TEOREMI DI ANALISI

- **Successioni**

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Successioni di Cauchy

- **Limiti**

Teorema dell'unicità del limite

Teorema della permanenza del segno

Teorema del confronto

- **Funzioni continue**

Teorema degli zeri

Teorema dei valori intermedi

Teorema di Weierstrass

- **Derivate**

Teorema di Rolle

Teorema di Lagrange

Teorema di Cauchy (senza dimostrazione)

Teorema di de L'Hôpital (senza dimostrazione)

- **Integrali**

Teorema della media

Teorema fondamentale del calcolo integrale

- **Polinomi di Taylor e Mc Laurin**

Teorema di Taylor per il resto

Teorema del confronto

Teorema del confronto asintotico

Teorema del confronto con un integrale

I teoremi sui limiti sono 3:

- TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Se il limite esiste è unico.

$f(x)$ ha limite finito l per $x \to x_0$, allora tale limite è unico

- TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Ipotesi (Hp):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq 0$$

Tesi (Ts):

Se $l > 0$ $\exists I_{x_0} : f(x) > 0$

Se $l < 0$ $\exists I_{x_0} : f(x) < 0$

Dimostrazione:

Partiamo dalla definizione di limite $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \to |f(x) - l| < \varepsilon$

da cui $\quad l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \quad \longrightarrow \varepsilon = |l|$

$$l - |l| < f(x) < l + |l|$$

1) Se $l > 0$

$$l - l < f(x) < l + l \to 0 < f(x) < 2l \to f(x) > 0$$

2) Se $l < 0$

$$l - (-l) < f(x) < l + (-l) \to 2l < f(x) < 0 \to f(x) < 0$$

- TEOREMA DEL CONFRONTO

Ipotesi (Hp):

$h(x), f(x), g(x)$

Tesi (Ts):

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

1) Se $h(x) < f(x) < g(x)$

2) Se $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$

Dimostrazioni:

Partiamo dalla definizione di limite per $h(x)$

$\lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$ 1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \to |h(x) - \ell| < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$ 2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \to |g(x) - \ell| < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < g(x) < \ell + \varepsilon$

$I = I_1 \wedge I_2$ le relazioni valgono contemporaneamente
↓
1 e 2

Quindi $\Rightarrow$ $\ell - \varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < \ell + \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$

$|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

- Dimostrazione del teorema dell'unicità del limite

Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa e che quindi ammette due limiti distinti

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = l'$ con $l \neq l'$

Supponiamo che $|l' - l| > 2\varepsilon$

Applico la definizione di limite per entrambi:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists I(x_0) : \forall x \in I(x_0) \Rightarrow |f(x) - l'| < \varepsilon$

Andiamo a considerare il caso in cui $\forall x \in$ Intersezione $(x_0) := I(x_0) \cap I'(x_0)$
Così che possiamo dire $|f(x) - l| + |f(x) - l'| < 2\varepsilon$

Tutto ciò possiamo scriverlo come: $l' - l = (f(x) - l) - (f(x) - l')$
$\rightarrow |l' - l| \leq |f(x) - l| + |f(x) - l'| \leq 2\varepsilon$

Avendo supposto prima che $|l' - l| > 2\varepsilon$ otterremo un assurdo. Ciò significa che non ne possibile supporre che la funzione ammetta 2 limiti diversi. Quindi la negazione della tesi risulta falsa e di conseguenza affermeremo che se il limite esiste allora tale limite è unico.

Teorema degli zeri

Ipotesi: avendo una funzione *f (x),* ed essendo continua in un intervallo $[a,b]$ chiuso e limitato. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ (cioè agli estremi dell'intervallo *f (x)* assume valori di segno opposto)

Tesi: esiste almeno un punto $x_0 \in (a,b) : f(x_0) = 0$

Dimostrazione:

Supponiamo che f (a) < 0 e f (b) > 0

Prendo in considerazione un punto c (che sarà il punto medio) in mezzo all'intervallo [a,b] → $c = \frac{a+b}{2}$

Ora analizzo il valore della funzione f(x) nel punto intermedio c

- **Se f(c) è maggiore di zero**

  $$f(c) > 0$$

  la funzione ha un segno discorde rispetto a f(a)<0. Prendo in considerazione l'intervallo [a,c].

  $$[a_1, b_1] = [a, c]$$

  Poi cerco il suo punto intermedio.

  $$c_2 = \frac{a_1 + c_1}{2}$$

  E via dicendo

- **Se f(c) è minore di zero**

  $$f(c) < 0$$

  la funzione ha un segno concorde rispetto a f(a)<0. Prendo in considerazione l'intervallo [c,b].

  $$[a_1, b_1] = [c, b]$$

  Poi cerco il suo punto intermedio

  $$c_2 = \frac{c_1 + b_1}{2}$$

Ripeto l'operazione per n volte finché f(c)=0 ossia fin quando non incontro una radice. Quando f(c)=0 l'iterazione si interrompe.

