CAPITOLO 7

LE DERIVATE → $y = f(x)$ la derivata di f(x) **sarà** $y^I = f^I(x)$

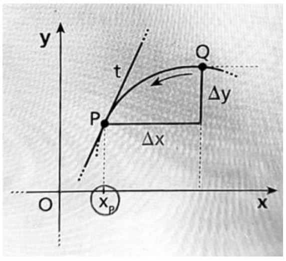
Definizione:

- La derivata di una funzione è il limite, se esiste ed è finito, per h che tende a 0 del rapporto incrementale.

$$f^I(x) = \lim_{h \to 0} \frac{Dy}{Dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Significato geometrico:

- Il significato geometrico della derivata è il coefficiente angolare della retta tangente



Perché calcoliamo le derivate?

- Conoscere l'andamento dei coefficienti angolari di una funzione ci aiuta. A capire dove la funzione è crescente e dove è decrescente. Inoltre ci consente di stabilire i punti di massimo e minimo della funzione che stiamo studiando.

Come le calcoliamo:

- Avendo f(*x*) derivabile ∀x ∈ A allora diremo che è derivabile in A e scriveremo $y = f^I(x_0)$ e andremo a chiamarla derivata prima.

Derivata destra e sinistra, punto angoloso, cuspidi e flessi a tangente verticale

- Possiamo calcolarci i **punti di non derivabilità**, per farlo ci servirà calcolarci la derivata destra e sinistra.

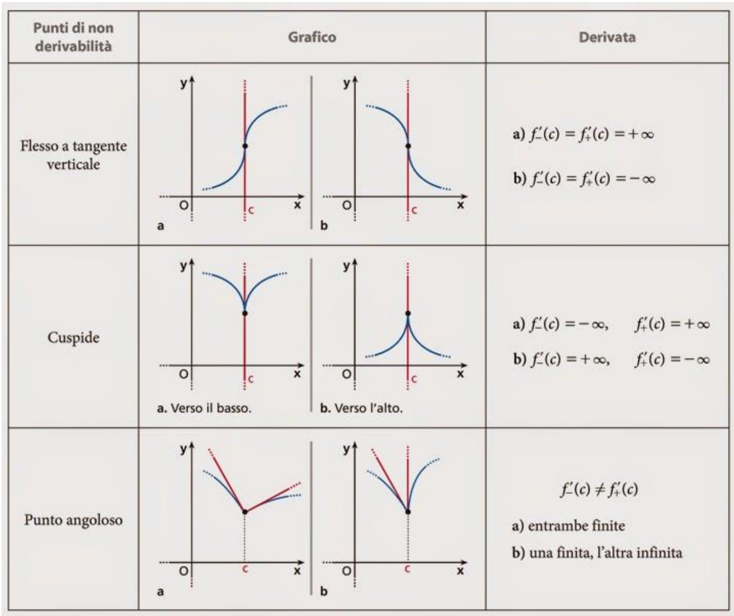
$$f'_+(x_0) := \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ → derivata destra

$$f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ → derivata sinistra

- Esistono 3 tipi di punti di non derivabilità

- **Punto angoloso** → se i due limiti sono entrambi finiti ma assumono valori diversi
- **Cuspide** → se i due limiti sono entrambi infiniti, in particolar modo se sono infiniti di segno opposto (cioè uno + ∞ e l'altro - ∞*)*

- **Flesso a tangente verticale** → se i due limiti sono infiniti dello stesso segno (cioè entrambi + ∞ o entrambi - ∞*)*



Punti di non derivabilità	Grafico	Derivata
Flesso a tangente verticale	a b	a) $f'_-(c) = f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = f'_+(c) = -\infty$
Cuspide	a. Verso il basso. b. Verso l'alto.	a) $f'_-(c) = -\infty, \quad f'_+(c) = +\infty$ b) $f'_-(c) = +\infty, \quad f'_+(c) = -\infty$
Punto angoloso	a b	$f'_-(c) \neq f'_+(c)$ a) entrambe finite b) una finita, l'altra infinita

<u>Proprietà elementari della derivata</u>

- $(f\,' \circ g\,')\,(x_0) = f\,'(\,g\,(x_0))\;g\,'\,(x_0)$ → derivata di una funzione composta

- $(f^{\,-1})\,'\,(y_0) = \frac{1}{f\,'\,(x_0)}$ $\quad dove\ y_0 = f\,(x_0)$ → derivata della funzione inversa

<u>Derivate delle funzioni elementari</u>

Chiamiamo *f(x)* = *y* e $f^{I}(x_0) = y^{I}$

FUNZIONI	DERIVATE
$y = K$ *dove k è una costante*	$y^{I} = 0$
$y = x^{n}$	$y^{I} = n\;(per)\;x^{n-1}$
$y = e^{x}$	$y^{I} = e^{x}$
$y = a^{x}$	$y^{I} = a^{x}\;(per)\;ln\;a$

$y = ln\, x$	$y^I = \frac{1}{x}$
$y = log_a\, x$	$y^I = \frac{1}{x\, ln\, a}$
$y = \sqrt{x}$	$y^I = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y^I = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = sin\, x$	$y^I = cos\, x$
$y = cos\, x$	$y^I = -\, sin\, x$
$y = tan\, x$	$y^I = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = cot\, x$	$y^I = -\frac{1}{sin^2\, x}$
$y = arcsin\, x$	$y^I = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = arccos\, x$	$y^I = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$
$y = arctan\, x$	$y^I = \frac{1}{1 + x^2}$
$y = arccot\, x$	$y^I = -\frac{1}{1 + x^2}$

Derivate successive

- Possiamo considerare *f '* come una semplice funzione da derivare (nuovamente) e si indica con il simbolo f '' e verrà chiamata derivata seconda.

$$\boldsymbol{f''(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}}$$

- Possiamo anche calcolarci la derivata n-esima di f in x, o derivata di ordine n + 1 in x, e si scrive…

$$\boldsymbol{f^{(n+1)}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)}{h}}$$