Argomenti d'esame
Logica e Algebra 2

Dagli appunti del professor Paolo Sentinelli

Autori
Pietro Pizzoccheri
Lorenzo Bardelli

Document formatting by
Luca Zani

Politecnico di Milano
A.Y. 2024/2025

Document created on 8 gennaio 2025

Developed by:
Luca Zani
Pietro Pizzoccheri
Lorenzo Bardelli

Indice

Capitolo 1

Campi Finiti e Tensori

1.1 I sottogruppi di un gruppo ciclico sono ciclici

Teorema 1.1 — di struttura per i gruppi ciclici. Sia G un gruppo ciclico. Allora ogni sottogruppo di G è ciclico.

Dimostrazione. Sia $g \in G$ tale che $G = \langle g \rangle$. La funzione $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to G$ definita da $\varphi(g) = g^n, \forall\, n \in \mathbb{Z}$ è un morfismo suriettivo di gruppi.

a) G è infinito: allora $Ker(f) = \{0\}$ e quindi φ è iniettivo. Dunque φ è un isomorfismo di gruppi. Tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}$ sono ciclici.

b) G è finito: sia $H \subseteq G$ un sottogruppo. Allora $\varphi^{-1}(H) := \{n \in \mathbb{Z} : \varphi(n) \in H\} \subseteq \mathbb{Z}$ è un sottogruppo di $\mathbb{Z}$, quindi esiste $\varphi^{-1}(H) = \langle k \rangle$ con $k \in \mathbb{N}$.

   La restrizione $\varphi : k\mathbb{Z} \to H$ è un morfismo suriettivo di gruppi e

   $$\varphi(hk) = \varphi(\underbrace{k + k + \ldots + k}_{h \text{ volte}}) = \varphi(k)\varphi(k)\ldots\varphi(k) = [\varphi(k)]^h \qquad \forall\, h \in \mathbb{Z}$$

   Quindi $H = \langle \varphi(k) \rangle$.

■

1.2 Un anello è un campo se e solo se i suoi ideali sono banali

Proposizione 1.2. Sia A un anello commutativo e $I \subseteq A$ un ideale. Allora:

- $I = A$ se e solo se I contiene un elemento invertibile
- A è un campo sse i suoi unici ideali sono $\langle 0 \rangle$ e $A = \langle 1_A \rangle$

Dimostrazione.

- se $I = A$ allora $1_A \in I$ e 1_A è invertibile.

  Sia $u \in I$ un elemento invertibile.

  Allora $u^{-1} \in A$ e quindi $1_A uu^{-1} \in I$.

  Ne segue che $A = \langle 1_A \rangle \subseteq I$. e quindi $I = A$.

- Sia A un campo e sia $I \neq \langle 0 \rangle$. se $n \in I$ e $x \neq 0$ allora x è invertibile e quindi $I = A$ per il punto sopra.

  Viceversa, se $\langle 0 \rangle$ e A sono gli unici ideali di A, e se $x \in A \backslash \{0\}$, allora $\langle x \rangle = \langle 1_A \rangle$, ossia $ax = 1_A$ per qualche $a \in A$. Quindi x è invertibile.

■

1.3 Teorema di isomorfismo per anelli commutativi

Teorema 1.3 — di isomorfismo per gruppi abeliani. Sia $f : G_1 \to G_2$ un morfismo di gruppi abeliani. Allora esiste un morfismo iniettivo $\varphi : {}^{G_1}/_{Ker\varphi} \to G_2$ tale che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G_2 \\ {}^{G_1}/_{Ker(f)} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

In particolare, ${}^{G_1}/_{Ker(f)} \simeq Im(f)$.

Dimostrazione. L'assegnazione $[g] \mapsto f(g), \forall\, g \in G$, definisce una funzione $\varphi : {}^{G_1}/_{Ker(\varphi)} \to G_2$. Infatti, se $g' \sim g$, ossia $[g] = [g']$, allora $g = g' + h, h \in Ker(f)$.

Dunque $f(g) = f(g' + h) = f(g') + f(h) = f(g')$. Poiché f è morfismo di gruppi, anche φ lo è.

Inoltre $Ker(f) = \{[g] \in {}^{G}/_{Ker(f)} : \varphi([g]) = e_2\} = \{[g] \in {}^{G}/_{Ker(f)} : f(g) = e_2\} = [e_1]$. Quindi φ è iniettiva.

Infine, $\varphi : {}^{G_1}/_{Ker(f)} \to Im(f)$ è un morfismo di gruppi, iniettivo e suriettivo, quindi un isomorfismo. ■

Teorema 1.4 — di isomorfismo per anelli commutativi. Sia $f : A \to B$ un morfismo di anelli commutativi. Allora esiste un morfismo iniettivo di anelli $\Psi : {}^{A}/_{Ker(f)} \to B$ tale che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ {}^{A}/_{Ker(f)} \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

in particolare, se f è suriettivo, allora Ψ è un isomorfismo di anelli.

1.4 Insieme degli ideali dell'anello $\mathbb{Z}$ e dell'anello $\mathbb{Z}_n$

Proposizione 1.5. L'insieme dei sottogruppi di $(\mathbb{Z}, +)$ è $\{n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$.

Dimostrazione. Sia $H \subseteq \mathbb{Z}$ un sottogruppo non banale. Sia $k := min(H_{>0})$ dove $H_{>0} := \{h \in H : h > 0\}$. Sia $h \in H_{>0}, h \neq k$.

Allora $h > k$ e $h = nk + r$, $n \in \mathbb{N}, 0 \leq r < k$.

Dunque $r = h - nk \in H \to r = 0$ per la minimalità di k. ■

Corollario 1.6. L'insieme dei sottogruppi di $\mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}$ è:

$$\{\langle \overline{m} \rangle : \overline{m} \in \mathbb{Z}_n\}$$

Esempio. Abbiamo già visto che ogni sottogruppo di $(\mathbb{Z}, +)$ è del tipo $n\mathbb{Z} = \{kn : k \in \mathbb{Z}\}$, dove $n \in \mathbb{N}$.

Inoltre, se $a \in \mathbb{Z}$ e $x \in n\mathbb{Z}$, ossia $x = kn$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, si ha che $ax = akn \in n\mathbb{Z}$.

Quindi $n\mathbb{Z}$ è un ideale di $\mathbb{Z}, \forall\, n \in \mathbb{N}$, e tutti gli ideali di $\mathbb{Z}$ sono di questo tipo.

1.5 Teorema cinese dei resti

Teorema 1.7 — Teorema cinese dei resti. siano $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ tali che $MCD\{n_i, n_j\} = 1$ per ogni $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$.

Sia $n := n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Allora la funzione

$$\Psi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$$

che mappa

$$x \bmod n \mapsto (x \bmod n_1, x \bmod n_2, \ldots, x \bmod n_k)$$

è un isomorfismo di anelli.

Dimostrazione. vediamo prima di tutto che Ψ è un morfismo di anelli dove $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ è definita da $f(x) = (x \bmod n_1, x \bmod n_2, \ldots, x \bmod n_k) \forall\, x \in \mathbb{Z}$.

-
$$\begin{aligned} f(a+b) &= ((a+b) \bmod n_1, \ldots, (a+b) \bmod n_k) \\ &= (a \bmod n_1 + b \bmod n_1, \ldots, a \bmod n_k + b \bmod n_k) \\ &= (a \bmod n_1, \ldots, a \bmod n_k) + (b \bmod n_1, \ldots, b \bmod n_k) \\ &= f(a) + f(b), \forall\, a, b \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

- $f(1) = (1 \bmod n_1, \ldots, 1 \bmod n_k)$ e $(1 \bmod n_1, \ldots, 1 \bmod n_k)$ è l'unità del prodotto diretto di anelli $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$
-
$$\begin{aligned} f(a \cdot b) &= ((a \cdot b) \bmod n_1, \ldots, (a \cdot b) \bmod n_k) \\ &= (a \bmod n_1 \cdot b \bmod n_1, \ldots, a \bmod n_k \cdot b \bmod n_k) \\ &= (a \bmod n_1, \ldots, a \bmod n_k) \cdot (b \bmod n_1, \ldots, b \bmod n_k) \\ &= f(a) \cdot f(b), \forall\, a, b \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ora mostriamo che f è suriettivo:

sia $(a_1 \bmod n_1, \ldots, a_k \bmod n_k) \in \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$.

