eCAMPUS UNIVERSITÀ | DiSTA

Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Risoluzione di sistema lineari: metodi iterativi

Lezione 3.5a

Metodo di rilassamento SOR e
la matrice di precondizionamento

Risoluzione di sistemi lineari: metodi iterativi

- **Metodi iterativi classici basati sullo splitting**

$$A = P - N$$

- ✓ Generalizzazione del metodo di Gauss-Seidel (GS)
- ✓ **Metodo del rilassamento (SOR)**
- ✓ Reinterpretazione di Jacobi, GS, SOR
- ✓ Concetto di **matrice di Precondizionamento**

Risoluzione di sistemi lineari (Successive Over Relaxation)

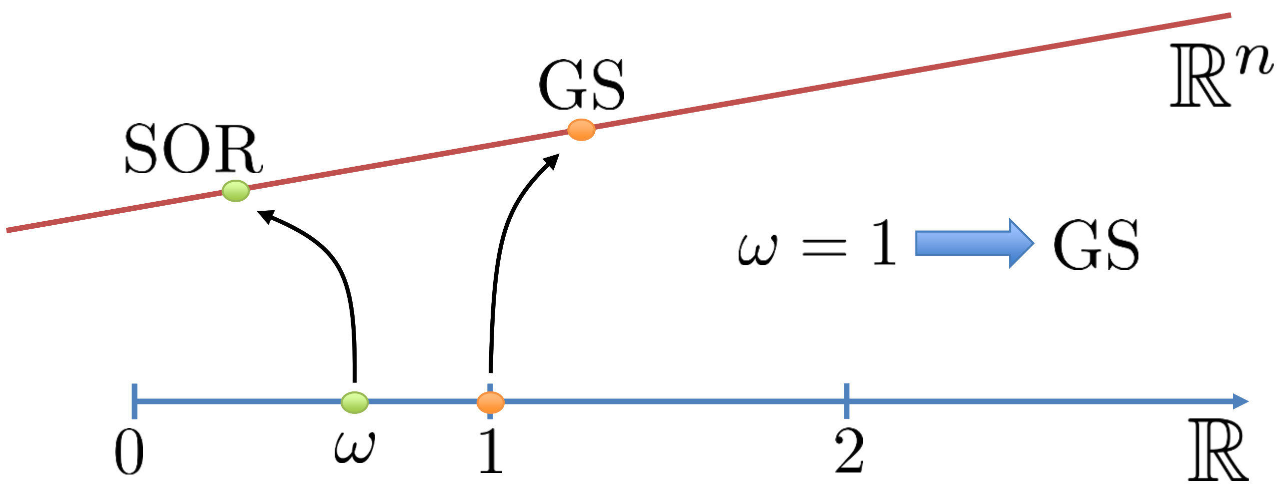
- Metodo di rilassamento (SOR)

  Successive Over Relaxation

  una generalizzazione del metodo di Gauss-Seidel (GS)

- Introduce un **parametro di accelerazione** $\omega > 0$

  $\omega \Rightarrow$ convergenza più rapida



Risoluzione di sistemi lineari (iterate del SOR)

- Al passo k procediamo con una iterata di GS

$$\boxed{y_i^{(k+1)}} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \quad i = 1, \ldots, n, \; k \geq 0$$

- La soluzione $y_i^{(k+1)}$ è una soluzione intermedia («temporanea»)

$$x_i^{(k+1)} = \omega y_i^{(k+1)} + (1-\omega) x_i^{(k)} \quad i = 1, \cdots, n$$

- La soluzione al passo $k+1$ è una combinazione lineare con $\omega > 0$

- ω è detto **parametro di rilassamento** $\quad \omega = 1 \Longrightarrow \mathrm{GS}$

Risoluzione di sistemi lineari (matrice di iter. del SOR)

- SOR introduce un elemento di memoria

$$x_i^{(k)} \longrightarrow \boxed{y_i^{(k+1)}}_{\,\omega} \longrightarrow x_i^{(k+1)}$$

- La matrice di iterazione del SOR dipende da ω

$$\boxed{B(\omega) = (I + \omega D^{-1}E)^{-1}[(1-\omega)I - \omega D^{-1}F]}$$

- Convergenza $\Longleftrightarrow$ $\|B(\omega)\| < 1 \iff \rho(B(\omega)) < 1$

La scelta del parametro ω non è arbitraria

Risoluzione di sistemi lineari (convergenza del SOR)

- Condizione su ω per garantire la convergenza del SOR

$$B(\omega) = \underbrace{(I + \omega D^{-1}E)^{-1}}_{B_1}\underbrace{[(1-\omega)I - \omega D^{-1}F]}_{B_2}$$

$$B(\omega) = B_1 B_2$$

- Si può verificare che

$$\det(B(\omega)) = \det(B_1)\det(B_2) = (1-\omega)^n$$

$$[\rho(B(\omega))]^n \geq \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i(B(\omega))|^n = |1-\omega|^n$$

$$\Rightarrow \rho(B(\omega)) \geq |1-\omega| \xrightarrow{\rho(B) < 1} \boxed{0 < \omega < 2}$$