eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

Lezione 5.4a

EDO lineari del primo ordine ed EDO non lineari a variabili separabili

Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

- **Introduzione** sulle **Equazioni differenziali ordinarie (EDO)**

- Soluzione in forma chiusa per classi di EDO del primo ordine

  - ✓ **EDO lineari del primo ordine**

  - ✓ EDO non lineari a variabili separabili

  - ✓ **Equazione delle logistica**

Risoluzione di EDO (EDO lineari del 1°ordine)

- EDO del primo ordine dove f dipende linearmente da y

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$\Downarrow$$

$$y'(x) + \boxed{P(x)y} = Q(x)$$

- $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni continue arbitrarie (dipendono solo da x)
- $x \in I = (a, b)$

Caso Omogeneo
$Q(x) = 0$

Caso Non Omogeneo
$Q(x) \neq 0$

Risoluzione di EDO di 1° ordine lineari: caso non-omogeneo

- Problema di Cauchy (caso non-omogeneo $Q(x) \neq 0$)

$$\begin{cases} y' + P(x)y = Q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Integrale Particolare

soluzione

$$y = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{-A(\xi)} d\xi$$

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} P(\xi) d\xi$$

- Se $Q(x) = 0$ si riottiene la soluzione del caso omogeneo

Risoluzione di EDO di 1° ordine lineari: caso non-omogeneo

- **Verifica a posteriori** dell'esattezza della soluzione

$$y = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{-A(\xi)} d\xi$$

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} P(\xi) d\xi$$

- ✓ Calcolando e verificando

$$y'(x) + P(x)y = Q(x)$$

$$y(x_0) = y_0$$

- ✓ Si riesce anche a dimostrare che questa è l'<u>unica soluzione</u>

Risoluzione di EDO di 1° ordine lineari: caso non-omogeneo

- Esempio:

$$\begin{cases} xy'(x) + (1-x)y = e^{2x} \\ y(1) = y_0 \end{cases} \qquad x \in (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow \quad y'(x) + \frac{1-x}{x} y = \frac{e^{2x}}{x} \qquad \begin{cases} P(x) = \frac{1-x}{x} \\ Q(x) = \frac{e^{2x}}{x} \end{cases}$$

$$y = y_0 e^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_0}^{x} Q(\xi) e^{-A(\xi)} d\xi$$
$$A(x) = \int_{x_0}^{x} P(\xi) d\xi$$

soluzione $\quad y(x) = \frac{e^{2x} + K e^{x}}{x} \qquad K = \frac{y_0}{e} - e$

Soluzione in forma chiusa/esplicita