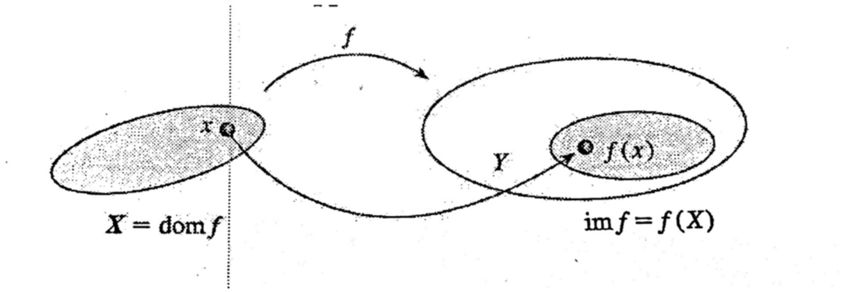
CAPITOLO 3: FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE (corrisponde al capitolo 2 del libro)

- Dominio, immagine e grafico.
- Funzione composta, funzioni invertibili e funzione inversa.
- Funzioni monotone
- Richiami sulle funzioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche.

Dominio, immagine e grafico

Definizione: si definisce **funzione** una relazione tra due insiemi (x= dominio; y=codominio) che associa ad ogni elemento del dominio un solo elemento del codominio (o ad ogni elemento di x associa un solo elemento di y) → y = f(x)

X è il **dominio** e si scrive X = dom f e **Y** è il **codominio**
Il grafico di f è l'insieme → graf f : = $\{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \, x \, Y$



L'**immagine** di f è l'insieme dei valori della funzione → im f = f(X) : = $\{f(x)) : x \in X\} \subseteq Y$

Per indicare una funzione da X in Y possiamo scrivere:
$\boldsymbol{f}$ **: X → Y , x → y** oppure $\begin{cases} \boldsymbol{f : X \to Y} \\ \boldsymbol{f(x) = y} \end{cases}$ oppure **f : X ∋ $\boldsymbol{x}$ → y** oppure **f(x)= y** ∀ $\boldsymbol{x \in X}$

Se dal contesto è chiaro che si sta considerando una funzione di una sola variabile reale spesso non si specifica il dominio della funzione, questo viene definito **dominio naturale** → la funzione f(x) = $x^2 + 1$ ha come dominio naturale R

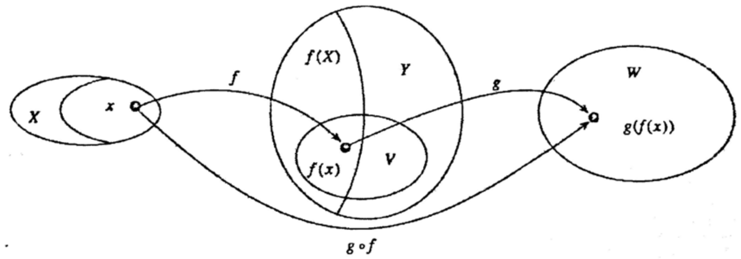
Funzione razionale (funzione composta) è una funzione definita come quoziente di due polinomi → il loro dominio sarà i punti dove si annulla il denominatore

Alcuni tipi di funzione:

- Dato un insieme X si dice identità di X in sé la funzione → $\boldsymbol{I_x : X \to X, I_x(x) = x}$
- f : X → Y e A ⊆ $X. Si\ dice$ **restrizione** → $\boldsymbol{f|_A : A \to Y, f|_A(x) = f(x)}$
- Proiezione canonica di X xY su X (rispettivamente Y) → $\begin{cases} \boldsymbol{f : X \, x \, Y \to X \ (rispettivamente\ Y)} \\ \boldsymbol{f(x, y) = x \ (rispettivamente\ y)} \end{cases}$
- Successione di una funzione il cui dominio è N (da N a R) → $\begin{cases} \boldsymbol{f : N \to R} \\ \boldsymbol{f(n) = a_n} \end{cases}$

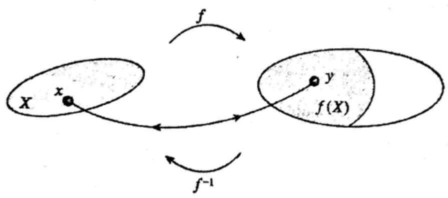
- Funzione composta, funzioni invertibili e funzione inversa.

