Nozioni di teoria dei grafi

Giuseppe Lancia

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine

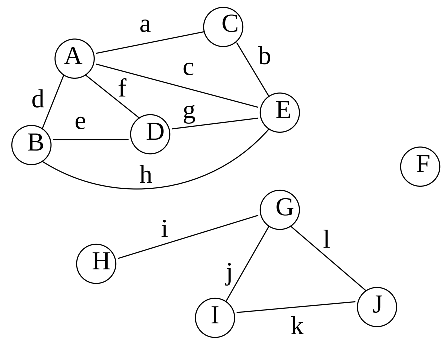

Figure 1: Il grafo G^*, con 10 vertici e 12 lati.

1 Introduzione

Un *grafo* è un oggetto matematico con cui si può rappresentare una relazione binaria su un insieme di elementi. Tale relazione può essere simmetrica (dando origine a un grafo *non orientato*), o asimmetrica (dando origine a un grafo *orientato*). Come esempio del primo caso, si pensi alla relazione "i ha un genitore in comune con j", definita su un insieme di persone, oppure "i è amico di j" (anche se quest'ultima, più realisticamente, non è necessariamente una relazione simmetrica). Nel secondo caso, gli elementi possono essere alcuni incroci di una città, e la relazione del tipo "esiste una strada percorribile nel senso cha va dall'incrocio a all'incrocio b". Oppure, su un insieme di persone, la relazione "a è figlio di b". La *Teoria dei Grafi* è la disciplina che studia i grafi e loro proprietà fondamentali. Grazie ad essa, si conoscono algoritmi e teoremi che ci permettono di rispondere a domande quali "esiste un percorso (sequenza di vie) per andare da un incrocio x a un incrocio y in una città senza mai violare un senso unico?" o "la persona x è un antenato della persona y?" o "in un gruppo di n persone, esistono k persone tali che ciascuno di loro conosce gli altri $k-1$?" ed altre simili.

2 Grafi non orientati

Un *grafo non orientato* (o semplicemente *grafo*, qualora non ci sia pericolo di confusione) è definito da una coppia $G = (V, E)$ di insiemi finiti, dove V è detto l'insieme dei *vertici* (o *nodi*) e E l'insieme dei *lati* (o *archi*) Le iniziali sono dovute ai termini inglesi **V**ertex e **E**dge. Un lato è una coppia non ordinata di vertici, che indicheremo con ij $(= ji)$, dove i e j appartengono a V e $i \neq j$.

Due vertici $i, j \in V$si dicono *adiacenti* se il lato $e = ij$ appartiene ad E. In tal caso si dice che e è *incidente* in i e in j (o che e *collega* i e j), e questi ultimi si dicono anche gli *estremi* di e. Due lati si dicono *adiacenti* se sono incidenti in un medesimo vertice.

Il *grado* di un vertice v di G, denotato con $d_G(v)$ (o, più semplicemente con $d(v)$ qualora non ci sia pericolo di confusione) è il numero di archi incidenti in v. Un grafo si dice *regolare* se $d(i) = d(j)$ per ogni $i, j \in V$. In particolare, il grafo si dice k-regolare se $d(i) = d(j) = k$ per ogni $i, j \in V$. Un vertice di grado

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
A	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0
C	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0
E	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
H	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1

Figure 2: La matrice di incidenza nodi-archi di G^*.

0 si dice *isolato*. In figura 1 vediamo rappresentato un grafo che chiameremo G^* e che useremo nel resto del capitolo per illustrare alcuni dei concetti introdotti. In G^* il vertice F è isolato, il vertice E ha grado 4, e i lati a e b sono adiacenti.

La *matrice di incidenza nodi-archi* di un grafo è una matrice M con $|V|$ righe e $|E|$ colonne. Ogni riga corrisponde a un vertice $v \in V$ e ogni colonna corrisponde a un lato $e = vw \in E$. Il generico elemento M_{ve} della matrice vale 1 se $e \in E$ è incidente in $v \in V$, altrimenti vale 0. In figura 2, è visualizzata la matrice di incidenza nodi-archi del grafo G^*. Si noti che nella matrice M ci sono esattamente due "1" in ogni colonna, e che la somma degli elementi di una qualsiasi riga v è pari a $d(v)$. Abbiamo il seguente

Teorema **1**: Sia $G = (V, E)$ un grafo. Allora $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Dim: Sommando gli elementi di M riga per riga, otteniamo $\sum_{v \in V} d(v)$. Sommandoli colonna per colonna, otteniamo $|E| \times 2$. Siccome i due modi devono dare lo stesso risultato, il teorema è dimostrato. ♣

Il precedente teorema implica che, in ogni grafo, la somma dei gradi dei vertici è un numero pari. Da questo fatto consegue un importante risultato:

Teorema **2**: In ogni grafo c'è un numero pari di vertici di grado dispari.

Dim: Sia $D \subseteq V$ l'insieme dei vertici di grado dispari e $P = V - D$ l'insieme dei vertici di grado pari. Abbiamo

$$\sum_{v} d(v) = \sum_{v \in D} d(v) + \sum_{v \in P} d(v) = 2|E|$$

da cui, essendo sia $\sum_{v \in P} d(v)$ che $2|E|$ dei numeri pari, consegue che $\sum_{v \in D} d(v)$ deve anch'esso essere un numero pari. Ma allora $|D|$ è pari, in quanto sommando una quantità dispari di numeri dispari, il risultato è un numero dispari. ♣

Una sequenza $(d_1, \ldots, d_n)$ di numeri naturali si dice *grafica* se esiste un grafo G di n vertici tale che la sequenza corrisponde ai gradi dei vertici di G. Non tutte le sequenze sono grafiche, come è facile vedere. Ad esempio, le seguenti sono alcune condizioni necessarie perchè una sequenza risulti grafica:

- una sequenza grafica non può contenere alcun numero $\geq n$
- se una sequenza contiene sia il numero 0 che il numero $n-1$, non può essere grafica, perchè implicherebbe che esiste un nodo che non è adiacente ad alcun altro nodo, ed uno che è adiacente a tutti gli altri
- la sequenza deve contenere un numero pari di numeri dispari. Ad es. la sequenza $(2, 3, 0, 1, 1)$ non è grafica.

Esercizio: Dimostrare che, dato un gruppo di n persone, ve ne sono sempre almeno due con lo stesso numero di amici (supponendo che l'amicizia sia una relazione simmetrica). $\diamondsuit$

Esercizio: Dimostrare che non può esistere un grafo $G = (V, E)$ in cui $|E| = 1000$ e $d(v) \in \{3, 6, 9\}$ per ogni $v \in V$. $\diamondsuit$

Due grafi $G = (V, E)$ e $G' = (V', E')$ si dicono *isomorfi* se esiste una funzione $f : V \mapsto V'$ tale che $f(v)f(w) \in E'$ se e solo se $vw \in E$. In pratica, due grafi sono isomorfi se è possibile rinominare i nodi del primo usando i nomi dei nodi del secondo, e ottenere esattamente il secondo grafo. Si noti che in un grafo non è importante il modo in cui il grafo è disegnato, ma solo quali sono le relazioni tra i nodi.

