Appunti fisica

Pietro Faraggiana

Dicembre 2020

Sommario

Appendice A:

- Derivata : importante ricordare che dy/dx=dy/dz dz/dx
- Derivata parziale:è la derivata di una funzione a più variabili: $\frac{\partial f}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\, o\, \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}$ e rappresenta la derivata del grafico che si ottiene tagliando una sezione della curva parrallelamente a x_i tra le sue proprietà abbiamo $\frac{\partial y}{\partial x} = 1/\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}$ e $df = f(x_1 + dx_1, ..., x_n + dx_n) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$
- Integrali di superficie

Appendice B:

Multipli e sotto multipli

10^3	kilo	K	10^{-3}	milli	m
10^6	Mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	Giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	Tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	Peta	P	10^{-15}	femto	f

Grandezze meccaniche

Lunghezza	m
Tempo	s
Massa	kg
Velocità	$m\,s^{-1}$
Accellerazione	$m\,s^{-2}$
Velocità angloare	$rad\,s^{-1}$
Accellerazione angolare	$rad\,s^{-2}$
Periodo	s
Frequenza	s^{-1}
Pulsazione	rad s^{-1}
Forza	$kg\,m\,s^2 = N$
Quantità di moto, impulso	$N s$
Lavoro, energia	$Nm = J$
Potenza	$J\,s^{-1}$=W
Momento angolare	$J\,s$
Momento di una forza	$N\,m$
Momento d'inerzia	$kg\,m^2$
Densità	kg/m^3

Pressione	$kg/(m\,s^2) = Pa$
Viscosità	$kg/(m\,s)$
Tensione superficiale	kg/s^2
Quantità di materia	mol
Temperatura	K
Calore, lavoro	J
Calore specifico	$J/(kg\,K)$
calore specifico molare	$J/(mol\,K)$
Capacità termica	J/K
Calore latente	j/kg
Energia interna	J
Entalpia	J
Entropia	J/K
Energia libera	J
Coefficente di dilatazione	$1/k$
Coefficente di compressibilità	Pa
conducibilità termica	$J/(m\,s\,K)$

Appendice C

- Derivata di un vettore: $dv/dt = \frac{dv_x}{dt}u_x + \frac{dv_y}{dt}u_y + ...$ (versore=$du/dt = \frac{d\theta}{dt}u_N$) oppure $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt} + v\frac{d\theta}{dt}U_N$
- Integrale di un vettore a(t): A=$\int_{t_1}^{t_2} a(t)dt = u_x \int_{t_1}^{t_2} a(t)_x dt + u_y \int_{t_1}^{t_2} a(t)_y dt +$
- Gradiente di una funzione scalare: la variazione di una funzione di dx,dy... è espressa da $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ è facile notare come questo sia un vettore dato che è il prodotto scakare con un vettore dx possiamo allora prendere un vettore e vedere il cambiamento della funzione grazie al gradiente.

Capitolo 1

Cinematica del punto

La meccanica riguarda lo studio del moto di un corpo: essa spiega le relazione tra le cause che generano il moto e le caratteristiche di questo esprimendole con leggi qualitative.
Per semplificare l'argomento tratteremo i corpi come dei punti materiale, si parlerà di cinematica quando si studierà unicamente il moto mentre si parlerà di dinamica quando studieraemo an che le cause che lo originano.
Dato un punto che si muove in uno spazio con coordinate spaziali e temporali si parlerà di *sistema di riferimento*, la sua *traiettoria* invece costituirà la curva che sia andrà a creare sul piano x,y.
Le granedezze fondamentali della cinematica sono: *spazio, tempo, velocità ed accellerazione. la quite* è il particolare stato in cui le forze hanno risulatane nulla.

Velocità nel moto rettilineo

La velocità media è

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

mentre la velocità istantanea è la derivata della funzione

$$v_{ist} = \frac{dx}{dt}$$

Risulta ovvia dal teorema fondamentale dell'integrazione la formula inversa

$$\Delta x = \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t)dt \;\rightarrow\; x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

che permette il calcolo dello spazio percorso nel moto rettilineo.
Se v è costante possiamo semplifcare la legge oraria così

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0)$$

è banale osseravre come questa sia un'equazione della retta.

L'accelerazione nel moto rettilineo

L'accelerazione è la variazione della velocità ed è quindi riconducibile al coefficente angolare di un grafico v(t)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

se a=0 la velocità è ovviamente costante mentre la formula inversa della precedente equazione è

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$$

Data una velocità iniziale ed un'accelerazione la velocità all'istante t è banalmente

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

mentre per ricavare lo spazio percorso si utilizza la precedente formula insieme a quella dello spazio percorso data una velocità

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]dt = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_0 dt + \int_{t_0}^{t} a(t - t_0)dt$$

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Se invece l'accelerazione dipende dalla posizione essendo la derivata un'applicazione lineare si ha

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d[v(x)]}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt = v\frac{dv}{dx}}$$

essendo una differenziale a variabili separabili si ottiene

$$\int_{x_0}^{x} a(x)dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$$

se l'accelaerazione è costante si ottiene

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Moto verticale di un corpo

Essendo g un'accelerazione un corpo in caduata ha velocità

$$v(t) = gt \quad e \quad v(x) = \sqrt{2g(h - x)}$$

queste non sono altro che rimodellazioni di due delle precedenti formule come anche

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad e \quad t(x) = \sqrt{\frac{2(h - x)}{g}}$$

Moto armonico semplice

Il moto armonico è il moto lungo una retta di un punto proiettato sul diametro si una circonferenza da un punto che si muove su di essa. La legge oraria è

$$x(t) = A\,sin(\omega t + \phi)$$

(costruzione sperimentale vedi video khan academy) dove $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ovvero è la pulsazione, una sorta di velocità per radianti del seno al secondo, A è l'ampiezza ovvero il raggio della circonferenza su cui si muove il punto di moto circolare mentre ϕ è la fase del moto ovvero la distanza tra il punto all'inizio del moto e la sua origine x=0. Il moto armonico semplice è proporzionale allo spostamento dall'origine, se lo sposto di x esercitera forza F per tornare all'origine, se lo sposto di 2x esciterà forsa 2F. La velocità e l'accelerazione saranno concodramente a tutto quello che ho detto la derivata e la derivata seconda della precedente equazione

$$v(t) = \omega A\,cos(\omega t + \phi) \quad e \quad a(t) = \omega^2 A\,sin(\omega t + \phi) = \omega^2 x$$

In formule di dinamica il moto armonico è quel moto descritto da

$$F = -kx = \frac{d^2x}{dt^2}m$$

La soluzione di tale equazione differenziale è

$$x(t) = c_1 sin(\omega t) + c_2 cos(\omega t) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Impostando t=0 si ottiene che $c_1 = x(0)$ ovvero il punto di partenza x_0 mentre $c_2 = \frac{v_0}{\omega}$, notiamo subito che questa equazione si può scrivere nella prima forma in cui abbiamo espresso questo moto

$$A\,sin(\omega t + \phi) = x_0 sin(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}cos(\omega t)$$

dove

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad e \quad tg\phi = \frac{c_2}{c_1}$$

Moto rettilineo smorzato esponenzialmente

Prendiamo un moto che abbia come condizione a=-kv, ovvero la velocità diminuisce con una decelerazione pari alla volocità stessa per una costante k. La decelerazione è sempre minore poiché ogni istante diminuendo v diminuisce anche kv (si potrebbe già pensare che decresca in maniera esponenziale).

$$a = -kv \rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv \rightarrow \frac{dv}{v} = -kdt \rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k \int_0^t dt \rightarrow ln\frac{v}{v_0} = -kt \rightarrow v(t) = v_0 e^{-kt}$$

Come già fatto in precedenza utilizziamo la composizione di funzioni per ricavare la dipendenza dallo spazio

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = -kv \rightarrow \frac{dv}{dx} = -k \rightarrow \int_{v_0}^{v} dv = -k \int_0^x dx \rightarrow v(x) = v_0 - kx$$

La legge oraria si ricava da quella del moto rettilineo

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt = \int_0^t v_0 e^{-kt} = \frac{v_0}{k}(1 - e^{kt})$$

è importante notare come preso $\tau = \frac{1}{k}$ v(t)/v_0 in un tempo τ si riduce di un fattore di circa e. τ è detta costante di tempo, se k è grande τ è piccola e la velocità decresece più rapidamente

Moto nel piano. Posizione e velocità

Può essere generalmente indicato con coordinate polari $r(t), \theta(t)$ o cartesiane x(t),y(t) che si relzionano tramite le seguenti 4 formule:

$$x = r\,0cos\theta \quad y = r\,sin\theta \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad tg\,\theta = \frac{y}{x}$$

Inoltre un vettore può essere individuato tramite la formula $OP = xv_x + yv_y$ con v_x e v_y versori la velocità è ovviamente individuata dal rapporto incrementale tra r(t) e r(t+h) ed è quindi la derivata $v = \frac{dr}{dt}$

componenti carteiane

$$r = xu_x + yu_y \rightarrow v = \frac{dx}{dt}u_x + \frac{dx}{dt}u_y = xv_x + yv_y$$

si intuisce quindi che la velocità ha componenti caresiane x e y quindi si possono riscrivere le precedenti formule

$$v_x = v\,0cos\theta \quad v_y = v\,sin\theta \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad tg\,\theta = \frac{v_y}{v_x}$$

coordinate polari

Introduciamo u_r e u_θ i versori di direzione r e versore ortogonale ad essa. La derivata di un vettore è la seguente

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dt}u_x + r\frac{d\theta}{dt}u_\theta = v_r + v_\theta$$

l'inverso della precedente formula è

$$r(t) = r(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Accelerazione nel moto piano

$$a = \frac{d^2r}{dt^2}$$

Seguendo la regola di derivazione di un vettore si ottiene

$$a = \frac{dv}{dt}u_t + v\frac{d\phi}{dt}u_N = \frac{dv}{dt}u_T + \frac{v^2}{r}u_N = a_T + a_N$$

La prima componente è parallela al vettore velocità e ne esprime la variazione, la seconda componente inve dipende dalla variazione della cavità della traiettoria ed è ortagonale alla prima. inoltre è importante sapere che in moto curvilineo vario entrambe sono diverse da 0, in un moto rettilineo vario a_N è nulla e nel rettilineo uniforme sono nulle entrambe.

componenti carteiane

$$a_x = \frac{dv}{dt} cos\,\phi - \frac{v^2}{R} sen\,\phi$$
$$a_y = \frac{dv}{dt} sen\,\phi - \frac{v^2}{R} cos\,\phi$$

coordinate polari

complicatamente inutili e lunghe, si ricava però

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

Moto circolare

Si chiama moto circolare il moto del piano la cui traiettoria è circolare quindi r=costante. Possiamo descrivere lo spazio percorso come s e quindi poi con le componenti velocità $v_x\, e\, v_y$ cartesiane oppure con i radianti=s/r, essendo θ presente in entrambe definamo la velocità angolare

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{ds}{dt} = \frac{v}{r}$$

con conseguenti leggi orarie **(del moto uniforme)**

$$s(T) = s_0 + vt \quad \theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

L'accelerazione centripeda invece dalle formule del moto nel piano risulta

$$a_T = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Il periodo è sempre quello del moto armonico come lo sono i moti dei punti proiettati sul diametro della circonferenza, inoltre la velocità angolare è numericamente uguale alla pulsazione anche se è fisicamente diverso (infatti sono segnate dealla stessa lettera). Se il moto non è uniforme troviamo l'accelerazione angolare, la derivata della velocità e logicamente $\alpha = \frac{a_T}{r}$.
Nel caso sai nota la legge oraria possiamo integrare per trovare le formule invrese

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)dt \quad e \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt$$

Qualora sia invece nota $\alpha(\theta)$ invece di $\alpha(t)$ possiamo calcolare l'incremento della velocità an corrispondenza del incremento angolare

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \alpha d\theta = \omega d\omega \rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta} \alpha(\theta)d\theta = \frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{2}\omega_0^2$$

Leggi orarie del moto non uniforme

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad e \quad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Notazione vettoriale

Ampliamo il concetto di vleocità angolare associandoli caratteristiche vettoriali, definiamo il vettore ω con queste proprietà ha modulo $\frac{d\theta}{dt}$ la direzione e il verso seguono la regola della mano destra: risulta allora che $v = \omega \times r$ (di norma si pensa ω applicata al centro della circonferenza). Possiamo allora dire che $a = \frac{d}{dt}(\omega \times r) = \alpha \times r + \omega \times v = a_T + a_N$

moto parabolico

a questo punto il moto parabolico utilizza logiche conseguenze dei moti già osservati

Capitolo 2

Dinamica del punto

La dinamica tratta le cause che originano il moto, la prima cosa da sapere è che se su un corpo non sono esercitate forze esso mantiene il proprio stato: se era in quiete rimane in quiete altrimenti rimane in moto. non è l'unico caso in cui un corpo maniene il proprio stato, se la risultante delle forze è nulla succede la stessa cosa e se un corpo è contrapposto dalla reazione vincoloare pure; in entrambi i casi si dice che il corpo è in equilibrio.

Leggi di newton

La prima legge di newton è il già citato principio di inerzia. La seconda legge di newton è

$$F = ma = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

essa non ha dimostrazioni poiché è vista ed è stata trovata grazie alle evidenze sperimentali, inoltre è bene notare da subito che è una legge vettoriale. La terza legge di newton invece ci dice che ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contaria.

Quantità di moto

si definisce quantità di moto di un punto il vettore

$$p = mv$$

se la massa è costante risulta ovvio che

$$F = \frac{dp}{dt}$$

La quantità di moto è il vettore che descrive lo stato dinamico del punto Dall ultima equazione si osserva ch una variazione della forza in dt provoca una variazione dp, definiamo allora questa variazione come impulso

$$Fdt = dp \rightarrow J = \int_0^t F\,dt = \int_{p_0}^{p} dp = p - p_0 = \Delta p = m(v - v_0) = m\Delta v$$

Le ultime due valgono per m costante.

Risultante delle forze, equilibrio e reazioni vincolari.

Avendo constatato che la forza è un vettore si nota che applicando n forze è come applicare una forza sola che è la risultante della somma vettoriale

$$R = F_1 + ... + F_n$$

Se invece un corpo si trova in quiete e la risultante delle forze è nulla si parla di *equilibrio statico*. Qualora invece ci sia una forza risultante non nulla e il corpo sia in stato di equilibrio statico vuol dire che l'ambiente circostante agisce sul corpo per il terzo principio di newton con una forza detta reazione vincolare ($\mathbf{N}$), per come è definita risulta ovvio che essa non è calcolabile a priori.

Forza peso

La forza peso è una forza che si osserva sperimentalmente dove dalla seconda legge di newton si ottiene **P=ma** e in questo caso a=g ovvero l'accelerazione gravitazionale (la forza di attrazione che si ha tra un corpo e la terra).

Classificazione delle forze

Esistono 4 tipi di forze fondamentali l'interazione gravitazionale, l'interazione elettromagnetica, l'interazione debole e l'interazione forte.

Forza di attrito radente

Se ad un corpo di peso P applichiamo una forza parallela alla superficie di appoggio ed esso rimane in equilibrio statico, si osserva sperimentalmente che rimarrà in tale stato finché $F \leq \mu_s N$ dove N è la componente perpendicolare della reazione vincolare R, μ_s è la costante di attrito statico relativa a quel corpo e $\mu_s N = F_{as}$ è la componente parallela della reazione vincolare ed è detta forza di attrito statico. Pensiamo ora di applicare una forza F che abbia componenti xy diverse da 0, si osserva che le forze agenti sono

$$R + P + F = 0$$

Dividiamo adesso le forze nelle componenti xy

$$N - P + F_y = 0 \rightarrow N = P - F_y = P - F\ sen\theta$$

$$F_{as} + F_x = 0 \rightarrow F_{as} = -f_x = -F\ cos\theta$$

Qualora $F_x > F_{as}$ allora il corpo esce dallo stato di equilibrio e all'attrito statico sisostituisce l'attrito dinamico (moto smorzato) $F_{ad} = \mu_d N$ con μ_d costante di attrito dinamico $(\mu_d < \mu_s)$. la ovvia conclusione logica è

$$F\ cos\theta - \mu_d N = ma$$

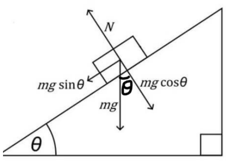
Le forze di attrito radente hanno origine dalle forze di coesione ed il valore del coefficente dipende dallo stato delle superfici di contatto e dalla loro composizione chimica (un eccessiva levigatura fa aumentare la coesione e quindi l'attrito mentre l'utilizzo di un lubrificanti come l'acqua possono diminuirla. Se l'attrito è uguale a 0 si dirà che la suprficie di scorrimento è liscia.

Piano inclinato

Appoggiando un corpo su di un pinano inclinato si osservano 2 forze, la forza peso F e la reazione vincolare R per cui

$$P + R = ma$$

scomponiamo adesso le due forze in 2 componenti, una parallela al piano inclinato ed una ortogonale.



Varranno allora le due seguenti equazioni

$$mg\ cos\theta - N = 0 \quad mg\ sen\theta = ma$$

riuslta ovvio che $a = g\ sen\theta < g$. Se abbiamo attrito sul piano allora il corpo non si muoverà finché $mg\,sen\theta \leq \mu_s N = \mu_s cos\theta$ che si risolve in $tg\theta \leq \mu_s$ qualora il corpo entrasse in movimento entra in gioco l'attrito dinamico

$$mg - sen\theta - \mu_d mg\ cos\theta = ma$$

Forza elastica

Si definisce forza elastica una forza unidirezionale con verso rivolto verso un punto O ed un'accelerazione dipendente dalla distanza dal suddetto punto. Questo moto è descritto dalla seguente formula

$$F = -kx$$

dove k è una costante positiva chiamata costante elastica e x è la posizione rispetto all'origine O. Essendo chiaramente un moto armonico l'accelerazione vale invece

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m} = -\omega^2 x$$

di conseguenza abbiamo a

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$$

La forza di richiamo della molla è proporzionale alla deformazione fino a che non si supera il limte di elasticità della molla. Passo le atre equazioni poiché seguwìe il moto armonico.

Forza di attrito viscoso

La forza di attrito viscoso è una forza che si oppone al movimento con una conseguente decelerazione (moto smorzato), viene utilizzato quando un corpo si muove in un fluido e la direzione è indifferente, l'equazione è

$$F = -bv$$

Corpo in caduta

Un corpo cade $F_1 = mg$ in un fluido che esercita forza viscosa $F_2 = -bv$, allora

$$F_1 + F_2 = mg - bv = ma = m\frac{dv}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} = g - kv$$

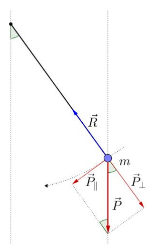
dove per comodità di espressione abbaimo assunto k=b/m, citroviamo davanti ad un equazione a variabili separabili che risolviamo ottenendo

$$v(t) = \frac{g}{k}(1 - e^{-kt}$$

Risulta ovvio che è il caso inverso del moto smorzato dove la velocità all limite tende a $\frac{g}{k} = \frac{P}{b}$ dove P è la forza peso.

