

# Fisica 2

## Elettromagnetismo

Pietro Faraggiana

2021/2022

# Indice

<b>1</b>	<b>Elettrostatica nel vuoto</b>	<b>5</b>
1.1	Legge di Coulomb . . . . .	5
1.2	Campo elettrico . . . . .	6
1.2.1	Campo elettrostatico generato da sistemi di cariche con distribuzione fissa nota . . . . .	6
1.3	Teorema di Gauss . . . . .	6
1.3.1	Linee di flusso . . . . .	7
1.3.2	Divergenza del campo elettrico . . . . .	7
1.3.3	Rotore del campo elettrico . . . . .	8
1.4	Potenziale elettrico . . . . .	9
1.4.1	Equazione di Poisson ed equazione di Laplace . . . . .	9
1.4.2	Potenziale di una distribuzione di carica localizzata . . . . .	10
1.4.3	Condizioni di bordo . . . . .	10
1.5	Lavoro ed energia nell'elettrostatica . . . . .	11
1.6	Conduttori . . . . .	12
1.6.1	Proprietà fondamentali . . . . .	12
1.6.2	Cariche indotte . . . . .	13
1.6.3	Carica sulla superficie . . . . .	13
1.6.4	Condensatori . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Potenziale</b>	<b>15</b>
2.1	Equazioni di Laplace . . . . .	15
2.1.1	Unicità del potenziale . . . . .	16
2.2	Metodo delle immagini . . . . .	16
2.3	Separazione delle variabili . . . . .	17
2.4	Espansione ai multipoli . . . . .	17
2.4.1	Il monopolio e il dipolo . . . . .	18
2.4.2	Campo elettrico di un dipolo . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Campo elettrico nella materia</b>	<b>20</b>
3.1	Polarizzazione . . . . .	20
3.1.1	Dielettrici . . . . .	20
3.1.2	Dipoli indotti . . . . .	20
3.1.3	Allineamento di molecole polari . . . . .	21
3.1.4	Polarizzazione . . . . .	21
3.2	Il campo degli oggetti polarizzati . . . . .	21
3.3	Induzione elettrica (electric displacement) . . . . .	22
3.3.1	Condizioni di bordo . . . . .	23

3.4	Dielettrici lineari . . . . .	23
3.4.1	Suscettività, permittività e costante dielettrica . . . . .	23
3.4.2	Condizioni di bordo . . . . .	23
3.4.3	Energia nei sistemi dielettrici . . . . .	24
3.4.4	Forze sui dielettrici . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Magnetostatica</b>	<b>25</b>
4.1	Forza di Lorentz . . . . .	25
4.1.1	Forze magnetiche . . . . .	25
4.1.2	Correnti . . . . .	26
4.2	Legge di Biot-Savart . . . . .	26
4.2.1	Correnti costanti . . . . .	26
4.2.2	Il campo elettrico di una corrente costante . . . . .	27
4.3	Rotore e divergenza di $B$ . . . . .	27
4.3.1	Correnti su linee rette . . . . .	27
4.3.2	Divergenza e rotore di $B$ . . . . .	27
4.3.3	Legge di Ampere . . . . .	28
4.3.4	Equazioni di Maxwell . . . . .	28
4.4	Vettore potenziale magnetico . . . . .	29
4.4.1	Vettore potenziale . . . . .	29
4.4.2	Condizioni di bordo . . . . .	29
4.4.3	Espansione ai multipoli del vettore potenziale . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Campi magnetici nella materia</b>	<b>31</b>
5.1	Magnetizzazione . . . . .	31
5.1.1	Diamagnetici, paramagnetici e ferromagnetici . . . . .	31
5.1.2	Momento e forza su un dipolo . . . . .	31
5.1.3	Effetto del campo magnetico sulle orbite degli atomi . . . . .	32
5.1.4	Magnetizzazione . . . . .	33
5.2	Il campo di un oggetto magnetizzato . . . . .	33
5.3	Il campo ausiliario $H$ . . . . .	34
5.3.1	La legge di Ampere per i materiali magnetizzati . . . . .	34
5.3.2	Un false friend . . . . .	34
5.3.3	Condizioni di bordo . . . . .	34
5.4	materia lineare e non lineare . . . . .	35
5.4.1	Ferromagnetismo . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Elettrodinamica</b>	<b>36</b>
6.1	Forza elettromotrice . . . . .	36
6.1.1	La legge di Ohm . . . . .	36
6.1.2	Forza elettromotrice . . . . .	37
6.1.3	FEM indotta . . . . .	37
6.2	Induzione elettromagnetica . . . . .	38
6.2.1	Campo elettrico indotto . . . . .	39
6.2.2	Induttanza . . . . .	40
6.2.3	Energia nei campi magnetici . . . . .	40
6.3	Equazioni di Maxwell . . . . .	41
6.3.1	L'elettrodinamica prima di Maxwell . . . . .	41
6.3.2	Come Maxwell aggiustò la legge di Ampere . . . . .	41
6.3.3	Equazioni di Maxwell . . . . .	42

6.3.4	Cariche magnetiche . . . . .	42
6.3.5	Equazioni di Maxwell nella materia . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Leggi di conservazione</b>	<b>43</b>
7.1	Carica ed energia . . . . .	43
7.1.1	L'equazione di continuità . . . . .	43
7.1.2	Teorema di Poynting . . . . .	43
7.2	Momento . . . . .	44
7.2.1	Terza legge di Newton nell'elettromagnetismo . . . . .	44
7.2.2	Tensore dello stress di Maxwell . . . . .	44
7.2.3	Conservazione della quantità di moto (momento) . . . . .	45
7.2.4	Momento angolare . . . . .	45
7.3	Le forze magnetiche non fanno lavoro . . . . .	45
<b>8</b>	<b>Onde elettromagnetiche</b>	<b>46</b>
8.1	L'equazione d'onda . . . . .	46
8.1.1	Onde sinusoidali . . . . .	46
8.1.2	Condizioni di bordo: trasmissione e riflesso . . . . .	47
8.1.3	Polarizzazione . . . . .	48
8.2	Onde elettromagnetiche nel vuoto . . . . .	48
8.2.1	Equazione d'onda di E e B . . . . .	48
8.2.2	Onde piane monocromatiche . . . . .	48
8.2.3	Energia e momento delle onde elettromagnetiche . . . . .	49
8.3	Onde elettromagnetiche nella materia . . . . .	50
8.3.1	Propagazione nei mezzi lineari . . . . .	50
8.3.2	Riflesso e trasmissione ad incidenza normale . . . . .	51
8.3.3	Riflessione e trasmissione ad incidenza obliqua . . . . .	51
8.4	Assorbimento e dispersione . . . . .	52
8.4.1	Onde elettromagnetiche e dispersione . . . . .	52
8.4.2	Riflessione su una superficie conduttrice . . . . .	54
8.4.3	Dipendenza della permittività dalla frequenza . . . . .	54
8.5	Onde guidate . . . . .	55
8.5.1	Guide d'onda . . . . .	55
<b>9</b>	<b>Potenziali e campi</b>	<b>57</b>
9.1	Formulazione del potenziale . . . . .	57
9.1.1	Potenziale scalare e vettoriale . . . . .	57
9.1.2	Trasformazione di Gauge . . . . .	57
9.1.3	Gauge di Coulomb e Lorenz . . . . .	58
9.1.4	Forza di Lorentz in forma potenziale . . . . .	59
9.2	Distribuzioni continue . . . . .	59
9.2.1	Potenziali ritardati . . . . .	59
9.2.2	Equazioni di Jefimenko . . . . .	59
9.3	Cariche puntiformi . . . . .	60
9.3.1	I potenziali di Liénard-Wiechert . . . . .	60
9.3.2	Campi di una carica puntiforme in movimento . . . . .	60

<b>10 Radiazione</b>	<b>61</b>
10.1 Radiazione del dipolo . . . . .	61
10.1.1 Cosa è una radiazione? . . . . .	61
10.1.2 Radiazione del dipolo elettrico . . . . .	61
10.1.3 Radiazione del dipolo magnetico . . . . .	62
10.1.4 Radiazione da una sorgente arbitraria . . . . .	63
10.2 Cariche puntiformi . . . . .	63
10.2.1 Potenza radiata da una carica puntiforme . . . . .	63
10.2.2 Reazione alla radiazione . . . . .	64
10.2.3 Motivo della reazione alla radiazione . . . . .	65
<b>11 Elettrodinamica relativistica</b>	<b>66</b>
11.1 Elettromagnetismo come un fenomeno relativistico . . . . .	66
11.2 Come trasformano i campi . . . . .	67
11.3 Il tensore dei campi . . . . .	67
11.4 Elettrodinamica nella notazione tensoriale . . . . .	67
11.5 Potenziali relativistici . . . . .	68

# Capitolo 1

## Elettrostatica nel vuoto

### 1.1 Legge di Coulomb

Avvicinando due corpi carichi di elettricità si hanno due reazioni, o questi si respingono oppure si attraggono. Per definizione è stato detto che se queste cariche hanno lo stesso segno allora si respingono mentre se hanno segno opposto si attraggono, abbiamo poi (una volta trovata la "fonte" dei fenomeni elettrici) assegnato alla carica elettrica degli elettroni il segno "-" mentre a quella dei protoni il segno "+"<sup>1</sup>. Alcuni fenomeni ed esperimenti di grande importanza storica e concettuale sono: *l'elettrizzazione per contatto, l'induzione elettrostatica e l'elettroscopio a foglie*. Questi esperimenti ci hanno permesso di costruire le definizioni alla base dell'elettromagnetismo (da esse sappiamo che elettrone e protone sono le cariche minime e quindi l'elettricità è quantizzata<sup>2</sup> e che in un sistema isolato la somma algebrica di queste cariche si conserva). Infine mediante un pendolo a torsione simile a quello di Cavendish (utilizzato per la forza di gravità) Coulomb ha costruito empiricamente l'equazione alla base delle forze elettriche che è, guarda caso, formalmente uguale a quella della gravità

$$F_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21} \quad (1.1)$$

Dove  $\epsilon_0$  è la costante dielettrica nel vuoto e vale

$$\epsilon_0 = 8.845 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

C è il Coulomb, definito come quella carica che attraversa in un secondo un conduttore percorso dalla corrente di un Ampere. Ovviamente per la prima legge di Newton data  $F_{21}$  esiste anche  $F_{12}$  uguale ed opposta.

<sup>1</sup>Esperimento di Rutherford: Per capire la composizione di un atomo, Rutherford lanciò delle particelle alpha (particelle positive e pesanti) contro una foglia d'oro. Egli osservò che le particelle venivano respinte in tutte le direzioni, questo non era possibile con il modello atomico di Thomson ma solo con un modello che presentava un nucleo positivo (contenente tutta la massa dell'atomo) circondato da cariche negative.

<sup>2</sup>Esperimento di Millikan: Millikan misurò la carica dell'elettrone spruzzando delle gocce d'olio in un campo elettrico uniforme. Quando  $ma = -F_{viscosa} - F_{peso} - F_{Archimede}$ , allora la particella si muoveva di moto uniforme. Se le particelle venivano ionizzate la velocità cambiava di un valore discreto, era quindi evidente la misura della carica dell'elettrone e il fatto che essa fosse quantizzata.

## 1.2 Campo elettrico

Poniamo una carica  $Q$  puntiforme all'origine di un sistema di riferimento inerziale, ponendo un'altra carica qualsiasi in una qualsiasi posizione dello spazio si eserciterà una forza  $F$  tra le due particelle. Definiamo allora il campo elettrico di una carica come la forza che questa esercita in ogni luogo dello spazio dove è presente una carica  $q$ . Il campo è proporzionale alla carica e vale

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q},$$

dove  $\vec{r}$  è la distanza della carica test  $q$  da  $Q$  è la sorgente del campo (viene chiamato  $E_0$  nel vuoto). Qualora  $Q$  fosse un corpo esteso,  $E$  non è più proporzionale a  $F$  poiché la seconda carica  $q$  (necessaria per definire il campo) può creare spostamenti di cariche interni al corpo e variando la posizione ne varia il campo. Si definisce allora  $\vec{E}$  in modo formale matematico (ma non fisico perché la carica è quantizzata)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (1.2)$$

Attenzione quando si hanno più cariche ad usare seno e coseno, il campo è comunque un vettore.

### 1.2.1 Campo elettrostatico generato da sistemi di cariche con distribuzione fissa nota

Si osserva sperimentalmente che il campo elettrico è un campo vettoriale e quindi la somma di due o più campi su una particella è uguale alla somma vettoriale. Nella pratica raramente troveremo cariche puntiformi isolate, conviene quindi parlare di distribuzione continua di carica, definita tramite la densità spaziale di carica  $\rho$

$$dq = \rho(x, y, z) d\tau \quad (1.3)$$

dove  $d\tau = dx dy dz$ ;  $dq$  è la carica contenuta in tale elemento di volume e  $\rho$  è una funzione altamente variabile a causa dell'alta densità di elettroni e protoni negli atomi e la presenza nulla negli spazi intermolecolari (questo aspetto "granulare" si perde nel calcolo poiché conta la media). Possiamo quindi riscrivere la formula del campo come

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{r} d\tau'$$

## 1.3 Teorema di Gauss

Il teorema di Gauss è utilizzato per qualunque campo vettoriale (additivo) che, nel caso di sorgenti puntiformi, abbia modulo proporzionale all'inverso della distanza e sia diretto come congiungente alla sorgente. Esso è utilizzato per capire il comportamento di cariche non fissate e libere di muoversi (quindi conduttori perfetti). Sia dato un campo vettoriale  $\vec{A}(x, y, z)$  che attraversa

una superficie  $S$  assegniamoli un versore normale  $\hat{n}$  (se la superficie è chiusa il verso positivo sarà uscente da  $S$ ), allora il flusso elementare del vettore  $\vec{A}$  attraverso  $d\vec{S}$  è

$$d\Phi(\vec{A}) = \vec{A} \cdot d\vec{S} = \vec{A} \cdot \hat{n} dS = A dS \cos \theta$$

Il flusso in termini di fluidi è il volume di fluido che passa attraverso una superficie  $S$  in un'unità di tempo. Il teorema di Gauss per il campo elettrostatico mostra che il flusso di  $E_0$  vale

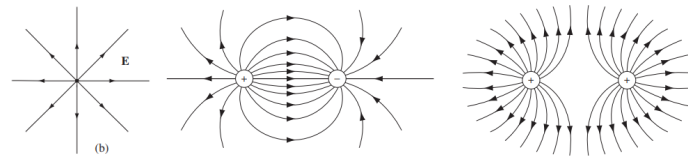
$$\Phi_S(\vec{E}_0) = \int_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{TOT}^{int}}{\epsilon_0} \quad (1.4)$$

Le cariche esterne non contribuiscono al flusso. Qualora anziché cariche puntiformi abbiamo una distribuzione di carica continua otteniamo

$$\Phi_S(\vec{E}_0) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(x, y, z) d\tau$$

### 1.3.1 Linee di flusso

Le linee di flusso sono una rappresentazione grafica del flusso del campo elettrico (e come vedremo anche magnetico). La loro direzione corrisponde alla direzione del flusso del campo elettrico (carica positiva: flusso uscente; carica negativa: flusso entrante) mentre la loro intensità è dettata dalla densità di linee in un'area (basta che siano proporzionali: se la carica  $q$  ha 5 linee che escono da essa,  $2q$  ne deve avere 10). Ecco alcuni esempi



### 1.3.2 Divergenza del campo elettrico

La divergenza di un campo vettoriale è definita come

$$div \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (1.5)$$

Possiamo quindi riscrivere il flusso come

$$\Phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V div \vec{E} \cdot d\tau$$

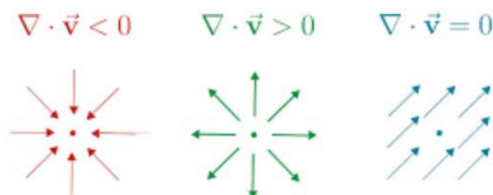
Per Gauss-Green l'integrale passa da superficiale a volumetrico, ma essendo i due integrali uguali possiamo eliminarli.

Apriamo una parentesi matematica. La divergenza è un operatore differenziale può essere scritta come

$$div \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$



La divergenza di un campo vettoriale (ad esempio la velocità di un fluido) è un campo scalare che misura la tendenza del fluido a convergere o divergere da un punto dello spazio.



