eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistemi lineari
Lezione 2.5a

La Fattorizzazione LU

Risoluzione di sistemi lineari (La Fattorizzazione LU)

- Risoluzione numerica di **sistemi di equazioni lineari**

- Il metodo di fattorizzazione LU

  ✓ **Il metodo di eliminazione di Gauss** come fattorizzazione

  ✓ Fattorizzazione LU (**costruzione algebrica di L** ed **U**)

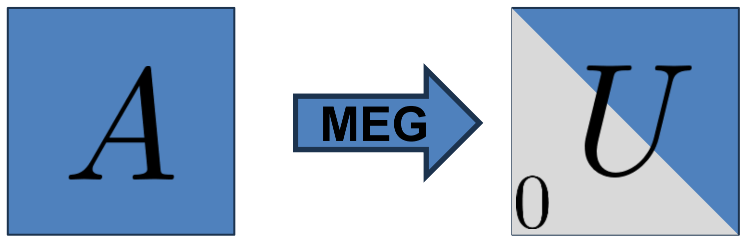
  ✓ **Vantaggi** della fattorizzazione LU

  ✓ **Costo computazionale** della LU (#operazioni)

Risoluzione di sistemi lineari (MEG come fattorizzazione)

- il metodo di eliminazione di Gauss (**MEG**) è un metodo diretto

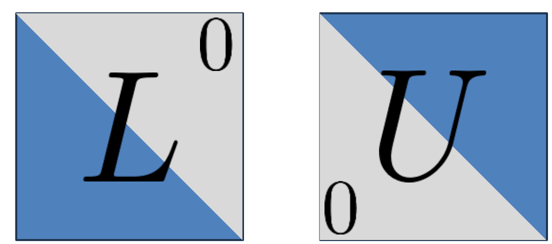
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad\qquad U\mathbf{x} = \mathbf{f}$$



- Il MEG può essere visto come un metodo di fattorizzazione della A

$$\boxed{A = LU}$$

- L è una matrice triangolare inferiore
- U è una matrice triangolare superiore



Risoluzione di sistemi lineari (MEG come fattorizzazione)

- Il MEG visto come fattorizzazione

$$A = LU$$

- La matrice U è ottenuta dopo $n-1$ trasformazioni del MEG

$$U = A^{(n)}$$

- La matrice L è una triangolare inferiore con $L_{ii} = 1 \quad \forall i$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

- $m_{21}, \dots, m_{n1}, \dots, m_{n,n-1}$ sono i moltiplicatori generati dal MEG

Risoluzione di sistemi lineari (costruire la matrice L)

- Per il processo di costruzione della matrice L, introduciamo $\forall k$

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \boxed{0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -m_{k+1,k} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -m_{n,k} & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I - \mathbf{m}_k \mathbf{e}_k^T$$

Colonna k-esima

- $M^{(k)}$, una **matrice triangolare inferiore** con:
  - Elementi diagonali uguali a 1: $M_{ii}^{(k)} = 1, \forall i$
  - Elementi sotto la diagonale uguali a 0**, tranne la colonna k-esima**
  - $m_{k+1,k}, \dots, m_{n,k}$ sono i moltiplicatori del MEG

Risoluzione di sistemi lineari (MEG come fattorizzazione LU)

- Utilizzando le matrici di trasformazione $M^{(k)}$, si può verificare che il **MEG** equivale ad applicare ad A la successione di matrici $M^{(k)}$

$$M^{(n-1)}M^{(n-2)}\ldots M^{(k)}\ldots M^{(1)}A = U$$

- Ridefinendo $M = M^{(n-1)}M^{(n-2)}\ldots M^{(k)}\ldots M^{(1)}$

$$\Downarrow$$

$$MA = U$$

- Definendo L come l'inversa di M

$$L = M^{-1} \Rightarrow L^{-1}A = U$$

- Pre-moltiplicando a sx e dx per L abbiamo $\cancel{LL^{-1}}A = LU$