Logica e Reti Logiche

Esercitazione

Francesco Pasquale

19 marzo 2018

Esercizio 1. Dimostrare per induzione che

1. Per ogni $n \geqslant 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

2. Per ogni $n \geqslant 1$, $n^3 - n$ è divisibile per 3

Esercizio 2. Trovare una formula chiusa per $\sum_{k=1}^{n}(k+3)^2$.

Esercizio 3. Considerate la seguente ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 & = & 1 \\ a_{n+1} & = & 2a_n + 1, \quad \text{per ogni } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Trovare una formula chiusa per a_n e dimostrare per induzione che è corretta.

Esercizio 4. Sia $\{a_n\}$ la successione definita dalla seguente ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 & = & 1 \\ a_1 & = & 2 \\ a_2 & = & 3 \\ a_n & = & a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} \quad \text{per ogni } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $a_n \leqslant 2^n$ per ogni $n \geqslant 0$.

Esercizio 5. Sia $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ la successione dei numeri di Fibonacci,

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{per } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$, per ogni $n \geqslant 1$.

Esercizio 6. Scrivere le tabelle di verità[1] delle seguenti formule:

1. $(p \Rightarrow q) \vee \sim p$
2. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow p)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$
3. $(p \Rightarrow (p \equiv q)) \vee \sim (p \vee q)$
4. $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Esercizio 7. Scrivere come formule proposizionali le frasi seguenti:

1. Condizione sufficiente affinché x sia dispari è che x sia primo e maggiore di 2;
2. Fiorello va al cinema solo se si sta proiettando una commedia;
3. Condizione necessaria e sufficiente perché uno sceicco sia felice è avere vino, donne e canti;
4. Condizione necessaria affinché una successione s sia convergente è che s sia limitata.

Esercizio 8. Per ognuna delle seguenti tabelle di verità, trovare una formula corrispondente

p	q	r	???
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	F

p	q	r	???
T	T	T	F
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	F
F	F	F	F

Esercizio 9. Sia X la formula seguente

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \vee (r \equiv \sim p)$$

Scrivere due formule equivalenti a X, una in forma normale congiuntiva e l'altra in forma normale disgiuntiva.

[1] Ricordiamo le tabelle di verità dei connettivi principali

p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \equiv q$	$p \downarrow q$	$p \mid q$
T	T	F	T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T	T	T

Esercizio 10. Per ognuna delle seguenti formule, dire se è una tautologia, una contraddizione, o una contingenza.

1. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
2. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$
3. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
4. $p \Rightarrow \sim p$
5. $p \equiv \sim p$
6. $(p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv \sim q)$
7. $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
8. $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
9. $(\sim p \vee \sim q) \equiv \sim (p \vee q)$
10. $\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
11. $(p \equiv (p \wedge q)) \equiv (q \equiv (p \vee q))$

Esercizio 11. Ridurre le formule seguenti, che contengono le costanti T (`True`) e F (`False`) a formule che o non contengono né T né F, oppure sono uguali o a T o a F:

1. $((\mathrm{T} \Rightarrow p) \wedge (q \vee \mathrm{F})) \Rightarrow ((q \Rightarrow \mathrm{F}) \vee (r \Rightarrow \mathrm{T}))$
2. $(p \vee \mathrm{T}) \Rightarrow q$
3. $\sim (p \vee \mathrm{T}) \equiv (\mathrm{F} \Rightarrow q)$
4. $(\sim (p \vee \mathrm{F}) \wedge (q \equiv \mathrm{T})) \Rightarrow (r \wedge \mathrm{T})$

Esercizio 12.

1. Definisci il connettivo $\wedge$ in termini dei connettivi $\sim$ e $\Rightarrow$
2. Definisci il connettivo $\equiv$ in termini dei connettivi $\wedge$ e $\Rightarrow$
3. Definisci il connettivo $\vee$ in termini del connettivo $\Rightarrow$
4. Definisci il connettivo $\sim$ in termini del connettivo $\Rightarrow$ e di F

Esercizio 13.

1. Definisci ognuno dei connettivi $\wedge$, $\Rightarrow$, $\equiv$, in termini dei connettivi $\vee$ e $\sim$;
2. Definisci ognuno dei connettivi $\vee$, $\Rightarrow$, $\equiv$, in termini dei connettivi $\wedge$ e $\sim$.

Esercizio 14.

