Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di equazioni differenziali ordinarie

Lezione 5.3b

Integrale generale, Integrale particolare e curva integrale

Risoluzione di EDO (Formule esplicite per le EDO)

- Consideriamo una **serie di famiglie di EDO**

<u>Obiettivo:</u> trovare delle relazioni esplicite che legano la soluzione y alla variabile x

- Formule per <u>rappresentare la soluzione in forma chiusa/esplicita</u>

$$y(x) = ?$$

- Iniziamo considerando le **EDO del primo ordine**:

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

Risoluzione di EDO (EDO del 1° ordine lineari)

- EDO del primo ordine dove f dipende linearmente da y

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

$$\Downarrow$$

$$y'(x) + \boxed{P(x)y} = Q(x)$$

- $P(x)$ e $Q(x)$ sono funzioni continue arbitrarie (dipendono solo da x)
- $x \in I = (a, b)$

Risoluzione di EDO (EDO 1° ordine lineari: caso omogeneo)

- EDO del primo ordine dove f dipende linearmente da y

$$y'(x) + \boxed{P(x)y} = Q(x)$$

- Consideriamo il **caso omogeneo** $Q(x) = 0$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{y' + P(x)y = 0}$$

- Supponiamo $y(x) \neq 0 \ \forall x \in I$

$$\Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} = -P(x)$$

Risoluzione di EDO (EDO 1° ordine lineari: caso omogeneo)

- EDO del primo ordine dove f dipende linearmente da y
- **Caso omogeneo** $Q(x) = 0$

$$\frac{y'}{y} = -P(x) \qquad + \qquad \frac{y'}{y} = \frac{d}{dx}(\log x)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\log y) = -P(x) \xrightarrow{\text{integrando}} \log y = -\int P(x)dx + C$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int P(x)dx + C}$$

Integrale Generale

$$y = Ce^{-A(x)} \qquad A(x) = \int P(x)dx$$

Risoluzione di EDO (EDO 1° ordine lineari: caso omogeneo)

➢ Espressione esplicita/chiusa per $y(x)$

$$y' + P(x)y = 0$$

soluzione

Integrale Generale

$$y = Ce^{-A(x)}$$

$$A(x) = \int P(x)dx$$

➢ **Problema di Cauchy**

$$\begin{cases} y' + P(x)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

soluzione

Integrale Particolare

$$y = y_0 e^{-A(x)}$$

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} P(\xi)d\xi$$