Compito di Geometria e Algebra per Ing. Informatica ed Elettronica 24-01-2017

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f((x,y,z)) = (3x - y + 2z, 3y - 2z, \alpha x + y + 2z) \ \ \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

a) Per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ trovare un insieme di generatori, una base e la dimensione di I_f (immagine di$f$).

b) Trovare la dimensione di N_f (nucleo di f).

(In a),b) rispondere senza trovare esplicitamente N_f)

c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (0, \beta, 2)$ ad I_f, $\beta \in \mathbf{R}$.

2) Discutere i seguenti sistemi lineari

$$a) \begin{cases} x - \alpha y + 2z = -2 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ x + z = \beta \end{cases} \qquad b) \begin{cases} x - \alpha y + 2z - 2t = 0 \\ 2x + 3y - z + t = 0 \\ x + z + \beta t = 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali:

a) A è diagonalizzabile,

b) A è invertibile e risulta $9|A^{-1}| \leq \frac{1}{9}|A|$.

4) Sia $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Verificare che A è definita positiva e trovare $\sqrt{A}$.

c) (Vedi forme quadratiche) Verificare l'uguaglianza $Q((x,y)) = Q_1((x_1,y_1))$ con $(x,y) = (1,1)$.

5) Dati il piano $\pi \equiv x + y + z - 6 = 0$, la retta $r \equiv \begin{cases} x = 3z - 7 \\ y = 2z - 5 \end{cases}$ e il punto $P(1,3,2)$, trovare:

a) le equazioni ridotte della retta t passante per P, parallela a π e perpendicolare a r;

b) la distanza di P dalla retta r;

c) le equazioni delle (eventuali) sfere tangenti il piano π, di raggio $R = 2\sqrt{3}$ ed aventi il centro sulla retta r.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente motivati.