

Compito di Geometria e Algebra per Ing. Informatica del 16-06-2010

4 C.F.U

1) Sia

$$W = \{(x + y + z, x - 2y - z, 3x + z, 2x - y) : x, y, z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4.$$

- Trovare una base e la dimensione di W .
- Discutere l'appartenenza di $\mathbf{w} = (2, 0, 0, k)$ a W ($k \in \mathbb{R}$).
- Risolvere a) e b) anche con il metodo della riduzione a gradini.

2) Siano:

$$(i) \begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ x + y = \beta \\ \alpha x + 3y + 2z = 4 \end{cases}, \quad (ii) \begin{cases} x - 2y - 3z - t = 0 \\ x + y + \beta t = 0 \\ \alpha x + 3y + 2z + 4t = 0 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

- Discutere (i).
- Trovare la dimensione del sottospazio di \mathbb{R}^4 delle soluzioni di (ii).

3) Sia $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Trovare:

- il rango di A al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
- gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

4) Sia $B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

- Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U .
- Verificare che la forma quadratica associata ad A è definita positiva e trovare $\Delta_{\sqrt{A}}(\lambda)$.

5) Sia $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione lineare tale che:

$$f(1, 0, 0) = (0, 2, 1), \quad f(1, 1, 0) = (-2, 2, 4), \quad f(0, 0, 1) = (-1, -3, 0).$$

Trovare:

- $f(x, y, z)$ / determinare se stabilire se f è suriettiva.
- la matrice A associata ad f ,

c) AB dove $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6) Determinare:

- le equazioni ridotte della retta passante per $P(2, -3, 1)$, perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = (2, 3, 1)$ e parallela al piano $\pi \equiv 2x - 3y + z - 5 = 0$;
- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ in modo che $d(r, s) < \sqrt{5}$, dove

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = 3z - 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2z + \alpha \\ y = -5z + \beta \end{cases};$$

- le equazioni delle eventuali sfere aventi il centro sulla retta $t \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 3z - 5 \end{cases}$ tangenti il piano $\pi \equiv 2x + 3y + z - 11 = 0$ e aventi raggio $R = \sqrt{14}$.