MATEMATICA 0

- ***Insiemi***

DEFINIZIONE
È una collezione di oggetti, detti **elementi,** appartenenti all'insieme. Gli elementi dell'insieme vengono elencati, separati da una virgola e racchiusi tra parentesi graffe → A = $\{\boldsymbol{linea}, 2, \boldsymbol{estate}\}$

ALCUNE PROPRIETÀ	
A ∩ B = A intersecato a B	**A ∪ B** = A unito a B
A \ B = A meno B (differenza)	**A Δ *B*** = differenza simmetrica
A ∩ B = B ∩ A (proprietà commutativa dell'intersezione)	**A ∪ B = B ∪ A** (proprietà commutativa dell'unione)
(A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C) (proprietà associativa dell'intersezione)	**(A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)** (proprietà associativa dell'unione)
A∩(B∪C) = (A∩B) ∪ (A∩C) (proprietà distributiva)	**A∪(B∩C) = (A∪B) ∩ (A∪C)** (proprietà distributiva)
(A∩ B)' = A' ∪ B' (1° legge di De Morgan)	**(A ∪ B)' = A' ∩ B'** (2° legge di De Morgan)

ALTRO…

- In un insieme **l'ordine non conta**
- In un insieme **non ci sono ripetizioni**
- **Insieme vuoto** non ha elementi e si indica con Ø
- L'insieme **U** è **l'insieme universo** che si assume per evitare paradossi: in questo insieme tutti gli insiemi sono sottoinsiemi.
- $\boldsymbol{C_A}$ = significa **complementare** dell'insieme A

- ***Intervalli***

Se a e b sono due elementi appartenenti a R…	
[a,b] = intervallo chiuso e limitato	**]a,b[** = intervallo aperto
[a,b[= intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra	**]a,b]** = intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra

Quando in un intervallo è presente la **parentesi tonda** il **valore non viene compreso** → esempio: **[2, 8)** saranno tutti i valori compresi tra 2 e 8 escluso l'8 quindi $\mathbf{2} \leq \boldsymbol{x} < \mathbf{8}$

- ***Prodotti notevoli***

Quadrato di un binomio	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Differenza di quadrati	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
cubo di un binomio	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
somma di cubi	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
differenza di cubi	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
Quadrato di trinomio	$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

- ***Altre nozioni di matematica 0…***

Equazioni di primo grado ad una incognita → ax = b si risolve nel seguente modo **x = b/a**

Equazioni di primo grado a due incognite → ax + by = c ha infinite soluzioni bisogna risolverla attraverso un sistema di equazioni lineari

Disequazioni di primo grado ad una incognita → ax > b si risolve nel seguente modo **x > b/a**

Disequazioni di primo grado a due incognite → ax + by > c si considera un punto qualsiasi e si controlla numericamente se la disequazione è verificata o meno per quel punto (sistema).

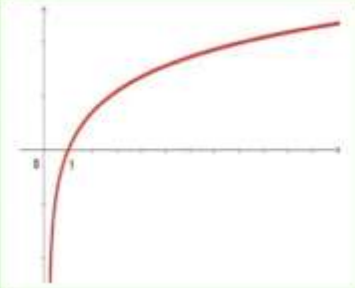
Equazioni di secondo grado generica → $ax^2 + bx + c = 0$ si risole con la seguente formula risolutiva $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ o si può anche usare $x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4}}}{a}$

Il **valore assoluto** o **modulo** $\stackrel{\text{def}}{=}$ $|x| = \begin{cases} -x & se\ x < 0 \\ x & se\ x > 0 \end{cases}$

