METODI NUMERICI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Il metodo di Heun e la proprietà di assoluta stabilità)

Nelle lezioni precedenti sono stati introdotti diversi metodi numerici per la risoluzione delle equazioni differenziali ordinarie (EDO). In particolare, sono stati esaminati il metodo di Eulero in avanti (esplicito) e all'indietro (implicito), il metodo del punto medio e il metodo di Crank-Nicolson. In questa lezione viene presentato un ulteriore metodo, il quinto della serie, noto come metodo di Heun. Si tratta di un metodo ad un solo passo, esplicito e del secondo ordine. Successivamente, forniremo una breve sintesi dei metodi finora introdotti, al fine di richiamare l'attenzione sulle notazioni utilizzate, per poi avviare la discussione riguardo al comportamento di tali metodi in relazione alla stabilità e, successivamente, alla convergenza.

Per derivare il metodo di Heun si parte dal metodo implicito di Crank-Nicolson (CN), trasformandolo successivamente in una forma esplicita. A tal fine, si utilizza in modo opportuno il metodo di Eulero in avanti (EA), un metodo esplicito ad un solo passo.

Ricordiamo la formula del metodo di CN

$$\frac{u_{k+1}-u_k}{h}=\frac{1}{2}[f(x_k,u_k)+f(x_{k+1},u_{k+1})],$$

dove, per trovare la soluzione numerica u_k, si considera il rapporto incrementale $\frac{u_{k+1}-u_k}{h}$ e lo si esprime come una combinazione lineare, con coefficiente $\frac{1}{2}$, dei valori di f nei punti x_k, u_k e x_{k+1}, u_{k+1}. Questo metodo è classificato come ad un solo passo, in quanto consente di calcolare la soluzione u_{k+1} a partire dalla soluzione u_k, senza la necessità di utilizzare i valori precedenti u_{k-1}, u_{k-2} e così via. Tuttavia, si tratta di un metodo implicito che, come discusso nelle lezioni precedenti, comporta la risoluzione, ad ogni passo k, di un'equazione non lineare nell'incognita u_{k+1}.

Per trasformare il metodo in una forma esplicita, è possibile sostituire il termine u_{k+1} all'interno della funzione in $f(x_{k+1},u_{k+1})$ - che è responsabile del carattere implicito dello schema CN - con un'espressione esplicita. Ad esempio, si può assumere che u_{k+1} sia approssimato mediante un singolo passo del metodo di EA, che è di natura esplicita

$$u_{k+1}=u_k+hf(x_k,u_k).$$

Sappiamo che, procedendo in questo modo, si introduce un errore proporzionale a h. Tuttavia, poiché tale errore compare nel termine $\frac{u_{k+1}-u_k}{h}$, il contributo $hf(x_k,u_k)$ risulterà a sua volta moltiplicato per h, consentendo di ottenere complessivamente un metodo del secondo ordine. Questa rappresenta una spiegazione di natura euristica, la cui validità sarà confermata dalle analisi teoriche che verranno sviluppate in seguito.

Lo schema che ricaviamo è dunque il seguente

$$\frac{u_{k+1}-u_k}{h}=\frac{1}{2}\left[f(x_k,u_k)+f\big(x_{k+1},u_k+hf(x_k,u_k)\big)\right].$$

La sostituzione del termine u_{k+1} con $u_k+hf(x_k,u_k)$ ha trasformato il metodo, originariamente implicito a causa della presenza di u_{k+1} , in un metodo esplicito. Lo schema risultante rimane ad un solo passo, poiché u_{k+1} può essere calcolato esclusivamente in funzione del valore u_k. Inoltre, il metodo così ottenuto è di secondo ordine rispetto al passo h.

Osserviamo il comportamento del metodo di Heun per il seguente problema di Cauchy

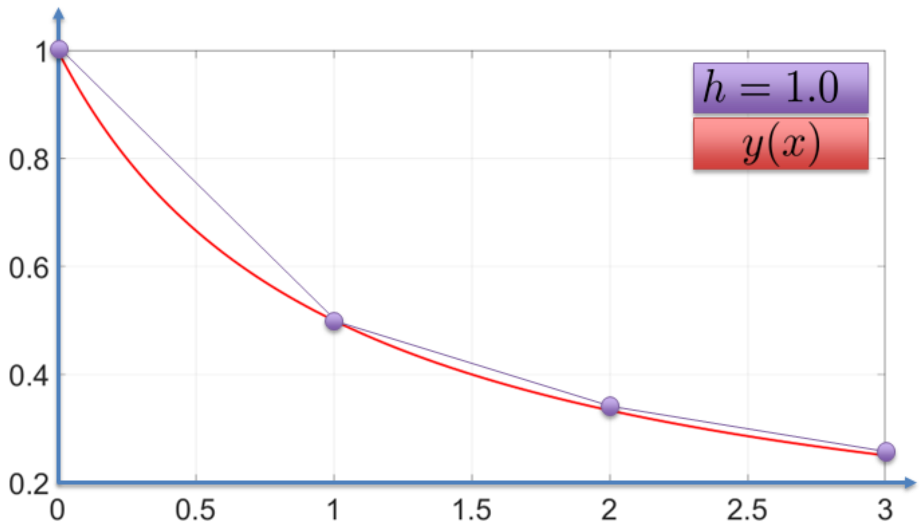

Figura 1: Grafico dei valori numerici ottenuti mediante il metodo di Heun per un passo di discretizzazione h=1, confrontati con la soluzione esatta $y(x)$.

$$\begin{cases} y'(x) = -y^2 & x \in (0,3] \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

che ha soluzione esatta

$$y(x) = \frac{1}{x+1}.$$

La Figura 1 mostra i valori numerici ottenuti mediante il metodo di Heun per un passo relativamente ampio, $h = 1$, confrontati con la soluzione esatta. Come si può osservare, vi è un'eccellente concordanza tra la soluzione numerica e quella esatta.

