Compito di Geometria e Algebra per Ing. Informatica ed Elettronica del 14-02-2017

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare definita da

$$f((x,y,z)) = (2x - y, 5x - y - z, x + y - kz, 0) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ , \ k \in \mathbf{R} \ .$$

a) Trovare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) e I_f (immagine di f).

b) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (3, 9, \alpha, \beta)$ ad I_f ($\alpha \in \mathbf{R}$).

2) Discutere i seguenti sistemi lineari ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$):

$$\text{a)} \quad \begin{cases} -2x + 5y + 4z = \beta \\ x + 2y + \alpha z = 1 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases} \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} -2x + 5y + 4z + \beta t = 0 \\ x + 2y + \alpha z + t = 0 \\ 3y + 2z + t = 0 \end{cases}$$

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$).

Trovare

a) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile,

b) il rango di A al variare di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

4) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica).

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Detta $f_A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare associata ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che il vettore $\mathbf{v} = f_A(1,1,1)$ sia ortogonale a $\mathbf{w} = (1, 2, \alpha)$.

5) Trovare

a) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che la minima distanza tra le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = 2z + \alpha \\ y = 3z + \beta \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = 4z - 1 \end{cases}$$

sia minore di $\sqrt{5}$,

b) le equazioni dei piani paralleli al piano $\pi_2 \equiv 2x - 3y + 6z - 5 = 0$ la cui distanza dal centro C della sfera $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 22 = 0$ sia uguale al raggio di S.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente motivati.