CAPITOLO 6: GRAFI

6.1 Definizioni

DEF Un GRAFO G è una coppia (V, E) dove V è un insieme e $E \subseteq \binom{V}{2}$

(dove $\binom{V}{k} \overset{\text{def}}{=} \{A \subseteq V : |A| = k\}$).

V si dice INSIEME DEI VERTICI di G

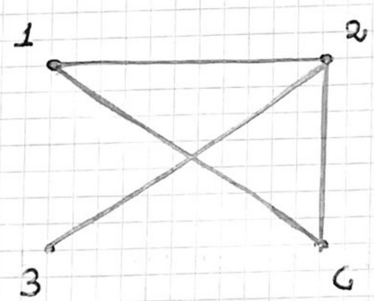
E si dice INSIEME DEI LATI (o spigoli, o edges) di G.

Si rappresenta graficamente un grafo $G = (V, E)$ disegnando un punto per ogni elemento di V e collegando due punti di V con un segmento (anche curvilineo) se e solo se i vertici corrispondenti sono un lato.

esempio

$$G = \left([4], \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}\right)$$

$$\Updownarrow$$



$= G$

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

DEF Un CAMMINO IN G è una sequenza $(v_0, v_1, \dots, v_k) \in V^{k+1}$ tale che $\{v_{i-1}, v_i\}$ è un lato $\forall\, i = 1, \dots, k$.

La LUNGHEZZA DEL CAMMINO è k.

DEF Un SENTIERO IN G è un cammino $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ tale che $v_i \neq v_j \quad \forall\, 0 \leq i, j \leq k, \; i \neq j$

(un cammino nel quale tutti i vertici sono distinti tra di loro)

DEF Un CAMMINO CHIUSO in G è un cammino $(v_0, \dots, v_k)$ tale che $v_0 = v_k$.

DEF Un CICLO IN G è un cammino chiuso $(v_0, \dots, v_k)$ tale che $(v_0, \dots, v_{k-1})$ è un sentiero.

Sia $n \in \mathbb{P}$

DEF Un GRAFO VUOTO (di ordine n) è

$$N_n \overset{def}{:=} ([n], \emptyset)$$

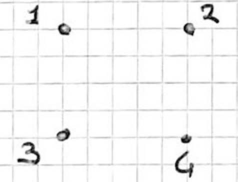
(ha vertici da 1 a n e non ha lati)

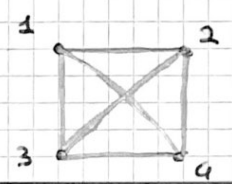
DEF Un GRAFO COMPLETO (di ordine n) è

$$K_n \overset{def}{:=} \left([n], \binom{[n]}{2}\right)$$

(ha vertici da 1 a n e lati tutte le possibili combinazioni di cardinalità 2)

esempio:

$N_4 =$ 

$K_4 =$ 

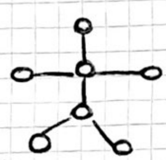
DEF G è **CONNESSO** se $\forall x, y \in V$
$x \neq y \Rightarrow \exists$ un cammino $(v_0, \dots, v_k)$ tale che

$$v_0 = x \quad e \quad v_k = y$$

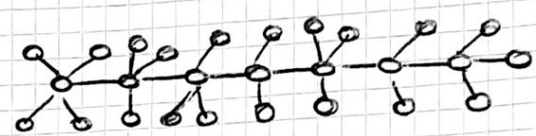
DEF G è **ACICLICO** (o UNA **FORESTA**) se G non ha cicli

DEF G è un **ALBERO** se G è aciclico e G è connesso

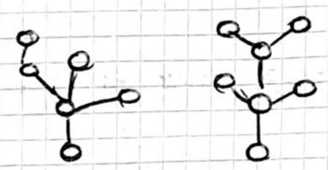
esempio:



