

LAB 2

Pietro Faraggiana

2021/2022

1 Introduzione

1.1 Quantità alla base dei circuiti elettrici

La forza che una carica immersa in un campo \vec{E} subisce è

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

In questo campo avrà anche un potenziale la cui differenza ΔV tra due punti A e B vale

$$\Delta V = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Vengono poi introdotte alcune equazioni sul moto degli elettroni studiate a Fisica 2 non importanti ai fini dello studio di LAB 2. In un circuito la carica viene portata dagli elettroni e viene definita intensità di corrente I come

$$I \equiv \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

che è anche una delle forme della **prima legge di Ohm**. Viene anche definita la potenza (o legge di riscaldamento di Ohm) come

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{V} = RI^2$$

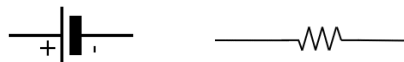
dove l'ultima equazione è la potenza di un generatore.

1.2 Circuiti elettrici

Diamo alcune definizioni:

- Si chiama nodo il punto in cui si diramano le correnti, cioè la congiunzione tra tre o più fili;
- Si chiama ramo il tratto di circuito che congiunge due nodi (adiacenti);
- Si chiama maglia la successione di rami che si richiudono su se stessi.

Il generatore è quel elemento di un circuito che genera la differenza di potenziale ai capi di una maglia, in genere si usa il colore rosso per indicare il senso positivo seguito dalla corrente e il nero il senso negativo (anche se si osserva che in realtà i portatori di carica sono gli elettroni e quindi la corrente dovrebbe seguire il senso negativo ma per definizione non è così). Oltre al generatore esistono altri componenti di un circuito come resistori, capacitori e tanti altri che studieremo...



A sinistra è il simbolo del generatore mentre a destra quello del resistore

Due elementi possono essere in

- Serie: sullo stesso filo conduttore uno dopo l'altro;

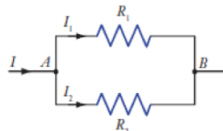
- Parallelo: su rami diversi .

È possibile sostituire alcuni componenti dello stesso tipo con un solo componente che ne misura il valore del componente equivalente. Una resistenza in serie vale



$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

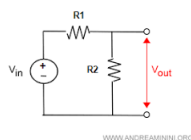
Una resistenza in parallelo vale



$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

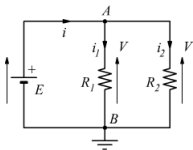
Per i capacitori invece funziona al contrario.

Studiando queste 2 equazioni è possibile costruire dei partitori di tensione



$$\Delta V = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_0$$

e dei partitori di corrente



dove ogni ramo ha corrente

$$\begin{aligned} \Delta V &= R_1 I_1 = R_2 I_2 \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1} \\ I &= I_1 + I_2 = I_2 \left(\frac{R_2}{R_1} + 1 \right) = \\ &= I_2 \frac{R_1 + R_2}{R_1} \Rightarrow I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I \end{aligned}$$

Per studiare i circuiti sono utili le leggi di Kirchhoff:

- In ogni nodo del circuito la somma delle correnti entranti deve essere uguale alla somma delle correnti uscenti

$$\sum_i I_i = 0 \text{ su un nodo};$$

- La somma algebrica delle tensioni contenute in una maglia è uguale a 0

$$\sum_i \Delta V_i = 0 \text{ su una maglia}.$$

Risolvere un circuito equivale nella pratica a scrivere un sistema di equazioni algebriche che contiene tante equazioni quante maglie indipendenti. Ognuna di queste equazioni lega, tra loro, grandezze elettriche di interesse, che per noi sono differenze di potenziale ΔV e intensità di corrente I . Esiste un teorema che stabilisce come trovare il numero di maglie indipendenti N_m basandoci sul numero di rami N_r e sul numero di nodi N_n :

$$N_m = N_r - N_n + 1.$$

Adesso abbiamo tutte le carte per risolvere i circuiti elettrici, poniamo uguale a 0 la tensione totale di tante maglie quante quelle indipendenti.

2 Misura di grandezze reali

Ogni componente di un circuito ha una sua tolleranza, ovvero un errore massimo dichiarato dal produttore, nel cui intervallo il valore effettivo del componente si trova. Durante le misure esistono due tipi di errore, l'errore di calibrazione (dato dal produttore) e l'errore di lettura (quello del misuratore, può essere un errore di parallasse, di digitalizzazione...).

È poi bene osservare anche il rumore, isolarlo e diminuirlo per poter ridurre l'errore; il rumore è l'insieme dei segnali impreveduti ed indesiderati che si sovrappongono al segnale utile. Uno degli strumenti più comodi per misurare valori in continua (diversa dalla corrente alternata che studieremo) è il multimetro, in laboratorio siamo dotati di due multimetri: quello digitale e quello analogico. Quando si misura con i multimetri, a causa proprio della loro multifunzionalità è bene sapere prima cosa stiamo misurando e l'ordine di grandezza della misura in modo da regolarne il fondo scala. La scelta del fondoscala è importante: se il fondo scala è piccolo rispetto al segnale da misurare, lo strumento va in overload, cioè "satura", con il rischio di danneggiarsi, se il fondo scala è (troppo) grande, la misura perde di significatività. Come utilizzare i multimetri e i loro errori è scritto sui manuali del particolare strumento utilizzato.

2.1 Funzionamento tester analogico

Il multimetro analogico è un dispositivo dotato di lancetta e (più) scale. La scala di tensione continua a 50 tacchette, ogni tacchetta vale $1/50$ del fondo scala. Possiamo schematizzare il suo funzionamento come una bobina di filo conduttore che può ruotare intorno ad un perno muovendo così la lancetta, la rotazione è contrastata da una molla con una certa costante di smorzamento che evita alla lancetta di oscillare indefinitamente. Infine la bobina è immersa in un campo magnetico costante generato da un magnete, questo fa sì che la corrente, scorrendo nella bobina, generi un flusso che si allineerà con quello del magnete creando così un momento di forze. Quindi la lancetta è proporzionale all'intensità di corrente che fluisce la bobina, è proprio questo fattore di proporzione che il costruttore calcola e a cui assegna una tolleranza (lo strumento è quindi un trasduttore). La resistenza interna è per costruzione non nulla e può essere rappresentata come una resistenza in serie all'amperometro o in parallelo al voltmetro. La multifunzionalità dei tester è dovuto all'uso della legge di Ohm, all'interno del multimetro analogico è presente un sistema di resistenze in serie e parallelo con un galvanometro che misura la corrente ($40\mu\text{A}$ corrisponde al massimo di un fondo scala).

2.2 Funzionamento tester digitale

Le grandezze elettriche sono misurate in continua, gli strumenti da noi utilizzati non sono tanto sensibili da poter "contare" gli elettroni. Anche nel tester digitale, la misura è prima fatta in analogico e poi digitalizzata. Un tester digitale può essere considerato in linea di massima un misuratore di ddp, la sua costruzione è più complicata, non entreremo quindi nel dettaglio ma è bene ricordarsi che anche questo ha una resistenza interna e anche questo è un trasduttore e quindi ha bisogno di una calibrazione con una tolleranza fornita dal costruttore.

2.3 Resistenze interne e misure alla Thévenin

Quando mettiamo uno strumento in un circuito, questo lo perturberà. Ciò è dato dal fatto che gli strumenti hanno una loro resistenza interna: l'amperometro ad esempio approssima il comportamento ideale quanto più piccola è la sua resistenza interna, mentre il voltmetro approssima il comportamento ideale quanto più grande è la sua resistenza interna. Per quanto riguarda l'analogico, la resistenza per la misura di tensione dipende dalla portata ($r=20\text{ k}\Omega$) ma non sono sempre sufficientemente alte da poter essere trascurate, di conseguenza il multimetro analogico non è un buono strumento per la misura di tensione. Il digitale invece ha una resistenza costante pari a $10\text{ M}\Omega$ ottima per le misure di tensione. Per le misure di corrente in genere si usa il termine caduta di potenziale e si ricava la resistenza tramite la legge di Ohm, per l'analogico $\Delta V_{\text{ins},fs} \approx 300\text{ mV}$ (100 mV per il fondo scala $50\text{ }\mu\text{A}$) mentre il digitale $\Delta V_{\text{ins},fs} \simeq 200\text{ mV}$, dunque per le misure di corrente i multimetri sono pressoché equivalenti. Quando misuriamo una grandezza con un multimetro questa ha associato un errore, l'errore è la somma in quadratura di errore di calibrazione (non stocastico) ed errore di lettura (stocastico).

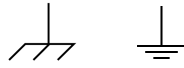
Anche un generatore reale è diverso da uno ideale ed ha una sua resistenza interna, basti pensare che se non fosse così, allora avremmo

$$P = \frac{V_0}{R} = \infty$$

il che è ovviamente impossibile.

Per studiare il comportamento di un generatore reale usiamo l'approccio di Thévenin: immaginiamo il componente come una scatola nera con un generatore ideale in serie ad una resistenza; misuriamo il potenziale con un voltmetro e poi colleghiamo una resistenza di carico in modo da creare il partitore di tensione e misuriamo la d.d.p. sempre con il voltmetro.

Nei circuiti reali sono spesso presenti questi due simboli:



- Il primo è il simbolo della **massa** ovvero la parte conduttrice accessibile di un impianto elettrico o di componente elettrico che può essere toccata durante il funzionamento ordinario e che non è in tensione nel normale funzionamento, ma che in seguito ad un guasto (ad esempio per cedimento dell'isolamento principale) può assumere tensioni pericolose verso terra tali da costituire un rischio per la sicurezza delle persone;
- Il secondo è il simbolo della **terra** ovvero l'insieme di azioni e sistemi volti a portare al potenziale elettrico del terreno un elemento metallico che si trovi a contatto con dispositivi elettrici.

3 Best-fit

Il best-fit è l'analisi quantitativa della discrepanza tra le misure e le previsioni del modello e la minimizzazione del χ^2 , una misura della distanza tra i due valori. Quando si esegue un best-fit, è sempre necessario specificare i seguenti risultati:

- L'espressione analitica della funzione modello;
- Il valore dei parametri ottenuti dal best-fit;
- L'incertezza su tali parametri;
- Il valore del χ^2 risultante;
- Nel caso dei fit a più di un parametro, la covarianza normalizzata (o correlazione).

3.1 Richiami sul fit del minimo χ^2

Eseguire un best-fit dei minimi quadrati secondo la funzione $f(x)$ richiede di minimizzare la somma dei residui (quadrati), cioè minimizzare la funzione

$$\sum_i [y_i - f(x_i)]^2.$$

Il valore del χ^2 invece è

$$\chi^2 = \sum_i \frac{[y_i - f(x_i)]^2}{(\Delta y_i)^2},$$

Se gli errori hanno origine principalmente stocastica, allora possiamo eseguire un test del χ^2 , altrimenti rimane comunque una misura della distanza complessiva tra misure e previsione. Infine spesso si parla di "chi quadro ridotto"

$$\chi_{rid}^2 = \chi^2 / ndof.$$

3.2 La matrice di covarianza

L'algoritmo di minimizzazione comprende anche una matrice C detta di covarianza. I valori sulla diagonale sono gli errori dei parametri al quadrato, gli altri sono la covarianza tra due parametri, il che fa della matrice di covarianza una matrice simmetrica. Una covarianza nulla implica che due parametri sono completamente scorrelati, per il resto è più facile parlare di covarianza normalizzata (o correlazione). Per un modello a due parametri

$$c_{ij} = \frac{C_{ij}}{\sqrt{C_{ii}C_{jj}}}.$$

3.3 Absolute sigma

L'opzione di Absolute sigma è un booleano della funzione `curve_fit`, la scelta di questa opzione non modifica i parametri ma la loro incertezza, infatti

$$\Delta p_m|_{\text{False}} = \sqrt{\chi_{rid}^2} \Delta p_m|_{\text{True}}.$$

L'opzione di default è False e viene usata quando l'errore è di origine sconosciuta oppure non stocastica, True invece se l'errore è stocastico. L'errore applicato se False è chiamato asymptotic error ed è l'incertezza se questa fosse ricavata da un campione contenente un numero infinito di misure (e quindi con $\chi_{rid}^2 \approx 1$), l'errore se True è detto Standard error ed è l'errore corrispondente all'intervallo di variazione del parametro, affinché il χ^2 aumenti di uno.

4 Corrente alternata e forme d'onda

La corrente alternata è un tipo di corrente i cui valori seguono una funzione d'onda. Tipicamente questa è centrata sulle ascisse e i valori oscillano sopra e sotto lo zero in maniera periodica, ciò denota la scrittura "*alternata*". Data la loro forma non è possibile osservare alcuni valori calcolati lungo la media poiché, questa, lungo un periodo è nulla

$$\langle \text{media} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) dt$$

per ovviare a ciò si osservano i suoi valori efficaci f_{rms}

$$f_{rms} = \sqrt{\langle f^2 \rangle}$$

Diamo adesso alcune formule per il calcolo immediato dei valori efficaci di alcuni tipi di onde:

- Onda sinusoidale

$$f_{rms} = \frac{f_0}{\sqrt{2}}$$

- Onda quadra

$$f_{rms} = f_0$$

- Onda triangolare

$$f_{rms} = \frac{f_0}{\sqrt{3}}$$

Dove $2f_0 = f_{pp}$ ovvero l'ampiezza picco-picco.

4.1 Misure di grandezze reali alternate

I multimetri non possono calcolare adeguatamente valori rms di funzioni d'onda poiché in elettronica non è facile costruire un valore quadratico, per ovviare questo si utilizza un raddrizzatore d'onda (diodo+integratore) che taglia le frequenze negative ma quello che viene restituito, benché simile, non è il valore corretto. Infatti integrando per onde sinusoidali V_+ (basta prendere l'intervallo di periodo in cui è positivo) ci accorgiamo che il fattore di moltiplicazione è $2/\pi$ diverso da $1/\sqrt{2}$ e superiore di 1.1. Il costruttore tiene conto di ciò e nel multimetro analogico mette una scala non lineare, in quello digitale probabilmente moltiplica la misura per un fattore 1/1.1. Questi aggiustamenti valgono solo però per l'onda sinusoidale e non per altre forme d'onda alternata.

5 Funzionamento di vari hardware

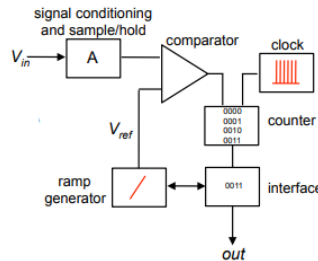
5.1 Arduino

5.1.1 Modello di digitalizzatore

Una grandezza può essere digitale o analogica. Le grandezze analogiche sono continue, quelle digitali sono discrete. A seconda della misura che andiamo a fare può essere più utile fare una misura digitale o una analogica, ma se vogliamo automatizzare le misure, allora è necessario usare un computer e quindi fare una misura digitale. Vediamo quindi come è possibile trasformare misure analogiche in digitali. Un dispositivo di questo tipo è chiamato digitalizzatore possiamo schematizzare il suo funzionamento nel seguente modo. Un digitalizzatore deve essere composto da:

1. Un clock, ovvero un dispositivo in grado di generare impulsi equispaziati nel tempo;
2. Un contatore, ovvero un dispositivo in grado di contare gli impulsi del clock e dotato di un comando di reset del conteggio;
3. Un'interfaccia digitale, ovvero un processore in grado di trasformare l'output del contatore in un uscita digitale;
4. Un generatore di rampa, ovvero un dispositivo in grado di creare un segnale crescente (per arduino una d.d.p. crescente con un trigger);
5. Un comparatore, un dispositivo in grado di confrontare i due segnali e fornire un output dipendente da essi.

Questi dispositivi possono essere rappresentati con il seguente diagramma



Nella pratica il segnale in ingresso viene "condizionato", ovvero subisce delle modifiche, prima di arrivare al comparatore.

La conversione da analogico a digitale è in un certo senso una misura del tempo e quindi ogni misura richiede del tempo per essere effettuata (chiamiamo questo tempo di digitalizzazione Δt_{dig}); inoltre una volta effettuata la misura è presente un altro tempo che è quello necessario per l'elaborazione di tale misura. Questo tempo si va a sommare a Δt_{dig} dando Δt .

Seguire l'evoluzione temporale di un segnale facendone misure digitali, in istanti discreti, corrisponde ad un campionamento temporale del segnale.

Per segnali ad alta frequenza, è necessario che il segnale sia mantenuto costante durante la presa della misura Δt_{dig} , questa azione è fatta da un circuito detto sample and hold (lo schema più facile è un condensatore).

Possiamo dire che le due caratteristiche che denotano la qualità di un digitalizzatore sono:

- Il massimo rate di campionamento, ovvero la rapidità di risposta del comparatore e della ripidità della rampa prodotta;
- La dinamica di digitalizzazione, ovvero il numero di conteggi che può essere registrato (espresso in bit).

Infine esiste un'incertezza di digitalizzazione di natura stocastica.

5.2 Arduino

Arduino costituisce un primo esempio (nato per scopi didattici) di interfaccia A/D e D/A. Il cuore di Arduino è un microcontroller dotato di 8 digitalizzatori corrispondenti alle porte A0-A7, questi possono campionare segnali (d.d.p.) analogici e convertirli in interi con una dinamica di 10 bit (1024 livelli in binario). La portata, corrispondente alla d.d.p. alimentata dal computer, è di 5V, di conseguenza abbiamo che la sensibilità di un bit è $5/1023 \sim 5\text{mV}$; esiste la possibilità di operare con una tensione di riferimento, generata da arduino stesso, pari a 1.1 V e quindi con sensibilità $\sim 1\text{ mV}$. Tipicamente $\Delta t_{dig} = 12 - 15\mu\text{s}$ e $\Delta t = 40 - 50\mu\text{s}$, corrispondenti ad un rate di campionamento di circa 20kSa/s.

Arduino è dotato di una CPU che deve essere istruita affinché compia le operazioni da noi desiderate.

Le istruzioni di Arduino possono essere scritte sul computer, il file di testo si chiama sketch (lo sketch è scritto in un linguaggio che ricorda molto C). Una volta scritte le istruzioni queste vengono memorizzate in Arduino, quindi non basta scollegare la presa USB ma è necessario sovrascrivere le istruzioni per cambiarle. Prima di essere trasferito al computer il record viene memorizzato in una memoria di 2kB (SRAM) di Arduino e poi vengono mandati al computer.

5.2.1 Calibrazione Arduino

Per i nostri scopi arduino viene utilizzato principalmente come misuratore di d.d.p., è necessario quindi convertire le unità digitali (digit) in unità fisiche (V). Esistono due modi per calibrare Arduino:

- La calibrazione è fatta per confronto, cioè attraverso un campione di unità di misura calibrato. Misureremo alcune grandezze attraverso il multimetro digitale che useremo come campione di riferimento, dopodiché le invieremo ad Arduino per un confronto. Dobbiamo mettere in dubbio l'assenza di offset e la linearità del modello. Facciamo quindi un best-fit con il modello

$$\Delta V = \alpha + \beta X.$$

Nel caso del prof otteniamo

$$\begin{aligned}\alpha &= (19 \pm 3)\text{mV} \\ \beta &= (4.87 \pm 0.02)\text{mV/digit} \\ \chi^2/\text{ndof} &= 43/17 \\ \text{norm.cov.} &= -0.65 \\ \text{absolute_sigma} &= \text{False} .\end{aligned}$$

L'accordo tra dati e modello è scarso, soprattutto per bassi valori di V dove probabilmente non ha un comportamento lineare, ed è presente un offset.

- Vediamo adesso un secondo modo di calibrare, questa calibrazione è detta alternativa. Assumiamo l'andamento lineare e privo di offset, allora

$$\Delta V = \xi X.$$

Come sappiamo V_{max} corrisponde a 1023 digit (va da 0 a 1023 per un totale di 1024 punti), allora

$$\xi = \frac{V_{ref}}{1023}.$$

Noi conosciamo V_{max} solo quando equivale alla tensione di riferimento pari a 1.1V, nel caso non usassimo ΔV_{ref} allora dobbiamo individuare la porta con livello alto e misurare ΔV con il multimetro. Il prof ha ottenuto $\xi = (4.83 \pm 0.03)\text{mV/digit}$ compatibile con β del best-fit.

5.3 Generatore di funzioni

Il generatore di funzioni è uno dei più comuni strumenti che si possano trovare in un laboratorio di fisica. Questo dispositivo permette di creare differenze di potenziale di funzioni periodiche decidendone: frequenza, forma d'onda, simmetria (duty cycle) e offset. La resistenza interna è di 50 Ohm e spesso non trascurabile. Il generatore di funzioni non è perfetto e spesso da il suo meglio dopo che è acceso per molto tempo; le onde in uscita sono anch'esse deformate, in particolare: l'onda sinusoidale è appiattita, l'onda quadra ha delle salite e discese lipschitziane e l'onda triangolare presenta tratti non lineari. La scelta di un'arbitraria frequenza è difficile, esse sono soggette a fenomeni di jitter e drift, tuttavia grazie al contatore di frequenze, lo strumento presenta un'alta sensibilità. La grande sensibilità è dovuta al fatto che misurare la frequenza può essere ridotto a misurare i periodi prodotti da un clock, quindi l'errore statistico può essere ridotto ad un singolo periodo (i clock funzionano con auto-oscillatori). Infine la misura richiede un po di tempo per essere fatta, questo tempo è chiamato gate. L'errore di un generatore di funzioni è *sulla carta* la somma in quadratura di un digit più 20ppm (parti per milione), nella realtà l'errore aumenta a causa dei, già detti, fenomeni di jitter e drift.

