COME POSSO STIMARE UNA SOMMA POLINOMIALE?

-BISOGNA TROVARE UNA FORMULA CHIUSA CHE CHIAMEREMO g(x) TALE CHE IL DEG g(x) SIA MINORE UGUALE AL GRADO DI f(x) +1

COME POSSO STIMARE UNA SOMMA NON POLINOMIALE?

-DISTINGUERE SE MONOTONA O CONTINUA, CRESCENTE O DECRESCENTE,

SE CRESCENTE: $\int_a^n f(x) + f(a) \leq \sum_a^n \leq f(n) + \int_a^n f(x) + f(a)$

SE DECRESCENTE: $\int_a^n f(x) + f(a) \geq \sum_a^n \geq f(n) + \int_a^n f(x) + f(a)$

RISOLVERE L'INTEGRALE E POI DIVIDERE PER IL TERMINE CHE TENDE A +INFINITO IL Più VELOCEMENTE(=1) f(x) e g(x) asintoticamente equivalenti

COS'è UNA CLASSE DI RESTO?

Una classe di resto di $[a]_n$ è un insieme di numeri interi tali che divisi per "n" danno resto "a"

COS'è IL PRODOTTO CARTESIANO DI DUE INSIEMI

Il prodotto cartesiano di due insiemi "A" e "B" è per definizione un insieme i cui elementi sono della forma (a,b) dove a appartiene ad "A" e "b" appartiene a "B". In altri termini, il prodotto cartesiano di due insiemi è l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate di elementi dei due insiemi.

SIGNIFICATO OMEGA GRANDE Ω

Si dice che "f" è un omega di "g" se esiste "c" appartenente ai reali maggiori di 0 tale che g(n) ≤ di c*f(n) similmente si dice che "f" è Ω(g) se e solo se g=O(f)

COSA VUOL DIRE CHE DUE NUMERI SONO CONGRUENTI MODULO N

Applicabile solo a due numeri interi positivi.

2 interi "a,b" sono detti congruenti |n| se "a-b" è divisibile per "n" oppure se "a" e "b" divisi per "n" danno lo stesso resto. La relazione di congruenza è riflessiva simmetrica e transitiva pertanto una relazione di equivalenza.

SE HO DUE INSIEMI FINITI COSA VUOL DIRE CHE HANNO LA STESSA Cardinalità?

Quando c'è una funzione biunivoca che va dal primo al secondo insieme(se esistente)

COS'è UNA SERIE GEOMETRICA?

Una serie necessaria a calcolare un'esponenziale nella quale varia l'esponente e non la base

La formula per calcolarla è:

$\sum_n^\infty x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$

PRINCIPIO E TEOREMA DEL BUON ORDINAMENTO (WOP) well ordering principle

Ogni insieme di numeri naturali non vuoto contiene un numero che è più piccolo di tutti gli altri in altre parole ammette un minimo.

IDENTITà DI BEIZOUT

Afferma che se "a" e "b" sono interi il loro MCD è "c" allora esistono due interi "x" e "y". Tali che ax+by=c tali coppie di numeri x,y possono essere determinate con l'algoritmo esteso di Euclide .

TEOREMA FONDAMENTALE ARITMETICA

Ogni numero naturale >1 o è un numero primo o si può scrivere come prodotti di numeri primi.

TEOREMA DI FERMAT-EULERO

K ϕ di n sta in relazione con 1 e k ϕ n puo essere k pure Sia n un numero intero tale che n>1. Se a è un numero intero tale che a e n siano coprimi, allora $a^{\phi(n)} \equiv 1$ (mod n).

COS'è UN PREDICATO

Una proposizione il cui valore di verità o falsità dipende da una variabile e si indica con p(x)

COSA VUOL DIRE COLORARE UN GRAFO CON K COLORI

Assegnare ad ogni vertice un numero tale che il suo numero è diverso dai vertici collegati ad esso.

DIFFERENZA GRAFO ← → GRAFO DIRETTO

Il grafo diretto è un grafo orientato, cioè gli spigoli(lati) hanno una direzione.

COSA VUOL DIRE CHE DUE GRAFI SONO ISOMORFI

Che hanno lo stesso ordine e la stessa dimensione questo significa che devono avere lo stesso numero di vertici e di archi e anche le stesse proprietà.

