- Una matrice $n \times n$ si dice matrice quadrata [numero righe = numero colonne]

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 2×2 matrice quadrata

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$ non è una matrice quadrata

- Una matrice $n \times 1$ si dice vettore colonna $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

- Una matrice $1 \times n$ si dice vettore riga $(a_1, \dots, a_n)$

In $\mathbb{R}$ $\quad a \cdot (b + c) = ab + ac \quad$ distributiva $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

$a(bc) = (ab) \cdot c \quad$ associativa

$a \cdot b = b \cdot a \quad$ commutativa

oss. $A \in Mat(m \times k)$
$B \in Mat(k \times m)$

Per definire AB e BA occorre

$A \in Mat(m \times k) \quad B \in (k \times m)$

In generale $AB \neq BA$

Es.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prop.

- $A(B+C) \overset{\text{distrib.}}{=} A \cdot B + A \cdot C \qquad A \in Mat(m \times k) \qquad B, C \in Mat(k \times n)$
- $A(BC) \underset{\text{associativa}}{=} (AB) \cdot C \qquad A \in Mat(m \times k), \; B \in Mat(k \times q), \; C \in Mat(q \times n)$
- $\lambda \cdot (A \cdot B) = A(\lambda B) \qquad A \in Mat(m \times k), \; B \in Mat(k \times n), \; \lambda \in \mathbb{R}$

DEF.

$n \times n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice identica (o matrice identità)

ES.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_1 = (1)$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oss. $A \in Mat(n \times m) \qquad (\forall A)$

$$A \cdot I_m = I_n \cdot A = A$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 & \alpha \cdot 0 + \beta + 1 \\ \gamma \cdot 1 + \delta \cdot 0 & \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot \alpha + 0 \cdot \gamma & 1 \cdot \beta + 0 \cdot \delta \\ 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \gamma & 0 \cdot \beta + 1 \cdot \delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Trasposizione

$A \in Mat(m \times n)$

A^t = trasposta di A, $A^t \in Mat(n \times m)$

Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$ allora $A^t := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$

Es.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & \pi & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \pi \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Prop. $(A^t)^t = A$

- $(AB)^t = B^t A^t$ $\qquad A \in Mat(m \times k)$, $B \in Mat(k \times n)$

(oss. $B^t \in Mat(m \times k)$
$A^t \in Mat(k \times m)$)

$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ e & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ e & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta e & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta e & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

$$(A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta e & \gamma a + \delta e \\ \alpha b + \beta d & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

$=$

$$B^t \cdot A^t = \begin{pmatrix} a & e \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + e\beta & a\gamma + e\delta \\ b\alpha + d\beta & b\gamma + d\delta \end{pmatrix}$$

Sistemi Lineari

$a, b \in \mathbb{R}$

$ax = b$

se $a = 0$
- $b = 0$ esistono "infinite soluzioni"
- $b \neq 0$ non esistono soluzioni

Se $a \neq 0 \implies$ esiste una unica soluzione $x = \frac{b}{a}$

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ (*)

E' un sistema lineare con n incognite

$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

e m equazioni

(*) equivale

$$\begin{cases} a_{11} X_1 + \dots + a_{1n} X_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} X_1 + \dots + a_{mn} X_n = b_m \end{cases}$$

Def. : una n-pla di numeri

$q_1, \dots, q_n$ é soluzione di (*).

$$A \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \underline{b}$$

Def.

Dato il sistema lineare $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$
il sistema lineare omogeneo $A \cdot \underline{x} = \underline{0} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} m$
si dice sistema lineare omogeneo associato
a $A \underline{x} = \underline{b}$

Es.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

Il sistema lineare omogeneo associato é

$$A \cdot \underline{x} = \underline{0} \qquad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

OSS. $A\underline{x} = \underline{0}$ $\qquad x_1 = \dots = x_n = 0$

è sempre una soluzione

$\boxed{\begin{array}{l}A\underline{x} = \underline{b} \text{ se } \underline{y_0} = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} \text{ è una} \\ \text{soluzione (cioè } A \cdot \underline{y_0} = \underline{b}\text{) allora} \\ \text{ogni altra soluzione di } A\underline{x} = \underline{b} \text{ è} \\ \text{della forma } \underline{y_0} + \underline{z} \text{ dove } A\underline{z} = \underline{0}\end{array}}$

Dim

1°) $\underline{y_0} + \underline{z}$ è soluzione, $(A\underline{y_0} = \underline{b}, \ A\underline{z} = \underline{0})$

Essere soluzione significa $A(\underline{y_0} + \underline{z}) = \underline{b}$

ma $A(\underline{y_0} + \underline{z}) \underset{\uparrow \text{ distrib.}}{=} A \cdot \underline{y_0} + A \cdot \underline{z} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$

2°) Se $\underline{y_1}$ è un'altra soluzione

(cioè se $A\underline{y_1} = \underline{b}$) allora esiste $\underline{z}$

tale che $A \cdot \underline{z} = \underline{0}$ e tale che $\underline{y_1} = \underline{y_0} + \underline{z}$

Sia $\underline{z} := \underline{y_1} + (\overset{-1(\underline{y_0})}{\overset{\shortparallel}{-\underline{y_0}}})$ con questa scelta

$\underline{y_1} = \underline{y_0} + \underline{z}$ (perché $\underline{y_0} + \underline{z} = \underline{y_1} + (\cancel{-\underline{y_0}}) + \cancel{\underline{y_0}}$)

Resta da verificare che

$A \cdot \underline{z} \overset{?}{=} 0$

$A\underline{z} = A(\underline{y_1} + (-1 \cdot \underline{y_0})) \underset{\uparrow \text{ distrib.}}{=} \underbrace{A \cdot \underline{y_1}}_{\underline{b}} + \underbrace{A \cdot (-1 \cdot \underline{y_0})}_{-1 \cdot (\underbrace{A \cdot \underline{y_0}}_{\underline{b}})} =$

$= \underline{b} + (-1) \cdot \underline{b} = \underline{b} + (-\underline{b}) = \underline{0}$

OSS.

Se $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzione e il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ ammette la sola soluzione $\underline{x} = \underline{0}$

$\Rightarrow A\underline{x} = \underline{b}$ ha una unica soluzione

Es.

a) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ 1 + x_2 + x_2 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ 2x_2 = -2 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$

$\Rightarrow x_2 = x_1 = -x_2$ $\Rightarrow x_1 = x_2 = 0$

b) (1) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 3 incognite, 2 equazioni

$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$ è soluzione

$\underline{y_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione

cerchiamo le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

Se $x_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ si ha che

$x_1 = \lambda$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = -\lambda$ é

soluzione del sistema lineare omogeneo

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{al variare di } \lambda \in \mathbb{R}$$

Quindi tutte e sole le soluzioni di (1)
sono date da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

(ovvero $x_1 = 1 + \lambda$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = -\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$)