eCAMPUS UNIVERSITÀ

DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Metodi numerici per equazioni differenziali ordinarie

Lezione 6.5b

Metodo del punto medio e il Metodo di Crank-Nicolson

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- **Esempio:**

Soluzione esatta

$$\begin{cases} y'(x) = -y^2 & x \in (0,3] \\ y(0) = 1 \end{cases} \longrightarrow y(x) = \frac{1}{1+x}$$

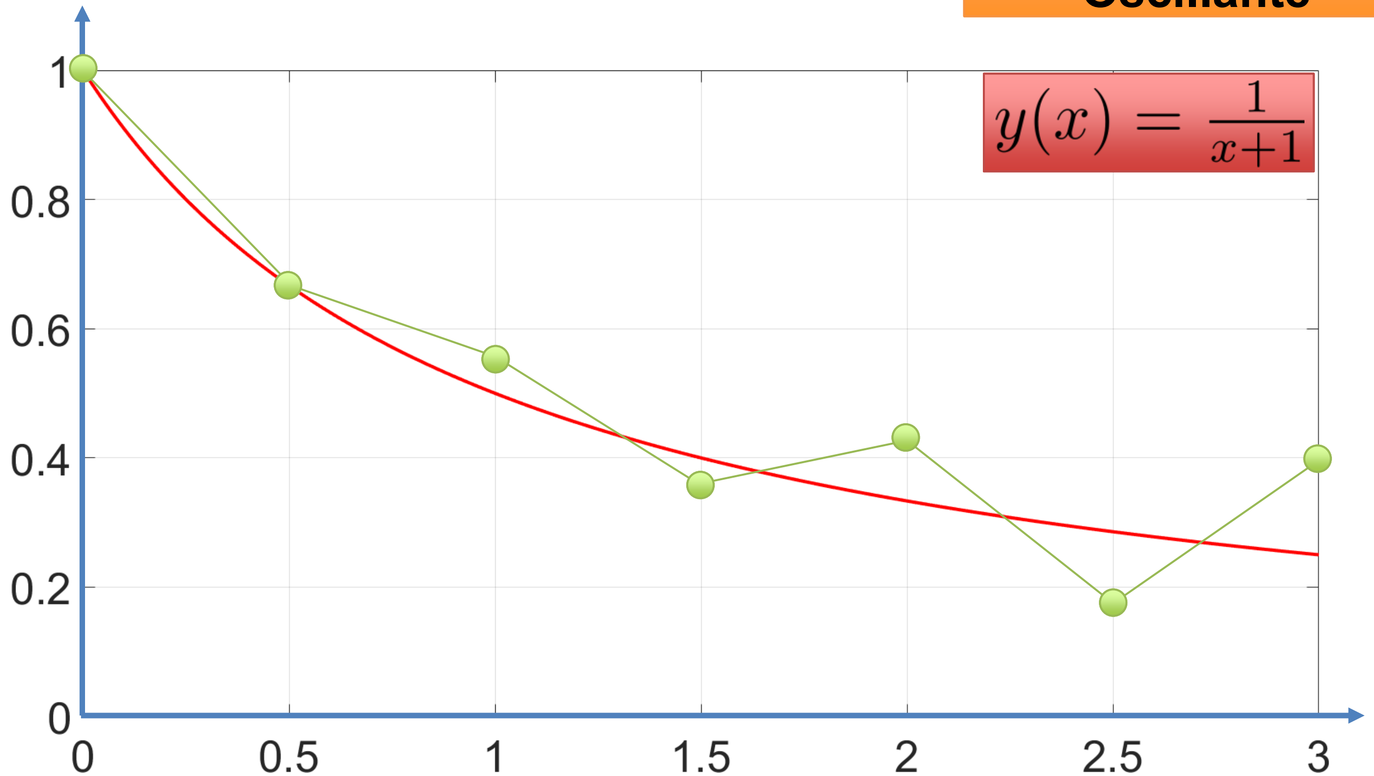
$$I = [0,3] \quad x_0 = 0,\ u_0 = 1 \ + \ x_1 = x_0 + h,\ u_1 \longleftarrow$$ Metodo di Heun

- Applicando **il metodo del Punto Medio** (PM)

$$\boxed{u_{k+1} = u_{k-1} + 2hf(x_k, u_k) \qquad k \geq 1}$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

➢ La soluzione con PM ed $h = 0.5$ → **Andamento Oscillante**



➢ Il metodo del PM genera una soluzione oscillante → **Stabilità**

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Introduciamo un altro metodo del secondo ordine: **Crack-Nicolson (CN)**
- **CN** si basa sulla definizione di integrale
- Calcolando la primitiva di ambo i membri della EDO

$$y'(x) = f(x, y(x)) \Longrightarrow y(x'') - y(x') = \int_{x'}^{x''} f(x, y(x))dx$$

