



**eCAMPUS**  
UNIVERSITÀ

**DiSTA**

**Corso: Analisi Numerica**

**Docente: Roberto Piersanti**

# **Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi**

## **Lezione 3.6a**

Metodi di Richardson



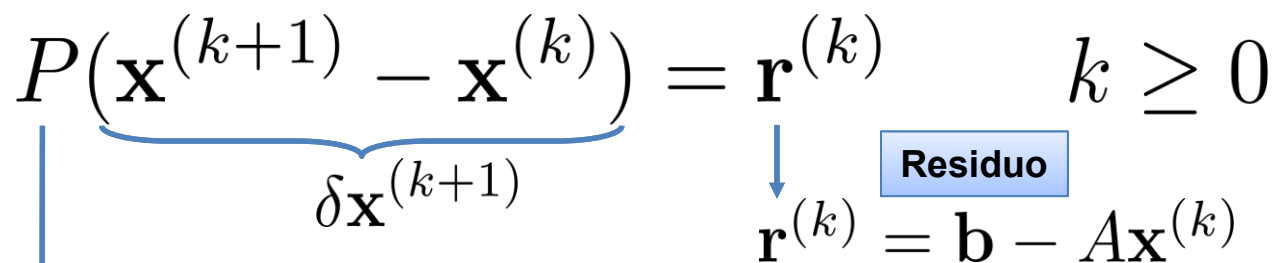
## Risoluzione di sistemi lineari: metodi iterativi

- **Metodi di tipo gradiente**
- Generalizzazione dei metodi di Jacobi, Gauss-Seidel, SOR
  - ✓ **Metodo di Richardson**
  - ✓ **Metodo di Richardson dinamico**

## Risoluzione di sistemi lineari (quadro generale)

➤ Abbiamo visto la formula generale dei metodi iterativi

$$P(\underbrace{\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}}_{\delta \mathbf{x}^{(k+1)}}) = \mathbf{r}^{(k)} \quad k \geq 0$$



Residuo

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$$

Precondizionatore  $P$

Metodo iterativo

- **Jacobi:**  $P_J = D$
- **GS:**  $P_{GS} = D + E$
- **SOR:**  $P_{SOR} = (D + \omega E)/\omega$

Matrice di Iterazione

$$B = I - P^{-1}A$$

$$\rho(B) < 1$$

Raggio spettrale

## Risoluzione di sistemi lineari (metodo di Richardson)

- Metodo di Richardson introduce un parametro  $\alpha$

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha \mathbf{r}^{(k)} \quad k \geq 0$$

- **Parametro di accelerazione**  $\alpha$  moltiplica il residuo

Matrice di iterazione del metodo di Richardson

$$R_\alpha = I - \alpha P^{-1} A$$

$$\alpha = 1 \longrightarrow B = R_1 = I - P^{-1} A$$

## Risoluzione di sistemi lineari (il parametro $\alpha$ )

- Richardson: un'estensione dei metodi classici (Jacobi, GS, SOR)

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha \mathbf{r}^{(k)} \quad k \geq 0$$

- $\alpha$  per ottenere una **convergenza più rapida** possibile

**Determinare il parametro  $\alpha$**



**Analisi di convergenza**

## Risoluzione di sistemi lineari (convergenza)

- Gli autovalori  $\lambda_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) della matrice di iterazione  $R_\alpha$

$$R_\alpha = I - \alpha P^{-1}A \longleftrightarrow \lambda_k = 1 - \alpha\mu_k$$

- $\mu_k$  è il generico autovalore di  $P^{-1}A$
- Per garantire la convergenza del metodo di Richardson

$$\rho(R_\alpha) = \max_k |\lambda_k| < 1 \longrightarrow |\lambda_k| = |1 - \alpha\mu_k| < 1$$

- Nell'ipotesi in cui  $\mu_k \in \mathbb{R}^+$  si può verificare

$$0 < \alpha < \frac{2}{\mu_{max}}$$