Appunti di Logica e Algebra 2

Pietro Pizzoccheri
Lorenzo Bardelli
https://github.com/PietroPizzoccheri/uni

2024

Contents

1 Teoria degli anelli commutativi e dei campi

1.1 Insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti, detti elementi dell'insieme.

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \cdots\} \quad \text{insieme dei numeri naturali}$$

$$\mathbb{Z} := \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\} \quad \text{insieme degli interi}$$

$$\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\} \quad \text{insieme dei numeri razionali}$$

$$\mathbb{R} := \text{insieme dei numeri reali}$$

$$\mathbb{C} := \text{insieme dei numeri complessi}$$

1.1.1 Operazioni tra insiemi

$$\subseteq \quad \text{inclusione tra insiemi}$$

$$\subsetneq \quad \text{inclusione propria tra insiemi}$$

$$X \subseteq Y \quad \text{si legge "}X\text{ è sottoinsieme di }Y\text{" o "}X\text{ è incluso in }Y\text{"}$$

Se X è un insieme finito, indico con $|X|$ il numero di elementi di X, detto anche la **cardinalità di** X.

$$\varnothing : \text{Insieme vuoto e } |\varnothing| = 0$$

Siano X e Y due insiemi. L'insieme $X \times Y := \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ lo chiamiamo **prodotto cartesiano** di X e Y.

Sia $A \in \mathcal{P}(x)$, dove $\mathcal{P}(X) := \{A : A \subseteq X\}$ è detto **Insieme delle parti di** X. L'insieme $A^c := X \setminus A$ è detto **complementare** di A

1.2 Funzioni

Siano X e Y due insiemi. **Una funzione** f **da** X **a** Y è un sottoinsieme $F \subseteq X \times Y$ tale che:

- $(x, y_1) \in F$, $(x, y_2) \in F \implies y_1 = y_2$, $\forall x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$.
- $x \in X \implies \exists y \in Y$ tale che $(x, y) \in F$

Una funzione $F \subseteq X \times Y$ la indichiamo con $f : X \to Y$. E scriviamo $f(x) = y$ se $(x, y) \in F$.

Definizione: *La funzione $Id_x : X \to X$ tale che $Id_x(x) = x, \forall x \in X$ la chiamiamo* ***funzione identità su*** *X*

Definizione: *Una funzione $f : X \to Y$ è* ***iniettiva*** *se $\forall x_1, x_2 \in X, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$*

Definizione: *Una funzione $f : X \to Y$ è **suriettiva** se $Im(f) = Y$, dove $Im(f) = \{y \in Y : \exists x \in X$ tale che $f(x) = y\}$ è detta **immagine di** f*

Definizione: *Una funzione $f : X \to Y$ è **biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva.*

1.2.1 Composizione di funzioni

Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni. La **composizione di f e g** è la funzione $g \circ f : X \to Z$ tale che $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $\forall x \in X$.

Definizione: *una funzione $f : X \to Y$ è detta **invertibile** se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che*

- $g \circ f = Id_X$
- $f \circ g = Id_Y$

*la funzione g è detta **funzione inversa di** f e la indichiamo con f^{-1}.*

Una funzione $f : X \to Y$ è invertibile se e solo se è biunivoca.

1.2.2 Operazioni su insiemi

Definizione: *Una funzione $f : X \times X \to X$ è detta **operazione su** X. Invece di $f(x, y)$ scriveremo $x \cdot y$.*

Definizione: *Un'operazione $\cdot$ su X è detta **associativa** se $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\forall x, y, z \in X$.*

Definizione: *Un'operazione $\cdot$ su X è detta **commutativa** se $x \cdot y = y \cdot x$, $\forall x, y \in X$.*

Esempio:

- $\mathcal{P}(X)$con l'operazione di unione $\cup$ è associativa e commutativa, così come lo è con l'intersezione $\cap$.
- $A \backslash B := A \cup B^C$ **(differenza insiemistica)** è un'operazione su $\mathcal{P}(X)$.
  non è associativa: sia $A \neq \varnothing$. Allora $A\backslash(A\backslash A) = A \neq (A\backslash A)\backslash A = \varnothing$
  non è commutativa: $A\backslash\varnothing = A \neq \varnothing\backslash A = \varnothing$, se $A \neq \varnothing$
- $A \Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ **(differenza simmetrica)** è un'operazione su $\mathcal{P}(X)$.
  è commutativa e anche associativa, facilmente verificabile coi diagrammi di Venn.
- Sia $F(X) := \{f : X \to X\}$.
  La composizione" $\circ$" è un'operazione su $F(X)$.
  è associativa, ma non è commutativa.
- $a \circ b = \frac{a+b}{2}$ è un'operazione commutativa su $\mathbb{Q}$, ma non associativa.

Definizione: *Sia $\cdot$ un'operazione su X. Un elemento $e \in X$ tale che $e \cdot x = x \cdot e = x$, $\forall x \in X$ è detto **elemento neutro** o **identità**.*

L'identità è unica; se $e, e' \in X$ sono due identità, allora $e = e \cdot e' = e'$.

1.3 Monoidi e Gruppi

Definizione: *Un insieme X con un'operazione associativa e un'identità è detto* ***monoide****.*

Esempio:

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con l'addizione e identità 0 sono monoidi.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con la moltiplicazione e identità 1 sono monoidi.
- $\mathcal{P}(X)$ con $\cup$ e come identità l'insieme X è un monoide.
- $\mathcal{P}(X)$ con $\cap$ e come identità l'insieme vuoto è un monoide.
- $F(X) := \{f : X \to X\}$ con la composizione" $\circ$ "e come identità la funzione identità (Id_X) è un monoide.

Definizione: *Sia Xun monoide. Un elemento $x \in X$ è detto* ***invertibile*** *se esiste $y \in X$ tale che $x \cdot y = y \cdot x = e$, dove e è l'identità di X. L'elemento y è detto* ***inverso*** *di x.*

Se $x \in X$ è invertibile, il suo inverso è unico e lo indichiamo con x^{-1}.
L'identità del monoide è invertibile e il suo inverso è l'identità stessa.

Esempio:

- L'insieme degli elementi invertibili di $(\mathbb{N}, +)$ è $\{0\}$.
- Linsieme degli elementi invertibili di $(\mathbb{Z}, +)$ è $\mathbb{Z}$, di $(\mathbb{Q}, +)$ è $\mathbb{Q}$, di $(\mathbb{R}, +)$ è $\mathbb{R}$, di $(\mathbb{C}, +)$ è $\mathbb{C}$.
- L'insieme degli elementi invertibili di $(\mathbb{N}, \cdot)$ è $\{1\}$, di $(\mathbb{Z}, \cdot)$ è $\{1, -1\}$, di $(\mathbb{Q}, \cdot)$ è $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, di $(\mathbb{R}, \cdot)$ è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, di $(\mathbb{C}, \cdot)$ è $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- L'insieme degli elementi invertibili di $F(X) = \{f : X \to X\}$ è l'insieme delle funzioni invertibili.

Definizione: *Un monoide X è detto* ***gruppo*** *se ogni suo elemento è invertibile. Se l'operazione è commutativa, il gruppo è detto* ***gruppo abeliano****.*

Esempio:

- $(\mathcal{P}(x), \Delta)$ è un gruppo abeliano. L'identità è l'insieme vuoto e l'inverso di $A \in \mathcal{P}(x)$ è A stesso. $(A^2 = \varnothing, \forall A \subseteq X)$
- $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sono gruppi abeliani
- $(\mathbb{Q}\setminus\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\}, \cdot)$ sono gruppi abeliani
- sia $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ l'insieme delle funzioni invertibili $f : X \to X$ è il **Gruppo delle permutazioni di n elementi (o gruppo simmetrico)**.Lo indichiamo con $S?n$. $|S_n| = m!$. Non è abeliano se $n \geq 3$.

Definizione: *Sia X un monoide con identità e. Un sottoinsieme $Y \subseteq X$ tale che $e \in Y$ e Y è chiuso rispetto all'operazione di X è detto* ***sottomonide di*** *X. Analogamente definiamo la nozione di* ***sottogruppo di*** *X. il gruppo $\{e\}$ è detto* ***sottogruppo banale di*** *X.*

Esempio:

- Con l'addizione, $\{0\}$ èun sottomonoide di $\mathbb{N}$. $\{0\}$ è anche sottogruppo banale.
- Con la moltiplicazione abbiamo la catena di sottomonoidi $\{1\} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq insiemeR \subseteq \mathbb{C}$ e di sottogruppi $\{1\} \subseteq \mathbb{Q}\backslash\{0\} \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0\} \subseteq \mathbb{C}\backslash\{0\}$
- con l'addizione abbiamo la caten di sottogruppi $\{0\} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$

Definizione: *Sia X un monoide e $S \subseteq X$ un sottoinsieme. L'insieme $\langle S \rangle := \{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n : n \in \mathbb{N}, x_1, x_2, \cdots, x_n \in S\}$ è detto* ***sottomonoide generato da*** *S (intersezione di utti i sottomonoidi di X che contengono S). Se X è un gruppo, $\langle S \rangle$ è detto* ***sottogruppo generato da*** *S.*

Esempio:

- $S = \{1\} \subseteq (\mathbb{N}, +)$. Allora $\langle S \rangle = \{0, 1, 2, \cdots\} = \mathbb{N}$
- sia $S := \{p \in \mathbb{N} : p \text{ è primo}\} \cup \{0\} \subseteq (\mathbb{N}, \cdot)$. allora $\langle S \rangle = \mathbb{N}$
- $S = \{0, 1\} \subseteq (\mathbb{N}, .)$. Allora $\langle S \rangle = \{0, 1\}$
- sia $S = \{1\} \subseteq (\mathbb{Z}, +)$. il sottogruppo generato da S è $\langle S \rangle = \mathbb{Z}$
- uno spazio ettoriale V è un gruppo abeliano se consideriamo l'operazione di addizione fra vettori. Prendiamo $V = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sia $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Il sottogruppo $\langle \{v\} \rangle = \{(n, n) : n \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo proprio del sottospazio generato da $\{v\}$. Sia $v_1 = (1, 0)$ ed $v_2 = (0, 1)$, allora il sottogruppo $\langle \{v_1, v_2\} \rangle$ è $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Definizione: *Siano M_1, M_2 con identità e_1, e_2 rispettivamente. Si definisce prodotto diretto di M_1 e M_2 l'insieme $M_1 \times M_2$ con l'operazione $(m_1, m_2) \cdot (m_1', m_2') = (m_1 \cdot m_1', m_2 \cdot m_2')$ e identità (e_1, e_2). Analogamente si definisce prodotto diretto di gruppi $G_1 e G_2$.*

L'inverso di una coppia $(a, b) \in G_1 \times G_2$ è (a^{-1}, b^{-1}).

1.4 Morfismi

Definizione: *Siano $M_1 e M_2$ monoidi con identità $e_1 e e_2$. Una funzione $f : M_1 \to M_2$ è un* ***morfismo di monoidi se:***

- $f(e_1) = e_2$
- $f(xy) = f(x)f(y)$

Definizione: *Siano $G_1 e G_2$ gruppi con identità $e_1 e e_2$. Una funzione $f : G_1 \to G_2$ è un* ***morfismo di gruppi se:***

- $f(e_1) = e_2$
- $f(xy) = f(x)f(y)$

Definizione: *Il* ***nucleo*** *di un morfismo di monoidi $f : M_1 \to M_2$ è il sottomonoide di M_1 definito come: $Ker(f) := \{x \in M_1 : f(x) = e_2\}$*

Definizione: *Il nucleo di un morfismo di gruppi $f : G_1 \to G_2$ è il sottogruppo di G_1 definito come: $Ker(f) := \{x \in G_1 : f(x) = e_2\}$.* ***Il nucleo è un sottogruppo di*** *G_1. e $Im(f)$* ***è un sottogruppo di*** *G_2.*

Definizione: *Un* ***isomorfismo di monoidi (e di gruppi)*** *èun morfismo biunivoco, tale che la funzione inversa sia un morfismo.*

Proposizione: *Sia $f : M_1 \to M_2$ un morfismo di monoidi. Se f è biunivoco, allora è un isomorfismo. Questo vale anche per i gruppi.*

Dimostrazione: *Dobbiamo far vedere che la funzione inversa $f^{-1} : M_2 \to M_2$ è un morfismo di monoidi. Poiché $f(e_1) = e_2$, allora $f^{-1}(e_2) = e_1$. Siano $x_2, y_2 \in M_2$, allora esistono $x_1, y_1 \in M_1$ tali che $f(x_1) = x_2, f(y_1) = y_2$. Quindi $f^{-1}(f(x_1)f(y_1)) = f^{-1}(f(x_1y_1)) = x_1y_1 = f^{-1}(x_2)f^{-1}(y_2)$*

Esempio:

- Siano $M_1 = (\mathcal{P}(X), \cup)$ e $M_2 = (\mathcal{P}(X), \cup)$, dove X è un insieme. Sia $f : M_1 \to M_2$ definita ponendo $f(A) = A^C, \forall A \subseteq X$. la funzione f è biunivoca. Inotre, dalle formule di De Morgan segue che $f(A \cap B) = (A \cap B)^C = A^C \cup B^C = f(A) \cup f(B)$. Quindi f è un isomorfismo di monoidi, poiché $f(X) = X^C = \varnothing$, essendo X l'identità di M_1 e $\varnothing$ l'identità di M_2.

- Sia $\mathbb{Z}_2 := \{0, 1\}$ con l'operazione definita come: $0+0 = 0, 0+1 = 1+0 = 1, 1+1 = 0$. Sia $X := \{1, 2, \cdots, n\}, n \in \mathbb{N}$. La funzione $f : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2$ (n volte) definita da: $f(A) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, dove $a_i = 1$ se $i \in A$ e $a_i = 0$ se $i \notin A$.
  è un isomorfismo del gruppo $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ con il gruppo $\mathcal{P}(X) \to \mathbb{Z}_2 \times \cdots \times \mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}_2)^n$

Vediamo ora come ogni monoide finito è isomorfo a un monoide di matrici quadrate, dove l'operazione è il prodotto righe per colonne.
Sia $M = \{x_1, \cdots, x_n\}$ un monoide, $|M| = n \in \mathbb{N}$, con identità $e = x_1$. Per ogni $x \in M$ definiamo una matrice $A(x) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{Z})$ nel seguente modo: $A(x)_{ij} = 1$ se $x_i \cdot x = x_j$ e $A(x)_{ij} = 0$ altrimenti. La funzione $F : M \to Mat_{n\times n}(\mathbb{Z})$ $(x \mapsto A(x))$ è iniettiva.
Infatti, se $A(x) = a(y)$, allora $A(x)_{i1} = A(y)_{i1}$, $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$.
Quindi se $A(x)_{i1} = A(y)_{i1} = 1$, allora $xx_1 = xe = x = yx_1 = y$.
Risulta inoltre facile vedere che $A(xy) = A(x)A(y)$ (prodotto righe per colonne), ossia che F è un morfismo di monoidi ($Mat_{n\times n}(\mathbb{Z})$ è un monoide con l'operazione di prodotto righe per colonne, la cui identità è la matrice I_n).
Quindi $F : M \to Im(F)$ è un isomorfismo di monoidi.

Esempio: Sia $M = (\mathbb{Z}_2, \cdot)$ il monoide definito da:

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

costruiamo un sottomonoide di $Mat_{4\times 4}(\mathbb{Z})$ isomorfo a $M \times M = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

$(0,0) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(0,1) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $(1,0) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,
$(1,1) \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$\cdot$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$
$(1,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,0)$
$(1,1)$	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$

Si può verificare direttamnete che le matrici hanno la stessa tabella moltiplicativa. (fine esempio)

Abbiamo quindi visto che un monoide finito di cardinalità n è isomorfo a un monoide di matrici $n \times n$ le cui colonne hanno un unico "1" e altrove sono "0".
Ognuna di queste matrici può essere vista come una funzione da $X = \{1, \cdots, n\} in X$:

$$A_{ij} = 1 \Leftrightarrow f(j) = i$$

$$A_{ij} = 0 \Leftrightarrow f(j) \neq i$$

Il prodotto righe per colonne corrisponde alla composizione di funzioni.
Quindi un monoide finito di cardinalità n è isomorfo a un sottomonide del monoide delle funzioni f da $\{1, \cdots, n\}$ in $\{1, \cdots, n\}$ con l'operazione di composizione.

Notiamo che un elemento $x \in M$ di un monoide finito M è invertibile se e solo se la matrice associata è invertibile (una matrice $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{Z})$ è invertibile se e solo se il suo determinante è invertibile su $\mathbb{Z}$, ossia se e solo se $det(a) \in \{-1, 1\}$).

Da ciò segue che un gruppo finito G di cardinalità $|G| = n$, è isomorfo a un gruppo di matrici le cui componenti sono"0" e "1" e che hanno un unico "1" in ogni riga e ogni colonna (matrici di permutazioni).
Il gruppo G è inoltre isomorfo a un sottogruppo del gruppo delle funzioni biunivoche da $\{1, \cdots, n\}$ in $\{1, \cdots, n\}$, che abbiamo chiamato **gruppo simmetrico** S_n.
Gli elementi di S_n in notazione a una linea sono indicati nel modo seguente: sia $\sigma \in S_n$ una funzione biunivoca da $\{1, \cdots, n\}$ in $\{1, \cdots, n\}$, allora σ è indicata come $\sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(n)$.

Teorema (Teorema di Cayley)***:*** *Ogni sottogruppo finito di cardinalità $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ è isomorfo a un sottogruppo di S_n*

Esempio:

- $S_2 = \{12, 21\}$
  $S_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$

- vediamo il gruppo $(\mathbb{Z}_2, +)$ come gruppo di matrici e come gruppo di permutazioni.
  $(\mathbb{Z}_2, +) \simeq \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\} \simeq \{12, 21\} = S_2$ ($\simeq$: isomorfismo di gruppi)

1.5 Relazioni

Definizione: *Sia X un insieme. Un sottoinsieme $R \subseteq X \times X$ è detto **relazione su** X.*

Definizione: *Una relazione $R \subseteq X \times X$ è detta **relazione di equivalenza** se soddisfa le seguenti proprietà:*

- ***riflessità***: $(x, x) \in R, \forall x \in X$
- ***simmetria***: $(x, y) \in R \implies (y, x) \in R, \forall x, y \in X$
- ***transitività***: $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R \implies (x, z) \in R, \forall x, y, z \in X$

Se R è una relazione di equivalenza su X e $(x, y) \in R$, scriviamo $x \sim y$, che si legge "x è equivalente a y".

Definizione: *Sia X un insieme e $R \subseteq X \times X$ una relazione di equivalenza su X. L'insieme $[x]_R := \{y \in X : x \sim y\}$ è detto **classe di equivalenza di** x **rispetto a** R.*

Definizione: *L'insieme ${}^{X}/_{\sim} := \{[x] : x \in X\}$ è detto **insieme quoziente**.*

Definizione: *La funzione $\pi : X \to {}^{X}/_{\sim}\ , x \mapsto [x]$ è detta **proiezione canonica**.*

Definizione: *Siano $x, y \in X$. Allora se $x \sim y$ abbiamo che $[x] = [y]$. Se $x \nsim y$ abbiamo che $[x] \cap [y] = \varnothing$. Quindi $X = \biguplus_{[x] \in {}^{X}/_{\sim}} [x]$, ossia ${}^{X}/_{\sim}$ è una partizione di X.*

Esempio:

- L'uguaglianza " $=$ " è una relazione di equivalenza su ogni insieme X.

- Sia $X = \{1, 2, \cdots, n\}$. Definiamo si $\mathcal{P}(X)$ la seguente relazione: $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|, \forall A, B \subseteq X$. Questa è una relazione di equivalenza e ${}^{\mathcal{P}(X)}/_{\sim} \equiv \{0, 1, \cdots, n\}$. Se $A \subseteq X$ è tale che $|A| = k \leq n$ allora $|[A]| = \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- Sia G un gruppo e $H \subseteq G$ un sottogruppo. La relazione $\sim$ su G definita da $g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_1 = g_2 h$ per qualche $h \in H$ è una relazione di equivalenza.
  - $g \sim g : g \cdot e$, $\forall g \in G, e \in H$
  - $g_1 \sim g_2 \to g_2 \sim g_1 : g_1 = g_2 h \to g_1 h^{-1} = g_2$ $(h^{-1} \in H)$

- $g_1 \sim g_2, g_2 \sim g_3 \to g_1 \sim g_3 : g_1 = g_2 h, g_2 = g_3 h' \to g_1 = g_3 hh' = g_3 h'', \forall g_1, g_2, g_3 \in G$

In questo caso l'insieme quoziente lo indichiamo con G/H.

Definizione: *Il numero $\binom{n}{k}$ è chiamato **coefficiente binomiale**, questo perché $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n y^{n-k}, \forall x, y \in \mathbb{C}$*

1.6 Insieme quoziente per gruppi abeliani

Se G è un gruppo abeliano, possiamo definire la seguente operazione "+" su G/H: $[g_1] + [g_2] := [g_1 + g_2]$, vediamo che è ben definita: se $g_1' = g_1 + h_1$ e $g_2' = g_2 + h_2$, allora $[g_1'] = [g_1]$, $[g_2'] = [g_2]$ e $g_1' + g_2' = g_1 + h_1 + g_2 + h_2 = g_1 + g_2 + h$, dove $h = h_1 + h_2 \in H$. Quindi $[g_1' + g_2'] = [g_1 + g_2]$. L'operazione è ovviamente associativa e commutativa, perché lo è quella su G. Inoltre $[g] + [0] = [g]$, $\forall [g] \in G/H$ dove con "0" abbiamo indicato l'identità di G. Quindi la classe $[0]$ dell'identità di $(G/H, +)$. Infine $[g] + [-g] = [g - g] = [0]$, dove con $-g$ abbiamo indicato l'inverso di g in G. Quindi $-[g] = [-g], \forall [g] \in G/H$, ossia $(G/H, +)$ è un gruppo abeliano.