è un albero



è un albero



è una foresta

Sia $S \subseteq V$

DEF S è **INDIPENDENTE** se

$$\begin{array}{l} x, y \in S \\ x \neq y \end{array} \Rightarrow \{x, y\} \notin E$$

la coppia x, y non è un lato

DEF S è <u>COMPLETO</u> (o UNA CLIQUE) se

$$\begin{matrix} x, y \in S \\ x \neq y \end{matrix} \quad \Rightarrow \{x, y\} \in E$$

x, y sono un lato

N.B. : x, y sono i vertici

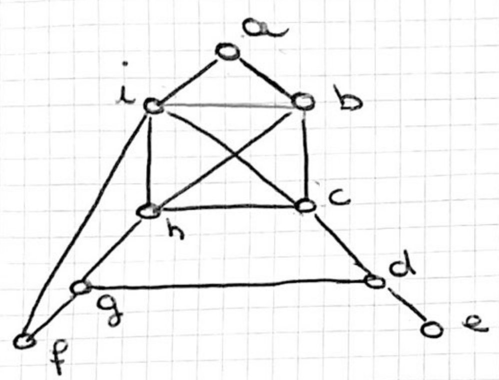
Sia $v \in V$.

DEF <u>IL GRADO DI v</u> è

$$d(v) \stackrel{def}{:=} |\{u \in V : \{u, v\} \in E\}|$$

formano un lato o sono collegati da un lato

esempio:



$S = \{b, c, h, i\}$ è completo

(tutte le possibili combinazioni tra di loro)

$S = \{a, c, f, e\}$ è indipendente

(non hanno un collegamento tra di loro)

$d(c) = 4$ (da C partono 4 lati)

$d(a) = 2$ $\quad$ $d(e) = 1$

(da a partono 2 lati, da e 1 lato)

(a, c, i, d, e) <u>non</u> è un sentiero e non un cammino.

conta l'ordine dei vertici infatti a <u>non</u> è collegato con C

(a, i, c, d, e) è un sentiero

(i lati hanno vertici distinti tra di loro)

$(\overset{v_0}{i}, c, b, a, \overset{v_4}{i})$ è un ciclo

(un cammino chiuso ($v_0 = v_4$) ed un sentiero)

Siano $G = (V, E)$ e $F(W, H)$ (due grafi)

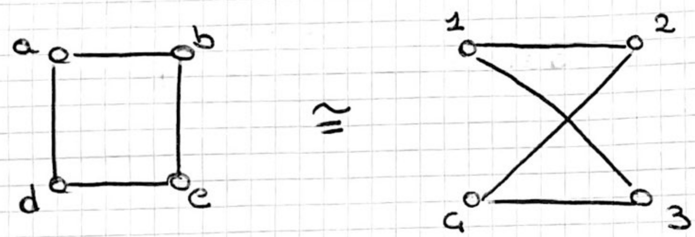
DEF G e F si dicono **ISOMORFI** se $\exists f : V \to W$, f biezione, tale che, per ogni $x, y \in V$, $x \neq y$, si ha che

$$\{x, y\} \in E \iff \{f(x), f(y)\} \in H$$

Intuitivamente: G e F sono ~~isof~~ isomorfi se posso cambiare i nomi dei vertici di uno dei due (es. di G) in modo che G ed F diventino uguali

Scriviamo allora $G \cong F$

esempio:



posso dire che sono isomorfi, infatti, se cambiamo i nomi facendo sì che siano uguali, i due grafi sono equivalenti

$(f(a) = 1,\ f(b) = 2,\ f(c) = 4,\ f(d) = 3)$
è un isomorfismo

LEM 6.1.1 Sia $G = (V, E)$ un grafo. Allora

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot E$$

la somma su tutti i vertici del grado, equivale a $2E$

DIM

Abbiamo che

$$\left| \{ (v, e) \in V \times E : v \in e \} \right| =$$

vado a contare l'insieme in due modi:

$$= \underbrace{\sum_{v \in V} d(v)}_{\text{n° di lati} \times \text{ogni vertice}}$$

Ma anche

$$\left| \{ (v, e) : V \times E : v \in e \} \right| =$$ guardo tutti i lati possibili e vedo quanti v soddisfano la proprietà

$$= \sum_{e \in E} \left| \{ v \in V : v \in e \} \right| =$$

$$= \sum_{e \in E} 2 = 2|E|$$ ogni lato ha 2 vertici

~~Ex~~ applic. del concetto di grado

Sia $O \overset{def}{:=} \{ \text{uomini americani} \}$

$D \overset{def}{:=} \{ \text{donne americane} \}$.

