eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Radici di equazioni non lineari

Lezione 1.5b

Iterazioni di punto fisso per la ricerca degli zeri
e sistemi di equazioni non lineari

Metodo di Newton e delle corde come metodi di punto fisso

- Reinterpretare Metodi di Newton e delle corde, sfruttando

$$f(x) = 0 \iff x = g(x)$$

- Metodo delle Corde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(b-a)f(x_n)}{f(b)-f(a)} \quad \forall n \geq 0$$

$$g(x_n) = x_n - \frac{(b-a)f(x_n)}{f(b)-f(a)}$$

- Metodo di Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \forall n \geq 0$$

$$g(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\longrightarrow \quad x_{n+1} = g(x_n) \quad \forall n \geq 0$$

Sistemi di equazioni non lineari

- Generalizzare i metodi per la ricerca degli zeri a problemi vettoriali
- Risoluzione di sistemi di equazioni non lineari
- Data una **funzione vettoriale** $F(\mathbf{x})$ di **variabile vettoriale** $\mathbf{x}$

$$F(\mathbf{x}) : I \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad n, m > 1,$$
$$\text{si cerca } \alpha \in I \text{ t.c. } F(\alpha) = \mathbf{0}$$

- Determinare il **vettore incognito** α che soddisfa $F(\alpha) = 0$
- Esempio: $n = m = 2$ ($F(\mathbf{x})$ definita nel piano bidimensionale)

$$F(\mathbf{x}) : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad F = (f_1, f_2)$$
$$\text{si cerca } \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ t.c. } F(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$$

Sistemi di equazioni non lineari (geometricamente)

- Determinare i punti (x_1, x_2) nel piano delle variabili indipendenti $x_1 | x_2$ tale che

$$f_1(x_1, x_2) = \mathbf{0} \qquad \text{e} \qquad f_2(x_1, x_2) = \mathbf{0}$$

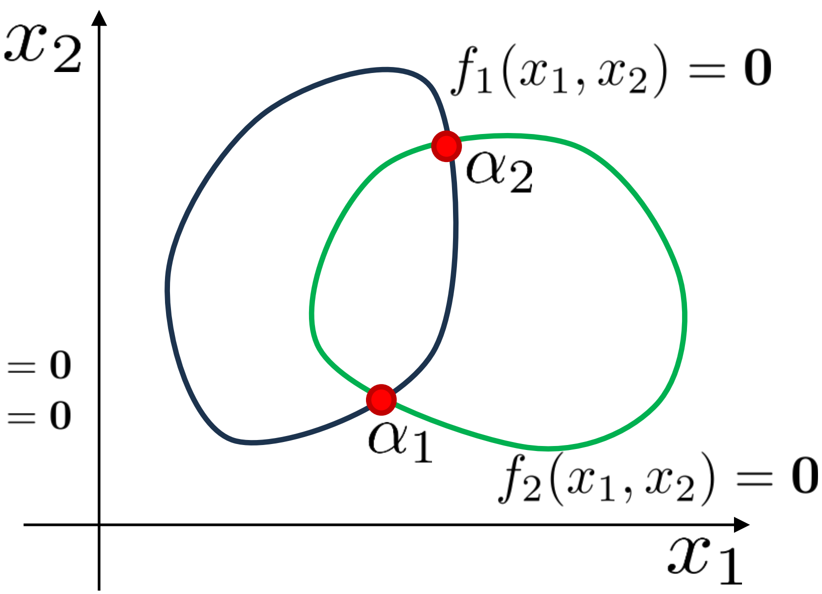
- Stiamo cercando l'intersezione dei luoghi geometrici nel piano $x_1 | x_2$, le soluzioni del sistema non lineare $\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = \mathbf{0} \\ f_2(x_1, x_2) = \mathbf{0} \end{cases}$

$f_1(x_1, x_2)$, $f_2(x_1, x_2)$ sono superfici nello spazio 3D

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = (0, 0)$$

$$\Downarrow$$

1. Trovare le intersezioni di queste due superfici 3D nel piano $x_1 | x_2$ $\Rightarrow$ $\begin{matrix} f_1(x_1, x_2) = \mathbf{0} \\ f_2(x_1, x_2) = \mathbf{0} \end{matrix}$
2. I punti α_1, α_2 di intersezione delle curve $f_1 = \mathbf{0}$ & $f_2 = \mathbf{0}$



Sistemi di equazioni non lineari (metodi numerici)

- Estendere i metodi di ricerca degli zeri a sistemi di equazioni non lineari

$$\{\mathbf{x}_k\} \longrightarrow \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \alpha$$

- Riformulazione del Metodo di Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\ \forall k \geq 0 \quad = \quad \boxed{f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -f(x_k),\ \forall k \geq 0}$$

- Caso in cui ho una funzione vettoriale $F(\mathbf{x})$

$$\boxed{F'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = -F(\mathbf{x}_k), \quad \forall k \geq 0}$$

- $-F(\mathbf{x}_k) \doteq \mathbf{b}_k$ è un vettore (termine noto)
- $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \doteq \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$ è un vettore (incognita)
- $F'(\mathbf{x}_k) \doteq A(\mathbf{x}_k)$ è una matrice (del sistema)

$$\boxed{\begin{gathered} A(\mathbf{x}_k)\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{b}_k \\ \forall k \geq 0 \end{gathered}}$$

Metodo di Newton per sistemi di equazioni non lineari

- Metodo di Newton in forma vettoriale:

- $-F(\mathbf{x}_k) \doteq \mathbf{b}_k$ termine noto (vettore residuo)
- $\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k \doteq \tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$ incognita (vettore incremento)
- $F'(\mathbf{x}_k) \doteq A(\mathbf{x}_k)$ **matrice Jacobiana**

$$A(\mathbf{x}_k)\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \mathbf{b}_k$$
$$\forall k \geq 0$$

- La matrice Jacobiana $F'(\mathbf{x}_k)$ contiene le derivate parziali di $F = (f_1, \dots, f_m)$ rispetto alle variabili $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ calcolate in $\mathbf{x}_k$

$$A(\mathbf{x}_k) = F'(\mathbf{x}_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_k) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_k) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_k) \end{pmatrix}$$