

Zadanie 4.7

Rozwiązać nierówność $2 \leq |4 - x| < 7$

Rozwiązanie

Dziedziną nierówności $2 \leq |4 - x| < 7$ jest cały zbiór \mathbb{R} , czyli wszystkie liczby rzeczywiste. Nierówność nie zawiera żadnych operacji, które ograniczałyby dziedzinę. Wartość bezwzględna $|4 - x|$ jest dobrze zdefiniowana dla wszystkich \mathbb{R} .

Rozpatrywana nierówność jest zapisana w formie złożonej, w której kilka warunków dotyczących jednej zmiennej jest zapisanych w jednym wyrażeniu równocześnie, dlatego należy rozpatrzyć dwa warunki dla wartości bezwzględnej w tej nierówności:

$$\begin{cases} |4 - x| \geq 2, \\ |4 - x| < 7. \end{cases}$$

Etap 1

Rozwiązanie nierówności $2 \leq |4 - x| < 7$ rozpoczynamy od przypomnienia definicji wartości bezwzględnej, która mówi, że dla wartości bezwzględnej $|a|$ otrzymujemy:

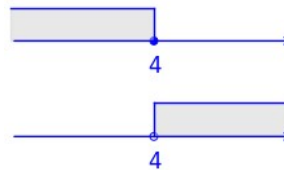
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{gdy } a \geq 0, \\ -a, & \text{gdy } a < 0. \end{cases}$$

W naszej nierówności odpowiednikiem a z definicji jest $4 - x$, dlatego dla wartości wyrażenia $|4 - x|$ mamy:

$$|4 - x| = \begin{cases} 4 - x, & \text{gdy } 4 - x \geq 0, \\ -4 + x, & \text{gdy } 4 - x < 0. \end{cases}$$

Stąd uzyskujemy:

$$|4 - x| = \begin{cases} 4 - x, & \text{gdy } x \leq 4, \\ -4 + x, & \text{gdy } x > 4. \end{cases}$$



Etap 2 — analiza pierwszego warunku dla wartości bezwzględnej $|4 - x|$ gdy $|4 - x| \geq 2$
Rozwiązujemy dwa przypadki pierwszego warunku (dla $x \leq 4$ oraz $x > 4$):

1° dla $x \leq 4$

2° dla $x > 4$

$$\begin{aligned} 4 - x &\geq 2 \\ -x &\geq 2 - 4 \\ -x &\geq -2 \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

∨

$$\begin{aligned} -4 + x &\geq 2 \\ x &\geq 2 + 4 \\ x &\geq 6 \end{aligned}$$



$$x \in (-\infty, 2]$$



$$x \in [6, +\infty)$$

Ostatecznie otrzymujemy jako rozwiązanie $|4 - x| \geq 2$, że $x \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$.



Etap 3 — analiza drugiego warunku dla wartości bezwzględnej $|4 - x|$ czyli $|4 - x| < 7$
Rozwiązujemy dwa przypadki drugiego warunku (dla $x \leq 4$ oraz $x > 4$):

1° dla $x \leq 4$

2° dla $x > 4$

$$4 - x < 7$$

$$-x < 7 - 4$$

$$-x < 3$$

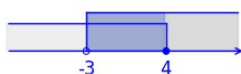
$$x > -3$$

∨

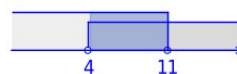
$$-4 + x < 7$$

$$x < 7 + 4$$

$$x < 11$$

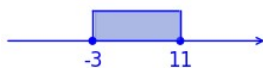


$$x \in (-3, 4]$$



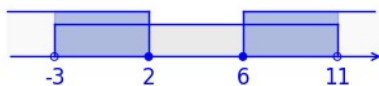
$$x \in (4, 11)$$

Ostatecznie otrzymujemy jako rozwiązanie $|4 - x| < 7$, przedział $(-3, 11)$.



Etap 4 — wyznaczenie części wspólnej dla obu warunków nierówności $2 \leq |4 - x| < 7$

W celu wyznaczenia części wspólnej obu warunków nierówności $2 \leq |4 - x| < 7$ nanosimy na oś liczbową otrzymane rozwiązania nierówności $|4 - x| \geq 2$ oraz $|4 - x| < 7$, czyli odpowiednio przedziały $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$ i $(-3, 11)$. Część wspólna czyli $(-3, 2] \cup [6, 11)$ stanowi rozwiązanie naszej nierówności.



Odpowiedź:

Rozwiązaniem nierówności $2 \leq |4 - x| < 7$ jest:

$$x \in (-3, 2] \cup [6, 11).$$

Wszystkie stworzone i wykorzystane w tym projekcie pliki oraz kod, zostały uaktualnione i są dostępne na GitHub. Wynikowy plik pdf znajduje się w katalogu 'out' repozytorium Pietruczuk_GR2.

(https://github.com/Pietruczuk/Pietruczuk_GR2)