Analizzeremo ora l'andamento dell'errore al variare del passo h, mettendo in evidenza come, al diminuire di h, l'errore si riduca in maniera significativa. Ci attenderemo una convergenza del secondo ordine. In particolare, dimezzando il valore di h, l'errore si riduce di un fattore approssimativamente pari a quattro.

Il comportamento dell'errore per il metodo di Heun, in questo problema specifico, è riportato nella seguente tabella

Passo di discretizzazione h	Errore E
0.5	*0.0208*
0.25	*0.0054*
0.125	*0.0013*
0.0625	*0.0003*

L'errore di approssimazione in questo caso è espresso come il massimo errore commesso considerando tutti nodi

$$E = \max_{k=0,\dots,n} |y_k - u_k| = \max_{k=0,\dots,n} \left|\frac{1}{x_k+1} - u_k\right|.$$

Anche in questo caso, osserviamo che al dimezzarsi di h, l'errore si riduce di un fattore pari a circa quattro. Di conseguenza, l'errore segue un comportamento quadratico. Questo conferma che per il metodo di Heun l'errore è di ordine $O(h^2)$.

Si tratta, in questo caso, di un'analisi di tipo sperimentale-numerico, in quanto si osserva il comportamento del metodo in un caso specifico. Tuttavia, la teoria confermerà questa tendenza anche nel caso generale.
Il metodo di Heun appena introdotto è un metodo esplicito del secondo ordine che può essere impiegato in modo autonomo. Tuttavia, esso può anche essere utilizzato per l'inizializzazione del metodo del punto medio (PM), il quale è un metodo a due passi. Si ricorda che, al momento dell'introduzione del metodo del PM, è stato evidenziato come, oltre al valore iniziale u_0, sia necessaria un'ulteriore condizione iniziale u_1. In effetti, per poter applicare correttamente il metodo del punto medio, è indispensabile disporre di due valori iniziali, u_0 e u_1, poiché lo schema si fonda sull'impiego di due passi precedenti

$$u_{k+1} = u_{k-1} + 2hf(x_k, u_k) \qquad k = 1, \dots, n-1.$$

Tuttavia, il valore u_1 non può essere determinato dal metodo del punto medio stesso, ma deve essere calcolato tramite un metodo esterno. A tal fine, si può utilizzare il metodo di Heun, in quanto abbiamo appena visto che è un metodo del secondo ordine. È infatti necessario che il metodo esterno fornisca un valore iniziale u_1 con accuratezza del secondo ordine, affinché la qualità della soluzione prodotta dal metodo del punto medio - anch'esso del secondo ordine - sia mantenuta. In altre parole, è opportuno che u_1 venga calcolato con una precisione coerente con l'ordine del metodo che lo utilizzerà.
Esaminiamo ora come applicare effettivamente il metodo del PM, utilizzando il metodo di Heun. Per farlo, è utile ricordare le formule del metodo del PM

$$u_{k+1} = u_{k-1} + 2hf(x_k, u_k) \qquad k = 1, \dots, n-1,$$

dove, il valore minimo di k utilizzabile è $k = 1$. In corrispondenza di $k = 1$ troviamo u_2. Per trovare u_2 abbiamo, quindi, bisogno di due valori diversi u_0 (che è noto dalla condizione iniziale) e u_1 (che è incognito). In particolare, u_1 verrà calcolato utilizzando un passo del metodo di Heun

$$u_0 = y_0 \qquad\qquad u_1 = u_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, u_0) + f\big(x_1, u_0 + hf(x_0, u_0)\big)\right],$$

dove l'espressione data per u_1 è esattamente la relazione, per passare da u_0 a u_1, fornita dallo schema di Heun. L'intero termine di destra nella relazione per u_1 dipende esclusivamente dai nodi x_0, x_1 e del valore u_0, che sono tutti valori noti. Pertanto, è possibile utilizzare tali informazioni per determinare effettivamente il valore di u_1.
Ora, forniremo una rapida sintesi dei metodi finora introdotti, al fine di richiamare l'attenzione sulle notazioni utilizzate, per poi avviare la discussione sul comportamento di questi metodi in relazione alla cosiddetta stabilità.
Vediamo dunque di ricordare brevemente tutti i metodi visti finora per la risoluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f\big(x, y(x)\big) & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0 & x_0 \in I \end{cases}.$$

