

Metodi matematici della fisica

Pietro Faraggiana

2023

Indice

I	Metodi I	3
1	Spazi a dimensione finita	4
1.1	Primi esempi di strutture vettoriali	4
1.2	Spazi vettoriali (a dimensione finita)	4
1.3	Matrici come trasformazioni lineari	5
1.4	Cambiamenti di base e matrici unitarie	5
1.5	Autovalori e autovettori di una matrice	6
1.6	Diagonalizzazione di una matrice hermitiana	6
1.7	Problemi agli autovalori: esempi. Evoluzione temporale di sistemi dinamici lineari	7
1.8	Proiettori e decomposizione spettrale di una matrice	8
1.9	Considerazioni geometriche elementari sulle trasformazioni del piano reale	9
1.10	Gruppi di simmetrie	9
1.11	Strutture vettoriali e principio di sovrapposizione	10
2	Spazi di Hilbert	11
2.1	Equazione di d'Alembert. Onde stazionarie	11
2.2	Primi problemi concernenti gli spazi a dimensione infinita	12
2.3	La serie di Fourier trigonometrica: le sue prime proprietà e difficoltà	12
2.4	Evoluzione temporale di un'onda elastica	13
2.5	L'equazione del calore	13
2.6	Prodotto scalare e norma: definizione generale	14
2.7	Il concetto di norma come "distanza"	14
2.8	Alcune osservazioni sulla integrazione delle funzioni	15
2.9	Lo spazio $L^2(I)$	15
2.10	Lo spazio di Hilbert: definizione generale. Teorema di Fourier in L^2	16
2.11	Sistemi indipendenti e ortonormali	16
2.12	Serie di Fourier "astratta"	16
2.13	Proprietà dei sistemi completi	17
2.14	Spazi separabili e lo spazio ℓ^2	17
2.15	Proprietà ed applicazioni delle serie di Fourier	19
2.16	Trasformazioni lineari	19
2.17	Continuità, limitatezza e norma di un operatore. Estensione per continuità	20
2.18	Una applicazione concernente il problema della corda elastica	20
2.19	Operatore aggiunto. Operatori unitari. Proiettori	21
2.20	Autovalori ed autovettori. Spettro di un operatore	22
2.21	Problema di Sturm-Liouville	23
2.22	L'equazione di d'Alembert in due dimensioni	24
2.23	Equazione di Sturm-Liouville con punti singolari. Alcune funzioni speciali	24
2.24	Equazione di Laplace e funzioni armoniche. Problemi di Dirichlet e di Neumann	26
2.25	Equazioni alle derivate parziali. Il metodo di d'Alembert	27
2.26	Funzionali. Teorema di Riesz	28
2.27	Operatore aggiunto	28
2.28	Operatori chiusi	28
2.29	Varie nozioni di convergenza per successioni di vettori e operatori	29
2.30	Operatori compatti	29

II	Metodi II	30
3	Funzioni di una variabile complessa	31
3.1	Prime definizioni. Condizioni di olomorfia	31
3.2	Serie di potenze	32
3.3	Integrazione delle funzioni di variabile complessa	33
3.4	Teoremi di Cauchy. Esistenza di tutte le derivate	33
3.5	Sviluppi in serie di Taylor-Laurent	33
3.6	Proprietà degli zeri delle funzioni olomorfe	34
3.7	Singolarità removibili	35
3.8	Punti singolari isolati	35
3.9	Calcolo dei residui. Prime applicazioni al calcolo di integrali definiti	36
3.10	Punto all'infinito	37
3.11	Residuo all'infinito	38
3.12	Punti di diramazione. Tagli. Integrazione lungo tagli	39
3.13	Il lemma di Jordan	40
3.14	Funzioni armoniche e trasformazioni conformi. Il potenziale complesso	41
4	Trasformate di Fourier e di Laplace	43
4.1	Le serie di Fourier come "analisi in frequenza". Dalla serie all'integrale di Fourier	43
4.2	L'analisi in frequenza e il "principio di indeterminazione"	44
4.3	La trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$	45
4.4	Continuità della trasformata di Fourier	46
4.5	Derivazione e trasformata di Fourier	47
4.6	Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$	48
4.7	Inversione della trasformata di Fourier	49
4.8	Proprietà della trasformata di Fourier. La trasformata come operatore unitario	49
4.9	L'"impedenza" dei circuiti elettrici e la trasformata di Fourier	50
4.10	Proprietà della funzione di Green	51
4.11	Prime proprietà della delta di Dirac	51
4.12	Relazioni di dispersione: introduzione	52
4.13	Teorema di Titchmarsh. Trasformate di Hilbert	53
4.14	Relazioni di dispersione di Kramers e Kronig	53
4.15	Presenza di singolarità nella $\chi(\omega)$. Mezzi conduttori	54
4.16	Modello dell'elettrone legato elasticamente	55
4.17	Trasformata di Laplace: prime proprietà	55
4.18	Olomorfia della trasformata di Laplace	56
4.19	Inversione della trasformata di Laplace	57
4.20	Alcune osservazioni sulla trasformata di Laplace	57
4.21	La funzione Γ di Eulero ed altre trasformate di Laplace	58
4.22	Applicazioni alle equazioni alle derivate parziali	58
5	Elementi di teoria delle distribuzioni	60
5.1	Distribuzioni temperate	60
5.2	Convergenza "debole" fra distribuzioni	61
5.3	Derivata delle distribuzioni	62
5.4	Trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate	62
5.5	Distribuzione parte principale $\mathcal{P}(1/x)$	63
5.6	Distribuzioni di Schwartz e distribuzioni a supporto compatto	64
5.7	Proprietà e applicazioni delle distribuzioni	64
5.8	Prodotto e convoluzione fra distribuzioni	65

Parte I

Metodi I

Capitolo 1

Spazi a dimensione finita

Questo capitolo inizia con il ripasso del concetto di spazio vettoriale a dimensione finita. Questo è necessario in vista del capitolo 2.

1.1 Primi esempi di strutture vettoriali

Siano $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ i versori degli assi cartesiani in \mathbf{R}^3 , ogni vettore può essere scritto come

$$\mathbf{x} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3 \equiv (a_1, a_2, a_3), \quad (1.1)$$

in alternativa possiamo usare la convenzione sugli indici ripetuti ($x = a_i e_i$).

In natura ci sono un sacco di grandezze che possono essere descritte come vettori, un esempio è la velocità. Gli spazi vettoriali sono di uso comune anche in matematica, infatti le soluzioni di un'equazione differenziale formano uno spazio vettoriale.

Un ultimo esempio può essere la polarizzazione della luce. La luce presenta una terna ortogonale composta da \mathbf{k} , \mathbf{E} e \mathbf{B} , la sua polarizzazione dipende dalle componenti di \mathbf{E} : se le due componenti non presentano sfasamento allora la polarizzazione è rettilinea e lo stato di polarizzazione si descrive attraverso il vettore a componenti reali (E_1, E_2), se invece lo sfasamento è non nullo allora abbiamo una polarizzazione circolare (o ellittica) che può essere descritta attraverso un vettore nello spazio complesso \mathbf{C}^2 ; un esempio di base per questo spazio è $E^{(1)} = (1, 0)$, $E^{(2)} = (0, 1)$ oppure $E^{(+)} = (1, i)$, $E^{(-)} = (1, -i)$.

1.2 Spazi vettoriali (a dimensione finita)

Per come abbiamo definito un vettore nella precedente sezione è ovvio che ogni n-upla di numeri reali (o complessi) individui biunivocamente un vettore nel campo \mathbf{R}^n (\mathbf{C}^n), questo ci assicura anche che ogni spazio vettoriale è isomorfo (esiste un'applicazione biunivoca tra due spazi) a \mathbf{R}^n (\mathbf{C}^n a seconda del campo).

Forse la più importante nozione che accompagna lo spazio vettoriale è quella di prodotto scalare. Esso può essere generalizzato al campo complesso come

$$(x, y) = x_i^\dagger y_i. \quad (1.2)$$

Si osservi come per quale dei due vettori venga preso l'aggiunto è solo una convenzione e potremmo anche prendere il coniugato del secondo vettore senza perdere di generalità (tuttavia se scegliamo una convenzione è bene mantenere la stessa fino alla fine della trattazione). Alcune proprietà sono:

$$\begin{aligned} (x, y)^* &= (y, x); & (x, y + z) &= (x, y) + (x, z); \\ (x, \lambda y) &= \lambda(x, y); & \|\lambda x\| &= |\lambda| \|x\|. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Il prodotto scalare (o hermitiano oppure ancora interno) ci permette anche di definire la norma

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{1/2}. \quad (1.4)$$

Un vettore si dice normalizzato se $\|x\| = 1$ e ortogonale se $(x, y) = 0$. Un insieme di vettori viene invece detto ortonormale se

$$(x^{(i)}, x^{(j)}) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad (1.5)$$

dove δ è la delta di Kronecker. Un esempio di base ortonormale è la base canonica.

Se la base di uno spazio è ortonormale allora possiamo trovare la componente k -esima di un vettore con il prodotto scalare: $(e^{(k)}, x)$. Questo ci permette di ridefinire un vettore come

$$x = \sum_{i=1}^n e^{(i)} (e^{(i)}, x). \quad (1.6)$$

1.3 Matrici come trasformazioni lineari

Dati due spazi vettoriali V e V' di dimensione finita n e m con basi ortonormali $e^{(i)}$ ed $e'^{(j)}$ e sia T una trasformazione lineare

$$T : V \rightarrow V'. \quad (1.7)$$

Per definire l'azione di T sui vettori è sufficiente osservare la sua azione sui vettori della base

$$T e^{(i)} = \alpha_j^{(i)} e'^{(j)} \quad (1.8)$$

(è implicita la convenzione sugli indici j), la trasformazione è inoltre univocamente determinata in questo modo.

Volendo costruire la matrice possiamo individuare l'elemento ji (cioè riga j -esima e colonna i -esima) della matrice T costruita rispetto alle basi scelte utilizzando

$$(e'^{(j)}, T e^{(i)}) = T_{ji}. \quad (1.9)$$

Data la matrice T possiamo osservare la sua azione su un vettore x usando la moltiplicazione "riga \times colonna" (ovviamente il vettore deve essere una colonna). Possiamo definire anche la composizione di più matrici come

$$Tx = T_2(T_1 x) = x''. \quad (1.10)$$

Definiamo adesso la matrice aggiunta come un'applicazione lineare di uno spazio V in se stesso, allora

$$(T^\dagger)_{ij} = T_{ji}^*. \quad (1.11)$$

La matrice T^\dagger gode della seguente proprietà

$$(T^\dagger)_{ij} = T_{ji}^*. \quad (1.12)$$

Se inoltre $T = T^\dagger$ allora la matrice è detta hermitiana o autoaggiunta.

1.4 Cambiamenti di base e matrici unitarie

Dato uno spazio vettoriale in sé, esistono alcune trasformazioni M che hanno la proprietà di conservare il prodotto scalare

$$(Mx, My) = (x, y). \quad (1.13)$$

Affinché una matrice abbia questa proprietà essa deve soddisfare la condizione

$$M^\dagger M = \mathbf{I}, \quad (1.14)$$

in tal caso la trasformazione è detta unitaria. In particolare, quindi, le trasformazioni unitarie conservano la norma dei vettori e l'ortogonalità; inoltre trasformano basi ortonormali in basi ortonormali. Le trasformazioni unitarie sono il caso generale delle trasformazioni ortogonali (campo reale). Le matrici unitarie sono invertibili, infatti

$$\det(M^\dagger M) = |\det M|^2 = 1, \quad (1.15)$$

(una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero) dunque $\det M = e^{i\alpha}$ se unitaria e $\det M = \pm 1$ se ortogonale.

Supponiamo adesso di voler passare da una base ortonormale a un'altra tramite trasformazione unitaria e in seguito di usare una applicazione lineare T' sullo spazio, la relazione che lega T' alla stessa trasformazione nello spazio di partenza è

$$T' = UTU^{-1} = UTU^\dagger. \quad (1.16)$$

Il seguente diagramma è un ottimo riassunto del concetto:

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{U} & \bar{x} \\ T \downarrow & & \downarrow T' \\ y & \xrightarrow{U} & \bar{y} \end{array} \quad (1.17)$$

Generalizzando possiamo considerare la trasformazione per basi non ortonormali, l'unica condizione è che la matrice di cambiamento base sia invertibile. Ripercorrendo gli stessi passi costruiamo

$$T' = STS^{-1}, \quad (1.18)$$

tale tipo di trasformazione è detto similitudine.

1.5 Autovalori e autovettori di una matrice

Data una trasformazione T di uno spazio vettoriale V in se stesso, vogliamo vedere se esistono vettori non nulli il cui trasformato è proporzionale all'originale, ovvero

$$Tx = \lambda x. \quad (1.19)$$

Questa equazione si chiama equazione degli autovalori, i vettori x con questa proprietà vengono detti autovettori relativi all'autovalore λ , ovvero il fattore di proporzionalità. Se x e x' sono due autovettori diversi relativi allo stesso autovalore, allora si forma un sottospazio (detto autospazio) dove ogni vettore è ancora un autovettore con lo stesso autovalore, la dimensione di tale autospazio si chiama degenerazione (se la degenerazione è 1 allora l'autovalore è detto non degenere).

Affinché non ci siano soluzioni nulle è sufficiente che

$$\det(T - \lambda I) = 0. \quad (1.20)$$

Questa equazione è detta equazione secolare, nello spazio complesso ha tante soluzioni (non necessariamente distinte) quante le dimensioni dello spazio V . La degenerazione (o molteplicità geometrica) non corrisponde necessariamente alla molteplicità algebrica delle soluzioni.

1.6 Diagonalizzazione di una matrice hermitiana

Sia T una trasformazione lineare di V in se stesso e sia la sua rappresentazione matriciale, rispetto ad una base ortonormale $e^{(i)}$, hermitiana. Innanzitutto osserviamo che l'hermitianeità sia una caratteristica intrinseca della trasformazione, infatti scegliendo una qualsiasi base ortonormale

$$(x, Ty) = (Tx, y) \quad (1.21)$$

che è una delle possibili condizioni per l'hermitianeità. Si può allora dimostrare che per una trasformazione hermitiana

1. Gli autovalori sono tutti reali;
2. Gli autovettori costituiscono una base ortogonale dello spazio;
3. Gli autovettori con autovalori relativi distinti sono ortogonali, è comunque possibile scegliere autovettori ortogonali nel sottospazio creato da autovettori degeneri;

4. Esiste una trasformazione unitaria U tale che la matrice trasformata $T' = UTU^\dagger$ risulta una matrice diagonale i cui elementi sono gli autovalori

$$T' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Una matrice hermitiana è quindi completamente diagonalizzabile con una trasformazione unitaria.

Più in generale possiamo definire la classe delle matrici normali come quelle matrici che godono della proprietà

$$NN^\dagger = N^\dagger N. \quad (1.23)$$

Queste matrici sono il caso generale delle hermitiane e delle unitarie e sono tutte e sole quelle godono delle proprietà 2-3-4.

Vediamo adesso alcuni teoremi.

Teorema.

Se due trasformazioni T e S commutano, allora esiste una base di vettori che sono contemporaneamente sia autovettori di T e di S .

Questo significa che le due matrici sono diagonalizzabili simultaneamente, cioè con la stessa matrice unitaria U (ovviamente in generale devono essere hermitiane).

Teorema.

Se T e S hanno una base di autovettori comuni, esse commutano.

Questo teorema è l'opposto del precedente. Ovviamente può avvenire che una matrice T non normale possieda un numero di autovettori indipendenti (ma non ortogonali) uguale alla dimensione dello spazio, in tal caso gli autovettori possono essere scelti come base non ortonormale dello spazio e la matrice T si può diagonalizzare mediante la trasformazione di similitudine $T' = STS^{-1}$

1.7 Problemi agli autovalori: esempi. Evoluzione temporale di sistemi dinamici lineari

Vediamo come risolvere equazioni differenziali attraverso l'utilizzo del problema degli autovalori. Dato un sistema di n equazioni differenziali

$$\frac{dx_i}{dt} = A_{ij}x_j(t) \quad (1.24)$$

(convenzione somma su j) cerchiamo soluzioni del tipo

$$x_i(t) = c_i e^{\alpha t}, \quad (1.25)$$

dove le c_i sono costanti e α è la stessa per ogni i . Queste soluzioni sono dette soluzioni normali (ci daranno infatti i modi normali). Sostituendo (1.19) in (1.18) e indicando con \mathbf{c} il valore dei componenti c_i si ottiene

$$\alpha \mathbf{c} = A \mathbf{c} \quad (1.26)$$

che è un'equazione agli autovalori. Se $\bar{\alpha}$ è un autovalore di A e $\bar{\mathbf{c}}$ è il corrispondente autovettore allora $x_i = \bar{c}_i e^{\bar{\alpha} t}$. Tipicamente il problema richiede di trovare come la posizione varia nel tempo, allora in questo caso il sistema è detto sistema dinamico lineare e gli autovalori si diranno costanti di tempo caratteristiche del sistema. Come possiamo osservare A possiede n autovalori e altrettanti autovettori, se questi sono indipendenti avremo una base di soluzioni. Infatti non avendo i dati iniziali non è generalmente possibile trovare una soluzione univoca ma uno spazio di soluzioni. Se ci vengono date le condizioni iniziali allora ci troviamo di fronte ad un problema di Cauchy. In questo caso è possibile trovare la soluzione combinando linearmente le soluzioni generali

$$\mathbf{x}(t) = \sum_k b_k \mathbf{c}^{(k)} e^{\alpha_k t}. \quad (1.27)$$

In realtà potevamo risolvere il problema osservando che la soluzione era

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0). \quad (1.28)$$

I due metodi sono analoghi nel caso di n autovettori indipendenti, in caso contrario non è applicabile il primo metodo di soluzione (non abbiamo la base). Per utilizzare il secondo metodo è bene osservare che

$$e^M \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!} = \mathbf{I} + M + \frac{M^2}{2!} + \frac{M^3}{3!} + \dots \quad (1.29)$$

In questo modo se ad esempio abbiamo una matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, allora

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Alcuni esempi possono essere: un sistema composto da 3 masse collegate da due molle, un trasformatore e i polarizzatori.

Un altro esempio non tipico di utilizzo del problema degli autovalori è la diagonalizzazione di una forma quadratica. La forma più generale di una conica con centro nell'origine è

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, Ax) = 1. \quad (1.31)$$

Questa equazione è una forma quadratica che può essere diagonalizzata attraverso una matrice unitaria. La diagonalizzazione in questo caso corrisponde al ruotare gli assi cartesiani nella posizione degli assi di simmetria della conica.

1.8 Proiettori e decomposizione spettrale di una matrice

I proiettori sono un tipo di trasformazione lineare di particolare importanza. Per definirli prendiamo uno spazio vettoriale V di dimensione n , sia V_1 un suo sottospazio di dimensione n_1 e V_2 il complemento di dimensione n_2 . Possiamo scrivere V come somma diretta dei due sottospazi e ogni vettore di V si può decomporre in modo unico nella forma

$$x = x_1 + x_2, \quad x_i \in V_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.32)$$

Possiamo definire i proiettori P_i come gli operatori che associano ad ogni vettore x la proiezione ortogonale x_i su V_i :

$$P_1 x = x_1, \quad P_2 x = x_2. \quad (1.33)$$

I proiettori soddisfano

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \mathbf{I}, & P_1 P_2 &= P_2 P_1 = 0, \\ P &= P^\dagger, & P^2 &= P. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Sia ora T un operatore normale (quindi ha una base ortogonale completa di autovettori). Ovviamente se applichiamo T ad un suo autospazio, la sua funzione sarà unicamente di moltiplicare gli autovettori per l'autovalore. Se P_i sono i proiettori su ogni autospazio, allora

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_k = P_1 x + P_2 x + \dots + P_k x \quad (1.35)$$

e

$$\begin{aligned} Tx &= T(x_1 + x_2 + \dots + x_k) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k = \\ &= \lambda_1 P_1 x + \lambda_2 P_2 x + \dots + \lambda_k P_k x. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Otteniamo così la decomposizione spettrale dell'operatore T :

$$T = \sum_{i=1}^k \lambda_i P_i, \quad P_i P_j = 0 \quad \text{se} \quad i \neq j. \quad (1.37)$$

1.9 Considerazioni geometriche elementari sulle trasformazioni del piano reale

Vediamo adesso alcune considerazioni elementari di carattere geometrico da \mathbf{R}^2 a \mathbf{R}^2 . Consideriamo in \mathbf{R}^2 una trasformazione che trasforma (x_1, x_2) in (x'_1, x'_2) con la legge

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2. \end{cases} \quad (1.38)$$

Questa trasformazione può essere scritta come

$$x' = Ax + b, \quad (1.39)$$

in questa forma è più facile osservare che se $b \neq 0$ allora la trasformazione non è lineare ($T(0) \neq 0$). Questo tipo di trasformazione, insieme all'ipotesi $\det A \neq 0$ per garantire la biunivocità, è detto trasformazione affine. La composizione di due trasformazioni affine è anch'essa affine, simbolicamente possiamo scrivere

$$(A_1, b_1) \cdot (A, b) = (AA_1, A_1b + b_1). \quad (1.40)$$

L'identità viene scritta $(I, 0)$ ed esiste l'inversa $(A^{-1}, A^{-1}b)$.

L'insieme G delle affinità forma un gruppo, citiamo alcuni importanti sottogruppi:

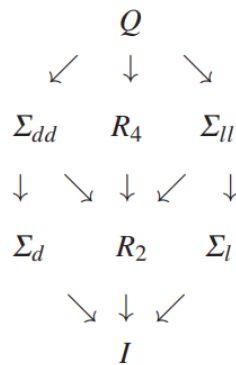
- Sottogruppo abeliano (commutativo), ovvero l'insieme delle trasformazioni del tipo (I, b) ;
- Sottogruppo delle trasformazioni lineari, ovvero l'insieme delle trasformazioni del tipo $(A, 0)$;
- Sottogruppo euclideo, ovvero l'insieme delle trasformazioni (A, b) dove A è ortogonale (trasformazioni rigide);
- Sottogruppo delle dilatazioni (omotetie), ovvero l'insieme delle trasformazioni del tipo $(\alpha I, b)$.

1.10 Gruppi di simmetrie

Come esempio di gruppo, la cui definizione è data nel capitolo 6, vediamo il gruppo di simmetria del quadrato. Possiamo riassumere gli elementi di questo gruppo come

$$Q = \{I, R_\pi, R_{\pi/2}, R_{3\pi/2}, S_d, S_{d'}, S_l, S_{l'}\} \quad (1.41)$$

dove I è l'identità, R_α è la rotazione per un certo angolo, S_d sono le simmetrie lungo le diagonali e S_l le simmetrie lungo gli assi. Osserviamo che tutti gli elementi del gruppo possono essere generati a partire da S_d e S_l . Chiudiamo l'esempio e la sezione guardando la "gerarchia dei sottogruppi"



1.11 Strutture vettoriali e principio di sovrapposizione

Lo spazio vettoriale è la struttura perfetta per studiare il principio di sovrapposizione e in meccanica quantistica questo principio è fondamentale. Lo stato di una particella è rappresentato da un vettore, le grandezze sono rappresentate da matrice hermitiane i cui autovalori sono le possibili misure. Lo stato di una particella può essere scritto come sovrapposizione di questi autovettori

$$x = \sum_i a_i v_i, \quad (1.42)$$

dove $|a_i|^2$ è la probabilità che un autovalore sia il risultato della misura (se x è normalizzato). Infine la media delle misure di una grandezza è

$$\langle T \rangle = (x, T x).$$

Capitolo 2

Spazi di Hilbert

2.1 Equazione di d'Alembert. Onde stazionarie

Studiamo il movimento di una corda elastica, tesa ai suoi estremi, la cui posizione di equilibrio giace sull'asse delle x . È chiaro che il comportamento della corda è descritto da una funzione dipendente dal tempo e dal punto della corda $u(x, t)$, si può dimostrare (guardare meccanica classica), che questa funzione obbedisce all'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

dove v è una costante arbitraria (in questo caso $v = \sqrt{\tau/\rho}$ dove τ è la tensione della corda e ρ è la densità lineare). Questa equazione è un'equazione alle derivate parziali, nota con il nome di equazione di d'Alembert o equazione delle onde. Gli estremi vengono fissati a

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad (2.2)$$

queste sono dette condizioni di bordo. Cerchiamo soluzioni particolari della forma

$$u(x, t) = X(x)T(t), \quad (2.3)$$

questo procedimento si chiama separazione delle variabili. In questo modo sostituendo in (2.1) otteniamo

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{v^2} \frac{T''}{T}. \quad (2.4)$$

Studiando l'equazione ci si accorge facilmente che l'unico modo che sia vera per ogni x ad ogni t , è necessario che

$$\begin{cases} X'' - CX = 0 \\ T'' - C v^2 T = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Partiamo dallo studio di X . La soluzione più generale è

$$X(x) = A e^{\sqrt{C}x} + B e^{-\sqrt{C}x}, \quad (2.6)$$

ma con le condizioni di contorno troviamo che

$$C = -\frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad (2.7)$$

dunque otteniamo

$$X(x) = X_n(x) = A_n (e^{ik_n x} - e^{-ik_n x}) = a_n \sin(k_n x), \quad (2.8)$$

dove $k_n = n\pi/L$. In questo caso $n = 1, 2, 3, \dots$ essendo che $n = 0$ è la soluzione identicamente nulla e i valori negativi di n non portano a nuove soluzioni.

