Logica e Reti Logiche

Anno Accademico: 2020-2021

Primo Test Intermedio

Docente: Francesco Pasquale

22 aprile 2021

Ogni esercizio vale 6 punti. La sufficienza si raggiunge con 18 punti.

Esercizio 1. Si consideri la successione $\{a_n\}_{n \geqslant 0}$ definita da

$$\begin{cases} a_0 & = & 2 \\ a_n & = & (a_{n-1})^2 \quad \text{per } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è corretta e dimostrarlo per induzione.
Per ogni $n \geqslant 0$,

1. $a_n = 2(n+1)^2$
2. $a_n = 2^{n+1}$
3. $a_n = 2 \cdot 2^{2n}$
4. $a_n = 2^{2^n}$
5. $a_n = 2 \cdot (n+1)!$
6. Nessuna delle precedenti: $a_n = \dots$.

Esercizio 2. Per ognuna delle due formule seguenti, dire se la formula è una tautologia, una contraddizione o una contingenza, motivando adeguatamente la risposta

1. $[(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)] \Rightarrow [(p \wedge r) \Rightarrow (q \wedge s)]$
2. $[(\sim p \Rightarrow q) \wedge (\sim r \Rightarrow s)] \equiv (p \wedge \sim q \wedge r \wedge \sim s)$

Esercizio 3. Per ognuna delle due formule seguenti, dare una interpretazione in cui la formula è vera e una interpretazione in cui è falsa

1. $\exists x P(x) \wedge \sim \forall x P(x)$
2. $\forall x \exists y P(x,y) \wedge \sim \exists y \forall x P(x,y)$

Esercizio 4. Usando il metodo dei *tableaux* dimostrare che la formula seguente è valida

$$\exists x \forall y P(x,y) \wedge \exists y \forall x Q(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y (P(x,y) \wedge Q(x,y))$$

Esercizio 5. Sia $\mathcal{S}$ il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

A1 : $X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$

A2 : $[X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)] \Rightarrow [(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z)]$

e dalla regola di inferenza *Modus Ponens*. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{S}$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r),\, q \vdash p \Rightarrow r$$

Logica e Reti Logiche

Anno Accademico: 2020-2021

Secondo Test Intermedio

Docente: Francesco Pasquale

7 giugno 2021

Ogni esercizio vale 6 punti. La sufficienza si raggiunge con 18 punti.

Esercizio 1. Trasformare la formula $\mathcal{F}$ in una formula equivalente in forma normale somma di prodotti, minimizzandola tramite la mappa di Karnaugh, e disegnare il circuito corrispondente

$$\mathcal{F}: \ (a + \overline{b} + c)(\overline{a} + \overline{b} + c)(a + \overline{b} + \overline{c})$$

Esercizio 2. Implementare la funzione seguente usando soltanto un MULTIPLEXER 2:1, una porta OR a due ingressi e una porta AND a due ingressi

$$y = a\,c\,d + a\,\overline{d} + \overline{a}\,b\,\overline{d} + b\,c\,d$$

Esercizio 3. Usando tre FULL-ADDER e tre FLIP-FLOP progettare un circuito che conti alla rovescia modulo *otto*. Ossia, il circuito deve avere tre output, y_2, y_1, y_0: ad ogni ciclo di clock, il numero rappresentato in binario dalla terna di bit (y_2, y_1, y_0) deve essere di una unità inferiore, modulo *otto*, al numero rappresentato dalla terna precedente. Per esempio, assumendo che il circuito parta dallo stato in cui i tre bit in output sono $(0, 0, 0)$ (*zero*), al ciclo di clock successivo i tre bit devono essere $(1, 1, 1)$ (*sette*), a quello successivo $(1, 1, 0)$ (*sei*), poi $(1, 0, 1)$ (*cinque*), e così via.

Esercizio 4. Progettare una macchina alla Mealy e una macchina alla Moore che prendano in input una sequenza di bit e restituiscano in output 1 quando gli ultimi tre bit letti sono 011 e restituiscano 0 in tutti gli altri casi. Per ognuna delle due macchine scrivere il diagramma e le equazioni di stato e disegnare il circuito.

