Esame Ricerca Operativa 02/02/2018

Cogn., nome e matr.:

Problema 1 : Propagazione di un'infezione

Sia $G = (V, E)$ un grafo connesso non orientato, rappresentante, ad esempio, un gruppo di persone. Senza perdita di generalità, assumiamo $V = \{1, \ldots, n\}$.

Sia inoltre noto un insieme $S \subset V$ iniziale di nodi che chiameremo "infetti". L'infezione si propaga nel tempo $t = 0, 1, \ldots$ lungo il grafo in questo modo: se un nodo v è infetto al tempo t, allora ogni nodo w adiacente a v sarà infetto al tempo $t+1$, a meno che w non sia stato inizialmente *vaccinato*. Una volta che un nodo è infetto lo rimane per sempre.

Siccome il cammino più lungo in G non ha più di n nodi, al tempo $t = n$ la situazione si è stabilizzata ed è definitiva.

Noi abbiamo a disposizione q vaccini, che possiamo piazzare inizialmente in q nodi dell'insieme $V - S$. I vaccini bloccano la propagazione del virus in quanto i nodi vaccinati non possono infettarsi. Il problema consiste nello scegliere quali nodi vaccinare in modo tale che il numero finale di nodi infetti sia minimo possibile. Si scriva un modello di programmazione lineare per la soluzione di tale problema.

Soluzione Introduciamo delle variabili binarie x_{it} per $i \in V$ e $t = 0, \ldots, n$, il cui significato è

"$x_{it} \leftrightarrow$ il nodo i è infetto al tempo t"

Siano inoltre y_i, per $i \in V - S$ delle variabili binarie il cui significato è

"$y_i \leftrightarrow$ il nodo i è stato vaccinato"

La funzione obiettivo è

$$\min \sum_{i \in V} x_{in} \tag{1}$$

con i seguenti vincoli (che discuteremo poi).

$$\sum_{i \in V - S} y_i \leq q \tag{2}$$

$$x_{i0} = 1 \qquad \forall i \in S \tag{3}$$

$$x_{it} \geq x_{i,t-1} \qquad \forall i \in V, \quad t = 1, \ldots, n \tag{4}$$

$$x_{it} \leq 1 - y_i \qquad \forall i \in V - S, \quad t = 0, \ldots, n \tag{5}$$

$$x_{it} \geq x_{j,t-1} - y_i \qquad \forall i \in V, \quad j : ij \in E, \quad t = 1, \ldots, n \tag{6}$$

I vincoli (2) limitano il numero di vaccini a disposizione.

I vincoli (3) specificano i nodi infetti iniziali.

I vincoli (4) implicano che una volta infetto, un nodo lo rimane.

I vincoli (5) dicono che un nodo vaccinato non può essere mai infetto e sono ridondanti, in quanto implicati della funzione obiettivo (se $y_i = 1$, una soluzione in cui $x_{in} = 1$ non può essere ottima perchè battuta da quella in cui $x_{in} = 0$. Quindi per la soluzione ottima $x_{in} = 0$ il che anche implica $x_{it} = 0$ per ogni $t < n$).

I vincoli (6) esprimono la propagazione del virus. Se al tempo $t-1$ il nodo j è infetto, e se esiste l'arco ij, e se il nodo i non è vaccinato, allora al tempo t anche il nodo i è infetto.

In conclusione il nostro modello può essere:

> **Minimizzare (1) con i vincoli (2), (3), (4) e (6) nelle variabili binarie x_{it}, con $i \in V, t = 0, \ldots, n$ e y_i, con $i \in V - S$.**

I vincoli (6) di propagazione del virus sono in numero $2 \times |E| \times n = O(n^3)$. In alternativa a questi vincoli, se ne possono usare degli altri (più deboli dal punto di vista del rilassamento), in numero $O(n^2)$, in questo modo:

Per ogni $i \in V$ definiamo "l'intorno di i" come l'insieme $N(i)$ dei nodi adiacenti a i. Allora i vincoli di propagazione possono essere scritti come

$$x_{it} \geq \frac{\sum_{j \in N(i)} x_{j,t-1}}{|N(i)|} - y_i \qquad \forall i \in V, t = 1, \ldots, n$$

Si noti che questo vincolo è attivo solo se almeno un nodo vicino a i è infetto ed i non è vaccinato.

Problema 2 : Duale di graph coloring

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato di n nodi, senza nodi isolati. Il problema della colorazione del grafo richiede di assegnare un colore (i.e., un'etichetta numerica) ad ogni nodo, in modo tale che gli estremi di ogni arco abbiano colore diverso, e che il numero complessivo di colori usati sia minimo possibile.