Esempio:

- Se $H = \{0\} \subseteq G$, allora G/H è isomorfo a G. ($\{0\}$ gruppo banale e G gruppo abeliano)
- Sia $G = (\mathbb{Z}, +)$ e $n \in \mathbb{N}$. Il sottoinsieme $n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$ è un sottogruppo di $\mathbb{Z}$.
  - $0\mathbb{Z} = \{0\}$
  - $1\mathbb{Z} = \{\mathbb{Z}\}$
  - $2\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$
  - $3\mathbb{Z} = \{\cdots, -6, -3, 0, 3, 6, \cdots\}$

  Definiamo il gruppo abeliano $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, per $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}/0\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\{0\} = \mathbb{Z}$.
  Sia $n \geq 0$ e siano $x, y \in \mathbb{Z}$.

  - Allora $x \sim y \Leftrightarrow x = y + h$ $(h \in n\mathbb{Z}) \Leftrightarrow x - y = kn$ (per $k \in \mathbb{Z}$) $\Leftrightarrow$ il resto della divisione di x per n è uguale al resto della divisione di y per n.

  I possibili resti della divisione per n sono $0, 1, \cdots, n-1$.
  Quindi $\mathbb{Z}_n = \{[0], [1], \cdots, [n-1]\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$. ($\{[0], [1], \cdots, [n-1]\}$ sono le classi di resto)

  - $\mathbb{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$, $\overline{1} + \overline{1} = [1+1] = [2] = [0]$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

  - $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$,

Definizione: *Sia G un gruppo abeliano e $H \subseteq G$ un sottogruppo. La proiezione canonica $\pi : G \to G/H$ è un **morfismo suriettivo di gruppi***

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Se G è un gruppo finito e $H \subseteq G$ è un sottogruppo, allora $[g] \in {}^{G}/_{H} \to |[g]| = |H|$.
Infatti $[g] = \{gh : h \in H\}$ e $gh_1 = gh_2 \to h_1 = h_2$.
Poiché le classi di quivalenza sono una partizione di G , abbiamo $|G| = |{}^{G}/_{H}| \cdot |H|$.
In particolare la cardinalità o (**ordine**) di un sottogruppo di un gruppo finito divide la cardinalità del gruppo.

Teorema: *Sia $f : G_1 \to G_2$ un morfismo di gruppi. Allora f è iniettivo se e solo se $Ker(f) = \{e_1\}$.*
(Questo non vale per i morfismi di monoidi.)

Dimostrazione: *Sia f iniettivo. Sia $x \in Ker(f)$. Allora $f(x) = e_2$ e quindi, poiché anche $f(e_1) = e_2$, si ha che $x = e_1$ per l'ipotesi di iniettività.*
Sia $Ker(f) = \{e_1\}$. Siano $x, y \in G_1$ tali che $f(x) = f(y)$.
Allora $f(x)f(y^{-1}) = e_2 \to f(xy^{-1}) = e_2 \to xy^{-1} \in Ker(f) \to xy^{-1} = e_1 \to x = y$,

Esempio:

- $G = \mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$,
  - $\langle\overline{0}\rangle = \overline{0}$ sottogruppo banale $\simeq \mathbb{Z}_1$
  - $\langle\overline{1}\rangle = \mathbb{Z}_4$
  - $\langle\overline{2}\rangle = \{\overline{0}, \overline{2}\} \simeq \mathbb{Z}_2$ $(2 + 2 = 0)$
  - $\langle\overline{3}\rangle = \mathbb{Z}_4$ $(3, 3 + 3 = 6 = 2, 3 + 2 = 5 = 1, 3 + 1 = 4 = 0)$

  I sottogruppi di $\mathbb{Z}_4$ possono averer cardinalità $1, 2, 4$. L'insieme dei sottogruppo di $\mathbb{Z}_4$ è $\{\{\overline{0}\}, \{\overline{0}, \overline{2}\}, \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\} = \mathbb{Z}_4\}$

- $G = \mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$,
  - $\langle\overline{0}\rangle = \overline{0}$ sottogruppo banale $\simeq \mathbb{Z}_1$
  - $\langle\overline{1}\rangle = \mathbb{Z}_6$
  - $\langle\overline{2}\rangle = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \simeq \mathbb{Z}_3$
  - $\langle\overline{3}\rangle = \{\overline{0}, \overline{3}\} \simeq \mathbb{Z}_2$
  - $\langle\overline{4}\rangle = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\} \simeq \mathbb{Z}_3$
  - $\langle\overline{5}\rangle = \mathbb{Z}_6$

  I sottogruppi di $\mathbb{Z}_6$ possono averer cardinalità $1, 2, 3, 6$. L'insieme dei sottogruppo di $\mathbb{Z}_6$ è $\{\{\overline{0}\}, \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}, \{\overline{0}, \overline{3}\}, \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\} = \mathbb{Z}_6\}$

Caso generale: consideriamo il gruppo $\mathbb{Z}_n = (\{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\}, +)$ sia $m \in \mathbb{N}, m < n$.
Se $m = 0$, $\langle\overline{0}\rangle = \{\overline{0}\}$.
Sia $m > 0$ e $z := \frac{mcm\{m,n\}}{m}$. (mcm = minimo comune multiplo)

$\overline{m}+\overline{m}+\cdots=\overline{m}=\overline{zm}=\overline{mcm\{m,n\}}=\overline{0}$

Se $i \leq i \leq z$: $im < zm = mcm\{m,n\} \to n$ non divide im.

$\overline{m}+\overline{m}+\cdots=\overline{m}=\overline{im}\neq\overline{0}$ perché im è multiplo di m e $im < mcm\{m,n\}$, quindi im non è multiplo di n. Dunque $|\langle\overline{m}\rangle| = z = \frac{mcmc\{m,n\}}{m}$.

In particolare, $\langle\overline{m}\rangle = \mathbb{Z}_n \Leftrightarrow z = n \Leftrightarrow MCD\{m,n\} = 1$. Ossia **l'insieme $\{\overline{m}\}$ genera il gruppo $\mathbb{Z}_n$ sse m e n sono coprimi.**

Definizione: *La funzione definita da $\varphi : \mathbb{N}\backslash\{0\} \to \mathbb{N}\backslash\{0\}$,*
*$\varphi(n) := |\{m \in \mathbb{N}\backslash\{0\} : m < n \text{ e } MCD\{m,n\} = 1\}|$ è detta **funzione di Eulero**.*
Quindi ci sono $\varphi(n)$ elementi $\overline{m}$ tali che $\langle\overline{m}\rangle = \mathbb{Z}_n$.

Proposizione: *L'insieme dei sottogruppi di $(\mathbb{Z},+)$ è $\{n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$.*

Dimostrazione: *Sia $H \subseteq \mathbb{Z}$ un sottogruppo non banale.*
Sia $k := min(H_{>0})$ dove $H_{>0} := \{h \in H : h > 0\}$.
Sia $h \in H_{>0}, h \neq k$.
Allora $h > k$ e $h = nk + r$, $n \in \mathbb{N}, 0 \leq r < k$.
Dunque $r = h - nk \in H \to r = 0$ per la minimalità di k.

Definizione: *Un gruppo G è detto **ciclico** se esiste $g \in G$ tale che $\langle g\rangle = G$.*
Un gruppo ciclico è anche abeliano

Esempio:

- $\mathbb{Z} = \langle 1\rangle$ è ciclico
- $\mathbb{Z}_n = \langle\overline{1}\rangle$ è ciclico
- $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} = \langle(1,0),(0,1)\rangle$ non è ciclico, infatti in $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, se $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\langle(a,b)\rangle = \{(ka,kb) : k \in \mathbb{Z}\} = \{(x,y) : a \text{ divide } x, b \text{ divide } y\} \subsetneq \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ non è ciclico. Infatti, in $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ si ha:
  - $\langle(\overline{0},\overline{0})\rangle = \{(\overline{0},\overline{0})\}$
  - $\langle(\overline{0},\overline{1})\rangle = \{\overline{0}\}\times\mathbb{Z}_2$
  - $\langle(\overline{1},\overline{0})\rangle = \mathbb{Z}_2\times\{\overline{0}\}$
  - $\langle(\overline{1},\overline{1})\rangle = \{(\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1})\}$

  Quindi nessun elemento di $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ genera $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

Teorema (di isomorfismo per gruppi abeliani)***:*** *Sia $f : G_1 \to G_2$ un morfismo di gruppi abeliani. Allora esiste un morfismo iniettivo $\varphi : {}^{G_1}/_{Ker\varphi} \to G_2$ tale che il seguente diagramma è commutativo:*

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & G_2 \\ {}^{G_1}/_{Ker(f)} \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

In particolare, ${}^{G_1}/_{Ker(f)} \simeq \Im(f)$.

Dimostrazione: *L'assegnazione* $[g] \mapsto f(g), \forall g \in G$, *definisce una funzione* $\varphi : {}^{G_1}/_{Ker(f)} \to G_2$.
Infatti, se $g' \sim g$, *ossia* $[g] = [g']$, *allora* $g = g' + h, h \in Ker(f)$.
Dunque $f(g) = f(g' + h) = f(g') + f(h) = f(g')$. *Poiché* f *è morfismo di gruppi, anche* φ *lo è.*
Inoltre $Ker(f) = \{[g] \in {}^{G}/_{Ker(f)} : \varphi([g]) = O_2\} = \{[g] \in {}^{G}/_{Ker(f)} : f(g) = O_2\} = [O_1]$. *Quindi* φ *è iniettiva.*
Infine, $\varphi : {}^{G_1}/_{Ker(f)} \to Im(f)$ *è un morfismo di gruppi, iniettivo e suriettivo, quindi un isomorfismo.*

Teorema: Sia G un gruppo ciclico. Allora ogni sottogruppo di G è ciclico.

Dimostrazione: *Sia* $g \in G$ *tale che* $g = \langle g \rangle$. *La funzione* $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to G$ *definita da* $\varphi(g) = g^n, \forall n \in \mathbb{Z}$, *è un morfismo suriettivo di gruppi.*

- G *è infinito: allora* $Ker(f) = \{0\}$ *e quindi* φ *è iniettivo. Dunque* φ *è un isomorfismo di gruppi. Tutti i sottogruppi di* $\mathbb{Z}$ *sono ciclici.*
- G *è finito: sia* $H \subseteq G$ *un sottogruppo. Allora* $\varphi^{-1}(H) := \{n \in \mathbb{Z} : \varphi(n) \in H\} \subseteq \mathbb{Z}$ *è un sottogruppo di* $\mathbb{Z}$, *quindi esiste* $\varphi^{-1}(H) = \langle k \rangle$ *con* $k \in \mathbb{N}$.
  La restrizione $\varphi : k\mathbb{Z} \to H$ *è un morfismo suriettivo di gruppi e* $\varphi(hk) = \varphi(\underbrace{k + k + \cdots + k}_{h\ volte}) = \varphi(k)\varphi(k)\cdots\varphi(k) = [\varphi(k)]^h, \forall h \in \mathbb{Z}$. *Quindi* $H = \langle \varphi(k) \rangle$.

Corollario: L'insieme dei sottogruppi di $\mathbb{Z}_n, n \in \mathbb{N}$ è $\{\langle \overline{m} \rangle : \overline{m} \in \mathbb{Z}_n\}$.

Proposizione: *Sia* $n \in \mathbb{N}$ e *sia* d/n *(d divide n). Allora esiste al più un unico sottogruppo di* $\mathbb{Z}_n$ *di cardinalità* d.

Dimostrazione: *Sia* $H \subseteq \mathbb{Z}_n$ *sottogruppo tale che* $|H| = d$. *Si considerino le proiezioni canoniche* $\mathbb{Z} \to^{\pi_1} \mathbb{Z}_n \to^{\pi_2} {}^{\mathbb{Z}_n}/_{H}$.
Poiché $\pi_1^{-1}(H) = \{m \in \mathbb{Z} : \pi_1(m) \in H\}$ *è un sottogruppo di* $\mathbb{Z}$, *allora esiste* $k \in \mathbb{N}$ *tale che* $\pi_1^{-1}(H) = k\mathbb{Z}$. *Inoltre* $Ker(\pi_1 \cdot \pi_2) = \pi_1^{-1}(H)$ *e quindi, essendo* $\pi_1 \cdot \pi_2$ *un morfismo suriettivo di gruppi,* ${}^{\mathbb{Z}_n}/_{H} \simeq {}^{\mathbb{Z}}/_{\pi^{-1}(H)} = {}^{\mathbb{Z}}/_{k\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}_k$.
Quindi $|\mathbb{Z}_k| = k = |{}^{\mathbb{Z}_n}/_{H}| = {}^{|\mathbb{Z}_n|}/_{|H|} = \frac{n}{d}$, *ossia* k *è univocamente determinato, e allora* $H = \pi_1(k\mathbb{Z})$ *è univocamente determinato.*

Esempio: I sottogruppi di $\mathbb{Z}_{899}$ sono quattro, perché $899 = 31 \cdot 29$, quindi c'è un sottogruppo di cardinalità 1 (il sottogruppo banale), uno di cardinalità 31, uno di cardinalità 29 e $\mathbb{Z}_{899}$.
Sono: $\{\{0\}, \langle \overline{29} \rangle, \langle \overline{31} \rangle, \mathbb{Z}_{899}\}$.

1.7 Anelli

Definizione: *Sia* X *un insieme su cui sono definite due operazioni* $+$ *e* $\cdot$.
X *è un* **anello** *con unità* 1_X *se:*

- $(X, +)$ *è un gruppo abeliano*
- $(X, \cdot)$ *è un monoide con unità* 1_X

- *vale la proprietà distributiva:*
  - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
  - $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $\forall a, b, c \in X$

Definizione: *Diaciamo che un anello X è* ***commutativo*** *se il monoide $(X, \cdot)$ è commutativo.*

Indichiamo con "0" l'identità del gruppo $(X, +)$.

Esempio:

- Gli insiemi $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con le operazioni di addizione e moltiplicazione sono anelli commutativi con unità, che è il numero "1".
- L'insieme delle matrici $n \times n, n > 1$ a valori su $\mathbb{Z}$, su $\mathbb{Q}$, su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$, con l'operazione di somma e il prodotto righe per colonne, è un anello **non commutativo**, con unità la matrice identità.
  In generale, se A è un anello commutativo con unità, l'insieme $Mat_{n\times n}(A)$ delle matrici a valori in $\mathbb{R}$ con le operazioni di somma e prodotto righe per colonne, è un anello non commutativo con unità.
- $\{X\}$ è un anello, detto **anello nullo**. Le due operazioni sono la stessa e $0 = 1_{\{X\}} = x$.

Considereremo sempre $0 \neq 1_A$ e studieremo solo anelli commutativi con unità. Quindi quando diremo "anello" intendiamo "anello con unità".

Definizione: *Sia A un anello commutativo. Un elemento $x \in A$ è detto* ***zero divisore*** *se esiste $y \in A \backslash \{0\}$ tale che $xy = 0$.*

Definizione: *Diciamo che un elemento $x \in A$ è* ***invertibile*** *se è un elemento invertibile del monoide $(A, \cdot)$.*

Proposizione: *Sia A un anello commutativo. Allora l'insieme degli elementi invertibili di A è disgiunto dall'insieme degli zero-divisori di A.*

Dimostrazione: *Siano $x, y \in A$ tali che $xy = 0$. Se X è invertibile, allora $x^{-1}xy = y = 0$, quindi x non è uno zero-divisore.*

Proposizione (legge di cancellazione)**:** *Sia A un anello commutativo e sia $x \in A$ un elemento che non è uno zero-divisore. Allora $xy = xz \rightarrow y = z, \forall y, z \in A$.*

Dimostrazione: *Se $xy = xz$ allora $x(y - z) = 0$. Poiché x non è uno zero-divisore, allora $y - z = 0$, ossia $y = z$.*

Definizione: *Un anello commutativo privo di zero-divisori non nulli è detto* ***dominio di integrità****.*

Definizione: *Un anello commutativo i cui elementi non nulli sono tutti invertibili è detto* ***campo****.*

Esempio: L'anello $\mathbb{Z}$ è un dominio di integrità, ma non è un campo.
Gli anelli $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sono campi.

1.8 Ideali

Definizione: *Sia A un anello commutativo. Un sottoinsieme $I \subseteq A$ è detto* **ideale** *di A se:*

- *I è un sottogruppo di $(A, +)$*
- *$ax \in I, \forall a \in A, x \in I$*

Esempio: Abbiamo già visto che ogni sottogruppo di $(\mathbb{Z}, +)$ è del tipo $n\mathbb{Z} = \{kn : k \in \mathbb{Z}\}$, dove $n \in \mathbb{N}$. Inoltre, se $a \in \mathbb{Z}$ e $x \in n\mathbb{Z}$, ossia $x = kn$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, si ha che $ax = akn \in n\mathbb{Z}$. Quindi $n\mathbb{Z}$ è un ideale di $\mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$, e tutti gli ideali di $\mathbb{Z}$ sono di questo tipo.

Osservazioni: Siano $I, J \subseteq A$ ideali di un anello commutativo A.
Allora :

- $I \cap J$ è un ideale di A
- $I + J := \{x + y : x \in I, y \in J\}$ è un ideale di A
- $IJ := \langle\{xy : x \in I, y \in J\}\rangle$ è un ideale di A

Definizione: *Sia $S \subseteq A$ un sottoinsieme di un anello commutativo.* ***L'ideale generato da*** *S è l'intersezione di tutti gli ideali di A che contengono S e lo indichiamo con $\langle S\rangle$.*
Se $S = \{x\}$, diciamo che $\langle S\rangle$ è ***l'ideale principale generato da*** *$x \in A$.*

Esempio: Abbiamo visto che gli ideali di $\mathbb{Z}$ sono tutti e soli i sottoinsiemi $n\mathbb{Z} = \langle n\rangle, n \in \mathbb{N}$. Quindi gli ideali di $\mathbb{Z}$ sono tutti principali.

Definizione: *un anello i cui ideali sono tutti principali si dice* ***anello ad ideali principali****.*

Proposizione: *Sia A un anello commutativo e $I \subseteq A$ un ideale.*
Allora:

- *$I = A$ se e solo se I contiene un elemento invertibile*
- *A è un campo sse i suoi unici ideali sono $\langle 0\rangle$ e $A = \langle 1_A\rangle$*

Dimostrazione:

- *se $I = A$ allora $1_A \in I$ e 1_A è invertibile.*
  Sia $u \cap I$ un elemento invertibile. Allora $u^{-1} \cap A$ e quindi $1_A uu^{-1} \in I$. Ne segue che $A = \langle 1_A\rangle \subseteq I$. e quindi $I = A$.
- *Sia A un campo e sia $I \neq \langle 0\rangle$.*
  se $n \in I$ e $x \neq 0$ allora x è invertibile e quindi $I = A$ per il punto sopra.
  Viceversa, se $\langle 0\rangle$ e A sono gli unici ideali di A, e se $x \in A\backslash\{0\}$, allora $\langle X\rangle = \langle 1_A\rangle$, ossia $ax = 1_A$ per qualche $a \in A$. Quindi x è invertibile.

1.9 Anelli quoziente

Sia A un anello commutativo e $I \subseteq A$ un ideale.
In particolare, A con l'operazione " $+$ " è un gruppo abeliano e I è un sottogruppo di A.
Allora possiamo definire il gruppo quoziente A/I.
Con l'operazione $[x] \cdot [y] := [xy]$, per ogni $[x], [y] \in A/I$, abbiamo che A/I è un anello commutativo con unità $[1_A]$.
Infatti, mostriamo che l'operazione è ben definita. Siano $x' \in [x]$ e $y' \in [y]$. Allora esistono $i_x \in I$ e $i_y \in I$ tali che $x' = x + i_x$ e $y' = y + i_y$.
Quindi $x'y' = (x + i_x)(y + i_y) = xy + \underbrace{xi_y + yi_x + i_xi_y}_{\in I \text{ perchè } I \text{ è un ideale di } A}$
Quindi $[x'y'] = [xy]$.
Inoltre $[1_A][x] = [1_Ax] = [x]$, per ogni $[x] \in A/I$, quindi $[1_A]$ è l'unità di A/I.

Esempio: Abbiamo visto che $n\mathbb{Z} = \{kn : k \in \mathbb{Z}\}$ è un ideale dell'anello $\mathbb{Z}$. Quindi il quoziente $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ha la struttura di anello.

- $\mathbb{Z}_0 \simeq \mathbb{Z}$
- $\mathbb{Z}_1 \simeq \{0\}$ anello nullo.
- $\mathbb{Z}_2 \simeq \{\overline{0}, \overline{1}\}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

- $\mathbb{Z}_3 \simeq \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ è un campo perchè $\overline{1}$ è invertibile e $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{1}$, quindi anche $\overline{2}$ è invertibile.

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

- $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ dove $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{0}$, quindi $\mathbb{Z}_4$ non è un dominio di integrità.
  In particolare non è un campo.