Dato un grafo $G = (V, E)$, un grafo $G' = (V', E')$ si dice *sottografo* di G se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. Se inoltre $V' = V$, allora G' si dice un sottografo *di supporto* (*spanning*) di G. Dato un sottoinsieme di vertici $S \subseteq V$, si dice sottografo *indotto* da S, indicato con $G[S]$ il grafo che ha S come insieme di vertici e come lati ha tutti i lati $ij \in E$ tali che $i \in S$ e $j \in S$.

Un grafo si dice *completo* se ogni coppia di vertici è collegata da un lato. Il generico grafo completo di n nodi (unico, a meno di isomorfismi) si indica con K_n. In K_n ci sono n vertici e $n(n-1)/2$ lati. Un sottografo completo di un grafo è detto una *clique* (o anche *cricca*). Se in un grafo i lati indicano relazioni di compatibilità fra gli elementi, una clique è un insieme di elementi tutti mutualmente compatibili. Ad esempio, il sottografo indotto da $\{G, I, J\}$ in G^* è una clique di 3 nodi, detta anche un *triangolo*.

Dato un grafo $G = (V, E)$ si definisce grafo *complementare* di G il grafo $\bar{G} = (V, \bar{E})$ definito da $\bar{E} = \{vw \,|\, v, w \in V,\ vw \notin E\}$. Se G è un grafo completo, il suo complementare è un grafo di soli nodi isolati. Un insieme di vertici $S \subseteq V$ è detto un *insieme indipendente* o *stabile*, se $ij \notin E$ per ogni $i, j \in S$. Si noti che S è un insieme indipendente se e solo se il grafo indotto da S in $\bar{G}$ è una clique.

Esercizio: Dato un insieme V di 20 elementi, quanti grafi diversi (non necessariamente non isomorfi) esistono, che abbiano V come insieme di vertici? $\diamondsuit$

3 Cammini e cicli

Un *cammino* dal vertice v_0 al vertice v_k in un grafo $G = (V, E)$ è una sequenza di vertici $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$ tali che, per $0 \leq i \leq k-1$, si ha $v_i v_{i+1} \in E$. Si dice anche che il cammino *usa* (o *attraversa*) i k lati $v_i v_{i+1}$, per $0 \leq i \leq k-1$, e che *visita* (o *attraversa*) i $k+1$ vertici $v_0, \ldots, v_k$. Si dice anche che un tale cammino ha *lunghezza* k (la lunghezza è pari al numero di lati usati) e che *connette* (o *collega*) v_0 e v_k. Un cammino si dice *semplice* se non usa mai lo stesso arco più di una volta, ed *elementare* se non visita mai lo stesso vertice più di una volta (con l'eccezione del primo vertice del cammino, che può coincidere con l'ultimo). Nell'esempio di figura 1 i seguenti cammini collegano C ad A:

$P_1 : C, E, D, B, E, D, A$

$P_2 : C, E, B, D, E, A$

$P_3 : C, E, D, A$

P_1 non è un cammino semplice. P_2 è semplice ma non elementare. P_3 è un cammino elementare. Nel seguito, qualora non specificato diversamente, per "cammino" intenderemo sempre, implicitamente, cammino elementare.

Dati due vertici u e v, la loro *distanza* in G, denotata con $d_G(u, v)$, è definita come la lunghezza del cammino più corto che li congiunge. Il *diametro* di un grafo è la distanza massima fra una qualsiasi coppia di vertici (ad esempio, in $G^*[\{H, G, I, J\}]$ il diametro è 2).

Un *ciclo*, o *circuito*, è un cammino chiuso, ossia un cammino in cui $v_0 = v_k$. Ad esempio, A,B,D,E,C,A e G,I,J,G sono circuiti in G^*. Un grafo G si dice *aciclico* se non contiene alcun ciclo elementare (i.e., senza vertici ripetuti, a parte il primo e l'ultimo) Un circuito elementare che attraversa tutti i nodi di G si chiama *circuito hamiltoniano*. Un circuito semplice (i.e., senza lati ripetuti) che attraversa tutti i lati di G si chiama *circuito euleriano*. Circuiti hamiltoniani ed euleriani saranno trattati nella prossima sezione.

Un grafo G si dice *connesso* se ogni coppia di vertici è collegata da almeno un cammino in G. Dato un grafo $G = (V, E)$, i vertici possono essere partizionati in k sottoinsiemi $V_1, \ldots, V_k$ tali che $G[V_i]$ è un grafo connesso per ogni i, mentre non lo è il grafo $G[V_i \cup \{v\}]$ per alcun $v \notin V_i$. I sottografi $G[V_i]$ si chiamano le *componenti connesse* di G. Un grafo è connesso se e solo se ha un'unica componente connessa. Il grafo G^* ha tre componenti connesse.

Un insieme $E' \subseteq E$ di lati si dice un *taglio* se la sua rimozione da E aumenta il numero di componenti connesse. In particolare, a partire da un insieme S di vertici si può definire il seguente insieme $\delta(S)$ di lati

$$\delta(S) := \{ij : i \in S, j \in V - S\}$$

che risulta un taglio non appena esista almeno una coppia di nodi (uno in S e l'altro in $V - S$) adiacenti in G (in caso contrario, $\delta(S) = \emptyset$).

Esercizio: Dimostrare che un grafo con sequenza grafica $(3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4)$ è necessariamente connesso $\diamondsuit$

Esercizio: Dimostrare che in un grafo G aciclico, esiste sempre almeno un vertice v con $d_G(v) \leq 1$. $\diamondsuit$

Esercizio: Dimostrare che, dato un grafo $G = (V, E)$, si ha che $\{e\}$ è un taglio per ogni $e \in E$ se e solo se G è aciclico. $\diamondsuit$

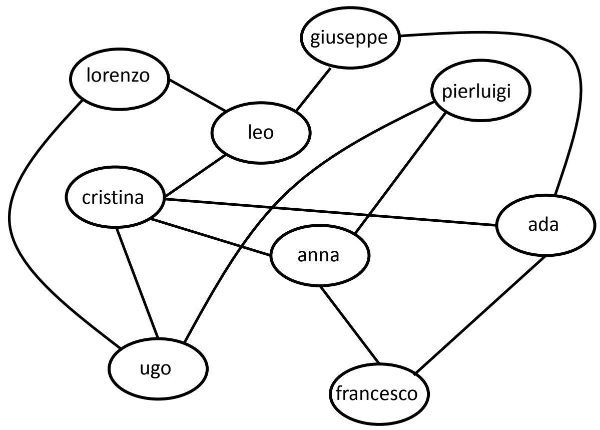

Figure 3: Un gruppo di amici invitati a cena

Esercizio: Dimostrare che un grafo con n nodi e $(n-1)(n-2)/2+1$ lati è necessariamente connesso. $\diamondsuit$

Esercizio: Sia G un grafo (non completo) tale che, per ogni coppia di vertici x e y non adiacenti si ha $d(x)+d(y) \geq n-1$. Dimostrare che $diam(G)=2$. $\diamondsuit$

4 Grafi bipartiti, hamiltoniani e euleriani

Un gruppo di persone si trovano per una cena a casa di uno di loro. Le relazioni di amicizia fra gli stessi sono rappresentate, in modo ovvio, dal grafo in Figura 3. Il padrone di casa desidera farli sedere in modo tale che ognuno abbia come due immediati commensali, a destra e sinistra, degli amici. È possibile una tale disposizione? Un modo per verificarlo, sarebbe quello di andare per tentativi, provando tutte le possibili permutazioni circolari (sono $(n-1)!/2$ per n elementi) e vedendo se ce ne è una del tipo desiderato. Abbiamo già visto fin dagli esempi introduttivi del primo capitolo come questa sia, in generale, una strategia da evitare. Basti notare che, per soli 9 elementi, si dovrebbero esaminare potenzialmente ben 20160 disposizioni!

