



RADICI DI EQUAZIONI NON LINEARI (Introduzione e metodo di Bisezione)

In questa lezione ci occupiamo della risoluzione numerica di equazioni non lineari. Consideriamo una funzione non lineare arbitraria, che può anche essere un polinomio, e ci poniamo l'obiettivo di determinarne gli zeri (o radici), ossia quei valori reali, se esistono, per i quali la funzione si annulla. Vogliamo affrontare il problema in un contesto generale e introdurre metodi numerici in grado di calcolare o approssimare la soluzione. In quest'ultimo caso, costruiremo una successione di valori che converge, all'infinito, alla radice cercata.

Esaminiamo di seguito come formulare il problema in termini generali. Consideriamo una funzione $f(x)$ definita su un intervallo I della retta reale, quindi una funzione reale di variabile reale

$$f(x): I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

L'obiettivo è determinare se esiste un valore α appartenente all'intervallo I tale che $f(\alpha) = 0$

$$\alpha \in I \subset \mathbb{R} \text{ t. c. } f(\alpha) = 0$$

Se tale valore esiste, viene chiamato zero della funzione f o, equivalentemente, radice dell'equazione

$$f(x) = 0$$

Analizziamo ora il problema da un punto di vista geometrico. Una prima possibilità è che la funzione non lineare non intersechi mai l'asse reale (o asse x), il che significa che non esiste alcun valore α tale per cui $f(\alpha) = 0$. Un'altra situazione possibile è quella in cui la funzione abbia più radici (come nel caso di un polinomio di secondo grado con due soluzioni reali) che intersecano l'asse x in due o più punti. Infine, possiamo trovarci di fronte a un caso in cui esiste una sola radice, ovvero la funzione attraversa l'asse reale in un unico punto all'interno dell'intervallo I . Questo non esclude che la funzione possa avere altre radici al di fuori di I , ma in questo caso ci concentriamo esclusivamente su un intervallo in cui sia presente un'unica radice.

È noto che, nella maggior parte dei casi, le radici delle equazioni non lineari non possono essere determinate esattamente in forma chiusa. Per questo motivo, ci poniamo il problema di costruire una successione di valori che converga progressivamente alla radice desiderata, ottenendo così un'approssimazione sempre più accurata della soluzione. Il nostro obiettivo è quindi quello di generare una successione di numeri reali x_k tale che, al tendere di k all'infinito, il suo limite sia uguale a α

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha.$$

In altre parole, vogliamo costruire una successione che converga alla soluzione x dell'equazione $f(x) = 0$, ovvero $x = \alpha$. Successivamente, vedremo come questi concetti possano essere estesi al caso di una funzione vettoriale arbitraria. In questo contesto più generale (di funzione vettoriale), continueremo a parlare sempre di ricerca degli zeri, ma anziché singoli numeri reali, avremo a che fare con vettori di numeri reali.

Consideriamo questo approccio come il paradigma dei metodi numerici che utilizzeremo. L'obiettivo sarà sempre quello di costruire successioni che, idealmente, convergano alla soluzione del problema matematico che vogliamo risolvere.



Esaminiamo ora alcune classi di metodi numerici per la ricerca degli zeri di equazioni non lineari. Uno dei metodi più tradizionali e diffusi è il Metodo di Bisezione, basato su un importante risultato dell'analisi reale noto come Teorema degli Zeri delle Funzioni Continue. Questo teorema afferma che, se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso $[a, b]$ e assume valori di segno opposto agli estremi, ovvero $f(a)f(b) < 0$ allora esiste almeno un valore α appartenente all'intervallo aperto (a, b) tale che $f(\alpha) = 0$:

Data una funzione $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$ e t. c.

$$f(a)f(b) < 0$$

allora $\exists \alpha \in (a, b)$ t. c. $f(\alpha) = 0$.

