

Meccanica Classica

Pietro Faraggiana

2021/2022

Indice

1	Introduzione	5
2	Meccanica lagrangiana	8
2.1	Sistemi vincolati	8
2.1.1	Pendolo semplice	8
2.1.2	Classificazione dei vincoli	8
2.1.3	Pendolo doppio	9
2.2	Equazioni di Eulero-Lagrange	9
2.2.1	Indipendenza della scelta delle coordinate generalizzate	10
2.3	Arbitrarietà nella scelta della funzione lagrangiana	10
2.4	Simmetrie e leggi di conservazione	10
2.4.1	Trasformazioni continue e discrete, attive e passive	11
2.4.2	Teorema di Noether	11
2.4.3	Quantità invariate per traslazioni e rotazioni	11
2.4.4	Invarianza temporale e funzione di Hamilton	11
2.5	Moto in un campo elettromagnetico e scelta di gauge	12
2.6	Quando è possibile applicare una formulazione lagrangiana?	12
3	Simmetrie e gruppi di simmetria	13
3.1	I gruppi di trasformazione ed il caso delle isometrie	13
3.2	Il gruppo ortogonale	13
3.2.1	Caso bidimensionale: gruppo $O(2)$	13
3.2.2	Gruppo $O(3)$ non abeliano	14
3.3	Rappresentazioni e tensori	14
3.4	Cenni alla meccanica del corpo rigido	15
3.4.1	Moto puramente rotatorio: tensore di inerzia	15
3.4.2	Moto generico e disaccoppiamento del centro di massa	15
3.5	Le equazioni del moto per il corpo rigido libero	16
4	Piccole oscillazioni intorno all'equilibrio	17
4.1	Il caso a più gradi di libertà	17
4.1.1	L'oscillatore armonico anisotropo	18
4.1.2	La ricerca dei moti normali	18
4.1.3	Proprietà generali dei modi normali	19
4.2	Simmetrie abeliane, non-abeliane e degenerazione	19
4.3	Sistemi a molti gradi di libertà: le onde elastiche	19
4.3.1	Un sistema di tanti oscillatori accoppiati	19
4.4	La fisica degli attenuatori	21
4.5	Dal discreto ai mezzi continui: le equazioni d'onda	21

5	Il principio di minima azione di Hamilton	23
5.1	Enunciato del principio: considerazioni generali	23
5.2	Equazioni di Eulero-Lagrange	23
5.2.1	Un modo più semplice di vedere alcune proprietà	23
5.3	Il ruolo delle condizioni di contorno	24
5.4	Alcuni esempi	24
5.5	Problemi variazionali con vincolo	24
5.5.1	Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange	24
5.5.2	Il problema della catenaria	24
5.5.3	Sistemi vincolati ed equazioni di Lagrange del primo tipo	24
5.6	Equazioni di Eulero-Lagrange per i mezzi continui	25
5.7	Perché un principio di minima azione?	25
6	Meccanica Hamiltoniana	26
6.1	Le equazioni di Hamilton	26
6.1.1	Trasformata di Legendre	26
6.1.2	Il caso della dipendenza quadratica dalle velocità	27
6.1.3	Variabili cicliche e la funzione di Routh	27
6.2	Lo spazio delle fasi ed il flusso hamiltoniano	27
6.2.1	L'oscillatore armonico	27
6.2.2	Pendolo semplice	27
6.3	Orbite chiuse e periodo dei moti unidimensionali	28
6.4	Evoluzione temporale e parentesi di Poisson	28
6.4.1	Un modo più semplice di riscrivere le cose	28
6.4.2	Dimostrazione dell'identità di Jacobi	28
6.4.3	Il teorema di Poisson e le parentesi del momento angolare	29
6.4.4	Costanti del moto ed integrabilità	29
6.5	L'evoluzione temporale ed il teorema di Liouville	29
6.5.1	Il teorema di ricorrenza di Poincaré	29
6.6	Invarianti adiabatici	29
7	Le trasformazioni canoniche	30
7.1	Definizione ed un primo esempio noto	30
7.1.1	Trasformazione puntuale	30
7.2	Canonicità e simpletticità della matrice jacobiana	31
7.3	Invarianza delle parentesi di Poisson e canonicità	31
7.4	Trasformazioni canoniche e funzioni generatrici	31
7.4.1	Le equazioni di Hamilton da un principio variazionale	32
7.4.2	Il criterio dell'esistenza della funzione generatrice	32
7.4.3	Classificazione delle funzioni generatrici	32
7.5	Legge di composizione per le funzioni generatrici	33
7.6	Alcuni esempi notevoli	34
7.6.1	Funzioni generatrici per le trasformazioni puntuali	34
7.6.2	Hamiltoniana della particella carica e scelta di Gauge	34
7.7	Variabili azione angolo e teoria delle perturbazioni	35
8	Evoluzione, conservazione e simmetria	36
8.1	Le trasformazioni canoniche infinitesime	36
8.1.1	L'evoluzione temporale come trasformazione canonica	36
8.2	simmetrie e conservazione: un legame intimo	37
8.2.1	Le quantità di moto come generatrice delle traslazioni	37
8.2.2	Il momento angolare come generatrice delle rotazioni	37
8.3	Commutatori e parentesi di Poisson	38

9	La relatività da galileo ad Einstein	39
9.1	Le trasformazioni di Lorentz	39
9.1.1	Forma di una trasformazione di Lorentz generica	40
9.2	Trasformazione delle velocità e degli angoli	40
9.2.1	Trasformazione degli angoli	40
9.3	Invarianza di c e distanze invarianti	41
9.3.1	Metrica di Minkowski	41
9.3.2	Distanze di tipo tempo, luce e spazio	41
9.4	Dilatazione dei tempi, contrazione delle lunghezze	42
9.5	Tempo proprio	43
9.6	Alcuni esperimenti classici alla luce della relatività	43
9.6.1	Esperimento di Fizeau	43
9.6.2	Esperimento di Michelson e Morley	43
10	Introduzione alla formulazione covariante	44
10.1	Il gruppo di Lorentz	44
10.2	Il formalismo covariante	45
10.3	Leggi fisiche e covarianza: l'elettromagnetismo	46
10.3.1	Quadrivelocità e quadriaccelerazione	46
10.3.2	Quadricorrente	46
10.3.3	Formulazione covariante delle equazioni di Maxwell	47
11	La cinematica relativistica	48
11.1	Energia ed impulso da Galileo ad Einstein	48
11.1.1	Quadrimpulso	48
11.1.2	Proprietà del quadrimpulso ed il limite di massa nulla	49
11.1.3	Sistemi di particelle, centro di massa e massa invariante	49
11.1.4	Le unità naturali	50
11.2	Formulazione lagrangiana ed un po' di dinamica	50
11.2.1	Particella in campo elettromagnetico e forza relativistica	51
11.2.2	Invarianza di Lorentz e quantità conservate	52
11.3	Effetto doppler	52
11.4	Velocità limite e principio di casualità	53
12	Sistemi accelerati e rigidità in relatività	54
12.1	Il punto materiale uniformemente accelerato	54
12.2	Il paradosso di Bell e la rigidità secondo Born	55
12.3	Sistemi estesi accelerati: la metrica di Rindler	56
12.4	Ritardo degli orologi in campo gravitazionale	57
13	Le basi della meccanica statistica	58
13.1	L'idea dell'ensamble e l'equilibrio termodinamico	58
13.2	Microstati e macrostati	59
13.3	Costruire l'ensamble: microcanonico e canonico	59
13.3.1	Probabilità di una certa distribuzione di popolazione	60
13.3.2	Ensamble microcanonico	60
13.3.3	Ensamble canonico	60
13.4	Proprietà del ensamble canonico	60
13.4.1	Distribuzione per sottoinsiemi non interagenti	61
13.4.2	I sistemi in contatto termico hanno lo stesso β	61
13.5	Perché lo spazio delle fasi: l'ipotesi ergodica	61

14 Un esempio notevole: il gas perfetto	62
14.1 Il conteggio dei microstati e le particelle identiche	62
14.2 Il gas monoatomico e l'ensemble microcanonico	62
14.2.1 Distribuzione di probabilità per un sottosistema	63
14.3 Ensemble canonico	63
14.3.1 Identificazione di $\beta = 1/(k_B T)$	64
14.4 La distribuzione di Maxwell-Boltzmann	64
14.5 Calore fluttuazioni ed equivalenza tra ensemble	65
15 La connessione con la termodinamica	66
15.1 Funzioni di stato e quantità termodinamiche	66
15.1.1 Il primo principio della termodinamica	66
15.2 L'entropia in meccanica statistica	67
15.2.1 Entropia nell'ensemble microcanonico e canonico	67
15.3 Potenziali termodinamici	68
15.3.1 L'equazione di stato dei gas perfetti	68
15.3.2 Pressione, lavoro e variazioni adiabatiche	69
15.4 Densità e pressione in sistemi non omogenei	69
15.5 La formula di Sackur-Tetrode per l'entropia	70
15.5.1 Paradosso di Gibbs e l'estensività dell'entropia	70
15.5.2 Il terzo principio e la necessità dei microstati discreti	70
16 Oltre la meccanica statistica	71
16.1 L'oscillatore armonico classico e quantistico	71
16.2 Il calore specifico del gas perfetto biatomico	72

Capitolo 1

Introduzione

Dopo un iniziale ripasso della meccanica di Fisica 1 introduciamo alcuni strumenti matematici:

La convenzione degli indici ripetuti

La convenzione degli indici ripetuti è stata creata da Einstein per facilitare i calcoli dove il simbolo di sommatoria \sum compariva spesso. Ecco alcuni esempi:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i \quad (Mv)_i = M_{ij} v_j \quad (AB)_{ij} = A_{ih} B_{hj}$$

Introduciamo ora due oggetti:

- La delta di Kronecher δ_{ij} (in pratica la matrice identità ma è pensato come tensore, definita per un numero arbitrario di dimensioni). La sua estensione al continuo è la delta di Dirac, una distribuzione che vale 0 a meno dello 0 dove tende a più infinito e il suo integrale vale 1.
- Il simbolo Levi-Civita ε_{ijk} (detta anche tensore completamente antisimmetrico) dove gli indici vanno da 1 a 3 e

$$\varepsilon_{123} = 1 \quad \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik} = -\varepsilon_{ikj}$$

è quindi diverso da 0 se i tre indici sono tutti diversi da ed uguale ad 1 o -1 a seconda che le permutazioni degli indici siano pari o dispari (un trucco che ho trovato per ricordarmi la regola più facilmente è: se partendo dal indice 1 si può leggere 123 sugli indici allora vale 1, se invece si legge 132 allora vale -1). Il simbolo levi-civita è definito solo in 3 dimensioni.

Possiamo usare questi due oggetti per semplificare la scrittura

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \delta_{ij} b_j = a_i b_i$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

È possibile riscrivere il prodotto $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn}$ in termini di delta di Kronecher, la soluzione è semplice nel caso in cui uno degli indici è in comune e si somma su di esso

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}$$

con la quale si dimostra facilmente che

$$(\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}))_i = [(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}]_i$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$$

Cambi di coordinate

Spesso incontreremo cambi di variabili ($x_i \rightarrow x'_i(x)$), può essere utile saper scrivere la derivata di una in funzione dell'altra, questi cambi di variabile saranno invertibili e sarà quindi possibile scrivere la funzione f in dipendenza di x' come una funzione composta $f(x(x'))$ da cui possiamo ricavare la derivata con la regola della catena

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x'_j} dx'_j \quad df = \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} dx'_i \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}$$

La matrice di cambio di coordinate o Jacobiana $J_{ij} = \partial x'_i / \partial x_j$ definisce una versione linearizzata della matrice associata all'applicazione lineare. Inoltre il differenziale e il gradiente trasformano in due modi diversi (nello specifico viene visto nella geometria riemanniana) che chiameremo controvariante e covariante

$$dx'_i = J_{ij} dx_j \quad \frac{\partial f}{\partial x'_i} = (J^{-1})^t_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

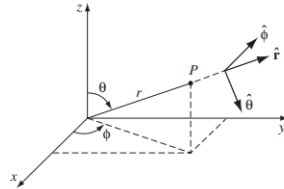
Inoltre la jacobiana è importante anche per gli integrali (guarda controvariante).

Coordinate sferiche

Un particolare cambio di coordinate è quello con le coordinate sferiche (in due dimensioni sono le polari e un caso particolare delle tre dimensioni sono le cilindriche), definiamo le coordinate polari come

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \\ z &= r \cos \theta \end{aligned}$$

La cui costruzione è abbastanza logica



I versori delle tre coordinate sferiche sono

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \phi \hat{x} + \cos \theta \sin \phi \hat{y} - \sin \theta \hat{z} \\ \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \end{aligned}$$

Il primo versore è molto logico, si sommano $x+y+z$ e si divide il tutto per la lunghezza r , per gli altri due è necessario derivare il primo e per ϕ si ignorano i termini contenenti θ poiché quel versore non dipende da θ . Il differenziale dl vale

$$dl = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\phi \hat{\phi}$$

questo per la regola della catena. Di conseguenza dv (differenziale del volume) vale

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

Seguendo la regola della catena il gradiente diventa

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

La divergenza

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.$$

Il rotore

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{v} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Derivata totale

La derivata per una funzione di più variabili che tiene conto della dipendenza reciproca delle variabili stesse si dice totale. In altri termini, la derivata totale di una funzione rispetto ad una delle variabili (in fisica generalmente le variabili dipendono dal tempo) prende in considerazione la dipendenza delle altre variabili dalla variabile rispetto alla quale si deriva.

Ad esempio, la derivata totale di $F(t, x(t), y(t), z(t))$ rispetto a t è:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

Ogni derivata totale è in corrispondenza biunivoca con una 1-forma differenziale esatta:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz$$

dove dx , dy , dz e dt sono i differenziali.

Differenziale esatto

Un differenziale è esatto se e solo se è integrabile ovvero se ne esiste una primitiva. Nel caso in cui un sistema dipenda dal tempo allora il suo differenziale non è esatto come allo stesso modo non sono conservative le forze dipendenti dal tempo. Se un differenziale è esatto si usa dx altrimenti si usa δx .

Capitolo 2

Meccanica lagrangiana

2.1 Sistemi vincolati

2.1.1 Pendolo semplice

Il capitolo parte con il pendolo semplice preso come esempio di un sistema vincolato

$$x^2 + y^2 = l^2$$

si trovano prima le equazioni che descrivono il moto rispetto agli assi paralleli e perpendicolari alla tensione del filo, trovando la legge oraria; poi si fa un cambio variabile di x e y in θ e si proietta x e y lungo lo spostamento infinitesimale $\theta \rightarrow \theta + \delta\theta$ (prodotto scalare tra le due equazioni lungo l'asse delle x e y e $\delta x, \delta y$). Otteniamo un'unica equazione che descrive il moto con θ anziché 2 equazioni.

Spostamento reale e virtuale

Prendiamo un pendolo semplice il cui punto fisso si muove sull'asse delle x secondo $f(t)$, il vincolo questa volta è

$$(x - f(t))^2 + y^2 = l^2$$

ovviamente la coordinata più semplice rimane θ ma la differenza è che adesso $\vec{\tau}$ compie lavoro (il punto muovendosi trasmette energia alla massa e questa energia è per forza trasmessa da $\vec{\tau}$). Tutto rimane come prima ad esclusione della proiezione sullo spostamento infinitesimale. Se si calcola lo spostamento a un tempo t di $f(t)$ fissato allora il differenziale è non esatto ($\delta x, \delta y$) e lo spostamento è virtuale perché non coincide con i veri spostamenti della massa m mentre se consideriamo il tempo allora il differenziale è esatto (dx, dy) e lo spostamento è reale.

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial \theta} \delta \theta \text{ (spostamento virtuale)} \quad dx = \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial t} dt \text{ (spostamento reale)}$$

2.1.2 Classificazione dei vincoli

Si dice vincolo una qualsiasi condizione che limita i valori che le coordinate di un qualche sistema possono assumere. Possiamo classificare i vincoli nelle seguenti categorie:

- Vincoli olonomi: Sono i vincoli che portano ad un'effettiva riduzione delle coordinate necessarie per descrivere un sistema. I vincoli olonomi si possono scrivere come annullamenti di differenziali esatti e sono quindi integrabili (spesso il vincolo è dato in forma differenziale con nel caso di una sfera che rotola senza strusciare).
- Vincoli anolonomi: I vincoli che non cambiano un cazzo. Non si possono scrivere come annullamento differenziali esatti.
- Vincoli reonomi: Vincoli la cui condizione varia nel tempo.

- Vincoli scleronomi: Vincoli invarianti nel tempo.

Nel seguito avremo casi di vari parametri $g_k(\dots x_N)$ con $k = \dots n$ che riducono il sistema su di un'ipersuperficie a $N - n$ dimensioni e coordinate (che saranno chiamate coordinate lagrangiane o generalizzate q_α) dove se ci sarà dipendenza dal tempo solo se il vincolo è reonomo.

Gli spostamenti reali e virtuali sono definiti come annullamento dei differenziali di tutte le g_k oppure solo della parte dipendente da x_i

$$dg_n = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \sum_i dx_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i} = 0 \text{ vs } \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i} \delta x_i = 0$$

Gli spostamenti virtuali sono soluzione di un sistema omogeneo e formano quindi uno spazio vettoriale (quelli reali formano uno spazio affine, ovvero uno spazio privo di punti privilegiati come l'origine) che è ortogonale a tutti i gradienti delle funzioni f_k (le funzioni di cui abbiamo fissato le coordinate e che rendono lo spostamento virtuale) ed è quindi noto come spazio tangente al vincolo.

2.1.3 Pendolo doppio

Si ripete i passaggi del pendolo semplice con il pendolo doppio. I due vincoli sono

$$x_1^2 + y_1^2 = l^2 \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l^2$$

Le equazioni delle 4 coordinate sono le seguenti

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -\tau_1 \sin \theta_1 + \tau_2 \sin \theta_2 \\ m\ddot{y}_1 &= -mg + \tau_1 \cos \theta_1 - \tau_2 \cos \theta_2 \\ m\ddot{x}_2 &= -\tau_2 \sin \theta_2 \\ m\ddot{y}_2 &= -mg + \tau_2 \cos \theta_2 \end{aligned}$$

2.2 Equazioni di Eulero-Lagrange

Costruiamo ora un metodo canonico per facilitare la soluzione di sistemi vincolati. Scegliamo le q_α e trasformiamo le \dot{x}_i in \dot{q}_α poiché le condizioni iniziali pongono q_α e \dot{q}_α come indipendenti. Per fare ciò scriviamo la derivata totale di \dot{x}_i (in funzione delle q_α , \dot{q}_α , x_i e t). Dopo di che osserviamo che la forza totale $\dot{p}_i = F_i^{(v)} + F_i^{(a)}$ ma le forze vincolari su un vincolo liscio valgono 0, ora proiettiamo sullo spostamento (prodotto scalare per δx_i) e cerchiamo di riscrivere la precedente equazione in funzione delle nuove coordinate generalizzate.

$$\sum_i \delta x_i F_i(a) = \sum_\alpha F_\alpha \delta q_\alpha \rightarrow F_\alpha \equiv \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial q_\alpha} F_i^\alpha$$

Inoltre la forza è scrivibile come derivata dell'energia potenziale per lo spostamento quindi

$$F_\alpha \equiv -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

ripetiamo per l'impulso \dot{p}_i

$$\sum_i \delta x_i \dot{p}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \delta x_i p_i \right) - \sum_i p_i \frac{d}{dt} \delta x_i$$

dove $\frac{d}{dt} \delta x_i = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$ riscriviamo i termini della penultima equazione in funzione dell'energia cinetica

$$\sum_i p_i \delta x_i = \sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \delta q_\alpha$$

$$\sum_i p_i \frac{d}{dt} \delta x_i = \sum_\alpha \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha$$

ora abbiamo tutto per riscrivere l'equazione della forza scritta inizialmente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - F_\alpha = 0$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

dove

$$L(q, \dot{q}, t) = T - U$$

inoltre $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \dot{p}_\alpha$ quindi possiamo riscrivere il tutto come

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

dove \dot{p}_α è la derivata rispetto al tempo di $p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$ la scelta delle coordinate q_α è arbitraria, infatti nella costruzione delle equazioni di Eulero-Lagrange non è stata imposta alcuna condizione. Inoltre le equazioni di Eulero-Lagrange possono essere diverse da sistema a sistema ma alla fine portano sempre alle stesse equazioni.

2.2.1 Indipendenza della scelta delle coordinate generalizzate

È possibile costruire (in maniera simile a come abbiamo fatto per la lagrangiana) un'altra lagrangiana con delle coordinate arbitrarie con l'unica ipotesi che queste nuove coordinate generalizzate siano buone come le originali (ergo la matrice Jacobiana della trasformazione è invertibile). Per evitare la ripetitività non scriverò la costruzione di tale lagrangiana.

2.3 Arbitrarietà nella scelta della funzione lagrangiana

Come sappiamo $L=T-U$ e di conseguenza L ha le dimensioni dell'energia. Ci chiediamo allora: è possibile che due lagrangiane con due diversi valori, ma riferite allo stesso sistema, portino alle stesse equazioni del moto? La risposta è sì ed è data dal fatto che

$$L(q, \dot{q}, t) \rightarrow L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} F(q, t)$$

ovvero tutte le lagrangiane riferite ad un sistema sono invarianti per aggiunta alla lagrangiana della derivata totale rispetto al tempo. Per dimostrare ciò basta mostrare che $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (dF/dt)}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \frac{dF}{dt}$.

2.4 Simmetrie e leggi di conservazione

In matematica una simmetria è quando un sistema che subisce una trasformazione non cambia ovvero si conserva, invarianza e simmetria sono sinonimi.

Nella meccanica elementare l'equazione $\dot{p} = F$ implica che se una componente della forza si annulla, la corrispondente dell'impulso si conserva. Eulero-Lagrange porta ad una generalizzazione di tale legge.

Se la lagrangiana non dipende esplicitamente da una delle coordinate generalizzate q_α , cioè $\partial L / \partial q_\alpha$ allora dalla equazione E-L risulta che $\dot{p}_\alpha = 0$ e quindi p_α è costante lungo il moto del sistema. Una coordinata siffatta viene usualmente detta **ciclica**.

I momenti coniugati P_α , se costanti, sono equazioni differenziali del primo ordine $m\dot{x} = k$; le coordinate che si conservano vengono quindi chiamati integrali del moto. Vederemo poi nel teorema di Noether come riconoscere tali coordinate.

2.4.1 Trasformazioni continue e discrete, attive e passive

Il teorema di Noether fa riferimento a trasformazioni definite in termini di un parametro continuo ϵ che possa essere reso piccolo a piacimento. Quando $\epsilon = 0$ allora la trasformazione è identica (non cambia nulla), le trasformazioni con ϵ sono dette continue (in opposizione con quelle discrete) e quando ϵ è infinitesimo la trasformazione è appunto infinitesima. Esistono due tipi di trasformazioni:

- Trasformazione passiva: quando la trasformazione corrisponde ad una modifica del sistema di coordinate scelto.
- Trasformazione attiva: quando la trasformazione corrisponde ad una reale modifica dello stato meccanico del sistema (sono un caso più generale rispetto alle passive perché possono isolare una parte del sistema rispetto ad un'altra mentre le passive possono essere viste come attive).

2.4.2 Teorema di Noether

Si consideri una trasformazione passiva secondo un parametro continuo ϵ . Quando ϵ è infinitesimo essa può essere sviluppata al primo ordine intorno alla trasformazione identica nel seguente modo:

$$q_\alpha \rightarrow q'_\alpha = q_\alpha + \epsilon A_\alpha(q)$$

se la lagrangiana è invariante sotto trasformazione A allora la quantità

$$Q = \sum_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} A_\alpha(q) = \sum_\alpha p_\alpha A_\alpha(q)$$

rimane costante lungo le traiettorie soluzioni delle equazioni del moto.

2.4.3 Quantità invariate per traslazioni e rotazioni

Sia data una traslazione lungo un vettore \hat{n}

$$\vec{x}_a \rightarrow \vec{x}_a + \epsilon \hat{n} \rightarrow \vec{A}_a = \hat{n}$$

e una rotazione attorno ad un vettore \hat{n}

$$\vec{x}_a \rightarrow \vec{x}_a + \epsilon(\hat{n} \wedge \vec{x}_a) \rightarrow \vec{A}_a = \hat{n} \wedge \vec{x}_a$$

Allora le quantità Q conservate sono:

Per la traslazione

$$Q = \sum_a \vec{p}_a \cdot \hat{n} = \hat{n} \cdot \vec{P}_{TOT}$$

Per la rotazione

$$Q = \sum_a \vec{p}_a \cdot (\hat{n} \wedge \vec{x}_a) = \sum_a \hat{n} \cdot (\vec{x}_a \wedge \vec{p}_a) = \hat{n} \cdot \vec{L}_{TOT}$$

2.4.4 Invarianza temporale e funzione di Hamilton

Una particolare simmetria di un sistema meccanico è l'invarianza sotto traslazioni temporali, è facile osservare che questo si ha quando

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

È possibile scrivere un'equazione, chiamata *Hamiltoniana*, che si conserva nel caso di invarianza sotto traslazioni temporali. Per dimostrarlo basta mostrare che la sua derivata totale rispetto al tempo è uguale a $-\frac{\partial L}{\partial t}$. Infine

$$H = \sum_a p_\alpha \dot{q}_\alpha - L$$

Spesso H coincide con l'energia totale, ciò accade in particolare quando T è quadratica (lo è se non c'è dipendenza esplicita dal tempo).

