Secondo parziale di Geometria e Algebra (Meccanica) 19-12-2014-A

1) a) Trovare l'equazione del cono che proietta la circonferenza $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ z=1 \end{cases}$ dal vertice $V(0,0,4)$.

b) Trovare poi il centro ed il raggio della circonferenza L intersezione del cono (del punto a)) con il piano di equazione $z=-11$.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica) e sia T il tensore simmetrico associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Determinare la decomposizione spettrale del tensore T.

c) Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che T sia ortogonale a $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$, con $\mathbf{v} = (1, \alpha, 1)$, $\mathbf{w} = (1,1,1)$.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 \\ 2 & \alpha & 3 \end{pmatrix}$.

a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

b) Indicato con T il tensore associato ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ con $\alpha = 1$, trovare il tensore emisimmetrico E di vettore assiale $\mathbf{v}_1 = T((1,1,1)$.

4) a) Trovare il tensore $T((x,y))$ in $\mathbf{R}^2$ sapendo che $T((0,1)) = (-1, \alpha)$ e $T((-1,0)) = (-\alpha, -1)$ $\alpha \in \mathbf{R}$.

b) Determinare gli eventuali $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che T sia un tensore ortogonale e per tali valori descrivere "geometricamente" $T((x,y))$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.