Abbiamo introdotto il metodo di Eulero in avanti (EA)

$$\text{EA:} \quad \frac{u_{k+1} - u_k}{h} = f(x_k, u_k) \qquad k = 0, \dots, n-1,$$

il quale è un metodo a un passo, esplicito e di ordine 1.
Abbiamo poi introdotto il metodo di Eulero all'indietro (EI)

$$\text{EI:} \quad \frac{u_{k+1} - u_k}{h} = f(x_{k+1}, u_{k+1}) \qquad k = 0, \dots, n-1,$$

il quale è un metodo a un passo, implicito e di ordine 1.
Siamo poi passati al metodo di Crank-Nicolson (CN)

$$\text{CN:} \quad \frac{u_{k+1}-u_k}{h} = \frac{1}{2}[f(x_{k+1},u_{k+1}) + f(x_k,u_k)] \qquad k = 0,\dots,n-1,$$

il quale è un metodo a un passo, implicito e di ordine 2.
Abbiamo poi visto il metodo del punto medio (PM)

$$\text{PM:} \quad \frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2h} = f(x_k,u_k) \qquad k = 1,\dots,n-1,$$

il quale è un metodo a due passi, esplicito e di ordine 2.
Infine, in questa lezione abbiamo presentato il metodo di Heun

$$\text{Heun:} \quad \frac{u_{k+1}-u_k}{h} = \frac{1}{2}\left[f(x_k,u_k) + f\big(x_{k+1},u_k + hf(x_k,u_k)\big)\right] \qquad k = 0,\dots,n-1,$$

il quale è un metodo a un passo, esplicito e di ordine 2.
Questa rappresenta una prima famiglia di metodi numerici che ci permette di introdurre i concetti di stabilità e convergenza, nonché di osservare come questi caratterizzino effettivamente i diversi metodi. Intuitivamente, possiamo affermare che un metodo numerico è stabile se fornisce soluzioni limitate, la cui sensibilità rispetto ai dati sia paragonabile a quella del problema di Cauchy rispetto ai dati iniziali. Un metodo è invece convergente quando la soluzione numerica tende alla soluzione esatta al diminuire del passo h, ovvero quando h tende a zero.
Iniziamo ora ad introdurre il concetto di stabilità. In particolare, discuteremo inizialmente della stabilità assoluta di un metodo numerico. Consideriamo un caso particolare di problema di Cauchy, noto come problema modello

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) & 0 < x < \infty \\ y(0) = 1 \end{cases},$$

dove $\lambda < 0$. Osserviamo che vi sono diverse novità rispetto agli esempi trattati fino ad ora. In primo luogo, l'intervallo che stiamo considerando è illimitato. Inoltre, il problema che stiamo affrontando è particolarmente semplice, in quanto si tratta di un problema lineare e autonomo. La soluzione esatta, dato il valore iniziale $y_0 = 1$, è espressa dalla formula

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Questo è, evidentemente, un problema molto semplice. Non vi è alcuna necessità di ricorrere alla soluzione numerica, poiché disponiamo della soluzione esatta. Tuttavia, si tratta di un problema che offre l'opportunità di fare considerazioni approfondite sulla stabilità dei metodi.
Si noti che abbiamo scelto $\lambda < 0$. Questo implica che la soluzione esatta $y(x) = e^{\lambda x}$ tende a zero quando x tende all'infinito, ovvero

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = 0.$$

La Figura 1 mostra un esempio di soluzione del problema modello per $\lambda = -0.5$. Come si può osservare, la soluzione tende a zero: si tratta di una funzione esponenziale decrescente che converge a zero molto rapidamente. È interessante notare che, al crescere in valore assoluto di λ, la soluzione decresce ancor più rapidamente. Ad esempio, per $\lambda = -1$, la soluzione esatta tende a zero in modo ancora più veloce. Se considerassimo $\lambda = -2$, la soluzione convergerebbe rapidamente a zero.
Per valutare la stabilità dei metodi numerici, ci interessa osservare il comportamento dei nostri metodi nell'approssimazione delle soluzioni di questo problema modello. In particolare, desideriamo analizzare come i metodi numerici si comportano quando x_k diventa molto grande, ovvero, al limite, quando x_k che tende a $+\infty$

