



eCAMPUS
UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica

Lezione 4.5a

Consistenza, stabilità e convergenza dei problemi numerici



Fondamenti della matematica numerica

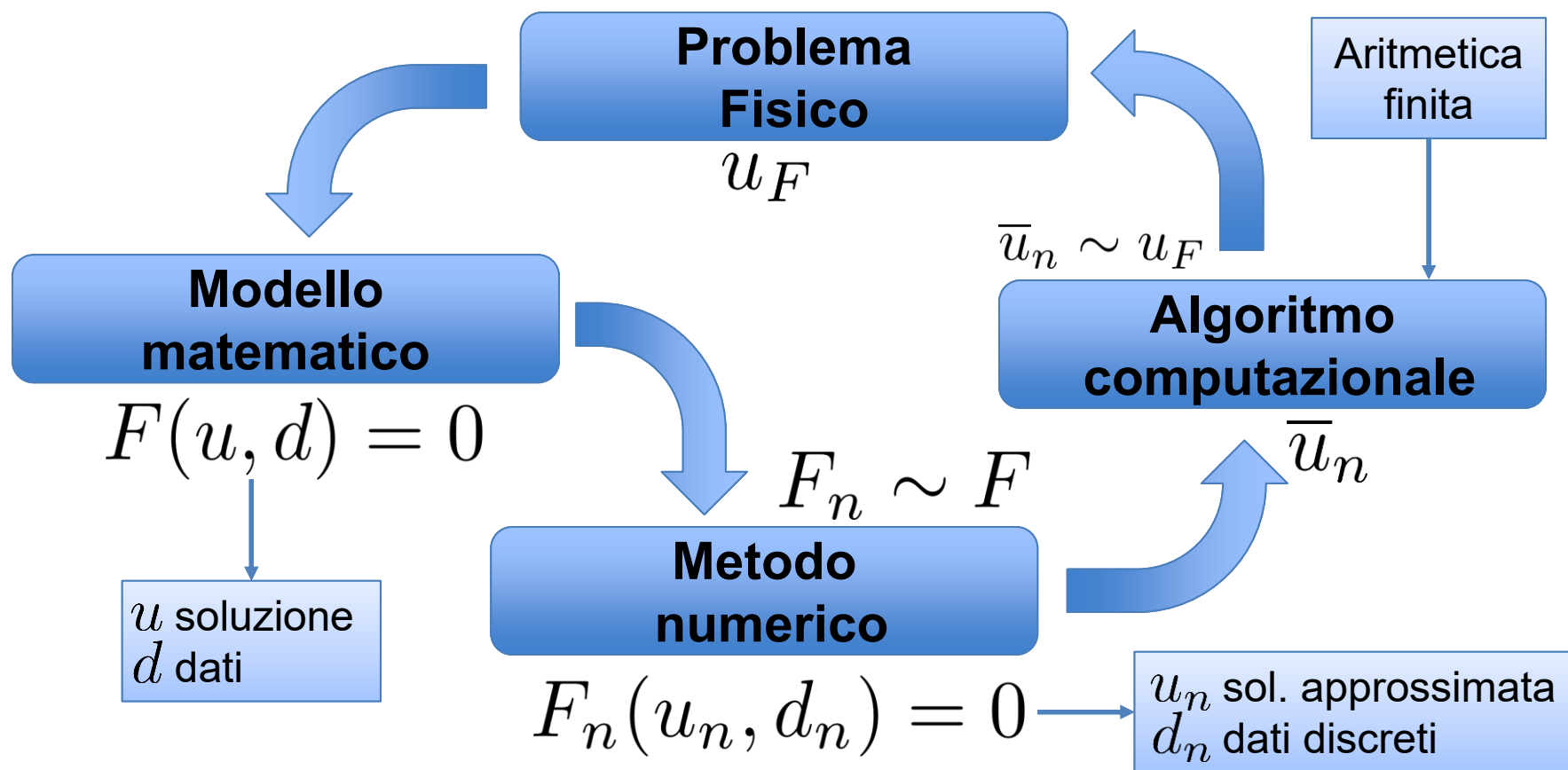
- **I concetti fondamentali del calcolo numerico:**

Stabilità, Condizionamento, Convergenza e Accuratezza

- ✓ **Quadro di riferimento** della matematica numerica
- ✓ Concetto di **convergenza**
- ✓ **Stabilità** e **Consistenza** di un problema
- ✓ **Numero di condizionamento**

Fondamenti della matematica numerica (quadro di riferimento)

➤ Quadro di riferimento del calcolo numerico



Fondamenti della matematica numerica (convergenza)

- **Obiettivo:** Ottenere una **soluzione approssimata** u_n che tenda a u

Convergenza $\longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$ u soluzione esatta