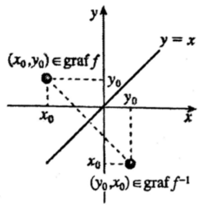
Siano A, B, C insiemi e $f : A \to B$ e $g: B \to C$ definiamo la **composizione** di f e g è la funzione $g \circ f$: $A \to C$ definita ponendo $(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})(\mathbf{a}) \overset{\text{def}}{=} \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a})) \to$ (il grafico che segue è la rappresentazione grafica)



(Aggiungi proprietà funzioni composte)

L'**inversa** di f e la funzione : $f^{-1} : B \to A$ definita da $\boldsymbol{f^{-1}} \overset{\text{def}}{=} \{(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) \in \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} : (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{f}\}$



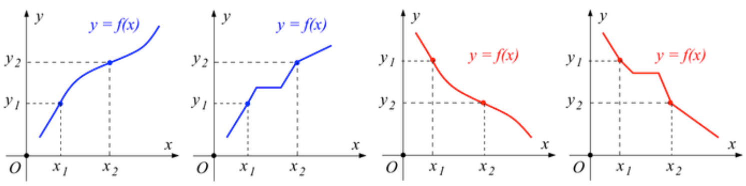


$f : X \to Y$ si dice **invertibile** in $A \subseteq X$ **se la restrizione di f ad A, $f|_A : A \to Y$** è **iniettiva**.

- Funzioni monotone

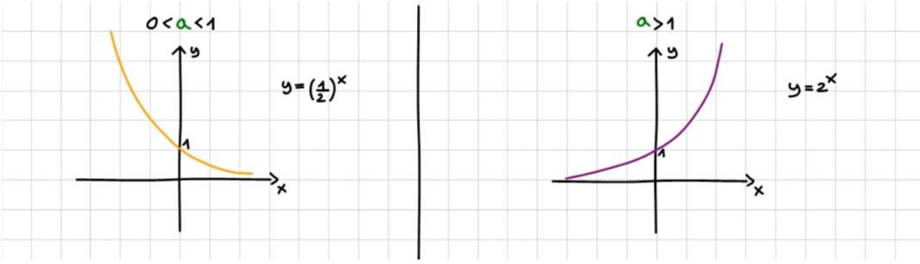
Y = f(x) di dominio $D \subseteq R$ è una funzione che nel suo dominio, o in un intervallo contenuto in esso, se si mantiene sempre crescente o sempre decrescente.

Crescente → si ha $\boldsymbol{f(x_1) \geq f(x_2)}$
Strettamente crescente → si ha $\boldsymbol{f(x_1) > f(x_2)}$
Decrescente → si ha $\boldsymbol{f(x_1) \leq f(x_2)}$
Strettamente decrescente → si ha $\boldsymbol{f(x_1) < f(x_2)}$



