni.

Le equazioni differenziali possono essere classificate in due categorie principali. Le equazioni differenziali ordinarie, indicate con l'acronimo EDO, sono equazioni che coinvolgono esclusivamente derivate ordinarie della funzione incognita. In contrasto, le equazioni alle derivate parziali (EDP) contengono anche derivate parziali della funzione incognita, rendendone lo studio ancor più complesso. Già la risoluzione delle EDO presenta significative difficoltà teoriche e computazionali; le EDP risultano, a priori, ancora più articolate. In questa trattazione, ci concentreremo esclusivamente sullo studio delle EDO. Pertanto, in alcuni casi, ci riferiremo a esse semplicemente come equazioni differenziali, sottintendendo l'aggettivo ordinarie.

Nel corso delle prime lezioni di questo nucleo richiameremo le proprietà matematiche fondamentali delle EDO. In particolare, vedremo che, per alcune specifiche classi di EDO, sarà possibile individuare la soluzione in forma chiusa (ovvero, esplicita). Tuttavia, nella maggior parte dei casi, non sarà disponibile un'espressione chiusa per la soluzione delle EDO, rendendo inevitabile il ricorso a metodi di risoluzione numerica. Nel nucleo successivo, vedremo che nel momento in cui si voglia ricorrere alla risoluzione numerica delle EDO, sarà necessario sostituire all'espressione della EDO una sua approssimazione. Quest'ultima sarà generalmente nota attraverso i valori assunti in un insieme discreto di punti appartenenti all'intervallo di definizione della variabile indipendente considerata.

Iniziamo richiamando la definizione di EDO. Un'equazione differenziale è un'espressione matematica che coinvolge una o più derivate di una funzione incognita

$$F\big(t, y(t), y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)\big) = 0,$$

dove $t$ è la variabile indipendente, $y(t)$ è la variabile dipendente, ovvero la funzione incognita, e $y'(t), y''(t), \dots, y^{(n)}(t)$ rappresentano le derivate ordinarie $n$-esime, $y^{(n)}(t) = \frac{d^{(n)}y}{dt^{(n)}}$, della funzione $y(t)$ rispetto alla variabile $t$. In altri termini, si tratta di un'equazione che contiene una funzione incognita $y(t)$ insieme ad alcune sue derivate $y^{(n)}(t)$. La risoluzione di un'equazione differenziale consiste nel determinare una funzione $y(t)$ che soddisfi l'equazione data.

Nel prosieguo di questa lezione richiameremo alcuni esempi elementari di equazioni differenziali, con particolare riferimento a modelli noti in fisica e nelle scienze applicate, come l'ingegneria.

Il primo esempio riguarda il moto rettilineo definito attraverso la conoscenza della velocità. In particolare, si è interessati a descrivere il moto rettilineo di una particella, assumendo che la velocità, in funzione del tempo $t$, sia nota. Supponiamo, ad esempio, che la velocità $v(t)$ al tempo $t$ sia espressa dalla relazione

$$v(t) = 2\sin(t).$$

Sulla base dell'assunzione riguardante $v(t)$, desideriamo determinare la posizione della particella al tempo $t$. A tal fine, indichiamo con $y(t)$ la posizione incognita della particella al tempo $t$. Si avrà quindi la seguente relazione

$$v(t) = y'(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 2\sin(t),$$

dove la velocità $v(t)$ al tempo $t$ sarà uguale alla derivata di $y$ rispetto $t$, $y'(t) = \frac{dy(t)}{dt}$. Se non diversamente specificato, indicheremo con il "primo" la derivata della funzione rispetto alla variabile indipendente, $t$ in questo esempio. Pertanto, poiché abbiamo supposto che la velocità sia $v(t) = 2\sin(t)$, avremo

$$y'(t) = 2\sin(t).$$

Notiamo allora che questa è una EDO in quanto esiste una relazione che coinvolge la funzione $y(t)$ e la sua derivata prima $y'(t)$.
Per determinare $y(t)$, possiamo applicare il teorema fondamentale del calcolo integrale, che ci consente di trovare una primitiva $y(t)$ integrando $y'(t)$

$$y(t) = \int y'(\tau)\,d\tau = 2\int \sin(\tau)\,d\tau = -2\cos(t) + C,$$

dove $C$ è una costante arbitraria derivante dal processo di integrazione. Pertanto, tutte le funzioni

