ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 3

ESEMPIO Risolvere $|x-1|-3 \leq \sqrt{x+2}$.

$\sqrt{\ }$ $\qquad |x-1|$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ 1-x-3 \leq \sqrt{x+2} \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \leq x \\ x-1-3 \leq \sqrt{x+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \leq x < 1 \\ \underbrace{-2-x}_{\leq 0} \leq \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\geq 0} \end{cases} \cup \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ \underbrace{x-4}_{\leq 0} \leq \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\geq 0} \end{cases} \cup \begin{cases} 4 < x \\ \underbrace{x-4}_{\geq 0} \leq \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\geq 0} \end{cases}$$

$x \in [-2,1)$ $\qquad$ $x \in [1,4]$ $\qquad$ $\Updownarrow \ (\ )^2$

$$\begin{cases} 4 < x \\ (x-4)^2 \leq x+2 \end{cases}$$

$x \in (4,7]$

$(x-4)^2 \leq x+2$

$x^2-8x+16-x-2 \leq 0$

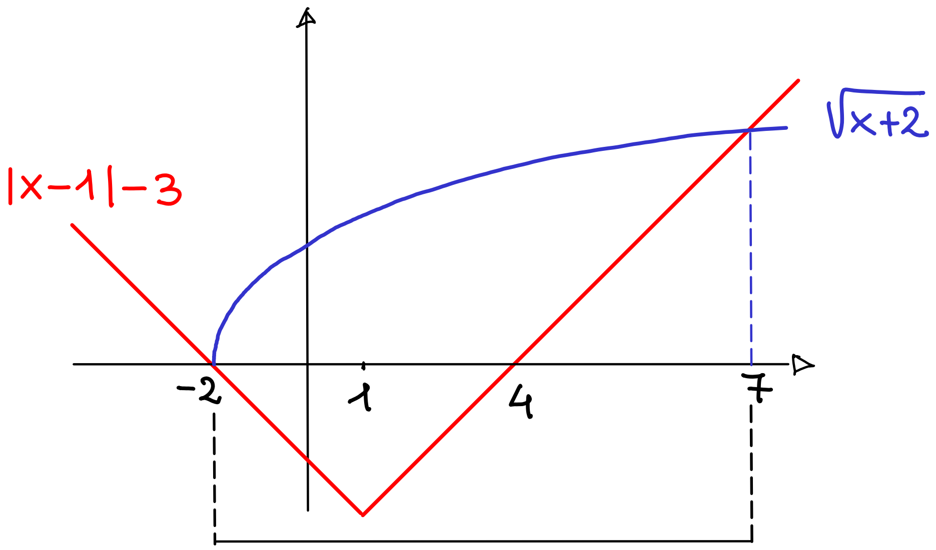
$x^2-9x+14 \leq 0$

$(x-2)(x-7) \leq 0 \qquad x \in [2,7]$

Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$[-2,1) \cup [1,4] \cup (4,7] = [-2,7].$$

Interpretazione grafica della disuguaglianza:



$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Disegnare il grafico di $\arcsin(\sin(x))$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Dato che $\arcsin(x)$ è l'inversa di $\sin(x)$ ristretta a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, abbiamo che

1) Se $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ allora $\arcsin(\sin(x)) = x$

2) Se $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ allora

$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(\overbrace{\pi - x}^{\in [0, \frac{\pi}{2})})) = \pi - x$$