Logaritmi

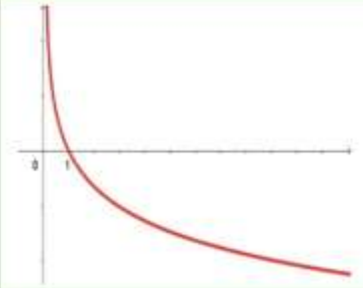
definizione		
$\boldsymbol{log_b\, a = x}$	b = base $b > 0\ \ b \neq 1$ a =argomento $a > 0$ x =logaritmo in base b di a $x \in \mathbb{R}$	il logaritmo di un numero è l'esponente da dare alla base per ottenere l'argomento cioè: $\boldsymbol{b^x = a}$ esempio: $log_2 8 = 3$ perché $2^3 = 8$

teoremi principali	
$log_b\, a + log_b\, c = log_b(a \cdot c)$	teorema del prodotto
$log_b\, a - log_b\, c = log_b\left(\frac{a}{c}\right)$	teorema del rapporto
$c\, log_b\, a = log_b\, a^c$	teorema della potenza
proprietà derivate dai teoremi principali	
$log_{b^n}\, a^m = log_b a^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n} log_b\, a$	potenza ad esponente frazionario
$log_{\frac{1}{b}}\, a = -\, log_b\, a$	invertire la base
$log_b \frac{1}{a} = -\, log_b\, a$	invertire l'argomento
$log_{\frac{1}{b}} \frac{1}{a} = log_b\, a$	invertire la base con l'argomento
$log_b\, a = \frac{1}{log_a\, b}$	scambiare di base ed argomento
$log_n\, a = \frac{log_v\, a}{log_v\, n}$ v = vecchia base, n = nuova base	cambio di base
$n = log_b\, b^n$ oppure $n = b^{log_b n}$	trasformare un numero n in **logaritmo** o in **potenza**
$log_b\, b = 1$ $log_b\, 1 = 0$ $b^x > 0$	casi particolari



$\boldsymbol{y = \log_b x}$

logaritmo con $b > 1$



$\boldsymbol{y = \log_b x}$

logaritmo con $0 < b < 1$

RADICALI

$\sqrt[n]{a^m}$ si chiama radicale

n = indice della radice

$$\sqrt[n]{a^m}$$

m = esponente del radicando

a^m = radicando

proprietà		
$\sqrt[0]{a}$ *non ha significato*	$\sqrt[1]{a} = a$	$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$

indice di radice **pari**	indice di radice **dispari**
$\sqrt{0} = 0$	$\sqrt[3]{0} = 0$
$\sqrt{9} = \pm 3$ radice algebrica	$\sqrt[3]{8} = 2$
$\sqrt{-9} = 3$ non esiste in $\mathbb{R}$	$\sqrt[3]{-8} = -2$

Altre proprietà…

$\sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$	semplificazione
$\sqrt[m]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ $\rightarrow \sqrt[mn]{a^n}$ e $\sqrt[mn]{b^m}$	riduzione allo stesso indice
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m \cdot b^n}$	prodotto di radicali
$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	rapporto di radicali
$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$	trasporto di fattore dentro il segno di radice *
$\sqrt[n]{a^{m+n}} = \sqrt[n]{a^m \cdot a^n} = a\sqrt[n]{a^m}$ $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$	trasporto di fattore fuori il segno di radice *
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$	potenza di radicali
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	radice di radice
$\alpha\sqrt[n]{a} \pm \beta\sqrt[n]{a} = (\alpha \pm \beta)\sqrt[n]{a}$	somma algebrica di radicali simili

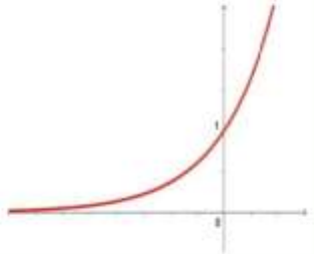
ESPONENZIALI E POTENZE

L'esponenziale è un equazione in cui l'incognita compare almeno in un esponente $\Longrightarrow$ $a^{f(x)} = b$

proprietà		
$a^0 = 1$ con $a \neq 0$	$0^n = 0$ con $n \neq 0$	$0^0 =$ *perde di significato*

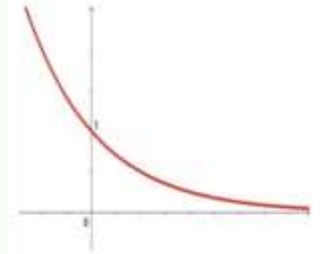
Altre proprietà…

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	prodotto di potenze con la stessa base
$a^m : a^n = a^{m-n}$	rapporto di potenze con la stessa base
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	potenza di potenza
$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	prodotto di potenze con lo stesso esponente
$a^n : b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	rapporto di potenze con lo stesso esponente
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	potenza ad esponente negativo
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	frazione ad esponente negativo
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	potenza ad esponente frazionario
$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m}$	frazione ad esponente frazionario
$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$	potenza ad esponente frazionario negativo



