Secondo parziale di Geometria (Ing. Informatica) 21-12-2009-A

1) Determinare:

a) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali la minima distanza tra le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z - 4 \\ y = 3z + 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2z + \alpha \\ y = 4z + \beta \end{cases}$$

sia uguale a $\sqrt{5}$;

b) le equazioni delle eventuali sfere S aventi il centro C sulla retta $r \equiv \begin{cases} x = -z - 1 \\ y = 2z + 5 \end{cases}$ e tangenti i piani $\pi \equiv 2x + 3y - 6z - 19 = 0$ e $\pi_1 \equiv 2x + 3y - 6z - 15 = 0$.

2) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \beta \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$,

a) determinare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile,

b) per $\alpha = 3$ esprimere A^3 come combinazione lineare di A^2, A, I_3.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} -14 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Trovare una base ortonormale $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A.

b) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

c) Trovare $M_\beta((x, y, z))$.

d) Detta f_A la funzione lineare associata ad A, trovare $< f_A((1, 1, 1)), (1, 0, 1) >$.

4) Sia f l'operatore lineare in $\mathbf{R}^3$ per il quale

$$f((1, 0, 0)) = (1, 1, 2), f((0, 1, 0)) = (-1, 1, 0), f((0, 0, 1)) = (1, -2, -1).$$

a) Trovare $f((x, y, z))$

b) Trovare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine di f (N_f, I_f).

c) Dire se f è iniettiva o suriettiva.

Facoltativo. Dimostrare che se $f : V \to V'$ è una funzione lineare e $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ è una base di V, allora $S' = (f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n))$ genera I_f.

Secondo parziale di Geometria (Ing. Informatica) 21-12-2009-B

1) Determinare:

a) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali la minima distanza tra le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = 4z - 1 \\ y = 3z - 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 4z + \alpha \\ y = z + \beta \end{cases}$$

sia uguale a $\sqrt{17}$;

b) le equazioni delle eventuali sfere S aventi il centro C sulla retta $r \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z - 5 \end{cases}$ e tangenti i piani $\pi \equiv 2x - 3y + 6z - 19 = 0$ e $\pi_1 \equiv 2x - 3y + 6z - 15 = 0$.

2) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \beta & -1 & 0 \\ 2 & 8 & \alpha \end{pmatrix}$,

a) determinare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile,

b) per $\alpha = -1$ esprimere A^3 come combinazione lineare di A^2, A, I_3.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -14 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Trovare una base ortonormale $\beta = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A.

b) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

c) Trovare $M_\beta((x, y, z))$.

d) Detta f_A la funzione lineare associata ad A, trovare $< f_A((1, 1, 1)), (1, 0, 1) >$.

4) Sia f l'operatore lineare in $\mathbf{R}^3$ per il quale

$$f((1, 0, 0)) = (1, 1, 2), f((0, 1, 0)) = (-1, 1, 0), f((0, 0, 1)) = (1, -2, -1).$$

a) Trovare $f((x, y, z))$

b) Trovare una base e la dimensione del nucleo e dell'immagine di f (N_f, I_f).

c) Dire se f è iniettiva o suriettiva.

Facoltativo. Dimostrare che se $f : V \to V'$ è una funzione lineare e $\beta = (\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_n)$ è una base di V, allora $S' = (f(\mathbf{v}_1), ..., f(\mathbf{v}_n))$ genera I_f.