RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI: METODI DIRETTI (Tecniche di Pivotazione)

In questa lezione andiamo ad esaminare quando il procedimento del metodo di eliminazione di Gauss (MEG) può incontrare degli "intoppi". Ossia quando il MEG non può essere portato a termine senza difficoltà. Abbiamo osservato, nelle precedenti lezioni, come nelle formule del MEG, di seguito riportate,

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(k+1)} &= a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}, \\ b_i^{(k+1)} &= b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)}, \qquad\qquad i,j = k+1,\dots,n \quad k = 1,\dots,n-1, \\ m_{ik} &= \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}. \end{aligned}$$

sia essenziale che gli elementi $a_{kk}^{(k)}$ siano diversi da zero, poiché sono quelli utilizzati per effettuare le divisioni. Questi elementi $a_{kk}^{(k)}$, per il ruolo che ricoprono, sono chiamati elementi pivotali.

Pertanto, per garantire che il MEG possa essere completato senza problemi, è fondamentale che gli elementi pivotali che si generano durante il processo siano tutti diversi da zero. È importante notare che gli elementi pivotali non coincidono necessariamente con gli elementi diagonali della matrice di partenza A. Pertanto, non è possibile verificare questa condizione semplicemente osservando la matrice di partenza A. Sarà necessario assicurarsi che la matrice A generi una successione di elementi pivotali diversi da zero durante il processo di eliminazione.

Possiamo osservare che il fatto che la matrice di partenza A è non singolare non è di per sé sufficiente a garantire che gli elementi pivotali $a_{kk}^{(k)}$ siano diversi da zero. Ad esempio, consideriamo questa matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = -6 \neq 0,$$

dove il suo determinante è -6, quindi A è non singolare. Se applichiamo il MEG alla matrice A, otteniamo una matrice $A^{(2)}$, che ha la prima sotto-colonna uguale a zero. In questa matrice, notiamo che il secondo elemento pivotale è uguale a zero

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \Longrightarrow a_{22}^{(2)} = 0.$$

Se l'elemento pivotale $a_{22}^{(2)}$ è nullo, il MEG non può continuare, perché per passare da $A^{(2)}$ ad $A^{(3)}$, abbiamo bisogno di dividere per $a_{22}^{(2)}$ e, in questo caso, questa sarebbe una divisione per zero.

Siamo dunque indotti a ricercare le proprietà sulla matrice di partenza che assicurano che tutti gli elementi pivotali siano diversi da zero. Si può verificare che, se tutti i minori principali di A sono non nulli

$$d_i = det(A_i) \neq 0 \text{ con } A_i = (a_{km}), \quad 1 \leq k,m \leq i,$$

allora anche tutti gli elementi pivotali sono non nulli.

Per ottenere i minori principali della matrice A, bisogna considerare le sottomatrici formate dalle prime i righe e i colonne della matrice (questa sarà la sottomatrice i-esima), e calcolarne i determinanti. Il determinante della sottomatrice i-esima si chiama minore di ordine i della matrice A. Se tutti i minori principali della matrice A sono diversi da zero, allora gli elementi pivotali sono anch'essi diversi da zero.

© Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 9002752130 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

Calcoliamo i minori principale della matrice dell'esempio precedente

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{d}_3 = \det(A_3) = -6 \neq 0,$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{d}_2 = \det(A_2) = 0,$$