1. Definisci i connettivi $\vee$ e $\sim$ in termini del connettivo $\downarrow$
2. Definisci i connettivi $\wedge$ e $\sim$ in termini del connettivo $|$

Logica e Reti Logiche

Esercitazione

Francesco Pasquale

5 aprile 2018

1 Il metodo dei *tableaux*

Esercizio 1. Usando il metodo dei *tableaux* verificare che le seguenti formule sono tautologie

1. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
2. $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow r)$
3. $((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$
4. $\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim p \wedge \sim q$

Esercizio 2. Usando il metodo dei *tableaux* determinare se le seguenti formule sono tautologie oppure no. Per quelle che non lo sono, esibire un'interpretazione che le rende false

1. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p)) \Rightarrow \sim p$
2. $(((p \vee q) \Rightarrow r) \wedge (p \Rightarrow (q \vee r))) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
3. $((\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)) \Rightarrow (p \vee (q \wedge r))$

Esercizio 3. Usando il metodo dei *tableaux* determinare se le seguenti formule sono contraddizioni oppure no. Per quelle che non lo sono, esibire un'interpretazione che le rende vere

1. $p \Rightarrow \sim p$
2. $((p \wedge q) \vee (\sim q \wedge r)) \wedge \sim(p \vee r)$
3. $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow \sim p)) \Rightarrow p$

2 Forme normali e il metodo *resolution*

Una formula si dice in **forma normale congiuntiva** *(CNF)*[1] se è una congiunzione di *clausole disgiuntive* (dette anche semplicemente *clausole*) $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n$ dove ogni clausola è una disgiunzione di *letterali* $D_i = \ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \cdots \vee \ell_{i,k_i}$ e ogni letterale è una variabile oppure una variabile negata. Per esempio,

$$(p \vee q \vee \sim r) \wedge (\sim p \vee q \vee \sim r)$$

è in forma normale congiuntiva. Data una formula X esiste sempre una formula Y equivalente[2] a X in forma normale congiuntiva.

Esercizio 4. Per ognuna delle formule negli Esercizi 1, 2 e 3, dare una formula equivalente in forma normale congiuntiva.

Esercizio 5. Trovare un metodo che, data una formula X, vi consenta di trovare una formula Y in forma normale congiuntiva equivalente a X.

Resolution. Considerate il seguente metodo che trasforma una formula $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n$ in forma normale congiuntiva in una nuova formula in forma normale congiuntiva (oppure la lascia com'è):

1. Eliminate ogni clausola D_i che contiene sia una variablile x che la sua negata $\sim x$;

2. Per ogni coppia di clausole D_i e D_j in cui una contiene una variabile x e l'altra contiene la sua negata $\sim x$ aggiungete una nuova clausola $Z_{i,j;x}$ con tutti i letterali in D_i e D_j esclusi x e $\sim x$. Per esempio, se $D_i = (p \vee \sim q \vee r)$ e $D_j = (p \vee q \vee \sim s)$, siccome in D_i compare $\sim q$ e in D_j compare q dovete aggiungere la clausola $(p \vee r \vee \sim s)$;[a]

3. Eliminate tutte le clausole D_i, D_j coinvolte nel punto precedente.

[a](Nota bene: questo significa anche che, se per esempio $D_i = (p)$ e $D_j = (\sim p)$, dovete aggiungere una clausola () *vuota*)

Esercizio 6. Sia X una formula in forma normale congiuntiva e sia Y la formula ottenuta da X eseguendo i punti 1, 2 e 3 qui sopra. Dimostrare che X è soddisfacibile[3] se e soltanto se Y è soddisfacibile.

Esercizio 7. Per ognuna delle formule X in forma normale congiuntiva trovate nell'Esercizio 4, costruire la formula X_1 ottenuta applicando i tre punti di *Resolution* a X, poi X_2 ottenuta applicando *Resolution* a X_1 e così via fino a raggiungere una formula X_k che non viene più modificata da *Resolution*. In quali casi arrivate ad ottenere almeno una clausola vuota? Che cosa potete concludere sulla formula X di partenza quando durante queste iterazioni arrivate ad ottenere una formula che contiene una clausola vuota?

[1] *Conjunctive Normal Form*

[2] Ricorda che in logica proposizionale due formule X e Y sono *equivalenti* se hanno la stessa tabella di verità

[3] Ricorda che una formula si dice *soddisfacibile* se esiste almeno una interpretazione che la rende vera

Una formula si dice in **forma normale disgiuntiva** *(DNF)*[4] se è una disgiunzione di *clausole congiuntive* $C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_n$ dove ogni clausola è una congiunzione di *letterali* $C_i = \ell_{i,1} \wedge \ell_{i,2} \wedge \cdots \wedge \ell_{i,k_i}$ e ogni letterale è una variabile oppure una variabile negata. Per esempio,

$$(p \wedge q \wedge {\sim}r) \ \vee \ ({\sim}p \wedge q \wedge {\sim}r)$$

è in forma normale disgiuntiva. Data una formula X esiste sempre una formula Y equivalente a X in forma normale disgiuntiva.