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

Vediamo che $\mathbb{Z}_n$ è un campo se e solo se $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ è un numero primo (per $n = 0$ abbiamo $\mathbb{Z}_0 \simeq \mathbb{Z}$ e per $n = 1$ abbiamo l'anello nullo).
Un ideale di $\mathbb{Z}_n$ è un sottogruppo di $\mathbb{Z}_n$.
Poiché $\mathbb{Z}_n$ è ciclico, i suoi sottogruppi sono ciclici e sono $\{\langle \overline{m} \rangle : \overline{m} \in \mathbb{Z}_n\}$. Inoltre $\langle \overline{m} \rangle \subseteq \mathbb{Z}_n$

è un ideale, $\forall \overline{m} \in \mathbb{Z}_n$. Infatti, se $\overline{a} \in \mathbb{Z}$, allora $\overline{a}\overline{m} = \overline{am} = \underbrace{\overline{m} + \overline{m} + \cdots + \overline{m}}_{a \text{ volte}} \in \langle \overline{m} \rangle$
Quindi $\{\langle \overline{m} \rangle : \overline{m} \in \mathbb{Z}_n\}$ è l'insieme degli ideali di $\mathbb{Z}_n$ ($\mathbb{Z}_n$ è anello ad ideali principali).
Inoltre, se $n > 1, \{\langle \overline{m} \rangle \overline{m} \in \mathbb{Z}_n\} = \{\{\overline{0}\}, \mathbb{Z}_n\} \cup \{\langle \overline{m} \rangle : MCD_{m \neq 0}\{m, n\} \neq 1\}$
Quindi $\mathbb{Z}_n$ è un campo se e solo se $\{\langle \overline{m} \rangle : \overline{m} \in \mathbb{Z}_n\} = \{\{\overline{0}\}, \mathbb{Z}_n\}$ se e solo se n è un numero primo.

Esempio: $\mathbb{Z}_3$ è un campo, si ha che $\overline{2}^{-1} = \overline{2}$. Infatti $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4} = \overline{1}$.
Invece $\mathbb{Z}_4$ non lo è; infatti $\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{0}$ e quindi $\overline{2}$ non è invertibile.

1.10 Algoritmo di Euclide e identità di Bézout su $\mathbb{Z}$

Vogliamo calcolare il massimo comun divisore tra 1876 e 365.
Usiamo l'algoritmo di Euclide:

$$\begin{aligned} 1876 &= 5 \cdot 365 + 51 \\ 365 &= 7 \cdot 51 + 8 \\ 51 &= 6 \cdot 8 + 3 \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Quindi $MCD\{1876, 365\} = 1$.
Adesso vogliamo trovare due numeri $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $1876x + 365y = 1$.
Un'identità del tipo $ax + by = MCD\{a, b\}$ si chiama **identità di Bézout**.
Dall'algoritmo di Euclide abbiamo:

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \cdot 1 \\ 2 &= 8 - 3 \cdot 2 \\ 3 &= 51 - 6 \cdot 8 \\ 8 &= 365 - 7 \cdot 51 \\ 51 &= 1876 - 5 \cdot 365 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{gathered} 1 = 3 - 2 = \\ = 3 - (8 - 3 \cdot 2) = 3 \cdot 3 - 8 \\ = 3 \cdot (51 - 8 \cdot 6) - 8 = 3 \cdot 51 - 8 \cdot 19 \\ = 3 \cdot 51 - 19(365 - 51 \cdot 7) \\ = 136 \cdot 51 - 19 \cdot 365 \\ = 136 \cdot (1876 - 365 \cdot 5) - 19 \cdot 365 \\ = 136 \cdot 1876 - 699 \cdot 365 \end{gathered}$$

Quindi $x = -699$ e $y = 136$.
In generale possiamo enunciare il seguente teorema:

Teorema: *siano $a, b \in \mathbb{N} \setminus 0$, se $a \mid b$, allora $a = MCD\{a, b\}$.*
se $a \nmid b$ e r è l'ultimo resto non nullo dell'algoritmo di Euclide, allora $r = MCD\{a, b\}$.
inoltre esistono $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $ax + by = MCD\{a, b\}$.

Dimostrazione: *Sia $I = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z}\}$ l'insieme dei multipli di a e b.*
Poiché I è un ideale di $\mathbb{Z}$, allora $I = n\mathbb{Z}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.
Poiché $a \in I$, allora $n \mid a$.
Poiché $b \in I$, allora $n \mid b$.
Quindi $n = MCD\{a, b\}$.
Inoltre, poiché $r \in I$, allora $r = ax + by$ per qualche $x, y \in \mathbb{Z}$.
Quindi $r = MCD\{a, b\}$.

fatta da copilot, controllare a pag 40 di "a concrete introduction to higher algebra" di Lindsay Childs

1.11 Equazioni diofantee lineari

sono equazioni del tipo $ax + by = c$, con $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

Proposizione: *siano $a, b, c \in \mathbb{Z}$.*
allora esistono $x, y \in \mathbb{Z}$ tali che $ax + by = c$ se e solo se $MCD\{a, b\} \mid c$.

Dimostrazione: *Se $ax + by = c$, allora $MCD\{a, b\} \mid c$.*
Viceversa, se $d := MCD\{a, b\} \mid c$, allora abbiamo un'identità di Bézout $ax + by = d$ $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.
se $d \mid c$ cioè se $c = d \cdot k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$, $a(kx) + b(ky) = kd = c$

Esempio: l'equazione diofantea:
$365x - 1876y = 24$ ha soluzione perchè $MCD\{365, 1876\} = 1$ e $1 \mid 24$.
Avevamo l'identità di Bézout $365(-699) - 1876(-136) = 1$, moltiplicando per 24 otteniamo
$365(-699 \cdot 24) - 1876(-136 \cdot 24) = 24$.
ossia una soluzione è $x = -699 \cdot 24$ e $y = -136 \cdot 24$.

Esempio: in $\mathbb{Z}_{1876}$ calcolare, se esiste, l'inverso moltiplicativo di $\overline{365}$.
abbiamo che $\overline{365} \cdot \overline{a} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_{1876}$
se e solo se esistono $a, b \in \mathbb{Z}$ t.c. $365 \cdot a = 1 + b \cdot 1876 \leftrightarrow 365 \cdot a - 1876 \cdot b = 1$.
una soluzione è $a = -699$ e $b = 136$, ossia $\overline{365}^{-1} = \overline{-699} = \overline{1177}$.

1.12 Morfismi di anelli

Definizione: *se $p \in \mathbb{N}$ è un numero primo, scriviamo $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}_p$;*
il campo $\mathbb{F}_p$ ha p elementi.

Definizione: *Siano A, B due anelli. Un'applicazione $f : A \to B$ è un* ***morfismo di anelli*** *se:*

- *$f : (A, +) \to (B, +)$ è un morfismo di gruppi.*
- *$f : (A, \cdot) \to (B, \cdot)$ è un morfismo di monoidi.*

Definizione: *il nucleo di un morfismo di anelli*
$f : A \to B$ è l'insieme $Ker(f) := \{a \in A : f(a) = 0\}$.

Osservazione: *$Ker(f)$ è un ideale di A, A anello commutativo.*

Esempio: sia $I \subseteq A$ un ideale di un anello commutativo A.
allora la proiezione canonica $\pi : A \to {}^{A}/_{I}$ che mappa $a \to [a]$
è un morfismo di anelli il cui nucleo è I.

Esempio: si consideri l'anello dei numeri complessi $\mathbb{C}$.
allora il coniugio $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$ è un morfismo di anelli da $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}$:
$\overline{1} = 1, \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

Teorema (di isomorfismo per anelli commutativi)***:*** *Sia $f : A \to B$*
un morfismo di anelli commutativi. Allora esiste un morfismo iniettivo di anelli
$\Psi : {}^{A}/_{Ker(f)} \to B$ tale che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & B \\ {}^{A}/_{Ker(f)} \arrow[ur, "\Psi"'] & \end{tikzcd}$$

in particolare, se f è suriettivo, allora Ψ è un isomorfismo di anelli.

Notazione: $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$. La classe di equivalenza $\overline{x}$ la scriveremo anche $x \mod n$.

Teorema (Teorema cinese dei resti)***:*** *siano* $n_1, n_2, ..., n_k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ *tali che* $MCD\{n_i, n_j\} = 1$ *per ogni* $1 \leq i, j \leq k, i \neq j$.
sia $n := n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$.
allora la funzione $\Psi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_k}$ *che mappa* $xmodn \to (xmodn_1, xmodn_2, ..., xmodn_k)$ *è un isomorfismo di anelli.*

Dimostrazione: *vediamo prima di tutto che* Ψ *è un morfismo di anelli dove* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_k}$. *è definita da* $f(x) = (xmodn_1, xmodn_2, ..., xmodn_k) \forall x \in \mathbb{Z}$.

- $f(a+b) = ((a+b)modn_1, ..., (a+b)modn_k)$
  $= (amodn_1 + bmodn_1, ..., amodn_k + bmodn_k)$
  $= (amodn_1, ..., amodn_k) + (bmodn_1, ..., bmodn_k)$
  $= f(a) + f(b), \forall a, b \in \mathbb{Z}$

- $f(1) = (1modn_1, ..., 1modn_k)$ *e* $(1modn_1, ..., 1modn_k)$ *è l'unità del prodotto diretto di anelli* $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_k}$

- $f(a \cdot b) = ((a \cdot b)modn_1, ..., (a \cdot b)modn_k)$
  $= (amodn_1 \cdot bmodn_1, ..., amodn_k \cdot bmodn_k)$
  $= (amodn_1, ..., amodn_k) \cdot (bmodn_1, ..., bmodn_k)$
  $= f(a) \cdot f(b), \forall a, b \in \mathbb{Z}$

ora mostriamo che f *è suriettivo:*
sia $(a_1modn_1, ..., a_kmodn_k) \in \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_k}$
osserviamo che $MCD\{n_i, n_1n_2...n_{i-1}n_{i+1}...n_k\} = 1, \forall 1 \leq i \leq k$.
quindi abbiamo le identità di Bézout: $c_in_i + b_i\frac{n}{n_i} = 1$ *ossia*
$u_i + v_i = 1$ *dove* $u_i = c_in_i \in < n_i >$ *e* $v_i = b_i\frac{n}{n_i} \in < \frac{n}{n_i} >$.
diefiniamo $x := a_1v_1 + ... + a_kv_k$ *e abbiamo che* $f(x) = (a_1modn_1, ..., a_kmodn_k)$.
infatti $v_imodn_j = \begin{cases} 0 & se\ i \neq j \\ 1 & se\ i = j \end{cases}$
dal teorema di isomorfismo abbiamo che $\mathbb{Z}/_{Ker(f)} \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_k}$ *come anelli.*
ma abbiamo che $Ker(f) =< n_1 > \cap < n_2 > \cap ... \cap < n_k >$
$=< mcm\{n_1, ..., n_k\} >=< n_1n_2...n_k >$ *dato che* n_i *e* n_j *sono coprimi* $\forall i \neq j$.
quindi $\mathbb{Z}/_{Ker(f)} = \mathbb{Z}/_{<n>} = \mathbb{Z}_n$ *e l'isomorfismo* $\Psi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{n_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{n_k}$
è quello dell'enunciato del teorema.

Esempio: siano $n_1 = 3, n_2 = 7en_3 = 10$. Allora $n := n_1n_2n_3 = 210$
e abbiamo l'isomorfismo di anelli $\mathbb{Z}_{210} \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{10}$.
sia $(2mod3, 5mod7, 4mod10) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{10}$, questa terna corrisponde ad un elemento $xmod210 \in \mathbb{Z}_{210}$ che soddisfa il sistema

$$\begin{cases} x \mod 3 = 2 \mod 3 \\ x \mod 7 = 5 \mod 7 \\ x \mod 10 = 4 \mod 10 \end{cases}$$

la dimostrazione del teorema cinese dei resti ci dice come trovare x.
$x = 2v_1 + 5v_2 + 4v_3$ dove se $3a + 70b = 1, 7a + 30b = 1$ e $10a + 21b = 1$ sono identità di Bézout, allora $v_1 = 70b, v_2 = 30b = 30, v_3 = 21b$

$$\begin{gathered} 3a + 70b = 1 \to a = -23, b = 1 \to v_1 = 70 \\ 7a + 30b = 1 \to 30 = 4 \cdot 7 + 2, 7 = 3 \cdot 2 + 1 \\ \to 1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 3(30 - 4 \cdot 7) = \\ 13 \cdot 7 - 3 \cdot 30 = 91 - 90 = 1 \to a = 13, b = -3 \to v_2 = -3 \cdot 30 \\ 10a + 21b = 1 \to a = -2, b = 1 \to v_3 = 21 \end{gathered}$$

quindi $x = 2 \cdot 70 - 5 \cdot 3 \cdot 30 + 4 \cdot 21 = 194 \mod 210$

Corollario: Sia $U(\mathbb{Z}_n)$ il gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_n$.
sia $n := n_1...n_k$ dove $MCD\{n_i, n_j\} = 1 \forall 1 \leq i, j \leq k, i \neq j$.
e $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \forall 1 \leq i \leq k$.
allora come i gruppi $U(\mathbb{Z}_n) \simeq U(\mathbb{Z}_{n_1}) \times ... \times U(\mathbb{Z}_{n_k})$

Dimostrazione: *l'isomorfismo Ψ del teo. cinese dei restti, ristretto a $U(\mathbb{Z}_n)$ dà un isomorfismo di gruppi*

Poiché un elemento $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ è invertibile s.s.e. esiste un'identità di Bézout $ax + bn = 1$ abbiamo che $\overline{x}$ è invertibile s.s.e. $MCD\{x, n\} = 1$.
Quindi $|U(\mathbb{Z}_n)| = \varphi(n)$, con φ funzione di Eulero.

dal precedente Corollario e da questo segue un altro Corollario:
Corollario: Sia $\varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la funzione φ di Eulero.
siano $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che $MCD\{x, y\} = 1$, allora $\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.

Dimostrazione: *dal Corollario precedente abbiamo che $U(\mathbb{Z}_{xy}) \simeq U(\mathbb{Z}_x) \times U(\mathbb{Z}_y)$ come i gruppi, quindi:*

$$\varphi(xy) = |U(\mathbb{Z}_{xy})| = |U(\mathbb{Z}_x) \times U(\mathbb{Z}_y)| = |U(\mathbb{Z}_x)| \cdot |U(\mathbb{Z}_y)| = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Esempio: siano $n_1 = 3, n_2 = 7 e n_3 = 10$. Allora $n := n_1 n_2 n_3 = 210$
e abbiamo l'isomorfismo di anelli $\mathbb{Z}_{210} \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{10}$.
sia $(2 mod 3, 5 mod 7, 4 mod 10) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{10}$, questa terna corrisponde ad un elemento $x mod 210 \in \mathbb{Z}_{210}$ che soddisfa il sistema

$$\begin{cases} x \mod 3 = 2 \mod 3 \\ x \mod 7 = 5 \mod 7 \\ x \mod 10 = 4 \mod 10 \end{cases}$$

la dimostrazione del teorema cinese dei resti ci dice come trovare x.
$x = 2v_1 + 5v_2 + 4v_3$ dove se $3a + 70b = 1, 7a + 30b = 1$ e $10a + 21b = 1$ sono identità di Bézout, allora $v_1 = 70b, v_2 = 30b = 30, v_3 = 21b$

$$\begin{gathered} 3a + 70b = 1 \to a = -23, b = 1 \to v_1 = 70 \\ 7a + 30b = 1 \to 30 = 4 \cdot 7 + 2, 7 = 3 \cdot 2 + 1 \\ \to 1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 3(30 - 4 \cdot 7) = \\ 13 \cdot 7 - 3 \cdot 30 = 91 - 90 = 1 \to a = 13, b = -3 \to v_2 = -3 \cdot 30 \\ 10a + 21b = 1 \to a = -2, b = 1 \to v_3 = 21 \end{gathered}$$

quindi $x = 2 \cdot 70 - 5 \cdot 3 \cdot 30 + 4 \cdot 21 = 194 \mod 210$

Corollario: Sia $U(\mathbb{Z}_n)$ il gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_n$.
sia $n := n_1 ... n_k$ dove $MCD\{n_i, n_j\} = 1 \forall 1 \leq i, j \leq k, i \neq j$.
e $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \forall 1 \leq i \leq k$.
allora come i gruppi $U(\mathbb{Z}_n) \simeq U(\mathbb{Z}_{n_1}) \times ... \times U(\mathbb{Z}_{n_k})$

Dimostrazione: *l'isomorfismo Ψ del teo. cinese dei restti, ristretto a $U(\mathbb{Z}_n)$ dà un isomorfismo di gruppi*

Poiché un elemento $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ è invertibile s.s.e. esiste un'identità di Bézout $ax + bn = 1$ abbiamo che $\overline{x}$ è invertibile s.s.e. $MCD\{x, n\} = 1$.
Quindi $|U(\mathbb{Z}_n)| = \varphi(n)$, con φ funzione di Eulero.

dal precedente Corollario e da questo segue un altro Corollario:
Corollario: Sia $\varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la funzione φ di Eulero.
siano $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che $MCD\{x, y\} = 1$, allora $\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.

Dimostrazione: *dal Corollario precedente abbiamo che $U(\mathbb{Z}_{xy}) \simeq U(\mathbb{Z}_x) \times U(\mathbb{Z}_y)$ come i gruppi, quindi:*

$$\varphi(xy) = |U(\mathbb{Z}_{xy})| = |U(\mathbb{Z}_x) \times U(\mathbb{Z}_y)| = |U(\mathbb{Z}_x)| \cdot |U(\mathbb{Z}_y)| = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Come conseguenza del corollario precedente otteniamo una formula per calcolare la funzione φ di Eulero.
Se p è un numero primo, allora ci sono p^k numeri $1 \leq n \leq p^k$.
Di questi numeri $p, 2p, ..., p^{k-1}p$ hanno fattori comuni con p^k e quindi

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

se $n = p^{k_1}...p^{k_s}$ per il corollario precedente ($n > 1$):
$\varphi(n) = \varphi(p_1^{k_1}...\varphi(p_s^{k_s}) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})...(p_s^{k_s} - p_s^{k_s-1}) = p_1^{k_1}...p_s^{k_s} \prod_{p|n,pprimo}(1 - \frac{1}{p}) =$
$= n \prod_{p|n,pprimo}(1 - \frac{1}{p})$.

***Teorema** (di Eulero):* *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,\}$ ed $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $MCD\{a, n\} = 1$.*
allora $\overline{a^{\varphi(n)}} = \overline{1} \in \mathbb{Z}_n$. (diciamo che $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$)

Dimostrazione: *sappiamo che la cardinalità del gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_n$ è $\varphi(n)$.*
Sia $< \overline{a} > \subseteq U(\mathbb{Z}_n)$ il sottogruppo generato da $\overline{a} in U(\mathbb{Z}_n)$. allora $| < \overline{a} > |$ divide $\varphi(n)$, ossia $\varphi(n) = k| < \overline{a} > |$, per qualche $k \in \mathbb{N}$. Sia $c := | < \overline{a} > |$;
abbiamo che $= \overline{1} = \overline{a}^c = (\overline{a^c})^k = \overline{a^{ck}} = \overline{a^{\varphi(n)}}$.

Corollario:(piccolo teorema di Fermat) Sia p un numero primo e $a \in \mathbb{N}$.
allora in $\mathbb{Z}_p$ abbiamo che $\overline{a} = \overline{a^p}(a^p \equiv a \mod p)$.

Dimostrazione: *se p è primo si ha che $\varphi(p) = p - 1$. allora dal Teo. di Eulero segue che, se $a \neq 0, p \nmid a$, $a^{varphi(p) \equiv 1 \mod p} \implies a^{p-1} \equiv 1 \mod p \implies a^p \equiv a \mod p$.*
se $a = 0 o p|a$ l' uguaglianza si riduce a $\overline{0} = \overline{0}$.

1.13 Caratteristica di un anello

sia A un anello. il sottogruppo $< 1_A > \subseteq (A, +)$è un gruppo ciclico.
quindi esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $< 1_A > \simeq \mathbb{Z}_n$. n è detto la caratteristica dell'anello A.

Esempio: la caratteristica di $\mathbb{Z}$ è 0, infatti $< 1 >= \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_0$.
la caratteristica degli anelli $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ è sempre 0 poiché $< 1 >= \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_0$ in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Esempio: sia $n \in \mathbb{N}$ allora la caratteristica dell'anello $\mathbb{Z}_n$ è n.
infatti $< \overline{1} >= \mathbb{Z}_n$, rispetto all'operazione $+$

indichiamo con $CHAR(A)$ la caratteristica di un anello A.

Definizione: *sia A un anello e sia $< 1_A >$ il sottogruppo di (A,+) generato da 1_a.
l'intersezione di tutti i sottoanelli di A contenenti $< 1_a >$
si chiama **sottoanello fondamentale di A**.*

Esempio: il sottoanello fondamentale di $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ è $\mathbb{Z}$

Definizione: *sia K un campo
l'intersezione di tutti i sottocampi di K contenenti il gruppo $< 1_k > \subseteq (K, +)$ si chiama **sottocampo fondamentale di K**.*

Esempio: il sottocampo fondamentale di $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ è $\mathbb{Q}$.
se $p \in \mathbb{N}$ è primo, il sottocampo fondamentale di $\mathbb{F}_p$ è $\mathbb{F}_p$ perché $< \overline{1} >= \mathbb{F}_p$.

