Compito di Geometria e Algebra per Ingegneria dell'Informazione 12-01-2010-A

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f((x,y,z)) = (x+2y-z, x+5z, 2x+3y+kz) \qquad (k \in \mathbf{R})$$

Al variare di k in $\mathbf{R}$
a) trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) e di I_f (immagine di f),
b) stabilire se f é iniettiva o suriettiva,
c) discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (3, \alpha, 3)$ ad I_f ($\alpha \in \mathbf{R}$).

2) Discutere

$$\begin{cases} \alpha x + 2y - t = 0 \\ 2x + y + 3z + t = 0 \\ 3x + 2y + 4z + \beta t = 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \quad \in \mathbf{R})$$

3) Sia $\quad A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.
a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.
b) Calcolare $(1\ 1\ 1) \cdot A_{-1}$.
c) Trovare gli eventuali $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $\det(A^{-1}) < -1/3$.

4) Sia $\quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
b) Dire "cosa" rappresentano geometricamente (in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$) gli autospazi di A.

5) Determinare:
a) le equazioni ridotte della retta passante per $P(2,-1,3)$, perpendicolare alla retta $t \equiv \begin{cases} x = z+4 \\ y = 2z+3 \end{cases}$ e parallela al piano $\pi \equiv 2x + 4y + z - 5 = 0$;
b) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che $d(r,s) = \sqrt{10}$ con

$$r \equiv \begin{cases} x = 3z - 5 \\ y = 2z + 7 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3z + \alpha \\ y = z + \beta \end{cases}$$

c) le equazioni delle eventuali sfere tangenti il piano $\pi_1 \equiv x+y+z-6=0$ in $Q(2,2,2)$ ed aventi il centro sul piano $\pi_2 \equiv x+y-z-3=0$.

6) Con il metodo del completamento dei quadrati studiare la conica $\mathcal{C} \equiv x^2+6x+y+8=0$ e tracciarne il grafico.