

Compito di Geometria e Algebra per Ingegneria dell'Informazione 26-01-2010

1) Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f((x, y, z)) = (2x - z, x - y + 2z, x + ky - 3z) \quad (k \in \mathbf{R})$$

Al variare di k in \mathbf{R}

- a) trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) e di I_f (immagine di f),
- b) stabilire se f é iniettiva o suriettiva,
- c) discutere l'appartenenza di $\mathbf{v} = (5, 4, \alpha)$ ad I_f ($\alpha \in \mathbf{R}$).

2) Usando la riduzione a scala, discutere i seguenti sistemi lineari:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + \alpha z = 0 \\ y - 3z = \beta \\ 4x - y - z = 6 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} x - y + \alpha z = 0 \\ y - 3z + \beta t = 0 \\ 4x - y - z + 6t = 0 \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$$

3) Sia $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

- a) Determinare gli eventuali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile e per tali valori diagonalizzarla.
- b) Trovare la prima riga di A^{-1} (inversa di A).

4) Sia $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

- a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U .
- b) Dire se A è definita positiva e in caso affermativo calcolare determinante e traccia di \sqrt{A} .
- c) Trovare la forma quadratica $Q((x, y, z))$ associata ad A .

5) Determinare:

- a) la minima distanza tra le rette

$$r \equiv \begin{cases} x = 3y \\ z = 2y \end{cases} \quad \text{e} \quad s \equiv \begin{cases} x = 3y + 4 \\ z = 2y + 1 \end{cases},$$

- b) le equazioni ridotte della retta parallela al piano $\pi \equiv 3x + y - 4z + 1 = 0$, perpendicolare all'asse x e passante per il punto $P(3, -4, -1)$,
- c) $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $P(1, \alpha, 1)$ sia il centro delle eventuali sfere tangenti il piano $\pi_1 \equiv 6x + 2y + 3z - 7 = 0$ e di raggio uguale a 2.

6) Ridurre a forma canonica e studiare la conica $\mathcal{C} \equiv x^2 + 6x - y + 10 = 0$.