ANALISI MATEMATICA - F. FIDALEO

(DAL PROGRAMMA DI FIDALEO PRESO SUL GRUPPO GRANDE I DUE CAPITOLI SEGUENTI CORRISPONDONO AL CAPITOLO 1 DEL LIBRO *Analisi Matematica – "Bertsch"*)

CAPITOLO 1: numeri reali

– Numeri naturali, interi, razionali, costruzione dei numeri reali (cenni); principio di induzione. Richiami su semplici disequazioni irrazionali e con la presenza del modulo.

– Estremo superiore ed inferiore e loro proprietà.

– Potenze, radici e logaritmi; formula di cambiamento di base. Richiamo al Binomio di Newton.

- *Numeri naturali, interi, razionali, costruzione dei numeri reali (cenni); principio di induzione. Richiami su semplici disequazioni irrazionali e con la presenza del modulo.*

ℤ* = *Numeri interi $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$
ℚ* = *Numeri razionali $\mathbb{Q} := \{ p/q \text{ con } p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$

Proprietà di ***ℚ Addizione***
- $\forall\, x, y : x + y = y + x$ *«commutativa»*
- $\forall\, x, y, z : (x+y) + z = x + (y + z)$ *«Associativa»*
- $\exists!$ Elemento, detto zero e indicato con 0, tale che $\forall\, x : x + 0 = x$
- $\forall\, x\ \exists!$ Elemento, detto opposto e indicato con $-x$, tale che $x + (-x) = 0$

Proprietà di ***ℚ Moltiplicazione***
- $\forall\, x, y : x * y = y * x$ *«commutativa»*
- $\forall\, x, y, z : (x * y) * z = x * (y * z)$ *«Associativa»*
- $\exists!$ Elemento $\neq 0$, detto unità e indicato con 1, tale che $\forall\, x : x\ \ 1 = x$
- $\forall\, x\ \exists!$ Elemento, detto reciproco e indicato con x^{-1} oppure $1/x$, tale che $x * x^{-1} = 1$
- $\forall\, x, y, z : (x + y) * z = x * z + y * z$ *«Distributiva»*

Proprietá di densitá: $\forall\, x, y,\ x < y,\ \exists$ infiniti elementi z tali che $x < z < y$.
Proprietá di Archimede: $\forall\, x, y > 0\ \ \exists n \in \mathbb{N}$ tale che $nx >= y$.

1.1 **Numeri reali**

Lemma 1.1: Non esiste x ∈ *ℚ tale che* $x^2 = 2$

Si ragiona per assurdo; cioè si assume che la tesi sia falsa e si procede per arrivare a una contraddizione. Supponiamo quindi che esista $x \in \mathbb{Q}$, ***x > 0 tale che*** $x^2 = 2$.

Un numero reale è un allineamento decimale proprio. L' insieme dei numeri reali si indica con R

Teorema 1.3 **Proprietá di Densitá**

Siano x, y ∈ R tali che x < y. Allora:
∃ infinit numeri razionali z : x < z < y;
∃ infiniti numeri irrazionali z : x < z < y;

- *Principio di induzione*

- *Estremo superiore ed inferiore e loro proprietà*

Dato un insieme A, non vuoto, composto da numeri reali
- il **maggiorante** è un numero che, se esiste, è ≥ di tutti gli elementi di A → in questo caso A si dice **limitato superiormente**
- il **minorante** è un numero che, se esiste, è ≤ di tutti gli elementi di A → in questo caso A si dice **limitato inferiormente**

Un insieme non può avere più di un **massimo** e un **minimo** → *Lemma:* se esiste un massimo o un minimo di A questo è unico

Dimostrazione:
M1, M2 sono massimi. Per la definizione M1 è maggiorante di A.
Essendo che m2 ∈ A ⟹ $M2 \leq M1$. Scambiando i ruoli di M1e M2 si ottiene M1 $\leq M2$.
Quindi $M2 \leq M1 \leq M2$ e risulta $M1 = M2$

- **L'estremo superiore** è il minimo dell'insieme dei maggioranti di A → inf = - ∞
- **L'estremo inferiore** è il massimo dell'insieme dei maggioranti di A → sup = + ∞

Proprietà di Completezza di R → Sia A ⊆ R , A ≠ 0. Se A è limitato superiormente (inferiormente), allora esiste sup A ∈ R (inf A ∈ R).