In termini intuitivi, il teorema garantisce che, se $f(x)$ è continua e cambia segno tra $[a, b]$, allora deve necessariamente annullarsi almeno una volta all'interno dell'intervallo. Questa proprietà del cambiamento di segno è alla base del metodo di bisezione, che sfrutta proprio questo principio per costruire una successione di intervalli sempre più piccoli, fino a isolare con precisione la radice cercata.

Il metodo di bisezione può essere descritto geometricamente nel modo seguente. Consideriamo una funzione continua arbitraria $f(x)$ definita in maniera continua su un intervallo $[a, b]$, in cui avviene un cambio di segno, ovvero $f(a)f(b) < 0$. Poniamo $a_1 = a$ e $b_1 = b$, ovvero consideriamo l'intero intervallo dato. In questo modo stiamo inizializzando il nostro algoritmo prendendo gli estremi dell'intervallo. Introduciamo ora il punto medio dell'intervallo:

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Valutiamo qual è il segno di $f(c_1)$, $f(a_1)$ e $f(b_1)$. Dopo aver valutato i segni di $f(c_1)$, $f(a_1)$ e $f(b_1)$, scegliamo in maniera opportuna se restringere la ricerca della radice della funzione f tra $[a_1, c_1]$ oppure tra $[c_1, b_1]$.

Supponiamo, ad esempio, che $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Se $f(c_1) > 0$, questo significa che il cambio di segno avviene nell'intervallo (a_1, c_1) , quindi la radice α si trova in questo sotto intervallo (a_1, c_1) . Restringiamo allora la ricerca della radice tra (a_1, c_1) (caso A). Se invece $f(c_1) < 0$ (e quindi ha lo stesso segno di $f(a_1) < 0$), allora il cambio di segno avviene nell'intervallo (c_1, b_1) (caso B).

Supponendo di essere nel caso A, poniamo $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$. Nel caso B, ovvero se $f(c_1)f(b_1) < 0$, la radice si trova tra (c_1, b_1) . In questo caso B, aggiorniamo gli estremi ponendo $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$ e restringiamo la ricerca della zero all'intervallo (c_1, b_1) .

Senza perdere di generalità, soffermiamoci sul caso B, e continuiamo ad applicare la formula di bisezione aggiornando l'intervallo e calcolando il nuovo punto medio

$$c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2},$$

che divide l'intervallo (c_1, b_1) in due sotto intervalli $(c_1, c_2] \cup [c_2, b_1)$.

Continuiamo col processo di selezione del metodo di bisezione, aggiornando l'intervallo di ricerca della radice dove la funzione cambia segno e continuando a calcolare i punti medi (c_3, c_4, \dots) degli intervalli selezionati. In altri termini, ripetendo questo processo iterativamente, ad ogni passo/iterazione k , generiamo una successione di numeri reali



$$x_k = c_k = \frac{a_k + b_k}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

che sono i punti medi degli intervalli che selezioniamo di volta in volta controllando dove avviene il cambio di segno della funzione $f(x)$ in esame. In altri termini, selezioniamo il nuovo intervallo dimezzando quello precedente e verificando in quale delle due metà avviene il cambio di segno. Generiamo così una successione di punti medi $\{x_k\}$ che al crescere di k tenderà alla radice cercata

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \alpha.$$

Infatti, per costruzione, la radice della funzione f , indicata con α , è sempre contenuta nell'intervallo $[a_k, b_k]$ ad ogni iterazione k . Poiché la lunghezza degli intervalli $[a_k, b_k]$ si riduce progressivamente all'aumentare di k , il valore di $x_k = c_k$ fornisce un'approssimazione sempre più precisa di α . Maggiore è il numero di iterazioni k , più accurata sarà l'approssimazione della radice α , attraverso i punti medi della successione.