Sia $G = (O \cup D, E)$ il grafo definito ponendo

$\{x, y\} \in E \iff$ x e y hanno avuto un rapporto sessuale

(assumiamo per semplicità che tutti i rapporti sono eterosessuali)

Allora

per ogni uomo quanti partner sessuali ha avuto

n°

$$\#\text{ medio di partner degli uomini} = \frac{\sum_{u \in U} d(u)}{|U|}$$

n° degli uomini

Similmente per le donne

$$\#\text{ medio di partner delle donne} = \frac{\sum_{x \in D} d(x)}{|D|}$$

Intuitivamente:

Allora

$$\sum_{u \in U} d(u) = |E| = \sum_{x \in D} d(x)$$

n° dei lati presenti nel grafo

Pertanto

$$\frac{\dfrac{\sum_{u \in U} d(u)}{|U|}}{\dfrac{\sum_{x \in D} d(x)}{|D|}} = \frac{\dfrac{|E|}{|U|}}{\dfrac{|E|}{|D|}} = \frac{|D|}{|U|}$$

quindi non dipende dal n° dei partner ma dal n° di popolazione

$\Rightarrow$ Niente a che fare con le abitudini sessuali degli americani

Siano P una proprietà che un grafo può avere oppure no.

<u>DEF</u>: Si dice che P è ~~[illegible]~~ INVARIANTE per isomorfismi se vale quanto segue

$$(G \cong H) \Rightarrow ((G \text{ ha } P) \Leftrightarrow (H \text{ ha } P))$$

se due grafi sono isomorfi — o viceversa

$\forall$ G e H grafi

<u>esempio</u>:

- P = "è connesso" $\Rightarrow$ P è invariante per isomorfismi

  dal concetto di isomorfismo: variare i nomi ai vertici i due vertici iniziali sono ancora connessi tra di loro

  Se la P dice che è connesso, rimane tale

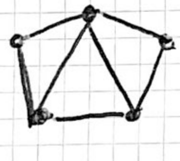
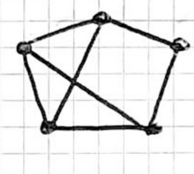
- P = "ha un ciclo di lunghezza 4" $\Rightarrow$ P è invariante per isomorfismi

  anche se cambio il nome ai vertici, il ciclo rimane

- P = "4 è un vertice" $\Rightarrow$ P <u>NON</u> è invariante per isomorfismi

  se ha 4 come vertice ed io cambio nomi, 4 non è più un vertice

esempio: (per dimostrare che due grafi sono o meno isomorfi)

G =  $\not\cong$  = H

(G ha un vertice di grado 4, H no)

(H ha un ciclo di lunghezza 4, G no)

6.2 ACCOPPIAMENTI

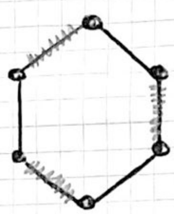
Sia $G = (V, E)$ un grafo, e sia $M \subseteq E$ — M un sottoin dei lati

<u>DEF</u>: M è un <u>ACCOPPIAMENTO</u> (o MATCHING) se

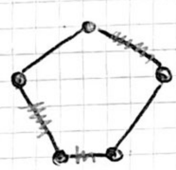
$$\left.\begin{array}{l} \{x,y\} \in M \\ \{u,v\} \in M \\ \{x,y\} \neq \{u,v\} \end{array}\right\} \Rightarrow \{x,y\} \cap \{u,v\} = \emptyset$$

questi lati non hanno vertici in comune

<u>esempio</u>:



$\Rightarrow$ Si



$\Rightarrow$ NO (hanno un vertice in comune)