Esercizio 8. Per ognuna delle formule degli Esercizi 1, 2 e 3, dare una formula equivalente in forma normale disgiuntiva.

Esercizio 9. Trovare un metodo che, data una formula X, vi consenta di trovare una formula Y in forma normale disgiuntiva equivalente a X.

Esercizio 10. Riflettere sulla relazione che c'è fra il metodo dei *tableaux* e la forma normale disgiuntiva.

3 Sistemi assiomatici

Sia $\mathcal{A}$ il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

A1 : $(X \wedge Y) \Rightarrow X$

A2 : $(X \wedge Y) \Rightarrow Y$

A3 : $((X \wedge Y) \Rightarrow Z) \Rightarrow (X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z))$

A4 : $((X \Rightarrow Y) \wedge (X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z))) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)$

e dalla regola di inferenza *Modus Ponens*

$$\frac{X,\ X \Rightarrow Y}{Y}$$

Esercizio 11. Verificare che le formule **A1**, **A2**, **A3** e **A4** sono tautologie.

Esercizio 12. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{A}$

1. $\vdash p \Rightarrow (q \Rightarrow q)$
2. $p \Rightarrow q, p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \vdash p \Rightarrow r$
3. $\vdash (p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

[4] *Disjunctive Normal Form*

Esercizio 13. Per ognuna delle seguenti formule, dire se è un teorema nel sistema $\mathcal{A}$ oppure no. In caso affermativo esibire una dimostrazione, in caso negativo spiegare perché non può essere un teorema

1. $p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
2. $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$
3. $((p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (r \Rightarrow (p \wedge q))$

Sia $\mathcal{B}$ il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

B1 : $X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$

B2 : $(X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$

B3 : $(\sim X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\sim Y \Rightarrow X)$

e dalla regola di inferenza *Modus Ponens*.

Esercizio 14. Verificare che le formule **B1**, **B2** e **B3** sono tautologie.

Esercizio 15. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{B}$

1. $\vdash p \Rightarrow p$
2. $\vdash \sim\sim p \Rightarrow p$

Esercizio 16. Riflettere sulla relazione che c'è fra la regola di inferenza *Modus Ponens* e i punti 2 e 3 del metodo *resolution*.

Logica e Reti Logiche
Esercitazione

Francesco Pasquale

19 aprile 2018

Esercizio 1. Siete su un'isola in cui gli abitanti sono o di tipo `True` (dicono sempre la verità) o di tipo `False` (mentono sempre). Assumendo che tutti gli abitanti siano dello stesso tipo, cosa si può dedurre, sul tipo degli abitanti e se siano fumatori o meno, in ognuno dei seguenti casi?
Se ognuno degli abitanti dice:

1. "Se io sono un fumatore, allora siamo tutti fumatori";
2. "Se qualcuno è un fumatore, allora io sono un fumatore";
3. "Alcuni qui sono fumatori, ma non io".

Esercizio 2. A tre delle sei affermazioni seguenti $(1-6)$ espresse in linguaggio naturale corrispondono tre delle sei formule $(I-VI)$ in logica del primo ordine (interpretando opportunamente i simboli per i predicati[1]).
Associare tre delle affermazioni alle tre formule corrispondenti. Scrivere delle formule appropriate per le tre affermazioni che restano non associate. Scrivere delle affermazioni appropriate per le tre formule che restano non associate.

1. Chi non studia non passa l'esame;
2. C'è qualcuno che studia e non passa l'esame;
3. Qualcuno passa l'esame;
4. Tutti quelli che passano l'esame o studiano o sono dei geni;
5. I geni non esistono;
6. Tutti i geni studiano.

I. $\forall x[P(x) \Rightarrow Q(x) \vee R(x)]$

II. $\exists x[\sim Q(x) \wedge \sim R(x) \wedge \sim P(x)]$

III. $\forall x[R(x) \Rightarrow Q(x)]$

IV. $\forall x[Q(x) \wedge R(x) \Rightarrow P(x)]$

V. $\exists x P(x)$

VI. $\exists x[R(x) \Rightarrow P(x)]$

[1] Qui e negli esercizi che seguono usiamo, come da notazione standard, le ultime lettere dell'alfabeto, x, y, z, per le variabili, le prime lettere dell'alfabeto, a, b, c, per le costanti, e le lettere P, Q, R, maiuscole, per i predicati

Esercizio 3. Usando il metodo dei *tableaux* verificare che le seguenti formule sono valide

1. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \Rightarrow \forall x[P(x) \vee Q(x)]$
2. $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
3. $\forall x P(x) \Rightarrow [\exists x Q(x) \Rightarrow \forall x P(x)]$
4. $\exists y \forall x P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists y P(x, y)$

Esercizio 4. Dire quali delle formule dell'esercizio precedente sono tautologie. Motivare la risposta.