Pendolo semplice

Su di un pendolo semplice agiscono 2 forze, P+T=ma dove pè la forza peso e t è la tensione della corda. Scomponiamo le forze per ottenere una risultante tangente ed una perpendicolare.



$$R_T = -mg\ sen\theta = ma_T \qquad R_N = T - mg\ cos\theta = ma_N$$

Secondo quanto detto però sul moto circolare

$$a_T = L\frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2}{dt^2 + \frac{g}{L}sen\theta}$$

$$a_N = \frac{v^2}{L} \rightarrow m\frac{v^2}{L = T - mg\ cos\theta}$$

La prima equazione è la legge oraria del pendolo, tuttavia si vede sperimentalmente che per θ grossi l'equazione diventa analiticamente complicata mentre per angoli inferiori ai 7° l'errore risulta minore di 10^{-3} e, grazie agli sviluppi di taylor, l'equazione diventa quella del moto armonico.

$$\frac{d^2}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

da cui ricaviamo le segenti formule.

$$\theta = \theta_0 \; sen(\omega t + \phi) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$s = L\theta = L\theta_0 \; sen(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0 cos(\omega t + \phi) \rightarrow \; v = L\frac{d\theta}{dt}$$

$$T = m[g \; cos\theta(t) + \frac{v^2(t)}{L}]$$

Tensione fili

La prima parte di questa sezione contiene nozioni banali e logiche su come bisogna considerare la tensione dei fili una forza, la seconda parte spiega l'esperienza di varignon: Date 3 masse collegate da un filo e 2 carrucole, si chiami θ l'angolo che si crea tra le due corde collegate alla massa di mezzo m_3 allora le masse sono in eqilibrio statico se è soddisfatta l'equazione

$$m_3^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2cos\theta$$

la dimostrazione è data dalla classica euguaglianza delle forze Qualora una massa P trascinasse una massa Q tramite un filo di massa non trascurabile m_F allora osserviamo che

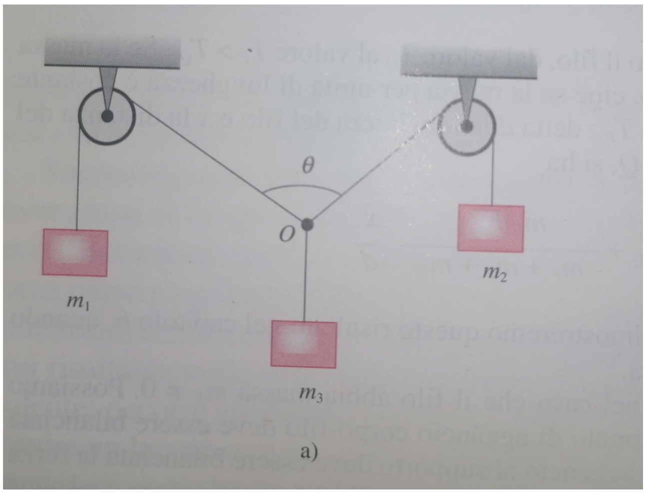
$$F - T_P = m_P a \quad T_P - T_Q = m_F a \quad T_Q = m_Q a$$

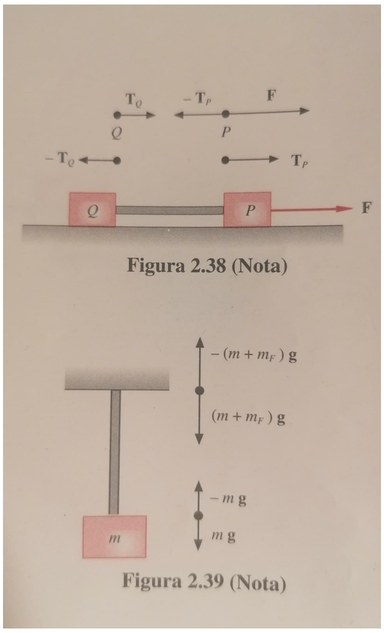
che hanno soluzione

$$a = \frac{F}{m_P + m_F + m_q} \quad T_P = \frac{m_F + m_Q}{m_P + m_F + m_Q}F \quad T_Q = \frac{m_Q}{m_P + m_F + m_Q}F$$

Tamite una dimostrazione che vedremo ne capitolo 6 vediamo che sia d la lunghezza del filo e sia x la distanza di un punto dal filo allora se il filo è di massa omogena si ha che la tensione in quel punto vale

$$T(x) = T_Q + \frac{m_F F}{m_P + m_F + m_Q}\frac{x}{d}$$





Lavoro, potenza ed energia cinetica

Consideriamo un punto che si muove lungo una generica traiettoria curivilnie e sia F la risultante delle forze agenti su punto, allora si definisce lavoro la quantità scalare

$$W = \int_A^B F ds = \int_A^B F\, cos\theta ds = \int_A^B F_T ds$$

si possono verificare tre casi: il primo è che $\theta < \pi/2$ e quindi dW risulta positivo ed è chiamato lavoro motore, il secondo è che $\theta > \pi/2$ ed il lavoro è negativo ed è chiamato lavoro resistente, il terzo è $\theta = \pi/2$ ed il lavoro è nullo con F che è forza puramente centripeta. Essendo l'integrale una applicazione lineare allora date varie forze $f_1 + ... + F_n = F$ allora $W = \int_A^B F ds = W_1 + ... + W_n$

Potenza

la potenza corrisponde all'lavoro per unità di tempo:

$$P = \frac{dW}{dt} = F\frac{dr}{dt} = F_T v$$

questa è la potenza istantanea, ovviamente quella media è W/t

Energia cinetica

$$dW = F_T ds = ma_T ds = m\frac{dv}{dt}ds = m\frac{ds}{dt}dv = m\, v\, dv$$

abbiamo quindi trovato un collegamento tra velocità e lavoro, ma allora

$$W = \int_A^B m\, v\, dv = \frac{1}{2}m\, v_B^2 - \frac{1}{2}m\, v_A^2 = Ek, B - Ek, B = \Delta E_k$$

La quantita $\frac{1}{2}mv^2$ è chiamata energia cinetica e la differenza tra quella iniziale e quella finale ci da il lavoro. Si noti che il lavoro e l'enerhia cinetica sono legati al movimento, se non c'è movimento non c'è lavoro e la fatica che sentiamo se proviamo a spostare qualcosa in vano è data dall'energia chimica prodotta dai muscoli in tensione.

Lavoro della forza peso

La forza peso ha solo una componente diversa da zero, quella sull'asse z. Di conseguenza il lavoro della forza peso diventa (seguendo tutte i versi)

$$W = -(mgz_b - mgz_a)$$

ed ha segno negativo perché abbiamo impostatato il sistema di riferimento con origine al suolo e verso opposto all'asse z. Chiamiamo adesso energia potenziale ($E_p = mgz$) la funzione che indica il lavoro della forza peso. La forza peso è una forza costante e va trattata come esse, infatti ogni forza costante ha come espressione del lavoro la formula W=Fs

Lavoro della forza elastica.

Ricordando che $F = -k\, x\, u_x$ allora

$$W = \int_A^B -k\, x\, u_x\, dx\, u_x = -k\int_A^B x\, dx = \frac{1}{2}k\, x_A^2 - \frac{1}{2}k\, x_B^2 = -\Delta E_p$$

dove E_p indica l'enegia potenziale elastica.

Lavoro della forza di attrito aderente

Ovviamente se il corpo non si muove non c'è lavoro, consideriamo quindi l'attrito dinamico ricordando che $F_{ad} = -\mu_d N\, u_v$

$$W = \int_A^B F_{ad} ds = \int_A^B -\mu_d N\, u_v ds = -\mu_d N\int_A^B ds$$

Abbiamo di conseguenza che il lavoro dipende dalla traiettoria e non è quindi esprimibile utilizzando esclusivamente i punti A e B, inoltre dato che deve essere in movimento per avere un lavoro frenante (infatti il lavoro è negativo) il corpo allora avrà una certa energia cinetica e si fermera quando $S_{AB} = E_{k,a}/\mu_d N$.

Forze conservative

Nei tre esempi di lavoro osservati si osservano 2 differenze sostanziali nei primi due (lavoro della forza peso e dela forza elastica) il lavoro non cambia dipendentemente dalla traiettoria scelta poiché 2 traiettorie coincidono e sono chiamate forze conservative, inoltre il lavoro nel senso opposto è negativo e ritornando al punto di partenza si ha lavoro nullo. In entrambi i casi abbiamo parlato di energia potenziale, non esiste una formula generale per l'enegia potenziale ma essa varia a seconda del tipo di forza conservativa in esame ma per tutte vale che $W = E_{p,B} - E_{p,A}$ Il terzo tipo di lavoro dipende invece dal percorso effettuato ed è detto energia dissipativa, esse si calcolano con le prime due fromule introdotte per il calcolo del lavoro ovvero $\int_A^B F_T ds$ e ΔE_k. Una categoria importante di forze non conservative sono apupunto le forze di attrito o energie dissipative.

Conservazione dell energia meccanica

Se agiscono solo forze conservative allora valgono contemporaneamente

$$W = \Delta E_k = Ek, A - Ek, A \quad W = \Delta E_p = Ep, A - Ep, A$$

euguagliando si ottiene

$$Ek, A + Ep, A = Ek, B + Ep, B$$

ciò significa che la somma di energia cinetica ed energia potenziale rimane costante durante il moto (un po' come se l'energia potenziale si trasformasse in cinetica) tale somma si chiama energia meccanica e vale per forze conservative il principio di conservazione dell'energia meccanica.

$$E_m = E_K + E_P$$

Quando agiscono forze non conservative e conservative si sommano i due lavori, l'energia meccanica non rimane la stessa e la sua variazione è uguale al lavoro delle forze non conservative.

Relazione tra energia potenziale e forza

Osserviamo la formula generale del lavoro

$$dW = F \cdot ds = F_x dx + = F_y dy + = F_z dz$$

ma allora

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

quindi

$$F = -\nabla E_p$$

Momento angolare e della forza

Il momento di un vettore v è il prodotto vettoriale $M_o = V \times OP = V \times OP_\perp$ dove $OP_\perp$ è la componente di OP perpendicolare a V (detta braccio) ed O è il polo, Preso un altro polo allora OP=OO'+O'P $M_o = OO' \times v + M_{o'}$ Il momento angolare è il momento del vettore quantità di moto

$$L = r \times p = r \times mv$$

ma essendo il prodotto vettoriale allora la componente parallela viene annullata, quindi

$$L = r \times mv_\theta = mr^2 d\frac{d\theta}{dt}$$

In particolare se il moto è circolare con O centro della circonferenza

$$L = mr^2\omega$$

Il momento della forza è il momento del vettore forza e all applicarsi di $R = F_1 + ...F_n$ forze vale

$$M = r \times R$$

Teorema del momento angolare

La variazione nel tempo della quantità di moto vale

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dr}{dt} \times mv + r \times m\frac{dv}{dt}$$

ma se il polo rimane fermo allora dr/dt è la velocità ed è quindi parallela al secondo vettore, di conseguenza il primo prodotto si annulla; il secondo prodotto divnta $r \times ma = M$ di conseguenza osserivamo che se i poli rimangono fermi la variazione del momento angolare vale quanto il momento della forza il quale è nullo se la forza è parallela ad r o se la forza vale 0. Al contrario vale che $\int_0^t M\ dt = \Delta L$ che è l'analogia al teorema dell impulso, se F viene applicata per un dt allora r rimane costante e vale

$$\int_0^t M\ dt = R \times \int_0^t F = r \times J = \Delta L$$

(Teorema del momento del impulso) Il lavoro può essere espresso tramite il modulo del momento della forza

$$W = \int_A^B F_T ds = \int_{\theta_A}^{\theta_B} rF_T d\theta = \int_{\theta_A}^{\theta_B} M\ d\theta$$

Accellerazione→Forza
Momento della forza→Accellerazione angolare

Forze centrali

Si definisce forza centrale una forza passante per una regione dello spazio con le seguenti proprietà:

- un punto di una qualsiasi retta direzione passa per un punto fisso O
- il modulo è funzione soltanto della distanza dal centro stesso

Chiamo u_r il vettore della direzione OP=r e F=F(r)(>0 se repulsiva <0 se attrattiva) allora se esiste una forza funzione della posizione si ha una modifica dello spazio stesso e stabilisce quello che si chiama campo di forza che agisce su ogni particella presente nella sua area. Essendo r e F paralleli allora il momento della forza è nullo, ma allora il momento angolare è costante e e r e v sono semore sullo stesso piano, il moto del piano è di modulo L che definisce il verso di v e r (generalmente uniforme) e ed è costante $r^2\frac{d\theta}{dt}$ ma non in generale r e ω separate. In dt l'area aumenta e di uno spazio approssimabile ad un triangolo quindi

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$$

chiamata velocità areale e il tempo di un periodo è $T = \frac{2m}{L}A$ vedremo nel capitolo 5 che questa cosa valida per i pianeti e le forze elastiche

Formula di binet

In un campo di forze centrali la componente trasversa è nulla, infatti

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\frac{d\theta}{dt}) = 0$$

l'accellerazione vale

$$a = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \to a = -\frac{L^2}{m^2r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right]u_r\ in\ coordinate\ polari(p.87)$$

Le forze centrali sono conservative, infatti

$$W = \int_A^B F\ ds = \int_A^B F(r)u_r\ ds$$

$u_r\ ds$ vale ds cosθ=dr quindi

$$W = \int_A^B F(r)\ dr = f(r_B) - f(r_A)$$

Capitolo 3

Moti relativi

Sistemi di riferimento

È dato provato in fisica che un evento e le sue proprietà rispetto a due sistemi di rifrimento è invariante, ciò cambia se i sistemi di riferimineto sono in moto.

Teorema delle velocità relative

Prendiamo un sistema di riferimento di centro O fisso ed uno mobile O'P un punto in movimento e r e r' le distanze di p dai sistemi di riferimento allora $r = OO' + r'$ con $v = \frac{dr}{dt} = xu_x + yu_y + zu_z$, $v' = x'u_{x'} + y'u_{y'} + z'u_{z'}$ e $v_{OO'} = \frac{d00'}{dt} = x_{0'}u_x + y_{0'}u_y + z_{0'}u_z$. chiamiamo poi velocità assoluta $v = \frac{dr}{dt}$ la velocità relativa al sistema fisso e velocità relativa $v' = \frac{dr'}{dt}$ la velocità relativa al sistema mobile, Inoltre derivando $r = OO' + r'$ si ottiene $v = v_{O'} + v' + x'\frac{du'_x}{dt} + y'\frac{du'_y}{dt} + z'\frac{du'_z}{dt}$ *(teorema delle velocità relative)*. Osserviamo immediatamente che $\frac{dr'}{dt}$ contiene oltre alle derivate delle coordiante anche le derivate dei versori, che sono $\frac{dr}{dt} = \omega \times r$ *(formule di poisson)*. la differenza tra le due velocità è detta velocità di trascinamento

Teorema delle accelerazioni relative

Per le 3 velocità v v' e $v_{o'}$ basta fare nuovamente la derivata mentre facendo la derivata del teorema delle velocità relative otteremo il *teorema delle accelerazioni* $a = a' + a_{o'} + \omega \times (\omega \times r') + \frac{d\omega}{dt} \times r' + 2\omega \times v'$ essndo $\frac{d}{dt}(w \times r') = \omega \times (\omega \times r') + \frac{d\omega}{dt} \times r' + 2\omega \times v'$ scriviamo quindi l'accelerazione di trascinamento $a_t = a' + a_{o'} + a_c$ con $a_c = 2\omega \times v'$ *(accelerazione di coriolis)*. La struttura complessa di questi due teoremi più che di uso pratico ci fanno capire quanto il moto di un punto dipenda dal suo sistema di riferimento. Definisco un sistema di riferimento inerziale un sistema in cui valga la legge di inerzia(un soggetto non soggetto a forze mantiene il suo stato di moto senza variazioni).

Relatività galileiana

Se il sistema è inerziale allora un altro sistema qualsiasi $v_{o'} = k$. $a_{o'} = 0$ *e* $\omega = 0$ quindi $a = a'$ di conseguenza se un sistema di riferimento è inerziale lo sono anche gli altri se rettilinei uniformi inoltre è impossibile mettere in evidenza che un sistema sia in quiete o in movimento. Se non è così vale $ma - ma_t - ma_c = ma'$ e alle forze 'vere' vanno sommate quelle apparenti (centrifuga), queste forze sono dette inerziali. Da ora in poi se non detto il sistema di riferimento sarà inerziale altrimenti verrà annunciato.

Moto di trascinamento

Il moto di trascinamento uniforme ed accelerato sono banali, osserviamo quindi quello circolare uniforme. Abbiamo $v_{o'}, a_{o'} = 0$ $\omega = k$ allora i troremi relativi divantano $v = v' + \omega \times r$ e $a = a' + \omega \times (\omega \times r) + 2\omega \times v'$ mentre la relazione tra le forze è $F + F_{centrifuga} + F_c$ con la forza centrifuga che vale $-m\omega \times (\omega \times r)$

Relatività ristretta

Nel 1800 i riusltati delle equazioni di maxwell riusltarono non invarianti (non supportavano) alla relatività galileiana e un esperimento fece notare come c+v=c-v=c(indipendentemente dalla velocità del osservatore c non cambia); nel 1905 Einstein propose che i sistemi di riferimento sono invarianti quando considerate in diversi sistemi di riferimento inerziali. È palese come la relatività galileiana non basti prendendo come esempio un moto lungo la sola asse delle x ($y' = y$ e $z' = z$) si osserva allora che

$$x' = \gamma_0(x - v_0 t) \qquad t' = \gamma_0(t - \frac{v_0}{c^2}x)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

Ovvero un evento di coordinate x,y,z,t viene osservato dal sistema O' con velocità v_0 di coordinate x', y', z', t' Queste relazioni furono ricavate da lorentz (sperimentalmente?) nel 1904 per rendere invariante le equazioni di maxwell, La più importnate delle quali è la seconda perché a differenza della ralatività galileiana indica che ache il tempo è relativo al sistema di riferimento. Le trasformazioni di lorentz si applicano ad un qualunque sistema di riferimento inerziale (non è quindi il caso della forza motivo per cui l'esempio è stato fatto su un caso rettilineo uniforme (non poteva essere altrimenti)).

Trasformazioni della velocità

Deriviamo le equazioni e otteniamo

$$dx' = \gamma_0(dx - v_0 dt) = \gamma_0 dt(v_x - v_0)$$

$$dt' = \gamma_0(dt - \frac{v_0}{c^2}dx) = \gamma_0 dt(1 - \frac{v_0}{c^2}v_x)$$

$$\frac{dx'}{dt'} = v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2}v_x}$$

facciamo lo stesso con x ed y

$$v'_{y,z} = \frac{v_{y,z}}{1 - \frac{v_0}{c^2}v_x}$$

si osserva facilmente che la velocità di c non varia in un sistema di rifrimento inerziale ma può cambiare la direzione. Le trasformazioni di lorentz mettono in evidenza il limite della velocità della luce poiché in presenza di una velocità darebbero come risultato un valore immaginario. È possibile ripetere la dimostrazione delle velocità per l'accelerazione ma essendo il sistema inerziale e con accelerazione 0 troveremmo che anche dal secondo sistema l'accelerazione vale 0 (confermando l'ipotesi sui l'nvalidità di lorentz nei sistemi non inerziali).

Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi

Nella meccanica newtoniana la costanza del tempo e delle lunghezze era un assioma, basta invece fare Δt e Δx=L delle trasformzioni di lorentz per accorgersi che ciò non accade nella meccanica relativistica:

$$L = \frac{L'}{\gamma_0}$$

ovvero la lunghezza di un oggetto misurata in O' per cui l'oggetto si muove (L') riuslta minore rispetto alla lunghezza di un sistema O che si muove con l'oggetto (L= lunghezza propria) (l'oggetto è fermo). Ugualmente con i tempi si ottiene

$$\Delta t = \gamma_0 \Delta t'$$

ovvero il tempo misurato su un sistema di riferimento per cui l'osservatore (Δt) è fermo è *dilatato* rispetto ad un osservatore per cui il primo si muove ($\Delta t'$)

Simultaneità

La relatività del tempo comporta la revisione del concetto di simultaneità: 2 eventi nel sistema O' (generalmente pensabile come io, persona esterna agli eventi che lì osservo) di coordinate x_1 e x_2 sono definiti simultanei se accadono nello stesso istante t'. Dal punto di vista di O però si ha $t_{1,2} = \gamma_0\big(t' + \frac{v_0}{c^2}x'_{1,2}\big)$ quindi dato che $x_2 - x_1 \neq 0$ si ha

$$\Delta t \neq 0 = \gamma_0 \frac{v_0}{c^2}(x'_2 - x'_1)$$

Quantità di moto ed energia relativistiche

La quantità i moto si scrivr (ricavata sperimentalmente?)

$$p = m\gamma v = \frac{m\,v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

come sempre si nota che per piccole velocità si tende alla fisica newtoniana; per la quantità di moto si procede come si è fatto prima: $F = \frac{dp}{dt}$ Le conseguenze logiche di questa equazione sono fondamentali infatti notiamo che all'aumentare di p più che aumentare v aumenta γ al limite di questa equazione si raggiunge che v tende a c infatti $dp = \frac{dv}{v}\gamma^2 p$ (calcoli p.119). Calcoliamo adesso l'energia cinetica partendo dalla definizione di lavoro.

$$dW = F\,ds = \frac{dp}{dt}ds = dp\,v = \frac{dv}{v}\gamma^2 p\,v = m\gamma^3 v\,dv$$

che confrontato con $d\gamma = v\gamma^3 dv/c^2$ (calcolo trovato a p.119) ci da

$$dW = mc^2 d\gamma \;\rightarrow\; W = mc^2\int_1^\gamma d\gamma = mc^2(\gamma - 1)$$

$$E_k = m(\gamma - 1)c^2$$

Ovvero l'energia necessaria per portare una particella dallo stato di quiete alla velocità v. Anche questa tenderà alla formula del lavoro newtoniana per velocità piccole, infatti possiamo arrestare gamma al primo ordine dello sviluppo di taylor ottenendo $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + x/2$ che sostituito nella formula ci darà $1/2mv^2$ Guardando la struttura di E_k si nota che essa è la differenza di due punti, $E = m\gamma c^2$ e $E_0 mc^2$ scriviamo allora

$$E = E_k + E_0$$

E_0 è chiamata energia a riposo ovvero energia di massa del punto materiale ed uguale ad e quando $E_k = 0$ ed E è l'energia totale da cio ci ricava che

$$\gamma = \frac{E}{E_0}$$

Infine (tramite i calcoli p.120) si ottiene la relazione fondamnetale tra quantità di moto, energia totale ed energia a riposo.