5.4 Oscilloscopio

5.4.1 Aspetti generali

Facciamo riferimento al modello in uso in laboratorio (ISR-6051). Questo oscilloscopio presenta due canali di ingresso che misurano differenze di potenziale tra l'ingresso e a terra. La resistenza di ingresso è di 1 MOhm e la banda passante di 50 GHz, questa ampia banda fa sì che l'oscilloscopio capti spesso radiofrequenze presenti nell'ambiente, questo porta alla creazione di rumore (ad alta frequenza) che si va a sommare al segnale. Esiste anche un altro tipo di rumore, questo a bassa frequenza (50 Hz), dato dall'oscillazione periodica della corrente alternata dell'impianto elettrico (rumore di pick-up). L'oscilloscopio serve per visualizzare i segnali alternati ma viene comunque spesso utilizzato per le misure di tensione, queste misure presentano un grande errore; generalmente, sia per il tempo che per la tensione, si associa un errore di calibrazione pari al 3% della misura, sommato in quadratura con l'errore di lettura dato dall'ampiezza della linea per fare le misure. L'oscilloscopio, come il generatore di funzioni, deve termalizzare, questo significa che è bene lasciarlo acceso ma abbassare la luminosità che potrebbe rovinare lo schermo.

5.4.2 Principio di funzionamento

Quello che vediamo sullo schermo dell'oscilloscopio è un grafico prodotto da una penna che può muoversi molto rapidamente e usa un inchiostro che si cancella dopo un tempo breve, paragonabile al tempo tipico di persistenza delle immagini sulla retina umana. Stando sempre sul generale abbiamo un tubo a raggi catodici (tubo di vetro vuoto) di cui una faccia è lo schermo da noi visto, all'interno si trova un filamento riscaldato (per effetto joule) di elettroni che si liberano tramite un effetto termoionico. Gli elettroni vengono accelerati tramite una d.d.p. che li conferisce grande energia cinetica e fa sì che illuminino lo schermo cosparso di materiale fluorescente. Il raggio di elettroni (detto pennello elettronico) passa attraverso due placchette, esterne al tubo, che presentano campi elettrici dati dalla d.d.p. in ingresso e ne modificano la direzione in modo da disegnare le onde sullo schermo.

Modo di operazione X-Y

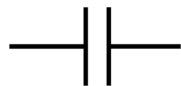
La modalità di operazione X-Y è utile per verificare istantaneamente la presenza di uno sfasamento. Questa modalità non considera la variabile temporale e associa alla d.d.p. una coordinata, se abbiamo due segnali e supponiamo che siano uguali e con sfasamento $\pi/2$ allora avremo due funzioni seno e coseno che formano una circonferenza. Supponiamo che lo sfasamento sia diverso, allora la circonferenza deforma in un'ellisse e in caso di sfasamento pari a π o un suo multiplo, abbiamo una retta.

5.4.3 Stadio di ingresso

Lo stadio di ingresso è quello che modifica le tensioni in ingresso nei canali prima che queste raggiungano le placchette di deflessione. Questo stadio presenta un fattore di scala, un offset di scala e un filtro passa alto (un condensatore) utile quando vogliamo tagliare la componente continua. Se non ci interessa tagliare la componente continua, allora è bene mantenere DC poiché AC funge da derivatore in alcune condizioni e allora modifica l'ampiezza effettiva dell'onda.

6 Condensatori e cicli di carica scarica

Un condensatore C è un componente di un circuito capace di immagazzinare energia e quindi informazioni (memoria). Il suo simbolo in un circuito è il seguente



L'equazione per ricavare C è

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Il lavoro fatto dal generatore per caricare un condensatore vale

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = U$$

All'opposto della resistenza un insieme di condensatori in serie si comporta così

$$\sum_i C_i = C_{eq}$$

mentre un insieme di condensatori in parallelo si comporta così

$$\sum_i \frac{1}{C_i} = \frac{1}{C_{eq}}$$

6.1 Tipi di condensatore

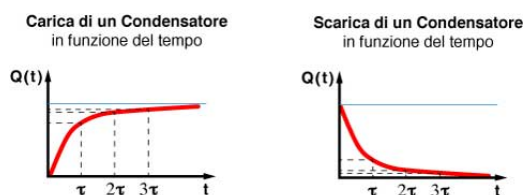
In laboratorio utilizzeremo principalmente due tipi di condensatore:

- Condensatori a carta: Sono dei fogli lisci di alluminio arrotolati (in modo da avere più superficie ed aumentarne la capacità). Non sono polarizzati e non permettono alte capacità per volume;
- Condensatori elettrolitici: Sono sempre dei fogli (armature) di alluminio ma questa volta è presente un liquido tra le armature (rugose per aumentare la superficie) che avvia un processo di elettrolisi. Sono polarizzati e permettono alte capacità per volume.

6.2 Condensatore in regime di tensione costante

In regime di tensione costante, il condensatore si carica e a regime raggiunge una situazione di equilibrio dove la carica sulle armature corrisponde esattamente alla caduta di potenziale V applicata moltiplicata per la capacità C secondo la relazione $Q = CV$; in tal caso, a regime, il condensatore si comporta come un 'circuito aperto' ovvero interrompe ogni flusso di corrente all'interno del circuito.

6.3 Utilizzo dei processi di carica-scarica di un condensatore



6.3.1 Scarica di un condensatore

Ponendo un condensatore carico in serie con una resistenza avremo lo scaricamento del condensatore. Attraverso alcuni calcoli arriviamo alle equazioni

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dove $\tau = RC$ è detto tempo caratteristico; in un grafico tracciando la tangente alla curva RC , nel punto di ascisse uguale a 0, sarà dove questa incrocia le ascisse.

6.3.2 Carica di un condensatore

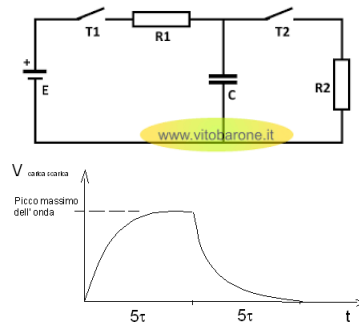
Ponendo un condensatore scarico in un circuito in serie con un generatore e una resistenza avremo il processo di carica del condensatore. Le equazioni di V e Q dipendenti dal tempo sono

$$Q(t) = \varepsilon C(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

$$V(t) = \varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Come prima τ è il tempo caratteristico (questa volta nel grafico tracciamo la tangente alla curva in $X=0$ e sarà all'incrocio della retta con la retta di derivata 0 che denota il massimo della curva), mentre $\varepsilon = RI - V(t)$ è la forza elettromotrice o tensione (banalmente V_0 in un circuito la cui tensione non dipende dal tempo).

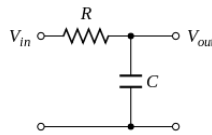
6.3.3 Processo di carica scarica



Possiamo realizzare in processo di carica scarica utilizzando un interruttore sincronizzato con il periodo della curva oppure utilizzando un onda quadra il cui periodo è sincronizzato con la curva del processo.

6.3.4 Integratore

Riprendiamo lo stesso circuito di prima dotato di una corrente alternata la cui onda è un onda quadra



Nei processi di carica e di scarica, affinché il condensatore si caricasse/scaricasse in maniera sufficientemente completa (ricordo che questi processi sono temporalmente asintotici) era necessario un periodo T dell'onda quadra molto maggiore del tempo caratteristico

$$T \gg \tau$$

ma cosa succede se invece il periodo è

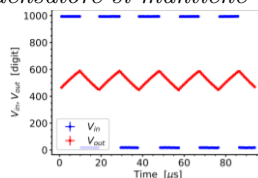
$$T \ll \tau?$$

In questo caso il processo viene tagliato prima del completamento e possiamo utilizzare Taylor per linearizzare l'onda in un intorno di 0 per vedere cosa succede

$$V(t) \propto (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \approx_{t \rightarrow 0^+} \frac{t}{\tau}$$

Dove t è il periodo dell'onda tagliata ed ha un massimo di $T/2$ (tempo massimo di carica/scarica normale) e (facendo la stessa cosa per il processo di scarica, ottenendo $-\frac{t}{\tau}$) dimostriamo che l'onda ottenuta è un onda triangolare la cui ampiezza è ovviamente notevolmente ridotta rispetto a quella dell'onda quadra di origine.

La riduzione dell'ampiezza può anche essere interpretata in modo diverso: il condensatore non fa mai in tempo ad accumulare una sufficiente quantità di carica sulle sue armature, per cui l'intensità di corrente I che fluisce nel circuito per giungere al condensatore si mantiene mediamente alta.



Cosa succede in generale a V_{in} e perché è detto circuito integratore? Noi sappiamo che

$$\tau \gg T \rightarrow V_{in} \gg V_{out}$$

$$V_{in}(t) - V_{out}(t) = RI \approx V_{in}$$

ma $I(t) = dQ(t)/dt$ e $V_{out}(t) = Q(t)/C$, otteniamo quindi

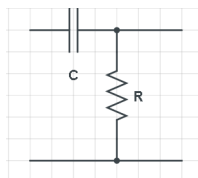
$$RC \frac{d(V_{out}(t))}{dt} = V_{in}(t)$$

$$V_{out} = \frac{1}{RC} \int V_{in} dt$$

Questo integrale è ovviamente un integrale analogico e quindi non ha estremi di integrazione ma se dovessimo darli finirebbe nel istante t in cui si fa la misura ed inizierebbe qualche τ prima, è quindi in un certo senso una media temporale. L'integratore ha vari utilizzi di uso comune (come l'aumentare il rapporto segnale rumore e in generale l'attenuare oscillazioni ma non sto qua a scriverli).

6.3.5 Derivatore

Il derivatore è il circuito opposto al derivatore ed infatti serve quando il segnale è piccolo e abbiamo bisogno di accentuarlo. Anche il circuito è l'opposto e abbiamo il condensatore in serie con il segnale



$$V_{out} = RI$$

$$V_{in} = \frac{Q}{C}$$

$$V_{out} = RC \frac{dv_{in}}{dt}$$

dove dt è dell'ordine di τ .

6.3.6 Alcune note su derivatore e integratore

Un integratore trasforma un onda nella sua funzione integrata

- Onda quadra \rightarrow Onda triangolare
- Onda sinusoidale \rightarrow Onda cosinusoidale
- Onda triangolare \rightarrow Archi di parabola

Un derivatore fa l'opposto

- Onda triangolare \rightarrow Onda quadra
- Onda Quadra \rightarrow Pezzi attaccati di esponenziale

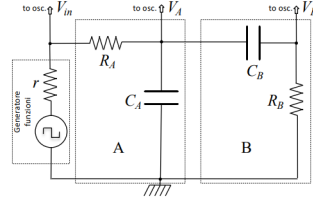
Per calcolare lo sfasamento di un onda basta prendere Δt all'origine e sapere che

$$\frac{\Delta \phi}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$$

spesso lo sfasamento è dato in π radianti e allora basta fare

$$\Delta \phi = 2f \Delta t$$

6.3.7 Derivatore+Integratore a cascata



Il primo circuito è un integratore mentre il secondo è un derivatore; sono detti in serie oppure a cascata. Questi due circuiti si comportano in un certo senso come un partitore di tensione ma più complesso, infatti dall onda entrante ne esce una uguale ma più attenuata (100-1000 volte dipendentemente dal dimensionamento). Bisogna fare attenzione che il circuito a valle (il derivatore) non disturbi quello a monte (l'integratore), osserviamo che i due condensatori hanno un capo in comune e sono quindi in parallelo con la stessa tensione in un capo quindi se

$$\tau_A = (C_A + C_B)R_A$$

Allora per forza

$$C_A \gg C_B$$

Introduciamo adesso il

$$\Delta V_{ripple}$$

come la differenza di potenziale picco-picco in un onda attenuata. Si osserva facilmente che

$$\tau = \frac{T}{2\Delta V_{ripple}}$$

7 Fasori

I fasori sono l'espansione analitica, di un'onda sinusoidale, nel campo complesso. da un punto di vista geometrico un fasore è un vettore nel piano complesso che gira con velocità ω attorno all'asse immaginario. L'onda $g(t) = \cos(\omega t + \phi)$ espansa diventa

$$g_\omega = g_0 e^{j\omega t} e^{j\phi} = g_0 [\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)]$$

dove $j = i = \sqrt{-1}$ e la norma è

$$|g_\omega| = g_0$$

g_ω può essere un'onda qualsiasi (V_ω , I_ω , Q_ω). Uno dei maggiori motivi di utilizzo dei fasori è la loro comodità a livello matematico, ad esempio

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_\omega &= j\omega g_\omega \\ \int g_\omega dt &= \frac{g_\omega}{j\omega} \end{aligned}$$

7.1 Impedenza

L'impedenza Z è una grandezza appartenente al campo complesso definita come

$$V_\omega = Z I_\omega$$

Come possiamo vedere assomiglia alla legge di Ohm (ma è un fasore) ed infatti si comporta come la resistenza nei circuiti (stesse equazioni per impedenza in parallelo ed in serie), inoltre la sua unità di misura sono gli Ohm. Possiamo definire in maniera qualitativa l'impedenza come quella grandezza che rappresenta l'opposizione di un circuito al passaggio di una corrente elettrica alternata (in regime di corrente continua rappresenta infatti la resistenza elettrica). L'impedenza è descritta matematicamente da un numero complesso, la cui parte reale rappresenta il fenomeno dissipativo e corrisponde alla resistenza elettrica, R , nella schematizzazione con elementi in serie; la parte immaginaria, detta reattanza, X , è associata ai fenomeni energetici di accumulo.

$$\begin{aligned} Z &= R + jX \\ \theta &= \arctan\left(\frac{X}{R}\right) \end{aligned}$$

Osservando la definizione avremo

$$\begin{aligned} Z_R &= R \\ Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} \end{aligned}$$

8 Filtri

I filtri sono dei circuiti che lasciano passare alcuni tipi di frequenze bloccandone altre. I tipi di filtri da noi studiati sono quelli ad un polo RC ovvero:

- Passa basso: lasciano passare frequenze più basse di una certa frequenza di taglio (costruito come un integratore).
- Passa alto: lasciano passare frequenze più alte di una certa frequenza di taglio (costruito come un derivatore).
- Passa banda: lasciano passare frequenze entro un certo range.
- Notch: Bloccano frequenze entro un certo range

I filtri passa banda e notch si costruiscono combinando i passa-alto e passa-basso.

8.1 Guadagni

Il guadagno $G(\omega)$ è il rapporto in valore assoluto tra $V_{\omega,out}$ e $V_{\omega,in}$ che non essendoci circuiti attivi (capaci di aumentare la d.d.p.) deve sempre essere ≤ 1 , motivo per cui sono anche dette attenuazioni $A(\omega)$. Teoricamente i guadagni vorrebbero essere 1 per tutte le frequenze nel range e 0 per quelle fuori ma nella pratica non è così e per trovare la funzione che descrive i guadagni utilizziamo la funzione di trasferimento $T(\omega)$. Trovarla è semplice, per un filtro passa-alto ad esempio faremo

$$\begin{aligned}V_{\omega,in} &= Z_{tot}I_{\omega} = \left(\frac{1}{j\omega C} + R\right)I_{\omega} \\V_{\omega,out} &= Z_R I_{\omega} = R I_{\omega} \\V_{\omega,out} &= \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} V_{\omega,in}\end{aligned}$$

dove

$$T(\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

8.2 Frequenza di taglio

Definiamo la frequenza di taglio come la frequenza che definisce il range delle frequenze che possono passare, matematicamente

$$\omega_T = \frac{1}{RC}$$

e quindi

$$f_T = \frac{1}{2\pi RC}$$

Ovviamente $\frac{\omega_T}{\omega} = \frac{f_T}{f}$ a questo punto possiamo riscrivere in forma più semplice T_{ω} :

- Per il passa basso

$$\begin{aligned}T(f) &= \frac{1}{1 + \frac{jf}{f_T}} \\G(f) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_T}\right)^2}} = |T(f)|\end{aligned}$$

si osserva come $G(f_T) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $G(\sqrt{3}f_T) = 1/2$ anche chiamato $G_{1/2}$

- Per il passa alto

$$\begin{aligned}T(f) &= \frac{1}{1 - \frac{jf_T}{f}} \\G(f) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f_T}{f}\right)^2}} = |T(f)|\end{aligned}$$

8.3 Sfasamento

Definiamo lo sfasamento tra $V_{\omega,in}$ e $V_{\omega,out}$ come il rapporto tra la parte immaginaria di $T(f)$ e la sua parte reale. Per il passa basso ad esempio

$$\tan(\Delta\phi) = \frac{ImT(f)}{ReT(f)} = -\frac{f}{f_T}$$

8.4 Decibel

I decibel [Db] sono un unità di misura adimensionale che utilizza una scala logaritmica, utile quando vanno rappresentate alcune misure "estreme" (molto grandi o molto piccole). Viene utilizzata per i guadagni (grandezza adimensionale) dove

$$G[Db] = 20 \log_{10} G$$

un'altra comodità è il comportamento dei logaritmi con le moltiplicazioni: se ad esempio voglia costruire un passa-banda dovremo costruire una cascata integratore + derivatore e quindi il guadagno alla fine del circuito sarà

$$G_{tot} = G_1 G_2 \quad \rightarrow \quad G_{tot}[db] = G_1[Db] + G_2[Db]$$

Questo tipo (20 decade Db) di decibel è utilizzato per le ampiezze mentre per le potenze come ad esempio l'intensità sonora si usa

$$P[Db] = 10 \log_{10} P$$

L'occhio e l'orecchio umano usano una scala logaritmica ed il suono ad esempio ha un intensità sonora di riferimento detta

$$I_{ref} = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

e quindi l'intensità sonora percepita è

$$I[Db] = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_{ref}} \right)$$

8.5 Altri tipi di plot

Per rappresentare i guadagni possiamo utilizzare uno spettro (grafico con le pulsazioni o le frequenze sulle ascisse e i guadagni sulle ordinate) oppure (meno utilizzati) possiamo usare

- Il bode plot: Uno spettro in scala semilogaritmica (frequenze sulle ascisse in scala logaritmica e guadagni[Db] in scala lineare sulle ordinate)
- Nyquist plot: il grafico costruito riportando sulle ordinate i valori della parte immaginaria e sulle ascisse quelli della parte reale della funzione di trasferimento calcolati per diverse frequenze.

9 Serie di Fourier per funzioni periodiche

Le serie di Fourier, anche dette "serie di seni e coseni" sono un potentissimo strumento utilizzabile per riscrivere una qualsiasi funzione. Noi guarderemo però solo le funzioni periodiche perché utili per i moti armonici in fisica. Sappiamo che nella realtà non esiste un moto armonico, oltre che per motivi tecnici, anche per il principio di monocromaticità di un'onda che non può essere soddisfatto. La serie di Fourier è la seguente

$$g(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} b_k \cos(\omega_k t) + \sum_{k=1} c_k \sin(\omega_k t)$$

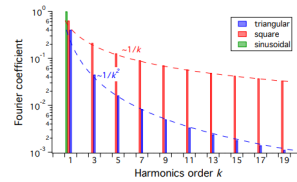
dove a_0 è il valore medio di $g(t)$, $\omega_k = k\omega$ e c_k e b_k valgono

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \cos(\omega_k T) dt$$
$$c_k = \frac{2}{T} \int_0^T g(t) \sin(\omega_k T) dt$$

La serie di Fourier è in realtà la punta dell'iceberg di un argomento più grande ("la trasformata di Fourier") necessario per trasformare le funzioni in spettri.

9.1 Spettro delle armoniche

Ogni armonica è moltiplicata per i coefficienti di Fourier b_k e c_k , questi coefficienti vanno a moltiplicare le funzioni sinusoidali e sono decrescenti all'aumentare dell'armonica. L'onda triangolare ha un fattore di decrescenza di $1/k^2$ mentre la quadrata di $1/k$, ciò significa che l'onda triangolare converge nettamente prima rispetto all'onda quadrata



10 Diodo

10.1 Semiconduttori

I semiconduttori sono degli elementi dall'elevata resistività, tipicamente hanno un comportamento NTC (al contrario dei metalli che hanno un comportamento PTC), ovvero la loro resistività diminuisce all'aumentare della temperatura. Questo è dato dalle loro proprietà intrinseche, infatti è proprio la loro composizione chimica (per gli elementi del quarto gruppo abbiamo quattro elettroni di valenza, una struttura molto stabile) che impedisce che gli elettroni possano fungere da portatori di carica. Teoricamente gli elementi del quarto gruppo sarebbero dei perfetti isolanti ma all'aumentare della temperatura viene anche fornita energia. L'energia necessaria per la rottura di un legame covalente (energia di gap) è $\approx 1.1\text{eV}$ mentre l'energia di un elemento a temperatura T è $k_B T \approx 1/40\text{eV}$ (a temperatura ambiente), quindi la probabilità che un legame si rompa (promozione da stato localizzato a stato delocalizzato) è non nulla seppur bassa. Questi elettroni "promossi" non si possono comunque muovere come in un metallo, dobbiamo quindi definire la mobilità come

$$\mu = \frac{|v_d|}{|E|}$$

dove v_d è la velocità di deriva ed E è il campo elettrico.