- n dimensione/complessità del problema numerico
- Il metodo numerico è una buona approx del modello matematico
- Si verifica che l'errore

$$e_n = u_n - u \longrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = 0$$

- Errore assoluto e relativo

assoluto

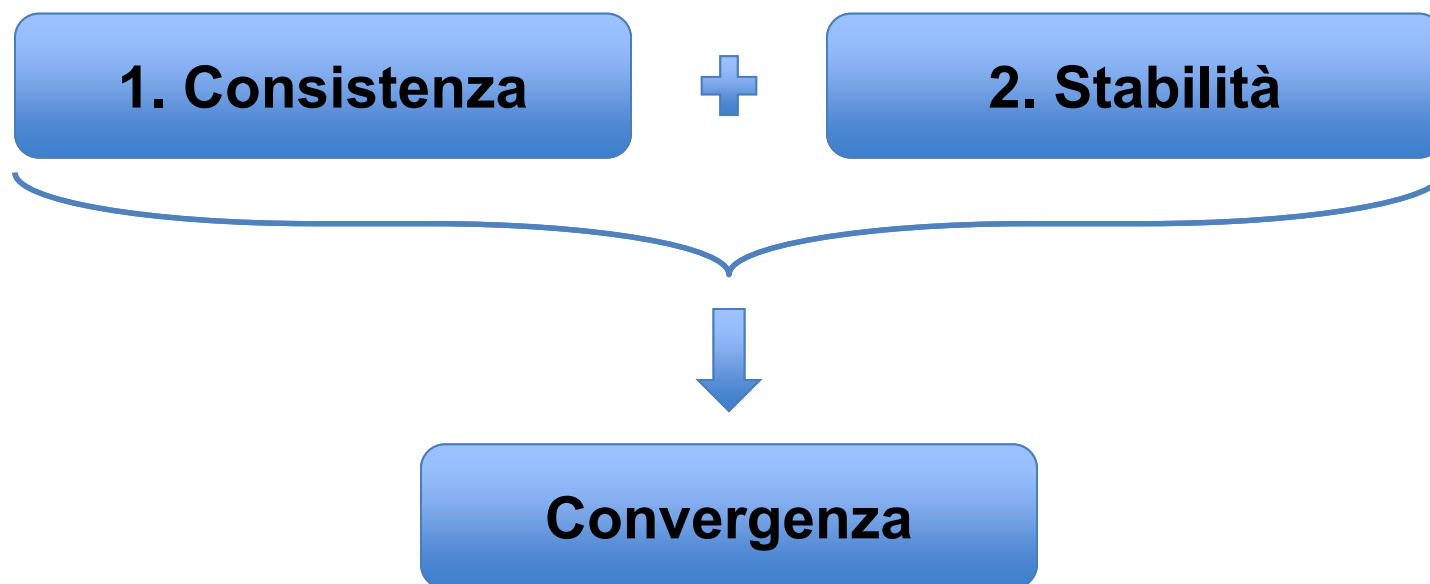
$$\|u_n - u\|$$

relativo

$$\frac{\|u_n - u\|}{\|u\|}$$

Fondamenti della matematica numerica (condizioni per la convergenza)

- Caratterizzare le condizioni per cui si abbia convergenza $u_n \rightarrow u$
- Necessario soddisfare **due proprietà del metodo numerico**



Fondamenti della matematica numerica (consistenza e stabilità)

- **Consistenza:** il metodo numerico è una «rappresentazione fedele» del problema matematico

$$F_n \sim F$$

- **Stabilità:** capacità di controllare la soluzione numerica in funzione dei dati



La soluzione numerica è controllabile tramite una costante che è indipendente da n

Fondamenti della matematica numerica (consistenza)

Consistenza: il metodo numerico è una «rappresentazione fedele» del problema matematico

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u, d) = 0$$

- Il metodo numerico è definito

$$F_n(u_n, d_n) = 0$$

Si sta richiedendo che la soluzione esatta u con i dati d soddisfi il problema numerico

- In generale $F_n(u, d) \neq 0$, ma si richiede che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (F_n(u, d) - F(u, d)) = 0$$

$$\text{HP: } F(u, d) = 0$$

$$F_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F$$

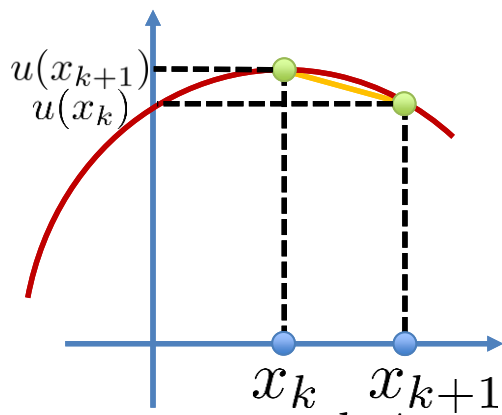
Fondamenti della matematica numerica (consistenza)

- **Esempio di metodo consistente:** approssimazione della derivata

$$\frac{du}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

Rapporto incrementale

- Approssimare $\frac{du}{dx}$ con un **rapporto incrementale in avanti**



Differenze finite

$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_k} \simeq \frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

- Approssima la $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x_k}$ con il coefficiente angolare della retta