2.5 Moto in un campo elettromagnetico e scelta di gauge

Una particella è soggetta, in presenza dei campi $E(x,t)$ e $B(x,t)$ alla forza di Lorentz

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}); \quad \vec{v} = d\vec{x}/dt; \quad \vec{a} = d^2\vec{x}/dt^2,$$

La quale tuttavia non è esprimibile come gradiente di un potenziale e dipendente da \vec{v} . Possiamo ugualmente derivare le equazioni del moto da una lagrangiana esprimibile tramite i potenziali dei campi

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \partial\vec{A}/\partial t$$

La costruzione e la teoria si basa sulle trasformazioni di Gauge e le loro simmetrie, in conclusione arriviamo a

$$L = \frac{1}{2}m|\vec{v}|^2 - qV(\vec{x},t) + q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x},t)$$

I potenziali sono qui assunti come essere funzione assegnata delle coordinate della particella e del tempo e possiamo notare che come sempre compare il termine cinetico, ma poi compare una sorta di potenziale generalizzato dipendente dalle coordinate, dalla velocità e a valori fissati di V e A .

2.6 Quando è possibile applicare una formulazione lagrangiana?

La formulazione lagrangiana è fondamentale perché (oltre ad essere alla base della meccanica quantistica) ci permette di derivare le equazioni differenziali. Le condizioni necessarie e sufficienti che deve soddisfare il sistema di equazioni differenziali per essere derivabile da una lagrangiana sono note come condizioni di Helmholtz.

Dato un sistema di n equazioni differenziali in n variabili q_α e le sue derivate prime e seconde, le condizioni necessarie e sufficienti per cui

$$G_\alpha = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha}$$

sono

$$\frac{\partial G_\alpha}{\partial \ddot{q}_\beta} = \frac{\partial G_\beta}{\partial \ddot{q}_\alpha}$$

$$\frac{G_\alpha}{\partial q_\beta} - \frac{G_\beta}{\partial q_\alpha} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{G_\alpha}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{G_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha} \right)$$

$$\frac{G_\alpha}{\partial \dot{q}_\beta} + \frac{G_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{d}{dt} \left(\frac{G_\alpha}{\partial \ddot{q}_\beta} + \frac{G_\beta}{\partial \ddot{q}_\alpha} \right)$$

In realtà questo non è necessario perché basta trovare delle equazioni equivalenti a quelle del moto ovvero

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = W_{\alpha\beta} G_\beta$$

Il che riconduce il problema a trovare una matrice $W_{\alpha\beta}$ $n \times n$ non singolare.

Capitolo 3

Simmetrie e gruppi di simmetria

3.1 I gruppi di trasformazione ed il caso delle isometrie

L'insieme delle trasformazioni di simmetria di un sistema ha le seguenti proprietà:

- La combinazione lineare tra trasformazioni appartenenti all'insieme rimane nell'insieme.
- La trasformazione identica fa parte dell'insieme.
- L'inversa di una trasformazione è sempre definita.

Un insieme con tali proprietà è detto gruppo e le sue trasformazioni di simmetria costituiscono il gruppo di simmetria. Queste trasformazioni possono essere finite, infinite, discrete, continue (teorema di Noether) che sono infinitesime e formano uno spazio di dimensione pari ai parametri necessari per descriverla. I gruppi che godono della proprietà commutativa sono detti abeliani (viceversa non abeliani) mentre quelli (molto frequenti in fisica) la cui moltiplicazione ed inversione è differenziabile sono detti gruppi di Lie. Le isometrie sono un gruppo di trasformazioni particolari che lasciano invariate le distanze tra i punti, una trasformazione che conserva la lunghezza è detta ortogonale.

3.2 Il gruppo ortogonale

Una trasformazione che lascia invariata la distanza tra due vettori $|\vec{x} - \vec{y}|$ e la loro norma $|\vec{x}|, |\vec{y}|$ deve lasciare invariato anche il loro prodotto scalare, è proprio da qui che si dimostrano un certo numero di proprietà di questo gruppo, come ad esempio che la matrice che rappresenta la trasformazione deve essere ortogonale. Le matrici ortogonali $N \times N$ formano un sotto gruppo detto $O(N)$, il loro determinante deve essere ± 1 e se $\det = +1$ si forma un sotto gruppo detto sottogruppo speciale $SO(N)$ mentre nel caso di $\det = -1$ ciò non è possibile perché l'insieme non è chiuso alla moltiplicazione; una matrice ortogonale ha $N(N-1)/2$ parametri indipendenti. Studiamo ora le trasformazioni ortogonali infinitesime

$$R = Id + \epsilon \Omega$$

dove ϵ è il solito parametro infinitesimo mentre Ω è una matrice che si dimostra essere antisimmetrica e che è detta generatore infinitesimo

L'insieme delle matrici antisimmetriche individua le direzioni in cui possiamo muoverci rimanendo sempre nel gruppo ortogonale (corrisponde al vincolo), possiamo quindi considerare lo spazio delle matrici antisimmetriche come lo spazio tangente al gruppo ortogonale, anche le matrici antisimmetriche hanno quindi ovviamente $N(N-1)/2$ dimensioni.

3.2.1 Caso bidimensionale: gruppo $O(2)$

In questa sezione viene preso l'esempio del gruppo $O(2)$, il generatore infinitesimo ha una sola dimensione e possiamo partire dal considerare $d\theta$ il parametro infinitesimo per poi costruire la rappresentazione esponenziale ($\exp(\theta\Omega)$) della trasformazione mostrandoci come Ω abbia un comportamento ciclico, poi vedremo che

Ω corrisponde alla nota matrice di rotazione e che appartiene a $SO(2)$

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

3.2.2 Gruppo $O(3)$ non abeliano

Per $N=3$ esistono 3 matrici linearmente indipendenti, le matrici possono essere rappresentate sinteticamente con la scritta

$$(\Omega_i)_{jk} = -\varepsilon_{ijk}$$

Ripetiamo il procedimento per $O(2)$ trovando la rotazione finita intorno ad un'asse. Il teorema di Eulero per le rotazioni dice che ogni movimento rigido con un punto fisso lascia invariato un asse; una facile dimostrazione è ogni matrice $R \in SO(3)$ possiede l'autovalore $\lambda = 1$ ovvero un vettore rimane invariato. Fin ora abbiamo combinato trasformazioni infinitesime dello stesso tipo, cosa succede se combiniamo trasformazioni lungo assi diversi? Se A e B non commutano

$$\exp(A)\exp(B) \neq \exp(A+B)$$

Esiste in questi casi la formula di Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) che dice che

$$[\Omega_i \Omega_j] = \varepsilon_{ijk} \Omega_k$$

Ovvero ogni commutazione tra i generatori è una combinazione lineare degli stessi generatori, questa proprietà è detta *algebra di Lie*. Risolvendo quindi

$$e^A e^B$$

possiamo definire ogni trasformazione di $SO(3)$ come una rotazione intorno a qualche asse (l'ordine delle trasformazioni è importante).

3.3 Rappresentazioni e tensori

Le trasformazioni possono essere rappresentate esplicitamente da matrici, queste agiscono su vari oggetti matematici quali vettori, grandezze scalari e altre matrici. Esistono tuttavia altri tipi di oggetti, prendiamo ad esempio le matrici

$$M'_{ij} = x_i x_j$$

$$\tilde{M}'_{ij} = x_i x_j + y_i y_j$$

Queste matrici vivono nello spazio ottenuto dal prodotto tensoriale dello spazio vettoriale di partenza e sono tensori a due indici. Anche questi possono rappresentare le rotazioni e vediamo che abbiamo quindi modi diversi di rappresentare una stessa trasformazione, tuttavia la rappresentazione natia data dalla definizione del gruppo viene detta rappresentazione fondamentale. I tensori si trasformano così

$$T'_{i_1 \dots i_k} = R_{i_1 j_1} \dots R_{i_k j_k} T_{j_1 \dots j_k}$$

k è il rango della matrice. I due tensori prima presi come esempio si trasformano quindi nella seguente maniera

$$M'_{ij} = R_{ih} R_{jk} M_{hk}$$

$$\tilde{M}' = R_{ih} R_{jk} \tilde{M}_{hk}$$

L'operazione appena fatta ha aumentato il rango del tensore, l'operazione di contrazione invece è un'operazione che riduce il rango del tensore. Se il tensore ha 2 indici, questa coincide con la traccia. Un tensore può essere definito informalmente come una matrice a k dimensioni (deve se $k=3$ abbiamo quindi una matrice di forma cubica) o più generalmente come tutte le strutture definite da un singolo spazio vettoriale.

3.4 Cenni alla meccanica del corpo rigido

Un corpo rigido è un insieme di N punti in cui le distanze reciproche rimangono sempre invariate. I vincoli sono proprio le distanze tra i punti

$$|\vec{x}_a - \vec{x}_b| = r_{ab} \quad \forall a, b$$

Per trovare il numero di gradi di libertà prendiamo un punto, questo avrà tre coordinate; il secondo punto starà sulla sfera decisa dal vincolo sulla distanza tra i due punti, quindi 2 coordinate; il terzo starà sulla circonferenza tra le due sfere, quindi un'altra coordinata e dal quarto in poi ci saranno 3 o più sfera che fanno da vincolo lasciando solo un punto disponibile e quindi nessuna coordinata. In totale ci sono quindi 6 coordinate. Un altro metodo più facile è prendere le tre coordinate di un punto e un angolo per ogni rotazione sugli assi creando una base per le rotazioni. Questi angoli sono detti angoli di Eulero (precessione nutazione e rotazione propria). questi 3 angoli verranno sostituiti dalla rotazione infinitesima intorno ad un qualsiasi asse

$$\vec{\omega} \equiv \hat{n} \frac{d\theta}{dt}$$

3.4.1 Moto puramente rotatorio: tensore di inerzia

Un esempio di tensore è il tensore di inerzia, questo tensore viene ricavato dall'energia cinetica di un corpo che ruota. La sua forma al discreto è

$$I_{ij} \equiv m_a (|\vec{x}_a|^2 \delta_{ij} - x_{a,i} x_{a,j})$$

Una matrice data dalla combinazione lineare di due tensori simmetrici (δ e x) e quindi essa stessa un tensore simmetrico. Il suo corrispondente al continuo vale

$$\int d^3x \rho(\vec{x}) (|\vec{x}|^2 \delta_{ij} - x_i x_j)$$

L'elemento I_{ii} è il classico momento d'inerzia intorno all'asse i . Il tensore d'inerzia entra anche nel calcolo del momento angolare

$$L_{tot,i} = I_{ij} \omega_j$$

che risulta essere la contrazione di un tensore a tre indici. Di fatto quindi il tensore d'inerzia racchiude le informazioni sulla distribuzione di massa rivelanti per la cinematica. I può essere diagonalizzato ed i tre autovalori sono noti come momenti principali d'inerzia mentre gli assi del sistema nel quale I è diagonale sono noti come assi principali. La traccia di I vale

$$Tr(I) = 2 \sum m |\vec{x}_a|^2$$

Se tutti e 3 i momenti sono diversi si tratta di trottola asimmetrica, se due sono uguali trottola simmetrica e se sono tutti e tre uguali trottola piana.

3.4.2 Moto generico e disaccoppiamento del centro di massa

Se non abbiamo solo una rotazione ma anche una traslazione possiamo utilizzare i teoremi di Konig

$$T = M_{tot} (\dot{X}_{CM} \wedge V_{CM})_i + I_{ij}^{(CM)} \omega_j$$

$$T = \frac{1}{2} M_{tot} |\vec{V}_{CM}|^2 + \frac{1}{2} I_{ij}^{(CM)} \omega_i \omega_j$$

e il teorema degli assi paralleli

$$I_{ij} = I_{ij}^{(CM)} \omega_j + M_{tot} (|X_{CM}|^2 \delta_{ij} - X_{CM,i} X_{CM,j})$$

3.5 Le equazioni del moto per il corpo rigido libero

Studiamo un corpo in caduta libera, la lagrangiana è

$$L = \frac{1}{2} I_{ij} \omega_i \omega_j + \frac{1}{2} M_{tot} |\vec{V}_C|^2 - M_{tot} g Z_{CM}$$

è evidente che la parte rotatoria sia una variabile ciclica, questo è dato dalla conservazione del momento angolare.

$$\frac{dL_i}{dt} = \frac{dI_{ij}}{dt} \omega_j + I_{ij} \frac{d\omega_j}{dt} = 0$$

focalizziamoci sul primo termine riguardante la variazione nel tempo dell'inerzia. Esiste anche una dimostrazione matematica ma possiamo immaginare quella variazione come la variazione del momento angolare nel caso in cui la velocità angolare rimanesse costante, in tal caso

$$\frac{dI_{ij}}{dt} = (\vec{\omega} \wedge \vec{L})_i$$

e otteniamo

$$\dot{\omega}_i = \frac{(\vec{\omega} \wedge \vec{L})_j}{I_{ij}}$$

Nel caso in cui la velocità angolare è orientata verso uno degli assi principali, il momento angolare non cambia direzione e rimane parallelo a ω e quindi il loro prodotto vettoriale vale 0 (e ω rimane costante nel tempo). Se non è questo il caso allora la soluzione diventa complicata perché anche il tensore di inerzia cambia valori nel tempo a causa della rotazione (una costruzione della soluzione che non studieremo è data da Louis Poinsot).

Capitolo 4

Piccole oscillazioni intorno all'equilibrio

Un punto è detto di equilibrio se una particella posta **ferma** in esso, vi ci rimane. Prendiamo come esempio una molla, il suo potenziale è $1/2kx^2$ e ha minimo per $x=0$. La sua derivata seconda è maggiore di 0, allora perturbando leggermente la molla a riposo per conservazione dell'energia avremo un moto armonico centrato in $x=0$ (nel libro il discorso è generalizzato per un qualsiasi potenziale con derivata seconda positiva). In generale, se la perturbazione è il piccolo spostamento $\eta = x - \bar{x}$ allora possiamo approssimare $u(x) \approx U(\bar{x}) + U''\eta^2/2 + O(\eta^3)$, la condizione di piccoli spostamenti sta nella trascurabilità di $O(\eta^3)$. Allora il sistema diventa un oscillatore armonico con equazione del moto $m\ddot{\eta} = -U''\eta$ (e da qui si vede che l'esempio della molla è un perfetto oscillatore armonico che non ha bisogno di approssimazioni). In questo capitolo estenderemo questo concetto a più dimensioni e quindi a più gradi di libertà.

4.1 Il caso a più gradi di libertà

Consideriamo un caso descritto da N coordinate generalizzate q_i sottoposto a vincoli olonomi scleronomi e potenziale indipendente dal tempo. In tal caso T è funzione quadratica della velocità e

$$L = \frac{1}{2} T_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q)$$

dove $T_{ij}(q)$ è detta matrice cinetica. Trovare una posizione di equilibrio equivale a trovare $q_i(t) = \bar{q}$. Utilizziamo adesso le equazioni E-L e consideriamo il caso in cui $\dot{q}_i = 0$, otterremo

$$T_{ij}(q) \ddot{q}_j = -\frac{\partial U}{\partial q_i}$$

Le accelerazioni sono nulle se e solo se in \bar{q} si annullano tutte le forze generalizzate $-\frac{\partial U}{\partial q_i}$ e quindi i punti di equilibrio coincidono con i punti stazionari (cerchiamo minimi locali se vogliamo che l'equilibrio sia stabile, i punti di massimo sarebbero punti di equilibrio ma non sono stabili; consideriamo un pendolo con una corda rigida, possiamo metterlo in equilibrio con la massa sopra al cavo ma se mosso non oscillerà intorno a quella posizione, ergo, non è stabile). Per capire dove è il minimo in due dimensioni utilizziamo Taylor per rendere il potenziale una funzione lineare e poi scriviamo la matrice Hessiana, se la matrice presenta un autovalore nullo (modo zero) ci troviamo in un caso di equilibrio indifferente il che significa o che dobbiamo aumentare lo sviluppo di Taylor oppure che ci si presenta una serie di minimi continui adiacenti. Come in una dimensione una grossa semplificazione occorre quando lo spostamento è tanto piccolo da poter trascurare gli ordini superiori al secondo, in tal caso

$$U - U(\bar{q}) \approx \frac{1}{2} U_{ij} \eta_i \eta_j < \epsilon \quad \frac{1}{2} T_{ij}(q) \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j < \epsilon$$

ciò mette anche un limite allo spostamento e alla velocità che devono essere proporzionali a $\sqrt{\epsilon}$, possiamo quindi porre $T_{ij}(q) = T_{ij}(\bar{q})$ e le equazioni del moto ricavate dalla lagrangiana approssimata diventano

$$T_{ij} \ddot{\eta}_j = -U_{ij} \eta_j$$

La notevole semplificazione è data dal fatto che rimanendo al secondo ordine le equazioni sono lineari e creano quindi uno spazio vettoriale come insieme delle soluzioni. Inoltre con una buona scelta delle coordinate possiamo osservare come il problema si possa ridurre ad una somma di moti unidimensionali disaccoppiati tra di loro.

4.1.1 L'oscillatore armonico anisotropo

Consideriamo una particella che si muove in un piano con lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}m\omega_x^2 x^2 - \frac{1}{2}m\omega_y^2 y^2$$

le equazioni del moto sono già disaccoppiate

$$\ddot{x} = -\omega_x^2 x$$

$$\ddot{y} = -\omega_y^2 y$$

e hanno soluzione generale

$$x(t) = A_x \cos(\omega_x t + \phi_x)$$

$$y(t) = A_y \cos(\omega_y t + \phi_y)$$

dove le A e i ϕ sono condizioni iniziali. È ovvio che il moto avviene nel rettangolo limitato dalle ampiezze, inoltre le curve si chiudono in se stesse solo se il rapporto tra le frequenze è razionale ($\omega_x/\omega_y = \eta_x/\eta_y$ in particolare dopo n_x oscillazioni di x e n_y di y nel caso le due n siano prime tra di loro). Se invece il rapporto è irrazionale il moto non è periodico e prima o poi la particella occuperà tutto il piano limitato in modo denso, tuttavia è possibile individuare delle soluzioni particolari periodiche (quelle lungo solo la x e solo la y). È chiaro che la soluzione generale sarà data dalla combinazione lineare delle due. Le due soluzioni sono chiamate basi dei modi normali di oscillazione.

4.1.2 La ricerca dei moti normali

Vediamo se e quando un moto periodico può essere soluzione di $T_{ij}\ddot{\eta}_j = -U_{ij}\eta_j$. La soluzione più generale è $\eta_i(t) = v_i \cos(\omega t + \phi_i)$ che possiamo riscrivere in forma complessa (è soltanto un formalismo matematico che permette di semplificarne calcoli e struttura) come

$$\eta_i(t) = \text{Re}(c_i e^{-i\omega t})$$

dove $c_i = v_i \exp(-i\phi_i)$. Allora sostituiamo nell'equazione $T_{ij}\ddot{\eta}_j = -U_{ij}\eta_j$ e arriviamo a

$$(U_{ij} - \omega^2 T_{ij})c_j = 0$$

ovvero un sistema omogeneo NXN che possiamo risolvere o tirando a caso oppure trovando i valori di ω per cui le soluzioni del sistema sono non banali e poi trovare le soluzioni corrispondenti ad una data ω . Per il teorema di Rouché Capelli un sistema omogeneo ha soluzioni non banali se e solo se il determinante è nullo

$$\det(U_{ij} - \omega^2 T_{ij}) = 0$$

quindi troviamo il polinomio $p(\omega^2)$. Le soluzioni trovate in corrispondenza di ogni radice formano uno spazio vettoriale, se più soluzioni (k) sono associate alla stessa frequenza si dice che lo spazio è k volte degenere (se ha dimensione 1 è non degenere)

Note

Ricapitolando tutto:

- Cerchiamo il punto di equilibrio stabile ovvero troviamo il minimo dell'energia potenziale
 - Troviamo il minimo dell'energia potenziale

- Troviamo i valori per cui la matrice Hessiana è definita positiva
- Intorno all'equilibrio l'ordine è quadratico e $T_{ij}\ddot{\eta}_j = -U_{ij}\eta_j$
 - Sviluppo di Taylor fino al secondo ordine
- Cerchiamo ora le basi dei modi normali
 - Troviamo le due forme quadratiche come matrici (T_{ij} e U_{ij})
 - Troviamo i valori di ω^2 per cui il determinante si annulla
 - Questo corrisponde a trovare gli autovalori (vettori la cui unica trasformazione è la moltiplicazione per uno scalare) e c_i corrisponde quindi alla base.
 - I modi normali sono basi ortogonali, di conseguenza se io mi muovessi solo su uno di essi l'altro non percepirebbe la mia presenza.

4.1.3 Proprietà generali dei modi normali

Notiamo adesso alcune proprietà del tutto generali dei modi normali

- È sempre possibile scegliere una base di soluzioni reali, che quindi ripassano periodicamente per il punto di equilibrio.
- Il quadrato delle frequenze è sempre non negativo.
- I modi normali possono essere sempre scelti ortogonali rispetto ai prodotti scalari definiti rispettivamente da T_{ij} e da U_{ij} .
- Il problema infatti si risolve con la ortogonalizzazione simultanea delle due forme.
- Proiezione ortogonale sulla soluzione corrispondente alle condizioni iniziali.
- Disaccoppiamento completo della lagrangiana nelle coordinate normali.

4.2 Simmetrie abeliane, non-abeliane e degenerazione

Supponiamo di avere una lagrangiana già sviluppata (al secondo ordine) vicino ad un minimo stabile e che questa sia invariante sotto una trasformazione lineare delle coordinate, allora sia la matrice cinetica che quella potenziale saranno invarianti e formeranno un gruppo. Trovato un modo normale sarà molto facile trovarne un altro relativo alla stessa frequenza agendo su di esso con delle trasformazioni del gruppo di simmetria. Questo permette di stabilire relazioni precise sui modi normali e le loro degenerazioni (cioè il numero di modi normali indipendenti associati alla stessa frequenza).

4.3 Sistemi a molti gradi di libertà: le onde elastiche

4.3.1 Un sistema di tanti oscillatori accoppiati

Immaginiamo di avere un sistema di N punti posizionati su guide parallele verticali e collegati tra loro da una molla. Rompiamo la ovvia simmetria di traslazione imponendo che η_0 e η_{N+1} siano fissati. Utilizziamo il metodo classico per scrivere i modi normali

$$T = \frac{m}{2} \sum_{j=1}^n \dot{\eta}_j^2$$

$$U = \frac{k}{2} \sum_{j=0}^N (\eta_{j+1} - \eta_j)^2$$

Le equazioni del moto sono

$$m\ddot{\eta}_j = k(\eta_{j+1} + \eta_{j-1} - 2\eta_j)$$

creiamo ora il sistema dei moti normali $(U - \omega^2 T)_{ij} c_j = 0$ dove $T_{ij} = m\delta_{ij}$ e $U_{ij} = k(2\delta_{ij} - \delta_{ji+1} - \delta_{ji-1})$ e sostituiamo $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\lambda = \omega^2/\omega_0^2$ e $z = 2 - \lambda$ per ottenere

$$(z\delta_{ij} - \delta_{ji+1} - \delta_{ji-1})c_j = 0$$

ovviamente $c_0 = c_{N+1} = 0$ e $z < 2$ per avere ω^2 positivo. Potremmo continuare con la trattazione classica dei modi normali ma il risultato sarebbe un polinomio di N gradi $p_N(z) = zp_{N-1}(z) - p_{N-2}(z)$ usiamo quindi un altro metodo intuendo la forma dalla simmetria e notando che

$$U_{ij}v_i v_j \leq 4k \sum_i v_i^2$$

ovvero $0 < \lambda < 4$ e $|z| < 2$.

La simmetria per le traslazioni discrete e le soluzioni possibili

Il sistema precedente può essere riscritto nella forma

$$c_{j+1} + c_{j-1} = zc_j$$

che permette di calcolare c_j una volta che conosciamo i due precedenti. Consideriamo il caso generale dove i due vincoli agli estremi sono assenti, essendoci una simmetria deve essere possibile costruire una base di soluzioni invarianti sotto la traslazione elementare $j \rightarrow j+1$ cioè tali che $c_{j+1} = f c_j$. riscriviamo la precedente equazione ricorsiva sostituendo $c_j = f c_{j-1}$, avremo $c_{j+1} = f^2 c_{j-1}$ e ottenendo quindi

$$f = z/2 \pm i\sqrt{1 - (z/2)^2} \equiv \exp(\pm i\theta)$$

dopo aver sostituito $z \equiv 2 \cos \theta$. Chiamiamo quindi f un fattore di fase e tutti i coefficienti complessi c_j avranno modulo uguale. Consideriamo quindi tutte le combinazioni lineari del sistema

$$c_j = A_+ e^{i\theta j} + A_- e^{-i\theta j}$$

Imponendo che $C_0 = C_{N+1} = 0$ otteniamo

$$\eta_j(t) = |A_{\pm}| \cos(\pm \tilde{k}x - \omega t + \delta)$$

dove $\tilde{k} = \theta/a$ e δ è la fase della costante A. In pratica ogni particella oscilla sulla sua guida con periodo $2\pi/\omega$ inoltre ad un tempo t fissato le particelle sono disposte su un profilo sinusoidale di passo $\tilde{\lambda} = 2\pi/\tilde{k}$ che si sposta a velocità $V = \omega/\tilde{k}$. La relazione tra ω e il numero d'onda \tilde{k} è detta legge di dispersione

$$\omega(\tilde{k}) = 2\omega_0 \sin \frac{\theta}{2}$$

Ritornando al nostro problema affinché $c_0 = 0$ è necessario che le due ampiezze siano opposte $A_+ = -A_-$ e quindi

$$c_j = A \sin(\theta j)$$

mentre per avere $c_{N+1} = 0$ occorre che $\theta(N+1)$ sia multiplo di π quindi

$$\theta_n = \frac{n\pi}{N+1} \rightarrow \tilde{k}_n = \frac{n\pi}{(N+1)a} = \frac{n\pi}{k} \rightarrow \tilde{\lambda}_n = \frac{2l}{n} = \frac{n\pi}{k}$$

dove $l = (n+1)a$, esistono quindi N frequenze e quella più bassa è detta modo fondamentale corrispondente ad un'onda con lunghezza pari a $2l$.