Trasformazioni di Lorentz per quantità di moto ed energia

Le osservazioni fatte fin ora sono osservate da un sistema di riferimento inerziale con massa m, quntità di moto p ed energia totale E, osserviamole adesso da un diverso sistema inerziale queste grandezze avranno ovviamenete $v'\gamma', E'$ e vogiamo sapere la relazione che lega i due sistemi. Tramite dimostrazione p.121 si arriva a

$$p'_x = \gamma_0\big(p_x - \frac{v_0}{c^2}E\big) \qquad E' = \gamma_0(E - v_0 p_x)$$

con $p'_{y,z} = py, z$ si nota che che queste 4 formule sono uguali alle trasformazioni di lornetz con $p_{x,y,z} e E/c$ al posto di x,y,z e t

Forza

Questo paragrafo è la dimostrazione di come nel caso della relatività F=ma non valga e ci sia bisogno di una revisione.

Capitolo 4

Dinamica dei sistemi di punti materiali

In questo capitolo la terza legge di newton fa da padrone, infatti dividendo le forze agenti su un punto i del sistema in *forze interne* (Forze esecitate dagli alti unti del sistema) $F_i^{(I)}$ e *forze esterne* (forze provenienti dal esterno del sistema) $F_i^{(E)}$ tale che la forza agente sul punto F_i valga $F_i = F_i^{(I)} + F_i^{(E)}$ si osserva che $\sum_i F_i^{(I)} = 0$ poiché ogni punto i del sistema è bilanciato da un altro per la terza legge di newton. Per ciascun punto di P_i di massa m_i sottoposto ad una forza F_i consideriamo le grandezze misurate in un sistema di riferimento inerziale:
Posizione r_i, Velocità v_i, Accelerazione $a_i = F_i/m_i$, Quantità di moto $p_i = m_i v_i$, Momento angolare $L_i = r_i \times m_i v_i$ ed Energia cinetica $E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$; Per l'intero sistema consideriamo invece:
Quantità di moto totale $P = \sum P_i = \sum m_i v_i$, Momento angolare totale $\sum L_i = \sum r_i \times m_i v_i$ ed Energia cinetica totale $\sum E_{k,i} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Centro di massa e suo moto

Definiamo cento di massa dei punti di un sistema r_{CM}

$$r_{CM} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$$

Per le suo coordinate basta sostituire r_i con x, y, z_i. Dimostriamo ora le seguenti tesi: preso un punto di riferimento O' tale che $r_i = r_i' + OO'$ (oppure $r_i' = r_i + O'O$) diverso il centro di massa non cambia

$$r'_{CM} = \frac{\sum m_i r_i'}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i (= r_i + O'O)}{\sum m_i} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i} = r_{CM}$$

Velocità del centro di massa

$$v_{CM} = \frac{dr_{CM}}{dt} = \frac{\sum m_i v_i}{\sum m_i} = \frac{P}{M}$$

Accelerazione centro di massa

$$a_{CM} = \frac{d^2 r_{CM}}{dt^2} = \frac{\sum m_i \frac{d^2 r_{CM}}{dt^2}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i a_i}{\sum m_i}$$

se il sistema è inerziale si ha poi $m_i a_i = F_i^{(E)} + F_i^{(I)}$ e sommando tutti i pinti del sistema

$$R^{(E)} = m a_{CM} = \frac{dP}{dt}$$

Conservazione della quantità di moto

Se la risultante delle forze esterne è nulla si ha che $a_{cm} = 0$ $v_{CM} = k$ e P=J infatti la quantità di moto totale si conserva, questa legge può anche essere isolata per i moti proiettati sugli assi $p_{x,y,z}$ la costnanza di P non significa che anche m_i e v_i rimangono costanti, inoltre si può ricavare che se $p_1 + p_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 = K$ derivando rispetto al tempo $m_1 a_1 + m_2 a_2 = 0$ significa che $F_1 = -F_2$; questa relazione ha un significat diverso da quella di newton perché non ne specifica la direzione ed è figlia del piuù grande concetto di omogeneità dello spazio

Teorema del momento angolare

Il momento angolare del sistema di punti è

$$L = \sum r_i \times m_i v_i$$

(Teniamo presente che O può non coincidere con l'origine e qundi essere in movimento con velocità v_0) Proseguendo con una dimostrazione dervando rispetto al temp si ottiene che

$$\frac{dL}{dt} = -v_0 \times m v_{CM} + M^{(E)} + M^{(I)}$$

con $M^(E) = \sum r_i \times F_i^{(E)}$ e $M^(I) = \sum r_i \times F_i^{(I)}$ Si dimostra anche che il $M^{(I)} = 0$ qunidi

$$\frac{dL}{dt} = M^{(E)} - v_0 \times m v_{CM}$$

Il secondo termine è anch'esso nullo se:
-Il polo è fisso nel sistema di riferimento inerziale con $v_0 = 0$
-Il centro di massa è in quiete nel sistema inerziale
-Il polo coincide con il centro di massa per cui $v_0 = v_{CM}$
-v_0 è parallelo a v_{CM}

Conservazione del momento angolare

Qualora $-v_0 \times m v_{CM} = 0$ se $M^{(E)} = 0$ allora il momento angolare si conserva e resta costante, questa seconda ipotesi può verficarsi in 2 casi: - Non agiscono forze esterne ($R^{(E)} = 0$ non significa che anche il momento delle forze vale 0), in questo caso si ha anche la conservazione della quantità di moto -$M^{(E)}$ è nullo rispetto ad un determinato polo, ma non a tutti, pure in presenza di forze esterne, pertanto si ha conservazione di L solo se calcolato in quel polo (in tali casi non si conserva P). La proprietà di conservazione di L discende dalla caratteristica dello spazio di essere isotropo.

Sistema di riferimento del centro di massa

Studiando un sistema di punti materiali è possibile mettere il centro del sistema di riferimento nel centro di massa, questo sistema avrà dtereminate caratteristiche: l'origine è nel centro del sistema, gi assi mantengono la stessa direzione e possono essere scelti paralleli a quelli del sistema inerziale, non è detto che il nuovo sistema sia inerziale in quanto il sistema può essre sottoposto a forze con risultanete non nulla. La relazione tra 2 raggi dei due sistemi di riferimento sarà $r_i = r_i' + r_{CM}$ e $v_i = v_i' + v_{CM}$ inoltre si ottengono le seguenti proprietà: $r'_{CM} = 0$, $v'_{CM} = 0$, $\sum m_i r_i = 0$, $\sum m_i v_i = 0$ ma non è detto che i singoli punti abbiano P=0. Essendo il sistema di riferimento non inerziale sui singoli punti agisce la forza $-m_i a_t = -m_i a_{CM}$. Modifichiamo quindi l'equazione delle forze in $F_i^{(E)} + F_i^{(I)} - -m_i a_{CM} = m_i a_i' = 0$

Teoremi di konig

I teoremi di konig stabiliscono le relazioni tra E_k e L (E_k' e L' se il CM è il centro del sistema di riferimento). Scriviamo $L = \sum r_i \times m_i v_i$ relativo al centro di massa

$$L = \sum (r_i' + r_{CM}) \times m_i(v_i' + v_{CM}) = \sum r_i' \times m_i v_i' + \sum r_i' \times m_i v_{CM} + \sum r_C M \times m_i v_i' + \sum r_{CM} \times m_i v_{CM}$$

Il secondo e terzo termine sono nulli rispetto a quanto detto nel precedente paragrafo mentre il primo vale L' ed il quarto vale L_{CM} Di conseguenza abbiamo ciò che è chiamato *il primo teorema di konig*

$$L = L' + L_{CM}$$

se il centro di massa è il sistema di riferimento si ottiene L=L' Possiamo fare la stessa cosa per quanto riguarda l'energia cinetica ottenendo alla fine che

$$E_k = E_K' + E_{K,CM}$$

questo è *il secondo teorema di konig.* I teoremi di konig mettono in evidenza la scomposizione in termini di moto medio del sistema del energia cinetica e del momento angolare rappresentata dal moto del centro di massa e dal moto del sistema rispetto al centro di massa, fondamentale differenza da P e $R^{(E)}$ che dipendono unicamente da CM.

Teorema dell'energia cinetica

$$dW_i = F_i \cdot dr_i = F_i^{(E)} \cdot dr_i + F_i^{(I)} \cdot dr_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

che sommato su tutta la traiettoria Γ_i vale $W = W^{(E)} + W^{(I)}$ In questo caso $W^{(I)}$ non si annulla poiché dato dal cambiamento delle distanze mutue all' interno del sistema che però sono nulle se il corpo è rigido. Dal teorema del energia cinetica si ha che

$$W = \sum \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = E_{k,B} - E_{k,A}$$

se le forze sono conservative si ha $W = \Delta E_k = -\Delta E_p$ allora si ha

$$(E_k + E_p)_B = (E_k + E_p)_A = K$$

Ovvero si ha conservazione dell'energia meccanica (K uguale lavoro?). Qualora le forze non fossero conservative si ha

$$(E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = W_{nc}$$

Urti

Le forze applicate durante un urto sono chiamate forze impulsive (sono estremamente elevate), se non agiscono forze esterne la quantità di moto si conserva

$$p_{in} = m_1 v_{1,in} + ... + m_n v_{n,in} = m_1 v_{1,fin} + ... + m_n v_{n,fin} = p_{fin}$$

infatti si conserva P_{CM} ma può variare P dei singoli punti per effetto dell'impulso della forza di interazione. Nel caso di forze esterne se le forze non sono impulsive e la durata dell' urto è estremamente piccola si conserva comunque la quantità di moto poiché

$$\Delta P = \int_{t_1}^{t_2} F^{(E)} = F_m^{(E)\tau}$$

La conservazione del momento angolare è conseguenza della conservazione della quatità di moto poiché durante l'urto il raggio non cambia e quindi L si conserva. Mentre non ci è dato sapere se le forze interne sono conservative e quindi se si conserva E_m sappiamo che la posizione dei punti interni non cambia e quindi si ha $\Delta E_m = \Delta E_k$ e torna utile il secondo teorema di konig opportunamente modificato

$$E_k = E'_K + E_{K,CM}$$

con $E_{K,CM} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2$ e $E'_K = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2$

Urto completamente anaelastico

Un urto è detto completamente anaelastico quando i due corpi rimangono attaccati formando un unico corpo di massa unificata $m_1 + m_2$ chiamiamo la velocità del corpo unificato v'' allora un attimo dopo l'urto i copri hanno velocità

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v'' = (m_1 + m_2)v_{CM}$$

come è osservabile la velocità del centro di massa non varia. Nel urto completamente anaelastico E_k non si conserva infatti

$$E_{k,in} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E'_k + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2$$

mentre quella finale applicando konig

$$E_{k,fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2$$

come possiamo notare la differenza è $-E'_k$, infatti dopo un urto completamente anaelastico non c'è più moto rispetto al centro di massa ed $-E'_k$ si assorbe; questo è dato dal fatto che duo corpi che si scontrano rimanendo attaccati si deformano e l'energia utilizzata per la deformazione è proprio $-E'_k$.

Urto elastico

Un urto elastico è un urto che conserva anche l'energia cinetica oltre alla quantità di moto. La difficoltà del calcolo del urto elasatico sta nel fatto che abbiamo 6 incognite (le componenti della velocità dei 2 punti dopo l'urto) e 4 equazioni(3 quantità di moto e una cinetica) e anche nel piano si diminuiscono le incognite ma anche le equazioni e di conseguenza si ha lo stesso problema, l'unica soluzione è avere qualche informazione dopo l'urto. Nel caso unidimensionale invece abbiamo 2 equazioni e 2 incognite.

$$m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} = m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin} = (m_1 + m_2) v_{CM}$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2$$

per torvare però le velocità finali è più comodo usare come sistema di riferimento CM dove $p' = 0$ e quindi

$$m_1 v'_{1,in} = m_2 v'_{2,in} \qquad m_1 v'_{1,fin} = m_2 v'_{2,fin}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,in} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,in} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,fin} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,fin}$$

Da queste si ottiene $v'_{1,fin} = -v'_{1,in}$ e $v'_{2,fin} = -v'_{2,fin}$ ciò significa che nel sistema CM la quantità di moto di ciascun punto cambia solo di verso, ritornando al sistema inerziale tramite $v = v' + v_{CM}$ si ottiene

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2) v_{1,in} + 2 m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$
$$v_{2,fin} = \frac{2 m_1 v_{1,in} + (m_2 - m_1) v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$

Urto anaelastico

L'urto anaelastico non completo è quel urto in cui E'_k non viene ne conservata ne persa completamente, ciò è dato dal fatto che una volta deformato il corpo l'energia necessaria per far ritornare il corpo allo stato iniziale è superiore a quella dell' impulso dato dall'urto. in questi casi ovviamente P e v (e quindi $[E'_k)$ iniziali sono maggiori rispetto a quelle finali, definiamo allora

$$e = -\frac{p'_{1,fin}}{p'_{1,in}} = -\frac{v'_{1,fin}}{v'_{1,in}} = -\frac{p'_{2,fin}}{p'_{2,in}} = -\frac{v'_{2,fin}}{v'_{2,in}}$$

detto coefficente di restituzione. E'_k dopo l'urto è data da

$$E'_{k,fin} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,fin} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,fin} = e^2 \left(\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1,in} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2,in} \right) \rightarrow E'_{k,fin} = e^2 [E'_{k,in}$$

la variazione del energia cinetica è invece

$$\delta = \frac{[E'_{k,fin} - [E'_{k,in}}{[E'_{k,in}} = e^2 - 1$$

Il rapporto tra le velocità è invece il seguente (dim p.156)

$$v_{1,fin} = v_{CM}(1+e) - e v_{1,in} \quad v_{2,fin} = v_{CM}(1+e) - e v_{2,in}$$

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - e m_2) v_{1,in} + m_2 (1+e) v_{2,in}}{m_1 + m_2} \quad v_{1,fin} = \frac{m_1 (1+e) v_{1,in} + (m_2 - e m_1) v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$

Urti relativistici

Con urti relativistici si intendono gli urti effettuati in laboratorio tramite accelleratpre di particelle, si tratta di urti senza contatto ma in cui le particelle si avvicinano così tanto da risentire delle forze di origine nucleare e/o nucleari. I casi più comuni di 2 particelle che si urtano sono il caso in cui una delle 2 è ferma ed il caso in cui si muovono una contro l'altra. In questi processi la massa potrebbe non conservarsi quidi $m_1 + m_2 \rightarrow m_3 + m_4$, qualora questa si conservi parliamo di urto elastico e si conserva anche l'energia cinetica, mentre in ogni caso si conservano energia totale e quantità di moto e le leggi di conservazione di queste ultime 2 sono scritte.

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 \quad E_1 + E_2 = E_3 + E_4$$

qualora fossero note P_1 e P_2 e le masse iniziali e finali non possiamo comunque risolvere il problema perché le particelle si dirigono in 2 direzioni del piano e abbiamo quindi 4 incognite ma solo 3 equazioni, in questi casi si risolve in funzione di un angolo. Consideriamo ora un nuovo sistema inerziale O' con assi paralleli a O che si muove nel verso della quantità di moto totale $P = P_1 + P_2$ con velocità costante

$$v_0 = \frac{pc^2}{E}$$

con E energia totale del laboratorio

$$E = E_1 + E_2 = \sqrt{p_1^2c^2 + m_1^2c^4} + \sqrt{p_2^2c^2 + m_2^2c^4}$$

dal sistema O ad O' si passa con la trasformazione di lorentz per l'energia, sviluppando il calcolo si trova subito che $P_1 + P_2 = O$ e quindi in O' la quantità di moto iniziale e finale è nulla. O' è quindi il sistema CM, inoltre

$$E' = E_1' + E_2' \rightarrow E'^2 = E^2 - P^2 + c^2$$

Proprietà dei sistemi di forze applicate in punti diversi

Sia $R = \sum F_i$ e $M_0 = \sum r_i \times F_i$ e preso un altro polo $M_O = OO' \times R + M_{O'}$ allora è ovvio che il momento dipenda dal polo a meno che R=0. Un'applicazione importante di questo è datadalla coppia di forze: prese due forze ugali parallele e contrarie ma su direzioni diverse, la distanza tra le due forze è chiamata braccio b, la risultante è nulla e allora la scelta del polo è indifferente; M è ortogonale al piano creato dalle due forze ed ha modulo bF. Le forze interne ad un sistema di punti materiali prese a 2 a 2 parallele hanno braccio nullo e quindi M=0, ciò non è vero in un qualsiasi sistema di forze perché R e M possono non essere ortogonali e non esiste $M_O = r \times R$, quindi non si può usare solo R per ricavare M

Sistema di forze parallele

Il problema prima individuato sussiste nella direzione di R non perpendicolare ad M, ma se le forze sono parallele allora anche la risultante avrà la stessa direzione e $M = \sum r_i \times F_i u$; ma allora deve esistere per forza un punto tale che

$$M = OC \times R = r_c \times R$$

euguagliando le formule si ottiene

$$r_c = \frac{\sum F_i r_i}{\sum F_i}$$

Il punto C individuato da r_c è chiamato centro delle forze parallele. Un interessante conseguenza è il moto traslatorio di un sistema di punti ed immaginiamo il suo spostamento come dei vettori mv paralleli il cui centro è (magia magia) r_{CM} ed il prodotto vettoriale con mv=l poiché non c'è moto rispetto al cento. Un altro esempio è la forza peso dove risulta che $r_c = r_{CM}$ detto baricentro

Momento assiale

Prendiamo un generico vettore V allora $M_O = OP \times V$ e $M_{O'} = O'P \times V$ quindi $M_O - M_{O'} = OO' \times V$ risulta ortogonale ad OO' e quindi M_O e $M_{O'}$ devono avere la stessa componente lungo l'asse OO' tale componente si chiama momento assiale di V su OO', questa è uguale indipendetemente dal polo e si estende a tutti i prodotti vettroriali

Capitolo 5

Gravitazione

Forza gravitazionale

Prima di Newton keplero aveva organizzato il moto dei pianeti secondo 3 leggi

- I pianeti descrivono orbite ellittiche di cui il sole è uno dei fuochi
- La celocità areale è costante
- $T^2 = kr^3$ dove T è il periodo, k è una costante e r è il semiasse maggiore dell'ellisse.

Nel 1666 Newton approssimando l'orbita ellittica ad un orbita circolare Portò avanti lo studio del moto dei pianeti, infatti, possiamo calcolare la derivata nel tempo (come fatto nel capitolo delle forze centrali) dell'area

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

Per quanto riguarda la forza centripeda agente sul pianeta invece componiamola con la 3 legge di keplero ottenenedo

$$F = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2}$$

chiamimo il primo termine diviso la seconda massa dei 2 corpi considerati di quest'ultima $\gamma = \frac{4\pi^2}{km_2}$ (così, per confonderci le idee). Otteniamo così la celebre

$$F = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r^2}$$

essendo che per la terra F=mg si ha che

$$g = \gamma \frac{m_T}{r_T^2}$$

ed è possibile calcolare la massa della terra (esperimento di Cavandish).

