CAPITOLO 5 : SOMME E APPROSSIMAZIONI

5.1 ANNUITÀ

Avete vinto al superenalotto.
Avete una scelta:

- 1 000 000 di euro subito

o

- 50 000 euro/anno per 30 anni

Cosa conviene scegliere? Vediamo:

Sia $x = 50\,000$ e $p =$ inflazione.
Allora in 30 anni riceviamo:

$$\underbrace{x}_{1^\circ \text{ anno}} + \underbrace{(1-p)x}_{2^\circ \text{ anno}} + x(1-p)^2 + \dots + x(1-p)^{29}$$

$$=$$

$$x \cdot \sum_{i=0}^{29} (1-p)^i = x \cdot \frac{(1-p)^{30} - 1}{(1-p) - 1} =$$

Se $p = 0{,}03$, allora otteniamo

$$x \cdot \frac{(0{,}97)^{30} - 1}{0{,}97 - 1} = x \cdot \frac{(0{,}40)^{30} - 1}{-0{,}03} =$$

$$= \frac{-0{,}6}{-0{,}03} \cdot x \simeq 20 \cdot x$$

E se infiniti anni?
Abbiamo

$$x + x(1-p) + x(1-p)^2 + \dots = x \sum_{i \geq 0} (1-p)^i$$

$$= x \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = x \cdot \frac{1}{0{,}03} = 1\,666\,666{,}\bar{6}$$

Abbiamo usato il seguente <u>LEMMA 5.1.1</u> :

Sia $n \in \mathbb{P}$ e sia $x \in \mathbb{R}$.
Allora

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$ <u>SOMMA GEOMETRICA</u>

<u>DIM</u> facile induzione su $n \in \mathbb{P}$.

Come indovinare una tale formula?
<u>METODO DELLA PERTURBAZIONE</u> :

Sia $S \overset{def}{=} 1 + x + x^2 + \ldots + x^n \Rightarrow$
$\Rightarrow xS = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n+1} = x^{n+1} + (S-1)$

5.2 SOMME POLINOMIALI

Sappiamo che

$$\sum_{i=1}^{n} i = \binom{n+1}{2} \qquad \forall n \in \mathbb{P}.$$

Come indovinare una tale formula?
Abbiamo che

$$1 + 2 + \ldots + n + 1 + 2 + \ldots + n =$$
$$= (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \ldots + (n+1) =$$
$$= n \cdot (n+1).$$

Come calcolare

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \quad ?$$

TEO. 5.2.1

Sia $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ (un pol. f).
Allora

$\exists\, g(x) \in \mathbb{R}[x]$ tale che $DEG(g(x)) \leq DEG(f(x)+1)$
e

$$\sum_{i=0}^{n} f(i) = g(n)$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

DIM omessa.

DEF.: Si dice che $g(n)$ è una FORMULA CHIUSA per ~~es. esempio~~ $\sum_{i=0}^{n} f(i)$

es[2-]: Sia $n \in \mathbb{N}$. ~~Allora~~ dimostrare che

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

per $\forall k \in \mathbb{N}$

esempio: Calcolare

$$\sum_{i=0}^{n} i^2$$

poiché $i^2 = f(i)$ con $f(x) = x^2 \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow$
per 5.2.1 $\Rightarrow \exists\, g(x) \in \mathbb{R}[x]$ tale che

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = g(n)$$

per $\forall n \in \mathbb{N}$ e $DEG(g(x)) \leq 3$.
Pertanto $\exists\, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che

$$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Quindi

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = an^3 + bn^2 + cn + d \qquad (*)$$

$\forall n \geq 0$
Ma allora

es Troviamo una ricorsione per $f(n)$ dove $f(n)$ è il numero di sottoinsiemi di $[n]$ che non contengano due numeri consecutivi, $(n \in \mathbb{P})$.

Si chiede una ricorsione per

$$f(n) = \left|\left\{ S \subseteq [n] : i \in S \Rightarrow i+1 \notin S \quad \forall i = 1, \dots, n-1 \right\}\right|$$

Vediamo

$$f(1) = \left|\left\{ \emptyset, \{1\} \right\}\right| = 2$$

$$f(2) = \left|\left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\} \right\}\right| = 3$$

$$f(3) = \left|\left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,3\} \right\}\right| = 5$$

$$f(4) = \left|\left\{ \emptyset, \{1\}, \dots \right\}\right| = 8$$

Sembra essere la successione di Fibonacci. Pensiamo che sia vero che

$$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$$

$\forall n \geq 3$.

