eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

Lezione 6.7a

Stabilità, consistenza e convergenza di metodi numerici ad un passo

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Metodi numerici per le E**quazioni **D**ifferenziali **O**rdinarie (EDO)

$$u_{k+1} = g(u_k, u_{k+1})$$

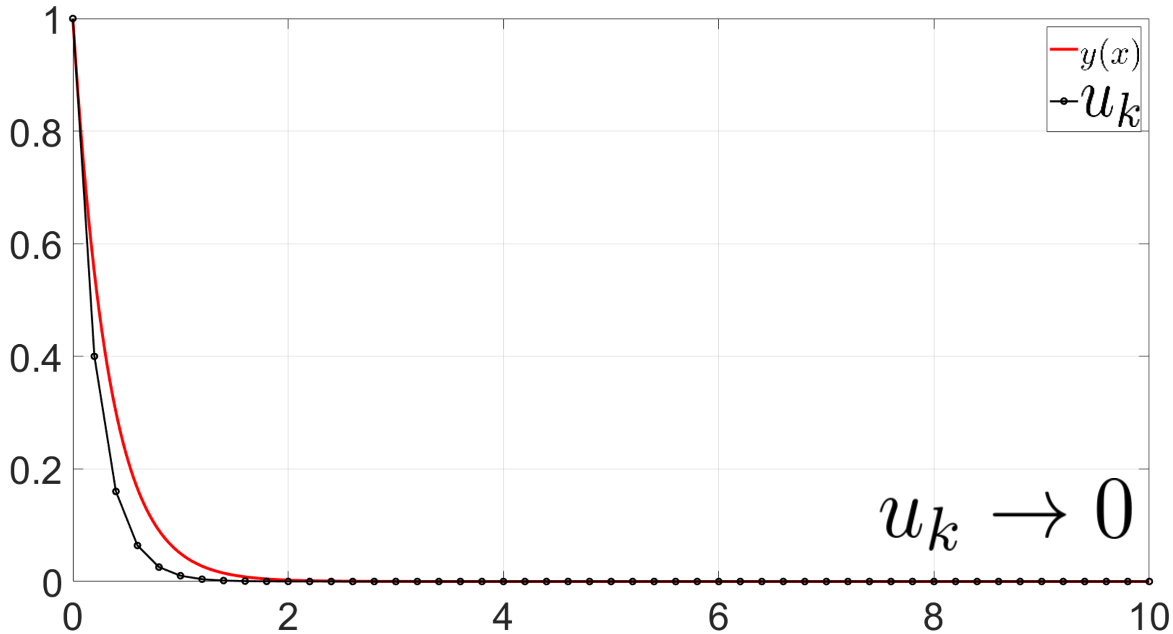
- **Concetti** di stabilità, consistenza e convergenza
  - ✓ **Zero stabilità**
  - ✓ **Convergenza** di un metodo numerico
  - ✓ **Consistenza** ed errore di troncamento
  - ✓ **Ordine di convergenza**

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Assoluta stabilità:** comportamento asintotico della sol. numerica u_k

$$\begin{cases} y'(x) = \lambda y(x) & 0 < x < \infty \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x_k \to \infty} u_k = 0$$



$x_k \to \infty$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Zero stabilità (o stabilità):**

Comportamento del metodo numerico nell'approssimare le soluzioni $I = [x_0, x_f]$ quando $h \to 0$

- Quando $h \to 0$ ⟹ il numero N_{x_k} di nodi x_k : $N_{x_k} \to \infty$

Un metodo numerico è (zero) stabile se, fissato $I = [x_0, x_f]$ fornisce soluzioni limitate da una costante non dipendente da h

$$|u_k| \leq C(x_f), \quad \forall x_k, \forall h < h_0$$

- Si vuole che per h «piccoli» la soluzione numerica è limitata da C

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- <u>Definizione rigorosa</u> di **stabilità**
- Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) & x \in (x_0, x_f] \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad I = [x_0, x_f]$$

Un metodo numerico è zero stabile
se a piccole perturbazioni del dato iniziale corrispondono variazioni piccole (controllabili) della soluzione

- dato $v_0 \Longrightarrow \{v_k\} \in I$
- dato $w_0 = v_0 + \epsilon \Longrightarrow \{w_k\}$ si discosta di poco da $\{v_k\}$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Definizione rigorosa di **stabilità**
  - dato v_0 ⟶ $\{v_k\} \in I$
  - dato $w_0 = v_0 + \epsilon$ ⟶ $\{w_k\}$ *si discosta di poco* da $\{v_k\}$
- *si discosta di poco:* esiste una costante $C > 0$ indipendente da I tale che la differenza tra $\{v_k\}$ e $\{w_k\}$ date dai dati v_0 e w_0 sia minore di $C\epsilon \ \forall x_k \in I$

⬇

$$\exists C > 0 \text{ t.c. } |v_k - u_k| \leq C\epsilon \quad \forall k \text{ t.c. } x_k \in I$$