4.4 La fisica degli attenuatori

Prendiamo lo stesso sistema di prima ma questa volta immaginiamo che

$$\eta_0 = A \operatorname{Re} \exp(-i\Omega t).$$

Immaginiamo prima il caso con una sola particella attaccata, in questo caso l'equazione del moto si scrive

$$m\ddot{\eta}_1 = -k(\eta_1 - \eta_0)$$

che equivale all'oscillatore armonico forzato con forzante uguale a $k\eta_0(t)$. Questa è un'equazione differenziale lineare ma non omogenea, come è noto la sua soluzione è la somma dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare, noi siamo interessati solo alla seconda (ovvero quella indotta nel sistema con la stessa frequenza della forzante, che è $\eta_1(t) = \operatorname{Re}(C \exp(-i\Omega t))$). Inseriamola nella precedente equazione ed otteniamo

$$-mC\Omega^2 = -kC + kA \rightarrow C = \frac{A}{1 - \lambda}$$

dove $\lambda = \Omega^2/\omega_0^2 = m\Omega^2/k$. In sostanza se le due frequenze sono in fase l'oscillazione di η_1 risulta amplificata e anzi diverge per $\lambda = 1$ (si tratta di risonanza che nella realtà è preda di effetti dissipativi). Un caso ancora più interessante nell'uso pratico è quello in cui $\lambda \gg 1$, in tal caso η_1 è sempre in controfase con la forzante e ridotta di un fattore $1/\lambda$. Ci troviamo quindi in presenza di un filtro passa basso (un attenuatore).

Guardiamo ora il caso con più oscillatori accoppiati, l'equazione di moto è

$$\ddot{\eta}_j = k(\eta_{j+1} + \eta_{j-1} - 2\eta_j)$$

la forzante è la stessa di prima. Procediamo come nel caso senza forzante, $\eta_j = \operatorname{Re}(c_j \exp(-i\Omega t))$ da cui

$$zc_j = c_{j+1} + c_{j-1}$$

ora però $c_0 = A$ e $z = 2 - \lambda$, ma $\lambda = \Omega^2/\omega_0^2$ non è più un parametro libero, procediamo come prima e troviamo f , questa volta non possiamo più effettuare la sostituzione con gli angoli perché non è vero che $|z/2| < 1$ e avremo quindi un puro fattore di fase (un fasore). Quindi non avremo più come soluzione una combinazione di funzioni trigonometriche ma bensì iperboliche (vanno all'infinito). Poniamo $z/2 \equiv \cosh \chi$ e $\sqrt{(z/2)^2 - 1} = \sinh \chi$ e otteniamo

$$f = -e^{\pm\chi}$$

dato che gli oscillatori sono infiniti per forza $f = -e^{-\chi}$. La soluzione generale è chiamata onda evanescente

$$\eta_j(t) = A \cos(\Omega t) (-1)^j e^{-j\chi}$$

per $\lambda \gg 1$ allora $e^\chi \approx \lambda$.

4.5 Dal discreto ai mezzi continui: le equazioni d'onda

Il caso con N oscillatori studiato è molto simile ad una corda elastica legata a due punti, proviamo ora a fare il passaggio al continuo e a studiare proprio quella corda (se avessimo invece studiato un sistema di n oscillatori che si muovevano su guide orizzontali avremmo studiato le onde longitudinali). Vogliamo che $a \rightarrow 0$, mantenere la lunghezza l della corda, la densità lineare di massa ρ e la tensione τ ai capi della corda. Quindi essendo

$$l = a(N + 1) \quad \rho = m/a \quad \tau = ka$$

allora vorremo

$$a \rightarrow 0 \quad N \approx l/a \rightarrow \infty \quad m = \rho a \rightarrow 0 \quad k = \tau a \rightarrow \infty$$

Passiamo al continuo

$$\eta_j(t) \rightarrow \eta(x, t) \quad x = aj \quad 0 \leq x \leq l$$

Abbiamo quindi un insieme continuo di variabili lagrangiane. Abbiamo ora due variabili libere (x, t) quindi la derivata totale torna ad essere una derivata parziale. Ripetiamo tutti i passaggi effettuati al discreto:

- I modi normali trovati in tale limite diventano

$$v_j^{(n)} \rightarrow v^{(n)} \propto \sin(\tilde{k}x)$$

dove $\tilde{k}_n = \theta : n/a = \pi n / ((N+1)a) \rightarrow \pi n / l$

- La legge di dispersione

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{\tilde{k}_n a}{2}\right) \rightarrow \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \frac{\pi}{l} n$$

In questo modo abbiamo delle onde che si muovono con $V = \frac{\tau}{\rho}$

- La soluzione generale date le condizioni normali si trova modificando i passaggi per il continuo

$$\sum_j v_j^{(n)} v_j^{(n')} \rightarrow \frac{1}{a} \int_0^l dx v^{(n)}(x) v^{(n')}(x)$$

la soluzione è

$$v^{(n)}(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

che garantisce la corretta normalizzazione

- Infine la soluzione generale è

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \text{Re}((\alpha_n + i\beta_n) e^{-i\omega_n t})$$

dove

$$\alpha_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l dx \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \eta_0(x)$$

$$\beta_n = \frac{1}{\omega_n} \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l dx \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \dot{\eta}_0(x)$$

è interessante anche considerare il limite al continuo del sistema di equazioni del moto di partenza in quanto ci porta all'equazione delle onde della corda elastica

$$\ddot{\eta}_j = \frac{k}{m} (\eta_{j+1} + \eta_{j-1} - 2\eta_j) = \frac{\tau}{\rho} \frac{1}{a^2} (\eta_{j+1} + \eta_{j-1} - 2\eta_j)$$

che ci porta a

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0$$

dove $V = \sqrt{\tau/\rho}$. Per una corda con estremi fissi un insieme completo di soluzioni è rappresentato dalle onde stazionarie prima trovate come modi normali del sistema.

Capitolo 5

Il principio di minima azione di Hamilton

5.1 Enunciato del principio: considerazioni generali

Il principio di minima azione stabilisce che le equazioni del moto di un sistema meccanico sono equivalenti ad imporre che la sua legge oraria sia quella corrispondente ad un minimo o ad un punto stazionario di una certa funzione della legge oraria stessa. Più precisamente:

Dato un sistema descritto da coordinate lagrangiane q_i e da una lagrangiana $L(q, \dot{q}, t)$, le equazioni del moto di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

sono equivalenti ad imporre che fra tutti i possibili moti fra due tempi t_A e t_B con valori delle coordinate iniziali e finali assegnate $q_i(t_A) = q_i^A$ e $q_i(t_B) = q_i^B$, il sistema segua solo quelli che rendono stazionario il seguente sistema

$$S[q(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt L(q, \dot{q}, t)$$

che è noto come funzionale d'azione.

Essendo la lagrangiana una funzione dell'energia di un sistema in un certo senso il funzionale d'azione è la somma dell'energia nel tempo che quindi deve essere minima o massima (o in un punto di flesso). È facile dimostrare che in assenza di potenziale e vincoli una retta corrisponde al minimo del funzionale; non è detto che però il sistema segua il minimo, basta che segua un estremale; prendiamo come esempio un punto vincolato su di una circonferenza, diamo le condizioni iniziali e finali, un punto potrà seguire il percorso più lungo o quello più corto (stiamo considerando il caso generale dove il punto non debba andare nel punto diametralmente opposto), di certo non si metterà ad oscillare. Ma allora perché principio di minima azione? Perché suddividendo il percorso in intervalli infinitesimali il moto seguirà sempre quello che minimizza il funzionale (il moto che minimizza l'energia sprecata), ma non è detto che questo sia il minimo su tutto il percorso.

5.2 Equazioni di Eulero-Lagrange

Dimostriamo adesso l'enunciato detto ad inizio capitolo, per farlo richiediamo che per piccole variazioni intorno alla legge oraria \bar{q} dove il funzionale risulta invariato corrisponde a richiedere che \bar{q} soddisfi le equazioni di Eulero-Lagrange.

Non riscrivo la dimostrazione, si trova a pagine 121-122 [MDE20]

Esiste inoltre un'altra dimostrazione meno bella ma trovata prima fatta da Eulero, (si trova alle pagine seguenti dello steso libro), la prima è data da Lagrange.

5.2.1 Un modo più semplice di vedere alcune proprietà

Utilizzando il calcolo delle variazioni è anche più facile osservare alcune proprietà già enunciate nel capitolo 2.

5.3 Il ruolo delle condizioni di contorno

Le condizioni di contorno benché utilizzate nella dimostrazione non sono fondamentali.

5.4 Alcuni esempi

In questo paragrafo osserviamo lo studio della brachistocrona (il profilo che permette di arrivare più velocemente dal punto A al punto B in presenza di gravità), e le geodetiche (il percorso più breve lungo una superficie per arrivare dal punto A al punto B, in una superficie piana questa è la retta). Si parla anche dell'identità di Beltrami, ovvero:

Se L non dipende esplicitamente da x , allora la quantità (che corrisponde all'hamiltoniana se poniamo $x=t$)

$$H = y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = \text{costante}$$

dove $y = dy/dx$, si conserva.

5.5 Problemi variazionali con vincolo

5.5.1 Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

In questo paragrafo si studia il metodo dei moltiplicatori di Lagrange già studiato per analisi 2, questo metodo si estende alla ricerca del estremo del funzionale

$$S[q] = \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t)$$

con la condizione

$$\Sigma[q] = \int_{t_A}^{t_B} G(q, \dot{q}, t) = \text{costante}$$

come S

$$S - \lambda \Sigma = 0$$

Il vincolo ovviamente non è dato in quella forma ma ce lo dobbiamo portare per sottrarlo al funzionale.

5.5.2 Il problema della catenaria

Risoluzione del problema della catenaria, una corda di densità lineare ρ e lunghezza L immersa in un campo gravitazionale. La soluzione si ottiene minimizzando l'energia potenziale e avendo come vincolo la lunghezza della corda.

5.5.3 Sistemi vincolati ed equazioni di Lagrange del primo tipo

Riprendiamo il problema affrontato all'inizio del corso: un sistema di N coordinate x_k con un vincolo olonomo; invece di cambiare le coordinate possiamo cercare la soluzione lungo il vincolo $f(x) = C$ minimizzando il funzionale

$$\tilde{S}[x] = \int_{t_A}^{t_B} dt (L - \lambda f) \rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \lambda \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Questo approccio permette di trovare facilmente le reazioni vincolari ovvero la componente che permette al sistema di obbedire al vincolo ($-\lambda \nabla f$). Sono presenti due esempi (moto libero su guida circolare e il primo esempio del pendolo per un paragone).

5.6 Equazioni di Eulero-Lagrange per i mezzi continui

Parlando del passaggio al continuo del sistema di oscillatori accoppiati era possibile utilizzare un'altra strada, ovvero porre la lagrangiana direttamente nel suo stato di continuità, in quel caso

$$L = \int_0^l dx \mathcal{L} = \int_0^l dx \left[\frac{\rho}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right]$$

A questo punto possiamo utilizzare il funzionale d'azione per scrivere le equazioni di Eulero-Lagrange (la dimostrazione è simile a quella del principio di minima azione). L'equazione risultante sarà

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_x \eta)} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \eta)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta}$$

Se applicata alla corda elastica questa ci darà la funzione d'onda.

5.7 Perché un principio di minima azione?

Perché il nostro universo si comporta in questo modo seguendo un principio di minima azione? Il principio di Fermat quanto quello di Hamilton corrispondono solo ad un particolare limite di quella che è la natura ondulatoria della luce e della materia. La fisica quantistica ci dice che conoscendo lo stato di una particella in un istante allora non ci è comunque possibile conoscere lo stato della materia in un secondo istante ma ci dice invece che è possibile calcolare l'ampiezza di probabilità (che indichiamo con $\mathcal{K}(x_A, t_A, x_B, t_B)$). Questa può essere espressa in termini di integrale sui cammini

$$\mathcal{K}(x_A, t_A, x_B, t_B) \propto \int_{x(t_A)=x_A; x(t_B)=x_B} \mathcal{D}x(t) e^{iS[x(t)/\hbar]}$$

L'integrale di destra è in pratica la somma di tutti i possibili cammini che partono da x_A al tempo t_A ed arrivano ad x_B al tempo t_B (integrale funzionale). In pratica in meccanica quantistica la particella non segue un particolare cammino per andare da A a B ma che tutti sono possibili e ogni uno contribuisce all'ampiezza con un fattore $\exp iS[x(t)/\hbar]$. Quando $\hbar \rightarrow 0$ il fattore di fase oscilla molto rapidamente anche per piccoli cambiamenti d'azione per cui il contributo all'ampiezza di cammini anche molto vicini fra di loro si cancella con un fenomeno simile all'interferenza distruttiva, gli unici cammini che danno un contributo significativo sono quelli per cui le piccole variazioni del cammino portano a variazioni quasi nulle del funzionale d'azione, questi cammini sono proprio quelli estremali.

Capitolo 6

Meccanica Hamiltoniana

Dalle equazioni di E-L si osserva che lo stato di un sistema meccanico di N coordinate lagrangiane è caratterizzato da $2N$ variabili indipendenti (coordinate e velocità) e può essere descritto da N equazioni differenziali del secondo ordine. Ci viene quindi spontaneo chiederci se questo possa essere descritto anche da $2N$ equazioni differenziali del primo ordine, la risposta ci viene data da Hamilton.

6.1 Le equazioni di Hamilton

La scelta più ovvia è di scrivere le equazioni in termini di velocità v_α e coordinate q_α . Tali coordinate definiscono quello che è noto come spazio degli atti di modo, in questo spazio le equazioni di moto sono rappresentate da curve orientate che possono essere viste come linee integrali del sistema. In sostanza le (doppie) equazioni del primo ordine possono essere scritte come

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = v_\alpha$$
$$\frac{dv_\alpha}{dt} = a_\alpha(q, v, t)$$

Queste 2 funzioni rappresentano il cosiddetto campo di velocità nello spazio degli atti di moto, se non c'è dipendenza esplicita dal tempo il campo è detto stazionario (e le linee integrali non si intersecano mai). Quello che si perde con questo approccio è la generalità con cui ricavavamo le equazioni di E-L a partire da delle coordinate arbitrarie. Scrivere questo tipo di equazioni richiede di scrivere prima quelle di E-L e risolverle in termini di accelerazioni generalizzate. Notiamo però che le equazioni di E-L forniscono le derivate rispetto al tempo dei momenti coniugati

$$\dot{p}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \quad p_\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}$$

Ci chiediamo quindi se sia possibile usare queste variabili (q, p) (che formano quello che viene chiamato spazio delle fasi) per descrivere lo stato meccanico del sistema, questo si può fare se la trasformazione che porta da (q, v) a (q, p) è invertibile.

6.1.1 Trasformata di Legendre

Non sto a riscrivere la dimostrazione ma si arriva a

$$g(y) = xy - f(x)$$

che con i giusti accorgimenti diventa

$$H(q, p) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}(q, p))$$

dove

$$\dot{q} = \left(\frac{\partial H}{\partial p} \right)_q \quad \dot{p} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)_{\dot{q}} = - \left(\frac{\partial H}{\partial q} \right)_p$$

Le equazioni di Hamilton al caso generale

Questo passa facilmente al caso generale e le equazioni di Hamilton sono

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}$$

6.1.2 Il caso della dipendenza quadratica dalle velocità

In questo paragrafo si calcolano esplicitamente alcuni casi di Hamiltoniana a partire da una lagrangiana dipendente dalla velocità in modo quadratico ed omogeneo.

6.1.3 Variabili cicliche e la funzione di Routh

Nel formalismo Hamiltoniano, a differenza di quello Lagrangiano, le variabili cicliche portano ad un'effettiva diminuzione del numero di variabili, nel caso Lagrangiano questo non accadeva perché non erano le variabili indipendenti a conservarsi come invece è nel formalismo Hamiltoniano. Questo induce a creare una sorta di trasformata di Legendre parziale nota come funzione di Routh (ma non è troppo utilizzata).

6.2 Lo spazio delle fasi ed il flusso hamiltoniano

Ogni punto dello spazio delle fasi rappresenta uno stato di moto indipendente del sistema meccanico. Le equazioni del moto di Hamilton stabiliscono come questo punto si muova all'interno dello spazio delle fasi allo scorrere del tempo, in particolare queste individuano un campo di velocità noto come campo hamiltoniano le cui linee integrali sono l'analogo delle linee di flusso per i campi di velocità nei fluidi, motivo per il quale è detto flusso hamiltoniano. Se H non ha dipendenza esplicita dal tempo il flusso ed il campo risultano stazionari. Il campo hamiltoniano ha alcune proprietà, una delle più importanti è che questo ha **divergenza nulla**. Nel caso unidimensionale il campo è bidimensionale e se il sistema è periodico allora è anche limitato.

6.2.1 L'oscillatore armonico

Nel caso di un oscillatore armonico l'hamiltoniana è

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

H è costante e per sistema unidimensionali non possono esistere altre costanti di moto indipendenti da H perché allora il campo si limiterebbe ad un sol punto

6.2.2 Pendolo semplice

Osserviamo il pendolo semplice, l'hamiltoniana è

$$H = \frac{p_\theta^2}{2ml^2} - mgl \cos \theta$$

a cui corrispondono traiettorie

$$p_\theta = \pm \sqrt{(2ml^2)(E + mgl \cos \theta)}$$

con evidente simmetria per $p=0$. Le traiettorie che non compiono giro completo sono dette di liberazione, mentre quelle che compiono giri completi sono dette di circolazione.

6.3 Orbite chiuse e periodo dei moti unidimensionali

Consideriamo un problema unidimensionale con Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(q)$$

con $U(q)$ potenziale che ammette moti limitati e periodici, in questo caso il sistema interseca $p=0$ nei punti di inversione del moto $q_{min}(E)$ e $q_{max}(E)$. Possiamo associare ad ogni curva un'area $I(E)$ e possiamo trovarla risolvendo l'equazione risolvendo $H=E$ in termini di p

$$I(E) = 2 \int_{q_{min}(E)}^{q_{max}(E)} \sqrt{2m(E - U(q))} dq$$

La derivata del area rispetto all'energia ci dà invece il periodo che essendo $T(E) \geq 0$ allora $I(E)$ è una funzione crescente di E e quindi le traiettorie chiuse sono ordinate. La sezione prosegue con la dimostrazione che all'aumento dE abbiamo anche un aumento dI .

6.4 Evoluzione temporale e parentesi di Poisson

Consideriamo una generica $f(q,p,t)$, la sua derivata rispetto al tempo è

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \dot{p}_\alpha = \frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

La quantità segnata come $\{, \}$ è detta parentesi di Poisson ed equivale a

$$\frac{\partial f}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha} \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \equiv \{f, g\}$$

L'equazione stabilisce che una quantità che non dipende esplicitamente dal tempo è costante se si annulla la sua parentesi di Poisson con l'hamiltoniana. Le parentesi di Poisson hanno alcune proprietà simili a quelle dell'operazione di derivata, particolare attenzione va a quella nota come identità di Jacobi

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0.$$

6.4.1 Un modo più semplice di riscrivere le cose

Indichiamo le $2N$ variabili dello spazio delle fasi con un unico vettore z_i a $2N$ componenti (con la convenzione di mettere da 1 a N le q_i e da $N+1$ a $2N$ le p_i). Introduciamo anche la matrice antisimmetrica Γ

$$\Gamma \equiv \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

Allora le equazioni di Hamilton assumono la forma

$$\dot{z}_i = \Gamma_{ij} \frac{\partial H(z, t)}{\partial z_j}$$

e le parentesi di Poisson

$$\{f, g\} = \Gamma_{ij} \frac{\partial f}{\partial z_i} \frac{\partial g}{\partial z_j}.$$

6.4.2 Dimostrazione dell'identità di Jacobi

In questa sezione sorpresa sorpresa si dimostra l'identità di Jacobi.

6.4.3 Il teorema di Poisson e le parentesi del momento angolare

L'identità di Jacobi fornisce la possibilità di ricavare una terza costante di moto una volta che ne sono note 2 attraverso quello che è noto come teorema di Jacobi.

teorema di Poisson: se A e B sono due costanti di moto allora anche $\{A, B\}$ lo è.

Ovviamente non è garantito che questa terza costante fornisca nuove informazioni, potrebbe essere funzione delle prime due oppure essere identicamente nulla. Nel caso del momento angolare la conservazione di due componenti del momento implica, tramite Poisson, che anche la terza componente si deve conservare.

6.4.4 Costanti del moto ed integrabilità

In una dimensione la conservazione di H vincola in modo unico la famiglia di curve, in N dimensioni vincola le soluzioni ad ipersuperfici di $2N-1$ dimensioni. Nuove costanti del moto possono ridurre i gradi di libertà ma non ci possono essere più di $2N-1$ costanti.

6.5 L'evoluzione temporale ed il teorema di Liouville

L'evoluzione temporale da uno stato iniziale t_0 ad uno finale t definisce un'applicazione biunivoca dello spazio delle fasi in se stesso: da ogni punto parte una traiettoria che arriva da qualche parte dopo un tempo $t - t_0$; in ogni punto arriva una sola traiettoria. Il teorema di Liouville dice che tale applicazione conserva i volumi. Nel libro sono date due diverse dimostrazioni di tale teorema: la prima di carattere più matematico è la dimostrazione che la matrice jacobiana del cambiamento di coordinate

$$J_{ij}(t_0; t) \equiv \frac{\partial z_i(t)}{\partial z_j(t_0)}$$

ha determinate uguale a 1.

La seconda invece consiste in un'analogia con la meccanica dei fluidi e l'annullamento di $d\rho/dt$ detta incomprimibilità dei fluidi.

6.5.1 Il teorema di ricorrenza di Poincaré

Il teorema di Poincaré stabilisce che: dato uno spazio delle fasi accessibile ad un sistema meccanico finito, per qualsiasi valore delle condizioni iniziali, il sistema impiegherà un tempo finito per tornare al punto di partenza. In pratica ogni regione finita dello spazio delle fasi prima o poi, durante la sua evoluzione temporale, intersecherà nuovamente la sua regione di partenza. La dimostrazione si basa sul teorema di Liouville. Se il sistema esplora tutta la regione di spazio delle fasi accessibile, allora è detto ergodico. Un sistema superintegrabile percorrerà un insieme di misura nulla nello spazio di fasi rispettando appieno il teorema di ricorrenza per più dimensioni.

6.6 Invarianti adiabatici

Discutiamo di un'applicazione importante della conservazione del volume dello spazio di fasi che riguarda i modi periodici nei casi in cui l'hamiltoniana dipende da un qualche parametro λ esterno che varia nel tempo. Questo parametro può essere l'asta di un pendolo che cambia lunghezza o la frequenza di un oscillatore. Possiamo assegnare i valori di energia E quando abbiamo λ e E' quando abbiamo λ' e chiederci se è possibile scrivere una relazione che legghi i parametri alla traiettoria iniziale e finale; la risposta in generale è no perché la traiettoria finale dipende da come viene percorsa la traiettoria iniziale nel tempo e come viene cambiato il parametro. Osserviamo come esempio quello di un pallina che rimbalza in una scatola e il parametro che varia è una parte che si restringe, è palese che il moto finale cambia dipendentemente dalla velocità con cui stringiamo la parete. Un caso particolare ben definito in cui l'energia non cambia è quello adiabatico, ovvero quello in cui la parete viene stretta tanto lentamente da non fornire energia alla pallina, quindi

$$I(E', \lambda') = I(E, \lambda)$$

Capitolo 7

Le trasformazioni canoniche

Abbiamo già visto come le equazioni di Eulero-Lagrange siano covarianti sotto una generica trasformazione delle coordinate generalizzate $q \rightarrow Q(q, t)$. Ci chiediamo se vale la stessa cosa con le equazioni di Hamilton, scopriremo che solo una determinata classe di trasformazioni, quelle canoniche, ha la proprietà di lasciare invariata la struttura delle equazioni di Hamilton, indipendentemente dall'hamiltoniana di partenza.

7.1 Definizione ed un primo esempio noto

Trasformazioni canoniche: sono quelle trasformazioni $Q(q, p, t)$ e $P(q, p, t)$ tali che, per una qualsiasi hamiltoniana $H(q, p, t)$, si riesce a trovare una nuova hamiltoniana $K(Q, P, t)$ per cui le equazioni di Hamilton fornite da H in termini delle q, p si trasformano nelle equazioni di Hamilton fornite da K per le Q, P .

Si noti che una trasformazione canonica lo è per tutte le Hamiltoniane, per alcune hamiltoniane ci saranno trasformazioni che pur non essendo canoniche lasciano invariata una particolare forma di Hamiltoniana. In pratica trasformazione canonica implica trasformazione invariante ma trasformazione invariante non implica trasformazione canonica.

7.1.1 Trasformazione puntuale

Le trasformazioni puntuali sono quelle trasformazioni che abbiamo già incontrato cambiando le coordinate generalizzate della lagrangiana (un banale cambio di coordinate come quello da coordinate cartesiane a polari per il pendolo semplice). Poiché le equazioni di Hamilton derivano da quelle di Lagrange, e come abbiamo già visto questa trasformazione non cambiava la forma della lagrangiana, allora la trasformazione puntuale deve lasciare invariata la forma delle equazioni di Hamilton.

