Probabilità

- **Teo. Prob. Totali**: $P(\bigcup_{i=1}^{n} P(A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$; $A_1, ..., A_n$ eventi indipendenti.
- **Prob. Condizionate**: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$.
- **Teo. Prob. Totali (Partizioni)**: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$, $B_1, ..., B_n$ partizioni di Ω.
- **Teo. Bayes**: $P(A_i|B) = P(B|A_i)P(A_i)/\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)$, $A_i \in A_1, ..., A_n$ partizioni di Ω.
- **Note sui Complementari**: $P(A) = 1 - P(A^C)$; $P(A|B) = 1 - P(A^C|B)$.
- **Indipendenza**: $A_1, ..., A_n$ eventi indipendenti sse $P(\bigcap_{i=1}^{n} P(A_i)) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)$.
- **Note sull'Indipendenza**: $P(A|B) = P(A)$ sse A, B eventi indipendenti; indipendenza condizionata $\not\leftrightarrow$ indipendenza incondizionata.

Calcolo Combinatorio

- **Permutazioni**: n elementi distinti $\rightarrow n!$ permutazioni; se $m \leq n$ elementi sono indistinguibili $\rightarrow n!/m!$ disposizioni.
- **Sottoinsiemi di k elementi**: n elementi, assunto $k \leq n \rightarrow n!/(n-k)!$ sottoinsiemi; se l'ordine degli elementi all'interno dei sottoinsiemi non mi importa avrò $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$ sottoinsiemi.
- **Prob. Binomiale**: dati n tentativi, $P(succ.) = p$, assunto $k \leq n \rightarrow P(k\ succ./n\ tentativi) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- **Partizioni**: dato Ω partizionato in K_n sottoinsiemi, calcolo la probabilità, su n tentativi, di ottenere $k_1 \in K_1, ..., k_n \in K_n$ elementi $\rightarrow \binom{n}{k_1, ..., k_n} = n!/k_1!k_2!...k_n$.
- **Prob. Ipergeometrica**: dato $|\Omega| = n$ partizionato in $K_1 = k$ $K_2 = n - k$ sottoinsiemi e scelto un campione di $c < n$ elementi voglio calcolare la probabilità che questo sia composto da $k^{'} \leq k \in K_1$ e $k^{''} = c - k^{'} \leq n - k \in K_2$ elementi $\rightarrow \binom{k}{k'}\binom{n-k}{c-k'}/\binom{n}{c}$.

Variabili Aleatorie Discrete

- **Legge di Prob.**: $p_X(x) = P(X = x)$.
- **Valore Atteso**: $E[X] = \sum_x x \cdot p_X(x)$; $E[X|A] = \sum_x x \cdot p_{X|A}(x)$ se condizionato.
- **Legge dello Statistico Inconsapevole**: sia $g(x)$ deterministica $\rightarrow E[g(X)] = \sum_x g(x) \cdot p_X(x)$.
- **Linearità del Valore Atteso**: $E[\alpha X + \beta] = \alpha E[X] + \beta$; se $g(x)$ è determinista e lineare $E[g(X)] = g(E[X])$.
- **Varianza**: $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[(X - E[X])^2]$.
- **Semi-Linearità della Varianza**: $Var[\alpha X + \beta] = \alpha^2 Var[X]$.
- **Deviazione Standard**: $\sigma_X = \sqrt{Var[X]}$.
- **Perdita di Memoria**: $p_{X-t|X>t}(x) = p_X(x)$.
- **Legge dell'Aspettativa Totale**: $E[X] = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)E(X|A_i)$, $A_1, ..., A_n$ eventi che partizionano Ω.