Osserviamo che $MCD\{n_i, n_1 n_2 \ldots n_{i-1} n_{i+1} \ldots n_k\} = 1, \forall\, 1 \leq i \leq k$.

Quindi abbiamo le identità di Bézout: $c_i n_i + b_i \frac{n}{n_i} = 1$ ossia
$u_i + v_i = 1$ dove $u_i = c_i n_i \in < n_i >$ e $v_i = b_i \frac{n}{n_i} \in < \frac{n}{n_i} >$.

Definiamo $x := a_1 v_1 + \ldots + a_k v_k$ e abbiamo che $f(x) = (a_1 \bmod n_1, \ldots, a_k \bmod n_k)$. infatti:

$$v_i \bmod n_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

dal teorema di isomorfismo abbiamo che $\mathbb{Z}/_{Ker(f)} \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ come anelli. ma abbiamo che $Ker(f) =< n_1 > \cap < n_2 > \cap \ldots \cap < n_k > = < mcm\{n_1, \ldots, n_k\} > = < n_1 n_2 \ldots n_k >$ dato che n_i e n_j sono coprimi $\forall\, i \neq j$.

Quindi $\mathbb{Z}/_{Ker(f)} = \mathbb{Z}/_{<n>} = \mathbb{Z}_n$ e l'isomorfismo $\Psi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{n_k}$ è quello dell'enunciato del teorema. ∎

1.6 Costruzione di un campo finito di cardinalità p^n

Proposizione 1.8. sia K un campo e $P(X) \in K[X]$ un poliniomio irriducibile. Allora l'anello quoziente ${}^{K[X]}/_{\langle P(X)\rangle}$ è un campo.

Dimostrazione. Sia $[f] \in {}^{K[X]}/_{\langle P(X)\rangle}$ tale che $[p] \neq [0]$ ossia $p(X)$ non divide $f(X)$.

Dunque $MCD\{f(X), p(X)\} = 1$ perchè $p(X)$ è irriducibile.

Quindi abbiamo un'identità di Bézout $a(X)f(X) + b(X)p(X) = 1$.

Ossia $[a(X)] = [f(X)]^{-1}$ in ${}^{K[X]}/_{\langle P(X)\rangle}$. ■

Proposizione 1.9. Tutti e soli i polinomi irriducibili su $\mathbb{F}_p$ di grado n dividono $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$.

Dimostrazione. Sia $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ irriducibile di grado n e sia $K := {}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{\langle P(Y)\rangle}$.

Allora K ha p^n elementi che sono le radici di $X^{p^n} - X \in K[X]$.

Poichè $Y \in K$ è una radice $P(X) \in K[X]$, $P(X)$ e $X^{p^n} - X$ hanno una radice in comune in K, allora per il teorema di Ruffini hanno un fattore comune $X - Y \in K[X]$.

Quindi, poiché $\mathbb{F}_p \subseteq K$ e MCD in $\mathbb{F}_p = MCD$ in $K[X] \implies P(X), X^{p^n} - X$ hanno $MCD \neq 1$ in $\mathbb{F}_p[X]$.

Poiché $P(X)$ è irriducibile in $\mathbb{F}_p[X]$, $P(X)$ divide $X^{p^n} - X$. ■

Adesso vogliamo costruire un isomorfismo di campi

$$f : {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{\langle P(X)\rangle} \to {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{\langle Q(X)\rangle}$$

Dove $P(X), Q(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ sono monici irriducibili di grado n.

Basta costruire un isomorfismo di anelli.

Infatti un morfismo di anelli che sono campi è iniettivo. Inoltre:

$$\left|{}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{\langle P(X)\rangle}\right| = \left|{}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{\langle Q(X)\rangle}\right| = p^n$$

Quindi tale morfismo è biunivoco, ossia è isomorfismo.

Si ha che, se $y \in {}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{\langle P(Y)\rangle}$ allora $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ è il polinomio minimo di y su $\mathbb{F}_p$.

Quindi, se $P(X)$ ha una radice in ${}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{\langle Q(Y)\rangle}$, possiamo usare la proposizione sull'estensione di morfismi di campi per definire il morfismo f, che sarà un isomorfismo. Infatti $\mathbb{F}_p \subseteq {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{\langle Q(X)\rangle}$.

Inoltre ${}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{\langle P(X)\rangle} = \mathbb{F}_p([X])$, dove $[X]$ è la classe di X in ${}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{\langle P(X)\rangle}$.

Poiché ${}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{\langle Q(Y)\rangle}$ è un campo di spezzamento di $X^{p^n} - X$ e $P(X)$ divide $X^{p^n} - X$, allora $P(X)$ si fattorizza in fattori di grado 1 in ${}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{\langle Q(Y)\rangle}$.

Sia $\beta \in {}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{\langle Q(Y)\rangle}$ tale che $p(\beta) = 0$.

Allora l'assegnazione

$$c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} \mapsto c_0 + c_1 \beta + \ldots + c_{n-1} \beta^{n-1}$$

definisce un morfismo di anelli

$$f : {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{\langle P(X)\rangle} \to {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{\langle Q(X)\rangle}$$

1.7 Tutti i polinomi irriducibili di grado n a coefficienti in $\mathbb{F}_p$ sono fattori di $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$

Proposizione 1.10. Tutti e soli i polinomi irriducibili su $\mathbb{F}_p$ di grado n dividono $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$.

Dimostrazione. Sia $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ irriducibile di grado n e sia $K := \mathbb{F}_p[Y]/\langle P(Y) \rangle$.

Allora K ha p^n elementi che sono le radici di $X^{p^n} - X \in K[X]$.

Poichè $Y \in K$ è una radice $P(X) \in K[X]$, $P(X)$ e $X^{p^n} - X$ hanno una radice in comune in K, allora per il teorema di Ruffini hanno un fattore comune $X - Y \in K[X]$.

Quindi, poiché $\mathbb{F}_p \subseteq K$ e MCD in $\mathbb{F}_p = MCD$ in $K[X] \implies P(X), X^{p^n} - X$ hanno $MCD \neq 1$ in $\mathbb{F}_p[X]$.

Poiché $P(X)$ è irriducibile in $\mathbb{F}_p[X]$, $P(X)$ divide $X^{p^n} - X$. ∎

1.8 Sottocampi di un campo finito

Lemma 1.11. sia F un campo. Il polinomio $X^d - 1$ divide il polinomio $X^n - 1$ s.s.e. d divide n.

Dimostrazione. Se $n = qd + r, 0 \leq r \leq d$, in $\mathbb{F}[X]$ si ha:

$$(x^n - 1) = (X^d - 1)(X^{n-d} + X^{n-2d} + \ldots + x^{n-(p-1)d} + X^r) + (X^r - 1)$$

quindi $X^d - 1$ divide $X^n - 1$ s.s.e. $X^r - 1$ è il polinomio nullo, cioè s.s.e. $r = 0$ ∎

Corollario 1.12. d divide $n \iff (X^{p^d} - X)$ divide $(X^{p^n} - X)$ in $\mathbb{F}_p[X]$.

Dimostrazione. Per il lemma precedente, $X^d - 1$ divide $X^n - 1$.
Calcolando in p si ottiene che $p^d - 1$ divide $p^n - 1$.
Quindi sempre per il lemma, $X^{p^{d-1}} - 1$ divide $X^{p^n-1} - 1$.
Viceversa se $X^{p^{d-1}} - 1$ divide $X^{p^n-1} - 1$, allora $p^d - 1$ divide $p^n - 1 \implies d$ divide n. ∎

Proposizione 1.13. Tutti e soli i sottocampi di $\mathbb{F}_{p^n}$ sono i campi $\mathbb{F}_{p^d}$ dove d divide n.