Dato un grafo G, una permutazione circolare dei vertici in cui ogni nodo è preceduto e seguito da un nodo che gli è adiacente in G, è detta *circuito* (o *ciclo*) *hamiltoniano*. Detto altrimenti, un ciclo hamiltoniano è un ciclo che passa per ogni nodo, una e una sola volta. Un grafo si dice *hamiltoniano* se contiene un circuito hamiltoniano. Quindi, il nostro problema, corrisponde a verificare se il grafo di Figura 3 è hamiltoniano. Questo problema è un problema che può risultare molto difficile, e per il quale non esistono condizioni necessarie e sufficienti che siano facili da verificare. Da un punto di vista algoritmico, il problema è dei più difficili in assoluto, e non sono note procedure più efficienti che –implicitamente o esplicitamente– provare tutte le possibilità. Nel nostro esempio però (a parte la piccola dimensione del problema) possiamo sfruttare una caratteristica del problema per rispondere immediatamente che no, non ci sono soluzioni possibili. Infatti,

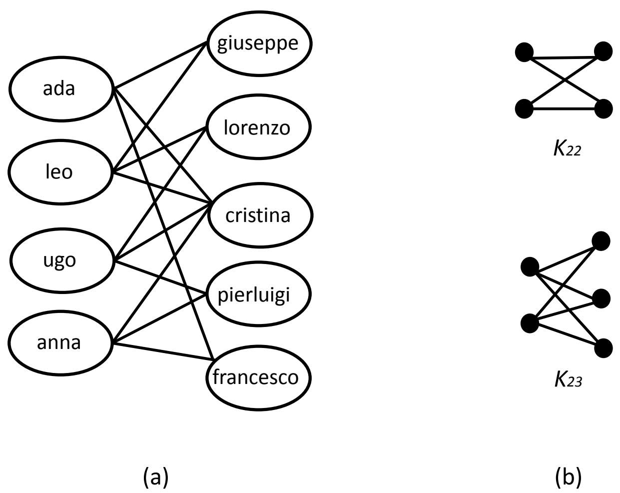

Figure 4: (a) Un grafo bipartito. (b) Grafi bipartiti completi

si noti che ogni persona ha un nome corto (una o due sillabe) o lungo (tre o più sillabe) e accade che chi ha il nome corto ha solo amici con il nome lungo, mentre chi ha il nome lungo ha solo amici con il nome corto. Quindi, una disposizione accettabile dovrebbe alternare persone dal nome lungo e persone dal nome corto, sicchè dovrebbero esserci esattamente altrettanti nomi lunghi che nomi corti (e, in particolare, dovrebbe esserci un numero *pari* di persone). Ma ci sono 9 invitati e perciò una tale disposizione è impossibile.

Un grafo in cui i nodi possono essere ripartiti in due insiemi, V_1 e V_2 tale che ogni arco collega un estremo in V_1 e uno in V_2 si dice *bipartito*. In figura 4(a) si è ridisegnato il grafo iniziale, mettendo in evidenza la bi-partizione. Il ragionamento di poco fa si ritrova in questo teorema, che caratterizza i grafi bipartiti:

TEOREMA **3**: G è un grafo bipartito se e solo se ogni ciclo in G ha un numero pari di nodi.

Dim: La necessità è molto semplice: Un qualsiasi ciclo che parta, ad esempio, da un nodo in V_1, deve alternare nodi di V_1 e V_2 e terminare in un nodo di V_1. Quindi, deve attraversare un numero pari di lati, o finirebbe in un nodo di V_2.

Per la sufficienza, ragioniamo così. Intanto, supponiamo il grafo connesso (in caso contrario, si ripeta questo procedimento sulle varie componenti connesse). Si fissi un nodo v, e si definisca V_1 come l'insieme dei nodi per i quali esiste un cammino di lunghezza pari da v, e $V_2 = V - V_1$. Se, per assurdo, esistesse un arco ij con i e j entrambi in V_1 (o entrambi in V_2), allora ci sarebbe anche un un ciclo dispari, contenuto nell'unione del cammino da v a i col cammino da v a j e con l'arco ij. Siccome abbiamo supposto che non ci siano cicli dispari, V_1 e V_2 sono una partizione di V. ♣

Un grafo bipartito si denota anche con $G = (V_1, V_2, E)$. Un grafo si dice *bipartito completo* se è tale che $ij \in E$ per ogni $i \in V_1$ e $j \in V_2$. Un tale grafo si indica anche con $K_{n,m}$ (dove $n = |V_1|$ e $m = |V_2|$) ed ha $n + m$ vertici e $n\,m$ lati.

Esempio. Il processo detto *sequenziamento* del genoma consiste in (1) replicare (clonare) il DNA in oggetto in molte copie (almeno una decina); (2) spezzare, casualmente, ogni copia in frammenti di circa 1000 basi l'uno; (3) con un'apposita macchina (detta sequenziatore) ricavare la sequenza di basi di ognuno di questi frammenti; (4) con un computer, determinare la sovrapposizione dei frammenti in modo da poter ricostruire la sequenza originale.

Al termine del processo, si ha una sequenza s ricostruita, che contiene la sequenza f_i di ogni frammento i. Inoltre, ogni frammento ha anche associata una posizione p_i, che specifica il suo inizio all'interno della sequenza s. Uno dei maggiori problemi in questo processo è dato dal fatto che di ogni cromosoma esistono, in realtà due copie (una paterna e una materna) e quindi il processo dovrebbe ricostruire non una, ma due sequenze (s_p e s_m) e per ogni frammento, oltre alla posizione d'inizio, dovrebbe anche determinare l'appartenenza a_i (con, ad esempio, $a_i = 1$ se il frammento proviene dalla copia paterna e $a_i = 0$ se il frammento proviene dalla copia materna). Sia F l'insieme di tutti i frammenti. Dati due frammenti i e j con sovrapposizione non nulla (ossia tale che $p_i \leq p_j < p_i + \text{lungh}(f_i)$, diciamo che i due frammenti sono *in conflitto* se, nelle posizioni coperte da entrambi, esiste almeno una posizione k tale che il nucleotide $f_i[k]$ è diverso dal nucleotide $f_j[k]$. Chiaramente, due tali frammenti non possono provenire entrambi dalla copia paterna o dalla copia materna. Sia E l'insieme delle coppie di frammenti in conflitto. Allora, il grafo $G = (F, E)$ deve essere un grafo bipartito (se così non fosse, vuol dire che ci sono stati errori di sequenziamento e/o di piazzamento dei frammenti). Se G è bipartito, i nodi F possono partizionarsi in nodi F_p (provenienti dalla copia paterna) e F_m, provenienti dalla copia materna. $\diamond$