Esercizio 5. Per ognuna delle seguenti formule dire se è valida oppure no. In caso affermativo dare una dimostrazione (usando il metodo dei *tableaux*), in caso negativo esibire una interpretazione in cui è falsa.

1. $\exists x\, P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$
2. $\exists x\, [P(x) \Rightarrow \forall y P(y)]$
3. $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
4. $\forall x \forall y \forall z[P(x, x) \wedge [P(x, z) \Rightarrow P(x, y) \vee P(y, z)]] \Rightarrow \exists y \forall z P(y, z)$

Esercizio 6. Per ognuna delle seguenti formule esibire un'interpretazione in cui la formula è vera e un'interpretazione in cui è falsa.

1. $\forall x \forall y[P(x, y) \Rightarrow P(y, x)]$
2. $\forall x \exists y P(x, y)$
3. $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)] \wedge \forall y[P(y) \vee Q(y)]$

Esercizio 7. Avete davanti a voi quattro porte, X, Y, Z, W, e otto guardiani, $A, B, C,$ D, E, F, G, H. Ognuno dei guardiani può dire la verità oppure mentire. I guardiani fanno le seguenti affermazioni:

A: X è una porta buona

B: Almeno una delle porte Y, Z è buona

C: A e B dicono la verità

D: X e Y sono entrambe porte buone

E: X e Z sono entrambe porte buone

F: Almeno uno dei guardiani D, E dice la verità

G: Se C dice la verità, anche F dice la verità

H: Se G e io diciamo la verità, anche A dice la verità

Almeno una delle porte è buona. Potete scegliere una sola porta. Una catastrofe si abbatterà su di voi se non scegliete una porta buona.
Che porta scegliete? Perché?

Logica e Reti Logiche
Esercitazione

Francesco Pasquale

10 maggio 2018

Esercizio 1. Scrivere in binario i seguenti numeri espressi in decimale[1]

$$11_{10}, \quad 87_{10}, \quad 118_{10}, \quad 365_{10}, \quad 512_{10}$$

Esercizio 2. Scrivere in binario la vostra data di nascita.
Tipicamente il formato decimale di una data è $gg/mm/aaaa$. Come dovrebbe essere il formato di una data in binario?
Se doveste scegliere una base b per scrivere le date, quale scegliereste? perché?

Esercizio 3. Scrivere in decimale i seguenti numeri espressi in binario

$$1010_2, \quad 110110_2, \quad 11001100_2, \quad 11110000_2, \quad 01011010_2$$

Esercizio 4. Scrivere in esadecimale i numeri degli Esercizi 1 e 3.

Esercizio 5. Scrivere in binario e in decimale i seguenti numeri espressi in esadecimale

$$A5_{16}, \quad 35B1_{16}, \quad CEE22_{16}, \quad 6E42_{16}, \quad D0000000_{16}$$

Esercizio 6. Scrivere in esadecimale il vostro numero di matricola.

Esercizio 7. Scrivere i numeri dell'Esercizio 1 in *complemento a due* a dieci bit.

Esercizio 8. Che numeri sono le seguenti rappresentazioni in complemento a due a sei bit?

$$010101_{\bar{2}}, \quad 101010_{\bar{2}}, \quad 110101_{\bar{2}}, \quad 011111_{\bar{2}}, \quad 111111_{\bar{2}}$$

Esercizio 9. Scrivere in complemento a due a sei bit i seguenti numeri decimali ed eseguire le somme. Quali di loro vanno in overflow?

$$16_{10} + 9_{10}, \quad 27_{10} + 31_{10}, \quad -4_{10} + 19_{10}, \quad 3_{10} + (-32_{10}) \quad -27_{10} + (-31_{10})$$

[1] Usiamo la notazione n_b per indicare che n è la rappresentazione del numero in base b. Per esempio, 121_{10} è una rappresentazione del numero *centoventuno*, mentre 121_3 è una rappresentazione del numero *sedici*. Il numero b, che indica la base, si intende sempre espresso in decimale.

		000	001	010	011	100	101	110	111
		0	1	2	3	4	5	6	7
0000	0	NUL	DLE	SP	0	@	P	`	p
0001	1	SOH	DC1	|	1	A	Q	a	q
0010	2	STX	DC2	″	2	B	R	b	r
0011	3	ETX	DC3	#	3	C	S	c	s
0100	4	EOT	DC4	$	4	D	T	d	t
0101	5	ENQ	NAK	%	5	E	U	e	u
0110	6	ACK	SYN	&	6	F	V	f	v
0111	7	BEL	ETB	‘	7	G	W	g	w
1000	8	BS	CAN	(	8	H	X	h	x
1001	9	HT	EM	)	9	I	Y	i	y
1010	10	LF	SUB	*	:	J	Z	j	z
1011	11	VT	ESC	+	;	K	[	k	{
1100	12	FF	FS	,	<	L	\	l	!
1101	13	CR	GS	-	=	M	]	m	}
1110	14	SO	RS	.	>	N	‘	n	~
1111	15	SI	US	/	?	O	-	o	DEL

Figura 1: Codifica ASCII

Esercizio 10. Scrivete il vostro nome in codifica ASCII (si veda la Figura 1)[2]. Scrivete poi in esadecimale la codifica di ogni lettera del vostro nome.