$\boldsymbol{x^{30}}$ **<ln(x)** falso

DUE FUNZIONI F E G CHE VANNO DAI REALI POSITIVI AGLI INTERI POSITIVI SONO ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI?

Se e solo se il limite del loro rapporto di $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

CHE COS'è UN COEFFICIENTE MULTINOMIALE

Il numero di modi nei quali possono essere suddivisi n-oggetti(n1,n2,…) in k(k1,k2,..) gruppi in modo da avere n1 in k1 n2 in k2 etc, etc .

CHE COS'è UN COEFFICIENTE BINOMIALE

È un numero intero derivato dalla formula $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Numero di sottoinsiemi di cardinalità k dell'insieme n.

LEGGE DI DE MORGAN

La prima legge dice che negare la congiunzione di due proposizione equivale a fare la disgiunzione delle due proposizioni negate: non (p e q) equivale a non p o non q

La seconda legge dice che negare la disgiunzione di due proposizione equivale a fare la congiunzione delle due proposizioni negate: <u>non</u> (p o q) equivale a <u>non</u> p e <u>non</u> q

ALGORITMO EUCLIDEO

È un algoritmo per trovare l'MCD tra due numeri. L'algoritmo non richiede la fattorizzazione dei due interi.

Dati due numeri a e b si controlla se b è 0, se lo è, a è l'MCD. Se non lo è, si divide a/b e si assegna ad r il resto della divisione. Se r=0 allora si può terminare affermando che b è l'MCD cercato (a=b*q+r, b=r*q1°+r1°, r=r1°*q2+r2…finché rn=0). La prima fase non si usava poiché lo 0 era inesistente al tempo.

PER DUE INSIEMI FINITI QUANTO VALE LA CARDINALIT DEL PRODOTTO CARTESIANO AxB

a€A e b€B allora |AxB|=|A|*|B|

EQUAZIONE Diofantee

aX + bY=n se e solo se mcd di a e b divide n se si allora le soluzioni sono tutte della forma

x0=x-(b/d)*t, d MCD TRA (a,b) e t costante

y0=y+(a/d)*t d MCD TRA (a,b) e t costante

serve per trovare tutti i possibili x e y € a Z

Cap 1

Prodotto cartesiano
funzioni
Immagine
Controimmagine
Identità
funzione inversa

- Il Prodotto cartesiano: é l'insieme di tutte le possibili coppie ordinate di elementi

$$A \times B = \{ (a,b) : a \in A, b \in B \}$$

es: $[2] \times [3] = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3) \}$

- funzioni: é una legge che ad ogni elemento di A associa una ed un solo elemento di B

$$f : A \to B \qquad f(a) = b$$

- Immagine: l'insieme di tutte le ordinate (y) corrispondenti alle ascisse (x)

$$f(X) = \{ f(a) : a \in X \}$$ → ad ogni elemento di X applico f

- Controimmagine: l'insieme di tutti i valori che la funzione assume

$$f^{-1}(y) = \{ a \in A : f(a) \in y \}$$

- Identità: Associa ad un elemento $a \in A$ egli stesso $(Id_A = A \to A)$

$$Id_A(a) = a$$

- funzione inversa: $f^{-1} : B \to A$ (l'inverso di una funzione $f : A \to B$)

$$f^{-1} = \{ (b,a) \in B \times A : (a,b) \in f \} \qquad f(a) = b \qquad f^{-1}(b) = a$$

Cap 1

Leggi di De Morgan
Relazioni
Partizione

- **leggi di De Morgan:**
  - 1) il complementare dell'union di A e B é uguale all'intersezione dei complementari di A e B
    $$(A \cup B)' = A' \cap B'$$
  - 2) il complementare dell'intersezione di A e B é uguale all'unione dei complementari di A e B
    $$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
- **Relazioni**: é un sotto insieme $R \subseteq A \times B$.
  Se $(a,b) \in R$ scriviamo aRb
  - 1) Relazione riflessiva se $(a,a) \in R$
  - 2) Relazione simmetrica se $(a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$
  - 3) Relazione transitiva se $(a,b) \in R, (b,c) \in R \rightarrow (a,c) \in R$
    - se una relazione ha 1, 2, 3 si dice di equivalenza
      - la classe di equivalenza di $a \in A$ é
        $$[a]_R = \{ b \in A : aRb \}$$
- **Una Partizione** modo di rompere l'insieme A in k blocchi
  $$\Pi = \{ B_1, B_2, \dots, B_k \} \quad (k \in P)$$
  - l'insieme Π deve soddisfare le seguenti proprietà:
    1) $B_i \subseteq A \quad \forall i = 1, \dots, k$
    2) $B \cup \dots \cup B_k = A$
    3) $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall\ 1 \leq i, j \leq k \quad i \neq j$