1.14 Anello dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in un campo

Sia K un campo. una funzione $f : \mathbb{N} \to K$ si chiama **successione a valori in** K.
ad una successione a valori in K corrisponde una serie formale nella variabile x su K:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

se l'insieme $\{m \, in \mathbb{N} : f(n) \neq 0\}$ è finito diciamo che la serie formale è un polinomio in x di grado $deg(P) := MAX\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq 0\}$.
il grado del poliniomio 0 non è definito.
l'insieme dei polinomi in x a coefficienti in K si indica con $K[x]$ ed è un anello commutativo con le operazioni:

- somma: $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n) + (\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)X^n$
- prodotto: $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n) = \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k})X^n$

l'unità di $K[x]$ è il polinomio 1_k.

Esempio: in $\mathbb{F}_2[x]$ siano $P := 1 + X^2 + X^3$ e $Q := X + X^2$.
allora $P + Q = 1 + X + X^2 + X^3$ e $P \cdot Q = X + X^2 + X^3 + X^5$

Proposizione: *siano $P, Q \in K[x]$ polinomi non nulli. allora il grado del prodotto $P \cdot Q$ è $deg(P) + deg(Q)$.*
in particolare $K[x]$ è un dominio di integrità.

Definizione: *un polinomio si dice **monico** se il coefficiente del termine di grado massimo è 1.*

Definizione: *sia K un campo. un polinomio $P \in K[x]$ si dice **irriducibile** se i suoi unici divisori sono del tipo a, aP con $a \in K \setminus \{0\}$.*
*altrimenti si dice **riducibile**.*

Esempio: in $\mathbb{F}_2[X]$ il polinomio $X^2 + 1$ è irriducibile, infatti:
$X^2 + 1 = (X + 1)^2$, quindi $X + 1$ divide $X^2 + 1$ e $X + 1 \notin K \setminus \{0\}$.

Esempio: in $K[X]$ ogni polinomio di grado 1 è irriducibile, infatti:
se $deg(P) = 1$ allora $P = aX + b$ con $a, b \in K, a \neq 0$.
i suoi divisori sono c e $c^{-1}(aX + b), c \in K \setminus \{0\}$.

Definizione: *sia $\alpha \in K$. l'elemento α è detto **radice** del polinomio $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in K[X]$ se $P(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n = 0$.*

anche nell'anello $K[X]$ come in $\mathbb{Z}$ abiamo un algoritmo di divisione Euclidea.
se $f(X), g(X) \in K[X]$ sono polinomi non nulli allora esistono unici polinomi $q(X), r(X) \in K[X]$ tali che:
$f(X) = q(X) \cdot g(X) + r(X)$ e $r(X) = 0$ oppure $deg(r) < deg(g)$.
$q(X)$ si chiama **quoziente** e $r(X)$ si chiama **resto** della divisione.
ne segue il seguente teorema, dimostrato come in $\mathbb{Z}$:

Teorema: *l'anello $K[X]$ è a ideali principali.*
se $I =< p(X) >$ allora esiste un unico generatore monico di I.

Definizione: *definiamo il **massimo comune divisore** di due polinomi $f(X), g(X) \in K[X]$ come l'unico massimo comune divisore monico.*

Come in $\mathbb{Z}$ possiamo trovarlo con l'algoritmo delle divisioni successive che dà anche un identità di Bézout.

Esempio: $f(X) = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$ e $g(X) = X^2 - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$, allora:

$$f(X) = g(X)(X^2 - 3) + (X - 2)$$
$$g(X) = (X - 2)(X + 1) + 1 \implies MCD(f, g) = 1$$

inoltre

$$1 = g(X) - (X - 2)(X + 1) + 1 = g(X) - [f(X) - g(X)(X^2 - 3)](X + 1) =$$
$$= -(X - 1)f(X) + (X^3 + X^2 - 3X - 2)g(X).$$

proprietà: sia K un campo e $P(X) \in K[X]$ un poliniomio irriducibile.
allora l'anello quoziente ${}^{K[X]}/_{< P(X) >}$ è un campo.

Dimostrazione: *sia $[f]$ in${}^{K[X]}/_{< P(X) >}$ tale che $[p] \neq [0]$ ossia $p(X)$ non divide $f(X)$.*
Dunque $MCD\{f(X), p(X)\} = 1$ perchè $p(X)$ è irriducibile.
quindi abbiamo un'identità di Bézout $a(X)f(X) + b(X)p(X) = 1$.
ossia $[a(X)] = [f(X)]^{-1}$ in ${}^{K[X]}/_{< P(X) >}$.

Esempio: in $\mathbb{F}_2[X]$ il polinomio $P(X) = 1 + X + X^2$ è irriducibile.
infatti non ha radici in $\mathbb{F}_2$.
quindi l'anello ${}^{\mathbb{F}_2[X]}/_{< 1 + X + X^2 >}$ è un campo, che chiamiamo $\mathbb{F}_4$.
un elemento di $\mathbb{F}_4$ è della forma $a_0 + a_1X$ con $a_0, a_1 \in \mathbb{F}_2$.
la tavola moltiplicativa è la seguente:

$\cdot$	0	1	X	1 + X
0	0	0	0	0
1	0	1	X	1 + X
X	0	X	1 + X	1
1 + X	0	1 + X	1	X

l'inverso di X è $1 + X$.

Esempio: in $\mathbb{F}_3[X]$ il polinomio $P(X) = 1 + X^2$ è irriducibile.
indichiamo con $\mathbb{F}_9$ il campo$\mathbb{F}_3[X]/<1+X^2>$.
un elemento di $\mathbb{F}_9$ è della forma $a_0 + a_1 X$ con $a_0, a_1 \in \mathbb{F}_3$ quindi sono 9.
la tavola moltiplicativa è la seguente:

·	0	1	2	X	1 + X	2 + X	2X	1 + 2X	2 + 2X
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	X	1 + X	2 + X	2X	1 + 2X	2 + 2X
2	0	2	1	2X	2 + 2X	1 + 2X	X	2 + X	1 + X
X	0	X	2X	2	2 + X	2 + 2X	1	1 + X	1 + 2X
1 + X	0	1 + X	2 + 2X	2 + X	2X	1	1 + 2X	2	X
2 + X	0	2 + X	1 + 2X	2 + 2X	1	X	1 + X	2X	2
2X	0	2X	X	1	1 + 2X	1 + X	2	2 + 2X	2 + X
1 + 2X	0	1 + 2X	2 + X	1 + X	2	2X	2 + 2X	X	1
2 + 2X	0	2 + 2X	1 + X	1 + 2X	X	2	2 + X	1	2X

l'inverso di X è 2.

Teorema (di Ruffini)***:*** *sia $f(X) \in K[X]$ un polinomio non nullo.*
se $\alpha \in K$, il resto della divisione di $f(X)$ per $X - \alpha$ è $f(\alpha)$,
in particolare α è una radice di $f(X)$ s.s.e. $X - \alpha$ divide $f(X)$ in $K[X]$.

Dimostrazione: *$f(X) = (X - \alpha)q(X) + r(X)$ con $r(X) = 0$ oppure $deg(r(X)) < 1$.*
quindi $r(X)$ è un polinomio costante, $r(X) = x \in K$.
calcolando in α otteniamo $f(\alpha) = c$.

Esempio: il polinomio $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ non ha radici in $\mathbb{R}$
quindi è irriducibile e $\mathbb{R}[X]/<X^2+1>$ è un campo isomorfo a $\mathbb{C}$,
dove l'isomorfismo è dato dall'assegnazione $1 \to 1$ e $x \to i$

enunciamo il seguente importante risultato, senza fornire la dimostrazione. (vedi proposizione 4.3.5 di "Teoria delle equazioni e teoria di Galois" - S.Gabelli).

Proposizione: *se K è un campo, ogni sottogruppo finito del gruppo moltiplicativo $K \setminus \{0\}$ è ciclico. in particolare, se K è un campo finito, $K \setminus \{0\}$ è un gruppo ciclico.*

Esempio:
- in $\mathbb{F}_4 = {}^{\mathbb{F}_2}/_{<1+X+X^2>}$ si ha che $\{X, X^2, X^3\} = \{X, 1+X, 1\} = \mathbb{F}_4 \setminus \{0\}$ quindi X è un generatore del gruppo moltiplicativo $\mathbb{F}_4 \setminus \{0\}$, l'altro è $1+X$

- in $\mathbb{F}_9 = {}^{\mathbb{F}_3}/_{<1+X^2>}$ abbiamo:
  $<X>= \{X, X^2, X^3, X^4\} = \{X, 2, 2X, 1\}$
  $<1+X>= \{1+X, (1+X)^2, (1+X)^3, (1+X)^4, (1+X)^5, (1+X)^6, (1+X)^7, (1+X)^8\} =$
  $= \{1+X, 2X, 1+2X, 2, 2+2X, X, 2+X, 1\}$
  $= \mathbb{F}_9 \setminus \{0\}$ quindi $1+X$ genera il gruppo moltiplicativo.

Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero prima e sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
sia $Q(X), \mathbb{F}_p[X]$ un qualsiasi polinomio irriducibile di grado n.
definiamo il campo

$$\mathbb{F}_{p^n} = {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<Q(X)>}$$

vogliamo ora mostrare che se $Q(X), Q'(X) e \mathbb{F}_p[X]$ sono polinomi irriducibili di grado n,
allora

$${}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<Q(X)>} \simeq {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<Q'(X)>}, \text{ isomorfismo tra campi}$$

quindi la definizione di $\mathbb{F}_p$ è ben posta, a meno di isomorfismi.

Definizione: *siano $F \subseteq K$ due campi (ampliamento di campi).
un elemento $\alpha \in K$ si dice <u>algebrico</u> su F se è radice di qualche polinomio non nullo su $f(X) \in F(X)$, altrimenti si dice <u>trascendente</u> su F.*

dato un ampliamento di campi $F \subseteq K$ e $\alpha \in K$, si consideri il morfismo di anelli

$$v_\alpha : F[X] \to K$$
$$f(X) \to f(\alpha).$$

$Ker(v_\alpha)$ è l'ideale di $F[X]$ costituito dai polinomi che si annullano in α.
quindi α è algebrico su F s.s.e. $Ker(v_\alpha)$ è un ideale non nullo di $F[X]$.
poiche $F[X]$ è ad ideali principali, $ker(v_\alpha) =< m(X) >$
dove $m(X)$ è l'unico polinomio monico di grado minimo in $Ker(v_\alpha)$.

Definizione: *se $\alpha \in K$ è algebrico su F, il polinomio $m(X)$ definito sopra si chiama **polinomio minimmo di α su F**, se $deg(m(X)) = n$, α si dice algebrico di grado n*

Nota: sia $\alpha \in K$ e $P(X) \in F[X] \setminus \{0\})$ tale che $p(\alpha) = 0$,
allora $p(X)$ è il polinomio minimo di α su F s.s.e. $p(X)$ è monico e irriducibile.

Esempio: si consideri l'ampliamento $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. allora $1 + X^2 \in \mathbb{R}[X]$
è il polinomio minimo di $i \in \mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$.

Proprietà: sia $F \in K$ un ampliamento di campi e $\alpha \in K$.
si consideri il morfismo di anelli $v_\alpha : F[X] \to K$.
allora $Im(v_\alpha)$ è il più piccolo sottoanello di K contenente sia F che α

Dimostrazione: *si osservi che l'immagine di un morfismo di anelli è un sottoanello. di conseguenza $Im(v_\alpha)$ è un sottoanello di K.*
sia $c \in F$ e si consideri il polinomio costante $c \in F[X]$. allora $v_\alpha(c) = c$.
quindi $F \subseteq Im(v_\alpha)$ e $v_\alpha(X) = \alpha \implies \alpha \in Im(v_\alpha)$
d'altra parte per chiusura aditiva e moltiplicativa,
ogni sottoanello di K contenete sia F che α contiene anche $Im(v_\alpha)$.

Proposizione: *sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in K$.*
il più piccolo sottocampo di K contenente sia F che α si chiama ***ampliamento di F in K generato da*** *α e si indica con **F(α)** tale ampliamento si dice* ***semplice*** *(poichè generato da un solo elemento)*

da questa proposizione segue questo Corollario:

Corollario: sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in K$.
allora $F(\alpha) = \{f(\alpha)g(\alpha)^{-1} : f(X), g(X) \in F[X], g(\alpha) \neq 0\}$.

Dimostrazione: *per la proposizione precedente*
il più piccolo sottoanello di K contenente sia F che α è $Im(v_\alpha = \{f(\alpha) : f(X) \in F[X]\})$.
prendendo gli inversi in K si ottiene la tesi.

se $\alpha \in K$ è algebrico su F si ha che $Im(v_\alpha \simeq {}^{F[X]}/_{< m(X) >})$,
dove $m(X)$ è il polinomio minimo di α. quindi $Im(v_\alpha)$ è un campo e $F(\alpha) = Im(v_\alpha)$.
se n è il grado di α si ha quindi:

$$F(\alpha) = \{c_0 + c_1\alpha + ... + c_{n-1}\alpha^{n-1} : c_i \in F\}$$

Esempio: si consideri l'ampliamento $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. l'elemento $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è akgebrico su $\mathbb{Q}$ con polinomio minimo $X^2 - 2$. quindi $\sqrt{2}$ ha grado 2 su $\mathbb{Q}$ e

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{c_0 + c_1\sqrt{2} : c_0, c_1 \in \mathbb{Q}\}).$$

adesso mostriamo che il campo $\mathbb{F}_{p^n}$ è un ampliamento semplice di $\mathbb{F}_p$

Proposizione: *sia $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}$ un generatore del campo moltiplicativo $\mathbb{F}_{p^n} \setminus \{0\}$.*
allora $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p(\alpha)$.

Dimostrazione: *$\mathbb{F}_p(\alpha)$ è il più piccolo sottocampo di $\mathbb{F}_{p^n}$ contenente sia $\mathbb{F}_p$ che α quindi $\mathbb{F}_p(\alpha) \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$. Poiché α genera il gruppo moltiploicativo $\mathbb{F}_{p^n} \setminus \{0\}$ anche $\mathbb{F}_{p^n} \subseteq \mathbb{F}_p(\alpha)$*

Ora, se $P(X), Q(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ sono due polinomi irriducibili di grado n, vogliamo costruire un isomorfismo

$$f : {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{< P(X) >} \longrightarrow {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{< Q(X) >}$$

ci serve il seguente risultato:

Proposizione: *siano $F \subseteq K$ e $F \subseteq K'$ due ampliamenti di campi.*
se $\alpha \in K$ è algebrico di grado n su F, con polinomio minimo $m(x)$,
esiste un morfismo di campi $\varphi : F(\alpha) \to K'$ che fissa F in K'.
in questo caso i morfismi φ sono tanti quante le radici distinte $\beta_1, ..., \beta_s$ di $m(X)$ in K'.
sono tutti e soli quelli definiti da:

$$c_0 + c_1\alpha + ... + c_{n-1}\alpha^{n-1} \to c_0 + c_1\beta_i + ... + c_{n-1}\beta_i^{n-1}$$

Dimostrazione: *se α è algebrico di grado n su F con polinomio minimo $m(X)$*
e $\varphi : F(\alpha) \to K'$ è isomorfismo, allora $0 = \varphi(0) = \varphi(m(\alpha)) = m(\varphi(\alpha))$
quindi $\varphi(\alpha)$ deve essere radice di $m(X)$ in K'.
viceversa, sia β una radice di $m(X)$ in K' e consideriamo il morfismo di anelli

$$v_\beta : F[X] \to K'$$
$$f(X) \to f(\beta)$$

poiché $m(X) \in Ker(v_\beta)$, dal Teorema di isomorfismo per anelli
abbiamo che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} F[X] \arrow[r, "v_\beta"] \arrow[d, "\pi"] & K' \\ F(\alpha) \simeq {}^{F[X]}/_{< m(X) >} \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

infatti $Ker(v_\beta) =< m(X) >$, essedo $m(X)$ irriducibile.
quindi abbiamo trovato un morfismo iniettivo $\varphi : F(\alpha) \to K'$ che soddisfa le proprietà dell'enunciato.

sia F un campo e $f(X) \in F[X]$ un polinomio di grado $n \geq 1$.
un campo K, ampliamento di F, si dice **campo di spezzamento di f(X) su F** se:

- $f(X)$ fattorizza in polinomi di grado 1 su $K[X]$
- non ci sono campi intermedi $F \subseteq L \subsetneq K$ con la stessa proprietà.

Esempio: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ è un campo di spezzamenro di $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.
$\mathbb{C}$ è un campo di spezzamenro di $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

Ora vogliamo mostrare che un campo che ha cardinalità p^n
è un campo di spezzamento del polinomio $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$.
infatti se K è un campo e $|K| = p^n$, allora il suo gruppo moltiplicativo $K \setminus \{0\}$ ha cardinalità $p^n - 1$
e quindi oer ogni $\alpha \in K \setminus \{0\}$ si ha $\alpha^{p^n-1} = 1$.
quindi ogni elemento di K è radice del polinomio $X^{p^n} - X$.
per il teorema di Ruffini, K è un campo di spezzamento di $X^{p^n} - X$.
Adesso mostriamo che ogni poliniomio di grado n irriducibile in $\mathbb{F}_p[X]$
divide $X^{p^n} - X \ \in \mathbb{F}_p[X]$.

Proposizione: *tutti e soli i polinomi irriducibili su $\mathbb{F}_p$ di grado n dividono $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$.*

Dimostrazione: *sia $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ irriducibile di grado n e sia $K := {}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{<P(Y)>}$.*
allora K ha p^n elementi che sono le radici di $X^{p^n} - X \in K[X]$.
poichè $Y \in K$ è una radice $P(X) \in K[X]$, $P(X) e X^{p^n} - X$ hanno una radice in comune in K,
allora per il teorema di Ruffini hanno un fattore comune $X - Y in K[X]$.
quindi, poiché $\mathbb{F}_p \subseteq K$ e MCD in $\mathbb{F}_p$ = MCD in $K[X]$
$\implies P(X), X^{p^n} - X$ *hanno MCD $\neq 1$ in $\mathbb{F}_p[X]$.*
poiché $P(X)$ è irriducibile in $\mathbb{F}_p[X]$, $P(X)$ divide $X^{p^n} - X$.

adesso vogliamo costruire un isomorfismo di campi

$$f : {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<P(X)>} \longrightarrow {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<Q(X)>}$$

dove $P(X), Q(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ sono monici irriducibili di grado n.
basta costruire un isomorfismo di anelli.
Infatti un morfismo di anelli che sono campi è iniettivo. Inoltre:

$$\left|{}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<P(X)>}\right| = \left|{}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<Q(X)>}\right| = p^n$$

quindi tale morfismo è biunivoco, ossia è isomorfismo.

Si ha che, se $y \in {}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{<P(Y)>}$ allora $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ è il polinomio minimo di y su $\mathbb{F}_p$.
quindi, se $P(X)$ ha una radice in ${}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{<Q(Y)>}$,
possiamo usare la proposizione sull'estensione di morfismi di campi per definire
il morfismo f, che sarà un isomorfismo. Infatti $\mathbb{F}_p \subseteq {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<Q(X)>}$.
Inoltre ${}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<P(X)>} = \mathbb{F}_p([X])$, dove $[X]$ è la classe di X in ${}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<P(X)>}$.
poiché ${}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{<Q(Y)>}$ è un campo di spezzamento di $X^{p^n} - X$ e $P(X)$ divide $X^{p^n} - X$,
allora $P(X)$ si fattorizza in fattori di grado 1 in ${}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{<Q(Y)>}$.

sia $\beta \in {}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{<Q(Y)>}$ tale che $p(\beta) = 0$.
allora l'assegnazione

$$c_0 + c_1 x + ... + c_{n-1} x^{n-1} \to c_0 + c_1 \beta + ... + c_{n-1} \beta^{n-1}$$

definisce un morfismo di anelli

$$f : {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<P(X)>} \to {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<Q(X)>}$$

Esempio: in $\mathbb{F}_3[X]$ si considerino i polinomi irriducibili

$$1 + X^2 \text{ e } 2 + X + X^2.$$

il polinomio minimo di X in $\mathbb{F}_3[X]/_{< 1 + X^2 >} := K$ su $\mathbb{F}_3$ è $1 + X^2$.
in $K' := \mathbb{F}_3[Y]/_{< 1 + Y + Y^2 >}$ si ha che

$$1 + X^2 = (X + Y + 2)(X + 2Y + 1)$$

quindi in $K'[X], 1 + X^2$ ha due radici:

$$-Y - 2 = 2Y + 1 \text{ e } -2Y - 1 = y + 2.$$

abbiamo quindi due isomorfismi

$$\begin{gathered} f : K \to K' \\ a_0 + a_1 x \to a_0 + a_1(2Y + 1) \\ g : K \to K' \\ a_0 + a_1 x \to a_0 + a_1(Y + 2) \end{gathered}$$

$f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$f(2) = 2$
$f(X) = 2Y + 1$
$f(1 + X) = f(1) + f(X) = 2Y + 2$
$f(2 + X) = f(2) + f(X) = 2Y$
$f(2X) = f(2)f(X) = 2f(X) = y + 2$
$f(1 + 2X) = f(1) + f(2X) = Y$
$f(2 + 2X) = f(2) + f(2X) = y + 1$

$g(0) = 0$
$g(1) = 1$
$g(2) = 2$
$g(X) = Y + 2$
$g(1 + X) = g(1) + g(X) = Y$
$g(2 + X) = g(2) + g(X) = Y + 1$
$g(2X) = g(2)g(X) = 2g(X) = 2Y + 1$
$g(1 + 2X) = g(1) + g(2X) = 2Y + 2$
$g(2 + 2X) = g(2) + g(2X) = 2Y$

Osservazione: *$X \in K$ non è un generatore di $K \setminus \{0\}$.*
infatti il sottogruppo del gruppo moltiplicativo $K \setminus \{0\}$ generato da X è
$< X >= \{X, 2, 2X, 1\} \subsetneq K \setminus \{0\}$

Lemma: se K è un anello commutativo di caratteristica prima p, allora

$$(X+Y)^{p^h} = X^{p^h} + Y^{p^h}$$

per ogni $x, y \in K, h \geq 1$.