Un campo vettoriale che ha divergenza nulla in ogni punto si dice SOLENOIDALE o incomprimibile (il flusso netto uscente da una qualunque superficie chiusa è zero).

Ritornando a noi, essendo

$$\int_{\tau} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_0 \cdot d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\tau} \rho(x, y, z) d\tau \rightarrow \nabla \cdot \vec{E}_0 = \frac{1}{\epsilon} \rho(x, y, z) \quad (1.6)$$

che è **LA PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL**, un equazione locale, ovvero che lega grandezze fisiche diverse calcolate nella stessa posizione. La vera forma è quella scritta nella sezione precedente mentre questa (che ha le stesse informazioni) è scritta in forma differenziale.

### Note

Ricorda che spesso si usano le coordinate polari (le quali hanno  $d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ , e l'operatore del  $\nabla$  è diverso dalla sua forma cartesiana).

In generale il flusso funziona solo se sono presenti simmetrie, qualora la densità di carica o la superficie non siano simmetriche il teorema diventa praticamente inutile (ma pur sempre vero).

Nell'equazione del flusso il campo elettrico di una sfera esce dall'integrale, mentre se prendiamo una "pillbox" per calcolare il flusso di un piano questo va moltiplicato per 2 per farlo uscire dall'integrale; inoltre il campo elettrico di un piano infinito non decade (possiamo vederlo come una somma di più e più cariche che all'allontanarci dal piano entrano nel nostro "piano visivo") mentre una retta decade come  $1/r$ .

### 1.3.3 Rotore del campo elettrico

Calcoliamo utilizzando per  $dl$  le coordinate sferiche (il campo ha come versore  $\hat{r}$ , quindi usa già le sferiche)

$$\int_a^b E \cdot dl$$

osserviamo che se  $a = b$  il risultato è 0 e che quindi per il teorema di Stokes

$$\nabla \times E = 0 \quad (1.7)$$

avere il rotore pari a 0 fa di un campo, un campo conservativo, di conseguenza è possibile esprimere il campo come gradiente di uno scalare, la funzione potenziale. Inoltre, come ovvio che sia, tutte le funzioni con rotore diverso da 0 non possono essere una forma di un campo elettrico (ad esempio  $y\hat{x}$ ).

## 1.4 Potenziale elettrico

Una qualsiasi vettore il cui rotore è 0, è il gradiente di una scalare (funzione scalare), quindi esiste una funzione

$$V(r) = - \int_O^r E \cdot dl. \quad (1.8)$$

Segue

$$V(b) - V(a) = \int_a^b E \cdot dl,$$

per il teorema fondamentale per i gradienti

$$V(b) - V(a) = \int_a^b E \cdot dl = \int_a^b (\nabla V) \cdot dl,$$

quindi

$$E = -\nabla V. \quad (1.9)$$

L'unità di misura del potenziale è

$$V = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = \text{Volt}$$

e quindi l'unità di misura del campo elettrico diventa

$$\frac{\text{volt}}{\text{metro}}.$$

Il potenziale, come la forza ed il campo elettrico, obbedisce al principio di sovrapposizione. Come è ovvio che sia, la costante  $k$  che esce dall'integrale non influisce poiché sparisce quando bisogna fare la differenza tra due punti oppure quando bisogna derivare per trovare il gradiente; ad ogni modo per riferimento è stato fissato lo 0 all'infinito ( $O$  all'integrale vale  $\infty$ ). L'unico problema che si riscontra è quando un oggetto va all'infinito, in questi casi lo 0 va fissato ad un punto arbitrario diverso dall'infinito altrimenti l'integrale divergerà. Il segno meno è una convenzione per far sì che la carica positiva abbia un potenziale positivo, possiamo vedere il potenziale positivo come una collina e quello negativo come una valle con il campo elettrico che punta verso valle.

### 1.4.1 Equazione di Poisson ed equazione di Laplace

Abbiamo visto che  $E = -\nabla V$ , ripetiamo allora i passaggi fatti per il campo elettrico e vediamo il rotore e la divergenza di  $-\nabla V$

$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V \rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (1.10)$$

Questa è l'equazione di Poisson<sup>3</sup> e nelle regioni prive di carica si semplifica (e cambia anche nome in equazione di Laplace<sup>4</sup>)

$$\nabla^2 V = 0. \quad (1.11)$$

Per quanto riguarda il rotore, la matematica ci impone che il rotore di un gradiente valga sempre 0, quindi tutto torna.

### 1.4.2 Potenziale di una distribuzione di carica localizzata

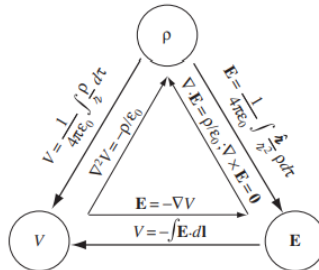
V è stato costruito utilizzando E ma generalmente noi abbiamo V (più facile da trovare) e vogliamo trovare E conoscendo la posizione della carica. L'equazione di Poisson mette in relazione  $\rho$  e V ma è utilizzabile in un verso solo (quello che serve meno), l'operazione inversa è

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r')}{r} d\tau' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (1.12)$$

Questa è la formula di V se conosciamo la posizione delle cariche<sup>5</sup>, dove l'ultima eguaglianza vale solo se abbiamo solo una carica.

### 1.4.3 Condizioni di bordo

Possiamo schematizzare tutto quello fatto fin ora così



Quando studiamo il campo elettrico al variare della distanza dalla carica notiamo che incontrando la carica troviamo sempre un punto di discontinuità. Prendiamo una superficie, è noto che il campo elettrico di una superficie è

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0}$$

<sup>3</sup>La forma generalizzata dell'equazione di Poisson per le particelle massive è

$$\nabla^2 \varphi - \lambda^2 \varphi = 0 \Rightarrow \varphi(r) = \frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

ed è nota come potenziale di Yukawa.

<sup>4</sup>Queste sono equazioni alle derivate parziali e il simbolo  $\nabla^2$  è noto come Laplaciano.

<sup>5</sup>Nota matematica: quando bisogna calcolare la distanza tra un punto fissato P a una distanza z dal centro della sfera e un punto lungo la superficie della sfera stessa, possiamo utilizzare il teorema di Carnot:

$$r^2 = R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta$$

(teorema di Gauss), passando quindi attraverso la superficie passiamo da  $\frac{\rho}{2\epsilon_0}$  a  $-\frac{\rho}{2\epsilon_0}$  incontrando a  $r = 0$ ,  $E = 0$  di conseguenza abbiamo un punto di discontinuità dove la componente verticale del campo elettrico fa un balzo di

$$E_{above}^\perp - E_{below}^\perp = \frac{\rho}{\epsilon_0} \hat{n}, \quad (1.13)$$

invece il potenziale rimane costante (ma non il suo gradiente che è uguale al campo).

## 1.5 Lavoro ed energia nell'elettrostatica

Supponi di voler muovere una carica dal punto  $a$  al punto  $b$ , qual'è il minimo lavoro necessario? (minimo affinché  $v \rightarrow 0$ , altrimenti ogni lavoro in più viene "sprecato" in energia cinetica). Da prassi

$$W = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -Q \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q[V(b) - V(a)], \quad (1.14)$$

da cui  $V(b) - V(a) = W/Q$  ovvero la differenza di potenziale è uguale al lavoro per unità di carica. Se noi volessimo portare una carica da un punto lontanissimo ad un punto vicino alla carica l'equazione diventerebbe banalmente

$$W = Q[V(r) - V(\infty)] = QV(r),$$

in questo caso il potenziale elettrico è l'energia potenziale (non lo è generalmente perché il gradiente dell'energia potenziale è la forza mentre noi siamo partiti da  $E$  che è il gradiente del potenziale). Se volessimo ora vedere il lavoro necessario per raggruppare diversi punti potremmo seguire la seguente costruzione: Il primo punto non costa lavoro (non essendoci cariche e quindi campi contro cui combattere), per il secondo punto utilizziamo la precedente equazione, per il terzo usiamo il principio di sovrapposizione per ottenere  $W_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_3 \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right)$ . Otteniamo infine

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j>i}^n \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n q_i V(r_i),$$

ciò si espande naturalmente al campo continuo dove

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau, \quad (1.15)$$

che dopo varie rimodellazioni può essere scritto come

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau, \quad (1.16)$$

dove l'integrale è su  $R^3$ . Quest'ultima equazione differisce tuttavia da  $W = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n q_i V(r_i)$  poiché se guardiamo l'energia di una singola particella questa è data come infinita (falla della teoria dell'elettromagnetismo). Questa inconsistenza nasce dall'approssimazione a integrare su tutto lo spazio, infatti

$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^n q_i V(r_i)$  (equazione da cui siamo partiti) dà l'energia di tutte le particelle meno quella considerata. La seconda formula da noi usata è in realtà più completa, questo perché considera anche l'energia necessaria per creare le cariche; di conseguenza quando in un esercizio chiedono l'energia del sistema si usi la somma delle varie energie/2, dove l'energia di una carica o una distribuzione è il prodotto della carica totale per il potenziale in cui è immersa (per i conduttori vediamo con il metodo delle immagini).

L'energia può essere pensata come immagazzinata nel campo oppure nella carica, l'elettrostatica non obbliga né uno né l'altro ma invece in relatività generale e teoria delle radiazioni l'energia è immagazzinata nel campo con energia

$$\frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \text{energia per unità di volume.}$$

L'energia non risponde al principio di sovrapposizione ma è quadratica

$$W_{\text{tot}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int (E_1^2 + E_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2) d\tau.$$

## 1.6 Conduttori

In un isolante le cariche sono generalmente legate ai propri atomi e non possono muoversi, nei conduttori invece una o più cariche per atomo sono libere di muoversi.

### 1.6.1 Proprietà fondamentali

- $E=0$  all'interno di un conduttore; appena subiscono un campo elettrico gli elettroni vanno verso il bordo (e di conseguenza si creano delle lacune che funzionano da cariche positive) e generano un campo opposto che fa sì che si annulli il campo esterno all'interno del conduttore.
- Un conduttore è quindi anche equipotenziale.
- $\rho = 0$  dentro ad un conduttore (sono presenti cariche ma queste valgono in media 0 all'interno di una qualsiasi zona del conduttore).
- Le cariche risiedono tutte ai bordi del conduttore.
- Appena fuori dal conduttore  $E$  è perpendicolare al conduttore (altrimenti le cariche interne continuerebbero a muoversi).

Tutto questo segue il principio di minima azione ovvero serve a minimizzare l'energia potenziale cercando una posizione il più stabile possibile, si dimostra matematicamente che una qualsiasi altra distribuzione (che non sia quella delle cariche ai bordi) ha un potenziale maggiore. Due applicazioni delle proprietà dei conduttori sono la gabbia di Faraday<sup>6</sup> e l'effetto delle punte<sup>7</sup>.

<sup>6</sup>Gabbia di Faraday: Un conduttore è equipotenziale e quindi al suo interno la carica è nulla, inoltre per il teorema di Gauss essendo  $q_{\text{int}} = 0$ , anche il flusso di  $E$  è zero.

<sup>7</sup>Effetto delle punte: in uno stesso conduttore  $Q_1/R_1 = Q_2/R_2$ , se  $R_1 > R_2$ , allora  $\sigma_1 = q_1/4\pi r_1^2 > \sigma_2 = q_2/4\pi r_2^2$ .

### 1.6.2 Cariche indotte

Immaginiamo di avere un corpo con carica neutra ed una carica esterna al corpo: osserveremo che i due corpi si attraggono. Questo è dato dal fatto che la carica attrae cariche del segno opposto interne al corpo e respinge quelle dello stesso segno. Se per caso tuttavia è presente un buco all'interno del corpo e dentro a questo buco è presente una carica allora il campo nel buco sarà diverso da 0. La carica non percepisce il campo esterno al corpo ma riesce invece a inviarlo fuori. Facciamo un esempio per capire meglio:

Una sfera con carica neutra presenta una cavità all'interno della quale è presente una carica  $+q$ . Sul bordo della cavità andranno a posizionarsi cariche negative ( $q_{\text{indotta}} = -q$ ) in maniera da annullare il campo all'interno della sfera, di conseguenza sarà presente una quantità  $+q$  di cariche che si andranno a posizionare sui bordi della sfera esprimendo un campo  $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$  (perché è una sfera). Come possiamo osservare il campo emesso è quello di un guscio di sfera con carica  $q$  indipendentemente dalla posizione o dalla forma della cavità.

### 1.6.3 Carica sulla superficie

Come stabilito dalle condizioni di bordo,  $\Delta E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \hat{n}$  ai bordi di una superficie, ma essendo il campo interno al conduttore uguale a 0, allora il campo subito all'esterno del conduttore deve essere

$$E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \hat{n}.$$

In presenza di un campo elettrico ogni carica di superficie subisce una forza, ma c'è un problema, qua il campo soffre un punto (o meglio una zona) di discontinuità. Il campo totale è quello creato dalla carica superficiale e tutto il resto dei campi esercitati da una qualsiasi carica

$$E = E_S + E_R.$$

Ma la carica superficiale non può esercitare forza su se stessa, di conseguenza conta solo  $E_R$  che invece non soffre di discontinuità di conseguenza applicando le condizioni di bordo

$$\mathbf{E}_{\text{above}} = \mathbf{E}_{\text{other}} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n};$$

$$\mathbf{E}_{\text{below}} = \mathbf{E}_{\text{other}} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n},$$

e quindi

$$E_R = \frac{1}{2}(E_{\text{above}} + E_{\text{below}}) = E_{\text{media}}$$

Questa argomentazione vale per tutte le superfici di carica che soffrono di discontinuità. Concludendo, la forza per unità di superficie è  $f = \sigma E$

$$f = \frac{1}{2\epsilon_0} \sigma^2 \hat{n}$$

o più facilmente, la pressione elettrostatica invece sarà

$$P = \frac{\epsilon_0}{2} E^2. \quad (1.17)$$

### 1.6.4 Condensatori

Prendiamo due conduttori, essendo i conduttori equipotenziali possiamo definire

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} E \cdot dl.$$

Noi non sappiamo come le cariche siano distribuite o la forma del campo dei due conduttori ma sappiamo che i campi sono proporzionali alla quantità di carica e quindi, lo è anche il potenziale. Definiamo allora la capacità  $C$  dei conduttori come la costante di proporzionalità del rapporto

$$C \equiv \frac{Q}{V},$$

$C$  è misurato in Farad ed è una caratteristica data dalla distribuzione di carica (e quindi anche dalla forma di un conduttore). Spesso si parla di capacità di un singolo conduttore (cosa impossibile dato che è definito usando  $V$  tra due conduttori), in tal caso si immagina come secondo conduttore una sfera di raggio infinito con centro nel primo conduttore. Il lavoro necessario per caricare completamente un condensatore è

$$W = \frac{1}{2} C V^2. \quad (1.18)$$

## Capitolo 2

# Potenziale

### 2.1 Equazioni di Laplace

Lo studio dell'elettrostatica richiede generalmente di trovare il campo elettrico. La formula di Coulomb o anche quella classica del potenziale sono spesso troppo difficili da calcolare analiticamente, motivo per cui si usa spesso l'equazione di Poisson (e di Laplace), le cui soluzioni sono dette funzioni armoniche.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (2.1)$$

#### Equazioni di Laplace in una dimensione

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

È un'equazione ordinaria differenziale di secondo ordine e la sua soluzione è

$$V(x) = mx + b.$$

Possiamo trarne due importanti caratteristiche che ci porteremo dietro in più dimensioni

- L'equazione di Lagrange ti dice di assegnare a  $V(x)$  la media dei punti a destra e sinistra (intorno)

$$V(x) = \frac{1}{2}[V(x+a) + V(x-a)];$$

- Non ci sono massimi e minimi

#### Equazione di Lagrange in 2 e 3 variabili

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Questa equazione non è più un'equazione ordinaria ma è un'equazione differenziale parziale e non esistono soluzioni generali. Come abbiamo già detto si mantengono le due caratteristiche di prima con la differenza che adesso il punto medio è del suo intorno (cerchio).

In tre dimensioni è la stessa cosa ma abbiamo come intorno una sfera.



