RISOLUZIONE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (Integrali singolari e EDO non lineari del primo ordine omogenee)

In questa lezione proseguiamo l'analisi delle equazioni differenziali ordinarie (EDO) del primo ordine non lineari a variabili separabili. Alla fine della lezione precedente abbiamo esaminato un primo esempio, ovvero l'equazione della logistica. In questa lezione riprendiamo da tale esempio per estendere la discussione al caso generale. Inoltre, introdurremo il concetto di integrali singolari. Infine, nella parte finale della lezione, inizieremo a trattare le equazioni differenziali non lineari omogenee.

Nella lezione precedente abbiamo trattato l'equazione della logistica, la quale assume la seguente forma

$$y'(t) = \frac{K}{L} y(L-y),$$

dove y rappresenta la variabile dipendente, ossia la funzione incognita, che dipende dalla variabile indipendente t, che assume il significato di tempo. L'equazione della logistica costituisce un caso particolare di equazione a variabili separabili.

Vogliamo adesso esaminare la forma generale che assumono queste equazioni. In questa trattazione, senza perdere di generalità, utilizzeremo nuovamente il simbolo x per la variabile indipendente, in accordo con quanto fatto nel caso generale delle lezioni precedenti. Pertanto, le equazioni a variabili separabili presentano una forma del tipo

$$y'(x) = Q(x)R(y).$$

Osserviamo che il termine a destra, che rappresenta il prodotto di due funzioni continue Q e R, non dipende da y', pertanto l'equazione è ancora in forma normale. La funzione Q dipende solo da x, mentre R dipende esclusivamente da y. Questo è il motivo per cui tali equazioni vengono definite a variabili separabili. In altri termini, nel termine a destra, la dipendenza da x e quella da y sono separate. Assumeremo, per il momento, che R sia una funzione diversa da zero, ossia

$$R(y) \neq 0.$$

In questo caso esiste una procedura formale per la risoluzione di queste EDO. Coerentemente con quanto discusso nell'esempio specifico dell'equazione della logistica, inizieremo trattando i vari componenti dell'equazione in maniera formale. Successivamente, dimostreremo che esiste una giustificazione rigorosa per questa tecnica di risoluzione che illustreremo.

Partiamo riscrivendo l’equazione nella seguente forma

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = Q(x)R(y),$$

dove abbiamo esplicitato la derivata $y'(x)$ come $\frac{dy}{dx}$. Formalmente, si ricava

$$\frac{dy}{R(y)} = Q(x)dx.$$

Questa è una maniera formale di separare la dipendenza di y da quella di x: y è completamente a sinistra, mentre x è completamente a destra. Integrando ora entrambi i membri, ovvero calcolando le primitive a sinistra e a destra, otteniamo che

$$\int \frac{dy}{R(y)} = \int Q(x)dx + C,$$

dove C è una costante arbitraria che interviene ogniqualvolta si effettua un processo di integrazione. Dunque, abbiamo trovato che una primitiva della funzione $\frac{1}{R(y)}$ è uguale a una primitiva della funzione $Q(x)$, a meno di una costante C. È possibile fornire una dimostrazione rigorosa di questa uguaglianza, al fine di giustificare il procedimento che abbiamo mostrato, nel quale abbiamo trattato dx e dy come se fossero delle funzioni.

Vediamo ora come applicare questa procedura a esempi specifici per trovare la soluzione di equazioni a variabili separabili.

Partiamo da un esempio molto semplice

$$y' = xy.$$

Questa EDO è un esempio di equazioni e variabili separabili dove

$$Q(x) = x, \quad R(y) = y.$$

Questa è anche un'equazione lineare, e potremmo pensare di applicare la teoria che abbiamo sviluppato, nella lezione precedente, per trovare le soluzioni delle equazioni differenziali lineari omogenee. Tuttavia, a scopo didattico, useremo ora la tecnica introdotta per le equazioni differenziali non lineari a variabili separabili. Applicando quindi la tecnica di risoluzione delle equazioni differenziali a variabili separabili, otteniamo

$$\int \frac{dy}{y} = \int x dx + C.$$

Se y è maggiore di zero, la primitiva di $\frac{1}{y}$ è uguale al logaritmo, da cui

$$\log y = \frac{1}{2}x^2 + C,$$

dove $\frac{1}{2}x^2$ è la primitiva di x e C è la costante di integrazione. Da questa ultima relazione, ricaviamo che

$$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2}.$$

Questa è la soluzione che si ottiene usando la tecnica di risoluzione delle EDO a variabili separabili per l'equazione $y' = xy$.

