Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

Lezione 5.5b

Integrali singolari e EDO non lineari del primo ordine omogenee

Risoluzione di EDO (Integrale singolare: definizione)

- **Concetto:** Integrale singolare per EDO del tipo

$$y'(x) = Q(x)R(y)$$

- Se y_0 è una costante t.c.

$$R(y_0) = 0 \longrightarrow y = y_0 \xrightarrow{\text{soluzione}} 0 = y'(x) = Q(x)R(y)$$

- Se $y = y_0$ non coincide con nessuno degli integrali particolari

→ **INTEGRALE SINGOLARE**

Risoluzione di EDO (Integrale singolare: esempio)

- <u>Esempio</u>

$$y'(x) = 2\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad Q(x) = 2, \quad R(y) = \sqrt{y}$$

soluzione

$$\int \frac{dy}{R(y)} = \int Q(x)dx + C \qquad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int 2dx + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{y(x) = (x+C)^2}$$

- La soluzione $y = 0$ è un **integrale singolare** della EDO

Risoluzione di EDO (Integrali singolari: Eq. Logistica)

➢ Equazione delle Logistica

$$y'(x) = \frac{K}{L} y(L - y)$$

soluzione

$$\boxed{y(x) = C_1 \frac{Le^{Kt}}{1 + C_1 e^{Kt}}} \quad \forall C_1 \in \mathbb{R}$$

➢ Le soluzioni $y = 0$ e $y = L$ sono **integrali singolari** della EDO

$$y'(x) = 0 \longleftarrow \begin{cases} y = 0 \longrightarrow \frac{K}{L} 0(L - 0) = 0 \\ y = L \longrightarrow \frac{K}{L} L(L - L) = 0 \end{cases}$$

Risoluzione di EDO (Equazioni differenziali omogenee)

- Classe di EDO: equazioni differenziali omogenee

$$y'(x) = f(x, y)$$

- In generale non lineari e che soddisfano la **proprietà di omogeneità**

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y) \qquad \forall x, y \; \forall \alpha \neq 0$$

- **Esempio:**

$$y'(x) = \frac{y-x}{y+x}$$

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha y - \alpha x}{\alpha y + \alpha x} = \frac{\alpha(y-x)}{\alpha(y+x)} = \frac{y-x}{y+x} = f(x, y)$$

Risoluzione di EDO (Equazioni differenziali omogenee)

- Le **isocline delle EDO omogenee** sono le rette uscenti dall'origine

$$y(x) = cx \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

- Esempio

$$y(x) = \frac{x}{y} \sin \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$f(\alpha x, \alpha y) = f(x, y)$$

Campo di direzioni
ed **isocline**