### 2.1.1 Unicità del potenziale

L'equazione di Laplace non determina un'unica funzione ma va aiutata con delle condizioni:

- Nel vuoto: La soluzione all'equazione di Laplace è unicamente determinata se sono conosciuti i valori del potenziale ai bordi dello spazio dove cerchiamo il potenziale (nel caso sia l'equazione di Poisson deve essere anche specificata la distribuzione delle cariche). In realtà ciò viene dal fatto che, determinati i valori di  $V$  ai bordi di una qualsiasi superficie, allora esiste solo un potenziale che soddisfa questi valori.
- Nei conduttori: In un area racchiusa in un materiale conduttore, data la distribuzione di carica interna ai conduttori, il campo elettrico è unicamente determinato se è conosciuta la carica totale di ogni conduttori.

## 2.2 Metodo delle immagini

Immaginiamo di avere una carica  $q$  sopra (ad altezza  $z$ ) ad un piano infinito di materiale conduttore a terra ( $V = 0$ ). Allora quando  $Z = 0$ ,  $V = 0$  e a distanza infinita  $V \rightarrow 0$ , abbiamo quindi le condizioni di bordo ma ci è difficile calcolare il potenziale essendo che non sappiamo come le cariche indotte si distribuiscono all'interno del conduttore. Studiamo allora un caso diverso, la stessa carica sopra al piano ma una carica  $-q$  a  $-z$  dal piano. Il calcolo del potenziale è

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right]$$

Ma i valori di  $V$  ai bordi del piano positivo ( $z = 0$  e  $d \rightarrow \infty$ ) sono i soliti, e quindi anche il potenziale del primo caso sarà espresso da quella equazione. Vediamo ora di calcolare la carica indotta.

Come sappiamo ai bordi di un piano

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} \rightarrow \sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z}$$

deriviamo quindi il potenziale trovato secondo  $z$  e troviamo  $\sigma = \frac{-qd}{2\pi(x^2+y^2+d^2)^{3/2}}$  che come ci aspettavamo è negativo e massimo per  $x = 0, y = 0$ . A questo punto possiamo trovare la carica

$$Q = \int \sigma da = -q$$

In entrambi i casi (due particelle e piano particella) la forza è la stessa

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}$$

ma invece l'energia è diversa, nel primo caso

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2d}$$

mentre nel secondo

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d}$$

ciò è dato dal fatto che l'energia vale

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

raddoppiato nel primo caso perché entrambe le particelle hanno un campo uguale, ma nel secondo caso il piano ha  $E = 0$  e quindi l'energia è la metà

### Note

Il metodo delle immagini è molto potente ma difficile da usare, si può usare per tutte le distribuzioni su materiali conduttori, ad esempio: immaginiamo di avere un guscio sferico di materiale conduttore e una carica esterna a distanza  $a$ , quello che dovremo fare è trovare una carica che annulli il potenziale alla distanza a cui è presente il raggio. Questa carica è

$$q' = -\frac{R}{b}q \quad b = \frac{R^2}{a}$$

dove  $b$  è la distanza dal centro della seconda carica (sullo stesso asse di  $a$ ), se invece la superficie ha una certa  $V$  costante basta aggiungere al centro una carica che abbia quel potenziale sulla sfera.

Quando dobbiamo trovare l'energia di un conduttore bisogna ricordarci che la carica si distribuisce per annullare il suo campo e che quindi il potenziale è quello trovato con il metodo delle immagini; se abbiamo ad esempio un guscio sferico e una carica, l'energia del sistema è la carica totale del guscio per il suo potenziale/2 + la carica esterna per il potenziale in cui è inserita (la sfera).

## 2.3 Separazione delle variabili

È possibile risolvere l'equazione di Laplace in modo diretto con la separazione delle variabili, il procedimento non viene però riscritto poiché più inerente al corso di metodi matematici.

## 2.4 Espansione ai multipoli

Quando ci allontaniamo da una distribuzione di carica, il suo potenziale tenderà a 0. Ma cosa succederà se anche la carica tende già di per sé a 0? Studiamo prima il caso del dipolo, una coppia di cariche (una positiva, una negativa) a distanza  $d$ . La costruzione è facile ed il risultato finale è

$$V(r) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2} \quad (2.2)$$

dove  $r$  è la distanza dal punto di mezzo del segmento che separa le due cariche e  $\theta$  è l'angolo tra il segmento e il vettore  $r$ . Il potenziale è ovviamente minore di quello di una singola carica, positiva o negativa che sia e se volessimo

espandere il ragionamento a più cariche osserveremmo che un quadripolo è proporzionale a  $1/r^3$  e un octapolo a  $1/r^4$ . Espandiamo ora il ragionamento ad una qualsiasi distribuzione elettrica, si osserva che

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \alpha)$$

dove  $r'$  è la distanza tra l'origine e un punto della distribuzione di cariche,  $R$  è la distanza dal punto,  $r$  è la distanza dall'origine e  $P_n$  polinomio di Legendre

$$P_0(x) = 1$$

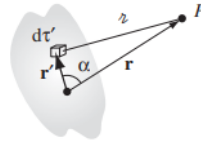
$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8.$$



Il potenziale allora vale

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta)$$

### 2.4.1 Il monopolio e il dipolo

Ovviamente i primi termini sono quelli che contano di più. Usando la precedente equazione, il monopolio è banalmente

$$V_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad (2.3)$$

con  $Q$  pari alla somma totale delle cariche indipendentemente dalla loro posizione. Il dipolo invece diventa

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau'.$$

dove l'integrale

$$\mathbf{p} \equiv \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau', \quad (2.4)$$

$\mathbf{p}$  viene chiamato momento del dipolo, così facendo il contributo del dipolo al potenziale diventa

$$V_{\text{dip}}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (2.5)$$

Il momento del dipolo è un vettore (obbedisce quindi alla sovrapposizione) determinato dalla geometria della distribuzione di carica e nel caso di un dipolo fisico vale

$$p = qd$$

Un dipolo perfetto è un dipolo il cui la distanza tende a 0 mentre un dipolo puro è un dipolo in cui  $d \rightarrow 0$  e  $q \rightarrow \infty$  mantenendo il rapporto  $qd$  costante.

L'espansione ai multipoli dipende fortemente dall'origine se spostiamo una carica dall'origine di  $a$  allora il nuovo momento diventa

$$\bar{p} = p - Qa \quad (2.6)$$

e quindi se la carica totale è 0,  $\bar{p} = p$ .

### 2.4.2 Campo elettrico di un dipolo

Il campo elettrico di un dipolo vale

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \\ E_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}; \\ E_\phi &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0; \\ \mathbf{E}_{\text{dip}}(r, \theta) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}}). \end{aligned}$$

## Capitolo 3

# Campo elettrico nella materia

### 3.1 Polarizzazione

#### 3.1.1 Dielettrici

In questo capitolo studieremo il comportamento dei campi elettrici nella materia. Questa si divide, a grandi linee, in due sottogruppi: conduttori e isolanti (o dielettrici). I primi li abbiamo già studiati, i secondi sono il contrario dei primi, ovvero tutte le cariche sono attaccate ai rispettivi atomi e molecole e tutto quello che possono fare è muoversi leggermente intorno al nucleo, ma il loro effetto cumulativo dà vita al caratteristico comportamento dei dielettrici. I due principali effetti di un dielettrico sotto campo elettrico sono: rotazione e allungamento.

#### 3.1.2 Dipoli indotti

Osserviamo il comportamento dei singoli atomi sotto campo elettrico, in questo caso il nucleo è spinto nella direzione del campo e gli elettroni in quella opposta; se il campo è sufficientemente forte allora può strappare gli elettroni all'atomo ionizzandolo e rendendolo un conduttore (gli atomi sono liberi di muoversi), altrimenti si forma un equilibrio tra campo e campo indotto, l'atomo viene detto polarizzato ed il momento del dipolo  $p$  punta nella stessa direzione di  $E$  e vale

$$p = \alpha E \quad (3.1)$$

dove  $\alpha$  è chiamata polarizzabilità elettrica. Per le molecole il discorso si fa più complicato perché dobbiamo risolvere utilizzando le componenti perpendicolari e parallele e generalmente  $p$  non è neanche nella stessa direzione di  $E$ . L'insieme di tutte e nove le costanti necessarie è chiamato tensore di polarizzazione:

$$\left. \begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z \\ p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z \\ p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z \end{aligned} \right\}.$$

### 3.1.3 Allineamento di molecole polari

Alcune molecole presentano momenti dei dipoli permanenti e sono chiamate molecole polari. Quando queste molecole vengono inserite in un campo uniforme:

- Se il campo creato dal dipolo è uniforme, allora la forza creata dalla carica positiva cancella quella creata dalla carica negativa e avremo un momento della forza

$$N = p \times E,$$

$N$  è in direzione tale da allineare  $p$  ad  $E$ , di conseguenza la molecola oscillerà con moto armonico attorno al punto di equilibrio (in assenza di forza frenanti non lo raggiungerà mai);

- Se il campo non è uniforme allora oltre al momento della forza ci sarà una forza che si dimostra valere

$$F = (p \cdot \nabla)E,$$

se il dipolo è perfetto allora il momento si approssima a quello di prima, altrimenti diventa

$$N = (p \times E) + (r \times F);$$

### 3.1.4 Polarizzazione

Parliamo adesso della polarizzazione di un intero oggetto dielettrico. Un dielettrico immerso in un campo elettrico: se composto da atomi neutrali induce tanti piccoli momenti del dipolo che puntano nella stessa direzione del campo, se composto da molecole polari ogni dipolo subirà un momento della forza tendendosi ad allineare con la direzione del campo (nella realtà tanti movimenti termici competono con questo processo e l'allineamento non si completerà mai). Il materiale diventa polarizzato e la quantità  $P$  (diversa da  $p$  minuscolo) indica i momenti del dipolo per unità di volume. Alcuni materiali hanno la capacità di "frizzarsi" nella polarizzazione e rimanere così anche una volta che il campo è rimosso.

## 3.2 Il campo degli oggetti polarizzati

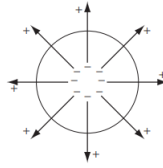
Un oggetto polarizzato crea a sua volta un campo elettrico, questo campo può essere facilmente ottenuto sommando (integrando) i momenti dei dipoli infinitesimali degli atomi/molecole. Partiamo dal calcolo del potenziale (più facile) per trovare poi il campo in un secondo momento tramite  $E = -\nabla V$ . Dopo alcune manipolazioni arriviamo all'equazione

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_b}{r} da + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b}{r} d\tau, \quad (3.2)$$

che equivale a sommare il potenziale di un oggetto con densità di volume di carica  $\rho_b = -\nabla \cdot P$  più la densità di superficie di carica  $\sigma = P \cdot \hat{n}$  (cariche di contorno).

Cerchiamo di capire **Il significato fisico delle cariche di contorno.**

Se prendiamo un numero uguale di cariche positive e negative e le mettiamo in fila, queste formeranno subito una catena di dipoli lasciando agli estremi due cariche, una positiva ed una negativa. In un dielettrico con campo uniforme (abbiamo quindi lo stesso numero di cariche) succederà la stessa cosa, prendiamo un tubo con sezione circolare, la quantità di cariche di contorno equivarrà a  $q = PA$  e  $\sigma_b = \frac{q}{A} = P$ , se il tubo non è tagliato perpendicolarmente  $\sigma_b = P \cos \theta = P \cdot \hat{n}$ . Se la polarizzazione invece non è uniforme, matematicamente si avrà divergenza positiva se abbiamo un eccesso di cariche negative (divergenza negativa se le cariche sono invece positive).



Quindi

$$\rho_b = -\nabla \cdot P.$$

Ovviamente il campo di un dielettrico è formato da moltissimi microcampi impossibili da calcolare (piccolissimi e si muovono con gli elettroni) quindi tutti i passaggi fatti fin'ora sono sulla media del campo.

### 3.3 Induzione elettrica (electric displacement)

L'effetto della polarizzazione è grossolanamente quello di produrre accumuli di carica dentro e alla superficie del dielettrico, mettiamo adesso insieme questo effetto alla presenza di altre cariche (cariche libere che possono essere conduttori, ioni o altro). Avremo quindi

$$\rho = \rho_b + \rho_f$$

( $b$  e  $f$  stanno per boundaries e free) la legge di Gauss dirà allora

$$\epsilon_0 \nabla \cdot E = \rho = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot P + \rho_f$$

(dopo spiegherò perché ho lasciato fuori  $\sigma_b$ ). Mettiamo insieme le divergenze e chiamiamo  $D = \epsilon_0 E + P$  induzione elettrica. In forma locale avremo

$$\nabla \cdot D = \rho_f, \quad (3.3)$$

in forma integrale

$$\oint D \cdot da = Q_{f_{int}}.$$

Spieghiamo adesso perché non abbiamo considerato  $\sigma_b$ : il problema è che alla superficie, la polarizzazione di  $\rho_b$  (in presenza di  $\sigma_b$ ) droppa a 0 in maniera tanto violenta che la derivata è una funzione di Dirac (e implica quindi la divergenza di  $E$ ). Considerando solo  $\rho_b$  ovunque (anche sul bordo in assenza di  $\sigma_b$ ) abbiamo in realtà la stessa quantità di cariche ma la distribuzione diminuisce in maniera più fluida.

### Un parallelo sbagliato

È bene notare che  $D$  ed  $E$  sono diversi e non c'è alcun parallelismo tra loro, non possiamo applicare la legge di Coulomb a  $D$  e non ci è sufficiente la divergenza per saperne l'equazione che descrive il campo, questo perché, differentemente da  $E$ ,  $D$  non ha rotore nullo ma bensì

$$\nabla \times D = \nabla \times P$$

Questo fa anche sì che non abbia una primitiva e  $D$  può essere trovato con Gauss solo in casi di simmetria (in questi casi il rotore è nullo).

### 3.3.1 Condizioni di bordo

In questo caso possiamo usare le seguenti condizioni di bordo

$$D_{\text{above}}^{\perp} - D_{\text{below}}^{\perp} = \sigma_f,$$

$$D_{\text{above}}^{\parallel} - D_{\text{below}}^{\parallel} = P_{\text{above}}^{\parallel} - P_{\text{below}}^{\parallel}.$$

## 3.4 Dielettrici lineari

### 3.4.1 Suscettività, permittività e costante dielettrica

Per molte sostanze la polarizzazione è lineare al campo elettrico

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad (3.4)$$

dove  $\chi_e = n_e \alpha$  è la suscettività elettrica e dipende dalla struttura microscopica del materiale. I materiali che rispondono a questa legge sono detti dielettrici lineari (lineare dielettrica).  $E$  è il campo totale (anche dell'oggetto stesso) e quindi non possiamo usare questa equazione per calcolarlo (a meno che non la vogliamo iterare infinite volte), ma possiamo usare  $D$  che nel caso dei dielettrici lineari vale

$$D = \epsilon E$$

con  $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$   $\epsilon$  è chiamata permittività mentre  $\epsilon_0$  è la permittività dello spazio libero, possiamo anche definire  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$  come permittività relativa.

### 3.4.2 Condizioni di bordo

Nei dielettrici lineari

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\nabla \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\chi_e}{\epsilon} \mathbf{D} \right) = -\left( \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \right) \rho_f$$

e quindi a meno che non ci sia carica libera nel materiale  $\rho = 0$ . Di conseguenza dentro tale dielettrico regge la legge di Laplace e possiamo usare i trucchi del capitolo precedente. Conviene però riscrivere le condizioni di bordo in funzione di  $\sigma_b$ :

$$\epsilon_{\text{above}} E_{\text{above}}^{\perp} - \epsilon_{\text{below}} E_{\text{below}}^{\perp} = \sigma_f.$$



### 3.4.3 Energia nei sistemi dielettrici

Ci vuole lavoro per riempire un condensatore, se il condensatore è pieno di dielettrico lineare allora la capacità eccede la controparte vuota di  $C = \epsilon_r C_{\text{vac}}$ . Anche la formula generale del lavoro cambia e diventa

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau,$$

che conta anche del lavoro necessario per contrastare le forze di rotazione e allungamento date dalla polarizzazione del materiale dielettrico.