$$x_k \to +\infty.$$

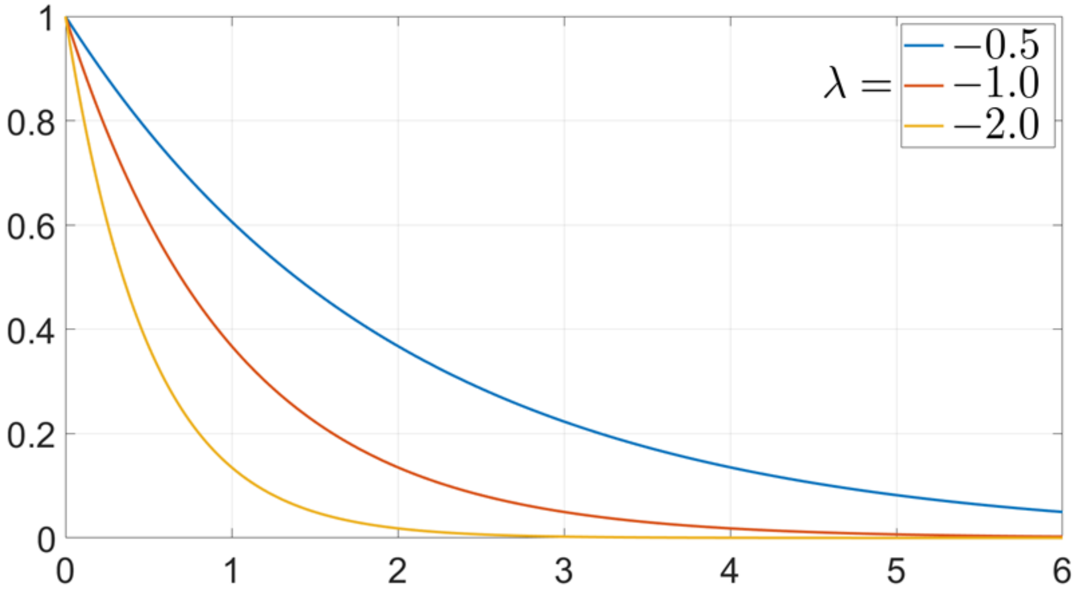

Figura 2: Esempi di soluzione del problema modello per $\lambda = -0.5$, $\lambda = -1$ e $\lambda = -2$.

Pertanto, siamo interessati ad analizzare il comportamento delle soluzioni numeriche su intervalli molto ampi, al fine di verificare se i metodi numerici siano in grado di riprodurre il comportamento asintotico della soluzione esatta, che tende a zero.
Un metodo numerico viene definito assolutamente stabile (non solo stabile, ma assolutamente stabile) se, applicato al problema modello $y'(x) = \lambda y(x)$, è in grado di produrre una soluzione numerica
$$\{u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots\},$$
che soddisfi la condizione
$$\lim_{x_k \to \infty} u_k = 0.$$
Se tale condizione è soddisfatta, il metodo produce una soluzione numerica che, all'infinito, si comporta come la soluzione esatta del problema modello, e pertanto il metodo viene definito assolutamente stabile.
Siamo quindi interessati a verificare se i metodi finora introdotti siano assolutamente stabili. Alcuni di essi lo saranno, mentre altri no. Procediamo ora con l'analisi di ciascuno di essi, uno per uno.
Iniziamo con il metodo di EA, un metodo esplicito di primo ordine e a un passo. Applichiamo il metodo di Eulero in avanti all'equazione $y'(x) = \lambda y(x)$, ottenendo la seguente espressione
$$\frac{u_k - u_{k-1}}{h} = \lambda u_{k-1} \qquad k \geq 1.$$
Possiamo risolvere analiticamente questo problema, vista la estrema semplicità dell'equazione da cui siamo partiti, ottenendo
$$u_k = (1 + h\lambda)u_{k-1} \qquad u_0 = 1,$$
dove abbiamo isolato a destra u_k e raccolto a fattore comune a sinistra u_{k-1}. Questa relazione si può applicare ricorsivamente
$$u_{k-1} = (1 + h\lambda)u_{k-2} \qquad u_{k-2} = (1 + h\lambda)u_{k-3},$$
ottenendo

$$u_k = (1+h\lambda)u_{k-1} = (1+h\lambda)(1+h\lambda)u_{k-2} = (1+h\lambda)(1+h\lambda)(1+h\lambda)u_{k-3} = (1+h\lambda)^3 u_{k-3},$$

fino ad arrivare al passo k in cui $u_0 = 1$

$$u_k = (1+h\lambda)^k u_0 = (1+h\lambda)^k,$$

ottenendo la relazione ricorsiva

$$u_k = (1+h\lambda)^k \qquad k = 0,1,\ldots.$$

La soluzione numerica u_k non è altro che la potenza $(1+h\lambda)^k$. Poiché abbiamo costruito esattamente la soluzione numerica, possiamo facilmente determinare quando questa soluzione numerica tenderà a zero al crescere di x_k verso l'infinito. Per garantire l'assoluta stabilità, è necessario che

$$\lim_{x_k \to \infty} u_k = 0,$$

e quindi dovrà essere

$$u_k = (1+h\lambda)^k \to 0 \iff |1+h\lambda| < 1,$$

ovvero, se u_k deve tendere a zero, questo sarà possibile se e soltanto se la base della potenza $(1+h\lambda)^k$ è in modulo minore di uno. Questo vuol dire che

$$-1 < 1 + h\lambda < 1 \iff h < \frac{2}{|\lambda|},$$

essendo $h > 0$ e $\lambda < 0$.

Abbiamo quindi determinato che, se h è sufficientemente piccolo, il metodo di EA è assolutamente stabile. In altre parole, EA fornisce una soluzione numerica che tende a zero quando x_k tende all'infinito. Pertanto, diremo che il metodo di EA è condizionatamente assolutamente stabile, utilizzando questo avverbio per indicare che il metodo non è sempre assolutamente stabile, ma lo è solo quando il passo di discretizzazione h è sufficientemente piccolo.

Andiamo ora a verificare quanto emerso dall'analisi di stabilità, considerando un esempio concreto di problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -3y(x) & 0 < x < x_f \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Si tratta di un problema modello, in cui il parametro λ assume il valore $\lambda = -3$. La condizione di stabilità

$$h < \frac{2}{|\lambda|},$$

ci dice che h deve essere minore di $\frac{2}{|\lambda|}$, ovvero (per $\lambda = -3$)

$$h < \frac{2}{3}.$$

Quindi, se h è strettamente minore di $2/3$, ci aspettiamo che la soluzione numerica tenda a zero per x_k che tende all'infinito; diversamente, ci aspettiamo che questo comportamento non si verifichi, ovvero che non si manifesti la condizione di assoluta stabilità.