$\boldsymbol{y = b^x}$

esponenziale con $b > 1$



$\boldsymbol{y = b^x}$

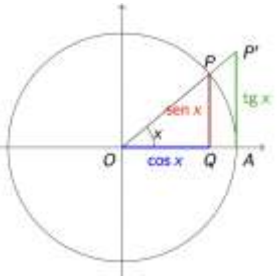
esponenziale con $0 < b < 1$

- ***Funzioni trigonometriche***

PROPRIETÀ

1) **Limitazioni**	$\lvert \sin x\rvert \le 1$ $\lvert \cos x\rvert \le 1$
2) **Teorema di Pitagora**	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
3) **Archi opposti**	$\sin(-x) = -\sin x$ $\cos(-x) = \cos x$ $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x$
4) **Archi complementari**	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1/\mathrm{tg}\, x$
5) **Archi supplementari**	$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\mathrm{tg}(\pi - x) = -\mathrm{tg}\, x$
6) **Formule di duplicazione**	$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \begin{cases} 1 - 2\sin^2 x \\ 2\cos^2 x - 1 \end{cases}$ $\mathrm{tg}(2x) = \frac{2\,\mathrm{tg}\, x}{1 - \mathrm{tg}^2 x}$
7) **Formule parametriche**	$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ $\mathrm{tg}\, x = \frac{2t}{1-t^2}$
8) **Formule di addizione**	$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$ $\mathrm{tg}(x \pm y) = \frac{\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y}{1 \mp \mathrm{tg}\, x \cdot \mathrm{tg}\, y}$
9) **Formule di prostaferesi**	$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$
10) **Formule di Werner**	$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$ $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$

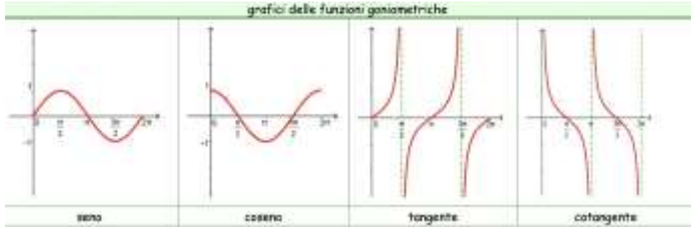
Angolo in gradi α_{gradi}	Angolo in radianti $\alpha_{radianti}$	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente
0° = 360°	2π	0	1	0	$+\infty$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$+\infty$	0
180°	π	0	-1	0	$-\infty$
270°	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$-\infty$	0



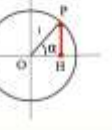
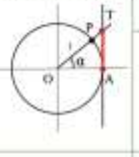
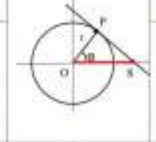
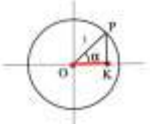
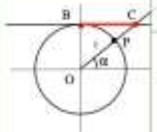
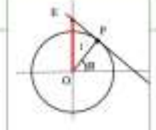
le cinque relazioni fondamentali

$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$	$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$	$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$	$\mathrm{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)}$

grafici delle funzioni goniometriche



definizione delle funzioni goniometriche sulla circonferenza goniometrica di centro l'origine degli assi e raggio 1

	**seno** $sen(\alpha) = \frac{\overline{PH}}{\overline{OP}} = \overline{PH}$		**tangente** $\tan(\alpha) = \frac{\overline{TA}}{\overline{OP}} = \overline{TA}$		**secante** $\sec(\alpha) = \frac{\overline{OS}}{\overline{OP}} = \overline{OS}$
	**coseno** $\cos(\alpha) = \frac{\overline{OK}}{\overline{OP}} = \overline{OK}$		**cotangente** $\cot(\alpha) = \frac{\overline{BC}}{\overline{OP}} = \overline{BC}$		**cosecante** $\mathrm{cosec}(\alpha) = \frac{\overline{OE}}{\overline{OP}} = \overline{OE}$

