RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI: METODI ITERATIVI (Esercizi di fine nucleo: parte 2)

- **Esercizio 1 – metodo del gradiente**
  Dato il sistema lineare simmetrico e definito positivo $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove
  $$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$
  eseguire tre iterazioni del metodo del gradiente (con residuo esatto), partendo da un vettore iniziale
  $$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
  ed utilizzando quattro cifre decimali.

- **Esercizio 2 – metodo del gradiente**
  Dato il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove
  $$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$
  eseguire due iterazioni con il metodo del gradiente, partendo da un vettore iniziale
  $$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
  utilizzando tre cifre decimali.

- **Esercizio 3 – metodo di Richardson**
  Dato il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove
  $$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 10 & -1 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix},$$
  eseguire due iterazioni del metodo di Richardson con $\omega = 0.1$, partendo da un vettore iniziale
  $$\boldsymbol{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
  ed utilizzando quattro cifre decimali. Calcolare il residuo e la differenza (in norma due) tra due iterate successive, ad ogni iterazione.

- **Esercizio 4 – metodo di Richardson**
  Dato il sistema $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove
  $$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$
  eseguire due iterazioni del metodo di Richardson con $\omega = 0.2$, partendo da un vettore iniziale

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

ed utilizzando tre cifre decimali. Calcolare la differenza (in norma due) tra due iterate successive, ad ogni iterazione.