Non abbiamo condizioni di contorno per T , dunque la soluzione più generale è data da

$$T(t) = A'_n \sin(\omega_n t) + B'_n \cos(\omega_n t) = E_n \cos(\omega_n t + \delta_n), \quad (2.9)$$

dove $\omega = \omega_n = vk_n$ e $A'_n, B'_n, E_n, \delta_n$ sono costanti arbitrarie.

Mettendo tutto insieme (a meno di un fattore moltiplicativo arbitrario) otteniamo infinite soluzioni

$$u_n(x, t) = \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n). \quad (2.10)$$

Queste soluzioni sono dette onde stazionarie e descrivono i modi più semplici di oscillazione della corda (modi armonici o normali).

2.2 Primi problemi concernenti gli spazi a dimensione infinita

Osserviamo che l'equazione per lo studio della X della precedente sezione, può essere scritta anche come

$$\frac{d^2}{dx^2} X = -k^2 X. \quad (2.11)$$

Questa equazione può essere vista anche come equazione degli autovalori dell'operatore derivata seconda (un operatore di dimensione infinita). Come è ovvio che sia avremo infiniti autovettori (che corrispondono alle infinite soluzioni già viste), questi autovettori vivono in uno spazio vettoriale e quindi anche la loro combinazione lineare è una soluzione. Ci troviamo quindi davanti a delle serie di soluzioni che doveremo imparare a studiare e capire come convergano.

2.3 La serie di Fourier trigonometrica: le sue prime proprietà e difficoltà

Sia $f(x)$ una funzione definita nell'intervallo $(-L, L)$ dove è generalmente continua e dotata di derivata prima anch'essa continua. Consideriamo la serie (detta serie di Fourier trigonometrica)

$$\alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad (2.12)$$

dove

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(x) dx \\ \alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ \beta_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Si dimostra che valgono le seguenti proprietà di convergenza:

- Data $f(x)$ prima definita e con $f(L) = f(-L)$ allora la serie di Fourier converge uniformemente alla $f(x)$;
- Data $f(x)$ prima definita, la serie di Fourier converge in ogni punto, ha come risultato $f(x)$ in tutti i punti in cui $f(x)$ è continua, mentre nelle discontinuità x_0 converge alla media $\frac{1}{2}[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$. Infine nei punti estremi $\pm L$ la serie converge alla media $\frac{1}{2}[f(L) + f(-L)]$.

Osserviamo innanzitutto che la serie definisce una funzione che si estende al di fuori del dominio della funzione originale $f(x)$, e che essa è periodica con periodo $2L$. Inoltre nei punti dove $f(x)$ presenta discontinuità, essa non può convergere uniformemente, questo è dato dal fatto che una serie di funzioni continue che converge uniformemente ha per somma una funzione continua. Osserviamo che una serie di funzioni $\sum_n f_n(x)$ è detta convergere totalmente se esiste una successione di costanti M_n tali che $|f_n(x)| \leq M_n$ e la serie numerica $\sum_n M_n$ è convergente. Essendo che la convergenza totale implica la convergenza uniforme, segue che se

$$\sum_n |\alpha_n| + \sum_n |\beta_n| < \infty \quad (2.14)$$

allora la $f(x)$ risulta continua e soddisfa $f(L) = f(-L)$.

L'insieme delle funzioni che stiamo considerando forma uno spazio vettoriale, in analogia con la scomposizione di un vettore osserviamo che la serie di Fourier può essere scomposta nei vettori

$$1, \quad \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right); \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

che formano dunque una base. Definendo il prodotto scalare tra funzioni come

$$(f, g) = \int_{-L}^{+L} f^*(x)g(x)dx \quad (2.16)$$

allora ci accorgiamo anche che queste funzioni sono ortogonali. Volendo possiamo normalizzarle come

$$\frac{1}{\sqrt{2L}}, \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right); \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.17)$$

Otteniamo così un sistema ortonormale per cui $(f^{(m)}, f^{(n)}) = \delta_{nm}$.

Un altro modo di scrivere la serie di Fourier è come

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f^{(n)} \quad (2.18)$$

dove

$$a_0 = \sqrt{2L}\alpha_0, \quad a_{2n-1} = \sqrt{L}\beta_n, \quad a_{2n} = \sqrt{L}\alpha_n. \quad (2.19)$$

Possiamo spingere l'analogia con gli spazi vettoriali oltre. Per farlo tuttavia sarà necessario definire un opportuno spazio di funzioni dove ogni funzione ammetta la serie di Fourier.

2.4 Evoluzione temporale di un'onda elastica

Sia $f(x)$ una funzione definita con le proprietà assegnate nella precedente sezione, ma definita nell'intervallo $(0, L)$. Estendiamo la funzione in modo dispari a $(-L, L)$, in questo modo avremo funzione dispari $\bar{f}(x)$ definita in $(-L, L)$ che possiamo espandere come

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \quad (2.20)$$

Riprendiamo adesso il problema della corda elastica e affrontiamo il problema di Cauchy (trovare l'esatta funzione che descrive l'evoluzione temporale dell'onda date le condizioni iniziali $f(x) = u(x, 0)$ e $g(x) = \partial u(x, t)/\partial t|_{t=0}$). Cerchiamo di risolvere questo problema partendo da una soluzione più generale di quella per l'equazione di d'Alembert

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) \cos(\omega_n t + \delta_n) \quad (2.21)$$

dove $k_n = n\pi/L$, $\omega_n = vk_n$. Usando le condizioni iniziali troviamo a_n e δ_n risolvendo così il problema. Abbiamo una serie di onde di varia frequenza e ogni frequenza ha una diversa intensità, la prima è chiamata armonica fondamentale ed è quella di intensità maggiore. Infine indipendentemente dalle condizioni iniziali, ogni soluzione presenta una periodicità nel tempo di $2L/v$.

2.5 L'equazione del calore

Un'altra equazione alle derivate parziali è l'equazione del calore (o equazione di Fourier). Questa equazione descrive tipicamente fenomeni irreversibili. Ad esempio può descrivere la temperatura $u(x, t)$ di una sbarretta al variare della posizione e del tempo. L'equazione è

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = C \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.22)$$

dove $C > 0$ è una costante data dalle caratteristiche del mezzo conduttore. Ponendo gli estremi della sbarretta a $x = 0$ e $x = L$, possiamo nuovamente risolvere utilizzando la separazione delle variabili. Otteniamo nuovamente $X_n(x) = \sin(\pi n x/L)$, mentre $T_n(t)$ soddisfa l'equazione

$$\frac{dT_n}{dt} = -\frac{\pi^2 n^2}{CL^2} T_n, \quad (2.23)$$

da cui $T_n(t) \propto e^{\alpha n^2 t}$ con $\alpha = \pi^2/CL^2$. La soluzione generale è

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) e^{-\alpha n^2 t}. \quad (2.24)$$

Per risolvere il problema di Cauchy, è necessario trovare i coefficienti a_n e osservando che l'equazione contiene solo la derivata prima rispetto al tempo, allora vediamo che è sufficiente la sola condizione iniziale $u(x, 0)$.

2.6 Prodotto scalare e norma: definizione generale

Abbiamo parlato di vari prodotti scalari e di norma, vediamo ora di dare delle definizioni generali.

Sia V uno spazio vettoriale, definiamo il prodotto scalare (indicato come (x, y)) come l'applicazione $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ che associa ad ogni coppia di vettori un numero complesso, inoltre sono soddisfatte le seguenti proprietà:

- $(x, y)^* = (y, x)$;
- $(x, x) \geq 0$ e inoltre $(x, x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
- $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$ e quindi : $(\lambda x, y) = \lambda^*(x, y)$;
- $(x, y+z) = (x, y) + (x, z)$.

Definiamo invece come norma (indicata come $\|x\|$) un'applicazione $V \rightarrow \mathbb{R}^+$ che associa ad ogni vettore un reale positivo e soddisfa le seguenti proprietà:

- $\|x\| \geq 0$ e inoltre $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$;
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Disuguaglianza triangolare).

Scriviamo per completezza anche la disuguaglianza di Shwarz

$$|(x, y)| \leq \|x\| \|y\| \quad (2.25)$$

necessaria per molte dimostrazioni sulla norma e prodotto scalare. Osserviamo che il prodotto scalare implica la norma

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}, \quad (2.26)$$

tuttavia il contrario è vero se e solo se tale norma soddisfa la regola del parallelogramma:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2. \quad (2.27)$$

Il prodotto scalare definito durante lo studio della serie di Fourier è un prodotto scalare a tutti gli effetti, esiste anche il prodotto scalare pesato

$$(f, g)_\rho = \int_I f^*(x) g(x) \rho(x) dx \quad (2.28)$$

dove $\rho(x) > 0$ è valido.

2.7 Il concetto di norma come “distanza”

Dati due vettori x, y nello spazio \mathbf{R}^3 , la quantità $\|x - y\|$ esprime la distanza tra i due vettori. Preso un vettore x_0 , l'insieme di vettori tali che $\|x - x_0\| < \delta$ costituisce una palla aperta di raggio δ .

Osserviamo che esistono vari tipi di norma diversi da quello derivato dal prodotto scalare, un esempio può essere $x \rightarrow |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ oppure $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|$. Vediamo che in generale la serie di Fourier non è vicina alla funzione a cui dovrebbe convergere secondo questa norma mentre lo è per quella discendente dal prodotto scalare, questo ci suggerisce che la norma dello spazio vettoriale in cui vivono le funzioni approssimabili dalla serie di Fourier abbia una norma derivata dal prodotto scalare. Definiamo anche la norma

$$\|f\|_1 = \int_I |f(x)| dx, \quad (2.29)$$

che ci sarà utile in seguito.

Un altro importante concetto è quello di spazio completo e di successione di Cauchy: dato uno spazio V in cui è definita una norma, una successione di elementi $x_n \in V$ è di Cauchy se $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$; lo spazio è completo se ogni successione di Cauchy converge ad un elemento dello spazio stesso. Un esempio di insieme completo è quello dei numeri reali, che sono anche il completamento dello spazio dei numeri razionali. Infine vediamo che se una successione x_n è convergente ($\|x_n - x\| \rightarrow 0$), allora è di Cauchy.

2.8 Alcune osservazioni sulla integrazione delle funzioni

Abbiamo definito alcuni tipi di norma attraverso gli integrali, osserviamo tuttavia che la prima proprietà della norma è che essa è pari a 0 se e solo $f(x) = 0$ mentre se invece abbiamo una funzione con solo un numero finito di punti, allora la sua norma è comunque 0. Per ovviare a questo problema è sufficiente convenire che due funzioni uguali quasi ovunque (differiscono solo per un numero finito di punti) sono equivalenti.

Quando si parla di norma è quindi necessario fare riferimento all'integrale di Lebesgue, un integrale che contiene un numero più alto di funzioni integrabili rispetto all'integrale di Riemann. L'esempio tipico è la famosa funzione di Dirichlet, integrabile secondo Lebesgue (con risultato 0), ma non secondo Riemann. Enunciamo due importanti proprietà dell'integrale di Lebesgue:

- Se $F(x)$ è integrabile e $f(x)$ è una funzione tale che $|f(x)| \leq F(x)$, allora che $f(x)$ è integrabile;
- f è integrabile se e solo se lo è $|f|$.

Le funzioni integrabili secondo Lebesgue si dicono sommabili, l'insieme di tali funzioni su un insieme I è dato dallo spazio $L^1(I)$, la cui norma è $\|f\|_1$. Questo spazio è completo rispetto alla sua norma ed è il completamento del suo sottospazio $C^0(I)$ (funzioni continue in I).

Teorema di Lebesgue (convergenza dominata). Sia $f_n(x)$ una successione di funzioni sommabili che converge puntualmente q.o. ad $f(x)$; se esiste $F(x)$ sommabile tale che per ogni n sia $|f_n(x)| \leq F(x)$, allora:

- anche f è sommabile;
- si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx = \int_I f(x) dx. \quad (2.30)$$

2.9 Lo spazio $L^2(I)$

Sia I un qualsiasi intervallo in \mathbf{R}^n (per semplicità ci limiteremo a \mathbf{R}), si indica con $L^p(I)$ l'insieme delle funzioni f tali che esiste finito l'integrale

$$\int_I |f(x)|^p dx. \quad (2.31)$$

L'insieme delle funzioni quadrato sommabili merita particolarmente attenzione. In $L^2(I)$ possiamo definire il prodotto scalare già visto

$$(f, g) = \int_I f^*(x)g(x) dx \quad (2.32)$$

e l'integrale esiste finito per qualunque coppia di funzioni $f, g \in L^2(I)$. Si può notare che se I è un intervallo finito, allora se $f \in L^2(I)$ si ha anche $f \in L^1(I)$ ma non è detto viceversa.

Teorema di Riesz-Fischer. Lo spazio $L^2(I)$ è completo rispetto alla norma

$$\|f\|^2 = \int_I |f|^2 dx \quad (2.33)$$

indotta dal prodotto scalare. Inoltre $L^2(I)$ è il completamento di $C^0(I)$ rispetto a $\|f\|^2$.

Disuguaglianza di Schwarz-Holder. Siano $f \in L^p(I)$ e $g \in L^q(I)$ dove p e q sono numeri tali che $1/q + 1/p = 1$. Allora il prodotto fg è sommabile e vale la disuguaglianza

$$\int_I |fg| dx \leq \left[\int_I |f|^p dx \right]^{1/p} \left[\int_I |g|^q dx \right]^{1/q}. \quad (2.34)$$

2.10 Lo spazio di Hilbert: definizione generale. Teorema di Fourier in L^2

Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale in cui è definito un prodotto scalare e che è completo rispetto alla norma indotta da tale prodotto scalare (in più, anche se non nella definizione, spesso si richiede che abbia dimensione infinita). Quindi spazi come $L^2(I)$, \mathbf{R}^n e \mathbf{C}^n sono spazi di Hilbert.

Consideriamo lo spazio $L^2(I)$, dove I è l'intervallo $(-L, L)$; è evidente che questo spazio ha i requisiti dello spazio che cercavamo per contenere le funzioni approssimabili dalla serie di Fourier.

Teorema di Fourier. Sia $f = f(x) \in L^2(-L, L)$ e siano a_n i prodotti scalari $a_n = (f_n, f)$ fra $f(x)$ e le funzioni $f_n(x)$ del set (2.5); allora la serie di Fourier trigonometrica che così si costruisce risulta convergente alla funzione f nella norma di L^2 (cioè la successione delle somme parziali approssima la funzione f "in media di ordine due").

In questo modo la base (2.5) è una base completa in $L^2(-L, L)$.

2.11 Sistemi indipendenti e ortonormali

Dato un generico spazio di Hilbert H (infinito dimensionale), la condizione necessaria e sufficiente affinché un insieme di vettori sia linearmente indipendente è che il determinante di Gram sia diverso da zero:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \cdots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ (x_n, x_1) & \cdots & & (x_n, x_n) \end{pmatrix} \neq 0. \quad (2.35)$$

Inoltre questi vettori indipendenti generano uno spazio e utilizzando il procedimento di ortonormalizzazione di Schmidt è possibile costruire un insieme di vettori ortonormali che generi lo stesso sottospazio.

2.12 Serie di Fourier "astratta"

Sia $\{e_n\}$ un sistema ortonormale (insieme di vettori che genera un sottospazio) in uno spazio "astratto" di Hilbert H (uno spazio di Hilbert generico dove non è stato specificato il tipo di elementi), fissato un vettore $x \in H$ vogliamo determinare a_n numeri complessi tale che la distanza

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n a_i e_i \right\| \quad (2.36)$$

sia minima. È ovvio che la distanza è minima quando $a_i = (e_i, x)$. Il vettore $\sum^n a_i e_i$ è quindi la proiezione ortogonale di x sul sottospazio generato da $\{e_n\}$, osserviamo anche che

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^n |(e_i, x)|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \quad (2.37)$$

è verificata per ogni n e coinvolge unicamente quantità reali e positive. Per $n \rightarrow \infty$ la (2.20) è chiamata disuguaglianza di Bessel.

I coefficienti a_i sono chiamati coefficienti di Fourier del vettore x rispetto al sistema $\{e_i\}$, e

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) e_i \quad (2.38)$$

è la serie associata.

Il vettore

$$\bar{x}_n = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad (2.39)$$

è la migliore approssimazione di x data dal sistema $\{e_n\}$, ma in generale non coincide con x : ad esempio se prendiamo $h = L^2(I)$ dove I è l'intervallo $(-L, L)$ e come sistema ortonormale $\{L^{-1/2} \sin(\pi n x / L)\}$, allora la serie di Fourier convergerà solo se il vettore è una funzione dispari.

Diciamo che $\{e_i\}$ è un sistema (o set o ancora base) ortonormale completo in H se, per ogni $x \in H$, la serie di Fourier di x rispetto a tale sistema converge nella norma di H ad x stesso.

2.13 Proprietà dei sistemi completi

Vediamo adesso alcune proprietà dei set completi che spesso sono più facili da dimostrare (e sono equivalenti alla definizione di set completo):

- L'insieme delle combinazioni lineari finite

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i \quad (2.40)$$

al variare di n e dei coefficienti a_i è denso in H , cioè ogni vettore $x \in H$ può essere "approssimato" in norma quanto si vuole da una combinazione lineare finita degli $\{e_n\}$. Fra queste combinazioni, quella che approssima meglio ogni prefissato vettore $x \in H$ è quella i cui coefficienti a_i sono dati da $a_i = (e_i, x)$;

- Per ogni $x \in H$ vale la seguente identità:

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(e_n, x)|^2 \quad (2.41)$$

detta identità di Parseval;

- L'unico vettore ortogonale a tutti gli e_n è il vettore nullo, cioè: sia x_0 un vettore tale che per ogni n si abbia $(e_n, x_0) = 0$, allora $x_0 = 0$.

Nelle dimostrazioni può essere utile il seguente lemma (continuità del prodotto scalare):

Sia x_n una successione di vettori convergente ad $x \in H$, cioè $x_n \rightarrow x$ ovvero $\|x_n - x\| \rightarrow 0$, allora, per ogni $y \in H$, si ha

$$(y, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y, x_n). \quad (2.42)$$

Adesso possiamo vedere anche l'identità di Parseval generalizzata: dati $x, y \in H$ scrivibili in serie di Fourier

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} b_i e_i, \quad (2.43)$$

si ha

$$\begin{aligned} (x, y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i, y \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i^* (e_i, y) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i^* b_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* b_i = \sum_{i=1}^{\infty} (x, e_i) (e_i, y). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Questa è chiamata identità di Parseval generalizzata ed è anch'essa una proprietà equivalente alla definizione di set completo.

Nel caso ci trovassimo di fronte un sistema di vettori $\{w_n\}$ non ortogonali, possiamo dimostrare la completezza solo attraverso la prima proprietà che tuttavia deve essere ridefinita: per ogni $x \in H$ e per ogni $\varepsilon > 0$, si possono trovare un intero N ed N opportuni coefficienti α_i in modo che

$$\left\| x - \sum_{i=1}^N \alpha_i w_i \right\| < \varepsilon \quad (2.45)$$

anche se non c'è un procedimento generale per trovare i coefficienti α_i .

2.14 Spazi separabili e lo spazio ℓ^2

Non in tutti gli spazi di Hilbert è possibile costruire un set completo, quelli dove è possibile sono detti separabili.

Vediamo altri esempi di base di L^2 :

- Nell'intervallo $(-L, L)$

$$v_k(x) = e^{i\pi kx/L} = e^{i\omega_k x} \quad ; \quad \omega_k = k \frac{2\pi}{2L}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.46)$$

è un sistema ortogonale che può essere normalizzato come

$$u_k = (2L)^{-1/2} v_k \quad (2.47)$$

osservando che $(v_h, v_k) = 2L\delta_{hk}$. Una funzione di questo spazio può essere approssimata come

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega_k x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c'_k u_k(x), \quad (2.48)$$

dove $c_k = 1/\sqrt{2L}(u_k, f)$. L'identità di Parseval è invece

$$\|f\|^2 = 2L \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2; \quad (2.49)$$

- Nell'intervallo $(0, L)$ sono completi i set $\{\sin \pi nx/L\}$ e $\{1, \cos(\pi nx/L)\}$;
- In \mathbf{R} è set completo

$$e^{-x^2/2} H_n(x) \quad (2.50)$$

e in $(0, \infty)$ lo è

$$e^{-x} L_n(x), \quad (2.51)$$

dove H_n e L_n sono i polinomi di Hermite e Laguerre;

- Infine in generale in I è set completo (non ortonormale) $\{x^n\}$ con $n \geq 0$.

Tutti gli spazi L^2 sono separabili, inoltre L^2 è il completamento di C^∞ rispetto a $\|\cdot\|_2$.

Sia adesso H uno spazio di Hilbert separabile e $\{e_n\}$ un set ortonormale completo in H . Ogni vettore (funzione) $x \in H$ è individuato dalla successione delle sue componenti di Fourier rispetto ad e_n :

$$x \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots) \quad (2.52)$$

e per l'identità di Parseval questa successione gode della proprietà:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty. \quad (2.53)$$

Tutto questo ci suggerisce di considerare lo spazio delle successione $\{a_n\}$ che chiamiamo ℓ^2 . Questo spazio è uno spazio di Hilbert con la seguente definizione di prodotto scalare: date le due successioni $a \equiv \{a_n\}, b \equiv \{b_n\} \in \ell^2$, si definisce il prodotto scalare

$$(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n. \quad (2.54)$$

Possiamo paragonare il ruolo di ℓ^2 per gli spazi di Hilbert separabili, al ruolo di \mathbf{C}^n per gli spazi vettoriali di dimensione n (è quindi un isomorfismo).

Possiamo anche introdurre lo spazio ℓ^1 delle successioni $a \equiv \{a_n\}$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty. \quad (2.55)$$

Questi è però solo uno spazio di Banach (spazio normato completo) e non di Hilbert.

2.15 Proprietà ed applicazioni delle serie di Fourier

Vediamo adesso alcune applicazioni degli sviluppi in serie di Fourier. Supponiamo di avere un sistema con una massa legata ad una molla sottoposta ad una forza $f(t)$ con periodo $2T$. L'equazione del moto è

$$m\ddot{x} + Kx = f(t). \quad (2.56)$$

Per semplicità supponiamo $f(t)$ sia dispari, allora

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \omega_n t \quad \omega_n = n \frac{2\pi}{2T} \quad (2.57)$$

ed essendo anche $x(t)$ periodica con periodo $2T$, allora

$$x(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \omega_n t + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \omega_n t. \quad (2.58)$$

Sostituendo nell'equazione del moto troviamo

$$(-m\omega_n^2 + K)\beta_n = f_n \quad (2.59)$$

se la parentesi è diversa da zero per ogni n , allora abbiamo la soluzione

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{K - m\omega_n^2} \sin \omega_n t. \quad (2.60)$$

Se invece per qualche n la parentesi è zero non abbiamo soluzione (ci troviamo a risonanza). Il motivo per cui alcune casistiche non hanno soluzione è che non sono periodiche o hanno periodo diverso da quello scelto.