Un *grafo* G è una coppia $G = (V, E)$ in cui V è un insieme finito ed E è un insieme di coppie di elementi di V. Per esempio, $G = (V, E)$ dove

$$V = \{a, b, c, d\}, \qquad E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{c, d\}\}. \tag{1}$$

Gli elementi di V si chiamano *nodi* (o *vertici*) del grafo, gli elementi di E si chiamano *archi*. Ogni grafo può essere disegnato pensando ai nodi come punti e agli archi come linee che uniscono i punti. Per esempio, il grafo in (1) può essere disegnato come in Figura 2

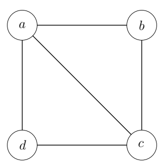


Figura 2: Disegno del grafo in (1)

Un grafo in cui V è $\{0, 1\}^n$, ossia l'insieme di tutte le stringhe di n bit, ed E è formato da tutte le coppie di stringhe che differiscono per un unico bit si chiama n-cubo.

[2]Ricordate che nella tabella in Figura 1 i tre bit che indicizzano le colonne sono quelli più significativi. Per esempio, la codifica della lettera F è 1000110

Esercizio 11. Disegnare un 3-cubo e un 4-cubo.

Esercizio 12. Quanti nodi contiene un n-cubo? quanti archi?

Un *cammino* in un grafo è una sequenza di nodi $(v_0, v_1, \ldots, v_k)$ tali che $\{v_i, v_{i+1}\}$ è un arco per ogni $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Per esempio, nel grafo in (1) (si faccia riferimento anche alla Figura 2) (a, c, d) è un cammino, mentre (a, b, d) non è un cammino.

Esercizio 13. Evidenziare il cammino individuato dal codice Gray nel disegno di un 3-cubo e nel disegno di un 4-cubo.

Esercizio 14. Costruire un circuito che implementi la formula seguente

$$(p \Rightarrow q \wedge r) \vee (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

Esercizio 15. Costruire un circuito che implementi la seguente tabella di verità

p	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
q	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
r	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
s	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
?	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0

Esercizio 16. Costruire un circuito che implementi la seguente funzione booleana[3] $f : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$$

Esercizio 17. Costruire un circuito che implementi la seguente funzione booleana $f : \{0,1\}^4 \to \{0,1\}$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \equiv 0 \mod 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esercizio 18. Costruire la mappa di Karnaugh della tabella di verità dell'Esercizio 15. Qual è il numero minimo di termini prodotto che avete?

Esercizio 19. Sappiamo come costruire una formula in forma normale disgiuntiva (somma di prodotti) a partire da una mappa di Karnaugh. Come possiamo costruire una formula in forma normale congiuntiva (prodotto di somme) a partire dalla stessa mappa (senza costruire prima la disgiuntiva)?

[3]Con in simbolo $\oplus$ indichiamo l'operatore *XOR* (*OR* esclusivo), quindi in generale $x_1 \oplus \cdots \oplus x_n$ vale 1 se un numero dispari di variabili sono 1 e vale 0 altrimenti

Esercizio 20. Progettare un circuito che prenda in input 4 bit, che rappresentano un numero in codifica binaria, e restituisca 1 se il numero in input è divisibile per *tre* e 0 altrimenti.

Esercizio 21. Si consideri la seguente funzione booleana:

$$y = bc + \overline{a}\overline{b}\overline{c} + b\overline{c} \tag{2}$$

1. Implementare la funzione in (2) usando soltanto un multiplexer 4:1;
2. Implementare la funzione in (2) usando un multiplexer 2:1, una porta `or` e una porta `not`.

Esercizio 22. Progettare un circuito che prenda in input due numeri espressi in binario a quattro bit, $\mathbf{a} = a_3a_2a_1a_0$ e $\mathbf{b} = b_3b_2b_1b_0$ e restituisca 1 se $\mathbf{b}$ è il doppio di $\mathbf{a}$ e 0 altrimenti (per esempio, se $a_3a_2a_1a_0 = 0110$ e $b_3b_2b_1b_0 = 1100$ il circuito deve restituire 1, perché $\mathbf{a} = (6)_{10}$ e $\mathbf{b} = (12)_{10}$).

Esercizio 23. Progettare un circuito che implementi il seguente algoritmo.