Come corollario del teorema 3 abbiamo che *un grafo bipartito con un numero dispari di nodi non può essere hamiltoniano*. Dal punto di vista algoritmico, è nota una procedura molto efficiente per determinare se un grafo è bipartito. Applicandola al nostro caso, si può risolvere il problema iniziale in modo molto più rapido rispetto all'enumerazione completa di tutte le disposizioni degli invitati. Si noti però che la condizione di essere bipartito con n dispari è solo una condizione sufficiente, e molto debole, per verificare che un grafo *non* è hamiltoniano. Il problema di verificare se un grafo è hamiltoniano o meno è difficile e non esistono semplici condizioni necessarie e sufficienti perchè un grafo risulti essere hamiltoniano. Una condizione sufficiente non-elementare è la seguente:

Lemma 4: Sia G un grafo tale che per ogni coppia di nodi u e v non adiacenti si ha $d(u) + d(v) \geq n$. Allora in G esiste un cammino hamiltoniano.

Dim: Ragioniamo per assurdo, e supponiamo che $G = (V, E)$ sia un controesempio massimale. In particolare, in G si ha $d(u)+d(v) \geq n$ per ogni coppia di nodi u e v tali che $uv \notin E$, ma non esistono cammini hamiltoniani. Siccome G è massimale, l'aggiunta di un qualsiasi arco crea un cammino hamiltoniano. Siano β, γ due nodi non adiacenti. Aggiungendo $\beta\gamma$ ad E si crea un cammino hamiltoniano, sia esso

$$\mathcal{P} = \alpha, \ldots, \beta, \gamma, \ldots, \delta$$

Per ogni x in $\mathcal{P}$ indichiamo con $x + 1$ e $x - 1$ il suo successore e il suo predecessore. Notiamo che in G non ci sono l'arco $\alpha\delta$, nè l'arco $\beta\delta$ nè $\alpha\gamma$. Infatti ciascuno di questi creerebbe un cammino hamiltoniano (ad esempio $\alpha\delta$ crea il cammino hamiltoniano $\beta, \beta-1, \ldots, \alpha, \delta, \delta-1, \ldots, \gamma)$ Abbiamo quindi

$$d(\beta) + d(\gamma) \geq n, \quad d(\alpha) + d(\delta) \geq n, \quad d(\beta) + d(\delta) \geq n, \quad d(\alpha) + d(\gamma) \geq n \tag{1}$$

Per ogni nodo x sia $N(x)$ l'insieme dei nodi adiacenti ad x. Siano inoltre

$$D = \{x : x - 1 \in N(\delta)\} \setminus \{\delta\}$$

$$A = \{x : x + 1 \in N(\alpha)\} \setminus \{\alpha\}$$

Abbiamo

$$|D| = d(\delta) - 1 \qquad |A| = d(\alpha) - 1$$

Vogliamo ora concludere che esiste un nodo $x \in N(\gamma) \cap D$ nel tratto tra α e β o un $x \in N(\beta) \cap A$ nel tratto tra γ e δ. Nel primo caso avremmo in G il cammino hamiltoniano

$$\alpha, \ldots, x, \delta, \delta-1, \ldots, \gamma, x+1, \ldots, \beta$$

e nel secondo il cammino hamiltoniano

$$\gamma, \ldots, x, \beta, \beta-1, \alpha, x+1, \ldots, \delta$$

cosa assurda visto che G è un controesempio. Da (1) Si ha

$$|N(\gamma)| + |D| = d(\gamma) + d(\delta) - 1 \geq n - d(\beta) + d(\delta) - 1 \geq n - d(\beta) + n - d(\beta) - 1 = 2(n - d(\beta)) - 1$$

Allo stesso modo

$$|N(\beta)| + |A| \geq 2(n - d(\gamma)) - 1$$

♣

Lemma 5: Sia G un grafo che contiene un cammino hamiltoniano, e.g., $v_1, \ldots, v_n$. Se $d(v_1) + d(v_n) \geq n$, allora G è hamiltoniano.

Dim: Se v_1 e v_n sono adiacenti, allora G è hamiltoniano. Altrimenti, sia V_1 l'insieme dei nodi interni (i.e., tra $v_2, \ldots, v_{n-1}$) adiacenti a v_1 e V_n l'insieme dei nodi interni il cui predecessore è adiacente a v_n. Si noti che $|V_1| = d(v_1)$ e $|V_n| = d(v_n) - 1$. Se $V_1 \cap V_n = \emptyset$ allora si avrebbe $|V_1| + |V_n| \leq n - 2$, impossibile, visto che deve essere $|V_1| + |V_n| = d(v_1) + d(v_n) - 1 \geq n - 1$. Quindi esistono nodi in $V_1 \cap V_n$. Sia v_t un tale nodo. Allora $v_1, \ldots, v_{t-1}, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_t, v_1$ è un circuito hamiltoniano. ♣

Teorema **6**: Sia G un grafo tale che per ogni coppia di nodi u e v non adiacenti si ha $d(u) + d(v) \geq n$. Allora G è hamiltoniano

Dim: Dal lemma 4 sappiamo che in G esiste un cammino hamiltoniano $v_1, \ldots, v_n$. Se v_1 e v_n sono adiacenti, allora abbiamo un circuito hamiltoniano. Altrimenti, la condizione implica che $d(v_1) + d(v_n) \geq n$. Dal lemma 5 segue che G è hamiltoniano. ♣

Corollario 7**:** Sia G un grafo tale che per ogni nodo v si ha $d(v) \geq n/2$. Allora G è hamiltoniano.

Dim: In tale grafo valgono le condizioni del teorema 6 da cui la conclusione. ♣

Esercizio: In un'aula ci sono 5 file di 5 banchi ciascuna. L'insegnante richiede agli alunni di cambiare posto, in modo tale che ogni alunno passi dal suo banco a un banco che sia immediatamente a sinistra o a destra, o di fronte o dietro al suo (chiaramente, non tutte le scelte sono possibili per tutti gli studenti. Ad esempio, chi è già seduto in un banco all'estrema destra non può spostarsi ancora più a destra). Si determini se esiste o no almeno un modo di spostarsi che permetta a tutti gli studenti di cambiare banco. ♢

Esercizio: Nel gioco degli scacchi, il cavallo compie la caratteristica mossa a "L" (ossia, passa dalla casella (x, y) alla casella $(x+\delta, y+\Delta)$ dove $\delta, \Delta \in \{-2, -1, 1, 2\}$ e $|\delta| \neq |\Delta|$. Un "giro del cavallo" di una scacchiera consiste nel partire da una casella (x, y) e, effettuando sempre mosse valide, toccare ogni altra casella una e una sola volta, fino a tornare alla casella (x, y). Si determini se esiste una posizione di partenza da cui è possibile il giro del cavallo su una scacchiera 5×5. La stessa domanda per una scacchiera 4×4. ♢

Un grafo si dice *planare* se può essere disegnato in modo che due archi non si incrocino mai in alcun punto. Un grafo G' si dice un *minore* di G se G' può essere ottenuto da G tramite una sequenza di ripetizioni della seguente operazione:

- *Contrazione di un arco:* Si rimuove un arco $e = ij$ (inclusi i vertici i e j) e al suo posto si inserisce un nuovo nodo, e'. Ogni lato che incideva in i o in j diventa ora un lato che incide in e' (si cancellano eventuali lati duplicati).