Campo gravitazionale

Per come è costruita la precedente equazione, risulta palese che il campo gravitazionale non dipenda da m_2, infatti possiamo dire che la forza gravitazionale $F_{1,2}$ esercitata dalla massa m_1 sul corpo m_2 è pari al prodotto di un vettore indipendente da (nella formula sarà esplicitato mettendolo tra parentesi e sostituendolo con G) per m_2

$$F_{1,2} = (-\gamma \frac{m_1}{r^2}) m_2 = G m_2$$

Queste formule sono valide assumendo che la massa del corpo sferico sia tutta concentrata nel suo centro (proprietà che convalideremo più avanti) ed essendo usate su corpi a simmetria sferica o puntiformi il campo è sfericamente simmetrico, nel caso ci siano più masse il gravitazionale in un punto P vale

$$G(P) = \sum (-\gamma \frac{m_i}{r_i^2})$$

per quanto riguarda invece il campo in un punto P esercitato da una massa m contiuna interna ad un corpo C vario (non sferico) invece si calcola similarmente: divido la massa in vari dm ed integro

$$G(P) = \int_C -\gamma \frac{dm}{r^2} = \int_V -\gamma \rho \frac{d}{}$$

dove ρ è la densità e V è il volume, da qua si arriva alla forza esercitata tra due corpi estesi C_1 e C_2 che si ottiene ripetendo la precedente per ogni punto di C_2 quindi

$$F_{1,2} = \int_{C_2} G_1 dm_2$$

Energia potemziale gravitazionale

Nonostante abbiamo dimostrato che le forze centrali siano conservative ridimostriamolo per il campo gravitazionale

$$dW = F \cdot ds$$

anche se non l ho esplicitato in precedenza la formula contiene il versore u in direzione di m_1 e $u \cdot ds = dr$, quindi facciamo $W = \int_A^B dW = -\gamma m_1 m_2 (-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A})$ ottenendo che la forza è conservativa ed

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

Potenziale gravitazionale

Similmente a ciò che abbiamo fatto per il campo gravitazionale G possiamo rendere indipendente da m_2 la precedente formula

$$V_1 = \frac{E_p}{m_2}$$

la grandezza è V(R) ed è il potenziale gravitazionale, come esisteva la relazione tra forza ed enrgia potenziale la stessa legge esiste tra potenziale gravitazionale e campo gravitazionale

$$G = -\nabla V$$

Teorema di Gauss

Questo teorema non sarà dimostrato (analisi 2), basti sapere che il flusso ϕ di un campo gravitazionale misura quanto campo gravitazionale attraversa una certa superficie.

$$\phi = 4\pi\gamma \sum m_i = 4\pi G M$$

(ultima equazione solo nel caso del campo gravitazionale) questo teorema vale per tutti i campi in funzione $\frac{1}{r^2}$ della distanza. Il teorema di gauss permette di verificare che il campo di una distriubuzione sferica di massa è uguale al campo di una massa uguale ma puntiforme. Considerando due masse infinitesime dm simmetriche, esse creano in P due campi uguali in modulo e tali per cui la somma delle loro componenti verticali sia nulla, cosicché dovremo solamente sommare le componenti orizzontali dirette verso il centro della sfera, esprimiamo g come $\overleftarrow{G} = -g(r)\ u_r$ (generalmente non scrivevo g ed i vettori come vettori ma come scalari per semplificare la scrittura, ma questo caso lo richiede) allora

$$\phi = \int -G(r) u_r u_N\ ds = G(r) \int ds = 4\pi\gamma m \to G(r) = \gamma \frac{m}{r^2}$$

Qualora la sfera di raggio R fosse cava all'interno il campo è diverso da 0 solo per R<r, se invece la sfera è piena e la massa è distribuita omogeneamente ($\rho_r = \rho_R$) si ha che

$$\frac{m_r}{V_r} = \frac{m}{V} \to m_r = \frac{m}{R^3} r^3$$

quindi ϕ diventa

$$\phi = 4\pi\gamma m \frac{r^3}{R^3} \to G(r) = \gamma \frac{m}{R^3} r$$

Gravitazione di una massa sferica omogenea

Immaginiamo di avere una sfera di raggio r che attiri massa (tramite gravità) che si distribuirà omogenamente sopra la sfera fino a formare una sfera di raggio R, per arrivare da r a r+dr deve attirare dm massa che per l'energia gravitazionale vale

$$dW = -dE_p = \gamma \frac{m(r)dm}{r}$$

sostituendo m(r) con la misura trovata nella precedente sezione e integrando otteniamo

$$E_{p,fin} = -W = -\frac{3}{5}\gamma \frac{m^2}{R}$$

Traiettoria

In coordinate polari l'espressione di una conica è

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\xi d} - \frac{1}{d} cos\theta$$

dove ξ è il rapporto tra la distanza di un punto ed il fuoco e la distanza di un punto e la retta direttrice Q ($\frac{PF}{PQ}$) se xi<1 è un ellisse, =1 è una parabola ed >1 è un 'iperbole e se nel caso limite tende a 0 è una circonferenza;i semiasse a e b e l'area A valgono

$$a = \frac{\xi d}{1-\xi^2} \qquad b = a\sqrt{1-\xi^2} \qquad A = \pi ab$$

Prendiamo ora una forza che agisce tra 2 corpi $F = ma_m$ e $-F = Ma_M$, allora l'accellerazione relativa a M di m vale

$$a = a_m - a_M = (\frac{1}{m} + \frac{1}{M})F$$

chiamo $\mu = \frac{1}{m} + \frac{1}{M} = \frac{mM}{m+M}$ la massa ridotta che ha accellerazione a per forza F, a questo punto essendo la forza centrale prendiamo la formula di binet

$$a = -\frac{L^2}{m^2r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right]u_r \to -\mu\frac{L^2}{\mu^2r^2}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\frac{1}{r} + \frac{1}{r}\right]u_r = -\gamma\frac{mM}{r^2} \to \frac{1}{r} = \gamma\mu\frac{mM}{L^2} + A\,cos\theta$$

Energia e momento angolare

confrontando l'espressione di una conica con l'ultima equazione trovat si ottiene

$$L^2 = \gamma\mu mM\xi d$$

Dopo vari sommando passaggi energia cinetica e potenziale si ottiene

$$E = \frac{L^2}{2\mu\xi^2d^2}(\xi^2 - 1) = \gamma\frac{mM}{2\xi d}(\xi^2 - 1)$$

.
approfndimenti grafici di energia
.

Capitolo 6

Corpo rigido

Un corpo rigido è un sistema di punti in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare, il sistema di riferimento può essere un sistema inerziale oppure quello del centro di massa non inerziale. Per descrivere la posizione di un corpo rigido dobbiamo avere 6 parametri: 3 per la posizione nello spazio e 3 per la posizione del sistema CM (rotazione del corpo). Questi sono i gradi di libertà (ad esempio un punto materiale che si muove su una retta ha 1 grado di libertà). Il moto di un corpo rigido è determinato dalle forze esterne $M^{(E)}$, $R^{(E)}$ e $W^{(E)}$ (che essendo il corpo rigido è nullo all'interno) per questo capitolo il simbolo (E) sarà tralasciato poiché si tratterà sempre di forze esterne

$$R = ma_{CM} \qquad M = \frac{dL}{dt} \qquad \Delta E_k = W$$

Moto di un corpo rigido

esistono due tipi di moti semplici nel moto del corpo rigido, il primo è la *traslazione*: quando un corpo trasla il moto rispetto al centro di massa è nullo e segue le leggi del punto materiale prendendo CM come punto; l'equazione del moto è $R = Ma_{CM}$. Il secondo moto è la *rotazione*: tutti i punti descrivono un moto circolare uniforme e ω è uguale per tutti i punti (ma non il modulo v=ωr) e può cambiare di verso e di intensità ma non di direzione a meno che non cambi l'asse di rotazione; l'equazione dinamica di base del moto è $M = dL/dt$. Questi sono i due moti che studieremo in quanto si dimostra che il moto di un corpo rigido è una rototraslazione.

Densità. Centro di massa

Sia un corpo contiuno, definiamo densità di un unità dm il valore $\rho = \frac{dm}{dV}$, essendo il corpo rigido formato da infiniti punti e dm la densità del corpo è

$$m = \int_V \rho dV$$

la densità rappresenta la massa per unità di volume, se la densità di un corpo è $\rho = \frac{m}{V}$ allora è detto omogeno. Definiamo anche il concetto di densità lineare e densità di superficie come densità di un filo e di una superficie

$$\rho_l = \frac{dm}{dl} \to m = \int \rho_l dl \qquad \rho = \frac{dm}{dS} \to m = \rho_s dS$$

inoltre definiamo la grandezza $v = 1/\rho$ come volume specifico e rappresenta il volume per unità di massa

Posizione centro di massa

Come per il sistema di punti si calcola la posizione del centro di massa ma essendo il corpo continuo e con infinite dm vale

$$r_{CM} = \frac{\int rdm}{\int dm} = \frac{\int r\rho dV}{m}$$

e se il corpo è omogeneo si semplifica in

$$r_{CM} = \frac{\rho}{m}\int rdV = \frac{1}{V}\int rdV$$

centro di massa e forza peso

Se su un corp agisce una forza peso allora la risultante delle forze parallele è

$$\int gdm = g\int dm = mg$$

mentre il momento applicato ad un polo fisso è

$$M = \int r \times gdm = (\int rdm) \times g = mr_{CM} \times g = r_{CM} \times mg$$

per l'energia potenziale invece si ha

$$E_p = \int gzdm = g\int zdm = mgz_cm$$

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale

In un corpo rigido il polo del momento angolare può essere preso in un qualsiasi punto dell'asse di rotazione essendo essi punti fissi. ω ha direzione fissa parallela all'asse e ogni punto descrive un moto circolare gaìiacente su un pinao perpendicolare all'asse. Le seguenti espressioni sono come nel moto di più punti sommatorie e quindi continue, ovviamente per il corpo continuo si passa all'integrale.

calcolo del momento angolare, momento di inerizia

Prendiamo z come asse di rotazione, il polo è su di esso e il raggio r_i al punto punto P_i vale $R_i = r_i\, sen\, \theta_i$ dove R_i è il raggio dall'asse al punto nel piano perpendicolare all'asse. Il momento angolare del singolo punto è dato da $L_i = r_i \times m_i v_i$ e non è detto che sia parallelo all'asse (e quindi proporzionale ad ω) mentre la componente parallela è $L_{iz} = L_i\, sin\, \theta_i = mR^2\omega$. La sommatoria di L dei vari punti che compongono il corpo non è parallela all'asse generalmente $L_z = (\sum m_i R_i^2)\omega = I_z\omega$ dove I_z è il momento di inerzia, inoltre mentre la componente parallela non cambia di direzione la componente perpendicolare $L_{i\perp} = L_i\, cos\, \theta_i = m_i r_i \omega\, cos\theta_i$. Se l'asse di rotazione è un asse di simmetria (o come vedremo più avanti un asse principale d'inerzia) allora il momento angolare risulta parallelo all'asse con $L = L_z$ e $L_\perp = 0$. Un moto generale di L si chiamo moto di precessione e se L e ω sono costanti allora $M = \frac{dL}{dt} = \omega \times L$ indica la variazione di direzione dL è perpendicolare ad L e parallelo ad M che in modulo (dato che dL=$L_\perp d\phi$) vale $M = L_\perp \omega$, M è dato da forze esterne (gravità, forza centipeda), se L è parallelo a ω non c'è precessione, se ω è costante non c'è neanche momento. Il momento di inerzia vale per le rotazioni rigide quanto la massa nelle leggi di newton, essendo l'integrale additivo possiamo sommare l'ineriza di vari corpi che formano il corpo risultante, in tutte le forme l'inerzia vale $I = fmd^2$ dove m è la massa del corpo, d è una qualche misura importante (raggio di una sfera, lunchezza si un asta) ed f un fattor numerico legato alla struttura del sistema. formule del momento di inerzia:

$$I = \sum m_i R_i^2 = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) \quad I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV = \int \rho(x^2 + y^2)dV \quad I = fmd^2$$

$$I = mk^2 \quad k = \sqrt{f} \quad d = \sqrt{\frac{I}{m}}$$

dove k è il raggio giratore del corpo ovverola distanza tra l'asse e il punto in cui concentrando la massa si ha lo stesso momento di inerzia

Equazione del moto

Se L è parallelo a ω allora $M = \frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\omega) = I_z\frac{d\omega}{dt} = I_z\alpha$ quindi

$$M = I_z\alpha$$

questa è l'equazione del moto di rotazione e sia M che α sono paralleli all'asse, la stessa cosa si può fare se L no è parallelo a ω dividendo in componenti L.

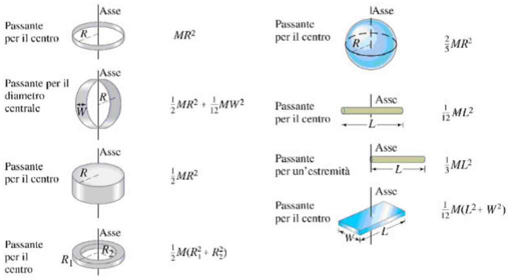
Energia cinetica e lavoro

L'enrgia cinetica vale

$$E_k = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \frac{1}{2}I_z\omega^2$$

e se L è parallelo all'asse vale $E_k = \frac{L^2}{2I_z}$ avremo come sempre $W = \Delta E_k$ e la relazione tra W e M vale $W = \int_O^\theta M_z d\theta$ e la potenza $\frac{dW}{dt} = M_z\frac{d\theta}{dt} = M_z\omega$.

Teorema di Huygens-Steiner



Abbiamo parlato di inerzia e additività delle forme, tuttavia queste avevano l'asse di rotazione passante per il centro di massa; si dimostra tuttavia che

$$I = I_c + ma^2$$

dove I_c è il momento di inerzia dell'asse passante dal centro di massa e a è la distanza tra i due assi. Sostituendo questa formula in quella dell'energia cinetica otteniamo

$$E_k = \frac{1}{2}(I_{z'} + ma^2)\omega^2 = \frac{1}{2}I_{z'}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{CM}^2$$

datco che $a\omega = v_{CM}$ che è il teorema di konig

Pendolo composto

Si chiama pendolo fisico o composto un corpo rigido che possa oscillare grazie alla forza peso con asse non passante per il centro di massa, $M = -mgh\, sen\theta$ con h distanza dell'asse dal centro di massa e la legge oraria è

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z} sen\theta = 0$$

a quetso punto possiamo applicare il teorema di HS per sostituire I_z e per oscillazioni piccole $sin\theta$ con θ, equazione del moto armonico con soluzione $\theta = \theta_0 sen(\Omega t + \phi)$ con $\Omega = \sqrt{mgh/I_z}$, inoltre

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$l = I_z/mh$ è la lunghezza ridotta del pendolo composto e corrisponde alla lunghezza del filo di un pendoo semplice con lo stesso periodo.

Moto di puro rotolamento

Un corpo può striciare o rotolare, consideriamo un corpo che rotola per conseguenti dt: in un istante dt il corpo è fermo, la velocità del punto di contatto c vale 0 ed esiste quindi una forza che lo trattiene, questa forza è l'attrito statico. La velocità del punto c è la $v_c = v_{CM} + \omega \times r$ ma dato che $v_c = 0$ allora in modulo $v_{CM} = -\omega r$ e $a_c m = \alpha r$. Pensiamo ora di applicare una forza su questo corpo, su di esso agiranno la forza F da noi applicata, la reazione vincolare R e la forza peso mg $F + R + mg = ma_{CM}$ dividiamo in componenti la reazione vincolare (forza di attrito f e reazione normale N), poiché la forza non può essere superiore a quella di attrito statico si dimostra che

$$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \rightarrow F \leq \mu_s mg(1 + \frac{mr^2}{I}) = F_{lim}$$

similmente applicando un momemnto M (tramite un motore ad esempio) si ottiene

$$f \leq \mu_s N = \mu_s mg \rightarrow M \leq \mu_s mgr(1 + \frac{I}{mr^2}) = M_{lim}$$

generalmente comunque si hanno sia momento che forza con equazione del moto

$$F + f = ma_{CM} \quad M - rf = I\frac{a_{CM}}{r}$$

$$a_{CM} = \frac{1}{m}\frac{F + \frac{M}{r}}{1 + \frac{I}{mr^2}} \quad f = \frac{\frac{M}{r} - \frac{I}{mr^2}F}{1 + \frac{I}{mr^2}}$$

Conservazione dell'energia e attrito volvente

Essendo le forze applicate nel rotolamento puro conservative ed essendo l'attrito statico fermo e quindi con W=0 il corpo dovrebbe andare avanti senza fermarsi, tuttavia si osserva sperimentalmente che non fa così; introduciamo allora l'attrito volvente (attribuito alla deformazione locale del piano) e sciviamo che la forza che arresta il moto è il momento $M_v = hmg$ con h coefficente di attrito volvente(in metri), per vincere questo attrito bisogna applicare una forza $F \geq hmg/r$. Si dimostra sperimentalmente che la forza di attrito volvente è molto minore a quella di attrito statico il che spiega la convenienza del rotolamento allo struciare/slittare (tanto minore da essere quasi sempre ignorata).

Momento di un impulso

Come esiste l'impulso di una forza esite l'impulso del momento angolare che vale

$$\int_{t_1}^{t_2} M dt = \int_{t_1}^{t_2} (r \times F) dt = r \times J = \Delta L$$

Capitolo 7

Proprietà elastiche dei solidi

Trazione e compressione

In questo capitolo trattiamo i solidi nelle condizioni non ideali trattate nel capitolo precedente, le deformazioni descritte sono tutte di tipo elastico. Si parla di trazione se la forza applicata sul corpo fa si che questo si estenda, altrimenti si parla di compressione. Si definisce il carico specifico (o unitario) σ come rapporto tra la forza applicata perpendicolarmente alla superficie e la superficie stessa e ξ come deformazione specifica (o unitaria) o allungamento lineare unitario come rapporto tra allungamento e lunghezza

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \xi = \frac{\Delta}{l}$$

secono la legge di Hooke carico specifico e allunamento unitario sono proporzionali per piccoli valori, definiamo allora il loro rapporto come modulo di young E

$$E = \frac{\sigma}{\xi} \rightarrow \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$$

Legge di poisson

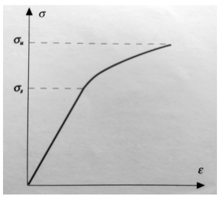
per effetto di una trazione, un corpo non solo si allunga ma cambia anche la sua sezione, se ad esempio r è il raggio

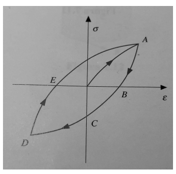
$$\frac{\Delta r}{r} = -v\frac{\Delta l}{l} = -v\xi = -v\frac{\sigma}{E}$$

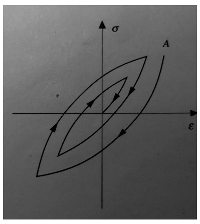
dove v è il coefficente di poisson, i suoi valori sono compresi tra 0 per il sughero e 0.5 per i caucců e vale in generale per valori non troppo alti di σ

Deformazione plastica, rottura e isterisi elastica

Come già detto le precedenti formule valgono per valori non troppo elevati di σ, per valori più elevati di un valore critico del carico σ_s si ottiene una deformazione plastica (superato questo valore la deformazione è maggiore a parità di forza) e per valori ancora più alti σ_u otteniamo una rottura, il valore del carico di rottura in trazione e cmpressione può differire. Il prodotto $\sigma\xi$ ha come unità di misura l'energia per unità di volume, si calcola $\int \sigma d\xi$ e si chiamamodulo di tenacità e ha difatti senso poiché un materiale di alta resistenza meccanica assorbe molta energia che generalmente si dissipa in calore prima di arrivare alle condizioni di rottura (si chiama quindi tenace un materiale dall'elevato carico di rottura e viceversa si chiama fragile, un materiale tenace è anche duttile ovvero si deforma molto prima di essere rotto). Immaginiamo ora di allungare una sbarra oltre il limte di deformazione plastica e poi ricomprimerla fino a ritornare al punto di partenza e più e ripetere il ciclo (figure). Questo ciclo si chiama ciclo di isteresi elastica e noteremo che ripetendolo si aumenterà l'elasticità del solido (processo di incrudimento) e per riportare il copro alle condizioni iniziali servirà fornire un calore elevato (ricottura).