Dimostrazione: *sia $h = 1$. se $p > k > 0$, p divide tutti i coefficienti binomiali $\binom{p}{k} := \frac{p!}{k!(p-k)!}$ perché non divide $k!(p-k)!$.*
allora $(X+Y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k Y^{p-k} = X^p + Y^p$.
la tesi segue per induzione.

Automorfismo di Frobenius:
Dal lemma precedente segue che se K è un campo di caratteristica p, allora la funzione

$$\begin{aligned} \Phi : K \to K \\ x \to x^p \end{aligned}$$

è un morfismo di campi. infatti
$\Phi(x+y) = (x+y)^p = x^p + y^p = \Phi(x) + \Phi(y)$
$\Phi(xy) = (xy)^p = x^p y^p = \Phi(x)\Phi(y)$
$\forall x, y \in K$.
se $K = \mathbb{F}_{p^n}, \Phi$ è un automorfismo
(essendo morfismo initettivo da un campo di cardinalità finita in se stesso)
detto **automorfismo di Frobenius**.

Teorema: *il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{F}_{p^n}, AUT(\mathbb{F}_p^n)$ è ciclico di cardinalità n, generato dall'automorfismo di Frobenius.*

Dimostrazione: *vedi teorema 4.3.17 del libro di Stefania Gabelli.*

Lemma: sia F un campo. Il polinomio $X^d - 1$ divide il polinomio $X^n - 1$ s.s.e. d divide n.

Dimostrazione: *se $n = qd + r, 0 \leq r \leq d$, in $\mathbb{F}[X]$ si ha:*

$$(x^n - 1) = (X^d - 1)(X^{n-d} + X^{n-2d} + ... + x^{n-(p-1)d} + X^r) + (X^r - 1).$$

quindi $X^d - 1$ divide $X^n - 1$ s.s.e. $X^r - 1$ è il polinomio nullo, cioè s.s.e. $r = 0$

Esempio: siano $n_1 = 3, n_2 = 7en_3 = 10$. Allora $n := n_1n_2n_3 = 210$
e abbiamo l'isomorfismo di anelli $\mathbb{Z}_{210} \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{10}$.
sia $(2mod3, 5mod7, 4mod10) \in \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{10}$, questa terna corrisponde ad un elemento $xmod210 \in \mathbb{Z}_{210}$ che soddisfa il sistema

$$\begin{cases} x \mod 3 = 2 \mod 3 \\ x \mod 7 = 5 \mod 7 \\ x \mod 10 = 4 \mod 10 \end{cases}$$

la dimostrazione del teorema cinese dei resti ci dice come trovare x.
$x = 2v_1 + 5v_2 + 4v_3$ dove se $3a + 70b = 1, 7a + 30b = 1$ e $10a + 21b = 1$ sono identità di Bézout, allora $v_1 = 70b, v_2 = 30b = 30, v_3 = 21b$

$$\begin{gathered} 3a + 70b = 1 \to a = -23, b = 1 \to v_1 = 70 \\ 7a + 30b = 1 \to 30 = 4 \cdot 7 + 2, 7 = 3 \cdot 2 + 1 \\ \to 1 = 7 - 3 \cdot 2 = 7 - 3(30 - 4 \cdot 7) = \\ 13 \cdot 7 - 3 \cdot 30 = 91 - 90 = 1 \to a = 13, b = -3 \to v_2 = -3 \cdot 30 \\ 10a + 21b = 1 \to a = -2, b = 1 \to v_3 = 21 \end{gathered}$$

quindi $x = 2 \cdot 70 - 5 \cdot 3 \cdot 30 + 4 \cdot 21 = 194 \mod 210$

Corollario: Sia $U(\mathbb{Z}_n)$ il gruppo degli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}_n$.
sia $n := n_1...n_k$ dove $MCD\{n_i, n_j\} = 1 \forall 1 \leq i, j \leq k, i \neq j$.
e $n_i \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \forall 1 \leq i \leq k$.
allora come i gruppi $U(\mathbb{Z}_n) \simeq U(\mathbb{Z}_{n_1}) \times ... \times U(\mathbb{Z}_{n_k})$

Dimostrazione: *l'isomorfismo Ψ del teo. cinese dei restti, ristretto a $U(\mathbb{Z}_n)$ dà un isomorfismo di gruppi*

Poiché un elemento $\overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ è invertibile s.s.e. esiste un'identità di Bézout $ax + bn = 1$ abbiamo che $\overline{x}$ è invertibile s.s.e. $MCD\{x, n\} = 1$.
Quindi $|U(\mathbb{Z}_n)| = \varphi(n)$, con φ funzione di Eulero.

dal precedente Corollario e da questo segue un altro Corollario:
Corollario: Sia $\varphi : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la funzione φ di Eulero.
siano $x, y \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che $MCD\{x, y\} = 1$, allora $\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$.

Dimostrazione: *dal Corollario precedente abbiamo che $U(\mathbb{Z}_{xy}) \simeq U(\mathbb{Z}_x) \times U(\mathbb{Z}_y)$ come i gruppi, quindi:*

$$\varphi(xy) = |U(\mathbb{Z}_{xy})| = |U(\mathbb{Z}_x) \times U(\mathbb{Z}_y)| = |U(\mathbb{Z}_x)| \cdot |U(\mathbb{Z}_y)| = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$$

Come conseguenza del corollario precedente otteniamo una formula per calcolare la funzione φ di Eulero.
Se p è un numero primo, allora ci sono p^k numeri $1 \leq n \leq p^k$.
Di questi numeri $p, 2p, ..., p^{k-1}p$ hanno fattori comuni con p^k e quindi

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

se $n = p^{k_1}...p^{k_s}$ per il corollario precedente $(n > 1)$:
$\varphi(n) = \varphi(p_1^{k_1}...\varphi(p_s^{k_s}) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})...(p_s^{k_s} - p_s^{k_s-1}) = p_1^{k_1}...p_s^{k_s} \prod_{p|n,pprimo}(1 - \frac{1}{p}) =$
$= n \prod_{p|n,pprimo}(1 - \frac{1}{p})$.

Teorema (di Eulero)***:*** *Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,\}$ ed $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tale che $MCD\{a, n\} = 1$.*
allora $\overline{a^{\varphi(n)}} = \overline{1} \in \mathbb{Z}_n$. (diciamo che $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \mod n$)

Dimostrazione: *sappiamo che la cardinalità del gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}_n$ è $\varphi(n)$.*
Sia $< \overline{a} > \subseteq U(\mathbb{Z}_n)$ il sottogruppo generato da $\overline{a} in U(\mathbb{Z}_n)$. allora $| < \overline{a} > |$ divide $\varphi(n)$, ossia $\varphi(n) = k| < \overline{a} > |$, per qualche $k \in \mathbb{N}$. Sia $c := | < \overline{a} > |$;
abbiamo che $= \overline{1} = \overline{a}^c = (\overline{a^c})^k = \overline{a^{ck}} = \overline{a^{\varphi(n)}}$.

Corollario:(piccolo teorema di Fermat) Sia p un numero primo e $a \in \mathbb{N}$.
allora in $\mathbb{Z}_p$ abbiamo che $\overline{a} = \overline{a^p}(a^p \equiv a \mod p)$.

Dimostrazione: *se p è primo si ha che $\varphi(p) = p - 1$. allora dal Teo. di Eulero segue che, se $a \neq 0, p \nmid a$, $a^{varphi(p) \equiv 1 \mod p} \implies a^{p-1} \equiv 1 \mod p \implies a^p \equiv a \mod p$.*
se $a = 0 o p|a$ l' uguaglianza si riduce a $\overline{0} = \overline{0}$.

1.15 Caratteristica di un anello

sia A un anello. il sottogruppo $< 1_A > \subseteq (A, +)$è un gruppo ciclico.
quindi esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $< 1_A > \simeq \mathbb{Z}_n$. n è detto la caratteristica dell'anello A.

Esempio: la caratteristica di $\mathbb{Z}$ è 0, infatti $< 1 >= \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_0$.
la caratteristica degli anelli $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ è sempre 0 poiché $< 1 >= \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_0$ in $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

Esempio: sia $n \in \mathbb{N}$ allora la caratteristica dell'anello $\mathbb{Z}_n$ è n.
infatti $< \overline{1} >= \mathbb{Z}_n$, rispetto all'operazione $+$

indichiamo con $CHAR(A)$ la caratteristica di un anello A.

Definizione: *sia A un anello e sia $< 1_A >$ il sottogruppo di $(A,+)$ generato da 1_a. l'intersezione di tutti i sottoanelli di A contenenti $< 1_a >$
si chiama* ***sottoanello fondamentale di A****.*

Esempio: il sottoanello fondamentale di $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ è $\mathbb{Z}$

Definizione: *sia K un campo
l'intersezione di tutti i sottocampi di K contenenti il gruppo $< 1_k > \subseteq (K, +)$ si chiama* ***sottocampo fondamentale di K****.*

Esempio: il sottocampo fondamentale di $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ è $\mathbb{Q}$.
se $p \in \mathbb{N}$ è primo, il sottocampo fondamentale di $\mathbb{F}_p$ è $\mathbb{F}_p$ perché $< \overline{1} >= \mathbb{F}_p$.

1.16 Anello dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in un campo

Sia K un campo. una funzione $f : \mathbb{N} \to K$ si chiama **successione a valori in** K.
ad una successione a valori in K corrisponde una serie formale nella variabile x su K:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

se l'insieme $\{m\ in\mathbb{N} : f(n) \neq 0\}$ è finito diciamo che la serie formale
è un polinomio in x di grado $deg(P) := MAX\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq 0\}$.
il grado del poliniomio 0 non è definito.
l'insieme dei polinomi in x a coefficienti in K si indica con $K[x]$ ed è un anello commutativo con le operazioni:

- somma: $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n) + (\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) X^n$
- prodotto: $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) X^n$

l'unità di $K[x]$ è il polinomio 1_k.

Esempio: in $\mathbb{F}_2[x]$ siano $P := 1 + X^2 + X^3$ e $Q := X + X^2$.
allora $P + Q = 1 + X + X^2 + X^3$ e $P \cdot Q = X + X^2 + X^3 + X^5$

Proposizione: *siano $P, Q \in K[x]$ polinomi non nulli. allora il grado del prodotto $P \cdot Q$ è $deg(P) + deg(Q)$.*
in particolare $K[x]$ è un dominio di integrità.

Definizione: *un polinomio si dice **monico** se il coefficiente del termine di grado massimo è 1.*

Definizione: *sia K un campo. un polinomio $P \in K[x]$ si dice **irriducibile***
se i suoi unici divisori sono del tipo a, aP con $a \in K \setminus \{0\}$.
*altrimenti si dice **riducibile**.*

Esempio: in $\mathbb{F}_2[X]$ il polinomio $X^2 + 1$ è irriducibile, infatti:
$X^2 + 1 = (X + 1)^2$, quindi $X + 1$ divide $X^2 + 1$ e $X + 1 \notin K \setminus \{0\}$.

Esempio: in $K[X]$ ogni polinomio di grado 1 è irriducibile, infatti:
se $deg(P) = 1$ allora $P = aX + b$ con $a, b \in K, a \neq 0$.
i suoi divisori sono c e $c^{-1}(aX + b), c \in K \setminus \{0\}$.

Definizione: *sia $\alpha \in K$. l'elemento α è detto **radice** del polinomio*
$P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in K[X]$ se $P(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha^n = 0$.

anche nell'anello $K[X]$ come in $\mathbb{Z}$ abiamo un algoritmo di divisione Euclidea.
se $f(X), g(X) \in K[X]$ sono polinomi non nulli allora esistono unici polinomi $q(X), r(X) \in K[X]$ tali che:
$f(X) = q(X) \cdot g(X) + r(X)$ e $r(X) = 0$ oppure $deg(r) < deg(g)$.
$q(X)$ si chiama **quoziente** e $r(X)$ si chiama **resto** della divisione.
ne segue il seguente teorema, dimostrato come in $\mathbb{Z}$:

Teorema: *l'anello $K[X]$ è a ideali principali.
se $I =< p(X) >$ allora esiste un unico generatore monico di I.*

Definizione: *definiamo il **massimo comune divisore** di due polinomi $f(X), g(X) \in K[X]$ come l'unico massimo comune divisore monico.*

Come in $\mathbb{Z}$ possiamo trovarlo con l'algoritmo delle divisioni successive
che dà anche un identità di Bézout.

Esempio: $f(X) = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$ e $g(X) = X^2 - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$, allora:

$$f(X) = g(X)(X^2 - 3) + (X - 2)$$
$$g(X) = (X - 2)(X + 1) + 1 \implies MCD(f, g) = 1$$

inoltre

$$1 = g(X) - (X - 2)(X + 1) + 1 = g(X) - [f(X) - g(X)(X^2 - 3)](X + 1) =$$
$$= -(X - 1)f(X) + (X^3 + X^2 - 3X - 2)g(X).$$

proprietà: sia K un campo e $P(X) \in K[X]$ un poliniomio irriducibile.
allora l'anello quoziente $K[X]/_{< P(X) >}$ è un campo.

Dimostrazione: *sia $[f]$ in$K[X]/_{< P(X) >}$ tale che $[p] \neq [0]$ ossia $p(X)$ non divide $f(X)$.
Dunque $MCD\{f(X), p(X)\} = 1$ perchè $p(X)$ è irriducibile.
quindi abbiamo un'identità di Bézout $a(X)f(X) + b(X)p(X) = 1$.
ossia $[a(X)] = [f(X)]^{-1}$ in $K[X]/_{< P(X) >}$.*

Esempio: in $\mathbb{F}_2[X]$ il polinomio $P(X) = 1 + X + X^2$ è irriducibile.
infatti non ha radici in $\mathbb{F}_2$.
quindi l'anello $\mathbb{F}_2[X]/_{< 1 + X + X^2 >}$ è un campo, che chiamiamo $\mathbb{F}_4$.
un elemento di $\mathbb{F}_4$ è della forma $a_0 + a_1X$ con $a_0, a_1 \in \mathbb{F}_2$.
la tavola moltiplicativa è la seguente:

·	0	1	X	1 + X
0	0	0	0	0
1	0	1	X	1 + X
X	0	X	1 + X	1
1 + X	0	1 + X	1	X

l'inverso di X è $1 + X$.

Esempio: in $\mathbb{F}_3[X]$ il polinomio $P(X) = 1 + X^2$ è irriducibile.
indichiamo con $\mathbb{F}_9$ il campo$^{\mathbb{F}_3[X]}/_{< 1 + X^2 >}$.
un elemento di $\mathbb{F}_9$ è della forma $a_0 + a_1X$ con $a_0, a_1 \in \mathbb{F}_3$ quindi sono 9.
la tavola moltiplicativa è la seguente:

$\cdot$	0	1	2	X	1 + X	2 + X	2X	1 + 2X	2 + 2X
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	X	1 + X	2 + X	2X	1 + 2X	2 + 2X
2	0	2	1	2X	2 + 2X	1 + 2X	X	2 + X	1 + X
X	0	X	2X	2	2 + X	2 + 2X	1	1 + X	1 + 2X
1 + X	0	1 + X	2 + 2X	2 + X	2X	1	1 + 2X	2	X
2 + X	0	2 + X	1 + 2X	2 + 2X	1	X	1 + X	2X	2
2X	0	2X	X	1	1 + 2X	1 + X	2	2 + 2X	2 + X
1 + 2X	0	1 + 2X	2 + X	1 + X	2	2X	2 + 2X	X	1
2 + 2X	0	2 + 2X	1 + X	1 + 2X	X	2	2 + X	1	2X

l'inverso di X è 2.

***Teorema** (di Ruffini): sia $f(X) \in K[X]$ un polinomio non nullo.*
se $\alpha \in K$, il resto della divisione di $f(X)$ per $X - \alpha$ è $f(\alpha)$,
in particolare α è una radice di $f(X)$ s.s.e. $X - \alpha$ divide $f(X)$ in $K[X]$.

***Dimostrazione:** $f(X) = (X - \alpha)q(X) + r(X)$ con $r(X) = 0$ oppure $deg(r(X)) < 1$.*
quindi $r(X)$ è un polinomio costante, $r(X) = x \in K$.
calcolando in α otteniamo $f(\alpha) = c$.

Esempio: il polinomio $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ non ha radici in $\mathbb{R}$
quindi è irriducibile e $^{\mathbb{R}[X]}/_{< X^2 + 1 >}$ è un campo isomorfo a $\mathbb{C}$,
dove l'isomorfismo è dato dall'assegnazione $1 \to 1$ e $x \to i$

enunciamo il seguente importante risultato, senza fornire la dimostrazione. (vedi proposizione 4.3.5 di "Teoria delle equazioni e teoria di Galois" - S.Gabelli).

Proposizione: *se K è un campo, ogni sottogruppo finito del gruppo moltiplicativo $K \setminus \{0\}$ è ciclico. in particolare, se K è un campo finito, $K \setminus \{0\}$ è un gruppo ciclico.*

Esempio:

- in $\mathbb{F}_4 = \mathbb{F}_2/_{<1+X+X^2>}$ si ha che $\{X, X^2, X^3\} = \{X, 1+X, 1\} = \mathbb{F}_4 \setminus \{0\}$ quindi X è un generatore del gruppo moltiplicativo $\mathbb{F}_4 \setminus \{0\}$, l'altro è $1+X$

- in $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3/_{<1+X^2>}$ abbiamo:
  $< X >= \{X, X^2, X^3, X^4\} = \{X, 2, 2X, 1\}$
  $< 1+X >= \{1+X, (1+X)^2, (1+X)^3, (1+X)^4, (1+X)^5, (1+X)^6, (1+X)^7, (1+X)^8\} =$
  $= \{1+X, 2X, 1+2X, 2, 2+2X, X, 2+X, 1\}$
  $= \mathbb{F}_9 \setminus \{0\}$ quindi $1+X$ genera il gruppo moltiplicativo.

Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero prima e sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
sia $Q(X), \mathbb{F}_p[X]$ un qualsiasi polinomio irriducibile di grado n.
definiamo il campo

$$\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p[X]/_{<Q(X)>}$$

vogliamo ora mostrare che se $Q(X), Q'(X) e \mathbb{F}_p[X]$ sono polinomi irriducibili di grado n,
allora

$$\mathbb{F}_p[X]/_{<Q(X)>} \simeq \mathbb{F}_p[X]/_{<Q'(X)>}, \text{ isomorfismo tra campi}$$

quindi la definizione di $\mathbb{F}_p$ è ben posta, a meno di isomorfismi.

Definizione: *siano $F \subseteq K$ due campi (ampliamento di campi).
un elemento $\alpha \in K$ si dice <u>algebrico</u> su F se è radice di qualche polinomio non nullo su $f(X) \in F(X)$, altrimenti si dice <u>trascendente</u> su F.*

dato un ampliamento di campi $F \subseteq K$ e $\alpha \in K$, si consideri il morfismo di anelli

$$v_\alpha : F[X] \to K$$
$$f(X) \to f(\alpha).$$

$Ker(v_\alpha)$ è l'ideale di $F[X]$ costituito dai polinomi che si annullano in α.
quindi α è algebrico su F s.s.e. $Ker(v_\alpha)$ è un ideale non nullo di $F[X]$.
poiche $F[X]$ è ad ideali principali, $ker(v_\alpha) =< m(X) >$
dove $m(X)$ è l'unico polinomio monico di grado minimo in $Ker(v_\alpha)$.

Definizione: *se $\alpha \in K$ è algebrico su F, il polinomio $m(X)$ definito sopra si chiama* ***polinomio minimmo di α su F****, se $deg(m(X)) = n$, α si dice algebrico di grado n*

Nota: sia $\alpha \in K$ e $P(X) \in F[X] \setminus \{0\})$ tale che $p(\alpha) = 0$,
allora $p(X)$ è il polinomio minimo di α su F s.s.e. $p(X)$ è monico e irriducibile.

Esempio: si consideri l'ampliamento $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. allora $1 + X^2 \in \mathbb{R}[X]$
è il polinomio minimo di $i \in \mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$.

Proprietà: sia $F \in K$ un ampliamento di campi e $\alpha \in K$.
si consideri il morfismo di anelli $v_\alpha : F[X] \to K$.
allora $Im(v_\alpha)$ è il più piccolo sottoanello di K contenente sia F che α

Dimostrazione: *si osservi che l'immagine di un morfismo di anelli è un sottoanello. di conseguenza $Im(v_\alpha)$ è un sottoanello di K.*
sia $c \in F$ e si consideri il polinomio costante $c \in F[X]$. allora $v_\alpha(c) = c$.
quindi $F \subseteq Im(v_\alpha)$ e $v_\alpha(X) = \alpha \implies \alpha \in Im(v_\alpha)$
d'altra parte per chiusura aditiva e moltiplicativa,
ogni sottoanello di K contenete sia F che α contiene anche $Im(v_\alpha)$.