Dimostrazione. Abbiamo che, se $\mathbb{F}_{p^d} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$, allora tutte le radici di $X^{p^d} - X$ in $\mathbb{F}_{p^d}$ sono radici di $X^{p^n} - X$ in $\mathbb{F}_{p^n}$, ossia $X^{p^d} - X$ divide $X^{p^n} - X \underbrace{\implies}_{\text{corollario}} d$ divide n.

Se d divide n, $X^{p^d} - X$ divide $X^{p^n} - X$ e l'insieme delle radici di $X^{p^d} - X$ (è un campo) sta in $\mathbb{F}_{p^n}$. ∎

1.9 Algoritmo di Berlekamp

Teorema 1.14. Sia $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ di grado $d > 1$, sia $h(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ di grado $1 < deg(h) < d$ tale che $f(x)$ divide $h(x)^p - h(x)$. allora:

$$f(x) = MCD\{f(x), h(x)\} \cdot MCD\{f(x), h(x) - 1\} \cdot \ldots \cdot MCD\{f(x), h(x) - (p-1)\}$$

è una fattorizzazione non banale di $f(x)$ in $\mathbb{F}_p[x]$.

Dimostrazione. Supponiamo che $f(x)$ divida $h(x)^p - h(x)$. il polinomio $X^p - X \in \mathbb{F}_p[X]$ si fattorizza come:

$$X^p - X = X(X-1)(X-2)\ldots(X-(p-1))$$

mettendo $h(x)$ al posto di X si ha:

$$h(x)^p - h(x) = h(x)[h(x)-1][h(x)-2]\ldots[h(x)-(p-1)]$$

Abbiamo che $MCD\{h(x) - i, h(x) - j\} = 1 \forall i, j \in \mathbb{F}_p, i \neq j$.

Infatti, se $MCD\{h(x) - i, h(x) - j\} = D(x)$ allora

$$\begin{cases} h(x) - i = D(x) \cdot H_i(x) \\ h(x) - j = D(x) \cdot H_j(x) \end{cases} \implies D(x)[H_i(x) - H_j(x)] = j - i \in \mathbb{F}_p \implies deg(D) = 0, i \neq j$$

inoltre, se $MCD\{a, b\} = 1$ si ha che $MCD\{f, ab\} = MCD\{f, a\} = MCD\{f, b\}$. Per induzione si ha che

$$MCD\{f, a_1 \cdot \ldots \cdot a_k\} = MCD\{f, a_1\} \cdot \ldots \cdot MCD\{f, a_k\}$$

dato che $f(x)$ divide $h(x)^p - h(x)$, abbiamo che

$$f(x) = MCD\{f(x), h(x)^p - h(x)\}$$

poiché, se $i \neq j$, $MCD\{h(x) - i, h(x) - j\} = 1$, si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= MCD\{f(x), h(x)^p - h(x)\} = \\ &= MCD\{f(x), h(x)[h(x)-1] \cdot \ldots \cdot [h(x) - p + 1]\} = \\ &= MCD\{f, h\} \cdot MCD\{f, h-1\} \cdot \ldots \cdot MCD\{f, h - p + 1\} \end{aligned}$$

Poiché $deg(h - i) < deg(f), MCD\{f, h - i\} \neq f(x), \forall i \in \mathbb{F}_p$.

Quindi nella fattoriazzazione precedente appaiono solo polinomi di grado $< d$, perciò è non banale. ■

Proposizione 1.15. Un polinomio $h(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ che soddisfa le condizioni del teorema esiste sempre.

Dimostrazione. Sia

$$h(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{d-1} x^{d-1} \in \mathbb{F}_p[X]$$

allora

$$h(x)^p = b_0^p + b_1^p x + \ldots + b_{d-1}^p x^{p(d-1)}$$

(avendo dimostrato che $(X+Y)^p = x^p + Y^p$ e induttivamente che $(\sum_{i=1}^k x_i)^p = \sum_{i=1}^k x_i^p$), ma

$$b_i^p = b_i \forall 0 \leq i \leq d-1 \text{ quindi } h(x)^p = b_0 + b_1 x^p + \ldots + b_{d-1} x^{p(d-1)}$$

si ha che

$$h(x)^p \bmod f(x) = b_0 (\text{mod} f) + b_1 (x^p \bmod f) + \ldots + b_{d-1} (x^{p(d-1)} \bmod f)$$

Sia $x^{ip} = f(x)q_i(x) + r_i(x)$ con $deg(r_i) < d, 0 \leq i \leq d-1$. Abbiamo che

$$\begin{aligned}
&[h(x)^p - h(x)] \bmod f = 0 \bmod f \\
&\qquad \iff h(x)^p \bmod f = h(x) \bmod f \\
&\qquad \iff b_0 r_0(x) + b_1 r_1(x) + \ldots + b_{d-1} r_{d-1}(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{d-1} x^{d-1}
\end{aligned}$$

Otteniamo così un sistema lineare di d equazioni nelle incognite $b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}$.

Dobbiamo mostrare che esistono soluzioni non nulle.

Sia $f(x) = p_1(x) \ldots p_k(x)$ una fattoriazzazione di $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ in fattori irriducibili.

Supponiamo che f non habbia fattori multipli (verificabile con Teorema seguente). ■

Teorema 1.16. sia K un campo.

a) se $f(x) \in K[x]$ è ha un fattore multiplo, allora $MCD\{f, f'\} \neq 1$, dove f' è la derivata di f rispetto a x.

b) se K ha caratteristica 0 o p, e $MCD\{f, f'\} \neq 1$, allora $f(x)$ ha un fattore multiplo.

Abbiamo una versione in $\mathbb{F}_p[x]$ del teorema cinese dei resti.

$$MCD\{p_i(x), p_j(x)\} = 1, \forall \ \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k, i \neq j$$

$$\implies {}^{\mathbb{F}_p[x]}/_{\langle f \rangle} \underbrace{\simeq}_{\text{Isomorfismo di anelli}} {}^{\mathbb{F}_p[x]}/_{\langle p_1(x) \rangle} \times \ldots \times {}^{\mathbb{F}_p[x]}/_{\langle p_k(x) \rangle}$$

Dato $(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{F}_p^k$, esiste un'unica classe $[h(x)] \in {}^{\mathbb{F}_p[x]}/_{\langle f \rangle}$ tale che

$$\begin{cases} [h(x)] = s_1 & \text{in} \quad {}^{\mathbb{F}_p[x]}/_{\langle p_1(x) \rangle} \\ \vdots & \\ [h(x)] = s_k & \text{in} \quad {}^{\mathbb{F}_p[x]}/_{\langle p_k(x) \rangle} \end{cases}$$

ossia $h(x) - s_i$ è divisibile per $p_i(x), \forall 1 \leq i \leq k$.

Quindi $p_i(x)$ divide $h(x)[h(x)-1] \ldots [h(x)-(p-1)] = h(x)^p - h(x), \forall 1 \leq i \leq k$.

Ossia $f(x)$ divide $h(x)^p - h(x)$.

Sia $f(x)\mathbb{F}_p[x], deg(f) = d$.

Sia $f(x) = p_1(x) \cdot \ldots \cdot p_k(x)$ una fattoriazzazione di $f(x)$ in fattori irriducibili, non banali (cioè di grado ≥ 1) e aventi molteplicità 1. siano

$$\begin{aligned}
r_0 &= 1 \bmod f(x) \\
r_1 &= x^p \bmod f(x) \\
&\vdots \\
r_{d-1} &= x^{p(d-1)} \bmod f(x)
\end{aligned}$$

Con $deg(r_i) < d \forall 0 \leq i \leq d-1$.

