

### Zadanie 4.7

Rozwiązać równanie  $2 \leq |4 - x| < 7$

#### Rozwiązanie

Dziedziną nierówności  $2 \leq |4 - x| < 7$  jest cały zbiór  $\mathbb{R}$ , czyli wszystkie liczby rzeczywiste. Nierówność nie zawiera żadnych operacji, które ograniczałyby dziedzinę. Wartość bezwzględna  $|4 - x|$  jest dobrze zdefiniowana dla wszystkich  $\mathbb{R}$ .

Rozpatrywana nierówność jest zapisana w formie złożonej, w której kilka warunków dotyczących jednej zmiennej jest zapisanych w jednym wyrażeniu równocześnie, dlatego należy rozpatrzeć dwa warunki dla wartości bezwzględnej w tej nierówności:

$$\begin{cases} |4 - x| \geq 2 \\ |4 - x| < 7 \end{cases}$$

#### Etap 1

Rozwiązanie nierówności  $2 \leq |4 - x| < 7$  rozpoczynamy od przypomnienia definicji wartości bezwzględnej która mówi, że dla wartości bezwzględnej  $|a|$  otrzymujemy:

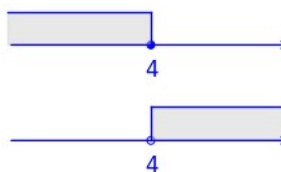
$$|a| = \begin{cases} a, & \text{gdy } a \geq 0, \\ -a, & \text{gdy } a < 0. \end{cases}$$

W naszej nierówności odpowiednikiem  $a$  z definicji jest  $4 - x$ , dlatego dla wartości wyrażenia  $|4 - x|$  mamy:

$$|4 - x| = \begin{cases} 4 - x, & \text{gdy } 4 - x \geq 0, \\ -4 + x, & \text{gdy } 4 - x < 0. \end{cases}$$

stąd uzyskujemy:

$$|4 - x| = \begin{cases} 4 - x, & \text{gdy } x \leq 4, \\ -4 + x, & \text{gdy } x > 4. \end{cases}$$



**Etap 2** - analiza pierwszego warunku dla wartości bezwzględnej  $|4 - x|$  gdy  $|4 - x| \geq 2$   
Rozwiązujemy dwa przypadki pierwszego warunku (dla  $x \leq 4$  oraz  $x > 4$ ):

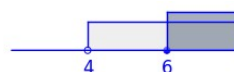
$$\begin{aligned} 4 - x &\geq 2 \\ -x &\geq 2 - 4 \\ -x &\geq -2 \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

$\vee$

$$\begin{aligned} -4 + x &\geq 2 \\ x &\geq 2 + 4 \\ x &\geq 6 \end{aligned}$$



$$x \in (-\infty, 2]$$



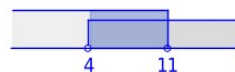
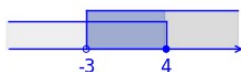
$$x \in [6, +\infty)$$

Ostatecznie otrzymujemy jako rozwiązanie  $|4 - x| \geq 2$ , że  $x \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$



**Etap 3** - analiza drugiego warunku dla wartości bezwzględnej  $|4 - x|$  czyli  $|4 - x| < 7$   
Rozwiązujemy dwa przypadki drugiego warunku (dla  $x \leq 4$  oraz  $x > 4$ ):

$$\begin{array}{ll}
 4 - x < 7 & \\
 -x < 7 - 4 & \\
 -x < 3 & \\
 x > -3 & \\
 \hline
 x \in (-3, 4] &
 \end{array}
 \quad \vee \quad
 \begin{array}{ll}
 -4 + x < 7 & \\
 x < 7 + 4 & \\
 x < 11 & \\
 \hline
 x \in (4, 11) &
 \end{array}$$

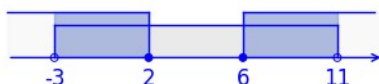


Ostatecznie otrzymujemy jako rozwiązanie  $|4 - x| < 7$ , przedział  $x \in (-3, 11)$



**Etap 4** - wyznaczenie części wspólnej dla obu warunków nierówności  $2 \leq |4 - x| < 7$

W celu wyznaczenia części wspólnej obu warunków nierówności  $2 \leq |4 - x| < 7$  nanosimy na oś liczbową przedziały otrzymane z rozwiązań nierówności  $|4 - x| \geq 2$  oraz  $|4 - x| < 7$ , czyli odpowiednio  $x \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$  i  $x \in (-3, 11)$ . Część wspólna czyli  $x \in (-3, 2] \cup [6, 11)$  stanowi rozwiązanie naszej nierówności.



**Odpowiedź:**

Rozwiązaniem nierówności  $2 \leq |4 - x| < 7$  jest:

$$x \in (-3, 2] \cup [6, 11)$$