Quando un elettrone lascia un sito e si va a posare in un altro sito allora abbiamo un processo detto "ricombinazione", in questo processo è possibile individuare un elettrone (n) e il buco lasciato dall'elettrone, detto "lacuna" (p), come due separate entità. In generale $\mu_p < \mu_n$ (guardare effetto di Hall). Nei processi di ricombinazione è importante la legge di azione di massa ovvero $n_n \times n_p = k(T)$ dove n è la densità dei portatori di carica positiva e negativa e K è una "costante" fortemente dipendente dalla temperatura. Per il silicio $n_n = n_p = 10^{10}\text{at/cm}^3$.

10.2 Drogaggio

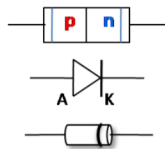
È possibile sostituire alcuni atomi di silicio con altri atomi del III o V gruppo (ad esempio riscaldando una fettina cristallizzata di silicio in un ambiente contaminato dal elemento drogante) per aumentare il numero di processi di ricombinazione; se ad esempio combiniamo fosforo e silicio, P avrà 5 elettroni di valenza ma si potranno connettere solo con i 4 del Si quindi un elettrone si rende disponibile per il processo di ricombinazione (P è donore), l'esatto contrario avviene ad esempio combinando Si e Boro, B ha solo 3 elettroni di valenza e quindi si rende libero ad accettare un elettrone (accettore). È importante notare come la carica complessiva sia comunque neutra e la legge di azione di massa sia sempre valida (a meno di elementi fortemente drogati che in tal caso vengono detti degeneri), la densità del silicio è 10^{22}at/cm^3 mentre quella del drogante può arrivare fino a 10^{19} , se un elemento è fortemente drogato può essere scritto come n^+ , n^{++} e per gli accettori p^+ , p^{++} . Oltre ai portatori di carica libera creati attraverso il drogaggio, che si chiamano maggioritari, esistono sempre anche portatori di carica di segno opposto, detti minoritari.

10.2.1 Giunzione p-n

Una volta drogati i due pezzi di silicio (per motivi tecnici lo stesso pezzo di silicio è drogato nei due diversi modi) avviene la diffusione (regolata dalla legge di Fick) delle cariche negative in n che vanno verso p e viceversa, queste cariche sono contrastate dal campo built-in e quindi dopo poco tempo si avrà un equilibrio dinamico nella zona ridotta detta di "svuotamento". Dopo un piccolo problema di elettrodinamica arriviamo alla conclusione che il campo elettrico built-in che nel silicio vale $\approx 0.7\text{V}$ e corrisponde ad una barriera di potenziale che separa le due zone p-n.

10.3 Diodo

Il diodo è una giunzione di quelle studiate fin ora.



10.3.1 Diodo non polarizzato

Un diodo non polarizzato è un diodo a cui non è applicata nessuna d.d.p. e le condizioni sono quelle trattate fin ora.

10.3.2 Polarizzazione inversa

Possiamo polarizzare inversamente un diodo collegando l'anodo al polo negativo ed il catodo al polo positivo. In questo caso la differenza di potenziale aumenta la barriera di potenziale rendendo quasi impossibile alle cariche di passare attraverso la giunzione, inoltre questa barriera richiama altri elettroni e lacune vicino a se aumentando le dimensioni della zona di svuotamento. In queste condizioni i diodi assomigliano molto a dei condensatori ed è infatti così che vengono utilizzati i diodi varicap. Inoltre come già detto ci si aspetta che non passi corrente (essendo il diodo in interdizione), tuttavia esiste una debole corrente, spesso trascurabile, chiamata "corrente di saturazione inversa". Questa corrente è fatta di portatori di carica minoritari (elettroni) che vedono una differenza di potenziale $\Delta U_{min} = -e\Delta V_{junct}$, questa corrente non dipende dal valore della ΔV applicata.

10.3.3 Polarizzazione diretta

Gli effetti sono opposti, la barriera di potenziale si abbassa e la zona di svuotamento si rimpicciolisce. Superata la tensione di soglia V_{thr} (dell'ordine della barriera di potenziale) il diodo lascia passare gran parte della corrente.

10.4 Modello di Shockley e curva caratteristica

Il diodo è un esempio di comportamento non ohmico, facendo un grafico I-V il comportamento della corrente è descritto da

$$I = I_0[\exp(\frac{\Delta V}{V_T\eta}) - 1]$$

questa equazione è detta modello di Shockley, I_0 è la corrente di saturazione inversa, η è un valore che dipende dalla struttura ingegneristica del diodo e V_T è un valore che dipende da T e per T=300K $V_T \approx 26mV$. Per $\Delta V < 0$ tende rapidamente a $-I_0$ che per i diodi utilizzati in laboratorio vale $1 - 10nA$, per $\Delta V = 0$ il diodo non è polarizzato, per $\Delta V > 0$ la corrente si mantiene bassa fino a V_{thr} , la tensione di soglia non è unicamente definita ma comunque vale generalmente $0.45 - 0.65V$, superato questo scalino i valori impennano e il termine -1 è trascurabile. Come si può facilmente osservare r è dinamica essendo il rapporto tra V e I.

10.4.1 Breakdown ed effetto Zener

Per forti correnti polarizzate inversamente ($V < V_{br}$ con V_{br} che vale -80 - -100V) i portatori minoritari raggiungono velocità di deriva v_d molto elevate e a causa delle piccole dimensioni del diodo si ha un effetto di breakdown dato dalla ionizzazione degli atomi del reticolo cristallino per collisione con i portatori di carica. Il fenomeno di breakdown è spesso distruttivo nei diodi di uso classico ma esistono alcuni diodi detti Zener che sfruttano questo effetto senza rompersi data la loro struttura ingegneristica.

10.4.2 Resistenza interna dei semiconduttori

Quando la corrente assume valori molto elevati in polarizzazione diretta, si osserva una curvatura del modello di Shokley che va ad assumere un comportamento ohmico. Questo è dato dalle resistenze interne dei semiconduttori che per I elevata rende la resistenza della giunzione trascurabile, un modello corretto a questo punto sarebbe

$$\Delta V = \eta V_T \ln(I/I_0) + R_{int}I$$

10.5 Resistenza della giunzione p-n

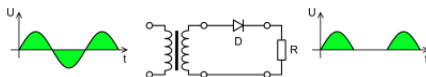
Per trovare le condizioni di lavoro di un diodo dobbiamo creare un sistema con il modello di Shockley e l'equazione che risolve il circuito, per un circuito aperto a V_0 continua si ha

$$\begin{aligned} V_0 &= rI + \Delta V \\ I &= I_0[\exp(\frac{\Delta V}{V_T\eta}) - 1] \end{aligned}$$

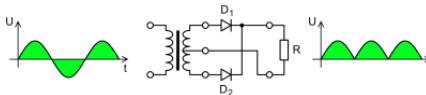
Per risolvere il sistema possiamo utilizzare una soluzione numerica oppure una grafica dove la prima equazione è ovviamente una retta (detta "di carico") e la soluzione è l'intercetta con Shockley. Trovate le condizioni di lavoro che indichiamo con v_q e i_q dove q sta per quiescent. a questo punto possiamo trovare la resistenza dinamica del diodo r_d con il rapporto di v e i. r_d corrisponde anche con il reciproco del coefficiente angolare della retta tangente al punto di lavoro oppure la cotangente (diversa dalla cosecante corrispondente alla resistenza effettiva (in continua) del diodo).

10.6 Applicazioni comuni del diodo

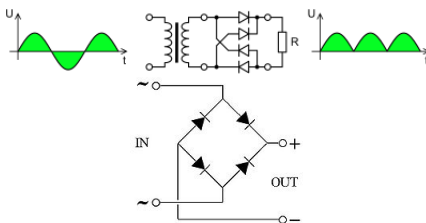
Il diodo può essere utilizzato come raddrizzatore a singola semionda ovvero come uno strumento che taglia le onde negative (polarizzazione inversa) e lascia passare (praticamente) invariate quelle positive (polarizzazione diretta).



oppure come raddrizzatore a doppia semionda.



Uno dei primi meccanismi per raddrizzare le onde è il ponte di Graetz, ancora oggi utilizzato negli alimentatori, che tuttavia ha lo svantaggio di far cadere la tensione come due diodi in serie.



11 Transistor

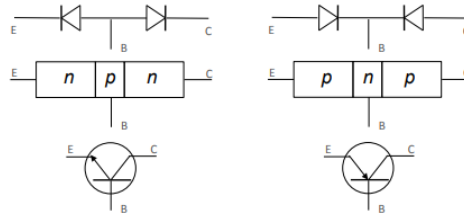
Il transistor BJT al silicio (meno utilizzato dei MOS-FET che però noi non utilizziamo) è il primo elemento attivo che vediamo dove per elemento attivo si intende un elemento che ci dà la possibilità di controllare qualcosa modificando qualcos'altro.

11.1 Doppia giunzione

Il transistor è un componente a tre elettrodi, se schematizzato, la sua costruzione può essere spiegata come 2 diodi in serie con polarizzazione opposte (pnp e npn ma noi studieremo solo npn) ma come vedremo ciò non spiega le sue caratteristiche di trans-resistenza (da lì il nome trans-resistor → transistor). I tre componenti del transistor sono i seguenti

- E: emettitore
- B: base
- C: collettore

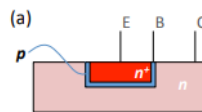
È possibile mettere in entrata o uscita uno dei 3 elettrodi mentre il terzo sarà in comune. La loro polarizzazione è l'una indipendente dall'altra (le tre combinazioni usate sono interdizione, saturazione e regime attivo) e in questo caso viene detto in polarizzazione diretta solo se $V > V_{thr}$.



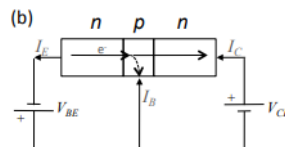
	BE	BC
Regime attivo	Diretta	Inversa
Saturazione	Diretta	Diretta
Interdizione	Inversa	Inversa
Sbagliata	inversa	diretta

11.2 Effetto transistor

Lo schema sopra ovviamente non rispetta bene la realtà, B è molto piccolo e circonda E mentre C circonda B, inoltre E è molto più drogata ed è spesso indicata con n^+ . Una forma più corretta è



Queste caratteristiche costruttive implicano una forte interazione tra le due correnti entranti nel transistor, guardando il seguente circuito vediamo che effetti hanno



BE è polarizzata direttamente attraverso V_{BE} mentre BC è polarizzata indirettamente attraverso V_{BC} . In queste condizioni il transistor è in regime attivo a base comune, un flusso di elettroni (portatori maggioritari nel emettitore che è n) entra in E e a causa del drogaggio una parte sorpassa B andando nel collettore. Questo è dato principalmente da tre motivi:

- Il drogaggio: l'emettitore è drogato n^+ quindi solo una parte degli elettroni riesce a ricombinarsi con le lacune della base B
- La polarizzazione: BE è polarizzata direttamente quindi la regione di svuotamento è piccola mentre BC è polarizzata inversamente quindi la regione di svuotamento è grande ed arriva oltre B
- La dimensione delle zone: B è molto piccola quindi gli elettroni che gli arrivano subiscono il campo di BC.

Seguendo il passaggio degli elettroni in maniera più completa: gli elettroni escono da V_{BE} e vanno nel emettitore polarizzato direttamente e molto drogato, giunti all'interfaccia BE alcuni elettroni si ricombina richiamando una piccola corrente di lacune (corrente I_B); la parte di elettroni che non si ricombina attratta dal campo della regione di svuotamento di BC fuoriesce da C (corrente I_C che per come è definita la corrente è entrante nel componente).

11.2.1 Correnti nel transistor

Quantifichiamo adesso l'effetto transistor. Ipotizziamo che le correnti entranti nel componente siano positive e quelle uscenti negative, allora l'effetto transistor è il seguente

$$I_C = -\alpha_F I_E$$

dove α_F è una costante che vale $\approx 0.95 - 0.999$ ciò significa che la quasi totalità della corrente salta B e va in C. Notiamo inoltre come il transistor non sia simmetrico e se inveriamo i ruoli di C ed E abbiamo

$$I_E = -\alpha_R I_C$$

dove $\alpha_R \approx 0.5$ infatti F sta per forward e R sta per reverse

11.2.2 Amplificazione di corrente

All'interno di un transistor non ci sono sorgenti di cariche, questo vuol dire che lo possiamo considerare come un nodo e quindi la somma delle tre correnti deve fare 0

$$I_C + I_B + I_E = 0$$

rimaneggiando otteniamo

$$I_C = \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F} I_B = \beta_F I_B$$

dove $\beta_F \approx 50 - 1000$, la corrente di collettore è quindi amplificata rispetto a quella di base. È qui che si vede il carattere attivo del transistor, infatti una corrente piccola controlla una corrente grande. Questo meccanismo può essere utilizzato per un guadagno di corrente oppure come switch (interruttore in cui il passaggio di una rilevante intensità di corrente è controllato da una ridotta intensità di corrente). È bene ricordare che il transistor è un componente che modifica ma non c'è un vero aumento di energia totale, anzi deve esserci una resistenza ed una dissipazione di energia, cosa che nei BJT porta spesso al surriscaldamento e ha fatto sì che questi uscissero quasi completamente dal mercato.

11.3 Equazioni di Ebers-Moll

Le equazioni di Ebers-Moll servono per capire in maniera analitica come funziona un transistor, esse sono simili a quelle del diodo ma con alcuni termini in più

$$\begin{aligned} I_E &= -I_{0E} \left[\exp\left(\frac{V_{BE}}{\eta V_T} - 1\right) \right] + \alpha_R I_{0C} \left[\exp\left(\frac{V_{BC}}{\eta V_T} - 1\right) \right] \\ I_C &= -I_{0C} \left[\exp\left(\frac{V_{BC}}{\eta V_T} - 1\right) \right] + \alpha_F I_{0E} \left[\exp\left(\frac{V_{BE}}{\eta V_T} - 1\right) \right] \end{aligned}$$

Queste equazioni si semplificano in un modo o nell'altro dipendentemente dal loro regime, per il regime attivo ad esempio

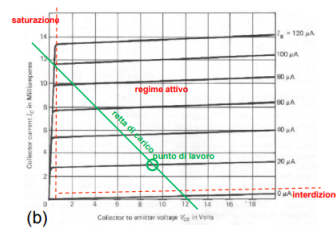
$$\begin{aligned} I_E &\approx -I_{0E} \exp\left(\frac{V_{BE}}{\eta V_T}\right) \\ I_C &= \alpha_F I_{0E} \exp\left(\frac{V_{BE}}{\eta V_T} - 1\right) \end{aligned}$$

Inoltre possiamo usarle per vedere cosa succede in interdizione ed in saturazione:

- Interdizione: in interdizione (doppia polarizzazione inversa) sono presenti solo le correnti di saturazione (i termini con l'esponenziale sono trascurabili), approssimabili a zero, quindi possiamo dire che in interdizione non ci sono correnti di emettitore e collettore.
- Saturazione: in saturazione i termini -1 sono trascurabili quindi ci sono correnti sia per la base che per il collettore, e la corrente di collettore è più intensa di un fattore β_F rispetto a quella di base; inoltre se $V_{BC} \approx V_{BE}$ allora essendo le correnti uguali ma di segni opposti, esse tendono ad annullarsi.

11.4 Configurazione ad emettitore comune e curve caratteristiche

Fin'ora abbiamo studiato solo il transistor a base comune, ora guarderemo quello ad emettitore comune (quella che dà gli effetti migliori). Dati i 3 elettrodi e le varie grandezze in gioco non è facile trovare relazioni (come ad esempio il modello di Shockley per il diodo) che mettano in relazione due grandezze. Sono anche qui usate le curve caratteristiche (ad esempio una curva di ingresso che mette in relazione I_B e V_{BE} nella giunzione BE è uguale alla curva del diodo). Un altro tipo di rappresentazione è quella a emettitore comune che riporta I_C in funzione di V_{CE} , in questo caso abbiamo due giunzioni e la funzione dipende anche da I_B , si creerà quindi una famiglia di funzioni.



Nel grafico possiamo vedere varie rette "parallele alle ascisse" date da $I_C = \beta_F I_B$ invece la prima parte dove le rette sono quasi parallele alle ordinate corrisponde al regime di saturazione mentre all'avvicinarsi all'asse delle ascisse abbiamo il regime di interdizione

11.4.1 Effetto Early

Possiamo notare nella precedente figura come le rette non siano parallele alle ascisse ma abbiano una leggera inclinazione, ciò è dato dal fatto che I_C è ancora leggermente dipendente da V_{CE} questo è dato dall'effetto Early, un effetto che prende piede all'aumentare della V_{CE} , ciò è dato da:

- L'aumentare della zona di svuotamento all'aumentare di V_{CE} negativa fa sì che gli elettroni che passano trovino poche lacune con cui ricombinarsi diminuendo la corrente di base e aumentando quella del collettore.
- Il campo elettrico del collettore diventa più intenso raccogliendo più elettroni.

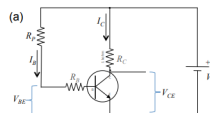
la corrente a quel punto corrisponde a

$$I_C \approx \beta_F I_B \left(1 + \frac{V_{CE}}{V_{Early}} \right)$$

dove V_{Early} vale diverse centinaia

11.5 Retta di carico e punto di lavoro

Per individuare il punto di lavoro di un transistor bisogna agire come per il diodo, se ad esempio abbiamo un circuito come quello in figura



la retta di carico è la seguente

$$V_0 = V_{CE} + R_C I_C$$

11.5.1 Interdizione e saturazione

In interdizione la giunzione BE è polarizzata indirettamente ovvero $V < V_{thr}$ per cui $I_B \approx 0 \approx I_C$.

In saturazione entrambe le giunzioni sono polarizzate direttamente, essendo il transistor considerato di tipo npn, affinché la giunzione BC sia polarizzata direttamente occorre che il potenziale al collettore sia minore di quello alla base. Inoltre $V_{CE} = -V_{BC} + V_{BE}$, dato che $V_{BE} > V_{thr}$ quindi V_{CE} deve essere piccola in particolare $V_{CE} < V' < V_{thr}$ dove V' dipende dal costruttore.

È importante notare come, a causa della costruzione del transistor, il regime del componente non sia un interruttore che può passare da attivo a saturazione a interdizione, ma bisogna guardare le sue caratteristiche e vedere a quale comportamento teorico si approssima meglio.

11.6 Comportamento a piccoli segnali (in configurazione ad emettitore comune)

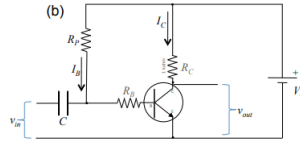
Un transistor in regime attico può comportarsi come amplificatore (un amplificatore è buono se la sua amplificazione è lineare, ovvero, se amplificato tutto alla stessa maniera), per fare ciò mettiamo il transistor in emettitore comune e in regime attivo, ciò vuol dire innanzitutto che è necessario creare un circuito di tensione continua che polarizzi correttamente le due giunzioni, poi essendo a emettitore comune la base è messa in ingresso mentre l'uscita è il collettore, inoltre i segnali che possiamo amplificare sono segnali piccoli variabili nel tempo. L'amplificazione è

$$\beta_f = \left. \frac{\partial i_c}{\partial i_b} \right|_{V_{CE}}$$

ed è dello stesso ordine di β_F (ma $\beta_f \geq \beta_F$) ed molto difficile da stimare come grandezza, 3 metodi possono essere: il modello lineare (usa parametri e matrici come h_{fe} ma non lo studieremo), best-fit con python, best-fit ad occhio.

11.6.1 Amplificatore di tensione

Uno dei principali motivi per cui la conformazione ad emettitore comune è così favorevole rispetto alle altre è che possiamo costruire un circuito per rendere il transistor un amplificatore di tensione.



Come possiamo vedere il segnale alternato viene inviato alla base e v_{in} è tra la base e la terra, C serve a disaccoppiare corrente continua (necessaria solo alla polarizzazione del componente) ed alternata, infatti l'impedenza di un condensatore è $1/\omega C$ e se il segnale è continuo allora questa tende all'infinito. Il guadagno è definito come $A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}}$ (quindi cerchiamo i vari valori che le definiscono); la sovrapposizione di I_B e i_b fa sì che il transistor sposti il suo punto di lavoro e modifichi anche I_C essendo $i_C = \beta_f i_b$, essendo BE polarizzata direttamente esiste una resistenza $r_b = \eta V_T / I_B$ dinamica (V_T è il solito mentre $\eta \approx 1.2$ ma in generale oscilla tra 1 e 1.5), per quanto riguarda i_c e possiamo trascurare i valori in continua e guardare la retta di carico, otteniamo $v_{out} = -R_C i_c$, otteniamo quindi

$$A_v = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{R_C}{R_B + r_b} \frac{i_c}{i_b} \approx -\frac{R_C}{R_B + \eta V_T / I_B} \beta_f$$

vediamo che l'amplificazione non dipende solo da β_f ma anche dalle resistenze, il meno implica uno sfasamento tra le due tensioni v_{in} e v_{out} . Notiamo come un'amplificazione di tensione e corrente implichi un'amplificazione di potenza (c'è un limite a quanto questa potenza possa essere amplificata e nel caso del nostro transistor questa è 0.8W).

11.6.2 Resistenze di ingresso e uscita

Tratta un metodo alternativo a come trovare la R_{in} e R_{out} .

11.6.3 resistenza di base

I transistor hanno molto spesso il problema del surriscaldamento, ciò è dato dal fatto che all'interno di un transistor esistono resistenze (come quella di giunzione piccola o grande se polarizzato direttamente o inversamente e quella dei semiconduttori), questo ha portato i costruttori a montare i transistor su dispositivi di dissipazione necessari per abbassare la temperatura.