Così facendo ottendo tre successioni

$$a_n, b_n, c_n$$

Fin quando f(c)≠0 il segno della funzione è

$$f(a_n) < 0$$

$$f(b_n) > 0$$

Dopo ogni iterazione la lunghezza dell'intervallo $[a_n, b_n]$ si dimezza.

$$b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$$

$$\vdots$$

Quindi dopo n iterazioni la lunghezza dell'intervallo è

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

La successione a_n è sicuramente crescente perché

$$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$$

Inoltre la successione a_n è limitata perché è contenuta nell'intervallo [a,b].

Essendo crescente e limitata, per il teorema del limite delle successioni monotone, la successione a_n ha un limite finito che chiamo x_0.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$$

La successione b_n la calcolo indirettamente dall'espressione precedente.

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

$$b_n = a_n + \frac{b-a}{2^n}$$

Il limite della successione b_n è uguale al limite della successione a_n perché il rapporto $b-a/2^n$ tende a zero.

$$\lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \frac{b-a}{2^n} = x_0$$

Quindi, entrambe le successioni a_n e b_n convergono a x_0 per n che tende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = x_0$$

La successione a_n è un'approssimazione per difetto di x_0 mentre la successione b_n è un'approssimazione per eccesso di x_0.

$$a_n \le x_0 \le b_n$$

Il valore della funzione f(x) nel punto x_0 è approssimabile al limite delle successioni a_n e b_n per n che tende a infinito.

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$$

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$$

Tuttavia, la prima è un'approssimazione per difetto di $f(x_0)$ mentre la seconda è un'approssimazione per eccesso di $f(x_0)$.

Sapendo che $f(a_n) \le 0$ e $f(b_n) \ge 0$.

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0$$

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0$$

Quindi, il valore della funzione $f(x_0)$ deve essere uguale a zero

$$f(x_0) = 0$$

Questo dimostra il teorema di esistenza degli zeri.

- TEOREMA DI ROLLE

Hp (IPOTESI): $y = f(x)$
continua $[a,b]$
derivabile in $]a,b[$
$f(a) = f(b)$

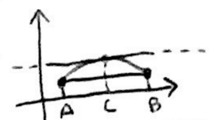
Ts (TESI):
$\exists' c \in]a,b[: f'(c) = 0$

Dimostrazione:

Essendo $f(x)$ continua in $[a,b]$ per il teorema di Weierstrass $\exists$ min e max

Se indico $f(c) = m$ (min) e con $f(d) = M$ (max)
posso dire che $f(c) = m < f(x) < M = f(d)$

PUNTO DI VISTA GEOM.



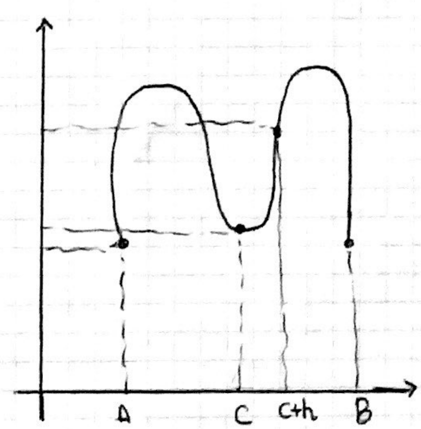
esiste un punto c in cui la tg al grafico è // alla retta AB e quindi all'asse x

Avremo 2 casi

1°) $m = M$ -> essendo $f(a) = f(b)$ => $f(x) =$ costante
e quindi $f' \equiv 0$ in particolare $f'(c) = 0$

2°) $m < M$ -> allora $f(c) = m < f(x) < M = f(d)$ $c \in [a,b]$

prendiamo un punto h di incremento -> $c+h \in [a,b]$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Se $h > 0$ -> $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0$

Se $h < 0$ -> $\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$

Facciamo il lim di $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0 \quad \text{Se } h \geq 0$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{Se } h \leq 0$$