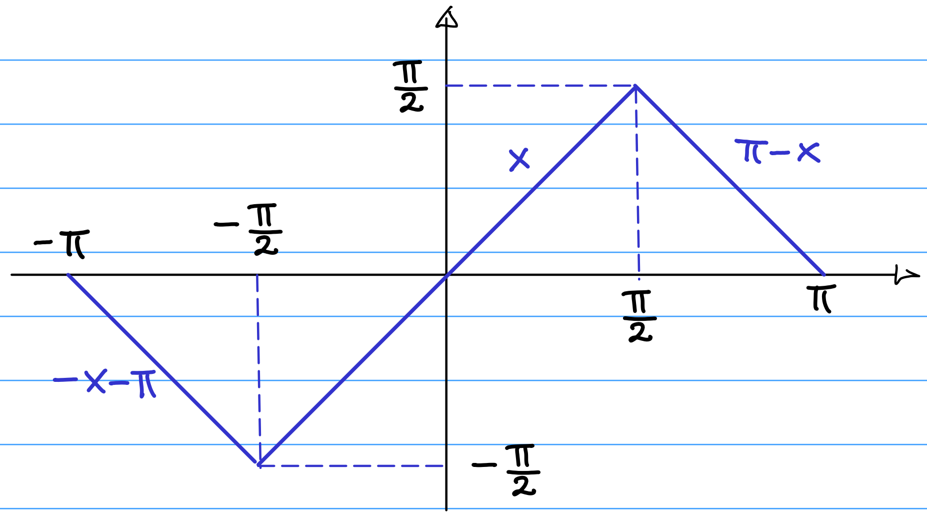
3) Se $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2})$ allora

$$\arcsin(\sin(x)) = -\arcsin(\sin(\overbrace{-x}^{\in (\frac{\pi}{2}, \pi]})) = -(\pi - (-x))$$

$$= -x - \pi$$

Così

$$\arcsin(\sin(x)) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -x - \pi & \text{se } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$



$f(x) = \arcsin(\sin(x))$ è periodica con periodo $T = 2\pi$.

f è dispari: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin(x)) = -\arcsin(\sin(x)) = -f(x)$$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Determinare il dominio D di

$$f(x)=\sqrt{\log\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)}$$ la base di log è e

e $f(D)=\{f(x) : x\in D\}$. immagine di f

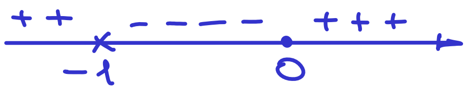
La funzione $f: D\to f(D)$ è biunivoca?

Nel caso trovare f^{-1}.

Per individuare D dobbiamo imporre che tutti gli argomenti delle funzioni elementari utilizzate stiano nei rispettivi domini.

$$\begin{cases} x+1\neq 0 & \text{denominatore} \neq 0 \\ \dfrac{2x+1}{x+1}>0 & \text{argomento del logaritmo} >0 \\ \log\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)\geq 0 & \text{argomento della radice quadrata} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\neq -1 \\ \dfrac{2x+1}{x+1}\geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\neq -1 \\ \dfrac{\cancel{2}x+\cancel{1}-\cancel{x}-\cancel{1}}{x+1}\geq 0 \end{cases}$$



e dunque $D=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$.

Per $y\in\mathbb{R}$ provo a risolvere l'equazione $y=f(x)$ rispetto a x:

$$\underset{y\geq 0}{y^2=}\log\left(\frac{2x+1}{x+1}\right), \quad e^{y^2}=\frac{2x+1}{x+1}, \quad e^{y^2}x+e^{y^2}=2x+1$$

$$(e^{y^2}-2)x=1-e^{y^2}, \quad x\underset{y\neq\sqrt{\log(2)}}{=}\frac{1-e^{y^2}}{e^{y^2}-2}$$ soluzione unica

Così per $y\in[0,\sqrt{\log(2)})\cup(\sqrt{\log(2)},+\infty)=f(D)$ l'equazione $y=f(x)$ ha un'unica soluzione.

$f:D\to f(D)$ è biunivoca e $f^{-1}(x)=\dfrac{1-e^{x^2}}{e^{x^2}-2}$.

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Dato $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ con $n \geq n_0$ sia $P(n)$ una proposizione che può essere vera o falsa al variare di n.

TEOREMA (PRINCIPIO DI INDUZIONE) Se

1) $P(n_0)$ è vera (PASSO BASE)
2) $\forall n \geq n_0$ $\underbrace{P(n)}_{\text{Ipotesi induttiva}} \Longrightarrow P(n+1)$ (PASSO INDUTTIVO)

allora $P(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$.