Indichiamo con $q \rightarrow Q(q, t)$ il cambio di coordinate e vediamo come cambiano (le velocità e) i momenti

$$Q_\alpha(q, t) = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t} = J_{\alpha\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{Q}_\alpha}{\partial \dot{q}_\beta} = \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta}$$

Dove abbiamo fatto una derivata totale e poi usato la matrice jacobiana del cambio di coordinate (tutte cose viste nei capitoli 1 e 2), il momento invece

$$P_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial \dot{q}_\beta}{\partial \dot{Q}_\alpha} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial q_\beta}{\partial Q_\alpha} = (J^t)^{-1}_{\alpha\beta} p_\beta; \quad J_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial Q_\alpha}{\partial q_\beta}$$

Vediamo come, mentre le nuove coordinate dipendono solo dalle vecchie, i nuovi momenti dipendono sia dalle q che dalle p $P_\alpha = P_\alpha(q, p, t)$. Inoltre osserviamo come per una trasformazione puntuale i momenti coniugati e le velocità generalizzate trasformano linearmente nel tempo (le velocità in modo affine se c'è dipendenza dal tempo) e sono strettamente legati tra loro (usano la stessa jacobiana). Questa relazione è la stessa che c'è tra spazio vettoriale V e spazio vettoriale duale associato V^* ed è la stessa relazione che c'è tra vettori covarianti e controvarianti. Come abbiamo già affermato le velocità fanno parte dello spazio tangente allo spazio delle coordinate, allora i momenti stanno sullo spazio cotangente.

La nuova hamiltoniana è

$$K = p_\alpha q_\alpha - L + P_\alpha \frac{\partial Q_\alpha}{\partial t} = H + \Delta H$$

Come avevamo anticipato la forma di H non cambia se non per un termine nel caso in cui la trasformazione è dipendente dal tempo e infatti il termine ΔH conta proprio della dipendenza dal tempo delle Q .

7.2 Canonicità e simpletticità della matrice jacobiana

Consideriamo una generica trasformazione in cui le coordinate e gli impulsi possono mescolarsi tra loro e che sia indipendente dal tempo. Questa trasformazione può essere rappresentata banalmente da $Z=Z(t)$ e le derivate temporali sono

$$\dot{Z}_i = (J\Gamma J^t) \frac{\partial H}{\partial Z_k}$$

dove Γ è la matrice a blocchi che avevamo già incontrato. La condizione sufficiente affinché la trasformazione sia canonica è

$$J\Gamma J^t = \Gamma$$

Le matrici (quella 2×2 jacobiana si intende ovviamente) con questa proprietà sono dette simplettiche e fanno parte del gruppo simplettico. Condizione sufficiente ma non necessaria poiché, per esempio, se $J\Gamma J^t = \lambda\Gamma$ allora la jacobiana non è simplettica ma la trasformazione è comunque canonica. Anche se Z dipende esplicitamente dal tempo si arriva alla soluzione che se la trasformazione si mantiene simplettica a tutti i tempi allora la condizione per l'integrabilità è garantita.

Equivalenza fra canonicità e simpletticità: Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione $z_i \rightarrow Z_i(z, t)$ sia canonica è che la sua matrice jacobiana sia simplettica a tutti i tempi a meno di una costante moltiplicativa indipendente dal tempo, cioè $J^t\Gamma J = \lambda\Gamma$. Se $\lambda \neq 1$ si parla di trasformazione canonica generalizzata, se $\lambda = 1$ (quindi per trasformazioni simplettiche) si parla di trasformazione canonica in senso stretto.

Per trasformazioni canoniche in senso stretto si conserva la misura dello spazio di fasi e $\det J = 1$

7.3 Invarianza delle parentesi di Poisson e canonicità

Una trasformazione è simplettica se e solo se le parentesi di Poisson nelle vecchie variabili coincidono con quelle nuove.

L'invarianza delle parentesi di Poisson è un criterio efficace per verificare che una trasformazione sia canonica, in alternativa al dimostrare che le parentesi sono invarianti possiamo dimostrare che

$$\{Z_i, Z_j\}_Z = \Gamma_{ij}$$

La sezione va poi avanti dimostrando come passare dall'invarianza di Poisson direttamente alla canonicità senza guardare la simpletticità.

7.4 Trasformazioni canoniche e funzioni generatrici

Analizziamo un terzo metodo per caratterizzare una trasformazione canonica basato sulla cosiddetta funzione generatrice, utile per molte cose tra cui la connessione fra simmetrie e costanti di moto. Il metodo delle funzioni generatrici parte dall'osservazione che le Equazioni di Hamilton, così come le equazioni di Eulero-Lagrange, dipendono da un principio variazionale.

7.4.1 Le equazioni di Hamilton da un principio variazionale

Le equazioni di Eulero-Lagrange derivano dall'estremo del funzionale

$$S[q(t)] = \int_{t_A}^{t_B} L(q, \dot{q}, t) dt$$

Possiamo sostituire L con $L = p\dot{q} - H(q, p, t)$ ottenendo

$$S[q(t), p(t)] = \int_{t_A}^{t_B} p\dot{q} - H(q, p, t) dt$$

nonostante sembri formalmente identico al funzionale di E-L, non lo è. Infatti dipende dalle due funzioni indipendenti $p(t)$ e $q(t)$ e dalle loro derivate prime. Ripetiamo i procedimenti fatti per il primo funzionale per trovare le equazioni di E-L e otteniamo

$$0 = \dot{q} - \frac{\partial H}{\partial p}$$
$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

L'estensione al caso con più variabili e momenti coniugati non rappresenta un problema con la banale sostituzione di $p\dot{q}$ con $\sum_{\alpha} p_{\alpha} \dot{q}_{\alpha}$

7.4.2 Il criterio dell'esistenza della funzione generatrice

Riscriviamo il nuovo funzionale come

$$S[A, B, q(t), p(t)] = \int_A^B p dq - H(q, p, t) dt$$

In questo modo assume la forma di un integrale di linea nello spazio delle fasi a $2N+1$ dimensioni. Consideriamo ora la trasformazione $q, p \rightarrow Q(q, p, t), P(q, p, t)$ che porta le traiettorie $q(t), p(t)$ in nuove traiettorie $Q(t), P(t)$, allora la richiesta che la trasformazione sia canonica equivale ad imporre che i due funzionali, S e S' , secondo le due coordinate coincidano con

$$S'[A, B, Q(t), P(t)] = \int_A^B P dQ - H(Q, P, t) dt$$

Il teorema per intero è

Condizione sufficiente affinché i due funzionali abbiano gli stessi estremi è che i due integrandi differiscano per un differenziale esatto dF di una funzione F delle coordinate, dei momenti e di t , che viene detta funzione generatrice. Inoltre, se le equazioni devono rimanere canoniche indipendentemente dall'hamiltoniana considerata, si ha che la condizione risulta anche necessaria, modulo un possibile fattore di scala: la funzione F in tal caso è individuata (quasi) univocamente dalla trasformazione considerata (quindi non dipende da H), modulo un eventuale termine dipendente al più dal tempo e non dalle coordinate e momenti.

quindi

$$p dq - H(q, p, t) dt = P dQ - K(Q, P, t) dt + dF$$

con dF funzione generatrice. La prossima sezione (saltata) riguarda la dimostrazione di tale teorema.

7.4.3 Classificazione delle funzioni generatrici

Consideriamo la funzione generatrice $F=F_1$

$$dF_1 = p_{\alpha} dq_{\alpha} - P_{\alpha} dQ_{\alpha} - (H - K) dt$$

Essendo dF_1 un differenziale esatto la sua espressione ci dice che

- F_1 può essere vista come funzione delle q e delle Q $F_1 = F_1(q, Q, t)$, infatti la conoscenza delle q e delle Q individua univocamente un punto dello spazio delle fasi.
- F_1 ha le seguenti derivate parziali

$$\frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha} = p_\alpha \quad \frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha} = -P_\alpha \quad \frac{\partial F_1}{\partial t} = K - H$$

L'ultima equazione è proprio quella che ci permette di costruire la nuova Hamiltoniana. Questa funzione generatrice non è sempre la migliore scelta, infatti nel caso della trasformazione puntuale Q dipende da q e quindi non serve ad un cazzo. Scriviamo quindi nuove funzioni generatrici.

La funzione $F_2(q, P, t)$

Definiamo F_2 come

$$F_1 \equiv F_2 - P_\alpha Q_\alpha$$

da cui

$$dF_2 = p_\alpha dq_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha - (H - K)dt$$

le derivate invece sono

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = p_\alpha \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = Q_\alpha \quad \frac{\partial F_2}{\partial t} = K - H$$

La funzione $F_3(q, P, t)$

Definiamo F_3 come

$$F_1 \equiv F_3 + p_\alpha q_\alpha$$

da cui

$$dF_3 = -q_\alpha dp_\alpha - P_\alpha dQ_\alpha - (H - K)dt$$

le derivate invece sono

$$\frac{\partial F_3}{\partial p_\alpha} = -q_\alpha \quad \frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha} = -P_\alpha \quad \frac{\partial F_3}{\partial t} = K - H$$

La funzione $F_4(q, P, t)$

Definiamo F_4 come

$$F_1 \equiv F_4 + p_\alpha q_\alpha - P_\alpha Q_\alpha$$

da cui

$$dF_4 = -q_\alpha dp_\alpha + Q_\alpha dP_\alpha - (H - K)dt$$

le derivate invece sono

$$\frac{\partial F_4}{\partial p_\alpha} = -q_\alpha \quad \frac{\partial F_4}{\partial P_\alpha} = Q_\alpha \quad \frac{\partial F_4}{\partial t} = K - H$$

7.5 Legge di composizione per le funzioni generatrici

Proviamo adesso a comporre diverse trasformazioni canoniche tra di loro. Prendiamo ad esempio $q, p \rightarrow Q(q, p, t), P(q, p, t)$ e $Q, P \rightarrow \mathcal{Q}(Q, P, t), \mathcal{P}(Q, P, t)$ allora la trasformazione composta è

$$Q(q, p, t) = \mathcal{Q}(Q(q, p, t), P(q, p, t), t), \quad \mathcal{P}(q, p, t) = \mathcal{P}(Q(q, p, t), P(q, p, t), t)$$

che sarà ancora una trasformazione canonica (essendo la matrice jacobiana della trasformazione composta uguale alla moltiplicazione delle sue jacobiane che fanno parte del gruppo simplettico, per Poisson invece la verifica è data dal criterio che segue dalla proprietà transitiva dell'uguaglianza). Per quanto riguarda le funzioni generatrici invece basta sommare le equazioni e otteniamo che per F_1 la funzione generatrice è uguale alla somma delle funzioni generatrici ($-F_1$ sarà quindi la funzione generatrice dell'inversa).

7.6 Alcuni esempi notevoli

7.6.1 Funzioni generatrici per le trasformazioni puntuali

Essendo le Q e le q dipendenti non conviene utilizzare F_1 , utilizziamo allora F_2 e otteniamo

$$\frac{\partial F_2}{\partial P_\alpha} = Q_\alpha(q, t)$$

che integrato diventa

$$F_2 = P_\alpha Q_\alpha(q, t) + f(q, t)$$

dove f raccoglie le costanti di integrazione rispetto alle P . Prendendo la seconda equazione di F_2 e quello che abbiamo discusso nella sezione 7.1.1 otteniamo

$$\frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha} = p_\alpha = \frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha} P_\beta;$$

il che vuol dire che $f=0$. Tuttavia nella sezione 7.1.1 abbiamo lasciato la lagrangiana invariata ma questo non è il caso più generale. Ripetiamo quindi con una lagrangiana a cui è sommata una derivata totale di una funzione F rispetto al tempo $L = L' - dF_1/dt$

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_\alpha} \frac{\partial \dot{Q}_\beta}{\partial \dot{q}_\alpha} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha} \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_\beta} \dot{q}_\beta + \frac{\partial F_1}{\partial t} \right) \\ &= P_\beta \frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (P_\beta Q_\beta + F_1) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha} F_2 \end{aligned}$$

che coincide con la prima equazione delle F_2 .

Per concludere, in una trasformazione puntuale, i momenti coniugati trasformano linearmente con una traslazione per funzioni dipendenti dalle coordinate

$$p_\alpha = \frac{\partial Q_\beta}{\partial q_\alpha} P_\beta + \frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}$$

7.6.2 Hamiltoniana della particella carica e scelta di Gauge

Nella sezione 2.5 abbiamo già visto come costruire una lagrangiana di una particella carica in un campo elettromagnetico

$$L = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 - q\phi(\vec{x}, t) + q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{x}, t).$$

Per trovare l'hamiltoniana ovviamente partiamo prima dal momento coniugato

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v_i} = mv_i + qA_i$$

che notiamo essere il momento canonico studiato a fisica 2. L hamiltoniana è

$$\begin{aligned} H &= \vec{p} \cdot \vec{v} - L = m|\vec{v}|^2 + q\vec{A} \cdot \vec{v} - \frac{m}{2} |\vec{v}|^2 + q\phi - q\vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2} |\vec{v}|^2 + q\phi \\ &= \frac{1}{2m} |\vec{p} - q\vec{A}|^2 + q\phi \end{aligned}$$

che a parte l'accoppiamento al potenziale scalare è l'energia cinetica (cosa legata al fatto che il campo magnetico non compie lavoro e quindi non modifica l'energia). Abbiamo già visto che la funzione (derivata totale rispetto al tempo) rispetto al quale non varia la lagrangiana è $q\Lambda$, allora $F_1 = -q\Lambda$. Dal punto di vista Hamiltoniana possiamo vedere l'invarianza di Gauge come una trasformazione puntuale che non cambia il valore delle coordinate \vec{x} .

Data F_1 , allora

$$F_2 = \vec{x} \cdot \vec{p}' - q\Lambda(\vec{x}, t)$$

che comporta

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= \vec{x}: & p &= p' - q\vec{\nabla}\Lambda \\ H' &= H - q\frac{\partial\Lambda}{\partial t} = \frac{1}{2m}|p - q\vec{A}|^2 + q\phi - q\frac{\partial\Lambda}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2m}|p' - q\vec{\nabla}\Lambda - q\vec{A}|^2 + q\phi - q\frac{\partial\Lambda}{\partial t} = \frac{1}{2m}|p' - q\vec{A}'|^2 + q\phi'\end{aligned}$$

che è l'hamiltoniana con la trasformazioni di Gauge sui campi.

7.7 Variabili azione angolo e teoria delle perturbazioni

In un sistema unidimensionale con H indipendente dal tempo (e quindi conservata), la scelta più ovvia sembra essere quella delle traiettorie del moto che semplifica la scrittura del sistema; in questo caso in questo caso le traiettorie sono ordinate per energia con $dI(E)/dE=T(E)$. Supponiamo di fare un cambio di variabili canonico e ipotizziamo che la variabile che individua la traiettoria sia P, allora essa deve essere anche una costante del moto (Se H è la variabile e il sistema è unidimensionale si possono avere un massimo di una variabile indipendente) e avremo che $dP(H)/dt=0$.

Capitolo 8

Evoluzione, conservazione e simmetria

Abbiamo già visto nella meccanica lagrangiana come sia possibile associare quantità conservate a trasformazioni che lasciano la lagrangiana invariata (teorema di Noether). Nella meccanica hamiltoniana possiamo andare oltre, per vederlo prenderemo in considerazione trasformazioni infinitesime canoniche. Faremo poi un'analisi più approfondita dell'evoluzione temporale come trasformazione canonica, dalla sua integrazione numerica alla teoria di Hamilton-Jacobi.

8.1 Le trasformazioni canoniche infinitesime

Il formalismo nel quale il legame tra simmetrie e quantità conservate emerge più chiaramente è quello delle quantità conservate. Consideriamo la trasformazione identica $Q_i = q_i$ e $P_i = p_i$ ed usiamo le equazioni delle funzioni generatrici, otterremo $F_2(Id) = q_i P_i$, $F_3(Id) = -Q_i p_i$ e $F_1 = F_4 = 0$, l'uso di F_1 o F_4 non ci porterebbe da nessuna parte, usiamo F_2 considerando che l'uso di F_3 è del tutto simile. La forma più generale di trasformazione infinitesima è (quindi vicino all'identità) è

$$F_2(q, P) = q_i P_i + \epsilon G(q, P, t)$$

Dove G è detta generatrice infinitesima. Usando le equazioni di F_2 arriviamo a

$$\begin{aligned} P_i - p_i &\equiv \delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial q_i} \simeq -\epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial q_i} \\ Q_i - q_i &\equiv \delta q_i = \epsilon \frac{\partial G(q, P, t)}{\partial P_i} \simeq \epsilon \frac{\partial G(q, p, t)}{\partial p_i} \end{aligned}$$

Dove le approssimazioni sono date da $P_i = p_i + O(\epsilon)$.

8.1.1 L'evoluzione temporale come trasformazione canonica

È facile riconoscere nelle precedenti equazioni la struttura delle equazioni di Hamilton, il che ci permette di arrivare alla seguente conclusione:

le coordinate e gli impulsi variano, sotto azione della trasformazione generata G , della stessa quantità di cui varierebbero, in un tempo $dt = \epsilon$, se G fosse l'hamiltoniana del sistema:

$$dq_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} dt; \quad dp_i = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i} dt.$$

Concludiamo quindi che la stessa evoluzione temporale, considerata come trasformazione che manda $q(t_0)$, $p(t_0)$ in $q(t_0 + t)$, $p(t_0 + t)$, è una trasformazione canonica, che a livello infinitesimo ha come generatrice la stessa Hamiltoniana. Questo vuol dire che per il teorema di Liouville anche l'evoluzione temporale, come tutte le trasformazioni canoniche, lascia invariato il volume dello spazio delle fasi. Inoltre abbiamo fatto un altro passo concettuale importante: fin ora abbiamo considerato trasformazioni che modificavano le coordinate e i momenti ma che comunque nel nuovo sistema erano gli stessi punti (nello spazio delle fasi) di quelli vecchi; questo, come abbiamo in precedenza visto, equivale ad una trasformazione passiva ma l'evoluzione di un sistema invece è una vera e propria modifica dei punti e non delle coordinate ed è quindi una trasformazione attiva.

8.2 simmetrie e conservazione: un legame intimo

Per introdurre considerazioni sugli aspetti che legano simmetrie e integrali del moto, vediamo come scrivere la trasformazione infinitesima per una trasformazione puntuale in cui $Q_i = Q_i(q, t)$ con $F_2 = P_i Q_i(q, t)$ e trasformazione attiva. È chiaro che $Q_i = q_i + \epsilon A_i(q, t)$ allora

$$F_2 = P_i(q_i + \epsilon A_i(q, t)) \simeq P_i q_i + \epsilon p_i A_i(q, t) \Rightarrow G(q, p, t) = p_i A_i(q, t).$$

Osserviamo che la quantità G è quella che si conserva secondo il teorema di Noether, nel caso in cui la lagrangiana sia invariante sotto la stessa trasformazione; tale relazione, tra generatrice e quantità conservata, esiste anche nel caso in cui la trasformazione non sia una simmetria del sistema, cioè è una relazione che trascende il particolare sistema considerato.

Vediamo adesso l'estensione ad una qualsiasi trasformazione canonica, la simmetria di un sistema meccanico, data una trasformazione, si manifesta attraverso l'invarianza di H sotto tale trasformazione cioè $H(q, p, t) = H(Q, P, t)$ e le equazioni del moto coincidono. Consideriamo una generica quantità fisica $O(q, p, t)$, la sua variazione sotto la trasformazione canonica infinitesima generata da $G(q, p, t)$ (tenendo solamente gli ordini lineari in ϵ) è

$$\begin{aligned} \delta O &\equiv O(Q, P, t) - O(q, p, t) = O(q + \delta q, p + \delta p, t) - O(q, p, t) \\ &\simeq \frac{\partial O}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial O}{\partial p_i} \delta p_i \simeq \epsilon \left(\frac{\partial O}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial O}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) = \epsilon \{O, G\} \end{aligned}$$

cioè è proporzionale alle parentesi di Poisson di O con G . Notiamo poi come se si prende G come hamiltoniana del sistema, allora la precedente equazione esprime proprio la legge di evoluzione temporale di una generica quantità O (a parte di una dipendenza esplicita del tempo di O) e come esista una simmetria tra lo scambio di G ed O (a meno di un cambio di segno). Questo vuol dire che se una delle seguenti affermazioni è vera, allora sono vere tutte

- $\{O, G\} = 0$;
- La quantità O rimane invariata sotto la trasformazione generata da G ;
- La quantità O rimane invariata sotto la trasformazione generata da G .

Consideriamo ora il caso in cui $O=H$, allora G è invariante sotto evoluzione temporale se e solo se l'hamiltoniana risulta invariante sotto la trasformazione infinitesima generata da G . La connessione fra la quantità conservata del sistema G e la particolare trasformazione è assoluta ed indipendente dall'hamiltoniana. Inoltre questo ci permette di invertire il ragionamento e trovare una simmetria (e la sua trasformazione associata) nel momento in cui vediamo una quantità conservata. Questo procedimento è molto frequente in fisica, spesso notiamo sperimentalmente una conservazione e solo dopo siamo in grado di attribuirgli una simmetria.

8.2.1 Le quantità di moto come generatrice delle traslazioni

L'impulso è la quantità conservata associata alla simmetria per traslazioni, verifichiamolo. Consideriamo una particella e sia $G = \vec{p} \cdot \hat{n}$ l'impulso, facciamo una trasformazione canonica $F_2 = \vec{x} \cdot \vec{P} + \epsilon G$, allora $\delta p_i = 0$ e

$$\delta x_i = \epsilon \{x_i, n_j p_j\} = \epsilon n_j \delta_{ij} = \epsilon n_i$$

che si tratta in effetti di una traslazione lungo l'asse \hat{n} .

8.2.2 Il momento angolare come generatrice delle rotazioni

Consideriamo la generatrice $F_2 = \vec{x} \cdot \vec{P} + \delta \theta G$ dove $G = l_j n_j$ e $l_j = \epsilon_{jkl} x_k p_l$, allora

$$\delta p_i = (\delta \vec{\theta} \wedge \vec{p})_i$$

che è la corretta proprietà di trasformazione sotto rotazioni di vettori \vec{x} e \vec{p} .

Inoltre se O è una quantità scalare allora

$$\{L_i, O\} = 0$$

se \vec{v} è una quantità vettoriale, allora

$$\{l_i, l_j\} = \epsilon_{ijk} l_k.$$

L'algebra delle parentesi di Poisson fra le componenti del momento angolare coincide con l'algebra dei commutatori fra i generatori delle rotazioni infinitesime (cap. 3), questo è legato al fatto che il momento angolare genera rotazioni.

Infine notiamo che il momento angolare genera rotazioni indipendentemente dal fatto che esso coincida con il momento angolare cinetico oppure no.

8.3 Commutatori e parentesi di Poisson

Consideriamo due trasformazioni infinitesime generate rispettivamente da G_1 e G_2 con i relativi parametri infinitesimi ϵ_1 e ϵ_2 . Vogliamo calcolare per una generica quantità fisica O , la variazione $\delta_{12}O$ e vedere di quanto differisce da $\delta_{21}O$. Dopo una dimostrazione facile ma calcolosa otteniamo

$$\delta_{12-21}O \equiv \delta_{12}O(q, p) - \delta_{21}O(q, p) = \epsilon_1 \epsilon_2 \{O, \{G_1, G_2\}\}.$$

Questo stabilisce che il commutatore fra le due trasformazioni è generato dalle parentesi di Poisson delle relative generatrici infinitesime (motivo della corrispondenza tra algebra del momento angolare e dei generatori di rotazioni).

La corrispondenza fra le parentesi di Poisson di due quantità da un lato, ed il commutatore degli operatori dall'altro, sarà la base della corrispondenza tra meccanica classica e meccanica quantistica.

Se $\{G_1, G_2\} = 0$ allora G_1 genera una simmetria per l'evoluzione temporale generata da G_2 e viceversa, questo è un fatto che avevamo già guardato nel capitolo 2, ovvero, l'evoluto del trasformato è uguale al trasformato dell'evoluto.

Capitolo 9

La relatività da galileo ad Einstein

Il principio dietro la relatività di Galileo ed Einstein è lo stesso: le leggi fisiche sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Le osservazioni sperimentali sono la catalogazione di eventi in quattro dimensioni (\vec{x}, t) e gli eventi sono indipendenti da chi gli osserva. Siano (\vec{x}, t) le coordinate del sistema O e (\vec{x}', t') quelle di O' allora la forma più generale di trasformazione è $t' = t'(\vec{x}, t)$, $x' = x'(\vec{x}, t)$, vanno inoltre aggiunti dei vincoli: la trasformazione deve essere invertibile e tutti i moti rettilinei uniformi devono diventare nuovamente moti rettilinei uniformi dopo la trasformazione. Le uniche trasformazioni che godono di queste due proprietà sono quelle lineari (potevamo arrivare a questa conclusione anche tramite l'omogeneità dello spazio). Fino al XIX secolo vigevano le leggi di galileo per la relatività, queste erano in accordo con tutte le leggi fisiche dell'epoca. Tuttavia arrivarono poi le equazioni di Maxwell che facevano casino e ci volle Einstein per aggiustare il tutto che prese le già create equazioni di Lorentz e le sostituì alla relatività galileiana.