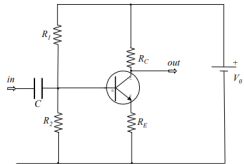
I semiconduttori hanno un comportamento di tipo NTC, questo porta la resistenza della giunzione BE (prendendo lo stesso circuito di prima) a calare modificando il nostro progetto. Per ovviare questo problema spesso al posto di R_P si usa un partitore di tensione ($R_1 + R_2$) ed una R_B molto minore a $R_{1,2}$, il risultato è che R_B viene a trovarsi in parallelo a R_2 e (se dimensionate bene) i suoi effetti sono trascurabili.

11.6.4 Resistenza di emettitore

Guardiamo la situazione termica del collettore: la corrente I_C insieme alla forte resistenza di giunzione CE (polarizzata inversamente) fa sì che il dispositivo aumenti di temperatura, diminuendo la resistenza e quindi aumentando I_C , questo porta ad un nuovo innalzamento della temperatura ed è l'inizio di una catena dannosa per il transistor. Per evitare questa catena di eventi è necessario porre una resistenza di emettitore R_E , la corrente che ci fluisce è $I_E = I_C$ perché I_B è trascurabile e provoca una grossa caduta di potenziale che porta l'emettitore ad un potenziale positivo rispetto alla terra e diminuendo V_{BE} mitigando l'effetto di surriscaldamento. Una descrizione migliore:
 I_C aumenta a causa dell'aumento di temperatura, dunque aumenta I_E e di conseguenza la caduta di potenziale ai capi di R_E . Questo provoca una riduzione di V_{BE} , che comporta una diminuzione di I_C e quindi degli effetti del surriscaldamento.
In pratica R_E ha una funzione di feedback. Vediamo ora come cambiano i guadagni con l'aggiunta di R_E

$$A_{V,RE} = \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\beta_f \frac{R_C}{r_b + R_B + R_E(1 + \beta_f)} \approx -\frac{R_C}{R_E}$$

vediamo quindi che l'aggiunta di R_E mitiga anche l'amplificatore, si tratta quindi di feedback negativo. Possiamo risolvere il problema aggiungendo un condensatore in parallelo a R_E che avendo impedenza nulla per segnali fortemente alternati riaumenta l'amplificazione aumentando anche il range delle v_{in} . Ecco il circuito risultante per non far surriscaldare il transistor



R_B non è scritta perché trascurabile.

11.7 Altre configurazioni

Non sto a scrivere tutti i passaggi come per l'emettitore comune (guardare nota prof se serve) ma lascio i circuiti per le corrette polarizzazioni e uno schema riassuntivo delle principali caratteristiche. Dato che la configurazione ad emettitore comune ha sempre impedenze dello stesso ordine, non è una buon circuito da ripetere a cascata, per evitare che la corrente vada a perturbare i circuiti successivi si usa la configurazione a collettore comune (difatti chiamata anche emitter follower) che ha una diversa impedenza.

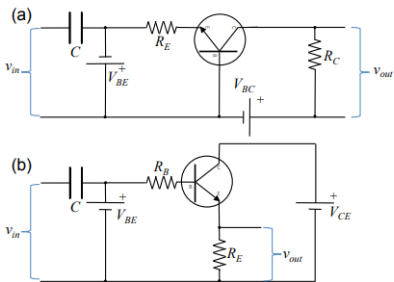
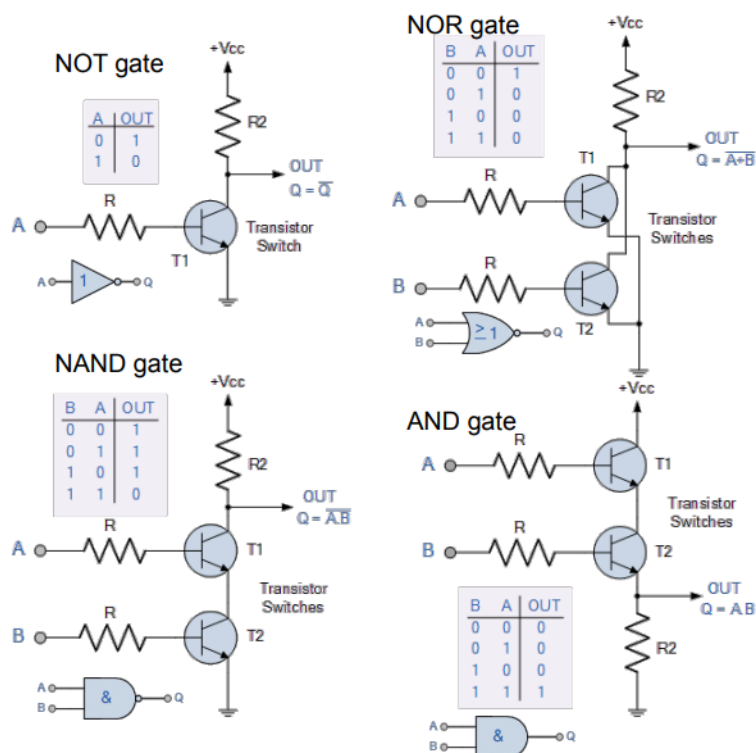


Figura 7. Schemi circuitali di possibili configurazioni con transistor *npn* a base comune (a) e emitter follower (b).

Characteristic	Common Base	Common Emitter	Common Collector
Input Impedance	Low	Medium	High
Output Impedance	Very High	High	Low
Phase Angle	0°	180°	0°
Voltage Gain	High	Medium	Low
Current Gain	Low	Medium	High
Power Gain	Low	Very High	Medium

11.8 Porte logiche con transistor BJT

La grande diffusione dei transistor è dovuta alla possibilità di creare degli "switch", ovvero delle porte logiche (anche se queste sono ormai superate da switch digitali e transistor MOS-FET). Lo switch, come logico che sia, ha la funzione spento/acceso che corrisponde a correnti basse e alte e in linguaggio binario 0 e 1; ecco un riassunto di alcune porte logiche.

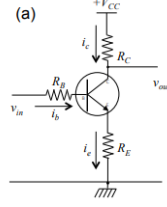


12 Feedback

Per questa nota tralascerò vari aspetti del funzionamento dei transistor, le impedenze di generatore e oscilloscopio e la perturbazione delle correnti di polarizzazione per facilitare la comprensione.

12.1 Filtro passa alto

Riprendiamo il circuito con meccanismo di feedback di prima



Le equazioni che descrivono il suo funzionamento sono le seguenti

$$\begin{aligned} i_e &= -\frac{i_c}{\alpha_f} = -(1 + \beta_f) i_b \\ v_{out} &= -R_C i_c = -R_C \beta_f i_b \\ v_{in} &= (R_B + r_b) i_b - R_E i_e = \\ &= [R_B + r_b + (1 + \beta_f) R_E] i_b \\ A_{V,RE} &= \frac{v_{out}}{v_{in}} = -\beta_f \frac{R_C}{R_B + r_b + (1 + \beta_f) R_E}, \end{aligned}$$

Come prima vediamo che la resistenza aggiunta per evitare il surriscaldamento del transistor ne diminuisce gli effetti di amplificazione (si tratta quindi di feedback negativo) e come prima aggiungiamo un condensatore in parallelo alla resistenza per permettere alla corrente alternata di passare senza peggiorare l'amplificazione. L'impedenza risultante dall'aggiunta del condensatore (considerando solo la corrente alternata) è

$$Z_{eq} = \frac{R_E}{1 + j\omega R_E C_E}$$

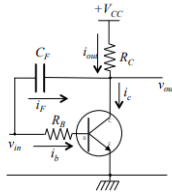
operando con i fasori possiamo quindi individuare la funzione di trasferimento

$$T_{R_E, C_E} = -\frac{v_{\omega, out}}{\omega, in} = -\beta_f \frac{R_C}{R_B + r_b + R_E \frac{1}{1 + j\omega R_E C_E}}$$

Come ovvio che sia l'impedenza tende a 0 per frequenze alte e, in quei casi, il guadagno diventa massimo, funzionando quindi da filtro passa alto.

12.2 Filtro passa basso

Il meccanismo di feedback prevede che una parte del segnale in uscita venga rimandato indietro al segnale in entrata. Per il filtro passa alto abbiamo visto nella precedente nota come funziona, tuttavia il funzionamento di questo feedback è piuttosto complicato, vediamo adesso un feedback più facile da capire. Un metodo più facile implica l'inserimento di un condensatore C_F come in figura



Il condensatore fa sì che il ramo si comporti come un circuito aperto per la corrente continua lasciando passare l'alternata i_f , questa si va a sommare ad i_{out}

$$i_f + i_{out} = i_c$$

(ricordo che essendo le correnti alternate i segni sono solo una convenzione perché in realtà è tutto a cazzo). Le equazioni che descrivono il circuito sono

$$\begin{aligned} i_{\omega,F} &= \frac{v_{\omega, in} - v_{\omega, out}}{Z_F} \\ i_{\omega,c} &= i_{\omega, out} + i_{\omega,F} \\ v_{\omega, out} &= -R_C i_{\omega, out} \\ v_{in} &= (R_B + r_b) i_{\omega,b} \\ i_{\omega,c} &= \beta_f i_{\omega,b} \end{aligned}$$

combinando le equazioni otteniamo

$$i_{\omega,out} = -\frac{v_{\omega,out}}{R_C} = -i_{\omega,c} - i_{\omega,F} = \beta_f \frac{v_{in}}{R_B + r_b} - \frac{v_{in}}{Z_F} + \frac{v_{out}}{Z_F}$$

dalla quale otteniamo $v_{\omega,in}$ e $v_{\omega,out}$ e quindi la funzione di trasferimento T_{ZF} , se ci limitiamo alla parte di nostro interesse

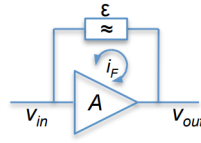
$$T_{ZF} = -\beta_f \frac{R_C}{R_B + r_b} \frac{1 - \frac{j\omega(R_B + r_b)C_F}{\beta_f}}{1 + j\omega R_C C_F}$$

Come possiamo notare la funzione differisce dal filtro passa basso solo per la presenza di un termine immaginario (molto piccolo) al numeratore, l'effetto di feedback negativo può essere descritto così:

In un amplificatore invertente a transistor ($A < 0$ dato dallo sfasamento di $\pm\pi$), il riportare una parte del segnale all'ingresso (con uno sfasamento di $\pi/2$ tra corrente e tensione) fa sì che ci sia una diminuzione del guadagno proporzionale al diminuire dell'impedenza rendendo il feedback negativo. Questo "messaggio di feedback" può essere visto come un filo che porta il segnale dall'entrata nel transistor di i_c a prima di R_B .

12.3 Feedback loop

Il ramo di feedback ha un effetto generalmente dipendente dalla frequenza rappresentato dalla funzione di trasferimento ϵ che collega ingresso e uscita dell'amplificatore il cui guadagno imperturbato è $A < 0$ (amplificatore invertente, supponiamo A reale, cioè trascuriamo eventuali effetti di sfasamento a carico dell'amplificatore imperturbato): in questo modo si realizza un feedback loop.



Dato

$$v_{\omega,out} = A(v_{\omega,in} + \epsilon v_{\omega,out})$$

il guadagno ponendo $\epsilon = B$ ovvero reale e positivo

$$A_F = \frac{A}{1 - AB}$$

Ciò vuol dire che il guadagno in valore assoluto è ridotto rispetto ad A cioè il feedback è negativo. Una conseguenza di questo approccio è "l'effetto Miller"

12.4 Feedback positivo

Supponiamo ora che la funzione di trasferimento ϵ sia tale da creare uno sfasamento di $\pm\pi$ tra v_{in} e v_{out} (inoltre sfrutti solo elementi passivi, quindi attenua), allora $-1 < B < 0$ e il denominatore $\rightarrow 0$ se $AB \rightarrow 0$ portando il guadagno in closed-loop a divergere. Ciò è, da un punto di vista fisico, chiaramente impossibile, questo porta il sistema ad auto-oscillare in maniera periodica prelevando potenza dal generatore e poi fermarsi per ricaricare. Alcuni esempi di feedback positivo sono: l'effetto Larsen, un microfono puntato verso lo stereo, il laser e il crollo del Tacoma Narrows Bridge. Auto-oscillazione e Ritardo sono collegati.

12.4.1 Ritardo ed auto-oscillazione

Immaginiamo che al tempo t il feedback mandi indietro il segnale passato a $t - \tau$ dove τ è il ritardo del feedback, allora

$$v_{out}(t) = A(v_{in}(t) + Bv_{out}(\tau - t))$$

essendo il ritardo piccolo, applichiamo Taylor al secondo ordine. L'equazione risultante somiglia molto all'oscillatore armonico forzato

$$\frac{d^2 v_{out}(t)}{dt^2} - (\gamma_+ - \gamma_-) \frac{dv_{out}(t)}{dt} + \omega_{auto}^2 v_{out}(t) = 0.$$

I due γ sono smorzamento e forzamento, ω_{auto} è la frequenza angolare di auto-oscillazione. Questo può verificarsi solo se $\gamma_+ > \gamma_-$ ovvero se il guadagno del feedback loop prevale sulle perdite. Per avviare il meccanismo di feedback positivo è necessario un innesco.

13 Trasformata di Fourier

13.1 Analisi di Fourier

L'analisi di Fourier è uno strumento utile per l'analisi di sistemi fisici "lineari", dove input e output sono collegati da una funzione di trasferimento (complesse). La trasformata di Fourier, strumento principale dell'analisi, consente di passare dal dominio della trasformata di Fourier (generalmente frequenze) al suo coniugato (tempo nel caso della frequenza ma in generale l'unità coniugata è quella per cui se un'unità viene moltiplicata il risultato è 1), l'operazione inversa è chiamata anti-trasformata. La trasformata di Fourier è un'espansione della serie di Fourier a funzioni qualsiasi (non necessariamente periodiche), per costruirla (in maniera intuitiva e non con una dimostrazione matematica), espandiamo la serie di Fourier al campo complesso

$$g(t) = \sum_{k=-n}^n d_k \exp(-j2\pi kft) .$$

e la trasformata di Fourier sarà d_k con la differenza che d_k è presa da 0 a t e che è divisa per T . In conclusione otteniamo che la trasformata di Fourier è

$$\mathcal{F}g(t) = \tilde{g}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp(j2\pi ft) dt$$

nell'anti-trasformata vengono previste frequenze negative. Il nostro maggior utilizzo della trasformata di Fourier sarà trasformare $g(t)$ in uno spettro di frequenze, questo ci permette di isolare il segnale dal rumore (due frequenze diverse), inoltre, essendo la trasformata complessa e essendo arduino capace di acquisire solo i segnali reali, ci interesserà solo il modulo della trasformata, la funzione $|\tilde{g}(f)|$ sarà uno spettro di densità che se preso per df infinitesimale corrisponderà alla δ di Dirac. La non monocromaticità (Monocromatica: onda periodica con una singola frequenza) della natura porta la δ di Dirac ad avere altezza e spessore finiti (ogni frequenza è accompagnata da varie diverse frequenze vicine alla frequenza originale e centrate in essa). Se volessimo disegnare lo spettro di frequenze ottenuto tramite la trasformata di Fourier di un'onda quadra, otterremmo lo spettro disegnato nel capitolo delle serie di Fourier (che diminuisce con fattore $1/k$). Per non appesantire la matematica l'unità di misura sarà arbitraria ($\tilde{g}(f)$ può essere scritta come densità spettrale di ampiezza). A volte si userà $|\tilde{g}(f)|^2$ in quanto corrisponde allo spettro di densità di potenza.

13.2 DFT e FFT

Il calcolo di quell'integrale non è semplice, anzi, nella maggior parte dei casi è impossibile, dobbiamo allora passare dal continuo al discreto (Discrete Fourier Transform) e calcolare la trasformata solo in alcuni punti. Uno dei metodi più utilizzati è l'FFT (Fast Fourier Transform), presente in tutti i linguaggi di programmazione per analisi dei dati (come Python).

14 Induttore

Un induttore è un componente elettrico in cui tutta l'energia elettrica assorbita è immagazzinata nel campo magnetico prodotto ($B \propto I$). Ogni induttore ha come sua caratteristica intrinseca un'induttanza che è a sua volta il coefficiente di autoinduzione di un induttore. Quando passa corrente elettrica attraverso un circuito questo genera un campo magnetico. Data la particolare forma (spirale) di un induttore, il campo magnetico generato va ad interferire con il passaggio di corrente e si genera un forte flusso di campo magnetico all'interno della spira (0 all'esterno in un induttore ideale). In pratica è detta autoinduzione perché il flusso magnetico è sia generato che percepito. L'induttanza di un induttore è definita come

$$L \equiv \frac{\Phi_s(\vec{B})}{I} [H]$$

Utilizzando la legge di Faraday arriviamo a scrivere l'equazione

$$\epsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

dove ϵ è la forza elettromotrice ed è uguale alla differenza di potenziale ai capi dell'induttore. Il segno meno può essere interpretato così: l'induttore reagisce ad una variazione del flusso del campo creato dalla corrente inducendo un flusso opposto che lo contrasti. Per comprendere meglio facciamo un esempio immaginiamo che I sia crescente nel tempo, allora anche il flusso del campo magnetico aumenterà di conseguenza: L'induttore tende a mantenere il suo stato di equilibrio e quindi crea un flusso di campo magnetico opposto dato che non lo può creare così dal nulla per farlo deve creare una piccola corrente (detta autoindotta) opposta a quella originale.

Definiamo adesso alcune qualità proprie dell'induttore:

Potenza

$$P = \Delta V_L I = LI \frac{dI}{dt}$$

Energia magnetica

$$\Delta U_M = \frac{LI^2}{2}$$

Impedenza

$$Z_L = j\omega L + r$$

dove r è la resistenza interna all'induttore.

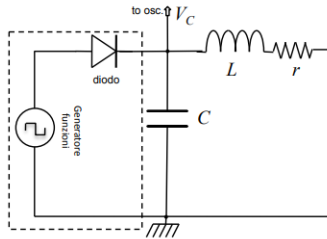
Fattore Qualità

$$Q_f = \frac{L}{RT}$$

il fattore qualità indica il rapporto tra l'energia immagazzinata e quella persa ogni ciclo, più esso è alto più l'induttore si avvicina ad un induttore ideale.

14.1 Circuito LRC

Prendiamo un circuito di questo tipo



L'equazione costitutiva del circuito, negli istanti successivi a t_0 dove il diodo è interdizione, è

$$\frac{Q}{C} - rI - L \frac{dI}{dt} = 0$$

ponendo $I = -dQ/dt$ e $1/LC = \omega_0^2$ otteniamo

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0$$

Che è chiaramente un oscillatore armonico smorzato (sottosmorzato nel nostro caso di interesse in laboratorio ovvero $\omega \approx \omega_0$). Le soluzioni REALI sono

$$Q(t) = A[\exp(-t/\tau)] \cos(\omega t + \phi)$$

dove $\tau = 2L/r$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 1/\tau^2}$ e $T = 2\pi/\omega$ (detto pseudo-periodo). Inoltre

$$A = 2\sqrt{c_1 \cdot c_2}$$

$$\tan \phi = j(c_1 + c_2)/(c_1 - c_2).$$

Infine il fattore di qualità è

$$Qf = \frac{\omega\tau}{2}.$$

14.2 Sovratensione e clipping

Guardiamo adesso cosa accade se la tensione V_G è troppo alta. Al tempo $t \rightarrow 0^-$ passa corrente attraverso l'induttore ed il condensatore che quindi si comportano come serbatoi di energia (una magnetica e l'altro elettrica)

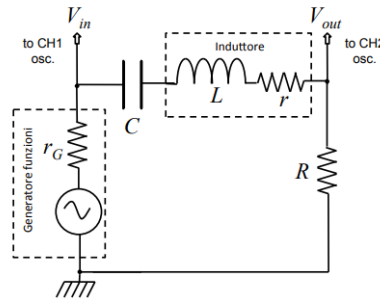
$$\Delta U_M = \frac{LI^2}{2}$$

$$\Delta U_E = \frac{Q^2}{2C}$$

usando come valori dei componenti quelli che useremo in laboratorio possiamo osservare come $\Delta U_M \gg \Delta U_E$, possiamo comparare l'energia magnetica a quella cinetica di un sistema meccanico mentre quella elettrica a quella potenziale. In queste condizioni quindi il nostro sistema è come un oscillatore prossimo alla sua posizione di equilibrio con velocità massima. Dopo $T/4$ allora avremo che l'energia magnetica sarà minima mentre l'energia elettrica sarà massima e ipotizzando che l'energia si conservi otteniamo che V_C raggiunge dei valori altissimi. Il fenomeno è anche spiegabile con la legge di Faraday: la brusca diminuzione della corrente crea una corrente autoindotta concorde necessaria per minimizzare il cambio di flusso, dall'equazione costitutiva del circuito otteniamo che ciò comporta un grosso aumento della ddp. Questi fenomeni sono detti sovratensione di apertura e extracorrente di chiusura. Nel nostro circuito questo non accade perché all'aumentare della tensione il diodo va in conduzione e si osserva che $-V_c < V_G$, questo fenomeno di tosatura è detto clipping ed è dato dal fatto che la ddp ai capi del diodo rimane la solita ovvero vicino ai calori di soglia.