Esercizio 5. Scrivere il numero $-18,75$ secondo lo standard IEEE-754 per i numeri in virgola mobile a precisione singola, spiegando il procedimento utilizzato. Dire a quale numero corrisponde la sequenza di bit ottenuta, se la si interpreta in complemento a due a 32 bit.

Logica e Reti Logiche

Anno Accademico: 2020-2021

Sessione Invernale - Secondo Appello

Docente: Francesco Pasquale

16 febbraio 2022

Ogni esercizio vale 6 punti. La sufficienza si raggiunge con 18 punti.

Esercizio 1. Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geqslant 1$, la somma dei primi n numeri dispari è uguale a n^2 (per esempio, la somma dei primi 4 numeri dispari $1+3+5+7$ è uguale a 4^2).

Esercizio 2. Utilizzando le mappe di Karnaugh, scrivere una formula $\mathcal{G}$ in forma normale somma di prodotti equivalente alla formula $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F}: \ (a+b+c)(a+\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c})(\overline{a}+b+c)$$

Disegnare poi il circuito corrispondente alla formula $\mathcal{G}$.

Esercizio 3. Dire se la formula seguente è valida oppure no. In caso affermativo dimostrarlo usando il metodo dei *tableaux*, in caso negativo esibire un'interpretazione che rende falsa la formula

$$\forall x\, [P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow \exists x P(x) \vee \forall x Q(x)$$

Esercizio 4. Scrivere i numeri seguenti in complemento a due a sei bit e dire in quali casi la somma va in *overflow*, motivando adeguatamente la risposta

1. $24_{10} + 8_{10}$
2. $F_{16} + 9_{16}$
3. $(-20)_{10} + 25_{10}$
4. $(-8)_{10} + (-24)_{10}$

Esercizio 5. Un circuito sequenziale ha due ingressi, x_1 e x_2, un'uscita, y, e due D-FlipFlop ed è specificato dalle seguenti equazioni

$$D_1 = \overline{x_1}Q_1 + x_1x_2; \qquad D_2 = \overline{x_1}Q_2 + x_1Q_1; \qquad y = \overline{x_2}(Q_1 + \overline{Q_2})$$

dove Q_i e D_i indicano rispettivamente lo stato corrente e lo stato futuro dell'i-esimo FlipFlop, per $i = 1, 2$.
Disegnare il circuito e scrivere tabella e diagramma di stato.

Logica e Reti Logiche

Anno Accademico: 2020-2021

Sessione Invernale - Primo Appello

Docente: Francesco Pasquale

19 gennaio 2022

Ogni esercizio vale 6 punti. La sufficienza si raggiunge con 18 punti.

Esercizio 1. Dimostrare per induzione che $6^n - 1$ è divisibile per 5, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2. Scrivere una formula $\mathcal{F}$ che contenga soltanto i connettivi $\Rightarrow$ e $\sim$ e abbia la seguente tabella di verità

p	T	T	T	T	F	F	F	F
q	T	T	F	F	T	T	F	F
r	T	F	T	F	T	F	T	F
$\mathcal{F}$	T	F	T	T	T	T	T	F

Esercizio 3. Una delle due formule seguenti è valida, l'altra no:

1. $\forall x\,[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
2. $\forall x\,[P(x) \vee Q(x)] \Rightarrow \forall x P(x) \vee \exists x Q(x)$

Per la formula valida dare una dimostrazione usando il metodo dei *tableaux*; per quella non valida esibire un'interpretazione che la rende falsa.

Esercizio 4. Progettare un circuito combinatorio che prenda in input quattro bit x_0, x_1, x_2, x_3, che rappresentano in binario il numero $n = \sum_{i=0}^{3} x_i 2^i$, e restituisca in output due bit y_0, y_1, che esprimano in binario il resto della divisione per *tre* del numero n in input.

Per esempio, se i bit in input sono $(x_3, x_2, x_1, x_0) = (0, 1, 0, 1)$, che in binario rappresentano il numero *cinque* $= 2^2 + 2^0$, il circuito deve restituire in output $(y_1, y_0) = (1, 0)$, che è la rappresentazione binaria del numero *due*.