9.1 Le trasformazioni di Lorentz

Adesso costruiremo matematicamente una trasformazione nota come boost basandoci sulle invarianze prima descritte, infine aggiungeremo la velocità della luce come costante tra i vari sistemi di riferimento per trovare le trasformazioni di Lorentz. La costruzione è facile, anche se lunga, e si trova sul libro. Il punto di partenza è una trasformazione generale del tipo

$$\begin{aligned}t' &= \Lambda_{tt}t + \Lambda_{tx}x + \Lambda_{ty}y + \Lambda_{tz}z \\x' &= \Lambda_{xt}t + \Lambda_{xx}x + \Lambda_{xy}y + \Lambda_{xz}z \\y' &= \Lambda_{yt}t + \Lambda_{yx}x + \Lambda_{yy}y + \Lambda_{yz}z \\z' &= \Lambda_{zt}t + \Lambda_{zx}x + \Lambda_{zy}y + \Lambda_{zz}z\end{aligned}$$

la famosa γ è in realtà Λ_{xx} . Ad un certo punto arriviamo a

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha v^2}}$$

dove α ha le dimensioni del quadrato dell'inverso della velocità e se richiediamo che c sia invariante allora $c = 1/\sqrt{\alpha}$. Curiosamente se imponiamo $\alpha \rightarrow 0$ allora $c \rightarrow \infty$ e otteniamo la relatività galileiana; inoltre c impone un limite superiore alle velocità relative, se $v > c$ allora la trasformazione non è ben definita. Può essere utile riscrivere la trasformazione in termini di ct

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

dove $\beta = v/c$. L'ultima forma è l'espressione più conosciuta del boost, notiamo come il tempo non è più assoluto. L'oggetto costruito e che associamo ad eventi spazio-temporali ha 4 componenti delle stesse dimensioni

ed è noto come quadrivettore. Notiamo infine che

$$\gamma^2 - \gamma^2 \beta^2 = 1$$

allora possiamo porre $\gamma = \cosh \chi$ e $\gamma\beta = \sinh \chi$, il parametro χ prende il nome di rapidità ed è legato dalla relazione $\beta = v/c = \tanh \chi$ con $\beta \in (-1, 1)$ e $\chi \in (-\infty, \infty)$. In termini di rapidità il boost assomiglia ad una specie di rotazione con le funzioni iperboliche a sostituire quelle trigonometriche.

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \gamma' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi & 0 & 0 \\ -\sinh \chi & \cosh \chi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

9.1.1 Forma di una trasformazione di Lorentz generica

Proviamo a costruire una forma ancora più generale, possiamo considerare 2 rotazioni: una che porta l'asse x lungo la direzione della velocità relativa v e una rotazione generica degli assi di O'

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \mathcal{R}' & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \mathcal{R} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

le matrici di rotazione sono 3x3 e abbiamo quindi abbiamo 5+1 parametri (un parametro della rotazione \mathcal{R} è superfluo perché verrà poi modificato da \mathcal{R}' e il +1 è modulo della velocità). Le trasformazioni generali di Lorentz formano quindi un gruppo a 6 parametri. Possiamo riscrivere il risultato in forma vettoriale a prescindere dalle rotazioni basandoci sulle componenti parallele e perpendicolari alla velocità, otteniamo

$$ct' = \gamma \left(ct - \beta \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}}{v} \right)$$

$$\vec{x}' = \vec{x} + (\gamma - 1) \frac{\vec{x} \cdot \vec{v}}{v^2} \vec{v} - \gamma \beta ct \frac{\vec{v}}{v}$$

9.2 Trasformazione delle velocità e degli angoli

Vediamo adesso come si trasformano le velocità, il calcolo è banale e se poniamo le velocità del punto materiale come V e la velocità relativa tra i due sistemi sull'asse delle x come $(v, 0, 0)$ otteniamo

$$V'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - \beta c dt)}{\gamma(dt - \beta dx/c)} = \frac{V_x - v}{1 - vV_x/c^2}$$

$$V'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(dt - \beta dx/c)} = \frac{V_y}{\gamma(1 - vV_x/c^2)}$$

$$V'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(dt - \beta dx/c)} = \frac{V_z}{\gamma(1 - vV_x/c^2)}$$

che sono note come trasformazioni della velocità di Einstein e tendono a quelle di Galileo per $v \rightarrow 0$. Questa volta le componenti della velocità ortogonali alla direzione del moto relativo dei sistemi non sono invarianti. Se avessimo tre sistemi e due velocità relative per vedere la velocità relativa tra il primo ed il terzo sarebbe più comodo usare la rapidità a causa della formula di addizione della tangente iperbolica.

9.2.1 Trasformazione degli angoli

Consideriamo un corpo con velocità $(V_x, V_y, 0)$ di modo che il suo vettore velocità formi un angolo θ con l'asse delle x tale che $\tan \theta = V_y/V_x$ allora

$$\tan \theta' = \frac{V'_y}{V'_x} = \frac{V_y}{\gamma(V_x - v)} = \frac{\sin \theta}{\gamma(\cos \theta - v/V)}$$

che differisce dalla formula non relativistica solo per un fattore $1/\gamma$.

9.3 Invarianza di c e distanze invarianti

Non abbiamo dimostrato che c rimanga invariato per tutte le direzioni (solo su x), una dimostrazione facile è tramite l'uso delle velocità, ma una più istruttiva è considerare una particella che si muove a c e consideriamo due eventi separati da un tratto infinitesimo di traiettoria, allora $c^2 dt^2 - |\vec{x}|^2 = 0$, la dimostrazione tramite quadrivettore che questa quantità rimane invariata sotto boost è facile e otteniamo l'invariante

$$c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

9.3.1 Metrica di Minkowski

Dati due qualsiasi quadrivettori deve valere

$$c^2 t'_1 t'_2 - x'_1 x'_2 - y'_1 y'_2 - z'_1 z'_2 = c^2 t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$$

questo è un prodotto scalare tra quadrivettori (diverso da quello canonico). Cambiamo la notazione e scriviamo $x \equiv (x_0, x_1, x_2, x_3)$ con $x_0 = ct$ e gli altri sono le coordinate spaziali. Allora definiamo il prodotto scalare tra due eventi generici x e y come

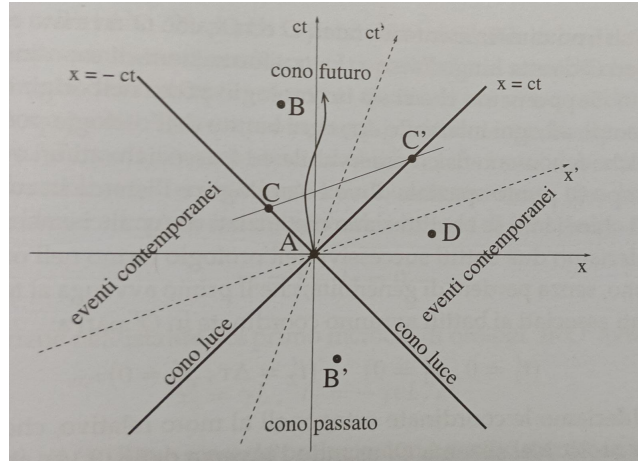
$$x \cdot y \equiv \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_0 y_0 - \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Il prodotto definisce la metrica dello spazio tempo detta metrica di Minkowski: la lunghezza al quadrato è $X^2 \equiv x \cdot x = x_0^2 - |\vec{x}|^2$ e la distanza tra due eventi è $(x-y)^2 \equiv (x_0-y_0)^2 - |\vec{x}-\vec{y}|^2$, indichiamo la matrice che definisce il prodotto scalare come g (tensore metrico). Tale matrice è non degenere con 3 autovalori negativi ed uno positivo, inoltre anche il prodotto scalare è non degenere. Queste invarianze discendono tutte dall'invarianza della luce e l'invarianza del prodotto scalare forma un cono retto un 4 dimensioni detto cono luce. La matrice del prodotto scalare forma un gruppo di invarianza noto come gruppo di Lorentz.

9.3.2 Distanze di tipo tempo, luce e spazio

Il prodotto scalare su cui è definita la metrica di Minkowski è indefinito, di conseguenza possono esistere distanze il cui quadrato è positivo, negativo o nullo. Data l'invarianza del prodotto scalare, la classificazione dei quadrivettori risulta invariante per tutti gli osservatori inerziali. Data la distanza tra due eventi $\Delta x = x - y$ la classificazione è la seguente:

- Se $\Delta x > 0$, si dice che la distanza è di tipo tempo: Il segno di Δx_0 è invariante ed è possibile fissare un ordinamento temporale univoco fra i due eventi. Gli eventi possono essere collegati da causa effetto e sono nel passato o nel presente dipendentemente dal segno di $y_0 - x_0$
- Se $\Delta x < 0$, si dice che la distanza è di tipo spazio: In tal caso il segno di Δx_0 non è fissato e non esiste un ordinamento temporale univoco. Gli eventi sono detti contemporanei e avvengono prima, dopo o simultaneamente a seconda del sistema scelto.
- Se $\Delta x = 0$, si dice che la distanza è di tipo luce: $\Delta x_0 = c|\Delta t|$ e i due eventi sono collegati da un segnale luminoso, l'ordinamento temporale è fissato e gli eventi y formano la superficie del cono luce.



Il cono luce risulta invariante.

9.4 Dilatazione dei tempi, contrazione delle lunghezze

Partiamo dalla dilatazione dei tempi. Immaginiamo di avere due orologi O e O' che ha una velocità relativa v lungo l'asse x . Supponiamo ci sia un metronomo (su O') che batte con intervalli $\Delta\tau$, allora rispetto a se stesso abbiamo due eventi

$$(t'_1 = 0, x'_1 = 0) \quad (t'_2 = \Delta\tau, x'_2 = 0)$$

andiamo nel sistema O , la trasformazione sarà l'inverso del boost (passiamo dal sistema in movimento a quello fermo), di conseguenza basta scambiare le coordinate spazio-temporali ricordandosi di cambiare segno a β essendo la velocità relativa negativa. Otteniamo

$$(t_1 = 0, x_1 = 0) \quad (t_2 = \gamma\Delta\tau, x_2 = \gamma\beta c\Delta\tau)$$

di conseguenza otteniamo che

$$t_2 - t_1 = \gamma\Delta\tau > \Delta\tau$$

quindi l'orologio sulla navetta sembra rallentato. Il ragionamento può essere ripetuto per un orologio fermo nel sistema di riferimento fermo e osservato dal sistema in movimento, il tempo sembrerà rallentato anche per il sistema in movimento. Ma come è possibile che entrambi i sistemi si vedano l'un l'altro rallentati? In realtà viene dilatata la distanza temporale (Δx_0) fra due eventi che nei sistemi di partenza avvengono nello stesso punto spaziale. Inoltre la domanda è mal posta perché bisogna avere un sistema di riferimento, i due sistemi non avranno mai modo di verificare quale sia l'orologio rallentato perché essendo i due sistemi inerziali in moto rettilineo uniforme non si rincontreranno mai.

Seguono dei paradossi ad esempio di come sia impossibile capire quale sia il sistema ritardato, il paradosso assomiglia molto all'impossibilità di misurare la velocità della luce unidimensionale. La relatività è una questione più complicata dell'effetto doppler del suono, nel senso che è diversa da

$$\Delta t = \Delta\tau + \frac{vt}{c}$$

Una conferma della veridicità della relatività arriva dalla vita delle particelle. Prendiamo il muone, considerando la sua vita media anche se viaggiasse a c non potrebbe mai arrivare dalla superficie dell'atmosfera a terra (10km) e percorrerebbe mediamente 660m. Questo è dato dal fatto che la sua vita media è misurata nel suo sistema di riferimento e nel nostro riuscirebbe ad arrivare a terra. Come funziona però nel suo sistema di riferimento? Nel suo sistema (come è facile verificare) le lunghezze sono contratte e

$$L = \frac{L'}{\gamma}$$

la dimostrazione è facile, basta ricordarsi che la misura della lunghezza va fatta nello stesso istante.

9.5 Tempo proprio

L'argomento di non verificabilità del ritardo accumulato da un orologio in moto viene a cadere se quest'ultimo, invece di muoversi a velocità costante, compie una traiettoria chiusa e torna al punto di partenza. Se compie una traiettoria chiusa non esiste un sistema di riferimento inerziale per cui esso è fermo e non possiamo utilizzare il boost. Possiamo tuttavia immaginare che il corpo abbia legge oraria $\vec{x}(t)$ e velocità $v(t) = dx(t)/dt$ e creare un sistema di riferimento solidale istantaneo O_I . Per il sistema fermo ogni intervallino tra un cambio di sistema ed un altro è (dt, dx) , per O_I il sistema è fermo e tra un evento e l'altro abbiamo $(d\tau, 0)$. Come abbiamo già detto non possiamo boostare ma sappiamo che

$$ds^2 = c^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2$$

è invariante per tutti i sistemi, per cui $d\tau = ds/c$ che dopo qualche modifica diventa $d\tau = dt/\gamma(t)$. Chiamiamo questa misura intervallo di tempo proprio ed è verificabile ed uguale per tutti gli osservatori inerziali. Possiamo integrare sulla traiettoria per ottenere

$$\Delta\tau_{12} = \int_1^2 dt \sqrt{1 - v^2(t)/c^2}$$

di conseguenza il tempo del sistema in movimento sarà rallentato e questa volta c'è un'asimmetria netta che ci permette di dire sempre quale dei due sistemi è in movimento, questo risolve il paradosso dei gemelli. Prendiamo una circonferenza su cui si muove un corpo a velocità costante v per esempio, il tempo in O sarà $\Delta t = 2\pi R/v$ mentre per O_I sarà $\Delta\tau = 2\pi R\sqrt{1 - v^2/c^2}/v$.

9.6 Alcuni esperimenti classici alla luce della relatività

9.6.1 Esperimento di Fizeau

In questo esperimento viene visto se un mezzo in movimento si porta dietro l'etere (la sostanza si ipotizzava portasse la luce) i risultati trovati (secondo l'ipotesi di Fresnel) sono in accordo quantitativo con la relatività ristretta ma non interpretativo.

9.6.2 Esperimento di Michelson e Morley

In quest'altro esperimento si voleva trovare la velocità relativa della terra rispetto all'etere, tuttavia questa volta i risultati furono "inconclusivi" e avevano come unica spiegazione che l'etere non esistesse. Lorentz risolse matematicamente il tutto con le sue trasformazioni ma non colse il significato (pensava che un mezzo in movimento rispetto all'etere accorciasse le sue dimensioni di γ) e il tutto venne risolto da Einstein con la teoria della relatività.

Capitolo 10

Introduzione alla formulazione covariante

Nel capitolo precedente abbiamo trovato la forma generale della trasformazione notando come una combinazione lineare di questa lasci il prodotto vettoriale invariante secondo la metrica di Minkowski formando un gruppo. Ora procederemo in modo analogo a come fatto nel capitolo 3 per le rotazioni, sarà necessario generalizzare il formalismo tensoriale con il formalismo covariante.

10.1 Il gruppo di Lorentz

Nel capitolo precedente abbiamo visto che per le generiche trasformazioni lineari Λ abbiamo $\Lambda^t g \Lambda = g$ che descrive l'invarianza della metrica di Minkowski. Questa relazione definisce un gruppo di matrici noto come $O(1,3)$ (1,3 indica la segnatura). A questo punto sostituiamo la trasformazione infinitesime $\Lambda = Id + \epsilon \Omega$ e otteniamo $g \Omega^t g = -\Omega$. Essendo che la doppia moltiplicazione per g cambia il segno delle componenti spazio-tempo e lascia inalterate quelle spazio-spazio e tempo-tempo abbiamo che Ω deve essere antisimmetrica su tutte le componenti ad esclusione delle 6 componenti spazio-temporali sui quali deve essere simmetrica: abbiamo quindi 6 possibili parametri liberi (3 simmetrici e 3 antisimmetrici) che è in accordo con la dimensionalità del gruppo. Una possibile base è

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; & \Omega_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & \Omega_a &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ K_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & K_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; & K_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dove le $\vec{\Omega}$ sono antisimmetriche e le \vec{K} simmetriche (le Ω sono l'estensione 4x4 delle $O(3)$). Procediamo come abbiamo fatto per il gruppo $O(3)$ e calcoliamo l'esponentiale delle combinazioni lineari delle due matrici. Troviamo

$$e^{-\theta \hat{n} \cdot \vec{\Omega}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & \mathcal{R}(\theta, \hat{n}) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

e

$$e^{-\chi \hat{n} \cdot \vec{K}} = \begin{pmatrix} \cosh \chi & -\sinh \chi n_i \\ -\sinh \chi n_i & \delta_{ij} + (\cosh \chi - 1) n_i n_j \end{pmatrix}$$

Nella prima riconosciamo le rotazioni con la differenza che se per $O(3)$ erano attive, qua sono passive (senza meno all'esponente); nella seconda riconosciamo il boost della trasformazione generica (insieme non compatto dato dalla simmetria e dai seni iperbolici). In conclusione abbiamo

$$\Lambda = \exp(-\vec{\chi} \cdot \vec{K} - \vec{\theta} \cdot \vec{\Omega})$$

che corrisponde ad un boost con una rotazione. Vediamo ora la chiusura del gruppo con le formule di BCH

$$[\Omega_i, \Omega_j] = \varepsilon_{ijk} \Omega_k; \quad [\Omega_i, K_j] = \varepsilon_{ijk} K_k; \quad [K_i, K_j] = -\varepsilon_{ijk} \Omega_k.$$

l'algebra è quindi chiusa e possiamo dire alcune cose: i generatori delle rotazioni formano un sottogruppo mentre i \vec{K} no essendo la composizione di una rotazione con un boost, due boost non paralleli trasformano come un boost con rotazione intorno ad un asse ortogonale dei due boost (rotazione di Wigner) (questo porta anche alla precessione di Thomas). Vediamo ora le componenti non connesse all'identità: $\det \Lambda = \pm 1$ e l'elemento 0,0 può scriversi come

$$\Lambda_{00}^2 - \Lambda_{01}^2 - \Lambda_{02}^2 - \Lambda_{03}^2 = 1 \Rightarrow \Lambda_{00}^2 \geq 1$$

gli elementi del gruppo per cui $\det \Lambda = \pm 1$ non possono essere connessi con continuità e lo stesso è vero per $\Lambda_{00} \geq 1$ (scorrimento del tempo inalterato o invertito). Esistono quindi 4 possibili combinazioni di determinante e segno e solo $\det \Lambda = 1$ con $\Lambda_{00} = 1$ forma un sottogruppo noto come gruppo di Lorentz proprio ed ortocrono $SO^+(1,3)$. Il passaggio tra le varie componenti connesse avviene tramite $P = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ e $T = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ che rappresentano l'inversione degli assi spaziali ed inversione temporale. Se combinate con traslazioni spaziali e temporali abbiamo 10 parametri liberi (gruppo di Poincaré).

10.2 Il formalismo covariante

I vettori non trasformano sempre nello stesso modo, mostriamo i due diversi modi per capire di cosa stiamo parlando. Le coordinate di un vettore sono $x = x_i e_i$, se cambiassimo base allora le coordinate sarebbero trasformate dalla matrice L_{ij} linearmente

$$x'_i = L_{ij} x_j$$

se invece guardiamo il gradiente, un altro vettore, nelle coordinate x' osserviamo che

$$\nabla'_i f = \frac{\partial}{\partial x'_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial x_j} (L^{-1})_{ji} = (L^{-1})_{ij}^t \nabla_j f$$

diverso dal modo di trasformare dei coefficienti del vettore e uguale al modo di trasformare degli elementi di base e . Chiamiamo covarianti gli oggetti che trasformano (trasposta dell'inverso della matrice di cambiamento base) come il gradiente e controvarianti gli elementi che trasformano come il vettore (semplicemente con una matrice di cambiamento base); nel caso di trasformazioni ortogonali non c'è differenza. Per distinguerli usiamo gli indici in alto per gli oggetti controvarianti e gli indici in basso per gli oggetti covarianti.

Possiamo quindi estendere il formalismo tensoriale (nel capitolo 3 avevamo guardato solo il caso di trasformazioni ortogonali dove covariante o controvariante non cambia nulla) al caso generale. Ad esempio

$$T_i^{jk} \equiv \partial_i f x^j y^k$$

è un tensore con un indice covariante e due controvarianti. È chiaro che la somma degli elementi diagonali (la traccia o generalizzando la contrazione) di un tensore a due indici controvarianti non è invariante sotto trasformazioni lineari generiche di coordinate, questo perché la matrice L non si annulla, cosa che invece accade se abbiamo due indici di diverso tipo; potremo quindi dire che in un tensore con k indici covarianti e k' controvarianti la traccia riduce il tensore a $k-1$ e $k'-1$ indici. Per le applicazioni lineari sappiamo che per scrivere un'applicazione secondo un'altra base dobbiamo scrivere

$$y' = L A L^{-1} x' \equiv A' x'$$

Questo significa che le applicazioni lineari hanno un indice covariante e uno controvariante e la delta di Kronecher in realtà si scrive δ_j^i ; per le forme quadratiche invece abbiamo due indici covarianti

$$Q'_{ij} = (L^{-1})_i^{th} (L^{-1})_j^k Q_{hk}$$

mentre la sua inversa ha due indici controvarianti. Se invece prendiamo $Q_{ij}x^j$, questo rappresenta un vettore covariante dopo la contrazione di un indice covariante e uno controvariante, questo vettore x_i è associato al vettore controvariante x^i e vive quindi nel suo spazio duale. Ogni prodotto scalare non degenere, definisce quindi una corrispondenza biunivoca fra i vettori covarianti e controvarianti, cioè fra spazio duale e quello di partenza.

Ritornando alla relatività ristretta, i quadri vettori sono X^μ , il boost è una trasformazione lineare e g una forma quadratica

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu; \quad x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu.$$

Questo dimostra nuovamente che g è invariante per tutti i sistemi di riferimento

$$\Lambda^t g \Lambda = g \quad \Rightarrow \quad g = (\Lambda^{-1})^t g \Lambda^{-1}.$$

e può essere usata per stabilire una corrispondenza biunivoca fra vettori covarianti e controvarianti, ad esempio

$$x_\mu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu; \quad \partial^\mu f \equiv g^{\mu\nu} \partial_\nu f$$

$g^{\mu\nu}$ è l'inversa di g che nel nostro caso coincide con g dato che $g^2 = Id$. Da un punto di vista pratico, data la facile forma di g , alzare o abbassare gli indici corrisponde semplicemente a cambiare i segni delle coordinate spaziali; questo può essere utile dato che le leggi fisiche, se scritte come equazioni fra tensori dello stesso tipo, risultano uguali in tutti i sistemi di riferimento.

10.3 Leggi fisiche e covarianza: l'elettromagnetismo

Come abbiamo detto affinché una legge fisica venga scritta allo stesso modo in tutti i sistemi di riferimento inerziali, essa deve rappresentare un'equazione fra tensori aventi lo stesso numero di indici covarianti e controvarianti. Vediamo alcuni esempi.

10.3.1 Quadrivelocità e quadriaccelerazione

Costruiamo un quadrivettore che possa rappresentare la velocità, che come abbiamo visto, non trasforma in modo lineare. Prendiamo il quadrivettore relativo alla posizione x^μ e il tempo proprio, entrambi infinitesimali e relativi allo stesso evento e scriviamo

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \Rightarrow u^0 = \frac{cdt}{d\tau} = \gamma c; \quad \vec{u} = \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma \vec{v};$$

da cui si può prendere la norma al quadrato derivata dal prodotto scalare, ovvero la lunghezza invariante

$$u_\mu u^\mu = c^2 \gamma^2 (1 - \beta^2) = c^2$$

Questo mostra che il quadrivettore è di tipo tempo e di modulo costante. Allo stesso modo si può costruire la velocità e derivate successive

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau}.$$

Possiamo vedere come quadrivelocità e quadriaccelerazione sia quadrivettori ortogonali e a^μ abbia solo componenti di tipo spazio (e la sua parte spaziale coincide con l'accelerazione)

$$0 = \frac{d}{d\tau} (u_\mu u^\mu) = 2u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = 2u_\mu a^\mu.$$

10.3.2 Quadricorrente

Vediamo come possiamo scrivere la corrente in modo che la sua equazione sia invariante in ogni sistema di riferimento. La carica elettrica è un invariante di Lorentz e della contrazione delle lunghezze si ottiene facilmente che la quantità $\rho(\vec{x}d^3x)$ si scrive $\rho = \Gamma\rho_0$ e di conseguenza

$$j^\mu(x) \equiv \rho_0(x)u^\mu(x)$$

da cui osserviamo come ρ e j trasformano come la componente temporale e spaziale del quadrivettore. In generale se abbiamo la sovrapposizione di più cariche opposte, non sarà possibile scrivere la quadri corrente con questa relazione essendo che è impossibile ottenere $j \neq 0$ con $\rho = 0$. Il quadrivettore $j^\mu(x)$ è un esempio di quadrivettore che trasforma in modo locale

$$j'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu j^\nu(\Lambda^{-1}x')$$

ovvero che i campi osservati nel nuovo sistema dipendono solo da quello che vede localmente (nello stesso evento) l'altro osservatore. Aver scritto la quadricorrente ci permette anche di riscrivere l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \partial_\mu j^\mu = 0.$$

da cui possiamo ricavare la quadridivergenza, uno scalare di Lorentz (dato dal fatto che la carica deve essere conservata).