Cap 2

Proposizione
Negazione
Congiunzione
Disgiunzione
Disgiunzione esclusiva
Implicazione

- **Proposizione**: affermazione che può essere vera oppure falsa
- **Negazione di una Proposizione** ($\neg P$: letto non P)

P	$\neg P$
V	F
F	V

- **Congiunzione di due Proposizioni** ($P \wedge Q$: letto P e Q)

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- **Disgiunzione di due Proposizioni** ($P \vee Q$: letto P o Q)

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Disgiunzione esclusione di due Proposizioni** ($P \dot{\vee} Q$: letto P per o Q)

P	Q	$P \dot{\vee} Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- **Implicazione di due Proposizioni** ($P \to Q$: letto P implica Q, se P allora Q)

P	Q	$P \to Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cap 2

Equivalenza logica
Predicati

- Equivalenza logica di due Proposizioni ($P \leftrightarrow Q$. letto P se e solo se Q)

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- Predicato é una proposizione la cui veritá o falsitá dipende da una (o piú) variabili

$P(x, y, \ldots)$ variabili

Cap 3

Dimostrazione diretta Dimostrazione per assurdo Principio di induzione matematico Principio di induzione completo Principio di buon ordinamento Numeri Primi	- **Dimostrazione diretta**: ragionamento che se A é vera allora B é vera - **Dimostrazione per Assurdo**: Supponiamo che A e $\neg B$ siano vere si deduce da qui una contraddizione - **Principio di induzione matematico**: supponiamo di avere un predicato $P(n)$ $(n \in \mathbb{P})$ · 1 verifico se $P(1)$ é vera · 2 verifico se $P(n) \rightarrow P(n+1)$ é vera Se 1, 2 sono vere $P(n)$ é vera - **Principio di induzione completo**: supponiamo di avere un predicato $P(n)$ $(n \in \mathbb{P})$ · 1 verifico se $P(1)$ é vera · 2 verifico se $(P(1) \wedge P(2) \wedge \dots \wedge P(n)) \rightarrow P(n+1)$ é vera Se 1, 2 sono vere $P(n)$ é vera - **Il principio di buon ordinamento (WOP)**: Ogni insieme di numeri naturali (non vuoto) contiene un numero più piccolo degli altri (ammette un minimo) - il principio di induzione matematica vale se e solo se vale il WOP - **Numeri primi**: si dice che a é primo se $a \geq 2$ e solo se é divisibile per 1 o per se stesso, altrimenti a si dice composto

Cap 3

Numeri Coprimi
Numeri Perfetti
Teorema dei numeri primi
MCD
Algoritmo euclideo

- **Numeri coprimi (o primi tra loro)** l'unico numero che li divide è 1
- **Numero Perfetto** è uguale alla somma dei suoi divisori

$n=6$ $(1+2+3=6)$ perfetto
$n=9$ $(1+3 \neq 9)$ non perfetto

- **Teorema dei numeri primi:**

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\pi(n)}{\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)} = 1$$

$\pi(n)$ → insieme di tutti i numeri primi più piccoli di n

$\pi(9) = \{2, 3, 5, 7\} = 4$

- **MCD:** massimo comune divisore tra a e b

$$MCD(a,b) = \max\{c \in \mathbb{P} : c|a \text{ e } c|b\}$$

- **Algoritmo Euclideo** ci serve per calcolare l'MCD tra due numeri (a,b) con $a>b$

$$a = b \cdot q + r \qquad 0 \leq r < b$$

se $r=0$ l'MCD$(a,b) = b$
se $r>0$ $\exists\, r_1, q_1 \in \mathbb{Z} : b = r \cdot q_1 + r_1$ $\quad 0 \leq r_1 < r$
se $r_1 = 0$ l'MCD$(a,b) = r$
se $r_1 > 0$ $\exists\, r_2, q_2 \in \mathbb{Z} : r = r_1 \cdot q_2 + r_2$ $\quad 0 \leq r_2 < r_1$
se $r_2 = 0$ l'MCD$(a,b) = r_1$
se $r_2 > 0$ $\exists\, r_3, q_3 \in \mathbb{Z} : r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$ $\quad 0 \leq r_3 < r_2$