### 3.4.4 Forze sui dielettrici

Come un conduttore è attratto da un campo, lo è anche un dielettrico, solo che nel secondo caso il ragionamento è più complicato. Prendiamo un condensatore, la differenza sta che mentre nel caso vuoto il campo è uniforme, nel dielettrico il campo non può cadere a 0 improvvisamente, allora si crea un campo di bordo che nella maggior parte dei casi è trascurabile ma in questo no, infatti questo campo non uniforme spinge il dielettrico verso il condensatore. Questi campi non uniformi sono difficili da calcolare e quindi per trovare la forza con cui il dielettrico viene attratto verso il condensatore bisogna utilizzare un metodo alternativo (ovvero conoscendo il lavoro di un condensatore). Infine arriviamo a

$$F = -\frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}.$$

## Capitolo 4

# Magnetostatica

### 4.1 Forza di Lorentz

Fino ad ora abbiamo studiato i casi dell'elettrostatica, ora guarderemo cosa succede quando queste particelle sono in movimento. Se io ho due fili verticali paralleli e in uno gli elettroni scorrono dal basso all'alto mentre nell'altro scorrono dall'alto al basso osserveremo che i due fili tenderanno a distanziarsi. Questo non è dato da forze elettriche, infatti se mettessi una carica nel mezzo questa non si muoverebbe; le forze hanno infatti un'altra origine, quella magnetica. I campi magnetici si originano quando delle cariche si muovono in aggiunta a quelli elettrici.

#### 4.1.1 Forze magnetiche

Empiricamente si osserva che la forza risultante da campi magnetici è

$$F_{mag} = Q(v \times B) \quad (4.1)$$

che è detta forza di Lorentz<sup>1</sup>. La direzione è data dalla regola della mano destra e la sua somma alla forza elettrica<sup>2</sup> da

$$F = Q[E + (v \times B)]$$

Le forze magnetiche non compiono lavoro. Difatti le forze magnetiche non possono cambiare la velocità di un oggetto ma soltanto la sua direzione, quando sembra evidente che le forze magnetiche compiano lavoro in realtà è sempre qualcos'altro che lo compie.

---

<sup>1</sup>L'esempio classico di moto dato dalla forza di Lorentz è quello del ciclotrone, la cui legge oraria è

$$m \frac{v^2}{r} = q(v \times B),$$

di velocità angolare  $\omega_B = qB/m$ .

<sup>2</sup>La somma di campo magnetico ed elettrico dà il famoso effetto Hall e ci ha permesso anche di capire la massa  $m_e$  dell'elettrone attraverso la spettrometria.

### 4.1.2 Correnti

La corrente in un filo è la quantità di carica che lo attraversa per unità di tempo e la sua unità di misura sono gli Ampere

$$1 A = 1 C/s$$

Se è nota la densità di carica in movimento (quelle ferme non contano) allora

$$I = \lambda v = -\frac{dq}{dt}$$

La corrente è quindi un vettore. La forza originata dalla corrente invece è

$$F_{mag} = \int (v \times B) dq = \int (v \times B) \lambda dl = \int (I \times B) dl. \quad (4.2)$$

Lo stesso ragionamento si applica anche a volumi e superfici anziché fili. Sulle superfici si usa la densità di corrente superficiale  $K$

$$K \equiv \frac{dI}{dl_{\perp}}$$

(dove la lunghezza perpendicolare la linea perpendicolare alla direzione della corrente) e sui volumi la densità di corrente di volume  $J$

$$J \equiv \frac{dI}{da_{\perp}}.$$

Essendo la cariche conservate la carica che esce da una superficie lo fa alle spese di quello che rimane dentro

$$\nabla \cdot j = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (4.3)$$

Questa è detta equazione di continuità.

## 4.2 Legge di Biot-Savart

### 4.2.1 Correnti costanti

Le cariche stazionarie producono campi elettrici che sono costanti nel tempo (da cui il termine elettrostatica), parallelamente le correnti costanti (stazionarie) producono campi magnetici costanti nel tempo (da cui magnetostatica).

Stationary charges	$\Rightarrow$	constant electric fields: electrostatics.
Steady currents	$\Rightarrow$	constant magnetic fields: magnetostatics.

di conseguenza nel regime della magnetostatica l'equazione di continuità diventa

$$\nabla \cdot J = 0. \quad (4.4)$$

### 4.2.2 Il campo elettrico di una corrente costante

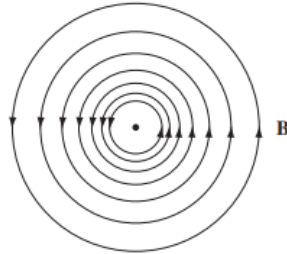
Il campo magnetico di una corrente costante è dato dalla legge di Biot-Savart che è l'analogo della legge di Coulomb per il campo elettrico

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \times \hat{r}}{r^2} dl' = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl' \times \hat{r}}{r^2}, \quad (4.5)$$

$\mu_0$  è la permeabilità nel vuoto e vale  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$  e l'unità di  $B$  sono i Tesla ( $\text{N/A} \cdot \text{m}$ ) anche se spesso si usano i Gauss ( $1 \text{ Tesla} = 10^4 \text{ Gauss}$ ). Vale il principio di sovrapposizione.

## 4.3 Rotore e divergenza di B

### 4.3.1 Correnti su linee rette



Osservando la figura è ovvio che, a differenza del campo elettrico, il rotore non possa essere 0. Infatti possiamo calcolarlo ed osservare che

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 I. \quad (4.6)$$

Come possiamo vedere, la somma del campo magnetico lungo una **QUALSIA-SI** curva chiusa attorno al cavo vale una certa quantità fissa indipendentemente da quanto la curva sia distante; questo è dato dal fatto che il campo magnetico diminuisce alla stessa velocità a cui l'area di una circonferenza aumenta. Per il principio di sovrapposizione possiamo usare la stessa formula su un numero infinito di cavi dritti e quindi su un volume (applicando il teorema di Stokes)

$$\int (\nabla \times B) \cdot da = \mu_0 \int J \cdot da \quad (4.7)$$

ed in forma differenziale

$$\nabla \times B = \mu_0 J.$$

Questo calcolo è tuttavia applicabile unicamente ai volumi che possono essere composti da linee rette.

### 4.3.2 Divergenza e rotore di B

Deriviamo adesso divergenza e rotore direttamente dalla legge di Biot-Savart. La divergenza viene

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (4.8)$$

Per il rotore otteniamo lo stesso risultato di prima dimostrando che non vale unicamente per i volumi composti da linee rette, inoltre si osserva che ai bordi del volume la corrente vale 0.

### 4.3.3 Legge di Ampere

Se la legge di Biot-Savart era l'equivalente della legge di Coulomb allora quella di Ampere è l'equivalente della legge di Gauss e banalmente recita

$$\oint B \cdot dl = \mu_0 I_{enc}, \quad (4.9)$$

le curve chiuse su cui calcolare l'integrale sono chiamate (in inglese) Amperian Loop (la forma differenziale è quella scritta nel rotore di B). Come la legge di Gauss, la legge di Ampere può essere applicata solo in alcuni casi particolari di simmetria:

- Linee rette infinite<sup>3</sup>;
- Piani infiniti<sup>4</sup>;
- Solenoidi infiniti<sup>5</sup>;
- Toroidi<sup>6</sup>.

Sia per la legge di Ampere che quella di Gauss, se al posto del vuoto abbiamo un dielettrico, basta cambiare la costante dielettrica.

### 4.3.4 Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell per l'elettricità sono

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (4.10)$$

$$\nabla \times E = 0 \quad (4.11)$$

insieme alla condizione di bordo  $E \rightarrow 0$  hanno le stesse informazioni della legge di Coulomb. Per il magnetismo sono

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (4.12)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (4.13)$$

---

3

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}$$

4

$$B = \pm(\mu_0/2)K$$

5

$$B = \mu_0 n I$$

6

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi s}$$

anche qui esiste la condizione di bordo  $B \rightarrow 0$  e insieme hanno le stesse informazioni della legge di Biot-Savart. Le 4 equazioni di Maxwell, insieme alla legge della forza

$$F = Q(E + v \times B),$$

sono il modo più elegante per descrivere l'elettromagnetismo (statico). A causa della grandezza delle due costanti ( $\epsilon_0$  e  $\mu_0$ ) le forze elettriche sono generalmente molto superiori a quelle magnetiche.

## 4.4 Vettore potenziale magnetico

### 4.4.1 Vettore potenziale

Come abbiamo ricavato

$$E = -\nabla V$$

dalla legge di Gauss, vogliamo ricavare il potenziale magnetico dalla legge di Ampere. Il rotore di  $B$  è diverso da 0, di conseguenza non ci è possibile usare la stessa forma di prima, useremo quindi

$$B = \nabla \times A. \quad (4.14)$$

Possiamo quindi aggiungere ad  $A$  il gradiente di una qualsiasi funzione poiché tanto si annulla con il rotore e di conseguenza abbiamo

$$\nabla \cdot A = 0$$

$A$  è quindi un vettore. Possiamo riscrivere la legge di Ampere come

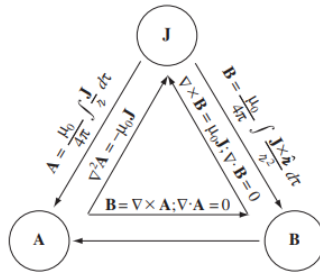
$$\nabla^2 A = -\mu_0 J, \quad (4.15)$$

da cui, assumendo che  $j$  tenda a 0 all'infinito, otteniamo

$$A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J(r')}{r} d\tau'. \quad (4.16)$$

### 4.4.2 Condizioni di bordo

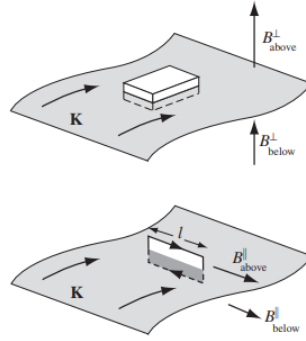
Affrontando le condizioni di bordo dell'elettrostatica avevamo disegnato un triangolo riassuntivo delle varie formule, come è ovvio che sia stiamo sempre creando analogismi tra elettrostatica e magnetostatica quindi facciamo la stessa cosa.



Anche in questo caso è presente una discontinuità ai bordi (questa volta invece che ai bordi di un conduttore, ai bordi della corrente elettrica). La differenza è che questa volta, mentre prima era la componente perpendicolare al bordo ad essere discontinua, è la componente tangenziale ad essere discontinua, le due figure possono rendere meglio il concetto.

$$B_{above}^{\perp} - B_{below}^{\perp} = 0;$$

$$B_{above}^{\parallel} - B_{below}^{\parallel} = \mu_0 K.$$



Come per l'elettrostatica, anche ora il potenziale non soffre di discontinuità (ma la derivata del potenziale sì).

#### 4.4.3 Espansione ai multipoli del vettore potenziale

Come per il campo elettrico creiamo una serie di potenze di  $1/r$  che approssimino il valore del vettore potenziale quando una corrente localizzata viene percepita da grandi distanze. La costruzione ci porta alla seguente formula

$$A(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{1}{r} dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n p_n(\cos \alpha) dl'$$

Il monopolio (il primo termine dell'espansione) è sempre 0 (il quale è un risultato teorico che rispecchia la realtà), infatti in natura non sono mai stati trovati monopoli magnetici; esistono però i dipoli magnetici il cui vettore potenziale vale

$$A_{dip}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \times \hat{r}}{r^2}$$

dove  $m$  è il momento del dipolo magnetico e vale

$$m = I a, \quad (4.17)$$

con  $a$  area dell'anello (area compresa dai cavi che portano corrente).

## Capitolo 5

# Campi magnetici nella materia

### 5.1 Magnetizzazione

#### 5.1.1 Diamagnetici, paramagnetici e ferromagnetici

Se esaminassimo un pezzo di materiale magnetico su scala atomica, troveremmo sempre delle piccole correnti (movimento di cariche): dall'orbita degli elettroni attorno al nucleo all'orbita su se stessi. Di solito questi campi magnetici si neutralizzano da soli a causa della posizione randomizzata degli atomi, ma qualora fosse applicato un campo magnetico si creerebbe un allineamento magnetico di questi dipoli e il materiale verrebbe quindi detto magnetizzato. Diversamente dalla polarizzazione elettrica (dove solitamente i dipoli sono allineati nella direzione del campo elettrico), in questo caso la polarizzazione dipende dal particolare materiale:

- Se è paramagnetico: i dipoli si magnetizzano parallelamente al campo (e quindi lo schermano).
- Se è diamagnetico: i dipoli si magnetizzano perpendicolarmente al campo (e quindi lo incrementano).
- se è ferromagnetico: la magnetizzazione rimane anche dopo che il campo va via e quindi dipende "dalla sua cronologia magnetica".

#### 5.1.2 Momento e forza su un dipolo

Dopo una costruzione, che si basa sul semplificare un qualsiasi amperian loop ad un rettangolo senza perdere di generalità, arriviamo al momento di una forza del dipolo magnetico

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

dove  $\mathbf{m} = I \mathbf{a} \times \mathbf{b}$  e  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  sono i lati del rettangolo di cui parlavamo prima. Come possiamo notare è uguale all'analogo del campo elettrico  $\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ , in particolare si osserva che il momento di una forza su di un dipolo è tale da allineare il dipolo al campo magnetico e quindi corrisponde al paramagnetismo. Questo



ci potrebbe portare a pensare che il paramagnetismo accada sempre (essendo ogni elettrone un dipolo magnetico e non esistendo un monopolo magnetico di per sé), tuttavia con la meccanica quantistica (in particolare il principio di Pauli) scopriremo che gli elettroni di un atomo sono accoppiati e hanno uno spin uguale e opposto, quindi questo fenomeno accade solo con gli atomi di elettroni dispari (e anche qui si hanno alcuni problemi dati da collisioni termiche randomiche che distruggono l'ordine). In un campo uniforme la forza totale su un filo di corrente è 0, in un campo non uniforme tuttavia non è questo il caso, per un loop infinitesimale il momento del dipolo  $m$  in un campo  $B$  è

$$F = \nabla(m \cdot B)$$

Anche questa assomiglia molto alla corrispondente dell'elettrostatica e quindi possiamo capire perché nel 1800 non avessero ancora ben chiare le cose e utilizzassero il modello di Gilbert.

### Modello di Gilbert

Il modello di Gilbert è il modello che veniva utilizzato fino agli inizi del 1900. Era stato creato in analogia al modello elettrostatico e quindi si basava sulla creazione di un dipolo formato da due monopoli (anziché un infinitesimale loop di corrente), questi due monopoli esistevano indipendentemente dallo stato meccanico del corpo e di conseguenza se questo veniva spezzato in due, allora avevamo due poli separati. Ma dato che questo non accadeva hanno ipotizzato che ogni volta che un dipolo veniva spezzato si creavano due dipoli diversi; oltre ad essere fisicamente sbagliato, ciò presupponeva che lo spazio non fosse isotropo ed era campato in aria (cosa causava il magnetismo? evidentemente non era un'entità fisica perché si creava e separava a piacimento).

### 5.1.3 Effetto del campo magnetico sulle orbite degli atomi

Gli elettroni non solo hanno spin ma roteano anche intorno ad un nucleo, assumiamo che abbia orbita rotonda di raggio  $R$ , allora la corrente elettrica è

$$I = \lambda v = \frac{-e}{T}$$

con  $T$  periodo di rivoluzione dell'elettrone. Il momento del dipolo è

$$m = -\frac{1}{2}evR\hat{z}$$

Come gli altri dipoli magnetici anche questo subisce un momento della forza quando immerso in un campo magnetico, ma è molto più difficile ruotare un'intera orbita rispetto ad uno spin, quindi il contributo al paramagnetismo è più piccolo. Inoltre l'elettrone cambia velocità (di nuovo, non è il campo magnetico a fare lavoro ma quello elettrico indotto dal magnetico) dipendentemente dall'orientazione del campo (se l'orbita è perpendicolare la velocità aumenta, se è parallela diminuisce)

$$\Delta v = \frac{eRB}{2m_e}$$

e cambia quindi anche il momento magnetico  $m$

$$\Delta m = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} B$$

il cambiamento è opposto alla direzione di  $B$ . Essendo gli atomi orientati at random, nella media questi cambiamenti si annullano ma ogni atomo prende un momento extra antiparallelo al campo. Questo fenomeno è quello che causa il diamagnetismo, di solito è molto più debole del paramagnetismo e si osserva principalmente su materiali di principalmente atomi con elettroni pari. Se il materiale è in movimento diventa tutto più complicato perché il diamagnetismo è in realtà un fenomeno quantistico.

### 5.1.4 Magnetizzazione

In presenza di un campo magnetico la materia diventa magnetizzata: se guardata al microscopio troveremo tanti mini dipoli magnetici. Descriveremo il suo stato tramite il vettore

$$M \equiv \text{momenti del dipolo per unità di volume}$$

detto magnetizzazione. Tutti i materiali sono affetti dai campi magnetici e in generale in un campo non uniforme i paramagneti sono attratti mentre i diamagneti sono respinti.

