Corso: Analisi Numerica

Docente: Roberto Piersanti

Calcolo degli autovalori e fondamenti della matematica numerica

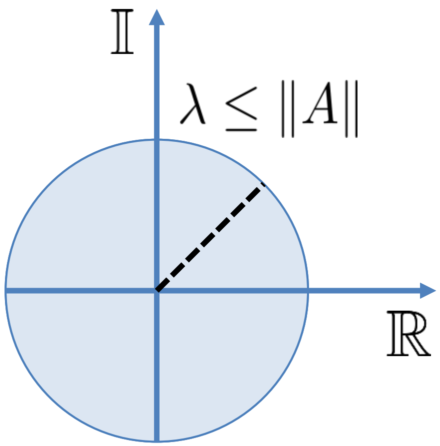
Lezione 4.2b

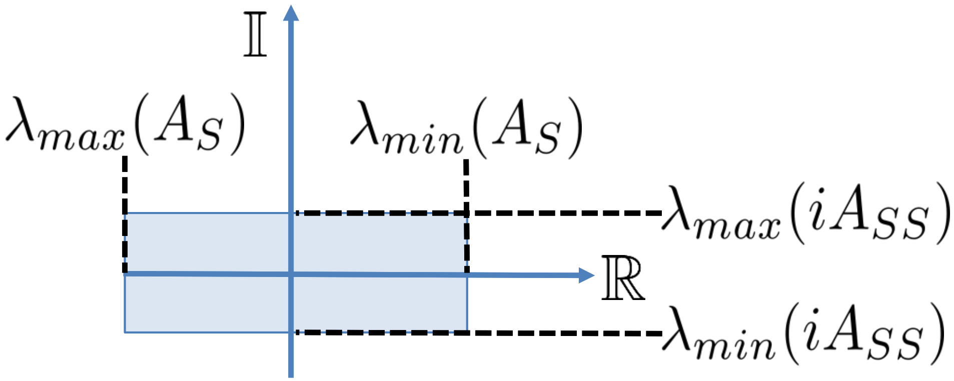
Localizzazione degli autovalori

Localizzazione degli autovalori (Teorema di Gershgorin)

- Abbiamo visto <u>due strumenti</u> di localizzazione degli autovalori

$$A\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$$





- Teorema di Gershgorin: localizzazione $\lambda \in \mathbb{C}$ di A **<u>ancora più raffinata</u>**

Cerchi riga di una matrice

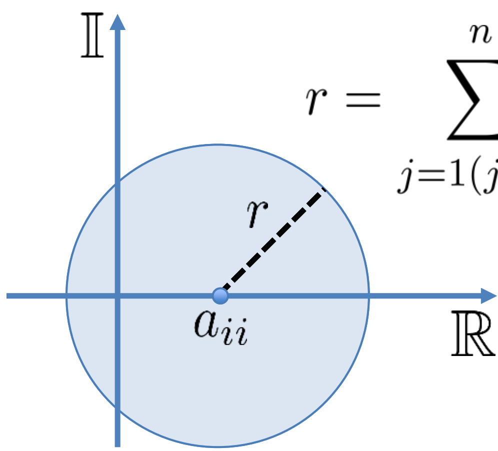
Cerchi colonna di una matrice

Localizzazione degli autovalori (Cerchi riga)

- Consideriamo una matrice A e fissiamo una riga i

$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Cerchio riga R_i di una matrice A: insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che il modulo $|z - a_{ii}|$ è minore uguale degli elementi extradiag.



$$r = \sum_{j=1 (j \neq i)}^{n} |a_{ij}|$$

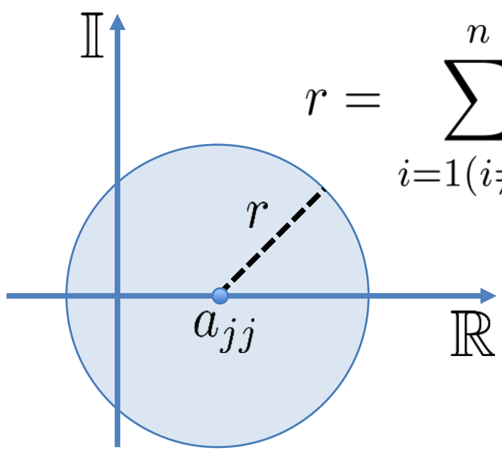
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2}} & & a_{ii} & \boxed{\cdots \quad a_{in}} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Localizzazione degli autovalori (Cerchi colonna)

➢ Considieriamo una matrice A e fissiamo la colonna j

$$C_j = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} |a_{ij}| \right\}$$

Cerchio colonna C_j di una matrice A : insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che il modulo $|z - a_{jj}|$ è minore uguale degli elementi extradiag.



$$r = \sum_{i=1 (i \neq j)}^{n} |a_{ij}|$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & a_{jj} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Localizzazione degli autovalori (Teorema di Gershgorin)

- L'unione S_R di tutti i cerchi riga ($R_i, i = 1, \dots, n$)

$$S_R = R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n$$

- Si può dimostrare che

$$\lambda(A) \in S_R$$

Tutti gli autovalori $\lambda \in \mathbb{C}$ di A appartengono a S_R

- Inoltre, dato che $\lambda(A) = \lambda(A^T)$

$$\lambda(A) \in S_C$$

Tutti gli autovalori $\lambda \in \mathbb{C}$ di A appartengono a S_C

$$S_C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_n$$

Localizzazione degli autovalori (Teorema di Gershgorin)

Cerchi riga

$$\lambda(A) \in S_R$$

$+$

Cerchi colonna

$$\lambda(A) \in S_C$$

$$\lambda(A) \in S_R \cap S_C$$

Tutti gli autovalori $\lambda \in \mathbb{C}$ di A appartengono all'intersezione dell'unione dei cerchi S_R e S_C

Localizzazione degli autovalori (Teorema di Gershgorin)

- Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = 9.69, \quad \lambda_{2,3} = 2.66 \pm i0.69$$

$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \le \sum_{j=1 (j \neq i)}^{3} |a_{ij}| \right\} \quad C_j = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \le \sum_{j=1 (j \neq i)}^{3} |a_{ij}| \right\}$$

$$i = 1, 2, 3 \qquad\qquad j = 1, 2, 3$$

$$R_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 10| \le 5 \} \qquad C_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 10| \le 1 \}$$

$$R_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| \le 2 \} \qquad C_2 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 2| \le 3 \}$$

$$R_3 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 3| \le 1 \} \qquad C_3 = \{ z \in \mathbb{C} : |z - 3| \le 4 \}$$

$$\lambda(A) \in R_1 \cup R_2 \qquad\qquad \lambda(A) \in C_1 \cup C_3$$

Localizzazione degli autovalori (Teorema di Gershgorin)

- Esempio

$$\lambda_1 = 9.69, \quad \lambda_{2,3} = 2.66 \pm i0.69$$