Cerchiamo di dimostrarlo.

Sia $S \subseteq [n]$. Diciamo che S è <u>sparso</u> se

$$i \in S \Rightarrow i+1 \notin S$$

$\forall i = 1, \dots, n-1$

Abbiamo:

$$\{ S \subseteq [n] : S \text{ sparsio} \} =$$

$$= \{ S \subseteq [n] : S \text{ sparso}, n \notin S \} \uplus \{ S \subseteq [n] : = =, n \in S \}$$

ma

$$\{ S \subseteq [n] : S \text{ sparso}, n \notin S \} =$$

$$= \{ S \subseteq [n-1] : S \text{ sparso} \}$$

pertanto

$$|\{ S \subseteq [n] : S \text{ sparso}, n \notin S \}| = f(n-1)$$

se $S \subseteq [n]$, $n \in S$, e S è sparso $\Rightarrow n-1 \notin S$.

Definiamo una funzione

$$\psi : \{ S \subseteq [n] : S \text{ sparso}, n \in S \} \longrightarrow \{ T \subseteq \cancel{[n]} [n-2] : T \text{ sparso} \}$$

Ponendo

$$\psi(S) \overset{\text{def}}{=} S \setminus \{n\} \qquad \forall S \subseteq [n]$$

Allora ψ è una biezione ($T \mapsto T \cup \{n\}$ è l'inversa)
(se $T \subseteq [n-2]$, T sparso $\Rightarrow T \cup \{n\} \subseteq [n]$,
$n \in T \cup \{n\}$, e $T \cup \{n\}$ è sparso)

pertanto

$$|\{ S \subseteq [n] : S \text{ sparso}, n \in S \}| = f(n-2)$$

concludendo

$$f(n) = |\{ S \subseteq [n] : S \text{ sparsi} \}| =$$

$$= |\{ S \subseteq [n] : S \text{ sparsi}, n \in S \}| +$$

$+ \left| \{ S \subseteq [n] : S \text{ sparsi}, n \notin S \} \right| =$

$= f(n-2) + f(n-1)$

Pertanto, se $\{F_n\}_{n=0,1,\dots}$ è la successione di Fibonacci (Quindi, $F_0 = F_1 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $\forall n \geq 2$) allora

$$f(n) = F_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

es 10 persone si dividono in 5 gruppi, ogni gruppo ha 2 persone. In quanti modi può avvenire questo?

Le persone sono distinguibili => {persone} $\leftrightarrow$ [10]

I gruppi pure sono distinguibili => {gruppi} $\leftrightarrow$ {scatole numerate}.

Pertanto il numero richiesto è

$$\binom{10}{2,2,2,2,2}$$

$$=$$

$$\frac{10!}{2^5!}$$

$$=$$

$$\frac{\cancel{10}^{5} \cdot 9 \cdot \cancel{8}^{4} \cdot 7 \cdot \cancel{6}^{3} \cdot 5 \cdot \cancel{4}^{2} \cdot 3 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}} =$$

es: Quante parole diverse si possono formare permutando (cioè anagrammando) le lettere della parola

MISSISSIPPI ?

Si chiedono il numero di permutazioni del multinsieme

$$\mathcal{M} \overset{def}{=} \{M^1, I^4, S^4, P^2\}$$

$$(= \{M, I, I, I, I, S, S, S, S, P, P\})$$

pertanto (4.6(?))

$$|S(\mathcal{M})| = \binom{4+4+2+1}{4, 4, 2, 1}$$

Quindi il numero richiesto è

$$\frac{11!}{4!\, 4!\, 2!}$$

$$=$$

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot \cancel{2}}$$

5.3 Somme non polinomiali

Come calcolare

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \quad ?$$

TEO. 5.3.1

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f continua e monotona in $\mathbb{R}_{>0}$. Allora

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx$$

per $\forall n \in \mathbb{N}$ (nel caso in cui f è crescente)

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{i=1}^{n} f(i) \geq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx$$

per $\forall n \in \mathbb{N}$ (nel caso in cui f è decrescente)