Tornando all'equazione delle onde e a quella del calore possiamo fare alcune precisazioni. Le condizioni iniziali devono essere tutte prese in $L^2(0, L)$ e la soluzione $u(x, t)$ del problema delle corda resta, per ogni t fissato, in L^2 . Nel caso dell'equazione del calore la serie converge (per $t > 0$) anche totalmente e $u(x, t)$ diventa immediatamente (superata $t > 0$) derivabile rispetto a x e a t (questo perché se una successione di funzioni derivabili converge puntualmente ad una $f = f(x)$ e se la successione delle derivate è uniformemente convergente, allora la successione delle derivate converge alla derivata $f'(x)$ della f).

Possiamo dare una motivazione più precisa al metodo della separazione delle variabili: basta chiedere che la soluzione sia $\forall t \in \mathbf{R}$ una funzione $L^2(0, L)$, allora si può scrivere la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(t) \sin(nx). \quad (2.61)$$

Sostituendo nell'equazione si trova $\ddot{a}_n = -n^2 a_n$ e si trovano le soluzioni già note.

2.16 Trasformazioni lineari

Possiamo definire una trasformazione (operatore) lineare T tra due spazi di Hilbert

$$T : H \rightarrow H'$$

come

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y); \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \quad x, y \in H. \quad (2.62)$$

La definizione è simile al caso finito ma vedremo che non è semplice definire una trasformazione lineare su tutti i vettori dello spazio, può capitare addirittura che una trasformazione sia applicabile su tutti gli elementi di un set completo senza essere applicabile ai vettori del loro spazio generato, oppure che un vettore sia parte di H ma il suo trasformato non lo sia di H' .

L'insieme dei vettori su cui è definita una trasformazione lineare T costituisce il sottospazio D (dominio) di H , invece il sottospazio di H' costituito dai vettori trasformati Tx si chiama immagine.

2.17 Continuità, limitatezza e norma di un operatore. Estensione per continuità

Se, in dimensione finita, prendiamo un vettore x che tende a zero, anche il vettore trasformato Tx tenderà a zero. Questo non è generalmente vero in dimensione infinita.

Una trasformazione lineare T si dice continua in x_0 ($x_0 \in D$) se

$$x \rightarrow x_0 \text{ cioè } \|x - x_0\| \rightarrow 0 \Rightarrow Tx \rightarrow Tx_0 \quad \text{cioè } \|Tx - Tx_0\| \rightarrow 0. \quad (2.63)$$

In realtà per dimostrare che è continua ovunque, è sufficiente dimostrare che sia continua in un punto: ad esempio

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow Tx \rightarrow 0. \quad (2.64)$$

Il concetto di continuità è importante in relazione alla questione vista nel paragrafo precedente: prendendo un vettore

$$x_n = \sum_{k=1}^n a_k e^{(k)}, \quad x_n \rightarrow x, \quad (2.65)$$

se T è un operatore continuo, allora $Tx_n \rightarrow Tx$ e si potrà scrivere

$$Tx = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k T e^{(k)}. \quad (2.66)$$

La continuità di un operatore T è equivalente ad un'altra importante proprietà, detta limitatezza di T e più facilmente dimostrabile.

Un operatore lineare T si dice limitato se la quantità $\|Tx\|/\|x\|$ è limitata, ovvero se

$$\sup_{x \in D} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = K < +\infty. \quad (2.67)$$

Se T è limitato allora la quantità K si chiama norma e si indica con $\|T\|$. Naturalmente $\forall T \in H$ vale

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|. \quad (2.68)$$

Torniamo brevemente al caso di un operatore lineare definito sugli elementi del set ortonormale completo $\{e_n\}$ di uno spazio H e vediamo come estenderne la definizione a tutto lo spazio: Utilizzando la linearità dell'operatore possiamo intanto definirlo sull'insieme denso F delle combinazioni lineari finite $e^{(n)}$; si procede poi a vista, presa una qualsiasi successione di vettore $\{x_n\} \subset F$, la successione Tx_n è tale che il rapporto $\|Tx_n\|/\|x_n\|$ si mantiene limitato. Se ne conclude che la serie Tx_n deve essere convergente e il vettore limite y di tale successione si prende come definizione del trasformato Tx del vettore x :

$$Tx_n \rightarrow y := T(x). \quad (2.69)$$

2.18 Una applicazione concernente il problema della corda elastica

Vediamo adesso una semplice applicazione di quanto visto nei paragrafi precedenti: studiamo l'evoluzione di una corda elastica mantenuta ad estremi fissi. Supponiamo di avere come condizioni iniziali: $g = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0$ e $f(x) = u(x, 0)$ (ovviamente $f \in L^2$). Siano gli estremi a $x = \pm L$ ($I = (-L, L)$). Partiamo scrivendo la serie di Fourier

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n v_n(x) = \sum_{n \text{ dispari}} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi n}{2L} x\right) + \sum_{n \text{ pari}} \beta_n \sin\left(\frac{\pi n}{2L} x\right). \quad (2.70)$$

Consideriamo poi l'operatore lineare T di $L^2(I)$ in se stesso

$$Tf(x) = -f(-x) \quad (2.71)$$

T è limitato con norma 1 e quindi

$$\begin{aligned} T f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(v_n(x)) = \\ &= \sum_{n \text{ dispari}} (-\alpha_n) \cos\left(\frac{\pi n}{2L} x\right) + \sum_{n \text{ pari}} \beta_n \sin\left(\frac{\pi n}{2L} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n v_n(x). \end{aligned} \quad (2.72)$$

L'evoluzione temporale della corda risulta quindi

$$u(x, t) = \sum_{n \text{ dispari}} \alpha_n \cos\left(\frac{\pi n}{2L} x\right) \cos(\omega_n t) + \sum_{n \text{ pari}} \beta_n \sin\left(\frac{\pi n}{2L} x\right) \cos(\omega_n t) \quad (2.73)$$

dove $\omega_n = \pi n v / 2L$.

2.19 Operatore aggiunto. Operatori unitari. Proiettori

Operatore aggiunto

La definizione dell'operatore T^\dagger è formalmente identica a quella in dimensione finita: dato l'operatore $T : H \rightarrow H'$, si dice trasformazione aggiunta l'operatore

$$T^\dagger : H' \rightarrow H \quad (2.74)$$

(indicato anche con T^\dagger) tale che, per ogni x, y' nel rispettivo dominio, si ha

$$(y', Tx) = (T^\dagger y', x). \quad (2.75)$$

Se T è limitato allora l'aggiunto esiste sempre ed è anch'esso un operatore lineare e limitato con uguale norma ($\|T\| = \|T^\dagger\|$), si ha inoltre che il dominio di T^\dagger coincide con tutto H' . Nel caso T sia limitato è abbastanza tutto uguale alla dimensione finita, se non lo è, occorre muoversi con più cautela, in particolare nella determinazione del dominio D' dell'aggiunto T^\dagger .

Un operatore T per il quale si può trovare un opportuno dominio D_0 , denso in H , contenuto nel dominio di T , in cui è soddisfatta la condizione

$$(f, Tg) = (Tf, g) \quad \forall f, g \in D_0, \quad (2.76)$$

si dice simmetrico o hermitiano (in D_0).

Se poi avviene che il dominio D di un operatore T coincida con il dominio D' di T^\dagger e che in tale dominio vale la (2.28), allora si scrive

$$T = T^\dagger \quad (2.77)$$

e si dice che T è autoaggiunto.

Trasformazioni unitarie

In questo caso la definizione è diversa: sia $U : H \rightarrow H$ non è più sufficiente

$$(Ux, Uy) = (x, y) \quad (2.78)$$

(che è equivalente $U^\dagger U = I$) affinché sia unitario, ma è necessaria anche la surgettività

$$\text{Imm } U = H. \quad (2.79)$$

Questo perché la prima condizione assicura l'iniettività di U (oltre che $\|U\| = 1$), ma non la sua biettività (e quindi che $U^{-1} = U^\dagger$). In realtà possiamo sostituire la prima condizione con

$$\|Ux\| = \|x\|. \quad (2.80)$$

Proiettori

Sia V_1 un sottospazio vettoriale di H : se V_1 è denso in H , allora non esiste in H alcun vettore ortogonale a tutti i vettori $x_1 \in V_1$ e il completamento $\overline{V_1}$ di V_1 coincide con H . Se invece V_1 non è denso, si considerino tutti i vettori $x_2 \in H$ ortogonali a tutti gli $x_1 \in V_1$: l'insieme di tali vettori x_2 forma un sottospazio di Hilbert (che chiamiamo H_2). Se V_1 non era un sottospazio di Hilbert, sia $H_1 = \overline{V_1}$ il suo completamento: H_1 risulta costituito da tutti i vettori ortogonali agli $x_2 \in H_2$. Possiamo quindi scrivere

$$H = H_1 \oplus H_2. \quad (2.81)$$

Allora H_2 è il complemento ortogonale di H_1 e per ogni vettore $x \in H$ è sempre possibile eseguire la decomposizione

$$x = x_1 + x_2; \quad x_1 \in H_1, \quad x_2 \in H_2, \quad (2.82)$$

che è unica.

A questo punto è naturale definire i proiettori:

$$P_1 x = x_1, \quad P_2 x = x_2 \quad \text{e} \quad P_1 + P_2 = \mathbf{I}, \quad P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0. \quad (2.83)$$

Si verifica facilmente che sono operatori lineari su tutto H se soddisfano

$$P^+ = P, \quad P^2 = P, \quad (2.84)$$

inoltre ogni proiettore è continuo con norma 1.

2.20 Autovalori ed autovettori. Spettro di un operatore

Sia $T : H \rightarrow H$. L'equazione degli autovalori si imposta esattamente come in dimensione finita:

$$Tx = \lambda x; \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad x \neq 0. \quad (2.85)$$

Tuttavia in generale non possiamo dire nulla circa l'esistenza di autovettori di un operatore in dimensione infinita.

Teorema. Se T è simmetrico e se possiede qualche autovettore, si ha che:

- i suoi autovalori sono reali;
- i suoi autovettori relativi ad autovalori diversi sono ortogonali.

Altri risultati interessanti sono i seguenti:

- Se un operatore T soddisfa un'equazione algebrica

$$\mathcal{P}(T) = a_n T^n + \dots + a_0 \mathbf{I} = 0, \quad (2.86)$$

allora i suoi autovalori λ sono le soluzioni dell'equazione $\mathcal{P}(\lambda) = 0$;

- Se T ed S commutano e T ha un autovalore λ , allora il sottospazio V_λ dei corrispondenti autovettori è un sottospazio invariante sotto S . In particolare, se λ è non degenere, segue che v_λ è autovettore anche di S . Se invece V_λ ha dimensione finita, allora per la restrizione $S|_{V_\lambda}$ valgono i teoremi per le matrici in dimensione finita.

Un'estensione del concetto di autovalore è quella di spettro di un operatore: un numero (reale o complesso) σ si dice che appartiene allo spettro dell'operatore T se l'operatore $(T - \sigma I)$ non ammette inverso limitato: cioè se non è invertibile, oppure se ammette un inverso non limitato. In dimensione finita lo spettro di un operatore coincide con l'insieme dei suoi autovalori. Si chiama risolvente di T l'insieme complementare dello spettro: dunque se $\lambda \in \mathbb{C}$ e nel risolvente, l'equazione $(T - \lambda)x = v$, dove $v \in H$ è assegnato e x il vettore incognito, ha una unica soluzione $x = (T - \lambda)^{-1}v$. Lo spettro è un insieme chiuso, dunque il risolvente è un aperto.

2.21 Problema di Sturm-Liouville

Si consideri l'equazione

$$\frac{1}{\rho(x)} \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) - q(x) \right] u + \lambda u = 0 \quad (2.87)$$

per la funzione $u = u(x)$, dove $p(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ sono funzioni assegnate "abbastanza regolari" in $\alpha \leq x \leq \beta$. Si supponga anche che $u(x)$ debba soddisfare a delle condizioni di bordo, per esempio

$$u(\alpha) = u(\beta) = 0.$$

Questo è un classico problema degli autovalori noto come problema di Sturm-Liouville, dove ci attendiamo che solo per alcuni particolari valori di λ la $u(x)$ soddisfi la (2.33) con tali condizioni di bordo. In pratica stiamo studiando l'operatore (non limitato)

$$T = -\frac{1}{\rho(x)} \left[\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{d}{dx} \right) - q(x) \right] \quad (2.88)$$

nello spazio $L^2(\alpha, \beta)$.

Supponiamo che le equazioni p , q , ρ soddisfino le condizioni

$$\begin{aligned} p(x) &> 0, \text{ derivabile e con derivata continua;} \\ q(x) &\geq 0, \rho(x) > 0 \text{ entrambe continue.} \end{aligned}$$

Possiamo definire correttamente il prodotto scalare

$$(f, g)_\rho = \int_\alpha^\beta f^*(x) g(x) \rho(x) dx. \quad (2.89)$$

Rispetto a tale prodotto scalare l'operatore è simmetrico nel sottoinsieme (denso in $L^2(\alpha, \beta)$) delle funzioni derivabili almeno due volte in L^2 con le condizioni di bordo scelte. Segue che date due autofunzioni $u_1(x)$ e $u_2(x)$ relative ad autovalori diversi, esse sono ortogonali.

Possiamo enunciare i seguenti risultati:

- Gli autovalori del problema di Sturm-Liouville sono tutti reali e maggiori di zero;
- Le corrispondenti autofunzioni $\{u_n(x)\}$, che risultano ortogonali fra loro rispetto al prodotto scalare di T , formano un sistema completo nello spazio, relativamente alla norma indotta da tale prodotto scalare.

Questo significa che ogni funzione tale che

$$\int_\alpha^\beta |f|^2 \rho dx < +\infty \quad (2.90)$$

può essere sviluppata in serie di Fourier come

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n \quad (2.91)$$

che converge ad f in media del secondo ordine rispetto alla funzione densità ρ . Per il calcolo dei coefficienti a_n si procede come sempre

$$(u_m, f)_\rho = \sum_n a_n (u_m, u_n)_\rho = a_m (u_m, u_m)_\rho. \quad (2.92)$$

Osserviamo che l'equazione di Shrodinger indipendente dal tempo, unidimensionale per una particella quantistica soggetta ad un potenziale $V(x)$ è del tipo di Sturm-Liouville.

Enunciamo infine altri risultati della teoria:

- Gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ sono crescente $\lambda_n \rightarrow +\infty$;
- Se λ_1 è il più piccolo degli autovalori, la corrispondente autofunzione $u_1(x)$ si annulla solo nei punti $x = \alpha$ e $x = \beta$;

- Teorema di monotonia: mantenendo inalterate le p, q, ρ ma riducendo l'intervallo da $[\alpha, \beta]$ ad $[\alpha', \beta']$ con $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$, aumentano tutti gli autovalori. La stessa cosa succede aumentando p e/o q ; oppure diminuendo la ρ ;
- Teorema di separazione: dette u_n, u_m due autosoluzioni con autovalori λ_n, λ_m rispettivamente, se $\lambda_n > \lambda_m$ allora fra due zeri consecutivi di u_m cade almeno uno zero di u_n ;
- Teorema di oscillazione: supponendo di aver ordinato gli autovalori λ_n in ordine crescente, la n -esima autosoluzione u_n ha $n-1$ zeri nell'intervallo aperto (α, β) , ossia $n+1$ includendo gli estremi $x = \alpha$ e $x = \beta$.

Un altro caso in cui è assicurata l'esistenza di un sistema completo di operatori è quella dell'operatore di $L^2(0, 1)$ in se:

$$Tf = \int_0^1 K(x, t)f(t)dt, \quad (2.93)$$

dove $f \in L^2(0, 1)$ e $K(X, T)$ è una funzione assegnata di $L^2(0, 1) \times L^2(0, 1)$, cioè

$$\int_0^1 \int_0^1 |K(x, t)|^2 dx dt < +\infty. \quad (2.94)$$

L'equazione degli autovalori è un'equazione integrale, se $K(x, t) = K^*(t, x)$, allora l'equazione ha un sistema completo di autosoluzioni f_n i cui corrispondenti autovalori sono reali, decrescenti e tendono a zero.

2.22 L'equazione di d'Alembert in due dimensioni

È facile ottenere equazioni di Sturm-Liouville da equazione differenziali alle derivate parziali usando il metodo della separazione delle variabili e con assegnate condizioni iniziali. Vediamo ad esempio l'equazione di d'Alembert in due dimensioni spaziali (su dominio rettangolare D):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad u = u(x, y, t) \quad (2.95)$$

che è l'equazione a cui obbediscono le vibrazioni di una superficie elastica.

Il procedimento è pressoché lo stesso di quello ad una dimensione, vediamo alcune piccole differenze. Si parte separando parte spaziale e temporale

$$u(x, y, t) = w(x, y)T(t), \quad (2.96)$$

per la parte spaziale otteniamo l'equazione degli autovalori

$$u(x, y, t) = w(x, y)T(t) \quad (2.97)$$

che ormai sappiamo risolvere e troviamo

$$w_{n_1 n_2}(x, y) = \sin(k_{n_1} x) \sin(k_{n_2} y), \quad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots$$

$$k_{n_1} = \frac{\pi}{a} n_1, \quad k_{n_2} = \frac{\pi}{b} n_2; \quad k_{n_1 n_2}^2 = \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right) \quad (2.98)$$

Le funzioni $w_{n_1 n_2}(x, y)$ sono un sistema completo nello spazio di Hilbert $L^2(D)$ (vengono dalle due equazioni spaziali separate che sono di Sturm-Liouville).

Le linee nodali di ciascuna soluzione $w_{n_1 n_2}(x, y)$ (cioè il luogo dei punti in cui $w_{n_1 n_2}(x, y) = 0$) sono date da segmenti che congiungono i lati opposti del rettangolo considerato e lo dividono esattamente in $n_1 \times n_2$ rettangoli uguali fra loro.

Per la parte temporale si procede come sempre.

2.23 Equazione di Sturm-Liouville con punti singolari. Alcune funzioni speciali

Le autosoluzioni dell'equazione di Sturm-Liouville sono funzioni regolari se α e β sono finiti e sono verificate le condizioni su p, q, ρ . I punti in cui queste condizioni non sono soddisfatte sono chiamati punti singolari e sono punti in cui la soluzione può essere singolare. In generale è possibile comunque che le soluzioni formino un set completo anche in questo caso qualora venissero imposte le giuste condizioni di regolarità.

Polinomi e funzioni di Hermite

L'equazione

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2 + \lambda\right)u(x) = 0, \quad -\infty < x < +\infty \quad (2.99)$$

presenta i punti singolari $x = \pm\infty$. Si vede che le soluzioni si comportano asintoticamente come $e^{\pm x^2/2}$. È possibile dimostrare che le soluzioni non divergono all'infinito se e solo se $\lambda = \lambda_n = 2n + 1$, in tal caso le soluzioni hanno la forma

$$u_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}, \quad (2.100)$$

dove $H_n(x)$ è un polinomio di grado n . Questi sono i famosi polinomi di Hermite e le $u_n(x)$ sono funzioni di Hermite, data $\lambda = \lambda_n$ il set delle soluzioni è completo in $L^2(R)$

Polinomi di Legendre e armoniche sferiche

L'equazione

$$(\Delta - W(r) + \lambda)u = 0 \quad (2.101)$$

in coordinate sferiche diventa

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - W(r) + \lambda\right]u = 0. \quad (2.102)$$

Poniamo $u = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ e sostituiamo per poi separare in tre equazioni di Sturm-Liouville. Per $\Phi(\varphi)$ la condizione da imporre è

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \quad (2.103)$$

che si permette di risolvere immediatamente la sua equazione

$$\Phi_m(\varphi) = e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.104)$$

L'equazione per Θ diventa

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta}\right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}\right]\Theta + \mu\Theta = 0, \quad (2.105)$$

dove μ è la costante introdotta dalla separazione delle equazioni. Questa equazione presenta i punti singolari 0 e π , si hanno soluzioni regolari solo se $\mu = \ell(\ell + 1)$ e se $|m| < \ell$. Le autosoluzioni corrispondenti $\Theta_\ell^{(m)}(\theta)$ sono polinomi di seno e coseno. Le funzioni

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \Theta_\ell^{(m)}(\theta)e^{im\varphi} \quad (2.106)$$

si chiamano armoniche sferiche. Le funzioni del termine esponenziale sono ortogonali tra loro per diversi m , mentre $\Theta_\ell^{(m)}(\theta)$ lo sono per m uguali, quindi le $Y_{\ell m}$ sono ortogonali tra loro rispetto all'angolo solido $d\Omega \sin \theta d\theta d\varphi$ e forniscono un set completo nello spazio delle soluzioni $f = f(\theta, \varphi) \in L^2(S)$ (S superficie della sfera). Le funzioni $\Theta_\ell^{(0)}(\theta)$ si chiamano polinomi di Legendre e formano un set completo.

Polinomi di Laguerre

Dal precedente esempio rimane lo studio della funzione $R(r)$:

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr}\right) - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} - W(r) + \lambda\right]R = 0, \quad (2.107)$$

dove ora ℓ è un numero intero fissato da quanto detto prima. Ipotizziamo

$$W(r) = -\frac{2}{r}, \quad (2.108)$$

allora i punti singolari sono 0 e ∞ . Le autosoluzioni regolari si ottengono imponendo

$$\lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0, \quad (2.109)$$

sono del tipo

$$R_n^{(\ell)}(r) = e^{-\alpha r} L_n^{(\ell)}(r) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.110)$$

dove $\alpha > 0$ è una costante e $L_n^{(\ell)}(r)$ sono dei polinomi di grado $n - 1$ nella variabile r . Se in particolare $\ell = 0$ i polinomi $L_n^{(0)}(r)$ si chiamano Polinomi di Laguarre. Il sistema $R_n^{(0)}(r)$ è un sistema completo in $L^2(0, \infty)$.

Funzioni di Bessel

Prendiamo l'equazione di d'Alembert in due dimensioni su un dominio circolare fisso:

$$(\Delta + k^2)w = 0, \quad (2.111)$$

che in polari diventa

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right] w(r, \varphi) = 0. \quad (2.112)$$

Si separa

$$w = R(r)\Phi(\varphi) \quad (2.113)$$

e otteniamo facilmente

$$\Phi = \sin(m\varphi + \delta_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.114)$$

Segue R

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} + k^2 \right] R = 0 \quad (2.115)$$

ponendo $x = kr$, $f(x) = R(x/k)$, otteniamo:

$$f'' + \frac{1}{x}f' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) f = 0 \quad (2.116)$$

che si chiama equazione di Bessel. I suoi punti singolari sono 0 e ∞ . Per ogni valore intero di m (l'equazione può essere studiata anche per m non interi) la soluzione regolare in $x = 0$ si chiama funzione di Bessel di prima specie e si indica col simbolo $J_m(x)$.

Le $J_m(x)$ hanno un andamento non oscillante smorzato con infiniti zeri. Inoltre $J_0(0) = 1$ mentre $J_m(0) = 0$; le $J_m(x)$ sibi espresse da serie di potenze del tipo

$$J_m(x) = x^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \quad (2.117)$$

dove le serie convergono per ogni x . La condizione di contorno diventa $J_m(ka)$ (a è il raggio del bordo fissato, mentre k è l'autovalore) e ka deve coincidere con uno degli zeri della $J_m(x)$.

Abbiamo due tipi di linee nodali, le prime obbediscono a $\sin(m\varphi + \delta_m) = 0$, le seconde $J_m(kr) = 0$. La prima equazione fornisce m diametri del cerchio, la seconda dei cerchi concentrici al primo aventi i raggi r_i tali che kr_i coincida con gli zeri della J_m contenuti fra 0 e ka .