Definiamo la matrice $A \in Mat_{d \times d}(\mathbb{F}_p)$ nel segueente modo:

$A_{ij} =$ coefficiente del termine di grado i del polinomio $r_j(x)$

Esempio. Considerando l'esempio precedente, si ha:

$$A \in Mat_{5\times 5}(\mathbb{F}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice $A - I$ è la matrice del sistema che abbiamo risolto, ossia $(A-I)\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$

Teorema 1.17. Il numero di fattori irriducibili k nella fattorizzazione di f è uguale alla dimensione del nucleo di $A - I$. Ossia:

$$k = d - rk(A-I)$$

(dove il rango è calcolato sul campo $\mathbb{F}_p$).

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che $dim(Ker(A-I)) \geq 1$.

Infatti la d-tupla $(b_0, 0, \dots, 0)$ è sempre soluzione del sistema $\forall\, b_0 \in \mathbb{F}_p$.

Abbiamo visto che l'Insieme

$$H = \{h \in \mathbb{F}_p[x] : deg(h) < d, f \mid h^p - h\}$$

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}_p$ isomorfo a $Ker(A-I)$.

Sia k il numero di fattori irriducibili non banali di f, aventi tutti molteplicità 1.

Dimostriamo che $\mathbb{F}_p^k$ è isomorfo a H.

Abbiamo già dimostrato che per ogni $(s_1, \dots s_k) \in \mathbb{F}_p^k$ troviamo un unico elemento di H, usando il Teorema cinese dei resti per l'anello $\mathbb{F}_p[X]$.

Quindi abbiamo definito una funzione $\varphi : \mathbb{F}_p^k \to H$

a) φ è un morfismo si spazi vettoriali.

b) φ è iniettiva:

$$\begin{aligned} Ker(\varphi) &= \{(s_1, \dots s_k) \in \mathbb{F}_p^k : s_i \bmod p_i = 0, \forall\, 1 \leq i \leq k\} \\ &= \{(0, \dots, 0)\} \end{aligned}$$

c) φ è suriettiva:

Se $h \in H$, abbiamo visto che $h^p - h = h(h-1)(h-2)\dots(h-(p-1))$.

Questi fattori sono coprimi a coppie, quindi se $f|h^p - h$, allora $p_i(x)|(h - s_i)$ per un unico $s_i \in \mathbb{F}_p, \forall\, 1 \leq i \leq k$.

Quindi h è soluzione del sistema

$$\begin{cases} h \equiv s_1 \bmod p_1 \\ \vdots \\ h \equiv s_k \bmod p_k \end{cases}$$

Abbiamo dimostrato che $\varphi : \mathbb{F}_p^k \to H$ è un isomorfismo do spazi vettoriali, quindi

$$\mathbb{F}_p^k \simeq H \simeq Ker(A-I)$$

ossia $dim(Ker(A-I)) = k = d - rk(A-I)$. ■

Esempio. Sempre considerando l'esempio precedente, si ha che

$$\underbrace{2}_{\text{fattori irriducibili di } f(x)} = \underbrace{5}_{\text{grado di } f(x)} - rk(A-I)$$

Se $f \in \mathbb{F}_p[x]$ ha fattori irriducibili di molteplicità > 1, procediamo come segue:

Abbiamo che $D = MCD\{f, f'\} \neq 1$.

Osserviamo che il polinomio $\frac{f}{D}$ ha fattori irriducibili tutti di molteplicità 1. Infatti se $p_1, \dots, p_k$ sono tutti distinti

$$\begin{aligned} f' = (p_1^{e_1}(x) \dots p_k^{e_k}(x))' = \\ e_1 p_1^{e_1-1} p_1' p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k} + \dots + e_k p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_k^{e_k-1} p_k' \end{aligned}$$

e $D = p_1^{e_1-1} \dots p_k^{e_k-1}$ quindi $\frac{f}{D} = p_1 \dots p_k$.

Allora fattorizziamo $\frac{f}{D}$ poi fattorizziamo D, eventualmente ripetendo con D, D'.

Finché non otteniamo $MCD\{D_i, D_i'\} = 1$.

1.10 Rango di un tensore

Ogni elemento di $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_h$ si scrive come combinazione lineare di tensori di rango 1.

Infatti la base $\{v^1_{j_1} \otimes v^2_{j_2} \otimes \ldots \otimes v^h_{j_h}\}$ è costituita da tensori di rango 1.

Definizione 1.18 — Rango di un tensore. Sia $T \in V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$. definiamo **rango di T** e lo indichiamo **rk(T)** il minimo $r \in \mathbb{N}$ tale che:

$$T = \sum_{i=1}^{r} T_i$$

dove $T_i \in V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_k$ sono di rango 1 $\forall\, 1 \leq i \leq r$.

Esempio. Sia U con base $\{u_1, u_2\}$, V con base $\{v_1, v_2\}$ e W con base $\{w_1, w_2\}$.

- $T : u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_1 \otimes v_2 \otimes w_1 \in U \otimes V \otimes W$
  ha rango 1. infatti $T = u_1 \otimes (v_1 + v_2) \otimes w_1$.
- $T : u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_2 \otimes v_2 \otimes w_1$ ha rango 2. Infatti l'unica fattorizzazione possibile è $T = (u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2) \otimes w_1$ che non è un tensore di rango 1.
- $T = u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_2 \otimes v_2 \otimes w_2 \in U \otimes V \otimes W$ ha rango 2.

Poiché $dim(\otimes_{i=1}^h V_i) = \prod_{i=1}^h dim(V_i)$, abbiamo che, se $T \in \otimes_{i=1}^h V_i$ allora $rk(T) \leq \prod_{i=1}^h dim(V_i)$, poiché $\otimes_{i=1}^h V_i$ ha una base fatta di tensori di rango 1.

Ora verifichiamo che la nozione di rango di un Tensore è coerente con quella di rango di una matrice interpretando una matrice come forma bilineare, e quindi come un tensore.

Vediamo subito che una matrice di rango 1 corrisponde ad un tensore di rango 1.

Una matrice $m \times n$ di rango 1 h come colonne multipli di un vettore $v \in K^m \setminus \{0\}$.

La prima colonna sia $a_1 v$, la seconda $a_2 v, \ldots, a_n v, a_i \in K$.

Quindi tale matrice di rango 1 si scrive come

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{a}^T$$

Come forma bilineare è il seguente elemento di $(K^m)^* \otimes (K^n)^*$:

$$\begin{aligned} & v_1 a_1 e_1^* \otimes e_1^* + v_2 a_1 e_2^* \otimes e_1^* + \ldots + v_1 a_2 e_1^* \otimes e_2^* + v_2 a_2 e_2^* \otimes e_2^* + \ldots + v_1 a_n e_1^* \otimes e_n^* + \ldots + v_m a_n e_m^* \otimes e_n^* = \\ & = (v_1 e_1^* + \ldots + v_m e_m^*) \otimes a_1 e_1^* + (v_1 e_1^* + \ldots + v_m e_m^*) \otimes a_2 e_2^* + \ldots + (v_1 e_1^* + \ldots + v_m e_m^*) \otimes a_n e_n^* = \\ & = (v_1 e_1^* + \ldots + v_m e_m^*) \otimes (a_1 e_1^* + \ldots + a_n e_n^*) \end{aligned}$$

Dunque una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$ tale che $rk(A) = 1$ corrisponde ad un tensore $T_A \in (K^m)^* \otimes (K^n)^*$ tale che $rk(T_A) = 1$.

Esempio. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{F}_3)$$

Ha rango 1 perchè $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $(\mathbb{F}_3)^2$.