10.3.3 Formulazione covariante delle equazioni di Maxwell

In questa sezione, facendo affidamento a priori che le equazioni di Maxwell siano relativisticamente invarianti, faremo emergere la natura tensoriale dei campi elettromagnetici e quindi delle equazioni di Maxwell. Cominciamo scrivendo le equazioni di Maxwell in modo che rendano più espliciti i passaggi

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \mu_0 c \rho \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial(ct)} &= \mu_0 \vec{j} \\ \frac{1}{c} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial(ct)} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0. \end{aligned}$$

è chiaro che nelle due equazioni non omogenee i secondi membri formino un quadrivettore, di conseguenza anche i primi membri devono formarne uno. Scriviamo le equazioni in termini di potenziali e dopo qualche manipolazione arriviamo a

$$\begin{aligned} \mu_0 c \rho &= -\frac{1}{c} \nabla^2 \phi - \frac{\partial}{\partial(ct)} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \square \left(\frac{\phi}{c} \right) \\ \mu_0 \vec{j} &= -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial(ct)} \vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = \square \vec{A} \end{aligned}$$

\square indica l'operatore differenziale di d'Alembert, uno scalare di Lorentz in quanto contrazione del tensore a due indici delle derivate seconde. L'operatore di d'Alembert è l'operatore differenziale dell'equazione delle onde e questo significa che l'equazione delle onde è relativisticamente invariante. Inoltre essendo j^μ un quadrivettore e \square uno scalare, le due equazioni hanno struttura covariante solo se $(\phi/c, \vec{A})$ forma un quadrivettore che chiameremo A^μ , otteniamo quindi

$$\square A^\mu = \mu_0 j^\mu.$$

Possiamo adesso scrivere il tensore che ci dà le due equazioni di Maxwell non omogenee, il tensore di campo elettromagnetico

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

Volendo possiamo anche introdurre il tensore di campo duale come $\tilde{F}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$, dove $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ è il tensore antisimmetrico di levi-civita a quattro indici, che ci dà le due equazioni omogenee

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0.$$

Capitolo 11

La cinematica relativistica

Come abbiamo visto con il teorema di Noether e con l'hamiltoniana che l'invarianza di un sistema sotto traslazioni spaziali e temporali, corrisponde alla conservazione della quantità di moto e dell'energia totale. Ciò può essere scritto sia in forma differenziale che eguagliando le quantità a tempi arbitrari

$$E_{in}^{tot} = E_{fin}^{tot}, \quad \vec{P}_{in}^{tot} = \vec{P}_{fin}^{tot}$$

Lo studio di tali vincoli è noto come cinematica del processo. In questo capitolo vederemo come adeguare tale studio alla relatività di modo che le equazioni siano valide in tutti i sistemi inerziali, è ovvio che le classiche equazioni non vadano bene.

11.1 Energia ed impulso da Galileo ad Einstein

Vediamo come il principio di relatività sia implementato nella conservazione di energia ed impulso nelle trasformazioni di Galileo. Supponiamo di avere N particelle di massa m_i e velocità v_i e dopo la loro interazioni avremo N' di massa μ_j e velocità ω_j le equazioni di conservazione sono

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i |\vec{v}_i|^2 = \sum_j \frac{1}{2} \mu_j |\vec{\omega}_j|^2; \quad \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_j \mu_j \vec{\omega}_j$$

Entrambe covarianti sotto rotazioni; la prima equazioni è tra scalari, la seconda tra vettori. Passiamo ora al sistema O' , secondo Galileo le velocità trasformano come $\vec{v}_i \rightarrow \vec{v}_i' = \vec{v}_i - \vec{V}$ sostituendo otteniamo che le equazioni sono equivalenti solo se

$$\sum_i m_i = \sum_j \mu_j$$

Cioè se la massa totale del sistema si conserva.

Passiamo ora al caso relativistico. È ovvio che $P = mv$ non funziona poiché non trasforma ne in modo additivo ne in modo lineare. Possiamo ipotizzare che la legge corretta debba essere covariante e deve scomporsi come un'equazione scalare più una vettoriale, l'ipotesi più verosimile è che sia un quadrivettore.

11.1.1 Quadrimpulso

Noi conosciamo tre quadrivettori, scartando quadriposizione e quadriaccelerazione (non associabili con l'impulso) rimane solo la velocità u^μ , scriviamo quindi:

$$p^\mu = m u^\mu$$

p^μ è un quadrivettore solo se m è un invariante relativistico. Sappiamo misurare la massa nel sistema in cui la particella è a riposo, prendiamo questa come definizione. La parte spaziale è

$$\vec{p} = m \gamma(v) \vec{v}$$

che nel limite non relativistico tende a mv . La parte temporale, nel limite non relativistico, invece è

$$m\gamma(v)c^2 \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + O\left(\frac{v^4}{c^4}\right)$$

(abbiamo fatto uno sviluppo di Taylor di $1/\sqrt{1-x}$ con $x=v^2/c^2$) che suggerisce che il quadrimpulso sia legato all'energia della particella. Per un sistema di N particelle

$$P_{tot}^\mu = \sum_{a=1}^N p_a^\mu$$

e la legge di conservazione

$$P_{tot,in}^\mu = P_{tot,fin}^\mu$$

è valida in tutti i sistemi inerziali

11.1.2 Proprietà del quadrimpulso ed il limite di massa nulla

Essendo proporzionale ad un quadrivettore di tipo tempo, lo sarà anch'esso. Infatti il suo modulo quadro

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2$$

è positivo. Inoltre $p_\mu p^\mu = E^2/c^2 - |\vec{p}|^2$, è quindi possibile associare l'impulso all'energia tramite la relazione di dispersione

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

dove $|\vec{p}| = p$. Nel piano E, p La relazione di dispersione fissa un'iperbole. Scriviamo ora alcune formule inverse, per la velocità

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}c^2}{E} = \frac{\vec{p}c}{\sqrt{m^2 c^2 + p^2}}$$

per l'energia nel limite non relativistico ($p \ll mc$)

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{p^2}{2m^2 c^2}\right) + O\left(\frac{p^4}{m^4 c^4}\right) \simeq mc^2 + \frac{p^2}{2m}; \vec{v} \simeq \frac{\vec{p}}{m} + O\left(\frac{p^3}{m^3 c^3}\right)$$

e nel limite ultrarelativistico ($p \gg mc$)

$$E \simeq pc \left(1 + \frac{m^2 c^2}{2p^2}\right) = pc + \frac{m^2 c^3}{2p}; \vec{v} \simeq \frac{\vec{p}}{p} c \left(1 - \frac{m^2 c^2}{2p^2}\right)$$

11.1.3 Sistemi di particelle, centro di massa e massa invariante

Vederemo ora la conservazione dell'impulso totale in sistemi formati da più particelle, ignoreremo la dinamica delle interazioni studiando quindi solo la cinematica.

Come nel caso non relativistico è spesso utile studiare il caso dove il sistema di riferimento si muove inerzialmente insieme al CM e \vec{P}_{tot} si annulla. Questo sistema esiste solo se p_{tot}^μ è di tipo tempo, il che è sempre vero. Per trovare il sistema di riferimento basta orientare l'asse delle x lungo \vec{P}_{tot} e poi fare una trasformazione di Lorentz del tipo

$$P'_{tot,x} = \gamma (P_{tot} - \beta E_{tot}/c) = 0$$

dove $\beta = P_{tot}c/E_{tot}$ il che fissa la velocità del CM rispetto al sistema di riferimento inerziale come

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{P}_{tot}}{E_{tot}} c^2$$

Il sistema del CM è più che un centro di massa, un centro di energia; se una particella ha massa nulla, il CM non esiste (la particella ha velocità c in tutti i sistemi).

Discutiamo ora il significato di massa nel caso relativistico. In questo caso $\sum_a m_a$ è invariante sotto boost ma non è conservata durante un'interazione ($P_{tot}^\mu = \sum_{a=1}^N p_a^\mu$ non lo impone). Ma invece quell'equazione impone che tutte le quantità direttamente legate al quadrimpulso si conservino, fra queste il modulo di p^μ che come abbiamo visto è proporzionale alla massa invariante del sistema

$$M_{inv}^2 c^2 \equiv E_{tot}^2 / c^2 - \left| \vec{P}_{tot} \right|^2$$

M_{inv} può essere considerata come l'effettiva massa globale del sistema poiché stabilisce la relazione di dispersione globale. Abbiamo infatti

$$\vec{P}_{tot} = M_{inv} \gamma(v_{CM}) \vec{v}_{CM}; \quad E_{tot} = M_{inv} \gamma(v_{CM}) c^2$$

Il che rende chiaro come dal punto di vista cinematico possiamo considerare l'energia totale disponibile nel sistema del centro di massa come un corpo di massa M_{inv} . mettendoci nel sistema del centro di massa con $\vec{P}_{tot}^{CM} = 0$ abbiamo

$$E_{tot}^C M = M_{inv} c^2$$

cioè la massa invariante coincide (a meno di c^2) con l'energia totale disponibile nel sistema del centro di massa.

11.1.4 Le unità naturali

Il progresso della conoscenza delle leggi fisiche ci ha portato alla scoperta di varie costanti che a saperle prima avremmo potuto accostare numeri più facili. Un esempio è $c=1$.

11.2 Formulazione lagrangiana ed un po' di dinamica

Proviamo adesso a scrivere la lagrangiana per una particella libera relativistica, la generalizzazione al caso con più particelle è naturale. Abbiamo quindi un problema variazionale con fissati eventi (condizioni di bordo) A e B, che ci danno la seguente azione associata

$$S[x(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}, t).$$

Questa notazione fa riferimento al sistema O, il principio di relatività però impone che:

- Ogni osservatore inerziale usi lo stesso funzionale, calcolato nel proprio sistema di riferimento, quindi O ed O' calcoleranno $S[\vec{x}(t)]$ ed $S[\vec{x}'(t')]$;
- O ed O' dovranno trovare lo stesso insieme di traiettorie che estremizzano il funzionale d'azione, ognuno scrivendole nel proprio sistema.

La strada è richiedere che il funzionale d'azione sia un invariante di Lorentz. Concentriamoci sull'azione relativa ad un tratto infinitesimo di cammino e richiediamo che sia invariante e dello stesso ordine della lunghezza del tratto stesso, la variazione infinitesima di posizione sarà individuata dal quadrivettore dx^μ e la lunghezza invariante sarà $dx_\mu dx^\mu = c^2 d\tau^2$. Questo coincide con il funzionale

$$S = k \int_A^B ds = kc \int_{t_A}^{t_B} dt \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

che fa riferimento ad una lagrangiana $L = kc\sqrt{1 - v^2/c^2}$; il tempo proprio tra due eventi è estremizzato dal moto rettilineo uniforme, dobbiamo quindi fissare la costante di proporzionalità k. Imponendo che nel limite non relativistico si abbia $L = 1/2mv^2$ otteniamo che $k = -mc^2$ e quindi

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

che è la corretta lagrangiana come anche verificato da vari fenomeni sperimentali. Calcoliamo adesso momenti coniugati, velocità ed hamiltoniana per vedere che coincidono con quelli già trovati

$$\begin{aligned}\vec{p} &= -\frac{\partial}{\partial \vec{v}} mc^2 \sqrt{1 - \frac{|\vec{v}|^2}{c^2}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - |\vec{v}|^2/c^2}} = m\gamma \vec{v} \\ |\vec{v}| &= \frac{\vec{p}c}{\sqrt{m^2 c^2 + |\vec{p}|^2}} \\ H &= m\gamma(v) \vec{v} \cdot \vec{v} + mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} = m\gamma(v^2 + c^2(1 - v^2/c^2)) = m\gamma(v)c^2 \\ &= \frac{c\vec{p} \cdot \vec{p}}{\sqrt{m^2 c^2 + |\vec{p}|^2}} + \frac{m^2 c^3}{\sqrt{m^2 c^2 + |\vec{p}|^2}} = \sqrt{|\vec{p}|^2 c^2 + m^2 c^4}.\end{aligned}$$

In questo caso non esiste una definizione a priori di energia come nella meccanica non relativistica ($E=T+U$), l'energia viene associata ad H in quanto quantità legata all'invarianza sotto traslazioni temporali.

11.2.1 Particella in campo elettromagnetico e forza relativistica

abbiamo visto come l'informazione sui campi elettromagnetici possa essere racchiusa nel quadripotenziale $A^\mu \rightarrow (\phi/c, \vec{A})$. Essendo il quadripotenziale un quadrivettore allora aumenta il numero di invarianti di Lorentz associabili ad un tratto infinitesimo di traiettoria, in particolare

$$dx_\mu A^\mu = d\tau u_\mu A^\mu = \frac{dt}{\gamma} \left(\gamma c \frac{\phi}{c} - \gamma \vec{v} \cdot \vec{A} \right) = dt(\phi - \vec{v} \cdot \vec{A}).$$

che corrisponde (se moltiplicato per q , un invariante) alla parte elettromagnetica della lagrangiana non relativistica. Possiamo quindi costruire il funzionale d'azione

$$\begin{aligned}S &= - \int_A^B d\tau \left(mc \sqrt{u_\mu u^\mu} + q u_\mu A^\mu \right) \\ &= \int_A^B dt \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - q\phi + q\vec{v} \cdot \vec{A} \right)\end{aligned}$$

dove la prima delle due equazioni ci servirà tra poco. Possiamo quindi ricavarci i momenti coniugati e la hamiltoniana

$$\vec{p} = \vec{p}_{cin} + q\vec{A}; \quad H = \sqrt{|\vec{p} - q\vec{A}|^2 c^2 + m^2 c^4} + q\phi$$

dove $\vec{p}_{cin} = \gamma m \vec{v}$ e l'equazione di E-L da $\frac{d\vec{p}_{cin}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, la forza di Lorentz.

Sfruttando la prima equazione di S possiamo scrivere le equazioni di E-L in linguaggio covariante, infatti

$$\int \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -mc \frac{u_\mu}{\sqrt{u_\nu u^\nu}} - qA_\mu = -mu_\mu - qA_\mu; \quad \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = -qu_\nu \partial_\mu A^\nu$$

da cui

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial u^\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \Rightarrow -m \frac{du_\mu}{d\tau} = q \frac{dA_\mu}{d\tau} - qu_\nu \partial_\mu A^\nu = q(\partial^\nu A_\mu u_\nu - u_\nu \partial_\mu A^\nu)$$

ricordandoci del tensore dei campi possiamo scriverla come

$$\frac{d}{d\tau} p_{cin}^\mu = qF^{\mu\nu} u_\nu$$

che è la forma covariante della forza di Lorentz. Il quadrivettore $dp_{cin}^\mu/d\tau$ definisce la quadri forza e le se prime 3 componenti equivalgono all'usuale forza, l'ultima è

$$\frac{d}{d\tau} \frac{E}{c} = \frac{q}{c} \vec{E} \cdot \vec{u} \Rightarrow \frac{dE}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v},$$

generalizzazione del teorema dell'energia cinetica e a sua volta dipendente dall'equazione del moto stessa (essendo che $u_\mu u^\mu = c^2$ allora date 3 componenti di un quadrivettore dipendente da esso la quarta non è indipendente).

11.2.2 Invarianza di Lorentz e quantità conservate

La lagrangiana di un sistema di particelle libere è un invariante di Lorentz, questo vuol dire che possiamo vedere le sue trasformazioni come attive e per il teorema di Noether ci saranno delle quantità conservate. Dal formalismo covariante ci aspettiamo 6 quantità conservate, essendo 6 i generatori. La trasformazione di Lorentz è un'applicazione lineare e quindi è un tensore a 2 indici, quindi le quantità conservate avranno una struttura simile. Riscrivendo le quantità abbiamo

$$g_{\mu\rho}\Omega^\rho\sigma\delta^{\sigma\nu} = -\Omega_\mu^\nu \Rightarrow \delta_\mu^\rho\Omega_{\rho\sigma}\delta_\nu^\sigma = -\Omega_{\nu k} \Rightarrow \Omega_{\mu\nu} = -\Omega_{\nu\mu}.$$

La variazione delle coordinate di un punto materiale sotto trasformazione attiva di Lorentz allora è

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = \Lambda_{\mu\nu}x^\nu = \left(g_{\mu\nu} + \omega_{\alpha\beta}\Omega_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}\right)x^\nu \Rightarrow \delta x_\mu = \omega_{\alpha\beta}\Omega_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}x^\nu$$

dove $\omega_{\alpha\beta}$ racchiude le informazioni su rapidità e angolo di rotazione. Per il teorema di Noether abbiamo quindi

$$Q = \frac{\partial L}{\partial u_\mu}\delta x_\mu = -p^\mu\omega_{\alpha\beta}\Omega_{\mu\nu}^{(\alpha\beta)}x^\nu = \omega_{\alpha\beta}(x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha).$$

Il tensore $L^{\alpha\beta}x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha$ rappresenta le quantità conservate, la parte spazio-spazio è il momento angolare e la parte spazio-tempo è $L^{0i} = (ct\vec{p} - E\vec{x}/c)^i$

$$\vec{X}_{CM} = \frac{\vec{P}_{tot}c^2}{E_{tot}}t = \vec{v}_{CM}t,$$

11.3 Effetto doppler

L'equazione delle onde elettromagnetiche $\square u = 0$ dove u è una generica componente dei campi, ammette soluzioni di tipo onda piana

(11.44)

(ricordiamo la legge di dispersione $\omega(\vec{k}) = |\vec{k}c|$). Le soluzioni più generali sono una sovrapposizione di tali onde e formano dei pacchetti di velocità di gruppo $v_g = \partial\omega/\partial k$ (che differisce dalla velocità di fase $v_p = \omega/k$); fortunatamente le onde elettromagnetiche nel vuoto hanno una relazione non dispersiva (ci limitiamo alla trattazione nel vuoto) e le due velocità coincidono.

Vediamo adesso come trasforma $\square u = 0$ visto da un sistema di riferimento O' si muove a velocità $\vec{\beta} = \vec{v}/c$. I campi trasformano in modo locale e lineare quindi la fase sarà la stessa a meno di una costante additiva globale che per facilità e convenzione poniamo a 0, quindi

$$u(\vec{x}, t) = \text{Re}(C \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega(\vec{k})t))).$$

Se ora poniamo $k \equiv (\omega/c, \vec{k})$ e $x \equiv (ct, \vec{x})$, allora deduciamo

$$\omega't' - \vec{k}' \cdot \vec{x}' = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{x}$$

dunque k deve trasformare come un quadritettore e la fase può essere scritta come $k_\mu x^\mu$. La particolarità dell'equazione d'onda è che $k_\mu k^\mu \propto \omega^2 - |\vec{k}|^2 c^2$ è invariante e quindi lo è anche la legge di dispersione. Possiamo quindi scrivere la legge di trasformazione della frequenza

$$\omega' = \gamma(\omega - \vec{\beta} \cdot \vec{k}c) = \gamma\omega(1 - \vec{\beta} \cdot \hat{n})$$

che descrive l'effetto doppler relativistico e analogo a quello delle onde sonore.

Se la velocità di O' è parallela o anti parallela ($\vec{\beta} \cdot \hat{n} = \pm\beta$) alla direzione di propagazione dell'onda vista da O , allora si ricava il cosiddetto effetto doppler longitudinale

$$\omega' = \gamma\omega(1 \mp \beta) = \sqrt{\frac{1 \mp \beta}{1 \pm \beta}}\omega.$$

Se invece le due direzioni sono perpendicolari

$$\omega' = \gamma \omega.$$

Nel caso di β e k equiversi allora O vede due fronti d'onda raggiungere O' dopo $\Delta t \rightarrow c\Delta t = \lambda + c\beta\Delta t = c/v + c\beta\Delta t$ da cui $\Delta t = 1/(v(1 - \beta))$ e per il tempo dilatato $\Delta t = \gamma\Delta t'$; per il caso trasversale si ha $\Delta t = 1/v$ e $v' = \gamma v$ ovvero l'effetto doppler è dovuto alla sola dilatazione dei tempi.

11.4 Velocità limite e principio di casualità

Nella teoria relativistica la velocità della luce appare come una velocità limite. Tuttavia il fatto che non si possa superare c non fa parte dei suoi principi, sono state ipotizzate delle particelle con massa immaginaria (i tachioni) che superano la velocità della luce. Questo fa sì che due eventi di tipo spazio possano essere collegati invalidando il principio di causalità fondamentale per la nostra fisica. Il paradosso viene superato se i tachioni non portano informazione.

Capitolo 12

Sistemi accelerati e rigidità in relatività

In questo capitolo risolveremo il moto di un punto materiale uniformemente accelerato, noto anche come moto iperbolico (l'accelerazione è costante nel sistema di riferimento istantaneamente solidale). Passeremo poi da un punto materiale ad un corpo esteso dove definiremo anche la nozione di sistema o corpo rigido in relatività, per fare questo useremo la metrica di Rindler. Infine guarderemo in maniera euristica l'equivalenza tra quello che abbiamo fatto e la relatività in presenza di un campo gravitazionale.

12.1 Il punto materiale uniformemente accelerato

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo x partendo da $x=0$ a $t=0$ con accelerazione α nel sistema di riferimento istantaneamente solidale a se stesso O' , possiamo usare come variabile temporale t o τ (essendo la prima una funzione biunivoca crescente della seconda). Usiamo la convenzione $c=1$, v è la velocità del punto rispetto a O e u la 4-velocità, allora

$$u = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}; \quad v = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Primo metodo.

La 4-accelerazione nel sistema O' è α , infatti in questo sistema, il punto è istantaneamente fermo. Inoltre in O' , la 4-velocità è $(1,0)$, quindi la 4-accelerazione è $(0,\alpha)$ (essendo che le due devono essere sempre perpendicolari). A questo punto effettuiamo una trasformazione di Lorentz per calcolare la 4-accelerazione in O ,

$$\frac{du}{d\tau} = \gamma\alpha \Rightarrow \frac{du}{\gamma d\tau} = \frac{du}{dt} = \alpha,$$

integrando otteniamo dunque

$$u(t) = \alpha t$$

e quindi

$$v(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}}; \quad \gamma(t) = \sqrt{1+\alpha^2 t^2}.$$

Un secondo metodo.

Calcoliamo dv/dt in O , avendo calcolato prima $v(t)$, integriamo e otteniamo

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} (\sqrt{1+\alpha^2 t^2} - 1).$$

Possiamo facilitare le notazioni facendo la conversione da t a τ ,

$$\frac{dt}{\sqrt{1+\alpha^2 t^2}} = d\tau \Rightarrow \alpha \operatorname{arcsinh}(\alpha t) = \alpha \tau \Rightarrow \alpha t = \sinh(\alpha \tau)$$

possiamo così riscrivere le precedenti relazioni

$$\begin{aligned}\gamma(\tau) &= \sqrt{1 + \sinh^2(\alpha\tau)} = \cosh \alpha\tau, \\ v(\tau) &= \gamma u = \gamma \alpha t = \tanh \alpha\tau \\ \alpha x(\tau) &= \cosh \alpha\tau - 1.\end{aligned}$$

Un metodo più rapido fa invece uso della rapidità.

In O' , dove il moto non è relativistico, la rapidità iniziale è 0 e varia di $\alpha d\tau$ nel tempo $d\tau$. La rapidità è composta dall'addizione di moti collineari, quindi anche in O avremo la stessa variazione, per cui

$$\chi = \alpha\tau$$

possiamo quindi riscrivere le precedenti relazioni come $v = \tanh \chi$, $\gamma = \cosh \chi$ e $u = \sinh \chi$.

Moto iperbolico: La legge oraria prima trovata può essere riscritta come

$$(\alpha x + 1)^2 - (\alpha t)^2 = 1$$

che descrive in x, t un ramo di iperbole con asintoti perpendicolari alle bisettrici e centrata in $x = -1/\alpha$, $t=0$; per questo il moto relativistico uniformemente accelerato viene anche chiamato moto iperbolico. Per $\alpha t \ll 1$ tende al moto non relativistico.

L'orizzonte degli eventi: Ogni segnale che viaggi a velocità $\leq c$ e si trovi a sinistra dell'asintoto, non intercederà mai la linea dettata da $x(t)$, questo vuol dire che non potrà mai portare informazione, motivo per cui l'asintoto è no come orizzonte degli eventi per il corpo accelerato.

Il moto iperbolico è quello generato da una forza costante L'accelerazione costante di cui abbiamo trattato, è chiaramente quella generata da una forza costante, un esempio di questo tipo è quello dato da una carica posta in un campo elettrico uniforme. Questo significa che dp/dt è un invariante relativistico, infatti dalle trasformazioni di Lorentz in un generico sistema di riferimento \tilde{O} :

$$d\tilde{p} = \gamma(V)(dp - VdE); d\tilde{t} = \gamma(V)(dt - Vdx)$$

da cui otteniamo due relazioni, $E^2 = p^2 + m^2$ e $dE = (p/E) dp = v dp$, giungendo infine a

$$\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{t}} = \frac{dp - VdE}{dt - Vdx} = \frac{dp(1 - Vv)}{dt(1 - Vv)} = \frac{dp}{dt}.$$

12.2 Il paradosso di Bell e la rigidità secondo Born

Discutiamo ora del paradosso di Bell. Due astronavi, A e B, sono ferme nel sistema O , A è in $x=0$ e B in $x=L$, vengono accelerate uniformemente lungo x . Supponendo esse siano collegate da un filo inestensibile, la corda si rompe? La risposta corretta è che il filo si rompe. Quando le due astronavi sono partite, se la lunghezza appare immutata in O perché le due astronavi percorrono la stessa legge oraria, tuttavia la lunghezza è contratta nel sistema istantaneamente solidale con il filo, quindi in esso la distanza aumenta e il filo si rompe. Dopo la partenza non è possibile trovare un sistema di riferimento solidale ad entrambe le astronavi, ci mettiamo quindi in quello di A, le due leggi orarie sono:

$$\alpha x^{(A)}(t) = \sqrt{1 + \alpha^2 t^2}; \alpha x^{(B)}(t) = \sqrt{1 + \alpha^2 t^2} + L; v^{(A)} = v^{(B)} = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2 t^2}}.$$

Sia Δx la distanza in O tra le due astronavi, usando la simultaneità e la contrazione delle lunghezze, dopo qualche calcolo si arriva a

$$\alpha x^{(A)}(t) = \sqrt{1 + \alpha^2 t^2}; \alpha x^{(B)}(t) = \sqrt{1 + \alpha^2 t^2} + L; v^{(A)} = v^{(B)} = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + \alpha^2 t^2}}.$$

che è sicuramente maggiore di L , dunque la corda si spezza.

Come possiamo osservare, il concetto di rigidità non è ben definito in relatività. Un modo per estendere il concetto di rigidità alla relatività è stato proposto da Max Born: un corpo esteso si dice rigido se i punti infinitesimalmente vicini si mantengono a distanza fissa nel sistema di riferimento istantaneamente solidale.

12.3 Sistemi estesi accelerati: la metrica di Rindler

Vediamo adesso se è possibile scegliere un diverso valore dell'accelerazione di B, $\tilde{\alpha}$, tale che A veda B sempre alla stessa distanza. Se tale valore $\tilde{\alpha}$ esiste, non può che essere quello per cui gli orizzonti degli eventi per A e B coincidono, quindi

$$\frac{1}{\tilde{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} + L.$$

Adesso verifichiamo che sia questa la giusta accelerazione.