2.24 Equazione di Laplace e funzioni armoniche. Problemi di Dirichlet e di Neumann

Studiamo adesso l'equazione

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (2.118)$$

nota come equazione di Laplace, le cui soluzioni si chiamano funzioni armoniche (che descrivono, ad esempio, il potenziale elettrostatico piano in assenza di cariche). Risolviamo il caso in cui sono date le condizioni di bordo

$$u(r = 1, \varphi) = F(\varphi), \quad (2.119)$$

dove $F(\varphi) \in L^2(0, 2\pi)$. Come prima cosa usiamo le coordinate polari

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (2.120)$$

e separiamo le variabili

$$u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi). \quad (2.121)$$

Per $\Phi(\varphi)$ abbiamo le solite soluzioni

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.122)$$

mentre per $R(r)$ abbiamo

$$R'' + \frac{1}{r}R' - \frac{m^2}{r^2}R = 0 \quad (2.123)$$

che si risolve facilmente e diventa, a meno di una costante moltiplicativa,

$$R_m(r) = r^m. \quad (2.124)$$

Esistono due soluzioni singolari per $R(r)$: r^{-m} se $m \neq 0$ e $\log r$ se $m = 0$. La soluzione sarà della forma

$$u(r, \varphi) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} r^m (\alpha_m e^{im\varphi} + \beta_m e^{-im\varphi}), \quad (2.125)$$

dove per le soluzioni reali abbiamo

$$\alpha_0 = \alpha_0^*, \quad \alpha_m = \beta_m^*. \quad (2.126)$$

Imponiamo le condizioni al bordo

$$u(1, \varphi) = \alpha_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m e^{im\varphi} + \beta_m e^{-im\varphi}) = F(\varphi) \quad (2.127)$$

e utilizziamo Fourier rispetto al set completo $e^{im\varphi}$ per trovare i coefficienti

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) d\theta, \quad \alpha_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta) e^{-im\theta} d\theta = \beta_m^*. \quad (2.128)$$

Otteniamo così la soluzione (con queste condizioni è conosciuta come formula di Poisson):

$$u(r, \varphi) = \frac{1-r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(\theta)}{1+r^2-2r\cos(\varphi-\theta)} d\theta. \quad (2.129)$$

Quando abbiamo un'equazione di Laplace la condizione che la funzione abbia un certo valore lungo un perimetro è detta problema di Dirichlet. Se invece avessimo avuto la derivata normale $G = \partial u / \partial n$ lungo un perimetro, si sarebbe chiamato problema di Neumann.

2.25 Equazioni alle derivate parziali. Il metodo di d'Alembert

Abbiamo visto vari esempi di equazione differenziali lineari alle derivate parziali del secondo ordine. La più generale equazione di questo tipo è data da

$$L[u] = A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0 \quad (2.130)$$

dove A, B, \dots sono costanti reali. A seconda che si abbia

$$B^2 - 4AC > 0, = 0, < 0 \quad (2.131)$$

l'equazione è di tipo iperbolico, parabolico, ellittico.

La tipica equazione iperbolica è l'equazione di d'Alembert ($y = vt$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \quad (2.132)$$

Ponendo $\xi = x - vt, \eta = x + vt$ l'equazione diventa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (2.133)$$

che è la sua forma canonica. Le linee in cui $\xi = \text{cost.}$ e $\eta = \text{cost.}$ si chiamano linee caratteristiche dell'equazione. La (2.46) è risolta come (metodo di d'Alembert)

$$u = \Phi(\xi) + \Psi(\eta) = \Phi(x - vt) + \Psi(x + vt), \quad (2.134)$$

dove Φ e Ψ sono funzioni arbitrarie. Si vede che questa equazione è la sovrapposizione di due onde che si propagano lungo l'asse x con velocità opposte $|v|$.

Il tipico esempio di equazione parabolica è quella del calore. Anche l'equazione di Shrödinger (dipendente dal tempo)

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x)\psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (2.135)$$

sarebbe di questo tipo se non fosse per il coefficiente immaginario.

La tipica equazione ellittica è quella di Laplace.

2.26 Funzionali. Teorema di Riesz

In queste ultime sezioni guardiamo alcune nozioni più approfondite sugli operatori fra spazi di Hilbert.

Si chiama funzionale ogni trasformazione Φ definita da uno spazio di Hilbert H allo spazio dei numeri complessi:

$$\Phi : H \rightarrow \mathbb{C}. \quad (2.136)$$

Essendo lo spazio \mathbb{C} uno spazio di Hilbert, i funzionali sono quindi una speciale famiglia di operatori. Ovviamente si trasportano i concetti di lineare, continuo, limitato, dominio e norma, già visti per gli operatori in generale. Enunciamo anche il seguente teorema.

Teorema di Riesz. Ogni funzionale lineare continuo Φ può essere espresso come un prodotto scalare con un vettore x_0 , univocamente individuato da Φ :

$$\Phi(x) = (x_0, x). \quad (2.137)$$

Il vettore x_0 si chiama vettore rappresentativo di Φ e abbiamo $\|\Phi\| = \|x_0\|$. Abbiamo quindi una corrispondenza biunivoca fra i vettori di H e l'insieme dei suoi funzionali lineari e continui. Tale insieme si chiama duale di H (indicato con H'). Grazie al teorema di Riesz, si può dire che gli spazi di Hilbert sono autoduali.

2.27 Operatore aggiunto

Utilizzando il teorema di Riesz è possibile provare l'esistenza dell'operatore aggiunto, indicato con T^\dagger , di ogni operatore limitato T fra due spazi di Hilbert H e H' . L'operatore T^\dagger è lineare, ha per dominio l'intero spazio H' ed è anch'esso limitato ($\|T^\dagger\| = \|T\|$). Inoltre si ha $T^{\dagger\dagger} = T$ e $(TS)^\dagger = S^\dagger T^\dagger$ (dove S è un altro operatore limitato).

Se T non è limitato, non si può più applicare il teorema di Riesz per definire T^\dagger , ma si deve partire direttamente dalla (2.28)

2.28 Operatori chiusi

Dato un punto arbitrario x_0 in uno spazio di Hilbert H e sia x_n una qualsiasi successione convergente a x_0 . Se T è continuo, allora $Tx_n \rightarrow Tx_0$ per ogni successione $x_n \rightarrow x_0$; se T non è continuo può comunque avvenire che esistano due successioni x'_n e x''_n entrambe convergenti ad x_0 che vengono trasformate da T in successioni convergenti a vettori diversi:

$$Tx'_n \rightarrow y', \quad Tx''_n \rightarrow y'' \neq y'. \quad (2.138)$$

L'operatore T si dice chiuso se $\forall x_0 \in D$, considerare le successioni $x_n \rightarrow x_0$ per le quali le successioni trasformate Tx_n risultano convergenti, avviene che tutte tali Tx_n convergono a Tx_0 .

Se x_0 arbitrario esiste, ma fuori dal dominio, allora T sarà chiudibile (ovvero è possibile farlo diventare un operatore chiuso estendendo il dominio a x_0).

Dalla definizione stessa di aggiunto, segue che l'aggiunto T^+ di qualsiasi operatore T è chiuso.

2.29 Varie nozioni di convergenza per successioni di vettori e operatori

Abbiamo già dato la definizione di convergenza per una successione di vettori x_n in uno spazio di Hilbert:

$$x_n \rightarrow x \quad \text{se} \quad \|x_n - x\| \rightarrow 0. \quad (2.139)$$

Questa è la convergenza in norma, ma esiste anche la convergenza debole: si dice che x_n converge debolmente a $x \in H$ se

$$\forall y \in H \quad \text{si ha} \quad (y, x_n) \rightarrow (y, x). \quad (2.140)$$

La convergenza in norma è una condizione più forte di quella debole: quindi se converge in norma, allora converge debolmente, ma non viceversa. Lo spazio di Hilbert è definito completo in norma e quindi è anche debolmente completo.

Diamo adesso alcune nozioni di convergenza per le successioni di operatori T_n :

- Convergenza in norma: si dice che $T_n \rightarrow T$ in norma se

$$\|T_n - T\| \rightarrow 0; \quad (2.141)$$

- Convergenza forte: si ha convergenza in senso forte se per ogni vettore $x \in H$ avviene che

$$\|(T_n - T)x\| \rightarrow 0; \quad (2.142)$$

- Convergenza debole: si parla di convergenza in senso debole se per ogni coppia di vettori $x, y \in H$ si ha

$$(x, T_n y) \rightarrow (x, T y). \quad (2.143)$$

La convergenza in norma implica quella forte che implica quella debole.

Notiamo infine che lo spazio vettoriale $L(H)$ degli operatori lineari e continui di H in sé, è completo rispetto a tutte e tre le nozioni di convergenza ora definite.

2.30 Operatori compatti

Un operatore si dice compatto se, data una successione di vettori x_n debolmente convergente ad x , allora si ha che la successione dei vettori trasformati Tx_n converge in norma a Tx , cioè $\|Tx_n - Tx\| \rightarrow 0$. La compattezza implica la continuità.

Il motivo dell'importanza degli operatori compatti è il seguente:

Teorema. Ogni operatore compatto T autoaggiunto (o più in generale normale) possiede un set ortogonale e completo di autovettori u_n :

$$Tu_n = \lambda_n u_n. \quad (2.144)$$

Inoltre, ogni autovalore non nullo ha necessariamente degenerazione finita, e se ci sono infiniti autovalori $\lambda_n \neq 0$, si ha che $\lambda_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ ($\lambda = 0$ può essere o non essere autovalore di T). Ed è vero anche il viceversa: se un operatore ammette un set ortogonale completo di autovettori con autovalori che soddisfano le proprietà suddette, l'operatore è compatto autoaggiunto.

Parte II

Metodi II

Capitolo 3

Funzioni di una variabile complessa

Questo capitolo è dedicato alle funzioni di una variabile complessa, necessarie come strumento di calcolo per gli integrali e per lo studio di funzioni armoniche (che ricordiamo essere quelle che soddisfano l'equazione di Laplace).

3.1 Prime definizioni. Condizioni di olomorfia

In questo capitolo considereremo le funzioni complesse di una variabile complessa:

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}. \quad (3.1)$$

Potremo scrivere

$$w = f(z); \quad z = x + iy \in \mathbb{C}, \quad w = u + iv \in \mathbb{C}. \quad (3.2)$$

Potremo anche considerare w, u, v come funzioni di due variabili reali x, y .

Per costruire una teoria delle funzioni complesse $f(z)$, è necessario definire i concetti base.

Limite. Diremo che la funzione $f(z)$ ha limite finito α nel punto (di accumulazione) z_0

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha, \quad (3.3)$$

se

$$\forall \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : z \neq z_0 : |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - \alpha| < \epsilon. \quad (3.4)$$

Continuità. La funzione è definita continua in z_0 se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (3.5)$$

Derivata. Sia $f(z)$ definita in un campo A (cioè un insieme aperto di \mathbb{C}), si consideri il rapporto incrementale

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad z, z_0 \in A \quad (3.6)$$

se esiste finito il limite di tale rapporto per $z \rightarrow z_0$, allora $f(z)$ è derivabile nel punto z_0 e

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (3.7)$$

La derivabilità implica la continuità, inoltre questa è la prima definizione che si discosta dalla sua controparte reale. Infatti anche se può non sembrare a primo occhio, questa condizione è nettamente più forte della derivata reale poiché implica che il rapporto incrementale debba essere indipendente da ogni "direzione". Questo è un requisito più forte della derivata parziale ma anche della derivabilità lungo tutte le direzioni.

Funzione olomorfa. Una funzione $f(z)$ che sia derivabile con continuità in tutti i punti di un campo A , viene detta olomorfa (o analitica).

Teorema. Condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $f(z)$ sia olomorfa in un campo A è che in ogni punto di A esistano le derivate parziali prime continue f_x ed f_y e che si abbia

$$f_x = \frac{1}{i} f_y. \quad (3.8)$$

Ponendo $f = u + iv$, la condizione di olomorfia diventa

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad (3.9)$$

Le condizioni (3.4/5) sono dette condizioni di Cauchy-Riemann.

3.2 Serie di potenze

Consideriamo la serie di potenze a termini complessi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = F(z), \quad (3.10)$$

come per il caso reale, è possibile determinare $r \geq 0$ (raggio di convergenza), per cui la serie converge totalmente in tutti i punti z interni al cerchio $|z - z_0| < r$. All'interno del cerchio di convergenza, la serie di potenze è olomorfa.

Vediamo alcuni esempi:

- La serie bilatere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n. \quad (3.11)$$

converge nella corona circolare di raggio interno $1/r'$ (raggio della seconda serie) e raggio esterno r (raggio della prima serie);

- La serie geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad r < 1; \quad (3.12)$$

- La serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} := e^z, \quad r = \infty, \quad (3.13)$$

da cui è possibile definire la funzione seno (che non è più ≤ 1 e anzi ha infinite soluzioni per qualsiasi $\alpha \in \mathbb{C}$) e coseno (sono ancora valide le formule di derivazione);

- la serie di potenze ad esponenti negativi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = e^{1/z}, \quad (3.14)$$

convergente per $z \neq 0$;

- La serie bilatera

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{b}{z}\right)^n \quad (3.15)$$

convergente nella corona $|b| < |z| < |a|$ e convergente a $a/(a - z) + z/(z - b)$.

3.3 Integrazione delle funzioni di variabile complessa

Sia $f(z)$ continua, in un campo A e γ una curva generalmente regolare orientata, contenuta in A . Si definisce l'integrale della $f(z)$ esteso alla curva γ come l'integrale lungo la curva γ della forma differenziale in due variabili $f(x, y)dx + if(x, y)dy$, cioè

$$\int_{\gamma} f(z)dz := \int_{\gamma} f(x, y)dx + if(x, y)dy \quad (3.16)$$

con tutte le note proprietà degli integrali curvilinei piani. In particolare (Lemma di Darboux):

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq ML, \quad (3.17)$$

dove $M = \max_{z \in \gamma} |f(z)|$ ed L è la lunghezza della curva γ .

3.4 Teoremi di Cauchy. Esistenza di tutte le derivate

I teoremi di Cauchy sono lo strumento principale della teoria delle funzioni olomorfe:

- Teorema di Cauchy. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un campo A semplicemente connesso (è possibile generalizzare anche ad insiemi non semplicemente connessi ma con un numero finito di "buchi"), allora per ogni curva semplice chiusa γ contenuta in A si ha

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0. \quad (3.18)$$

Possiamo generalizzare questo teorema per campi A non semplicemente connessi. Siano p i buchi dove la funzione non è olomorfa, si fa la somma degli integrali lungo le curve dove la funzione è olomorfa saltando i punti di non olomorfia:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{i=1}^p \oint_{\gamma_i} f(z)dz; \quad (3.19)$$

- Formula integrale di Cauchy (secondo Teorema di Cauchy). Sia $f(z)$ olomorfa in un campo A , sia ζ un qualsiasi punto di A e Γ una curva chiusa generalmente regolare contenente ζ al suo interno e racchiudente solo punti di olomorfia per $f(z)$. Si ha allora

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz. \quad (3.20)$$

La formula integrale di Cauchy implica che i valori che la funzione olomorfa f assume nei punti interni a Γ sono determinati dai valori assunti lungo Γ . Un importante corollario di questo teorema è che se $f(z)$ è olomorfa in un campo A , allora è derivabile (con derivata anch'essa olomorfa) quante volte si vuole in A . Possiamo così procedere alla formula integrale di Cauchy generalizzata:

$$f^{(n)}(\zeta) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{n+1}} dz. \quad (3.21)$$

Le formule integrali di Cauchy possono essere utilizzate per calcolare alcuni integrali lungo le curve chiuse nel piano complesso.

3.5 Sviluppi in serie di Taylor-Laurent

Teorema. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un campo A e z_0 un punto qualsiasi: allora in ogni corona circolare C aperta, di centro z_0 , che sia interamente contenuta in A (cioè contenga solo punti di olomorfia), la $f(z)$ può essere sviluppata in una serie di potenze (bilatera):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in C \quad (3.22)$$

Se, in particolare, $z_0 \in A$, cioè z_0 è un punto di olomorfia, allora nel più grande cerchio aperto C_0 di centro z_0 contenuto nel campo di olomorfia A , la funzione può essere sviluppata in una serie "puramente di Taylor", cioè in una serie con sole potenze positive di $z - z_0$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad z \in C_0. \quad (3.23)$$

La (3.10) si chiama serie di Taylor-Laurent e il punto z_0 è il centro dello sviluppo; la parte positiva della serie si chiama parte di Taylor, quella negativa si chiama parte di Laurent o parte singolare.

Nel caso di (3.11) abbiamo l'usuale relazione

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

Altrimenti si può utilizzare la (3.10) per costruire l'espressione generale per i coefficienti a_n dello sviluppo di Taylor-Laurent:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.25)$$

dove γ è una curva chiusa contenente al suo interno z_0 e contenuta in C .

Guardiamo adesso i vantaggi dell'analisi complessa rispetto a quella reale: nell'analisi reale la derivabilità non basta ad assicurare la sviluppabilità in serie di Taylor (gli sviluppi di Taylor richiedevano unicamente che una funzione fosse derivabile infinite volte, ma ad esempio e^{-1/x^2} lo è ma non è sviluppabile), in variabile complessa abbiamo un criterio (l'olomorfia) che ci assicura quando una funzione è sviluppabile (la funzione data prima come esempio non è olomorfa); inoltre l'analisi reale non fornisce criteri sull'intervallo in cui la serie converge alla funzione, in analisi complessa invece sono le regioni singolari a definire questo intervallo, ad esempio

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^2} \quad (3.26)$$

è singolare¹ in $z = \pm i$ e quindi il suo sviluppo di Taylor con centro nell'origine potrà convergere solo entro il cerchio di raggio 1.

3.6 Proprietà degli zeri delle funzioni olomorfe

Nella precedente sezione abbiamo visto l'esempio di e^{-1/x^2} , questa funzione e tutte le sue derivate hanno limite pari a 0 per $x = 0$. Questo fatto non si può verificare per le funzioni olomorfe, in realtà questa funzione in \mathbb{C} non è neanche continua nell'origine. Questo segue dal seguente teorema.

Teorema. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un campo A ; se in un punto $z_0 \in A$ la funzione si annulla insieme con tutte le sue derivate

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n)}(z_0) = \dots = 0 \quad (3.27)$$

allora $f(z) = 0$ identicamente² in tutto A .

La conseguenza di questo teorema (e il motivo per cui e^{-1/x^2} non è continua nel campo complesso) è: sia $f(z)$ una funzione olomorfa non identicamente nulla e sia $f(z_0) = 0$, allora esisterà sicuramente una derivata n -esima diversa da zero

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0. \quad (3.28)$$

Si dice allora che il punto z_0 è per $f(z)$ uno zero di ordine n .

Teorema. L'insieme degli zeri di una $f(z)$ non identicamente nulla, olomorfa in un campo connesso A , è costituito da punti isolati (eventualmente è vuoto), e i suoi eventuali punti di accumulazione non sono punti di olomorfia.

Due importanti (e simili) conseguenze di questo teorema sono:

¹Con singolarità l'analisi complessa si intende un punto in cui la funzione non è olomorfa.

²In realtà ci sarebbe anche bisogno che il campo A sia connesso, per la definizione di connesso vedi il corso teoria dei gruppi.

- Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un campo A , vogliamo estendere la definizione di $f(z)$ ad un'altra funzione $f_0(z)$ che coincide con $f(z)$ in tutti i punti di A e sia olomorfa in un campo A' contenente A (in pratica vogliamo allargare il campo di olomorfia di $f(z)$): questa estensione analitica è unica;
- Siano f_1 e f_2 due funzioni olomorfe in A e per un certo insieme di punti di A si ha $f_1(z) = f_2(z)$, se in questo insieme è presente un punto di accumulazione di A , allora $f_1 \equiv f_2$ in tutto A .

Il secondo dei due risultati citati ci dice che anche in \mathbb{C} , $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, infatti basta applicare il secondo risultato alle funzioni olomorfe $f_1 = \sin^2 z + \cos^2 z$ e $f_2 = 1$.

Infine osserviamo che quanto visto in questo paragrafo ci garantisce la possibilità di applicare il teorema di de l'hospital nella forma classica

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} \quad (3.29)$$

nell'ipotesi che f e g siano olomorfe in un intorno di z_0 e che $f(z_0) = g(z_0) = 0$.

3.7 Singolarità removibili

Se una funzione $f(z)$ è olomorfa in tutti i punti di un campo A con esclusione del punto $z_0 \in A$, ma esiste finito il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \quad (3.30)$$

allora, definendo $f(z_0) = l$, si estende la definizione di $f(z)$ anche al punto z_0 e la funzione così prolungata è olomorfa in tutto A . Più in generale vale il seguente teorema:

Teorema. Se una funzione $f(z)$, olomorfa in un campo A escluso un punto $z_0 \in A$, si mantiene limitata in un intorno I contenente z_0 al suo interno, cioè se esistono una costante M e un intorno I contenente z_0 al suo interno tali che, per ogni $z \in I - \{z_0\}$, si abbia

$$|f(z)| \leq M \quad (3.31)$$

allora si può definire $f(z_0)$ in modo che la funzione così prolungata sul punto z_0 risulta olomorfa in tutto A . In questi casi z_0 viene detto punto di singolarità removibile.

3.8 Punti singolari isolati

Sia $f(z)$ olomorfa in un campo A con singolarità (non removibile) in $z_0 \in A$, eseguito lo sviluppo di TL nell'intorno di z_0 abbiamo due casi:

- La parte di Laurent contiene un numero n finito di termini, allora si dice che z_0 è una singolarità polare (o polo) di ordine n ;
- La parte di Laurent contiene infiniti termini, allora si dice che z_0 è una singolarità essenziale (l'esempio z^{-1/x^2} è di questo tipo).

Vediamo alcune proprietà per questi due casi.

Singolarità polari:

- Condizione necessaria e sufficiente perché un punto z_0 sia un polo di ordine n per una funzione $f(z)$ è che esista finito e diverso da zero il limite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = l \neq 0; \quad (3.32)$$

- Condizione necessaria e sufficiente perché un punto z_0 sia un polo di ordine n per una funzione $f(z)$ è che z_0 sia uno zero di ordine n per la funzione $1/f(z)$;
- Condizione necessaria e sufficiente perché un punto z_0 sia un polo per una funzione $f(z)$ è che

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty. \quad (3.33)$$

Singolarità essenziali:

Ovviamente $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ non può esistere (finito o infinito), inoltre il comportamento di $f(z)$ nell'intorno della singolarità essenziale è assai complicato.

Teorema di Picard. Se z_0 è un punto singolare essenziale per $f(z)$, comunque si scelgano un numero complesso α (escluso al più un valore eccezionale) ed un intorno I di z_0 , esistono in I infiniti punti in cui $f(z) = \alpha$.

3.9 Calcolo dei residui. Prime applicazioni al calcolo di integrali definiti

Sia Z_0 un punto singolare isolato di $f(z)$, si definisce residuo $\mathcal{R}_f(z_0)$ di $f(z)$ in z_0 il seguente integrale

$$\mathcal{R}_f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (3.34)$$

dove γ è una qualsiasi curva³ semplice chiusa percorsa in senso antiorario nel campo di olomorfia di f e contenente z_0 (e nessun altro punto singolare). Confrontando i residui con i coefficienti degli sviluppi di Taylor-Laurent ci accorgiamo che

$$\mathcal{R}_f(z_0) = a_{-1}, \quad (3.35)$$

dove a_{-1} è il coefficiente di $(z - z_0)^{-1}$ intorno a z_0 . Se in particolare z_0 è un polo di ordine n si ha

$$f(z) = T(z - z_0) + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} \quad (3.36)$$

dove $T(z - z_0)$ è la parte di Taylor dello sviluppo, a questo punto moltiplicando entrambi i membri per $(z - z_0)^n$ e derivando otteniamo

$$\mathcal{R}_f(z_0) = a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} ((z - z_0)^n f(z)) \right]_{z=z_0}. \quad (3.37)$$

È chiaro che, ad esclusione del caso di polo di ordine uno, il residuo potrà anche essere nullo. Annunciamo adesso il seguente teorema fondamentale.

Teorema dei residui. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un campo A . Se γ è una curva chiusa generalmente regolare contenuta in A che contiene al suo interno solo punti di olomorfia per $f(z)$ escluso un numero finito di punti singolari isolati z_1, z_2, \dots, z_p (nessun punto singolare deve trovarsi sulla curva γ), si ha

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i \text{ (interi)}} \mathcal{R}_f(z_i) \quad (3.38)$$

dove la somma è estesa a tutti i punti singolari interni a γ .

Vediamo una prima applicazione. Vogliamo calcolare l'integrale definito di variabile reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \quad (3.39)$$

dove $f = P(x)/Q(x)$ e i polinomi sono primi tra di loro. Supponiamo siano verificate le condizioni:

- è noto a priori che esiste l'integrale definito;
- si può estendere al piano complesso la definizione della funzione $f(x)$ in modo da ottenere una funzione $f(z)$ olomorfa in un campo contenente tutto l'asse reale;
- la funzione $f(z)$ è olomorfa in tutto il semipiano complesso "superiore" (cioè quello in cui $\text{Im } z > 0$) escluso al più un numero finito di punti singolari.

³Per Cauchy il residuo è indipendente dalla curva su cui si integra.