Siccome $f(x)$ è derivabile per Hp i 2 limiti devono essere =

lo sono quando $\lim_{h \to 0^-} = \lim_{h \to 0^+} = f'(c) = 0$

- TEOREMA DI LAGRANGE

Hp (IPOTESI): $y = f(x)$

definita in $[a, b]$

continua in $[a, b]$

derivabile in $]a, b[$

Ts (TESI): $\exists! c \in [a,b]: \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

$\exists! c \in [a,b]: \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$

Dimostrazione:

Prendiamo una funzione ausiliaria $F(x) = f(x) - kx$ è continua e derivabile perché somma di funzioni cont. e der.

Determiniamo k in modo che valga Rolle -> quindi avremo:

$F(a) = F(b)$

$F(a) = f(a) - ka$

$F(b) = f(b) - kb$ -> le uguaglio

$$f(a) - ka = f(b) - kb$$
$$kb - ka = f(b) - f(a)$$
$$k(b-a) = f(b) - f(a)$$
$$k = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

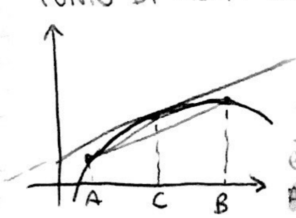
Vado a sostituire k in $F(x) = f(x) - kx$

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot x$$

Ora vale Rolle -> quindi applichiamo la tesi -> $\exists! c \in [a,b]: f'(c) = 0$

Quindi andiamo a fare la derivata -> $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$

PUNTO DI VISTA GEOMETRICO



$\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ è il COEFFICENTE ANGOLARE del SEGMENTO che unisce i 2 estremi (AB)

Sappiamo che $f'(c)$ = COEFFICENTE ANG. DELLA TG.

Hanno lo stesso coeff. angolare e sono //

calcoliamolo in c

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

=> Conseguenze Lagrange

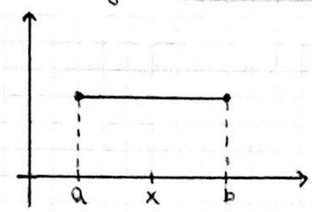
FUNZIONE CRESCENTE -> al crescere i valori dell'ascissa crescono i valori dell'ordinata

FUNZIONE DECRESCENTE -> al crescere dei valori dell'ascissa diminuiscono i valori dell'ordinata

- TEOREMA DI FUNZIONI COSTANTI

Hp (IPOTESI): $y = f(x)$
definita in $[a,b]$
continua in $[a,b]$
derivabile in $]a,b[$
e $f'(x) = 0$ in tutto l'intervallo

Ts (TESI) = $f(x) = \text{costante}$



Dimostrazione:

Applico Lagrange nell'intervallo $[a, x]$ con $x \in [a,b]$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c) \quad \text{se} \quad f'(x)=0 \to f'(c)=0$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$$ (con $x-a \neq 0$ perchè è a denominatore)

Per essere $= 0$ il numeratore sarà $= 0$ -> $f(x)-f(a)=0$
$f(x) = f(a)$ essendo $f(a) = k$
$f(x) = \text{costante}$

- CRESCENTE E DECRESCENTE

Hp (IPOTESI): $y=f(x)$ continua in $[a,b]$
derivabile in $]a,b[$

1) $f'(x)>0$
2) $f'(x)<0$

Ts (TESI):
$f(x)$ è crescente
$f(x)$ è decrescente

Dimostrazione:

1) $f'(x)>0$

Scelti 2 punti x_1 x_2 interni ad $[a,b]$ con $x_1 < x_2$

Applico Lagrange nell'intervallo $[x_1; x_2]$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) > 0$$ siccome $x_1 - x_2 > 0$
$f'(c) > 0$

allora anche $f(x_2) - f(x_1) > 0$

quindi $f(x_2) > f(x_2)$ quindi è crescente

2) $f'(x)<0$

Scelti 2 punti x_1 x_2 interni ad $[a,b]$ con $x_1<x_2$

Applico Lagrange nell'intervallo $[x_1; x_2]$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) < 0$$ siccome $x_2 - x_1 > 0$
$f'(c) < 0$

allora $f(x_2) - f(x_1) < 0$ -> $f(x_2) < f(x_1)$

quindi sarà decrescente

- TEOREMA DI CAUCHY

Hp (IPOTESI): 2 funzioni -> $y = g(x)$; $y = f(x)$

continue in $[a,b]$
derivabili in $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a,b[$