Abbiamo il seguente teorema, la cui dimostrazione è troppo complessa per essere riportata qui:

Teorema **8**: Un grafo G è planare se e solo se non ha nè K_5 nè $K_{3,3}$ fra i suoi minori.

Analogamente al problema di determinare se un grafo abbia o meno un circuito che attraversa tutti i vertici una e una sola volta, possiamo chiederci se esista un circuito che attraversi tutti i lati una e una sola volta. Un tale circuito si dice *euleriano* ed un grafo che possiede un circuito euleriano si dice *grafo euleriano*. Il nome deriva da quello di Eulero, il famoso matematico che può considerarsi il padre della teoria dei grafi. La teoria dei grafi è infatti nata, almeno storicamente, con il problema dei ponti della città di Könisberg: ci si chiedeva se fosse possibile partire da un punto della città, attraversare i suoi 7 ponti una e una sola volta, e ritornare al punto di partenza. Eulero dimostrò come questo non fosse possibile, e diede condizioni necessarie e sufficienti all'esistenza di un circuito del tipo desiderato nel caso generale.

Teorema **9**: Un grafo $G = (V, E)$ connesso è euleriano se e solo se $d(v)$ è pari per ogni $v \in V$.

Dim: Che la condizione sia necessaria è banale. Sia C un circuito euleriano. Seguendo C, rimuoviamo gli archi dal grafo. Ogni volta che entriamo in un nodo, e poi ne usciamo, diminuiamo di 2 il grado del nodo. Alla fine il grado di ogni nodo deve essere 0, e quindi, all'inizio, doveva essere un numero pari.

Per la sufficienza, facciamo vedere che la seguente procedura determina un circuito euleriano C:

1. $C := \{u\}$ /* u è un qualsiasi nodo di G */

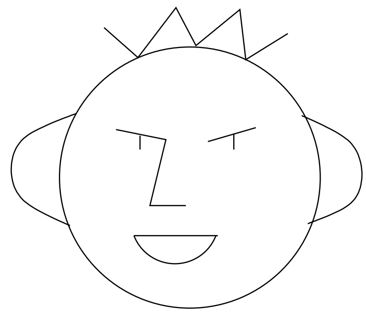

Figure 5: Quante volte va staccata la penna dal foglio per disegnare questa figura senza mai ripassare la stessa linea?

2. **while** $E \neq \emptyset$

   2a. Sia v un nodo di C di grado > 0

   2b. Partendo da v, si determini un circuito semplice C' che attraversa alcuni archi (siano essi F') e torna a v

   2c. Si fondano C e C', ottenendo il circuito che va da u a v lungo C, poi attraversa tutto C' e poi torna a u lungo C. Si rinomini C il circuito risultante

   2d. $E := E - F'$ /* si tolgano gli archi appena visitati */

3. **endwhile**

Ad ogni iterazione del ciclo 2a-2d, deve esistere almeno un nodo di C di grado positivo. Infatti, noi abbiamo supposto che il grafo sia connesso, e quindi da almeno un nodo di C deve uscire qualche arco con un estremo al di fuori di C. Il grado di ogni nodo rimane sempre pari, in quanto ad ogni iterazione viene rimosso un circuito (passo 2d). In virtù di ciò, nel passo 2b siamo sicuri di poter partire da v e, costruendo un qualsiasi cammino semplice, tornare prima o poi a v, in quanto ogni volta che entriamo in un nodo diverso da v, possiamo anche uscire dallo stesso. Al termine della procedura, il grado di tutti i nodi del grafo deve essere diventato 0, e il circuito C finale è un circuito euleriano. ♣

Un *cammino euleriano* è un cammino che attraversa tutti gli archi, una e una sola volta. Dal teorema 9 segue il

COROLLARIO 10**:** Un grafo connesso ha un cammino euleriano se e solo se ha al più due vertici di grado dispari.

Infatti, se non ci sono vertici di grado dispari il grafo è euleriano e quindi c'è un circuito (che è anche un cammino) euleriano. Altrimenti, detti a e b i vertici di grado dispari, l'algoritmo precedente inizializzato con $v_0 = a$ determina un cammino euleriano da a a b. Si noti che il famoso gioco di disegnare una certa figura geometrica senza mai staccare la penna dal foglio nè ripassare due volte su un stessa linea può essere interpretato come il problema di determinare se un certo grafo ha un cammino euleriano o meno.

Esercizio: Quante volte, come minimo, bisogna staccare la penna dal foglio per disegnare (senza mai passare due volte su una stessa linea) la figura 5? $\diamondsuit$

Esercizio: Sia $G = (V, E)$ un grafo con esattamente due vertici, a e b di grado dispari. Sia G' il grafo ottenuto da G aggiungendo a V un nodo $c \notin V$ e ad E i due lati ac e bc. Dimostrare che G è connesso se e solo se G' è connesso. $\diamondsuit$

Esercizio: Sia $V = \{1, 2, \ldots, 20\}$ e $G = (V, E)$ un grafo in cui E è definito dalle regole seguenti. Si dica, per ogni caso, se (i) G è connesso, (ii) G è bipartito, (iii) Ogni componente connessa di G è euleriana, (iv) Ogni componente connessa di G è hamiltoniana:

1. $ab \in$ E se $a + b$ è pari.
2. $ab \in$ E se $a + b$ è dispari.
3. $ab \in$ E se $a \times b$ è pari.
4. $ab \in$ E se $a \times b$ è dispari.
5. $ab \in$ E se $a \times b$ è un quadrato.
6. $ab \in$ E se $a - b$ è un multiplo 3.

$\diamondsuit$

5 Alberi

Un grafo che sia

(i) aciclico; (ii) connesso

è detto un *albero*. L'albero è il grafo minimale (rispetto al numero di lati) necessario e sufficiente per connettere un insieme di nodi. Infatti, in un albero l'aggiunta di un qualsiasi lato non aumenta il numero di coppie di nodi connesse, mentre si può dimostrare che la rimozione di un qualsiasi lato riduce il numero di coppie connesse. Un generico grafo aciclico si chiama anche una *foresta*, perchè ogni sua componente connessa è un albero.

Un albero di n nodi ha sempre esattamente $n - 1$ archi. Per $n = 1, 2$ questo è ovvio. Per quel che riguarda gli altri casi, dimostriamo che

1. Un grafo con $n \geq 3$ nodi e $|E| > n - 1$ non può essere aciclico.
2. Un grafo con $n \geq 3$ nodi e $|E| < n - 1$ non può essere connesso.

Dim: Entrambi i punti possono essere dimostrati, ad esempio, per induzione. Per quel che riguarda il punto 1, l'asserzione è sicuramente vera per $n = 3$. Consideriamo ora il caso di $n > 3$. Se ogni nodo ha grado ≥ 2 il grafo ha sicuramente almeno un ciclo (vedi anche esercizio in sezione 3). Altrimenti, sia v un nodo di grado ≤ 1. Togliendo v e l'eventuale arco incidente in v, otteniamo un grafo con $n-1$ nodi e più di $n-2$ archi, che, per induzione, deve avere almeno un ciclo.