Ad A corrisponde la forma bilineare $T_A : (\mathbb{F}_3)^2 \times (\mathbb{F}_3)^3 \to \mathbb{F}_3$ definita da

$$T_A(u, v) = u^T A v \qquad \forall\, u \in (\mathbb{F}_3)^2, v \in (\mathbb{F}_3)^3 \qquad (u^T \text{ è il trasposto del vettore colonna } u)$$

come elemento di $(\mathbb{F}_3^2)^* \otimes (\mathbb{F}_3^3)^*$ si scrive

$$\begin{aligned} T_A &= e_1^* \otimes e_1^* + 2e_2^* \otimes e_1^* + 2e_1^* \otimes e_3^* + e_2^* \otimes e_3^* \\ &= (e_1^* + 2e_2^*) \otimes e_1^* + (2e_1^* + e_2^*) \otimes e_3^* \\ &= (e_1^* + 2e_2^*) \otimes (e_1^* + e_3^*) \end{aligned}$$

D'altra parte avevamo che $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sul campo $\mathbb{F}_3$

Ovviamente ad un Tensore di rango 1 $v_1 \otimes v_2 \in (K^m)^* \otimes (K^n)^*$ corrisponde una matrice di rango 1 $v_1 v_2^T \in Mat_{m\times n}(K)$ dove v_i sono i vettori colonna delle coordinate nella base duale.

Esempio. Sia $(2e_1^* + 3e_2^*) \otimes (e_2^* + 4e_3^*) \in (\mathbb{F}_5^2)^* \otimes (\mathbb{F}_5^3)^*$. La matrice corrispondente è

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{F}_5)$$

Quindi abbiamo dato una corrispondenza biunivoca tra matrici di rango 1 $\in Mat_{m\times n}(K)$ e tensori di rango 1 $\in (K^m)^* \otimes (K^n)^*$.

Dalla caratterizzazione del rango di una matrice in termini di combinazioni lineari di matrici di rango 1, e dalla definizione di rango di un tensore, segue che le matrici di rango r in $Mat_{m\times n}(K)$ stanno in corrispondenza con i tensori di rango r in $(K^m)^* \otimes (K^n)^*$.

Capitolo 2

Logica modale

2.1 Sintassi della logica modale e semantica di Kripke

Introduciamo il linguaggio della logica proposizionale. L'alfabeto è costituito da:

1. Insieme numerabile di variabili
2. Connettivi logici: $\neg, \wedge, \vee$

le parole del linguaggio possono essere:

1. **Un Letterale**: variabile x o la sua negazione $\neg x$
2. **Una Clausola**: disgiunzione finita di letterali $l_1 \vee \ldots \vee l_n$
3. **Una Formula CNF (forma normale congiuntiva)**: congiunzione finita di clausole $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$

Per ogni letterale L definiamo

$$\overline{L} = \begin{cases} \neg x & \text{se } L \text{ è } x \\ x & \text{se } L \text{ è } \neg x \end{cases}$$

Indichiamo con $VAR(F)$ l'insieme delle variabili che appaiono in una formula CNF F.

Useremo anche le parentesi $(,)$ come simboli ausiliari per rendere chiara la lettura delle formule CNF.

Esempio. $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$ è una formula CNF. Chiamiamola F. Allora $VAR(F) = \{x_1, x_2, x_3\}$.
Le clausole di F sono $\{\neg x_1 \vee x_2, x_1, x_2 \vee x_3\}$ e i letterali di F sono $\{x_1, x_2, x_3, \neg x_1\}$

2.1.1 Semantica

Definizione 2.1 — Assegnazione appropriata. Sia F una formula CNF. Una **assegnazione appropriata a F** è una funzione

$$V : X \to \{0, 1\}$$

dove $X \supseteq VAR(F)$.

L'insieme $\{0, 1\}$ è l'insieme dei valori di verità di F e può essere interpretato come {falso, vero}.

Definizione 2.2 — Soddisfacibilità. Sia F una formula e V un'assegnazione appropriata a F.

Diciamo che **V soddisfa F**, scritto $V \vDash F$, se

1. <u>F è una variabile X</u>: $V \vDash X$, significa che $V(X) = 1$
2. <u>F è il letterale $\neg X$</u>: $V \vDash \neg X$, significa che $V(X) = 0$
3. <u>F è una clausola $L_1 \vee \ldots \vee L_n$</u>: $V \vDash F$, significa che V soddisfa almeno uno dei letterali L_i

4. F è una congiunzione di clausole $C_1 \wedge \ldots \wedge C_n$: $V \vDash F$, significa che V soddisfa tutte le clausole C_i

In questo modo abbiamo dato un significato al linguaggio definito precedentemente.

Se V non soddisfa F, scriveremo $V \nvDash F$.

Esempio. Sia F la formula CNF $(\neg x_1 \vee x_2) \wedge x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)$ e sia $U : \{x_1, x_2, x_3\} \to \{0, 1\}$ tale che $U(x_1) = U(x_2) = 1, U(x_3) = 0$.

Dunque

$$
\begin{aligned}
U(\neg x_1) &= 0 \\
U(\neg x_1 \vee x_2) &= 1 \\
U(x_2 \vee x_3) &= 1 \\
U(F) &= 1
\end{aligned}
$$

Quindi $U \vDash F$.

Sia $V : \{x_1, x_2, x_3\} \to \{0, 1\}$ tale che $V(x_1) = 1, V(x_2) = V(x_3) = 0$.

Allora

$$
\begin{aligned}
V(\neg x_1) &= 0 \\
V(\neg x_1 \vee x_2) &= 0 \\
V(x_2 \vee x_3) &= 0 \\
V(F) &= 0
\end{aligned}
$$

quindi $V \nvDash F$.

Definizione 2.3 — Formula soddisfacibile. Diciamo che una formula è **soddisfacibile** se esiste un'assegnazione $V : VAR(F) \to \{0, 1\}$ che la soddisfa $(V \vdash F)$.

Altrimenti è **insoddisfacibile**.

La formula dell' esempio precedente è soddisfacibile, $x \wedge \neg x$ è insoddisfacibile.

Definizione 2.4 — Tautologia. Una formula F è una **tautologia** se per ogni assegnazione V si ha $V \vDash F$.

La formula $x \vee \neg x$ è una tautologia, la formula dell' esempio precedente no

Definizione 2.5 — Conseguenza logica. Date due formule F, G diciamo che G è **conseguenza logica** di F, se per ogni assegnazione V appropriata ad entrambe si ha che $V \vDash F \implies V \vDash G$.

Esempio. La formula y è conseguenza logica della formula $F := (\neg x \vee y) \wedge x$.

Infatti l'unica assegnazione che soffisfa F è $x \to 1, y \to 1$.

Tale assegnazione soddisfa anche y.

Definizione 2.6 — Implicazione logica. Definiamo l'**implicazione logica** tra due formule F, G

come

$$x \implies y := \neg x \lor y$$

x	y	$x \implies y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Definizione 2.7 — Equivalenza logica. Due formule F, G sono logicamente equivalenti se F è conseguenza logica di G e G è conseguenza logica di F. In tal caso scriviamo $F \equiv G$.

Esempio. Nell'esempio precedente abbiamo visto che y è conseguenza logica di $F := (\neg x \lor y) \land x$, che possiamo ricrivere come $(x \implies y) \land x$.

Poiché $x \mapsto 0, y \mapsto 1$ soddisfa y ma non F, abbiamo che F non è conseguenza logica di y.

Esempio.

- $l_1 \lor l_2 \equiv l_2 \lor l_1$ (la disgiunzione è commutativa)
- $c_1 \land c_2 \equiv c_2 \land c_1$ (la congiunzione è commutativa)
- $c \land c \equiv c$ e $l \lor l \equiv l$ (congiunzione e disgiunzione sono idempotenti)

Diamo altre definizioni:

Definizione 2.8 — Doppia implicazione.

$$x \iff y := (x \implies y) \land (y \implies x)$$

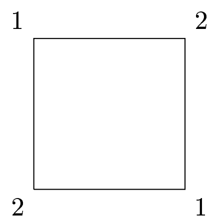
Definizione 2.9 — Negazione di formule CNF. 1. l letterale: $\neg l = \bar{l}$

2. $\neg(l_1 \lor \ldots \lor l_n) := \neg l_1 \land \ldots \land \neg l_n$
3. $\neg(c_1 \land \ldots \land c_n) := \neg c_1 \lor \ldots \lor \neg c_n$

L'interpretazione di questa definizione di negazione è quella corretta grazie alle leggi di De Morgan e alla proprietà distributiva di $\lor$ e $\land$.