Abbiamo osservato che il metodo di bisezione genera una successione di sotto-intervalli e, in particolare, una successione di valori costituiti dai punti medi di tali intervalli. Questa successione converge sicuramente al valore α . Procediamo ora a formalizzare il concetto di convergenza associato al metodo di bisezione. A tal fine, consideriamo il termine $|\alpha - x_k|$, che rappresenta l'errore assoluto commesso nell'approssimare la radice α con x_k , dove $x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ è il punto medio dell'intervallo $[a_k, b_k]$. Poiché α appartiene all'intervallo $[a_k, b_k]$, segue che

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a}{2^k} \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow \infty.$$

La quantità $\frac{b-a}{2^k}$ tende a zero al crescere di k , poiché stiamo dividendo l'intervallo iniziale $b - a$, che è costante, per 2^k , il quale tende all'infinito quando $k \rightarrow \infty$. Di conseguenza, si ha che:

$$|\alpha - x_k| \rightarrow 0 \text{ per } k \rightarrow \infty.$$

Cerchiamo ora di comprendere con quale rapidità la successione x_k converga ad α e, in particolare, come stabilire a priori il numero di iterazioni (ossia il numero di bisezioni) necessarie affinché l'errore risulti inferiore a una determinata soglia di tolleranza prefissata. In altri termini, vogliamo ottenere un controllo sull'errore. Procediamo quindi ad analizzare come realizzare tale controllo.

Supponiamo di voler ottenere un'approssimazione x_k tale che l'errore assoluto soddisfi la disuguaglianza

$$|\alpha - x_k| \leq \epsilon,$$

dove ϵ rappresenta una soglia di tolleranza fissata a priori. Vogliamo determinare il numero minimo di iterazioni k (cioè, il numero di bisezioni) necessario affinché tale condizione sia soddisfatta. Ricordiamo che, per costruzione del metodo di bisezione, si ha

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a}{2^k}.$$

Imponendo quindi la condizione

$$\frac{b - a}{2^k} \leq \epsilon,$$

possiamo ricavare una stima per k . A tale scopo applichiamo il logaritmo in base due a entrambi i membri della disequazione, ottenendo



$$\log_2 \left(\frac{b-a}{2^k} \right) \leq \log_2(\epsilon),$$

che si può riscrivere come

$$\log_2(b-a) - \log_2 2^k = \log_2(b-a) - k \log_2 2 = \log_2(b-a) - k \leq \log_2(\epsilon),$$

da cui, isolando k , si giunge alla seguente disuguaglianza

$$k \geq \log_2(b-a) - \log_2(\epsilon).$$

Questa formula consente di determinare il numero minimo di iterazioni per il metodo di bisezione necessarie affinché l'errore sia inferiore alla tolleranza desiderata.

Consideriamo il seguente esempio: supponiamo di voler determinare numericamente una radice di una funzione continua all'interno dell'intervallo $[a, b] = [-1, 1]$, con una tolleranza ϵ prefissata pari a $\epsilon = 2^{-10}$. Ciò equivale a richiedere che l'errore sia inferiore a 2^{-10} , ovvero a una quantità più piccola di un millesimo. In altri termini, si desidera un controllo dell'errore dell'ordine di un millesimo. Appliciamo quindi la formula

$$k \geq \log_2(b-a) - \log_2(\epsilon),$$

dove, nel caso specifico $\epsilon = 2^{-10}$, $a = -1$ e $b = 1$

$$k \geq \log_2(1+1) - \log_2(2^{-10}) = \log_2(2) + 10 \log_2(2) = 1 + 10 = 11$$

Dunque, è necessario effettuare almeno $k \geq 11$ iterazioni del metodo di bisezione per garantire che l'errore assoluto sia inferiore alla tolleranza prefissata.

Abbiamo quindi verificato che il metodo di bisezione converge sempre, a condizione di partire da un intervallo $[a, b]$ che contenga effettivamente la radice, ossia un intervallo in cui la funzione sia continua e cambi segno agli estremi. Inoltre, abbiamo mostrato come sia possibile determinare a priori il numero minimo di iterazioni necessario per garantire che l'errore sia inferiore a una soglia di accuratezza prefissata.