Logica e Reti Logiche
(Episodio 2: Il metodo dei *tableaux* per la Logica Proposizionale)

Francesco Pasquale

22 marzo 2021

Data una formula $\mathcal{F}$ della logica proposizionale, come possiamo verificare se $\mathcal{F}$ è una tautologia? Nell'Episodio 1 abbiamo visto che, per definizione, è sufficiente scrivere la tabella di verità e verificare che $\mathcal{F}$ risulti `T` in tutte le interpretazioni.

In questo episodio introduciamo il cosiddetto metodo dei *tableaux*, che è più "flessibile" rispetto alle tabelle di verità perché, al contrario di queste ultime, potremo poi generalizzarlo al caso della Logica del Primo Ordine.

Per seguire le argomentazioni esposte in questi appunti è necessario conoscere le tabelle di verità dei connettivi principali e il significato di termini quali "formula ben formata" e "tautologia". Se non ve li ricordate, fate prima un veloce ripasso dell'Episodio 1.

1 Antipasto

Sia $\mathcal{F}$ la formula seguente

$$((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \vee (q \Rightarrow r)) \ ,$$

secondo voi $\mathcal{F}$ è una tautologia oppure no? Dall'episodio precedente sappiamo che per scoprirlo ci basta fare la tabella di verità. Ma, per il momento, fate la vostra scommessa, resistete un attimo alla tentazione di fare la tabella di verità e proviamo a ragionare in un altro modo.

1. Prendiamo la sua negazione $\sim\mathcal{F}$

   $$\sim [((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \vee (q \Rightarrow r))] \qquad (1)$$

   e prima di tutto osserviamo che la formula (1) qui sopra è vera in qualche interpretazione se e solo se $\mathcal{F}$ non è una tautologia. Quindi *per vedere se $\mathcal{F}$ non è una tautologia possiamo dimenticarci di $\mathcal{F}$ e vedere se esiste una interpretazione che rende la* (1) *vera.*

2. La formula (1) è del tipo $\sim [\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2]$, dove $\mathcal{F}_1$ è $(p \wedge q) \Rightarrow r$ e $\mathcal{F}_2$ è $\sim p \vee (q \Rightarrow r)$. Quindi è vera se e soltanto se $\mathcal{F}_1$ è vera e $\mathcal{F}_2$ è falsa, ossia se e soltanto se $\mathcal{F}_1$ e $\sim\mathcal{F}_2$ sono entrambe vere. La formula (1) quindi è vera se e solo se sono vere entrambe le formule (2) e (3) qui sotto

$$
\begin{array}{cc}
\underline{\sim[((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \vee (q \Rightarrow r))]} & (1) \\
\\
(p \wedge q) \Rightarrow r & (2) \\
\sim(\sim p \vee (q \Rightarrow r)) & (3)
\end{array}
$$

Quindi *per vedere se esiste un'interpretazione che rende* (1) *vera, possiamo dimenticarci di* (1) *e vedere se esite una interpretazione che rende vere* <u>*entrambe*</u> (2) *e* (3).

3. Passiamo a considerare (2): è una implicazione, quindi è vera quando o $(p \wedge q)$ è falso oppure quando r è vero. In altre parole, quando almeno una è vera, fra le due formule (4) ed (5) qui sotto

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\underline{\sim[((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \vee (q \Rightarrow r))]} \quad (1)} \\
\\
\multicolumn{4}{c}{\underline{(p \wedge q) \Rightarrow r} \quad (2)} \\
\multicolumn{4}{c}{\sim(\sim p \vee (q \Rightarrow r)) \quad (3)} \\
\multicolumn{2}{c}{\swarrow} & \multicolumn{2}{c}{\searrow} \\
\sim(p \wedge q) & (4) & r & (5)
\end{array}
$$

Osservate che (4) e (5) non le abbiamo messe una sotto l'altra, come avevamo fatto con (2) e (3), ma abbiamo creato due "rami". Questo perché *per vedere se esiste una interpretazione che rende vere sia* (2) *che* (3), *possiamo dimenticarci di* (2) *e vedere se esiste un'interpretazione che rende vera* (3) *e* <u>*almeno una*</u> *fra* (4) *e* (5)