Esempio. Consideriamo il problema di colorare i vertici di un quadrato con due colori in modo che i vertici su uno stesso lato abbiano colori diversi.

Tale problema ha ovviamente una soluzione:



Formuliamo il problema come una formula CNF.

Potremo così dire che il problema è soddisfacibile se e solo se tale formula CNF è soddisfacibile. x_{ij}

indica "il vertice i ha colore j" $\forall 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 2$

$$\begin{aligned} F := &(x_{11} \vee x_{12}) \wedge (x_{21} \vee x_{22}) \wedge (x_{31} \vee x_{32}) \wedge (x_{41} \vee x_{42}) \wedge \\ &\wedge (\neg x_{11} \vee \neg x_{12}) \wedge (\neg x_{21} \vee \neg x_{22}) \wedge (\neg x_{31} \vee \neg x_{32}) \wedge (\neg x_{41} \vee \neg x_{42}) \wedge \\ &\wedge (\neg x_{11} \vee \neg x_{21}) \wedge (\neg x_{12} \vee \neg x_{22}) \wedge (\neg x_{21} \vee \neg x_{31}) \wedge (\neg x_{22} \vee \neg x_{32}) \wedge (\neg x_{31} \vee \neg x_{41}) \end{aligned}$$

l'assegnazione $x_{11} \mapsto 1, x_{12} \mapsto 0, x_{21} \mapsto 0, x_{22} \mapsto 1, x_{31} \mapsto 1, x_{32} \mapsto 0, x_{41} \mapsto 0, x_{42} \mapsto 1$ soddisfa F

2.1.2 Sintassi

La logica modale è una estensione della logica proposizionale.

L'alfabeto è quello della logica proposizionale a cui si aggiungono i **connettivi modali**:

1. Un insieme numerabili di variabili (o formule atomiche)
2. I connettivi logici $\neg, \wedge, \vee, \implies, \iff$
3. I simboli ausiliari (,)
4. I connettivi modali $\Box$ (**Scatola o Box**) e $\Diamond$ (**Diamante o Diamond**)

Le parole del lingiaggio sono le formule ben formate (FBF) definite in modo ricorsivo:

1. Ogni variabile è una FBF
2. Se A è una FBF, allora $\neg A, \Box A, \Diamond A$ sono FBF
3. Se A, B sono FBF, allora $(A \wedge B), (A \vee B), (A \implies B), (A \iff B)$ sono FBF

Alcune letture dei simboli $\Box$ e $\Diamond$:

- La lettura piu comune è: $\Box A$:"è necessario che A", $\Diamond A$: "è possibile che A".

  Secondo questa lettura i connettivi modali possono essere definiti uno in termini dell'altro:

$$\Box A \equiv \neg\Diamond\neg A$$
$$\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$$

- Logiche modali epistemiche: $\Box A$: "si sa che A"
- Logiche modali deonetiche: $\Box A$: "è obbligatorio che A"
- Logiche modali doxastiche: $\Box A$: "si crede che A"
- Logica modale dimostrativa: $\Box A$: "è dimostrabile che A"

Come abbiamo visto, la logica proposizionale è una logica vero-funzionale: assegnando valori "0" e "1" alle variabili possiamo assegnare un valore "0" o "1" ad una formula in modo univoco, che corrisponde alla nostra inutizione di negazione, disgiunzione, congiunzione.

Per la logica modale la situazione è più complicata.

Interpretando il simbolo "$\Box$" come operatore di necessità, ossia "$\Diamond$" come operatore di possibilità, possiamo essere, ad esempio, d'accordo che le formule

$$\Box A \implies \Diamond A, \quad A \implies \Diamond A$$

siano vere, ma è vera la formula

$$A \implies \Box\Diamond A \quad ?$$

Non è chiaro se sia vera o falsa. Nel caso della logica epistemica, l'operatore "$\Box$" si indica di solito con "K" (da "knowledge").

In questo contesto, la formula $KA \implies A$ (se si sa che A allora A vale) sembra dover essere vera.

Invece la formula $A \implies KA$ (se vale A allora si sa che A) sembra essere falsa perchè non si è onniscenti.

2.1.3 Semantica dei mondi possibili (semantica di Kripke)

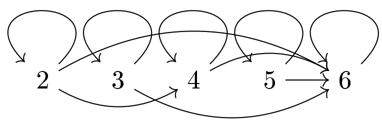
Definizione 2.10 — Frame. Un **Frame** è una coppia (S, R), dove S è un insieme non vuoto detto **insieme dei mondi** e $R \subseteq S \times S$ è una relazione su S, detta **relazione di accessibilità** (se $(x, y) \in R$ si dice che y è accessibile da x).

Un Frame può essere rappresentato con un grafo diretto con cappi (loop) i cui vertici sono gli elementi dell'insieme S e ho una freccia da x a y se $(x, y) \in R$.

Esempio. Il frame $(\mathbb{N}, R)$, dove $R = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è rappresentato dal seguente grafo diretto:

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

Esempio. Il frame (S, R) dove $S = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ e $R = \{(x, y) \in S \times S : x \text{ divide } y\}$ è rappresentato dal seguente grafo diretto:



Esempio. Il frame $(\{1, 2, 3\}, R)$ dove $R = \{(x, y) \in \{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\} : y = f(x)\}$ essedo $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ la funzione definita da $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1$ è

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left] & 2 \arrow[r, bend left] & 3 \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

Definizione 2.11 — Modello. Un **modello** su un frame (S, R) è una terna (S, R, V) dove $V : Var \to \mathcal{P}(S)$, ci dice in quali mondi le variabili valgono 1 è detta **funzione di valutazione**.

Definizione 2.12. Una formula F si dice **Vera in un mondo x del modello M** e scriviamo $M \models_x F$ se e solo se:

1. F è una variabile: $M \models_x F$ significa che $x \in V(F)$
2. F è $\neg y$ e y è una variabile: $M \models_x F$ significa che $x \notin V(y)$
3. F è del tipo $\neg G$, dove G è una formula: $M \models_x F$ significa che $M \not\models_x G$
4. F è del tipo $G_1 \wedge G_2$: $M \vdash_x F$ significa che $M \vdash_x G_1$ e $M \models_x G_2$
5. F è del tipo $G_1 \vee G_2$: $M \vdash_x F$ significa che $M \vdash_x G_1$ o $M \models_x G_2$
6. F è del tipo $\Box G$: $M \models_x F$ significa che $M \models_y G$, per ogni $y \in S : (x, y) \in R$, ossia per ogni mondo y raggiungibile da x.
7. F è del tipo $\Diamond G$: $M \models_x F$ significa che $M \models_y G$ per qualche $y \in S : (x, y) \in R$, ossia per almeno un mondo raggiungibile da x.

Definizione 2.13 — Soddisfacibilità. Una formula F è **soddisfacibile** se esiste un modello $M = (S, R, V)$ e un mondo $x \in S$, tali che $M \models_x F$.

Teorema 2.14. Se una formula modale F è soddisfacibile, allora è soddisfacibile in una struttura di Kripke (S, R) tale che $|S| \leq 2^{|F|}$, $|F| =$"lunghezza di F".

Quindi il problema di soddisfacibilità di una formula modale è decidibile.

2.2 Esprimibilità della proprietà riflessiva

Teorema 2.15. Lo schema $\Box A \implies A$ è valido in un frame (S, R) se e solo se R è riflessiva.

Dimostrazione. Perchè sia sempre vera la formula $\Box x \implies x$, la relazione R del frame deve essere riflessiva, ossia $(y, y) \in R \forall\, y \in S$.

Infatti, se R non fosse riflessiva ci sarebbe un mondo $y \in S$ tale che $(y, y) \notin R$.

TODO ■

2.3 Esprimibilità della proprietà simmetrica

Teorema 2.16. Lo schema $A \implies \Box\Diamond A$ è valido in un frame (S, R) se e solo se R è simmetrica.