DIM

Sia f crescente

$$\int_1^n f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\int_i^{i+1} f(x)\,dx \right) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \left(f(i+1) \right)$$

$$= \sum_{i=2}^{n-1} f(i+1)$$

Pertanto

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i)$$

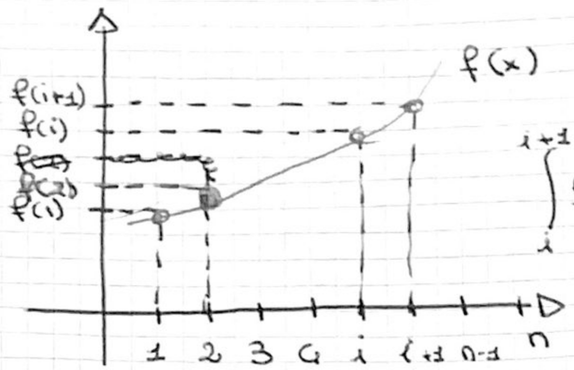
(precedente) (successivo)

$$\Downarrow$$

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx$$

Similmente se crescente

<u>Geometricamente</u>:



$$\int_i^{i+1} f(x)\,dx < f(i+1)$$

esempio:

calcolare o stimare

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}$$

Poiché $f(x) = \sqrt{x}$ è continua e monotona crescente in $\mathbb{R}_0$

$\Rightarrow$ per 5.3.1:

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} f(i) \leq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx$$

ma

$$\int_1^n \sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^n = \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$$ (risoluzione dell'integrale)

Quindi

$$1 + \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \leq \sqrt{n} + \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Inoltre

$$\underbrace{\frac{1 + \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}}}_{\downarrow \atop 1} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}}{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}} + 1 - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}}}_{\downarrow \atop 1}$$

(sarebbe 1 nel caso in cui $n \to +\infty$)

Quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i}}{\frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}}} = 1$$

Siano $f : g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$

DEF: f e g sono EQUIVALENTI ASINTOTICAMENTE (scritto $f \simeq g$) se:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

Pertanto

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \simeq \frac{2}{3} n^{\frac{3}{2}} \quad \text{se } n \to +\infty$$

Per $n \in \mathbb{P}$ poniamo

$$H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{j}$$

<u>DEF</u> : H_n si dice l'n-esimo NUMERO ARMONICO

Quanto è grande H_n?

La funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ è continua e monotona decrescente per $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

Quindi (per 5.3.1)

$$f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \geq \sum_{i=1}^{n} f(i) \geq f(n) + \int_1^n f(x)\,dx$$

Abbiamo

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln(x)\Big]_1^n = \ln(n) - \ln(1) = \ln(n)$$

Quindi

$$1 + \ln(n) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \geq \frac{1}{n} + \ln(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Pertanto

$$\underbrace{\frac{1}{\ln(n)} + 1}_{1} \geq \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}{\ln(n)} \geq \underbrace{\frac{1}{\ln(n)} + 1}_{1}$$

(ha diviso x $\ln(n)$)

Quindi per il teorema del prodotto:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}}{\ln(n)} = 1$$

cioè

$$H_n \simeq \ln(n) \qquad \text{per } n \to \infty$$

5.4 Somme doppie

Quant'è grande

$$\sum_{i=1}^{n} H_i \qquad ?$$

Abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j}$$

Cosa stiamo sommando veramente?
Stiamo sommando i numeri nella seguente tabella

$i \backslash j$	1	2	3	4	...	n-1	n
1	1/1	1/2					
2	1/1	1/2					
3	1/1	1/2	1/3				
⋮	⋮						
n-1	⋮						
n	1/1	1/2	1/3	.	.	.	1/n

Possiamo sommare questi numeri per colonne

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{j} = n\cdot(1) + (n-2)\cdot\frac{1}{2} + (n-2)\cdot\frac{1}{3} + \dots + 2\left(\frac{1}{n-1}\right) + 1\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\cdot(n+1-k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{k} + \frac{1}{k} - 1\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} 1 =$$

$$= nH_n + H_n - n = H_n(n+1) - n =$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n \qquad \forall n \in \mathbb{P}$$

In particolare

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)\cdot \ln(n) \quad \text{per } n \to \infty$$

(poiché $(n+1)\ln(n) \simeq (n+1)\ln(n) - n$)

5.5 Prodotti

Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$. Quanto è grande

$$\prod_{i=1}^{n} f(i) \quad ?$$

Allora

$$\ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(f(i))$$

Quindi

$$\prod_{i=1}^{n} f(i) = e^{\sum_{i=1}^{n} \ln(f(i))}$$

Quanto è grande

$$n! \quad ?$$

Abbiamo che

$$\ln(n!) = \sum_{i=1}^{n} \ln(i)$$

Quindi

$$n! = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \ln(i)\right) \qquad \forall n \in \mathbb{P}$$