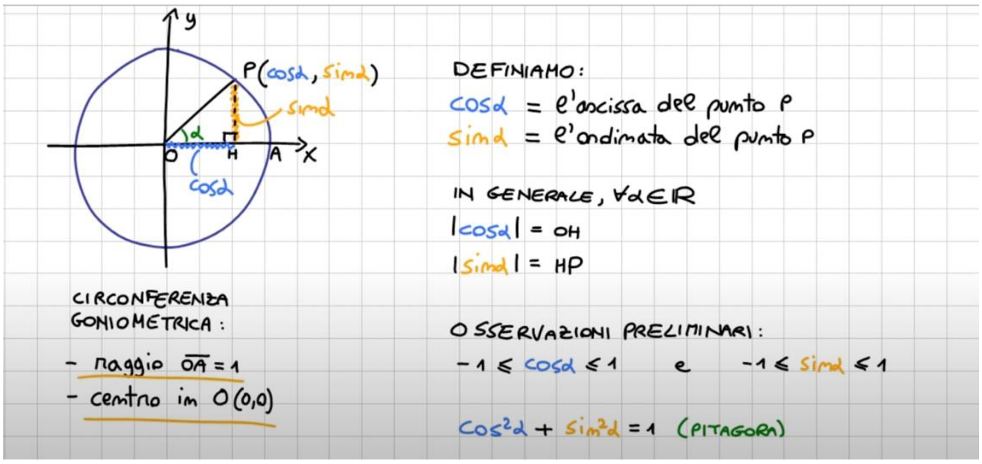
▪ Richiami sulle funzioni esponenziali, logaritmiche e trigonometriche.

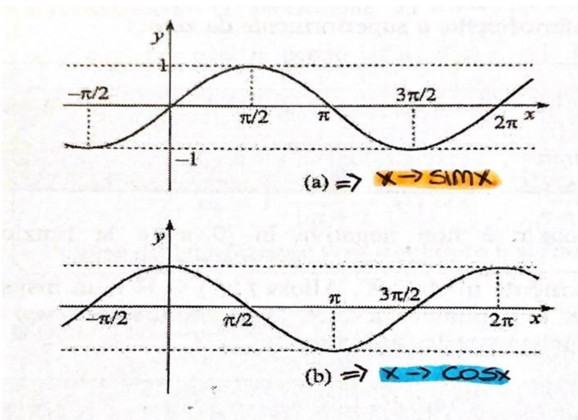
- Una **funzione esponenziale** è una funzione data da una potenza in cui la base è costante e l'esponente è variabile.

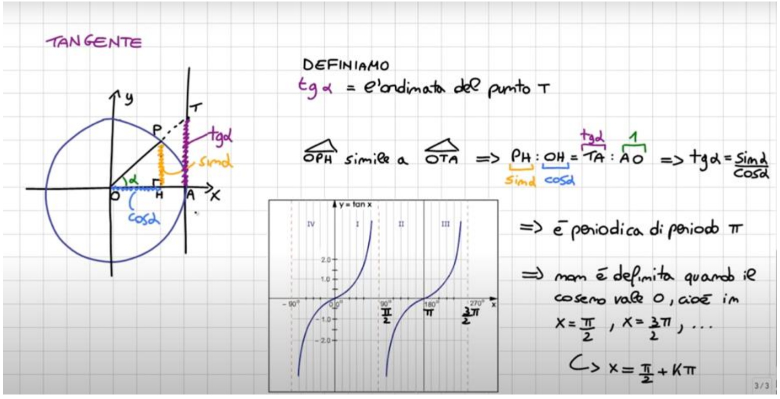


- Una **funzione logaritmica** è una funzione data da un logaritmo in cui la base è una costante e l'argomento è variabile. Indicata con ln(x) o con log(x).

- Una **funzione trigonometria** sono la funzione seno, coseno e tangente







- Altre cose presenti nel capitolo del libro:

  - Funzioni simmetriche, periodiche

Le funzioni **pari** → si ha quando per ogni x appartenente al dominio ***f (-x) = f (x)*** → il suo grafico è **simmetrico rispetto all'asse delle ordinate**

Le funzioni **dispari** → si ha quando per ogni x appartenente al dominio ***f (-x) = - f (x)*** → il suo grafico è **simmetrico rispetto all'origine**

f (x) si dice funzione **periodica** se vale che ***f (x + T) = f (x)*** → il grafico **si ripete uguale per ogni periodo**