ESEMPIO $1+2+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad P(n)$

Verifica per induzione.

Passo base. Per $n=1$, $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ VERO

Passo induttivo. Per $n \geq 1$,

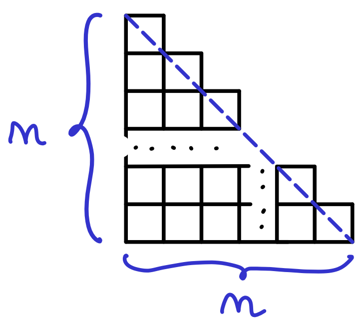
$$\sum_{k=1}^{n+1} k \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad P(n+1)$$

Abbiamo che

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \overset{P(n)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right)$$

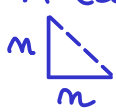
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \qquad \text{VERO}$$

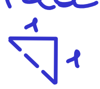
OSSERVAZIONE.



Interpretazione geometrica

$$\sum_{k=1}^{n} k = \underset{\uparrow \text{ Area}}{\frac{n \cdot n}{2}} + n \cdot \underset{\uparrow \text{ Area}}{\frac{1}{2}} = \frac{n(n+1)}{2}$$





$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ $\forall n \geq 4 \quad 2^n > n+10.$

Verifica per induzione.

Passo base. Per $n=4$, $2^4 = 16 \overset{?}{>} 14 = 4+10$ VERO

Passo induttivo. Per $n \geq 1$,

$$2^{n+1} \overset{?}{>} (n+1)+10 \qquad P(n+1)$$

Abbiamo che

$$2^{n+1} = 2\cdot 2^n \overset{P(n)}{>} 2(n+10) = 2n+20 > n+11 \qquad \text{VERO}$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI)

$$\forall n \in \mathbb{N}^+,\ \forall x \geq -1 \quad (1+x)^n \geq 1+nx.$$

dim. Per induzione rispetto a n.

Passo base. Per $n=1$, $(1+x)^1 \overset{?}{\geq} 1+1\cdot x$ VERO

Passo induttivo. Per $n \geq 1$

$$(1+x)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1+(n+1)\cdot x \qquad P(n+1)$$

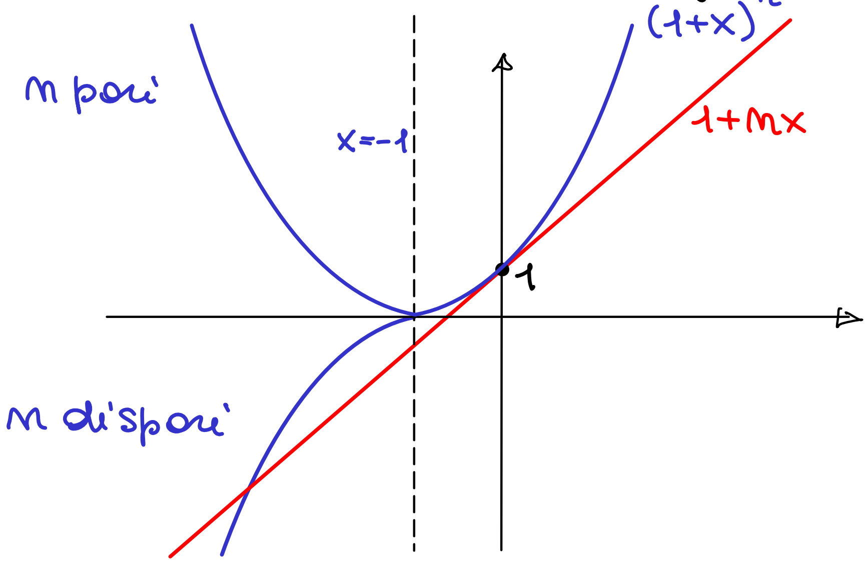
Abbiamo che

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^1}_{\substack{\geq 0 \\ \uparrow \\ x \geq -1}} \cdot (1+x)^n \overset{P(n)}{\geq} (1+x)(1+nx) \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x \qquad \text{VERO}$$

$$(1+x)(1+nx) = \underbrace{1+x+nx}_{=1+(n+1)x} + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$\square$