$$0 \leq r_k \ldots \leq r_3 \leq r_2 \leq r_1 \leq r < b$$

$\exists$ sempre un $r_k = 0 \Rightarrow MCD(a,b) = r_{k-1}$

$a = 624$ $b = 162$

$a = b \cdot q + r$

$624 = 162 \cdot 3 + 138 \rightarrow r > 0$
$162 = 138 \cdot 1 + 24 \rightarrow r_1 > 0$
$138 = 24 \cdot 5 + 18 \rightarrow r_2 > 0$
$24 = 18 \cdot 1 + 6 \rightarrow r_3 > 0$
$18 = 6 \cdot 3 + 0 \rightarrow r_4 = 0$

$MCD(624, 162) = r_{4-1} = 6$

Cap 3

Identità di Bezout	- **Identità di Bezout**: afferma che dato l'MCD(a,b) esistono due interi x, y per i quali vale $$MCD(a,b) = ax+by$$
Teorema fondamentale dell'aritmetica	- **Teorema fondamentale dell'aritmetica**: ogni numero naturale $(n \geq 2)$ o è un numero primo o si può scrivere come prodotto di primi
Equazione Diofantee lineare	- **Equazione Diofantee lineare**: Serve per trovare le soluzioni delle equazioni lineari $$ax+by=n \Leftrightarrow MCD(a,b) \mid n$$ se la condizione e' verificata le soluzioni sono nella forma $$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{b}{MCD(a,b)}\, t \\ y = y_0 + \dfrac{a}{MCD(a,b)}\, t \end{cases}$$ se conosco 2 soluzioni posso calcolarle tutte $t \in \mathbb{Z}$
Classi di resto	- **Classi di resto**: $[a]_n$ è un insieme di numeri interi che divisi per n danno resto a
Inversa moltiplicativa	- **Inversa moltiplicativa**: di $[a]_n$ è un'altra classe $[b]_n$ $$[a]_n \cdot [b]_n = [1]_n$$ - Se l'$MCD(a,n) = 1$ esiste una unica inversa moltiplicativa di $[a]_n$

Bezout

$6 = 24 - (18 \cdot 1)$

$6 = 24 - (138 - (24 \cdot 5)) = 6 \cdot (24) - 138$

$6 = (6)(162 - 138) - 138$

$6 = (6)(162) - (7)(138)$

$6 = (6)(162) - (7)[624 - (162 \cdot 3)]$

$6 = (6)(162) - (7)(624) + (21)(162)$

$6 = (27)(162) + (-7)(624)$

$$\begin{array}{ccccc} 6 & (27) & (162) & (-7) & (624) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ MCD & y & b & a & a \end{array}$$

Cap 3

Relazione di congruenza
La funzione di eulero
Teorema di Eulero
Piccolo teorema di Fermat
Codice RSA

- Relazione di Congruenza: $a \equiv b$ (modulo n) é possibile solo se $n \mid (b-a)$
  - la relazione di congruenza é di equivalenza
- La funzione di eulero: ci fornisce il numero di interi più piccoli di n coprimi con esso

$$\Phi(n) = |\{1 \leq i < n : (i,n) = 1\}| =$$
$$\Phi(9) = |\{1,2,4,5,6,7,8\}| = 6$$

  - $\Phi(p \cdot q) = (p-1)\cdot(q-1)$ (se p e q sono primi)
    - in modo generale $n = p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n}$