Scorrimento

Immaginiamo un parallelepipedo che scorre tra un nastro trasportatore ed una lastra, ovviamente ci sarà una certa discrepanza (data dalla reazione vincolare della lastra) tra la parte di sotto e quella di sopra (quella con il nastro si muoverà più velocemente rispetto all'altra) questà discrepanza di angolo θ si esprime

$$\sigma = G\theta$$

il parametro G si chiama modulo di rigidità ed è tipico del materiale. Si dimostra inoltre che tra le costanti dei materiali viste fin ora esiste la seguente relazione

$$G = \frac{E}{2(1+v)}$$

Torsione

immginiami di avere una sbarra cilindrica di raggio r e lunghezza l, blocchiamo una base e applichiamo un momento all'altra, avverrà una torsione descritta da

$$M = \frac{\pi}{2} G \frac{r^4}{l} \theta = k\theta$$

la torsione dipende daalle dimensioni soprattutto dalle dimensioni trasversali, basterà infatti applicare un momento minimo ad un filo per avere una torsione; la presenza di G indica una correlazione allo scorrimento e infine l'ultima equazione evidenzia il tipo di forza (elastica). Il lavoro compiuto affinche avvenga la torsione è

$$W = \int_0^\theta M(\theta) d\theta = k \int_0^\theta \theta d\theta = \frac{1}{2} k\theta^2$$

Pressione, compressione uniforme

Applicando una pressione uguale ad ogni ato di un corpo la variazione di volume è descritta da

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{1}{\beta} \Delta p$$

dove p è la pressione esterna e β è il modulo di compressibilità isoterma, ciò vuol dire che la temperatura del corpo rimane uguale. β è legata alle altre costanti dalla seguente equazione

$$\beta = \frac{E}{3(1-2v)}$$

La compressione è l'unica proprietà elastica dei fluidi e nel loro caso è sempre un processo reversibile, inoltre in liquidi e solidi β ha un valore elevato (nei solidi di più) mentre nei gas datoc he pv=costante, quindi differenziando pd V+V dp=0 ovvero

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{p} \rightarrow \beta = p$$

ovvero il coefficente di compressione isoterma per un gas è pari alla pressione stessa (doppio della pressione=metà del volume, 5 volte la pressione= 5 volte meno volume)

Durezza

La durezza è la resistenza di un corpo da parte di un altro corpo opportunamente sagomato, è un dato empirico ma molto importante nei lavori tecnici, numericamnete la durezza è il rapporto tra la forza premente e l'area dell'impronta lasciata ed esiste (almeno per i metalli) una relazione tra la durezza ed il carico di rottura.

Capitolo 8

Proprietà meccaniche dei fluidi

Generalità sui fuidi e pressione

La differenza tra solido e fluido è che mentre i primi hanno una forma propria i secondi non la hanno. Tra i fluidi i liquidi hanno un volume definito ed una superficie limite mentre i gas tendono ad occupare il volume a disposizione, ciò è dato dalla densità dei liquidi molto maggiore a quella dei gas, queste differenze sono dovute alla diversa forza del legame tra atomi e molecole nei due stati. Macroscopicamente i fluidi sono sitemi continui composti da inifiniti elementi di massa $dm = \rho dV$, un'altra caratteristica è la possibilità di scorrimento di un fluido rispetto ad una parete o un altra parte del fluido, tuttavia non esiste l'attrito statico ovvero non esiste una situazione di equilibrio dovuta all'attrito, ciò significa che affinché il fluido sia in equilibrio le forze risultanti tra gli elementi deve essere normale alla superficie. Le forze vanno considerate elemento per elemento, quindi $dF = gdm = g\rho dV$. Dalla definizione di equilibrio di un fluido si intuisce che la pressione di questo non abbia caratteristiche direzionali e sia una funzione scalare espressa da (la seconda vale solo se la pressione è uguale in ogni punto)

$$p = \frac{dF}{dS} \rightarrow p = \frac{F}{S}$$

La pressione si misura tramite il barometro aneroide, una scatola vuota con una parete deformabile, la sua scalarità invece si dimostra osservando l'equilbrio di un fluido interno ad un prisma triangolare sottoposto a forze perpendicolari ad ogni parete. Un fluido in equilbrio statico non ha spostamenti e quindi lavoro, ma è possibile che ci siano spostamenti causati dalla pressione, allora

$$dW = dF\,dh = p\,dS\,dh = p\,dV \rightarrow W = \int p\,dV$$

come è intuibile dalla sostituzione Sdh=dV dh è la lunghezza dello spostamento

Equilibrio statico di un fluido

affinché un fluido sia in equilibrio statico gli elementi interni devono avere velocità ed accellerazione nulla, di conseguenza per ogni elemento la somma delle forze di pressione F_p e delle forze di volume F_V hanno risultante 0. Consideriamo per semplicità solo l'asse z: l'elemento ha altezza z-z+dz e guardiamo le forze di prssione e le forze di volume sapendo che la componente sull'asse z vale

$$f_z dm = f_z \rho\,dV$$

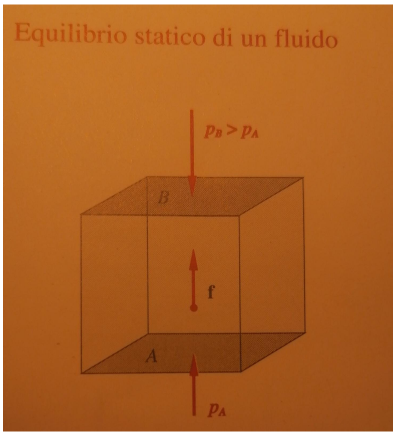
sommando le equazioni e ripetendo il tutto per ogni componente si ottiene

$$\frac{\partial p}{\partial x} = pf_x \quad \frac{\partial p}{\partial y} = pf_y \quad \frac{\partial p}{\partial z} = pf_z \rightarrow \nabla p = pf$$

Qualora agisse una forza di volume significa che la pressione non è costante nel fluido (a meno che la densità sia talmente bassa da poter trascurare le forze di volume). Le forze di volume sono una reazione interna al sistema che subisce forze che equilibra la pressione del fluido, se le forze di volume sono conservative

$$f = -\nabla E_{p,m}$$

dove $E_{p,m}$ è l'energia potenziale per unità di massa e moltiplicata per la densità da ∇p



Equilibrio in presenza di forza peso

Osserviamo i valori della pressione lungo l'asse z in presenza di peso, $f_z = -g$ ed essendo il peso una forza conservativa (e di volume) l'energia potenziale per unità di massa vale $E_{p,m} = gz$ di conseguenza prendendo le componenti z delle precedenti formule sappiamo che $p_z = \frac{dp}{dz}$ ed $E_{p,m,z} = \frac{dE_{p,m}}{dz}$ che unite danno $\int_1^2 dp = -\int_{z_1}^{z_2} pgdz$, infine si ottiene la legge di stevino

$$p(h)p_0 + \rho gh$$

legge che in alternativa si sarebbe potuta ottenere semplicemente (ma meno in relazione con i fluidi)

$$mg = \rho Vg = \rho Shg \to P = \frac{F}{S} = \rho gh$$

È importante essere a conoscienza dei temini: superficie isobarica (zona nella quale la pressione è costante) e superficie equipotenziale (zona dove l'energia potenziale è costante), la seconda implica la prima e sono entrambe presenti in uan situazione di equilibrio statico. Inoltre si notano facilmente i seguenti principi:

- Principio pascal: $p = p_0 + \Delta p$
- Vasi comunicanti: (in condizioni di quiete la pressione a profondità uguali è costante)
- Paradosso idrostatico: prendiamo 3 recipienti: il primo a cilindro il secondo con una base S maggiore rispetto alla "bocca" ed il terzo con la base S minore rispetto alla "bocca", forza ρghS esercitata sulla base dei 3 recipienti è uguale ciò è dato dal fatto che ogni piano orizzontale del fluido è equipotenziale $E_{p,m} = gz$, logicamente ciò è dato dal fatto che mentre nel secondo la massa di fluido in più pesa sulle pareti laterali nel terzo caso la pressione del liquido crea una reazione delle pareti che a loro volta esercitano una pressione sull'liquido
- Manometro ad U: due fluidi non miscibili con pressione diversa non hanno la stessa soluzione del fenomeno dei vasi comunicanti infatti $\rho_1 g z_1 = \rho_2 g z_2 \to \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{z_2}{z_1}$, un risultato simile si ha anche se la pressione P_0 alla superficie dei due vasi comunicanti è diversa.
- Barometro di torricelli: torricelli applicando il principio del manometro ad U con il mercurio trovò la pressione dell'atmosfera trovando $\rho gz = 13.595 * 9.81 * 0.76 = 1.01325Pa$
- Pressione atmosferica e sue variazioni: Approssimando l'atmosfera ad una superficie isoterma è chiaro che differentemente dalla legge di stevino la pressione non è lineare perché la densità cambia, utilizzando la legge di Boyle (che verrà fatta più avanti) si ha che p/ρ=costante e le due sono quindi proporzionali. Chiamiamo P_0 e ρ_0 i valori al livello del mare su un asse z diretto verso l'alto allora il loro rapporto è costate a quello di p e ρ ad un'altra altezza $\rho = \rho_0 P/p_0$

  $$\frac{dp}{dz} = -\rho g = \frac{g\rho_0}{p_0} \to \frac{dp}{p} = -\frac{g\rho_0}{p_0} d = -\frac{dz}{a}$$

  con $a = \frac{p_0}{g\rho_0}$, integrando

  $$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{1}{a}\int_0^z dz \to ln\frac{p}{p_0} = -\frac{z}{a} \to p = p_0 e^{-z/a}$$

Principio di archimede

Il principio di archimede enuncia che un corpo immerso in un fluido riceve una spinta pari alla quantità di volume di fluido spostato, infatti essendo la risultante di un fuido statico $F_p + F_V = 0$ ed essendo la forza peso una forza di volume $F_p = -mg$ la forza di archimede è data dalla differenza di forza di pressione del fluido

$$F_A = -F_P \rightarrow \rho_{fluido} V_{immerso} g = -mg = \rho_{corpo} v_{tot} g$$

ci si rende conto che il tutto dipende dalla densità del fluido e del corpo, quella con densità maggiore tenderà a stare sotto.

Liquido in rotazione

Consideriamo un cilindro con rotazione intorno ad un asse centrale z con un liquido all'interno, ciascun elemento di massa $dm = \rho dv$ è sottoposto ad una forza radiale diretta verso l'asse z di modulo $\rho d\omega^2 r$; il nostro obbiettivo è descrivere la forma che assumerà il liquido quando in equilibrio statico. Per farlo poniamo il nostro sistema di riferimento sull'asse z che non è inerziale e q uindi va considerata la forza centrifuga $dm\omega^2 r u_r$ con u_r diretto verso l'esterno, oltre a questa agiscono la forza peso dmg e le forze di pressione degli elementi cricostanti del liquido. Osserviamo che

$$dm\omega^2 r u_r = dm\omega^2 (x u_x + y u_y) \rightarrow E_{p,m} = gz - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 = gz - \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2)$$

così facendo verifichiamo subito che le forze di volume valgono $-\nabla E_{p,m} = g + \omega^2 r u_r$. In una situazione di equilibrio statico la superifice è equipotenziale e quindi determinata dall'equazione $E_{p,m} = costante$ e per torvare la costante poniamo r=0 che ci darà l'altezza gz=h del parabolide di rotazione (dal fondo del recipiente fino al vertice). in conclusione abbiamo

$$z = h + \frac{\omega^2}{2g} r^2 = h + \frac{\omega^2}{2g}(x^2 + y^2)$$

Possiamo anche calcolare il cambiamento di volume (che per $\omega = 0$) $V = \pi R^2 d$ dove R è il raggio del cilindro in rotazione e d l'altezza allora

$$dV = 2\pi r dr z(r) = 2\pi r (h + \frac{\omega^2}{2g} r^2) dr \rightarrow V = \int_0^R d\pi h r dr + \int_0^R \frac{\pi\omega^2}{g} r^3 dr = \pi R^2 (h + \frac{\omega^2 R^2}{4g})$$

da cui si deduce anche che $h = d - \frac{\omega^2 R^2}{4g}$ Osservando il tutto da un sistema di riferimento inerziale il liquido non è più in quiete e bisogna utilizzare un altro approccio.

Attrito interno, viscosità e fluido ideale

Quando un elemento di un fluido scorre su di un altro si crea una forza di attito interna di direzione opposta all'elemento di velocità maggiore. questa forza è espressa dall'equazione

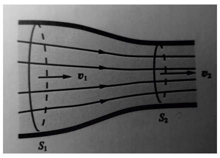
$$dF = \eta dS \frac{dv}{dn}$$

dove dS è la superficie di contatto, dv/dn è la variazione della velocità in direzione perpendicolare a dS e η è la viscosità che all'aumentare della temperatura nei liquidi decresce e nei gas cresce (misurata in poise 1poise $=10^{-1} kg/ms$). la rotazione di un liquido citata nel precedente paragrafo è dovuta a questo fattore, infatti grazie all'attrito con le varie parti del fluido e del recipiente il liquido si mette in rotazione, gli elementi esterni trascinano quelli interni, essendo la velocità di rotazione costante alla fine le velocità si annullano e si raggiunge l'equilibrio con uno strato infinitesimale detto strato limite che si muove con la parete. Si chiama fluido ideale un fluido incompressibile, con viscosità nulla e pressione nulla.

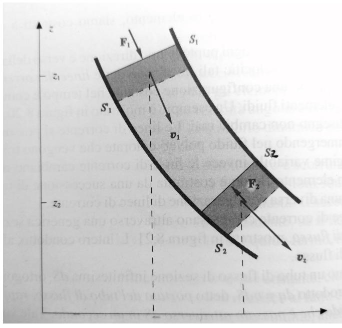
Moto di un fluido, regime stazionario e portata

Immaginiamo un fluido in un condotto, per descrivere il suo moto esistono 2 metodi: il primo, detto langrangiano prende un elemento del fluido e ne segue il moto dovuto allr forze agenti, il secondo detto euleriano prende un punto P(x,y,z) e ne osserva la velocità v(x,y,z,t) degli elementi che passano da quel punto. Adottiamo la seconda e rendiamola indipendente da t (regime stazionario e se dipendente da t regime variabile). Tracciamo adesso le line di corrente (ovvero le traiettorie degli elementi) attraverso un tubo di flusso (un tubo di sezione variabile dove passa il fluido), il prodotto dq=vdS rappresenta il volume di fluido passato nella sezione infinitesima in un secondo (portata). Se il fluido è incomprimibile e il regime è stazionario (linee di corrente immutabili) la portata deve essere uguale anche al cambiare della sezione del tubo (la velocità aumenta)

$$q = \int_S dq = \int_S vds = v_m S = costante$$



Teorema di bernoulli



Abbiamo un fluido ideale che scorre in un regime stazionario dentro ad un condotto di sezione variabile e osserviamo le segueni sezioni in figura con distanza tra $S_{1,2}$ e $S'_{1,2}$ pari a $ds_{1,2}$. Ovviamente $dV_1(= S_1 ds_1) = dV_2(= S_2 ds_2)$, vogliamo ricavare la relazione tra velocità e pressione nel tubo. Essendo il fluido ideale le uniche forze agenti sono la forza peso e la pressione, e noi osserviamo la massa dm in V_1 andare in V_2, quindi l'energia potenziale del fluido tra S'_1 e S_2 rimane invariata ed il lavoro della forza peso è

$$dW = -dE_p = -dmg(z_2 - z_1) = -\rho dV g(z_2 - z_1)$$

il lavoro della pressione delle pareti ènullo poiché ortogonale allo spostamento mentre il lavoro della pressione degli elementi è

$$dW_p = F_1 ds + F_2 ds = p_1 S_1 ds_1 - p_2 S_2 ds_2 = p_1 dV_1 - p_2 V_2 = (p_1 - p_2) dV$$

e la variazione dell'energia cinetica è

$$dE_k = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} \rho dV (v_2^2 - v_1^2)$$

sommiamo adesso dW e dW_p che dannp dE_k e serpaiamo i termini $V_{1,2}$ ottenendo

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = costante$$

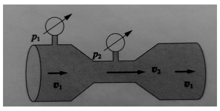
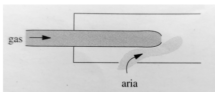
Il teorema di bernoulli dice in conclusione che in un fluido ideale in regime stazionario la somma di pressione, densità di energia cinetica e densità di energia potenziale è costante lungo tutto il tubo di flusso.

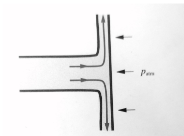
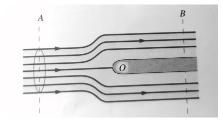
Applicazioni del teorema di bernoulli

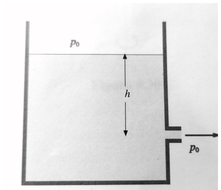
Alcuni esempi fatti con casi reali (fluido non ideale)

- Flusso in un tubo a sezione costante: se la sezione è costante rimane costante anche la velocità, pertanto la denistà di energia cinetica e si annulla in $p_1 + \rho g z_1 = p_2 g z_2$. Se vogliamo far salire il fluido di quota z con una certa portata q=Sv tramite una pompa dovremo dare una potenza W=$\rho g h q$ che si dimostra valere 9.8hn dove h è l'altezza e n è la portata litri/s.

- Tubo di venturi: il tubo di venturi (1^a immagine) è un condotto orizzontale che serve per misurare la pressione e la portata, dato che $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ e $v_1 S_1 = v_2 S_2$ allora $v_2^2 = \frac{2(p_1 - p_2)}{\rho}\frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}$ dalle misure di pressione (barometro indicato con freccia) possiamo poi calcolare le pressioni.
- Bruciatore a gas (2^a figura): un gas combustiblie passa attraverso la strozzatura aumentando di velocità e diminuendo la pressione (a meno di quella atmosferica), di conseguenza tramite un apertura l'aria entra e tramite la regolazione della temperatura avviene la combustione.
- aspiratore ad acqua: stessa figura di prima ma al posto del gas fluisce l'acqua e l'aria proviene da un ambiente chiuso in cui si intende ridurre la pressione.
- Paradosso idrodinamico(3^a figura): se poniamo un dischetto alla fine di un condotto in cui fluisce aria il dischetto viene attratto anziché respinto, ciò è dato dal fato che $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_{atm} \to p < p_{atm}$
- Tubo di pitot (4^a figura): Posto un ostacolo in una correnet fluida le linee di corrente si aprono ma prese due sezioni distanti dall'ostacolo il teorema di Bernoulli rimane valido.
- Teorema di torricelli: dato un recipiente cilindrico con un foro riempito di liquido osserviamo la velocità con cui il liquido fuoriesce. Per farlo guardiamo il teorema di Bernoulli $(p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z)_{sup} = (p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z)_{foro}$ sulla superficie libera p=p_0 e v=0 all'uscita dal foro si ottiene $p_0 \rho g h = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \to v = \sqrt{2gh}$ tale velocità (valida solo se l'attrito interno è trascurabile) è uguale a quella di un fluido in caduta ed è indipendente da pressione e densità.