## 5.2 Il campo di un oggetto magnetizzato

Sempre in analogia con il campo elettrico un oggetto che viene magnetizzato produce a sua volta un campo magnetico, il modo in cui si trova è lo stesso di quello utilizzato per il campo elettrico: abbiamo già la formula per trovare il vettore potenziale di un singolo dipolo magnetico, si integra su tutto l'oggetto e nel grosso integrale risultante troviamo due cose già trovate per il campo elettrico; il primo termine può essere visto come il potenziale di una corrente di volume

$$J_b = \nabla \times M$$

Il secondo termine come una corrente di superficie

$$K_b = M \times \hat{n}$$

Quindi vettore potenziale (e quindi anche il campo) può essere visto come una somma del potenziale prodotto da una corrente di volume più una corrente di superficie. Ecco la formula completa

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_b(\mathbf{r}')}{r} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{K}_b(\mathbf{r}')}{r} da' \quad (5.1)$$

### Interpretazione fisica

Possiamo vedere la magnetizzazione di un materiale come tanti piccoli dipoli: in un campo uniforme quelli adiacenti si annullano mentre quelli di bordo no e la somma di tutti quelli al bordo è la corrente di superficie; in un campo non uniforme non è vero che si annullano quelle interne, quindi la risultante corrente di volume contribuisce al potenziale.

### Campo magnetico dentro la materia

Il vero campo magnetico dentro la materia fluttua enormemente da istante ad istante, quando parliamo di campo magnetico della materia si parla della media del campo (come abbiamo fatto per il campo elettrico).

## 5.3 Il campo ausiliario H

### 5.3.1 La legge di Ampere per i materiali magnetizzati

Adesso siamo pronti per mettere insieme le correnti in generale (free current) con quelle dei materiali appena viste (Bound current)

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_b + \mathbf{j}_f$$

possiamo quindi riscrivere la legge di Ampere che dopo essere semplificata diventa

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{j}_f$$

Scriviamo il termine tra parentesi come campo ausiliario H

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_f \quad (5.2)$$

o in forma integrale

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = j_{f_{enc}}$$

dove  $j_{f_{enc}}$  è il totale di corrente libera che passa attraverso l'amperian loop.  $H$  ha lo stesso ruolo di  $D$  ma dato l'utilizzo pratico  $H$  è considerato più importante (per trovare  $E$  basta misurare la differenza di potenziale mentre  $D$  dipende dalla composizione del materiale, inoltre è più comodo lavorare con  $H$  rispetto a  $B$ ).

### 5.3.2 Un false friend

Questa nuova equazione di Ampere sembra uguale all'originale (con la differenza di  $\mu_0 H \rightarrow B$  e  $J_f \rightarrow J$ ) ma non è così. Mentre la divergenza di  $B = 0$  quella di  $H$  vale

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M}$$

e come sappiamo per determinare un campo non basta la divergenza ma anche il rotore.

### 5.3.3 Condizioni di bordo

Come sempre scriviamo anche le condizioni di bordo:

$$H_{above}^\perp - H_{below}^\perp = -(M_{above}^\perp - M_{below}^\perp)$$

e

$$H_{above}^\parallel - H_{below}^\parallel = K_f \times \hat{n}$$

## 5.4 materia lineare e non lineare

Nei paramagneti e diamagneti, la magnetizzazione è sostenuta dal campo: se  $B$  scompare, scompare anche  $M$ . Per la maggior parte delle sostanze infatti  $M \propto B$

$$M = \chi_m H. \quad (5.3)$$

$\chi_m$  è chiamata suscettività magnetica e solo i materiali lineari (in inglese linear media ma non so la traduzione) obbediscono a questa legge (in questo caso quindi  $M = 1/\mu_0 \chi_m B$  essendo  $B = \mu H$  (cambia il valore di  $\chi_m$ )). Inoltre

$$\mu \equiv \mu_0(1 + \chi_m),$$

dove  $\mu$  è la permeabilità del materiale e  $\mu_0$  quella dello spazio

### 5.4.1 Ferromagnetismo

I ferromagneti sono non lineari e non è necessario che ci sia un campo magnetico esterno affinché questi abbiano un loro campo  $B$ , infatti questi tendono a "frizzarsi". Nei ferromagneti ogni dipolo cerca di puntare nella stessa direzione del suo vicino, di conseguenza si creano dei "pezzi" di materiale con momento dei dipoli nella stessa direzione. Questi pezzi sono chiamati domini e sono orientati randomicamente. Come creiamo un magnete come quelli venduti? Applicando un campo magnetico il momento della forza tende a orientare i dipoli nello stesso senso ma dato che a loro piace avere la stessa direzione dei loro vicini, la maggior parte dei dipoli resiste a questo momento. Tuttavia ai limiti di un dominio ci saranno dei vicini con orientazioni diverse e il momento della forza sbilancia questo equilibrio facendo vincere uno dei due; se il campo è abbastanza forte, un dominio vince su tutti. Quando il campo magnetico viene spento ci saranno alcuni dipoli che ritornano all'orientazione originale, ma la maggior parte rimarrà frizzata. Per ritornare ad avere campo completamente neutro dobbiamo riscaldare il ferro, la cosa curiosa è che la distruzione di questo allineamento avviene ad una temperatura precisa (770 °C).

## Capitolo 6

# Elettrodinamica

### 6.1 Forza elettromotrice

#### 6.1.1 La legge di Ohm

Per fare scorrere una corrente c'è bisogno di una forza che la spinga

$$J = \sigma f$$

dove  $f$  è la forza per unità di volume e  $\sigma$  è un fattore empirico detto conduttività, anche se spesso si parla del suo reciproco  $\rho = 1/\sigma$ , la resistività. La forza che fa muovere le cariche producendo corrente può avere una qualsiasi origine, per i nostri scopi sarà sempre la forza elettromagnetica

$$J = \sigma(E + v \times B)$$

e dato che la velocità delle particelle è sufficientemente piccola allora abbiamo

$$J = \sigma E$$

che è anche conosciuta come legge di Ohm. Questo significa che non è possibile avere  $E=0$  dentro ad un conduttore (come detto in precedenza) ma quello valeva per l'elettrostatica, per le cariche in movimento non è così (inoltre per un perfetto conduttore  $\rho = 0$  e quindi anche  $E=0$ ); i materiali con resistività alta sono detti resistori. Una forma più diffusa della legge di Ohm è la seguente

$$V = IR$$

Che dice che la corrente è proporzionale alla differenza di potenziale tra due elettrodi,  $R$  è detta resistenza ed è una funzione della geometria e della conduttività tra due elettrodi. Ma la legge di Ohm è in contraddizione con la seconda legge di Newton: se una forza genera la corrente, questa dovrebbe subire un'accelerazione e quindi non potremmo parlare di corrente costante. Tuttavia stiamo trascurando gli scontri tra elettroni dentro al conduttore questi scontri fanno sì che la velocità si mantenga costante, inoltre causano calore (gli scontri termali che già avvengono si neutralizzano data la randomicità del evento), possiamo quindi scrivere la legge

$$P = \frac{dW}{dt} = VI = I^2 R$$

nota come legge di riscaldamento di Joule, nel caso in cui sia dipendente dal tempo basta integrare per dt da 0 a t e per trovare l'energia persa si pone  $t = \infty$ .

### 6.1.2 Forza elettromotrice

Come è possibile che la corrente sia uguale e costante in ogni momento e punto di un filo? Questo è dato dal fatto che la forza della sorgente non è l'unica, esiste anche la forza elettrica tra le cariche stesse. Se infatti un po' di cariche si accumulassero in un punto, il campo elettrico generato sarebbe tale da rallentare quelle che vengono e velocizzare quelle che escono, risolvendo il nodo in poco tempo. Questo meccanismo è così efficace che possiamo considerare la corrente sempre costante. Le due forze che agiscono sono quindi:  $f_s$  la forza della sorgente ed il campo elettrico delle cariche. La forza totale è quella dell'integrale di linea

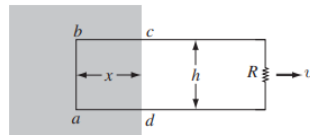
$$\varepsilon = \oint (f_s + E) \cdot dl = \oint f_s \cdot dl$$

(ricordiamo che  $\oint E \cdot dl = 0$ ).  $\varepsilon$  è detta forza elettromotrice o FEM del circuito. In un generatore ideale la forza totale sulle cariche è 0 e  $E = -f_s$  quindi

$$V = - \int_a^b E \cdot dl = - \int_a^b f_s \cdot dl = \varepsilon$$

### 6.1.3 FEM indotta

Ho tradotto motional FEM come FEM indotta ma non so se è corretto. Tra le possibili fonti di FEM la più comune è il generatore. I generatori sfruttano la FEM indotta, un fenomeno che accade quando muovi un filo elettrico attraverso un campo magnetico. Prendiamo la seguente immagine



Nella zona grigia è presente un campo magnetico uniforme che punta dentro la pagina, noi muoviamo il circuito verso destra con velocità costante  $v$ , allora le cariche nel segmento ab subiranno una forza magnetica la cui componente verticale  $qvB$  le fa scorrere lungo il filo. La FEM risultante è

$$\varepsilon = \oint f_{mag} \cdot dl = vBh$$

dove  $h$  è l'ampiezza dell'anello. È importante notare come l'integrale venga utilizzato come se il circuito fosse portato fuori in un istante, infatti  $dl$  per il segmento ab punta verso l'alto quando il circuito si muove a destra. Ancora una volta la forza magnetica non compie lavoro, ma siamo noi a compierlo spostando il circuito con la forza

$$f_{pull} = uB$$

Il lavoro fatto per unità di carica è

$$\int f_{pull} \cdot dl = (uB) \left( \frac{h}{\cos \theta} \right) \sin \theta = vBh = \varepsilon$$

Un altro metodo per ricavare la FEM generata in questo modo è il flusso del campo magnetico. Non sto qua a riscrivere la costruzione e la dimostrazione ma

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Dove  $\Phi = \int B \cdot da$  questa è nota come regola del flusso per la FEM indotta. La direzione è data dalla regola della mano destra.

## 6.2 Induzione elettromagnetica

Faraday fece 3 esperimenti:

- Spinse un circuito fuori da un campo magnetico.
- Stesso movimento relativo ma al contrario: spinse il campo magnetico tenendo fermo il circuito.
- Tenne entrambi fermi e cambiò l'intensità del campo magnetico.

In tutti e 3 gli esperimenti la corrente cominciò a fluire attraverso il circuito, come sappiamo nel primo esperimento

$$\varepsilon = - \frac{d\Phi}{dt}$$

e come è intuibile uguale nel secondo, cosa per noi ovvia ma non per Faraday (non esisteva ancora la relatività). Probabilmente fu la coincidenza di questi due esperimenti che lo portò al terzo, infatti mentre nel primo era la forza magnetica a causare la FEM, nel secondo sarebbe dovuta essere la forza elettrica, ma non erano presenti campi elettrici in principio. Allora scrisse:

Un campo magnetico che varia induce un campo elettrico.

Da cui

$$\varepsilon = \oint E \cdot dl = - \frac{d\Phi}{dt}$$

e

$$\oint E \cdot dl = - \int \frac{\partial B}{\partial t} \cdot da$$

o in forma differenziale (legge di Faraday)

$$\nabla \times E = - \frac{\partial B}{\partial t}$$

I tre esperimenti possono essere riassunti in una legge universale del flusso magnetico:

Ogni volta e per ogni motivo che il flusso magnetico attraverso un circuito cambia, una FEM

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

comparerà.

Ma secondo il Griffiths non va bene perché mentre la prima FEM ha origine magnetica, le seconde due FEM hanno origine elettrica e fu proprio questa differenza che spinse Einstein alla teoria della relatività. Tenere traccia del segno è un casino della madonna e quindi esiste una legge che ci aiuta proprio a fare questo: la legge di Lenz

La natura si oppone al cambiamento del flusso.

Scritto meglio: la variazione temporale del flusso del campo magnetico attraverso l'area abbracciata da un circuito genera nel circuito una forza elettromotrice che contrasta la variazione. Questo ci aiuta a capire la direzione della legge di Faraday.

### 6.2.1 Campo elettrico indotto

La legge di Faraday generalizza la legge dell'elettrostatica  $\nabla \times E = 0$  ad un regime dipendente dal tempo. Infatti se  $E$  è un campo di Faraday puro ( $\rho = 0$  e quindi indotto solo dal cambiamento di  $B$ ) allora

$$\nabla \cdot E = 0 \quad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

che è matematicamente uguale alla magnetostatica

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \nabla \times B = \mu_0 J$$

Infatti entrambi i rotori parlano del cambiamento dello stato statico dell'altro campo. Inoltre i campi elettrici di questo tipo sono determinati da  $-(\partial B/\partial t)$  nello stesso identico modo in cui i campi magnetostatici sono determinati da  $\mu_0 J$  e quindi possiamo scrivere la nuova legge di Biot-Savart.

$$E = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(\partial B/\partial t) \times \hat{r}}{r^2} d\tau = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{B \times \hat{r}}{r^2} d\tau$$

e possiamo usare tutti i trucchi associati alla legge di Ampere (ora legge di Faraday)

$$\oint E \cdot dl = -\frac{d\Phi}{dt}$$

L'induzione elettromagnetica, ovviamente accade solo quando i campi magnetici stanno cambiando eppure utilizziamo comunque formule della magnetostatica, questo perché gli errori sono talmente piccoli da essere trascurabili a meno che il cambiamento del flusso non sia estremamente veloce oppure non siamo interessati a punti estremamente lontani (ci capiterà solo con le onde elettromagnetiche). Questo regime è detto quasistatica.



### 6.2.2 Induttanza

Facciamo partire una corrente attraverso un circuito e mettiamo vicino un altro circuito, alcune linee di flusso del campo magnetico del circuito 1 andranno sul circuito 2 e guardando la legge di Biot-Savart ci accorgiamo come il campo magnetico 1 sia proporzionale alla corrente, attraverso una facile costruzione arriviamo a

$$\Phi_2 = M_{21} I_1$$

dove

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r}$$

ed detta mutua induttanza. L'ultima equazione è anche nota come formula di Newmann e pur non essendo molto utile ci dice che  $M_{21}$  è una quantità puramente geometrica e che  $M_{21} = M_{12}$ . Se la corrente è variabile anche il flusso varierà e quindi genererà una FEM

$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

Inoltre non solo induce una FEM sui circuiti vicini, ma ne induce una anche se se stesso.

$$\Phi = LI$$

$L$  è nota come autoinduttanza o banalmente induttanza. L'induttanza è una quantità intrinseca di un circuito strettamente positiva e la FEM indotta è tale da opporsi al cambiamento di corrente, se ci si pensa l'induttanza ha lo stesso ruolo che ha la massa nella dinamica: più è grande più è difficile cambiare lo stato del sistema.

### 6.2.3 Energia nei campi magnetici

Ci vuole una certa quantità di energia per far partire la corrente in un circuito (non sto parlando di quella dispersa tramite resistori e convertita in calore), ovvero il lavoro necessario fare per combattere la FEM autoindotta; questa è una quantità fissata ed è recuperabile quando spegniamo la corrente e può essere vista come l'energia immagazzinata nel campo magnetico. Ci sono due modi per scrivere l'energia:

- Il primo ha una dimostrazione facile e vale

$$W = \frac{1}{2} LI^2$$

- Il secondo ha una dimostrazione più lunga e vale

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{all\ space} B^2 d\tau$$

e l'energia è immagazzinata nel campo magnetico in  $B^2/2\mu_0$  per unità di volume.

Il punto è che produrre un campo magnetico dove prima non c'era corrisponde ad una variazione del flusso e quindi induce un campo elettrico che può produrre lavoro; all'inizio e alla fine non c'è  $E$  ma nel mentre c'è ed è contro di questo che viene fatto il lavoro. Infine notiamo la somiglianza tra le due formule del lavoro per il campo elettrico e quello magnetico:

$$W_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \int (V\rho) d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau$$

## 6.3 Equazioni di Maxwell

### 6.3.1 L'elettrodinamica prima di Maxwell

Fino a metà del XIX secolo la teoria dell'elettromagnetismo poteva essere riassunta con la divergenza e il rotore nel seguente modo (in realtà si usavano forme meno compatte ma il succo era questo):

- Legge di Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

- Divergenza del campo magnetico (senza nome)

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

- Legge di Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

- Legge di Ampère

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

Tuttavia c'erano alcune problematiche, ad esempio come sappiamo la divergenza di un rotore è sempre 0 mentre la divergenza della legge di Ampere non fa sempre 0 (non nella magnetodinamica almeno).