$$y(t) = -2\cos(t) + C,$$

sono soluzioni della EDO $y'(t) = 2\sin(t)$. È possibile determinare il valore specifico della costante $C$ fissando la posizione iniziale della particella. In questo modo, passiamo da una soluzione generica che chiameremo integrale generale a un integrale particolare, ovvero quello che ci consente di determinare in modo univoco il valore della costante $C$ mediante l'imposizione di una condizione supplementare, che definiremo condizione iniziale. Per esempio, se supponiamo che nell'istante iniziale $t = 0$ la posizione della particella sia pari a zero

$$y(0) = 0,$$

ovvero, all'istante temporale $t = 0$, la particella, in un ipotetico sistema di riferimento, è in posizione $y(t = 0)$ zero. Allora, andando a imporre questa condizione nell'integrale generale $y(t) = -2\cos(t) + C$, avremo

$$y(0) = -2\cos(0) + C = -2 + C = 0,$$

da cui

$$C = 2.$$

In conclusione, la soluzione, integrale generale, della EDO $y'(t) = 2\sin(t)$ è quella che otteniamo dalla relazione

$$y(t) = -2\cos(t) + C.$$

Inoltre, fissando $C = 2$, quindi

$$y(t) = -2\cos(t) + 2 = 2(1 - \cos(t)),$$

troviamo la soluzione, integrale particolare, $y_1(t)$

$$y_1(t) = 2(1 - \cos(t)),$$

dove abbiamo utilizzato il pedice 1, per evidenziare il fatto che questa è una soluzione particolare. Abbiamo, dunque, trovato una soluzione particolare, andando a precisare una condizione iniziale al tempo zero.
Notiamo che, se avessimo imposto una condizione iniziale diversa al tempo zero avremmo trovato un valore diverso della costante $C$. Per esempio, se avessimo richiesto la condizione iniziale

$$y(0) = 1,$$

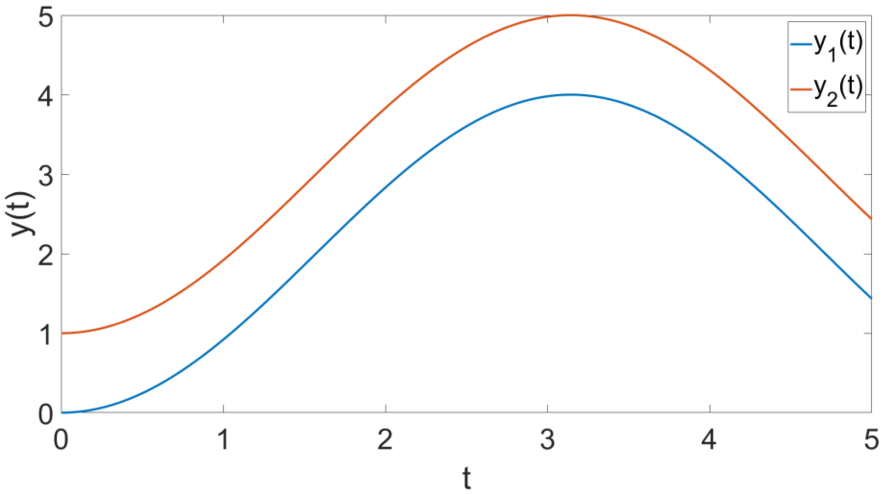


*Figura 1: soluzioni particolari della EDO del moto rettilineo con diverse condizioni iniziali.*

avremmo ottenuto un valore diverso per la costante $C$, ovvero

$$y(0) = -2\cos(0) + C = -2 + C = 1 \quad \Longrightarrow \quad C = 3.$$

Per questa scelta della costante $C = 3$, la soluzione particolare (che chiameremo $y_2(t)$) sarà

$$y_2(t) = -2\cos(t) + C = 3 - 2\cos(t).$$

La Figura 1 mostra le due soluzioni calcolate, $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Si osservi che $y_1$ e $y_2$ assumono valori iniziali diversi: per $t = 0$, $y_1 = 0$, mentre $y_2 = 1$. Questo esempio, sebbene elementare, ci permette di comprendere che le soluzioni delle EDO sono determinate a meno di una o più costanti arbitrarie. Per fissare queste costanti in modo univoco è necessario imporre delle condizioni aggiuntive. Ad esempio, possiamo imporre che la soluzione all'istante iniziale assuma un determinato valore prestabilito.
Introduciamo quindi alcune notazioni. Sempre considerando questo caso elementare, possiamo osservare che, in generale, esistono infinite soluzioni

$$\begin{array}{lcl} \text{EDO: } y'(t) = 2\sin(t) & \Longrightarrow & \text{infinite soluzioni} \\ y(t) = -2\cos(t) + C & \Longrightarrow & \text{integrale genrale} \end{array}.$$

