eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

# Risoluzione di sistemi lineari
## Lezione 2.6a

Tecniche di Pivotazione

# Risoluzione di sistemi lineari (Tecniche di Pivotazione)

- Risoluzione numerica di **sistemi di equazioni lineari**

➢ Quali possono essere gli **«intoppi» del MEG**

- ✓ **Criticità del MEG:** quando non può essere portato a termine.
- ✓ **Elementi Pivotali** del MEG
- ✓ **Tecniche di Pivotazione** (Parziale e Totale)
- ✓ Fattorizzazione **LU con Pivotazione** parziale

# Risoluzione di sistemi lineari (Criticità del MEG)

- Quando il MEG non può essere portato a termine?

$$A^{(k)} \to A^{(k+1)} \qquad k = 1, \ldots, n-1$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)} & i, j = k+1, \ldots, n \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} & i = k+1, \ldots, n \\ m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} & i = k+1, \ldots, n \end{cases}$$

- È essenziale che $\Rightarrow$ $\boxed{a_{kk}^{(k)} \neq 0, \quad \forall k}$

- $a_{kk}^{(k)}$ vengono chiamati **Elementi Pivotali**

- Nota: $a_{kk}^{(k)}$ NON coincidono con gli elementi diagonali di $A$

# Risoluzione di sistemi lineari (Elementi pivotali del MEG)

- Esempio: consideriamo una matrice $A$ non singolare

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = -6 \neq 0$$

- $A = A^{(1)} \to A^{(2)}$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{0} & -1 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \qquad \boxed{a_{22}^{(2)} = 0 \text{ ⚠}}$$

- $A^{(2)} \to A^{(3)} \Longrightarrow m_{32} = \dfrac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}}$ è una divisione per zero

# Risoluzione di sistemi lineari (I minori principali)

- Quali sono le proprietà di $A$ che assicurano $a_{kk}^{(k)} \neq 0, \quad \forall k$
- Tutti i minori principali di $A$ sono non nulli

- I minori principali sono i determinanti di tutte le sotto-matrici $A_i$ $i$-esime, prendendo le prime $i$ righe e $i$ colonne

**Minore principale di ordine $i$**

$$d_i = \det(A_i)$$

$$d_i \neq 0, \quad \forall i \leq n$$

- Esempio

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_3) = -6 \neq 0$$

$$A_1 = (1) \Rightarrow \det(A_1) = 1 \neq 0$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_2) = 0$$

# Risoluzione di sistemi lineari (Tecniche di Pivotazione)

- Esistono delle categorie di matrici che hanno $d_i \neq 0, \ \forall i \leq n$

- Modificare il MEG per matrici generiche che a priori $d_i = 0,$

$\Downarrow$

- **Tecniche di Pivotazione:** servono per <u>garantire</u> che $a_{kk}^{(k)} \neq 0, \ \forall k$

**1. Pivotazione Parziale**

**2. Pivotazione Totale**