### 6.3.2 Come Maxwell aggiustò la legge di Ampere

Il problema della legge di Ampere è la parte destra che deve fare 0, Maxwell allora prese la legge di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \rightarrow \mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

Questa modifica non cambia niente per la magnetostatica ma è molto importante per le onde elettromagnetiche. Inoltre ci dice un'altra cosa

Un campo elettrico che varia induce un campo magnetico.

Queste furono solo bellurie estetiche finché non vennero dimostrate sperimentalmente da Hertz nel 1888, allora Maxwell chiamò il suo termine corrente di spostamento

$$\mathbf{J}_d \equiv \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

### 6.3.3 Equazioni di Maxwell

(i)	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$	(Gauss's law),
(ii)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(no name),
(iii)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(Faraday's law),
(iv)	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	(Ampère's law with Maxwell's correction).

Le nuove equazioni di Maxwell insieme all'equazione della forza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

riassumono tutta la teoria del elettromagnetismo.

### 6.3.4 Cariche magnetiche

Le equazioni di Maxwell sono estremamente simmetriche, questa simmetria è ancora più pungente nello spazio libero. Se esistesse una carica magnetica, ritroveremmo la simmetria anche dove la carica è presente:

- (i)  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_e$
- (ii)  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m$
- (iii)  $\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$
- (iv)  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}_e + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$

### 6.3.5 Equazioni di Maxwell nella materia

Nella materia le equazioni di Maxwell diventano

(i)	$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f,$	(iii)	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$
(ii)	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$	(iv)	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}.$

**Condizioni di bordo**

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_f$$

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0$$

$$\mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel = 0$$

$$\mathbf{H}_1^\parallel - \mathbf{H}_2^\parallel = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$$

## Capitolo 7

# Leggi di conservazione

### 7.1 Carica ed energia

#### 7.1.1 L'equazione di continuità

Le cariche si conservano sempre, sia localmente che globalmente. Partendo da qua si arriva facilmente all'equazione di continuità.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot J$$

#### 7.1.2 Teorema di Poynting

Il lavoro necessario per assemblare una distribuzione di carica statica è

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau$$

dove  $E$  è il campo elettrico risultante. Allo stesso modo l'energia necessaria per far partire una corrente lavorando contro la FEM autoindotta è

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int_{all\ space} B^2 d\tau$$

Dove  $B$  è il campo magnetico risultante. Possiamo unire le due e dire che l'energia immagazzinata in un campo elettrico è

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

Questo è il punto di partenza del teorema di Poynting ovvero

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left( \epsilon W^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau - \frac{1}{\mu_0} \oint_S (E \times B) \cdot da$$

che qualitativamente significa che il lavoro fatto sulle cariche dalle forze elettromagnetiche è uguale al decremento dell'energia rimasta nei campi meno

l'energia che è uscita dalla superficie. L'energia per unità di tempo per unità di area trasportata dai campi è chiamata vettore di Poynting

$$S \equiv \frac{1}{\mu_0}(E \times B)$$

In particolare  $S \cdot da$  è l'energia trasportata per unità di tempo attraverso la superficie infinitesima  $da$ ; quindi  $S$  è il flusso della densità di energia. Se non è compiuto lavoro sulle cariche in  $V$  allora

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot S$$

## 7.2 Momento

### 7.2.1 Terza legge di Newton nell'elettromagnetismo

Immagina che una carica  $q$  viaggi sull'asse  $x$  con velocità costante  $v$ , il suo campo elettrico non è dato dalla legge di Coulomb perché si muove (eppure come vedremo  $E$  punta radialmente) e il suo campo magnetico non è dato dalla legge di Biot-Savart perché una singola particella non costituisce una corrente (eppure il campo magnetico gira attorno alla carica). Ora supponiamo che incontriamo sull'asse delle  $x$  un'altra carica uguale con velocità opposta; la terza legge di Newton ci dice che le due cariche rimarranno sullo stesso asse: il campo elettrico fa sì che le due cariche si respingano, ma il campo magnetico fa sì che una vada a destra e l'altra in alto, eppure se proviamo l'esperimento le due cariche rispettano la terza legge di Newton. Questo è perché i campi elettromagnetici portano loro stessi una quantità di moto.

### 7.2.2 Tensore dello stress di Maxwell

Calcoliamo la forza elettromagnetica delle cariche in un volume  $V$

$$F = \int_V (E + v \times B) \rho d\tau = \int_V (\rho E + J \times B) d\tau$$

la forza per unità di volume è

$$f = \rho E + J \times B$$

che possiamo contrarre introducendo il tensore di stress di Maxwell

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2) + \frac{1}{\mu_0}(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2)$$

otteniamo quindi

$$f = \nabla \cdot T - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial S}{\partial t}$$

dove  $S$  è il vettore di Poynting. la forza totale sulle cariche in  $V$  è

$$F = \oint_S T \cdot da - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V S d\tau$$

Nel caso di campi statici

$$F = \oint_S T \cdot da$$

Fisicamente  $T$  è la forza per unità di area, quindi invece che fare un integrale di volume ne facciamo uno di area capace di dirci cosa succede all'interno.

### 7.2.3 Conservazione della quantità di moto (momento)

La seconda legge di Newton dice che  $F = \frac{dp}{dt}$ , possiamo riprendere la precedente equazione e otteniamo che per il primo integrando

$$P = \epsilon_0 \mu_0 \int_V S d\tau$$

e rappresenta il momento immagazzinato nei campi, mentre il secondo rappresenta il momento per unità di volume attraverso la superficie. L'equazione

$$\frac{dp}{dt} = \oint_S T \cdot da - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V S d\tau$$

è l'equazione che rappresenta la conservazione del momento ed è quindi costante. La densità del momento nei campi può essere scritta come

$$g = \mu_0 \epsilon_0 S = \epsilon_0 (E \times B)$$

e

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \nabla \cdot T$$

che è l'equazione di continuità per il momento.

### 7.2.4 Momento angolare

Abbiamo visto che i campi elettromagnetici hanno una loro energia

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

il momento è

$$g = \mu_0 \epsilon_0 S = \epsilon_0 (E \times B)$$

vediamo adesso che il momento angolare è

$$l = r \times g = \epsilon_0 [r \times (E \times B)]$$

## 7.3 Le forze magnetiche non fanno lavoro

## Capitolo 8

# Onde elettromagnetiche

### 8.1 L'equazione d'onda

Spiegare qualitativamente cosa è un'onda non è facile. Possiamo dire che:

*Un'onda è una perturbazione che nasce da una sorgente e si propaga nel tempo e nello spazio trasportando energia o quantità di moto, senza comportare un associato spostamento della materia.*

Ma comunque andrebbero fatte alcune precisazioni. Possiamo dire che quantitativamente un'onda è una soluzione all'equazione d'onda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Le cui soluzioni sono del tipo

$$f(z, t) = f(z - vt, 0) = g(z - vt)$$

L'equazione d'onda è lineare, nel senso che la somma di due soluzioni è anch'essa una soluzione.

#### 8.1.1 Onde sinusoidali

Le onde sinusoidali sono le più familiari

$$f(z, t) = A \cos[k(z - vt) + \delta]$$

$\delta$  è la costante di fase,  $k$  è il numero d'onda e

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

è la lunghezza d'onda, il periodo allora è  $T = 2\pi/kv$  e la velocità angolare è

$$\omega = 2\pi\nu = kv$$

dove  $\nu$  è la frequenza (a volte scriverò  $f$ ). Spesso è più facile scrivere in termini di frequenza angolare

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta)$$

Possiamo anche utilizzare la notazione di Eulero considerando che

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

scriviamo la precedente espressione dell'onda come

$$f(z, t) = \text{Re}[Ae^{i(kz - \omega t + \delta)}]$$

il che ci porta a costruire la forma complessa

$$\tilde{f}(z, t) \equiv \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)}$$

di ampiezza  $\tilde{A}e^{i\delta}$ . Inoltre è importante sapere che tutte le onde possono essere scritte tramite la combinazione lineare di onde sinusoidali

$$\tilde{f}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k)e^{i(kz - \omega t)} dk$$

### 8.1.2 Condizioni di bordo: trasmissione e riflesso

Immaginiamo di avere 2 corde legate, l'onda parte (onda incidente) con velocità  $v = \sqrt{T/\mu}$  (T tensione e  $\mu$  massa per unità di lunghezza) e una parte viene trasmessa (onda trasmessa), mentre l'altra si riflette (onda riflessa). Se le corde hanno  $\mu$  uguale allora la velocità è la stessa, in ogni caso tutte le onde hanno la stessa frequenza angolare.

Onda incidente

$$\tilde{f}_I(z, t) = \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)} \quad z < 0$$

Onda riflessa

$$\tilde{f}_R(z, t) = \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)} \quad z < 0$$

Onda trasmessa

$$\tilde{f}_T(z, t) = \tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)} \quad z > 0$$

si susseguono i seguenti rapporti

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Se le due corde sono finite allora non possono essere seni puri ma devono per forza essere una combinazione lineare di più onde. In totale un impulso che passa da una corda all'altra ha la funzione

$$\tilde{f}(z, t) = \begin{cases} \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)} + \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, & \text{for } z < 0, \\ \tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)}, & \text{for } z > 0. \end{cases}$$

L'onda deve essere continua al nodo e ipotizzando che il nodo abbia massa trascurabile allora anche la derivata di  $f$  lo è, in queste condizioni di bordo

$$\tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T, \quad k_1(\tilde{A}_I - \tilde{A}_R) = k_2 \tilde{A}_T$$

dalle quali

$$\tilde{A}_R = \left( \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right) \tilde{A}_I, \quad \tilde{A}_T = \left( \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \right) \tilde{A}_I.$$

Se la seconda corda è di massa lineare minore della prima allora lo sfasamento è lo stesso altrimenti sono sfasate di  $\pi$ .



### 8.1.3 Polarizzazione

Le onde si dividono in trasversali (onde che sono disturbate perpendicolarmente alla direzione di propagazione) come le onde elettromagnetiche e longitudinali (onde che sono disturbate nella stessa direzione di quella di propagazione) come il suono. Le prime ovviamente possono accadere in due stati, chiamati stati di propagazione. Ovviamente va bene una qualsiasi combinazione lineare dei due stati e l'angolo è detto angolo di polarizzazione

$$\hat{n} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$$

## 8.2 Onde elettromagnetiche nel vuoto

### 8.2.1 Equazione d'onda di E e B

Nelle regioni di spazio dove non c'è corrente

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{array} \right\}$$

le quali costituiscono un sistema di coppie di equazioni differenziali parziali del primo ordine per E e B. È possibile scoppiarle e renderle equazioni differenziali parziali del secondo ordine

$$\nabla^2 E = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \nabla^2 B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Nel vuoto ogni componente cartesiano di E e B soddisfa l'equazione d'onda

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

dove  $v = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  ovvero la velocità della luce. All'epoca questa fu una scoperta straordinaria perché due costanti trovate da altri esperimenti (Biot-Savart e Coulomb) davano la velocità della luce e quindi l'ipotesi (ora confermata) che la luce fosse un'onda elettromagnetica. Notiamo inoltre l'importanza della modifica fatta alla legge di Ampere da Maxwell, senza di essa non verrebbe fuori l'equazione d'onda.

### 8.2.2 Onde piane monocromatiche

Concentriamoci sulle onde sinusoidali di frequenza angolare  $\omega$ . Tali onde corrispondono a diversi colori nello spazio visibile della luce e sono quindi dette monocromatiche. Supponiamo che le onde viaggino nella direzione z e che non abbiano dipendenza da x e da y, allora queste onde sono chiamate onde piane. Le onde piane sono onde che si propagano perpendicolarmente alla direzione del piano su cui vengono disturbate e hanno frequenza e ampiezza costante. L'equazione di un'onda piana è quella di un'onda sinusoidale complessa

$$\tilde{E}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad \tilde{B}(z, t) = \tilde{B}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

dove  $\omega = ck$ . Le equazioni di Maxwell restringono il campo delle soluzioni delle equazioni d'onda, esse impongono che:

- $(\tilde{E}_0)_z = (\tilde{B}_0)_z = 0$ , quindi le onde sono trasversali.
- Mettono in relazione le ampiezze dei due campi

$$-k(\tilde{E}_0)_y = \omega(\tilde{B}_0)_x \quad k(\tilde{E}_0)_x = \omega(\tilde{B}_0)_y$$

o in forma più compatta

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{k}{\omega} (\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0)$$

È evidente che le onde elettromagnetiche nel vuoto sono in fase ( $\delta$  uguale), mutualmente perpendicolari e la loro ampiezza reale è

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{1}{c} E_0.$$

Si usa la direzione del campo di E per indicare la polarizzazione. Possiamo generalizzare il tutto prendendo il vettore di propagazione  $\vec{k}$ , un vettore di ampiezza  $k$  e con la stessa direzione della propagazione dell'onda, allora

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) &= \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}, \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

con parte reale

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{n}} \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) \end{aligned}$$

### 8.2.3 Energia e momento delle onde elettromagnetiche

Come abbiamo detto l'energia per unità di volume dei campi è

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right)$$

che nelle onde si semplifica a

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta)$$

la densità del flusso di energia è dato dal vettore di Poynting che per onde elettromagnetiche si semplifica in

$$S = cu\hat{\mathbf{z}}$$

il che è logico essendo  $S$  è la densità di energia per la velocità delle onde. La densità di momento diventa

$$g = \frac{1}{c} u\hat{\mathbf{z}}$$

Dal momento che l'unica cosa a cui siamo interessati è la media e non l'oscillazione

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

$$\langle S \rangle = I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{z}$$

$$\langle g \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{z}$$

$I$  è chiamata intensità. Infine quando un'onda si abbatte su un materiale perfettamente assorbente, il momento trasmesso in un tempo  $\Delta t$  è  $\Delta p = \langle g \rangle A c \Delta t$  e la pressione di radiazione (forza media per unità di tempo) è

$$P = \frac{I}{c}$$

Su uno specchio perfetto la pressione è il doppio.

## 8.3 Onde elettromagnetiche nella materia

### 8.3.1 Propagazione nei mezzi lineari

Nella materia (ma sempre nelle regioni prive di carica e corrente libera)

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{array} \right\}$$

Se il mezzo di propagazione è lineare

$$D = \epsilon E \quad H = \frac{1}{\mu} B$$

e se è anche omogeneo ( $\epsilon$  e  $\mu$  non variano da punto a punto)

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \end{array} \right\}$$

Tutti i risultati della precedente sezione si propagano a questa con la differenza che  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ ,  $\mu_0 \rightarrow \mu$  e  $c \rightarrow v$ . Questo cambia la velocità di propagazione dell'onda (che andrà più lenta)

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n}$$

con  $n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}}$  detto indice di rifrazione. Questa può sembrare una banalità matematica ma ha enormi implicazioni nella fisica: quando le onde passano attraverso ad un mezzo, polarizzano e magnetizzano le molecole che creano a loro volta dei campi elettrici e magnetici; questi campi si uniscono a quelli

originali dell'onda modificandone la frequenza e la velocità. Questo è il fenomeno dietro la trasparenza. Cosa succede quando l'onda passa da un mezzo trasparente ad un altro con indice di rifrazione diverso? i risultati dipendono dalle condizioni di bordo studiate nel capitolo 6:

- (i)  $\epsilon_1 E_1^\perp = \epsilon_2 E_2^\perp$ ,
- (ii)  $B_1^\perp = B_2^\perp$ ,
- (iii)  $E_1^\parallel = E_2^\parallel$ ,
- (iv)  $\frac{1}{\mu_1} B_1^\parallel = \frac{1}{\mu_2} B_2^\parallel$ .