4. Andiamo a considerare (3): è la negazione di un OR, quindi è vera se e solo se $\sim p$ e $(q \Rightarrow r)$ sono entrambe false, in altre parole, quando entrambe le formule (6) e (7) qui sotto sono vere

$$
\begin{array}{cccc}
\multicolumn{4}{c}{\underline{\sim[((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \vee (q \Rightarrow r))]} \quad (1)} \\
\\
\multicolumn{4}{c}{\underline{(p \wedge q) \Rightarrow r} \quad (2)} \\
\multicolumn{4}{c}{\underline{\sim(\sim p \vee (q \Rightarrow r))} \quad (3)} \\
\multicolumn{2}{c}{\swarrow} & \multicolumn{2}{c}{\searrow} \\
\sim(p \wedge q) & (4) & r & (5) \\
p & (6) & p & (6) \\
\sim(q \Rightarrow r) & (7) & \sim(q \Rightarrow r) & (7)
\end{array}
$$

Osservate che (6) e (7) le abbiamo messe una sotto l'altra e ripetute sotto entrambi i rami. Infatti, *per vedere se esiste una interpretazione che rende vera* (3) *e almeno una fra* (4) *e* (5), *possiamo dimenticarci di* (3) *e vedere se esiste una interpretazione che rende vere* (4), (6) *e* (7), *oppure* (5), (6) *e* (7).

5. Andiamo a (4): è la negazione di un AND, quindi è vera quando almeno una delle due fra p e q è falsa, ossia quando o la (8) è vera oppure la (9) è vera

$$
\begin{array}{c}
\underline{\sim[((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \vee (q \Rightarrow r))]} \qquad (1) \\[4pt]
\underline{(p \wedge q) \Rightarrow r} \qquad (2) \\
\underline{\sim(\sim p \vee (q \Rightarrow r))} \qquad (3) \\[4pt]
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\[4pt]
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\underline{\sim(p \wedge q)} \quad (4) \\
p \quad (6) \\
\sim(q \Rightarrow r) \quad (7) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \sim p \quad (8) \\ \text{X} \end{array} & \sim q \quad (9)
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
r \quad (5) \\
p \quad (6) \\
\sim(q \Rightarrow r) \quad (7)
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Per vedere se esiste una interpretazione che rende vere (4), (6) *e* (7) *perciò possiamo dimenticarci di* (4) *e vedere se esiste una interpretazione che rende vere* (6), (7) *e* (8)*, oppure* (6)*,* (7) *e* (9). Tuttavia, una interpretazione che renda vere (6), (7), e (8) non può esistere, perchè per rendere vera (6) la variabile p dovrebbe essere `T` mentre per rendere vera (8) dovrebbe essere `F`. Diciamo che quel ramo è *chiuso* e nello schema ho indicato questo fatto con una X. Per vedere se esiste un'interpretazione che rende vere (6), (7) e (9) dobbiamo ancora procedere fino a scomporre la (7).

6. Per quanto riguarda le formule (5) e (6), sono già delle variabili quindi non c'è più niente da scomporre. Ci resta da considerare la formula (7): è la negazione di un'implicazione, quindi. . .

$$
\begin{array}{c}
\underline{\sim[((p \wedge q) \Rightarrow r) \Rightarrow (\sim p \vee (q \Rightarrow r))]} \qquad (1) \\[4pt]
\underline{(p \wedge q) \Rightarrow r} \qquad (2) \\
\underline{\sim(\sim p \vee (q \Rightarrow r))} \qquad (3) \\[4pt]
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\[4pt]
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
\underline{\sim(p \wedge q)} \quad (4) \\
p \quad (6) \\
\underline{\sim(q \Rightarrow r)} \quad (7) \\
\swarrow \qquad \searrow \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c} \sim p \quad (8) \\ \text{X} \end{array} &
\begin{array}{c} \sim q \quad (9) \\ q \quad (10) \\ \sim r \quad (11) \\ \text{X} \end{array}
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
r \quad (5) \\
p \quad (6) \\
\underline{\sim(q \Rightarrow r)} \quad (7) \\
q \quad (10) \\
\sim r \quad (11) \\
\text{X}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

Anche il secondo e il terzo ramo si chiudono: il secondo perché non può esistere una interpretazione che renda vere entrambe le formule (9) e (10), il terzo perché non può esisere una interpretazione che renda vere entrambe le formule (5) e (11).