La famiglia di soluzioni generali $y(t)$ è chiamata integrale generale. Quando si fissa il valore della costante $C$, imponendo, ad esempio, che $y$ al tempo $t = 0$ sia uguale a un determinato valore $y_0$, si ottiene una sola soluzione, chiamata soluzione particolare

$$\begin{array}{lcl} \text{Dato iniziale: } y(0) = y_0 & \Longrightarrow & \text{una sola soluzione} \\ C = y_0 + 2 & \Longrightarrow & \text{condizione iniziale} \\ y(t) = y_0 + 2(1 - \cos(t)) & \Longrightarrow & \text{integrale particolare} \end{array}.$$

La condizione iniziale ci permette di trovare in maniera univoca il valore $C$ in funzione di $y_0$ da cui si ricava la soluzione particolare che chiameremo integrale particolare.
Questa situazione che abbiamo esaminato nell'esempio considerato è, di fatto, generale. In altre parole, l'insieme delle soluzioni di una EDO, conosciuto come integrale generale, è, a priori, definito a meno di costanti. Una soluzione particolare, appartenente a questo insieme di soluzioni, si ottiene fissando tali costanti e imponendo alla soluzione di assumere un valore prestabilito in corrispondenza di un determinato punto, ad esempio il punto iniziale dell'intervallo.
L'equazione differenziale con i dati iniziali assegnati definisce il cosiddetto problema di Cauchy. Infatti, se oltre ad assegnare l'equazione differenziale imponiamo anche una condizione iniziale, otteniamo un

nuovo problema completo, che prende il nome di problema di Cauchy. Nel caso dell'esempio appena trattato, il problema di Cauchy è

$$\begin{cases} y'(t) = 2\sin(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Consideriamo ora un altro esempio di EDO, questa volta di ordine superiore. In particolare, esamineremo un'equazione di ordine due: l'EDO associata alla seconda legge del moto di Newton

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a},$$

secondo cui la forza $\boldsymbol{F}$ agente su un corpo è uguale al prodotto tra la massa $m$ del corpo e la sua accelerazione $\boldsymbol{a}$. In questo caso, la posizione al tempo $t$ di un corpo di massa $m$ (costante) soggetto a una forza $F(t)$ deve soddisfare l'equazione

$$my''(t) = F(t), \qquad y''(t) = \frac{d^2y}{dt^2},$$

dove $y''(t)$ è la derivata seconda di $y$ rispetto al tempo $t$. Questa equazione differenziale è una EDO del secondo ordine perché coinvolge la derivata seconda della funzione $y(t)$. Anche in questo caso, possiamo risolvere analiticamente questa EDO. A tale scopo, poniamo la velocità $v(t)$ uguale a $y'(t)$

$$v(t) = y'(t),$$

ovvero la derivata $y'$ della posizione $y$ rispetto al tempo $t$ rappresenta la velocità. Allora, partendo dall'equazione del secondo ordine $my''(t) = F(t)$, possiamo scrivere che

$$mv'(t) = F(t),$$

da cui si calcola, per integrazione, la primitiva $v(t)$

$$v(t) = \frac{1}{m}\int F(\tau)\, d\tau + C_1,$$

dove $C_1$ è la costante arbitraria derivante dal processo di integrazione. Indicando con $G(t)$ una primitiva di $F$ ($G(t) = \int F(\tau)\, d\tau$), troviamo che

$$v(t) = \frac{1}{m}G(t) + C_1,$$

La funzione $G(t)$, primitiva di $F(t)$, è una funzione derivabile tale che

$$G'(t) = F(t).$$

Abbiamo quindi trovato un'espressione per la velocità $v(t)$. Possiamo quindi utilizzare questa espressione $v(t) = \frac{1}{m}G(t) + C_1$ nella relazione

$$y'(t) = v(t),$$

da cui integrando, si ricava che

$$y(t) = \int v(t)\, d\tau + C_2,$$

ovvero

$$y(t) = \int \left[\frac{1}{m}G(\tau) + C_1\right] d\tau + C_2.$$

Da questa ultima relazione segue che

$$y(t) = \frac{1}{m}H(t) + C_1 t + C_2,$$

dove il termine $C_1 t$ si ottiene perché $C_1$ è sotto il segno dell'integrale e $H(t)$ è una primitiva di $G(t)$ che soddisfa $H'(t) = G(t)$. Pertanto, la relazione

