

Zadanie 4.7

Rozwiązać równanie $2 \leq |4 - x| < 7$

Rozwiązanie

Dziedziną nierówności $2 \leq |4 - x| < 7$ jest cały zbiór \mathbb{R} , czyli wszystkie liczby rzeczywiste. Nierówność nie zawiera żadnych operacji, które ograniczałyby dziedzinę. Wartość bezwzględna $|4 - x|$ jest dobrze zdefiniowana dla wszystkich \mathbb{R} .

Rozpatrywana nierówność jest zapisana w formie złożonej, w której kilka warunków dotyczących jednej zmiennej jest zapisanych w jednym wyrażeniu równocześnie, dlatego należy rozpatrzeć dwa warunki dla wartości bezwzględnej w tej nierówności:

$$\begin{cases} |4 - x| \geq 2 \\ |4 - x| < 7 \end{cases}$$

Etap 1

Rozwiązanie nierówności $2 \leq |4 - x| < 7$ rozpoczynamy od przypomnienia definicji wartości bezwzględnej która mówi, że dla wartości bezwzględnej $|a|$ otrzymujemy:

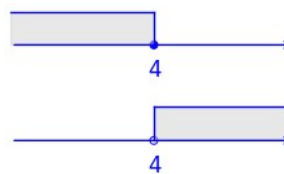
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{gdy } a \geq 0, \\ -a, & \text{gdy } a < 0. \end{cases}$$

W naszej nierówności odpowiednikiem a z definicji jest $4 - x$, dlatego dla wartości wyrażenia $|4 - x|$ mamy:

$$|4 - x| = \begin{cases} 4 - x, & \text{gdy } 4 - x \geq 0, \\ -4 + x, & \text{gdy } 4 - x < 0. \end{cases}$$

stąd uzyskujemy:

$$|4 - x| = \begin{cases} 4 - x, & \text{gdy } x \leq 4, \\ -4 + x, & \text{gdy } x > 4. \end{cases}$$



Etap 2 - analiza pierwszego warunku dla wartości bezwzględnej $|4 - x|$ gdy $|4 - x| \geq 2$
Rozwiązujemy dwa przypadki pierwszego warunku (dla $x \leq 4$ oraz $x > 4$):

$$\begin{aligned} 4 - x &\geq 2 \\ -x &\geq 2 - 4 \\ -x &\geq -2 \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

\vee

$$\begin{aligned} -4 + x &\geq 2 \\ x &\geq 2 + 4 \\ x &\geq 6 \end{aligned}$$



$$x \in (-\infty, 2]$$



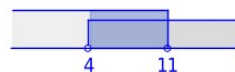
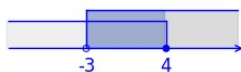
$$x \in [6, +\infty)$$

Ostatecznie otrzymujemy jako rozwiązanie $|4 - x| \geq 2$, że $x \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$



Etap 3 - analiza drugiego warunku dla wartości bezwzględnej $|4 - x|$ czyli $|4 - x| < 7$
Rozwiązujemy dwa przypadki drugiego warunku (dla $x \leq 4$ oraz $x > 4$):

$$\begin{array}{ll}
 4 - x < 7 & \\
 -x < 7 - 4 & \\
 -x < 3 & \\
 x > -3 & \\
 \hline
 x \in (-3, 4] &
 \end{array}
 \quad \vee \quad
 \begin{array}{ll}
 -4 + x < 7 & \\
 x < 7 + 4 & \\
 x < 11 & \\
 \hline
 x \in (4, 11) &
 \end{array}$$

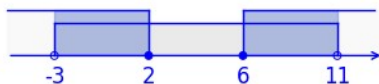


Ostatecznie otrzymujemy jako rozwiązanie $|4 - x| < 7$, przedział $x \in (-3, 11)$



Etap 4 - wyznaczenie części wspólnej dla obu warunków nierówności $2 \leq |4 - x| < 7$

W celu wyznaczenia części wspólnej obu warunków nierówności $2 \leq |4 - x| < 7$ nanosimy na oś liczbową przedziały otrzymane z rozwiązań nierówności $|4 - x| \geq 2$ oraz $|4 - x| < 7$, czyli odpowiednio $x \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$ i $x \in (-3, 11)$. Część wspólna czyli $x \in (-3, 2] \cup [6, 11)$ stanowi rozwiązanie naszej nierówności.



Odpowiedź:

Rozwiązaniem nierówności $2 \leq |4 - x| < 7$ jest:

$$x \in (-3, 2] \cup [6, 11)$$