Vediamo adesso un caso che è effettivamente non lineare. Consideriamo l'equazione

$$y' = x^2y^3.$$

Questa è una EDO certamente non lineare perché a destra abbiamo una funzione che dipende in maniera non lineare dalla y. Inoltre, è a variabili separabili perché abbiamo

$$Q(x) = x^2, \quad R(y) = y^3.$$

Andando quindi ad applicare la tecnica di risoluzione delle equazioni differenziali a variabili separabili, troviamo

$$\int \frac{dy}{y^3} = \int x^2 dx + C.$$

La primitiva di $\frac{1}{y^3}$ è $-\frac{1}{2y^2}$ (nell'ipotesi che y sia maggiore di zero e quindi in particolare y è diversa da zero, altrimenti non avremmo il diritto di dividere il termine di sinistra per y^3) e la primitiva di x^2 è $\frac{x^3}{3}$ a cui si somma la costante arbitraria C

$$-\frac{1}{2y^2} = \frac{x^3}{3} + C,$$

da cui si ricava che

$$y^2 = -\frac{3}{2(x^3 + 3C)}.$$

Questa espressione è valida nell'ipotesi in cui

$$x^3 + 3C < 0.$$

Pertanto, in questo caso, è necessario fare un'ulteriore ipotesi per garantire che questa rappresentazione abbia un significato ben definito.
Dunque, abbiamo visto come applicare la formula generale per le equazioni differenziali a variabili separabili su due esempi di equazioni di questo tipo, uno lineare e uno non lineare.
Introduciamo adesso il concetto di integrale singolare per equazioni di questa natura

$$y' = R(y)Q(x).$$

Se y_0 è una costante tale per cui

$$R(y_0) = 0,$$

allora $y = y_0$ soddisfa l'equazione $y' = R(y)Q(x)$. Infatti, se $y = y_0$ è una costante, abbiamo che la derivata prima y', che è uguale $R(y)Q(x)$, è nulla

$$0 = y' = R(y)Q(x) = 0.$$

Pertanto, la EDO è perfettamente soddisfatta per una soluzione $y = y_0$. Se tale soluzione $y = y0$ non coincide con nessuno degli integrali particolari, allora $y = y_0$ è definito come integrale singolare. In altre parole, questa è una soluzione che non appartiene alla famiglia degli integrali particolari dell'equazione, ossia quelli che si ottengono applicando la formula di risoluzione generale per le equazioni a variabili separabili. Tali soluzioni costanti $y = y_0$ sono definite come integrali singolari.
Vediamo ora alcuni esempi su come possiamo caratterizzare gli integrali singolari. Consideriamo l'equazione

$$y' = 2\sqrt{y}.$$

Questo è un caso di equazione differenziale non lineare molto semplice perché la dipendenza dalla x è costante. In particolare, quindi, è sicuramente a variabili separabili. Se calcoliamo l'integrale generale, utilizzando le formule

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = Q(x)R(y) = 2\sqrt{y},$$

dove

$$Q(x) = 2, \quad R(y) = \sqrt{y},$$

e integrando ambo i membri

$$\int \frac{dy}{R(y)} = \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 2dx + C = \int Q(x)dx + C,$$

troviamo l'integrale generale

$$y(x) = (x + C)^2 \qquad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Questa rappresenta l'intera famiglia di possibili soluzioni del problema. L'integrale particolare si ottiene specificando opportunamente il valore della costante C. Pertanto, per ogni valore fissato di C, si troverà un integrale particolare.
Notiamo che la funzione