### 8.3.2 Riflesso e trasmissione ad incidenza normale

Prendiamo un'onda che arriva perpendicolarmente su un mezzo trasparente, le onde sono le stesse che abbiamo trovato anche prima (I, R e T) per le onde sinusoidali in generale ma applicate all'elettromagnetismo. Prendendo le condizioni di bordo dell'elettromagnetismo nella materia otteniamo anche che

- $$\tilde{E}_0^I + \tilde{E}_0^R = \tilde{E}_0^T$$

- $$\tilde{E}_0^I - \tilde{E}_0^R = \beta \tilde{E}_0^T$$

$$\text{con } \beta \equiv \mu_1 v_1 / \mu_2 v_2 = \mu_1 n_2 / \mu_2 n_1$$

che ci danno l'ampiezza di R e T in funzione di I

$$\tilde{E}_{0R} = \left( \frac{1-\beta}{1+\beta} \right) \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \left( \frac{2}{1+\beta} \right) \tilde{E}_{0I}.$$

Inoltre vediamo in termini di energia quanta onda diventa riflessa e quanta trasmessa.

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

R è chiamato coefficiente di riflessione e T di trasmissione

$$R + T = 1$$

### 8.3.3 Riflessione e trasmissione ad incidenza obliqua

Supponiamo di avere un'onda piana monocromatica, allora è definita da

$$\tilde{E}_I(r, t) = \tilde{E}_{0I} e^{i(k_I \cdot r - \omega t)} \quad \tilde{B}_I(r, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_I \times \tilde{E}_I)$$

che incidendo obliquamente su un mezzo trasparente darà origine ad un'onda riflessa

$$\tilde{E}_R(r, t) = \tilde{E}_{0R} e^{i(k_R \cdot r - \omega t)} \quad \tilde{B}_R(r, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{k}_R \times \tilde{E}_R)$$

ed una trasmessa

$$\tilde{E}_T(r, t) = \tilde{E}_{0T} e^{i(k_T \cdot r - \omega t)} \quad \tilde{B}_T(r, t) = \frac{1}{v_2} (\hat{k}_T \times \tilde{E}_T)$$

Tutte e tre le onde avranno la stessa frequenza e saranno in relazione anche i numeri d'onda nello stesso modo di prima

$$k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2 = \omega, \text{ ovvero } k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T.$$

Se il mezzo è posto in  $z=0$  allora dovremo applicare lì le condizioni di bordo di  $E_I + E_R$  e  $E_T$  (uguale per i campi magnetici) e la funzione dovrà essere continua. Possiamo dire alcune cose

- Le onde incidenti, riflesse e trasmesse costituiscono un piano detto piano di incidenza.
- $\theta_I = \theta_R$  detta legge di riflessione.
- $\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_R} = \frac{n_1}{n_2}$  detta legge di snell.
- $\tilde{E}_{0R} = \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0I}$  e  $\tilde{E}_{0T} = \left( \frac{2}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0I}$  dove  $\alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}$  detta legge di Fresnel.
- Esiste un angolo detto di Brewster dove l'onda riflessa è completamente inesistente  $\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2}$
- $R = \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2$  e  $T = \alpha \beta \left( \frac{2}{\alpha + \beta} \right)$ .

## 8.4 Assorbimento e dispersione

### 8.4.1 Onde elettromagnetiche e dispersione

Prendiamo adesso il caso in cui un'onda impatta su un conduttore e quindi, a differenza di prima, sono presenti delle correnti e delle cariche libere. Le leggi di Maxwell sono

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_f, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{array} \right\}$$

Usando l'equazione di continuità insieme alla legge di Ohm, di Gauss e ipotizzando che il materiale sia omogeneo, arriviamo al fatto che le cariche libere si disperdono in un tempo caratteristico di  $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ . Questo ci permette di riscrivere le equazioni come

$$\left. \begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \sigma \mathbf{E}. \end{array} \right\}$$

Il che differisce dalle onde nella materia solo per l'ultimo termine. Le equazioni risultanti sono

$$\nabla^2 E = \mu\epsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial E}{\partial t} \quad \nabla^2 B = \mu\epsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial B}{\partial t}$$

Queste equazioni danno pur sempre luogo ad onde piane con unica differenza che  $k$  questa volta è complessa

$$\tilde{k}^2 = \mu\epsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$$

che può essere riscritta come  $\tilde{k} = k + i\kappa$  dove

$$k \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} + 1 \right]^{1/2} \quad \kappa \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2} - 1 \right]^{1/2}$$

La parte immaginaria di  $\tilde{k}$  risulta in un'attenuazione dell'onda e la distanza necessaria per ridurre l'ampiezza di un fattore  $1/e$  è detta in inglese skin depth

$$d \equiv 1/\kappa$$

La parte reale invece determina la lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad v = \frac{\omega}{k}, \quad n = \frac{ck}{\omega}.$$

Le equazioni di Maxwell impongono altre precisazioni:

- Le onde piane sono trasverse
- Se polarizziamo  $E$  sull'asse delle  $x$

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}$$

allora

$$\tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}$$

$\tilde{k}$  come tutti i numeri complessi può essere scritta in forma esponenziale

$$\tilde{k} = K e^{i\phi},$$

$$K \equiv |\tilde{k}| = \sqrt{k^2 + \kappa^2} = \omega \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon\omega} \right)^2}$$

$$\phi \equiv \tan^{-1}(\kappa/k).$$

il che ci mostra che i due campi non sono più in fase essendo  $E$  e  $B$  legati

$$B_0 e^{i\delta_B} = \frac{K e^{i\phi}}{\omega} E_0 e^{i\delta_E}$$

E le ampiezze sono legate da

$$B_0/E_0 = \frac{K}{\omega}$$

Infine le due funzioni d'onda sono

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E) \hat{\mathbf{x}} \\ \mathbf{B}(z, t) &= B_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E + \phi) \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \right\}$$

### 8.4.2 Riflessione su una superficie condudente

Questa sezione è l'equivalente delle onde oblique sui dielettrici fatte prima, in questo caso però le condizioni di bordo sono (i)  $\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = \sigma_f$ , (ii)  $B_1^\perp - B_2^\perp = 0$ , (iii)  $\mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel = \mathbf{0}$ , (iv)  $\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}$ . Le 3 onde sono

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_I(z, t) &= \tilde{E}_{0_I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, & \tilde{\mathbf{B}}_I(z, t) &= \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0_I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}} \\ \tilde{\mathbf{E}}_R(z, t) &= \tilde{E}_{0_R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, & \tilde{\mathbf{B}}_R(z, t) &= -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0_R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \\ \tilde{\mathbf{E}}_T(z, t) &= \tilde{E}_{0_T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, & \tilde{\mathbf{B}}_T(z, t) &= \frac{\tilde{k}_2}{\omega} \tilde{E}_{0_T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}},\end{aligned}$$

inoltre abbiamo

$$\tilde{E}_{0_I} + \tilde{E}_{0_R} = \tilde{E}_{0_T}$$

e

$$\tilde{E}_{0_I} - \tilde{E}_{0_R} = \tilde{\beta} \tilde{E}_{0_T}$$

con

$$\tilde{\beta} \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} \tilde{k}_2$$

da cui segue

$$\tilde{E}_{0_R} = \left( \frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0_I}, \quad \tilde{E}_{0_T} = \left( \frac{2}{1 + \tilde{\beta}} \right) \tilde{E}_{0_I}.$$

Inoltre se il conduttore è un conduttore perfetto allora è anche uno specchio perfetto, darà origine solo ad un'onda riflessa con un cambio di fase di  $\pi$

### 8.4.3 Dipendenza della permittività dalla frequenza

Abbiamo visto come le onde nella materia siano regolate da 3 parametri del materiale:

$$\epsilon \quad \mu \quad \sigma.$$

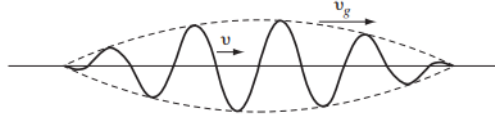
In realtà ognuno di questi parametri è in parte dipendente dalla frequenza, motivo per cui anche  $n$  lo è e motivo per cui un raggio di luce attraverso un prisma crea uno spettro di colori. Questo fenomeno è chiamato dispersione e ogni volta che la velocità dell'onda dipende dalla frequenza, il mezzo è chiamato dispersivo. Di conseguenza, un'onda con più frequenze che viaggia attraverso un mezzo dispersivo cambierà forma mentre si propaga, tipicamente un'onda molto "appuntita" si smussa essendo che ogni componente sinusoidale viaggia alla sua velocità d'onda (o di fase)

$$v = \frac{\omega}{k}$$

La velocità del pacchetto invece è detta velocità di gruppo

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

L'energia è portata viaggia a  $v_g$



Dopo questa piccola parentesi, costruiamo un modello (il più semplice possibile) per le forze che agiscono su un elettrone legato al suo nucleo, quando un'onda gli si avvicina:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\text{tot}} = F_{\text{binding}} + F_{\text{damping}} + F_{\text{driving}}$$

,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = qE_0 \cos(\omega t).$$

Se ci sono  $f_j$  elettroni con frequenza  $\omega_j$  e smorzamento  $\gamma_j$ , allora in un materiale con  $N$  molecole per unità di volume, la polarizzazione (del materiale, non del raggio) è la parte reale di

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{Nq^2}{m} \left( \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \right) \tilde{\mathbf{E}}$$

Abbiamo definito la suscettività come  $P = \epsilon_0 \chi_e E$ , quindi ora definiamo la suscettività complessa come  $\tilde{P} = \epsilon_0 \tilde{\chi}_e \tilde{E}$  e la permittività complessa

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 (1 + \tilde{\chi}_e).$$

In un mezzo dispersivo la parte elettrica dell'onda è

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}$$

lo smorzamento assorbe energia e l'onda è attenuata di un fattore  $\alpha = 2\kappa$  (2 essendo l'intensità proporzionale a  $E^2$ ) chiamato coefficiente di assorbimento. Per i gas la maggior parte delle volte l'indice di rifrazione aumenta all'aumentare della frequenza, ma vicino alla risonanza invece diminuisce bruscamente (questo fenomeno è chiamato dispersione anomala), in questo caso abbiamo anche il massimo assorbimento e il materiale risulta opaco. Dopo qualche approssimazione possiamo riscrivere  $n$  nella formula di Cauchy

$$n = 1 + A \left( 1 + \frac{B}{\lambda^2} \right)$$

$A$  è detto coefficiente di rifrazione e  $B$  di dispersione ( $\lambda = 2\pi c/\omega$ ).

## 8.5 Onde guidate

### 8.5.1 Guide d'onda

Consideriamo le onde EM confinate dentro un tubo vuoto (o guida d'onda), assumendo che la guida sia un conduttore perfetto e quindi abbia  $E=0$  e  $B=0$ . Le condizioni di bordo dei bordi interni del tubo sono

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E}^{\parallel} = 0 \\ B^{\perp} = 0 \end{array} \right\}$$



La forma generica di  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  è

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &= \tilde{\mathbf{E}}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}, \\ \tilde{\mathbf{B}}(x, y, z, t) &= \tilde{\mathbf{B}}_0(x, y) e^{i(kz - \omega t)}. \end{aligned} \right\}$$

e le equazioni di Maxwell sono

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \text{(iii)} \quad \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{(ii)} \quad \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \text{(iv)} \quad \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \end{aligned} \right\}$$

Ora possiamo trovare delle onde che soddisfino questi 3 sistemi. Il problema è che questa volta le onde non sono trasverse ma hanno una componente longitudinale  $E_z$  e  $B_z$ . Le componenti trasversali sono

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \frac{\partial B_z}{\partial y} \right) \\ E_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial E_z}{\partial y} - \omega \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ B_x &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \\ B_y &= \frac{i}{(\omega/c)^2 - k^2} \left( k \frac{\partial B_z}{\partial y} + \frac{\omega}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\}$$

che dipendono da quelle longitudinali

$$\left\{ \begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2 \right] E_z &= 0 \\ \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (\omega/c)^2 - k^2 \right] B_z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Se  $E_z = 0$  sono chiamate **TE** (trasverse elettriche), se  $B_z = 0$  **TM** (trasverse magnetiche) e se sono entrambi 0 **TEM**. Le onde TEM non possono però esistere se la guida è COMPLETAMENTE VUOTA.

## Capitolo 9

# Potenziali e campi

### 9.1 Formulazione del potenziale

#### 9.1.1 Potenziale scalare e vettoriale

Vogliamo trovare la soluzione generale alle equazioni di Maxwell, se nel caso statico bastavano la legge di Coulomb e quella di Gauss adesso vogliamo trovare il caso generale dipendente dal tempo. Cominciamo rappresentando il campo in termini di potenziali, sappiamo che

$$E = -\nabla V$$

e

$$B = \nabla \times A$$

se mettiamo tutto dentro la legge di Faraday otteniamo

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}$$

Che si riduce alla vecchia forma se  $A$  è costante. Troviamo poi le equazioni

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\left( \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}$$

Queste due equazioni contengono tutte le informazioni delle equazioni di Maxwell, ma sono brutte.

#### 9.1.2 Trasformazione di Gauge

Siamo riusciti a portare un problema da 6 a 4 dimensioni (3 per  $\mathbf{A}$ , 1 per  $V$ ). Vediamo se riusciamo ad imporre condizioni extra senza modificare  $E$  e  $B$ . Supponiamo di avere 2 set di potenziali  $(V, \mathbf{A})$  e  $(V', \mathbf{A}')$  corrispondenti allo stesso campo elettromagnetico, allora

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \boldsymbol{\alpha} \text{ and } V' = V + \beta$$

Senza entrare nella dimostrazione si arriva a

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla \lambda \\ V' &= V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned} \right\}$$

In pratica possiamo sommare il gradiente di una qualsiasi funzione scalare senza modificare  $\mathbf{A}$ , a patto che si sottragga simultaneamente  $\partial \lambda / \partial t$  da  $V$ . Queste sono chiamate trasformazioni di Gauge e possono essere utilizzate per aggiustare la divergenza di  $\mathbf{A}$  modificando quelle due equazioni che prima abbiamo chiamato brutte.

### 9.1.3 Gauge di Coulomb e Lorenz

#### Gauge di Coulomb

In questa trasformazione rendiamo  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  e la prima delle equazioni brutte diventa l'equazione di Poisson che noi già sappiamo risolvere. Il problema è che la seconda equazione rimane una merdata

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

#### Gauge di Lorenz

Questa volta prendiamo

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}$$

in questo modo le due equazioni diventano

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

che sembrano un casino della madonna ma questa trasformazione tratta  $V$  e  $\mathbf{A}$  come uguali utilizzando lo stesso operatore differenziale

$$\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square^2$$

chiamato d'Albertiano (derivato naturale del Laplaciano). In questo modo

$$\square^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

$$\square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

In questa forma  $V$  e  $\mathbf{A}$  soddisfano l'equazione d'onda non omogenea (l'equazione d'onda è  $\square^2 f = 0$  e possiamo ridurre l'intera elettrodinamica al risolvere l'equazione d'onda non omogenea).

### 9.1.4 Forza di Lorentz in forma potenziale

Possiamo riscrivere la forza di Lorentz in termini di potenziale

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} q \left[ -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right] = -q \left[ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \nabla(V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right].$$

La combinazione  $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{A}$  è chiamata derivata connettiva di  $\mathbf{A}$  e rappresenta la variazione nel tempo di  $\mathbf{A}$  al variare della sua posizione nello spazio (derivata totale  $d\mathbf{A}/dt$ ). Eliminando la derivata connettiva la forza di Lorentz diventa

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{p} + q\mathbf{A}) = -\nabla[q(V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})]$$

che ricorda il potenziale di un campo conservativo  $dp/dt = -\nabla U$ . Chiamiamo quindi momento canonico la quantità  $(\mathbf{p} + q\mathbf{A})$ . Possiamo applicare lo stesso ragionamento alla variazione nel tempo e nello spazio dell'energia e otterremo

$$\frac{d}{dt}(T + qV) = \frac{\partial}{\partial t}[q(V - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A})].$$

Questo ci porta ad interpretare  $\mathbf{A}$  come un potenziale del momento per unità di carica.

## 9.2 Distribuzioni continue

### 9.2.1 Potenziali ritardati

Nello stato statico le equazioni d'Albertiane si riducono a 4 copie dell'equazione di Poisson. L'informazione viaggia alla velocità della luce e nel caso non statico non conta quello che è ora ma quello che era al tempo  $t_r$  (detto tempo ritardato).

$$t_r \equiv t - \frac{r}{c}$$

la generalizzazione allo stato dinamico è quindi

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{r} d\tau', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{r} d\tau'$$

questi sono detti potenziali ritardati. La prova matematica dimostra anche l'esistenza di potenziali avanzati ma questi violano delle leggi fisiche come il principio di causalità e non sono quindi possibili.

