Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Radici di equazioni non lineari

Lezione 1.7a

Criteri di arresto per i metodi iterativi

Metodi numerici per il calcolo delle radici di funzioni non lineari

- Obiettivo: **determinare quando arrestare le iterazioni**

  - Individuare il minimo valora di n per una soluzione «accettabile»
  - Indice di iterazione n dove arrestarsi

$$\{x_n\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \exists\bar{n}\ \text{t.c.}\ x_{\bar{n}} \simeq x$$

- Presenteremo: **Criteri di arresto delle iterazioni**

  - Test di arresto sul Residuo
  - Test di arresto sull'Incremento

Criteri di arresto per i metodi iterativi (Introduzione)

- Abbiamo visto diversi problemi:
  - Ricerca degli zeri per equazioni non lineari $f(x) = 0$
  - Ricerca degli zeri per sistemi non lineari $F(x) = 0$
  - Ricerca di punti fissi per equazioni non lineari $g(x) = x$

Metodi numerici $\{x_n\} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = x$

- Concetto fondamentale:
  - Momento in cui arrestare il metodo
  - Minimo n tale per cui possiamo considerare x_n accurato

$$\exists \bar{n} \text{ t.c. } x_{\bar{n}} \simeq x$$

Criteri di arresto (Errore di approssimazione)

$$\{x_n\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \exists \bar{n} \text{ t.c. } x_{\bar{n}} \simeq x$$

- Valutare l'errore di approssimazione

$$e_n = |x - x_n|$$

  - x_n soluzione approssimata al passo n
  - x soluzione esatta del problema

- Vogliamo controllare $e_n < \epsilon$ $=$ $|x - x_n| < \epsilon$

- Spesso non siamo in grado di conoscere a priori la soluzione esatta x

- Introdurre dei criteri per controllare l'errore e_n senza conoscere x
  - ✓ **Criterio di arresto sul Residuo**
  - ✓ **Criterio di arresto sull'Incremento**

Criterio di arresto dul Residuo

- Introdurre dei criteri per controllare l'errore e_n senza conoscere x
- Criterio di arresto basato sul residuo r_n

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_n = |f(x_n)|$$

- Se x è la soluzione esatta, vale $f(x) = 0$
- Se $x_n \sim x$ il residuo sarà piccolo $r_n = |f(x_n)| < \epsilon$

- Analogamente:

- Sistemi di equazioni non lineari $F(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad r_n = ||F(x_n)|| < \epsilon$
- Iterazioni di punto fisso $g(x) = x \quad \Rightarrow \quad r_n = |g(x_n) - x_n| < \epsilon$

Criterio di arresto sull'Incremento

- Introdurre dei criteri per controllare l'errore e_n senza conoscere x
- Criterio di arresto basato sull'incremento δx

$$\delta x = |x_{n+1} - x_n|$$

- La differenza in valore assoluto tra due iterate consecutive
- Se $\{x_n\} \to x$ allora da un certo passo in poi $\delta x = |x_{n+1} - x_n| < \epsilon$
- Analogamente:

- Sistemi di equazioni non lineari $\delta x = ||x_{n+1} - x_n|| < \epsilon$
- Iterazioni di punto fisso: <u>in questo caso</u> incremento = residuo

$$\delta x = |x_{n+1} - x_n| \underset{\uparrow}{=} |g(x_n) - x_n| = r_n$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$