Variabili Aleatorie Discrete Multiple

- **Marginalizzazione**: $p_Y(y) = \sum_x p_{X,Y}(x,y) = \sum_x p_X(x) \cdot p_{Y|X}(y|x)$.
- **Valore Atteso**: data $g(x,y)$ deterministica $E[g(X,Y)] = \sum_x \sum_y g(x,y) \cdot p_{X,Y}(x,y)$; caso particolare $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.
- **Varianza**: $Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] + 2(E[XY] - E[X]E[Y])$.
- **Casi Particolari (X, Y Indipendenti)**:

$$X \perp Y \Rightarrow \begin{cases} E[XY] = E[X]E[Y] \\ E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)] \\ Var[\alpha X + \beta Y] = \alpha^2 Var[X] + \beta^2 Var[Y] \end{cases}$$

Variabili Aleatorie Continue

- **Densità di Prob.**: $P(x \leq X \leq x + \delta) = \int_x^{x+\delta} f_X(\gamma) d\gamma$.
- **Valore Atteso**: $E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$.
- **Legge dello Statistico Inconsapevole**: $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$.
- **Varianza**: $\sigma^2 = Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 \cdot f_X(x) dx$.
- **Cumulata di Prob.**: $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\gamma) d\gamma$.

Variabili Aleatorie Continue Multiple

- **Marginalizzazione**: $f_Y(y) = \int_x f_{X,Y}(x,y) dx = \int_y f_{Y|X}(y|x) f_X(x) dx$.
- **Valore Atteso**: data $g(x,y)$ deterministica $E[g(X,Y)] = \iint_{\mathbb{R}} g(X,Y) f_{X,Y}(x,y) dx dy$.
- **Casi Particolari (X, Y Indipendenti)**: $X \perp Y \Rightarrow f_{x,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \wedge F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) F_Y(y)$.
- **Teo. Bayes nel Continuo e Situazioni Ibride**:
  - X, Y continue: $f_{X|Y}(x|y) = f_{X,Y}(x,y)/f_Y(y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) / \int_{x'} f_X(x^{'}) f_{Y|X}(y|x^{'}) dx^{'}$.
  - X discreta, Y continua: $p_{X|Y}(x|y) = p_X(x) f_{Y|X}(y|x) / \sum_{x'} p_X(x^{'}) f_{Y|X}(y|x^{'})$.
  - X continua, Y discreta: $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x) p_{Y|X}(y|x^{'}) / \int_{x'} f_X(x^{'}) p_{Y|X}(y|x^{'}) dx^{'}$.
- **Somma di Variabili Aleatorie Continue**: Sia $Z = X + Y$:
  - $X \perp Y \iff f_{Z,X}(z,x) = f_X(x) f_Y(z-x)$.
  - $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$. (Convoluzione.)
  - $F_Z(z) = F_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_x(z-y) f_Y(y) dy$.

Altri Indicatori Statistici per V.A. Multiple

- **Covarianza**
  - $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$.
  - $Cov[X,X] = Var[X]$; $Cov[\alpha X, Y] = \alpha Cov[X,Y]$.
  - $X \perp Y \Rightarrow Cov[X,Y] = 0$ ma $Cov[X,Y] = 0 \not\Rightarrow X \perp Y$.
  - $Cov[\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_j] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cov[X_i, Y_j]$.
  - $Var[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] + 2 \sum \sum_{i<j} Cov[X_i, X_j]$.
- **Coeff. Correlazione Lineare**: $\rho = Cov[X,Y]/\sigma_X \sigma_Y$. Se $\rho = 1 \implies (X - E[X]) = \alpha(Y - E[Y])$.
- **Valore Atteso Condizionato**: $E[X|Y] = \sum_x x \cdot p_{X|Y}(x|y)$.
- **Legge delle Aspettazioni Iterate**: $E[X] = E[E[X|Y]]$.
- **Varianza Condizionata**: $Var[X|Y] = E[X^2|Y = y] - E[X|Y = y]^2$.
- **Legge della Variazione Totale**: $Var[X] = E[Var[X|Y]] + Var[E[X|Y]]$.

Successioni di V.A.