Consideriamo, ad esempio, il caso in cui $h = 2/3$, ovvero il limite superiore della regione di stabilità (o della condizione di stabilità). In questo caso, ci aspettiamo che, per $h = 2/3$, il metodo di EA non risulti assolutamente stabile. Come si può osservare nella Figura 3(a), il metodo di EA, per $h = 2/3$, genera una soluzione che non tende a zero, ma che invece oscilla con ampiezza costante. In particolare, la soluzione oscilla tra i valori 1 e -1, senza mostrare un comportamento di decrescita verso lo zero.

Se h è maggiore di $2/3$, ad esempio $h = 0.7$, ci aspettiamo che la situazione peggiori ulteriormente. Infatti, in questo caso il metodo continua a produrre oscillazioni, ma tali oscillazioni risultano addirittura divergenti (si veda la Figura 3(b)). Si osserva, infatti, che non solo la soluzione numerica oscilla, ma che l'ampiezza di tali oscillazioni cresce progressivamente.

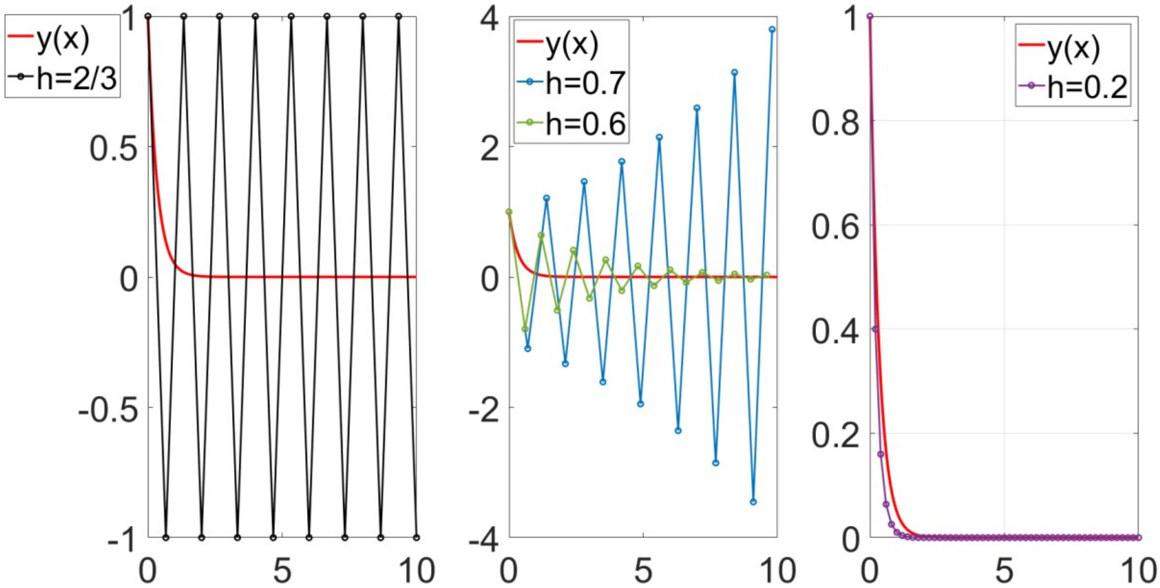

Figura 3: Confronto tra le soluzioni numeriche del problema modello, ottenute con il metodo di EA per diversi valori del passo h, e la soluzione esatta $y(x)$: (a) $h = 2/3$; (b) $h = 0.7$ e $h = 0.6$; (c) $h = 0{,}2$.

Nel caso in cui h sia effettivamente minore di $2/3$, ad esempio per $h = 0.6$, che è appena al di sotto di tale soglia, la situazione inizia a migliorare (si veda la Figura 3(b)). La soluzione numerica presenta ancora delle oscillazioni, ma queste tendono progressivamente a ridursi. Proseguendo nel calcolo, si osserva infatti che le oscillazioni si attenuano fino a scomparire, e la soluzione converge verso il valore zero.

Se poi consideriamo un valore di h ancora più piccolo, ci aspettiamo un comportamento numerico ancora più soddisfacente. Questo è confermato, ad esempio, scegliendo $h = 0.2$. In tale caso, la soluzione numerica si avvicina alla soluzione esatta in modo molto accurato. Per x_k che tende all'infinito, la soluzione numerica tende effettivamente a zero (si veda la Figura 3(c)).

Abbiamo dunque osservato che il metodo di EA è assolutamente stabile, ma solo a condizione che il passo h sia sufficientemente piccolo; non è quindi stabile per qualunque valore di h.