- Prendendo $x' = x_k, \quad x'' = x_{k+1} = x_k + h$

$$y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx$$

- Si può calcolare l'integrale

Formula dei Trapezi

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x))dx = \frac{h}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right] - \frac{h^3}{12} f''(\xi_k, y(\xi_k))$$

Resto

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = \frac{1}{2}\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right] + \boxed{O(h^2)}$$

- Da cui si ricava la **formula iterativa di CN**

$$\boxed{u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1})\right]}$$

- **Metodo di CN** si riformula (**nel metodo implicito**)

$$u_{k+1} = g(u_k, u_{k+1}) \quad g(u_k) = u_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1})\right]$$
$$k = 0, \ldots, n-1$$

Metodo di CN è un metodo a un passo
del secondo ordine

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- Consideriamo la seguente EDO

$$\begin{cases} y'(x) = -y^2 & x \in (0,3] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Applicando **CN**

$$u_{k+1} = u_k + \frac{h}{2}\left[f(x_k, u_k) + f(x_{k+1}, u_{k+1})\right]$$

$$u_{k+1} = u_k - \frac{h}{2}\left[u_k^2 + \boxed{u_{k+1}^2}\right] \quad k = 0, \ldots, n-1$$

- In questo caso il termine u^2 è valutato in $k+1$

$$F(z) = \frac{h}{2} z^2 + z - u_k + \frac{h}{2} u_k^2$$

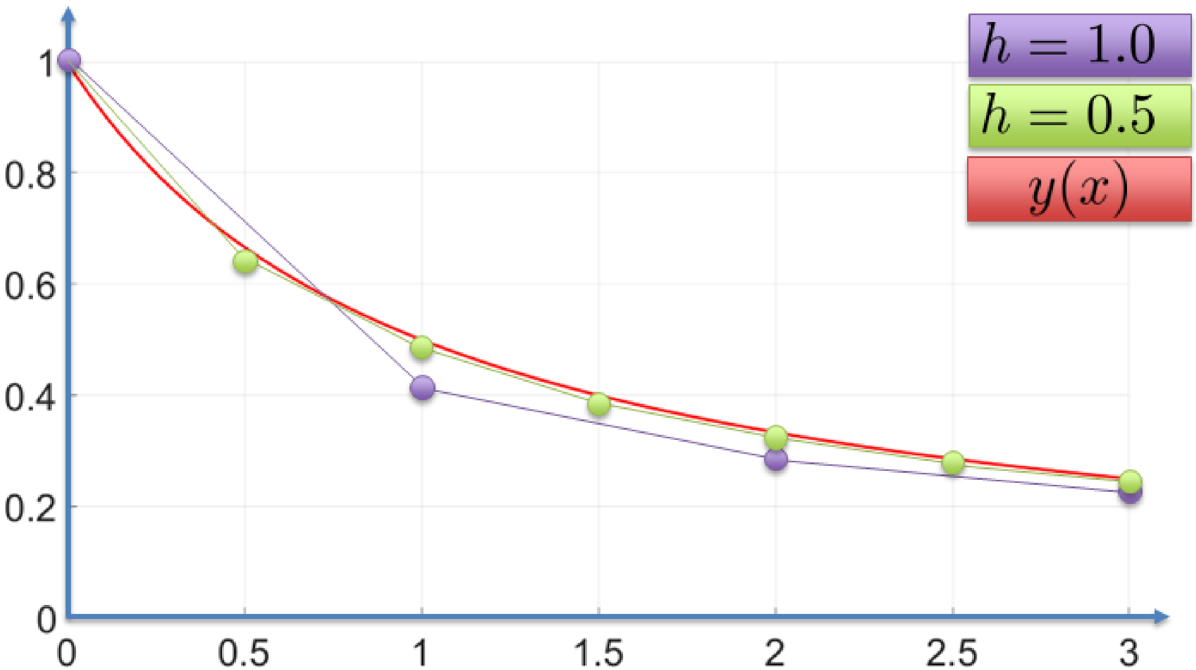
Equazione non lineare

$$z = u_{k+1}$$

Metodi numerici per le equazioni differenziali ordinarie

- L'errore di approssimazione E è <u>il massimo commesso</u> nei vari nodi

$$E = \max_{k=0,\dots,n} \left| \frac{1}{1+x_k} - u_k \right|$$



h	E
0.5	0.0224
0.25	0.0049
0.125	0.0012
0.0625	0.0003

Per h che si dimezza <u>l'errore si riduce di un fattore 4</u>

Integrazione numerica dei Trapezi $\Rightarrow O(h^2)$