$$\Phi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$$

es: $n = 100 \Rightarrow 2^2 \cdot 5^2$

$$\Phi(n) = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 40$$

- Teorema eulero: sia $n \in \mathbb{P}$ e $k \in \mathbb{Z}$ e $MCD(k,n) = 1$

$$K^{\Phi(n)} \equiv 1 \ (\text{modulo } n) \rightarrow n \mid 1 - k^{\Phi(n)}$$

- Piccolo teorema di Fermat: siano $k, p \in \mathbb{N}$, p primo, $p \nmid k$

$$K^{p-1} \equiv 1 \ (\text{modulo } p)$$

- Il codice RSA: Spedire un messaggio da A a B in modo che solo B possa leggerlo (DECRIPTARLO)
  - Preparazione: B sceglie 2 primi $p, q > 0$ $p \neq q$ e calcola $n = p \cdot q$, poi sceglie una $e \in \mathbb{P}$ tc $MCD(e, \underbrace{(p-1)(q-1)}_{\Phi(p \cdot q)}) = 1$, e calcola l'inversa moltiplicativa di $[e]_{(p-1)(q-1)}$ ossia $[d]_{(p-1)(q-1)}$, poi pubblica e, n e tiene segreto p, q, d

- Codifica: A prende un messaggio $m \in \mathbb{P}$, $1 \le m \le n$ t.c $MCD(m,n) = 1$, poi calcola $[\tilde{m}]_n = [m^e]_n$ e spedisce $\tilde{m}$
- Decodifica: B riceve $\tilde{m}$ e decodifica calcolando $[\tilde{m}^d]_n$

- **Numeri in base diversa:** dati 2 numeri $n, b \in \mathbb{P}$

$$n = b_k \cdot b^k + b_{k-1} b^{k-1} + \dots + b_1 b^1 + b_0$$
$$k = \max \{ i \in \mathbb{N} : b^i \le n \}$$

$n = 1000 \qquad b = 8$

$1000 = 8^3 \cdot 1 + 488$

$488 = 8^2 \cdot 7 + 40$

$40 = 8 \cdot 5 + 0$

$8 \quad 8^2 \quad 8^3 \quad 8^4$

$8 \quad 64 \quad 512 \quad \cancel{4096} \qquad k = 3$

$1000 = 8^3 (1) + 8^2 \cdot (7) + 8^1 (5) + 8^0 (0)$

1 7 5 0

Cap 4

La Cardinalità
Problema fondamentale della c.E
Proprietà di base
Coefficiente binomiale

- **La cardinalità** di un insieme è il numero di elementi dell'insieme

$$|A| = |\{1,2,3,4\}| = 4$$

- **Problema fondamentale della combinatoria enumerativa**
Data una sequenza $A_0, A_1 \dots$ di insiemi finiti calcolare $\{|A_i|\}_{i=0,1..}$ (successione delle cardinalità)
Cosa significa calcolare?
1) una formula (per esempio fisso a dimostrare $|A_n| = \sum_{i=0}^{n} 2^i$)
2) una ricorsione (per esempio fisso a dimostrare $|A_n| = |A_{n-1}| + |A_{n-2}|$)
3) una funzione generatrice (una funzione con infinite derivate e lo sviluppo in serie di Taylor è proprio la serie che ci interessa)
- **Proprietà di base** di due insiemi A e B e una $f: A \to B$ con f biunivoca

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$
$$|A^B| = |A|^{|B|} \quad (A^B = \{f: B \to A\})$$
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$ ⇒ Principio di inclusione esclusione

- **Coefficiente Binomiale**: numero di sottoinsiemi di n di cardinalità K

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- $\left|\binom{[n]}{k}\right| = \binom{n}{k}$

Cap 4

Composizioni
Coefficienti multimediali
Permutazione
Ruffini

- **Composizione** di n in k parti: è una sequenza $(a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}^k)$ che sommata da n

$$n = a_1 + a_2 + \dots + a_k$$

es: $n=5$ $k=3$ $(1,1,3)$

- **Coefficienti multimediali**: è il modo in cui posso dividere n oggetti in k gruppi in modo da avere n_1 in k_1 n_2 in k_2 ...

es: $n=4$ $k=3$ $(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 1) \Rightarrow \binom{4}{1,2,1}$

- **Permutazione** è un ordinamento lineare degli elementi di un insieme

es: $M = \{1^2, 2^2, 3^1\} = \{1, 2, 2, 3\}$

$S(M) = \{2213, 2231, 2123, 2321, 2132, 2312, 1232, 3212, 1322, 3122, 1223, 3212\}$

- **Ruffini**: preso un polinomio $(P(x))$ e un numero complesso $\alpha \in \mathbb{C}$

