Esame Ricerca Operativa 19/02/2018 – Soluzioni

Problema 1 : Centri assistenza

Un'organizzazione commerciale vuole aprire dei centri di assistenza per i propri clienti, ed assegnare a ogni cliente il centro di assistenza a cui dovrà fare riferimento per ogni eventuale problema.

La rete geografica in cui si trovano i clienti e in cui verranno anche aperti i centri di assistenza è rappresentata da un grafo $G = (V, E)$ pesato sugli archi. I nodi V rappresentano le località e per ogni $ij \in E$, è data la distanza d_{ij} tra la località i e la località j. Sia i clienti che i possibili centri di assistenza sono localizzati sui nodi di G.

Per ogni $i \in V$ è dato un costo c_i che l'organizzazione deve sostenere per aprire il centro assistenza nel nodo i. Ogni centro assistenza ha una numero massimo di nodi che può servire pari ad N. È inoltre specificata una distanza D massima.

1. Si scriva un modello di Programmazione Lineare Intera per decidere in quali nodi aprire i centri di assistenza. Il modello deve determinare, per ogni località, quale è il centro di assistenza che serve i clienti di quella località, con il vincolo che tale centro non può distare più di D dalla località stessa. Inoltre non più di N nodi possono essere assegnati allo stesso centro di assistenza. L'obiettivo è minimizzare il costo complessivo.

2. Si supponga ora che l'organizzazione abbia un budget limitato, i.e., un ammontare B massimo che può dedicare all'apertura dei centri di assistenza. In questo caso non è detto che esista una soluzione che per ogni nodo i garantisce un centro a distanza $\leq D$ da i. Si scriva un modello di PLI che, spendendo al massimo B, minimizza il numero di nodi per i quali il centro a loro assegnato si trova a distanza $> D$.

Sol: Introduciamo delle variabili binarie x_i per $i \in V$ il cui significato è "viene aperto un centro nel nodo i". Inoltre avremo variabili y_{ij} per ogni $i, j \in V$ con significato "i clienti della località i si servono nel centro aperto al nodo j". Con un algoritmo di cammini minimi calcoliamo le distanze minime $d(i, j)$ tra ogni coppia di nodi i, j, e definiamo degli insiemi D_i, per ogni $i \in V$ in questo modo:

$$D_i := \{j \in V : d(i, j) \leq D\}$$

Il primo modello è

$$\min \sum_{i \in V} c_i x_i$$

subject to

$$\sum_{j \in D_i} y_{ij} = 1 \qquad \forall i \in V$$

$$\sum_{i \in V} y_{ij} \leq N x_j \qquad \forall j \in V$$

Si noti che al posto del secondo vincolo avremmo potuto avere vincoli del tipo $y_{ij} \leq x_j$, per ogni $i, j \in V$ e $\sum_{i \in V} y_{ij} \leq N$, per ogni j, ma il vincolo usato è più forte.

Se invece abbiamo un budget B da rispettare, il modello diventa

$$\max \sum_{i \in V} \sum_{j \in D_i} y_{ij}$$

subject to

$$\sum_{j \in D_i} y_{ij} \leq 1 \qquad \forall i \in V$$

$$\sum_{i \in V} y_{ij} \leq N x_j \qquad \forall j \in V$$

$$\sum_{i \in V} c_i x_i \leq B$$

In tale modello, massimizziamo il numero di clienti che sono stati assegnati a un centro a loro vicino, il che è equivalente a minimizzare il numero di quelli che non sono stati assegnati ad alcun centro.

Problema 2

Il problema della massima clique su un grafo $G = (V, E)$ può essere modellato nel seguente modo:

$$\max \sum_{v \in V} x_v \tag{1}$$

subject to

$$x_u + x_v \leq 1 \qquad \forall uv \notin E \tag{2}$$

$$x_v \in \{0, 1\} \qquad \forall v \in V \tag{3}$$

Si scriva il generico duale del rilassamento di PL del modello (1),(2),(3). Si scrivano poi, specificamente, il primale e il duale relativamente al grafo in cui $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ed $E = \{12, 13, 14, 15, 16, 24, 25, 34, 56\}$.