Effetti dinamici, vortici

In questo paragrafo osserviamo alcuni semplici e logici effetti dinamici, ad esempio come la variazione di velocità di un fluido in un condotto a sezione variabile non può che essere data dalle forze di pressione ed i vortici. Un liquido (ideale) in un ricipiente se aperto un buco in fondo comincia a girare cerando un vortice, le forze agenti nella situazione iniziale sono peso e forze di pressione (radiale), il momento è nullo. Se un elemento di massa dm a velocità v_{in} e raggio r_{in} comincia a girare (comincia grazie alla forza di coriolis) allora $L = dm v_{in} r_{in}$ e il momento di quel punto deve rimanere tale permettendoci di calcolare $\omega = \omega_{in} r_{in}^2 / r^2$ all'avvicinarsi all'asse sia il la velocità lineare che quella angolare aumentano. per calcolare la forma creatasi applichiamo Bernoulli tra il vortice ed un tubo di flusso infinitesimo sulla superficie libera con p =p_{atm} ottendo

$$z = h - \frac{v^2}{2g} = h - \frac{v_{in}^2 r_{in}^2}{2g}\frac{1}{r^2}$$

Moto laminare

Trattiamo adesso di fluidi reali, se la velocità non è elevata il moto è detto laminare: il regime è stazionario con linee di corrente che non si intersecano mai. il fluido di contatto sulle pareti (raggio R) è fermo e allontanandosi da esso la velocità aumenta; immaginiamo un condotto con differenza di pressione agli estremi $p_1 - p_2$, si dimostra (non noi) che:

- la velocità varia lungo r a seguendo a legge

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

- la portata del condotto è data dalla legge hagen-poiseuille

$$q = \frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{l}$$

che si ottiene integrando la precedente equazione $q = \int_S v(r) dS = \int_0^R v(r) 2\pi r dr$, posto q=$\pi R^2 v_m$ con v_m velocità media della sezione si otteine

$$v_m = \frac{q}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{l} \to \frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{8\eta}{R^2} v_m$$

Moto verticoso, numero di Raynolds

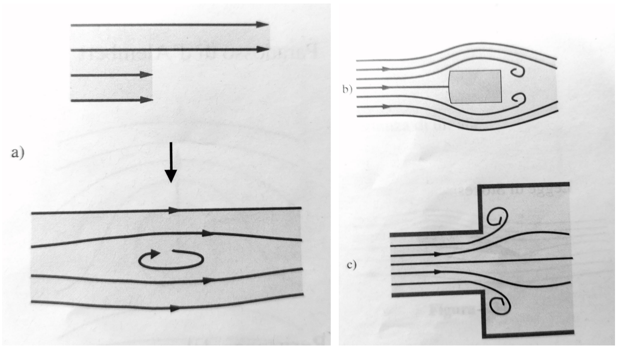
La legge di haigen-poisuille è sempre verificata se il condotto è molto piccolo (tubi capillari), ma se il raggio è grosso c'è un valore critico della velocità per cui si creano dei vortici e si parla di moto turbolento o vorticoso. I vortici sono dati a notevoli variazioni della velocità oraìtagonalmente alle linee di corrente e quindi notevoli forze di attrito interne. Per un condotto cilindrico Raynolds a provato sperimentalmente che si ha la trasizione da regine laminare a vorticoso quando

$$R = \frac{\rho v R}{\eta}$$

adimensionale con valore 1200, quando v del laminare raggiunge e supera v del vorticoso si ha inizialmente una notevole diminuzione della portata, aumentando la differenza di pressione agli estremi si riottiene un flusso stabile descritto da

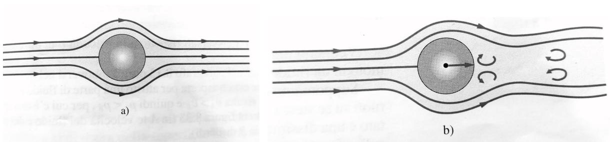
$$\frac{p_1 - p_2}{l} = \frac{k}{R} \rho \frac{v_m^2 2}{2}$$

dove k è il coefficente di resistenza. È importante sapere che il gradeinete di pressione in un regime vorticoso è in funzione quadratica della velocità anziché lineare Alcuni esempi di moto vorticoso



Moto di un fluido, resistenza del mezzo

Un corpo immerso o a contatto con un fluido crea una resistenza (dipendente dalla velocità relavita) detta resistenza del mezzo.



La prima immagine rappresenta le line di corrente di un corpo in un fluido ideale, queste essendo perfettamente simmetriche con pressione uguale all'inizio ed alla fine non imprimono forza al corpo. Nella seconda immagine il fluido è reale e si crea una scia vorticosa, ciò crea una differenza di pressione ai due estremi e il corpo subisce una forza (paradosso D'albert). La resistenza considera i seguenti parametri: forma, dimensioni, densità e viscosità edl fluido e velocità relativa

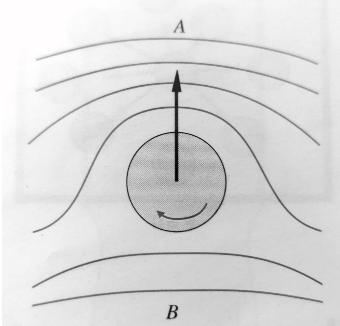
$$F_{res} = \frac{1}{2} c S r v^2$$

con c coefficente dipendente dalla forma del corpo e mentre in un regime vorticoso c è costante e F_{res} è proporzionale a v^2 in un regime laminare c è funzione dell'inverso della velocità e F_{res} è lineare alla velocità. In particolare le sfere di piccola velocità sono rette dalla legge di stokes

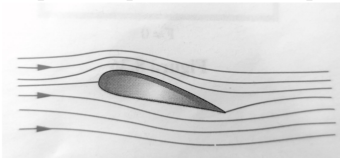
$$F_{res} = 6\pi\eta R v$$

Effetto magnus

Prendiamo la seconda sfera nell'immagine e facciamola roteare, si crea una differenza di velocità (data dall' attrito che trasporta fluido con se) ai due lati della sfera e quindi una differenza di pressione $v_A > v_B$ e $p_A < p_B$ cè quindi una spinta da B verso A



A questo sono dovuti adesempio i tiri a giro oppure anche le ali di un aereoplano, la forma asimmetrica dell'ala fa si che l'aria passi sotto più velocemente di quanto passi sopra, ne risulta quindi una spinta verzo l'alto detta portanza



Questa spinta verificandosi sia nei gas reali che nei gas ideali è calcolabile tramite il teorema di Bernoulli, sia p_1 e $v + \Delta v$ l'aria sopra l'ala e p_2 e $v - \Delta v$ sotto, allora

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho(v + \Delta v)^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho(v - \Delta v)^2$$

da cui poi $p_2 - p_1 = 2\rho v \Delta v$ e moltiplicato per la superficie alare A si ricava il valore della spinta

$$F = 2A\rho v \Delta v$$

Fenomeni di superficie

A livello microscopico i liquidi sono composti di molecole, ognuna di queste molecole esercita sulle altre una forza F(r) di origine leettrica (con un $E_p(r)$), questa forza è attrattiva quando r>r_0 e repulsiva se $r < r_0$. Se ci troviamo in una situazione di completa simmetria una molecola ha risultante delle forze nulla, tuttavia questa simmetria non può esistere se la molecola si trova sulla superficie del liquido che viene sicuramente spinta verso il basso (in condizioni normali $r > r_0$ e la forza è attrattiva). Ciò significa che l'aumento della superficie libera di un liquido non avviene spontaneamente ma bisogna compiere un lavoro per aumentare S di dS pari a

$$dW = \tau dS$$

τ si chiama tensione superficiale del liquido (classico esempio è la goccia d'acqua su una superficie orizzontale solida). Se bisognia esercitare un lavoro per aumentare la superficie libera allora all'opposto il processo per diminuirla sarà naturale (la goccia d'acqua tenderà ad avere la minor tensione superficiale possibile). In analogia con la tensione di un filo o la pressione di un fluido esiste una forza tangenziale di tensione, se si tagila la superficie agiscono due forze (a destra e sinistra del taglio)

$$dF = \tau ds$$

con ds lunghezza del tagio. Una goccia che cade da un rubinetto cade quando la forza peso equivale la forza di spuerficie, ovvero $mg = \tau 2\pi r$. Simile è il fenomeno delle bolle, la sfera è, a parità di volume, il solido con superficie minore, di conseguenza la tensione della superficiale tende a far assume quella forma; la tensione inoltre fa si che la pressione interna alla bolla sia maggiore di quella interna $p_\tau = p_i - p_e$ con p_τ pressione esercitata dalla tensione. La pressione maggiore interna tende a far aumentare la bolla di volume compiendo un lavoro $dW = (p_i - p_e)dV$ e la tensione superficiale compie un lavoro $dW_t = 2\tau dS$ dove il 2 è dato dal doppio lavoro (interno ed esterno) della tensione, euguagliando si ottiene

$$p_t = \frac{2\tau}{R}$$

o $p_t = \frac{4\tau}{R}$ se la bolla è vuota

Forze di coesione ed adesione, fenomeni di capillarità

Le forze di coesione sono forze di tipo attrattivo che si esercitano tra le molecole del liquido tenendole vicine, o per meglio dire coese, motivo per cui un liquido mantiene il proprio volume ma non mantiene la propria forma, le forze di adesione sono anch'esse di tipo attrattivo, ma si esercitano tra le molecole del liquido e quelle di una superficie a contatto con il liquido, facendolo aderire ad essa. A seconda del rapporto tra le forze di coesione e di adesione un liquido a contatto con una superficie solida può manifestare comportamenti diversi. L'angolo α che si forma tra la superficie e la tangente alla goccia nel punto di contatto con la superficie viene detto angolo di contatto, se $<90°$ le forze di adesione prevalgono sulle forze di coesione (il liquido bagna la superficie), se $>90°$ le forze di adesione prevalgono sulle forze di coesione (il liquido non bagna la superficie). Lo stesso fenomeno si osserva guardando un liquido a contatto con le pareti del suo contenitore, se la tangente alla curva di contatto che si crea ha un angolo (rispetto alla parete) $<90°$ vincono le forze di adesione, altrimenti quelle di coesione. Un altro fenomeno legato a queste forze è la capillarità, la capillarita si manifesta nei tubi capillari, ossia a tubi di sezione non superiore a $1mm^2$, per cui la superficie libera tende a salire o scendere rispetto al normale livello raggiunto per effetto della sola pressione. In un tubo capillare possono verificarsi 2 eventi, se le forze di adesione prevalgono sulle forze di coesione, il liquido tende a salire all'interno del capillare, altrimenti il liquido tende a scendere. Osserviamo 2 vasi comunicanti per osservare l'altezza raggiunta tramite il fenomeno di capillarità: come è facilmente intuibile $p_\tau = \rho gh$ ovvero per l'altezza raggiunta per capillarità è comunque valida la legge di stevino, p_τ è la stessa della bolla piena $\frac{2\tau}{R} = \rho gh$ (R raggio del capillare), possiamo ricavarci l'altezza in funzione del raggio di curavtura del menisco ponendo $R' = Rcos\alpha$.

Capitolo 9

Oscillazioni ed onde

In questo capitolo parleremo di moto armonico ed onde, il moto armonico è un moto orginato da una forza elastica, quindi essendo $a = \omega^2 A$ e F=-kx si ottiene

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Sia il pendolo che una forza elastica sono moti armonici a patto che lo spostamento non sia troppo grande, ciò vuol dire che il problema può essere linearizzato con degli sviluppi in serie. Ricordo che l'equazione del moto armonico è

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}\omega^2 x(t) = f(x)$$

Energia dell'oscillatore armonico

il punto che oscilla sotto la forza elastica (conservativa) ha energia

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 cos^2(\omega t + \phi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 sen^2(\omega t + \phi)$$

$$E_{mecc} = E_k + E_p = costante$$

quando il punto è al centro dell'ampiezza l'energia cinetica è massima, quando è agli estremi l'energia potenziale è massima, la somma dei due è costante. Differenziando l'energia meccanica si ottiene dopo alcuni passaggi $a = -\omega^2 x$.

Somma di moti armonici sullo stesso asse

Immaginiamo 2 punti in moto armonico sullo stesso asse, vogliamo descrivere il moto (che per principio di sovrapposizione è armonico) del punto di mezzo tra i due $x_1 + x_2/2$ e il moto relativo $x_1 - x_2$. Per forze uguali sommando due moti armonici si ottiene $Acos\Psi = A_1 cos\phi_1 + A_2 cos\phi_2$, $Asen\Psi = A_1 sen\Phi_1 + A_2 sen\Phi_2$, $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2cos(\phi_1 - \phi_2)}$ e $tg\Psi = \frac{A_1 sen\phi_1 + A_2 sen\phi_2}{A_1 cos\phi_1 + A_2 cos\phi_2}$. Si intuisce che i coefficenti sen e cos ωt rimangono uguali e la safsatura rimane costante; da qui arrivano i fenomeni di interferenza. Per forze diverse la pulsazione cambia e non vale più la sovrapposizione, l'angolo di sfasatura è $\delta = (\omega_1 t + \phi_1) - (\omega_2 t + \phi_2) = (\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2$ e l'ampiezza è funzione del tempo $A(t) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2cos((\omega_1 - \omega_2)t + \phi_1 - \phi_2)}$, di conseguenza se la sfasatura è nulla e l'ampiezza è uguale $x_1 + x_2 = Asen\omega_1 t + Asen\omega_2 t = 2Acos\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}tsen\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Questo fenomeno si chiama battimento ed è usato ad esempio nelle trasmissioni radiofoniche AM dove la prima pulsazione è usata per l'onda elettromagnetica porante e la seconda è generata nel microfono del suono.

Somma di moti armonici su assi ortagonali

Consideriamo due moti armonici lungo l'asse x(=Asenωt) e l'asse y(=Bsen$(\omega t + \phi)$) allora se $\phi = 0$ $\frac{x}{y} = \frac{A}{B}$, il punto si move lungo un segmento di angolo con l'asse x $\theta = arc\,tg\frac{B}{A}$ se i moti sono in opposizione di fase x/y=-A/B e l'angolo è l'opposto, se i moti sono in quadratura du fase $\phi = \frac{\pi}{2}$ allora $(x/A)^2 + (y/B)^2 = 1$ che è l'equazione di un ellisse che risulta essere percorsa in senso orario, infine con sfasatura generica la traiettoria è sempre un ellisse ma gli assi non sono x e y. Questi sono i cosidetti fenomeni di polarizzazione.

Oscillatore armonico smorzato da una forza di attrito costante

Basta sommare i lavori della forza elastica e del moto armonico considerando solo l'energia potenziale perché quano il punto si ferma quella cinetica è nulla, dopo qualche calcolo (possibile anche con l'equazione differenziale) si ottiene che ogni periodo l'ampiezza diminuisce di $4\frac{\mu mg}{k}$ ma il periodo rimane costante $T = 2\pi/\omega$ e viene detto pseudo periodo.

Oscillatore aronico smorzato da una forza viscosa

Un moto armonico viene frenato da una forza viscosa $-\lambda v$, la legge del moto è

$$ma = -kx - \lambda v \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

chiamimiamo $\gamma = \frac{\lambda}{m}$ coefficente di smorzamento e $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsazione propria. così da avere

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

Avendo visto in passato che un corpo sottoposto ad attrito viscoso è smorzato esponenzialmente secondo un fattore $e^{\alpha t}$, sostituiamolo allora a x(t) e otteniamo $(e^{\alpha t}(\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0) = 0)$ che $e^{\alpha t}$ è soluzione solo se $alpha$ soddisfa

$$\alpha^2 + 2\gamma\alpha + \omega_0^2 = 0$$

ci sono 3 possibili casi: $\gamma^2 > \omega_0^2$, $\gamma^2 = \omega_0^2$ e $\gamma^2 < \omega_0^2$.
Nel primo caso (smorzamento forte) esistono 2 valori distinti entrambi negativi.
Nel secondo caso le soluzioni coincidono (smorzamento critico)
Nel terzo caso (smorzamento debole) le soluzioni sono complesse e dopo vari ritocchi si arriva alla soluzione

$$x(t) = A_0 e^{\gamma t} sen(\omega t + \phi)$$

Lo pseudo periodo è costante e la pulsazione vale $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} < \omega_0$

Capitolo 10

Primo principio della termodinamica

Terminologia

- Sistema termodinamico: Porzione di materia costituita da una o più parti.
- Ambienete: zona cricostante al sistema con cui esso può interagire.
- Universo termodinamico: insime di sistema ed ambiente.
- Sistema aperto: il sistema è detto aperto se c'è scambio di energia e materia con l'ambienete
- Sistema chiuso: il sistema è detto chiuso se avvengono scambi di energia ma non di materia.
- Sistema isolato: non ci sono scambi di materia o di energia tra sistema ed ambiente.

Equilibrio termodinamico

Lo stato termodinamico di un sistema è detto in equilibrio se le variabili termodinamiche che lo descrivono sono costanti nel tempo ed è il risultato di3 tipi diversi di equilibrio:
-Equilibrio meccanico (quello già studiato in meccanica)
-Equilibrio chimico (non ci sono reazioni chimiche interne al sistema, considereremo questo variabile sempre in equilibrio perché la chimica sta sui coglioni a tutti)
-Equilibrio temico (la temperatura è uguale ovunque)
Qualora il sistema non sia isolato la temperatura del sistema è uguale a quella del ambiente. Viene inoltre definita la funzione di stato la funzione implicita f(p,V,T, altre variabili termodinamiche)=0 valida se il sitema è in equilibrio termodinamico. Dati due sistemi termodinamici in equilibrio che interagiscono, il passaggio di un sistema da uno stato di equilibrio ad un altro è detto trasformazione termodinamica. Se 2 corpi sono messi a contatto attravero una parete e non c'è scambio di temperatura la parete è detta adiabatica (e se il sistema è circondato da pareti adiabatiche è detto sistema adiabatico), altrimenti la parete è dettta diatermica (e il contatto è detto contatto termico).

Temperatura

Per definire la temperatura prendiamo una grandezza X che caratterizza il fenomeno (detta caratteristica termica) e sia $\theta(X)$ la funzione temperatura, chiamiamo termometro il dispositivo capace di misurare la caratteristica termica e definisco un sistema di riferimento con punto fisso il trpilo punto dell'acqua (273.16K 0.001°C). La funzione temperatura sarà $\theta(X) = aX$, allora per definizione abbiamo $T_{pt} = \theta(X_{pt}) = aX_{pt} = 273.16 \to T = 273.16\frac{X}{X_{pt}}K$ detta temperatura empirica.

Scale termometriche

- Scala Celsius: $t(°C) = T(K) - 273.15$
- Scala Rankine: $t(°R) = \frac{9}{5}T(K)$
- Scala Fahrenheit: $t(°F) = \frac{9}{5}T(K) - 459.67$

sistemi adiabatici, esperimenti di joule e calore

Grazie agli esperimenti di Joule si osserva che il lavoro in un sistema adiabatico è proporzionale alla variazione di temperatura per cui vale $W_{ad} = -\Delta U$ dove U è una misura dipendente dalle variabili (o coordinate) termodinamiche; Se si fornisce lavoro all'esterno W è positivo e U diminuisce. Inoltre essendo Q il calore ed essendo in uno scambio di calore tra due corpi, in assenza di lavoro, $Q = \Delta U$ allora

$$Q = -W$$

Dove Q rappresenta appunto il calore scambiato per far variare la temperatura di un corpo in assenza di lavoro e W il lavoro necessario per ottenere lo stesso risultato in condizioni adiabatiche.

Primo principio della termodinamica

Consideriamo la stessa situazione di prima ma adesso calore e lavoro avvengono durante la stessa trasformzaione: si verifica che mnentre Q e W dipendono dalla trasformzaione la loro differenza no, di conseguenza abbiamo quello che è definito come il primo principio della termodinamica

$$Q - W = \Delta U$$

Questa equazione ha diverse implicazioni: innanzitutto definisce una funzione di stato U chiamata energia interna, essa varia proporzionalmente alla differenza tra calore e lavoro indipendentemente dalle quantità della prima o della seconda grandezza. L'eregia interna non è energia cinetica o potenziale ma è legata alle proprietà interne del sistema come moto e forze molecolari (pressione temperatura ecc...). Questa equazione mette inoltre in evidenzia l'esistenza di scambi di energia non meccanici macroscopici (vederemo che sono microscopici). Un sistema che ritorna al suo stato iniziale esso si chiama trasformazione ciclica e $\Delta U = 0 \rightarrow Q = W$.
Una trasformazione viene detta reversibile se essa avviene attraverso costanti stati di equilibrio ed in assenza di forze dissipative, irreversibilie qualora le precedenti proprietà non siano soddisfatte. Lavoro, energia interna e calore hanno tutte Joule come unità di misura.