INPUT: Tre bit, x_1, x_2, x_3.
OUTPUT: Un bit, y.
if $x_1 = 1$ **then**
    $y = x_2$
else
    $y = x_3$
return y

Logica e Reti Logiche

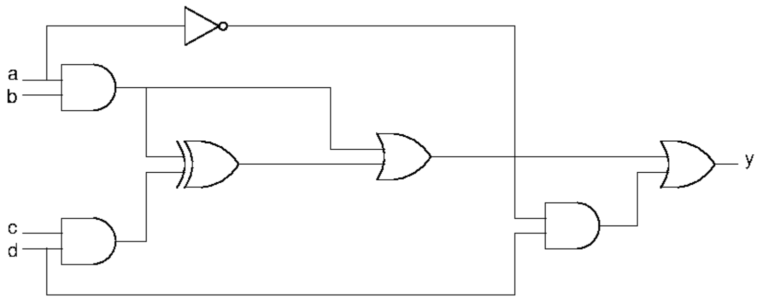
Esercitazione

Francesco Pasquale

24 maggio 2018

Esercizio 1. Costruire un circuito che prenda in input 3 bit e restituisca il bit di maggioranza (quindi deve restituire 1 se almeno due dei tre bit in input sono 1 e deve restituire 0 altrimenti).

Esercizio 2. Scrivere una formula in forma normale disgiuntiva (*somma di prodotti*) che corrisponda al circuito in figura



Esercizio 3. La funzione `xor` è definita su due bit in questo modo

$$x_1 \oplus x_2 = \begin{cases} 1 & \text{se } x_1 \neq x_2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Dimostrare che la funzione `xor` è *associativa* (ossia che per ogni terna di bit x_1, x_2, x_3 vale che $(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$)
2. Osservare che, grazie al punto 1, si può definire in modo non ambiguo lo `xor` di n bit, $x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n$ (indichiamolo con $\oplus_{i=1}^n x_i$)
3. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geqslant 2$, lo `xor` di n bit $\oplus_{i=1}^n x_i$ è uguale a 1 se e solo se il numero di bit x_i che hanno valore 1 è dispari.

Esercizio 4. Costruire un circuito *Full Adder* utilizzando due *Half Adder* e una porta `or`.

Esercizio 5. Utilizzando soltanto blocchi *Half Adder* costruire un circuito che prenda in input un numero a 4 bit e lo incrementi di 1.

Esercizio 6. Costruire un circuito *Full Adder* utilizzando soltanto porte `nor`.

Esercizio 7. Costruire un circuito che prenda in input un numero a 4-bit $\mathbf{x}$ e restituisca il complemento a due di $\mathbf{x}$ (per esempio, se $\mathbf{x} = 1010$ il circuito deve restituire $\mathbf{y} = 0110$).

Esercizio 8. Costruire un circuito che prenda in input un numero $\mathbf{x}$ espresso in complemento a due a 4 bit e restituisca un numero in binario che rappresenti il valore assoluto di $\mathbf{x}$ (per esempio, se $\mathbf{x} = 0110$ ossia il numero 6_{10}, il circuito deve restituire lo stesso numero, 0110; se invece $\mathbf{x} = 1011$ ossia il numero -5_{10}, il circuito deve restituire la rappresentazione binaria del numero 5_{10}: 0101).

Esercizio 9. Costruire un circuito che prenda in input due numeri $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ espressi in binario a 4 bit e restituisca 1 se $\mathbf{x}_1 \geqslant \mathbf{x}_2$ e 0 altrimenti.

Esercizio 10. Costruire un circuito che prenda in input un numero $\mathbf{x}$ a 4 bit e restituisca il numero $\mathbf{y}$ ottenuto facendo uno *shift* verso sinistra delle cifre di $\mathbf{x}$, riempiendo lo spazio rimanente a destra con uno zero (per esempio, se $\mathbf{x} = 0011$, il circuito deve restituire $\mathbf{y} = 0110$). Che operazione aritmetica sta eseguendo questo circuito?

Esercizio 11. Costruire un circuito che prenda in input un numero $\mathbf{x}$ a 4 bit e un numero $\mathbf{s}$ a 2 bit e faccia lo *shift* verso sinistra delle cifre di $\mathbf{x}$ di tante posizioni quante sono quelle indicate da $\mathbf{s}$, riempiendo gli spazi rimanenti con degli zeri (per esempio, se $\mathbf{x} = 0011$, e $\mathbf{s} = 10$ il circuito deve fare lo shift verso sinistra di due posizioni, quindi restituire $\mathbf{y} = 1100$). Che operazione aritmetica sta eseguendo questo circuito?

