RISOLUZIONE DI SISTEMI LINEARI: METODI DIRETTI (Richiami sui sistemi lineari)

In questa lezione, riprenderemo alcuni concetti di algebra lineare per stabilire notazioni, definizioni e proprietà fondamentali. Iniziamo con il richiamo di alcune notazioni di base relative ai sistemi lineari.

Un sistema lineare è un insieme di equazioni algebriche che coinvolgono un certo numero di incognite. Siano n il numero di incognite, $x_1, x_2, \dots, x_n$ le incognite del problema, $a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn}$ i coefficienti delle equazioni e $b_1, b_2, \dots, b_n$ i termini noti, il sistema lineare di equazioni si scrive

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Abbiamo, quindi, un insieme di equazioni che definiscono implicitamente un certo numero di variabili incognite che vogliamo determinare.
Possiamo riscrivere il sistema lineare in maniera compatta attraverso l'utilizzo di matrici e vettori. Introduciamo la matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dei coefficienti del sistema

$$A = (a_{ij}),$$

dove il generico elemento della matrice è a_{ij}, con $i, j = 1, \dots, n$, (con i indice di riga e j indice di colonna).
Definiamo il vettore incognito come

$$\boldsymbol{x} = (x_i),$$

con componente generica x_i e il vettore termine noto come

$$\boldsymbol{b} = (b_i),$$

con componente generica b_i.
Dunque, A, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{b}$ saranno le seguenti matrici e vettori

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Il sistema lineare di equazioni algebriche si scrive nella forma equivalente

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad i = 1, \dots, n.$$

Questa è una forma compatta che rappresenta una relazione vettoriale: $A\boldsymbol{x}$ è un vettore di n componenti e $\boldsymbol{b}$ è anch'esso un vettore n componenti. Scrivendo il sistema per righe, otteniamo la somma con $j = 1, \dots, n$ di $a_{ij}x_j$ uguale a b_i, per $i = 1, \dots, n$. Pertanto, per ogni indice di riga i otteniamo un'equazione, e in totale avremo n equazioni che costituiscono il nostro sistema. In questo modo, abbiamo riscritto il nostro problema attraverso la notazione matrice-vettore $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
Consideriamo un esempio molto semplice:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3. \\ -x_1 - 3x_2 \qquad = 2 \end{cases}$$

Abbiamo un sistema 3×3, tre equazioni in tre incognite x_1, x_2 e x_3. In questo caso A (la matrice dei coefficienti del sistema) e $\boldsymbol{b}$ (il vettore dei termini noti) sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

In questo caso, si può ricavare in maniera molto semplice (partendo dall'ultima equazione del sistema e procedendo per sostituzione) che la soluzione esatta è

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Abbiamo visto come scrivere un sistema lineare nella sua forma più generale. Ora, ricordiamo brevemente l'analisi dei sistemi, ovvero la discussione sull'esistenza e, possibilmente, l'unicità delle soluzioni dei sistemi lineari. Un sistema di n equazioni in n incognite, ossia un sistema con una matrice dei coefficienti quadrata, non ammette sempre una soluzione, e anche quando questa soluzione esiste, non è necessariamente unica. Ricordiamo questi concetti richiamando alcune analogie geometriche nel quale vedremo che il sistema potrà avere:

- un'unica soluzione,
- nessuna soluzione,
- infinite soluzioni.

Partiamo da un caso molto semplice: consideriamo un sistema di due equazioni in due incognite. Ogni equazione del sistema 2×2 rappresenta una retta nel piano, poiché una retta è una combinazione lineare di due coefficienti. Pertanto, due equazioni rappresentano due rette. Queste rette possono intersecarsi in un solo punto, detto punto di intersezione, i cui valori di ascissa e ordinata corrisponderanno alla soluzione del nostro sistema. Naturalmente, sappiamo che due rette possono anche essere parallele; in tal caso, non avremo nessuna soluzione del sistema, poiché non esiste alcun punto di intersezione tra le rette. Infine, se le due rette coincidono, avremo infinite soluzioni, ossia un numero infinito di punti che soddisfano il sistema 2×2.
Consideriamo un sistema 3×3, cioè tre equazioni in tre incognite. In questo caso, ogni equazione rappresenta un piano nello spazio tridimensionale. Pertanto, abbiamo tre piani. Questi piani possono intersecarsi in un solo punto, che sarà la soluzione unica del sistema. Inoltre, possiamo avere tre piani paralleli tra loro; in questo caso, i piani non si intersecano mai; quindi, non esiste alcuna soluzione del sistema. Infine, possiamo avere tre piani che si intersecano lungo una retta, che è la linea di intersezione dei tre piani. Tutti i punti di questa retta di intersezione sono soluzioni del sistema, il che implica che in questo caso abbiamo infinite soluzioni.
Richiamiamo adesso i risultati generali per un sistema arbitrario di n equazioni in n incognite, ricordando un risultato classico dell'algebra lineare. Sappiamo che un sistema ammette una soluzione, ed essa è unica, quando è verificata una delle seguenti condizioni:

- A è non singolare: ovvero il determinante di A è diverso da zero $det(A) \neq 0$.
  Ricordiamo che il determinante di A (di una matrice $n \times n$) è un numero reale definito dalla seguente formula di Laplace

$$\det(A) = \begin{cases} a_{11} & n = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}, & n > 1 \end{cases},$$

  dove C_{ij} è un numero reale, detto cofattore di a_{ij}, definito come

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

dove A_{ij} è una matrice di dimensione ridotta che si ottiene dalla matrice A sopprimendo la i-esima riga e la j-esima colonna e $(-1)^{i+j}$ esprime la moltiplicazione per un segno (positivo o negativo). Pertanto, per calcolare il determinante di A (con $n > 1$), si fissa un indice i di riga generico e si procedere a calcolare questa somma, dove a_{ij} è l'elemento generico della i-esima riga e C_{ij} è un numero reale, detto cofattore di a_{ij}, che corrisponde al determinante di una matrice A_{ij} di dimensione ridotta. Ad esempio, il determinante di una generica matrice $A, 3 \times 3$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

utilizzando la formula di Laplace è dato da

$$\begin{aligned} \det(A) = a_{11}(-1)^2(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + \\ +a_{21}(-1)^3(a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}) + \\ +a_{31}(-1)^4(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}). \end{aligned}$$

Ricordiamo, di seguito, altre situazioni che garantiscono l'esistenza e l'unicità della soluzione di un sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$:

- Il sistema omogeneo $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$ (cioè, il sistema in cui il termine noto è nullo) ammette come unica soluzione la soluzione nulla, ossia $\boldsymbol{z} = 0$. Pertanto, se il sistema omogeneo ha come soluzione $\boldsymbol{z} = 0$, allora il sistema di partenza $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ è non singolare. Infatti, se $\boldsymbol{z}$ fosse diverso da zero, ossia $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$, e fosse un vettore soluzione del sistema $A\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$, allora si potrebbe prendere una soluzione del sistema e sommare ad essa tutti i multipli di $\boldsymbol{z}$, cioè
$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x} + k\boldsymbol{z},$$
ottenendo un nuovo vettore $\boldsymbol{w}$ che sarebbe anch'esso una soluzione del sistema. Infatti, si ha:
$$A(\boldsymbol{x} + k\boldsymbol{z}) = A\boldsymbol{x} + kA\boldsymbol{z} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{b}.$$
Dunque, abbiamo trovato infinite altre possibili soluzioni del sistema di partenza.

- il sistema di partenza $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ha soluzione unica se il rango di A è uguale al rango di $(A|\boldsymbol{b})$. Ricordiamo che il rango di A è definito come l'ordine massima di determinanti non nulli estratti da A. Equivalentemente, il rango di A è il massimo numero di vettori (colonna o riga) di A linearmente indipendenti. Quindi, il rango della matrice estesa $(A|\boldsymbol{b})$ è il massimo numero di vettori (colonna o riga) linearmente indipendenti di $(A|\boldsymbol{b})$. Questa matrice estesa $(A|\boldsymbol{b})$ si costruisce apponendo alla matrice di partenza A, il vettore dei termini noti $\boldsymbol{b}$
$$A|\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}.$$
Dunque, se il rango della matrice estesa $(A|\boldsymbol{b})$, coincide col il rango della matrice di partenza A, allora il sistema di partenza è un sistema che ha un'unica soluzione.