Un corollario per la verifica della prima condizione è: $Q(x)$ non ha radici reali, e siano n_P e n_Q i gradi dei polinomi, si ha $n_P \leq n_Q - 2$. In questo modo estendendo $f(x)$ al piano complesso sono verificate anche le altre condizioni. Si consideri una curva nel piano complesso composta da una semicirconferenza (nel piano complesso positivo) di raggio R (sull'asse reale) posta con centro nell'origine; sia inoltre R sufficientemente grande da contenere tutti i punti singolari. Grazie al teorema dei residui abbiamo

$$\int_{-R}^R f(z)dz + \int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{i \\ (\text{Im } z_i > 0)}} \mathcal{R}_f(z_i) \quad (3.40)$$

Prendiamo ora il limite $R \rightarrow \infty$, avremo

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq \max_{z \in \Gamma} |f(z)| \cdot \pi R \quad (3.41)$$

e nel caso in cui

$$R \cdot \max_{z \in \Gamma} |f(z)| \rightarrow 0 \quad (3.42)$$

(sempre vero nel caso di f razionale), allora $\int_{\Gamma} \dots \rightarrow 0$ per $R \rightarrow \infty$. Otteniamo così

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\substack{i \\ (\text{Im } z_i > 0)}} \mathcal{R}_f(z_i) \quad (3.43)$$

Quando imponiamo $R \rightarrow \infty$, i limiti vanno eseguiti indipendentemente come

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ R' \rightarrow \infty}} \int_{-R'}^R f(x)dx, \quad (3.44)$$

se si pone $R = R'$, la condizione è meno forte e si ottiene l'integrale nel senso principale di Cauchy:

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx. \quad (3.45)$$

Questo integrale esiste e coincide con il primo se il primo esiste, ma non è detto che il primo esista se esiste questo.

Un'altra applicazione riguarda il calcolo di integrali del tipo

$$\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \quad (3.46)$$

dove f è una funzione razionale (con il denominatore senza zeri reali): ponendo $z = e^{i\theta}$, $d\theta = (-i/z)dz$ e dunque $\cos \theta = (z + 1/z)/2$, $\sin \theta = (z - 1/z)/(2i)$, l'integrale si trasforma in un integrale nel piano complesso di una funzione razionale di z lungo la circonferenza di raggio uno, al cui interno si trova un numero finito di poli.

3.10 Punto all'infinito

Fin ora abbiamo considerato solo punti finiti del piano complesso. Supponiamo adesso che il campo di definizione di $f(z)$ sia illimitato e chiediamoci come possiamo studiare il comportamento di tale funzione quando tende ad ∞ .

Nel campo complesso è comodo usare la convenzione di un solo punto all'infinito. Per capire cosa ciò significhi e come visualizzarla utilizzeremo il concetto della sfera di Riemann. In pratica prendiamo una sfera e posizioniamola sopra al piano in modo che sia tangente all'origine. Ora supponiamo di prendere questo piano e di avvolgerlo attorno alla sfera, di modo che l'origine rimanga dove era e ogni punto del piano abbia una corrispondenza biunivoca con un punto del piano, infine è logico osservare che un qualsiasi infinito in una qualsiasi direzione dall'origine si ritrova nel punto diametralmente opposto all'origine. Chiamiamo questo nuovo piano complesso, piano z' .

Osserviamo che tracciando una qualsiasi curva chiusa, i punti al suo esterno saranno un intorno dell'infinito (indipendentemente dalla grandezza della regione occupata dai punti si para comunque di intorno). La trasformazione

$$z' = \frac{1}{z} \quad (3.47)$$

trasforma il punto $z = 0$ nel punto all'infinito del piano z' , e questo vale per tutti i punti, nel senso che l'intorno dei punti di 0 in z è l'intorno dei punti del punto all'infinito in z' . Allora se $f(z)$ è definita in un campo illimitato, si definisce il suo comportamento nel punto $z = \infty$, come il comportamento della funzione $g(z')$

$$g(z') := f(1/z') \quad (3.48)$$

nel punto $z' = 0$.

È possibile sviluppare una funzione nell'intorno di $z' = 0$ (ovviamente nel caso in cui era possibile usare gli sviluppi per campi limitati):

$$g(z') = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n (z')^n + \sum_{n=1}^{\infty} a'_{-n} (z')^{-n}, \quad (3.49)$$

che nel piano z diventa

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n z^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} a'_{-n} z^n. \quad (3.50)$$

Osserviamo che adesso è la parte di Laurent ad avere le potenze positive nella variabile z .

Un importante risultato di questa convenzione è il seguente:

Teorema di Liouville. Una funzione olomorfa in tutti i punti del piano, compreso il punto all'infinito, è una costante.

Chiamiamo intera una funzione $f(z)$ che è olomorfa in tutti i punti finiti del piano. Le funzioni intere si distinguono in trascendenti intere (se all'infinito presentano una singolarità essenziale) e polinomi (che all'infinito presentano un polo).

Usando il teorema di Liouville possiamo dimostrare anche il teorema fondamentale dell'algebra.

3.11 Residuo all'infinito

Data $f(z)$ olomorfa in un campo illimitato, si tracci una linea chiusa Γ tale che al suo esterno cadano solo punti di olomorfia (questo non è sempre possibile), ad esclusione dell'eventuale singolarità in $z = \infty$. Si definisce il residuo all'infinito della $f(z)$ come

$$\mathcal{R}_f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\gamma} f(z) dz, \quad (3.51)$$

dove $-\gamma$ indica una qualsiasi curva semplice chiusa esterna a Γ , percorsa in senso orario. Per il primo teorema di Cauchy, il residuo è indipendente dalla curva e abbiamo tutto in perfetta analogia con il caso dei punti al finito. In particolare ci possiamo ricavare allo stesso modo

$$\mathcal{R}_f(\infty) = -a'_1, \quad (3.52)$$

si noti che a'_1 è il coefficiente di $z' = z^{-1}$ che fa parte della parte di Taylor. La differenza dal finito sta che f può essere olomorfa all'infinito e tuttavia avere il residuo diverso da 0.

Diamo ora il secondo teorema dei residui:

Teorema esterno dei residui. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un campo illimitato A e γ una curva chiusa generalmente regolare contenuta in A , tale che al suo esterno la funzione $f(z)$ sia olomorfa ovunque tranne che in un numero finito di punti z_1, z_2, \dots, z_p ed eventualmente anche nel punto $z = \infty$ (nessuna ipotesi sui punti all'interno di γ ; nessun punto singolare deve trovarsi su γ). Si ha allora:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_{i \text{ (esterni)}} \mathcal{R}_f(z_i) - 2\pi i \mathcal{R}_f(\infty) \quad (3.53)$$

dove la somma è estesa a tutti i punti singolari al finito esterni a γ .

Se in particolare $f(z)$ è olomorfa in tutto il piano complesso tranne che un numero finito di punti, otteniamo

$$\sum_i \mathcal{R}_f(z_i) + \mathcal{R}_f(\infty) = 0. \quad (3.54)$$

Si verifica facilmente che una funzione $f(z) = P(z)/Q(z)$ che soddisfa la prima delle sue condizioni, ha residuo nullo.

3.12 Punti di diramazione. Tagli. Integrazione lungo tagli

Consideriamo la funzione

$$f(z) = \sqrt{z}. \quad (3.55)$$

Questa non è una vera funzione, ma una funzione a due valori (ovvero per un input abbiamo due output); noi vogliamo renderla una vera funzione. Per farlo diciamo che preso un qualsiasi $z \neq 0$, scegliamo uno dei due valori della radice, per esempio se $z = \rho e^{i\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi)$ possiamo prendere

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2}, \quad (3.56)$$

dove $\sqrt{\rho}$ è la radice positiva. Osserviamo però che in questo modo $f(z)$ non è continua ovunque, ma presenta una discontinuità lungo tutto il semiasse reale positivo:

$$\begin{aligned} f_+(x) &= \lim_{z \rightarrow x, \operatorname{Im} z \rightarrow 0^+} f(z) = \lim_{z \rightarrow x, \theta \rightarrow 0} f(z) = \sqrt{x}, \\ f_-(x) &= \lim_{z \rightarrow x, \operatorname{Im} z \rightarrow 0^-} f(z) = \lim_{z \rightarrow x, \theta \rightarrow 2\pi} f(z) = -\sqrt{x}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Ovviamente erano possibili altre scelte per rendere $f(z)$ una vera funzione, ma ognuna di esse presentava delle discontinuità.

Per verificarlo possiamo semplicemente prendere un punto z_1 e variando unicamente la fase θ fare un giro intorno all'origine, ad un certo punto ci ritroveremo al punto di partenza $\theta + 2\pi$, ma la radice di z_1 varia solo di $\theta/2 + \pi$, quindi nonostante ci troviamo allo stesso punto questa ha un valore diverso.

Osserviamo che in questa "dimostrazione" l'origine ha avuto un ruolo importante. Più in generale chiamiamo z_0 punto di diramazione di $f(z)$ se esiste un intorno del punto tale che ogni curva chiusa γ contenuta in tale intorno e che abbracci z_0 , gode della seguente proprietà: fissato un qualsiasi punto z_1 su γ e il corrispondente $f(z_1)$, muovendo z lungo γ con continuità, quando z è tornata in z_1 , allora $f(z) \neq f(z_1)$.

Nel caso di $f(z) = \sqrt{z}$, $z = 0$ era punto di diramazione, ma eseguendo il cambio di variabile $z \rightarrow z' = 1/z$ ci accorgiamo che anche $z = \infty$ è punto di diramazione. Chiamiamo taglio la linea del piano complesso che congiunge i punti di diramazione e discontinuità di taglio la distanza tra i punti di discontinuità, nel nostro caso abbiamo visto che è $f_+(x) - f_-(x) = 2\sqrt{x}$. È chiaro che i punti di diramazione e i punti di taglio sono punti singolari non isolari per la funzione.

Un altro importante esempio è $f(z) = \ln z$ che assume infiniti valori per ogni input:

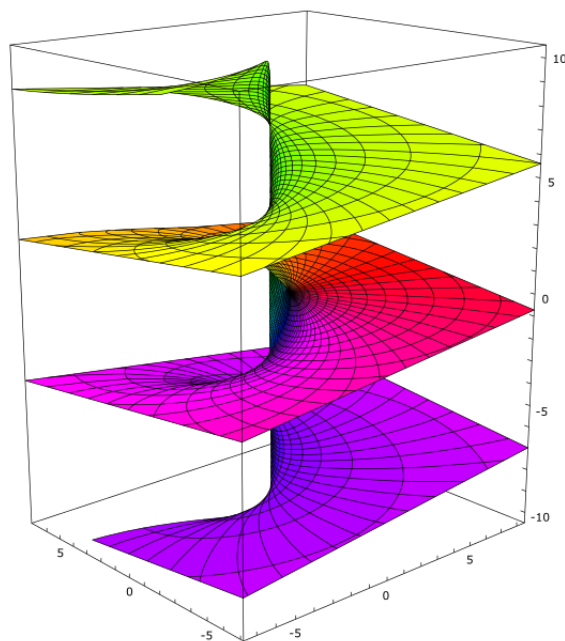
$$\ln z = \ln \rho + i\theta + 2ik\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.58)$$

anche in questo caso i punti di diramazione sono $z = 0, \infty$, possiamo quindi scegliere come taglio il semiasse positivo reale; questo taglio ci dà la cosiddetta determinazione principale del logaritmo

$$\ln z = \ln \rho + i\theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \quad (3.59)$$

Esistono anche casi con più punti di taglio o con tutti i punti di diramazione all'infinito.

Un altro metodo per lo studio delle funzioni a più valori è quello dei fogli di Riemann, prima di vedere una spiegazione visuale diamo la definizione del libro. Consideriamo una funzione $f(z)$ nel piano con un certo taglio nel piano complesso, si immagina di sovrapporre al primo un secondo piano complesso (secondo foglio di Riemann) identico al primo; indicando con a, b e rispettivamente a', b' i margini del taglio nel primo e i corrispondenti nel secondo foglio, si "salda" il margine b con il margine a' e si prolunga con continuità la funzione $f(z)$ mentre la variabile z passa dal primo al secondo foglio. Più visualmente riprendiamo la precedente "dimostrazione", facciamo un giro intorno all'origine e vediamo che quando torniamo al punto iniziale la radice non lo è, allora prendiamo il secondo foglio di Riemann e continuiamo a sviluppare la funzione lì; in questo modo stiamo dicendo che quando il punto ha compiuto un giro in realtà non è tornato al punto iniziale, ma è andato nel secondo foglio di Riemann dove continua a girare finché non ritorna al punto iniziale. Nel caso di $f(z) = \sqrt{z}$ bastano due fogli (uno per la parte positiva e uno per la parte negativa), in altre funzioni dopo due fogli la funzione non assume ancora il valore che aveva al punto iniziale e quindi si aggiungono altri fogli.



Usando le conoscenze acquisite fin qui possiamo calcolare gli integrali del tipo

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} f(x) dx \quad (3.60)$$

dove $\alpha > -1$ è un numero non intero (anche non razionale) ed $f(x)$ una funzione razionale senza divergenze sul semiasse reale positivo e infinitesima all'infinito con ordine $> \alpha + 1$.

3.13 Il lemma di Jordan

Lemma di Jordan: Si consideri l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ivx} dx \quad (3.61)$$

e si supponga che $f(z)$ sia olomorfa in tutto il piano complesso tranne che un numero finito di punti z_i (con $\text{Im } z_i \neq 0$). Sia $v > 0$ (risp. $v < 0$); allora, se Γ è una semicirconferenza centrata nell'origine e raggio R posta nel semipiano complesso superiore $\text{Im } z > 0$ (risp. nel semipiano complesso inferiore $\text{Im } z < 0$) e se è soddisfatta la condizione (più debole della (3.17))

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\max_{z \in \Gamma} |f(z)| \right) = 0, \quad (3.62)$$

segue che

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) e^{ivz} dz = 0. \quad (3.63)$$

Non viene data una dimostrazione ma solo una spiegazione "ad occhio".

Questo lemma ci aiuta nella risoluzione di integrali con il metodo della sezione 3.9

Diamo un secondo teorema utile quando l'integrando presenta punti di discontinuità divergenti dopo il lemma di Jordan.

Teorema. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in tutti i punti di un campo A escluso un punto $z_0 \in A$ in cui presenta un polo del primo ordine. Sia γ un arco di circonferenza di centro z_0 , raggio r e ampiezza α : si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma} f(z) dz = \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{R}_f(z_0) 2\pi i \quad (3.64)$$

la curva essendo percorsa in senso antiorario.

Per capire meglio questo teorema facciamo un esempio, ma prima introduciamo una nuova definizione di

integrale in senso principale di Cauchy:

$$\mathcal{P} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left[\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right]. \quad (3.65)$$

Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(1+x^2)} dx. \quad (3.66)$$

Usando il lemma di Jordan si scrive l'integrando come

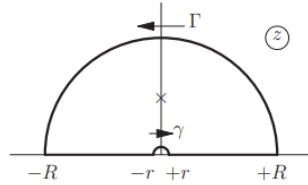
$$\operatorname{Im} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)} = \operatorname{Im} F(x) \quad (3.67)$$

che a differenza di quello originale presenta una divergenza per $x = 0$. Espandendo al piano complesso $F(z)$ presenta un polo del primo ordine proprio sulla linea lungo cui si dovrebbe integrare.

Si modifica allora il percorso scavalcando il polo con un'altra semicirconferenza γ di raggio r : avremo allora

$$\oint F(z) dz = \int_{-R}^{-r} F(x) dx + \int_{-\gamma} \dots + \int_r^R \dots + \int_{\Gamma} F(z) dz = 2\pi i \sum_{\substack{i \\ (\operatorname{Im} z_i > 0)}} \mathcal{R}_F(z_i), \quad (3.68)$$

dove γ è percorsa in senso orario (negativo).



Ponendo $R \rightarrow \infty$ abbiamo $\int_{\Gamma} \dots \rightarrow 0$, la somma dei residui si riduce al solo residuo $z = +i$, resta da calcolare il contributo dell'integrale su γ quando $r \rightarrow 0$ (che lo possiamo fare con il nuovo teorema). Abbiamo

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)} dx = \pi i \left(1 - \frac{1}{e} \right) \quad (3.69)$$

che possiamo dividere in reale e immaginaria

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x(x^2+1)} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx = \pi \left(1 - \frac{1}{e} \right). \quad (3.70)$$

3.14 Funzioni armoniche e trasformazioni conformi. Il potenziale complesso

Vediamo una applicazione fisica delle funzioni di variabile complessa. Se $f(z) = u + iv$ è una funzione olomorfa, allora $u(x, y)$ e $v(x, y)$ sono funzioni armoniche piane, cioè soddisfano

$$\Delta u = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] u = 0, \quad \Delta v = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] v = 0. \quad (3.71)$$

Viceversa, assegnata $u(x, y)$ si può sempre trovare una funzione $v(x, y)$ tale che $f = u + iv$ è olomorfa, inoltre v è univocamente determinata. Le due funzioni u e v sono armoniche coniugate. Abbiamo due importanti conseguenze: la ricerca delle funzioni armoniche piane e di una funzione olomorfa sono equivalenti e ogni funzione armonica è derivabili infinite volte.

Facciamo un esempio. Sia $V(x, y)$, il potenziale elettrostatico in assenza di cariche, la parte reale u di una funzione olomorfa $f(z)$, che viene detta potenziale complesso.

Teorema. Se $f(z) = u + iv$ è una funzione olomorfa, le linee su cui $u' = \text{costante}$ sono ortogonali alle linee $v = \text{costante}$ (salvo nei punti in cui $f'(z) = 0$).

Nel caso del potenziale elettrostatico, questo vuol dire che le linee equipotenziali sono ortogonali alle linee di forza del campo elettrico.

Questo problema ci permette di risolvere problemi ed equazioni alle derivate parziali trasformandoli in casi più semplici. Sul libro sono presenti vari esempi. Il metodo, molto generale, è il seguente. facciamo una trasformazione

$$\Phi : z \rightarrow z' \tag{3.72}$$

olomorfa, di modo che si conservino le proprietà di armonicità e che si realizzi una corrispondenza biunivoca. Detta $z' = \Phi(z)$, se $\tilde{f}(z')$ è il potenziale complesso che risolve il problema nel piano z' , allora $f(z) := \tilde{f}(\Phi(z))$ è il problema che risolve il problema iniziale. Le trasformazioni di questi tipo prendono il nome di trasformazioni conformi dirette. Il nome deriva dal fatto che tali trasformazioni conservano gli angoli ad eccezione dei punti per cui $d\Phi/dz = 0$.

Capitolo 4

Trasformate di Fourier e di Laplace

4.1 Le serie di Fourier come “analisi in frequenza”. Dalla serie all’integrale di Fourier

In questa sezione verrà presentata tramite un esempio il significato della serie di Fourier. Abbiamo già visto che la serie trigonometrica di Fourier può essere interpretata come un’analisi in frequenza. Prendiamo un esempio già visto: una massa legata ad una molla elastica soggetta ad un attrito viscoso e ad una forza $f(t)$ periodica (periodo $2T$). L’equazione è

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = f(t). \quad (4.1)$$

Sviluppiamo $x(t)$ e $f(t)$ in serie di Fourier rispetto al set completo $e^{-i\omega_k t}$ con $\omega_k = k(2\pi/2T)$ e k intero

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-i\omega_k t} \quad ; \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-i\omega_k t}. \quad (4.2)$$

Sostituendo nella (4.1) otteniamo

$$(-m\omega_k^2 - i\beta\omega_k + K)x_k = f_k, \quad (4.3)$$

dove la soluzione all’equazione iniziale è la combinazione lineare di tutte le k equazioni. Osserviamo che questa è l’analisi in frequenza di cui abbiamo parlato: ad ogni componente armonica $f_k e^{-i\omega_k t}$ di frequenza ω_k il sistema risponde con una oscillazione della stessa frequenza e ampiezza x_k . La distanza tra una frequenza e l’altra è

$$\omega_{k+1} - \omega_k = \pi/T, \quad (4.4)$$

abbiamo dunque frequenze discrete con distanza dipendente dalla lunghezza del periodo; se perdiamo l’armonicità (condizione $T \rightarrow \infty$) lo sviluppo in serie diventa una distribuzione continua:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k e^{-i\omega_k t} \longrightarrow f(t) \sim \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.5)$$

dove i coefficienti f_k di Fourier, che ricordiamo erano

$$f_k \propto \int_{-T}^T f(t) e^{i\omega_k t} dt, \quad (4.6)$$

vengono sostituiti dalla funzione

$$g(\omega) \sim \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (4.7)$$

che indica il contributo delle frequenze $(\omega, \omega + d\omega)$.

Ritornando all’esempio possiamo riproporre l’analisi in frequenza per una $f(t)$ non periodica (ma dobbiamo escludere il caso $\beta = 0$ perché verrà considerato a parte nel prossimo capitolo). Cerchiamo come risponde il sistema quando $f(t)$ è una armonica pura $e^{-i\omega t}$ (ovvero quando $f(t)$ è una costante per una base del set). Per ogni componente $g_0(\omega) e^{-i\omega t}$ la soluzione forzata sarà della forma

$$x(t) = x_0(\omega) e^{-i\omega t}, \quad (4.8)$$

dunque sostituendo otteniamo

$$(-m\omega^2 - i\beta\omega + K)x_0(\omega) = g_0(\omega), \quad (4.9)$$

da cui

$$x_0(\omega) = \frac{1/m}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} g_0(\omega), \quad \Omega^2 = \frac{K}{m}, \quad \gamma = \frac{\beta}{m}. \quad (4.10)$$

Come nel caso discreto la soluzione sarà la combinazione lineare di tutte le soluzioni, che in questo caso è dato dall'integrale sulle componenti. Ricavare la funzione $g(\omega)$ data $f(t)$ corrisponde ad eseguire la trasformata di Fourier, il procedimento inverso è l'antitrasformata di Fourier.

4.2 L'analisi in frequenza e il "principio di indeterminazione"

La definizione di trasformata di Fourier è la seguente

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{i\omega t} dt. \quad (4.11)$$

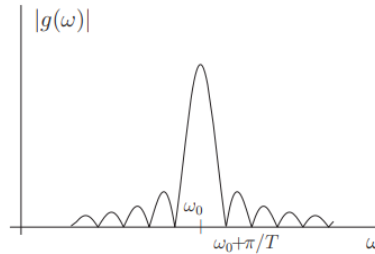
Per verificare che l'interpretazione fisica sia quella cercata prendiamo il caso in cui $f(t)$ è un'onda elettromagnetica, le componenti armoniche sono le componenti monocromatiche di frequenza ω . Ci aspettiamo che $g(\omega)$ (o meglio $|g(\omega)|^2$, ovvero la densità spettrale) ci dia la distribuzione spettrale del segnale. Un segnale "monocromatico" reale di frequenza ω_0 può essere scritto come

$$f(t) = \begin{cases} e^{-i\omega_0 t} & \text{per } |t| \leq T \\ 0 & \text{per } |t| > T, \end{cases} \quad (4.12)$$

dove più T è grande più il segnale è monocromatico. La trasformata di questo segnale è

$$g(\omega) = 2 \frac{\sin((\omega - \omega_0)T)}{\omega - \omega_0} \quad (4.13)$$

che plottiamo su un grafico.



Osserviamo che la trasformata per come definita sembra avere le giuste proprietà, le frequenze intorno a ω_0 servono a cancellare le interferenze di altri segnali.

Data $f(t)$ sufficientemente regolare (affinché gli integrali che daremo siano finiti), indichiamo:

- Il baricentro temporale \bar{t} :

$$\bar{t} = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} t |f(t)|^2 dt, \quad (4.14)$$

dove

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}; \quad (4.15)$$

- La larghezza temporale Δt

$$\Delta t^2 = \overline{(t - \bar{t})^2} = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \bar{t})^2 |f(t)|^2 dt, \quad (4.16)$$

che indica la larghezza della regione la cui trasformata è apprezzabilmente diversa da 0;

- Il baricentro spettrale $\bar{\omega}$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega |g(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}; \quad (4.17)$$

- La larghezza spettrale $\Delta\omega$

$$\Delta\omega^2 = \overline{(\omega - \bar{\omega})^2} = \frac{1}{M} \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |g(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (4.18)$$

Vedremo che è sempre soddisfatta la relazione

$$\Delta t \Delta\omega \geq \frac{1}{2} \quad (4.19)$$

e il segno di equivalenza si verifica solo in caso di $f(t)$ gaussiana:

$$f(t) = e^{-\alpha(t-t_0)^2} e^{-i\omega_0 t}, \quad (4.20)$$

per il quale

$$\bar{t} = t_0, \quad \bar{\omega} = \omega_0, \quad \Delta t^2 = \frac{1}{4\alpha}, \quad \Delta\omega^2 = \alpha. \quad (4.21)$$

Questo principio di indeterminazione implica che non è possibile ottenere righe spettrali infinitamente sottili anche se $f(t)$ è il più possibile monocromatico (non può essere puramente monocromatico nella realtà). Questo principio sarà vero ogni qualvolta che dovremo interpretare un fenomeno in termini ondulatori.