14.3 Risonanza

Prendiamo il circuito in figura



Ripetendo i passaggi fatti per il circuito LRC arriviamo a

$$\frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + \frac{R'}{L} \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{LC} Q(t) = \frac{V_{0G}}{L} \cos(\omega t)$$

che è chiaramente un altro moto armonico. Se ci spostiamo nella soluzione a regime dopo il tratto iniziale possiamo usare il linguaggio fasoriale

$$V_{\omega G} = Z_{tot} I \omega$$

(che è $v_{in} + I_{\omega} r_G$) e dopo qualche passaggio arriviamo a scrivere la funzione di trasferimento tra $V_{\omega, in}$ e $V_{\omega, out}$

$$T(\omega) = \frac{j\omega RC}{j\omega(R+r)C + 1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

che razionalizzata dà

$$T(\omega) = \frac{j\omega RC \left[\left(1 - (\omega/\omega_0)^2\right) - j\omega(R+r)C \right]}{\left(1 - (\omega/\omega_0)^2\right)^2 + (\omega(R+r)C)^2}.$$

14.4 Risonanza nella serie e nel parallelo condensatore/induttore

Prendiamo un induttore ideale (la cui resistenza interna è quindi 0), la sua impedenza in serie con un conduttore sarà

$$Z_{tot} = \frac{1}{j\omega C} + j\omega L = \frac{1 - \omega^2/LC}{j\omega C}$$

è evidente che per $\omega^2 = LC$ questa si annulla. Se invece i due componenti venissero collegati in parallelo l'impedenza, per quella data frequenza, schizzerebbe all'infinito

$$Z_{tot}(j\omega C + \frac{1}{j\omega L})^{-1} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2/LC}$$

14.4.1 Risposta in frequenza

Lo sfasamento è dato da

$$\tan(\Delta\phi) = \frac{Im\{T(\omega)\}}{Re\{T(\omega)\}} = \frac{1 - (\omega/\omega_0)^2}{\omega(R+r)C}$$

tale funzione si comporta come un'arcotangente con zero sulla risonanza. Guardiamo ora la curva di risonanza

$$A(\omega) = |T(\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega(R+r)C)^2 + (1 - (\omega/\omega_0)^2)^2}}$$

a risonanza questa diventa

$$A(\omega) = \frac{R}{R+r} (\leq 1).$$

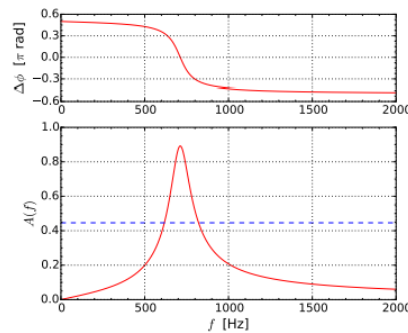
Volendo possiamo scrivere tutto in termini di frequenze moltiplicando per 2π

$$A(f) = \frac{2\pi f RC}{\sqrt{(2\pi f(R+r)C)^2 + (1 - (f/f_0)^2)^2}}$$

con $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$ frequenza propria dell'oscillatore.

14.5 Curva di risonanza

Quando montiamo il circuito di risonanza, verifichiamo innanzitutto che l'approssimazione di sotto-smorzamento sia ben verificata e prendiamo $R > r_C, r$. Vediamo dal calcolo di $A(f)$ che la curva di risonanza è una campana dalla forma asimmetrica e che lo sfasamento passa da 0 per la risonanza (per $f \rightarrow 0$ tende a $\pi/2$, per $f \rightarrow \infty$ tende a $-\pi/2$).



Tramite la trasformata di Fourier è possibile passare dalla curva all'andamento dell'oscillatore smorzato nel tempo, un possibile fit della curva è

$$g(x) = c_1 x / \left(\sqrt{(c_2 x)^2 + \left(1 - (x/c_3)^2\right)^2} \right)$$

con c_{1-3} (C, L, r) da determinare (in realtà $c_1 \simeq c_2$ quindi il numero di parametri è 2 e diminuisce la covarianza). Una quantità che caratterizza la curva è larghezza a metà altezza Δf_{fwhm} , per misurarla sperimentalmente è sufficiente trovare $V_{out}/2$ di $V_{out,max}$; occhio che però V_{in} non rimane inalterato, infatti $|V_{\omega in}| = ((R+r)/R')|V_{\omega G}|$, inoltre ci sono vari problemi dovuti alla termalizzazione, quindi V_{in} va tenuta costantemente sotto controllo. Ritornando a Δf_{fwhm} , uno modo per trovarla matematicamente è prendere Δf_{-3dB} , ovvero la distanza tra le frequenze in cui V_{out} è $1/\sqrt{2}$ volte il valore massimo di $V_{out,max}$. In alternativa

$$\Delta f_{fwhm} \approx \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{R+r}{L}$$

Da cui si vede che la larghezza della campana è (inversamente) proporzionale all'entità dello smorzamento (tempo), inoltre più lo smorzamento è piccolo, più la campana è simmetrica. Infine otteniamo

$$f_+ f_- = f_0^2.$$

14.5.1 Una visione alternativa

Possiamo anche vedere la curva di risonanza come un filtro passa alto, la serie RC forma un filtro passa basso, la serie RL un filtro passa alto. Realizzare un filtro passa-banda con un circuito LRC, comporta anche dei vantaggi:

- Minimizza i problemi di montaggio di una serie di circuiti;
- A patto di resistenza sufficientemente basse, permette bande relativamente strette;
- Permette curve di attenuazione più ripide.

14.6 Energia, potenza e fattore di qualità

Quando un sistema è a risonanza si ottiene il massimo trasferimento di potenza della forzante. Quando guardavamo l'oscillatore smorzato abbiamo notato come

$$E_{stored} = \frac{1}{2} L I_{max}^2$$

è facile rendersi conto come $I_{max}^2 \propto |V_{\omega,out}|^2$ e di conseguenza se supponiamo di trovarci in condizioni per cui $v_{\omega,in}$ costante mentre variamo la frequenza per costruire la curva di risonanza otteniamo che $E_{stored}^2 \propto A^2(f)$, dunque l'ampiezza dipende dall'energia al quadrato e può far comodo costruire uno spettro detto "spettro di energia". Nel caso in cui l'oscillatore sia molto poco smorzato allora lo spettro di energia tende ad una Lorenziana

$$h(x) = \frac{k_1}{k_2 + (x - x_0)^2}$$

Possiamo ripercorrere gli stessi passi osservando la potenza media

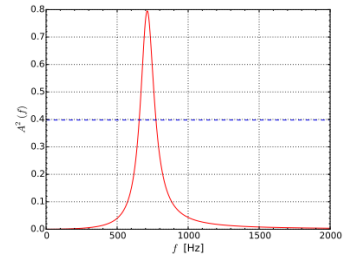
$$\langle P \rangle = (\Delta V_{max} I_{max} / 2) \cos(\Delta \phi)$$

dove $1/2$ ed il fattore di potenza (coseno) sono risultanti del calcolo integrale della media. rifacendo la proporzione tra $V(t) = V_{in}$ e $A^2(f)$ si arriva all'energia media dissipata

$$\langle P_{Joule} \rangle = \frac{R' I_{max}^2}{2}$$

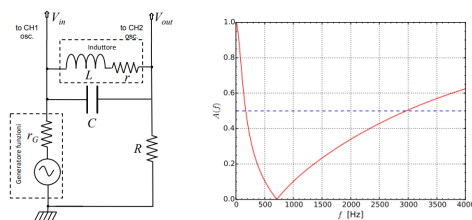
che se moltiplicata per il periodo proprio ci dà l'energia persa ogni ciclo; possiamo quindi ottenere il fattore di qualità

$$Q_f = 2\pi \frac{E_{stored}}{E_{lostpercycle}} = 2\pi \frac{L}{R'} f_0$$



14.7 Circuito antirisonante

Il circuito in figura è detto antirisonante poiché a risonanza $A(f) \rightarrow 0$. Data complicazione dei calcoli non riscrivo funzione di trasferimento e impedenza.



14.8 Correnti parassite, effetto pelle, trefoli e effetto di prossimità

Le correnti parassite sono le correnti che vanno a contrastare il cambiamento di flusso, la loro origine matematica è data dalla legge di Faraday.

L'effetto pelle è un effetto presente nella corrente alternata. Più la frequenza è alta più si distribuisce sul bordo del filo, questo è dato dal flusso del campo magnetico indotto dalla corrente alternata che spinge le cariche verso l'esterno; maggiore è la frequenza, maggiore è il flusso e quindi più esterne sono le cariche, portando ad una diminuzione del volume di passaggio e aumento della resistenza. Per ovviare questo problema si usano i trefoli, filetti di conduttore il cui diametro è minore della profondità di pelle; sfortunatamente questo porta all'effetto di prossimità, un altro fenomeno dissipativo.

15 Auto e mutua induzione

15.1 Mutua induzione

Come sappiamo dallo studio dell'elettrodinamica, campi magnetici variabili nel tempo, il cui flusso passa attraverso una superficie delimitata da un circuito, producono una corrente stimolata da una differenza di potenziale.

Per una trattazione generale usiamo i simboli i e j . Immaginiamo che una corrente variabile i scorra attraverso un circuito i , allora questo circuito produrrà un campo magnetico variabile. Se questo campo attraversa un altro circuito j allora cambiandone il flusso indurrà una corrente j in esso. Definiamo allora il coefficiente di mutua induzione come

$$M_{ji} = \frac{\Phi_j(\vec{B}_i(t))}{I_i(t)}.$$

una matrice quadrata (se abbiamo solo due elementi circuitali è una 2×2) e, osservando a sua definizione, simmetrica. Gli elementi sulla diagonale sono le autoinduttanze. La ddp indotta è

$$\Delta V_j = M_{ji} \frac{dI_i(t)}{dt}.$$

15.1.1 Energia e mutua induzione

L'energia magnetica di un sistema di due conduttori è ovviamente la somma delle energie delle varie induttanze

$$U_M = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2$$

che generalizzata diventa $U_M = \sum_{ij} M_{ij} I_i I_j / 2$.

15.1.2 Equazioni del primario e del secondario

Chiamiamo 2 circuiti primario e secondario, supponiamo che questi circuiti abbiano una bobina (in verità non serve ma è per rendere più chiaro il concetto di induzione magnetica) e una resistenza (inclusa quella interna della bobina). Adesso utilizziamo i fasori per scrivere il dominio delle frequenze le equazioni dei circuiti con segnali sinusoidali

$$\begin{aligned} V_{\omega 1} &= (R_1 + j\omega L_1) I_{\omega 1} + j\omega M I_{\omega 2} \\ V_{\omega 2} &= (R_2 + j\omega L_2) I_{\omega 2} + j\omega M I_{\omega 1}. \end{aligned}$$

Le due equazioni sono legate (un sistema di equazioni) essendo che i due circuiti interagiscono tra di loro. Il coefficiente di mutua induzione M dipende dalla geometria e dai materiali del circuito, possiamo riscriverlo come

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}$$

dove k è detto coefficiente di accoppiamento magnetico e si dimostra compreso tra 0 ed 1 (per la dimostrazione basta dividere l'equazione dell'energia per I_2^2).

15.2 Nuclei ferromagnetici e canalizzazione delle linee di campo

Il campo magnetico all'interno di un nucleo ferroso è aumentato di intensità rispetto ad un altro materiale (abbiamo approssimato il campo a $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$ ipotizzando che il materiale sia omogeneo, lineare e isotropo e il fatto che nel ferro $\mu_r \gg 1$). Tuttavia come abbiamo già visto i nuclei magnetici possono essere fonte di intense correnti parassite e schermature di campo accrescendo così i fenomeni dissipativi. Tuttavia si dimostra (con una dimostrazione incapibile) che all'interno di nuclei ferromagnetici si ha un fenomeno di canalizzazione dove le linee del campo di induzione magnetica all'interno di un materiale ferromagnetico tendono a disporsi parallelamente all'interfaccia. In altre parole, un materiale ferromagnetico di una certa forma costituisce una sorta di tubo di flusso per \vec{B} , per cui le linee del campo sono canalizzate all'interno della forma stessa. Questo effetto "geometrico" di canalizzazione può sicuramente essere sfruttato per "trasportare" le linee di campo da una bobina all'altra e quindi per aumentare il coefficiente di accoppiamento magnetico k (tuttavia a causa delle correnti parassite e schermatura dei campi del ferro k non può approssimarsi ad 1).

15.3 Primario e secondario in diverse configurazioni

Mettiamoci nelle condizioni di prima, ovvero: (due induttori accoppiati magneticamente, segnali sinusoidali, presenza di soli elementi resistivi nei circuiti oltre a auto e mutua induzione)

15.3.1 Secondario aperto

Nel primario scorre ddp sinusoidale, il secondario è aperto ($I_\omega = 0$ che nella realtà può essere ottenuta mettendo in serie una grossa resistenza come quella del multimetro o dell'oscilloscopio) allora

$$\begin{aligned}V_{\omega 1} &= (R_1 + j\omega L_1) I_{\omega 1} \\V_{\omega 2} &= j\omega M I_{\omega 1},\end{aligned}$$

e

$$T_{\text{open}} = \frac{j\omega M}{R_1 + j\omega L_1}.$$

Nell'ipotesi, comune, $\omega L_1 \gg R_1$ allora $T_{\text{open}} = M/L_1 = k\sqrt{L_2/L_1}$, essendo reale non c'è sfasamento tra $V_{\omega,1}$ e $V_{\omega,2}$ che è anche il rapporto tra le ampiezze picco-picco, chiamato rapporto di trasformazione in tensione.

15.3.2 Secondario cortocircuitato

In questo caso $V_{\omega,2} = 0$ e

$$\begin{aligned}V_{\omega 1} &= (R_1 + j\omega L_1) I_{\omega 1} + j\omega M I_{\omega 2} \\0 &= (R_2 + j\omega L_2) I_{\omega 2} + j\omega M I_{\omega 1}\end{aligned}$$

da cui

$$I_{\omega 2} = -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} I_{\omega 1},$$

e

$$V_{\omega,1} = \left[R_1 + \frac{j\omega L_1 R_2 - \omega^2 L_1 L_2 (1 - k^2)}{R_2 + j\omega L_2} \right] I_{\omega 1}$$

Nell'ipotesi, comune, $\omega L_2 \gg R_2$ allora

$$V_{\omega 1} = \left[R_1 + R_2 \frac{L_1}{L_2} + j\omega L_1 (1 - k^2) \right] I_{\omega 1}$$

In questa ipotesi $T_{\text{short}} = -T_{\text{open}}$ e lo sfasamento tra le due correnti è π (ma il rapporto tra le ampiezze è lo stesso e si chiama rapporto di trasformazione in corrente). Se l'accoppiamento magnetico è completo ($k \approx 1$), il trasformatore è ideale e la relazione tra $V_{\omega,1}$ e $I_{\omega,1}$ è reale, lo sfasamento è nullo e si parla, non di impedenza, ma di carico resistivo.

15.3.3 Serie e anti-serie di induttori

Collegiamo in serie due fasori e facciamo partire una ddp sinusoidale descritta dal fasore V_ω . A causa del accoppiamento magnetico il primo induttore induce una ddp opposta ai capi del secondo, l'equazione che descrive il circuito è

$$V_\omega = [R + j\omega (L_1 \pm M) + j\omega (L_2 \pm M)] I_\omega$$

I segni \pm riflettono la possibilità di inserire gli induttori al contrario, l'equazione mostra anche l'induttanza equivalente che vale

$$L_{\text{eq,serie}} = L_1 + L_2 \pm 2M.$$

15.3.4 Parallelo e anti-parallelo di induttori

Collegando in parallelo i due induttori e ponendo come trascurabili (per semplicità) le resistenze otteniamo

$$\begin{aligned}V_\omega &= j\omega (L_1 I_{\omega 1} \pm M I_{\omega 2}) = \\&= V_\omega = j\omega (L_2 I_{\omega 2} \pm M I_{\omega 1})\end{aligned}$$

da cui

$$I_{\omega 1} = I_{\omega 2} \frac{L_2 \mp M}{L_1 \mp M},$$

e

$$I_{\omega 2} = \frac{V_\omega}{j\omega} \frac{L_1 \mp M}{L_1 L_2 - M^2}.$$

sommandoli per la conservazione della carica

$$I_\omega = I_{\omega 1} + I_{\omega 2} = \frac{V_\omega}{j\omega} \frac{L_1 + L_2 \mp 2M}{L_1 L_2 - M^2}.$$

Possiamo infine definire l'induttanza equivalente del parallelo come

$$L_{eq,para} = L_1 L_2 \frac{1 - k^2}{L_1 + L_2 \mp k\sqrt{L_1 L_2}}.$$

16 Onde elettromagnetiche e ottica

16.1 Equazione e funzione d'onda

Una funzione d'onda rappresenta l'andamento nel tempo e nello spazio di una qualche "perturbazione", non è facile dare una definizione qualitativa ma da un punto matematico un'onda è la soluzione all'equazione d'onda

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Le equazioni delle onde elettromagnetiche partono dalle equazioni di Maxwell, nei casi di nostro interesse (assenza di correnti e cariche libere, materiali trasparenti e quindi non ferrosi ($\mu = \mu_0$)), le onde hanno velocità di fase $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon}$ dove se $\epsilon_r > 1$ allora $v = c/\sqrt{\epsilon_r} = c/n$ con n detto indice di rifrazione.

16.1.1 Onda piana, monocromatica e progressiva

Per semplicità le equazioni sono in forma complessa, l'onda del campo elettrico è

$$\vec{E} = E_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \hat{e}$$

e dato che per le equazioni di Maxwell abbiamo

$$\vec{B} = \frac{\hat{k} \times \vec{E}}{v}$$

L'equazione del campo magnetico deve essere

$$\vec{B} = B_0 \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)] \hat{b}$$

con

$$B_0 = \frac{E_0}{v} = \frac{E_0}{c} n.$$

$\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$ formano una terna ortogonale destrorsa, per cui l'onda è trasversale. Le onde inoltre sono:

- piane, essendo i fronti d'onda dei piani ortogonali alla direzione del vettore d'onda \vec{k} ;
- progressive, perché i fronti d'onda si muovono alla velocità di fase v nella direzione positiva di \vec{k} ;
- monocromatiche, dato che l'andamento temporale è stabilito da un'unica pulsazione ω ;

inoltre si usa l'aggettivo armoniche per indicare che in una posizione fissata, l'intensità della perturbazione è descritta nel dominio del tempo da funzione di tipo seno e coseno.

16.1.2 Trasporto di energia e intensità dell'onda

Le onde elettromagnetiche sono associate al trasporto di energia che viene analizzato usando un fotorivelatore (come un fotodiodo). Questo dispositivo misura il valore medio nel tempo della potenza dell'onda integrata su una certa superficie. Le onde elettromagnetiche rilevanti in ottica hanno frequenze, o pulsazioni, che non possono essere apprezzate da nessuno strumento puramente elettronico (per intenderci, un oscilloscopio). L'energia trasportata da un'onda elettromagnetica per unità di tempo e di superficie è data dal vettore di Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$, il cui modulo medio nel tempo è

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = \frac{1}{2} v \epsilon E_0^2$$

chiamato intensità d'onda.

16.1.3 Semplificazione, nomenclatura pratica e ordini di grandezza

Per semplificare la notazione, consideriamo d'ora in avanti $\vec{k} \parallel \hat{z}$.

Le onde elettromagnetiche coinvolgono un range estremamente ampio di parametri k e ω . Nell'ottica si lavora in genere con la radiazione elettromagnetica visibile, questa va da $\lambda = 380$ nm (detta lunghezza d'onda) a $\lambda = 780$ nm, restringendoci

così ad una piccola fettina. La lunghezza d'onda λ è strettamente legata al numero d'onda k , alla frequenza ν e alla velocità di fase v (nel vuoto c)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\nu = \frac{c}{\lambda}.$$

Nel nostro campo di interesse $k \sim 10^4 \text{ cm}^{-1}$ e $\nu \sim 10^{14} \text{ Hz}$, notiamo che la frequenza è dello stesso ordine di grandezza della rotazione dell'elettrone attorno al nucleo in un modello atomico classico.

16.1.4 Energia della radiazione

In parallelo alla descrizione ondulatoria della luce, esiste quella corpuscolare, infatti, un fascio di luce può essere visto come un flusso di particelle con proprietà molto specifiche (senza massa, senza carica, ma dotate di quantità di moto, momento angolare e, appunto, energia). Queste particelle sono note come fotoni e l'energia di un singolo fotone è

$$E_{\text{phot}} = h\nu,$$

con h costante di Plank. Ricordando le relazioni tra la lunghezza d'onda e k , nel vuoto

$$E_{\text{phot}} [\text{eV}] \approx \frac{1240}{\lambda[\text{nm}]}$$

il che significa che nel nostro campo di interesse un elettrone ha un energia di 1.5-eV.

16.1.5 Limitazioni e caveat

Guardiamo ora le varie semplificazioni che abbiamo utilizzato durante la trattazione.

I materiali di interesse per l'ottica sono spesso dispersivi, il che significa che l'indice di rifrazione n dipende dalla lunghezza d'onda.

Oltre alla velocità di fase $v=\omega/k$ dobbiamo definire in questo caso la velocità di gruppo $v_g = \partial\omega/\partial k$ che tiene conto di come si propaga l'onda in un mezzo il cui indice di rifrazione cambia con la frequenza dell'onda.