Passiamo ora ad introdurre un concetto che verrà utilizzato per confrontare vettori e matrici, ovvero il concetto di differenza fra matrici, differenza fra vettori e la relativa misura della differenza.
Se abbiamo un numero reale $a \in \mathbb{R}$, la sua lunghezza o la sua misura è il valore assoluto del numero stesso, ovvero $|a|$

$$\text{valore assoluto: } |a| = \begin{cases} a, & se\ a \geq 0 \\ -a, & se\ a < 0' \end{cases}$$

a se a è maggiore uguale zero, $-a$ se a è minore di zero. Dunque, se prendiamo ad esempio un numero reale a negativo la sua misura, il valore assoluto, sarà la distanza che lo separa dall'origine.
Se adesso consideriamo un vettore $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, il modulo di $\boldsymbol{a}$ è la sua norma euclidea, ovvero la somma dei quadrati delle componenti, il tutto sotto radice quadrata

$$||\boldsymbol{a}||_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

oppure ogni altra norma. Quindi ogni norma esprime un concetto alternativo di misura del vettore $\boldsymbol{a}$.
Se prendiamo una matrice $A \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, la norma è anch'essa un elemento che permette di caratterizzare in qualche maniera la misura della matrice.
Introduciamo ora il concetto di distanza fra numeri, vettori e matrici. Questo concetto è importante perché, nell'analisi dei metodi numerici, spesso dovremo misurare degli errori, ovvero calcolare le distanze tra la soluzione esatta di un problema (che in genere non è accessibile) e la soluzione approssimata (o numerica) calcolata dal metodo numerico. Per stimare l'errore, abbiamo bisogno di strumenti quantitativi per determinare questa stima.
Se i due elementi sono numeri reali, la loro distanza assoluta è il modulo della loro differenza, cioè il valore assoluto della differenza

$$\text{errore assoluto: } \quad |a - b|.$$

Spesso sarà interessante misurare la distanza relativa, ovvero la distanza normalizzata, e dunque prende la distanza assoluta e dividerla per il valore assoluto di a

$$\text{errore relativo: } \quad \frac{|a - b|}{|a|}.$$

L'errore relativo è importante perché ci permette in qualche modo di comprendere gli ordini di grandezza degli errori. Infatti, se stiamo misurando una quantità, ad esempio in in metri, un errore di 1 cm può essere tollerabile, poiché siamo nell'ordine dell'errore percentuale; se invece stiamo misurando in centimetri, un errore di 1 cm potrebbe non essere tollerabile.
Quindi, distinguiamo tra due tipi di errore: errore assoluto ed errore relativo. L'errore assoluto è la differenza tra il valore misurato e il valore esatto, mentre l'errore relativo è l'errore assoluto diviso per il valore esatto, esprimendo l'errore come frazione o percentuale del valore vero.
In maniera analoga possiamo introdurre il concetto di differenza assoluta, differenza relativa fra due vettori. Se $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ sono due vettori ed uno è diverso da zero ($\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$), $\boldsymbol{a}$ meno $\boldsymbol{b}$ in una specifica norma misurerà la distanza assoluta

$$\text{errore assoluto: } \|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|,$$

un errore assoluto tra il vettore $\boldsymbol{a}$ e il vettore $\boldsymbol{b}$. Questa misura la lunghezza del vettore differenza fra i due. La misura relativa è la misura assoluta diviso la norma del vettore che si prende come riferimento (per esempio, del vettore della soluzione esatta)

$$\text{errore relativo: } \frac{||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}||}{||\boldsymbol{a}||}.$$

Quindi ancora una volta stiamo normalizzando la stima della differenza fra la soluzione attesa e la soluzione calcolata. Ovvero stiamo esprimendo un errore percentuale.

Lo stesso tipo di approccio può essere seguito per il caso delle matrici. Se $A, B \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ sono due matrici, di n righe e n colonne, e $A \neq 0$, la distanza di A da B, in una certa norma, esprime l'errore assoluto, mentre la distanza di A da B divisa per la norma di A, esprime l'errore relativo tra le due matrici.

$$\text{errore assoluto: } |A-B|, \qquad \text{errore relativo: } \frac{||A-B||}{||A||}.$$