Non c'è più niente da scomporre e abbiamo un albero con tutti i rami *chiusi*. Che cosa significa? Torniamo un attimo indietro e vediamo di ripercorrere quello che abbiamo fatto con riferimento al nostro schema di formule:

- Avevamo la nostra formula $\mathcal{F}$ e volevamo scoprire se è una tautologia oppure no. Siamo partiti da $\sim\mathcal{F}$, la formula (1), e abbiamo osservato che $\mathcal{F}$ non è una tautologia se e solo se esiste un'interpretazione che rende $\mathtt{T}$ la formula (1).

- Esiste un'interpretazione che rende $\mathtt{T}$ la formula (1) se e solo se esiste un'interpretazione che rende $\mathtt{T}$ entrambe le formule (2) e (3)

$$\{(2 \text{ e } 3)\}$$

- Esiste un'interpretazione che rende $\mathtt{T}$ la formula (2) se e solo se esiste un'interpretazione che rende $\mathtt{T}$ la formula (4) o la formula (5)

$$\{(3 \text{ e } 4) \text{ oppure } (3 \text{ e } 5)\}$$

- Esiste un'interpretazione che rende $\mathtt{T}$ la formula (3) se e solo se esiste un'interpretazione che rende $\mathtt{T}$ entrambe le formule (6) e (7)

$$\{(4, 6 \text{ e } 7) \text{ oppure } (5, 6 \text{ e } 7)\}$$

- Esiste un'interpretazione che rende $\mathtt{T}$ la formula (4) se e solo se esiste un'interpretazione che rende $\mathtt{T}$ la formula (8) o la formula (9)

$$\{(6, 7 \text{ e } 8) \text{ oppure } (6, 7 \text{ e } 9) \text{ oppure } (5, 6 \text{ e } 7)\}$$

- Non esiste nessuna interpretazione che rende $\mathtt{T}$ sia la formula (6) che la formula (8).

$$\{(6, 7 \text{ e } 9) \text{ oppure } (5, 6 \text{ e } 7)\}$$

- Esiste un'interpretazione che rende $\mathtt{T}$ la formula (7) se e solo se esiste un'interpretazione che rende $\mathtt{T}$ entrambe le formule (10) e (11)

$$\{(6, 9, 10, \text{ e } 11) \text{ oppure } (5, 6, 10 \text{ e } 11)\}$$

- Non esiste nessuna interpretazione che rende $\mathtt{T}$ sia la formula (9) che la formula (10).

$$\{(5, 6, 10 \text{ e } 11)\}$$

- Non esiste nessuna interpretazione che rende $\mathtt{T}$ sia la formula (5) che la formula (11).

$$\emptyset$$

Quindi non esiste nessuna interpretazione che renda la (1) vera. Perciò tutte le interpretazioni rendono vera $\mathcal{F}$.

Esercizio 1. Verificare con una tabella di verità che $\mathcal{F}$ è una tautologia.

2 Le regole del gioco

Nell'esempio visto in dettaglio nella sezione precedente, abbiamo costruito un "albero" (il *tableaux*) in cui, scendendo dalla *radice* $\sim\mathcal{F}$ alle foglie troviamo via via formule con meno simboli, fino ad arrivare a formule che sono o variabili o variabili negate. Ogni volta che abbiamo "sviluppato" una formula in formule più semplici, l'abbiamo fatto preservandone la *soddisfacibilità* (l'esistenza di interpretazioni che rendono vere le formule).

Cerchiamo ora di derivare le regole che ci consentono di costruire "meccanicamente" un *tableaux* come quello della sezione precedente per ogni formula $\mathcal{F}$, in modo da poter eventualmente istruire un computer a farlo per noi.[1]

Osserviamo che ogni formula ben formata $\mathcal{F}$ (vedi la Definizione 1 nell'episodio precendente) che non è una variabile o una variabile negata è sempre, tranne un paio di casi particolari, equivalente all'AND di due formule o all'OR di due formule. Per esempio, $\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2$ è equivalente a $\sim\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ mentre $\sim(\mathcal{F}_1 \Rightarrow \mathcal{F}_2)$ è equivalente a $\mathcal{F}_1 \wedge \sim\mathcal{F}_2$.