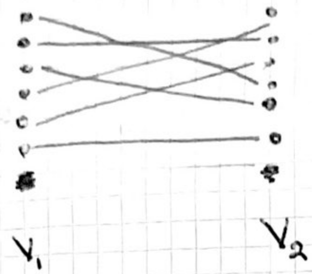
Sia $G = (V, E)$ un grafo

<u>DEF</u>: G si dice <u>BIPARTITO</u> se esistono $V_1, V_2 \subseteq V$, V_1 e V_2 indipendenti, tali che — non ci sono lati

$$V = V_1 \uplus V_2$$

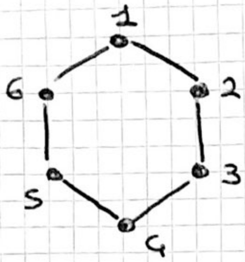
V è l'unione tra V_1 e V_2 e la loro intersezione è $\emptyset$

esempio



è bipartito

esempio

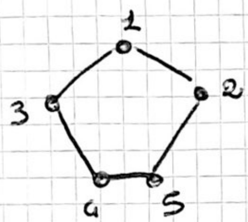


è bipartito
($V_1 = \{1,3,5\}$, $V_2 = \{2,4,6\}$)

$V_1 \cup V_2 = \{1,2,3,4,5,6\}$

$V_1 \cap V_2 = \{\emptyset\}$

esempio



NON è bipartito

(partendo dal vertice 1, i vertici 2 e 3, x non essere bipartito, vanno in V_2. 4 e 5, per lo stesso ragionamento, vanno in V_2, ma hanno un lato in comune)

Sia $G = (V, E)$ un grafo bipartito (sia $V = V_1 \uplus V_2$ come sopra)

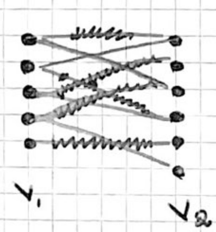
Sia M un accoppiamento di G.

DEF : Si dice che M è un accoppiamento di V_1 in V_2 se per $\forall u \in V_1 \Rightarrow \exists v \in V_2$ tale che

$\{u, v\} \in M$

qualche vertice di V_1 è collegato a qualche vertice di V_2 tramite M

esempio



è un accoppiamento di V_1 in V_2

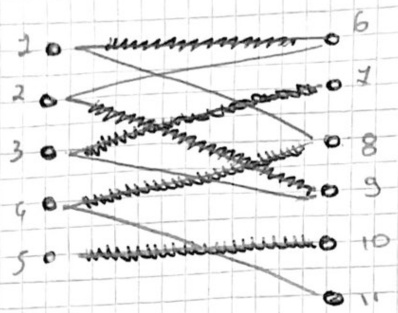
(i lati non hanno vertici in comune)

Sia $S \subseteq V_1$. Poniamo

$$N_G(S) \overset{def}{:=} \{ v \in V_2 : \exists\, u \in S \text{ con } \{u, v\} \in E \}$$

tutti i vertici di V_2 collegati a qualche vertice di S

<u>esempio</u>:



$$S = \{1, 3, 4\} \Rightarrow N_G(S) = \{6, 7, 8, 9, 11\}$$

6 è collegato a 1
7 è collegato a 3
8 è collegato a 1 e 4
9 è collegato a 3
11 è collegato a 4

<u>TEO 6.2.1</u> (TEOREMA DI HALL o T. DEL MATRIMONIO)
Sia G un grafo bipartito ($V = V_1 \uplus V_2$). Allora $\exists$ un accoppiamento di V_1 in V_2 se e solo se

$$|S| \leq |N_G(S)|$$

Per ogni $S \subseteq V_1$

<u>DIM</u> Omessa

Sia $G = (V, E)$ un grafo bipartito ($\Rightarrow V = V_1 \uplus V_2$)

DEF: Si dice che G è legato nei gradi (o costretto nei gradi) da V_1 a V_2 se

$$d(x) \geq d(y)$$

per $\forall x \in V_1$ e $\forall y \in V_2$

PROP. 6.2.2:
Sia $G = (V, E)$ un grafo bipartito ($\Rightarrow V = V_1 \uplus V_2$) legato nei gradi da V_1 a V_2. Allora esiste un accoppiamento di V_1 in V_2.

