Compito di Geometria e Algebra per Ing. Informatica ed Elettronica 10-01-2017-A

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f((x,y,z)) = (y-2z, x+y+z, x+2y-z, x+kz) \quad k \in \mathbf{R}.$$

a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) e I_f (immagine di f).

b) Per i valori di k per i quali $\dim I_f = 2$, discutere l'appartenenza di $\mathbf{w} = (1,2,3,\alpha)$ ad I_f usando la riduzione a gradini ($\alpha \in \mathbf{R}$).

2) Discutere il seguente sistema lineare

$$a) \quad \begin{cases} 3x - 4y + 6z + 3t = \alpha \\ y + \beta t = 0 \\ x - 2y + \alpha z - t = 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

b) Discutere, al variare di $\beta \in \mathbf{R}$, il sistema lineare ottenuto dal precedente ponendo $\alpha = 0$.

3) a) Trovare l'operatore lineare f in $\mathbf{R}^2$ sapendo che

$$f((1,0)) = (2/\sqrt{5}, \alpha) \;\text{ e }\; f((0,1)) = (1/\sqrt{5}, \beta).$$

b) Determinare $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che la matrice A associata ad f sia una matrice ortogonale.

4) Sia $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Determinare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $< f_A((1,1,1)), (1,1,\alpha) >$ sia maggiore di $\mathrm{tr}(A)+4$, dove f_A è l'operatore lineare associato ad A.

5) Trovare:

a) le equazioni ridotte della retta passante per $P(1,2,3)$, parallela al piano $\pi \equiv x - 2y + z + 5 = 0$ e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = (1,-2,3)$;

b) la minima distanza tra le rette $r_1 \equiv \begin{cases} x = 3z + 5 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$, $r_2 \equiv \begin{cases} x = 3z - 5 \\ y = 4z + 2 \end{cases}$;

c) le equazioni delle (eventuali) rette contenute nel piano $\pi_1 \equiv x + y + z - 3 = 0$, passanti per $Q(1,1,1)$ e incidenti la retta $t \equiv \begin{cases} x = -2y \\ z = -2y \end{cases}$.

6) Trovare

a) l'equazione del cilindro che proietta la conica $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 4 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ parallelamente al vettore $\mathbf{v} = (2,1,1)$,

b) i vertici della conica $\mathcal{C}$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente motivati.