Un metodo che, al contrario, risulta essere assolutamente stabile per qualsiasi valore di h è il metodo di EI, che è un metodo implicito. Nel caso del problema modello, il metodo di EI conduce alla seguente relazione

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{h} = \lambda u_k \qquad k \geq 1.$$

Anche in questo caso possiamo costruire facilmente la soluzione. È sufficiente raccogliere a fattore comune u_k al primo membro, ottenendo

$$u_k(1 - h\lambda) = u_{k-1} \qquad u_0 = 1,$$

e procedendo in maniera ricorsiva come fatto prima, troviamo

$$u_k = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)^k \qquad k = 0,1,2, \dots .$$

Questa, dunque, è la soluzione numerica del problema modello ottenuta mediante il metodo di EI. È evidente che tale soluzione tenderà a zero per $k \to \infty$ se, e solo se,

$$\lim_{x_k \to \infty} u_k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{|1 - h\lambda|} < 1,$$

condizione che risulta sempre verificata per ogni valore di h, poiché $h > 0$ e $\lambda < 0$. Pertanto, il metodo di EI si definisce incondizionatamente assolutamente stabile, ovvero è assolutamente stabile indipendentemente dalla scelta del passo h.
Un altro metodo che gode della proprietà di essere incondizionatamente assolutamente stabile è il metodo di CN. Per il problema modello, il metodo di CN produce la seguente relazione

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{h} = \frac{\lambda}{2}[u_k + u_{k-1}].$$

Raccogliendo a fattor comune u_k a sinistra e u_{k-1} a destra, otteniamo

$$u_k\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right) = u_{k-1}\left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right),$$

da cui

$$u_k = u_{k-1}\frac{\left(1 + \frac{\lambda h}{2}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda h}{2}\right)}.$$

Ricordando che $h\lambda < 0$, deve verificarsi che

$$\lim_{x_k \to \infty} u_k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\left|1 + \frac{\lambda h}{2}\right|}{\left|1 - \frac{\lambda h}{2}\right|} < 1.$$

Questa relazione è verificata per ogni valore di h, dato che $h\lambda < 0$. Infatti, al numeratore avremo un valore assoluto che sarà sempre più piccolo del valore assoluto del denominatore. Di conseguenza, questa condizione è sempre vera per ogni valore di h. Pertanto, possiamo concludere che anche il metodo di CN è incondizionatamente assolutamente stabile.
Dunque, abbiamo visto che il metodo di EA, che è un metodo esplicito, è condizionatamente assolutamente stabile. Inoltre, i metodi di EI e CN, che sono metodi impliciti, sono assolutamente stabili senza alcuna condizione su h.
Il metodo di Heun, che è un metodo esplicito, sarà anch'esso condizionatamente stabile. Per il problema modello, il metodo di Heun produce la seguente relazione

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{h} = \frac{1}{2}[\lambda u_{k-1} + \lambda(u_{k-1} + h\lambda u_{k-1})].$$

Possiamo, quindi, esprimere u_k in funzione di u_{k-1}

$$u_k = \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}\right)u_{k-1} \qquad u_0 = 1,$$

da cui ricorsivamente, si ottiene

$$u_k = \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}\right)^k.$$

Allora, u_k tende a zero se la base di questa potenza ha un valore assoluto minore di 1

$$\lim_{x_k \to \infty} u_k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left|1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}\right| < 1.$$

Nell'incognita $h\lambda$, questa rappresenta una disequazione di secondo grado, dalla quale è possibile determinare le radici dell'equazione associata e successivamente studiare la parabola risultante per capire quando il valore assoluto di questa parabola è minore di uno. Quello che si trova è che

$$h < \frac{2}{|\lambda|},$$

che è esattamente quello che avevamo osservato nel caso del metodo di EA. Quindi, abbiamo verificato che anche il metodo di Heun è condizionatamente assolutamente stabile, proprio come il metodo di EA. Questi risultati ci porterebbero a concludere che tutti i metodi espliciti sono condizionatamente assolutamente stabili, ossia sono assolutamente stabili a condizione che venga imposta una limitatezza su h. Al contrario, tutti i metodi impliciti sono incondizionatamente assolutamente stabili, ovvero sono assolutamente stabili senza fare alcuna ipotesi su h. Tuttavia, questa regola generale non è valida. Non è infatti vero che tutti i metodi espliciti siano condizionatamente stabili e che tutti i metodi impliciti siano incondizionatamente stabili.

In particolare, se prendiamo in considerazione i metodi impliciti di tipo multipasso di ordine superiore a due (che non tratteremo in questo corso, ma che possiamo intuire come metodi che calcolano il valore u_{k+1} in funzione di u_k, u_{k-1}, ed eventualmente altri valori precedenti), questi non risultano assolutamente stabili senza alcuna condizione su h. i metodi impliciti di tipo multipasso di ordine superiore a due sono assolutamente stabili solo con una condizione su h.

Esistono anche metodi espliciti che sono incondizionatamente instabili, ovvero instabili in senso assoluto per ogni valore di h. Un esempio di questo tipo di metodo è il metodo del PM, che abbiamo introdotto nelle lezioni precedenti. Ricordiamo che, quando abbiamo analizzato il metodo del PM, avevamo osservato un comportamento oscillatorio divergente della soluzione. In effetti, il metodo del PM non è assolutamente stabile per nessun valore di h, il che significa che, indipendentemente dalla scelta del passo h, la soluzione numerica per il problema modello tende sempre a divergere.

Verifichiamo che il metodo del PM, che è un metodo esplicito a due passi, sia incondizionatamente instabile. Per il problema modello, il metodo del PM produce la seguente relazione

$$\frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{h} = \lambda u_k \qquad k \geq 1.$$

Tenendo conto del valore inziale u_0 del problema modello e inizializzando u_1 con il metodo di Heun, otteniamo

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = u_0 + \frac{h}{2}\big[f(x_0, u_0) + f\big(x_1, u_0 + hf(x_0, u_0)\big)\big] = \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}\right)u_0.$$

Se adesso andiamo a scrivere la relazione ricorsiva che lega fra loro i vari valori di u_k, troviamo

$$u_{k+1} - 2h\lambda u_k - u_{k-1} = 0.$$

Questa è un'equazione alle differenze che può essere risolta. Infatti, non si tratta di un'equazione differenziale, poiché non compaiono derivate prime, ma differenze tra valori numerici successivi. Pertanto, possiamo trovare l'equivalente dell'integrale generale anche per l'equazione alle differenze.