Stimiamo $\sum_{i=1}^{n} \ln(i)$ poiché $\ln(x)$ è continua e monotona crescente in $\mathbb{R}_{>0}$

Abbiamo per 5.3.1 che

$$\ln(1) + \int_1^n \ln(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{n} \ln(i) \le \ln(n) + \int_1^n \ln(x)\,dx$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Ma

$$\int_1^n \ln(x)\,dx = \Big[x \cdot \ln(x) - x\Big]_1^n = n \cdot \ln(x) - n + 1$$

Quindi

$$n \cdot \ln(n) - n + 1 \le \sum_{i=1}^{n} \ln(i) \le \ln(n) + n \cdot \ln(n) - n + 1$$

$\forall n \in \mathbb{N}$. E

$$n \cdot \ln(n) - n + 1 \le n! \le e^{(n+1)\cdot \ln(n) - n + 1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

Quindi

$$\frac{e^{\ln(n^n)}}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{e^{\ln(n^{n+1})}}{e^{n-1}}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \leq n! \leq \frac{n^{n+1}}{e^{n-1}}$$

In realtà vale che

TEO. 5.5.1 (STIRLING)

Esiste una funzione $\varepsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tale che

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e^{\varepsilon(n)}$$

Dove

$$\frac{1}{12n+1} \leq \varepsilon(n) \leq \frac{1}{12n}$$

Per $\forall n \in \mathbb{N}$

DIM omessa.

5.6 Notazione asintotiche

Siano $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

DEF.: Si dice che f è ASINTOTICAMENTE PIÙ PICCOLA (o che è un O-PICCOLO) di g, scritto $f = o(g)$, se

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

PROP. 5.6.1 : Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Allora

$$x^a = o(x^b)$$

DIM è nota $\left(\frac{x^a}{x^b} = \frac{1}{x^{b-a}} \to 0 \text{ se } x \to +\infty \right)$

PROP. 5.6.2

Sia $b \in \mathbb{R}$, $b>0$. Allora

$$\ln(x) = o(x^b)$$

DIM

Sappiamo che $x < e^x$ se $x>0$. Quindi $\ln(x) < x$ se $x \in \mathbb{R}_{>0}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(x^{\frac{b}{2}}) < x^{\frac{b}{2}}$.

Pertanto

$$\frac{\ln(x)}{x^b} \leq \frac{2}{b} x^{-\frac{b}{2}} \to 0 \quad \text{se } x \to +\infty$$

PROP 5.6.3

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $b>1$. Allora

$$x^a = o(b^x)$$

DIM vedi corso Analisi

Siano $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, sia $g(n) \in \mathbb{R}_{>0}$ per $\forall n \in \mathbb{N}$.

DEF Si dice che f è un O-GRANDE di g, scritto $f = O(g)$, se $\exists\, C \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\exists\, N \in \mathbb{R}$ tali che

$$|f(n)| \leq C \cdot g(n)$$

se $n \geq N$.

<u>esempio</u>: Sia $f(x) = 5x^3 - 4x + 2$. Allora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^3 - 4x + 2}{x^3} = 5$$

$\Rightarrow \exists N \in \mathbb{P}$ tale che

$$4 \leq \frac{5 \cdot x^3 - 4x + 2}{x^3} \leq 6$$

se $x > N$. Quindi

$$\frac{|5x^3 - 4x + 2|}{x^3} \leq 6$$

se $x > N$. Pertanto $5x^3 - 4x + 2 = O(x^3)$.