Proposizione: *sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in K$.*
il più piccolo sottocampo di K contenente sia F che α si chiama ***ampliamento di F in K generato da*** *α e si indica con* ***F(α)*** *tale ampliamento si dice* ***semplice*** *(poichè generato da un solo elemento)*

da questa proposizione segue questo Corollario:

Corollario: sia $F \subseteq K$ un ampliamento di campi e sia $\alpha \in K$.
allora $F(\alpha) = \{f(\alpha)g(\alpha)^{-1} : f(X), g(X) \in F[X], g(\alpha) \neq 0\}$.

Dimostrazione: *per la proposizione precedente*
il più piccolo sottoanello di K contenente sia F che α è $Im(v_\alpha = \{f(\alpha) : f(X) \in F[X]\})$.
prendendo gli inversi in K si ottiene la tesi.

se $\alpha \in K$ è algebrico su F si ha che $Im(v_\alpha \simeq {}^{F[X]}/_{< m(X) >})$,
dove $m(X)$ è il polinomio minimo di α. quindi $Im(v_\alpha)$ è un campo e $F(\alpha) = Im(v_\alpha)$.
se n è il grado di α si ha quindi:

$$F(\alpha) = \{c_0 + c_1\alpha + ... + c_{n-1}\alpha^{n-1} : c_i \in F\}$$

Esempio: si consideri l'ampliamento $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. l'elemento $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è akgebrico su $\mathbb{Q}$ con polinomio minimo $X^2 - 2$. quindi $\sqrt{2}$ ha grado 2 su $\mathbb{Q}$ e

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{c_0 + c_1\sqrt{2} : c_0, c_1 \in \mathbb{Q}\}).$$

adesso mostriamo che il campo $\mathbb{F}_{p^n}$ è un ampliamento semplice di $\mathbb{F}_p$

Proposizione: *sia $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}$ un generatore del campo moltiplicativo $\mathbb{F}_{p^n} \setminus \{0\}$.*
allora $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p(\alpha)$.

Dimostrazione: *$\mathbb{F}_p(\alpha)$ è il più piccolo sottocampo di $\mathbb{F}_{p^n}$ contenente sia $\mathbb{F}_p$ che α quindi $\mathbb{F}_p(\alpha) \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$. Poiché α genera il gruppo moltiploicativo $\mathbb{F}_{p^n} \setminus \{0\}$ anche $\mathbb{F}_{p^n} \subseteq \mathbb{F}_p(\alpha)$*

Ora, se $P(X), Q(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ sono due polinomi irriducibili di grado n, vogliamo costruire un isomorfismo

$$f : {}^{\mathbb{F}_p[X]}\!/\!_{< P(X) >} \to {}^{\mathbb{F}_p[X]}\!/\!_{< Q(X) >}$$

ci serve il seguente risultato:

Proposizione: *siano $F \subseteq K$ e $F \subseteq K'$ due ampliamenti di campi.*
se $\alpha \in K$ è algebrico di grado n su F, con polinomio minimo $m(x)$,
esiste un morfismo di campi $\varphi : F(\alpha) \to K'$ che fissa F in K'.
in questo caso i morfismi φ sono tanti quante le radici distinte $\beta_1, ..., \beta_s$ di $m(X)$ in K'.
sono tutti e soli quelli definiti da:

$$c_0 + c_1\alpha + ... + c_{n-1}\alpha^{n-1} \to c_0 + c_1\beta_i + ... + c_{n-1}\beta_i^{n-1}$$

Dimostrazione: *se α è algebrico di grado n su F con polinomio minimo $m(X)$*
e $\varphi : F(\alpha) \to K'$ è isomorfismo, allora $0 = \varphi(0) = \varphi(m(\alpha)) = m(\varphi(\alpha))$
quindi $\varphi(\alpha)$ deve essere radice di $m(X)$ in K'.
viceversa, sia β una radice di $m(X)$ in K' e consideriamo il morfismo di anelli

$$\begin{gathered} v_\beta : F[X] \to K' \\ f(X) \to f(\beta) \end{gathered}$$

poiché $m(X) \in Ker(v_\beta)$, dal Teorema di isomorfismo per anelli
abbiamo che il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd} F[X] \arrow[r, "v_\beta"] \arrow[d, "\pi"] & K' \\ F(\alpha) \simeq {}^{F[X]}\!/\!_{< m(X) >} \arrow[ur, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

infatti $Ker(v_\beta) =< m(X) >$, essedo $m(X)$ irriducibile.
quindi abbiamo trovato un morfismo iniettivo $\varphi : F(\alpha) \to K'$ che soddisfa le proprietà dell'enunciato.

sia F un campo e $f(X) \in F[X]$ un polinomio di grado $n \geq 1$.
un campo K, ampliamento di F, si dice **campo di spezzamento di f(X) su F** se:

- $f(X)$ fattorizza in polinomi di grado 1 su $K[X]$
- non ci sono campi intermedi $F \subseteq L \subsetneq K$ con la stessa proprietà.

Esempio: $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ è un campo di spezzamenro di $X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.
$\mathbb{C}$ è un campo di spezzamenro di $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

Ora vogliamo mostrare che un campo che ha cardinalità p^n
è un campo di spezzamento del polinomio $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$.
infatti se K è un campo e $|K| = p^n$, allora il suo gruppo moltiplicativo $K \setminus \{0\}$ ha cardinalità $p^n - 1$
e quindi oer ogni $\alpha \in K \setminus \{0\}$ si ha $\alpha^{p^n-1} = 1$.
quindi ogni elemento di K è radice del polinomio $X^{p^n} - X$.
per il teorema di Ruffini, K è un campo di spezzamento di $X^{p^n} - X$.
Adesso mostriamo che ogni poliniomio di grado n irriducibile in $\mathbb{F}_p[X]$
divide $X^{p^n} - X \ \in \mathbb{F}_p[X]$.

Proposizione: *tutti e soli i polinomi irriducibili su $\mathbb{F}_p$ di grado n dividono $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$.*

Dimostrazione: *sia $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ irriducibile di grado n e sia $K := {}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{<P(Y)>}$.*
allora K ha p^n elementi che sono le radici di $X^{p^n} - X \in K[X]$.
poichè $Y \in K$ è una radice $P(X) \in K[X]$, $P(X) e X^{p^n} - X$ hanno una radice in comune in K,
allora per il teorema di Ruffini hanno un fattore comune $X - Y in K[X]$.
quindi, poiché $\mathbb{F}_p \subseteq K$ e MCD in $\mathbb{F}_p = MCD$ in $K[X]$
$\implies P(X), X^{p^n} - X$ *hanno* $MCD \neq 1$ *in* $\mathbb{F}_p[X]$.
poiché $P(X)$ è irriducibile in $\mathbb{F}_p[X]$, $P(X)$ divide $X^{p^n} - X$.

adesso vogliamo costruire un isomorfismo di campi

$$f : {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<P(X)>} \longrightarrow {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<Q(X)>}$$

dove $P(X), Q(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ sono monici irriducibili di grado n.
basta costruire un isomorfismo di anelli.
Infatti un morfismo di anelli che sono campi è iniettivo. Inoltre:

$$\left|{}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<P(X)>}\right| = \left|{}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<Q(X)>}\right| = p^n$$

quindi tale morfismo è biunivoco, ossia è isomorfismo.

Si ha che, se $y \in {}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{<P(Y)>}$ allora $P(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ è il polinomio minimo di y su $\mathbb{F}_p$.
quindi, se $P(X)$ ha una radice in ${}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{<Q(Y)>}$,
possiamo usare la proposizione sull'estensione di morfismi di campi per definire
il morfismo f, che sarà un isomorfismo. Infatti $\mathbb{F}_p \subseteq {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<Q(X)>}$.
Inoltre ${}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<P(X)>} = \mathbb{F}_p([X])$, dove $[X]$ è la classe di X in ${}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<P(X)>}$.
poiché ${}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{<Q(Y)>}$ è un campo di spezzamento di $X^{p^n} - X$ e $P(X)$ divide $X^{p^n} - X$,
allora $P(X)$ si fattorizza in fattori di grado 1 in ${}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{<Q(Y)>}$.

sia $\beta \in {}^{\mathbb{F}_p[Y]}/_{<Q(Y)>}$ tale che $p(\beta) = 0$.
allora l'assegnazione

$$c_0 + c_1 x + ... + c_{n-1} x^{n-1} \to c_0 + c_1 \beta + ... + c_{n-1} \beta^{n-1}$$

definisce un morfismo di anelli

$$f : {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<P(X)>} \to {}^{\mathbb{F}_p[X]}/_{<Q(X)>}$$

Esempio: in $\mathbb{F}_3[X]$ si considerino i polinomi irriducibili

$$1 + X^2 \text{ e } 2 + X + X^2.$$

il polinomio minimo di X in ${}^{\mathbb{F}_3[X]}/_{< 1 + X^2 >} := K$ su $\mathbb{F}_3$ è $1 + X^2$.
in $K' := {}^{\mathbb{F}_3[Y]}/_{< 1 + Y + Y^2 >}$ si ha che

$$1 + X^2 = (X + Y + 2)(X + 2Y + 1)$$

quindi in $K'[X], 1 + X^2$ ha due radici:

$$-Y - 2 = 2Y + 1 \text{ e } -2Y - 1 = y + 2.$$

abbiamo quindi due isomorfismi

$$\begin{gathered} f : K \to K' \\ a_0 + a_1x \to a_0 + a_1(2Y + 1) \\ g : K \to K' \\ a_0 + a_1x \to a_0 + a_1(Y + 2) \end{gathered}$$

$f(0) = 0$
$f(1) = 1$
$f(2) = 2$
$f(X) = 2Y + 1$
$f(1 + X) = f(1) + f(X) = 2Y + 2$
$f(2 + X) = f(2) + f(X) = 2Y$
$f(2X) = f(2)f(X) = 2f(X) = y + 2$
$f(1 + 2X) = f(1) + f(2X) = Y$
$f(2 + 2X) = f(2) + f(2X) = y + 1$

$g(0) = 0$
$g(1) = 1$
$g(2) = 2$
$g(X) = Y + 2$
$g(1 + X) = g(1) + g(X) = Y$
$g(2 + X) = g(2) + g(X) = Y + 1$
$g(2X) = g(2)g(X) = 2g(X) = 2Y + 1$
$g(1 + 2X) = g(1) + g(2X) = 2Y + 2$
$g(2 + 2X) = g(2) + g(2X) = 2Y$

Osservazione: *$X \in K$ non è un generatore di $K \setminus \{0\}$.*
infatti il sottogruppo del gruppo moltiplicativo $K \setminus \{0\}$ generato da X è
$< X >= \{X, 2, 2X, 1\} \subsetneq K \setminus \{0\}$

Lemma: se K è un anello commutativo di caratteristica prima p, allora

$$(X+Y)^{p^h} = X^{p^h} + Y^{p^h}$$

per ogni $x, y \in K, h \geq 1$.

Dimostrazione: *sia $h = 1$. se $p > k > 0$, p divide tutti i coefficienti binomiali $\binom{p}{k} := \frac{p!}{k!(p-k)!}$ perché non divide $k!(p-k)!$.*
allora $(X+Y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k Y^{p-k} = X^p + Y^p$.
la tesi segue per induzione.

Automorfismo di Frobenius:
Dal lemma precedente segue che se K è un campo di caratteristica p, allora la funzione

$$\begin{aligned} \Phi : K \to K \\ x \to x^p \end{aligned}$$

è un morfismo di campi. infatti
$\Phi(x+y) = (x+y)^p = x^p + y^p = \Phi(x) + \Phi(y)$
$\Phi(xy) = (xy)^p = x^p y^p = \Phi(x)\Phi(y)$
$\forall x, y \in K$.
se $K = \mathbb{F}_{p^n}, \Phi$ è un automorfismo
(essendo morfismo initettivo da un campo di cardinalità finita in se stesso)
detto **automorfismo di Frobenius**.

Teorema: *il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{F}_{p^n}, AUT(\mathbb{F}_p^n)$ è ciclico di cardinalità n, generato dall'automorfismo di Frobenius.*

Dimostrazione: *vedi teorema 4.3.17 del libro di Stefania Gabelli.*

Lemma: sia F un campo. Il polinomio $X^d - 1$ divide il polinomio $X^n - 1$ s.s.e. d divide n.

Dimostrazione: *se $n = qd + r, 0 \leq r \leq d$, in $\mathbb{F}[X]$ si ha:*

$$(x^n - 1) = (X^d - 1)(X^{n-d} + X^{n-2d} + ... + x^{n-(p-1)d} + X^r) + (X^r - 1).$$

quindi $X^d - 1$ divide $X^n - 1$ s.s.e. $X^r - 1$ è il polinomio nullo, cioè s.s.e. $r = 0$

dalla fattorizzazione nella dimostrazione del lemma otteniamo che, calcolazndo in p, se $p^d - 1$ divide $p^n - 1$ allora d divide n.

Corollario: d divide $n \iff (X^{p^d} - X)$ divide $(X^{p^n} - X)$ in $\mathbb{F}_p[X]$.

Dimostrazione: $\implies$
per il lemma precedente, $X^d - 1$ divide $X^n - 1$.
calcolando in p si ottiene che $p^d - 1$ divide $p^n - 1$.
quindi sempre per il lemma, $X^{p^{d-1}} - 1$ divide $X^{p^n-1} - 1$.
$\Longleftarrow$
viceversa se $X^{p^{d-1}} - 1$ divide $X^{p^n-1} - 1$, allora $p^d - 1$ divide $p^n - 1 \implies d|n$.

Proposizione: *tutti e soli i sottocampi di $\mathbb{F}_{p^n}$ sono i campi $\mathbb{F}_{p^d}$ con $d|n$.*

Dimostrazione: *abbiamo che, se $\mathbb{F}_{p^d} \subseteq \mathbb{F}_{p^n}$,*
allora tutte le radici di $X^{p^d} - X$ in $\mathbb{F}_{p^d}$ sono radici di $X^{p^n} - X$ in $\mathbb{F}_{p^n}$,
ossia $X^{p^d} - X$ divide $X^{p^n} - X \implies d|n$.
se d divide n, $X^{p^d} - X$ divide $X^{p^n} - X$
e l'insieme delle radici di $X^{p^d} - X$ (è un campo) sta in $\mathbb{F}_{p^n}$

Finora, dato un numero primo p e un numero naturale $n \neq 0$, abbiamo costruito il campo $\mathbb{F}_{p^n}$
di cardinalità p^n prendendo un polinomio irriducibile $Q \in \mathbb{F}_p$ e facendo il quoziente:

$$\mathbb{F}_{p^n} = {}^{\mathbb{F}_p[X]}\big/_{< Q(X) >}$$

Abbiamo visto che due campi costruiti in questo modo sono isomorfi.
Facciamo alcune osservazioni e un discorso più generale.

1. sia K un campo finito. qual'è la caratteristica di K?
   prendiamo il sottogruppo $< 1_K > \subseteq K$. poiché $< 1_K >$ è finito,
   $< 1_K > \simeq \mathbb{Z}_n$ per qualche $n > 1$.
   dato che gli elementi di $< 1_K >$ sono di un campo, non sono divisori dello zero,
   quindi n è primo, ossia un campo finito ha caratteristica prima p
   e il suo sottocampo fondamentale è $\mathbb{F}_p$

2. sia K un campo finito. Abbiamo detto nel punto 1. che $\mathbb{F}_p \subseteq K$ per qualche primo p.
   inoltre il gruppo moltiplicativo $K \setminus \{0\}$ è ciclico e quindi,
   come precedentemente dimostrato, $se K \setminus \{0\} = \alpha, K = \mathbb{F}_p(\alpha)$.
   Quindi, se il grado di α su $\mathbb{F}_p$ è n, abbiamo che:
   $|K| = p^n$, ossia ogni campo finito ha cardinalità p^n, per qualche p primo e $n \neq 0$.

3. siano K_1 e K_2 due campi finiti di cardinalità p^n.
   sia $K_1 = \mathbb{F}_p(\alpha)$ dove α è un generatore del gruppo $K_1 \setminus \{0\}$ e ha grado n su K_1.
   sia $Q \in \mathbb{F}_p[X]$ il suo polinomio minimo. Quindi $deg(Q) = n$, e Q è irriducibile.

   (a) K_1 e K_2 sono campi di spezzamento di $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$.
   (b) ogni polinomio irriducibile di grado n in $\mathbb{F}_p[X]$ è fattore di $X^{p^n} - X$.
   (c) da (b) segue che Q ha una radice in K_2, la chiamiamo β.
   (d) l'assegnazione $\alpha \to \beta$ definisce un mofismo di campi da K_1 in K_2.
   poiché un morfismo tra campi è sempre iniettivo, ed essendo anche suriettivo, perché K_1 e K_2 hanno la stessa cardinalità, è un isomorfismo:

$$K_1 \simeq K_2$$

1.17 Algoritmo di Berlekamp

Teorema: *sia* $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ *di grado* $d > 1$, *sia* $h(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ *di grado* $1 < deg(h) < d$ *tale che* $f(x)$ *divide* $h(x)^p - h(x)$.
allora

$$f(x) = MCD\{f(x), h(x)\} \cdot MCD\{f(x), h(x) - 1\} \cdot ... \cdot MCD\{f(x), h(x) - (p-1)\}$$

è una fattorizzazione non banale di $f(x)$ *in* $\mathbb{F}_p[x]$.

Dimostrazione: *supponiamo che* $f(x)$ *divida* $h(x)^p - h(x)$. *il polinomio* $X^p - X \in \mathbb{F}_p[X]$ *si fattorizza come:*

$$X^p - X = X(X-1)(X-2)...(X-(p-1))$$

mettendo $h(x)$ *al posto di* X *si ha:*

$$h(x)^p - h(x) = h(x)(h(x)-1)(h(x)-2)...(h(x)-(p-1))$$

abbiamo che $MCD\{h(x) - i, h(x) - j\} = 1 \forall i, j \in \mathbb{F}_p, i \neq j$.
infatti, se $MCD\{h(x) - i, h(x) - j\} = D(x)$ *allora*

$$\begin{cases} h(x) - i = D(x) \cdot H_i(x) \\ h(x) - j = D(x) \cdot H_j(x) \end{cases}$$

$$\implies D(x)[H_i(x) - H_j(x)] = j - i \in \mathbb{F}_p$$
$$\implies deg(D) = 0, i \neq j$$

inoltre, se $MCD\{a, b\} = 1$ *si ha che* $MCD\{f, ab\} = MCD\{f, a\} = MCD\{f, b\}$.
per induzione si ha che

$$MCD\{f, a_1 \cdot ... \cdot a_k\} = MCD\{f, a_1\} \cdot ... \cdot MCD\{f, a_k\}$$

dato che $f(x)$ *divide* $h(x)^p - h(x)$, *abbiamo che*

$$f(x) = MCD\{f(x), h(x)^p - h(x)\}$$

poiché, se $i \neq j$, $MCD\{h(x) - i, h(x) - j\} = 1$, *si ha*

$$\begin{aligned} f(x) = MCD\{f(x), h(x)^p - h(x)\} = MCD\{f(x), h(x)[h(x) - 1] \cdot ... \cdot [h(x) - p + 1]\} = \\ = MCD\{f, h\} \cdot MCD\{f, h-1\} \cdot ... \cdot MCD\{f, h - p + 1\}. \end{aligned}$$

poiché $deg(h - i) < deg(f), MCD\{f, h - i\} \neq f(x), \forall i \in \mathbb{F}_p$.
quindi nella fattoriazzazione precedente appaiono solo polinomi di grado $< d$,
perciò è non banale.

Proposizione: Un polinomio $h(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ che soddisfa le condizioni del teorema esiste sempre.

Dimostrazione: *Sia*

$$h(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_{d-1}x^{d-1} \in \mathbb{F}_p[X]$$

allora

$$h(x)^p = b_0^p + b_1^p x + ... + b_{d-1}^p x^{p(d-1)}$$

(avendo dimostrato che $(X+Y)^p = x^p + Y^p$ *e induttivamente che* $(\sum_{i=1}^k x_i)^p = \sum_{i=1}^k x_i^p$*)*

ma

$$b_i^p = b_i \forall 0 \leq i \leq d-1 \text{ quindi } h(x)^p = b_0 + b_1 x^p + ... + b_{d-1}x^{p(d-1)}$$

si ha che

$$h(x)^p \mod f(x) = b_0(\mod f) + b_1(x^p \mod f) + ... + b_{d-1}(x^{p(d-1)} \mod f)$$

sia $x^{ip} = f(x)q_i(x) + r_i(x)$ *con* $deg(r_i) < d, 0 \leq i \leq d-1$.
abbiamo che

$$[h(x)^p - h(x)] \mod f = 0 \mod f \iff h(x)^p \mod f = h(x) \mod f$$
$$\iff b_0 r_0(x) + b_1 r_1(x) + ... + b_{d-1} r_{d-1}(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_{d-1}x^{d-1}.$$

otteniamo così un sistema lineare di d *equazioni nelle incognite* b_i.
dobbiamo mostrare che esistono soluzioni non nulle.
sia $f(x) = p_1(x)...p_k(x)$ *una fattoriazzazione di* $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ *in fattori irriducibili.*
supponiamo che f *non habbia fattori multipli (verificabile con Teorema seguente).*

Teorema: *sia* K *un campo.*

1. *se* $f(x) \in K[x]$ *è ha un fattore multiplo, allora* $MCD\{f, f'\} \neq 1$ *dove* f' *è la derivata di* f *rispetto a* x.