Dimostrazione. Sia R simmetrica, ossia $(x, y) \in R \implies (y, x) \in R$.
Sia $M \vDash_w A$ e $(w, v) \in R$. Dunque $(v, w) \in R$ e $M \vDash_v \Diamond A \forall\, v \in S$ t.c. $(w, v) \in R$, ossia $M \vDash_w \Box\Diamond A$.
Adesso assumiamo che lo schema $A \implies \Box\Diamond A$ sia valido in (S, R).
Sia x una variabile e $V(x) = \{s\}$;
sia $t \in S$ t.c. $(s, t) \in R$. Quindi $M \vDash_s x$.
Dalla validità dello schema segue allora che $M \vDash_s \Box\Diamond x$, da cui $M \vDash_t \Diamond x$.
Quindi esiste $r \in S$ t.c. $(t, r) \in ReM \vDash_r x$, ossia $r = s$ ∎

2.4 Esprimibilità della proprietà transitiva

Teorema 2.17. Lo schema $\Box A \implies \Box\Box A$ è valido in un frame (S, R) se e solo se R è transitiva.

Dimostrazione. Sia R transitiva, ossia $(x, y) \in R, (y, z) \in R \implies (x, z) \in R$.

Sia $M \vDash_w \Box A$, ossia $M \vDash_v A \forall\, v \in S$ t.c. $(w, v) \in R$.

Sia $u \in S$ t.c. $(v, u) \in R$, con $(w, v) \in R$.

Allora $(w, u) \in R$ e quindi $M \vDash_v \Box A, \forall\, v \in S$ t.c. $(w, v) \in R$, ossia $M \vDash_w \Box\Box A$.

Assumiamo adesso che sia valido lo schema $\Box A \implies \Box\Box A$ su un frame (S, R).

Sia x una variabile, $s \in S$ e $V(x) = \{w \in S : (s, w) \in R\}$.

Allora $M \vDash_s \Box x$ e quindi per la validità dello schema, $M \vDash_s \Box\Box x$, da cui $M \vDash_t \Box x \forall\, t \in S$ t.c. $(s, t) \in R$, ossia $M \vDash_r x \forall\, r \in S$ t.c. $(t, r) \in R$, $(s, t) \in R$.

Da ciò segue che $r \in V(x)$ ossia $(s, t) \in R$ e $(t, r) \in R \implies (s, r) \in R$

■

2.5 Morfismi di modelli + Lemma 1

Definizione 2.18 — Morfismo di Frame. Siano (S_1, R_1) e (S_2, R_2) due frame. una funzione $f : S_1 \to S_2$ è un **morfismo di frame** se:

$$(x, y) \in R_1 \implies (f(x), f(y)) \in R_2 \qquad \forall\, x, y \in S_1$$

Esempio. Siano $(\mathbb{N}, R_1)$ e $(\mathbb{N}, R_2)$ i frame tali che

$$R_1 = R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x < y\}$$

allora la funzione

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & n \mapsto n^2 \end{aligned}$$

è un morfismo di frame.

Definizione 2.19 — Morfismo di modelli. siano $M_1 = (S_1, R_1, V_1)$ e $M_2 = (S_2, R_2, V_2)$ due modelli. Un morfismo di frame $f : (S_1, R_1) \to (S_2, R_2)$ è un **morfismo di modelli** se:

1. $w \in V_1(x) \iff f(w) \in V_2(x)\ \forall\, w \in S_1, x \in Var$
2. $(f(w), y) \in R_2 \implies \exists\, v \in S_1 t.c. (w, v) \in R_1, f(v) = y\ \forall\, w \in S_1, y \in S_2$

Nota. I morfismi di modelli sono solitamente detti **p-morfismi**.

Esempio. Siano $M_1 = (\mathbb{N}, R_1, V_1)$ e $M_2 = (\{0, 1\}, \{0, 1\} \times \{0, 1\}, V_2)$ dove $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \leq y\}$, $Var = \{x\}$ e $V_1(x) = \{2n : n \in \mathbb{N}\}, V_2(x) = \{0\}$. Sia

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{N} \to \{0, 1\} \\ & n \mapsto n \bmod 2 \end{aligned}$$

Allora f è un morfismo di modelli, infatti:

1. $x \leq y \implies (x \bmod 2, y \bmod 2) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$
2. $w \in V_1(x) \iff w \in \{2n : n \in \mathbb{N}\}$; allora $w \in V_1(x) \implies f(w) = 0$.
   $f(w) \in V_2(x) \iff f(w) = 0$; allora $f(w) \in V_2(x) \implies w \in V_1(x)$
3. $(f(w), y) \in R_2 = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$:
   (a) $f(w) = 0$: se $y = 0$ allora $w \leq w$ e $f(w) = 0 = y$.
   Se $y = 1$ allora $w \leq w + 1$ e $f(w + 1) = 1 = y$.
   (b) $f(w) = 1$: se $y = 0$ allora $w \leq w + 1$ e $f(w + 1) = 0 = y$.
   Se $y = 1$ allora $w \leq w$ e $f(w) = 1 = y$.

Lemma 2.20 — Lemma 1. Sia $f : (S_1, R_1, V_1) \to (S_2, R_2, V_2)$ un morfismo dal modello M_1 al modello M_2. Allora

$$M_1 \vDash_w F \iff M_2 \vDash_{f(x)} F$$

$\forall\, w \in S_1$ e ogni formula F

Dimostrazione. Se F è una variabile allora $M_1 \vDash_w F$ se e solo se $w \in V_1(F)$se e solo se $f(w) \in V_2(F)$ (per il punto 1 nella definizone di morfismo di modelli) se e solo se $M_2 \vDash_{f(w)} F$.

Per tutti gli altri tipi di formule, si dimostra induttivamente sulla costruzione della formula.

Vediamo dsolo il caso in cui $F = \Diamond G$.

Sia $M_1 \vDash_w \Diamond G$, allora esiste $v \in S_1$ t.c. $(w, v) \in R_1$ e $M_1 \vDash_v G$.

Poiché $(f(w), f(v)) \in R_2$ perchè f è un morfismo di modelli e induttivamente $M_2 \vDash_{f(v)} G$, allora $M_2 \vDash_{f(w)} \Diamond G$.

Sia ora $M_2 \vDash_{f(w)} \Diamond G$, allora esiste $u \in R_2$ t.c. $(f(w), u) \in R_2$ e $M_2 \vDash_u G$.

Per la condizione 2 nella definizione di morfismo di modelli, esiste $v \in S_1$ t.c. $(w, v) \in R_1$ e $f(v) = u$.

Per ipotesi induttiva $M_1 \vDash_v G$, e quindi $M_1 \vDash_w \Diamond G$. ■

2.6 Lemma 2 + Lemma 3 + Lemma 4 + non esprimibilità della proprietà antisimmetria

Lemma 2.21 — Lemma 2. Sia $f : (S_1, R_1, V_1) \to (S_2, R_2, V_2)$ un morfismo dal modello M_1 al modello M_2. se f è suriettiva, allora

$$M_1 \vDash F \text{ se e solo se } M_2 \vDash F$$

per ogni formula F.

Dimostrazione. $M_1 \vDash F$ se e solo se $M_1 \vDash_w F, \forall w \in S_1$.

Se e solo se $M_2 \vDash_{f(w)} F, \forall w \in S_1$ (per il lemma 1).

Se e solo se $M_2 \vDash F$, perchè f è suriettivo. ∎

Lemma 2.22 — Lemma 3. Sia M_2 un modello su S_2, R_2 e $f : (s_1, R_1) \to (S_2, R_2)$ un morfismo di frame tale che valga la condizione 2 della definizione di morfismo di modelli.

Allora esiste un modello M_1 su S_1, R_1 tale che $f : M_1 \to M_2$ è un morfismo di modelli.