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha) \mid P(x)$$

alla posizione 8 metto 1

1 2 3 4 5 6 7 8

8 1 3 5 7 2 4 6

2 6 3 7 4 8 5 1

Cap 5

Somma Geometrica
Somma polinomiale
Somma non polinomiale
o-piccolo

immediati		immediati generalizzati	
$\int k\,dx = kx + c$	dove k è una costante	un integrale generalizzato si ottiene da un integrale immediato sostituendo x con $f(x)$ e dx con $f'(x)dx$	
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$n \neq -1$	$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$	$n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$		$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln\lvert f(x)\rvert + c$	
$\int a^x dx = a^x \lg_a e + c$		$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = a^{f(x)} \lg_a e + c$	
$\int e^x dx = e^x + c$		$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$	
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$		$\int \operatorname{sen}[f(x)] \cdot f'(x)\,dx = -\cos f(x) + c$	
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$		$\int \cos[f(x)]\, f'(x)\,dx = \operatorname{sen} f(x) + c$	
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + c$		$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]} dx = \operatorname{tg} f(x) + c$	
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + c$		$\int \frac{f'(x)}{\operatorname{sen}^2[f(x)]} dx = -\operatorname{cotg} f(x) + c$	
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} x + c$		$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}} dx = \operatorname{arcsen} f(x) + c$	
$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$		$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2} dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$	
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{x}{\lvert a\rvert} + c$		$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}} dx = \operatorname{arcsen} \frac{f(x)}{\lvert a\rvert} + c$	
$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c$		$\int \frac{f'(x)}{a^2+[f(x)]^2} dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} \frac{f(x)}{a} + c$	

- **Somma Geometrica**: è una serie che serve per calcolare un esponenziale nel quale varia l'esponente

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

- **Somma polinomiale** per calcolarla bisogna trovare una formula chiusa $(g(x))$ tale che il $DEG(g(x)) \leq DEG(f(x)+1)$ (DEG indica il massimo grado delle potenze di un polinomio)

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) = g(n)$$

- **Somma non polinomiale**: la funzione deve essere continua e monotona:

1) crescente
$$f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx$$

2) decrescente
$$f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{i=1}^{n} f(i) \geq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx$$

poi utilizziamo il teorema del confronto per stimare quanto vale $\sum_{i=1}^{n} f(i)$

- **Asintoticamente equivalenti**: due funzioni f e g si dicono asintoticamente equivalenti se:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

- **o-piccolo**: prese due funzioni f e g f è asintoticamente equivalente di g $(f = o(g))$ se:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = an^3 + bn^2 + cn + d$$

$DEG\ g(n) \leq DEG\ i^2 + 1$

$DEG\ g(n) \leq$

$$\begin{cases} 0^2 = a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d & \text{se } n=0 \\ 0^2 + 1 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1) + d & \text{se } n=1 \\ 0^2 + 1^2 + 2^2 = a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d & \text{se } n=2 \\ 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = a(3)^3 + b(3)^2 + c(3) + d & \text{se } n=3 \end{cases}$$

Cap 5

O-grande
Omega

- **O-grande**: prese due funzioni f e g si dice che $f = O(g)$ se $\exists\, c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $N \in \mathbb{P}$ t.c:
$$|f(n)| \leq c\, g(n) \quad n \geq N$$
- **Omega**: prese due funzioni f e g si diche che $f = \Omega(g)$ se $\exists\, c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $N \in R$ t.c
$$f(n) \geq c \cdot |g(n)| \quad n \geq N$$
  - il concetto di O-grande e Omega sono collegati
$$f = O(g) \leftrightarrow g = \Omega(f)$$

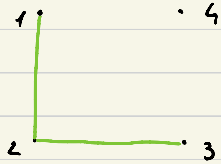
Cap 6

Grafo
Cammino
Sentiero
Cammino chiuso
Ciclo

Grafo: è una coppia $G=(V,E)$ dove V è l'insieme dei vertici e E $\left(E \subseteq \binom{V}{2}\right)$ insieme dei lati di G

Cammino: è una sequenza $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ che sono collegati in maniera continua (i vertici possono ripetersi)

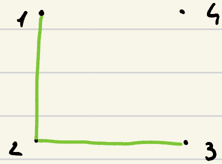
$([4], \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,2\}\})$



- un **Cammino chiuso** è un cammino nel quale $V_0 = V_k$
  - un **Ciclo** è un cammino chiuso t.c $V_0, \dots V_{k-1}$ è un sentiero