Ricordiamo che per le equazioni differenziali è possibile ricavare l'integrale generale, ossia la soluzione generale del problema differenziale, che corrisponde a infinite soluzioni. Per specificare una soluzione particolare, è necessario imporre, ad esempio, un dato iniziale risolvendo il problema di Cauchy. In questo caso, la situazione è assolutamente simmetrica: anziché trattare equazioni differenziali, ci troviamo a risolvere equazioni alle differenze. Il ragionamento, in questo caso, è molto più semplice, poiché l'intero processo è riportato su base algebrica.

Ripartiamo dall'equazione alle differenze appena ricavata

$$u_{k+1} - 2h\lambda u_k - u_{k-1} = 0,$$
e facciamo un'ipotesi di soluzione di tentativo, ovvero ipotizziamo che u_k soluzione dell'equazione, che non conosciamo, sia dalla forma
$$u_k = r^k,$$
dove r è una base incognita non nulla $r \neq 0$. Stiamo supponendo che la soluzione sia di tipo legge a potenza, ossia $u_k = r^k$. Questo non ci stupisce, poiché la soluzione esatta del problema modello è $y = e^{\lambda x}$, che è anch'essa di tipo legge a potenza con base e. Nel caso dell'equazione alle differenze, facciamo l'ipotesi che la soluzione numerica abbia anch'essa un comportamento simile, con la sola differenza che la base r è incognita. A tal fine, sostituendo $u_k = r^k$ nell'equazione alle differenze $u_{k+1} - 2h\lambda u_k - u_{k-1} = 0$, otteniamo
$$r^{k+1} - 2h\lambda r^k - r^{k-1} = 0,$$
da cui raccogliendo a fattore comune r^{k-1}
$$r^{k-1}\left(\frac{r^{k+1}}{r^{k-1}} - 2h\lambda r - 1\right) = 0,$$
e dividendo per r^{k-1}, si ricava la seguente equazione di secondo grado
$$r^2 - 2h\lambda r - 1 = 0.$$
Le due radici di questa equazione, che si chiamano radici caratteristiche, sono uguali a
$$r_{1,2} = h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}.$$
Pertanto, abbiamo trovato due soluzioni caratteristiche, dell'equazione alle differenze, r_1^k e r_2^k, dove r_1 e r_2 sono le radici dell'equazione che abbiamo generato. La soluzione generale u_k è quindi combinazione dei valori r_1^k e r_2^k
$$u_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k \qquad k \geq 2,$$
dove c_1 e c_2 sono costanti che possono essere determinate in base alle condizioni iniziali del problema. La soluzione generale u_k è una combinazione lineare $u_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k$ perché stiamo cercando una soluzione del tipo r^k e ne abbiamo trovate due possibili: r_1^k e r_2^k. Poiché l'equazione di partenza è un'equazione lineare e omogenea, ogni combinazione lineare di soluzioni è anch'essa una soluzione.
L'espressione
$$u_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k \qquad k \geq 2,$$
è la soluzione generale dell'equazione alle differenze e svolge lo stesso ruolo che l'integrale generale ha per l'equazione differenziale. Per determinare i coefficienti c_1 e c_2, è necessario imporre le condizioni iniziali, proprio come nel caso dell'integrale generale per le equazioni differenziali, dove si poteva ottenere una soluzione particolare specificando i dati iniziali. In questo caso i dati inziali sono u_0 e u_1
$$u_0 = 1 \qquad u_1 = 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2},$$
da cui
$$u_0 = 1 \implies c_1 + c_2 = 1,$$
poiché $u_0 = 1$ implica prendere $k = 0$ nella relazione $u_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k$. Inoltre,
$$u_1 = \left(1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}\right) \implies c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1 + h\lambda + \frac{h^2\lambda^2}{2}.$$
Abbiamo dunque trovato un sistema lineare nelle incognite c_1 e c_2

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 r_1 + c_2 r_2 = 1 + h\lambda + \dfrac{h^2\lambda^2}{2}. \end{cases}$$

Possiamo facilmente risolvere questo sistema lineare 2×2. La soluzione del sistema lineare è data da

$$c_1 = \frac{\left(1 + \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}\right)^2}{4\sqrt{h^2\lambda^2 + 1}} > 0, \qquad c_2 = 1 - c_1 < 0.$$

Osserviamo che non è tanto importante che i coefficienti c_1 e c_2 siano maggiori o minori di zero, ma ciò che è fondamentale è che siano diversi da zero. Infatti, se c_1 e c_2 sono diversi da zero, significa che entrambi i termini r_1^k e r_2^k contribuiscono in modo significativo alla soluzione. In altre parole, se c_1 e c_2 sono diversi da zero, entrambi i fattori r_1^k e r_2^k sono rilevanti nella formulazione finale della soluzione numerica.