Le funzioni ***sinx*** (seno) e ***cosx*** (coseno) ha periodo **2π**
Le funzioni ***tgx*** (tangente) e ***cotgx*** (cotangente) ha periodo ***π***

  - Funzione limitata, estremo superiore e inferiore, massimo e minimo

Avendo *f* : X → R si dice **limitata** in X se è limitata superiormente o inferiormente in X
- Quando è **limitata superiormente** avremo: ***f (x)*** $\leq$ ***M***
- Quando è **limitata inferiormente** avremo: ***f (x)*** $\geq -M$

$$f: X \to R \text{ si dice } \begin{cases} \textbf{positiva } se\ \boldsymbol{f(x) > 0}\ e\ \ \textbf{non negativa } se\ \boldsymbol{f(x) \geq 0} \\ \textbf{negativa } se\ \boldsymbol{f(x) < 0}\ e\ \textbf{non positiva } se\ \boldsymbol{f(x) \leq 0} \end{cases}$$

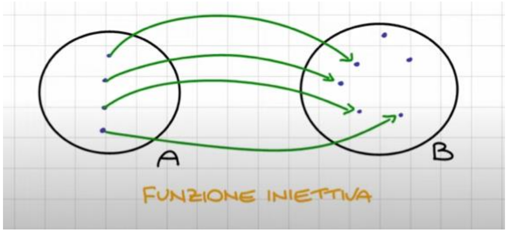
sia *f* : X → R con A (non vuoto) $\subseteq X$ si definiscono estremo superiore e inferiore i seguenti…

$$\sup f := \begin{cases} \sup f(\mathrm{A}) \\ +\infty \end{cases}$$

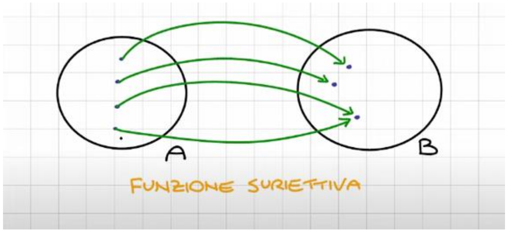
$$\inf f := \begin{cases} \inf f(\mathrm{A}) \\ -\infty \end{cases}$$

- Funzione iniettiva e suriettiva

INIETTIVA: si dice iniettiva quando la funzione associa elementi diversi del dominio con elementi diversi del codominio → dati 2 insiemi A e B; f: A → B si dice iniettiva se $\forall\, \boldsymbol{x_1, x_2} \in\ \boldsymbol{A}\,;\ \boldsymbol{x_1 \neq x_2}$ $\Rightarrow \boldsymbol{f\,(x_1) \neq f\ (x_2)}$



SURIETTIVA: si dice suriettiva quando per ogni elemento del codominio esiste almeno un elemento del dominio → dati 2 insiemi A e B; f: A → B si dice suriettiva se $\forall \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{B}\ \exists \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{A} :\ \boldsymbol{b = f(a)}$



- Funzione arcoseno, arcocoseno, arcotangente

Arcoseno è la funzione **inversa del seno** → arcsin inverso di sin → sin ($\frac{\pi}{6}$) = $\frac{1}{2}$ invece arcsin ($\frac{1}{2}$) $= \frac{\pi}{6}$

Arcocoseno è la funzione **inversa del coseno** → arcos inverso di cos → cos ($\frac{\pi}{6}$) = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ invece arcos ($\frac{\sqrt{3}}{2}$) $= \frac{\pi}{6}$

Arcotangente è la funzione **inversa della tangente** → arctg inverso di tg → tg ($\frac{\pi}{6}$) = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ invece arctg ($\frac{\sqrt{3}}{3}$) = $\frac{\pi}{6}$

- Invertibilità e monotonia (pag. 60)

- Operando con le funzioni (pag. 61-67)

- Equazioni e disequazioni: metodo grafico (pag. 68-70)