Infine ricordiamo che abbiamo usato come modello un'onda piana monocromatica. L'onda piana monocromatica per esistere deve avere origine da un luogo distante infinito e esistere da un tempo infinito (ciò non è possibile e nella realtà l'onda è una somma di più armoniche di diversa frequenza).

16.2 Polarizzazione

Lo studio della polarizzazione riguarda l'analisi del versore \hat{e} che indica la direzione del campo elettrico. La polarizzazione si dice lineare se \hat{e} mantiene costante nel tempo la sua direzione. Se $\hat{e} = a\hat{x} + b\hat{y}$ allora la direzione di E rispetto all'asse x è data dall'angolo $\tan\phi = b/a$.

La polarizzazione si dice invece circolare quando invece il vettore \vec{E} ruota con velocità ω sul piano XY. In tal caso $\hat{e} = (\hat{x} \pm i\hat{y})/\sqrt{2}$ e le componenti E_x e E_y (E e B ?) sono sfasate fra loro di $\pm\pi/2$. L'onda in questo caso si scrive

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \{ (\exp[i(kz - \omega t)])\hat{x} + (\exp[i(kz - \omega t \pm \pi/2)])\hat{y} \}$$

. Il segno dello sfasamento denota i due diversi tipi di polarizzazione circolare, a sinistra e a destra, generalmente indica come $\hat{\sigma}_-$ e $\hat{\sigma}_+$ che come \hat{x} e \hat{y} formano una base ortonormale.

Infine la polarizzazione si dice ellittica quando lo sfasamento di \vec{E} tra le componenti x e y è diverso da $\pm\pi/2$, si potrebbe dire che la polarizzazione circolare è in caso particolare della ellittica.

16.2.1 Significato e rilevanza della polarizzazione

La polarizzazione lineare implica avere una direzione anisotropica del piano XY, la polarizzazione circolare invece discende da una caratteristica geometrica più complicata detta chiralità. Le sorgenti di interesse pratico nell'ottica hanno, in genere, caratteristiche di polarizzazione ben definite: le lampade producono una luce non polarizzata (random), i laser producono una radiazione polarizzata linearmente e di norma non esistono sorgenti si uso pratico che polarizzano circolarmente ma è necessario manipolare la radiazione della sorgente. L'analisi della polarizzazione è importante per vari motivi, tra cui:

- Il campo elettrico è un vettore, e la sua direzione è importante per lo studio dei fenomeni tra radiazione e materia;

- È uno strumento importante per la spettroscopia;
- È alla base di alcuni dispositivi ottici molto raffinati come gli schermi di cellulari e computer;
- È stato visto che alcune sostanze molecolari che costituiscono le basi della materia vivente presentano caratteristiche levogire alla luce polarizzata circolarmente, ovvero "sentono" maggiormente la polarizzazione circolare in un senso rispetto ad un altro.

16.3 Manipolazione e analisi della polarizzazione

Focalizziamo ora la nostra attenzione su due dispositivi di nostro interesse per l'analisi e la misura della polarizzazione: polarizzatore lineare (polaroid) e lamine ritardanti.

Questi dispositivi sono costruiti con materiali otticamente attivi, ovvero materiali la cui risposta ottica dipende dalla polarizzazione della radiazione che ci incide sopra. L'attività ottica si divide in dicroismo che agisce sull'assorbimento e trasmissione della radiazione (un materiale dicroico assorbe o fa passare l'onda che ci incide in maniera dipendente dalla direzione di polarizzazione dell'onda stessa) e birifrangenza che agisce sulla fase dell'onda (un materiale dicroico assorbe o fa passare l'onda che ci incide in maniera dipendente dalla direzione di polarizzazione dell'onda stessa).

16.3.1 Dicroismo e polaroid

Il polarizzatore lineare a cui facciamo riferimento è chiamato polaroid. È un dispositivo che può essere modellato come una distribuzione spaziale di elementi in grado di assorbire la luce e allineati tra di loro lungo una specifica direzione (quindi un polaroid è un sistema che presenta un'anisotropia spaziale nell'assorbimento ottico). Il processo di costruzione di un polaroid fa sì che le sue molecole formino un sistema allineato di dipoli elettrici. Infatti la radiazione polarizzata linearmente lungo l'asse di questi dipoli viene efficacemente assorbita, cioè viene trasmessa con forte attenuazione al di là dello strato di polaroid. Quella polarizzata linearmente in direzione ortogonale all'asse dei dipoli passa pressoché inalterata. L'ampiezza del campo in uscita dal polaroid è data dalla proiezione $E_0 \hat{e} \cdot \hat{p} = E_0 \cos \theta$, l'intensità invece è regolata dalla legge di Malus

$$I = I_0 \cos^2 \theta.$$

Oltre a manipolare l'Intensità, questa operazione manipola la polarizzazione che all'uscita dalla polaroid è polarizzata linearmente con l'asse p.

In un polaroid ordinario reale, la trasmissione non è mai completa, neanche per la polarizzazione ortogonale all'asse dei dipoli, infatti il polaroid appare grigio e il materiale di cui è composto assorbe sempre una certa parte della radiazione incidente.

16.3.2 Birifrangenza e lamine ritardanti

Come già accennato, esistono materiali il cui indice di rifrazione dipende dalla direzione di polarizzazione della radiazione. Tali materiali hanno una costante elettrica dielettrica anisotropa, fortunatamente la maggior parte dei materiali trasparenti ha questa caratteristica essendo anisotropa la loro struttura cristallina.

Una lamina ritardante è una lastra di materiale birifrangente, in particolare le lamine $\lambda/4$ servono per rendere circolare o ellittica una polarizzazione lineare (e viceversa) e le lamine $\lambda/2$ servono per ruotare in modo controllato la direzione di una polarizzazione lineare.

Lamine $\lambda/4$

Supponiamo di avere un'onda la cui polarizzazione è nella direzione della bisettrice del primo quadrante del piano XY, allora l'onda è

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \{ (\exp[i(kz - \omega t)]) \hat{x} + (\exp[i(kz - \omega t)]) \hat{y} \}.$$

Se l'onda incide su un materiale birifrangente con n dei due assi ottici non uguali (e quindi abbiamo una differenza Δn) allora ricordando le relazioni di k con n ($k = \omega/v = (\omega/c)n = k_0 n$) otteniamo $k_{\parallel} = k_0 n_{\parallel}$ e $k_{\perp} = k_0 n_{\perp}$ dove con \parallel indichiamo i valori relativi a X e con \perp quelli a Y. L'onda esce dalla lastra di spessore d a $z=d$, quindi

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \{ (\exp[i(k_{\parallel} d - \omega t)]) \hat{x} + (\exp[i(k_{\perp} d - \omega t)]) \hat{y} \} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \{ (\exp[i(k_{\parallel} d - \omega t)]) (\hat{x} + \exp[i(k_{\perp} - k_{\parallel}) d] \hat{y}) \} \end{aligned}$$

In una lamina $\lambda/4$ si ha $(k_{\perp} - k_{//})d = k_0(n_{\perp} - n_{//})d = m\pi/2$, con m intero dispari. Notiamo che, visto che $k_0 = 2\pi/\lambda$, si ha anche $d(n_{\perp} - n_{//}) = m\lambda/4$, cioè la differenza di spessore ottico (prodotto fra indice di rifrazione e spessore fisico) è un multiplo dispari di $\lambda/4$, da cui la denominazione del dispositivo. In queste condizioni si vede che la differenza di indice di rifrazione, e quindi velocità di fase, delle componenti lungo le due polarizzazioni introduce uno sfasamento di $\pm\pi/2$ sulla componente Y. Inviando un'onda polarizzata circolarmente si ottiene una polarizzazione lineare lungo la bisettrice di XY e se la polarizzazione è lineare lungo un versore diverso dalla bisettrice otteniamo una polarizzazione ellittica.

Lamine $\lambda/2$

In una lamina $\lambda/2$ si ha invece $(k_{\perp} - k_{//})d = k_0(n_{\perp} - n_{//})d = m\pi$, con m intero dispari, ovvero $d(n_{\perp} - n_{//}) = m\lambda/2$. In queste condizioni non si ha uno sfasamento tra le componenti e l'onda rimane polarizzata linearmente, quello che accade, dato un angolo ϕ qualsiasi non la X, è che la polarizzazione cambia direzione, in particolare i un angolo 2ϕ tra la direzione originaria e quella di uscita (inoltre non c'è attenuazione dell'intensità); nel caso di polarizzazione nella direzione della bisettrice la polarizzazione cambia segno. Per osservare se una polarizzazione è ellittica basta mettere una polaroid e ruotarla, se l'intensità non si annulla mai allora la polarizzazione è ellittica, se la polarizzazione è circolare inoltre l'intensità non cambia mai.

16.4 Fresnel e Brewster

In ottica, un modo storico di manipolare la polarizzazione è dato dall'uso dell'angolo di Brewster. In questo caso non si impiegano materiali dicroici o birifrangenti, ma banalmente si fa uso di ciò che accade (le cui regole sono studiate dalle equazioni di Fresnel) all'interfaccia tra due dielettrici (con n diverso) colpiti da una radiazione con un particolare angolo.

16.4.1 Cenni alle equazioni di Fresnel e al procedimento per ricavarle

Supponiamo la solita pantomima dell'ottica un piano che viene colpito da un'onda e c'è un'onda incidente, una trasmessa e una riflessa; consideriamo la legge di Snell (per semplificare supponiamo che $\theta < \theta_{crit} = \arcsin(n_2/n_1)$ angolo critico al disopra del quale si ha riflessione totale), la frequenza non cambia (cambiano numero d'onda e lunghezza d'onda), devono valere le condizioni di continuità e i materiali devono essere omogenei, isotropi e lineari. Esistono due diverse condizioni al variare della polarizzazione:

- Polarizzazione p: quella parallela al piano di incidenza dove l'onda è TM trasversa magnetica;
- Polarizzazione s: quella perpendicolare al piano di incidenza dove l'onda è TE.

16.4.2 Onda TM

Dimostriamo l'esistenza dell'angolo di Brewster e individuiamolo.

Dopo una dimostrazione si arriva al rapporto tra le ampiezze di onda riflessa ed incidente (chiamato riflettività in ampiezza) per la polarizzazione p

$$r_p = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}.$$

In genere però si è interessati a conoscere il rapporto tra le intensità delle onde (chiamato riflettanza)

$$R_p = \left| \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right|^2 = \left| \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \right|^2 = \left| \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right|^2$$

inoltre per la conservazione del flusso di energia $R_p + T_p = 1$ (T_p è la trasmittanza). Dall'ultima eguaglianza notiamo che è possibile individuare un angolo (detto di Brewster) per cui il denominatore tende all'infinito ($\theta_t \neq \theta_i$ quindi il numeratore non fa mai 0) e R_p a 0 (non c'è riflessione, almeno delle onde polarizzate p), tale angolo è individuabile con

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}.$$

Rilevanza e interpretazione fisica dell'angolo di Brewster

Possiamo affermare di aver trovato un angolo di incidenza tale che se incidiamo con questo angolo la componente di polarizzazione parallela al piano di incidenza non viene riflessa. È sempre comunque presente una riflessione perché le onde polarizzate s sono riflesse, se tuttavia inseriamo un polaroid che annulla le onde polarizzate s allora la luce non viene riflessa quasi completamente. Gli occhiali polaroid usano questa tecnologia (il laser a gas invece usa solo l'angolo di

Brewster). Osserviamo come in questo caso $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ e l'onda incidente forma un angolo di $\pi/2$ con l'incidente. Possiamo qualitativamente spiegare l'esistenza dell'angolo di Brewster così:

L'onda riflessa e quella trasmessa possono essere considerate come generate dalla radiazione dei dipoli nel materiale che vengono eccitati dal campo elettrico dell'onda incidente, tali dipoli sono interni al materiale e quindi vedono l'onda già rifratta a causa dell'ortogonalità; la direzione in cui vengono eccitati nel caso di polarizzazione p con angolo di Brewster coincide con quella di osservazione dell'onda riflessa e come sappiamo un dipolo non emette radiazione nella direzione del suo asse.

16.4.3 Onda TE

Con un approccio simile a quello delle onde TM arriviamo a

$$R_s = \left| \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \right|^2 = \left| \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \right|^2 = \left| \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right|^2$$

dove si verifica facilmente che per le onde TE non esiste un angolo di Brewster.

Effetti dell'angolo di Brewster in trasmissione

Il metodo dell'angolo di Brewster ci permette di polarizzare s con il riflesso, se vogliamo polarizzare p dobbiamo studiare le onde trasmesse, infatti

$$T_p = 1 - R_p = 1 - \left| \frac{\tan(\theta_t - \theta_i)}{\tan(\theta_t + \theta_i)} \right|^2$$

$$T_s = 1 - R_s = 1 - \left| \frac{\sin(\theta_t - \theta_i)}{\sin(\theta_t + \theta_i)} \right|^2$$

la componente p viene ovviamente tutta trasmessa, quella s nel caso dell'interfaccia aria/vetro viene trasmessa al 85%. Prendendo un pacco di m vetri intervallati da aria otteniamo che $T_{s,tot} = T_s^m$ il che per molti pacchi polarizza (quasi) completamente per p l'onda riflessa.

17 Interferenza e diffrazione

17.1 Introduzione

In termini molto qualitativi:

- L'interferenza è quel fenomeno che modifica l'intensità di un'onda in una certa zona dello spazio a causa della sovrapposizione di diverse onde;
- La diffrazione è quel fenomeno che modifica la distribuzione spaziale di un'onda che attraversa delle aperture i dimensioni trasversali limitate.

17.2 Interferenza

Per spiegare il concetto di interferenza costruiamo un sistema ideale: due sorgenti puntiformi in due posizioni distinte sull'asse z con distanza tra le due pari a δ , supponiamo che le onde abbiano uguale frequenza, polarizzazione, siano monocromatiche, stesso verso e direzione. In ogni piano XY il campo sarà dato dalla somma vettoriale delle due onde $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Supponiamo che l'intensità dei due campi sia la stessa, allora

$$I = 2I_0(1 + \cos(k\delta)) = 4I_0 \cos^2(k\delta/2).$$

Notiamo come l'intensità dell'onda risultante sia una funzione di δ (cammino ottico). L'intensità è massima quando $k\delta/2 = m\pi \rightarrow \delta = m\lambda$ ed è minima quando $k\delta = (2m+1)\pi \rightarrow \delta = (m+1/2)\lambda$, definiamo il contrasto delle frange di interferenza come il rapporto tra massimi e minimi di intensità $(I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min})$ (nelle condizioni del nostro sistema ideale è il massimo possibile (10)). Se le condizioni sulla polarizzazione e sull'intensità d'onda vengono rilassate allora l'interferenza continua a verificarsi (a meno che le polarizzazioni siano perpendicolari) con contrasto minore, più in generale l'interferenza è funzione dell'intensità di fase.

17.2.1 Coerenza

La situazione che abbiamo esaminato era molto ideale, abbiamo posto a 0 lo sfasamento che corrisponde a presupporre che gli emettitori d'onda, degli oggetti reali (due dipoli oscillanti per esempio), non subiscano processi naturali che modifichino la loro frequenza in modo casuale (o meglio statistico). La situazione ideale esaminata è spesso indicata come coerenza tra le sorgenti, ovvero sorgenti per cui la relazione di fase rimane costante nel tempo. Un modo per ottenere una frequenza, con i dovuti tecnicismi dipendenti dall'esperimento, è quella per cui le sorgenti sono rimpiazzate da due frazioni della stessa onda. Frazionare un'onda significa dividerla (con degli specchi semi-riflettenti ad esempio) in diverse onde che abbiano una frazione dell'onda originaria e abbiano direzione di propagazione diversa.

Pacchetti d'onda e coerenza

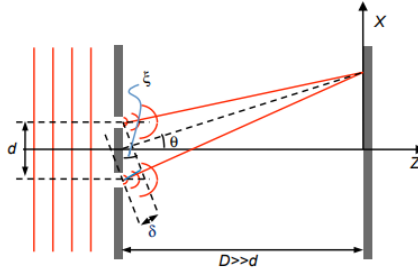
Un'altra debolezza delle condizioni con cui abbiamo introdotto l'interferenza è l'ipotesi che le onde siano monocromatiche, questo non è possibile per il principio di indeterminazione. Nella realtà un'onda è composta da diverse componenti spettrali, cioè dalla sovrapposizione di onde dotate di frequenze diverse all'interno di un intervallo $\Delta\nu$ (detta larghezza di riga). La loro equazione può essere scritta come una serie di Fourier con la differenza che abbiamo un integrale al posto della serie perché le onde si susseguono nella larghezza di riga in modo continuato. Queste onde che vanno a sovrapporsi producono i pacchetti onde che possono essere visti come delle onde con frequenza $\Delta\nu$ e quindi se questa tende a 0 abbiamo delle onde monocromatiche con dei pacchetti d'onda di lunghezza infinita. È chiaro che a questo punto l'interferenza può verificarsi solo dalla sovrapposizione degli stessi pacchetti d'onda.

17.3 Huygens e diffrazione

Prima di procedere con la diffrazione guardiamo alcuni principi e teoremi parte dell'ottica ondulatoria. In particolare ci serve sapere il principio di Huygens ovvero che ogni piccola regione di un fronte d'onda si comporta come una sorgente di onde secondarie, queste onde secondarie sono tutte in fase tra di loro e hanno la forma di onde sferiche emesse nella direzione e verso dell'onda primaria.

17.3.1 Interferenza da doppia fenditura (Young)

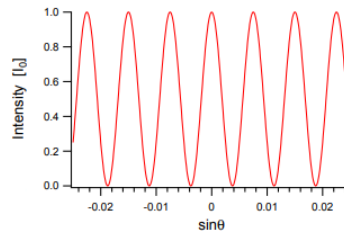
Il famoso esperimento di Young deve la sua fama alla sua verifica della condizione di dualismo tra onda e particella, noi studieremo solo la parte dell'onda. Un'onda che supponiamo piana e monocromatica incide su una lamina come in figura (l'onda arriva da sinistra).



Secondo il principio di Huygens le due aperture che intercettano il fronte d'onda primario si comportano da sorgenti di onde secondarie le quali risultano in fase tra loro. Visto che vogliamo sapere cosa accade sullo schermo (molto lontano) possiamo approssimarle ad onde piane, sullo schermo avremo un fenomeno di interferenza costruttiva e distruttiva dato dalla sovrapposizione delle onde coerenti che dipende dalla differenza di cammino ottico δ tra le due onde. Si dimostra che, sia θ l'angolo tra un punto dello schermo dove vogliamo misurare l'intensità e l'asse z , allora

$$I(\theta) \approx I_0 \cos^2(kd \sin \theta / 2)$$

Nelle tipiche condizioni sperimentali $D \gg d$ e $\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta$ e la distanza tra un massimo e un minimo vale $\lambda D / d$. Vediamo qua l'andamento di I sullo schermo in funzione di θ



17.3.2 Interferenza da reticolo ottico

Un'estensione particolarmente rilevante è quella che rimpiazza il sistema a due fenditure con un reticolo di N fenditure, tutte spaziate tra di loro con distanza regolare d ; questo sistema ha il nome di reticolo ottico o reticolo di diffrazione. Ogni coppia di fenditure si comporta come l'esempio di prima, quindi per determinare $I(\theta)$ bisogna considerare l'interferenza tra tante onde. L'equazione che si trova è

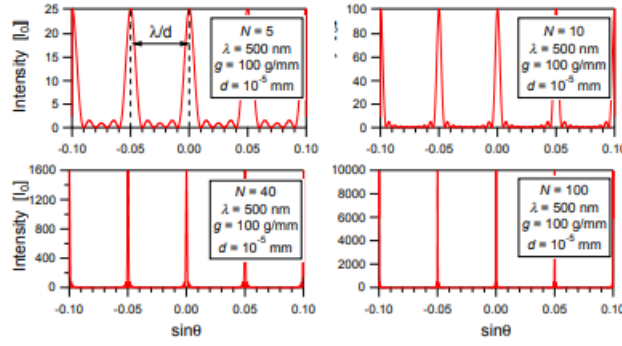
$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(N\gamma)}{\sin^2 \gamma}$$

$$\gamma = \pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

Vediamo alcune sue proprietà:

- Quando il numeratore ed il denominatore tendono a 0 la funzione ha dei massimi assoluti che tendono a N^2 ;
- Questi massimi sono distanziati da un angolo $\sin(\theta_{\max}') = m\lambda/d$. Quindi abbiamo un massimo centrale per $m=0$ e tanti massimi a distanza λ/d che non dipende da N come farà l'altro tipo di massimo;
- Un'altra tipologia di massimi la abbiamo quando $N\gamma = (m+1)\pi/2$ e in questo caso la distanza è $(\sin \theta)''_{\max} = [(m+1/2)/N]\lambda/d$. Tra un massimo assoluto e l'altro ci sono $N-2$ massimi relativi;
- Ci sono poi i minimi che hanno distanza $(\Delta \sin \theta)_{\min} = \lambda/(Nd)$. Tra un massimo assoluto e l'altro ci sono $N-2$ minimi.

Osserviamo l'immagine e notiamo come all'aumentare di N i massimi assoluti aumentano di intensità e si snelliscono a discapito dei massimi relativi.