Per quel che riguarda il punto 2, il caso base $n = 3$, è certamente vero. Per $n > 3$, se esiste un nodo di grado 0, il grafo non è connesso. Altrimenti, sia v un nodo di grado 1 (deve esistere, perchè, diversamente, si avrebbe $\sum_{u \in V} d(u) \geq 2n$. Ma $2n > 2|E|$, mentre la somma dei gradi deve dare $2|E|$). Come prima, togliendo v e l'arco incidente in v, otteniamo un grafo G' con $n-1$ nodi e al più $n-2$ archi, che, per induzione, non può essere connesso. Siccome una qualsiasi coppia di vertici non connessa in G' non è connessa neppure in G (perchè il nodo v non può essere usato in nessun cammino –se non come nodo inziale/finale del cammino), anche G non è connesso. ♣

Le seguenti proprietà caratterizzano gli alberi, ossia sono tutte definizioni alternative di un albero $G = (V, E)$:

1. G è connesso e aciclico
2. G è connesso e $|E| = |V| - 1$
3. G è aciclico e $|E| = |V| - 1$
4. G è connesso e, per ogni coppia di nodi i e j esiste un unico cammino fra i e j
5. G è connesso e la rimozione di un qualsiasi arco disconnette G.
6. G è aciclico e, per ogni coppia di nodi i e j tali che $ij \notin E$, aggiungendo l'arco ij, G conterrebbe esattamente un ciclo.

Per esercizio, si dimostri l'equivalenza di almeno alcune delle definizioni alternative citate (cioè si scelgano arbitrariamente alcune coppie $x, y \in \{1, \ldots, 6\}$ e si dimostri che x implica y).

Un nodo di grado 1 in un albero si chiama una *foglia*. In ogni albero con $n \geq 2$ ci sono almeno due foglie (per esercizio, lo si dimostri). Un nodo non foglia di un albero si chiama anche *nodo interno*. Si noti che un cammino di lunghezza l rappresenta un caso estremo di albero (con esattamente 2 foglie e $l-1$ nodi interni). Il cammino è l'albero di diametro massimo tra tutti gli alberi su un certo insieme di nodi. All'altro estremo abbiamo la *stella*, ossia un albero in cui c'è un nodo interno e tutti gli altri nodi sono foglie. La stella è l'albero di diametro minimo.

Sia $T = (V, E_T)$ un albero di supporto in un grafo $G = (V, E)$. La rimozione da T di un qualsiasi arco $e = ij$ disconnette l'albero. In particolare, l'arco individua una partizione dei nodi in due insiemi: V_i (i nodi raggiungibili da i in $(V, E_T - \{e\})$) e $V_j = V - V_i$ (i nodi raggiungibili da j in $(V, E_T - \{e\})$). Il taglio $\delta(V_i)$ è anche detto *taglio fondamentale* associato all'arco e nell'albero T.

Similmente, l'aggiunta a T di un qualsiasi arco $a = ij \in E - E_T$ definisce univocamente un circuito C in G passante per i e j. Il circuito, consistente dell'unico cammino tra i e j in T più l'arco a, è detto *circuito fondamentale* associato ad a nell'albero T.

Concludiamo questa sezione con un teorema riguardo al numero di alberi possibili su un insieme di n nodi.

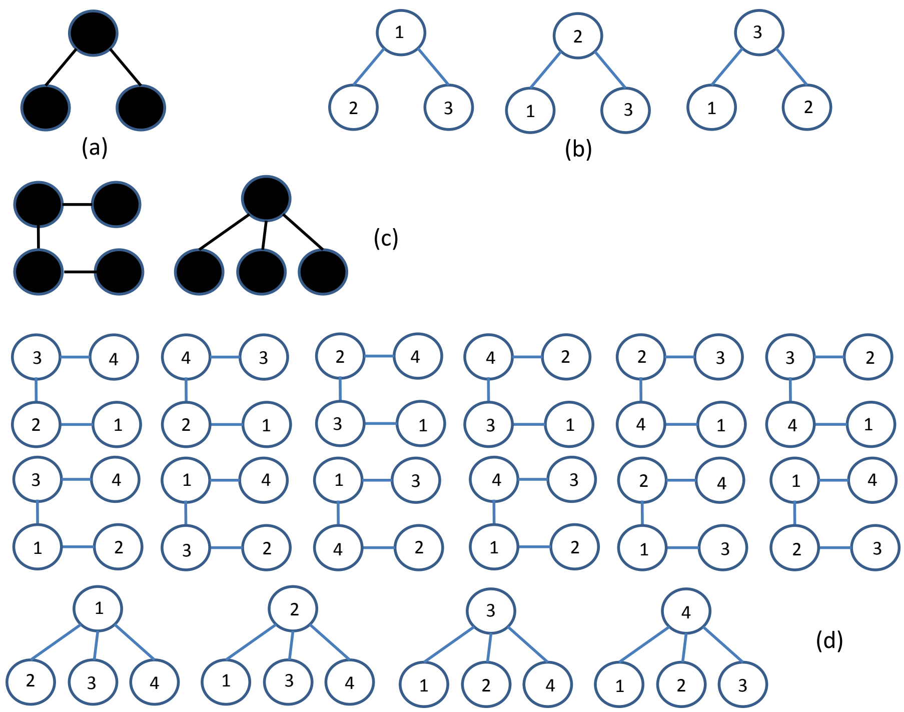

Figure 6: (a) e (c) Alberi di 3 e 4 nodi (a meno di isomorfismi). (b) Alberi sui nodi $\{1, 2, 3\}$. (d) Alberi sui nodi $\{1, 2, 3, 4\}$.

TEOREMA **11**: (Cayley) Il numero di alberi diversi su un insieme di n nodi è n^{n-2}.

In questo teorema, alberi isomorfi ma non identici vengono considerati diversi. Ad esempio, per $n = 3$ risultano 3 alberi diversi, mentre, se contassimo solo gli alberi non isomorfi fra loro, ci sarebbe un unico albero possibile. In figura 6 (a) e (c) rispettivamente, sono illustrati gli alberi non isomorfi di 3 e 4 nodi. In figura 6 (b) e (d) sono illustrati invece tutti i possibili alberi sugli insiemi di vertici $\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 2, 3, 4\}$.

