Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

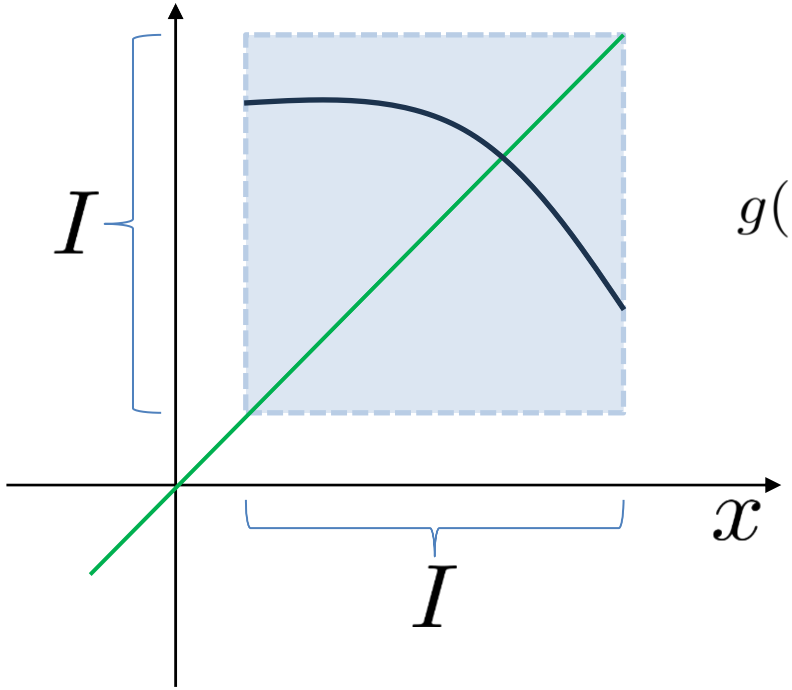
Radici di equazioni non lineari
Lezione 1.4b

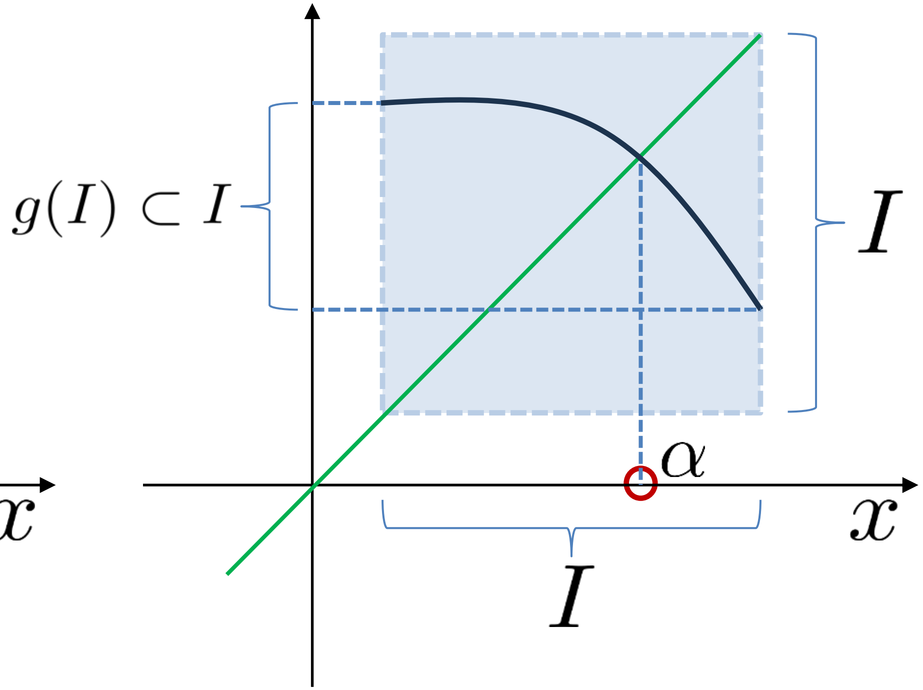
Iterazioni di Punto Fisso

Teorema di esistenza dei punti fissi (geometricamente)

Se $g(x)$ è continua e $g(I) \subset I$ allora $\exists \alpha \in I$ t.c. $g(\alpha) = \alpha$
$\exists g'(x)$ con $|g'(x)| \leq K < 1$ allora $\exists! \alpha \in I$ t.c. $g(\alpha) = \alpha$

- ✓ Consideriamo $g(x)$ definita su $I \subset \mathbb{R}$ e costruiamo il quadrato di lato I
- ✓ L'ipotesi che $g(x)$ sia contenuta in I garantisce che intersechi la retta $y = x$