Un modello per questo problema utilizza variabili binarie x_{vc} per ogni vertice $v \in V$ e colore $c \in \{1, \ldots, n\}$ (si noti che non possono essere mai necessari più di n colori, per cui possiamo assumere che i colori usati saranno un sottoinsieme di $\{1, \ldots, n\}$). Il senso della variabile x_{vc} è che essa è uguale a 1 se e solo se il nodo v è stato colorato con il colore c. Inoltre, per ogni colore $c = 1, \ldots, n$, utilizziamo una variabile binaria y_c che vale 1 se e solo se il colore c è usato da qualche nodo.

La fuzione obiettivo e i vincoli del problema sono, rispettivamente

$$\min \sum_{c=1}^{n} y_c \tag{7}$$

subject to

$$\sum_{c=1}^{n} x_{vc} = 1 \qquad \forall v \in V \tag{8}$$

$$x_{vc} + x_{jc} \leq y_c \qquad \forall vj \in E, \quad \forall c = 1, \ldots, n \tag{9}$$

I vincoli (8) impongono che ogni nodo abbia esattamente un colore. I vincoli (9) dicono fondamentalmente che se un colore non è usato (i.e., $y_c = 0$) allora nessun nodo può avere quel colore, mentre se un colore è usato (i.e., $y_c = 1$) allora per ogni arco del grafo al massimo uno dei due estremi può avere quel colore.

Sia P il problema di programmazione lineare definito da (7), (8) e (9) nelle variabili $x \geq \mathbf{0}$ e $y \geq \mathbf{0}$. Si scriva il duale di P.

Soluzione Introduciamo delle variabili duali u_v, per $v \in V$, associate ai vincoli (8), e w_{ec}, per $e \in E$ e $c = 1, \ldots, n$, associate ai vincoli (9). Le variabil u sono libere, mentre le variabili w sono non-negative.

La funzione obiettivo duale è

$$\max \sum_{v \in V} u_v \tag{10}$$

con i vincoli

$$\sum_{e \in E} w_{ec} \leq 1 \qquad \forall c = 1, \ldots, n \tag{11}$$

(corrispondenti alle variabili primali y_c), e

$$u_v - \sum_{e \in \delta(v)} w_{ec} \leq 0 \qquad \forall v \in V, \quad c = 1, \ldots, n \tag{12}$$

(corrispondenti alle variabili primali x_{vc}).

Problema 3

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, pesato sugli archi con costi $c : E \mapsto \mathbb{R}$ e sui nodi con costi $w : V \mapsto \mathbb{R}$. Tutti i costi sono non-negativi.

Per ogni sottoinsieme $X \subset E$ (rispettivamente $X \subset V$), resta definito il costo di X, indicato con $c(X) := \sum_{e \in X} c(e)$ (rispettivamente, $w(X) := \sum_{v \in X} w(v)$).

A seconda del tipo di sottoinsieme cercato, e del fatto che se ne voglia minimizzare o massimizzare il costo, si avranno diversi tipi di problemi di ottimizzazione, con diverse complessità.

Si discutano tali complessità, specificando se si tratta di problemi NP-hard o polinomiali, considerando sia il caso di minimizzazione che di massimizzazione del costo per i seguenti tipi di sottoinsiemi:

1. X = archi di un cammino elementare (i.e., senza nodi ripetuti) tra due nodi s e t
2. X = archi di un albero di supporto
3. X = archi di un circuito hamiltoniano
4. X = archi di un matching perfetto
5. X = archi di un taglio che separa due nodi assegnati s e t
6. X = nodi tali che ogni arco di E ha almeno un estremo in X
7. X = nodi a due a due mutalmente adiacenti (i.e., una clique)

Soluzione

1. X = archi di un cammino elementare (i.e., senza nodi ripetuti) tra due nodi s e t. Min : Polinomiale. Max : NP-hard.
2. X = archi di un albero di supporto. Min : Polinomiale. Max : Polinomiale.
3. X = archi di un circuito hamiltoniano. Min : NP-hard. Max : NP-hard.
4. X = archi di un matching perfetto. Min : Polinomiale. Max : Polinomiale.
5. X = archi di un taglio che separa due nodi assegnati s e t. Min : Polinomiale. Max : NP-hard.
6. X = nodi tali che ogni arco di E ha almeno un estremo in X. Min : NP-hard. Max : Polinomiale.
7. X = nodi a due a due mutalmente adiacenti (una clique). Min : Polinomiale. Max : NP-hard.

Problema 4

Siano a, b c variabili rappresentanti decisioni binarie . Scrivere uno o più vincoli lineari che forzino la seguente relazione tra a, b, c:

> "se a è vera allora esattamente una tra b e c è vera"

Soluzione I vincoli

$$b \geq a - c$$

$$b \leq 2 - c - a$$

sono binding solo se $a = 1$, nel qual caso implicano $b = 1 - c$ come desiderato.