Secondo parziale di Geometria e Algebra (Informatica) 18-12-2013-A

1) Sia $f : \mathbf{P}_2(x) \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare così definita

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + b - c, 2a - b, ka + b - 2c) \quad (k \in \mathbf{R}) \; .$$

a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) ed I_f (immagine di f).

b) Stabilire se f è iniettiva e/o suriettiva.

c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (\alpha, 1, 3)$ ad I_f $(\alpha \in \mathbf{R})$.

2) Determinare:

a) gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & 0 \\ 2 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile,

b) per tali valori diagonalizzarla.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica) .

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Detto f_A l'operatore associato ad A (rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$), trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $f_A((1,1,1))$ sia ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (\alpha, 2, -4)$.

4) Determinare l'equazione del cono che proietta la curva $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2x = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ dal vertice $V(0, 0, -2)$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.