Esercizio 5. Progettare un automa a stati finiti che legga una sequenza di bit e restituisca 1 ogni volta che gli ultimi quattro bit della sequenza sono 1101 e 0 altrimenti: disegnare il diagramma di stato, scrivere la tabella e le equazioni di stato e disegnare lo schema del circuito.

Logica e Reti Logiche

Anno Accademico: 2020-2021

Sessione Autunnale - Primo Appello

Docente: Francesco Pasquale

7 settembre 2021

Ogni esercizio vale 6 punti. La sufficienza si raggiunge con 18 punti.

Esercizio 1. Sia $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ la successione dei numeri di Fibonacci,

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{per } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che, per ogni $n \geqslant 2$,

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}\,.$$

Esercizio 2. Per ognuna delle due formule seguenti dire se è una tautologia, una contraddizione o una contingenza, motivando adeguatamente la risposta

1. $\Big((p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge ((q \vee r) \Rightarrow s)\Big) \Rightarrow \big((p \vee q \vee \sim s) \wedge (p \vee r \vee \sim s)\big)$
2. $\big((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)\big) \equiv \big((p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)\big)$

Esercizio 3. Sia $\mathcal{F}$ la formula seguente

$$[\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)] \Rightarrow \exists x\,[P(x) \wedge Q(x)]$$

1. Dare un'interpretazione in cui $\mathcal{F}$ è falsa;
2. Scrivere una formula equivalente a $\mathcal{F}$ senza usare il connettivo $\Rightarrow$ e il quantificatore $\exists$;

Esercizio 4. Progettare un circuito con tre ingressi, x_0, x_1, x_2, e un'uscita, y, che implementi la formula seguente

$$y = \overline{x_0}x_2 + \overline{x_1}x_2 + x_0x_1\overline{x_2}$$

usando due *Half-Adder* e nessun'altra porta logica.

Esercizio 5. Progettare una macchina alla Moore e una macchina alla Mealy che prendano in input una sequenza di bit e restituiscano in output 1 quando gli ultimi tre bit letti sono 101 e restituiscano 0 in tutti gli altri casi. Per ognuna delle due macchine scrivere il diagramma e le equazioni di stato e disegnare il circuito.

Logica e Reti Logiche

Anno Accademico: 2020-2021

Sessione Autunnale - Secondo Appello

Docente: Francesco Pasquale

21 settembre 2021

Ogni esercizio vale 6 punti. La sufficienza si raggiunge con 18 punti.

Esercizio 1. Sia $x > -1$ un numero reale. Dimostrare per induzione che $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ per ogni $n \geqslant 0$.

Esercizio 2. Sia $\mathcal{S}$ il sistema assiomatico definito dai seguenti schemi di assiomi

A1 : $X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$

A2 : $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow [(X \Rightarrow \sim Y) \Rightarrow \sim X]$

e dalla regola di inferenza *Modus Ponens*. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{S}$

$$\sim q,\, p \Rightarrow q \vdash \sim p$$

Esercizio 3. Dire se la formula seguente è valida oppure no. In caso affermativo dimostrarlo con il metodo dei *tableaux*, in caso negativo esibire un'interpretazione che rende falsa la formula

$$\exists x \forall y[P(x,y) \vee Q(x,y)] \Rightarrow \forall y[\exists x P(x,y) \vee \exists x Q(x,y)$$

Esercizio 4. Progettare un circuito che prenda in input due numeri espressi in binario a quattro bit, $\mathbf{a} = a_3a_2a_1a_0$ e $\mathbf{b} = b_3b_2b_1b_0$ e restituisca 1 se $\mathbf{b}$ è la metà di $\mathbf{a}$ e 0 altrimenti (per esempio, se $a_3a_2a_1a_0 = 0110$ e $b_3b_2b_1b_0 = 0011$ il circuito deve restituire 1 perché $\mathbf{a} = (6)_{10}$ e $\mathbf{b} = (3)_{10}$).

