Compito di Geometria e Algebra per Ing. Informatica ed Elettronica 18-12-2015-A

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f((x, y, z)) = (x + ky - z, x - 5y + z, x - 2y) \ \ \forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \ k \in \mathbf{R} \ .$$

a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) ed I_f (immagine di f).

b) Stabilire, al variare di k, se f è iniettiva o suriettiva.

c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (3, 5, \alpha)$ ad I_f, $\alpha \in \mathbf{R}$.

2) Discutere i seguenti sistemi lineari

$$a) \ \begin{cases} 2x - 2y + z = -1 \\ 4x - z = \beta \\ x + \alpha y + 2z = \alpha \end{cases} \qquad b) \ \begin{cases} 2x - 2y + z - t = 0 \\ 4x - z + \beta t = 0 \\ x + \alpha y + 2z + \alpha t = 0 \end{cases} \qquad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

3) Sia $\ A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 10 & \alpha & 0 \\ -2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

a) Trovare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

b) Indicato con f_A l'operatore lineare in $\mathbf{R}^3$ associato ad A, trovare la dimensione di I_{f_A} (immagine di f_A).

4) Sia $\ A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Detto f_A l'operatore in $\mathbf{R}^3$ associato ad A, trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $f_A((1, 1, 1))$ sia ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (-1, -2, \alpha)$.

5) Siano date le rette $r \equiv \begin{cases} x = 3z + 5 \\ y = 2z + 2 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 4z + 4 \\ y = 2z + 5 \end{cases}$. Trovare:

a) le equazioni ridotte della retta t passante per $P(1, 2, 3)$, e perpendicolare sia ad r che ad s,

b) le equazioni ridotte delle rette parallele ad r e tali che la loro distanza da s sia maggiore di $\sqrt{5}$,

c) l'equazione del cono L che proietta la curva $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} 2x^2 - 6y^2 - 1 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$

dal punto $V(0, 0, 1)$.

6) Trovare l'operatore lineare f in $\mathbf{R}^2$ sapendo che $f((1, 0)) = (1, -1)$ e che $(0, 1)$ è un autovettore di f associato all'autovalore $\lambda = 2$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente motivati.