Sol: Sia $\bar{G} = (V, \bar{E})$ il grafo complementare di G (ossia $\bar{E} = \{ij : ij \notin E, i \neq j\}$). Il problema primale corrisponde allora al problema del massimo insieme indipendente su $\bar{G}$. La matrice dei vincoli del problema è la trasposta della matrice di incidenza nodi-archi di $\bar{G}$. Le matrice dei vincoli del duale è quindi la matrice di incidenza di $\bar{G}$ ed ha una riga per ogni nodo i e una colonna per ogni arco $uv \in \bar{E}$. Le riga corrispondente a un generico nodo i, ha un "+1" per ogni arco di tipo $ij \in \bar{E}$.

Introduciamo una variabile duale y_{ij} per ogni $ij \in \bar{E}$.

La funzione obiettivo del duale è

$$\min \sum_{ij \in \bar{E}} y_{ij}$$

con i vincoli

$$\sum_{ij \in \delta_{\bar{E}}(i)} y_{ij} \geq 1 \qquad \forall i \in V$$

sulle variabili

$$y_{ij} \geq 0 \quad \forall ij \in \bar{E}$$

Per l'esempio specifico, il primale è

$$\max x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

subject to

$$\begin{array}{llllll}
x_2 & +x_3 & & & & \leq 1 \\
x_2 & & & & +x_6 & \leq 1 \\
 & x_3 & & +x_5 & & \leq 1 \\
 & x_3 & & & +x_6 & \leq 1 \\
 & & x_4 & +x_5 & & \leq 1 \\
 & & x_4 & & +x_6 & \leq 1
\end{array}$$

con variabili $x \geq 0$.

Il duale ha variabili y_{ij}, per $(i, j) \in \bar{E}$, nonnegative. Il duale risulta

$$\min y_{23} + y_{26} + y_{35} + y_{36} + y_{45} + y_{46}$$

subject to

$$\begin{array}{lllllll}
y_{23} & +y_{26} & & & & & \geq 1 \\
y_{23} & & +y_{35} & +y_{36} & & & \geq 1 \\
 & & & & +y_{45} & +y_{46} & \geq 1 \\
 & & & +y_{35} & +y_{45} & & \geq 1 \\
 & y_{26} & & +y_{36} & & +y_{46} & \geq 1
\end{array}$$

Problema 3

Si consideri il grafo non orientato completo sui nodi $V = \{1, \ldots, 8\}$. Per ogni arco ij si definisca la sua lunghezza come

$$l_{ij} = \frac{1}{(i-j)^2}$$

Usando l'algoritmo di Kruskal si determini il minimo albero di supporto, elencando i vari archi che vengono considerati, e specificando per ognuno di essi se l'arco viene inserito nell'albero o scartato.

(Sugg. Non è necessario calcolare il valore esatto dei costi degli archi, ma solo la relazione tra gli stessi...).

Sol: Gli archi possono avere 7 valori diversi, in quanto i costi dipendono da $|i-j|$, che può assumere solo i 7 valori $1, \ldots, 7$.

Per ogni valore $v = 7, \ldots, 1$ ci sono $8 - v$ coppie $\{i, j\}$ con $|i-j| = v$. Siccome il costo di un arco è inversamente proporzionale a $|i-j|$ prendiamo prima gli archi con v massimo e poi via via gli altri calando v.

($v = 7$) archi: 18 accettato

($v = 6$) archi: 17 accettato; 28 accettato

($v = 5$) archi: 16 accettato; 27 rifiutato; 38 accettato

($v = 4$) archi: 15 accettato; 26 rifiutato; 37 rifiutato; 48 accettato

STOP