eCAMPUS UNIVERSITÀ | DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.3b

Relazione tra residuo ed errore e
Principi dei metodi iterativi

Risoluzione di sistemi lineari (metodi iterativi)

- **Obiettivo dei metodi iterativi:** generare una successione

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}} \Rightarrow \begin{array}{c} k = n \\ ||\mathbf{x}^{(n)} - \mathbf{x}|| \leq \epsilon \end{array}$$

- Come costruire dei metodi iterativi: **formula generale di splitting**

- Splitting = Scomposizione di A in

$$\boxed{A = P - N}$$

- Un’unica ipotesi: P sia non singolare

  $P,\ N$ sono arbitrarie

Risoluzione di sistemi lineari (formula generale iterativa)

- Considerando allora la scomposizione

$$A = P - N \qquad\qquad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

- Segue che

$$A\mathbf{x} = (P - N)\mathbf{x} = P\mathbf{x} - N\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\boxed{P\mathbf{x} = N\mathbf{x} + \mathbf{b}}$$

- Possiamo impostare il seguente processo iterativo:

Dato $\mathbf{x}^{(0)}$, si generi una successione $\{\mathbf{x}^{(k)}\}$ risolvendo

$$P\mathbf{x}^{(k)} = N\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b} \qquad k \geq 1$$

Risoluzione di sistemi lineari (la matrice di iterazione)

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$$

- Verifichiamo se tale metodo converge

$$P\mathbf{x}^{(k)} = N\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b} \qquad k \geq 1$$

Unica ipotesi: P non singolare

- L'errore al passo k è: $\mathbf{e}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}$
- Sottraendo membro a membro

$$P\mathbf{x} = N\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

$$-$$

$$P\mathbf{x}^{(k)} = N\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{e}^{(k)} = \underbrace{P^{-1}N}_{B}\mathbf{e}^{(k-1)}$$

Matrice di iterazione

$$B = P^{-1}N$$

Risoluzione di sistemi lineari (convergenza)

- Applicando in maniera ricorsiva la relazione $\mathbf{e}^{(k)} = B\mathbf{e}^{(k-1)}$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{e}^{(k)} = B^k \mathbf{e}^{(0)}$$

- Relazione che lega l'errore al passo k, $\mathbf{e}^{(k)}$ con l'errore iniziale $\mathbf{e}^{(0)}$

- Condizioni che garantiscono la convergenza $\forall \mathbf{x}^{(0)} \Rightarrow \forall \mathbf{e}^{(0)}$

$$\text{Convergenza } \forall \mathbf{x}^{(0)} \iff \lim_{k\to\infty} \mathbf{e}^{(k)} = 0$$

Risoluzione di sistemi lineari (condizione di convergenza)

- La condizione di convergenza

$$\mathbf{e}^{(k)} = B^k \mathbf{e}^{(0)} \quad + \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{e}^{(k)} = 0 \quad = \quad \boxed{\lim_{k\to\infty} B^k = 0}$$

- Tale condizione è vera se $\|B\| < 1$

- Si può verificare che

Raggio spettrale

Matrice di iterazione

$$\|B\| < 1 \iff \rho(B) < 1$$

<u>Condizione di convergenza di un metodo iterativo</u>
per la risoluzione di un sistema lineare è che
<u>il raggio spettrale della matrice di iterazione sia minore di uno</u>