Esame Ricerca Operativa 19/02/2018 – Soluzioni

Problema 1 : “Quasi” cliques

Sia $G = (V, E)$ un grafo non orientato, con $V = \{1, \dots, n\}$. Indichiamo il generico arco $e \in E$, di estremi i e j, con ij.

Diciamo che un insieme $Q \subseteq V$ è una *clique* se per ogni $i, j \in Q$, con $i \neq j$, si ha $ij \in E$. Sia T un numero naturale. Diciamo che un insieme $Q \subseteq V$ è una T-*quasiclique* se

$$|\{\{i, j\} : i \in Q, j \in Q \text{ ma } ij \notin E\}| \leq T$$

In pratica, una T-quasiclique è quasi una clique, nel senso che le mancano al più T archi per diventare una vera clique.

Si scriva un modello di programmazione lineare intera per trovare, dati G e T, una T-quasiclique con il massimo numero possibile di nodi.

Soluzione

Introduciamo delle variabili binarie x_i per $i \in V$ il cui significato è

“$x_i = 1 \leftrightarrow i \in Q$ ”

Siano inoltre y_{ij}, definite per ogni arco mancante, i.e., per ogni $ij \notin E$, delle variabili binarie il cui significato è

“$y_{ij} = 1 \leftrightarrow i \in Q \wedge j \in Q$”

ossia

“$y_{ij} = (x_i \wedge x_j)$”

La funzione obiettivo è

$$\max \sum_{i \in V} x_i \tag{1}$$

con i seguenti vincoli

$$\sum_{ij \notin E} y_{ij} \leq T \tag{2}$$

$$y_{ij} \leq x_i \qquad \forall ij \notin E \tag{3}$$

$$y_{ij} \leq x_j \qquad \forall ij \notin E \tag{4}$$

$$y_{ij} \geq x_i + x_j - 1 \qquad \forall ij \notin E \tag{5}$$

I vincoli (2) limitano il numero di archi mancanti nella quasiclique.

I vincoli (3),(4),(5), implementano la relazione $y_{ij} = x_i \wedge x_j$. (Si noti che i vincoli (3), (4), sono in realtà ridondanti, in quanto, ai fini del problema, avremmo potuto definire le variabili y a partire dalla relazione $x_i \wedge x_j \implies y_{ij}$, e quindi il vincolo (5) sarebbe stato sufficiente).

Problema 2 : Duale di max flow

Sia $G = (V, E)$ un grafo orientato, e siano s, t due specifici nodi distinti. Siano $c(i, j)$, per ogni $(i, j) \in E$, delle capacità non-negative definite sugli archi.

Per ogni $v \in V$, denotiamo con $\delta^-(v)$ l'insieme $\{(i, v) \in E\}$ degli archi entranti in v e con $\delta^+(v)$ l'insieme $\{(v, i) \in E\}$ degli archi uscenti da v.

Il problema del massimo flusso da s a t può essere modellato con il seguente programma lineare:

$$\max \sum_{(s,i)\in\delta^+(s)} x_{si} - \sum_{(i,s)\in\delta^-(s)} x_{is} \tag{6}$$

con i vincoli

$$\sum_{(v,i)\in\delta^+(v)} x_{vi} - \sum_{(i,v)\in\delta^-(v)} x_{iv} = 0 \qquad \forall v \in V - \{s, t\} \tag{7}$$

$$x_{ij} \le c(i, j) \qquad \forall (i, j) \in E \tag{8}$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad \forall (i, j) \in E \tag{9}$$

Si scriva il generico duale del modello (6),(7),(8),(9). Si scrivano poi, specificamente, il primale e il duale relativamente al grafo in cui $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $s = 1$, $t = 4$, con archi

$$E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 4)\}$$

e capacità $c(1, 2) = 4$, $c(1, 3) = 6$, $c(2, 4) = 2$, $c(2, 5) = 9$, $c(3, 2) = 3$, $c(4, 3) = 5$, $c(5, 2) = 10$, $c(5, 4) = 2$.

Sol. La matrice dei vincoli di questo problema è data dalla matrice di incidenza nodi-archi A del grafo, privata delle righe relative a s e t, seguita dall'identità I di dimensione $|E| \times |E|$.