- **Sentiero** : è un particolare cammino nel quale non si ripetono i vertici

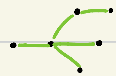
$([4], \{\{1,2\}, \{2,3\}\})$



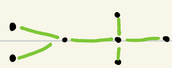
Cap 6

Grafo vuoto
Grafo completo
Grafo connesso
Grafo a foresta
Grafo ad albero
Grafo indipendente
Grado del Grafo

- **Grafo voto**: grafo che non ha nessun lato
$G = ([n], \emptyset)$
- **Grafo completo**: grafo che ha tutti i lati possibili
$G = ([n], \binom{n}{2})$
- **Grafo connesso**: esiste almeno un cammino tra qualsiasi coppia di vertici
- **Grafo a foresta** tutti i vertici sono collegati tra loro ma non ci sono cicli



- **Grafo ad albero**: tipo particolare di grafo aciclico (o foresta) e connesso

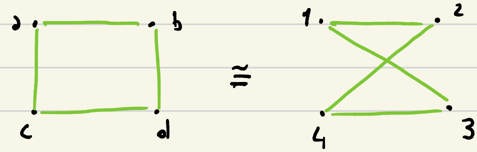


- **Grafo indipendente** presi due vertici non esiste un lato che li collega
- **Grafo completo**: esistono tutti i lati che collegano tutti i vertici
- **il Grado** di un grafo è il numero di lati che partono dal vertice

Cap 6

Grafi isomorfi
Accoppiamento
Grafo bipartito

- **Grafi isomorfi** sono due grafi che hanno la stessa struttura



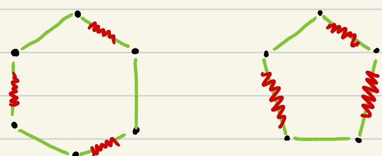
$f(a) = 1 \quad f(b) = 2$

$f(c) = 3 \quad f(d) = 4$

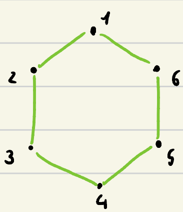
a collegato con b c

1 collegato con 2 3

- **Accoppiamento** il sotto insieme di E tc non ci sono lati che hanno vertici in comune

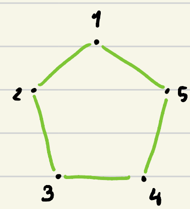


- **Grafo bipartito**: esiste se esistono 2 sottoinsiemi di V $(V_1 \subseteq V, V_2 \subseteq V)$ e V_1 e V_2 sono indipendenti $(V_1 \uplus V_2 = V)$ ($\uplus$ = unione piena intersezione vuota)



$V_1 = \{2, 6, 4\}$

$V_2 = \{3, 5\ 1\}$

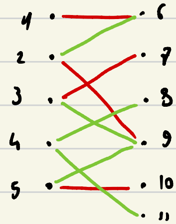


mai bipartito

Cap 6

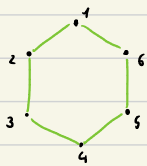
Accoppiamento V_1 in V_2
Grafo regolare
Colorazione
numero cromatico

- **Accoppiamento di V_1 in V_2**: ogni vertice di V_1 è accoppiabile a qualche vertice di V_2



- **Grafo regolare**: tutti i vertici hanno stesso grado

$$d(x) = r \qquad r \in \mathbb{P}$$

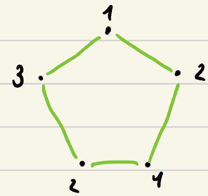


- se un grafo è regolare l'accoppiamento è possibile anche da V_2 in V_1

- **Colorazione** è un processo che consiste nell'assegnare hai vertici di un grafo un colore in modo tale che 2 vertici adiacenti non abbiano stesso colore
  - il **numero cromatico** $\chi(G)$ è il minimo numero di colori nei quali è possibile colorare il grafo

Cap 6

Grafo diretto
Cammino diretto
Sentiero diretto
Cammino diretto chiuso
ciclo diretto

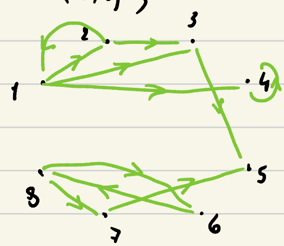


$\chi(G) = 3$

- $\chi(G) \leq \max_{v \in V} \{ d(v) \} + 1$

- **Grafo diretto** è una coppia $D = (V, A)$
  V si dice insieme dei vertici e A $(A \subseteq V \times V)$ insieme dei lati diretti