Calorimetria

In una trasformzaione termica non è possibile in generale avere W=0 o Q=0 a meno che non lo siano contemporaneamente, tuttavia mettendo due corpi a contatto che si passano calore è possibile avere $Q_{1,2} \neq 0$ con W=0 e Q della trasformzaione =0. Sperimentalmente si trova che

$$Q = mc(T_{fin} - T_{in})$$

dove c è il calore specifico, caratteristica della sostanza ovvero il calore che occorre scambiare con un unità di massa di una data sostanza, alla temperatura T, per far variare la temperatura di 1K. Definiamo anche C=mc come la capacità termica del corpo ovvero il calore necessario per far variare di 1K la temperatura del corpo.
In termini infinitesimi d$Q = mcdT$ da cui $c = \frac{1}{2}\frac{dQ}{dT}$.
Dovendo Q del sistema risultare $Q_1 + Q_2 = 0$ allora $Q_1 = -Q_2$ e i due sistemi a contatto hanno equazione

$$m_1c_1(t_e - t_1) = -m_2c_2(t_e - t_)$$

con T_e temperatura di equilibrio. Il calore specifico dipende dalla temperatura, di conseguenza qualora non possa essere considerato costante si deve utilizzare l'equazione

$$Q = m\int_{T_1}^{T_2} c(T)dT$$

Spesso si parala di calore specifico molare che non è altro che

$$c = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT}$$

Una mole è la quantità di una sostanza che contiene $N_A = 6.022 \cdot 0^{23}$ entità elementari (atomi o molecole).

Processi isotermi, cambiamenti di fase

Una trasformazione in cui la temperatura del sistema rimane costante è detta isoterma; durante una trasformazione isoterma possono avvenire dei cambiamenti di fase ovvero passaggi di stato. Gran parte dei passaggi di stato sono punti fissi (se le condizioni esterne sono precisate), mentre l'evaporazione si ha quando la pressione interna raggiunge la pressione esterna. Si osserva che la quantità di calore necessaria per passare da uno stato all'altro è

$$Q = m\lambda$$

λ è detto calore latente

Trasmissione di calore

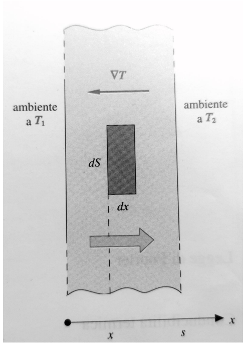
La trasmissione di calore può avvenire per conduzione, convezione o irraggiamento

Conduzione di calore

Consideriamo un corpo esteso con temperatura generalmente diversa in ogni suo punto, la legge di fourier afferma che

$$dQ = -k\frac{dT}{dn}dSdt$$

questa legge regola la conduzione del calore dove dS è un elemento della superficie isoterma, dT/dn è il modulo del gradiente di temperatura T(x,y,z) ortogonale a dS e diretto in alto o in basso dipendentemente dal fatto che la temperatura salga o scenda e k è la conducibilità termica (in generale funzione della temperatura); il - è dato dal fatto che il calore va da temperatura alta a temperatura bassa e quindi è opposto al gradiente temperatura. Tramite la seguente cosruzione (scrivere a mano) si ottiene



$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho\frac{c}{k}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Questa equazione regola la variazione di temperatura in funzione di tempo e posizione. La media in regime stazionario delle ultime due equazioni è

$$Q = k\frac{T_1 - T_2}{s}St \qquad T = \frac{k_1 s_2 T_1 + k_2 s_1 T_2}{k_2 s_1 + k_1 s_2}$$

Convezione

La conduzione di calore nei liquidi è diffilcile da osservare poiché oltre ad avere una conducibilità termica bassa avviene un altro processo di trasmissione del calore, la convezione: il fluido vicino alla fonte di calore si riscalda, dilatandosi e diminuendo quindi la sua densità, di conseguenza per la spinta di archimede sale e altro fluido prende il suo posto vicino alla fonte.

Irraggiamento

Un corpo emette energia sotto forma di onde magnetiche, il potere emissivo del corpo ε è l'energia emessa per unità di tempo e di superficie ed è dato dalla egge di Stefan-Boltzmann

$$\varepsilon = \sigma e T^4$$

con $\sigma = 5.76 \cdot 10^{-8} J/m^2sK^4$ ed e è l'emissivita che varia tra 0 e 1 e dipende dalle proprietà della superficie, se vale 1 è detta superficie nera. Il vaso di dewar è utilizzato per isolare il più possibilie un sistema, è costituito da un contenitore con 2 strati di vetro argentato (superficie riflettente per diminuire l'irraggiamento) con in mezzo il vuoto per diminuire conduzione e convezione.

Passaggio di calore da solido a fluido

Un esempio di questo evento sono i termosifoni che (da solidi) riscaldano l'aria (fluido). Consideriamo un solido alla temperatura T con superficie S ed un fluido con $T_0 < T$, in questo caso avvengono sia conduzione che convezione che irrggiamento, se ΔT non è molto grande: il modulo del calore nel tempo t concesso dal solido al fluido risponde alla legge di Newton

$$Q = h(T - T_0)St$$

con h conducibilità termica esterna

Dilatazione termica in solidi e liquidi

All'aumentare della temperatura un corpo si dilata seguendo la seguente legge

$$\lambda = \frac{1}{l}\frac{\Delta l}{\Delta T}$$

λ è il coefficente di dilatazione lineare ed è funzione della temperatura ma per piccole variazioni può essere assunto come costante. È bene fare una distinzione tra corpi isotropi e corpi anisotropi: mentre nei primi λ assume lo stsso valore per ogi direzione e quindi non viene modificata la forma, nei secondi λ varia al variare della direzione e quindi la forma viene mantenuta. Consideriamo un corpo isotropo con $V = l_1l_2l_3$ alla temperatura T, la variazione del volume è

$$V + \Delta V = V(1 + 3\lambda\Delta T)^3 \approx V(1 + 3\lambda\Delta T) \rightarrow \Delta V = V\alpha\Delta T$$

abbiamo potuto levare l'elevazione poiché il termine tra parentesi tende ad uno e abbiamo posto $3\lambda = \alpha$(coefficente di dilatazione cubica), in modo analogo si trova il coefficente di dilatazione superficiale$=2\lambda$.

Capitolo 11

Gas ideali e reali

Leggi dei gas

I gas non hanno forma o volume, sono facilmente compressibili con variazioni di temperatura, densità e pressione. Immaginiamo un contenitore con all'interno un gas, se V non è molto grande allora la pressione è uguale in tutti i punti. Immaginiamo di cambiare il volume del contenitore, allora il gas realizza uno scambio di lavoro con l'ambiente esterno, le pareti del contenitore possono essere diatermiche o adiabatiche a seconda dei nostri obbiettivi. Osserveremo alcune leggi della termodinamica riguardante il precedente esempio che sono meglio verificate quando la pressione è bassa e la temperatura sufficentemente più elevata a quella di condesazione, si parlerà in tali casi di comportamento ideale.

Legge isoterma di boyle

Consideriamo un sistema in equilibrio termodinamico, durante una trasformazione isoterma si verifica che la legge di Boyle è sempre verificata

$$pV = costante$$

Un caso del genere è possibile se c'è una sorgente che mantiene la temperatura interna costante

Legge isobara di Volta-Gay Lussac

Se durante la trasformazione la pressione rimane costante si parla di trasformazione isobara, in questo caso la variazione del volume dipende dalla legge di Volta-Gay Lussac

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

t è la temperatura espressa in gradi celsius e V_0 è il volume occupato a 0°C e α è il coefficente di dilatazione termica.

Legge isocora di Volta-Gay Lussac

Se invece è il volume a tenersi costante, la trasformazione è costante e la pressione segue la seconda legge di Volta-Gay Lussac

$$p = p_0(1 + \beta t)$$

t e P_0 come prima e β è una costante praticamente indipendente dal tipo di gas. Tutte e 3 le leggi dette fin ora sono più vere quanto più ci si avvicina ad un gas ideale e al limite di questa affermazione si ottiene che $\alpha = \beta = \frac{1}{273.15}°C^{-1}$, le due leggi Volta-Gay Lussac possono diventare $K = K_0\alpha T$ poiché $T = 1/\alpha + t$.

Legge di avogrado

La quarta legge è la legge di avogrado (di carattere differente dalle precedenti ma necessaria per la prossima legge (è una legge della chimica quindi fa schifo)), essa stabilisce che volumi euguali di gas diversi alla stessa temperatura e pressione contengono lo stesso numero di molecole (anche questa legge si riferisce a gas con un comportamento ideale). Detta M la massa totale e m la massa della singola molecola il numero N di molecole è N=M/m, inoltre $m = Am_u$ dove A è la massa molecolare A e m_u l'unità di massa atomica. Consideriamo una massa M numericamente uguale ad A (A kilogrammi di gas), questa quantità si chiam kilomole e risulta che $N = N_A = 1/m_u = 6.0221 \cdot 10^{23}$ molecole/kmol N_A è il numero di avogrado, se invece si considera una massa pari ad A grammi di gas questa quantità si chiama mole e $N_A = 1/m_u = 6.0221 \cdot 10^{23}$

molecole/mol. Una mole è la quantità di materia che contiene tante entità fondamentali quanti sono gli atomi in 0.0012kg dell'isotopo ^{12}C del carbonio (ovvero il numero di avogrado), conseguenza della legge di avogrado è che una mole di qualsiasi gas a una data temperatura e pressione occupa sempre la stessa quantità di volume che per 0°C e pressione atmosferica è $V_m = 22.414$ litri.

Equazione di stato del gas ideale

Come già asserito n moli occupano volume $V_0 = nV_m$ a 0°C e pressione atmosferica p_0, utilizzando tutte le precedenti leggi si ottiene

$$pV = np_0 V_m \alpha T = nRT$$

con R=8314 j/kmol K costante universale e valida per i gas ideali e mostra come siano indipendenti solo 2 variabili su 3. Essendo n=N/N_A è possibie sostituirlo nell'equazione ed usando densità al posto di volume e An al posto della massa M si ottiene

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{A}$$

Trasformazioni di un gas, lavoro

Un gas, soggetto a una trasformazione in cui si espande o si comprime, esercita lavoro sull'ambiente circostante (o viceversa), immaginiamo che ilcorpo durante la trasformazione passi per infiniti stati di equilibrio, allora

$$dW = pdV \rightarrow W = \int_{V_A}^{V_B} p(V)$$

per risolvere l'integrale dobbiamo assolutamente conoscere la funzione nel piano di Clapeyron un piano con V nelle ascisse e p nelle coordinate (esso prendeva forma di iperbole nella legge di boyle e segmento verticale o orizzontale nelle leggi di Gay-Lussac)

Calore e calori specifici

In una trasformazione generica il gas scambia anche calore con l'ambiene e per calcolarlo è necessario utilizzare il primo principio, tuttavia nelle trasformazioni non isoterme è possibile arrivare all'equazione del calore specifico molare specificando il tipo di funzione: Per una trasformazione isocora si ha

$$dQ = nc_V dT$$

mentre per una trasformazione isobara

$$dQ = nc_p dT$$

Sia c_p che c_V si misurano in J/mol K, una conseguenza di queste leggi è che il calore necessario per una trasformazione isocora è minore di una isobara perché nell'isobara il gas compie anche lavoro.

Energia interna del gas ideale

Immaginiamo di avere un calorimetro (contenitore che contiene un altro contenitore immerso in un liquido) con all'interno due contenitori (uno pieno di gas e uno vuoto) con pareti diatermiche e separati da un rubinetto (la temperatura è T) si osserva che aperto il rubinetto il gas va ad occupare anche il volume del secondo contenitore ed indipendentemente dalla pressione la temperatura non cambia, essendola trasformazio isoterma e il lavoro sull'esterno =0 allora per il primo principio $\Delta U = Q_W = 0$ ciò implica 2 cose: nell'esansione nel vuoto (libera) si un gas ideale l'energia interna non varia e essendo che per la legge di Boyle $p_{in}V_{in} = p_{fin}V_{fin}$ l'energia interna deve essere funzione unica della temperatura. Per determinare la trasformazione U(T) consideriamo due stati di equilibrio generici A e B, $\Delta U = U_B - U_A$ deve essere uguale qualsiasi sia la trasformazione; sceliamo 2 trasformazioni, una isocora AC e una isoterma CB

$$\Delta U = U_B - U_A = U_B - U_C + U_C - U_A = U_C - UA$$

dato dal fatto che $U_B = U_C$ poiché isoterma, inoltre essndo AC isocora W=0 $\Delta U = Q$ allora

$$\Delta U = U_B - U_A = nc_V(T_B - T_A)$$

possiamo quindi riscrivere il primo principio per quanto rigurada i gas ideali come

$$dQ = nc_V dT + pdV$$

Relazione di Mayer

la relazione di Mayer, dimostrata tramite il nuovo primo principio della termo dinamica, dice che

$$c_p - c_V = R$$

ciò implica che anche c_p è funzione unica della temperatura e R è il lavoro che una mole compie a pressione costante per aumentare di 1K. Il loro rapporto sarà $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ ed è sempre >1.

Studio di alcune trasformazioni

Trasformazioni adiabatiche

Se il contenitore è adiabatico ci può essere soltanto lavoro (la parete mobile si alza o si abbassa)

$$W_{AB} = -\Delta U = nc_V(T_B - T_A) = \frac{1}{\gamma - 1(p_A V_A - p_B V_B)}$$

Se il lavoro è positivo (la parete si alza) la variazione di U è negativa e la temperatura si abbassa. Se una trasformazione adiabatica è reversibile esistono infinitesi passaggi in equilibrio per cui

$$dU + dW = nc_v dT + pdV = 0$$

essendo la trasformazione reversibile si può esprimere il lavoro con l'equazione di stato dei gas, sotituiamo p=nRT/V. Dopo alcuni passsaggi si ottiengono 3 equazioni che possono essere usate per ricavare le variabili termodinamiche p,V,T

$$TV^{\gamma-1} = costante \qquad pV^{\gamma} = costante \qquad Tp^{1-\gamma/\gamma} = costante$$

Trasformazioni isoterme

Affinché una trasformazione sia isoterma ci deve essre una sorgente di calore a mantenere la temperatura mentre il sistema compie un lavoro, infatti Q=W≠0 se il lavoro è un espansione Q e W sono entrambi positivi altrimenti risultano negativi. Come prima qualora fosse reversibilie si ha

$$W_{AB} = \int_A^B pdV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT\, ln \frac{V_B}{V_A}$$

Trasformazioni isocore

Il volume è costante e W=0, il gas può solo scambiare calore e quindi per il primo principio varia l'energia interna. $Q = \Delta U = nc_V \Delta T$ e $\frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B}$, Se si alza la temperatura si alza la pressione.

Trasformazioni isobare, entalpia

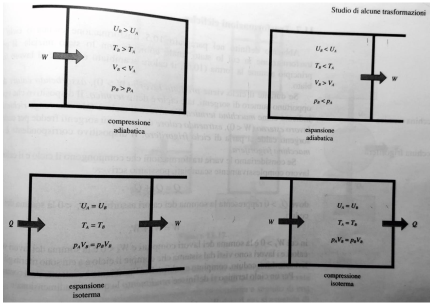
Si realizza mettendo un recipiente diatermico con una parete mobile a contatto con un pressione esterna costante p. Ovviamente vale $\frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$, $Q = nc_V \Delta T$ e $W = p\Delta V = p(\Delta(nRT)) = nR\Delta T$ (e deve sempre valere $\Delta U = nc_V \Delta T$), cedendo calore al gas termperatura e volume aumentano.
Si definisce entalpia la funzione

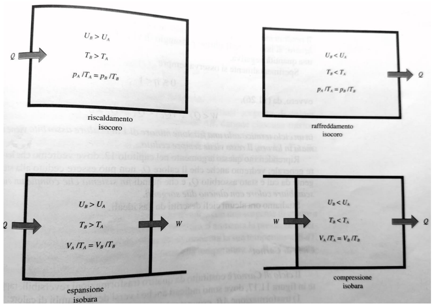
$$H = U + pv$$

che è funzione di stato perche U p e V sono costanti termodinamiche, come U anche H è funzione della temperatura e $dH = nc_p dT$, in particolare in una trasformazione isobara $Q = \Delta H$. In una funzione isocora $Q = \Delta U$ e $Q = \Delta H$, il fatto che il calore sia sempre uguale ad una funzione di stato ci fornisce una formula per calcolare Q senza ricorrere al primo principio

$$c_v = \frac{1}{n}\frac{dU}{dT} \qquad c_p = \frac{1}{p}\frac{dH}{dT}$$

L'entalpia esprime l'energia che un sistema può scambiare con l'ambiente esterno





Trasformazioni cicliche

Come già detto una trasformazione è detta ciclica se lo stato finale coincide con lo stato iniziale, di conseguenza Q=W, si parla di ciclo termico quando il lavoro è positivo e il sistema sta assorbendo calore da delle sorgenti di calore, si parla invece di ciclo frigotifero nel caso opposto. Si definisce rendimento (per le macchine termiche) la quantità

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A}$$

dove Q_A è il calore assorbito mentre Q_C è il calore ceduto (si nota che un ciclo deve forzatamente avere due fonti di calore, una che assorbe ed una che cede) e $Q_A > |Q_C|$.
Alcuni esempi osservati sono il ciclo di Carnot, il ciclo di Stirling (entrambi con efficenza $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$), ciclo di Otto (motore a scoppio)($\eta = 1 - \frac{V_1}{V_2}^{0.4}$), ciclo di Diesel, ciclo frigorifero (il sistema assorbe Q_0 da una sorgente fredda e ne cede Q_C ad una calda, $|Q_C| > Q_0$ l'efficenza qui è $\xi = \frac{Q_0}{|W|}$, il ciclo di carnot all' inverso è un esempio di ciclo frigorifero e $\xi = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$).

Gas reali, equazioni di stato ed energia interna

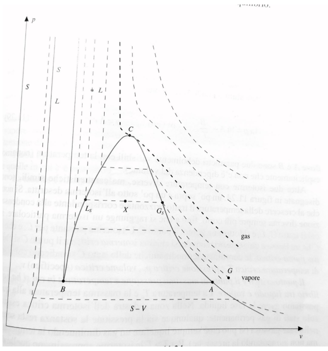
I gas erali non seguono totalmente le leggi espresse finn'ora per i gas ideali, ma ci si avvicinano quanto più bassa è la pressione e alta la temperatura, inoltre un gas può anche cambiare di stato.

Equazione di stato di un gas reale

In un gas reale il prodotto pV isoterme non è costante a causa delle interazioni molecolari (questo problema aumenta quanto più ci si avvicina al cambio di stato). ne gas ideali $\frac{pv}{nRT} = 1$, nei gas reali si osserva sperimenatalmente $\frac{pV}{nRT} = 1 + c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p^3 ...$ (sviluppo virale) con c coefficenti del virale (risulta ovvio che il limite all'ideale si ha per la pressione o densità che tendono a 0). L'energia interna non è più unicamente dipendente dalla temperatura.

Diagrammi pV e pT, formula di Clapeyron

Un gas (isoterme) che si avvicina alla temperatura di condensazione diminuisce di v (con v Volume per unità di massa) e aumenta di pressione finche non raggiunge lo stato di vapore saturo, a quel punto la pressione rimane costante e v diminuisce fino a raggiungere lo stato di liquido saturo: in questa fase avviene il cambiamento di stato e $v = V_L + V_G / m_L + m_G$. raggiunto quel punto in un grafico p v la funzione diventa praticamente verticale poiché ad una minima variazione di v corrisponde una notevole variazione di p. la pressione costante durante il cambiamento di stato è data da $ln\, p = ln\, A - \frac{B}{T}$ con A e B parametri quasi fissi. Aumentando la temperatura e ripetendo la trasformazione isoterme si arriva ad un punto in cui il passaggio di stato ha un solo punto in pv (C nell'immagine), quello è il punto critico, è la massima temperatura alla quale possiamo avere la fase liquida e la massima pressione durante il passaggio tra soido e liquido, per $T > T_C$ il gas approssima lo stato ideale. Lungo la line AB si ha il punto triplo e per le trasformazioni sotto AB il passaggio a liquido viene saltato.



Equazione di van der waals e di Clayperion

Questa legge è semi empirica e descrive in maniera adeguata i gas reali sostituendo la classica pV=nRT

$$(p + a\frac{n^2}{V^2})(V - nb) = nRT$$

La seguente formula è invece valida per i cambiamenti di stato

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(v_2 - v_1)}{\lambda} \qquad \frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T(v_2 - v_1)}$$

λ è il calore latente.