$$y(t) = \frac{1}{m}H(t) + C_1 t + C_2,$$

rappresenta l'integrale generale, ovvero la soluzione generale dell'equazione differenziale associata alla seconda legge di Newton. In questo caso particolare, l'integrale generale dipende da due costanti arbitrarie, $C_1$ e $C_2$. Abbiamo quindi una famiglia di soluzioni che definiscono il cosiddetto integrale generale. Per ottenere un integrale particolare, ovvero la soluzione particolare, è necessario fissare in modo univoco le due costanti $C_1$ e $C_2$, imponendo che la soluzione del problema soddisfi delle condizioni supplementari. Sono dunque necessarie due condizioni iniziali per determinare in maniera univoca le due costanti.
Possiamo ad esempio assegnare la velocità iniziale

$$v(0) = v_0,$$

dove $v_0$ è un valore dato. Questa condizione corrisponde a

$$y'(0) = v_0.$$

Se andiamo a utilizzare questa relazione in $v(t) = \frac{1}{m}G(t) + C_1$, troviamo

$$v_0 = v(0) = \frac{1}{m}G(t) + C_1,$$

da cui troviamo $C_1$

$$C_1 = v_0 - \frac{1}{m}G(0).$$

Aver fissato una prima condizione sulla velocità ci ha permesso di calcolare la prima costante $C_1$. Imponendo una seconda condizione, troveremo anche l'altra costante $C_2$. La seconda condizione può essere imposta, ad esempio, stabilendo che la posizione iniziale (ovvero al tempo iniziale $t = 0$) sia assegnata

$$y_0 = y(0).$$

Se andiamo a sostituire questa relazione in $y(t) = \frac{1}{m}H(t) + C_1 t + C_2$, ricaviamo

$$y_0 = y(0) = \frac{1}{m}H(0) + C_1 0 + C_2,$$

da cui troviamo $C_2$

$$C_2 = x_0 - \frac{1}{m}H(0).$$

Raccogliendo tutte queste informazioni, otteniamo l'integrale particolare, ovvero la soluzione del problema corrispondente alla posizione iniziale $y_0 = y(0)$ e alla velocità iniziale $v_0 = v(0)$. Pertanto, l'integrale particolare, in questo caso, assume la seguente forma

$$y(t) = \frac{1}{m}H(t) + \left(v_0 - \frac{1}{m}G(0)\right)t + \left(y_0 - \frac{1}{m}H(0)\right).$$

Notiamo che, attraverso questo semplice esempio, abbiamo constatato che il problema di Cauchy per una EDO del secondo ordine, ovvero in cui interviene anche una derivata seconda della funzione incognita, consiste nel fissare due condizioni iniziali. Nell'esempio specifico le due condizioni iniziali sono: la posizione iniziale $y_0$ e la velocità iniziale $v_0$.
In generale, il problema di Cauchy per una EDO del secondo ordine richiede l'assegnazione di due condizioni iniziali: ad esempio, il valore della funzione incognita $y$ nel punto iniziale $t = 0$ e il valore della sua derivata prima $y'(0)$ nel punto iniziale $t = 0$

$$\begin{gathered} y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1. \end{gathered}$$

Assegnate queste due condizioni iniziali, otteniamo un problema completamente definito dall'equazione differenziale e dalle due condizioni iniziali, formando così un problema completo che, anche in questo caso, viene chiamato problema di Cauchy

$$\begin{cases} F\big(t, y(t), y'(t), y''(t)\big) = 0 \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_0' \end{cases}.$$

Vediamo ora un altro esempio di equazione differenziale meno elementare rispetto agli esempi esaminati finora, analizzando come procedere alla luce delle conclusioni alle quali siamo già giunti riguardo alla caratterizzazione del problema di Cauchy.

Consideriamo l'EDO che descrive lo sviluppo di una biomassa, indicata con $m(t)$ (cioè, la biomassa al tempo $t$), di una popolazione di batteri che cresce, ad esempio, in un mezzo contenente il nutrimento. In questo caso, la velocità di crescita della biomassa è proporzionale alla massa stessa

$$m'(t) = Km(t),$$

dove $K$ è una costante assegnata.