Esercizio 12. Abbiamo costruito un SR-Latch utilizzando porte `nor`. Cosa cambia se sostituiamo le porte `nor` con porte `nand`? Come costruiamo un *D-FlipFlop* utilizzando solo porte `nand` e `not`?

Esercizio 13. Un *T-FlipFlop* ha un solo input, CLK, e un output Q. Ogni volta che CLK passa da 0 a 1, il valore di Q cambia (se è 0 diventa 1, se è 1 diventa 0). Progettare un *T-FlipFlop* utilizzando un *D-FlipFlop* e una porta `not`.

Esercizio 14. Un *JK-FlipFlop* ha un output, Q, e tre input: CLK, J e K. Ogni volta che CLK passa da 0 a 1, il valore di Q si aggiorna in questo modo:
- Se $J = K = 0$ allora Q mantiene il suo valore precedente;
- Se $J = K = 1$ allora Q cambia valore (se era 0 diventa 1, se era 1 diventa 0);
- Se $J = 1$ e $K = 0$ allora Q assume valore 1;
- Se $J = 0$ e $K = 1$ allora Q assume valore 0.

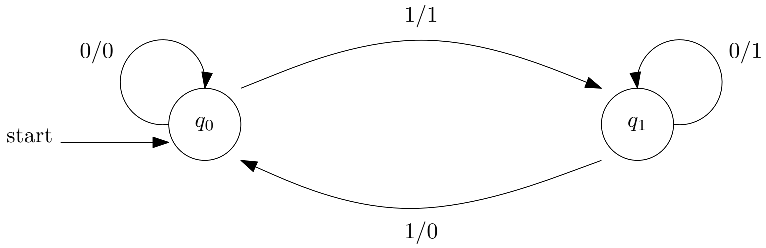
1. Progettare un *JK-FlipFlop* usando un *D-FlipFlop* e le opportune porte logiche;
2. Progettare un *D-FlipFlop* usando un *JK-FlipFlop* e le opportune porte logiche;
3. Progettare un *T-FlipFlop* usando un *JK-FlipFlop*.

Esercizio 15. Sia $\mathcal{C}$ un circuito sequenziale con un *D-FlipFlop*, due input x_0, x_1 e un output y. L'output Q del *FlipFlop* coincide con l'output y del circuito, mentre l'input D del *FlipFlop* è descritto dalla seguente equazione booleana

$$D = y \oplus (x_0 + x_1) .$$

1. Derivare la tabella di stato e il diagramma di stato del circuito;
2. Disegnare il circuito.

Esercizio 16. Considerare l'automa a due stati in figura



1. Qual è la sequenza dei primi sei bit in output $(y_0, \dots, y_5)$, se la sequenza dei primi sei bit in input $(x_0, \dots, x_5)$ è $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$? e se è $(1, 1, 1, 0, 0, 0)$? e se è $(0, 1, 0, 1, 0, 1)$?
2. Spiegare a parole cosa calcola l'automa;
3. Costruire un circuito che implementi l'automa.

Esercizio 17. Progettare un automa a stati finiti che legga una sequenza di bit e restituisca 1 ogni volta che negli ultimi tre bit letti c'è una maggioranza di uni e restituisca 0 altrimenti.

Esercizio 18. Progettare un circuito che implementi l'automa dell'Esercizio 17.

Esercizio 19. È possibile progettare un automa a stati finiti che legga una sequenza di bit in input $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ e restituisca in output una sequenza di bit $(y_0, y_1, y_2, \dots)$ che rappresenti il complemento a due del numero in input (l'ordine con cui vengono letti e restituiti i bit va dal bit meno significativo al più significativo[1])? Se pensate che sia possibile progettate l'automa, altrimenti motivate la risposta.

[1] Per esempio, se i primi quattro bit che riceve l'automa sono $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, questi rappresentano il numero $0011_{\overline{2}} = x_0 2^0 + x_1 2^1 + x_2 2^2 - x_3 2^3 = 3_{10}$. L'automa dovrà restituire il complemento a due di questo numero, cioè $1101_{\overline{2}} = 1 * 2^0 + 0 * 2^1 + 1 * 2^2 - 1 * 2^3 = -3_{10}$, quindi la sequenza di bit $y_0 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$. Che sequenza dovrebbe restituire se il quinto bit che legge è $x_4 = 0$? e se invece il quinto bit è $x_4 = 1$?

Logica e Reti Logiche
Esercitazione

Francesco Pasquale

7 giugno 2018

Esercizio 1. Progettare un circuito che prenda in input un numero $\mathbf{x}$ in codifica binaria a tre bit e restituisca il quadrato del numero in input (per esempio, se il numero in input è $\mathbf{x} = \texttt{011}$, ossia "tre", il circuito deve restituire in output "nove", cioè $\mathbf{y} = \texttt{1001}$). Quanti bit di output deve avere un tale circuito?

