Secondo parziale di Geometria e Algebra (Informatica) 16-12-2016-C

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare così definita

$$f((x,y,z)) = (-x+2y, x+y-z, x+ky-2z) \qquad \forall (x,y,z) \in \mathbf{R}^3, k \in \mathbf{R}$$

a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$ trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) ed I_f (immagine di f).

b) Discutere, al variare di k, iniettività e suriettività di f.

c) Stabilire se $\mathbf{w} = (1, \alpha, 3)$ appartiene ad I_f ($\alpha \in \mathbf{R}$).

2) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica) .

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U.

b) Detta f_A la funzione lineare associata ad A rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$, trovare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $f_A((1,1,1))$ sia ortogonale al vettore $\mathbf{v} = (\alpha, -2, -1)$.

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & \alpha & 2 \\ 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $\alpha = -1$

a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile.

b) Per tali valori diagonalizzarla.

4) a) Trovare l'equazione del cono che proietta la conica $\mathcal{C} \equiv \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ dal vertice $V(0,0,2)$.

b) Trovare i vertici di $\mathcal{C}$.

5) Trovare la funzione lineare $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $f((1,2)) = (3,-1)$ e $\mathbf{v} = (1,3)$ è un autovettore di f associato all'autovalore $\lambda = 2$.

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente giustificati.