eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica

Lezione 4.5b

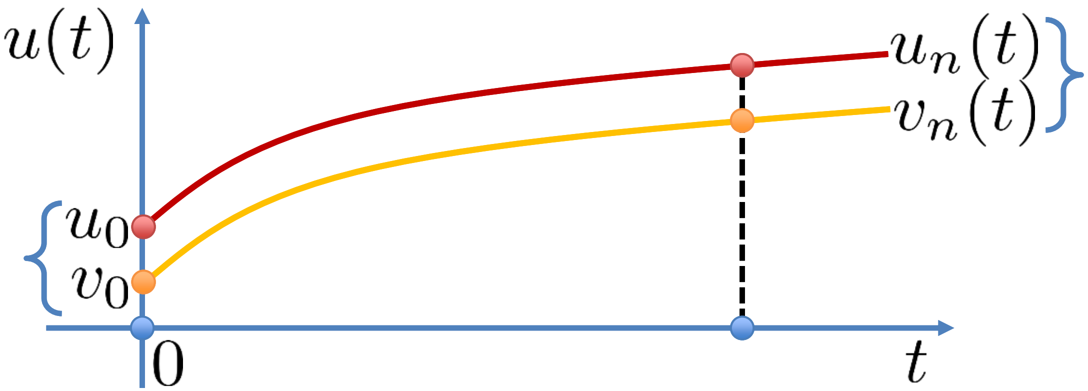
Consistenza, stabilità e convergenza dei problemi numerici

Fondamenti della matematica numerica (stabilità)

- Caratterizzare le condizioni per cui si abbia convergenza $u_n \to u$
- **Consistenza + Stabilità = Convergenza**

<u>Stabilità:</u> piccole variazioni nei dati del problema determinano **modifiche contenute alla soluzione** corrispondente

- Esempio: risoluzione di un'equazione differenziale ordinaria



distanza delle soluzioni $\forall t$

distanza dei dati iniziali

Metodo numerico che produce $u_n(t), v_v(t)$ è stabile

Fondamenti della matematica numerica (ben positura)

- **Problema matematico ben posto:** se la soluzione

$$F(u,d)=0$$

  - u esiste ed è unica
  - dipende in modo continuo dai dati d

- Dipendenza continua dai dati

$$F(u,d)=0 \qquad F(u^*,d^*)=0$$

$d-d^*$ «piccola» → $u-u^*$ «piccola»

- Definizione rigorosa:

$$\forall d, \forall \epsilon>0, \exists K=K(\epsilon,d)>0 \text{ t.c. } \|d-d^*\|<\epsilon$$

$$\Longrightarrow \|u-u^*\|<K$$

K fattore di controllo

Fondamenti della matematica numerica (condizionamento)

- Concetto: **numero di condizionamento del problema matematico**

Un **indicatore quantitativo** della
sensibilità della soluzione
rispetto alle variazioni sui dati

- **Definizione:**

$$K = \sup_{\delta d} \left(\frac{\|\delta u\|}{\|u\|} \Big/ \frac{\|\delta d\|}{\|d\|} \right)$$

$$\delta u = u - u^*$$
$$\delta d = d - d^*$$

Massima variazione relativa della soluzione,
rispetto alla variazione relativa sui dati

Fondamenti della matematica numerica (condizionamento)

- **Indicatore quantitativo:** massimo errore relativo della soluzione
  rispetto errore relativo sui dati

Numero di condizionamento

$$K = \sup_{\delta d} \left(\frac{||\delta u||}{||u||} \Big/ \frac{||\delta d||}{||d||} \right)$$

- $K >> 1$: problema **mal condizionato**
- $K \simeq 1$: problema **ben condizionato**

- K fornisce una misura dell'amplificazione potenziale degli errori nei dati sulle soluzioni

Fondamenti della matematica numerica (condizionamento)

- **Caratterizzazione operativa** del numero di condizionamento

Modello matematico

$$F(u,d)=0 \quad \xrightarrow{\mathrm{HP}} \quad u=f(d)$$

- Esempio: risoluzione di un **sistema lineare**

$$d=\{A,\mathbf{b}\} \qquad F(\mathbf{u},d)=A\mathbf{u}-\mathbf{b}=\mathbf{0}$$

$$\longrightarrow \quad \mathbf{u}=A^{-1}\mathbf{b}=f(d)$$

- Sotto HP $\longrightarrow$ $\boxed{K\simeq\|f'(d)\|\dfrac{\|d\|}{\|f(d)\|}}=\|A\|\|A^{-1}\|$

Fondamenti della matematica numerica (condizionamento)

- **Condizionamento di un problema numerico**

Metodo numerico $$F_n(u_n, d_n) = 0$$

Perturbazione sui dati $$F_n(u_n + \delta u_n, d_n + \delta d_n) = 0$$

<u>Numero di condizionamento numerico</u> $$= K_n = \sup_{\delta d_n} \left(\frac{\|\delta u_n\|}{\|u_n\|} \Big/ \frac{\|\delta d_n\|}{\|d_n\|} \right)$$

<u>Numero di condizionamento numerico</u> <u>**asintotico**</u> $$= K^{num} = \lim_{k \to \infty} \sup_{n \geq k} K_n$$