Matrici

Def.
Una matrice $m \times n$ è una tabella con m righe e n colonne le cui entrate sono numeri reali

Es.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \pi & 5 \\ -2 & 3 & \sqrt{7} \end{pmatrix}$$ matrice 2×3

I colonna

II riga

L'entrata di posto di $(2,3)$ è $\sqrt{7}$,
l'entrata di posto (i,j) corrisponde all'elemento della matrice che sta sulla i-esima riga e j-esima colonna

Operazioni con le matrici

$Mat(m \times n)$ = matrici $m \times n$ (ad entrate $\mathbb{R}$)

$Mat(1 \times 1) = \mathbb{R}$

Somma tra matrici

$A, B \in Mat(m \times n)$ stesso numero di righe e stesso numero di colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

entrata $(2,3)$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B \underbrace{:=}_{\text{definizione}} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

OSS. $A, B \in Mat(m \times n)$ $C \in Mat(m \times n)$

- $A+B = B+A$ commutativa
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ associativa

- $\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ matrice nulla

$A + \underline{0} = A$

- Data $A \in Mat(m \times n)$ esiste (unica) una matrice $-A$ tale che

$$A + (-A) = \underline{0}$$

$-A$ si dice la matrice opposta o inversa di A

se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$ allora $-A := \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{m1} & & -a_{mn} \end{pmatrix}$

Prodotto per uno scalare

$A \in Mat(m \times n)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$ ("scalare")

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot A := \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m \times n)$$

Es. $\lambda = 2$ $\quad A = \begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to 2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot \sqrt{2} & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix}$

$$\to \begin{pmatrix} 8 & 2\sqrt{2} & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \in Mat(m \times n)$ $\quad \lambda = -1$

$(-1) \cdot A = -A$

Es. $2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$-\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$0 \cdot A = \underline{0}$

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ $\quad$ proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di matrici

DIM

$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\lambda(A+B) = \lambda \begin{pmatrix} \alpha + a & \beta + b \\ \gamma + e & \sigma + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(\alpha + a) & \lambda(\beta + b) \\ \lambda(\gamma + e) & \lambda(\sigma + d) \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{distributiva}}{=} \begin{pmatrix} \lambda\alpha + \lambda a & \lambda\beta + \lambda b \\ \lambda\gamma + \lambda e & \lambda\sigma + \lambda d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\sigma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda e & \lambda d \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \sigma \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ e & d \end{pmatrix} = \lambda A + \lambda B$$

Prodotto righe per colonne

$A \in Mat(m \times k)$ m righe $\underline{k \text{ colonne}}$

$B \in Mat(k \times n)$ $\underline{k \text{ righe}}$ n colonne

Definisco $A \cdot B \in Mat(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mk} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & & b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11} \; a_{12} \; \cdots \; a_{1k}} \\ \vdots \\ a_{m1} \; a_{m2} \; \cdots \; a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{k1} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \\ \\ \cdots \end{matrix} & \begin{matrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{kn} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1k} \cdot b_{k1} & \cdots & a_{11} b_{1n} + \cdots + a_{1k} b_{kn} \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix}$$

Es. 2×3 3×2 → 2×2

$$\begin{pmatrix} \boxed{1 & -1 & 2} \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

L'elemento di $A\cdot B$ di posto (i,j)
si ottiene "moltiplicando" la i-ma riga
di A per la j-ma colonna di B

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+t \\ y-z+t \end{pmatrix}$$

Sistema Lineare

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y + z \\ x - z \end{pmatrix}$$

Def.
Una matrice $m \times 1$ si dice
un *vettore colonna*

Dato un sistema lineare

$$(*) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Dove $x_1 \to x_n$ sono le incognite

$b_1 \to b_m$ i termini noti

e a_{ij} sono i coefficienti

Definiamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si dice matrice incompleta
del sistema lineare (*)

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Matrice completa del sistema lineare

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ è equivalente a (*)

Es.

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

La matrice incompleta del sistema lineare è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice completa del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$