Possiamo facilmente estendere il concetto alla meccanica quantistica ricordando che il principio di De Broglie associa un'onda ad ogni particella. Possiamo quindi estendere la trasformata di Fourier a fenomeni ondulatori spaziali:

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx, \quad (4.22)$$

ad esempio nel caso della funzione d'onda $\Psi(x)$ abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{ikx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x) e^{ipx/\hbar} dx = \varphi(p) \quad (4.23)$$

e $|\varphi(p)|^2$ è la distribuzione di impulsi. Il principio di indeterminazione diventa così $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ e va a coincidere con quello di Heisenberg.

Possiamo introdurre la trasformata per più variabili reali

$$g(k_1, k_2, \dots, k_n) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) e^{i(x,k)} d^n x \quad (4.24)$$

e per variabili spaziali e temporali insieme

$$g(\omega; k) = \iint_{\mathbf{R}^2} f(t; x) e^{i(\omega t - kx)} dt dx. \quad (4.25)$$

Concludiamo dicendo che il segno davanti alla variabile immaginaria i è pura convenzione e avremmo potuto scegliere tranquillamente il $+$, è sufficiente rimanere coerenti.

4.3 La trasformata di Fourier in $L^1(\mathbf{R})$

Affinché la definizione di partenza sia corretta (\cdot), c'è bisogno che $f(t)$ sia sommabile

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty. \quad (4.26)$$

In tal caso per ogni $\omega \in \mathbf{R}$ abbiamo $f(t)e^{i\omega t} \in L^1(\mathbf{R})$ (il modulo dell'esponenziale è 1). Questo significa che (\cdot) esiste in $L^1(\mathbf{R})$, definisce una funzione nella nuova variabile reale ω ed è indicato dai seguenti simboli.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt = g(\omega) = \widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f). \quad (4.27)$$

Se $f(t)$ è reale abbiamo $\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$ (chiarisce il collegamento tra i valori assunti dalla trasformata per le frequenze negative con quelle positive), poi osservando che $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ risulta ovvio che la trasformata di una funzione reale pari è pari e la trasformata di una funzione reale dispari è immaginaria dispari.

Abbiamo anche le seguenti proprietà:

- La \mathcal{F} – trasformazione è lineare (ovvio dato che appartiene a L^1)

$$\mathcal{F}(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) = \alpha_1 \mathcal{F}(f_1) + \alpha_2 \mathcal{F}(f_2); \quad (4.28)$$

- la $g(\omega)$ è limitata

$$\sup_{\omega \in \mathbf{R}} |g(\omega)| \leq \sup \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) e^{i\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt = \|f\|_{L^1} < \infty; \quad (4.29)$$

- Valgono i seguenti teoremi di traslazione:

$$\mathcal{F}(f(t-a)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a) e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{i\omega t'} e^{i\omega a} dt' = e^{i\omega a} \mathcal{F}(f(t)) \quad (4.30)$$

e

$$\mathcal{F}(e^{-iat} f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iat} e^{i\omega t} dt = \widehat{f}(\omega - a); \quad (4.31)$$

- Vale il teorema di Riemann-Lebesgue (non lo dimostriamo)

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \widehat{f}(\omega) = 0; \quad (4.32)$$

- Date $f_1, f_2 \in L^1(\mathbf{R})$, si definisce il prodotto di convoluzione come

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-t) f_2(t) dt, \quad (4.33)$$

allora tale integrale esiste e appartiene ad $L^1(\mathbf{R})$; Il prodotto di convoluzione è commutativo e associativo e inoltre vale

$$\mathcal{F}(f_1 * f_2) = \widehat{f_1} \cdot \widehat{f_2}. \quad (4.34)$$

4.4 Continuità della trasformata di Fourier

Un'altra proprietà della trasformata di Fourier è che se $f(t) \in L^1(\mathbf{R})$, allora la sua trasformata $\hat{f}(\omega)$ è una funzione continua della variabile ω .

Se ora indichiamo con $\mathcal{C}^0(\mathbf{R})$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue e limitate, allora possiamo vedere la trasformata di Fourier come una trasformazione lineare \mathcal{F} fra gli spazi vettoriali $L^1(\mathbf{R})$ e $\mathcal{C}^0(\mathbf{R})$:

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbf{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbf{R}). \quad (4.35)$$

Introducendo ora le norme naturali di questi spazi

$$\|f\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx, \quad \|g\|_{\mathcal{C}^0} = \sup_{x \in \mathbf{R}} |g(x)| \quad (4.36)$$

otteniamo che \mathcal{F} è un operatore continuo rispetto a tali norme e per definizione se

$$f \xrightarrow{L^1} \varphi, \quad \text{ossia} \quad \|f - \varphi\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |f - \varphi| dt \rightarrow 0, \quad (4.37)$$

segue

$$\widehat{f} \xrightarrow{\mathcal{C}^0} \widehat{\varphi}, \quad \text{ossia} \quad \|\widehat{f} - \widehat{\varphi}\|_{\mathcal{C}^0} = \max_{\omega \in \mathbf{R}} |\widehat{f}(\omega) - \widehat{\varphi}(\omega)| \rightarrow 0. \quad (4.38)$$

Ciò significa che se una successione di funzioni $f_n \in L^1(\mathbf{R})$ converge ad una funzione $\varphi \in L^1(\mathbf{R})$ rispetto alla norma di $L^1(\mathbf{R})$, allora la successione \widehat{f}_n delle trasformate di Fourier converge uniformemente alla funzione $\widehat{\varphi}$.

4.5 Derivazione e trasformata di Fourier

Abbiamo visto che se ci troviamo in $L^1(\mathbf{R})$ allora la trasformata è una funzione continua, viene quindi spontaneo andare oltre e chiedersi se è possibile derivare tale trasformata. È possibile dimostrare che se oltre a $f(t) \in L^1(\mathbf{R})$ si ha anche $tf(t) \in L^1(\mathbf{R})$, allora possiamo fare il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ di

$$\frac{g(\omega + \epsilon) - g(\omega)}{\epsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \frac{e^{i\epsilon t} - 1}{\epsilon} f(t) dt \quad (4.39)$$

grazie al teorema di Lebesgue, ottenendo

$$\frac{dg}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} it f(t) dt = \mathcal{F}(it f(t)). \quad (4.40)$$

Possiamo ripetere il ragionamento per derivate superiori al primo ordine, allora se $f, tf, \dots, t^k f \in L^1(\mathbf{R})$ abbiamo $g = \mathcal{F}(f) \in \mathcal{C}^k(\mathbf{R})$ e

$$\frac{d^h g}{d\omega^h} = \mathcal{F}((it)^h f(t)). \quad (4.41)$$

Dovendo essere le funzioni limitate, allora abbiamo una decrescenza rapida ed è tanto più rapida maggiore è l'ordine di derivazione raggiungibile ($\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f)$ tende a zero almeno come $1/\omega^k$).

Diamo ora dei risultati validi per il calcolo della trasformata della derivata di una $f(t)$:

- Per simmetria abbiamo

$$\mathcal{F}(f'(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) e^{i\omega t} dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) i\omega e^{i\omega t} dt = -i\omega \mathcal{F}(f(t)) \quad (4.42)$$

o più in generale

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^h f}{dt^h}\right) = (-i\omega)^h \mathcal{F}(f) \quad (4.43)$$

Introducendo la funzione a gradino $\theta(t)$ (anche detta di Heaviside $H(t)$)

$$\theta(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t > 0, \end{cases} \quad (4.44)$$

abbiamo ($a > 0$):

- Se $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } |t| < a \\ 0 & \text{per } |t| > a \end{cases}$ si trova $\mathcal{F}(f(t)) = 2 \frac{\sin a\omega}{\omega}$;
- Se $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 < t < a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ si trova $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{e^{ia\omega} - 1}{i\omega}$;
- se $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ e^{-at} & \text{per } t > 0 \end{cases} = \theta(t)e^{-at}$ si trova $\mathcal{F}(f(t)) = \frac{1}{a - i\omega}$
- $\mathcal{F}(\theta(-t)e^{at}) = \frac{1}{a + i\omega}$;
- $\mathcal{F}(e^{-a|t|}) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$.

Infine per il lemma di Jordan abbiamo

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2 + t^2}\right) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\omega|} \quad (4.45)$$

4.6 Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbf{R})$

Consideriamo un sottoinsieme di $L^1(\mathbf{R})$, dove le funzioni sono anche quadrato sommabili, allora è possibile definire la norma $\|f\|_{L^2}$. È possibile dimostrare il seguente teorema.

Teorema. Se $f \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^2(\mathbf{R})$, allora $\widehat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ e

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \sqrt{2\pi} \|f\|_{L^2}. \quad (4.46)$$

Questa è detta uguaglianza di Parseval.

Vogliamo definire la trasformata di Fourier a partire da funzioni quadrato sommabili, questo perché L^2 è uno spazio di Hilbert e gode di proprietà migliori di L^1 . Osserviamo innanzitutto che sicuramente se $f \in L^2(\mathbf{R})$ (ma $f \notin L^1(\mathbf{R})$), la definizione di partenza non è applicabile. Procediamo allora così:

- Dimostriamo che una funzione $f \in L^2(\mathbf{R})$ può essere approssimata quanto si vuole da funzioni contenute in $L^1 \cap L^2$, cioè che, per ogni $f \in L^2$, esiste una successione di funzioni $f_n \in L^1 \cap L^2$ tale che

$$f_n \xrightarrow{L^2} f, \quad \text{ossia} \quad \|f_n - f\|_{L^2} \rightarrow 0 \quad (4.47)$$

(ovvero che $L^1 \cap L^2$ è denso, rispetto alla norma L^2 , in L^2);

- Sia \widehat{f}_n la successione delle trasformate di Fourier delle funzioni f_n , allora tale successione è anch'essa convergente (in L^2); è logico allora assumere come trasformata di Fourier della funzione f il limite di questa successione \widehat{f}_n , cioè per definizione

$$\mathcal{F}(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n; \quad (4.48)$$

- Sia g_n un'altra successione ($g_n \in L^1 \cap L^2$) convergente in L^2 alla funzione f , cioè $\|g_n - f\| \rightarrow 0$; allora si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{g}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n \quad (4.49)$$

cioè il limite non dipende dalla successione che era stata scelta per approssimare la $f \in L^2$.

Possiamo ora dare una definizione di trasformata di Fourier per le funzioni in $L^2(\mathbf{R})$:

$$\widehat{f}(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \widehat{f}_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^{+n} f(t) e^{i\omega t} dt. \quad (4.50)$$

Inoltre per Parseval abbiamo

$$\|\widehat{f}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi} \|f_n\|, \quad (4.51)$$

segue

$$\|\widehat{f}\| = \sqrt{2\pi} \|f\|. \quad (4.52)$$

Diamo anche la forma generalizzata di uguaglianza di Parseval:

$$(\widehat{f}, \widehat{g}) = 2\pi (f, g) \quad (4.53)$$

che in forma esplicita è

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) g(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}^*(\omega) g(\omega) d\omega. \quad (4.54)$$

Un'altra riscrittura di () è la seguente

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt, \quad (4.55)$$

dove \mathcal{P} è la parte principale di Cauchy. La trasformata di Fourier risulta quindi un operatore lineare dello spazio $L^2(\mathbf{R})$ in se stesso, continuo e con norma $\|\mathcal{F}\| = \sqrt{2\pi}$. Dunque se $f_n \in L^2$ e $f_n \rightarrow f$, anche la successione delle \mathcal{F} -trasformate \widehat{f}_n è convergente in senso $L^2(\mathbf{R})$ alla \widehat{f} , cioè anche $\|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_{L^2} \rightarrow 0$. Osserviamo infine che possiamo ricorrere al lemma di Jordan anche per queste funzioni, ad esempio per $f(t) = t/(1+t^2)$; si ha $f \in L^2(\mathbf{R})$ (ma $f \notin L^1(\mathbf{R})$) e

$$\mathcal{F}(f(t)) = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t e^{i\omega t}}{t^2 + 1} dt = \begin{cases} \pi i e^{-\omega} & \text{per } \omega > 0 \\ -\pi i e^{+\omega} & \text{per } \omega < 0 \end{cases} \quad (4.56)$$

4.7 Inversione della trasformata di Fourier

È possibile provare che la trasformata di Fourier in $L^2(\mathbf{R})$ è un operatore invertibile, infatti iniettività è garantita da () e la suriettività è dimostrabile osservando che: data una $g \in L^2(\mathbf{R})$, esiste una $f \in L^2(\mathbf{R})$ la cui trasformata coincida con g . Introduciamo così l'operatore inverso

$$\mathcal{F}^{-1} : L^2(\mathbf{R}) \rightarrow L^2(\mathbf{R}). \quad (4.57)$$

È possibile dimostrare che data $g \in L^2(\mathbf{R})$, la sua antitrasformata di Fourier f si ottiene mediante la seguente formula

$$f = \mathcal{F}^{-1}(g) = \frac{1}{2\pi} \widehat{g^*}. \quad (4.58)$$

In particolare, se $g = g(\omega)$ è una funzione che appartiene anche a $L^1(\mathbf{R})$, si può riscrivere

$$\mathcal{F}^{-1}(g(\omega)) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (4.59)$$

Se invece $g \notin L^1(\mathbf{R})$, tale integrale andrà naturalmente sostituito dal limite eseguito sulle funzioni "troncate":

$$\mathcal{F}^{-1}(g(\omega)) = f(t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (4.60)$$

Rimandiamo al libro per esempi di trasformate già visti. Il lemma di Jordan è utile anche per il calcolo di antitrasformate.

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{a - i\omega b}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{-ib(\omega + ia/b)} d\omega. \quad (4.61)$$

Ora la variabile di integrazione è ω (dobbiamo passare al piano complesso ω), allora se $-t > 0$ si deve richiudere nel semipiano superiore, dove non ci sono singolarità e pertanto $f(t) = 0$; se $-t < 0$, si rinchiude nel semipiano inferiore e si trova così

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \frac{1}{2\pi}(-2\pi i) \frac{1}{-ib} \mathcal{R}\left(-i\frac{a}{b}\right) = \frac{1}{b} e^{-at/b} & \text{per } t > 0 \end{cases} = \frac{1}{b} \theta(t) e^{-at/b}. \quad (4.62)$$

Possiamo generalizzare questi risultati per funzioni qualsiasi del tipo

$$\frac{1}{(\omega + ia - b)^n}, \quad (4.63)$$

è sufficiente applicare Jordan oppure osservare che

$$\mathcal{F}\left(\theta(t) t^n e^{-at - itb}\right) = (-i)^n \frac{d^n}{d\omega^n} \frac{1}{a - i\omega + ib} = \dots \quad (4.64)$$

Possiamo così calcolare l'antitrasformata di Fourier di ogni funzione razionale in $L^1(\mathbf{R})$ oppure in $L^2(\mathbf{R})$, riscrivendo tale funzione come combinazione di frazioni semplici.

Concludiamo osservando che la trasformata e l'antitrasformata di Fourier sono operazioni analoghe e intercambiabili (infatti condividono molte proprietà).

Diamo anche la formula dell'antitrasformata di Fourier in più variabili

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} g(k_1, k_2, \dots, k_n) e^{-i(x,k)} d^n k. \quad (4.65)$$

4.8 Proprietà della trasformata di Fourier. La trasformata come operatore unitario

Osserviamo come la formula dell'antitrasformata sia esattamente quella che avevamo previsto nella prima sezione del capitolo (dove avevamo interpretato la $g(\omega)$ come una distribuzione spettrale) Confrontando l'eguaglianza di Parseval con l'identità di Parseval (), abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(\omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt \propto \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f_k|^2; \quad (4.66)$$

è proprio il confronto tra queste due identità che ci ha condotto alla definizione euristica di $g(\omega)$ della prima sezione. Osserviamo come il procedimento "empirico" che ci ha condotto a sostituire l'equazione differenziale per lo spostamento $x(t)$ con l'equazione algebrica per $x_0 = x_0(\omega)$, acquista un significato preciso: l'equazione si ottiene infatti prendendo la trasformata di Fourier di ambo i membri della (4.65), ove si ponga $x_0(\omega) = \mathcal{F}(x(t))$.

Riconsiderando le proprietà dell'operatore trasformata e la sua invertibilità, osserviamo che, ponendo

$$\widetilde{\mathcal{F}}(f) = (2\pi)^{-1/2} \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (4.67)$$

l'operatore $\widetilde{\mathcal{F}}$ è un vero isomorfismo dello spazio di Hilbert $L^2(\mathbf{R})$ in se stesso (o più precisamente, un operatore unitario), e dunque un "cambiamento unitario di base" in $L^2(\mathbf{R})$. Questo significa che considerare un problema in termini di $f(t)$ o della sua trasformata è totalmente equivalente. Questo può fornire varie semplificazioni nei calcoli, si rimanda al libro per alcuni esempi.

Osserviamo che sussiste l'eguaglianza

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{-1} S = \widetilde{\mathcal{F}}, \quad (4.68)$$

dove S è l'operatore parità in $L^2(\mathbf{R})$, infatti

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{-1}(Sf(\xi)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\eta\xi} f(-\xi) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\xi} f(\xi) d\xi = \widetilde{\mathcal{F}}f(\xi), \quad (4.69)$$

da cui $\widetilde{\mathcal{F}}^2 = S$ e $\widetilde{\mathcal{F}}^4 = \mathbf{I}$; ne segue che gli autovalori di $\widetilde{\mathcal{F}}$ sono $\pm 1, \pm i$. Si può anche verificare che le funzioni di Hermite $u_0(x), u_4(x), \dots, u_{4n}(x)$ sono autofunzioni con autovalore 1, le $u_1(x), \dots, u_{4n+1}(x)$ con autovalore i , le $u_2(x), \dots, u_{4n+2}(x)$ con autovalore -1 e le $u_3(x), \dots, u_{4n+3}(x)$ con autovalore $-i$.

4.9 L'"impedenza" dei circuiti elettrici e la trasformata di Fourier

Mostriamo l'uso della trasformata di Fourier in un esempio semplice, caso particolare di una situazione ben più generale.

Consideriamo un circuito elettrico con tensione alternata $V(t)$ e una serie di resistenza-induttore. L'equazione di maglia è

$$RI + L \frac{dI}{dt} = V(t). \quad (4.70)$$

Applichiamo una tensione $V(t) = V_0 e^{-i\omega t}$ e cerchiamo una soluzione $I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$. Sostituendo otteniamo

$$(R - i\omega L)I_0 = V_0. \quad (4.71)$$

il che ci mostra che I_0 è unicamente dipendente dalla frequenza ω . Osserviamo che abbiamo una legge di Ohm generalizzata dove la differenza tra questa impedenza e quella che abbiamo in elettronica è unicamente frutto di una diversa definizione e convenzione d'uso della trasformata di Fourier; ovviamente però i risultati fisici coincidono.

Supponiamo ora che la tensione applicata sia una funzione generica, per trovare la soluzione non possiamo semplicemente risolvere l'equazione, ma dovremo fare un'analisi in frequenza del segnale (ovvero calcolarne la trasformata). Come abbiamo visto questo equivale a sostituire l'equazione della maglia con la sua trasformata di Fourier

$$\widehat{I}(\omega) = \widehat{G}(\omega) \widehat{V}(\omega), \quad (4.72)$$

dove $\widehat{I}(\omega) = \mathcal{F}(I(t))$ e la funzione

$$\widehat{G} = \widehat{G}(\omega) = \frac{1}{R - i\omega L} \quad (4.73)$$

esprime l'"ammettenza del circuito". Per trovare una soluzione particolare, data una $V(t)$ e quindi una $\widehat{V}(t)$, possiamo ricavare $I(t)$ antitrasformando la (4.59):

$$I(t) = G(t) * V(t), \quad G(t) = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{G}(\omega)). \quad (4.74)$$

Osserviamo che le proprietà fisiche del circuito sono riassunte da

$$G(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{R - i\omega L}\right) = \theta(t) \frac{1}{L} e^{-(R/L)t}, \quad (4.75)$$

detta la funzione di Green (in particolare un sistema può essere interamente descritto dalla sola funzione di Green o la sua trasformata).

Ovviamente ogni sistema ha una funzione di Green propria, questa è quella dei circuiti serie RL, se prendiamo il sistema della sezione (4.1) la funzione di Green è

$$\widehat{G}(\omega) = \frac{(1/m)}{\Omega^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}. \quad (4.76)$$

4.10 Proprietà della funzione di Green

Proviamo ora a dare una definizione formale di funzione di Green partendo da una definizione intuitiva:

- La funzione di Green di un sistema può essere vista come la “risposta” del sistema ad un segnale la cui trasformata di Fourier $V(\omega)$ sia uguale a uno.

Questa definizione è matematicamente ovvia, ma presenta un problema: non esistono funzioni la cui trasformata di Fourier è uno. Cerchiamo quindi una funzione il cui comportamento limite della trasformata di Fourier tenda ad uno. Prendendo di nuovo il circuito serie RL con $V(t) = f_\tau(t)$:

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 1/(2\tau) & \text{per } |t| < \tau \\ 0 & \text{per } |t| > \tau \end{cases}, \quad (4.77)$$

abbiamo

$$\widehat{V}(\omega) = \mathcal{F}(f_\tau) = \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau}, \quad \widehat{I}(\omega) = \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau(R - i\omega L)}, \quad (4.78)$$

osserviamo che per $\tau \rightarrow 0$ $f_\tau(t)$ tende a 0 per ogni $t \neq 0$, mentre non ha limite finito in $t = 0$, dunque la sua trasformata tende ad 1 per ogni ω .

Il limite $\tau \rightarrow 0$ di $f_\tau(t)$ è detto delta di Dirac, indicata $\delta(t)$, che non è propriamente una funzione ma bensì una distribuzione come studieremo nel prossimo capitolo. Una definizione preliminare di delta di Dirac è la seguente

$$\mathcal{F}(\delta(t)) = 1. \quad (4.79)$$

Possiamo ora dare una definizione migliore di funzione di Green:

- La funzione di Green di un sistema si può dunque vedere come la risposta all'ipotetico segnale che si ottiene mandando in ingresso un segnale impulsivo, la delta di Dirac.

Una funzione di Green si dice causale se $G(t) = 0$ per $t < 0$, ovvero se il sistema risponde all'input $\delta(t)$ solo negli istanti successivi all'impulso.

4.11 Prime proprietà della delta di Dirac

Diamo alcune prime proprietà ed utilizzi della delta di Dirac (di cui non riporto la dimostrazione):

- Innanzitutto come $\delta(t)$ corrisponde ad un impulso in $t = 0$, allora $\delta_a = \delta(t - a)$ corrisponde ad un impulso nel punto $t = a$;
- Possiamo introdurre la derivata di una funzione discontinua, sarà sufficiente aggiungere il termine $\sigma\delta(t - t_0)$ alla derivata, dove t_0 è il punto di discontinuità e σ la discontinuità:

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) - \lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t). \quad (4.80)$$

Le formule (4.36) e (4.38) continuano quindi ad essere valide anche in caso di discontinuità;

- La delta di Dirac è detta anche funzione campionatrice perché data una qualsiasi funzione φ (detta funzione test), allora

$$\int_I \varphi(t)\delta(t - a)dt = \varphi(a), \quad (4.81)$$

dove I è un qualsiasi insieme contenente a ;

- Possiamo interpretare $\delta(x - a)$ come un autovettore dell'operatore di moltiplicazione x , in meccanica quantistica questo significa che le autofunzioni dell'operatore posizione x sono pacchetti d'onda localizzati in $x = a$;
- Abbiamo

$$\mathcal{F}(\delta(t - a)) = e^{i\omega a} \quad (4.82)$$

e

$$\mathcal{F}^{-1}(\delta(\omega - a)) = \frac{1}{2\pi} e^{-iat}, \quad (4.83)$$

da cui segue

$$\mathcal{F}(e^{-iat}) = 2\pi\delta_a = 2\pi\delta(\omega - a). \quad (4.84)$$

4.12 Relazioni di dispersione: introduzione

La funzione di Green non è altro che un risultato particolare di un caso ben più generale. Prendiamo un sistema fisico qualsiasi: sia $a(t)$ la sollecitazione del sistema e $b(t)$ la risposta del sistema, siano soddisfatte le seguenti ipotesi, allora:

1. $b(t)$ è una funzione lineare di $a(t)$;
2. $b(t)$ dipende casualmente da $a(t)$;
3. Le proprietà del sistema sono indipendenti dal tempo.