La totalità di iperboli aventi come asintoti le bisettrici dei quadranti è rappresentata dall'equazione

$$x^2 - t^2 = 1/\alpha^2,$$

questa può essere anche vista come la famiglia di linee orarie con accelerazione α . Rimodellando queste equazioni possiamo scrivere

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x}.$$

Prendiamo adesso una retta di equazione $t=Vx$, essa intercetta tutte le leggi orarie nel punto in cui esse hanno velocità V , dunque esiste un sistema O' con velocità V rispetto ad O che è solidale a tutti i punti materiali contemporaneamente. Dopo qualche calcolo arriviamo a

$$\Delta x' = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\tilde{\alpha}} \right),$$

ma questa distanza è proprio quella iniziale, dunque la distanza per questa accelerazione rimane invariata nel sistema solidale di tutti i punti della corda.

Ritardo degli orologi: Prendiamo un treno che si muove con un'accelerazione costante mantenendosi rigido secondo Born. I passeggeri che stanno in coda al treno sentono un'accelerazione maggiore (pari all'inverso della distanza dall'orizzonte degli eventi), ma nonostante questo, i passeggeri si vedono a riposo l'uno rispetto all'altro. Inoltre i passeggeri hanno anche una diversa percezione del tempo; sia τ_α il tempo proprio percepito dal passeggero con accelerazione α , allora

$$\alpha t = \sinh(\alpha \tau_\alpha).$$

Inoltre essendo che lungo ogni linea oraria $\alpha t = V\gamma(V)$, segue

$$\tau_\alpha = \frac{1}{\alpha} \sinh(V\gamma(V)) = l \sinh(V\gamma(V))$$

dove l è la distanza del passeggero dall'orizzonte degli eventi. Quindi in questo treno si invecchia ad una velocità proporzionale all'orizzonte degli eventi, per cui stando in coda, si invecchia più lentamente.

Metrica di Rindler: I passeggeri all'interno del treno hanno tutti un proprio sistema di riferimento. Per la componente spaziale la scelta è univoca e corrisponde alla distanza l dall'orizzonte degli eventi (rimane sempre immutata), per quella temporale però dobbiamo scegliere un passeggero e metterci nel suo sistema di riferimento; scegliamo il passeggero con $l=1$ e definiamo quindi come tempo di riferimento per tutto il treno $\bar{\tau} \equiv \tau_{\alpha=1}$. Le coordinate $(\bar{\tau}, l)$ sono chiamate coordinate di Rindler. Possiamo quindi catalogare ogni evento nello spazio tra le bisettrici di primo e quarto quadrante o con le coordinate di Rindler nel sistema accelerato, oppure con le coordinate del sistema inerziale O . I tempi dei passeggeri sono tutti legati tra loro da $\alpha \tau_\alpha$, quindi

$$t = l \sinh \bar{\tau}; \quad x = l \cosh \bar{\tau}.$$

Vediamo che la corretta distanza tra due eventi è

$$dt = dl \sinh \bar{\tau} + d\bar{\tau} l \cosh \bar{\tau}; \quad dx = dl \cosh \bar{\tau} + d\bar{\tau} l \sinh \bar{\tau} \rightarrow ds^2 = dt^2 - dx^2 = l^2 d\bar{\tau}^2 - dl^2.$$

Possiamo dunque scrivere una nuova metrica per i sistemi accelerati, $g = \text{diag}(l^2, -1)$, nota come metrica di Rindler. Il sistema non è infatti inerziale e lo scorrere del tempo non è uniforme, infatti per un osservatore a riposo abbiamo $ds = l d\bar{\tau}$.

12.4 Ritardo degli orologi in campo gravitazionale

La forma forte del principio di equivalenza di Einstein, afferma che ogni campo gravitazionale è localmente equivalente ad un sistema uniformemente accelerato (analogamente è sempre possibile trovare un sistema di riferimento che annulla localmente il campo gravitazionale), la forma debole invece è l'equivalenza tra massa gravitazionale e inerziale. Facciamo uso del principio di equivalenza per vedere il ritardo degli orologi in campo gravitazionale. Il sistema inerziale è quello in caduta libera, allora il tempo proprio per un orologio posto ad una certa altezza è

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \operatorname{asinh}(V\gamma(V)) = l \operatorname{asinh}(V\gamma(V))$$

dove l è l'altezza del orologio e V la velocità del sistema O in caduta libera che però non ci è dato sapere, allora la differenza con un altro orologio ad una diversa altezza è

$$\Delta\tau = \Delta l \operatorname{asinh}(V\gamma(V)) = \Delta l \frac{\tau}{l} = \Delta l \alpha \tau,$$

l adesso è la differenza delle altezze e α l'accelerazione gravitazionale percepita.

Capitolo 13

Le basi della meccanica statistica

Lo scopo della meccanica statistica è di dare una descrizione appropriata ed utile dei sistemi a molti gradi di libertà, connettendo leggi della meccanica microscopica con quella macroscopica. Un esempio è la termodinamica, dove molti significa un numero paragonabile al numero N di particelle in una mole di gas ($N_A \simeq 6 \cdot 10^{23}$), inoltre questi sistemi saranno sempre regolati da un'hamiltoniana che descrive i vari tipi di interazioni. Un sistema di questo tipo, date le $2N$ condizioni iniziali è calcolabile esattamente, tuttavia non è qualcosa che ci serve (ma per differenziare dalla quantistica è bene conoscerne la possibilità). Il motivo dell'inutilità di questo calcolo, oltre alla difficoltà della risoluzione di $2N$ equazioni e la difficoltà dell'ottenere tutte le condizioni iniziali, è dato dal fatto che le descrizioni teoriche di nostro interesse sono quelle che ci permettono di osservare effetti macroscopici. Ad esempio, data una scatola al cui interno è presente un gas, è più utile sapere che 2 particelle si sono scontrate ad un dato istante oppure la temperatura? Più in generale, data una grandezza O , funzione di coordinate e impulsi $(q_1 \dots q_N, p_1 \dots p_N)$ siamo interessati alla sua media temporale

$$\bar{O}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' O(q_1(t'), \dots, q_N(t'), p_1(t'), \dots, p_N(t'))$$

dove Δt è molto più grande dell'intervallo di tempo in cui accade un evento microscopico (l'urto di due atomi). L'idea dietro alla meccanica statistica è quella di barattare la media temporale (una misura a posteriori), con una distribuzione di probabilità sullo spazio delle fasi $\rho(q, p, t) \geq 0$ (una distribuzione statistica) tale che

$$\langle O \rangle \equiv \int d\Gamma O(q, p) \rho(q, p, t) = \bar{O}(t) \quad \forall O,$$

dove $d\Gamma$ è un volume infinitesimo dello spazio delle fasi con

$$\int d\Gamma \rho(q, p, t) = 1; \quad d\Gamma \equiv \prod_{i=1}^N dq_i dp_i.$$

13.1 L'idea dell'ensamble e l'equilibrio termodinamico

La distribuzione statistica può essere reinterpretata usando il concetto di ensamble, possiamo considerare un numero N molto grande di copie del sistema con condizioni iniziali diverse e casuali seguendo però la distribuzione $\rho(q, p, t)$.

Nell'espressione della media temporale abbiamo assunto che la grandezza sia indipendente dal tempo ma che però la sua misura sia dipendente dal momento in cui viene iniziata la misura, se anche questa dipendenza viene a mancare, allora il sistema è detto in equilibrio termodinamico. Questo significa che anche la distribuzione ρ è indipendente dal tempo e ha delle implicazioni sulla forma della distribuzione stessa. Assumiamo che l'evoluzione temporale della distribuzione sia indotta dall'evoluzione temporale dei singoli sistemi, allora se tale evoluzione è hamiltoniana, sappiamo dal teorema di Liouville che la distribuzione evolve in modo che la sua derivata totale rispetto al tempo sia nulla ($d\rho/dt = 0$). Essendo la condizione di stazionarietà dipendente

dalla derivata parziale $\partial\rho/\partial t = 0$, otteniamo

$$\frac{d\rho}{dt} = \{\rho, H\} + \frac{\partial\rho}{\partial t}$$

da cui segue $\partial\rho/\partial t = -\{\rho, H\}$ che è l'equazione di Liouville. Quindi $\partial\rho/\partial t = 0$ implica che ρ sia unicamente funzione di quantità con cui la parentesi di Poisson con l'hamiltoniana si annulla (quindi costanti del moto).

13.2 Microstati e macrostati

Un microstato è la più dettagliata possibile descrizione di sistema meccanico (q e p di tutti i punti). Un macrostato è l'insieme delle variabili che permettono di costruire una distribuzione statistica dei microstati.

Possiamo prendere ogni punto dello spazio delle fasi (nel microstato) con un'incertezza arbitraria, ovvero anziché descrivere un microstato con dei punti, lo descriviamo con delle zone. In questo modo avremo più punti nella stessa zona (celletta) e sarà possibile che altre copie dell'ensamble abbiano punti nella stessa celletta (dato un punto con precisione infinita allora nessun'altra particella sarà nello stesso punto né in quell'ensamble né in altri, inoltre questa congettura matematica si rivela casualmente una verità della natura quantistica). Questo rende i microstati numerabili (abbiamo un numero di cellette finito che descrivono una regione dello spazio delle fasi). Possiamo dunque costruire una distribuzione come un istogramma della media di punti in una data celletta (una celletta corrisponde ad un bin dell'istogramma). Essendo i microstati numerabili possiamo passare dalla distribuzione continua ρ ad una discreta p_i e per ogni quantità fisica $O(q, p)$ associare il valore che O_i assume nel microstato i -esimo. La determinazione del macrostato è quindi equivalente all'assegnazione della probabilità p_i , e le medie statistiche sull'ensamble si possono scrivere nella forma

$$\langle O \rangle = \sum_i p_i O_i.$$

13.3 Costruire l'ensamble: microcanonico e canonico

Vediamo ora le regole operative per costruire un ensamble e la sua distribuzione. Immaginiamo che le N copie che compongono l'ensamble vengano estratte una dietro l'altra. È possibile che vengano estratte più copie N_i dello stesso microstato i , in tal caso la probabilità che quel microstato venga estratto è

$$p_i = \frac{N_i}{N}$$

Vediamo ora le regole:

1. *Principio di equiprobabilità a priori: cellette di eguale volume nello spazio delle fasi hanno a priori la stessa probabilità di essere estratte.* Questo perché stiamo dando una regola a priori, cioè prima di specificare la dinamica del sistema.
2. *Non tutte le estrazioni sono ammissibili, ma solo quelle compatibili con le informazioni macroscopiche a disposizione: questo definisce il tipo di ensamble.* Vediamo due esempi notevoli:
 - **Ensamble microcanonico:** conosciamo il valore $H=E$ del sistema che è isolato dall'esterno, di conseguenza sono ammesse unicamente i microstati con $E_i = E$.
 - **Ensamble canonico:** il sistema non è isolato, conosciamo il valore dell'energia media che corrisponde con l'usuale definizione dell'energia interna $U = \bar{E}$. L'ambiente esterno con il quale il sistema scambia energia ed è in equilibrio è detto termostato. In tal caso sono valide solo i microstati per cui

$$\langle E \rangle = \frac{1}{N} \sum_i N_i E_i = \sum_i p_i E_i = U.$$

3. *Nel limite $N \rightarrow \infty$, l'unica distribuzione di popolazioni N_i da tenere in considerazione è quella con la maggior probabilità di essere estratta.*

Vediamo ora come realizzare nella pratica le precedenti regole: calcoleremo la probabilità di estrarre una certa distribuzione di popolazione e vederemo per quale microstato questa viene massimizzata.

13.3.1 Probabilità di una certa distribuzione di popolazione

Possiamo rappresentare ogni microstato estratto come un numero intero i_1, \dots, i_N , ogni microstato ha la stessa probabilità di essere estratto e la probabilità che ci siano N_i copie del microstato i è proporzionale alla molteplicità M della distribuzione (cioè il numero di sequenze distinte che portano alla stessa distribuzione). Il problema è quindi equivalente alla ricerca di un massimo della molteplicità. Possiamo ottenere sequenze diverse che portano alla stessa distribuzione permutando a piacere gli elementi di una data sequenza, tenendo però presente che permutando fra loro elementi della sequenza associati allo stesso microstato la sequenza resta la stessa. La molteplicità è quindi data da

$$M(N_1, N_2, \dots) = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots} = \frac{N!}{\prod_i N_i!}.$$

Usando l'approssimazione di Stirling e la serie di Taylor otteniamo

$$\log M \simeq -N \sum_i p_i \log p_i$$

dove N è chiaramente irrilevante (fattore di proporzionalità). La molteplicità rappresenta dunque il numero di differenti traiettorie che conducono alle stesse frequenze p_i e quindi allo stesso comportamento macroscopico ed è dunque una misura della nostra ignoranza sulla traiettoria del sistema, infatti la quantità $-\sum_i p_i \log p_i$ verrà scelta come definizione. Avendo dei vincoli, dovuti alla seconda regola, ci troviamo davanti ad un problema di massimo vincolato che deve essere risolto con i moltiplicatori di Lagrange.

13.3.2 Ensemble microcanonico

Abbiamo due vincoli, l'energia e la normalizzazione $\sum_i p_i = 1$. Dobbiamo cercare i punti in cui il gradiente di

$$-\sum_i p_i \log p_i - \lambda \sum_i p_i$$

si annulla. Questi sono dati da

$$p_i = e^{-(1+\lambda)}$$

dove λ è fissato dalla normalizzazione ed è quindi dipendente dal numero di microstati per cui l'energia ha un determinato valore.

13.3.3 Ensemble canonico

Abbiamo di nuovo due vincoli, ma questa volta sono accessibili tutti i microstati. Il vincolo sull'energia media è

$$\langle E \rangle = \sum_i p_i E_i = U,$$

da cui

$$p_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z(\beta)}$$

dove $Z(\beta) = \sum_j e^{\beta E_j}$ è noto come funzione di partizione del sistema (β è il moltiplicatore di Lagrange per l'energia interna). Questa distribuzione è nota come distribuzione di Boltzmann-Gibbs.

13.4 Proprietà del ensemble canonico

La relazione che fornisce l'energia interna del sistema in termini di β è

$$U = \langle E \rangle = \sum_j \frac{1}{Z(\beta)} E_j e^{-\beta E_j} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} Z.$$

Abbiamo appena visto un esempio di come la funzione di partizione possa essere usata per il calcolo di variabili macroscopiche. Inoltre, è evidente come se ci fossero microstati con energie E_i grandi a piacere allora il valore medio dell'energia divergerebbe nel caso di $\beta \leq 0$, quindi $\beta > 0$ a meno che il numero di microstati sia finito o la loro energia sia superiormente limitata.

13.4.1 Distribuzione per sottoinsiemi non interagenti

Prendiamo un sistema composto da due sottosistemi, A e B, non interagenti tra loro. Il microstato i sarà dato dai microstati a di A e α di B, dunque $i = (a, \alpha)$. L'energia sarà ovviamente la somma delle due energie

$$E_{a,\alpha} = e_a + \epsilon_\alpha.$$

Possiamo ora costruire l'ensamble canonico del sistema assumendo di conoscere le due energie interne, abbiamo i vincoli

$$\sum_{a,\alpha} p_{a,\alpha} e_a = U_A; \quad \sum_{a,\alpha} p_{a,\alpha} \epsilon_\alpha = U_B$$

da cui

$$p_{a,\alpha} = \frac{e^{-\beta_A e_a}}{Z_A} \frac{e^{-\beta_B \epsilon_\alpha}}{Z_B},$$

$$Z = Z_A Z_B.$$

Dunque quando abbiamo due sistemi non interagenti, la distribuzione di probabilità è il prodotto delle due distribuzioni; il discorso si estende facilmente ad un numero arbitrario di sistemi non interagenti.

13.4.2 I sistemi in contatto termico hanno lo stesso β

Nel precedente paragrafo abbiamo visto che le due β erano diverse ed indipendenti. Prendiamo lo stesso caso di prima ma assumiamo di non conoscere l'energia interna dei due sistemi ma solo la loro somma. Ripetendo i calcoli otterremo la stessa distribuzione di probabilità, ma questa volta, avendo un solo vincolo, avremo $\beta_A = \beta_B$. Tutto questo equivale a ammettere che A e B possano scambiare energia tra di loro, ma i sistemi rimangono comunque stocasticamente indipendenti e non interagenti. Infine notiamo che la temperatura è il parametro uguale per due sistemi che scambiano energia quando raggiungono l'equilibrio, dunque β è funzione della temperatura e questa funzione è universale, ovvero uguale per tutti i sistemi fisici.

13.5 Perché lo spazio delle fasi: l'ipotesi ergodica

Il principio di equiprobabilità ci permette di capire come mai, si sceglie di lavorare nello spazio delle fasi anziché, ad esempio, nello spazio degli atti di moto (velocità al posto della quantità di moto). Il motivo è che nello spazio delle fasi, microstati equiprobabili hanno lo stesso volume, quindi per contare quanti microstati sono compresi in una regione dello spazio delle fasi, ci basterà misurare il loro volume; inoltre l'ensamble costruito riproduce le medie temporali di un sistema reale che evolve nel tempo coprendo uniformemente tutta l'ipersuperficie dello spazio delle fasi avente energia fissata. Questa ipotesi è nota come ipotesi ergodica ed è sbagliata se il sistema ha altri integrali del moto oltre all'energia, che quindi richiedono ulteriori vincoli.

Capitolo 14

Un esempio notevole: il gas perfetto

In questo capitolo, usando le regole dette nel precedente, tratteremo il caso notevole del gas perfetto monoatomico. Vedremo un sistema composto da N particelle rinchiuso in una scatola di volume V , le cui pareti sono rigide ed impenetrabili. Assumeremo che le particelle non interagiscano tra di loro, quindi considereremo solo gli urti elastici contro le pareti. Infine approssimeremo le molecole monoatomiche a punti materiali, quindi avremo $3N$ coordinate. Fatte queste considerazioni, l'hamiltoniana è

$$H = \sum_{a=1}^N \frac{|\vec{p}_a|^2}{2m}.$$

Elenchiamo qui le problematiche:

- Effettueremo un conteggio dei microstati per tale sistema, ricordandoci che essendo gli atomi uguali, non è possibile differenziare due microstati dove viene solo invertita la posizione sullo spazio delle fasi;
- Costruiremo un ensemble microcanonico e canonico per tale gas e definiremo il legame tra β e la temperatura. Vedremo anche la distribuzione delle velocità delle singole particelle, nota come distribuzione di Maxwell;
- Infine guarderemo le fluttuazioni dell'energia nel caso dell'ensemble canonico, in particolare guarderemo il limite per cui esse diventano trascurabili, noto come limite termodinamico.

14.1 Il conteggio dei microstati e le particelle identiche

Lo spazio delle fasi del sistema ha $6N$ dimensioni. Consideriamo microstati a cellette di uguale volume h^{3N} (dove h scopriremo essere la costante di Planck) Assumiamo che h sia arbitrariamente piccola, allora il numero di microstati in una certa regione Ω è

$$n_{\Omega} = \frac{1}{h^{3N}} \int_{\Omega} d^3 q_a d^3 p_a = \frac{\Gamma_{\Omega}}{h^{3N}}$$

dove Γ_{Ω} è il volume della regione. Nel caso di particelle identiche allora dobbiamo eliminare le permutazioni, ovvero scambi di microstati con lo stesso valore, per farlo dividiamo per $N!$. Segue

$$n = \frac{\Gamma_{\Omega}}{N! h^{3N}}$$

14.2 Il gas monoatomico e l'ensemble microcanonico

Come già detto l'ensemble microcanonico è un sistema isolato di energia E che si conserva. Dall'equiprobabilità a priori, è ovvio che la distribuzione di probabilità p_i è una distribuzione uniforme per tutti i possibili sistemi a quella data energia E e per quelli esterni.

Iniziamo contando quanti sono tutti i possibili microstati. L'energia è unicamente funzione di \vec{p} , quindi sono possibili tutte le coordinate, dunque dividiamo il volume dello spazio di fasi per il volume "elementare" di una celletta (il volume più piccolo possibile); un'ipersuperficie ad E costante ha tuttavia un volume nullo, assumiamo quindi un'incertezza ΔE sullo spazio delle fasi (che a livello macroscopico sarà poi trascurabile). Sia $N(E)$ il numero di microstati di energia E e

$$n(E) = N(E - \Delta E)$$

il numero di microstati nel volume cercato, si dimostra che

$$n(E) = \left(\frac{4\pi m e^{5/3}}{3n^2} \right) \left(\frac{V}{N} \right) \left(\frac{E}{N} \right)^{3N/2}$$

dove N è il numero di atomi e V il volume dell'ipersuperficie. Durante la dimostrazione è necessario definire la funzione Γ di Eulero

$$\Gamma(t) \equiv \int_0^\infty dx x^{t-1} e^{-x},$$

che è circa la funzione fattoriale ma continua. Infine si dimostra anche che nell'ensemble microcanonico per il gas perfetto con energia totale E i microstati sono proprio $n(E)$ ed ogni ensemble appare nell'ensemble con frequenza $1/n(E)$.

14.2.1 Distribuzione di probabilità per un sottosistema

Proviamo a calcolare come cambia la distribuzione, dato uno sottospazio dello spazio delle fasi, con una certa energia. Sia $d\Gamma$ un elemento dello spazio delle fasi, suddividiamo tale elemento in $d\gamma$ e $d\tilde{\Gamma}$ di modo che

$$d\Gamma = d\gamma d\tilde{\Gamma}$$

(se ad esempio $d\gamma$ è una singola particella $dq_1 dp_1$, allora $d\tilde{\Gamma}$ sono tutte le altre particelle $dq_2 \dots dp_N$). La probabilità di un microstato di essere in $d\Gamma$ è chiaramente proporzionale a $d\Gamma$ stessa (essendo la distribuzione uniforme), dunque

$$p d\gamma \propto d\gamma \int d\tilde{\Gamma}.$$

Se $d\gamma$ è un sottosistema accessibile, allora deve avere una certa energia data che chiamiamo ϵ (il complementare ne avrà $E - \epsilon$), possiamo riscrivere la precedente equazione come

$$p d\gamma \propto d\gamma \exp\left(-\frac{3N\epsilon}{2E}\right).$$

Normalizzando questa distribuzione, otteniamo quella che è nota come distribuzione di Boltzmann. Data l'energia di un sottosistema, la distribuzione non è più uniforme ma è esponenzialmente decrescente al crescere dell'energia del sottosistema (esponenzialmente perché per molti gradi di libertà, il volume dello spazio delle fasi decresce esponenzialmente con l'energia).

14.3 Ensemble canonico

Il conteggio dei microstati ad una data energia, ci permette di riscrivere alcune espressioni del precedente capitolo.

In assenza di interazione tra le particelle, tutte le hamiltoniane delle singole particelle sono uguali, indichiamo con H_{1P} l'hamiltoniana della singola particella, allora

$$H = \sum_a H_{1P}(\vec{q}_a, \vec{p}_a).$$

Un'altra espressione che possiamo riscrivere è quella della funzione di partizione, infatti

$$Z(\beta) = \frac{1}{N!} \left(\frac{1}{h^3} \int d^3q d^3p e^{-\beta H_{1P}(\vec{q}, \vec{p})} \right) = \frac{1}{N!} z_{1P}^N$$

dove abbiamo definito anche la funzione di partizione della singola particella. Fissando il volume della scatola che contiene il gas possiamo riscrivere Z_{1P} come

$$Z_{1P} = \frac{1}{h^3} \int d^3q d^3p e^{-\beta(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)/(2m)} = \frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2}.$$

Osserviamo come il vantaggio dell'approccio canonico è che, avendo rilassato la condizione sull'energia totale, le integrazioni di posizione e impulso possono essere effettuate indipendentemente. Aver riscritto la funzione di partizione per una particella ci permette di scrivere anche l'energia interna di una particella

$$U_{1P} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_{1P} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log(\beta^{-3/2}) = \frac{3}{2} \frac{1}{\beta}, \quad (14.1)$$

ricordando che per ottenere l'energia interna dell'intero sistema, è sufficiente moltiplicare per N.

14.3.1 Identificazione di $\beta = 1/(k_B T)$

Una delle (varie) definizioni di temperatura assoluta è

$$T = \frac{3Nk_B T}{2}$$

dove T è in kelvin e $k_B = R/N_A \simeq 1.381 \cdot 10^{23} \text{ J/}^\circ\text{K} = 8.617 \cdot 10^{-5} \text{ eV/}^\circ\text{K}$ è la costante di Boltzmann Possiamo usare questa definizione di temperatura per riscrivere la funzione di partizione usando

$$\beta = \frac{1}{k_B T}.$$

Otteniamo

$$Z_{1P} = \frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} = \frac{V}{h^3} (2\pi m k_B T)^{3/2} \equiv \frac{V}{\lambda_T^3}$$

dove

$$\lambda_T \equiv \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$$

è la lunghezza d'onda termica di De Broglie (se h che in generale è il volume della celletta, ma è stato suggerito si rivelerà essere la costante di Plank, è la costante di Plank) e rappresenta in meccanica ondulatoria la lunghezza d'onda di una particella non relativistica di massa m ed energia $k_B T$.