Non è nota alcuna formula semplice (del tipo della formula di Cayley) che fornisca il numero T_n di alberi non isomorfi di n nodi. Possiamo però dare dei limiti inferiori e superiori quali

$$\frac{n^{n-2}}{n!} \leq T_n \leq 4^{n-1}. \tag{2}$$

ESERCIZIO: In un albero T, il grado medio dei nodi è 1.99. Quanti archi ha T? ♢

ESERCIZIO: In un albero T tutti i nodi hanno grado 3 o 1 e ci sono esattamente 10 nodi di grado 3. Quanti sono i nodi di grado 1? ♢

ESERCIZIO: In un albero T ci sono : esattamente un nodo di grado 5; esattamente un nodo di grado 4;

esattamente un nodo di grado 3; esattamente un nodo di grado 2; nessun nodo di grado ≥ 6. Quante foglie ha T? $\diamondsuit$

Esercizio: Quanti alberi (a due a due non isomorfi) esistono di diametro 3 e con 103 archi ciascuno? $\diamondsuit$

Indici di Wiener

Un *indice* per una famiglia di grafi è una funzione che a ogni grafo associa un numero. Ad esempio, il grado massimo dei nodi di un grafo è un indice, così come lo è il suo diametro. In chimica combinatoria, dove i grafi sono utilizzati per rappresentare molecole (con i nodi associati agli atomi e i lati ai legami atomici), molti indici vengono adottati per discriminare, ad esempio, il livello di completezza, di connettività, ecc., dei grafi in questione. Uno tra i più famosi di tali indici è l'*indice di Wiener*.

Dato un grafo $G = (V, E)$, l'indice di Wiener di G è così definito:

$$W(G) = \sum_{i,j \in V} d_G(i, j).$$

Semplificandone il significato, ad un indice basso corrispondono grafi "compatti" mentre ad un indice alto corrispondono grafi "sparsi", con cammini lunghi.

Dato un grafo, determinarne l'indice di Wiener è un problema semplice. Il problema inverso, consistente nel verificare se, per un certo numero t esiste un grafo G tale che $W(G) = t$, è anch'esso di facile soluzione, come descritto dal seguente teorema:

Teorema **12**: Per ogni $t \neq 2, 5$ esiste un grafo G tale che $W(G) = t$.

Per dimostrare il teorema, partiamo con la dimostrazione di un utile lemma:

Lemma 13: Per ogni grafo $G = (V, E)$ di diametro 2, il grafo $G' = (V, E \cup \{e\})$ per $e \notin E$ ha indice di Wiener $W(G') = W(G) - 1$.

Dim: Sia $e = (v_1, v_2)$ un lato mancante in G. Chiaramente $d_G(v_1, v_2) = 2$ e $d_{G'}(v_1, v_2) = 1$. Siccome la distanza di ogni altra coppia di nodi non è alterata dall'aggiunta di e, l'indice di Wiener cala esattamente di un'unità. $\clubsuit$

Siamo ora pronti a dimostrare il teorema 12.

Dim: Sia $G_0 = S_n$, la stella di dimensione n (un albero con al più un nodo interno). Si ha $W(G_0) = (n-1)^2$ e il diametro di G_0 è 2. Sia G_1 il grafo ottenuto aggiungendo a G_0 un lato mancante. Se G_1 non è un grafo completo, allora ha diametro 2, e per il lemma precedente $W(G_1) = W(G_0) - 1$. Si può ripetere questo procedimento finchè il grafo ottenuto è completo, e si ha $W(K_n) = n(n-1)/2$. Ad ogni passo, il lemma garantisce che $W(G_k) = W(G_{k-1}) - 1$. Quindi, ogni numero nell'intervallo $I_n = [n(n-1)/2, (n-1)^2]$ è l'indice di Wiener di G_k per qualche k. Per $n = 4$ si ha $I_4 = [6, 9]$ mentre $I_5 = [10, 16]$ e gli intervalli I_n e

$In+1$si sovrappongono per $n \geq 5$, Quindi, per ogni $t \geq 6$ c'è un grafo G tale che $W(G) = t$. Per i rimanenti casi, si noti che il grafo (connesso) di due nodi ha indice di Wiener pari a 1, mentre con 3 nodi si hanno due possibili grafi, di indici, rispettivamente 3 e 4. Siccome con 4 o più nodi l'indice di Wiener è almeno 6 (ci sono almeno 6 coppie) si vede che i valori 2 e 5 restano escusi. ♣

Il calcolo dell'indice di Wiener per gli alberi può essere semplificato dalla seguente formula. Dato un albero $T = (V, E)$, si definisca, per un lato $e = uv \in E$, il *carico* del lato e

$$\lambda(e) = n_u \times n_v$$

dove n_u e $n_v = |V| - n_u$ sono il numero di nodi nelle due componenti connesse indotte dalla rimozione di e da T. Si noti che $\lambda(e)$ rappresenta il numero di coppie di nodi che sono collegate da un cammino che usa il lato e. Siccome per ogni coppia di vertici c'è un unico cammino che li collega in T, l'indice di Wiener è la somma delle lunghezze di tali cammini, e questo corrisponde alla somma, per tutti il lati dell'albero, del numero di cammini che utilizzano i lati:

$$W(T) = \sum_{e \in E} \lambda(e).$$

Si ha il seguente semplice risultato che lega la parità del numero di nodi a quella dell'indice:

Lemma 14: Ogni albero con un numero n dispari di nodi ha indice di Wiener pari.

Dim: Se n è dispari, il carico di ogni arco risulta pari (il prodotto di un numero pari e uno dispari) e quindi la somma dei carichi è anch'essa pari. ♣

Il problema inverso nel caso degli alberi è il seguente: dato un numero t, esiste un albero con indice di Wiener t? Tale problema risulta molto più complesso del caso generale. Esistono svariati valori che non possono essere indice di alcun albero, ma, per t sufficientemente grande, ogni t è ottenibile da qualche albero:

TEOREMA **15**: Ogni valore di t diverso da 2, 3, 5, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 30, 33, 34, 37, 38, 39, 41, 43, 45, 47, 51, 53, 55, 60, 61, 69, 73, 77, 78, 83, 85, 87, 89, 91, 99, 101, 106, 113, 147, 159, è ottenibile come indice di Wiener di qualche albero.

ESERCIZIO: Fissato un numero n di nodi, quali sono gli alberi di indice di Wiener minimo e quanto vale tale indice? Quali sono gli alberi di indice massimo e quanto vale tale indice? ♢

6 Grafi orientati

Un *grafo orientato* (o *grafo diretto* o *digrafo*) è una coppia $G = (N, A)$ dove N è detto l'insieme dei *nodi* e A l'insieme degli *archi*. Ogni arco è una coppia (i, j) ordinata di nodi, con $i \neq j$. Graficamente, l'arco (i, j) viene rappresentato con una freccia uscente dal nodo i ed entrante nel nodo j. Si dice anche che j è la *testa* dell'arco (i, j) e i ne è la *coda*.

Gli archi orientati rappresentano una relazione binaria non necessariamente simmetrica (per cui $(i,j) \neq (j,i)$. Si noti che però gli archi (i,j) e (j,i) possono esistere entrambi). Esempi di tale relazione possono essere

- "sul lavoro, i prende ordini da j",
- "una strada tra i e j è percorribile nel senso che va da i a j",
- "la squadra i ha battuto la squadra j in almeno un'occasione",
- ecc.

Per un insieme di nodi $S \subseteq N$, restano definiti i due insiemi di archi $\delta^+(S)$ (archi *uscenti* da S) e $\delta^-(S)$ (archi *entranti* in S) in questo modo:

$$\delta^+(S) := \{(i,j) \in A \,|\, i \in S, j \in N - S\} \tag{3}$$

$$\delta^-(S) := \{(i,j) \in A \,|\, i \in N - S, j \in S\}. \tag{4}$$

In un digrafo si distinguono due tipi di gradi per i nodi, un *grado d'uscita*, $d^+(v) := |\delta^+(\{v\})|$ pari al numero di archi di cui v è la coda, e un *grado d'entrata*, $d^-(v) := |\delta^-(\{v\})|$ pari al numero di archi di cui v è la testa.