Vogliamo trovare l'espressione della funzione incognita $m(t)$. Dalla relazione differenziale, possiamo ricavare (e vedremo in seguito come ricavare rigorosamente questa soluzione) che $m(t)$ è uguale a una costante $C$ moltiplicata per $e^{Kt}$, dove $K$ è una costante che dipende dalla velocità di crescita della biomassa. Pertanto, l'espressione per $m(t)$ è

$$m(t) = Ce^{kt},$$

dove $C$ è una costante arbitraria da determinare. Quest'ultima espressione ricavata rappresenta dunque l'integrale generale. Per passare dall'integrale generale a quello particolare, possiamo fissare il valore della massa $m$ al tempo zero

$$m(0) = m_0,$$

dove $m_0$ è la biomassa al tempo iniziale $t = 0$. Allora, andando a sostituire $t = 0$ nella relazione $m(t) = Ce^{kt}$, troviamo

$$m(0) = Ce^{K0} = m_0 \quad \Longrightarrow \quad C = m_0.$$

L'integrale particolare è dunque

$$m(t) = m_0 e^{Kt}.$$

Vogliamo verificare se la soluzione che abbiamo trovato è l'unica possibile. In particolare, intendiamo esaminare se $m(t) = Ce^{Kt}$ rappresenti l'unica soluzione dell'equazione differenziale $m'(t) = Km(t)$. In effetti, $m(t) = Ce^{Kt}$ è certamente una soluzione, poiché, derivando questa espressione troviamo che $m'(t)$ è esattamente uguale a $K$ volte $m(t)$

$$m'^{(t)} = CKe^{Kt} = Km(t),$$

che corrisponde al termine del lato destro della EDO.

Per verifica se questa è l'unica soluzione possibile è utile considerare la seguente proprietà: dato un numero reale $C \in \mathbb{R}$ esiste una sola funzione $f(x)$ che soddisfa l'equazione differenziale

$$f'(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

con condizione

$$f(0) = C.$$

In altri termini, stiamo affermando che le equazioni differenziali ordinarie del tipo $f'(x) = f(x)$, quando viene assegnato un dato iniziale nel punto $x = 0$ (ad esempio, con valore iniziale $f(0) = C$), hanno una sola soluzione, e questa soluzione è precisamente

$$f(x) = Ce^{x}.$$

Per verificare questo risultato, basta derivare $f(x)$

$$f'(x) = Ce^x = f(x).$$

Inoltre, è immediato verificare che

$$f(0) = \mathrm{Ce}^0 = C.$$

Abbiamo quindi verificato che $f(x) = Ce^x$ è una soluzione del problema. Per confermare che questa è l'unica soluzione possibile, dobbiamo mostrare che, se $g(x)$ rappresenta un'altra possibile soluzione, allora $g(x)$ deve necessariamente coincidere con $f(x)$. Infatti, se esistesse un'altra soluzione, questa dovrebbe soddisfare la stessa equazione differenziale e, dato che le soluzioni di equazioni differenziali lineari sono uniche per dati iniziali specifici, $g(x)$ non potrebbe essere diversa da $f(x)$.
Infatti, se ci fosse un'altra soluzione $g(x)$, allora dovrebbe essere

$$\begin{aligned} &g'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &g(0) = C \end{aligned}.$$

Vogliamo quindi dimostrare che

$$g(x) = Ce^x,$$

che equivale a dimostrare che

$$g(x)e^{-x} = C,$$

dove, nell'ultima espressione, abbiamo semplicemente moltiplicato per $e^{-x}$ a sinistra e a destra di $g(x) = Ce^x$. A tale scopo, poniamo allora

$$h(x) = g(x)e^{-x}$$

e ci poniamo come obiettivo quello di verificare che $h(x)$ è effettivamente uguale a $C$. Osserviamo che

$$h'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Infatti, derivando $h(x)$ rispetto ad $x$, troviamo che

$$h'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = e^{-x}[g'(x) - g(x)],$$

da cui segue che $h'(x) = 0$ (ovvero $h(x)$ è una costante), dato che per ipotesi $g'(x) = g(x)$. Inoltre, essendo

$$h(0) = g(0)e^{-0} = C,$$

troviamo che

$$h(x) = C,$$

ovvero

$$h(x) = g(x)e^{-x} = C,$$

da cui segue la tesi

$$g(x) = Ce^x.$$

Dunque, abbiamo dimostrato che $g(x)$ è uguale ad $f(x)$.