Le righe del duale sono le colonne del primale ed hanno, in corrispondenza di un generico arco (i, j), un "+1" nella riga di i, un "-1" nella riga di j (parte A della matrice) e un "+1" nella riga di (i, j) (parte I della matrice).

Introduciamo variabili duali u_i per $i \neq s, t$, corrispondenti alle righe di A e variabili duali y_{ij}, per $(i, j) \in E$, corrispondenti alle righe di I.

La funzione obiettivo del duale è

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c(i,j)\, y_{ij}$$

con i vincoli

$$\begin{aligned}
u_i - u_j + y_{ij} \geq 0 &\qquad \forall (i,j) \in E : \{i,j\} \cap \{s,t\} = \emptyset \\
-u_j + y_{sj} \geq 1 &\qquad \forall (s,j) \in \delta^+(s) \\
u_i + y_{is} \geq -1 &\qquad \forall (i,s) \in \delta^-(s) \\
-u_j + y_{tj} \geq 0 &\qquad \forall (t,j) \in \delta^+(t) \\
u_i + y_{it} \geq 0 &\qquad \forall (i,t) \in \delta^-(t)
\end{aligned}$$

sulle variabili

$$u_i \text{ libera } \forall i \in V - \{s,t\}, \qquad y_{ij} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E$$

Per l'esempio specifico, il primale è

$$\max x_{12} + x_{13}$$

subject to

$$\begin{array}{ccccccccl}
-x_{12} & & +x_{24} & +x_{25} & -x_{32} & & -x_{52} & & =0 \\
 & -x_{13} & & & +x_{32} & -x_{43} & & & =0 \\
 & & & -x_{25} & & & +x_{52} & +x_{54} & =0 \\
x_{12} & & & & & & & & \leq 4 \\
 & x_{13} & & & & & & & \leq 6 \\
 & & x_{24} & & & & & & \leq 2 \\
 & & & x_{25} & & & & & \leq 9 \\
 & & & & x_{32} & & & & \leq 3 \\
 & & & & & x_{43} & & & \leq 5 \\
 & & & & & & x_{52} & & \leq 10 \\
 & & & & & & & x_{54} & \leq 4
\end{array}$$

con variabili $x \geq 0$.

Il duale ha variabili u_2, u_3, u_5 libere, e variabili y_{ij}, per $(i,j) \in E$, nonnegative. Il duale risulta

$$\min 4y_{12} + 6y_{13} + 2y_{24} + 9y_{25} + 3y_{32} + 5y_{43} + 10y_{52} + 4y_{54}$$

subject to

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
-u_2 & & & +y_{12} & & & & & & & \geq 1 \\
& -u_3 & & & +y_{13} & & & & & & \geq 1 \\
u_2 & & & & & +y_{24} & & & & & \geq 0 \\
u_2 & & -u_5 & & & & +y_{25} & & & & \geq 0 \\
-u_2 & +u_3 & & & & & & +y_{32} & & & \geq 0 \\
& -u_3 & & & & & & & +y_{43} & & \geq 0 \\
-u_2 & & +u_5 & & & & & & & +y_{52} & \geq 0 \\
& & +u_5 & & & & & & & \quad +y_{54} & \geq 0
\end{array}
$$

Problema 3

Siano a, b c variabili binarie . Scrivere uno o più vincoli lineari che forzino la seguente relazione tra a, b, c:

“$a = 1$ se e solo se $b = c$”

Sol. Si considerino i seguenti vincoli

1. $a \geq 1 - (b + c)$
2. $a \geq (b + c) - 1$
3. $a \leq b + (1 - c)$
4. $a \leq c + (1 - b)$

Il vincolo 1. può essere stretto solo se $b = c = 0$, nel qual caso forza $a = 1$. Il vincolo 2. può essere stretto solo se $b = c = 1$, nel qual caso forza $a = 1$. Il vincolo 3. può essere stretto solo se $b = 0$ e $c = 1$ nel qual caso forza $a = 0$. Il vincolo 4. può essere stretto solo se $c = 0$ e $b = 1$ nel qual caso forza $a = 0$.

NB. I vincoli lineari sono i vincoli dei problemi di programmazione lineare, i.e., sono solo *equazioni* e/o *disuguaglianze* nelle variabili (pesate eventualmente con dei coefficienti). Quindi espressioni del tipo

$$a = |b - c|$$

$$a \implies b = c$$

$$a + b \neq 2$$

ecc. **non** sono vincoli lineari.