### 9.2.2 Equazioni di Jefimenko

Dati i potenziali ritardati, il calcolo dei campi nasconde alcune problematiche. Infatti l'integrale dipende da  $r$  sia esplicitamente che implicitamente (tramite  $t_r$ ). Le equazioni non troppo utilizzate per questo integrale sono dette equazioni di Jefimenko

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[ \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', t_r)}{cr} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\ddot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{c^2 r} \right] d\tau'$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[ \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{r^2} + \frac{\dot{\mathbf{J}}(\mathbf{r}', t_r)}{cr} \right] \times \hat{\mathbf{r}} d\tau'$$

## 9.3 Cariche puntiformi

### 9.3.1 I potenziali di Liénard-Wiechert

Calcoliamo i potenziali ritardati di una carica in movimento. Il potenziale elettrico è il solito

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{r} d\tau'$$

ma la soluzione è diversa da quello che si pensa, non si può portare fuori la distribuzione elettrica così perché nell'elettrodinamica di Maxwell una particella è il limite di una distribuzione che tende a 0 e quindi come le dimensioni di un oggetto in movimento cambiano secondo la relatività speciale, allora anche la dimensione di una distribuzione di cariche cambia; in particolare

$$\int \rho(\mathbf{r}', t_r) d\tau' = \frac{q}{1 - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{v}/c}$$

Inoltre si dimostra che il punto percepito in un istante è solo uno. Si ricavano così i potenziali di Liénard-Wiechert

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{(rc - r \cdot \mathbf{v})}$$
$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\mathbf{v}}{(zc - r \cdot \mathbf{v})} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} V(\mathbf{r}, t)$$

### 9.3.2 Campi di una carica puntiforme in movimento

Dopo una lunga dimostrazione si arriva a

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(r \cdot \mathbf{u})^3} \left[ (c^2 - v^2) \mathbf{u} + r \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a}) \right]$$

dove  $u \equiv c\hat{r} - v$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

# Capitolo 10

## Radiazione

### 10.1 Radiazione del dipolo

#### 10.1.1 Cosa è una radiazione?

Quando le cariche accelerano emanano energia irreversibile fino a distanze infinite. Assumiamo che una carica sia localizzata vicino all'origine e calcoliamo l'energia irradiata al tempo  $t_0$ . Per fare ciò integriamo il vettore di Poynting dentro una superficie chiusa (la sfera con raggio tendente all'infinito è la superficie chiusa più facile). Essendo che l'informazione viaggia alla velocità della luce allora dovremo considerare  $t_0 + r/c$  ovvero il tempo affinché essa raggiunga la superficie. L'area di una sfera è  $4\pi r^2$ , quindi la radiazione del vettore di Poynting deve decadere ad una velocità non superiore a  $1/r^2$ . Nel caso statico Coulomb e Biot-Savart decadono entrambi a  $1/r^2$  quindi  $S$  decade a  $1/r^4$  e di conseguenza la radiazione vale 0. Nelle equazioni di Jefimenko però ci sono termini che decadono a  $1/r$  e quindi sono responsabili della radiazione elettromagnetica. Cominciamo con lo studio dei dipoli per poi passare al caso più complicato di una carica puntiforme che accelera.

#### 10.1.2 Radiazione del dipolo elettrico

Immaginiamo che ci siano due sferette di materiale conduttore ad una distanza  $d$  connesse da un filo sottile. Al tempo  $t$  la sfera sopra vale  $q(t)$  mentre quella sotto  $-q(t)$  e muoviamo una carica avanti e indietro seguendo

$$q(t) = q_0 \cos(\omega t)$$

Il risultato è il dipolo oscillante

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t) \hat{z}$$

dove  $p_0 \equiv q_0 d$ , allora il potenziale ritardato vale

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{q_0 \cos[\omega(t - r_+/c)]}{r_+} - \frac{q_0 \cos[\omega(t - r_-/c)]}{r_-} \right\}$$

Facciamo adesso le seguenti approssimazioni per un dipolo puro elettrico

- $d \ll r$
- $d \ll \frac{c}{\omega}$
- $r \gg \frac{c}{\omega}$

allora otteniamo

$$V(r, \theta, t) = -\frac{p_0 \omega}{4\pi \epsilon_0 c} \left( \frac{\cos \theta}{r} \right) \sin[\omega(t - r/c)]$$

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r} \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

Le ultime due equazioni rappresentano un'onda monocromatica che viaggia in direzione radiale alla velocità della luce. I campi sono mutualmente perpendicolari e trasversi e  $E_0/B_0 = c$ . in realtà queste sono onde sferiche e decadono come  $1/r$ . Infine

$$\langle P \rangle = \int \langle \mathbf{S} \rangle \cdot d\mathbf{a} = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

### 10.1.3 Radiazione del dipolo magnetico

Supponiamo che un loop di filo con raggio  $b$  venga applicata una corrente alternata

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

Questo è il modello per dipolo magnetico oscillante

$$\mathbf{m}(t) = m_0 \cos(\omega t) \hat{\mathbf{z}}$$

con  $m_0 \equiv \pi b^2 I_0$  allora

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I_0 \cos[\omega(t - r/c)]}{r} d\mathbf{l}'$$

Facciamo adesso le seguenti approssimazioni per un dipolo perfetto magnetico

- $b \ll r$
- $b \ll \frac{c}{\omega}$
- $r \gg \frac{c}{\omega}$

allora otteniamo

$$\mathbf{A}(r, \theta, t) = -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \sin[\omega(t - r/c)] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \cos[\omega(t - r/c)] \hat{\theta}$$

Ancora una volta i campi sono in fase, mutualmente perpendicolari e trasversali rispetto a  $\hat{r}$  con  $E_0/B_0 = c$  sono quindi similissimi alla struttura del dipolo elettrico con la differenza che le direzioni di B ed E sono invertite. Inoltre

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

Notiamo inoltre che per configurazioni di dimensione comparabile

$$\frac{P_{magnetic}}{P_{electric}} = \left( \frac{\omega b}{c} \right)^2$$

#### 10.1.4 Radiazione da una sorgente arbitraria

Applichiamo le solite procedure ad una distribuzione arbitraria di cariche e correnti che però è vicina all'origine ed è finita

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - r/c)}{r} d\tau'$$

e facciamo le nostre approssimazioni

- $r' \ll r$
- $r' \ll \frac{c}{|\ddot{\mathbf{p}}/\dot{\mathbf{p}}|}, \frac{c}{|\ddot{\mathbf{p}}/\dot{\mathbf{p}}|^{1/2}} \dots$
- scartiamo i termini di E e B tali che  $1/r^2$

I campi risultanti sono

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cong \frac{\mu_0}{4\pi r} [(\hat{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\mathbf{p}})\hat{\mathbf{r}} - \ddot{\mathbf{p}}] = \frac{\mu_0}{4\pi r} [\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}})]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cong -\frac{\mu_0}{4\pi r c} [\hat{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{p}}]$$

o in coordinate polari

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}(r, \theta, t) &\cong \frac{\mu_0 \ddot{p}(t_0)}{4\pi} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\theta} \\ \mathbf{B}(r, \theta, t) &\cong \frac{\mu_0 \dot{p}(t_0)}{4\pi c} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \hat{\phi} \end{aligned} \right\}$$

e potenza radiata

$$P_{\text{rad}}(t_0) \cong \frac{\mu_0}{6\pi c} [\ddot{p}(t_0)]^2$$

## 10.2 Cariche puntiformi

### 10.2.1 Potenza radiata da una carica puntiforme

Nel capitolo 9 abbiamo trovato i campi di una carica puntiforme q con moto arbitrario, nella formula di E il primo termine è detto campo delle velocità e il secondo campo delle accelerazioni. Non tutto il flusso di energia costituisce



radiazione, alcune parti sono portate a giro dalla particella e non si staccano mai. Come prima l'area è proporzionale a  $r^2$  quindi i termini che decadono più velocemente fanno 0 e per questo motivo i campi della velocità sono quelli trainati dalla particella. I campi di accelerazione sono detti anche campi di radiazione

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^3} [\mathbf{r} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})]$$

dopo qualche calcolo osserviamo che non c'è potenza radiata avanti e dietro ma solo ai lati della direzione istantanea di accelerazione (a forma di ciambella)

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

questa è detta formula di Larmor e vale solo per sistemi con velocità  $v \ll c$  altrimenti si deve usare la generalizzazione di Liénard

$$P = \frac{\mu_0 q^2 \gamma^6}{6\pi c} \left( a^2 - \left| \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c} \right|^2 \right)$$

### 10.2.2 Reazione alla radiazione

Una particella che accelera emette radiazioni, le radiazioni trasportano via energia alla particella che di conseguenza perde anche energia cinetica. Questo vuol dire che imprimendo la stessa forza a particelle di uguale massa (una carica, una carica nulla) la particella con carica nulla accelererà di più. La radiazione esercita una forza  $F_{\text{rad}}$  sulla carica (un rinculo), calcoliamola. Per particelle non relativistiche l'energia persa corrisponde alla potenza della radiazione

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} = -P = -\frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c}$$

Questa equazione è in realtà sbagliata, perché per ricavarla abbiamo trascurato l'energia dei campi di velocità mentre questi in realtà hanno un'energia che viene scambiata in continuazione con quella dei campi di accelerazione. Ma se facciamo la media in un periodo le cui condizioni di moto iniziali sono uguali a quelle finali allora è giusta e

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{v} dt = -\frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \int_{t_1}^{t_2} a^2 dt \rightarrow \mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{\mathbf{a}}$$

Questa è la formula di Abraham-Lorentz per la forza della reazione alla radiazione. Questa formula ha delle applicazioni particolari ancora non comprese ora. Supponiamo che una forza non sia soggetta a forze esterne, la seconda legge di Newton dice

$$F_{\text{rad}} = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} \dot{a} = ma \rightarrow a(t) = a_0 e^{t/\tau}$$

dove  $\tau \equiv \frac{\mu_0 q^2}{6\pi mc}$  allora questo vuol dire che l'Accelerazione aumenta esponenzialmente col tempo. Questo può essere evitato se imponiamo  $a_0 = 0$  ma arriviamo alla conclusione che se applichiamo forze esterne la particella comincia a rispondergli prima che non le mettiamo in atto. Questo è un problema acasuale di preaccelerazione che potrebbe dimostrare l'uso improprio di Maxwell di particelle puntiformi e infinitesimamente piccole.

### **10.2.3 Motivo della reazione alla radiazione**

In questa sezione guardiamo cosa è la reazione e arriviamo alla formula di Abraham-Lorentz in un modo diverso dalla sezione precedente. Come è ovvio che sia la reazione alla radiazione è data dalla forza dei campi (della particella e della radiazione) che agiscono tra di loro.

## Capitolo 11

# Elettrodinamica relativistica

Saltiamo la cinematica e la dinamica relativistica per andare direttamente all'elettromagnetismo.

### 11.1 Elettromagnetismo come un fenomeno relativistico

L'elettrodinamica è già in accordo con la relatività, quello che un osservatore interpreta come un fenomeno magnetico, un altro lo interpreta come un fenomeno elettrico ma il movimento delle particelle e le forze sono le stesse. Quello che faremo quindi è formalizzare il tutto in notazione relativistica mostrando anche la necessità di alcune leggi e collegamenti che nella notazione non relativistica non avevamo saputo notare. Per iniziare diciamo che il magnetismo è necessario che esista. Prendiamo un filo con due distribuzioni di carica uniformi e opposte, ipotizziamo che queste abbiano una velocità  $v$  e  $-v$  tale che la corrente sul filo è

$$I = 2\lambda v$$

Prendiamo adesso una carica  $q$  che si muova con velocità  $u < v$ . Il filo è elettricamente neutro, quindi non possono esserci forze elettriche che agiscono su  $q$ . Andiamo ora nel sistema di riferimento di  $q$ , in questo sistema le distribuzioni di carica vengono deformate e una in maniera diversa dall'altra (c'è un'asimmetria tra le velocità) e questa volta la carica totale non è neutra. Si osserva che il campo esercitato dalla distribuzione risultante osservata da  $q$  è

$$E = \frac{\lambda_{\text{tot}}}{2\pi\epsilon_0 s}$$

Questo campo fa sì che il filo eserciti una forza su  $q$ . Ma se è presente tale forza allora deve essere presente in tutti i sistemi di riferimento. Se infatti ritorniamo, trasformando relativisticamente la forza, al sistema di laboratorio (il primo descritto) otterremo che la forza è

$$F = \sqrt{1 - u^2/c^2} \bar{F} = -\frac{\lambda v}{\pi\epsilon_0 c^2} \frac{qu}{s}$$

Ovvero la stessa esercitata dal campo magnetico del primo sistema di riferimento.

## 11.2 Come trasformano i campi

Dati i campi in un sistema di riferimento S, quali sono i campi in  $\bar{S}$  (sistema che si muove verso x)? Questa trasformazione non deve dipendere dalla fonte dei campi perché la teoria dell'elettromagnetismo dice che conoscendo i campi abbiamo tutte le informazioni che ci servono. Partendo dall'assunzione che la carica si conserva arriviamo a

$$\begin{aligned}\bar{E}_x &= E_x, & \bar{E}_y &= \gamma(E_y - vB_z), & \bar{E}_z &= \gamma(E_z + vB_y), \\ \bar{B}_x &= B_x, & \bar{B}_y &= \gamma(B_y + \frac{v}{c^2}E_z), & \bar{B}_z &= \gamma(B_z - \frac{v}{c^2}E_y).\end{aligned}$$

Ci sono due casi speciali, quello per cui in S  $B=0$ , allora

$$\bar{\mathbf{B}} = -\frac{1}{c^2}(\mathbf{v} \times \bar{\mathbf{E}})$$

e quello in cui  $E=0$  in S, allora

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{v} \times \bar{\mathbf{B}}.$$

## 11.3 Il tensore dei campi

E e B non trasformano come la parte spaziale di due quadrivettori, ma come un singolo tensore antisimmetrico. La costruzione è facile e possiamo scrivere il tensore in due modi, il primo (ed il più utilizzato) è chiamato tensore dei campi

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Il secondo è noto come tensore duale

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ -B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ -B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo passare da uno all'altro invertendo  $E/c$  con B.

## 11.4 Elettrodinamica nella notazione tensoriale

La densità di carica è

$$\rho = \frac{Q}{V}$$

allo stesso tempo la corrente è

$$J = \rho u$$

Scriviamo la densità di carica propria, ovvero la densità di carica vista dal sistema di riferimento della carica.

$$\rho_0 = \frac{Q}{V_0}$$

dove  $V_0$  è il volume contratto. Allora avremo

$$\rho = \rho_0 \gamma \quad J = \rho_0 \gamma u$$

È logico mettere tutto insieme in un quadrivettore detto quadrivettore della densità di corrente

$$J^\mu = \rho_0 \eta^\mu$$

$$J^\mu = (c\rho, J_x, J_y, J_z).$$

Curiosamente  $\nabla \cdot J$  è la parte spaziale, mentre  $\frac{d\rho}{dt}$  è quella temporale, l'equazione di continuità  $\nabla \cdot J = -\frac{d\rho}{dt}$  diventa allora

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

Il che significa che il quadrivettore della densità di carica è solenoidale.

Le equazioni di Maxwell diventano

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \mu_0 J^\mu, \quad \frac{\partial G^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0,$$

La forza di Minkowski su una carica è

$$K^\mu = q \eta_\nu F^{\mu\nu}.$$

la parte spaziale è la forza di Lorentz (elettrica+magnetica), mentre la parte temporale è la potenza di questa forza (qEu).

## 11.5 Potenziali relativistici

Come si può immaginare, possiamo scrivere i potenziali come un quadrivettore

$$A^\mu = (V/c, A_x, A_y, A_z)$$

Possiamo quindi anche riscrivere il tensore di campo in termini di quadrivettore potenziale

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu}$$

L'equazione d'onda non omogenea diventa

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\nu} \right) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} \right) = \mu_0 J^\mu$$

che è intrattabile ma come sappiamo, i potenziali non sono unicamente determinati dai campi, possiamo aggiungere il gradiente di un qualsiasi scalare

$$A^\mu \longrightarrow A^{\mu'} = A^\mu + \frac{\partial \lambda}{\partial x_\mu}$$

senza cambiare il valore di  $F^{\mu\nu}$ . Questa è l'invarianza di Gauge che abbia già studiato. Applicando il Gauge di Lorenz all'equazione d'onda non omogenea questa diventa

$$\square^2 A^\mu = -\mu_0 J^\mu.$$