



eCAMPUS
UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica

Lezione 4.6a

Condizionamento dei problemi numerici

Fondamenti della matematica numerica

- **Condizionamento dei problemi numerici**

$$K_n = \sup_{\delta d_n} \left(\frac{\|\delta u_n\|}{\|u_n\|} / \frac{\|\delta d_n\|}{\|d_n\|} \right)$$

- Esempi sul numero di condizionamento numerico

- ✓ Somma di due numeri (**cancellazione di cifre significative**)
- ✓ Sistemi lineari e **condizionamento di una matrice**
- ✓ ricerca degli **zeri di un'equazione non lineare**

Fondamenti della matematica numerica (condizionamento)

➤ Condizionamento di un problema numerico

Perturbazione sui dati

Metodo numerico

$$F_n(u_n, d_n) = 0 \quad F_n(u_n + \delta u_n, d_n + \delta d_n) = 0$$

Condizionamento numerico

$$K_n = \sup_{\delta d_n} \left(\frac{\|\delta u_n\|}{\|u_n\|} / \frac{\|\delta d_n\|}{\|d_n\|} \right)$$


Condizionamento numerico asintotico

$$K^{num} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{n \geq k} K_n$$

- K_n estremo superiore del rapporto tra la variazione nelle soluzioni in rapporto alla variazione nei dati (**dipende da n**)
- K^{num} condizionamento per $n \geq k$ e poi $n \rightarrow \infty$

Fondamenti della matematica numerica (condizionamento)

- Fornire delle espressioni specifiche per il calcolo di K_n

Metodo numerico $F_n(u_n, d_n) = 0$  HP $u_n = f_n(d_n)$

- Sotto HP si riesce a ricavare l'espressione

$$K_n \simeq \|f'_n(d_n)\| \frac{\|d_n\|}{\|f_n(d_n)\|}$$

- Il simbolo \simeq implica che si stanno trascurando termini dell'ordine

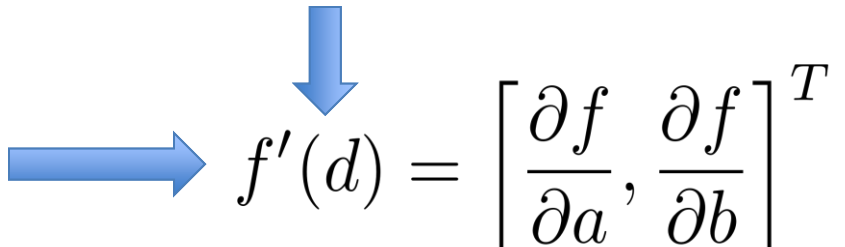
$$o(\|\delta d_n\|)$$


Fondamenti della matematica numerica (condizionamento)

- Esempio: **somma di due numeri reali** $a, b \in \mathbb{R}$

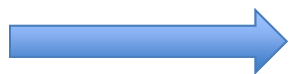
$$u = a + b = f(d)$$

- L'insieme dei dati d


$$d = [a, b]^T \longrightarrow f'(d) = \left[\frac{\partial f}{\partial a}, \frac{\partial f}{\partial b} \right]^T = [1, 1]^T$$


$$K \simeq \|f'(d)\|_1 \frac{\|d\|_1}{\|f(d)\|_1} = 2 \frac{|a| + |b|}{|a + b|}$$

- Somma ben condizionata se a, b hanno lo stesso segno $K \simeq 2$
- Somma mal condizionata se $a = -b \Rightarrow K \simeq \infty$



Cancellazione delle cifre decimali

Fondamenti della matematica numerica (cancellazione cifre)

➤ Cancellazione delle cifre decimali

➤ Consideriamo

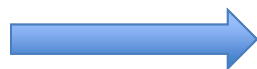
$$a = \pi = 3.141\underline{59}..., \quad b = -22/7 = 3.142\underline{85}...$$

➤ Rappresentazione con 5 cifre decimali

$$a_M = 3.141\underline{6}, \quad b_M = -3.142\underline{9}$$

$$\frac{|a - a_M|}{|a|} = 2.34 \cdot 10^{-6}, \quad \frac{|b - b_M|}{|b|} = 1.36 \cdot 10^{-5}$$

$$u = a_M + b_M$$



$$\frac{|u - u_M|}{|u|} = 0.28 \cdot 10^{-1}$$

**Propagazione
dell'errore**

Fondamenti della matematica numerica (condizionamento)

- Esempio: risoluzione di un sistema lineare

$$F(\mathbf{u}, d) = A\mathbf{u} - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad d = \{\cancel{A}, \mathbf{b}\}$$
$$\mathbf{u} = A^{-1}\mathbf{b} = f(d)$$

$$K(A) \simeq \|f'(d)\| \frac{\|d\|}{\|f(d)\|} = \|A\| \|A^{-1}\| \geq 1$$

- Fattore di amplificazione dell'errore relativo al solo termine noto \mathbf{b}

- Matrice A ben condizionata se $K(A) \simeq 1$
- Matrice A mal condizionata se $K(A) \gg 1$

Sistema ben condizionato

Sistema mal condizionato