Possiamo tradurre queste ipotesi in linguaggio matematico:

1. $b(t) = G(t, t')a(t')$, dove t' è il tempo in cui agisce la sollecitazione e t il tempo della risposta, dovremo quindi sommare l'ingresso su tutti gli istanti di tempo

$$b(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t')a(t')dt'; \quad (4.85)$$

2. La relazione è di tipo causale, quindi tutto ciò che è prima della causa non può suscitare una risposta

$$b(t) = \int_{-\infty}^t G(t, t')a(t')dt'; \quad (4.86)$$

3. Se il sistema è invariante allora necessariamente $G(t, t') = G(t - t')$, ci ritroviamo quindi con

$$b(t) = \int_{-\infty}^t G(t - t')a(t')dt'. \quad (4.87)$$

Prendendo la trasformata di Fourier abbiamo:

$$\widehat{b}(\omega) = \widehat{G}(\omega)\widehat{a}(\omega), \quad (4.88)$$

dove naturalmente

$$\widehat{G}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} G(t)dt. \quad (4.89)$$

L'esempio classico fatto a questo punto è quello di un'onda elettromagnetica di campo elettrico $E(t) = a(t)$ che arriva su un materiale polarizzandolo $P(t) = b(t)$, segue

$$\widehat{P}(\omega) = \chi(\omega)\widehat{E}(\omega), \quad (4.90)$$

dove abbiamo usato la notazione

$$\chi(\omega) = \widehat{G}(\omega) \quad (4.91)$$

e segue la legge di dispersione $\epsilon = \epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\xi(\omega)$.

4.13 Teorema di Titchmarsh. Trasformate di Hilbert

Se nell'esempio fatto $E(t)$ e $P(t)$ sono reali (e quindi lo è anche $G(t)$), abbiamo $\widehat{G}(\omega) = \chi(\omega) = \chi' + i\chi''$,

$$\chi'(\omega) = \chi'(-\omega), \quad \chi''(\omega) = -\chi''(-\omega). \quad (4.92)$$

Se poi nella (4.76) abbiamo ω complessa, allora

$$\chi(-\omega^*) = \chi^*(\omega). \quad (4.93)$$

Supponiamo ora che $G(t)$ sia quadrato sommabile, possiamo provare che la sua trasformata di Fourier $\chi(\omega)$, vista come funzione della variabile complessa ω , è una funzione olomorfa nel semipiano complesso superiore $\text{Im } \omega > 0$. Nella dimostrazione, che non riporto, vengono definite le trasformate di Hilbert (l'una dell'altra):

$$\chi'(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi''(v)}{v - \omega} dv, \quad \chi''(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi'(v)}{v - \omega} dv. \quad (4.94)$$

Arriviamo alla fine a dimostrare il seguente teorema:

Teorema di Titchmarsh. Per la funzione di Green di un sistema lineare indipendente dal tempo le tre seguenti proprietà sono equivalenti:

1. $G(t) = 0$ per $t < 0$ (che è l'ipotesi di causalità), inoltre $G(t) \in L^2$ e ammette quindi \mathcal{F} -trasformata $\chi(\omega) = \mathcal{F}(G(t))$.
2. $\chi(\omega') \in L^2$, con ω' reale, ed è il limite per $\omega'' = \text{Im } \omega \rightarrow 0^+$ di una funzione $\chi(\omega' + i\omega'')$ olomorfa in $\omega'' > 0$, tale inoltre che esiste finito il

$$\sup_{\omega'' > 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\omega' + i\omega'')|^2 d\omega' \quad (4.95)$$

3. $\chi'(\omega)$ e $\chi''(\omega)$ sono le trasformate di Hilbert l'una dell'altra (cioè valgono le (4.61)), ed appartengono a L^2 .

Usando il teorema di Titchmarsh possiamo verificare che i nostri modelli obbediscano al principio di casualità.

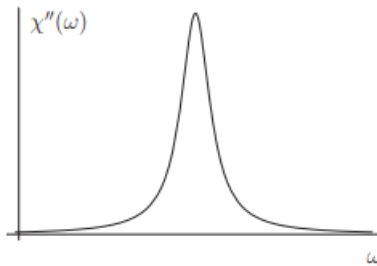
4.14 Relazioni di dispersione di Kramers e Kronig

Le due trasformate di Hilbert (4.81), note come relazioni di dispersione, vennero ottenute per la prima volta da Kramers e Kronig. Queste due relazioni collegano tra loro due quantità significative e misurabili: χ' , legato all'indice di rifrazione del mezzo, e χ'' , proporzionale all'indice di assorbimento. Vediamo ora alcune conseguenze dirette delle relazioni di dispersione:

1. Usando le (4.79) le relazioni di dispersione possono essere scritte in termini di frequenze "fisiche" ($\nu \geq 0$):

$$\begin{aligned} \chi'(\omega) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \dots + \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^0 \dots = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{v}{v^2 - \omega^2} \chi''(v) dv \\ \chi''(\omega) &= -\frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_n^{+\infty} \frac{\omega}{v^2 - \omega^2} \chi'(v) dv; \end{aligned} \quad (4.96)$$

2. Un mezzo trasparente in un certo intervallo di frequenze nel quale presenta il fenomeno di dispersione è necessariamente assorbente ($\chi'' \neq 0$) in un qualche altro intervallo di frequenza;
3. La tipica curva che assume $\chi''(\omega)$ in vicinanza di una frequenza di assorbimento è la seguente:



In corrispondenza della stessa regione di frequenze l'andamento di $\chi'(\omega)$ presenta la curva tipica della dispersione anomala;

4. Nelle regioni di trasparenza abbiamo $\chi''(\omega) \simeq 0$ e quindi possiamo integrare senza Cauchy, poiché $v = \omega$ cade proprio nel regione in cui χ'' non contribuisce all'integrale. In questa regione, ammettendo, come capita di regola, che $\chi''(\omega) > 0$ abbiamo

$$\frac{d\chi'}{d\omega} > 0; \quad (4.97)$$

5. Nelle regioni di trasparenza:

$$\frac{d}{d\omega}(\omega^2 \chi') > 0 \Rightarrow n' + \omega \frac{dn'}{d\omega} > \frac{1}{n'}, \quad (4.98)$$

dove la seconda equazione vale per ω reali positivi.

Detta v_g la velocità di gruppo dell'onda trasmessa, abbiamo

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega}(\omega n'(\omega)) = \frac{1}{c} \left(n' + \omega \frac{dn'}{d\omega} \right), \quad (4.99)$$

da cui $v_g < c$;

6. Si supponga $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, allora

$$\chi'(\omega) \simeq -\frac{2}{\pi} \frac{1}{\omega^2} \int_0^{\omega_1} v \chi''(v) dv + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_2}^{\infty} \chi''(v) \frac{dv}{v} = A - \frac{B}{\omega^2} \quad (4.100)$$

con A, B positive. Se inoltre ω è maggiore di tutte le frequenze di assorbimento abbiamo

$$\chi' \simeq -\frac{C}{\omega^2} \quad (4.101)$$

che è l'andamento tipico dei gas fortemente ionizzati.

4.15 Presenza di singolarità nella $\chi(\omega)$. Mezzi conduttori

Procediamo la trattazione del $\chi(\omega)$ studiando un esempio in cui la funzione presenta una singolarità per $\omega = 0$ (e quindi $\chi(\omega) \notin L^2$).

Prendiamo un mezzo conduttore (conducibilità σ) e sottoponiamolo ad un campo elettrico E , allora avremo una densità di corrente

$$J_{\text{tot}} = \sigma E + \frac{dP}{dt} \equiv \frac{dP_{\text{eff}}}{dt}. \quad (4.102)$$

Segue

$$\sigma \widehat{E}(\omega) - i\omega \widehat{P}(\omega) = -i\omega \widehat{P}_{\text{eff}}(\omega) \quad (4.103)$$

e ponendo $\widehat{P}_{\text{eff}}(\omega) = \widetilde{\chi}(\omega) \widehat{E}(\omega)$, ricaviamo

$$\widetilde{\chi}(\omega) = \chi(\omega) + i \frac{\sigma}{\omega}. \quad (4.104)$$

Possiamo quindi usare $\widetilde{\chi}(\omega)$ al posto di $\chi(\omega)$ e ripetere i ragionamenti fatti per le (4.89), trovando

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v - \omega} \widetilde{\chi}(v) dv = \pi i \frac{i\sigma}{-\omega} + \pi i \widetilde{\chi}(\omega) = \frac{\pi\sigma}{\omega} + i\pi \widetilde{\chi}(\omega). \quad (4.105)$$

Questa tecnica di “isolare” dalla funzione le parti singolari si presta a varie generalizzazioni, dette: “relazioni di dispersione sottratte”.

4.16 Modello dell'elettrone legato elasticamente

Vediamo ora un semplice modello microscopico di un atomo di un materiale dielettrico. Schematizziamo il nostro sistema come un elettrone attaccato elasticamente ad un nucleo immobile e aggiungiamo anche uno smorzamento β che tenga conto di tutte le perdite di energia (urti, irraggiamento). L'equazione differenziale è

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = eE(t), \quad (4.106)$$

identica a quella studiata nella sezione (4.1). La polarizzazione totale del materiale è $P(t) = Nex(t)$, dove N è il numero di elettroni per unità di volume, e dalla trasformata di Fourier ricaviamo:

$$\chi(\omega) = \frac{Ne^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad (4.107)$$

dove $\omega_0^2 = k/m$ è la frequenza propria e $\gamma = \beta/m$. Da questa equazione possiamo ritrovare molte delle proprietà viste per le relazioni (4.89), come l'andamento e i poli. Abbiamo due poli, entrambi situati nel semipiano inferiore, conformemente al principio di causalità: se $\omega_0^2 - \gamma^2/4 \equiv a^2 > 0$, i poli sono $\omega_{\pm} = \pm a - i\gamma/2$ e la corrispondente funzione di Green ha andamento oscillante smorzato esponenzialmente; se invece $\omega_0^2 - \gamma^2/4 \equiv -a^2 < 0$, i poli sono $\omega_{\pm} = -i(\gamma/2 \pm a)$ e la funzione di Green ha andamento smorzato non oscillante come nel caso $\omega_0 = \gamma/2$, in cui abbiamo un polo doppio in $\omega = -i\gamma/2$. Nel caso limite in cui l'elettrone non è legato ($k = 0$), abbiamo $\omega_0 = 0$ e un polo in $\omega = 0$ (tipico dei conduttori) e uno in $\omega = -i\gamma$.

4.17 Trasformata di Laplace: prime proprietà

Definiamo ora la trasformata di Laplace, che è in un certo senso una generalizzazione della trasformata di Fourier. Applicheremo la trasformata di Laplace solo alle funzioni localmente sommabili, cioè sommabili su un intervallo finito ed inoltre tali che

$$f(x) = 0 \quad \text{per} \quad x < 0. \quad (4.108)$$

Parlando di trasformata di Laplace supporremo sempre che queste ipotesi siano soddisfatte (ad esempio se vedremo la trasformata di Laplace di $\cos(x)$ supporremo che sia $\theta(x)\cos(x)$).

Sia s la variabile complessa $s' + is''$ e consideriamo la funzione

$$f(x)e^{-sx}, \quad (4.109)$$

dove $f(x)$ soddisfa le condizioni appena richieste. Per tutti i valori di s per la quale tale funzione risulta sommabile rispetto ad x , l'integrale

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx \quad (4.110)$$

definisce una funzione della variabile s che si chiama trasformata di Laplace di $f(x)$ e si indica come

$$\mathcal{L}(f(x)) = F(s) \equiv \int_0^{\infty} f(x)e^{-sx} dx = \tilde{f}(s). \quad (4.111)$$

Si dimostra facilmente che esiste un numero reale λ_0 , detto ascissa di sommabilità o ascissa di convergenza, che definisce un semipiano di convergenza della trasformata. Dunque per $\text{Re } s > \lambda_0$ la funzione è sommabile e per $\text{Re } s < \lambda_0$ non è sommabile (λ_0 può essere anche $\pm\infty$).

Diamo il seguente teorema, senza dimostrarlo, utile per determinare il semipiano di convergenza di $f(x)$: Criterio di trasformabilità. Data $f(x)$, se esistono tre costanti reali $x_0 \geq 0, M > 0, k$ tali che

$$|f(x)| \leq Me^{kx} \quad \text{per ogni} \quad x \geq x_0 \quad (4.112)$$

allora la trasformata di Laplace della f esiste certamente in tutto il semipiano complesso tale che $\text{Re } s > k$ cioè si ha $\lambda_0 \leq k$.

Diamo ora alcuni teoremi, esempi e proprietà delle trasformate di Laplace:

1. La trasformata di Laplace è una trasformazione lineare;

2. La trasformata della funzione gradino traslata $\theta(x-a)$ è

$$\mathcal{L}(\theta(x-a)) = \int_a^\infty e^{-sx} dx = \frac{e^{-sx}}{-s} \Big|_a^\infty = \frac{e^{-as}}{s}, \quad (4.113)$$

dove $\lambda_0 = 0$;

3. Teoremi di traslazione:

- Sia $\mathcal{L}(f(x)) = \tilde{f}(s)$ con ascissa di convergenza λ_0 ; allora

$$\mathcal{L}(e^{cx} f(x)) = \int_0^\infty f(x) e^{-(s-c)x} dx = \mathcal{L}_{s-c}(f(x)) = \tilde{f}(s-c) \quad (4.114)$$

inoltre, dovendo essere $\text{Re}(s-c) > \lambda_0$, ne segue che l'ascissa di $\mathcal{L}(e^{cx} f(x))$ è data da $\lambda_0 + \text{Re } c$;

•

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(x-a)\theta(x-a)) &= \int_a^\infty f(x-a) e^{-sx} dx = \\ &= \int_a^\infty f(x') e^{-sx'} e^{-sa} dx = e^{-sa} \mathcal{L}(f(x)); \end{aligned} \quad (4.115)$$

4. Si può dimostrare che

$$\mathcal{L}(f_1 * f_2) = \mathcal{L}(f_1) \mathcal{L}(f_2) = \tilde{f}_1(s) \tilde{f}_2(s), \quad (4.116)$$

questo permette di estendere alla derivata di Laplace il formalismo della funzione di Green. Un'utile conseguenza è

$$\mathcal{L}\left(\int_0^x f(t) dt\right) = \mathcal{L}(f * \theta) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f); \quad (4.117)$$

5.

$$\lim_{\text{Re } s \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f) = 0; \quad (4.118)$$

6. La trasformata di Laplace della distribuzione $\delta(x-a)$ (con $a \geq 0$) è

$$\mathcal{L}(\delta(x-a)) = e^{-sa} \quad (4.119)$$

4.18 Olomorfia della trasformata di Laplace

È possibile dimostrare il seguente notevole teorema: Teorema. La trasformata di Laplace $F(s)$ è una funzione olomorfa nel suo semipiano di convergenza $\text{Re } s > \lambda_0$.

In generale, sarà proprio la singolarità con la parte reale 'più grande a fissare l'ascissa di convergenza λ_0 . Da questo teorema segue

$$\frac{dF}{ds} = \int_0^\infty (-x f(x)) e^{-sx} dx = \mathcal{L}(-x f(x)), \quad (4.120)$$

e iterando il ragionamento

$$\frac{d^n F}{ds^n} = (-1)^n \mathcal{L}(x^n f(x)). \quad (4.121)$$

Generalizziamo il risultato: sia $f(x)$ derivabile e sia $f'(x)$, la sua derivata, localmente sommabile; supponiamo per un certo valore di s entrambe le funzioni $e^{-sx} f(x)$ e $e^{-sx} f'(x)$ siano sommabili; si ha allora

$$\mathcal{L}(f'(x)) = \int_0^\infty f'(x) e^{-sx} dx = -f(0) + s \mathcal{L}(f(x)) \quad (4.122)$$

avendo integrato per parti e dove, naturalmente, si intende $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Più in generale

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(x)) = s^n \mathcal{L}(f(x)) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (4.123)$$

e segue: Teorema del valore iniziale.

$$f(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{\text{Re } s \rightarrow \infty} s \mathcal{L}(f) \quad (4.124)$$

che permette di ottenere direttamente $f(0^+)$ dalla $\mathcal{L}(f)$.

4.19 Inversione della trasformata di Laplace

Vogliamo ora invertire la trasformata. Esistono alcuni casi comuni dove il calcolo è immediato, ma riporto ora solo il metodo generale. Il metodo generale fa uso delle formule di Fourier: poniamo $s = s' + is''$, con $s' > \lambda_0$ e scriviamo la trasformata di Laplace di $f(x)$ nella forma

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(x) e^{-s'x} e^{-is''x} dx = \mathcal{F}_{(-s'')} (e^{-s'x} f(x)), \quad (4.125)$$

dove $\mathcal{F}_{(-s'')}$ indica la trasformata di Fourier, nella variabile $\omega = -s''$ della funzione $e^{-s'x} f(x)$. Usando l'antitrasformata di Fourier abbiamo

$$e^{-s'x} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s', s'') e^{is''x} ds'' \quad (4.126)$$

da cui essendo $s = s' + is''$:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) e^{sx} ds, \quad (4.127)$$

dove l'integrale è eseguito lungo una retta verticale di ascissa $a > \lambda_0$ nel piano complesso. Osserviamo anche che una generalizzazione del lemma di Jordan mostra che il contributo dell'integrale su questa semicirconferenza tende a zero quando $R \rightarrow \infty$.

4.20 Alcune osservazioni sulla trasformata di Laplace

Se una funzione $f(x)$ soddisfa (4.95) e appartiene a L^1 , allora possiamo effettuare sia la trasformata di Laplace $\tilde{f}(s)$ che di Fourier $\hat{F}(\omega)$. La trasformata sarà uguale con unica differenza la variabile che nel primo caso è la variabile complessa s , mentre nel secondo è la variabile immaginaria $-i\omega$. Se $\lambda_0 \leq 0$, allora la trasformata di Fourier è ottenuta semplicemente sostituendo la variabile. Essendo le due trasformate uguali, allora in questi casi la trasformata di Fourier sarà olomorfa nel semipiano di convergenza $\text{Re}(-i\omega > \lambda_0)$ (cioè $\text{Im } \omega = \omega'' > \lambda_0$). Se $f(x)$ ha supporto compatto, allora la sua \mathcal{F} -trasformata sarà olomorfa in tutti i punti (al finito) del piano complesso ω . L'uso della \mathcal{L} -trasformata al posto della \mathcal{F} -trasformata sarà comodo quando quest'ultima non è ammessa, oppure ne è difficile il calcolo.

Un'altra osservazione sulle trasformate di Laplace è che data una funzione periodica $f(x)$ di periodo T , sia

$$F_0(s) = \int_0^T f(x) e^{-sx} dx \quad (4.128)$$

la \mathcal{L} -trasformata ristretta a $[0, T]$, allora per il teorema di traslazione la trasformata di $f(x)$ ristretta ai successivi intervalli è $e^{-sT} F_0(s), e^{-2sT} F_0(s)$. Concludiamo che la trasformata di Laplace di una funzione periodica ha la forma

$$\mathcal{L}(f) = F(s) = F_0(s) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} = \frac{1}{1 - e^{-sT}} F_0(s), \quad \text{Re } s > 0, \quad \lambda_0 = 0 \quad (4.129)$$

e presenta infiniti poli del primo ordine in $s_n = 2n\pi i/T, n = 0, \pm 1, \dots$

Possiamo usare la \mathcal{L} -trasformata per risolvere equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del tipo

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x), \quad (4.130)$$

dove $f(x)$ soddisfa (4.95) e sono assegnate le condizioni iniziali $y(0), y'(0), \dots, y^{(n-1)}(0)$. Il procedimento è prevedibile: trasformiamo, ci troviamo davanti un'equazione algebrica per la trasformata $Y(s) = \mathcal{L}(y(x))$ della soluzione cercata $Y(x)$:

$$\begin{aligned} & (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) Y(s) + \\ & -a_n s^{n-1} y(0) - a_{n-1} s^{n-2} y'(0) - \dots - a_1 y(0) = \tilde{f}(s). \end{aligned} \quad (4.131)$$

Il problema è ora ricondotto al calcolo dell'antitrasformata. Questo metodo risolve anche i casi in cui $f(x)$ sia non continua, ma in questo caso la soluzione è garantita solo localmente. Osservazioni analoghe valgono anche per la trasformata di Fourier.

Infine se sia $f(x)$ che $g(x) = f(x)/x$ ammettono \mathcal{L} -trasformata, allora

$$G(s) = \mathcal{L}(g(x)) = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x} e^{-sx} dx = \int_s^{+\infty} F(z) dz. \quad (4.132)$$

4.21 La funzione Γ di Eulero ed altre trasformate di Laplace

Vediamo alcune \mathcal{L} -trasformate di funzioni speciali:

- Si consideri, per ogni numero complesso z con $\operatorname{Re} z > 0$, l'integrale, certamente convergente

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (4.133)$$

ovvero la Γ di Eulero (olomorfa almeno nel semipiano $\operatorname{Re} z > 0$), che generalizza la proprietà caratteristica dell'integrale $n!$. Segue

$$z(z+1)\cdots(z+n)\Gamma(z) = \Gamma(z+n+1) \quad (4.134)$$

e dunque $\Gamma(z)$ presenta un polo di ordine uno per ogni punto $z = -n$ con residuo $(-1)^n/n!$. Inoltre $\Gamma(z)$ non ha altre singolarità al finito e non ha zeri. Per la gamma di Eulero vale:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (4.135)$$

e la trasformata di Laplace valida per qualsiasi numero reale $\alpha > -1$

$$\mathcal{L}(x^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} \quad (4.136)$$

- Vediamo ora uno dei rari casi in cui si \mathcal{L} -trasforma un'equazione a coefficienti non costanti. Data l'equazione di Bessel con $m = 0$:

$$xy'' + y' + xy = 0, \quad (4.137)$$

la cui soluzione regolare è la funzione di Bessel $y(x) = J_0(x)$. Ponendo $Y_0(s) = \mathcal{L}(J_0(x))$, si ottiene

$$(s^2 + 1) \frac{dY_0}{ds} + sY_0 = 0, \quad (4.138)$$

che si risolve da:

$$Y_0(s) = \mathcal{L}(J_0(x)) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}. \quad (4.139)$$

Più in generale, si trovano le seguenti trasformate di Laplace per le funzioni di Bessel $J_m(x)$:

$$\mathcal{L}(J_m(x)) = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}} \frac{1}{(s + \sqrt{s^2 + 1})^m}. \quad (4.140)$$

4.22 Applicazioni alle equazioni alle derivate parziali

Vediamo alcuni esempi riguardanti l'uso delle trasformate di Fourier e di Laplace per la risoluzione di equazioni alle derivate parziali:

- Possiamo usare la \mathcal{F} -trasformata per risolvere problemi di propagazione del calore lungo una retta infinita. L'obiettivo è trovare l'evoluzione temporale $u(x, t)$ data la condizioni iniziale $u(x, 0) = f(x)$. Introduciamo la trasformata di Fourier

$$\widehat{u}(k, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{ikx} dx, \quad (4.141)$$

dove t è il parametro, allora l'equazione del calore diventa:

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} = -Ck^2 \widehat{u}, \quad (4.142)$$

un'equazione differenziale ordinaria che, se risolta con la condizione iniziale, diventa

$$\widehat{u}(k, t) = \widehat{f}(k) e^{-Ck^2 t} = \widehat{f}(k) \widehat{G}(k, t). \quad (4.143)$$

La $g(x, t)$ può essere vista come funzione di Green che descrive la distribuzione delle temperature se $f(x) = \delta(x)$. Osserviamo che essendo la temperatura diversa da zero in ogni punto della retta questo significa che la trasmissione del calore è istantanea (cosa non realistica). Infine se $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$, allora $u(x, t)$ è limitata e \mathcal{C}^∞ sia rispetto ad x che rispetto a t .

