Secondo parziale di Geometria e Algebra (Informatica) 19-12-2014-A

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare così definita

$$f((x,y,z)) = (-3x + y + kz, -x + y, 2x - z) \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, k \in \mathbf{R} .$$

a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) ed I_f (immagine di f).
b) Discutere, al variare di k, iniettività e suriettività di f.
c) Stabilire se $\mathbf{w} = (-2, 1, \alpha)$ appartiene ad I_f $(\alpha \in \mathbf{R})$.

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica) .
a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.
b) (Vedi forme quadratiche) Verificare l'uguaglianza $Q((x,y,z)) = Q_1((x_1,y_1,z_1))$ con $(x,y,z) = (1,1,1)$.
c) Stabilire se A è definita positiva, negativa o indefinita.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ -2 & 10 & 9 \end{pmatrix}$.
a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.
b) Detti f_A l'operatore in $\mathbf{R}^3$ associato ad A e $\mathbf{v} = (1,1,1)$, trovare gli eventuali $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali $< f_A(\mathbf{v}), \mathbf{v} >$ è minore dell'opposto della traccia di A.

4) a) Con il metodo del completamento dei quadrati studiare la parabola $\mathcal{P} \equiv 2x^2 + 4x + y = 0$ e tracciarne il grafico.
b) Trovare l'equazione del cono che proietta la curva $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} 2x^2 + 4x + y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$
dal vertice $V(0, -1, 0)$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.