Compito di Geometria e Algebra per Ingegneria Meccanica del 18-12-2015-A

1) Siano $W = \left\{ ax^2 + bx + c \ : \ \begin{cases} a - b + kc = 0 \\ a + b - 5c = 0 \\ b - 3c = 0 \end{cases} \right\} \sqsubseteq P_3(x) \quad , \quad k \in \mathbf{R} \quad$ e

$W_1 = \{(\alpha x + y + 2z, 3y - 2z, 3x - y + 2z) \ : \ x, y, z \in \mathbf{R}\} \sqsubseteq \mathbf{R}^3 \ , \ \alpha \in \mathbf{R}$.

a) Trovare, al variare di $k \in \mathbf{R}$, una base e la dimensione di W.

b) Trovare, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ una base e la dimensione di W_1.

c) Discutere l'appartenenza di $\mathbf{w} = (2, \beta, 0)$ a W_1 $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$.

2) Discutere i seguenti sistemi lineari $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} 6x + 2y + z = \beta \\ -2y + 3z = 2 \\ 3x + \alpha y - z = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} 6x + 2y + z + \beta t = 0 \\ -2y + 3z + 2t = 0 \\ 3x + \alpha y - z = 0 \end{cases} .$$

3) Sia $A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 2 \\ 0 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Trovare gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

b) Determinare $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che A sia invertibile e risulti $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{3}\mathrm{tr}(A)$.

4) Sia T il tensore (simmetrico) in $\mathbf{R}^3$ così definito: $T((x, y, z)) = (2x, y + 4z, 4y - 14z)$ e sia A la matrice ad esso associata rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Trovare la decomposizione spettrale di T.

c) Trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che T sia ortogonale a $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} = (1, \alpha, 0), \mathbf{w} = (1, 1, 0)$.

5) Determinare:

a) le equazioni ridotte della retta passante t passante per $P(1, 2, 3)$ perpendicolare alla retta $r \equiv \begin{cases} y = 2x + 4 \\ z = 3x + 7 \end{cases}$ e parallela al piano $\pi \equiv x - y + 3z + 8 = 0$.

b) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ in modo che la minima distanza tra le rette

$$r_1 \equiv \begin{cases} y = x + 5 \\ z = -5x + 3 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 \equiv \begin{cases} y = 4x + \alpha \\ z = -5x + \beta \end{cases}$$

sia minore di $2\sqrt{26}$.

c) Trovare l'equazione e classificare il cilindro L che proietta la curva $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} 3x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ parallelamente alla retta $r_3 \equiv \begin{cases} x = 2z + 5 \\ y = -3z + 7 \end{cases}$.

6) Trovare il tensore T in $\mathbf{R}^2$ sapendo che $T((1, 4)) = (1, 1)$ e che $(1, 3)$ è un autovettore di T associato all'autovalore $\lambda = -2$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente motivati.