14.4 La distribuzione di Maxwell-Boltzmann

La non interazione delle particelle, analogamente alla non interazione di più sistemi, ha come risultato che possiamo scrivere la funzione di partizione di un sistema come prodotto delle funzioni di partizione delle singole particelle (a parte il fattore $1/N!$) e anche che la distribuzione del sistema è scrivibile come prodotto delle distribuzioni delle singole particelle. Infatti ogni singola particella è distribuita indipendentemente dalle altre e la distribuzione delle probabilità si dimostra essere

$$P d^3x d^3p = d^3x d^3p \frac{1}{V} \left(\frac{1}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m k_B T}\right).$$

Se siamo interessati alla distribuzione delle velocità

$$\tilde{P}(v_x, v_y, v_z) d^3v = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} dv_x dv_y dv_z \exp\left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T}\right),$$

se ci interessa solo la distribuzione dei moduli delle velocità invece

$$\bar{P}(v)dv = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} 4\pi v^2 dv \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right),$$

Queste due distribuzioni sono conosciute come distribuzioni di Maxwell-Boltzmann. Inoltre

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = 3 \frac{k_B T}{m},$$

da cui

$$\langle \epsilon \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T.$$

Da l'equazione quadratica della velocità si ricavano altre interessanti grandezze come la velocità più probabile v_{max} , oppure la velocità quadratica media

$$v_{RMS} \equiv \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}.$$

14.5 Calore fluttuazioni ed equivalenza tra ensemble

Calcoliamo come fluttua l'energia in un ensemble canonico, per farlo calcoliamo la varianza

$$\langle \delta E^2 \rangle = k_B T^2 C_V$$

dove C_V è la capacità termica a volume costante. Questo rappresenta un importante risultato che lega le fluttuazioni dell'energia a temperatura fissa alla variazione di energia interna sotto variazioni di temperatura e fa parte di una classe di relazioni generali che legano le fluttuazioni del sistema alla sua risposta alle variazioni dei parametri esterni. In particolare, essendo $U = 3Nk_B T/2$, allora

$$C_V = \frac{3}{2} N k_B; \quad \langle \delta E^2 \rangle = \frac{3}{2} N (k_B T)^2; \quad \frac{\sqrt{\langle \delta E^2 \rangle}}{U} = \sqrt{\frac{2}{3N}}.$$

Notiamo come le fluttuazioni dell'energia tendano a 0 come $\frac{1}{\sqrt{N}}$, quindi quando ci troviamo in presenza di molte particelle le fluttuazioni dell'energia tendono a 0 e ensemble canonico e microcanonico sono equivalenti, questo è un altro esempio di limite termodinamico. Esistono alcuni casi particolari, ad esempio questo limite non esiste se si è prossimi a transizioni di fase.

Osserviamo infine come sia necessario mandare sia $N \rightarrow \infty$ che $V \rightarrow \infty$ mantenendo la densità costante, infatti se mandassimo solo N a infinito la densità divergerebbe e ci sarebbero sicuramente interazioni tra le particelle (cade dunque l'ipotesi di gas perfetto).

Capitolo 15

La connessione con la termodinamica

In questo capitolo completeremo l'associazione tra i microstati e le varie funzioni di stato della termodinamica. Verrà definita l'entropia e i potenziali termodinamici. L'unico baco sarà la violazione del terzo principio della termodinamica nel caso in cui si mandi la celletta a 0, ulteriore prova della discretezza della natura.

15.1 Funzioni di stato e quantità termodinamiche

In termodinamica vengono associate varie quantità allo stato di equilibrio di un sistema in modo che unicamente guardando esso, sia possibile darne una misura, queste grandezze sono chiamate funzioni di stato. Le relazioni che legano le funzioni di stato sono chiamate equazioni di stato. Vogliamo vedere come varia la distribuzione di probabilità note alcune di queste grandezze, abbiamo già visto il caso del volume V , il numero di particelle N , l'energia interna U e la temperatura T . Se mettendo una copia di un sistema accanto al sistema stesso una grandezza raddoppia, allora è detta estensiva (come ad esempio N, V, U), altrimenti è detta intensiva (come T). L'ensemble microcanonico è anche detto (N, V, E) , infatti queste grandezze sono sufficienti a descriverlo; quello canonico è detto (N, V, T) .

15.1.1 Il primo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica, nel caso di gas non soggetti a campi esterni, cita

$$dU = \delta Q - \delta L = T dS - P dV$$

e descrive l'infinitesima variazione dell'energia interna nel passaggio da uno stato di equilibrio all'altro.

Questa relazione contiene molte informazioni:

- La variazione dell'energia interna è un differenziale esatto dato dalla differenza di calore assorbito e lavoro effettuato dal sistema;
- Tali quantità non sono separatamente differenziali esatti ma possono essere espresse in termini di $T dS$ dove S è l'entropia (estensiva) e $P dV$ dove P è la pressione (intensiva);
- Possiamo definire le derivate parziali

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -P;$$

- δQ e δL non sono differenziali esatti, dunque una serie di trasformazioni infinitesime in termini di esse deve tenere conto di tutto il percorso fatto sul piano (S, V) e non solo stato iniziale e finale.

Nel seguito troveremo varianti del primo principio dove sostanzialmente sarà il modo in cui sarà effettuato il lavoro a cambiare, in questo primo caso si immagina venga spostata una parete della scatola contenente il gas variando il volume.

15.2 L'entropia in meccanica statistica

L'entropia fu definita per la prima volta da Clausius nel 1856 e poi ridefinita da Boltzmann nel 1877 per la meccanica statistica. Noi daremo una definizione più generale che coinciderà con quella di Boltzmann nel caso di ensemble microcanonico. È chiaro che la definizione di entropia debba essere basata sulla molteplicità M della distribuzione sull'ensemble, infatti M misura le diverse combinazioni di moti microscopici corrispondenti alla stessa descrizione microscopica ed è dunque legato alla nostra mancanza di informazione sullo stato microscopico del sistema (dunque al disordine associato al macrostato). Inoltre ricordiamo che la distribuzione all'equilibrio coincide con la massimizzazione di M , quindi all'evolvere del sistema verso l'equilibrio corrisponde un'evoluzione della distribuzione di probabilità e una crescita di M .

La crescita monotona nel tempo dell'entropia di un sistema isolato fuori dall'equilibrio è uno dei vari modi di enunciare il secondo principio della termodinamica.

S è estensiva e fortemente legata alla distribuzione di probabilità, dunque se poniamo due sistemi a contatto la distribuzione di probabilità è il prodotto delle due, mentre l'entropia è la somma delle due; da ciò risulta ovvio che l'espressione dell'entropia ha la seguente forma:

$$S \equiv -C \sum_i p_i \log p_i$$

dove C è una costante da definire. Per definire C guardiamo la variazione di U nell'ensemble canonico. Osserviamo che $U = \sum_i p_i E_i$, dunque al variare di U otteniamo

$$dU = \sum_i E_i dp_i + \sum_i p_i dE_i.$$

Il primo termine riguarda i vari microstati accessibili (con distribuzioni diverse) ad energia costante, il secondo termine riguarda la variazione dell'energia dei microstati accessibili che hanno la stessa distribuzione di probabilità; è facile fare i seguenti collegamenti

$$dU = \delta Q - \delta L; \quad \delta Q \equiv \sum_i E_i dp_i; \quad \delta L = - \sum_i p_i dE_i.$$

Il differenziale di S è

$$dS = \frac{C}{k_B} \frac{\delta Q}{T},$$

da cui si ricava

$$S = -k_B \sum_i p_i \log p_i.$$

Notiamo come $S \geq 0$ e l'unico caso in cui $S = 0$ è quando $p_i = 1$ per un solo macrostato e $p = 0$ per tutti gli altri, ovvero l'entropia è nulla quando il macrostato contiene tutta l'informazione che è possibile contenere sul sistema considerato.

15.2.1 Entropia nell'ensemble microcanonico e canonico

Calcoliamo quanto vale l'entropia per l'ensemble canonico e microcanonico:

- Nel ensemble microcanonico la probabilità è uguale per tutti i sistemi accessibili, siano essi $W(E)$, allora $p_i = 1/W(E)$ e

$$S = -k_B \sum_{i=1}^{W(E)} \frac{1}{W(E)} \log \left(\frac{1}{W(E)} \right) = k_B \log W(E)$$

che è la celebre espressione proposta da Boltzmann;

- Nel ensemble canonico invece $U = \sum_i p_i E_i$, $p_i = \exp(-\beta E_i)/Z$ e

$$S = -k_B \sum_i p_i \log p_i = -k_B \sum_i p_i (-\beta E_i - \log Z) = \frac{U}{T} + k_B \log Z.$$

15.3 Potenziali termodinamici

Il primo principio e le sue derivate non sono di facile applicazione (in generale nella pratica non è facile trattare S). Cerchiamo quindi delle relazioni per T e V, facilmente trattabili. Per farlo facciamo una trasformata di Legendre, definendo l'energia libera di Helmholtz

$$F = U - TS \\ dF = dU - d(TS) = -SdT - PdV$$

da cui

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S; \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -P.$$

Scrivendo la forma esplicita di F per l'ensemble canonico si ottiene

$$F = -k_B T \log Z \rightarrow Z = \exp\left(-\frac{F}{k_B T}\right)$$

che ci permette di riscrivere entropia e pressione in termini di funzione di partizione

$$S = \frac{\partial}{\partial T} (k_B T \log Z) \quad ; \quad P = \frac{\partial}{\partial V} (k_B T \log Z).$$

Possiamo anche fare altre trasformate di Legendre ottenendo i seguenti potenziali termodinamici (anche F e U sono potenziali termodinamici):

- Entalpia

$$H(S, P) = U + PV; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_P = T; \quad \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_S = V;$$

- Energia libera di Gibbs

$$G(T, P) = U - TS + PV; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P = -S; \quad \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T = V.$$

Le relazioni che legano le funzioni di stato hanno il nome di relazioni di Maxwell

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \\ \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

15.3.1 L'equazione di stato dei gas perfetti

Riscrivere l'energia libera di Helmholtz in termini di funzione di partizione

$$F = -k_B T \log Z = -k_B T \log \left(\frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right)^N \right) \simeq -k_B T N \log \left(\frac{V e}{N \lambda_T^3} \right),$$

ci permette di scrivere quella che è conosciuta come equazione dei gas perfetti, o legge di Boyle

$$PV = N k_B T = n R T = \frac{2}{3} U.$$

15.3.2 Pressione, lavoro e variazioni adiabatiche

Proviamo a derivare l'espressione della pressione direttamente da quella del lavoro nel primo principio:

$$PdV = \delta L = - \sum_i p_i dE_i = - \sum_i p_i \left(\frac{\partial E_i}{\partial V} \right) dV$$

da cui

$$P = - \sum_i p_i \left(\frac{\partial E_i}{\partial V} \right).$$

Stiamo calcolando quindi quanto varia l'energia interna al variare del volume a calore scambiato nullo, quindi a entropia costante; questa trasformazione è detta trasformazione adiabatica. La derivata corrisponde variazione dell'energia meccanica del sistema sotto una lenta variazione di un parametro esterno che definisce l'hamiltoniana, questa variazione è detta variazione adiabatica

15.4 Densità e pressione in sistemi non omogenei

Vediamo come approcciarci al caso in cui un sistema non sia omogeneo, ovvero sia sottoposto alla presenza di un campo. Possiamo suddividere tale sistema in tanti piccoli sottosistemi ed immaginarci che essi siano omogenei in rapporto con le grandezze macroscopiche di interesse. Vediamo il caso in cui la temperatura sia uniforme e costante in tutto il sistema, in tal caso possiamo considerare il sistema per intero aspettandoci che i parametri intensivi (come pressione e densità) siano dipendenti dalla posizione.

Per un gas perfetto vale $PV = Nk_B T \rightarrow P = \rho k_B T$, tale espressione si può estendere anche al caso non omogeneo, dimostriamolo. Consideriamo un gas di particelle identiche di massa m non interagenti tra di loro e immerse in un potenziale esterno $U(\vec{x})$. La distribuzione di probabilità nello spazio delle fasi (per la singola particella) è

$$\frac{d^3x d^3p}{h^3 Z_{1P}} e^{-\beta(|\vec{p}|^2/2m + U(\vec{x}))},$$

possiamo integrare gli impulsi per ottenere la distribuzione sullo spazio delle coordinate. La densità di particelle è ovviamente proporzionale a tale distribuzione, quindi ottenendo la distribuzione e normalizzando ρ otteniamo

$$\rho(\vec{x}) = N \frac{e^{-\beta U(\vec{x})}}{\int d^3y e^{-\beta U(\vec{y})}}$$

Passiamo adesso al calcolo della pressione al variare delle coordinate, per farlo calcoliamo l'energia libera

$$F = -k_B T \log \left(\frac{1}{N!} Z_{1P}^N \right).$$

Questo è necessario perché per conoscere la pressione nel punto \vec{x} dovremmo sapere quanto lavoro compierebbe il gas (quindi quanto varia l'energia libera) se potesse espandersi creando una piccola ulteriore quantità di volume ΔV solo intorno al punto \vec{x} (nel libro è descritto un metodo per immaginarsi questa calcolo). La variazione dell'energia libera è

$$\Delta F = -Nk_B T \log \left(1 + \Delta V \frac{\rho(\vec{x})}{N} \right) \simeq -Nk_B T \Delta V \frac{\rho(\vec{x})}{N}$$

da cui segue

$$P(\vec{x}) = - \frac{\Delta F}{\Delta V} = \rho(\vec{x}) k_B T.$$

15.5 La formula di Sackur-Tetrode per l'entropia

Torniamo sull'entropia calcolandone esplicitamente il valore nel caso di gas perfetto monoatomico. Guarderemo prima l'ensamble canonico e poi quello microcanonico, ricordandoci che i due coincidono al limite termodinamico.

Abbiamo visto che per l'ensamble canonico

$$S = \frac{U}{T} + k_B \log Z,$$

dunque usando l'espressione per U e Z del gas perfetto ricaviamo

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{2} N k_B + k_B \log \left(\frac{1}{N!} \left(\frac{V}{\lambda_T^3} \right)^N \right) \simeq \frac{3}{2} N k_B + k_B \log \left(\left(\frac{V}{N \lambda_T^3} \right)^N \right) \\ &= \frac{5}{2} N k_B + N k_B \log \left(\frac{v}{\lambda_T^3} \right) = N k_B \left(\frac{5}{2} + \log \left(\frac{1}{\lambda_T^3} \right) \right) \end{aligned}$$

dove $v \equiv V/N$ è il volume per particella. La dipendenza dalla temperatura è ovvia ricordando che λ_T è funzione della temperatura.

Per l'ensamble microcanonico il numero di microstati totali è circa pari al numero $n(E)$ di quelli che hanno energia $\leq E$, dunque usando $E = U = 3Nk_B T/2$ per creare una corrispondenza tra i due ensamble otteniamo

$$\begin{aligned} S &= k_B \log(n(E)) = k_B \log \left(\left(\frac{4\pi m e^{5/3}}{3h^2} \right)^{3N/2} \left(\frac{V}{N} \right)^N \left(\frac{E}{N} \right)^{3N/2} \right) \\ &= N k_B \log \left(e^{5/2} \left(\frac{4\pi m}{3h^2} \right)^{3/2} v \left(\frac{3k_B T}{2} \right)^{3/2} \right) = N k_B \left(\frac{5}{2} + \log \left(\frac{v}{\lambda_T^3} \right) \right) \end{aligned}$$

che coincide con l'espressione dell'ensamble canonico. Ho lasciato i calcoli perché, più che avere importanza pratica, questa espressione ha importanza storica e concettuale, infatti si tratta della prima espressione dell'entropia che, usando conoscenze quantistiche sul volume di una celletta elementare dello spazio delle fasi, dava un'espressione per S in cui era fissata anche la costante additiva.

15.5.1 Paradosso di Gibbs e l'estensività dell'entropia

Le due precedenti formule sono consistenti con l'estensività dell'entropia, infatti N è estensivo ed è moltiplicato per grandezze intensive. Notiamo che non avremmo avuto N, e quindi l'estensività di S, se non avessimo diviso per il fattore correttivo N!; saremmo allora incappati nel paradosso di Gibbs qua illustrato.

Immaginiamo di avere due scatole di uguale volume V contenenti N particelle indistinguibili e nelle stesse condizioni di temperatura e pressione. L'entropia di tale sistema in assenza del fattore correttivo è $2Nk_B \log V$, collegando le due scatole l'entropia non deve cambiare, infatti non c'è modo di capire se una particella provenga da una o l'altra scatola; tuttavia osserviamo che l'entropia è ora $2Nk_B \log(2V)$. Abbiamo quindi un'incorruenza, cosa che non accade se usiamo il fattore correttivo. L'aumento dell'entropia è invece corretto nel caso in cui le particelle provenienti dalle due scatole siano diverse, questo aumento è chiamato entropia di mescolamento (aumento del disordine).

15.5.2 Il terzo principio e la necessità dei microstati discreti

Le due espressioni dell'entropia presentano un problema, quando $T \rightarrow 0$, allora $\lambda_T \rightarrow \infty$ a fissato v e quindi $S \rightarrow -\infty$, ma questo in contrasto con il terzo principio della termodinamica che stabilisce che quando la temperatura tende a 0, allora l'entropia tende ad una costante. Possiamo osservare che tale divergenza negativa è dovuta al fatto che non stiamo tenendo conto degli effetti di discretizzazione dello spazio delle fasi. Quando $T \rightarrow 0$, allora $E \rightarrow 0$, ma questo significa che anche il volume dei microstati accessibili sullo spazio delle fasi diventa almeno minore di uno e l'entropia diventa negativa. Se l'entropia deve tendere ad una costante quando $T \rightarrow 0$, allora le cellette discrete devono essere un limite fisico dell'informazione accessibile (principio di indeterminazione di Heisenberg), in tal modo l'informazione raggiunge il suo massimo quando sappiamo dire con certezza che il sistema è in un microstato ($p = 1$) e non gli altri ($p_i = 0$), questo corrisponde a $S=0$.

Capitolo 16

Oltre la meccanica statistica

In questo capitolo studieremo cosa comporta una reale discretizzazione delle cellette dello spazio delle fasi. Partendo dall'ipotesi di Plank che materia e radiazione si scambiano pacchetti di energia, arriveremo a scoprire l'esistenza della meccanica quantistica studiando sistemi a temperature prossime allo zero assoluto, mentre per temperature sufficientemente alte scopriremo che gli atomi sono composti da nuclei e elettroni e per temperature ancora più alte scopriremo l'esistenza delle particelle elementari.

16.1 L'oscillatore armonico classico e quantistico

L'oscillatore armonico è spesso usato come strumento didattico per alcune delle sue caratteristiche. Tra queste una è che possiamo trattare un singolo oscillatore come ne trattiamo N , un'altra è che è risolvibile esattamente sia in meccanica classica che in meccanica quantistica. Adesso lo useremo per studiare la termodinamica in presenza di cellette.

Consideriamo un oscillatore armonico con Hamiltoniana

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

e consideriamo la discretizzazione dei microstati, allora

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}; \quad p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \Rightarrow S = -k_B \sum_n p_n \log p_n \geq 0,$$

dove abbiamo numerato i microstati con numeri n crescenti a partire da 0. H è inferiormente limitata, scegliamo dunque una numerazione coerente ad n , ovvero se $n' > n$, allora $E_{n'} > E_n$. Osserviamo come il calcolo di Z presupponga la conoscenza di E_n , queste sono a loro volta dipendenti dalla forma delle cellette (che noi in generale non sappiamo). Possiamo risolvere il problema nel seguente modo: il volume dello spazio delle fasi di un oscillatore con energia E è

$$I(E) \equiv \oint_{H=E} p dq = \frac{2\pi E}{\omega},$$

possiamo quindi ricavare il numero di microstati dividendo questo volume per il volume di una celletta $I(E) = E/(\hbar\omega) \rightarrow n \simeq E_n/(\hbar\omega)$. Abbiamo quindi visto che le energie devono essere equispaziate con spaziatura $E_n \simeq \hbar\omega n$, per trovare i valore accessibili dell'energia cioè sufficiente partire dallo stato più basso E_n e sommare il numero di spaziature:

$$E_n = E_0 + n\hbar\omega$$

. Lo stato di energia più basso possibile si chiama microstato fondamentale e corrisponde ovviamente a $n = 0$, questo non è fissato ma è irrilevante per le proprietà termodinamiche del sistema.

Il metodo che abbiamo seguito per intuire la forma dei livelli energetici è molto simile ai primi metodi di risoluzione dei problemi quantistici, in particolare quello di Bohr-Sommerfeld. Con la meccanica quantistica saremo anche in grado di fissare lo stato fondamentale (che sarà $\hbar\omega/2$).

Avendo fissato i vari E_n possiamo fissare anche

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_0} e^{-\beta n \hbar \omega} = \frac{e^{-\beta E_0}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}; \\ U &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = E_0 + \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1}; C = \frac{\partial}{\partial T} U = k_B (\beta \hbar \omega)^2 \frac{e^{\beta \hbar \omega}}{(e^{\beta \hbar \omega} - 1)^2}; \\ S &= \frac{U - F}{T} = \frac{U + k_B T \log Z}{T} = k_B \left(\frac{\beta \hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} - \log(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) \right). \end{aligned}$$

L'andamento dell'oscillatore armonico quantistico è diverso da quello classico e caratterizzato dalla quantità adimensionale $x = \beta \hbar \omega$ che è il rapporto della spaziatura fra i livelli energetici con la scala tipica delle energie termiche $k_B T$ che il sistema scambia con l'ambiente esterno. Possiamo distinguere il limite ad alta temperatura ($x \ll 1$)

$$\begin{aligned} U &= E_0 + \frac{1}{\beta} \frac{1}{e^x - 1} = E_0 + \frac{1}{\beta} \frac{x}{1 + x + O(x^2) - 1} \simeq \frac{1}{\beta} = k_B T; \\ C &\simeq k_B; \\ S &= k_B \left(\frac{x}{e^x - 1} - \log(1 - e^{-x}) \right) \simeq k_B (1 - \log(x)) = k_B (1 - \log(\hbar \omega \beta)), \end{aligned}$$

dove ci aspettiamo di ritrovare il risultato classico, e il limite a bassa temperatura ($x \gg 1 \rightarrow \hbar \omega \gg k_B T$)

$$\begin{aligned} U &= E_0 + \frac{1}{\beta} \frac{x}{e^x - 1} \simeq E_0 + \hbar \omega e^{-\beta \hbar \omega} \\ C &\simeq k_B (\beta \hbar \omega)^2 e^{-\beta \hbar \omega} \\ S &= k_B \left(\frac{x}{e^x - 1} - \log(1 - e^{-x}) \right) \simeq k_B (x e^{-x} + e^{-x}). \end{aligned}$$

16.2 Il calore specifico del gas perfetto biatomico

Continuiamo con un secondo esempio delle conseguenze della discretizzazione delle cellette.

Consideriamo un gas biatomico, abbiamo 7 gradi di libertà quadratici: 3 per le traslazioni del centro di massa, 2 per le rotazioni e 2 per le vibrazioni attorno alla loro distanza di equilibrio (capiremo meglio dopo cosa significa). Dal punto di vista classico, per l'equipartizione dell'energia, ci aspettiamo un gas con energia media per molecola pari a $7k_B T/2$ e calore specifico per molecola pari a $7k_B/2$ per mole.

Tralasciamo per ora i due gradi di libertà della vibrazione. Abbiamo 5 gradi di libertà, spostiamoci nel sistema di riferimento del CM con una distanza rigida tra le due molecole pari a $|\vec{x}| = d$ (particella fittizia fissa di massa μ). Questo è il tipico problema dei due corpi: i sistemi sono indipendenti (particella al centro di massa e particella fittizia fissata a distanza d) abbiamo una capacità termica pari a $3k_B/2$ per il primo (traslazioni) e k_B per il secondo rotazioni.

Stimiamo in questo caso gli effetti della discretizzazione. Partiamo dalla particella fittizia, sia ϕ la coordinata angolare (di dominio $[0, 2\pi)$) e p_ϕ il momento coniugato associato (di dominio $(-\infty, \infty)$). Abbiamo quindi

$$\mathcal{I}(p_\phi) = 2\pi |p_\phi|; \quad E_{p_\phi} = \frac{p_\phi^2}{2\mu d^2},$$

essendo il momento sia positivo che negativo, associamo n compreso tra $(-\infty, \infty)$ e calcoliamo la spaziatura tra E_n e E_{n+1}

$$2\pi(p_{\phi, n+1} - p_{\phi, n}) = h \Rightarrow p_{\phi, n+1} - p_{\phi, n} = \hbar \Rightarrow p_{\phi, n} = n\hbar,$$

dunque questa volta sono i momenti ad essere equispaziati, mentre le energie

$$E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2\mu d^2}$$

quindi la scala di energia per saltare da un microstato all'altro è $\hbar^2/(2\mu d^2)$.

Per quanto riguarda la particella del centro di massa supponiamo che la scatola (unidimensionale) L , quindi lo spazio delle fasi ha dominio $[0, L] \times [-\infty, \infty]$. possiamo quindi ritornare a considerare n unicamente positivi (la particella rimbalza avanti e indietro mentre prima andava in cerchio). Supponiamo di avere impulso p , allora il volume dello spazio delle fasi è $2\pi L$ per cui

$$2L(p_{n+1} - p_n) = h \Rightarrow p_{n+1} - p_n = \frac{h}{2L} \Rightarrow p_n = n \frac{h}{2L} = \frac{n\pi\hbar}{L},$$

mentre le energie sono

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ML^2},$$

quindi l'energia per saltare da un microstato all'altro è $\hbar\pi^2/(2ML^2)$.

Torniamo ora alle vibrazioni che abbiamo ignorato. Dire che la distanza tra due atomi è fissata è una forzatura, noi sappiamo che esistono delle forze che fanno sì che la distanza tra le particelle sia un moto armonico. Fortunatamente la discretizzazione dei livelli di energia ci viene in aiuto, infatti gli atomi non si accorgeranno della possibilità di vibrare fin quando essi saranno al loro stato fondamentale, dunque fin quando $k_B T$ non è dell'ordine di $\hbar\omega$ dove ω è la frequenza di vibrazione associata al minimo del potenziale.