$$y = 0,$$

è certamente soluzione del problema perché soddisfa l'equazione

$$y' = 2\sqrt{y}.$$

Tuttavia, $y = 0$ è una soluzione che non coincide con nessuno degli integrali particolari che abbiamo trovato poc'anzi. Essa, quindi, è un integrale singolare. Pertanto, la soluzione $y = 0$, non coincidendo con nessuno integrale particolare, è un integrale singolare della EDO $y' = 2\sqrt{y}$.
Analizziamo ora gli integrali singolari dell'equazione della logistica che avevamo introdotto nella lezione precedente e che abbiamo richiamato all'inizio di questa lezione. L'EDO della logistica è

$$y'(t) = \frac{K}{L} y(L - y).$$

Ricordiamo che la famiglia generale delle soluzioni è

$$y(t) = C_1 \frac{Le^{Kt}}{1 + C_1 e^{Kt}}, \qquad C_1 = e^C.$$

Osserviamo che

$$y = 0, \qquad y = L,$$

sono possibili soluzioni del problema. Infatti, è facile verificare che $y = 0$ è una soluzione dell'equazione differenziale. Inoltre, anche $y = L$ è una soluzione del problema, poiché la derivata prima di L è zero (poiché L è una costante), e inoltre, per $y = L$, il termine di destra della EDO si annulla. Pertanto, $y = 0$ e $y = L$ sono entrambi integrali singolari, poiché né l'uno né l'altro appartengono alla famiglia degli integrali particolari che abbiamo ricavato.
Finora abbiamo caratterizzato le soluzioni per le seguenti classi di EDO:

- equazioni differenziali lineari omogenee e non omogenee;
- equazioni differenziali non lineari a variabili separabili.

Adesso consideriamo un'altra classe di equazioni, le cosiddette equazioni differenziali omogenee. È importante notare che queste non hanno nulla a che fare con le equazioni differenziali lineari omogenee che abbiamo trattato in precedenza.
Le EDO del primo ordine omogenee sono equazioni del tipo

$$y' = f(x, y),$$

dove si richiede che la f goda della seguente proprietà (detta di omogeneità)

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y) \qquad \forall x, y, \quad \forall \alpha \neq 0.$$

Queste equazioni sono quindi, a priori, non lineari. Inoltre, è richiesta una particolare condizione alla funzione f: se entrambi gli argomenti di f vengono moltiplicati per una costante α, la funzione f non cambia di valore. Questa proprietà viene chiamata proprietà di omogeneità. Tale proprietà viene poi ereditata dall'equazione differenziale stessa, nel caso in cui il termine di destra della EDO sia una funzione omogenea. In tal caso, l'equazione prende il nome di EDO del primo ordine omogenea.
Vediamo alcuni esempi di equazioni differenziali del primo ordine omogenee per comprendere, attraverso gli esempi, come individuare un percorso che ci consenta di trovare le soluzioni di questo tipo di EDO.
Consideriamo dunque questo primo esempio

$$y' = \frac{y - x}{y + x}.$$

Questa equazione è del primo ordine ed è non lineare, poiché la y compare, in particolare, al denominatore. Osserviamo che questa EDO non è a variabili separabili, quindi non possiamo applicare la tecnica di risoluzione della separazione delle variabili. Tuttavia, essa risulta essere omogenea perché, applicando la proprietà di omogeneità, si scopre che

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha y - \alpha x}{\alpha y + \alpha x} = \frac{\alpha(y-x)}{\alpha(y+x)} = \frac{y-x}{y+x} = f(x,y),$$

ovvero, per ogni valore di $\alpha \neq 0$, $f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y)$. Dunque, questa EDO è certamente una equazione omogenea.

Enunciamo ora una proprietà delle equazioni omogenee. Per le equazioni omogenee, le rette uscenti dall'origine sono isocline. Ricordiamo che una isoclina per una EDO è l'insieme di punti (x,y) nel piano xy in cui $f(x,y(x))$ assume un valore costante.

Verifichiamo allora che, nel caso delle equazioni differenziali omogenee, le isocline sono effettivamente le rette uscenti dall'origine. Concluderemo che le uniche isocline possibili sono tutte le rette che partono dall'origine.