- P*otenze, radici e logaritmi; formula di cambiamento di base. Richiamo al Binomio di Newton.*

Per definizione, la radice n-esima di un numero non negativo è un numero negativo → $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in R$
Se x è minore di 0 avremo $\sqrt{x^2} \neq x$ → esempio: $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3| \neq -3$
Per definizione

Proprietà delle potenze

PROPRIETÀ

Per ogni $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $r, s \in \mathbb{Q}$ risulta:

1) $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$;
2) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$;
3) $(a^r)^s = a^{rs}$;
4) $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$;
5) $a^r > 0, \quad a^0 = 1, \quad 1^r = 1$;
6) $\begin{cases} a^r > 1 & \text{se } a > 1 \text{ e } r > 0, \text{ oppure se } a < 1 \text{ e } r < 0 \\ a^r < 1 & \text{se } a < 1 \text{ e } r > 0, \text{ oppure se } a > 1 \text{ e } r < 0; \end{cases}$
7) $r < s \Rightarrow \begin{cases} a^r < a^s & \text{se } a > 1 \\ a^r > a^s & \text{se } a < 1; \end{cases}$
8) $0 < a < b \Rightarrow \begin{cases} a^r < b^r & \text{se } r > 0 \\ a^r > b^r & \text{se } r < 0; \end{cases}$
9) $\forall a \neq 1: \quad a^r = a^s \Rightarrow r = s.$

$\sqrt{2}$ è $la\ soluzione\ non\ negativa\ di\ x^2 = 2$

LOGARITMI

Definizione: $\log_a b = x \rightarrow a^x = b$

Quindi possiamo definire *il logaritmo* come *l'esponente che bisogna dare alla base a per ottenere l'argomento b*

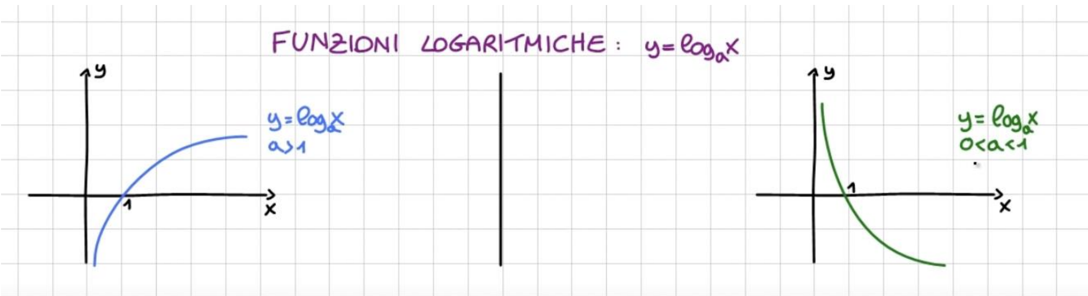
ESEMPIO → Calcola il seguente logaritmo: $\log_7 49$

Poniamo il logaritmo uguale ad x e per la definizione andremo ad ottenere $7^x = 49$, essendo $49 = 7^2$otterremo $7^x = 7^2$ quindi otterremo $x = 2$

NB: se b non è una potenza ad esponente razionale di a allora $\log_a b$ ***è un numero irrazionale.***

ESEMPIO → Calcolare il seguente logaritmo: $\log_2 3$

In questo caso il 3 non è "imparentato" con il 2, questo logaritmo verrà sviluppato con una calcolatrice e verrà un numero irrazionale (1,58...)



- *Proprietà dei logaritmi*

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

Dimostrazione → poniamo $\log_a x = m$ e $\log_a y = n$. Per la definizione di logaritmo otteniamo che $x = a^m$ e $y = a^n$. Moltiplichiamo le due uguaglianze membro a membro e otteniamo xy = $a^m * a^n = a^{m+n}$. Quindi avremo m + n = $\log_a(xy)$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Dimostrazione → poniamo $\log_a x = m$ e $\log_a y = n$. Per la definizione di logaritmo otteniamo che $x = a^m$ e $y = a^n$. Dividiamo le due uguaglianze membro a membro e otteniamo $\frac{x}{y} = a^m : a^n = a^{m-n}$. Quindi avremo m - n = $\log_a\left(\frac{x}{y}\right)$

$$\log_a x^y = y * \log_a x$$

Dimostrazione → poniamo $\log_a x = m$. Per la definizione di logaritmo otteniamo che $x = a^m$. Elevo alla y le due uguaglianze e otteniamo $x^y = (a^m)^y$. Quindi avremo $x^y = (\log_a x)^y \rightarrow \log_a x^y = y * \log_a x$

- Altre proprietà:

$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} = -\ \mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{x}$ → perché $\frac{1}{x}$ $corrisponde\ a\ x^{-1}$

$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\, \mathbf{1} = \mathbf{0}$ → per la definizione di logaritmo verrebbe $0^a = 1$

$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{a} = \mathbf{1}$ → per la definizione di logaritmo verrebbe $1^a = a$

$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{a}} = -\mathbf{1}$ → per la definizione di logaritmo verrebbe $-1^a = \frac{1}{a}$

$\mathbf{log}_{\boldsymbol{a}}\, \boldsymbol{b} = \frac{\mathbf{log}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{b}}{\mathbf{log}_{\boldsymbol{c}} \boldsymbol{a}}$ → formula per il **cambiamento di base** → **ESEMPIO:** abbiamo $\log_2 3$ trasformiamolo in base 10 → $\log_2 3 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2}$