Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.6a

Metodi di Richardson

Risoluzione di sistemi lineari: metodi iterativi

- **Metodi di tipo gradiente**

- Generalizzazione dei metodi di Jacobi, Gauss-Seidel, SOR

  ✓ **Metodo di Richardson**

  ✓ **Metodo di Richardson dinamico**

Risoluzione di sistemi lineari (quadro generale)

- Abbiamo visto la formula generale dei metodi iterativi

$$P\underbrace{\left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right)}_{\delta\mathbf{x}^{(k+1)}} = \mathbf{r}^{(k)} \qquad k \geq 0$$

Residuo

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}$$

Precondizionatore P ⟷ **Metodo iterativo**

- **Jacobi:** $P_J = D$
- **GS:** $P_{GS} = D + E$
- **SOR:** $P_{SOR} = (D + \omega E)/\omega$

Matrice di Iterazione

$$B = I - P^{-1}A$$

$$\rho(B) < 1$$

Raggio spettrale

Risoluzione di sistemi lineari (metodo di Richardson)

- Metodo di Richardson introduce un parametro α

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha\mathbf{r}^{(k)} \qquad k \geq 0$$

- **Parametro di accelerazione** α moltiplica il residuo

Matrice di Iterazione del metodo di Richardson

$$R_\alpha = I - \alpha P^{-1}A$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow B = R_1 = I - P^{-1}A$$

Risoluzione di sistemi lineari (il parametro α)

- Richardson: **un’estensione dei metodi classici** (Jacobi, GS, SOR)

$$P(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}) = \alpha \mathbf{r}^{(k)} \qquad k \geq 0$$

- α per ottenere una **convergenza più rapida** possibile

Determinare il parametro α

↓

Analisi di convergenza

Risoluzione di sistemi lineari (convergenza)

- Gli autovalori $\lambda_k \ (k = 1, \cdots, n)$ della matrice di iterazione R_α

$$R_\alpha = I - \alpha P^{-1} A \Longleftrightarrow \lambda_k = 1 - \alpha \mu_k$$

- μ_k è il generico autovalore di $P^{-1}A$

- Per garantire la convergenza del metodo di Richardson

$$\rho(R_\alpha) = \max_k |\lambda_k| < 1 \Longrightarrow \boxed{|\lambda_k| = |1 - \alpha\mu_k| < 1}$$

- Nell'ipotesi in cui $\mu_k \in \mathbb{R}^+$ si può verificare

$$\boxed{0 < \alpha < \frac{2}{\mu_{max}}}$$