2. *se* K *ha caratteristica 0 o* p, *e* $MCD\{f, f'\} \neq 1$, *allora* $f(x)$ *ha un fattore multiplo.*

abbiamo una versione in $\mathbb{F}_p[x]$ del teorema cinese dei resti.

$$MCD\{p_i(x), p_j(x)\} = 1, \forall \ \leq i \leq k, 1 \leq j \leq k, i \neq j$$
$$\mathbb{F}_p[x] / < f > \simeq \mathbb{F}_p[x] / < p_1(x) \times ... \times \mathbb{F}_p[x] / < p_k(x) >$$

dato $(s_1, ..., s_k) \in \mathbb{F}_p^k$, esisite un unica classe $[h(x)] \in \mathbb{F}_p[x]/f$ tale che

$$\begin{cases} [h(x)] = s_1 in \mathbb{F}_p[x] / < p_1(x) > \\ ... \\ [h(x)] = s_k in \mathbb{F}_p[x] / < p_k(x) > \end{cases}$$

ossia $h(x) - s_i$ è divisibile per $p_i(x), \forall 1 \leq i \leq k$
quindi $p_i(x)$ divide $h(x)[h(x) - 1]...[h(x) - (p-1)] = h(x)^p - h(x), \forall 1 \leq i \leq k$

Esempio: fattorizziamo $f = x^5 + x^2 + 2x + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$.
ferifichiamo che $MCD\{f, f'\} = MCD\{x^5 + x^2 + 2x + 1, 2x^4 + 2x + 2\} = 1$
poi calcoliamo i resti:

$$x^{3(5-1)} = x^{12} \equiv (x^2 + 2) \mod f \; x^{3\cdot3} = x^9 \equiv (2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2) \mod f$$
$$x^{3\cdot2} = x^6 \equiv (2x^3 + x^2 + 2x) \mod f \; x^3 \equiv x^3 \mod f \; 1 \equiv 1 \mod f$$
$$\implies b_0 + b_1x^3 + b_2(2x^3 + x^2 + 2x) + b_3(2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 2) + b_4(x^2 + 2) =$$
$$= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$$
$$\iff$$

$$\begin{cases} 2b_3 + 2b_4 = 0 \\ 2b_2 + 2b_3 - b_1 = 0 \\ b_2 + b_3 + b_4 - b_2 = 0 \\ b_1 + 2b_2 = 0 \\ 2b_3 - b_4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b_3 = 2b_4 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0 \\ b_1 = b2 \end{cases} \iff b_1 = b_2 = b_3 = 2b_4$$

una soluzione è dunque $(0, 1, 1, 1, 2)$, ossia $h(x) = x + x^2 + x^3 + 2x^4$.
quindi

$$f(x) = MCD\{f, x+x^2+x^3+2x^4\}\cdot MCD\{f, 1+x^2+x^3+2x^4\}\cdot MCD\{f, 2+x^2+x^3+2x^4\} =$$
$$= (1 + x^2)(x^3 + 2x + 1)$$

Sia $f(x)\mathbb{F}_p[x], deg(f) = d$.
sia $f(x) = p_1(x) \cdot ... \cdot p_k(x)$ una fattoriazzazione di $f(x)$ in fattori irriducibili, non banali e aventi molteplicità 1.
siano

$$r_0 = 1 \mod f(x)$$
$$r_1 = x^p \mod f(x)$$
$$...$$
$$r_{d-1} = x^{p(d-1)} \mod f(x)$$

con $deg(r_i) < d\forall 0 \leq i \leq d-1$
definiamo la matrice $A \in Mat_{d\times d}(\mathbb{F}_p)$ nel segueente modo:
A_{ij} = coefficiente del termine di grado i del polinomio $r_j(x)$

Esempio: considerando l'esempio precedente, si ha:

$$A \in Mat_{5\times5}(\mathbb{F}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

la matrice $A - I$ è la matrice del sistema che abbiamo risolto, ossia $(A - I)\bar{b} = \bar{0}$

Teorema: *Il numero di fattori irriducibili k nella fattorizzazione di f è uguale alla dimensione del nucleo di A - I.*
ossia $k = d - rk(A - I)$*, rango calcolato sul campo* $\mathbb{F}_p$.

Dimostrazione: *osserviamo innanzitutto che* $dim(ker(A - I)) \geq 1$.
infatti la d-tupla $(b_0, 0, ..., 0)$ *è sempre soluzione del sistema* $\forall b_0 \in \mathbb{F}_p$.
abbiamo visto che l'Insieme

$$H = \{h \in \mathbb{F}_p[x] : deg(h) < d, f | h^p - h\}$$

è uno spazio vettoriale su $\mathbb{F}_p$ *isomorfo a* $ker(A - I)$.
sia k il numero di fattori irriducibili non banali di f*, aventi tutti molteplicità 1.*
dimostriamo che $\mathbb{F}_p^k$ *è isomorfo a H.*
abbiamo già dimostrato che per ogni $(s_1, ...s_k) \in \mathbb{F}_p^k$ *troviamo un unico elemento di H, usando il Teorema cinese dei resti per l'anello* $\mathbb{F}_p[X]$.
quindi abbiamo definito una funzione $\varphi : \mathbb{F}_p^k \to H$

1. φ *è un morfismo si spazi vettoriali.*

2. φ *è iniettiva:*
   $ker(\varphi) = \{(s_1, ...s_k) \in \mathbb{F}_p^k : s_i \mod p_i = 0, \forall 1 \leq i \leq k\}$
   $= \{(0, ..., 0)\}$

3. φ *è suriettiva:*
   se $h \in H$*, abbiamo visto che* $h^p - h = h(h - 1)(h - 2)...(h - (p - 1))$.
   questi fattori sono coprimi a coppie, quindi se $f | h^p - h$*, allora* $p_i(x) | (h - s_i)$
   per un unico $s_i \in \mathbb{F}_p, \forall 1 \leq i \leq k$.
   quindi h è soluzione del sistema

$$\begin{cases} h \equiv s_1 \mod p_1 \\ ... \\ h \equiv s_k \mod p_k \end{cases}$$

abbiamo dimostrato che $\varphi : \mathbb{F}_p^k \to H$ *è un isomorfismo do spazi vettoriali, quindi*

$$\mathbb{F}_p^k \simeq H \simeq ker(A - I)$$

ossia $dim(ker(A - I)) = k = d - rk(A - I)$.

Esempio: sempre considerando l'esempio precedente, si ha che $2 = 5 - rk(A - I)$

se $f \in \mathbb{F}_p[x]$ ha fattori irriducibili di molteplicità > 1, procediamo come segue: abbiamo che $D = MCD\{f, f'\} \neq 1$.
osserviamo che il polinomio $\frac{f}{D}$ ha fattori irriducibili tutti di molteplicità 1.
infatti se $p_1, ..., p_k$ sono tutti distinti,

$$f' = (p_1^{e_1}(x)...p_k^{e_k}(x))' =$$
$$e_1 p_1^{e_1-1} p_1' p_2^{e_2} ... p_k^{e_k} + ... + e_k p_1^{e_1} p_2^{e_2} ... p_k^{e_k-1} p_k'$$

e $D = p_1^{e_1-1} ... p_k^{e_k-1}$ quindi $\frac{f}{D} = p_1 ... p_k$
allora fattorizziamo $\frac{f}{D}$ poi fattorizziamo D, eventualmente ripetendo con D, D'.
fincé non otteniamo $MCD\{D_i, D_i'\} = 1$.

Esempio: in $\mathbb{F}_3[x]$ consideriamo il polinomio $f = 1 + 2x + 2x^2 + x^5 + x^6 + x^7$.
si ha che

$$f' = 2 + 4x + 5x^4 + 7x^6 = 2 + x + 2x^4 + x^6.$$

e

$$MCD\{f, f'\} = 1 + 2x + x^3 =: D.$$
$$\frac{f}{D} = 1 + 2x^2 + x^3 + x^4, \text{ fattorizzando otteniamo } (x + 1)(1 + 2x + x^3).$$

dato che D non ha radici in $\mathbb{F}_3$, D è irriducibile.
allora

$$f = \frac{f}{D} \cdot D = (x + 1)(1 + 2x + x^3)^2$$

2 Tensori

2.1 Prodotto tra matrici

Definizione: *prodotto righe per colonne di matrici 2 x 2*
sia $Mat_{2\times 2}(K) = \{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_i \in K\}$ *l'insieme delle matrici 2 x 2 a coefficienti in un campo* K.

diamo all'insieme una struttura di anello:

- somma: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_2+y_2 \\ x_3+y_3 & x_4+y_4 \end{pmatrix}$
- prodotto: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1+x_2y_3 & x_1y_2+x_2y_4 \\ x_3y_1+x_4y_3 & x_3y_2+x_4y_4 \end{pmatrix}$

con queste operazioni $Mat_{2\times 2}(K)$ è un anello con unità $\begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix}$.

il prodotto così definito richiede di eseguire 8 moltiplicazioni.
abalogamente possiamo dotare $Mat_{n\times n}(K)$ di una struttura di anello.
la moltiplicazione righe per colonne richiede l'esecuzione di n^3 moltiplicazioni.

Esempio: in $Mat_{3\times 3}(\mathbb{F}_2)$ abbiamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione: *Algorimo di Strassen per il prodotto di matrici 2 x 2:*
sia $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$
e $AB = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix}$
definiamo

1. $(x_1 + x_4)(y_1 + y_4)$
2. $(x_3 + x_4)y_1$
3. $x_1(y_2 + y_4)$
4. $x_4(-y_1 + y_3)$
5. $(x_1 + x_2)y_4$
6. $(-x_1 + x_3)(y_1 + y_2)$
7. $(x_2 - x_4)(y_3 + y_4)$

allora $z_1 = 1+4-5+7, z_2 = 3+5, z_3 = 2+4, z_4 = 1+3-2+6$

Esempio: in $Mat_{2\times 2}(\mathbb{F}_2)$ siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

allora $.1 = 0, .2 = 0, .3 = 1, .4 = 0, .5 = 0, .6 = 0, .7 = 0$
quindi $AB = \begin{pmatrix} .1+.4-.5+.7 & .3+.5 \\ .2+.5 & .1+.3-.2+.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Nell'algoritmo di Strassen per matrici 2 x 2 si eseguono 7 moltiplicazioni.
L'algoritmo può anche essere usato ricorsivamente per motiplicare matici più grandi.
ad esempio, se $M, N \in Mat_{4\times 4}(K)$, possiamo scrivere:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ e } N = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

dove $A, B, C, D, A', B', C', D' \in Mat_{2\times 2}(K)$

poiche $MN = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$

possiamo usare l'algoritmo in due passi.
primo passo:

1. $(A+D)(A'+D')$
2. $(C+D)A'$
3. $A(B'+D')$
4. $D(-A'+C')$
5. $(A+B)D'$
6. $(-A+C)(A'+B')$
7. $(B-D)(C'+D')$

e quindi $MN = \begin{pmatrix} .1+.4-.5+.7 & .2+.5 \\ .3+.4 & .1+.3-.2+.6 \end{pmatrix}$
secondo passo: calcoliamo il prodotto in (.1, .2, 3, ... , .7) con l'algoritmo di Strassen.

Quindi l'algoritmo di Strassen per il prodotto tra due matrici 4 x 4 richiede
7^2 moltiplicazioni.
se vogliamo moltiplicare matrici 3 x 3
possiamo aggiungerre una riga e una colonna di zeri e considerarle 4 x 4.

In generale la moltiplicazione di due matrici n x n usando l'algoritmo di Strassen richiede
7^k moltiplicazioni se $n = 2^k$
abbiamo che

$$7^k = 2^{\log_2 7^k} = 2^{k \log_2 7} \approx 2^{2.81}$$

Definizione: ***L'esponente w*** *della moltiplicazione di matrici è*
$w := INF\{h \in \mathbb{R} : Mat_{n\times n}(K)$ *può essere moltiplicato con* $O(n^h)$ *operazioni aritmrtiche*
$\}$

L'algoritmo di Strassen mostra che $w \leq 2.81$.
Se n = 2 l'algoritmo di Strassen è ottimale (dal Teorema di Brockett- Dobkin).
Non è noto un algoritmo ottimale per la moltiplicazione matrici 3 x 3.
Nel 2022 è stato pubblicato un algoritmo trovato da Alphatensor per matrici 4 x 4 su $\mathbb{F}_2$ che richiede l'esecuzione di 47 moltiplicazioni, l'algoritmo di Strassen ne richiederebbe 49.

2.1.1 Anello degli endomorfismi

Definizione: *Siano V, W spazi vettoriale su un campo K.*
una funzione $f : V \to W$ *è un endomorfismo di spazi vettoriali se:*

$$f(av_1 + bv_2) = af(v_1) + bf(v_2) \forall a, b \in K, v_1, v_2 \in K$$

Un morfismo $f : V \to V$ *di spazi vettoriali è detto endomorfismo di* V.
L'insieme $End(V) = \{f : V \to V : f$ *è un endomorfismo di* $V\}$
E' un anello con le operazioni di somma e composizione di funzioni.
con unità la funzione identità $Id_v : V \to V$.
se $dim(V) > 1$ *l'anello non è commutativo.*

Definizione: *sia* $Mat_{n\times n}(K)$ *l'insieme delle matrici n x n a coefficienti in K.*
con le operazioni di somma e prodotto righe per colonne,
L'insieme $Mat_{n\times n}(K)$ *è un anello, con unità la matrice identità*

$$Id_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Ad un endomorfismo $f \in End(V)$, se $dim(V) = n$, possiamo associare una matrice nel seuente modo:
Sia$\{e_1, ...e_n\}$ una base di V.
Sia $f(e_1) = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + ... + anie_n, a_{1i}, ..., a_{ni} \in K \forall 1 \leq i \leq n.$
allora la matrice M(f) associata a f è:

$$\begin{pmatrix} a_{1i} \\ ... \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

Teorema: *sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo K. allora la funzione*

$$M : End(V) \to Mat_{n\times n}(K)$$
$$f \to M(f)$$

è un isomorfismo di anelli. (non lo dimostriamo perchè semplice)

Esempio: si consideri il campo $\mathbb{F}_4 := {}^{\mathbb{F}_2[x]}/_{1+x+x^2}$.
$\mathbb{F}_4$ è uno spazio vettoriale di dimensione 2 sul campo $\mathbb{F}_2$.
nella base $\{1, x\} di \mathbb{F}_4$ l'automorfismo di Frobenius

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{F}_4 &\to \mathbb{F}_4 \\ v &\to v^2 \end{aligned}$$

che è un morfismo di spazi vettoriali ($\Phi(y) = y \forall y \in \mathbb{F}_2$),
è rappresentato dalla matrice

$$M(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

infatti $\Phi(1) = 1, \Phi(x) = x^2 = 1 + x$.
dato che $[(\Phi)]^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ una rappresentazione matriciale di $Aut(\mathbb{F}_4)$ è

$$\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$$

in rappresentazione matriciale gli endomorfismi di $\mathbb{F}_4$, come spazio vettoriale,
sono l'insieme di 16 matrici

$$Mat_{2\times 2}(\mathbb{F}_2) = \{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_i \in \mathbb{F}_2 \}$$

Esempio (automorfismi di $\mathbb{F}_4$ come s.v. su $\mathbb{F}_2$)**:** sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matrice invertibile a coefficienti in $\mathbb{F}_2$.
A rappresenta un automorfismo di $\mathbb{F}_4$ come spazio vettoriale.
A è invertibile se e solo se il determinante di A è diverso da 0 (quindi deve essere 1).

- $a = 0 \implies bc = 1 \implies b = c = 1$
- $b = 0 \implies ad = 1 \implies a = d = 1$
- $c = 0 \implies ad = 1 \implies a = d = 1$
- $d = 0 \implies bc = 1 \implies b = c = 1$

quindi, come spazio vettoriale,

$$Aut(\mathbb{F}_4) = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \}$$

invece come campo avevamo che

$$Aut(\mathbb{F}_4) = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \} = \{Id, \Phi\}$$

2.2 Spazio duale di uno spazio vettoriale

Definizione: *Sia V unio spazio vettoriale di dimenzione n su un campo K.*
Sia $\{e_1, ..., e_n\}$ una base di V.
L'insieme

$$V^* = \{f : V \to K : f \text{ è un morfismo di spazi vettoriali } \}$$

*è detto **spazio duale di V**.*
sia

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

L'insieme $\{e_1^*, ..., e_n^*\}$ è una base di V^*. in paricolare $dim(V^*) = dim(V) = n$.

Esempio: Sia $V = (\mathbb{F}_2)^4$ e sia $f \in V^*$ definita da

$$f(x) =< \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x >$$

dove $<,>$ è il prodotto scalare standard.

Dunque, se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $f(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ e $f = e_1^* + e_2^* + e_3^* + e_4^*$.

ad esempio $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 1 + 1 + 1 + 1 = 0$, $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 0 + 1 + 1 + 1 = 1$

2.3 Forme bilineari e prodotto tensoriale

Definizione: *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo K.*
Indichiamo con $\{e_1, ..., e_n\}$ una base di V.
Una funzione $f : V \times V \to K$ è detta ***forma bilineare*** *su V se:*

- $f(av_1, v_2) = f(v_1, av_2) = af(v_1, v_2), \forall a \in K, v_1, v_2 \in V$
- $f(v_1 + v_2, w) = f(v_1, w) + f(v_2, w)$
  $f(w, v_1 + v_2) = f(w, v_1) + f(w, v_2), \forall v_1, v_2, w \in V$

Definizione: *Siano $f, f_1, f_2 : V \times V \to K$ forme bilineari.*
Se definiamo

- $f_1 + f_2 : V \times V \to K$ *come* $(f_1 + f_2)(v, w) = f_1(v, w) + f_2(v, w), \forall v, w \in V$
- $af : V \times V \to K$ *con* $(af)(v, w) = af(v, w), \forall v, w \in V e a \in K$

allora $f_1 + f_2$ e af sono forme bilineari.
Quindi l'insieme delle forme bilineari su V è uno spazio vettoriale che denotiamo con

$$V^* \otimes V^*$$

Prodotto tensoriale di V^* con V^*

Siano $1 \leq i, j \leq n$, indichiamo con $e_i^* \otimes e_j^* : V \times V \to K$ la forma bilineare su V tale che:

$$(e_i^* \otimes e_j^*)(e_h, e_k) = \delta_{ih}\delta_{jk} = \begin{cases} 1_k \text{ se } i = h, j = k \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$\text{dove } \delta_{ih} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = h \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases} \quad \text{è la delta di Kronecker.}$$

L'insieme $\{e_i^* \otimes e_j^* : 1 \leq i, j \leq n\}$ è una base di $V^* \otimes V^*$.
Abbiamo che

$$\{e_i^* \otimes e_j^*(e_h, e_k) = e_i^*(e_h)e_j^*(e_k).$$

Se $u, v \in V^*$ allora $u \otimes v(x, y) = u(x)v(y), \forall x, y \in V$.
Se $u = u_1e_1^* + ... + u_ne_n^*$ e $v = v_1e_1^* + ... + v_ne_n^*$
allora $u \otimes v = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_iv_je_i^* \otimes e_j^*(x, y)$.
Quindi $(u_1e_1^* + ... + u_ne_n^*) \otimes (v = v_1e_1^* + ... + v_ne_n^*) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n u_iv_je_i^* \otimes e_j^*$.