$D = [8]$, $A = \{ (1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (3,5), (2,1), (4,4), (6,8), (8,7), (8,6), (7,5) \}$



- **Cammino diretto, sentiero diretto, cammino diretto chiuso e ciclo diretto** uguali ai grafi

Cap 6

y é raggiungibile da x
comparabili, incomparabili
catena
anticatena
grado interno
grado esterno
Reti di comunicazione
Problema di smistamento
smistamento
	- dati due vertici x, y si dice che y é raggiungibile da x se esiste un cammino diretto che li collega
	  - x e y si dicono comparabili se y e raggiungibile da x o viceversa, altrimenti si dicono incomparabili
	- se $S \subseteq V$ si dice che é una catena se dati due $x, y \in S$ sono compatibili
	  - se x, y sono incompatibili si dice anticatena
	- grado interno é il numero di lati che puntano verso un vertice
	$$d_-(v) = \lvert \{ u \in V : (u, v) \in A \} \rvert$$
	- grado esterno é il numero di lati uscenti da un vertice
	$$d_+(v) = \lvert \{ u \in V : (v, u) \in A \} \rvert$$
	- Rete di comunicazione é una terna (R, I, O) R é un grafo diretto, $I \subseteq V$, $O \subseteq V$ e $I \cap O = \emptyset$ $\lvert I \rvert = \lvert O \rvert = N$, I nodi di input e O nodi di output
	- Problema di smistamento é una permutazione $\pi \in S_N$
	  - uno smistamento é il processo di trovare un un sentiero diretto tra due vertici in modo tale che sia il piú efficiente possibile

Cap 6

latenza
congestione
distanza
Diametro
congestione di RIO
la grandezza

- la latenza dello smistamento é la lunghezza del cammino più lungo

$$\max \{ \ell(P_1), \dots, \ell(P_N) \}$$

- la congestione é il massimo numero di cammini che passano per un vertice

$$c(P_1 \dots P_N) = \max_{x \in V} \{ | \{ J \in [N] : x \in P_J \} | \}$$

- la distanza é il minimo sentiero diretto che collega due vertici x, y

$$d(x,y) = \min \{ \ell(P) : P \text{ é sentiero diretto da } x \text{ a } y \}$$

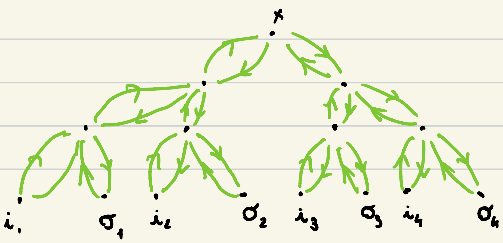
- Diametro della rete di comunicazione e la max distanza dai nodi di input a quelli di output

$$\max \{ d(i_J, o_K) : J, K \in [N] \}$$

- la congestione di (R, I, O) é data dal caso peggiore di tutte le minime congestioni

$$\max_{\pi \in S_N} \left(\min_{(P_1, \dots P_N)} \left(c(P_1, \dots P_N) \right) \right)$$

- la grandezza di $v \in V$ é $(d_+(v), d_-(v))$



DIAMETRO $= d(i_1, \sigma_4) = 6$

$\pi = 4321$ sia $(P_1, \dots P_4)$ uno smistamento

P_1 va da i_1 a σ_4, P_2 va da i_2 a σ_3

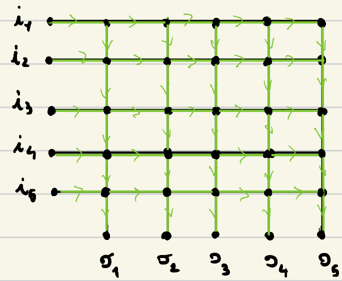
P_3 va da i_3 a σ_2, P_4 va da i_4 a σ_1

$x \in P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4 = c(P_1, \dots, P_4) = 4$

la congestione della rete é 4

Cap 6

- La griglia G_N ($\Rightarrow |I| = N$) ha $N^2 + 2N$ vertici e ha congestione 2

$G_5 \Rightarrow$ 

- La farfalla