- Usando lo stesso procedimento possiamo trovare l'evoluzione temporale di una corda elastica di lunghezza infinita (aka l'equazione di d'Alembert). Se per esempio abbiamo le condizioni iniziali $u(x, 0) = f(x)$ e $u_t(x, 0) = g(x) = 0$, risolviamo come segue: \mathcal{F} -trasformiamo d'Alembert e otteniamo

$$\frac{d^2 \widehat{u}}{dt^2} = -v^2 k^2 \widehat{u}, \quad (4.144)$$

un'equazione differenziale ordinaria, che risolviamo come

$$\widehat{u}(k, t) = \frac{1}{2} \widehat{f}(k) (e^{ikvt} + e^{-ikvt}); \quad (4.145)$$

antitrasformando troviamo poi

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x - vt) + f(x + vt)), \quad (4.146)$$

che è la sovrapposizione di due onde.

- Usiamo ora la trasformata di Fourier per risolvere un'equazione di Laplace bidimensionale

$$\Delta u = 0, \quad u = u(x, y) \quad (4.147)$$

nel semipiano $y > 0$ e condizione al bordo $u(x, 0) = F(x)$. Il procedimento è sempre il solito, \mathcal{F} -trasformiamo l'equazione di Laplace e otteniamo una ODE:

$$-k^2 \widehat{u}(k, y) + \frac{d^2 \widehat{u}}{dy^2} = 0 \quad (4.148)$$

di soluzione

$$\widehat{u}(k, y) = A(k)e^{|k|y} + B(k)e^{-|k|y}. \quad (4.149)$$

Usando la condizione $y > 0$ e la condizione di bordo abbiamo rispettivamente: $A(k) = 0$ e $B(k) = \mathcal{F}(F(x)) = \widehat{F}(k)$. La soluzione del problema è data dal calcolo dell'antitrasformata di

$$\widehat{u}(k, y) = \widehat{F}(k)e^{-|k|y} \quad (4.150)$$

e la soluzione si presenta nella forma di prodotto di convoluzione.

- Vediamo ora un'applicazione della trasformata di Laplace ad un'equazione alle derivate parziali. Prendiamo l'equazione di d'Alembert per una corda elastica con $0 \leq x \leq L$ e $v = 1$ a cui aggiungiamo una forza $f(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x, t) = 0. \quad (4.151)$$

Poniamo

$$\bar{u}(x, s) = \int_0^\infty u(x, t)e^{-st} dt \quad (4.152)$$

e trasformiamo rispetto alla variabile t , avremo

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - s^2 \bar{u} = -su(x, 0) - u_t(x, 0) - \bar{f}(x, s), \quad (4.153)$$

dove $u(x, 0), u_t(x, 0)$ sono le condizioni iniziali. Otteniamo ancora una ODE, questa volta con s come parametro, di soluzione

$$\bar{u}(x, s) = A(s)e^{xs} + B(s)e^{-xs} + \Phi(x, s). \quad (4.154)$$

Per determinare A e B , dobbiamo dare le condizioni agli estremi, che possono essere fissi o mobili.

Capitolo 5

Elementi di teoria delle distribuzioni

Nel precedente capitolo abbiamo introdotto in modo empirico la nozione di delta di Dirac. In questo la ridefiniremo con esigenza e rigore, mettendo in evidenza quali sono le operazioni su di essa lecite e quali no. Vedremo poi le funzioni generalizzate collegate ad essa e la distribuzione "parte principale". Infine introdurremo una nozione molto conveniente di convergenza.

5.1 Distribuzioni temperate

Indichiamo con \mathcal{S} lo spazio vettoriale costituito dalle funzioni test $\phi(x)$ infinitamente derivabile e a decrescenza rapida (con tutte le loro derivate), cioè tali che $\forall h, k$ interi fissati, si ha

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^h \frac{d^k \phi}{dx^k} \right| < +\infty. \quad (5.1)$$

Sia $\{\phi_n\}$ una successione di funzioni di \mathcal{S} : si dice che $\{\phi_n\} \rightarrow 0$ in \mathcal{S} se, $\forall h, k$, abbiamo

$$x^h \frac{d^k \phi_n}{dx^k} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty, \quad \text{uniformemente.} \quad (5.2)$$

Rispetto a tale convergenza, \mathcal{S} risulta completo.

Si dicono distribuzioni temperate i funzionali lineari e continui di \mathcal{S} in \mathbb{C} , cioè le applicazioni $T : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$, che sono lineari rispetto alla convergenza ora introdotta, ovvero tali che

$$T(\phi_n) \rightarrow T(\phi) \quad \text{se } \phi_n \rightarrow \phi \quad \text{in } \mathcal{S}. \quad (5.3)$$

L'insieme delle distribuzioni temperate viene indicato \mathcal{S}' ed è lo spazio duale di \mathcal{S} .

Vediamo alcuni esempi di distribuzioni:

- Consideriamo funzioni localmente sommabili $U(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ e limitate: l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \phi(x) dx \quad (5.4)$$

esiste per ogni $\phi \in \mathcal{S}$ ed è un funzionale lineare di \mathcal{S} in \mathbb{C} . Inoltre se $\phi_n \rightarrow \phi$ abbiamo certamente

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) (\phi_n(x) - \phi(x)) dx \right| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)| \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi_n(x) - \phi(x)| dx \rightarrow 0. \quad (5.5)$$

e tale funzionale è continuo e individua una distribuzione temperata che indicheremo con $T_u \in \mathcal{S}'$:

$$T_u(\phi) := \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \phi(x) dx = \langle T_u, \phi \rangle \quad (5.6)$$

e diremo T_u distribuzione associata alla funzione $u(x)$.

Con un abuso di notazione possiamo scrivere $\langle u, \phi \rangle$. Analogamente, ogni $u(x) \in L^1(\mathbb{R})$ individua una distribuzione T_u grazie al teorema di Lebesgue. Se $u(x) \in L^2(\mathbb{R})$, allora $\langle T_u, \phi \rangle$ diventa un prodotto scalare (u, ϕ) in $L^2(\mathbb{R})$ e la convergenza della successione delle ϕ_n in \mathcal{S} assicura certamente che $(u^*, \phi_n) \rightarrow (u^*, \phi)$.

- Si indica con $\delta(x - x_0)$ e si chiama delta di Dirac in x_0 la distribuzione così definita

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0) \quad (5.7)$$

che è un funzionale lineare e continuo. In analogia con la (5.1) scriviamo

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0). \quad (5.8)$$

Notare che la δ_{x_0} è una distribuzione “singolare”, cioè non è associata a nessuna funzione $u(x)$.

- Sia $T \in \mathcal{S}'$ una qualsiasi distribuzione e $P(x)$ un polinomio: allora $P(x)T \in \mathcal{S}'$; perché $P(x)\varphi(x) \in \mathcal{S}$ e

$$\langle P(x)T, \varphi \rangle = \langle T, P(x)\varphi \rangle. \quad (5.9)$$

5.2 Convergenza "debole" fra distribuzioni

Sia T_n una successione di distribuzioni di \mathcal{S}' . Si dice che T_n converge a $T \in \mathcal{S}'$ se, per ogni fissata $\varphi \in \mathcal{S}$, si ha

$$\langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle. \quad (5.10)$$

Questa nozione di convergenza è l'analogo per le distribuzioni della convergenza debole già studiata e prende quindi sempre questo nome. È una nozione di convergenza molto comoda perché ampia e contenente molte nozioni di convergenza già note:

- Se $u_n(x)$ è una successione di funzioni in L^2 convergente ad $U(x)$ nella norma L^2 , o in convergenza debole, allora la successione delle distribuzioni associate T_{u_n} è anche S' -convergente a T_U ;
- La stessa cosa vale se $u_n(x) \in L^1$ e $u_n(x) \rightarrow u(x)$ puntualmente q.o. ed è soddisfatta la condizione di convergenza dominata di Lebesgue;
- Di nuovo vale la convergenza della distribuzione se le $u_n(x)$ convergono puntualmente quasi ovunque ad $u(x)$ e sono localmente sommabili e limitate.

Queste situazioni erano già state viste, ora vediamo le situazioni nuove:

- Le varie funzioni f_τ viste nelle sezioni (4.10-11), pur non essendo convergenti puntualmente in tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ individuano delle distribuzioni T_{f_τ} che convergono in senso \mathcal{S}' alla $\delta(x)$; questo si verifica (per esempio) anche per le funzioni:

$$u_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{n}{(1 + n^2 x^2)} \quad , \quad u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-x^2/\varepsilon} \quad , \quad u_\varepsilon(x) = \theta(x) \frac{1}{\varepsilon} e^{-x/\varepsilon}; \quad (5.11)$$

- Più in generale, se $h(x) \in L^1(\mathbb{R})$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx \neq 0$, allora

$$u_n(x) = \frac{nh(nx)}{\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx} \quad (5.12)$$

tende a $\delta(x)$ per $n \rightarrow \infty$;

- Abbiamo $u_n = e^{inx} \rightarrow 0$ ($x \in \mathbb{R}$) in senso S' per $n \rightarrow \pm\infty$ e anche $x^k e^{inx} \rightarrow 0 \forall k = 0, 1, 2, \dots$.

Si può dimostrare infine che \mathcal{S}' rispetto a questa nozione di convergenza, è uno spazio completo.

5.3 Derivata delle distribuzioni

Vogliamo definire la derivata di una distribuzione. Indichiamo la derivata con T' o DT e vogliamo che se T è associata alla funzione derivabile $u(x)$, allora DT coincida con la distribuzione associata a $u'(x)$, cioè $DT_u = T_{u'}$. Abbiamo dunque $\forall \varphi \in \mathcal{S}'$

$$T_{u'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u' \varphi dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} u \varphi' dx = -T_u(\varphi'), \quad (5.13)$$

definiamo

$$\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \quad (5.14)$$

e più in generale

$$\langle D^k T, \varphi \rangle = (-1)^k \langle T, D^k \varphi \rangle. \quad (5.15)$$

Osserviamo che $D^k T$ è un funzionale lineare e continuo e quindi è una distribuzione temperata per ogni $k = 1, 2, \dots$. Le distribuzioni sono sempre infinitamente derivabili, ciò può suonare strano perché alcune vengono da funzioni discontinue, ma la derivata di una distribuzione associata ad una funzione discontinua è una distribuzione "singolare".

5.4 Trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate

Cominciamo premettendo il seguente lemma.

Lemma: La trasformata di Fourier \mathcal{F} e la sua inversa \mathcal{F}^{-1} sono trasformazioni lineari dello spazio delle funzioni test \mathcal{S} in sé, e sono continue rispetto alla convergenza introdotta in \mathcal{S} . Vogliamo definire ora la \mathcal{F} -trasformata della distribuzione T : $\mathcal{F}T = \hat{T}$. Come per la derivata l'ipotesi è che, se $u(x) \in L^1(\mathbb{R})$, allora $\mathcal{F}(T_u) = T_{\mathcal{F}u}$; si arriva così alla seguente definizione:

$$\langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad (5.16)$$

dove $\mathcal{F}T$ è ancora una distribuzione temperata. In maniera analoga definiamo

$$\langle \mathcal{F}^{-1}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle. \quad (5.17)$$

Possiamo estendere le formule per le derivata della trasformata di Fourier anche alle distribuzioni come segue

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(D^h T) &= (-i\omega)^h \mathcal{F}(T), & \mathcal{F}((ix)^k T) &= D^k(\mathcal{F}T); \\ \mathcal{F}(e^{-iax}) &= 2\pi\delta(\omega - a), & \mathcal{F}^{-1}(e^{ib\omega}) &= \delta(x - b); \\ \mathcal{F}(\delta^{(h)}(x)) &= (-i\omega)^h, & \mathcal{F}(x^k) &= (-i)^k 2\pi\delta^{(k)}(\omega). \end{aligned} \quad (5.18)$$

In particolare se $u(x)$ è una funzione con un punto x_0 di discontinuità, la prima delle (5.8) diventa

$$\mathcal{F}(DT_u) = \mathcal{F}(T_{u'} + \sigma\delta(x - x_0)) = \mathcal{F}(u') + \sigma e^{i\omega x_0} = -i\omega \mathcal{F}(u). \quad (5.19)$$

Osserviamo che la (4.106) si può scrivere anche $\mathcal{L}(DT_f) = s\mathcal{L}(f)$ se si intende la derivata DT_f nel senso delle distribuzioni, similmente la seconda delle (5.8) estende le proprietà della \mathcal{F} -trasformata al caso $xu(x) \notin L^1(\mathbb{R})$ con $u(x) \in L^1(\mathbb{R})$, infatti:

$$\mathcal{F}(xu) \equiv \mathcal{F}(xT_u) = -iD(\mathcal{F}T_u) = -iD(T_{\hat{u}}), \quad (5.20)$$

dove l'ultima derivata si può scrivere $-id\hat{u}/d\omega$ ma va coerentemente intesa come distribuzione. Il risultato si estende a $x^k u(x)$.

Dalla (5.6) segue il teorema:

Teorema. La trasformata di Fourier \mathcal{F} è un operatore continuo in \mathcal{S}' , cioè: se $T_n \rightarrow T$, allora anche

$$\hat{T}_n \rightarrow \hat{T}. \quad (5.21)$$

Questo teorema è molto utile per il calcolo esplicito di \mathcal{F} trasformati (il calcolo attraverso la (5.6) non è molto pratico) e di limiti in \mathcal{S}' .

Una notevole proprietà della δ si ricava osservando che $xT = 0$, dove l'incognita è la distribuzione T , è risolta da

$$T = c\delta(x) \quad (5.22)$$

dove c è una costante arbitraria. Analogamente $xT = aT$, dove a è una costante, è risolta da $T = c\delta(x - a)$, può essere vista come una equazione agli autovalori per x le cui autofunzioni sono $\delta(x - a)$ ($\notin L^2$). Più in generale, se $u(x)$ è una funzione continua e in un punto x_0 si ha $u(x_0) = 0$, allora $u(x)\delta(x - x_0) = 0$: infatti si può scrivere

$$\langle u(x)\delta(x - x_0), \varphi \rangle = \langle \delta(x - x_0), u(x)\varphi \rangle = 0. \quad (5.23)$$

5.5 Distribuzione parte principale $\mathcal{P}(1/x)$

Vediamo ora un importante esempio di distribuzione. Sottolineiamo intanto che le funzioni $1/x^2, 1/x^3 \dots$ non individuano funzioni, mentre possiamo riprendere la nozione di parte principale di Cauchy \mathcal{P} e osservare che se scriviamo $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, abbiamo

$$\mathcal{P} \int_{-a}^a \frac{\varphi(x)}{x} dx = \mathcal{P} \int_{-a}^a \frac{\varphi(0)}{x} dx + \int_{-a}^a \psi(x) dx = \int_{-a}^a \psi(x) dx. \quad (5.24)$$

Possiamo quindi introdurre il funzionale

$$\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\sigma} \frac{1}{x} \varphi(x) dx + \int_{+\sigma}^{+\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx \right] = \left\langle \mathcal{P} \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle \quad (5.25)$$

con $\sigma > 0$. Questo funzionale è una distribuzione temperata chiamata parte principale e indicata $\mathcal{P}(1/x)$, la cui definizione è il limite per $\sigma \rightarrow 0$ delle distribuzioni T_σ associate alla funzione

$$u_\sigma(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } |x| < \sigma \\ 1/x & \text{per } |x| > \sigma \end{cases} \quad (5.26)$$

Possiamo ora calcolarne la trasformata di Fourier ed eseguire il limite $\sigma \rightarrow 0$:

$$\mathcal{F}\left(\mathcal{P} \frac{1}{x}\right) = \pi i \operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} -\pi i & \text{per } \omega < 0 \\ +\pi i & \text{per } \omega > 0, \end{cases} \quad (5.27)$$

dove abbiamo introdotto la funzione "segno di x ". In fisica vengono spesso utilizzate le distribuzioni

$$\delta_\pm(x) = \frac{1}{2} \delta(x) \pm \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \frac{1}{x}, \quad (5.28)$$

le cui \mathcal{F} -trasformate sono $\mathcal{F}(\delta_\pm(x)) = \theta(\pm\omega)$.

In modo analogo otteniamo

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{P} \frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{2i} \operatorname{sgn}(x), \quad (5.29)$$

da cui

$$\mathcal{F}(\operatorname{sgn}(x)) = 2i \mathcal{P} \frac{1}{\omega}, \quad \mathcal{F}(\theta(\pm x)) = \pm i \mathcal{P} \frac{1}{\omega} + \pi \delta(\omega) = 2\pi \delta_\mp(\omega) \quad (5.30)$$

e

$$\mathcal{F}(\theta(x)e^{iax}) = i \mathcal{P} \frac{1}{\omega + a} + \pi \delta(\omega + a). \quad (5.31)$$

Osservando ora che $x\mathcal{P}(1/x) = 1$, abbiamo che la più generale delle soluzioni $xT = 1$ è

$$T = \mathcal{P} \frac{1}{x} + c\delta(x), \quad c = \text{costante arbitraria}. \quad (5.32)$$

Analogamente $xT = \cos x$ è risolta da $T = \mathcal{P} \frac{\cos x}{x} + c\delta(x)$, $xT = \sin x$ è risolta da $T = \frac{\sin x}{x} + c\delta(x)$ e $xT = \delta(x)$ è risolta da $T = -\delta'(x) + c\delta(x)$.

Dalla distribuzione $\mathcal{P} \frac{1}{x}$, si possono ottenere per derivazione le altre distribuzioni $D\left(\mathcal{P} \frac{1}{x}\right), D^2\left(\mathcal{P} \frac{1}{x}\right), \dots$

Infine per quanto riguarda le trasformate si ha

$$\mathcal{F}\left(D\left(\mathcal{P} \frac{1}{x}\right)\right) = -i\omega\pi i \operatorname{sgn} \omega = \pi|\omega|, \quad \mathcal{F}^{-1}\left(D\left(\mathcal{P} \frac{1}{\omega}\right)\right) = \frac{1}{2}|x| \quad (5.33)$$

Concludiamo questa sezione con il limite notevole

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x), \quad \varepsilon > 0. \quad (5.34)$$

5.6 Distribuzioni di Schwartz e distribuzioni a supporto compatto

Indichiamo con \mathcal{E} (oppure \mathcal{C}^∞) lo spazio vettoriale delle funzioni infinitamente derivabili e introduciamo in questo spazio la nozione di convergenza: Se $\{\varphi_n\} \in \mathcal{E}$, allora $\varphi_n \rightarrow 0$ in \mathcal{E} se \forall insieme compatto $K \subset \mathbb{R}$ e $\forall h$ intero fissato si ha

$$\frac{d^h \varphi_n}{dx^h} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty, \quad \text{uniformemente in } K \quad (5.35)$$

Indichiamo invece \mathcal{D} (oppure \mathcal{C}_0^∞) lo spazio vettoriale delle funzioni infinitamente derivabili e a supporto compatto, introduciamo anche la sua nozione di convergenza: Se $\{\varphi_n\} \in \mathcal{D}$, allora $\varphi_n \rightarrow 0$ in \mathcal{D} se esiste un insieme compatto K_0 che contenga tutte le $\varphi_n(x)$ e $\forall h$ intero fissato si ha

$$\frac{d^h \varphi_n}{dx^h} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty, \quad \text{uniformemente in } K_0 \quad (5.36)$$

È evidente che

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}, \quad (5.37)$$

mentre

$$\mathcal{D}' \supset \mathcal{S}' \supset \mathcal{E}'. \quad (5.38)$$

Chiamiamo le distribuzioni di \mathcal{D}' : distribuzioni di Schwartz. Ad ogni funzione $u(x)$ di L_{loc}^1 è associata una distribuzione di Schwartz T_u , ma in generale non una distribuzione temperata. Una distribuzione qualsiasi di \mathcal{D}' è uguale a zero in un insieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}$ se, per ogni $\varphi(x)$ con supporto contenuto in Ω si ha $T(\varphi) = 0$. Il più grande degli insiemi Ω si chiama supporto della distribuzione T e

$$\text{Supp } T_u = \text{Supp } u \quad (5.39)$$

Tutte (tutte e sole) le distribuzioni $T \in \mathcal{E}'$ sono a supporto compatto, θ non lo è e infatti non li appartiene, mentre $\delta(x - x_0)$ sì. $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ individua una distribuzione $T_\varphi \in \mathcal{D}'$, inoltre \mathcal{D} è un sottoinsieme di \mathcal{D}' ed è anche denso in esso. Proprietà simili valgono per \mathcal{S}' ed \mathcal{E}' . La trasformata di Fourier non può essere introdotta per le distribuzioni di Schwartz.

5.7 Proprietà e applicazioni delle distribuzioni

Teorema. Se $T_n \rightarrow T$, si ha anche

$$DT_n \rightarrow DT \quad (5.40)$$

e così pure naturalmente per le derivate successive: $D^k T_n \rightarrow D^k T$, cioè l'operatore di derivata è continuo in \mathcal{S}' .

Osserviamo l'importanza di questo teorema ricordando che l'operatore derivata non è continuo in L^2 . Un'importante proprietà che segue è quella del cambiamento di variabile nelle distribuzioni: Se abbiamo la distribuzione T_u e facciamo il cambio di variabile $x \rightarrow y = J(x)$

$$\langle T_{u_1}, \varphi \rangle = \int_a^b u(x) \varphi(x) dx = \int_{y(a)}^{y(b)} u(y) \varphi(J^{-1}(y)) \frac{dy}{|J'|}. \quad (5.41)$$

Per analogia la formula si estende alle distribuzioni qualsiasi, la esplicitiamo per la δ

$$\langle \delta(y(x)), \varphi \rangle = \frac{\varphi(x_0)}{|y'(x_0)|}, \quad (5.42)$$

se la funzione $y(x)$ ha un solo zero semplice in x_0 ed è invertibile intorno a tale punto; più in generale, se $y(x)$ ha più zeri semplici x_i , si può scrivere

$$\delta(y(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|y'(x_i)|} \quad (5.43)$$

5.8 Prodotto e convoluzione fra distribuzioni

Non è sempre definibile un prodotto tra le distribuzioni, basti pensare al caso $\delta(x)\mathcal{P}(1/x)$, oppure a $\theta(x)\delta(x)$. Se però è possibile definire il prodotto nel caso in cui una delle due distribuzioni è associata ad una funzione $u(x)$: il prodotto $T_u T$ potrà essere definito nel modo naturale seguente

$$\langle T_u T, \varphi \rangle = \langle T, u\varphi \rangle \quad (5.44)$$

a condizione che anche $u\varphi$ sia una "buona" funzione test per T .

In modo simile possiamo introdurre il prodotto di convoluzione fra distribuzioni $T_u * T_v = T_{u*v}$, cioè

$$\begin{aligned} \langle T_u * T_v, \varphi \rangle &= \langle T_{u*v}, \varphi \rangle = \int dx \varphi(x) \int dy u(x-y)v(y) = \\ &= \int dy v(y) \int dx u(x-y)\varphi(x) = \int dy v(y) \int dt u(t)\varphi(y+t) = \langle T_v, u(-x) * \varphi(x) \rangle. \end{aligned} \quad (5.45)$$

e ogni volta che il prodotto di convoluzione è ben definito, si

$$D(T_1 * T_2) = (DT_1) * T_2 = T_1 * (DT_2). \quad (5.46)$$

Mediante la δ si può ottenere una caratterizzazione della completezza di un set ortonormale di funzioni $\{e_n(x)\}$ in $L^2(I)$: basta osservare che se $\{e_n(x)\}$ è un set ortonormale completo, si ha per ogni $u(x) \in L^2(I)$

$$u(x) = \sum a_n e_n(x). \quad (5.47)$$

Nel caso $e_n(x) = e^{-inx}/\sqrt{2\pi}$ ($n \in \mathbf{Z}$) in $L^2(0, 2\pi)$ essa diventa

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-in(x-y)} = 2\pi\delta(x-y) \quad (5.48)$$

ed è suggestivo confrontare questo risultato con il seguente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(x-y)} dk = 2\pi\delta(x-y) \quad (5.49)$$

che è una sorta di passaggio dalla somma su n all'integrale sulla variabile continua k . Cambiando il ruolo delle variabili otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix(k-k')} dx = 2\pi\delta(k-k') \quad (5.50)$$

che esprime una specie di "ortogonalità" fra le onde piane e^{-ikx} .