Teoria cinetica dei gas

Da un punto di vista microscopico, un gas è un insieme caotico di molecole che si agitano in tutte le direzioni, e che si urtano tra di loro e contro le pareti del contenitore. Le grandezze che individuano il comportamento di ogni singola molecola, come la velocità o la posizione, sono difficili da descrivere; è più conveniente, nonché possibile, mettere in relazione tali grandezze microscopiche con le caratteristiche macroscopiche del gas, ovvero la pressione e la temperatura. lo studio della teoria cinetica dei gas si basa su 5 ipotesi:

- Tutte le molecole che compongono il gas sono identiche
- Il moto delle molecole è continuo e disordinato
- Gli urti tra le molecole e quelli tra le molecole e le pareti del contenitore sono considerati elastici
- Non si considerano altre forze al di fuori di quelle che si generano durante gli urti
- Le dimensioni delle molecole sono molto più piccole degli spazi intermolecolari

Pressione di un gas

Da un punto di vista microscopico, la pressione di un gas è il risultato di un gran numero di urti tra le molecole che lo costituiscono e le pareti del contenitore, essa dipende dalla velocità quadratica media delle particelle, dalla loro massa e dalla densità molecolare, e analogamente dall'energia cinetica media. Immmaginiamo una molecola che si scontra sulla parete e consideriamo il suo moto sulla componente x, la sua quantità di moto è $P = mv_x$ e l'impulso $-2mv_x$, se la molecola è troppo lontana dalla parte c'è la probablilità che questa si scontri con un altra e non arrivi mai alla parete, consideriamo un intervallo dt (molto piccolo e quindi con poche probablilità che la molecola venga colpita), la molecola sarà a distanza vdt dalla parete, indichiamo con S la superficie della parete ed eliminiamo adesso le molecole con velocità negativa che si stanno allontanando dalla parete (dividiamo per 2), allora

$$N = \eta v_x dtS$$

con N numero di molecole nel parallelepipedo vdtA che colpirano la parete e η numero di molecole per unità di volume (N/V). $F = dP/dt = \eta v_x S \cdot mv_x$ e la pressione è

$$p = F/S = \eta m v_{m,x}^2$$

$v_{x,m}$ poiché è un calcolo probabilistico.

Pressione del gas in funzione dell'energia cinetica media

Essendo il moto della molecole del gas completamente caotico e disordinato, la media della componente della velocità lungo l'asse x è uguale alla media della componente lungo l'asse y e a quella lungo l'asse z, quindi $v_m^2 = 1/3 v_{x,m}$ e

$$p = \frac{1}{3}\eta m v_m^2 = \frac{2}{3}\eta\frac{1}{2}E_{k,m}$$

L'energia cinetica coincide con l'energia totale, essendo l'unica forma di energia considerata

Temperatura di un gas ed energia cinetica

Sostituiamo adesso l'ultima equazione trovata nell'equazione di stato dei gas e otteniamo il risultato

$$E_{K,m} = \frac{3}{2}\frac{R}{N_A}T$$

$1/N_A$ è dato dal rapporto n/N e $\frac{R}{N_A} = k_b$ ovvero la costante di Boltzman$=1.38 \cdot 10^{-23}\frac{J}{K}$, quindi

$$E_{K,m} = \frac{3}{2}k_B T$$

da cui ci possimao ricavare la velocità quadratica media

$$v_m^2 = \frac{3k_B T}{m}$$

Per ragioni di comodità possiamo mettere la massa molare $Mm = N_A m$ al posto di m

$$v_m^2 = \frac{3RT}{Mm}$$

Principio di equipartizione dell'energia

Il principio di equipartizione dell'energia dice che essendo la media del energia cinetica pari in ogni direzione, essa va moltplicata per i suoi gradi di libertà (ovvero il numero di basi necessarie per descriverne il movimento). Questo procedimento non ci è nuovo perché l'abbiamo già effettuato per trovare la velocità media di un gas monoatomico, per descrivere un gas mono atomico serviranno le 3 direzioni di traslazione, per descrivere un gas bi atomico 3 di traslazione + 2 di rotazione e per descrivere un gas poliatomico 3 di traslazione + 3 di rotazione, quindi indichiamo con L i gradi di libertà

$$< E_k >= L \cdot \frac{1}{2}k_B T$$

(da ora in poi per indicare l'energia e velocità media nella teoria cinetica dei gas useremo$<>$). Nell'ambito della teoria cinetica e nelle (inevitabili) semplificazioni didattiche di un corso di Termodinamica non avanzato, l'energia cinetica è l'unica forma di energia di un gas. Una variazione del valor medio dell'energia cinetica coincide dunque con la variazione dell'energia interna. Se consideriamo la totalità delle particelle che costituiscono il gas, possiamo esprimere la variazione di energia interna del gas come somma delle variazioni di energia cinetica totale di tutte le sue particelle

$$\Delta U = nN_A\Delta < E_k >$$

nN_A è per definizione il numero di entità fondamentali in un gas, confrontandola con la variazione di energia interna data dal calore specifico molare abbiamo

$$nc_V\Delta T = nN_A\Delta < E_k > \rightarrow \frac{L}{2}R = c_V$$

La distribuzione di Maxwell delle velocità

Fin ora abbiamo parlato di grandezze medie, tuttavia maxwell definisce (non la dimostreremo) una funzione F(v) capace di darci la percentuale di molecole compresa tra due valori v e v+dv

$$dN = 4\pi N_0\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m}{2k_B T}v^2} dv$$

dove dN è il numero di molecole del gas che possiedono un valore di velocità compreso in un intervallo tra v e v+dv e N_0 il numero totale di molecole nel gas. possimao riassumere la funzione così

$$dN = F(v)dv$$

dalla funzione di maxwell è possibile ricavare la velocità associata al maggior numero di molecole, e dunque la velocità più probabile che si possa individuare osservando il moto molecolare di un gas facendo la derivata di F(v) ottenendo un punto di massimo

$$v_p = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$$

Possiamo adesso definire $x = v/v_p$ e dividere la funzione da entrambi i lati per N_0, otterremo

$$y(x)dx\frac{dN}{N_0} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}x^2e^{-x^2}$$

detta funzione di Maxwell normalizzata rispetto alla velocità più probabile, esprime la percentuale di molecole che hanno una velocità compresa tra x e x+dx (la maxwelliana normalizzata y(x) è estremamente comoda, perché al posto di generici valori v ci permette di considerare valori in relazione alla velocità più probabile v_p).La funzione di Maxwell normalizzata y(x) assume il significato di distribuzione di probabilità, se vogliamo sapere qual è la percentuale di molecole che hanno una valore di velocità relativa compreso tra x_1 e x_2, ci basta integrare la funzione y(x) tra tali valori in modo da calcolare l'area sottesa dal grafico.

Libero cammino medio delle molecole

Il libero cammino medio delle molecole di un gas è la distanza che una molecola percorre, in media, prima di urtarne un'altra, gli urti tra le molecole di un gas sono la causa per cui la velocità di espansione libera di un gas è di gran lunga inferiore rispetto alla radice della velocità quadratica media, se adesempio calcoliamo $< v^2 >= \frac{3RT}{Mm}$ relativa ad un gas scopriamo che è di 645 m/s, velocità che non osserviamo quando ad esempio si bolle la pasta. Per calcolare la media degli urti di una molecola consideriamo il cilindro che si crea se essa si muove in linea retta $\pi r^2 h$, infatti affiché una molecola ne urti un altra essa si deve trovare in quell'area di volume quando passa la prima molecola; data $\eta = N/V$ il numero di molecole per unità di volume allora il numero di urti per unità di volume è $\eta\pi r^2$ dove abbiamo eliminato h poiché utilizziamo come unità di volume 1 metro. Se infine ne consideriamo il reciproco, determiniamo la distanza media che una molecola percorre in linea retta tra un urto e quello successivo

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}\eta\pi r^2}$$

detto cammino libero di una molecola ($\sqrt{2}$ è un valore correttivo che non dimostriamo basato sulla distribuzione di maxwell).

Capitolo 12

Secondo principio della termodinamica

In natura si osserva che il calore va sempre da un corpo più caldo ad uno più freddo (a meno che non ci siano lavori come le macchine frigorifere), il contrario tuttavia non è vietato dal primo principio della termo dinamca; ad esempio osserviamo che se lasciamo una tazza di té all'aria essa trasferisce calore all'aria e non viceversa, analogamente se una tazza cade e si rompe non osserveremo mai che essa si riaggiusti e si rimetta al suo posto senza mezzi terzi. In questo capitolo enuncieremo il secondo principio che darà delle restrizioni al primo e collegheremo i due eventi introducendo una nuova grandezza, l'entropia.

Enunciati del secondo principio della Termodinamica

Esistono 2 enunciati del secondo principio, equivalenti e dimostrati empiricamente ma non matematicamente.

Enunciato del secondo principio della Termodinamica di Kelvin-Planck

È impossibile realizzare una trasformazione termodinamica che abbia come unico risultato la completa trasformazione in lavoro del calore assorbito da una sorgente a temperatura costante.

Enunciato del secondo principio della Termodinamica di Clausius

È impossibile realizzare un processo termodinamico che abbia come unico risultato il passaggio di calore da un corpo a temperatura minore ad uno a temperatura maggiore.
La dimostrazione di equivalenza è logica e lunga quindi non ho voglia di scriverla.

la disuguaglianza di Clausius

Studiando il rendimento η di una macchina termica abbiamo osservato come $\eta = \frac{W}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$ ma anche $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ euguagliando le due equazioni ($-\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}$) ed iterando il procedimento otteniamo

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k}{T_k} = 0$$

La diseguagianza di carnot dice che $\sum_{k=0}^{n} \frac{Q_k}{T_k}$ vale 0 per i cicli reversibili e <0 per quelli irreversibili.

Entropia

Osserviamo una trasformazione reversibile AB e la trasformazione che la riporta al punto iniziale BA, per il teorema di Clausius nel caso reversibile $\int \frac{dQ}{T} = 0$ separiamo l'integrale in $\int_A^B \frac{dQ}{T}_1$ e $\int_B^A \frac{dQ}{T}_2$ Inveriamo il segno e portiamola dall'altra parte dell'uguale

$$\int_A^B \frac{dQ}{T}_1 = \int_A^B \frac{dQ}{T}_2$$

Poiché le trasformazioni 1 e 2 sono state scelte in modo del tutto casuale (non abbiamo specificato con che tipo di trasformazioni reversibili stessimo ragionando), non importa quale trasformazione termodinamica si stia seguendo: l'integrale da A a B che abbiamo scritto prima assume sempre lo stesso valore. L'integrale da A a B lungo una qualsivoglia trasformazione reversibile viene considerato per definizione come variazione di una nuova grandezza, detta entropia e denotata con la lettera S

$$\int_A^B \frac{dQ}{T} = S_B - S_A = \Delta S$$

La variazione di entropia tra due stati termodinamici, per come è definita, dipende solo dallo stato iniziale A e da quello finale B, in altri termini, l'entropia S è una funzione di stato (in modo del tutto analogo rispetto all'energia interna di un gas U). Se la tempertaura durante una trasformazione è costante e non in funzione del calore possimao semplificare il tutto in $\Delta T = \frac{Q}{T}$. Se un ciclo termico è reversibile allora la variazione del entropia di ritorno è uguale a quella di andata e in totale vale 0, se invece il ciclo è irreversibile per il teorema di carnot o per la disequazione di clausius sappiamo che il rendimento massimo è minore a quello di un ciclo reversibile. Questo vuol dire che in una macchina irreversibile, a parità di calore assorbito dal gas, viene ceduta una quantità di calore maggiore alla sorgente fredda, rispetto a una macchina reversibile che operi con sorgenti alle medesime temperature e quindi

$$\frac{|Q_1|}{T_1} > \frac{Q_2}{T_2}$$

La variazione di entropia della sorgente più calda è negativa; quella della sorgente più fredda è positiva. Complessivamente la variazione di entropia totale non è nulla, bensì positiva e dunque in una macchina irreversibile l'entropia totale aumenta. Il tutto può essere condensato in un'unica formula, detta principio di aumento dell'entropia

$$\Delta S_{tot} \geq 0$$

Poiché tutte le trasformazioni reali sono irreversibili, l'entropia è in inesorabile aumento. È possibile che l'entropia del solo sistema o di una parte di esso possa diminuire, ma se si considera l'universo termodinamico nel suo complesso ci sarà sicuramente un'altra parte (sistema o ambiente esterno) la cui entropia aumenta di una quantità tale da compensare e superare la diminuzione. Sul libro e su youmath sono riportate alcune formule riguardo il tipo di trasformazione ricavabili dall'interale del entropia che non sto a riscrivere.

La degradazione dell'energia

Il concetto di entropia ha tante implicazioni e, tra di esse, una delle più importanti nonché forse la più interessante è quella della degradazione dell'energia. Sappiamo che una macchina reversibile è quella che ha il rendimento massimo tra tutte le macchine termiche che lavorano tra le stesse sorgenti. Ciò significa che a parità di condizioni una qualunque macchina irreversibile, come sono quelle realizzabili nella realtà, ha un rendimento più basso. La differenza tra il lavoro prodotto da una macchina reversibile e quello minore prodotto da una macchina irreversibile è uguale all'energia inutilizzabile:

$$E_{in} = W_{rev} - W_{irr}$$

Attenzione a non fraintendere il significato del concetto di energia inutilizzabile. Non si tratta di una quantità di energia persa: come sappiamo, l'energia non può essere creata né distrutta, ma può solo trasformarsi da una forma a un'altra. Si può dimostrare che, in un processo irreversibile in cui l'entropia aumenta di una quantità ΔS, l'energia inutilizzabile è data da:

$$E_{in} = T\Delta S$$

dove con T indichiamo la temperatura più bassa tra quelle delle sorgenti disponibili. Poiché tale energia non può essere recuperata, all'aumento di entropia si associa un diminuzione della quantità di lavoro che può essere compiuto. La degradazione dell'energia viaggia di pari passo con l'aumento di entropia dell'universo. Si tratta di un processo inarrestabile e ciò significa che, col passare del tempo, l'energia disponibile nell'Universo per compiere lavoro tende a esaurirsi. Il calore continuerà a fluire dai corpi caldi (come le stelle) ai corpi freddi fino a quando tutto avrà raggiunto la stessa temperatura. In assenza di differenze di temperatura peraltro non è possibile produrre lavoro. Questo è un possibile scenario che si prevede nello sviluppo del nostro Universo e prende il nome di morte termica dell'Universo. Al contrario se la teoria dell'Universo oscillante fosse corretta, allora l'Universo smetterà di espandersi per poi cominciare a comprimersi verso il Big Crunch, dopodiché ci sarà un nuovo Big Bang: un nuovo Universo nascerà e la morte termica sarà sventata.

Informazione ed entrpia

Lo stato di un sistema termodinamico, o macrostato (descritto da p,T,V), dipende dalla particolare configurazione microscopica dei suoi costituenti elementari, o microstato(descritto da posizione e velocità). Posto che a un macrostato corrispondono diversi possibili microstati (La pressione ad esempio è data dagli urti delle molecole contro le pareti del contenitore, ma non è importante quale particolare molecola abbia urtato la parete.), i sistemi evolvono verso il macrostato più probabile e tale probabilità è legata all'entropia, secondo la legge descritta dall'equazione di Boltzmann. Immaginiamo di avere un recipiente con 6 palline numerate e di tagliarlo a metà, ci possono essere varie combinazioni di palline divise nella parte destra e sinistra del taglio, ad esempio la pallina 3 a sinistra e le altre a destra oppure la pallina 2 e 5 a sinistra e le altre a destra, le combinazioni semplici sono espresse da

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

da cui emerge che il "macrostato" più prbabile è quello dove le palline (microstato) sono divise a metà (più microstati). Immaginamo di avere ora un recipiente diviso in 2 sezioni, la prima vuota e la seconda piena di un gas (e che le palline siano le molecole):aprendo il recipiente il gas tende ad occupare le due sezioni in eugual misure ed è così improbabile che un unica molecola rimanga da una sola parte da potersi dire impossibile. La tendenza allo stato più probabile e l'aumento dell'entropia sono infatti collegati dall'equazione di Boltzmann

$$S = k_B \ln(N) + c$$

dove N è il numero di microstati e c una costante arbitraria, che scompare nel momento in cui consideriamo una differenza di entropia (non abbiamo la dimostrazione ma probabilmente viene da un integrale). L'entropia può essere definita anche come disordine, un sistema è più in disordine quanto sono le informazioni necessarie per descriverlo, riprendendo il caso di prima se una singola molecola fosse nella prima sezione basterebbe dire che la molecola 1 è nella sezione 1 e le altre nella sezione 2 se fossero divise a metà invece si direbbe le molecole 1,2,3,4...n/2 sono nella sezione 1 e n/2+1,n/2+2...n sono nella sezione 2. un ciclo reversibile termodinamico può essere associto alla diminuzione di informazioni; nel esempio di prima se quella singola molecola fosse passata alla sezione 2 le informazioni sarebero diminuite e pure l'entropia, ma ciò è talmente raro da poter essere definito impossibile.

(I prossimi argomenti ad esclusione del terzo principio e di gibs sono già stati affrontati sul libro ma li ripeto da youmath con le nuove nozioni)

Terzo principio della termodinamica

Il quarto principio enunciato (ho tralasciato il principio 0 che semplicemente dice che se due corpi A e B sono singolarmente in equilibrio termico con un terzo corpo C, allora A e B sono in equilibrio termico tra loro quando vengono messi in contatto termico) dice: in una trasformazione reversibile la variazione di entropia tende a zero al tendere a zero della temperatura assoluta. Dall'equazione di Boltzmann otteniamo che i microstati possibili sono solo 1, inoltre un'implicazione del terzo principio è l'impossibilità di raggiungere lo zero assoluto, ossia la temperatura di 0 K. Se ci muoviamo da uno stato a un altro seguendo una trasformazione isoterma reversibile, scambiamo una certa quantità di calore mantenendo la temperatura costante. Per la definizione di variazione di entropia, il calore scambiato è dato da:

$$Q = T\Delta S$$

Il terzo principio ci dice che al tendere della temperatura assoluta a zero, anche la variazione di entropia ΔS tende a zero. Dalla precedente formula segue che anche il calore scambiato deve tende a zero. Ciò significa che, quando ci avviciniamo allo temperatura di zero kelvin, diventa sempre più difficile sottrarre altro calore per abbassare ulteriormente la temperatura. Risulta così impossibile raggiungere effettivamente la temperatura di 0 K.

Espansione libera di un gas

come già detto nell'espansione libera di un gas e nell'equazione di boltzmann un gas in una sezione di un recipiente se lasciato libero di espandere tende alla soluzione più probabile, questa trasformazione è adiabatica e isotermica (pV=k $\Delta U = 0$ W=0 Q=0). È strano che entrambe le condizioni di isotermia e adiabaticità possano coesistere, e in effetti ciò è impossibile per una trasformazione reversibile e questa è irreversibile. Ciò corrisponde ad un aumento dell'entropia di $\Delta S = nRln(\frac{V_B}{V_A})$ e dell'energia inutilizzata pari all'lavoro necessario per riportare il gas nella prima sezione (che coincidono).

Energia libera di Gibbs

L'energia libera di Gibbs è una funzione di stato data dalla differenza tra l'entalpia e il prodotto tra temperatura ed entropia. Tale grandezza permette di studiare la spontaneità delle reazioni chimiche, che corrisponde a una diminuzione di energia libera. L'energia libera di Gibbs G viene definita mediante la seguente formula:

$$G = H - TS$$

dove con H indichiamo l'entalpia, con T la temperatura espressa in kelvin e con S l'entropia. L'energia libera di Gibbs è di grande interesse nell'ambito della Chimica in merito alla spontaneità delle reazioni. Infatti, se ci troviamo in condizioni di pressione e temperatura costanti, possiamo scrivere la variazione di energia libera nella forma

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S$$

vale un importante risultato teorico: una reazione chimica avviene spontaneamente se e solo se l'energia libera diminuisce e procede in modo spontaneo nel verso in cui l'energia libera di Gibbs diminuisce. Come in Meccanica i sistemi evolvono verso stati di energia potenziale minima; analogamente, le reazioni evolvono in modo spontaneo verso stati di energia libera di Gibbs minima, corrispondenti agli stati di equilibrio ($\Delta G = 0$).