OSSERVAZIONE. Interpretazione grafica



Sia $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n=0 \\ n\cdot(n-1)\cdots 1 & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

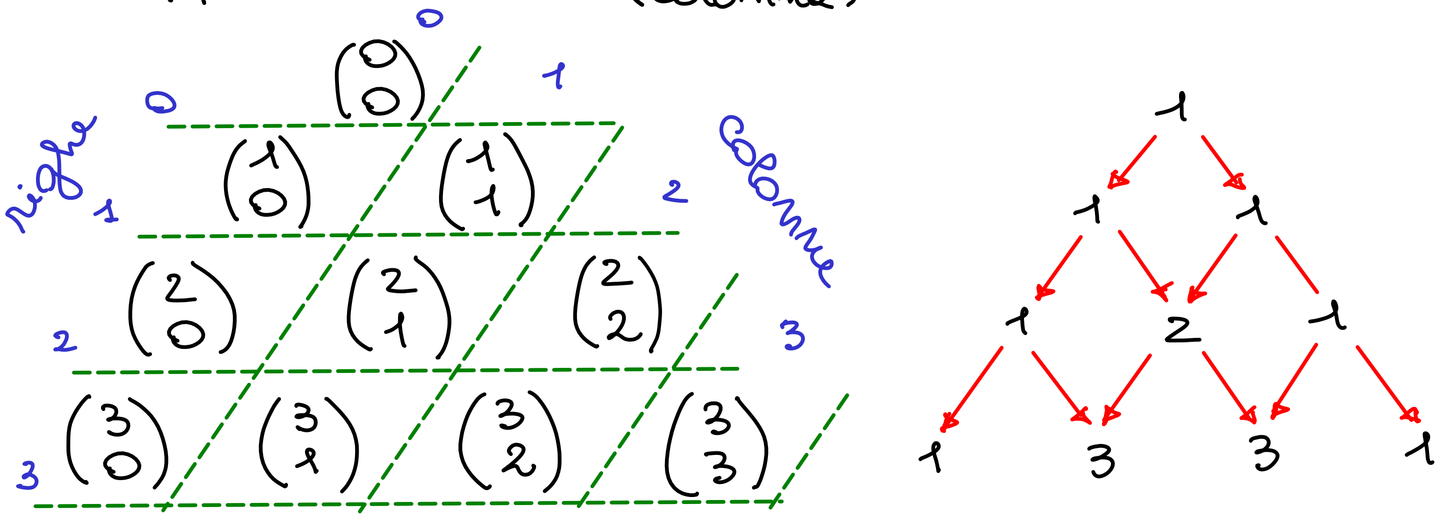
indica il FATTORIALE di n.

Per k intero tale che $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{k!}$$

indica il COEFFICIENTE BINOMIALE n su k.

Rappresentazione $\binom{\text{riga}}{\text{colonna}}$



Esempio di calcolo

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{5\cdot \cancel{4}^{\,2}\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot \cancel{2}} = 10.$$

Proprietà

1) $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}$$

2) $$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!}\bigl(k + (n-k+1)\bigr) = \binom{n+1}{k}$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (POTENZA DI UN BINOMIO)

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^+ \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

dim. Per induzione.

Passo base. Per $n=1$, $(a+b)^1 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = 1 \cdot a^0 b^1 + 1 \cdot a^1 b^0$

VERO

Passo induttivo. Per $n \geq 1$,

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\cdot(a+b)^n \underset{P(n)}{=} (a+b) \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$\boxed{k = k+1}$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \Bigg(\underbrace{\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}}_{\binom{n+1}{k}} \Bigg) a^k b^{n+1-k} + b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$P(n+1)$ è VERA!

$\square$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$ Per $n=4$:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0} a^0 b^4 + \binom{4}{1} a^1 b^3 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^3 b^1 + \binom{4}{4} a^4 b^0$$

$$= b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4.$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1