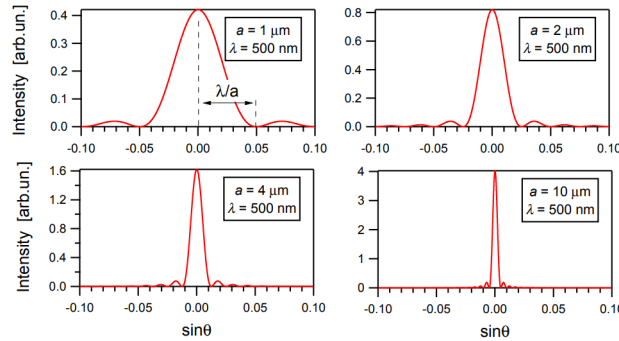
17.4 Diffrazione da singola fenditura (lineare)

Arriviamo ad esaminare un caso in cui si parla davvero di diffrazione più che interferenza. Immaginiamo di avere una singola fenditura con dimensione trasversa a incisa su una lamina opaca. Suddividiamo questa apertura in tanti (virtualmente infiniti) elementi dimensione trasversale infinitesima, applichiamo il principio di Huygens. Il sistema appena creato somiglia molto a un reticolo in cui abbiamo fatto tendere il numero N a infinito e la spaziatura d a zero, facendo in modo che il prodotto Nd tendesse ad a . Si ottiene così la funzione di diffrazione

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2(\alpha)}{\alpha^2}$$

$$\alpha = \pi \frac{a}{\lambda} \sin \theta$$

La funzione ha un massimo assoluto che corrisponde a $(\sin \theta)_{\max} = 0$ e dei minimi quando il numeratore si annulla, che stanno a $(\sin \theta)_{\min} = m\lambda/a$, tra i minimi abbiamo dei massimi relativi $(\sin \theta)''_{\max} = (m + 1/2)\lambda/a$. Notiamo che questa volta abbiamo un solo massimo assoluto e i massimi relativi vanno riducendosi all'aumentare di $|m|$.



Quello che succede in pratica è che il passaggio attraverso l'apertura introduce una divergenza del fascio, che “si allarga” tanto più quanto maggiore è il rapporto λ/a , cioè, a parità di λ , quanto minore è la dimensione dell'apertura a .

17.4.1 Diffrazione da apertura circolare

Abbiamo trattato fin'ora situazioni unidimensionali con frange strette e lunghe, nella realtà spesso si hanno però buchi circolari di diametro a . La fisica è sempre la stessa ma si passa in coordinate cilindriche, allora

$$I(\theta) = I_0 \frac{J_1^2(\alpha)}{\alpha^2}$$

$$\alpha = \frac{a}{\lambda} \sin \theta$$

J_1 è la funzione di Bessel di ordine 1. Si forma così un sistema di minimi di intensità di forma circolare il cui diametro Φ è

$$\Phi = 2\pi m D [1.22(\lambda/a)]$$

17.4.2 Young revisited

Riguardiamo Young e osserviamo che la diffrazione deve accadere per ogni singola fenditura e quindi quello che osserviamo è la somma di due fenomeni (diffrazione ed interferenza).

17.5 Reciprocità, "importanza" della diffrazione, campo lontano e campo prossimo

Negli esempi che abbiamo guardato la diffrazione aveva origine dalla sovrapposizione di onde secondarie generate da regioni vuote incise su lamine opache, il principio di reciprocità dice che abbiamo effetti analoghi se zone vuote vengono intervallate da oggetti opachi. Questo fa della diffrazione un fenomeno opaco nel mondo ondulatorio e la descrizione con onde piane non è più adeguata. Nella realtà un fascio non può essere completamente focalizzato a formare un punto e le dimensioni trasversali dello spot focale saranno sempre finite. Questo è un effetto della diffrazione, infatti utilizzando le sue leggi si giunge al limite di Abbe che pone il potere risolutivo massimo all'ordine di 0.6λ che per la luce visibile significa una risoluzione di diverse centinaia di nm. Tutte le affermazioni fatte fin ora sono nel regime del campo lontano ($d \gg a$), se questa condizione non è valida siamo nel regime del campo prossimo. Nel campo prossimo è possibile migliorare il potere risolutivo superando i limiti posti dalla diffrazione.

18 Laser, laser a diodo, fotodiodo a livello zero

18.1 Laser

L'invenzione del laser è avvenuta circa 50 anni fa. Laser in realtà è un acronimo e significa *Light Amplifier Stimulated Emission Radiation*, il suo nome contiene gran parte del suo funzionamento. Il laser infatti è un dispositivo che amplifica la radiazione luminosa grazie a processi di emissione stimolata, un'altra caratteristica di grande importanza del laser è che generalmente, accanto al processo di amplificazione della radiazione, è presente un fenomeno di feedback che porta il dispositivo ad operare come un oscillatore, cioè a produrre, oltre che amplificare, la radiazione luminosa in modo autonomo. Il laser emette una radiazione coerente che è alla base delle sue particolari caratteristiche di focalizzazione del fascio, alto livello di monocromaticità e la capacità di essere impiegata in un'ampia varietà di misure interferometriche. Dal punto di vista corpuscolare la coerenza implica che il fascio sia composto da fotoni che abbiano tutte le stesse caratteristiche (energia, quantità di moto e momento angolare). È ovvio che un fascio con queste caratteristiche permette un altissimo grado di controllo sulla materia stessa.

18.1.1 Componenti a laser

Possiamo suddividere il funzionamento del laser in 3 concetti o componenti;

- Il mezzo attivo è il sistema materiale che permette di ottenere l'amplificazione attraverso l'interazione con la luce;
- Il pompaggio è l'insieme di tecniche concettuali e pratiche che rendono possibile l'amplificazione di luce da parte del mezzo attivo;
- La cavità ottica è quel componente che permette di modificare il funzionamento del mezzo attivo da amplificatore a oscillatore permettendogli di operare come sorgente di radiazione.

18.2 Mezzo attivo

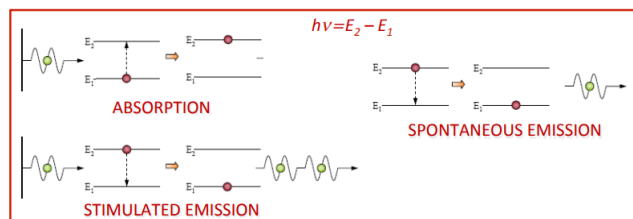
Alla base del funzionamento di un qualsiasi laser c'è l'interazione tra radiazione e materia. Lo studio di questo tipo di interazione fa pesante uso della quantistica, cosa che noi non possiamo fare. Ci riferiremo quindi a modelli semplicistici come il modello di Bohr per l'atomo di idrogeno dal quale si osserva già come la materia disponga di livelli discreti di energia. Per sistemi di maggiore complessità cade il modello di Bohr ed è necessario l'uso di modelli più sofisticati. Ci basti sapere che finché il numero di componenti elementari è limitato, come per esempio un sistema molecolare, i livelli si mantengono discreti, ma ogni singolo livello si suddivide in più sottolivelli. Quando il numero di componenti è molto grande (come per lo stato condensato liquido e solido) allora livelli discreti degenerano in bande di energia. In pratica, un laser che sfrutta un mezzo attivo atomico, per esempio il laser a vapore, è molto più semplice da interpretare di un laser che usa un mezzo attivo solido (come il laser a diodo).

18.2.1 Interazione radiazione materia alla Einstein

Facciamo interagire un atomo "quantistico", così come lo abbiamo modellizzato, con una radiazione anch'essa "quantistica", ovvero un fotone con un atomo. Secondo la trattazione di Bohr quando un elettrone di un atomo decade, ovvero passa ad un livello di energia inferiore, questo emette un fotone. Per la conservazione dell'energia totale abbiamo che

$$E_{phot} = h\nu = E_{n''} - E_{n'}$$

e l'energia del fotone deve essere quindi una risonanza della differenza di energia tra due livelli. Oltre all'emissione spontanea possiamo supporre l'esistenza del procedimento inverso, ovvero l'assorbimento di un fotone e conseguente passaggio di un elettrone ad uno stato più eccitato. Nel 1900 Einstein ipotizzò l'esistenza di un terzo evento che prevedeva che un fotone interagisse con un atomo triggerava un elettrone che decadeva ad uno stato meno eccitato e rilasciava così un secondo fotone. Questo processo è detto emissione stimolata. Einstein riuscì a calcolare la probabilità dei 3 processi e legarli alle caratteristiche della materia e della radiazione.



18.2.2 Emissione stimolata

Due osservazioni sull'emissione stimolata:

- Il fotone che incide sull'atomo non viene assorbito e si trova quindi in uscita assieme al fotone emesso dal decadimento energetico di un elettrone;
- I fotoni emessi per emissione stimolata sono completamente indistinguibili dai fotoni che triggerano il processo (a differenza di quelli prodotti per emissione spontanea che hanno direzione e verso random).

Capiamo qua il motivo della sigla LASER, infatti l'emissione simulata permette di aumentare il numero di fotoni amplificando la radiazione, inoltre per la seconda osservazione tutti i fotoni sono coerenti.

18.3 Pompaggio e inversione di popolazione

Per avere un'emissione stimolata è necessario che l'atomo si trovi ad uno stato eccitato, questo ovviamente comporta un dispendio energetico che deve essere in qualche modo bilanciato. Per vedere come si conserva l'energia abbiamo bisogno di un modello più reale, prendiamo quindi un campione di elementi, vogliamo infatti produrre un fascio di luce e per questo è necessario che ci sia l'emissione stimolata di tantissimi fotoni. Il campione tende ad approssimare la configurazione per cui l'energia è minimizzata rispetto alle condizioni in cui esso si trova. Per ogni stato energetico si chiama popolazione il numero di elementi di un campione che si trova a quello stato, normalmente un sistema evolve in modo da aumentare il più possibile la popolazione allo stato fondamentale. Se si vuole invece che la popolazione sia maggiore a livelli più eccitati dobbiamo creare un'inversione di "popolazione" attraverso quelli che sono detti processi di pompaggio. Nel corso del tempo sono stati creati vari metodi per il pompaggio, quelli più comuni sono il pompaggio ottico (che sfrutta la radiazione luminosa) e quello elettrico (che sfrutta il passaggio di corrente). Nel laser a diodo il pompaggio è elettrico mentre i quelli che ti vendono i neri alla stazione e che Fuso usa per accecare i portieri durante i rigori sono a pompaggio elettrico (che in realtà è dato da un secondo laser interno che invece sfrutta un pompaggio elettrico). Alla fine dei processi l'energia è ovviamente bilanciata, anzi il laser è solitamente una macchina poco efficiente e solo una piccola parte dell'energia di cui viene dotato è trasformata nel fascio di luce.

18.4 Cavità ottica

Come abbiamo già detto un laser non è propriamente un amplificatore, ma piuttosto un oscillatore in grado di produrre radiazione coerente, e non solo di amplificarla. Nel passaggio da amplificatore a oscillatore ha un ruolo importantissimo la cavità ottica all'interno della quale viene posto il mezzo attivo opportunamente pompato. Possiamo concettualmente costruire la cavità ottica come un "tubo" di lunghezza d ai cui estremi sono posti due specchi. Poniamo l'asse della cavità ottica su Z e ipotizziamo che al suo interno sia presente una radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda λ , questa radiazione rimbalzerà tra i due specchi creando un'onda fatta dalla sovrapposizione di due onde contropropaganti (quindi un'onda stazionaria) di equazione

$$\vec{E} = E_0 \sin(kz) \cos(\omega t) \hat{e}.$$

La presenza degli specchi pone delle condizioni di contorno, se posti a $z=0$ e $z=d$ abbiamo che $\sin(kd) = 0$, ovvero $kd = (2\pi/\lambda)d = m\pi$. La differenza in frequenza tra due modi supportati è $\Delta\nu_{fsr} = (c/n)/\lambda_1 - (c/n)/\lambda_2 = c/(2nd)$ dove fsr indica free spectral range. Quantizziamo ora il procedimento: un fotone, di energia tale che la sua radiazione corrisponde a quella che soddisfa le condizioni di contorno date dagli specchi, è presente nella cavità ottica, questo comincerà a rimbalzare tra gli specchi passando per il mezzo attivo stimolando l'emissione di altri fotoni a lui coerenti. Questi si uniranno a lui e stimoleranno altri elettroni creando così un effetto a valanga.

18.4.1 Perdite e innesco

Nel modello che stiamo impiegando i fotoni rimbalzano all'infinito in questa "trappola" di specchi e non possiamo quindi realizzare un laser. I fotoni devono quindi in qualche modo uscire dalla cavità, un esempio è uno specchio semiriflettente. L'uscita degli elettroni dalla cavità porta sicuramente un' perdita di energia, ma non è l'unica. Un altro meccanismo di perdita è l'assorbimento di fotoni da parte di elementi della cavità ottica o del mezzo attivo stesso e un altro ancora è dato dalla diffrazione causata dagli specchi che forniscono una direzione trasversale che lascia così la cavità ottica; un modo per minimizzare la diffrazione è l'utilizzo di specchi sferici.

Vediamo ora come si innesta un laser. Un mezzo attivo pompato avrà sicuramente un'alta popolazione a livelli eccitati, è quindi molto probabile che questi emettano spontaneamente fotoni e che questi vadano in tutte le direzioni (e quindi vadano persi). È sufficiente che un solo fotone sia nella direzione degli specchi affinché si inneschi il sistema a valanga (un oscillatore a reazione in pratica), a meno di perdite ovviamente :).

18.4.2 Curva di guadagno e soglia

Come abbiamo già detto affinché fotone e materia interagiscano, l'energia dei fotoni deve essere risonante dei livelli di energia del mezzo attivo, questo fa sì che vengano scelte delle frequenze rispetto a delle altre; anche le condizioni di bordo imposte dalla cavità selezionano le frequenze. Queste due selezioni sono alla base della "monocromaticità" del laser. Per il laser a diodo abbiamo una banda di energia, questo fa sì che le risonanze non siano discrete e l'intervallo si allarghi. Il guadagno fornito dal mezzo attivo non è uniforme all'interno di questo intervallo e si forma quindi una curva di guadagno a forma di campana. È possibile avere un laser quando la curva di guadagno assume valori superiori alle perdite ed esiste quindi una soglia di operazione del laser che è possibile superare solo se l'inversione di popolazione, data dal pompaggio, supera un certo valore critico.

La frequenza di un laser viene determinata dal FSR della cavità, migliori sono le proprietà della cavità, migliore è la monocromaticità del laser.

18.5 Laser a diodo

Guardiamo le basi del laser a diodo, in questo caso:

- Il mezzo attivo è costituito da uno o più giunzioni tra i materiali semiconduttori legati;
- Il pompaggio avviene tramite passaggio di corrente attraverso la giunzione polarizzata direttamente;
- La cavità ottica è integrata nel dispositivo sfruttando la riflettività dell'interfaccia semiconduttore/aria.

18.5.1 Semiconduttori e leghe

Abbiamo già discusso la costituzione classica dei semiconduttori, arriviamo ora a quella quantistica.

I semi conduttori sono dei solidi, e come tali hanno livelli di energia non discreti ma delle bande. Gli elettroni che si trovano nelle bande di energia più alte hanno la possibilità di muoversi all'interno del materiale. Per questo motivo la banda più alta si chiama di conduzione, quella più bassa, di valenza.

Questa descrizione vale per ogni materiale solido, la differenza tra conduttori, semiconduttori e isolanti è tra le bande di energia. Nei conduttori queste addirittura si sovrappongono, mentre negli isolanti hanno un'alta energia di gap che le separa e nei semi conduttori è bassa. Nella trattazione quantistica dei semiconduttori attribuiamo energia anche alle lacune, ci basti sapere che questa energia sta nella banda di valenza. Il drogaggio altera lo schema dei livelli di energia, quello n aumenta la popolazione della banda di conduzione, quello p della banda di valenza.

Una sorpresa si trova invece nella scelta di materiali dei semi conduttori, non c'è il silicio; si usano invece semiconduttori artificiali composti da leghe di elementi, queste leghe permettono di avere curve di guadagno piuttosto larghe (decine di nm) collocate in posizioni spettrali diverse (talvolta con dei buchi).

18.5.2 Giunzione e ricombinazione radiativa

La giunzione p-n polarizzata direttamente sostiene il passaggio di corrente. Questo fa sì che avvengano i processi di ricombinazione classici del diodo dove gli elettroni si uniscono alle lacune presenti nella zona di svuotamento (e viceversa). La visione quantistica di questo processo prevede che la ricombinazione elettrone-lacuna non sia altro che il decadimento dell'elettrone dallo stato di conduzione a quello di valenza. Questa visione prevede certamente un rilascio di energia che può essere ad esempio l'emissione spontanea, stimolata o l'assorbimento di un fotone.

Un altro aspetto rivelante è che siamo in polarizzazione diretta, quindi la ddp ai capi del diodo fa sì che ci sia un continuo spostamento degli elettroni verso la giunzione. Questi entrano nella zona di svuotamento con una densità maggiore rispetto alle lacune e quindi fungono anche da pompa del mezzo attivo. Vanno fatte però due osservazioni:

- L'esito della ricombinazione può produrre fotoni solo se le funzioni d'onda di elettrone e lacuna si sovrappongono spazialmente, questo requisito equivale ad imporre che elettroni e lacune si ritrovino vicini tra loro prima di ricombinarsi. Se la giunzione è composta da un unico materiale, questo è abbastanza difficile, sono state realizzate a tal proposito delle eterogiunzioni;
- Quando la sovrapposizione spaziale delle funzioni d'onda è particolarmente marcata, si possono formare gli eccitoni. Gli eccitoni sono dei sistemi artificiali costituiti da elettrone e lacuna che si comportano in modo qualitativamente simile a protone ed elettrone nell'atomo di idrogeno.

18.5.3 Cavit , costruzione e principali caratteristiche

Non sono solo i laser a sfruttare i diodi per emettere luce, anche i led (light emitting diodes) lo fanno. La differenza sta nella presenza di una cavit . Esistono numerose tipologie di cavit , ma la pi  comune   quella data dalla riflessione della radiazione all'interfaccia tra semiconduttore e aria (in un conduttore GaAs l'indice di rifrazione   3.7 che corrisposto a quello dell'aria di 1 d  una riflessione, tramite le leggi di Fresnel, pari al 30%),   ovvio che una cavit  di questo tipo abbia numerose perdite.

Guardiamo ora qualche aspetto generale della costruzione di laser a diodo:

- La regione da cui provengono i fotoni ha dimensioni asimmetriche, ci    dovuto dal fatto che i fotoni provengono unicamente dalla giunzione spessa poche centinaia di nanometri. L'emissione   quindi asimmetrica e astigmatica ovvero ha una forma ellittica ed   sfocata; la prima   dovuta dalla diffrazione maggiore nella direzione che attraversa la giunzione, la seconda   in contrasto con il modello ideale da noi creato;
- La polarizzazione del fascio laser   legata alla direzione in cui si muovono i portatori di carica;
- La cavit  del laser a diodo   molto corta (centinaia di micrometri), di conseguenza il fsr   relativamente grande (decine di GHz e la larghezza di riga   del MHz, quindi monocromatica). A causa dell'elevata larghezza della curva di guadagno   possibile che la lunghezza d'onda cambi;
- L'efficienza di questo laser   molto bassa. Infatti normalmente si usano materiali poco drogati che presentano quindi un'elevata resistivit ;
- Il precedente punto da cui si che il diodo sia soggetto a riscaldamento che dilata la cavit  cambiando la lunghezza d'onda dell'emissione. Occorre quindi provvedere un sistema di termoregolazione in grado di garantire una stabilit  di temperatura notevole;
- Anche la variazione della corrente pu  produrre modifiche della lunghezza d'onda, questo perch , date le piccole dimensioni del dispositivo, l'elevata densit  di corrente pu  modificare l'indice di rifrazione.
-

18.6 Fotodiodo

Il fotodiodo   l'opposto del laser a diodo.

Il fotodiodo   un rivelatore di radiazione che fornisce un segnale proporzionale alla potenza della radiazione che gli incide; in questo dispositivo giunzione p-n che   esposta alla radiazione e a differenza del laser a diodo si usa spesso il silicio.

Esistono diverse modalit  di operazione di un fotodiodo ma la pi  comune   quella detta fotovoltaica, in cui la giunzione non   polarizzata. In questo caso la regione di svuotamento   priva di cariche ed   presente un campo elettrico built-in. Il processo   l'opposto di quello del laser: il fotone colpisce un atomo che lo assorbe promuovendo un elettrone alla banda di conduzione, questo elettrone, insieme a tanti altri, forma una corrente che pu  essere misurata ad esempio da un amperometro.

Facciamo alcune osservazioni:

- Affinch  l'assorbimento avvenga,   necessario che l'energia del fotone sia maggiore a quella di gap (e deve essere un riverbero di essa immagino). Nel silicio questa energia vale 1.1eV ed   necessario che la radiazione abbia lunghezze d'onda $\lambda < E_g/h \simeq 1.1 \mu\text{m}$;
- L'efficienza del processo dipende dall'energia del fotone, nel silicio   massima quando questo ha una lunghezza d'onda di 800nm;
- In ogni caso la formazione di coppia lacuna ha una certa probabilit  di verificarsi, dobbiamo ragionare sulle medie e il processo non   adatto per radiazioni deboli;
- Spesso alla giunzione p-n si aggiunge un sottile strato di silicio allo scopo di allungare la regione di svuotamento e rendere pi  sensibile il diodo.