Un cammino in un grafo orientato $G = (N, A)$ è una sequenza di vertici $v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k$ tali che, per $0 \leq i \leq k-1$, si ha $(v_i, v_{i+1}) \in A$. Si dice anche che un siffatto cammino *va da* v_0 *a* v_k (o *parte da* v_0 *e arriva a* v_k). Se $v_0 = v_k$ il cammino si dice circuito o ciclo. Circuiti e cammini semplici, elementari, euleriani e hamiltoniani, sono definiti in maniera analoga al caso non orientato.

Dato un digrafo $G = (N, A)$, resta definito un grafo non orientato, $G' = (N, E)$, detto il grafo non orientato *sottostante*, ottenuto "rimuovendo la direzione" dagli archi di A (più formalmente, $ij \in E$ se $(i,j) \in A \vee (j,i) \in A$).

Un digrafo si dice *debolmente connesso* se il grafo non orientato sottostante è connesso. Il digrafo si dice *fortemente connesso* se per ogni coppia $i, j \in N$ esiste un cammino che va da i a j. Un digrafo risulta fortemente connesso se e solo se ogni coppia di nodi è contenuta in un circuito. Dato un digrafo $G = (N, A)$ i nodi possono essere partizionati in sottoinsiemi massimali $N_1, \ldots, N_k$ tali che i sottografi indotti $G[N_i]$ sono fortemente connessi (e sono detti le componenti fortemente connesse di G). Si noti che, a differenza del caso dei grafi non orientati, non è necessariamente vero che ogni arco in A appartenga a qualche componente fortemente connessa. Infatti (esercizio) un arco $a \in A$ appartiene a qualche componente fortemente connessa se e solo se a è contenuto in almeno un circuito di G.

Esercizio: Vero o Falso: Esiste un grafo orientato $G = (N, A)$ in cui (i) $d^+(v) \neq d^+(w)$ per ogni $v \neq w \in N$ e (ii) per ogni $v \in N$ esiste $u \in N$ con $d^-(u) = d^+(v) - 1$. $\diamondsuit$

Un *albero orientato* anche detto (*arborescenza*) di radice r, è un grafo orientato aciclico in cui esiste un cammino da r a ogni altro nodo. In un tale albero, si ha $d^-(r) = 0$ e $d^-(v) = 1$ per ogni nodo $v \neq r$. Un nodo di un albero orientato in cui $d^+(v) = 0$ si dice una *foglia*. Dato un nodo v in un'arborescenza, l'insieme di tutti i cammini che cominciano in v è detto il *sottoalbero* di radice v. Ogni nodo in tale sottoalbero si dice anche *discendente* di v. Un nodo v è *antenato* di tutti i suoi discendenti. In particolare, se esiste l'arco

(v, w), si dice che v è *padre* di w, e w è figlio di v. Si noti che il sottografo sottostante un'arborescenza è un albero.

Un albero orientato si dice *binario* se $d^+(v) = 2$ per ogni nodo v non foglia; si dice *ternario* se $d^+(v) = 3$ per ogni nodo v non foglia; più in generale, si dice k-ario se $d^+(v) = k$ per ogni nodo v non foglia. Dato un nodo u in un albero orientato di radice r, si dice *livello* di u la lunghezza del cammino da r a u. In un albero k-ario ci sono al più k^l nodi di livello l. L'*altezza* di un albero è il livello massimo di uno qualsiasi dei suoi nodi.

Esercizio: Sia $T = (N, A)$ un albero orientato binario di altezza h. Dimostrare che T ha al più 2^h foglie. $\diamondsuit$

Esercizio: Sia K_n il grafo completo non orientato di n nodi. Sia D_n un grafo ottenuto da K_n orientando ciascuno dei lati di K_n in esattamente uno dei due modi possibili. Dimostrare che in D_n esiste sempre un cammino hamiltoniano (diretto). $\diamondsuit$

7 Grafi pesati

Talvolta, per modellare una situazione del mondo reale mediante un grafo, può risultare necessario introdurre dei *pesi* (costi o profitti) da associare ai nodi e/o agli archi. Ad esempio, un grafo non orientato può servire a rappresentare le connessioni tra coppie di città mediante linee ferroviarie, ma non da' alcuna indicazione sulle distanze fra tali città. Per ottenere ciò sarebbe necessario associare un peso, pari alla distanza chilometrica tra la città i e la città j, per ogni coppia ij di città collegate. Un altro esempio si può applicare al caso in cui, dati n uomini e n donne, vogliamo creare n coppie per un ballo. In questo caso, si potrebbe associare ad ogni possibile coppia un peso dato dal "valore di compatibilità" dei due elementi, ossia una stima di quanto questa coppia desideri ballare insieme. In questo caso, l'obiettivo nello scegliere le coppie che balleranno, dovrebbe essere quello di ottenere un'elevata compatibilità media. Infine, supponiamo di avere alcune vie cittadine nelle quali collocare dei cassonetti per l'immondizia. Ogni coppia di vie si incontra in un incrocio e vogliamo posizionare i cassonetti negli incroci, in maniera tale che gli abitanti di ogni via trovino un cassonetto ad almeno uno dei due estremi in cui la loro via termina. A complicare il problema c'è il fatto che ci sono incroci in cui un cassonetto è preferibile che in altri. Ad esempio, se un incrocio è una piazza storica, o c'è un monumento, sarebbe meglio evitare di mettere lì il cassonetto (tuttavia questo potrebbe essere inevitabile: ad esempio se una strada termina da entrambi i lati in piazze storiche). Per modellare questo problema, bisogna associare un peso $p(v)$ ad ogni incrocio v (ossia, ad ogni nodo del grafo che modella, in modo ovvio, il problema), e si vuole selezionare un sottoinsieme di nodi tale che: (i) di ogni lato è stato selezionato almeno un estremo, (ii) il costo medio degli estremi selezionati è minimo.

Un *grafo pesato* è una tripla $G = (V, E, p)$, dove (V, E) è un grafo e p è una funzione $p : E \mapsto \mathbb{R}$ (nel caso di pesi dei lati) o $p : V \mapsto \mathbb{R}$ (nel caso di pesi dei vertici). La definizione di *grafo orientato pesato* è perfettamente analoga. Supponiamo p sia la funzione di peso dei lati (concetti analoghi valgono per il peso dei vertici). Il numero $p(e)$, denotato anche spesso con p_e, si dice peso (o costo, o profitto) del lato $e \in E$. Dato un insieme F di lati (o di vertici), si definisce peso dell'insieme, e lo si denota con $p(F)$, il numero $p(F) := \sum_{e \in F} p(e)$.

Gli esempi di cui sopra, necessari ad introdurre i grafi pesati, verranno ripresi nelle prossime sezioni, dedicate all'*ottimizzazione combinatoria*. L'ottimizzazione combinatoria si occupa della soluzione dei problemi citati e di molti altri, di natura simile, definiti su grafi pesati o meno, o su altri oggetti matematici proprii della matematica discreta.