Esempio: sia $< \cdot, \cdot >$ il prodotto scalare canonico su $\mathbb{K}^n$, ossia
se $v = v_1e_1 + ... + v_ne_n$ e $w = w_1e_1 + ... + w_ne_n$ allora
$< v, w >= v_1w_1 + ... + v_nw_n$.
il prodotto scalare canonico è una forma bilineare simmetrica su V.
come elemento di $(K^n)^* \otimes (K^n)^*$ si scrive

$$e_1^* \otimes e_1^* + e_2^* \otimes e_2^* + ... + e_n^* \otimes e_n^*$$

Ad una forma bilineare f su V possimao associare una matrice $M(f)$ in $Mat_{n\times n}(K)$ nel seuente modo:
La componente $M(f)_{ij}$ di coordinate i, j è l'elemento $f(e_i, e_j) \in K$,
In tal modo $f(u, v) =< u, M(f)v > \forall u, v \in V$.
cioè $M(f)_{ij} =$ coordinata di f nella base $\{e_i^* \otimes e_j^*\}$ di $V^* \otimes V^*$

Esempio: alcune matrici associate:

- la matrice del prodotto scalare canonico è la matrice identità.
- alla forma bilineare
$$e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^* \in (K^2)^* \otimes (K^2)^*$$
corrisponde la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ si nota che è una forma bilineare antisimmetrica.
- La forma bilineare antisimmetrica
$$e_1^* \otimes e_3^* - e_3^* \otimes e_1^* + e_2^* \otimes e_4^* - e_4^* \otimes e_2^* \in (K^4)^* \otimes (K^4)^*$$
è detta forma simplettica, e la sua matrice associata è $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Abbiamo quindi definito un isomorfismo di spazi vettoriali
$$M : V^* \otimes V^* \to Mat_{n\times n}(K)$$
$$f \to M(f)$$

Quindi se
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}(K)$$

La forma bilineare $f \in V^* \otimes V^*$ associata a A è
$$f = (a_{11}e_1^* + ... + a_{n1}e_n^*) \otimes e_1^* + ... + (a_{1n}e_1^* + ... + a_{nn}e_n^*) \otimes e_n^*$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{F}_3)$
$f = (e_1^* + 2e_2^*) \otimes e_1^* + (2e_1^* + e_2^*) \otimes e_2^* = e_1^* \otimes e_1^* + 2e_2^* \otimes e_1^* + 2e_1^* \otimes e_2^* + e_2^* \otimes e_2^*$

Nota: essend $v^* \otimes V^*$ lo spazzio vettoriale delle forme bilineare su V, si ha che:

1. $a(e_i^* \otimes e_j^*) = (ae_i^*) \otimes e_j^* = e_i^* \otimes (ae_j^*)$
2. $e_i^* \otimes (e_j^* + e_k^*) = e_i^* \otimes e_j^* + e_i^* \otimes e_k^*$

Esempio: siano $v_1 = 3e_1^* + 2e_2^* + e_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ e $v_2 = e_2^* - \sqrt{3}e_3^* \in (\mathbb{R}^3)^*$
Allora $v_1 \otimes v_2 = (3e_1^* + 2e_2^* + e_3^*) \otimes (e_2^* - \sqrt{3}e_3^*) =$
$3e_1^* \otimes e_2^* - 3\sqrt{3}e_1^* \otimes e_3^* + 2e_2^* \otimes e_2^* - 2\sqrt{3}e_2^* \otimes e_3^* + e_3^* \otimes e_2^* - \sqrt{3}e_3^* \otimes e_3^*$

Definizione: *Siano $V_1, V_2, ..., V_k$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{F}$.*
una funzione

$$f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_k \to \mathbb{F}$$

è detta forma multilineare se è lineare rispetto ad ogni variabile.
cioè se:

1. $f(av_1, ..., v_k) = f(v_1, av_2, ..., v_k) = ... = f(v_1, ..., av_k) = af(v_1, ...v_k) \forall a \in \mathbb{F}, v_i \in V_i$
2. $f(v_1 + w_1, v_2, ..., v_k) = f(v_1, ..., v_k) + f(w_1, ..., v_k)$
   ...
   $f(v_1, v_2, ..., v_k + w_k) = f(v_1, ..., v_k) + f(v_1, ..., w_k)$
   $\forall v_i, w_i \in V_i$

2.3.1 Prodotto tensoriale di spazi vettoriali

Definizione: *Siano $V_1, V_2, ..., V_k$ spazi vettoriali su un campo $\mathbb{F}$.*
Definiamo $V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_k$ lo spazio vettoriale delle forme multilineari

$$f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_k \to \mathbb{F}$$

Una base di $V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_k$ è l'insieme

$$\{e_{i_1}^{1^*} \otimes e_{i_2}^{2^*} \otimes ... \otimes e_{i_k}^{k^*} : 1 \leq i_1 \leq dim(V_1), ..., 1 \leq i : k \leq dim(V_k)\}$$

dove $\{e_{i_1}^{1^*}\}$ è una base di V_1^*, ecc.

2.4 Rango di una matrice

Definizione: *Sia $A \in Mat_{h\times k}(\mathbb{F})$ una matrice $h \times k$.*
Il rango di A è definito come:

$$\begin{aligned} rk(A) &:= n^\circ \textit{ massumo di colonne linearmente indipendenti} \\ &= n^\circ \textit{ massimo di righe linearmente indipendenti} \end{aligned}$$

si verifica facilmente che ogni matrice si può scrivere come combinazione lineare di matrici di rango 1.
sia $X = \{A \in Mat_{h\times k}(\mathbb{F}) : rk(A) = 1\}$, allora si ha che

$$rk(A) = min\{k \in \mathbb{N} : A = \textstyle\sum_{i=1}^{k} M_i, M_i \in X, \forall 1 \leq i \leq k\}$$

Esempio: la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, e si ha che:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

che è una combinazione lineare di matrici di rango 1, un altra è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ovviamente è la minima perchè $rk(A) = 2$

Come è fatta una matrice di rango 1 in $Mat_{a\times b}(K)$?
tutte le sue colonne sono proporzionali ad un vettore colonna $\overrightarrow{v} \in K^a \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.
Quindi, se $A \in Mat_{a\times b}(K)$ e $rk(A) = 1$, esistono $a_1, ..., a_b \in K$ tali che:

$$A = \begin{pmatrix} a_1\overrightarrow{v} & a_2\overrightarrow{v} & ... & a_b\overrightarrow{v} \end{pmatrix}$$
$$\text{quindi } A = \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_b \end{pmatrix} = \overrightarrow{v}\,\overrightarrow{a}^T$$
$$\text{dove } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_b \end{pmatrix} \in K^b \setminus \{\overrightarrow{0}\}$$

Come è fatta una matrice $A \in Mat_{a\times b}(K)$ di rango k?
siano $\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_k} \in K^a \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ colonne linearmente indipendenti.
le altre colonne sono combinazione lineare di queste e quindi esistono $\overrightarrow{a_1}, ..., \overrightarrow{a_k} \in K^b \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ tali che:

$$A = \overrightarrow{v_1}\overrightarrow{a_1}^T + ... + \overrightarrow{v_k}\overrightarrow{a_k}^T$$

cioè A si scrive come somma di k matrici di rango 1.
se si potesse scrivere con meno addendi avrebbe rango $< k$.
quindi $rk(A) = min\{k \in N : A = \sum_{i=1}^{k} M_i, rk(M_i) = 1 \forall 1 \leq i \leq k\}$

D'ora in poi se $V_1, ..., V_h$ sono spazi vettoriali su un campo K con basi

$$\{v_1^1, ...v_{i_1}^1\}, \{v_1^2, ...v_{i_2}^2\}, ..., \{v_1^h, ...v_{i_h}^h\}$$

allora $V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_h$ è uno spazio vettoriale con base

$$\{v_{j_1}^1 \otimes v_{j_2}^2 \otimes ... \otimes v_{j_h}^h : 1 \leq j_1 \leq i_1, ..., 1 \leq j_h \leq i_h\}$$

che soddisfa le seguenti Relazioni:

1. $a(v_{j_1}^1 \otimes v_{j_2}^2 \otimes ... \otimes v_{j_h}^h) = (av_{j_1}^1) \otimes v_{j_2}^2 \otimes ... \otimes v_{j_h}^h = ... = v_{j_1}^1 \otimes v_{j_2}^2 \otimes ... \otimes (av_{j_h}^h)$,
   $\forall a \in K, 1 \leq j_1 \leq i_1, ..., 1 \leq j_h \leq i_h$

2. $(v_1 + w_1) \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_h = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_h + w_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_h$
   ...
   $v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes (v_h + w_h) = v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_h + v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes w_h$
   $\forall v_i, w_i \in V_i, 1 \leq i \leq h$

L'insieme $\{v_1 \otimes v_2 \otimes ... \otimes v_h : v_i \in V_i \forall 1 \leq i \leq h\}$
è **L'insieme dei tensori di rango 1 di** $V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_h$

2.4.1 Rango di un tensore

Ogni elemento di $V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_h$ si scrive come combinazione lineare di tensori di rango 1.
infatti la base $\{v_{j_1}^1 \otimes v_{j_2}^2 \otimes ... \otimes v_{j_h}^h\}$ è costituita da tensori di rango 1.

Definizione: *Sia $T \in V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_k$.*
definiamo ***rango di T*** *e lo indichiamo* ***rk(T)*** *il minimo $r \in \mathbb{N}$ tale che:*

$$T = \sum_{i=1}^{r} T_i$$

dove $T_i \in V_1 \otimes V_2 \otimes ... \otimes V_k$ sono di rango 1, $\forall 1 \leq i \leq r$.

Esempio: sia U con base $\{u_1, u_2\}$, V con base $\{v_1, v_2\}$ e W con base $\{w_1, w_2\}$.

- $T : u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_2 \otimes v_2 \otimes w_2 \in U \otimes V \otimes W$
  ha rango 1. infatti $T = u_1 \otimes v_1 \otimes (v_1 + v_2) \otimes w_1$.

- $T : u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_2 \otimes v_2 \otimes w_2 + u_1 \otimes v_2 \otimes w_1 + u_2 \otimes v_1 \otimes w_2 \in U \otimes V \otimes W$
  ha rango 2. infatti l'unica fattorizzazione possibile è
  $T = (u_1 \otimes v_1 + u_2 \otimes v_2 \otimes v_2) \otimes w_1$ che non è un tensore di rango 1.

- $T = u_1 \otimes v_1 \otimes w_1 + u_2 \otimes v_2 \otimes w_2 \in U \otimes V \otimes W$ ha rango 2.

Poiché $dim(\otimes_{i=1}^h V_i) = \prod_{i=1}^h dim(V_i)$, abbiamo che, se $T \in \otimes_{i=1}^h V_i$
allora $rk(T) \leq \prod_{i=1}^h dim(V_i)$, poiche $\otimes_{i=1}^h V_i$ ha una base fatta di tensori di rango 1.

Ora verifichiamo che la nozione di rango di un Tensore è coerente con quella di rango di una matrice,
interpretando una matrice come forma bilineare, e quindi come un tensore.
Vediamo subito che una matrice di rango 1 corrisponde ad un tensore di rango 1.
Una matrice $m \times n$ di rango 1 h come colonne multipli di un vettore $v \in K^m \setminus \{0\}$.
La prima colonna sia $a_1 v$, la seconda $a_2 v$, ... , $a_n v, a_i \in K$
Quindi tale matrice di rango 1 si scrive come

$$A = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{v}\overrightarrow{a}^T$$

Come forma bilineare è il seguente elemento di $(K^m)^* \otimes (K^n)^*$:

$$v_1 a_1 e_1^* \otimes e_1^* + v_2 a_1 e_2^* \otimes e_1^* + \dots + v_1 a_2 e_1^* \otimes e_2^* + v_2 a_2 e_2^* \otimes e_2^* + \dots + v_1 a_n e_1^* \otimes e_n^* + \dots + v_m a_n e_m^* \otimes e_n^* =$$
$$= (v_1 e_1^* + \dots + v_m e_m^*) \otimes a_1 e_1^* + (v_1 e_1^* + v_m e_m^*) \otimes a_2 e_2^* + \dots + (v_1 e_1^* + \dots + v_m e_m^*) \otimes a_n e_n^* =$$
$$(v_1 e_1^* + \dots + v_m e_m^*) \otimes (a_1 e_1^* + \dots + a_n e_n^*)$$

Dunque una matrice $A \in Mat_{m \times n}(K)$ tale che $rk(A) = 1$ corrisponde ad un tensore

$$T_A \in (K^m)^* \otimes (K^n)^* \text{ tale che } rk(T_A) = 1.$$

Esempio: La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times3}(\mathbb{F}_3)$$

Ha rango 1 perchè $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in $(\mathbb{F}_3)^2$
ad A corrisponde la forma bilineare $T_A : (\mathbb{F}_3)^2 \times (\mathbb{F}_3)^3 \to \mathbb{F}_3$ definita da

$$T_A(u, v) = u^T A v, \forall u \in (\mathbb{F}_3)^2, v \in (\mathbb{F}_3)^3$$
(u^T è il trasposto del vettore colonna u)

come elemento di $(\mathbb{F}_3^2)^* \otimes (\mathbb{F}_3^3)^*$ si scrive

$$T_A = e_1^* \otimes e_1^* + 2e_2^* \otimes e_1^* + 2e_1^+ \otimes e_3^* + e_2^* \otimes e_3^* =$$
$$(e_1^* + 2e_2^*) \otimes e_1^* + (2e_1^* + e_2^*) \otimes e_3^* =$$
$$(e_1^* + 2e_2^*) \otimes (e_1^* + e_3^*)$$

D'altra parte avevamo che $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sul campo $\mathbb{F}_3$

Ovviamente ad un Tnsore di rango 1 $v_1 \otimes v_2 \in (K^m)^* \otimes (K^n)^*$
corrisponde una matrice di rango 1 $v_1 v_2^T \in Mat_{m \times n}(K)$
dove v_i sono i vettori colonna delle coordinate nella base duale.

Esempio: sia $(2e_1^* + 3e_2^*) \otimes (e_2^* + 4e_3^*) \in (\mathbb{F}_5^2)^* \otimes (\mathbb{F}_5^3)^*$
La matrice corrispondente è

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times3}(\mathbb{F}_5)$$

Quindi abbiamo dato una corrispondenza biunivoca
tra matrici di rango $1 \in Mat_{m\times n}(K)$ e tensori di rango $1 \in (K^m)^* \otimes (K^n)^*$.
Dalla caratterizzazione del rango di una matrice in termini di combinazioni lineari di matrici di rango 1,
e dalla definizione di rango di un tensore, segie che le matrici di rango r in $Mat_{m\times n}(K)$ stanno in corrispondenza con i tensori di rango r in $(K^m)^* \otimes (K^n)^*$.

2.5 endomorfismi di V come elementi di $V^* \otimes V$

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K con base $\{e_1, ..., e_n\}$.
Gli elementi di $V^* \otimes V = span\{e_i^* \otimes e_j\}$
possono essere interpretati come endomorfismi di V nel segueente modo:
definiamo il morfismo di spazi vettoriali

$$e_i^* \otimes e_j : V \to V$$

ponendo $(e_i^* \otimes e_j)(v) = \begin{cases} e_j^{\text{se}} \ h = i \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$, ossia $(e_i^* \otimes e_j)(e_h) = e_i^*(e_h)e_i \forall 1 \leq i, j, h \leq n$.

se $f \in END(V)$ è rappresentato dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

allora come elemento di $V^* \otimes V$ si scrive

$$f = e_1^* \otimes (a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{n1}e_n) + ... + e_n^* \otimes (a_{1n}e_1 + ... + a_{nn}e_n).$$

viceversa, ogni elemento di $V^* \otimes V$ può essere interpretato come un endomorfismo di V e tale corrispondenza biunivoca è un isomorfismo di spazi vettoriali

$$END(V) \to V^* \otimes V$$

Esempio: sia $V \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali.
La funzione

$$f : Mat_{2\times 2}(\mathbb{R} \to Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
$$A \to A^T$$

è un morfismo di spazi vettoriali.
una base di V è $\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq 2\}$, dove

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice di f in questa base è

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, rk(M(f) = 4)$$

come elemento di $V^* \otimes V$ la trasposizione si scrive

$$f = E_{11}^* \otimes E_{11} + E_{12}^* \otimes E_{21} + E_{21}^* \otimes E_{12} + E_{22}^* \otimes E_{22}, rk(f) = 4$$

Invece l'elemento $g \in V^* \otimes V$ definito da

$$g = 2E_{11}^* \otimes E_{11} + E_{12}^* \otimes (E_{12} + E_{21}) + E_{21}^* \otimes (E_{12} + E_{21}) + 2E_{22}^* \otimes E_{22} =$$
$$2E_{11}^* \otimes E_{11} + (E_{12}^* + E_{21}^*) \otimes (E_{12} + E_{21}) + 2E_{22}^* \otimes E_{22}, rk(g) = 3$$

corrisponde all'endomorfismo

$$g : Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
$$A \to A + A^T$$

In generale i morfismi di spazi verroeiali $f : V \to W$ sono in corrispondenza biunivoca con $V^* \otimes W$ e tale corrispondenza è un isomorfismo di spazi vettoriali

$$Hom(V, W) \to V^* \otimes W$$
spazio vettoriale dei morfismi $f : V \to W$

il rango di un morfismo $f : V \to W$ (come dimensione della sua immagine o come rango della sua matrice associata) corrisponde al rango del tensore $f \in V^* \otimes W$.

Ancora più in genrale, ogni forma multilineare $f : V_1 \times ... \times V_h \to W$
è un elemento di $V_1^* \otimes ... \otimes V_h^* \otimes W$.
posto

$$e_{i_1}^{1^*} \otimes e_{i_2}^{2^*} \otimes ... \otimes e_{i_h}^{h^*} \otimes w(v_1, v_2, ...v_h) =$$
$$e_{i_1}^{1^*}(v_1) e_{i_2}^{2^*}(v_2) ... e_{i_h}^{h^*}(v_h) w \in W$$
$$\forall 1 \leq i_1 \leq V_1, ..., 1 \leq i_h \leq dim V_h, v_i \in V_i, w \in W$$

Adesso andiamo a considerare la moltiplicazione di matrici 2×2.
Questa è una forma bilineare

$$M_{2,2,2} : Mat_{2\times 2}(K) \times Mat_{2\times 2}(K) \to Mat_{2\times 2}(K)$$

definita da $M_{2,2,2}(A, B) = AB$ (prodotto righe per colonne).
E' una forma bilineare perchè

1. $x(AB) = (xA)B = A(xB), \forall x \in K, A, B \in Mat_{2\times 2}(K)$
2. $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$
   $(A_1 + A_2)B = A_1 B + A_2 B, \forall A_1, A_2, B_1, B_2, A, B, \in Mat_{2\times 2}(K)$

quindi $M_{2,2,2} \in (Mat_{2\times 2}(K))^* \otimes (Mat_{2\times 2}(K))^* \otimes Mat_{2\times 2}(K)$
vediamo come scrivere $M_{2,2,2}$ nella base

$$\{E_{ij}^* \otimes E_{h,k}^* \otimes E_{uv}\}, \text{ dove}$$
$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

abbiamo che $E_{11}E_{11} = E_{11}, E_{12}E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, ..., E_{22}E_{22} = e_{22}$, ossia

$$E_{ij}E_{hk} = \begin{cases} E_{ik} \text{ se } j = h \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

quindi

$$M_{2,2,2} = E^*_{11} \otimes E^*_{11} \otimes E_{11} + E^*_{12} \otimes E^*_{21} \otimes E_{11} + E^*_{11} \otimes E^*_{12} \otimes E_{12} + E^*_{12} \otimes E^*_{22} \otimes E_{12} + E^*_{21} \otimes E^*_{11} \otimes E_{21} + E^*_{21} \otimes E^*_{12} \otimes E_{12} + E^*_{22} \otimes E^*_{22} \otimes E_{22} + E^*_{22} \otimes E^*_{21} \otimes E_{21}$$

$rk(M_{2,2,2} \leq 8)$.
abbiamo anche che

$$\begin{gathered} M_{2,2,2} = (E^*_{11} + E^*_{22}) \otimes (E^*_{11} + E^*_{22}) \otimes (E_{11} + E_{22}) + \\ +(E^*_{21} + E^*_{22}) \otimes E^*_{11} \otimes (E_{21} - E_{22}) + \\ +E^*_{11} \otimes (E^*_{12} - E^*_{22}) \otimes (E_{12} + E_{22}) + \\ +E^*_{22} \otimes (-E^*_{11} + E^*_{21}) \otimes (E_{12} + E_{22}) + \\ +(E^*_{11} + E^*_{12}) \otimes E^*_{22} \otimes (-E_{11} + E_{12}) + \\ +(-E^*_{11} + E^*_{21}) \otimes (E^*_{11} + E^*_{12}) \otimes E_{22} + \\ +(E^*_{12} - E^*_{22}) \otimes (E^*_{21} + E^*_{22}) \otimes E_{11} \end{gathered}$$

da questa fattorizzazione si ha che $rk(M_{2,2,2}) \leq 7$.
Questa fattorizzasione è l'algoritmo di Strassen per la moltiplicazione di matrici 2×2.
Notiamo che, se $A, B \in Mat_{2,2}(K)$,

$$E^*_{ij} \otimes E^*_{hk} \otimes E^*_{uv}(A, B) = E_{ij}(A) E_{hk}(B) E_{uv}$$

Quindi ogni addendo in una fattorizzazione del tensore $M_{2,2,2}$ corrisponde ad una moltiplicazione di elementi del campo K.
Allora il rango del tensore $M_{2,2,2}$ è il numero massimo di moltiplicazioni necessarie per calcolare il prodotto di due matrici 2×2.

Alcuni risultati generali

Teorema (di Brockett-Dobkin (1978))***:*** *consideriamo il campo* $K = \mathbb{C}$
$rk(M_{n,n,n} \geq 2n^2 - 1)$
($M_{n,n,n}$ *è il tensore della moltiplicazione di due matrici* $n \times n$ *sul cmapo* $\mathbb{C}$*)*

Corollario: $rk(M_{2,2,2} = 7)$
infatti dall'algoritmo di Strassen segue che $rk(M_{2,2,2}) \leq 7$,
e dal teorema di Brockett-Dobkin segue che $rk(M_{2,2,2}) \geq 7$.

Teorema (di Bläser (1999))***:*** $rk(M_{n,n,n}) \geq \frac{5}{2}n^2 - 3n$

Teorema (di Laderman (1976))***:*** $rk(M_{n,n,n}) \leq 23$

Teorema (Deepmind (2022))***:*** *sul campo* $\mathbb{F}_2$
$rk(M_{4,4,4}) \leq 47$
$rk(M_{5,5,5}) \leq 96$

Teorema (di Kauers e Moosbauer (2022))***:*** *sul campo* $\mathbb{F}_2$
$rk(M_{5,5,5}) \leq 95$

vedi anche la tabella a pagina 4 dell'articolo
"discovering faser matrix multiplication algorithms with reinforcement learning"