Esercizio 2. Progettare un circuito che prenda in input due numeri in codifica binaria a tre bit e ne restituisca il prodotto.

Esercizio 3. Una *unità di estensione del segno* estende un numero in complemento a due da M a N bit (con $N > M$). Progettare un'unità di estensione del segno da 4 a 8 bit (per esempio, se l'input è $\mathbf{x} = \texttt{1011}$, cioè "meno cinque" in complemento a due a quattro bit, l'output deve essere $\mathbf{y} = \texttt{11111011}$, cioè "meno cinque" in complemento a due a otto bit).

Esercizio 4. Quali sono gli intervalli di numeri rappresentabili dai seguenti sistemi numerici?[1]

1. Numeri in virgola fissa a 32 bit, con 16 bit di parte intera e 16 bit di parte frazionaria.
2. Numeri in complemento a due a 32, bit con 16 bit di parte intera e 16 bit di parte frazionaria.

Esercizio 5. Scrivere in complemento a due a 16 bit in virgola fissa, con 8 bit per la parte intera e 8 bit per la parte frazionaria, i seguenti numeri espressi in decimale. Esprimere poi il risultato in esadecimale.

$$\textit{(a)}\ -13.5625 \qquad \textit{(b)}\ 42.3125 \qquad \textit{(c)}\ -17.15625.$$

[1] Potrebbe essere utile ricordare che, se p è un numero reale diverso da 1, allora per ogni $n \geqslant 1$ si ha che $\sum_{i=1}^{n} p^i = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$. Se non lo ricordate... dimostratelo per induzione.

Esercizio 6. Scrivere in decimale i seguenti numeri espressi in complemento a due a 8 bit in virgola fissa con 4 bit per la parte intera e 4 bit per la parte frazionaria

(a) `01011000` *(b)* `11111111` *(c)* `10000000` *(d)* `01100110`.

Esercizio 7. Scrivere i numeri dell'Esercizio 5 in virgola mobile secondo lo standard IEEE 754 a precisione singola. Scrivere il risultato in esadecimale.
Si ricordi che lo standard IEEE 754 per i numeri in virgola mobile a precisione singola prevede 32 *bit:*
*- Il primo bit per il segno (*0 *positivo,* 1 *negativo);*
- I successivi 8 *bit per l'esponente, espresso in codifica ad eccesso (ossia, si aggiunge* 127 *al numero decimale da codificare in binario);*
- I successivi 23 *bit per la mantissa, di cui non si memorizza l'uno più significativo.*
Per esempio, supponiamo di dover codificare $-76,28125$*. È un numero negativo, quindi il primo bit sarà* `1`*. La parte intera è* $76 = 64 + 8 + 4 = 2^6 + 2^3 + 2^2$ *quindi, in binario,* `1001100`*. La parte frazionaria è* $0,28125 = 2^{-2} + 2^{-5}$ *quindi, in binario* `0.01001`*. Il valore assoluto del nostro numero in binario perciò è:* `1001100.01001` $=$ `1.00110001001` $\times 2^6$*. Perciò la mantissa escluso l'uno più significativo è* `00110001001`*, a cui andremo ad aggiungere tutti gli zeri che servono per arrivare a* 23 *bit, e l'esponente è* 6*, che in codifica ad eccesso diventa* $6 + 127 = 133$*, ossia* `10000101` *in binario a otto bit. Complessivamente quindi la codifica del nostro numero* $-76,28125$ *sarà* `11000010100110001001000000000000`*, che espresso in esadecimale diventa* `1100 0010 1001 1000 1001 0000 0000 0000` $=$ `C2989000`*.*

Esercizio 8. Scrivere in decimale i seguenti numeri in virgola mobile in formato IEEE 754 a precisione singola espressi in esadecimale

(a) `C0123456` *(b)* `81C564B7` *(c)* `D0B10301`.

Esercizio 9. Secondo voi perché nello standard IEEE 754 si è scelto di usare la codifica ad eccesso, per l'esponente, invece che la codifica in complemento a due?

Esercizio 10. Per numeri in virgola mobile a precisione *doppia* vengono usati 64 bit: uno per il segno, 11 per l'esponente e i restanti per la mantissa. Qual è il numero da sommare all'esponente per ottenere la codifica ad eccesso?

Esercizio 11. Come si fa la somma di due numeri in virgola mobile?

Esercizio 12. Sommare i seguenti numeri in virgola mobile in formato IEEE 754 a precisione singola espressi in esadecimale

- `C0123456` + `81C564B7`
- `D0B10301` + `D1B43203`
- `5EF10324` + `5E039020`

Esercizio 13. Progettare un contatore a quattro bit usando solo blocchi Half-Adder e Flip-Flop.