Con lo stesso ragionamento si dimostra che

<u>PROP. 5.6.4</u>

Siano $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, tali che

$$g(n) > 0 \qquad \text{per } \forall n \in \mathbb{N}$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c \qquad \text{(valore finito)}$$

Per qualche $c \in \mathbb{R}$. Allora

$$f = O(g).$$

<u>COR. 5.6.5</u>

Siano $a_0, a_1, \dots, a_d \in \mathbb{R}$, $a_d > 0$. Allora

$$a_d x^d + a_d x^{d-1} + \dots + a_1 x + a_0 = O(x^d)$$

DIM chiaro da 5.6.4

COR 5.6.6

Siano $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$. Allora

- se $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$
- se $f \cong g \Rightarrow f = O(g)$

DIM chiaro da 5.6.4

Siano $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

DEF : Si dice che f è un OMEGA di g, scritto $f = \Omega(g)$, se

$\exists\, C \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\exists\, N \in \mathbb{P}$ tali che

$$f(n) \geq C\,|g(n)|$$

se $n > N$

PROP. 5.6.7

Siano $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$. Allora

$$f = O(g) \iff g = \Omega(f)$$

DIM

Abbiamo che

$$f = O(g)$$
$$\Updownarrow$$

$\exists\, C \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\exists\, N \in \mathbb{P}$ tali che

$$|f(n)| \leq C \cdot (g(n))$$

(se $n > N$)

$$\Updownarrow$$

$\exists\, c \in \mathbb{R}$ e $\exists\, N \in \mathbb{P}$ tale che

$$\frac{f(n)}{c} \leq |g(n)|$$

(se $n > N$)

$$\Updownarrow$$

$$g = \Omega(f)$$

OSS. Se $f = o(g)$ allora non è detto che $g = O(f)$
(esempio se $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 \Rightarrow f = o(g)$
ma $g \neq O(f)$, se lo fosse $\exists\, c \in \mathbb{R}_{>0}$ e $N \in \mathbb{P}$
tali che $n^2 \leq c \cdot n \quad \forall n \geq N \Rightarrow$ assurdo)

DEF Siano $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$.
Diciamo che f è un TETA di g ($f = \Theta(g)$)
se

$$f = O(g) \quad \text{e} \quad g = O(f).$$

esempio: sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ tale che $f = \Theta(n^3)$

$\Rightarrow \exists\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ e $\exists\, N \in \mathbb{P}$ tali che

$$c_1 \cdot n^3 \leq f(n) \leq c_2 \cdot n^3 \qquad \forall n > N.$$

Quindi, se n raddoppia $\Rightarrow f(n) \cdot 8$

lo si moltiplica × 8

5.7 Quanto è grande l'infinito?

Siano A, B insiemi.

DEF A e B hanno la stessa cardinalità ($|A| = |B|$) se $\exists f: A \to B$, f biunivoca.

TEO 5.7.1 (Cantor)

Sia A un insieme.
Allora
$$|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$$

(dove $\mathcal{P}(A) \overset{def}{:=} \{S : S \subseteq A\}$) $\mathcal{P}(A)$ sono i sottoinsiemi di A

DIM per assurdo

Sia $\underbrace{f: A \to \mathcal{P}(A)}$, f biunivoca.
↳ ad ogni elemento di A associa qualche sottoinsieme
Sia
$$X \overset{def}{:=} \{a \in A : a \notin f(a)\} \quad (*)$$

vado a selezionare tutti gli elementi che non sono elementi della loro immagine

Allora $X \subseteq A$, ma f è biunivoca $\Rightarrow \exists b \in A$ tale che $\underbrace{f(b) = X}$
↳ quindi anche suriettiva

↳ essendo suriettiva il sottoinsieme X deve essere funzione di qualcosa (in questo caso di b)

Vediamo se $b \in f(b)$

Se $b \in f(b) \Rightarrow \underbrace{b \in X}$ $(f(b) = X)$

↳ Quindi $\in (*) \Rightarrow$ soddisfa la proprietà

$\Downarrow$

$b \notin (f(b))$ ASSURDO

vediamo se b non è elemento di $f(b)$

Se $b \notin f(b)$ $\Rightarrow$ $b \in X$ $\Rightarrow$ $b \in f(b)$ ASSURDO

↳ soddisfa cond (*)

↳ se $b \in X \Rightarrow X = f(b)$ (da cond iniziale)

Quindi si arriva ad una contraddizione, la quale determina che non esiste un f biunivoca.

Siano A, B insiemi.

DEF: la cardinalità di A è $\leq$ la cardinalità di B $(|A| \leq |B|)$, se $\exists f: A \to B$, f iniettiva

OSS: è chiaro che $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

Quindi

$$|A| \lneq |\mathcal{P}(A)| \lneq |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| \lneq \dots$$

Quindi ci sono infiniti infiniti.

IPOTESI DEL CONTINUO: non esiste nessun insieme A tale che

(quanti infiniti ci sono?)

$$|\mathbb{N}| \lneq |A| \lneq |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$$