$$A_1 = (1) \Longrightarrow \mathrm{d}_1 = \det(A) = 1 \neq 0.$$

Ci aspettiamo ovviamente che, da qualche parte, un minore sia uguale a zero. La sottomatrice A_1 è composta da un solo elemento, poiché è formata dalla prima riga e dalla prima colonna di A, e ovviamente il determinante è diverso da zero. La sottomatrice A_2 è formata dalle prime due righe e dalle prime due colonne. Il determinante di A_2 è uguale a zero. Abbiamo quindi trovato un minore principale, d_2, quello di A_2, uguale a zero. Di conseguenza, il MEG non può continuare in questo caso, perché abbiamo trovato un minore principale uguale a zero.
Cosa fare in situazioni di questo tipo? Come prima cosa, bisogna verificare quali sono le matrici che non hanno minori principali uguali a zero. È quindi necessario comprendere quali categorie di matrici permettono di condurre il MEG a termine senza problemi. Nell'Approfondimento di questa lezione sono esposte tre classi di matrici per i quali il MEG può essere condotto a termine senza problemi. In alternativa, per generiche matrici, bisogna cercare di capire come modificare il MEG per quelle matrici che, a priori, potrebbero avere minori o determinanti di sottomatrici principali uguali a zero.
Vediamo a questo punto cosa fare per una matrice, per assicurarci comunque che il MEG possa concludersi correttamente. Introduciamo quindi le tecniche di Pivotazione, che servono a evitare che gli elementi pivotali diventino uguali a zero.
Abbiamo due tecniche di Pivotazione. La prima si chiama Pivotazione parziale. Supponiamo di essere giunti al passo k-esimo del MEG e di aver generato l'elemento $a_{kk}^{(k)}$, che potrebbe essere uguale a zero. Nel caso in cui fosse uguale a zero, cerchiamo sulla colonna k-esima l'indice di riga r corrispondente all'elemento con il modulo massimo. In altre parole, stiamo supponendo di aver trovato sulla riga r-esima e colonna k-esima un elemento $a_{rk}^{(k)}$, che ha il modulo più grande tra tutti gli altri elementi della stessa colonna. In questo caso, eseguiamo una permutazione di righe: precisamente, la riga r-esima prende il posto della riga k-esima e viceversa. In particolare, il nuovo elemento pivotale sarà l'elemento $a_{rk}^{(k)}$, essendo il massimo in valore assoluto tra tutti gli elementi di quella colonna. In questo modo, siamo certi che l'elemento pivotale sia diverso da zero, altrimenti la matrice sarebbe singolare.
La seconda tecnica di Pivotazione si chiama Pivotazione totale, e coinvolge non solo le righe, ma anche le colonne. In questo caso, andiamo a cercare l'elemento di modulo massimo, non solo sulla colonna k-esima, ma su tutta la sottomatrice ancora da esplorare dal MEG. In particolare, cerchiamo la riga r-esima e la colonna q-esima corrispondente all'elemento di modulo massimo. Successivamente, eseguiamo una doppia permutazione: la riga r-esima prende il posto della riga k-esima e viceversa, e la colonna k-esima prende il posto della colonna q-esima e viceversa. In altre parole, scambiamo sia righe che colonne in un'unica operazione. La pivotazione totale è quella che garantisce di avere gli elementi pivotali più grandi possibili, riducendo il rischio di errori dovuti agli arrotondamenti durante il MEG.

Vogliamo ora mostrare come la Pivotazione modifica il MEG e comprendere quale tipo di effetto ha la Pivotazione degli elementi sull'algebra del MEG, ovvero sulle trasformazioni di matrici. In particolare, analizziamo come l'introduzione di permutazioni di righe e/o colonne influenzi il MEG e la relativa fattorizzazione LU associata alla matrice di partenza del sistema lineare.

© Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 9002752130 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

Osserviamo come scambiare fra loro la riga i e la riga j di una matrice equivalga a moltiplicare a sinistra di A per una matrice di permutazione del tipo che abbiamo riportato di seguito

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & 0 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di permutazione P è la matrice identità con tutti uno sulla diagonale principale e zero altrove, con una sola eccezione: l'elemento di posizione ii, che era uno, è stato spostato in posizione ij, ovvero riga i-esima e colonna j-esima; simmetricamente, l'elemento di posizione jj è stato spostato in elemento ji. In questo modo, si formano due 1 fuori della diagonale principale, in corrispondenza dei quali abbiamo ora due zeri sulla diagonale principale. Questa matrice P si chiama matrice di permutazione ed è quella che permette, una volta applicata ad una matrice A, di scambiare fra loro le righe i e j. Se infatti moltiplichiamo una matrice A a sinistra per questa matrice di permutazione P, l'effetto è quello di scambiare nella matrice A la riga i-esima con la riga j-esima.
Vediamo come si modifica il MEG, utilizzando questa matrice di permutazione, per esempio, nel caso della Pivotazione parziale. Indichiamo con $P^{(k)}$ la matrice di permutazione al passo k. Abbiamo visto che con la tecnica del pivoting (o pivotazione) al passo k faremo degli scambi opportuni fra righe. Dunque, partiamo dalla matrice A, applichiamo una prima permutazione opportuna $P^{(1)}$ e poi applichiamo la matrice $M^{(1)}$, che è la matrice dei moltiplicatori di Gauss. Quello che troviamo è la nuova matrice $A^{(2)}$ del MEG. A questo punto, applichiamo la matrice $P^{(2)}$ e poi $M^{(2)}$ e troviamo $A^{(3)}$ del MEG. Analogamente e in maniera ricorsiva, continuiamo fino alla fine, fino a quando all'ultima matrice trovata, cioè la $A^{(n-1)}$, applichiamo la permutazione $P^{(n-1)}$ e i moltiplicatori $M^{(n-1)}$ e troviamo la matrice finale $A^{(n)}$, che abbiamo indicato con U