DIM
Usiamo 6.2.1.
Sia $d \in \mathbb{P}$ tale che $d(x) \geq d \geq d(y)$ per $\forall x \in V_1$ e $\forall y \in V_2$.
Sia $S \subseteq V_1$.
Sia

$$E^* \overset{def}{:=} \{ e \in E : e \cap S \neq \emptyset \}$$

Allora abbiamo che

$$d \cdot |S| \leq \sum_{x \in S} d(x) = |E^*| \leq |\{ e \in E : e \cap N_G(S) \neq \emptyset \}| =$$

$$= \sum_{y \in N_G(S)} d(y) \leq d \cdot |N_G(S)|$$

$\Rightarrow |S| \leq |N_G(S)| \Rightarrow$ esiste un accoppiamento di V_1 in V_2

Sia $G = (V, E)$ un grafo.

DEF G si dice <u>REGOLARE</u> (di grado r) ($r \in \mathbb{P}$) se $d(x) = r$ per $\forall x \in V$.

<u>COR 6.2.3</u>
Sia $G = (V, E)$ un grafo bipartito e regolare. Allora $\exists$ un accoppiamento di V_1 in V_2 e $\exists$ un accoppiamento di V_2 in V_1

<u>DIM</u> segue subito da 6.2.2

6.3 COLORAZIONE

Sia $G = (V, E)$ un grafo e sia $k \in \mathbb{P}$.

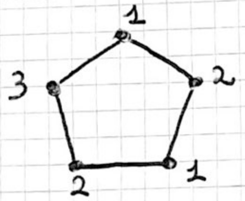
DEF G si dice <u>COLORABILE in al più k colori</u> se esiste la funzione $f: V \to [k]$ tale che

$$f(x) \neq f(y)$$

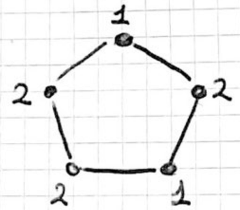
se $\{x, y\} \in E$.

DEF il <u>NUMERO CROMATICO DI G</u>, scritto $\chi(G)$ è il più piccolo $k \in \mathbb{P}$ tale che G è colorabile in al più k colori.

<u>esempio</u>



è una colorazione



non è una colorazione

$\Rightarrow \chi(G) = 3$

es [1+] : Sia G un grafo. Dimostrare che G è bipartito se e solo se $\chi(G) = 2$.

PROP 6.3.1

Sia $G = (V, E)$ un grafo. Allora

$$\chi(G) \leq \max_{v \in V} \{d(v)\} + 1 \qquad (*)$$

DIM induzione su $n \in \mathbb{N}$.

Sia $n \stackrel{def}{:=} |V|$.

Se $n = 1 \Rightarrow \chi(G) = 1 = 0+1 = \max_{v \in V}\{d(v)\} + 1$ ✓

se $n \geq 2$ e sia $(*)$ vero per tutti i grafi con $\leq n-1$ vertici $\Rightarrow$

Sia $G = (V, E)$ tale che $n = |V|$.

Sia $K \stackrel{def}{=} \max_{v \in V}\{d(v)\} + 1$.

Devo mostrare che G è colorabile con K colori. Sia $x \in V$. Siano

$$\{v_1, \dots, v_r\} \stackrel{def}{=} \{u \in V : \{u, x\} \in E\}.$$

Sia $G' \stackrel{def}{=} (V \setminus \{x\}, E \setminus \{\{v_1, x\}, \dots, \{v_r, x\}\})$

Allora $d_{G'}(v) \leq d(v)$ per $\forall v \in V \setminus \{x\}$.

Quindi

$$\underbrace{\chi(G') \leq \max_{v \in V \setminus \{x\}} (d_{G'}(v)) + 1}_{\text{x induzione}}$$