Nella costruzione del tableaux si procede come segue: se abbiamo una formula α equivalente all'AND di due formule $\alpha_1 \wedge \alpha_2$, la sostituiamo con α_1 e α_2, messe una sotto l'altra, mentre se abbiamo una formula β equivalente all'OR di due formule $\beta_1 \vee \beta_2$, la sostuiamo con due "rami", uno con β_1 e l'altro con β_2.

$$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & \beta & \\ \swarrow & & \searrow \\ \beta_1 & & \beta_2 \end{array} \tag{1}$$

Esercizio 2. Ripercorrere l'esempio della sezione precedente indicando quali formule sono α, quali β e quali né α né β.

Esercizio 3. Per ognuna delle formule seguenti, dire se è una formula α o β e individuare chi sono α_1 e α_2, nel primo caso, e β_1 e β_2 nel secondo

$$p \downarrow q, \quad p|q, \quad (p \wedge q) \Rightarrow (\sim p \vee q), \quad p \Rightarrow ((q \vee p) \Rightarrow r)$$

Alla classificazione α-β sfuggono due casi: il primo è quello in cui la formula $\mathcal{F}$ è $\sim\mathcal{F}_1$ e a sua volta $\mathcal{F}_1$ è $\sim\mathcal{F}_2$, per qualche formula $\mathcal{F}_2$. In questo caso, siccome $\mathcal{F}$ è $\sim\sim\mathcal{F}_2$, nel tableaux possiamo semplicemente sostituire $\mathcal{F}$ con $\mathcal{F}_2$. Il secondo caso è quello in cui la formula $\mathcal{F}$ è $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}_2$.

Esercizio 4. Ricavare la regola da usare nel caso in cui $\mathcal{F}$ è $\mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F}_2$.

Diciamo che una formula $\mathcal{F}$ è *dimostrabile* con il metodo del tableaux se, partendo dalla formula $\sim\mathcal{F}$ e applicando le regole a tutte le formule che si ottengono fino ad arrivare alle variabili o alle variabili negate, tutti i rami del tableaux risultano chiusi (ossia, in ogni ramo c'è almeno una variabile con la sua negata).

Esercizio 5. Per ognuna delle formule seguenti verificare se è dimostrabile con il metodo dei tableaux oppure no

1. $(p \Rightarrow q) \vee \sim p$
2. $(p \Rightarrow (p \equiv q)) \vee \sim(p \vee q)$
3. $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
4. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

[1] Per esempio, qui trovate un *prover* pronto all'uso: https://www.umsu.de/trees/

5. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$
6. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
7. $p \Rightarrow \sim p$
8. $p \equiv \sim p$
9. $(p \equiv q) \equiv (\sim p \equiv \sim q)$
10. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
11. $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$
12. $(\sim p \vee \sim q) \equiv \sim(p \vee q)$
13. $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
14. $(p \equiv (p \wedge q)) \equiv (q \equiv (p \vee q))$

Nel prossimo episodio dimostreremo che tutte e sole le formule della logica proposizionale dimostrabili tramite il metodo dei tableaux sono le tautologie.

Esercizio 6. Verificare che tutte le formule dell'esercizio precedente che risultano dimostrabili con il medoto dei tableaux sono tautologie.

Esercizio 7. Se $\mathcal{F}$ è una formula non dimostrabile con il meodo dei tableaux, nel tableaux che si ottiene partendo da $\sim\mathcal{F}$ applicando le regole finché è possibile deve esserci almeno un ramo che non è chiuso. In quel ramo quindi ogni variabile può o non comparire oppure comparire asserita o negata, ma non può comparire sia asserita che negata. Si consideri un'interpretazione che assegna valore `T` a ogni variabile che compare asserita e valore `F` a ogni variabile che compare negata oppure non compare. Quanl è il valore di verità di $\mathcal{F}$ in una tale interpretazione?

3 Conclusioni

In questo episodio abbiamo studiato un metodo automatico per costruire un albero (*tableaux*) a partire da una formula $\sim\mathcal{F}$ della logica proposizionale. Siccome ogni volta che applichiamo una regola otteniamo formule con meno simboli, il metodo termina sempre dopo un numero finito di applicazioni delle regole. Abbiamo definito una formula $\mathcal{F}$ *dimostrabile* con il metodo dei *tableaux* se, quando non ci sono più formule a cui appplicare le regole, il *tableaux* risultante a partire da $\mathcal{F}$ ha tutti i rami *chiusi*.