Approssimare il punto fisso

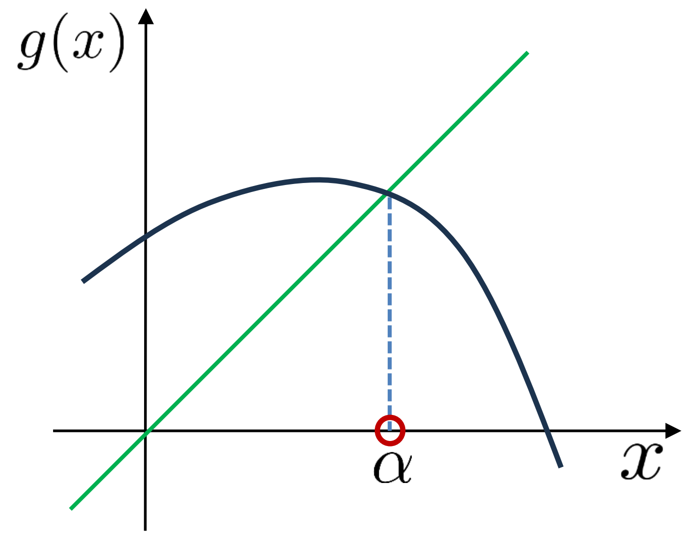
- **Principio:** costruire una successione numerica $\{x_n\}$ che converga a α

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

Convergenza

- Data $g(x)$ che soddisfi il Teorema di esistenza dei punti fissi, vogliamo determinare punto fisso α valore in cui $g(x)$ interseca $y = x$

$$g(x) = x$$



- Generare una successione $\{x_n\}$ tale che

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

Iterazioni di punto fisso

- Adottare un approccio iterativo

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

- Partendo da x_0, calcoliamo $x_1 = g(x_0)$, $x_2 = g(x_1)$ e così via, fino a generare una successione che, «sotto opportune condizioni», converge a α

- **Formula iterativa di punto fisso**

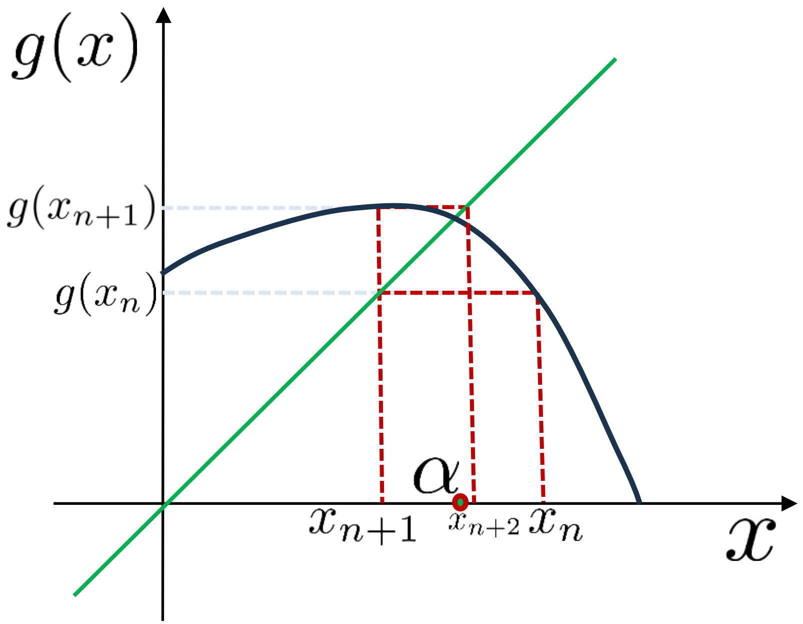
$$\boxed{x_{n+1} = g(x_n) \qquad \forall n \geq 0}$$

Iterazioni di punto fisso (geometricamente)

- La formula di punto fisso descrive il processo geometrico di avvicinamento a α
- Dato x_n passo n–esimo dell'iterazione, calcoliamo $x_{n+1} = g(x_n)$

Procedura:

1. Individuare il punto $g(x_n)$
2. Proiettiamo $g(x_n)$ sulla retta $y = x$
3. Riportiamo il punto di intersezione sull'asse x
4. Quest'ultimo rappresenta x_{n+1}
5. Ripetere, iterando $x_{n+1} = g(x_n)$



Iterazioni di punto fisso (geometricamente)

- Costruisce geometricamente una «ragnatela» di segmenti che si avvicinano a $y = x$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$