LIMITI $\rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

- **Che cos'è il limite?**

Il limite di una funzione è un'operazione, o meglio un operatore, che permette di studiare il comportamento di una funzione nell'intorno di un punto, grazie al quale possiamo stabilire a quale valore tende la funzione ma mano che i valori della variabile indipendente si approssimano in quel punto.

- **Definizione:**

Esistono 4 tipologie di limite e per ognuna abbiamo una definizione

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) > 0 : \forall x \in I(x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
   - Se è $+\infty \rightarrow \forall M > 0 \ \exists I(x_0) > 0 : \forall x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) > M$
   - Se è $-\infty \rightarrow \forall M > 0 \ \exists I(x_0) > 0 : \forall x \in I(x_0) \Rightarrow f(x) < -M$

3) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = l$
   - Se è $+\infty \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists I(+\infty) : \forall x \in I \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
   - Se è $-\infty \rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists I(-\infty) : \forall x \in I \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

4) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$
   - Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty \rightarrow \forall M > 0 \ \exists I(+\infty) : \forall x \in I \Rightarrow f(x) > M$
   - Se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \rightarrow \forall M > 0 \ \exists I(-\infty) : \forall x \in I \Rightarrow f(x) > M$
   - Se $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty \rightarrow \forall M > 0 \ \exists I(+\infty) : \forall x \in I \Rightarrow f(x) < -M$
   - Se $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \rightarrow \forall M > 0 \ \exists I(-\infty) : \forall x \in I \Rightarrow f(x) < -M$

- **Come li calcoliamo:**

Per calcolare il limite di una funzione bisogna sostituire la x con il valore (finito o infinto) al quale tende.

Esempio $\rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \frac{3x - 2}{x + 2} \rightarrow \lim\limits_{x \to 2} \frac{(3 \times 2) - 2}{2 + 2} = 1$

A volte però facendo il calcolo del limite possiamo trovare determinate forme determinate, che andremo a risolvere semplificando la funzione di partenza a seconda dei casi.

Le forme indeterminate sono 7:

> $\frac{\infty}{\infty}$ $\rightarrow$ si può risolvere in 2 modi
> - raccogliendo la x di grado max sia al numeratore sia al denominatore
> - Con il confronto dei gradi:
>   - ∞ se il grado max è al numeratore
>   - 0 se il grado max è al demominatore
>   - se i gradi sono uguali si fa il rapporto tra i coefficenti

> $+\infty - \infty$ $\rightarrow$ si può risolvere a seconda dei casi
> - Se ci sono radici $\rightarrow$ razzionalizziamo
> - Se ci sono frazioni $\rightarrow$ facciamo denominatore comune

> $\frac{0}{0}$ $\rightarrow$ lo risolviamo con ruffini a seconda dei casi.

> $0^0, \infty^0, 1^\infty \rightarrow f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$

> $0 \cdot \infty$

In base alla funzione che ci viene data a volte per risolvere le forme determinate dei limiti bisogna usare i cosiddetti limiti notevoli. → Questi sono fondamentali nelle applicazioni dell'analisi.

I limiti notevoli sono:

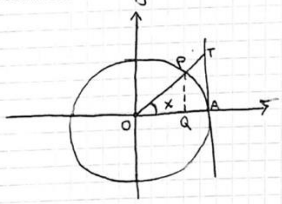
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

DIMOSTRAZIONE:

Per dimostrare questo prodotto notevole partiamo col disegnare una circonferenza goniometrica



$\widehat{AP} = \hat{x}$

possiamo dire che:

$PQ < AP < AT$

$\sin x < x < \tan x$

$$\frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\tan x}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$ e $\lim_{x \to 0} 1 = 1$ quindi per il teorema del confronto anche il limite di $\frac{\sin x}{x} = 1$ $_{x \to 0}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

DIMOSTRAZIONE:

Poniamo $e^x - 1 = y \to e^x = y+1 \to x \ln e = \ln(y+1) \to x = \ln(y+1)$

Essendo che abbiamo posto $e^x - 1 = y$, dobbiamo porre $y \to 0$

Quindi scriviamo:

$$\lim_{y \to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{y}{y}}{\frac{\ln(y+1)}{y}} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{1} = 1$$

Operazioni con i limiti

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = l \quad e \quad \lim_{x\to\alpha} g(x) = m \rightarrow \lim_{x\to\alpha} [f(x) + g(x)] = l + m$$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = l \quad e \quad \lim_{x\to\alpha} g(x) = m \rightarrow \lim_{x\to\alpha} [f(x) \cdot g(x)] = l \cdot m$$

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = l \quad e \quad \lim_{x\to\alpha} g(x) = m \rightarrow \lim_{x\to\alpha} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{l}{m}$$

$$\lim_{x\to\alpha} [f(x)]^{g(x)} = l^m \quad con\ l>0\ ;\ f(x)>0$$

Ricorda...

$l + \infty = \infty$

$l - \infty = -\infty$

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$\frac{l}{\infty} = 0$

$\frac{\infty}{l} = \infty$

$\frac{l}{0} = \infty$

$\frac{0}{l} = 0$

$l^\infty = \infty$

$(l<0)^\infty = 0$

$l>0 \cdot \begin{cases} \infty = \infty \\ -\infty = -\infty \end{cases}$

$l<0 \cdot \begin{cases} \infty = -\infty \\ -\infty = \infty \end{cases}$

$\infty \cdot \infty = \infty$

$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

$(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$

$\log_a(+\infty) = +\infty$ con $a>1$

$\log_a(+\infty) = -\infty$ con $0<a<1$