$$U = M^{(n-1)}P^{(n-1)} \dots M^{(1)}P^{(1)}\, A.$$

Se adesso poniamo P uguale al prodotto di queste matrici di permutazione, in questo ordine,

$$P = P^{(n-1)} \dots P^{(1)},$$

otteniamo che la nuova matrice L del MEG (tramite la fattorizzazione) è

$$L = P\left(M^{(n-1)}P^{(n-1)} \dots M^{(1)}P^{(1)}\right)^{-1}.$$

Di conseguenza, il prodotto LU risulta

$$LU = PA.$$

Dunque, abbiamo verificato come l'applicazione del MEG con la tecnica di Pivotazione, almeno nella sua versione con Pivotazione parziale (per righe), comporti una modifica del risultato. In tal caso, la relazione $A = LU$ diventa $PA = LU$, dove P rappresenta una matrice di permutazione che tiene conto dell'effetto complessivo di tutte le permutazioni effettuate sulle righe della matrice iniziale A.
Pertanto, è possibile risolvere il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ non utilizzando la fattorizzazione $A = LU$, ma la fattorizzazione $PA = LU$. Se, dunque, vogliamo risolvere

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},$$

e poiché

© Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 9002752130 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

$$PA = LU,$$
abbiamo
$$PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b},$$
e quindi
$$LU\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c},$$
in cui abbiamo ridefinito il un nuovo termine noto $P\boldsymbol{b}$**,** chiamandolo $\boldsymbol{c}$**.** Dunque, dobbiamo risolvere il problema
$$LU\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}.$$
Questo sistema possiamo affrontarlo come visto prima, attraverso la risoluzione di sistemi triangolari, uno superiore nella U, l'altro inferiore nella L. Pertanto, a meno della permutazione, il numero di operazioni necessarie per risolvere il sistema di partenza è dell'ordine di $2n^2$. Abbiamo così osservato come l'applicazione del metodo del MEG con la tecnica di pivotazione per righe conduca a una fattorizzazione sostanzialmente analoga a quella precedente esaminata.

Approfondimento:
Vediamo adesso tre classi di matrici per le quali il MEG può essere condotto a termine senza problemi. Caratterizziamo, quindi, di seguito, le classi di matrici per le quali il MEG può essere completato regolarmente, ossia quelle che portano all'ultimo passo del MEG con tutti gli elementi pivotali diversi da zero. Queste sono:

- **le matrici a dominanza diagonale stretta:**
  Una matrice a dominanza diagonale stretta è una matrice per la quale ogni elemento diagonale ha valore assoluto maggiore strettamente della somma dei valori assoluti di tutti gli elementi sulla stessa riga, esclusi quelli sulla diagonale.
  $$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \qquad i = 1, \dots, n.$$
  Se questa condizione è verificata per ogni i, diremo che la matrice è a dominanza diagonale stretta. Il termine giustifica la proprietà: stiamo affermando che gli elementi diagonali "dominano" gli elementi extra-diagonali.
- **le matrici simmetriche definite positive (SDP)**
  Per le matrici simmetriche definite positive vale la proprietà
  $$A = A^T,$$
  che è la proprietà di simmetria. Inoltre, si ha
  $$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0 \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \qquad \boldsymbol{x} \neq 0.$$
- **le M-matrici**
  Una matrice A è una M-matrice se
  - $det(A) \neq 0$, A è un singolare;
  - $a_{ii} > 0\ \forall i$, tutti gli elementi sulla diagonale principale sono positivi;
  - $a_{ij} \leq 0$ per $i, j = 1, \dots, n$ e $i \neq j$, gli elementi al di fuori della diagonale principale sono non positivi.
  - A^{-1}, l'inversa della matrice A ha elementi tutti non negativi.

  Se una matrice A gode di queste proprietà, diremo che è una M-matrice.

© Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 9002752130 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it

Dunque, abbiamo visto tre categorie di matrici che garantiscono che il MEG sia un metodo a terminazione corretta, ossia che possa essere condotto a termine senza problemi.

© Università degli Studi eCampus - Via Isimbardi 10 - 22060 Novedrate (Co) - C.F. 9002752130 - Tel: 031.79421 - Fax: 031.7942501 - Mail: info@uniecampus.it