Dimostrazione. Basta definire $M_1 = (S_1, R_1, V_1)$ con $V_1(x) = \{w \in S_1 : M_2 \vDash_{f(w)} x\} \forall x \in Var$. ∎

Lemma 2.23 — Lemma 4. Sia $f : (S_1, R_1) \to (S_2, R_2)$ un morfismo di frame tale che valga la condizione 2 della definizione di morfismo di modelli.

Se f è suriettivo, si ha $(S_1, R_1) \vDash F \implies (S_2, R_2) \vDash F$, per ogni formula F.

Dimostrazione. Sia $S_2, R_2 \nvDash F$. Allora esiste un modello M_2 su (S_2, R_2) tale che $M_2 \nvDash F$. Per il lemma 3 esiste un modello M_1 su (S_1, R_1) tale che $f : M_1 \to M_2$ è un morfismo di modelli.

Dato che f è suriettivo, per il lemma 2 si ha $M_1 \nvDash F$, ossia $(S_1, R_1) \nvDash F$. ∎

Definizione 2.24 — Relazione antisimmetria. Una relazione R su un insieme X si dice **antisimmetrica** se

$$(x, y) \in R, (y, x) \in R \implies x = y \qquad \forall x, y \in X$$

Esempio. L'ordinamento $\leq$ dei numeri naturali è una relazione antisimmetrica su $\mathbb{N}$.

Esempio. La relazione $x \mid y$ su $\mathbb{N}$ è antisimmetrica.

Esempio. La relazione $A \subseteq B$ su $\mathcal{P}(X)$ di un insieme X è antisimmetrica.

Teorema 2.25. L'antisimmetria non è esprimibile, ossia non esiste una formula F tale che $(S, R) \vDash F$ se e solo se R è antisimmetrica.

Dimostrazione. Sia $(S_1, R_1) = (\mathbb{N}, \leq)$ e $(S_2, R_2) = (\{0,1\}, \{0,1\} \times \{0,1\})$.

Nell'esempio di morfismo di modelli abbiamo visto che la funzione

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{N} \to \{0,1\} \\ & n \mapsto n \text{ mod } 2 \end{aligned}$$

è un morfismo dal frame $(\mathbb{N}, \leq)$ al frame $(\{0,1\}, \{0,1\} \times \{0,1\})$ che soffisfa la condizione 2 della definizione di morfismo di modelli.

La relazione $\leq$ su $\mathbb{N}$ è antisimmetrica.

Supponiamo per assurdo che esista una formula F come nell'enunciato del teorema. Allora:

$$(\mathbb{N}, \leq) \vDash F$$

Per il lemma 4 si ha che $(\{0,1\}, \{0,1\} \times \{0,1\}) \vDash F$.

Da cui seguirebbe che R_2 è antisimmetrica, il che è falso. ■

2.7 Logiche modali normali, dimostrazioni, teoremi e validità della logica K

Abbiamo già mostrato che lo schema di formule

$$K : \Box(A \implies B) \implies (\Box A \implies \Box B)$$

è valido, $\models K$.

Adesso viediamo che lo schema di formule

$$def_\Diamond : \Diamond A \iff \neg\Box\neg A$$

è valido, $\models def_\Diamond$.

Dimostrazione. Sia (S, R) un frame, M un modello su (S, R) e $w \in S$.

Allora $M \models_w \Diamond A$ se e solo se esiste $v \in St.c.(w, v) \in R$ e $M \models_v A$.

$M \models_w \neg\Box\neg A$ se e solo se $M \not\models_w \Box\neg A$, se e solo se esiste $v \in St.c.(w, v) \in R$ e $M \not\models_v \neg A$, se e solo se esite $v \in St.c.(w, v) \in R$ e $M \models_v A$.

Abbiamo quindi dimostrato che $\models def_\Diamond$ ■

Definizione 2.26 — Sostituzione uniforme. Sia x una variabile e F una formula. Definiamo l'operzione di sostituzione uniforme di F al posto di x in una formula G, indicato come

$$G[F/x]$$

La formula ottenuta da G dove ogni occorrenza di x è stata sostituita con F.

Esempio. Sia G la formula $\Box x \implies x \wedge y$ e F la formula $\Diamond y \iff \neg\Box\neg y$.

Allora $G[F/x] = \Box(\Diamond y \iff \neg\Box\neg y) \implies (\Diamond y \iff \neg\Box\neg y) \wedge y$

Definizione 2.27 — Logica Modale Normale. Una **logica modale normale** è un insieme Γ di formule tale che:

1. Γ contiene tutte le tautologie della logica proposizionale
2. Γ contiene tutte le istanze dello schema $K : \Box(A \implies B) \implies (\Box A \implies \Box B)$
3. Γ contiene tutte le istanze dello schema $def_\Diamond : \Diamond A \iff \neg\Box\neg A$
4. Γ è chiuso sotto **modus ponens** se $A \in \Gamma$ e $(A \implies B) \in \Gamma$, allora $B \in \Gamma$
5. Γ è chiuso sotto **necessitazione** se $A \in \Gamma$, allora $\Box A \in \Gamma$
6. Γ è chiuso sotto **sostituzione uniforme** se $A \in \Gamma$, allora $A[B/x] \in \Gamma$

Esempio. Se (S, R) è un frame, $\{F : (S, R) \models F\}$ è una logica normale.

Esempio. $\{F : \models F\}$ è una logica normale.

Esempio. Se M è un modello su un frame (S, R), $\{F : M \models F\}$ NON è una logica normale.

Definizione 2.28 — Logica Modale K. La **logica modale K** è definita dai seguenti schemi di assioni e regole:

1. Schemi di assiomi:

   (a) Tutte le tautologie della logica proposizionale
   (b) $K : \Box(A \implies B) \implies (\Box A \implies \Box B)$
   (c) $def_\Diamond : \Diamond A \iff \neg\Box\neg A$
2. Regole di inferenza:
   (a) Modus ponens
   (b) Necessitazione
   (c) Sostituzione uniforme

Definizione 2.29 — Dimostrazione in una logica modale. Data una logica modale L una **dimostrazione in L** è una successione finita di formule tali che ognuna di esse o è un assioma o è ottenuta da formule precedenti tramite una regola di inferenza

Definizione 2.30 — Teorema di una logica modale. Una formula F si dice **teorema di L**, scritto $\vdash_L F$ se e solo se esite una dimostrazione in L in cui la ultima formula è F

Esempio. $\Box(A \wedge B) \implies \Box A$ è un teorema della logica K:

1. $\vdash_K A \wedge B \implies A$ (Tautologia)
2. $\vdash_K \Box(A \wedge B \implies A)$ (Necessitazione)
3. $\vdash_K \Box(A \wedge B \implies A) \implies (\Box(A \wedge B) \implies \Box A)$ (K)
4. $\vdash_K \Box(A \wedge B) \implies \Box A$ (Modus Ponens)

Quindi la logica basata su principi episistemici che abbiamo considerato ragionevoli si supporta su frame che sono relazioni di equivalenza.

Definizione 2.31 — Logica Valida. Una logica L è **valida (sound)** se

$$\vdash_L A \implies \vDash A$$

Teorema 2.32. La logica K è valida.

Dimostrazione. Sia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una dimostrazione di A in K, con $B_n \equiv A$.

B_1 è valida perchè è un assioma.

Se $i > 1$, allora B_i è un assioma o è ottenuta da formule precedenti tramite necessitazione o modus ponens.

1. $\vdash_K B_j$, per induzione $\vDash B_j$ e allora $\vDash \Box B_j$, quindi $B_i = \Box B_j$ è valida.
2. $\vdash_K B_j, \vdash_K B_h$ dove $B_h \equiv B_i \implies B_i$. Allora per induzione $\vDash B_j, \vDash B_j \implies B_i$ e quindi $\vDash B_i$

■

Definizione 2.33 — Logica Completa. Una logica L è **completa** se

$$\vDash A \implies \vdash_L A$$

Teorema 2.34. La logica K è completa.

Dimostrazione. vedee cap.4 "Corso di Logica modale proposizionale" ■