Esercizio 5. Spiegare sinteticamente lo standard *IEEE-754* per i numeri in virgola mobile a precisione singola e dire qual è il numero rappresentato dalla seguente sequenza di simboli esadecimali

`c1ca0000`

Logica e Reti Logiche

Anno Accademico: 2020-2021

Sessione Estiva - Primo Appello

Docente: Francesco Pasquale

24 giugno 2021

Ogni esercizio vale 6 punti. La sufficienza si raggiunge con 18 punti.

Esercizio 1. Sia $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ la successione dei numeri di Fibonacci,

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{per } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Dimostrare per induzione che $\sum_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}$, per ogni $n \geqslant 1$.

Esercizio 2. Per ognuna delle due formule seguenti, scrivere una formula equivalente usando soltanto i connettivi $\sim$ e $\Rightarrow$

$$(1)\ p \vee q \vee r \qquad\qquad (2)\ p \wedge q \wedge r$$

Esercizio 3. Dire se la formula seguente è valida oppure no. In caso affermativo dimostrarlo col metodo dei *tableaux*, in caso negativo esibire un'interpretazione in cui la formula è falsa

$$\forall x \exists y P(x,y) \wedge \exists x \forall y Q(x,y) \Rightarrow \exists x \exists y [P(x,y) \wedge Q(x,y)]$$

Esercizio 4. Usando solo porte AND, OR e NOT, progettare un circuito con tre bit in input, x_2, x_1, x_0, e tre bit in output, y_2, y_1, y_0, tale che i bit in output rappresentino il complemento a due del numero rappresentato dai bit in input. Per esempio, se i bit in input sono $(x_2, x_1, x_0) = (0,1,0)$, allora i bit in output devono essere $(y_2, y_1, y_0) = (1,1,0)$.

Esercizio 5. Progettare un automa a stati finiti che legga una sequenza di bit e restituisca 1 quando gli ultimi due bit letti sono uguali e restituisca 0 altrimenti. Disegnare il diagramma di stato, scrivere la tabella e le equazioni di stato e disegnare il circuito.

Logica e Reti Logiche

Anno Accademico: 2020-2021

Sessione Estiva - Secondo Appello

Docente: Francesco Pasquale

15 luglio 2021

Ogni esercizio vale 6 punti. La sufficienza si raggiunge con 18 punti.

Esercizio 1. Dimostrare per induzione che $9^n + 3$ è divisibile per 4, per ogni $n \geqslant 0$.

Esercizio 2. Scrivere due formule, una in forma normale congiuntiva e l'altra in forma normale disgiuntiva, che abbiano la seguente tabella di verità

$$
\begin{array}{c|cccccccccccccccc}
a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
b & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
c & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
d & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
y & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Esercizio 3. Siano (α) e (β) le formule

$$(\alpha)\ \forall x \exists y P(x,y) \qquad\qquad (\beta)\ \exists y \forall x P(x,y)$$

Per ognuna delle affermazioni seguenti, dire se è corretta oppure no; in caso affermativo dimostrarlo, in caso negativo esibire un controesempio

1. La formula (α) implica logicamente la formula (β)
2. La formula (β) implica logicamente la formula (α)

Esercizio 4. Progettare un circuito con quatto input, x_0, x_1, x_2, x_3, e due output, y_0, y_1, che implementi la seguente funzione $f : \{0,1\}^4 \longrightarrow \{0,1\}^2$

$$
f(x_0, x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} (x_2 + x_3,\ x_2 \cdot x_3) & \text{se } x_1 = x_0 \\ (x_2 \oplus x_3,\ 0) & \text{se } (x_1, x_0) = (0,1) \\ (\overline{x_2},\ \overline{x_3}) & \text{se } (x_1, x_0) = (1,0) \end{cases}
$$

Esercizio 5. Un circuito sequenziale con due ingressi x_1 e x_2, un'uscita y e due D-FlipFlop è specificato dalle seguenti equazioni d'ingresso:

$$D_1 = Q_2 + x_1 x_2; \qquad D_2 = Q_1 \left(\overline{x_1} + \overline{x_2}\right); \qquad y = (x_1 + x_2) Q_1 Q_2$$

dove Q_i e D_i indicano rispettivamente lo stato corrente e lo stato futuro dell'i-esimo FlipFlop, per $i = 1, 2$.
Disegnare il circuito e scrivere la tabella e il diagramma di stato.