- **Somma di N (casuale) V.A. Indipendenti X_i**:
  - $E[\sum_{i=1}^{N} X_i] = E[E[\sum_{i=1}^{N} X_i N]] = E[N]E[X]$.
  - $Var[X] = E[N]Var[X_1] + Var[N]E[X_1]^2$.
- **Diseguaglianza di Markov**: $E[X] \geq \alpha P(X \geq \alpha)$.
- **Diseguaglianza di Chebyshev**: $Var[X] \geq \alpha^2 P(|X - E[X]| \geq \alpha)$.
- **Convergenza in Prob.**: Sia A_k una successione di V.A. e sia $\alpha \in \mathbb{R}$; A_k si dice convergente in probabilità ad α se: $\lim_{k \to +\infty} P(|A_k - a| \geq \epsilon) = 0\ \forall \epsilon > 0$. $A_k \to^P \alpha$.
- **Media Campionaria**: Siano $X_1, X_2, .., X_n$ V.A. I.I.D.; $M_n = (X_1 + X_2 + .. + X_n)/n$. $M_n \to^P E[X]$; $E[M_n] =^{n \to +\infty} E[X]$; $Var[M_n] =^{n \to +\infty} 0$.

V.A. Notevoli

- **V.A. Uniforme** $X \sim Unif[\alpha, \beta]$:
  - $f_X(x) = \begin{cases} 1/(\beta - \alpha) & \alpha < x < \beta \\ 0 & altr. \end{cases}$
  - $F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ (x - \alpha)/(\beta - \alpha) & \alpha < x < \beta \\ 1 & x > \beta \end{cases}$
  - $E[X] = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; $Var[X] = \frac{1}{12}(\beta - \alpha)^2$.
  - Se discretizzata: $Var[X] = \frac{n^2 - 1}{12}$.

- **V.A. Geometriche** $X \sim Geom(p)$
  - $p_X(x) = (1-p)^{x-1}p$.
  - $E[X] = 1/p$; $Var[X] = (1-p)/p^2$.
- **V.A. Binomiali/di Bernoulli** $X \sim Bin(n,p)$ (se $n = 1$ la binomiale torna bernoulliana).
  - $p_{X_i}(1/succ.) = p$; $p_{X_i}(0/insucc.) = 1-p$.
  - $p_B(i) = p_{X_1+X_2+...+X_n}(i) = \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$.
  - $E[X] = np$; $Var[X] = np(1-p)$.
- **V.A. Esponenziale** $X \sim Exp(\lambda)$.
  - $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-x\lambda} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$.
  - $F_X(x) = 1 - e^{-x\lambda}$.
  - $E[X] = 1/\lambda$; $Var[X] = 1/\lambda^2$.
- **V.A. Gaussiane** $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
  - $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
  - $E[X] = \mu$; $Var[X] = \sigma^2$.
  - $\mathcal{N}(0,1)$ è la gaussiana standard i cui valori di cumulata sono tabulati. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \implies \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
  - $Y = \alpha X + \beta \implies Y \sim \mathcal{N}(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.
  - $X \perp Y$; $X \sim \mathcal{N}(\mu_{'}, \sigma_{'}^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(\mu_{''}, \sigma_{''}^2)$; $Z = X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_{'} + \mu_{''}, \sigma_{'}^2 + \sigma_{''}^2)$.

Calcolo di una Funzione di V.A.

- Discr. $p_Y(y) = P(g(X) = y) = \sum_{x|g(x)=y} p_X(x)$.
- Cont. (Cumulata) $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) \implies f_Y(y) = dF_y(y)/dy$.
- Cont. ($g(X)$ Lineare) $Y = \alpha X + \beta \implies f_Y(y) = \frac{1}{|\alpha|}f_X(\frac{x-\beta}{\alpha})$.
- Cont. ($g(X)$ Monotona) $Y = g(X) \implies \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)|}$.