Si può verificare che, per ogni $h > 0$ e $\lambda < 0$, deve verificarsi

$$0 < r_1(h\lambda) < 1 \qquad r_2(h\lambda) < -1$$

Essendo in particolare $c_2 \neq 0$, la soluzione

$$u_k = c_1 r_1^k + c_2 r_2^k,$$

non potrà tendere a zero quando k tende all'infinito, in quanto è presente il termine $c_2 r_2^k$, dove r_2 è un numero negativo per ogni valore di $h\lambda$. Non solo non tende a zero per $k \to \infty$, ma tende a oscillare e a divergere in valore assoluto.

Ad esempio prendendo

$$h = 1, \qquad \lambda = -1,$$

troviamo i seguenti valori

$$c_1 = \frac{\left(1 + \sqrt{h^2\lambda^2 + 1}\right)^2}{4\sqrt{h^2\lambda^2 + 1}} = 1.0303 \qquad c_2 = 1 - c_1 = -0.0303,$$

da cui

$$r_{1,2} = h\lambda \pm \sqrt{h^2\lambda^2 + 1} \implies r_1 = 0.4142, \qquad r_2 = -2.4142.$$

Dunque, abbiamo trovato che r_1 è positivo mentre r_2 è negativo ed è minore di -1.

La Figura 4 illustra il comportamento del metodo del PM in relazione a questo caso particolare del problema modello. In particolare, sono mostrati due termini della soluzione numerica: il primo, dato da $c_1 r_1^k$ (dove $0 < r_1 < 1$), e il secondo, che denomineremo soluzione spuria, dato da $c_2 r_2^k$ (dove $r_2 < -1$). È evidente che, per i valori di k pari, il termine $c_2 r_2^k$ fornisce un contributo positivo, mentre per k dispari fornisce un contributo negativo. Inoltre, quando k cresce, questo contributo in valore assoluto aumenta considerevolmente. Pertanto, la soluzione numerica risulta essere la somma di due termini: uno, $c_1 r_1^k$, che si comporta correttamente, e l'altro, $c_2 r_2^k$, associato alla seconda radice caratteristica, r_2, che rappresenta una soluzione numerica spuria. Quest'ultima presenta un comportamento oscillatorio e, di conseguenza, compromette completamente la validità della soluzione numerica.

In effetti, quando si combinano i due contributi, si ottiene naturalmente una soluzione u_k, la quale, al limite, sarà completamente dominata dalla soluzione spuria. Questo accade perché l'altra soluzione tende a zero e, pertanto, non fornisce più alcun contributo per k grandi. Di conseguenza, l'unico contributo significativo sarà quello della soluzione spuria. Pertanto, u_k risulterà non limitata, oscillante e tendente in valore assoluto all'infinito.

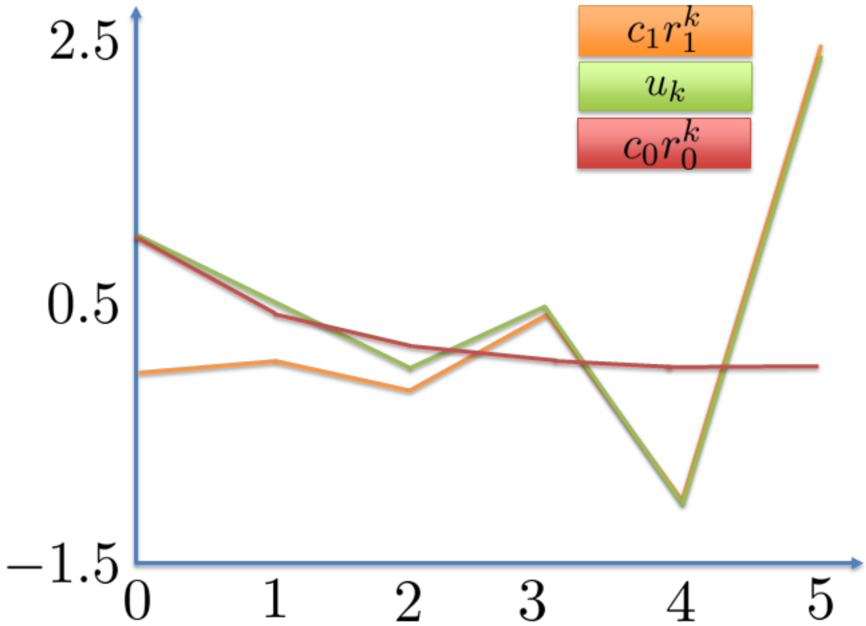

Figura 4: Comportamento del metodo del PM in relazione al problema modello. In particolare, sono mostrati i due termini della soluzione numerica u_k: il primo, dato da $c_1 r_1^k$ (dove $0 < r_1 < 1$), e il secondo $c_2 r_2^k$, associato alla seconda radice caratteristica.

In conclusione, abbiamo analizzato l'assoluta stabilità dei metodi numerici che abbiamo presentato per la risoluzione di EDO. Abbiamo osservato che un metodo numerico è assolutamente stabile se la soluzione numerica del problema modello, per x_k che tende all'infinito, tende a zero. Abbiamo esaminato metodi incondizionatamente stabili, come i metodi di EI e CN. Abbiamo inoltre considerato metodi condizionatamente stabili, come il metodo di EA e il metodo di Heun. Infine, abbiamo constatato che il metodo del PM non è assolutamente stabile per nessun valore di h, in quanto produce soluzioni spurie.