Il foto diodo presenta alcuni evidenti limiti, infatti l'effetto del campo built-in   debole e poco controllabile. Le cariche uscenti devono attraversare il materiale semiconduttore subendo forti effetti dissipativi. Per superare queste difficolt  possiamo polarizzare la giunzione, spesso viene polarizzata inversamente. La polarizzazione inversa permette di aumentare lo spessore della giunzione dando maggiore sensibilit  e un tempo di risposta pi  rapido.

19 Circuiti magnetici e trasformatore

19.1 Materiali ferromagnetici

I materiali ferromagnetici hanno spiccate proprietà di carattere magnetico, la loro presenza è infatti in grado di modificare i campi necessari per la descrizione di fenomeni magnetostatici.

Per trattare questi argomenti è bene introdurre i campi \vec{B} , \vec{H} e \vec{M} , questi tre campi sono regolati dalla relazione $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ dove μ_0 è la permeabilità magnetica nel vuoto. Purtroppo i tre campi hanno dimensioni diverse, B misura in tesla, mentre H e M misurano in [A/m]. La loro utilità è facilmente intuibile osservando le equazioni di Maxwell nella materia, $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$ e $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{J}_m$, dove \vec{J} e \vec{J}_m sono le densità di correnti libere e la densità di corrente di volume.

H è quindi facilmente individuabile misurando la corrente, mentre M è la risposta del materiale all'applicazione di \vec{H} .

Per semplificare la trattazione faremo l'approssimazione a materiali lineari, ovvero materiali omogenei e isotropi per i quali

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

qua la costante scalare adimensionata χ_m (normalmente nota come suscettività magnetica) misura proprio la risposta "magnetica" del materiale al campo \vec{H} che vi è applicato. Si ha

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H},$$

con $\mu_r = 1 + \chi_m$ permeabilità magnetica del materiale.

19.1.1 Ferromagneti

Nella maggioranza dei materiali $\chi_m \approx 0$ con segno positivo o negativo a seconda del carattere paramagnetico o diamagnetico. Di conseguenza non è facile fare esperimenti che verifichino le proprietà magnetiche della materia con questi materiali.

La storia è diversa con i materiali ferromagnetici, questi materiali hanno χ_m dell'ordine delle migliaia e più e permettono di vedere effetti anche macroscopici. Un esempio è l'aumento di \vec{B} e la canalizzazione delle sue linee. La relazione lineare prima scritta non è, qua, più verificata. In questa nota presupporremo comunque che essa si verificata per semplificare.

19.2 Circuiti magnetici

Supponiamo di avere un anello di materiale ferromagnetico con sezione uniforme s e perimetro medio (preso nel mezzo della sezione) ℓ . A causa dell'effetto di canalizzazione, un eventuale campo \vec{B} che si trovi all'interno dell'anello vi rimane confinato e il suo flusso sulla sezione è invariante per tutto l'anello (abbiamo quindi un tubo di flusso chiuso su se stesso). Supponiamo che il campo magnetico sia creato da una bobina di N spire percorse da una corrente di intensità I , la bobina produce un campo magnetico e si comporta da generatore delle linee di campo che rimangono chiuse nell'anello. Vediamo che questo sistema si comporta in tutto e per tutto in analogia con un circuito elettrico, li diamo allora il nome di circuito magnetico. Consideriamo il circuito magnetico descritto, l'equazione di Maxwell recita

$$\oint_{\gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \Phi_{\Sigma}(\vec{J})$$

γ è il perimetro della superficie Σ e il flusso prende anche il nome di corrente concatenata. Per le condizioni imposte prima H e B sono parallele e

$$\oint_{\gamma} H d\ell = \Phi_{\Sigma}(\vec{J}) = NI$$

che ci porta a

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} H d\ell = H\ell &= \frac{B\ell}{\mu_0 \mu_r} = \Phi_S(\vec{B}) \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r S} = \\ &= \Phi_S(\vec{B}) \mathcal{R} = NI. \end{aligned}$$

Questa relazione definisce la riluttanza magnetica \mathcal{R} , una quantità dipendente dalla geometria e dal materiale dell'anello. La riluttanza così definita ricorda molto la resistenza (per un filo di lunghezza l e sezione S $R = \rho l / S$), in analogia con la legge di Ohm viene definita la legge di Hopkinson

Ohm: $IR = \Delta V$

Hopkinson: $\Phi_S(\vec{B}) \mathcal{R} = NI$.

NI in analogia con la forza elettromotrice viene definita forza magnetomotrice.

19.2.1 Riluttanza e coefficienti di induzione magnetica

Prima di procedere ricordiamo le equazioni di autoinduttanza e mutua induzione

$$L \equiv \frac{\Phi_{S,avv}(\vec{B})}{I}$$

$$M \equiv \frac{\Phi_{S,avv1}(\vec{B}_2)}{I_2} = \frac{\Phi_{S,avv2}(\vec{B}_1)}{I_1}$$

dove avv. sta a significare che il flusso è preso su tutto l'avvolgimento. Cominciamo prendendo un singolo avvolgimento di N spire e corrente I , allora se R è nota

$$\Phi_S(\vec{B}) = \frac{NI}{\mathcal{R}}.$$

Inoltre $\Phi_{S,avv}(\vec{B}) = N\Phi_S(\vec{B})$ e quindi

$$L \equiv \frac{N\Phi_S(\vec{B})}{I} = \frac{N^2}{\mathcal{R}}.$$

Passiamo ora al caso con due avvolgimenti di spire, allora ripetendo i passaggi di prima otteniamo

$$M \equiv \frac{\Phi_{S,avv1}(\vec{B}_2)}{I_2} = N_1 \frac{\Phi_S(\vec{B}_2)}{I_2} = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}}.$$

19.2.2 Applicazioni di circuiti magnetici e Hopkinson

Vediamo adesso alcune applicazioni rilevanti dei circuiti magnetici.

La prima si riferisce a schermi magnetici per i campi stazionari. Avevamo già visto come realizzare delle schermature per campi magnetici variabili nel tempo tramite l'utilizzo di gusci di materiale conduttore attraversati da correnti parassite, questo non è tuttavia possibile nel caso stazionario. Ponendo un ferromagnete all'interno di un campo vettoriale, abbiamo la possibilità di canalizzare le sue linee di flusso diminuendo il campo in alcune regioni dello spazio. Ovviamente da schermatura è tanto più efficace, quanto più è maggiore la permeabilità magnetica.

La seconda applicazione invece riguarda l'analogia tra la legge di Hopkinson e quella di Ohm. Essendo le due leggi analoghe, qualsiasi legge derivi da Ohm per i circuiti elettrici, avrà una corrispondente per i circuiti magnetici. In particolare le leggi di Kirchhoff e i concetti di nodo, ramo e maglia.

Infine l'ultima applicazione è l'analisi dei circuiti con i traferri. I traferri sono punti di discontinuità nei circuiti magnetici. Prendiamo il circuito iniziale e immaginiamo che venga rimossa una porzione di lunghezza $\ell_t \ll \ell$, si possono trascurare gli effetti di bordo e supporre che il campo magnetico parallelo al tubo. Questo significa che l'ampiezza del campo nel traferro B_t è pari a quella nel ferro B_f e quindi anche il flusso per una sezione $\Phi_S(\vec{B}_f) = \Phi_S(\vec{B}_t)$, di conseguenza

$$\mathcal{R}_f = \frac{\ell - \ell_t}{\mu_0 \mu_r S}$$

$$\mathcal{R}_t = \frac{\ell_t}{\mu_0 S}$$

$$\mathcal{R}_{eq} = \mathcal{R}_f + \mathcal{R}_t = \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r S} \left(1 + \frac{\ell_t (\mu_r - 1)}{\ell} \right) \simeq$$

$$\simeq \frac{\ell}{\mu_0 \mu_r S} \left(1 + \mu_r \frac{\ell_t}{\ell} \right)$$

e

$$B_t = \frac{NI}{\mathcal{R}_{eq} S} \simeq NI \frac{\mu_0 \mu_r}{\ell + \mu_r \ell_t}.$$

19.3 Trasformatore

Molti apparecchi elettrici hanno bisogno di un'alimentazione in corrente continua a bassa tensione, tuttavia quella che esce dalle prese di casa è una corrente alternata (circa 50 Hz) ad elevata tensione (circa 230-240 V_{rms} fino a centinaia di kV per gli elettrodomestici ad alta tensione).

Abbiamo già osservato un metodo per raddrizzare un'onda, ovvero un raddrizzatore a diodo insieme ad un integratore, per abbassare la ddp invece si fa proprio uso di un trasformatore. In realtà l'uso del trasformatore è stato superato ed adesso

si fa uso di alcuni dispositivi, noti come switching, che compongono la quasi totalità di alimentatori per piccoli dispositivi e livellano un'onda quadra che lavora a decine di kHz con duty cycle variabile, tuttavia anche questi dispositivi hanno al proprio interno alcuni sistemi che ricordano i trasformatori.

Un trasformatore è un sistema costituito da due avvolgimenti (primario e secondario) avvolti sullo stesso circuito magnetico. La loro costituzione permette di avere un accoppiamento magnetico quasi totale ($k \approx 1$). In un trasformatore ideale abbiamo

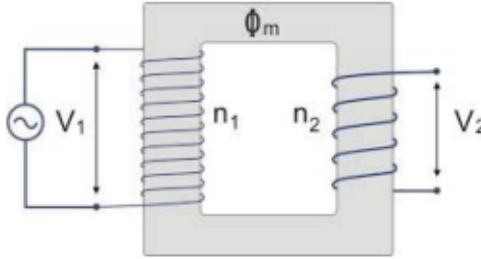
$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

indichiamo la permeabilità con μ_r , la sezione del circuito con S e la lunghezza con ℓ ; N_1 e N_2 rispettivamente il numero di spire di secondario e primario (non aveva più senso al contrario?) e definiamo il parametro costruttivo come

$$\alpha = \frac{N_2}{N_1}$$

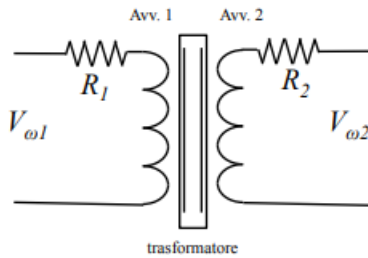
Allora possiamo scrivere la riluttanza come $\mathcal{R} = \ell / (\mu_0 \mu_r S)$ e l'induttanza come $L_i = \mu_0 \mu_r S N_i^2 / \ell$. Possiamo infine definire le seguenti relazioni costruttive

$$\begin{aligned} \frac{L_2}{L_1} &= \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^2 = \alpha^2 \\ \frac{M}{L_1} &= \frac{N_2}{N_1} = \alpha \\ \frac{M}{L_2} &= \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{\alpha}. \end{aligned}$$



19.3.1 Trasformazione in tensione e in corrente

Vediamo adesso come si comporta il trasformatore, mettiamo in serie agli induttori due resistenze che comprendono le varie resistenze interne



Il primario è collegato ad un generatore di ddp alternata e periodica, le equazioni sono

$$\begin{aligned} V_{\omega,1} &= (R_1 + j\omega L_1) I_{\omega,1} + j\omega M I_{\omega,2} \\ V_{\omega,2} &= (R_2 + j\omega L_2) I_{\omega,2} + j\omega M I_{\omega,1}. \end{aligned}$$

Calcoliamo il rapporto in tensione nelle condizioni di secondario aperto ($I_{\omega,2}=0$) nell'approssimazione $\omega L_1 \gg R_1$ e osserviamo

$$T_V = \frac{V_2}{V_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1} = \alpha.$$

T_V non dipende da ω , le tensioni sono sfasate di $\pi/2$ e a secondario aperto il trasformatore non assorbe alcuna potenza.

Determiniamo adesso il rapporto di trasformazione in corrente nelle condizioni di secondario cortocircuitato ($V_{\omega,2}=0$)

$$T_A = \frac{I_2}{I_1} = \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{\alpha}.$$

Anche il rapporto di trasformazione in corrente è indipendente dalla frequenza e il loro sfasamento è $\pm\pi$. In queste condizioni

$$V_{\omega,1} = \left(R_1 + \frac{1}{\alpha^2} R_2 \right) I_{\omega,1}$$

la corrente è in fase con la ddp e il primario si comporta come se fosse dotato di resistenza efficace $R_{eff} = R_1 + R_2/\alpha^2$.

19.3.2 Rendimento del trasformatore ideale

Il rendimento η di un trasformatore, può essere definito come la capacità del dispositivo di trasferire potenza dal primario al secondario, dove supponiamo sia presente un carico resistivo R_2 . Matematicamente

$$\eta = \frac{P_2}{P_1 - P_{J1}}$$

dove le potenze sono espresse come mediate nel tempo e, P_1 e P_2 sono le potenze di primario e secondario e P_{J1} è la potenza dissipata per effetto Joule su R_1 dal primario. Inoltre

$$P_{J1} = \frac{R_1 I_1^2}{2}$$

$$P_2 = \frac{R_2 I_2^2}{2} = \frac{R_2 I_1^2}{2\alpha^2},$$

mentre P_1 è la potenza erogata dal trasformatore e nelle nostre condizioni

$$P_1 = \frac{(R_1 + R_2/\alpha^2) I_1^2}{2}.$$

Mettiamo tutto insieme

$$\eta = \frac{\frac{R_2 I_1^2}{2\alpha^2}}{\frac{R_1 I_1^2}{2} + \frac{R_2 I_1^2}{2\alpha^2} - \frac{R_1 I_1^2}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{R_2 I_1^2}{2\alpha^2}}{\frac{R_2 I_1^2}{2\alpha^2}} = 1,$$

che dimostra come il trasformatore ideale abbia rendimento unitario, infatti anche $T_V T_A = 1$. Inoltre scrivendo P_2 in termini di V_1

$$P_2 = \frac{V_1^2}{2} \frac{R_2/\alpha^2}{(R_1 + R_2/\alpha^2)^2}$$

che per V costante è una funzione di R_2 e ha massimo per $R_2 = \alpha^2 R_1$, è curioso notare come in queste condizioni $R_{eff} = 2R_1$ e quindi metà della potenza fornita dal generatore viene spesa per effetti di natura resistiva (finisce in P_{J1}) e metà per effetti di natura reattiva.

19.3.3 Rendimento del trasformatore reali

Per raggiungere la conclusione che il rendimento di un trasformatore è unitario abbiamo fatto diverse approssimazioni:

- L'accoppiamento magnetico è stato supposto unitario $k=1$;
- Abbiamo fatto l'approssimazione $\omega L \gg R$ trascurando le componenti resistive rispetto alle reattive;
- È stata trascurata qualsiasi altra dissipazione e perdita di energia.

La prima condizione dipende dalla qualità costruttiva del trasformatore, esistono trasformatori con $k \geq 0.95$.

Per la seconda bisogna considerare che il numero di spire del secondario è piccolo e operando a 50 Hz $\omega L_2 \gg R_2$ non è verificata.

Esistono varie cause di dissipazione, le principali sono legate all'isteresi ferromagnetica e alle correnti parassite nel circuito. L'isteresi ferromagnetica fa sì che il circuito magnetico si magnetizzi in un certo modo al passaggio di corrente, essendo però questa alternata dovrà poi passare al contrario e quindi contro il forte campo magnetico del circuito; per diminuire la dissipazioni si fa spesso uso di "ferri dolci", come alcuni acciai contenti silicio, la cui curva di isteresi è dolce (è inoltre importante il volume che nei trasformatori ad alta potenza è considerevole). Le correnti parassite sono origine di dissipazione di potenza spuria, come abbiamo visto, queste devono circolare su linee chiuse ed estese, racchiudendo superfici macroscopiche, per essere elevate; i circuiti magnetici offrono quindi le perfette condizioni di severe dissipazioni (per ovviare a questo problema spesso si usano lamine sottili isolate elettricamente tra loro).

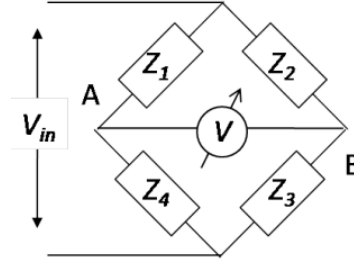
20 Ponti

20.1 Introduzione

La configurazione a ponte permette di aumentare la sensibilità di misura senza fare uso di componenti attivi che ne amplifichino il segnale. Con lo sviluppo della tecnologia elettronica, i ponti di misura sono stati abbondantemente superati.

20.2 Il ponte, in generale

La configurazione a ponte permette di collegare (almeno) quattro componenti dotati di quattro impedenze.



Il ramo A è costituito dalle impedenze Z_1 e Z_4 , il ramo B, dalle impedenze Z_2 e Z_3 . Ai due capi è applicata una differenza di potenziale $V_{\omega, in}$ che è poi misurata attraverso il voltmetro, inoltre $V_{\omega} = Z_3 I_{\omega B} - Z_4 I_{\omega A}$, e $I_{\omega B}/I_{\omega A} = (Z_1 + Z_4)/(Z_2 + Z_3)$, quindi

$$V_{\omega} = I_{\omega A} \left(Z_3 \frac{Z_1 + Z_4}{Z_2 + Z_3} - Z_4 \right) = \frac{I_{\omega A}}{Z_2 - Z_3} (Z_1 Z_3 - Z_2 Z_4).$$

Normalmente vogliamo determinare le condizioni in cui $|V_{\omega}| = 0$, questo si verifica quando $Z_1 Z_3 = Z_2 Z_4$.

20.2.1 Ponte di Wheatstone

Il ponte di Wheatstone è costituito da 4 resistori, quindi non essendoci sfasamento è inutile mettere correnti alternate. Questo ponte veniva usato per trovare una resistenza incognita, poste 3 resistenze e un potenziometro, si faceva variare il potenziale finché questo non valeva 0. La sensibilità dello strumento era aumentata dal fattore di scala dato delle due resistenze note.

Esempio. R_1 incognita e R_4 potenziometro, $R_1 = R_4 R_2 / R_3$, allora R_2 / R_3 è il fattore di scala.

20.2.2 Ponte di de Sauty

Il ponte di Sauty è utilizzato per misurare le capacità. Immaginiamo di avere un condensatore su 1, poniamo un secondo condensatore su 2 e facciamo delle considerazioni. Innanzitutto, V_{ω} deve essere alternata, inoltre era necessario mettere una seconda impedenza immaginaria, altrimenti il bilanciamento sarebbe stato possibile. A questo punto è sufficiente mettere 2 resistenze note, di cui una variabile, per raggiungere il bilanciamento. La condizione di bilanciamento non è sempre indipendente dalla frequenza, possiamo usare un generatore di funzioni di frequenza variabile proprio con questo ponte per verificare questo limite.

20.2.3 Il ponte di Maxwell

Vediamo adesso un ponte per misurare l'induttanza. Il problema dell'impedenza dell'induttanza è che questa è generalmente sia reale (come per le resistenze) che immaginaria (come per i condensatori). Immaginiamo di porre l'induttore incognito in 1, allora $Z_1 = j\omega L_1 + R_1$ e dobbiamo trovare due quantità insieme anziché una sola. Vediamo alcuni casi prima di arrivare al vero e proprio ponte di Maxwell.

Caso 1

Prendiamo $Z_2 = j\omega L_2 + R_2$, $Z_3 = R_3$, $Z_4 = R_4$ dove l'ultima è un potenziometro, allora il bilanciamento si ha quando $(j\omega L_1 + R_1) R_3 = (j\omega L_2 + R_2) R_4$. Possiamo esaminare parte immaginaria $L_1 = L_2 R_4 / R_3$ e reale $R_1 = R_2 R_4 / R_3$ separate, ma c'è il problema che il rapporto L_1 / L_2 e R_1 / R_2 deve essere uguale, tuttavia non esistono L_2 e R_2 tali che questi rapporti siano sempre uguali. Una soluzione sarebbe L_2 variabile, ma come sappiamo gli induttori sono dipendenti l'uno dall'altro, quindi non è una buona idea.

Caso 2

Poniamo in 1 un induttore con in serie un condensatore variabile che vada a compensare la sua parte immaginaria, gli altri componenti sono resistori con 4 potenziometro; allora $R_1 = R_2 R_4 / R_3$ e $L_1 = 1/(\omega^2 C_1)$. Questo bilanciamento ha due problemi, il primo è che richiede la misura della frequenza, cosa non facile all'epoca dei ponti. Il secondo è che non è possibile distinguere parte immaginaria e parte reale perché il condensatore blocca la componente continua.

Caso 3

Collegiamo in uno l'induttore con una resistenza R in serie, in 2 un condensatore e un potenziometro, in 3 un condensatore e in 4 un altro potenziometro. Come prima non possiamo mettere in continua. Il bilanciamento è $(j\omega L_1 + R_1 + R) / (j\omega C_3) = (R_2 + 1/(j\omega C_2)) R_4$, ovvero, separando le componenti: $L_1 = R_4 R_2 C_3$ e $R_1 = R_4 (C_3/C_2) - R$. Il problema è che la determinazione di R_1 richiede di aggiustare la resistenza variabile (eventualmente calibrata) R_4 . Però il valore di R_4 influenza anche la misura di L_1 .

Caso 4 - Ponte di Maxwell

In questo caso abbiamo l'induttore in 1, una resistenza in 2, un parallelo tra una resistenza e un condensatore variabile in 3 e un potenziometro in 4. Possiamo separare parte reale e immaginaria usando continua e alternata. Il bilanciamento richiede $(j\omega L_1 + R_1) (R_3 / (1 + j\omega R_3 C_3)) = R_2 R_4$ che separato da $L_1 = R_4 C_3 R_2$ e $R_1 = R_2 R_4 / R_3$.