- ***Dominio***

FUNZIONI FRATTE	
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	D: $g(x) \neq 0$

FUNZIONI IRRAZIONALI	
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	se n: È dispari: a seconda dai casi È pari: $f(x) \geq 0$

FUNZIONI LOGARIMICHE	
$y = \log_a f(x)$ D: $f(x) > 0$	$y = \log_{g(x)}[f(x)]$ D: $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ g(x) \neq 1 \end{cases}$

FUNZIONI ESPONENZIALI	
$y = f(x)^a$ se a: È positiva → D: $f(x) \geq 0$ È negativa → D: $f(x) > 0$	$y = [f(x)]^{g(x)}$ D: $f(x) > 0$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE	
$y = \sin [f(x)]$ D: $\forall\, x \in R$	$y = \cos [f(x)]$ D: $\forall\, x \in R$
$y = tg [f(x)]$ D: $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$y = cotg [f(x)]$ D: $f(x) \neq k\pi$
$y = \arcsin [f(x)]$ D: $-1 \leq f(x) \geq 1$	$y = \arccos [f(x)]$ D: $-1 \leq f(x) \geq 1$

FUNZIONI CONTINUE

Si dice continua se esiste il limite di f (x) per x $\rightarrow x_0$ e tale limite è uguale al valore f (x_0) della funzione calcolata in x_0

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

FUNZIONI DISCONTINUE

Si dice discontinua se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ non esiste, è infinito o esiste ma è diverso da $f(x_0)$.

TRE SPECIE DI DISCONTINUITA'…

1° specie: il limite destro e il limite sinistro sono finiti ma diversi tra loro

2° specie: almeno uno dei 2 limiti, sia destro che sinistro, di *f(x)* sono infiniti o non esistono

3° specie: il limite c'è (esiste) ed è finito, ma il valore del limite non c'è

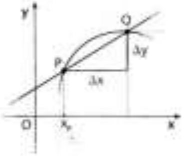
- ***Rapporto incrementale***

DEFINIZIONE

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

il coefficiente angolare (quello che prima abbiamo indicato con m) della secante al grafico della funzione nei punti P e Q



- ***Derivate***

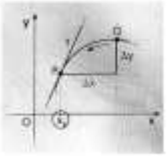
DEFINIZIONE

il limite, se esiste ed è finito, per h che tende a 0 del rapporto incrementale.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{Dy}{Dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

SIGNIFICATO GEOMETRICO

coefficiente angolare della retta tangente



regole di derivazione	
$D\, k \cdot f(x) = k \cdot f'(x)$	prodotto di una costante k per una funzione
$D\, f(x) \pm g(x) \pm h(x) = f'(x) \pm g'(x) \pm h'(x)$	somma di due o più funzioni
$D\, f(x) \cdot g(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$	prodotto di due funzioni
$D\, f(x) \cdot g(x) \cdot h(x) = f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x)$	prodotto di tre funzioni
$D\, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$	rapporto di due funzioni
$Df[g(x)] = f'[g(x)] \cdot g'(x)$	funzione composta
$Df(x)^{g(x)} = f(x)^{g(x)} \cdot \left[g'(x) \cdot ln[f(x)] + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}\right]$	funzione elevata ad una funzione

FUNZIONI	DERIVATE
$y = K$ *dove k è una costante*	$y' = 0$
$y = x^n$	$y' = n\,(per)\,x^{n-1}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x\,(per)\,ln\,a$
$y = ln\,x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = log_a\,x$	$y' = \frac{1}{x\,ln\,a}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$y' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$
$y = sin\,x$	$y' = cos\,x$
$y = cos\,x$	$y' = -\,sin\,x$
$y = tan\,x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

FUNZIONI	DERIVATE
$y = cot\,x$	$y' = -\frac{1}{sin^2 x}$
$y = arcsin\,x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = arccos\,x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = arctan\,x$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
$y = arccot\,x$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$