Le rette uscenti dall'origine hanno un'espressione del tipo

$$y(x) = cx \qquad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Al variare di c, queste descrivono tutte le possibili rette uscenti dall'origine. Osserviamo che per queste rette vale

$$f\big(x, y(x)\big) = f(x, cx).$$

Inoltre, supponendo che c sia diverso da zero

$$c \neq 0,$$

ed x sia un valore fissato non nullo, abbiamo che

$$f(x, cx) = f(1, c) \qquad \forall x \neq 0.$$

Infatti, grazie all'omogeneità $f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y)$, se prendiamo

$$\alpha = \frac{1}{x},$$

possiamo verificare che $f(\alpha x, \alpha y)$ vale

$$f(x, cx) = f\big(x, y(x)\big) = f(\alpha x, \alpha y(x)) = f(\alpha x, \alpha c x) = f\left(\alpha\frac{1}{\alpha}, \alpha c\frac{1}{\alpha}\right) = f(1, c),$$

dove di fatto abbiamo solo sfruttato l'ipotesi dell'omogeneità della f, specificandola per $\alpha = \frac{1}{x}$. Dunque abbiamo trovato che

$$f(x, cx) = f(1, c) = cost \qquad \forall x \neq 0.$$

Dato che $f(x, cx)$ descrive il luogo dei punti delle rette uscenti dall'origine, possiamo concludere che la curva integrale che passa per (x, cx) ha la stessa derivata della curva che passa per $f(1, c)$. Ricordiamo infatti che

$$y' = f(x, y),$$

ovvero, f descrive il valore della derivata di y. Dunque, $y = cx$ è un'isoclina per le equazioni omogenee. Si può anche verificare che queste rette descrivono tutte le possibili isocline. In altre parole, l'insieme delle isocline per le equazioni omogenee si riduce all'insieme delle rette uscenti dall'origine.

Consideriamo il seguente esempio: calcolare il campo di direzioni e le isocline dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x}{y}\sin\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right).$$

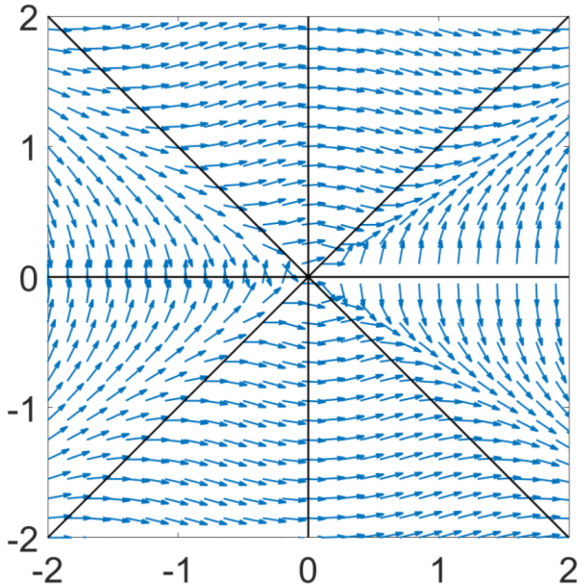

Figura 1: Campo di direzioni de isocline della EDO $y' = \frac{x}{y} sin\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$.

Questa è una EDO non lineare perché è presente la funzione seno, che è una funzione non lineare, e l'argomento stesso del seno è una funzione non lineare di y. Inoltre, abbiamo anche $\frac{1}{y}$ che è una funzione non lineare per y. Osserviamo che questa EDO è un'equazione omogenea perché, se moltiplichiamo entrambi gli argomenti della funzione

$$f(x,y) = \frac{x}{y}\sin\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right),$$

per una costante, il valore della funzione non cambia

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y),$$

rispettando così la proprietà di omogeneità.

La Figura 1 mostra il campo di direzioni e alcune rette isocline della EDO $y' = \frac{x}{y}\sin\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$. Il campo di direzioni è l'insieme dei vettori che, in ogni punto, sono tangenti alle curve integrali. Le isocline corrispondono al luogo dei punti del piano in cui la funzione f assume un valore costante. Come si vede, ritroviamo la proprietà precedente, ovvero che tutte le rette uscenti dall'origine sono effettivamente le isocline dell'equazione differenziale omogenea che abbiamo considerato in questo esempio.