Ts (TESI): $\exists' c \in]a,b[$ in cui si ha $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

- TEOREMA DI DE L'HOSPITAL

Hp (IPOTESI): $y = f(x)$; $y = g(x)$ definite $I(x_0)$

continue in x_0 e $f(x_0) = g(x_0) = 0$
derivabili nell' $I(x_0)$
$g'(x) \neq 0$ $I\{x_0\}$
$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ts (TESI): $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x)}$

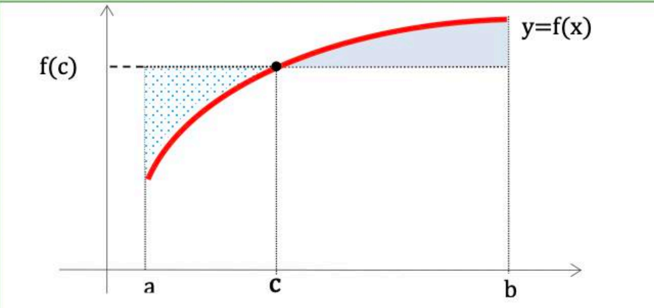
Teorema della media

enunciato

Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$

allora esiste almeno un punto $\boldsymbol{c}$ appartenente all'intervallo chiuso $[a, b]$ tale che:

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$$



Dimostrazione:

Essendo *f (x)* continua in [*a*,*b*] per il teorema di Weierstrass esiste un massimo e un minimo assoluto. Quindi scriveremo che $m \leq f(x) \geq M \qquad \forall x \in [a, b]$

Applichiamo ai 3 membri della disuguaglianza l'integrale definito tra gli estremi [*a*,*b*]

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$$

$$\int_a^b m\,dx = m \cdot \int_a^b dx = m \cdot (b-a)$$

$$\int_a^b M\,dx = M \cdot \int_a^b dx = M \cdot (b-a)$$

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M \cdot (b-a)$$

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} \leq M$$

Per il teorema di bolzano esisterà almeno un punto c appartenente all'intervallo [a,b] tale che

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{(b-a)} = f(c)$$

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \cdot f(c)$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

enunciato

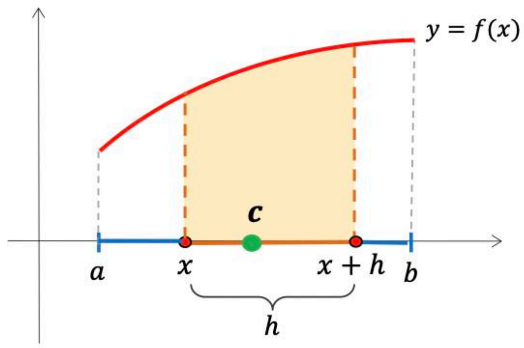
Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a, b]$

sia $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

una funzione detta *funzione integrale*

allora esiste la derivata prima della funzione integrale $F(x)$ in ogni punto x dell'intervallo chiuso [a, b] e si ha:

$$F'(x) = f(x)$$



Dimostrazione:

Consideriamo l'incremento h della funzione integrale $F(x)$ relativo ad un generico punto x dell'intervallo $[a, b]$	$F(x+h) - F(x)$
Tale incremento, per definizione di funzione integrale, è uguale a:	$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$
Per la proprietà additiva degli integrali definiti, il primo integrale si scompone nella somma dei due integrali (vedi figura in alto):	$\int_a^{x+h} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt$
L'incremento di $F(x)$ si scrive allora come somma di tre integrali definiti, cioè:	$F(x+h) - F(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$
Semplifichiamo i termini opposti. Si ottiene che l'incremento di $F(x)$ è uguale all'integrale definito di $f(t)$ calcolato tra x e $x+h$	$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt$
Applichiamo il *teorema della media* alla funzione $f(t)$ nell'intervallo $[x,\ x+h]$. Allora, esiste almeno un punto **c** dell'intervallo $[x,\ x+h]$ tale che:	$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = h \cdot f(c)$
Cioè l'incremento di $F(x)$ è uguale al prodotto tra h ed $f(c)$	$F(x+h) - F(x) = h \cdot f(c)$
Dividiamo entrambi i membri per h. Osserviamo che il primo membro rappresenta il rapporto incrementale di $F(x)$	$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(c)$